17 / 1980

Andrzej Dragon

FENOMENOLOGICZNE KRYTERIUM LOKALNEGO ZAPOCZĄTKOWANIA MAKROPĘTANIA W OŚRODKU PLASTYCZNO-KRUCHYM (SKALOPODOBNYM)

P. 269

WARSZAWA 1980

http://rcin.org.pl

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 kwietnia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 17/1980

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
BIBLIOTEKA

57156

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 1,7. Ark.druk. 2,5.
Oddano do drukarni w maju 1980 r.
Nr zamówienia 398/o/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

http://rcin.org.pl

Andrzej Dragon
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

FENOMENOLOGICZNE KRYTERIUM LOKALNEGO ZAPOCZĄTKOWANIA MAKROPĘKANIA W OŚRODKU PLASTYCZNO-KRUCHYM /SKAŁOPODOBNYM/

1. Wstęp. W konkretnych problemach geomechaniki, inżynierii reaktorowej i przemysłowej należy często uwzględniać możliwość wystąpienia trwałych deformacji górotworu i konstrukcji betonowych wraz z utratą nośności na skutek osłabienia będącego wynikiem rozprzestrzeniania się spękań. Wynikła stąd potrzeba przewidywania niesprężystego zachowania się tych ośrodków w powiązaniu z procesem degradacji, tj. (mikro)pękaniem i zniszczeniem. W pracach [1, 2] podano pewne przykłady niesprężystych modeli ośrodków skałopodobnych w złożonych stanach naprężenia z parametrami degradacji; rozpatrywano procesy natychmiastowe - sprężysto-plastyczne uwzględniając niestateczne /«pokrytyczne»/ zachowanie się ośrodka, a także procesy długotrwałe w ramach modelu pełzania dylatacyjnego. W modelach tych parametr degradacji określany był jako tensor mikroszczelin lub tensor mikrozniszczenia; stanowi on pewną uśrednioną miarę procesu lokalnej destrukcji /«uszkodzenia»/ ośrodka. Parametr ten funkcjonuje równocześnie jako zmienna, określająca stopień wzmocnienia i osłabienia plastycznego ośrodka w odpowiednich, fenomenologicznych związkach sprężysto-plastyczności lub pełzania. Właściwe równanie ewolucji, wiążące przyrost parametru (mikro)zniszczenia z przyrostem odkształceń niesprężystych lub z inną stosowną miarą makroprocesu mechanicznego, nazywane jest tutaj relacją degradacji plastycznej.
W niniejszej pracy relacja ta rozważana jest niejako niezależnie od równań konstytutywnych, a także w znacznie ogólniejszej postaci niż we wspomnianych reprezentacjach modeli niesprężystych. Równanie degradacji plastycznej interesować nas

http://rcin.org.pl

będzie głównie jako związek fenomenologiczny, opisujący ewolucję pola (mikro)uszkodzeń /mikroszczelin/ - ewolucję prowadzącą do inicjacji lokalnego zniszczenia rozumianego jako lokalna redukcja więzów w materiale, w określonym kierunku. Celem niniejszej pracy jest zatem sformułowanie fenomenologicznego kryterium makrozniszczenia w sensie zapoczątkowania zorientowanej makroszczeliny w oparciu o ewolucję pola mikroszczelin, sprzężoną z niesprężystymi deformacjami ośrodka.

Odpowiedni, ogólniejszy od wspomnianych powyżej, model niesprężysty skał sprzężony z ewolucją mikropękania wraz z przejściem do makrozniszczenia podanym w niniejszej pracy, jest przedmiotem oddzielnego studium [3] .

Rozdział 2 zawiera podstawowe definicje oraz zwięzłą motywację i słowne sformułowanie kryterium inicjacji makrozniszczenia.

W rozdziale 3 rozważa się ogólną strukturę relacji degradacji plastycznej i jej przekształcenie /relację odwrotną/ z uwzględnieniem stadium zapoczątkowania zniszczenia. Opisana jest formalna metoda przejścia osobliwego dla operatora degradacji plastycznej, oparta na metodzie podanej przez Tokuokę, [4] dla asymptotycznej transformacji hyposprężystości w «plastyczność» . W istocie, równania plastyczności otrzymane przez Tokuokę wykazują swoiste ograniczenia, np. brak możliwości odciążenia dla tzw. «materiału Misesa» . Naszym zdaniem, formalizm Tokuoki zastosowany do rozważanej w niniejszej pracy transformacji degradacji plastycznej w lokalne makrozniszczenie, zyskuje głębszą motywację fizyczną niż w swym oryginalnym kontekście. Na przykład, wspomniana powyżej nieodwracalność stanu naprężenia na powierzchni plastyczności, a tym samym brak możliwości odciążenia w obszar, gdzie nie występuje plastyczne płynięcie jest dość niefortunną konsekwencją modelu plastyczności wg Tokuoki. Z drugiej strony, w naszym przypadku podobna niemożność powrotu ze stanów na «powierzchni makrozniszczenia» w przestrzeni parametru degradacji

http://rcin.org.pl

jest całkiem oczywista w kontekście rozpatrywanego zjawiska fizycznego.

Rozdział 4 zawiera dalsze elementy procedury operacyjnej, której celem jest otrzymanie warunku inicjacji zniszczenia w przestrzeni $\underset{\sim}{\varepsilon}$ oraz równania prędkości inicjacji makroszczeliny w pewnym kierunku. Określono też sens poszczególnych składników przestrzeni zerowej operatora degradacji, odpowiadających różnym mechanizmom zapoczątkowania makroszczeliny względem pola mikrouszkodzeń. Rozważa się konkretną formę operatora w przestrzeni opartej na bazie ortogonalnej wektorów własnych tensora degradacji $\underset{\sim}{\varepsilon}$.

Dla szczególnego równania degradacji, sformułowanego na podstawie przesłanek doświadczalnych, wyprowadzono przykładowo /rozdz. 5/ konkretne kryterium zapoczątkowania makrozniszczenia dla tzw. mechanizmu zgodnego kierunek makrozniszczenia, zgodny z dominującą orientacją pola mikrouszkodzeń. Pokazano sens fizyczny wyprowadzonych zależności dla dwu przypadków zniszczenia quasi-jednorodnej próbki.

2. Podstawowe definicje; kryterium inicjacji makrozniszczenia

Degradacją plastyczną lub ogólniej - niesprężystą, nazywa się tutaj proces destrukcji wewnętrznej struktury materiału sprzężony z deformacjami niesprężystymi. Przez ośrodki plastyczno-kruche rozumie się w tym kontekście szeroką klasę materiałów skalnych i skałopodobnych, w których podstawowym mechanizmem wpływającym na wzrost makroskopowych deformacji niesprężystych jest przyrost wewnętrznych mikroszczelin kruchych. Fakt ten uzasadnia równoważne określenie tych ośrodków jako quasi-ciągliwych, przy czym zachowanie quasi-ciągliwe na poziomie makroskopowych odkształceń trwałych występuje przede wszystkim w warunkach trajektorii naprężenia odpowiadających jedno- i wieloosiowemu ściskaniu, ewentualnie w stanach mieszanych rozciąganie-ściskanie. Dla porównania, w typowych

http://rcin.org.pl

ośrodkach ciągliwych /np. metalach/ wewnętrzne mechanizmy rządzące wzrostem deformacji niesprężystych, czyli mechanizmy degradacji są związane z ruchami dyslokacji w formie poślizgów na dopuszczalnych płaszczyznach wewnątrz ziaren, czasem też z innymi zjawiskami /dyfuzja, przemiany fazowe/ . Mikrouszkodzenia kruche na granicach ziaren lub faz występują zwykle w bardziej zaawansowanych stadiach odkształceń niesprężystych.

Typowa krzywa naprężenie-odkształcenie dla próbki ściskanej z ośrodka plastyczno-kruchego charakteryzuje się początkowym stadium - w przybliżeniu sprężystym, po którym, poczynając od wartości 0.4 ÷ 0.7 naprężenia ekstremalnego, występują odkształcenia sprężyste i nieodwracalne, którym towarzyszy przyrost mikrospękań i dodatnia, nieodwracalna, względna dylatacja objętości [5, 6] . Szczególnie intensywny wzrost mikroszczelin występuje w otoczeniu ekstremum naprężenia; proces ten, osłabiający próbkę, prowadzi do powstania makropęknięcia - pojedynczego lub kilku .

Tymczasem z drugiej strony, w warunkach dwu- lub trójosiowego ściskania obserwuje się nadal rozległą fazę niestateczną - znacznemu przyrostowi zewnętrznych odkształceń towarzyszy spadek naprężenia. Na tym tle uściślenia wymaga sens pojęcia «inicjacja makrozniszczenia» , używanego w niniejszej pracy. Mówiąc to będziemy tu mieć na myśli powstanie pierwszego makropęknięcia w wyniku stopniowego wzrostu mikrouszkodzeń /mikropęknięć/ . Może to nastąpić stosunkowo wcześnie. Jak należy wówczas interpretować rozległą fazę niestateczną i pojęcie «całkowitego zniszczenia», utożsamianego niekiedy z zakończeniem odkształcania niestatecznego lub jego asymptotyczną zbieżnością do nieskończoności ?

Trzeba tu zwrócić przede wszystkim uwagę na istotne przeobrażenie próbki od momentu powstania makropęknięcia. Do tej chwili można było uważać ją za prawie jednorodną, przy czym chodzi tu zarówno o jednorodność stanu naprężenia, prędkości odkształcenia jak i przybliżoną jednorodność pola mikropęk-

http://rcin.org.pl

nięć. W tym sensie, zachowanie się próbki do momentu inicjacji makropęknięcia reprezentuje lokalne zachowanie się materiału./zachowanie elementarnej objętości charakterystycznej, traktowanej jako punkt materialny w mechanice continuum/. Przy ciśnieniu bocznym w kierunku otwarcia makropęknięcia, próbka nadal zachowuje pozorną spójność, ale pracuje raczej jako układ "bloków" i "bloczków" w miarę dalszej redukcji więzów, aż dalsze zaawansowane deformacje niestateczne spowodują znaczne rozdrobnienie. Przy dużym zaawansowaniu przemieszczeń pokrytycznych mamy niekiedy do czynienia z ośrodkiem pokruszonym. W takim razie, choć stadia pośrednie trwałych deformacji próbki po powstaniu pierwotnego makropęknięcia mogą być określone jak dotąd przez degradację /mikropękanie/ w obrębie oddzielnych bloczków, są one przede wszystkim wynikiem wzajemnej zmiany względnych konfiguracji samych bloczków. W tym sensie otwieranie się /i przesuw/ powstałych makrospękań jest traktowane jako proces deformacji C-E /rys.1/ mierzonej na ściankach próbki (!) Mamy tu więc do czynienia z innym jakościowo materiałem niż na początku. Jest to materiał niejednorodny - warunek pseudojednorodności jest nadal spełniony jedynie na poziomie "bloczka", czyli fragmentu próbki - i na tym poziomie w dalszym ciągu zasadniczy mechanizm degradacji plastycznej jest podobny jak dla początkowej próbki, można więc na tym poziomie kolejno rozpatrywać dalszą redukcję więzów. Odwrotnie, jeśli chcielibyśmy nadal operować globalnym pojęciem próbki, można by szukać wielkości skali charakterystycznej dla agregatu układu "bloczków", tj. dla skruszonego materiału. Wielkość ta zależałaby od stopnia pokruszenia i byłaby tym mniejsza, im mniejsze są poszczególne fragmenty / oddzielone «ziarna»/. Zaawansowana krzywa niestateczna to na ogół krzywa globalna dla takiego agregatu; zakończenie procesu niestatecznego lub jego asymptotyczne przedłużenie do nieskończoności jest utożsamiane ze zniszczeniem całkowitym.

http://rcin.org.pl

Reasumując stwierdzamy, że całkowita krzywa naprężenie - - odkształcenie wraz z fazą niestateczną jest umowną krzywą opisującą po drodze, w swym stadium nieostatecznym, jak gdyby różne materiały. W niniejszej pracy interesuje nas początek zniszczenia jako inicjacja makropęknięcia w pewnym kierunku, w elementarnej objętości rozumianej jako element dotąd spójny /tj. posiadający jedynie szczeliny wewnętrzne zwane tu mikroszczelinami/ o wymiarze charakterystycznym a. Element ten reprezentuje punkt materialny w sensie mechaniki ośrodków ciągłych. Przyjmujemy sprężysto - plastyczny model ośrodka i zakładamy, że istnieje addytywność sprężystej i plastycznej części tensora prędkości deformacji $\underline{D}$; $D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$, /gdzie wektor $\underline{v}$ określa lokalne pole prędkości/:

$$/2.1/ \qquad \underline{D} = {}_{(e)}\underline{D} + {}_{(p)}\underline{D} \quad ; \qquad D_{ij} = {}_{(e)}D_{ij} + {}_{(p)}D_{ij} .$$

Odpowiednie równanie konstytutywne ma postać /w składowych/:

$$/2.2/ \qquad D_{ij} = L_{ijkl}\,\overset{\nabla}{T}_{kl} + \Lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{T}_{ij}} \quad ; \qquad \tilde{T}_{ij} = T_{ij} - \Sigma_{ij}$$

gdzie $\underline{T}$ jest tensorem naprężenia Cauchy, $\overset{\nabla}{\underline{T}}$ - strumieniem Zaremby-Jaumanna:

$$\overset{\nabla}{T}_{ij} = \dot{T}_{ij} - W_{im}T_{mj} + T_{im}W_{mj} \quad ; \qquad W_{mj} = \frac{1}{2}(v_{m,j} - v_{j,m}).$$

L_{ijkl} reprezentuje składowe macierzy podatności sprężystej; $g = g(\tilde{T}_{ij}, \alpha) \leq 0$ jest potencjałem plastycznym, zaś Σ_{ij} , α opisują wzmocnienie/osłabienie plastyczne i zależą od składowych tensora wewnętrznych mikrouszkodzeń /mikroszczelin/ Φ_{ij} , por. [3] . Wielkość Λ jest mnożnikiem skalarnym zależnym od historii i aktualnego stanu naprężenia. Tensor /mikro/szczelin $\underline{\Phi}$ należy, podobnie jak $\underline{D}, {}_{(e)}\underline{D}, {}_{(p)}\underline{D}, \underline{T}, \tilde{\underline{T}}, \overset{\nabla}{\underline{T}}$ etc..., do przestrzeni $\mathcal{V}^2$ tensorów symetrycznych drugiego rzędu z iloczynem wewnętrznym $(\underline{B}, \underline{C}) = \mathrm{tr}(\underline{B}, \underline{C}) = B_{ij}C_{ji}$; $\underline{B}, \underline{C} \in \mathcal{V}^2$ nad przestrzenią wektorów $\mathcal{R}^3$. Strumienie tensorów /mikro/pękania $\overset{\nabla}{\underline{\Phi}}$ oraz $\overset{\nabla}{\underline{\zeta}}$ mają postać analogiczną do pochodnej Jaumanna.

http://rcin.org.pl

Interpretacja miary $\underline{\underline{\Phi}}$ wywodzi się od miar używanych do opisu degradacji struktury w modelach plastyczności polikryształów /por. podsumowanie w pracy Rice'a [7] , a także z definicji podanych przez Vakulenkę i Kaczanowa jra /por. np. [8] /. Przyjmujemy, że tensor $\underline{\underline{\Phi}}$ można interpretować jako gęstość /po objętości elementarnej $V_{el} = a^3$/ symetrycznej części diady $\underline{b} \otimes \underline{n} = b_i n_j \underline{i}_i \otimes \underline{i}_j$, gdzie $\{\underline{i}_i\}$ jest bazą ortonormalną w przestrzeni wektorowej $\mathcal{R}^3$ kartezjańskiego układu współrzędnych; wektor $\underline{b}$ jest sumaryczną, uśrednioną miarą lokalnego kierunkowego naruszenia struktury. Uwzględniając możliwe mechanizmy mikropękania, możemy wyrazić składową tensora $\underline{\underline{\Phi}}$ w postaci sumy:

$$/2.3/ \qquad \Phi_{ij} = \langle \gamma \bar{\mu}_{ij} + \beta \bar{\zeta}_{ij} \rangle = \langle \tfrac{1}{2}\gamma (m_i n_j + m_j n_i) + \beta n_i n_j \rangle ;$$
$$b_i = \beta n_i + \gamma m_i$$

gdzie $\underline{m}$, $\underline{n}$ są odpowiednio jednostkowymi wektorami: stycznym i normalnym do powierzchni mikropęknięcia /por. rys. 2/; wyrażenia $\beta\underline{n}$ i $\gamma\underline{m}$ opisują zatem lokalne mechanizmy naruszenia struktury odpowiadające odpowiednio otwieraniu się wewnętrznych nieciągłości i poślizgom w ich płaszczyznach. Symbol $\langle \ldots . \rangle$ należy rozumieć jako symbol oznaczający, że przeprowadzono odpowiednie uśrednienie w objętości elementarnej, która jest bardzo mała, ale dostatecznie duża dla przyjęcia uśrednionego quasi-jednorodnego przebiegu procesu mechanicznego w jej obrębie. Dalej nie będziemy używać nawiasów i jeśli np. skorzystamy w szczególności z parametru $\underline{\underline{\Phi}} = \langle \beta \bar{\zeta} \rangle$ lub $\underline{\underline{\Phi}} = \langle \gamma \bar{\mu} \rangle$, przyjmiemy oznaczenia $\langle \beta \bar{\zeta} \rangle \equiv \underline{\underline{\zeta}}$, $\langle \gamma \bar{\mu} \rangle \equiv \underline{\underline{\mu}}$. Formułując dalszą teorię, będziemy zakładali stan quasi-jednorodny w objętości elementarnej, scharakteryzowany przez odpowiednie pola stałe dla tej objętości: $\underline{\underline{T}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{\Phi}}$, $\underline{\underline{\dot{\Phi}}}$, gdzie $\underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{\zeta}}$, $\underline{\underline{\dot{\Phi}}} = \underline{\underline{\dot{\mu}}} + \underline{\underline{\dot{\zeta}}}$.

Zgodnie z definicją ośrodka plastyczno-kruchego, podaną na początku tego rozdziału, istnieje współzależność między prędkością deformacji plastycznych, a wzrostem mikrospękań w objętości elementarnej. Odpowiednie równanie /lokalna relacja

http://rcin.org.pl

degradacji plastycznej/ ma postać:

$$/2.4/ \qquad {}_{(P)}\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})\,[\dot{\underset{\sim}{\Phi}}] \;\; ; \;\; {}_{(P)}D_{ij} = A_{ijkl}(\Phi)\,\dot{\Phi}_{kl}$$

gdzie $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi}) \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$, $\underset{\sim}{A} : \dot{\underset{\sim}{\Phi}} \to {}_{(P)}\underset{\sim}{D}$; $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ jest operatorem liniowym na $\mathcal{V}$.

Określimy teraz przesłanki fizykalne związane z przejściem degradacji plastycznej w stan odpowiadający zapoczątkowaniu makropękania. Stan ten zakłóca jednoznaczność odwzorowania /2.4/, gdyż wiąże się z nieodwracalnym naruszeniem makroskopowych więzów w kierunku określonym przez powierzchnię makropęknięcia. Ponieważ rozważamy sytuację lokalnie, w punkcie materialnym, mówimy o lokalnej fizycznej płaszczyźnie makropęknięcia; oddziaływania styczne w tej płaszczyźnie mogą być zredukowane częściowo, oddziaływania normalne do tej płaszczyzny ulegają całkowitej redukcji dla prędkości rozwarcia $\dot{\beta} > 0$. Można zatem stwierdzić w każdym razie, że w płaszczyźnie makropęknięcia wystąpi odciążenie. Oznacza to dla punktu materialnego odciążenie w kierunku określonym przez lokalną płaszczyznę makropęknięcia. Oznacza to równocześnie, że odpowiednie składowe odkształcenia plastycznego dla tej płaszczyzny w punkcie materialnym zostają «zamrożone» na poziomie osiągniętym aż do samego momentu inicjacji; nie nastąpi dalszy wzrost tych odkształceń mimo przyrostu odpowiednich składowych strumienia $\dot{\underset{\sim}{\Phi}}_{ij}$ odpowiadających prędkości inicjacji makropęknięcia. Z punktu widzenia matematycznego oznacza to, że dla pewnego kierunku w przestrzeni fizycznej operator $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ odwzorowuje niezerowe elementy $\dot{\Phi}_{kl}$ w zera ($0 = {}_{(P)}D_{ij}$) . Ponieważ zajmujemy się samym momentem zapoczątkowania makropęknięcia, możemy założyć, że w pozostałych płaszczyznach /prostopadłych do płaszczyzny makropęknięcia/ mechanizmy cząstkowe degradacji nie wykazują podobnej osobliwości /tzn. trwa tam proces degradacji plastycznej/. Oczywiście, istnienie niezerowych elementów $\dot{\underset{\sim}{\Phi}}$ przestrzeni zerowej operatora $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ oznacza, że staje się on operatorem osobliwym. Na tej podstawie możemy sformuło-

http://rcin.org.pl

wać następujące definicje:

1° Niezerowy element jądra $\mathcal{N}$ /przestrzeni zerowej/ operatora degradacji plastycznej $A(\underset{\sim}{\Phi}) : \underset{\sim}{\Phi} \to {}_{(p)}\underset{\sim}{D}$ nazywamy prędkością inicjacji makropęknięcia ${}_{(m)}\underset{\sim}{\Phi}$.

2° Zbiór $\{\underset{\sim}{\Phi}\}$, dla których degradacja plastyczna $A(\underset{\sim}{\Phi})$ staje się osobliwą nazywamy warunkiem /powierzchnią uogólnioną/ inicjacji makropęknięcia $\mathcal{M}$ w przestrzeni tensora mikrouszkodzeń $\underset{\sim}{\Phi}$; powierzchni $\mathcal{M}$ nie należy mylić z powierzchnią fizyczną.

3° Zbiór tensorów $\underset{\sim}{\Phi}$, dla których $A(\underset{\sim}{\Phi})$ jest operatorem regularnym /nieosobliwym/, nazywa się obszarem degradacji plastycznej $\mathcal{D}$. W tym obszarze $\det A(\underset{\sim}{\Phi}) \neq 0$.

4° Ośrodek opisany związkiem konstytutywnym typu /2.2/ nazywa się materiałem plastyczno-kruchym jeśli zachodzi w nim degradacja plastyczna opisana przez relację typu /2.4/, a powierzchnia $\mathcal{M}$ nie jest zbiorem pustym.

Równoczesne wystąpienie 1^0 i 2^0 określa inicjację makropęknięcia.

Zauważmy, że stan inicjacji makropęknięcia określony powyżej jest daleko idącym uogólnieniem znanych koncepcji inżynierskich, wychodzących z elementarnych przesłanek ograniczonej ciągliwości ośrodków skałopodobnych i zakładających, że dany materiał pęka po osiągnięciu pewnej krytycznej, stałej wartości dodatniego odkształcenia trwałego $\epsilon_{(f)}$ w danym kierunku. Oczywiście, takie wartości można w przybliżeniu wyznaczyć jedynie dla stanów jednoosiowych. W ogólności, dla różnych trajektorii naprężenia i odkształcenia, odpowiednie wartości owej «ciągliwości krytycznej» są różne, stąd też wynika m.in. konieczność zastosowania bardziej złożonych, nieliniowych modeli mechanicznych.

3. Odwrotna relacja degradacji dla inicjacji makropęknięcia

Rozważymy ogólną relację degradacji plastycznej w postaci /2.4/ i przedstawimy ją w alternatywnej postaci układu równań,

http://rcin.org.pl

aby następnie otrzymać postać odwrotną, gdzie zmienną niezależną jest pewna wielkość określona m.in. przez prędkość deformacji plastycznej ${}_{(p)}\underset{\sim}{D}$ i gdzie w formie jawnej wydzielona jest część strumienia ${}_{(m)}\underset{\sim}{\Phi}$, odpowiadająca prędkości inicjacji makropęknięcia /nie biorąca udziału w mechanizmie degradacji/. Dla przekształcenia związku /2.4/, wykorzystamy twierdzenie o rozkładzie polarnym automorfizmu $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ i przedstawienie spektralne dla operatora hermitowskiego, [4] .

Jak już powiedziano w rozdz. 2, $\mathcal{V}^6$ jest sześciowymiarową przestrzenią tensorów symetrycznych; operator $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ jako automorfizm w $\mathcal{V}^6$ można przedstawić w postaci iloczynu przekształceń:

$$/3.1/ \qquad \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{\Phi})\,\underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi}) \quad ,$$

gdzie $\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{\Phi})$ jest operatorem ortogonalnym, określonym jednoznacznie w $\mathcal{Z}$, lecz niekoniecznie jednoznacznie w $\mathcal{M}$; $\underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi})$ jest operatorem samosprzężonym, nieujemnie określonym, określonym jednoznacznie zarówno w $\mathcal{Z}$ jak i w $\mathcal{M}$, spełniającym warunki umożliwiające jego rozkład spektralny:

$$/3.2/ \qquad \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi}) = \sum_{\alpha=1}^{6} S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi})\,\underset{\sim}{P}_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}) \text{ , gdzie } \underset{\sim}{P}_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{e}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_\alpha ;\ \alpha = 1,\dots,6$$

W reprezentacji /3.2 / $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{V}^6$; tensory symetryczne należące do $\mathcal{V}^6$ traktowane są jako wektory w bazie $\underset{\sim}{e}_\alpha$: $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{V}^6$, $\underset{\sim}{B} = B_{jk}\,i_j \otimes i_k = b_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$; $B_{jk} = B_{kj}$, $j,k = 1,2,3$; $\alpha = 1,\dots,6$. Baza taka istnieje, bowiem twierdzenie o rozkładzie spektralnym można wysłowić m.in. jako twierdzenie o istnieniu bazy ortogonalnej w przestrzeni $\mathcal{V}^6$, w której działa endomorfizm $\underset{\sim}{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^6;\mathcal{V}^6)$, [9] . Baza ta składa się z własnych wektorów endomorfizmu. Operatory $\underset{\sim}{P}_\alpha = \underset{\sim}{e}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,6$ są rzutami prostopadłymi $\mathcal{V}^6$ na $\mathcal{V}^6(S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}))$, gdzie $S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}) \geq 0$ są wartościami własnymi operatora $\underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi})$; dla ustalonego α $\mathcal{V}^6(S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}))$ jest (pod)przestrzenią własną $\mathcal{V}^6$, odpowiadającą odpowiedniej wartości własnej S_α . Operatory $\underset{\sim}{P}_\alpha$; $\alpha = 1,\dots,6$ posia-

http://rcin.org.pl

dają następujące własności: $\sum_{\alpha=1}^{6} \underset{\sim}{P}_\alpha = \underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{P}_\alpha^2 = \underset{\sim}{P}_\alpha$, $\underset{\sim}{P}_\alpha = \underset{\sim}{P}_\alpha^T$, $\underset{\sim}{P}_\alpha \underset{\sim}{P}_\beta = 0$ gdy $\alpha \neq \beta$, co łatwo sprawdzić w naszym przypadku posługując się definicją /3.2/$_2$. Z definicji tej wynika również fakt, że poszczególne elementy bazy $\underset{\sim}{e}_\alpha$ zależą od tensora $\underset{\sim}{\Phi}$.

Na podstawie /3.1/ relacja degradacji przyjmuje postać:

/3.3/ $$ {}_{(p)}\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{\Phi})\, \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi})\, [\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] \ . $$

Działając na obie strony operatorem $\underset{\sim}{Q}^T(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{Q}^{-1}(\underset{\sim}{\Phi})$ otrzymujemy

$$ \underset{\sim}{Q}^T[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}] = \underset{\sim}{S}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] = \sum_{\alpha=1}^{6} S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi})\, \underset{\sim}{e}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_\alpha [\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] \ . $$

Wykonując operację $\underset{\sim}{e}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_\alpha [\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}]$ w $\mathcal{V}$ mamy następnie:

/3.3/' $$ \underset{\sim}{Q}^T[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}] = \sum_{\alpha=1}^{6} S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi})\, (\underset{\sim}{e}_\alpha , \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})\, \underset{\sim}{e}_\alpha \ . $$

Nasuwając sześciokrotnie wektor $\underset{\sim}{e}_\alpha$ /czyli mnożąc skalarnie obie strony /3.3/' przez $\underset{\sim}{e}_\alpha$, kolejno dla każdego α: $\alpha = 1$, $\alpha = 2, \ldots, \alpha = 6$ / otrzymujemy układ sześciu równań, równoważny relacji degradacji plastycznej /2.4/:

/3.4/ $$ h_\alpha = S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi})\, f_\alpha \qquad \text{/nie sumować po } \alpha \text{ /} $$

gdzie

/3.5/ $$ \begin{cases} h_\alpha \equiv (\underset{\sim}{Q}^T[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}] , \underset{\sim}{e}_\alpha) = (\underset{\sim}{R} , \underset{\sim}{e}_\alpha) \ ; \ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{Q}^T[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}] \\ f_\alpha \equiv (\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} , \underset{\sim}{e}_\alpha) = (\underset{\sim}{e}_\alpha , \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) \end{cases} $$

Wykorzystując istnienie kanonicznego izomorfizmu $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V}) \to \check{\mathcal{T}}_2(\mathcal{V})$, gdzie $\check{\mathcal{T}}_2(\mathcal{V})$ jest przestrzenią tensorów drugiego rzędu jako funkcji biliniowych nad przestrzenią wektorową $\mathcal{V}$ można /3.5/$_1$ wyrazić w alternatywnej postaci:

/3.6/ $$ h_\alpha = (\underset{\sim}{Q}^T[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}], \underset{\sim}{e}_\alpha) = ({}_{(p)}\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{Q}[\underset{\sim}{e}_\alpha]) = \underset{\sim}{Q}\,[{}_{(p)}\underset{\sim}{D} , \underset{\sim}{e}_\alpha] \ , $$

http://rcin.org.pl

gdzie w ostatnim wyrażeniu po prawej stronie $\underline{Q}$ występuje jako funkcja biliniowa /w dwu poprzednich formułach jako endomorfizm w $\mathcal{V}^p$/; nawias prostokątny oznacza w tym przypadku iloczyn kartezjański elementów przestrzeni $\mathcal{V}^p$.

Degradacja $\underline{A}(\underline{\Phi})$ jest nieosobliwym /regularnym/ operatorem w obszarze $\mathcal{D}$ i osobliwym na powierzchni /warunku/ inicjacji makropęknięcia $\mathcal{M}(\underline{\Phi})$. W tym ostatnim przypadku, jak już powiedziano powyżej, operator $\underline{Q}(\underline{\Phi})$ nie jest jednoznacznie określony. Nie stanowi to jednak przeszkody w dalszym operowaniu wyprowadzonymi tu reprezentacjami pod warunkiem wydzielenia niezerowych elementów jądra $\mathcal{N}$ degradacji plastycznej. Operator $\underline{O}(\underline{\Phi})$ ze względu na ortogonalność jest operatorem nieosobliwym /regularnym/, tzn. jego jądro zawiera tylko element zerowy. Osobliwość degradacji $\underline{A}(\underline{\Phi})$ na $\mathcal{M}$ przenosi się więc całkowicie na operator $\underline{S}(\underline{\Phi})$, który jest określony jednoznacznie i działa, w naszym przypadku, w pierwszej kolejności na elementy $\underline{\Phi} \in \mathcal{V}^p$. Jeśli w tym ostatnim zbiorze istnieją niezerowe elementy należące do jądra $\mathcal{N}(\underline{A}(\underline{\Phi}))$, a więc do jądra operatora $\underline{S}(\underline{\Phi})$, zostaną one przezeń przekształcone w element zerowy ${}_{(p)}D_{ij} = 0$, który jest jedynym elementem jądra operatora $\underline{Q}(\underline{\Phi})$, zgodnie z jego regularnością. Oznacza to, że choć operator $\underline{Q}(\underline{\Phi})$ nie jest w ogólności jednoznacznie zdefiniowany na $\mathcal{M}(\underline{\Phi})$, to jest on zdefiniowany jednoznacznie przynajmniej w zakresie działania operatora $\underline{S}$ /por. m.in. zwięzły wniosek na ten temat w pracy [4], s.243/. Oznacza to w konsekwencji, że wielkości skalarne h_α $(\alpha=1,\ldots,6)$ - wyznaczone przez układ równań /3.4/ równoważny relacji degradacji - są zdefiniowane jednoznacznie względem ${}_{(p)}\underline{D}$ dla indeksów α, dla których $S_\alpha > 0$ także w przypadku osobliwości /1°, 2°/, a więc dla inicjacji makropęknięcia. W ten sposób wykazaliśmy formalnie słuszność wniosku sformułowanego w rozdz. 2, który, w bardziej precyzyjnej formie, mówi, że w momencie inicjacji makropęknięcia, w kierunkach $\underline{e}_\alpha$ odpowiadającym dodatnim wartościom własnym S_α trwa nadal proces degradacji plastycznej. Pokażemy to

http://rcin.org.pl

teraz w sposób ścisły. Mamy $S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}) > 0$ w obszarze $\mathcal{D}$ dla $\alpha = 1, \ldots, 6$ oraz

/3.7/ $$\prod_{\alpha=1}^{6} S_\alpha(\underset{\sim}{\Phi}) = 0 \qquad \text{dla} \quad \underset{\sim}{\Phi} \in \mathcal{M} \quad \text{/osobliwość/}$$

Rozważmy kolejno dwa przypadki: /a/ jedna i tylko jedna wartość własna S_r równa jest zero w punkcie $\underset{\sim}{\Phi}$ na $\mathcal{M}$, /b/ kilka wartości własnych równa się równocześnie zero.

/a/ Przypadek ten oznacza istnienie jednej powierzchni inicjacji makrozniszczenia w punkcie $\underset{\sim}{\Phi}$ w przestrzeni tensora mikroszczelin. Na podstawie /3.4/ mamy:

/3.8/ $$\begin{cases} S_r(\underset{\sim}{\Phi})\, f_r = h_r \\ S_r(\underset{\sim}{\Phi}) = 0 \end{cases}$$

stąd $0 f_r = 0$, czyli $h_r = 0$; $f_r = (\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}, \underset{\sim}{e}_r) \neq 0$ i strumień $\underset{\sim}{\Phi} \neq \underset{\sim}{0}$, zgodnie z określeniem prędkości inicjacji makropęknięcia. Warunek $f_r \neq 0$ wymaga zatem - przy ortogonalności bazy $\underset{\sim}{e}_\alpha$ - aby strumień $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} = {}_{(m)}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}$ odpowiadający prędkości inicjacji makropęknięcia był postaci:

/3.9/ $$ {}_{(m)}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} = \varkappa \underset{\sim}{e}_r $$

gdzie $\varkappa$ jest nieokreślonym mnożnikiem skalarnym. Zbadamy konsekwencje /3.8/ dla kierunku $\underset{\sim}{e}_r$, przy czym pamiętajmy, że pojęcie «kierunku» ma tu sens odniesiony do przestrzeni sześciowymiarowej $\mathcal{P}$ i trzeba je jeszcze przetransformować do przestrzeni fizycznej. Wektory $\underset{\sim}{e}_\alpha$ określają bazę dla tensorów symetrycznych rozumianych jako wektory: ${}_{(\varphi)}\underset{\sim}{D} = {}_{(\varphi)}d_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$
Odniesiony do $\mathcal{R}^3$ każdy wektor $\underset{\sim}{e}_\alpha$ jest tensorem prostym drugiego rzędu typu $\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1, \ldots$, etc... Mamy zatem dla kierunku $\underset{\sim}{e}_r$: $f_r \neq 0$, ${}_{(m)}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} = \varkappa \underset{\sim}{e}_r$; oraz na podstawie /3.6/$_3$:

$$h_r = \underset{\sim}{Q}\,[{}_{(\varphi)}\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{e}_r] = 0 \ .$$

http://rcin.org.pl

Wyprowadzimy szczegółową postać lewej strony ostatniej zależności. Otrzymujemy kolejno /obowiązuje sumowanie po powtarzających się wskaźnikach/:

$$\underset{\sim}{Q}[{}_{(p)}\underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{e}_\Gamma] = O_{\alpha\beta}\underset{\sim}{e}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_\beta [{}_{(p)}d_\gamma \underset{\sim}{e}_\gamma, \underset{\sim}{e}_\Gamma] = O_{\alpha\beta\,(p)}d_\gamma (\underset{\sim}{e}_\alpha, \underset{\sim}{e}_\gamma)$$

/3.10/

$$(\underset{\sim}{e}_\beta, \underset{\sim}{e}_\Gamma) = O_{\alpha\beta\,(p)}d_\gamma \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\Gamma} = O_{\gamma\beta\,(p)}d_\gamma \delta_{\beta\Gamma} = O_{\gamma\Gamma\,(p)}d_\gamma =$$

$$= {}_{(p)}d_\Gamma = 0 \ .$$

Zatem konsekwencją zerowania się wielkości skalarnej h_Γ, określonej przez relacje /3.6/ dla kierunku $\underset{\sim}{e}_\Gamma$ inicjacji makropęknięcia zgodnie z /3.9/, jest znikanie odpowiedniej składowej prędkości deformacji plastycznej ${}_{(p)}d_\Gamma$, zgodnie z postulatem o redukcji więzów z rozdz.2.

Uwzględniwszy /3.9/ tensor $\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{V}^\rho$ ma następującą reprezentację wektorową w ortonormalnej bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$:

$$\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}} = \sum_{\substack{\beta \\ \beta\neq\Gamma}} \overset{\vee}{f}_\beta \underset{\sim}{e}_\beta + \varkappa \underset{\sim}{e}_\Gamma \ . \qquad /3.11/$$

Degradacja plastyczna opisana jest przez układ równań /3.4/, za wyjątkiem równania opatrzonego indeksem $\alpha = \Gamma$, dla którego zachodzi /3.8/, /3.10/. Układ ten można przedstawić w postaci:

$$\begin{cases} S_1^{-1}(\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}})\, h_1 = f_1 \\ S_2^{-1}(\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}})\, h_2 = f_2 \\ \vdots \\ \text{etc...} \ /\text{za wyjątkiem } \alpha = \Gamma\ / \end{cases} \qquad /3.12/$$

Lecz wiemy, że $f_\alpha = (\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}}, \underset{\sim}{e}_\alpha)$, więc, wykorzystując reprezentację /3.11/, otrzymujemy, że dla ustalonego α odpowiedni iloczyn wewnętrzny równa się składowej $\overset{\vee}{f}_\alpha$:

$$f_\alpha = (\sum_{\substack{\beta \\ \beta\neq\Gamma}} \overset{\vee}{f}_\beta \underset{\sim}{e}_\beta + \varkappa \underset{\sim}{e}_\Gamma \ , \ \underset{\sim}{e}_\alpha) = \overset{\vee}{f}_\alpha \ .$$

http://rcin.org.pl

Relacje /3.12/ można więc przedstawić w następującej formie:

$$/3.12/' \quad \begin{cases} S_1^{-1}(\underset{\sim}{\Phi})\, h_1 = \overset{v}{\varphi}_1 \\ S_2^{-1}(\underset{\sim}{\Phi})\, h_2 = \overset{v}{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \text{etc...} \quad /\text{za wyjątkiem } \alpha \neq \Gamma\ / \end{cases}$$

Mnożąc obustronnie każde z równań /3.12/' przez odpowiednie $\underset{\sim}{e}_\alpha$ i dodając stronami, otrzymujemy:

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \Gamma}} S_\alpha^{-1} h_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \Gamma}} \overset{v}{\varphi}_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha \ .$$

Prawa strona ostatniego równania jest równa /por. /3.11// $\overset{v}{\underset{\sim}{\Phi}} - \varkappa \underset{\sim}{e}_\Gamma$, stąd mamy:

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \Gamma}} S_\alpha^{-1} h_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha = \overset{v}{\underset{\sim}{\Phi}} - \varkappa \underset{\sim}{e}_\Gamma \ ,$$

i ostatecznie

$$/3.13/ \qquad \overset{v}{\underset{\sim}{\Phi}} = \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \Gamma}} S_\alpha^{-1} h_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha + \varkappa \underset{\sim}{e}_\Gamma \ .$$

Jest to poszukiwana relacja odwrotna degradacji plastycznej z wydzieloną prędkością inicjacji makropęknięcia dla pojedynczej powierzchni inicjacji $S_\Gamma = 0$ w punkcie $\underset{\sim}{\Phi} \in \mathcal{M}$.

/b/ Dla przypadku zerowania się kilku $\Gamma = 1, \dots, \varrho$ wartości własnych:

$$S_\Gamma = 0 \ , \quad \Gamma = 1, \dots, \varrho \ ; \quad \varrho < 6$$

odpowiadające im wielkości h_Γ zerują się i otrzymujemy związek analogiczny do /3.13/ w postaci:

$$/3.14/ \qquad \overset{v}{\underset{\sim}{\Phi}} = \sum_{\alpha=\varrho+1}^{6} S_\alpha^{-1} h_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha + \sum_{\Gamma=1}^{\varrho} \varkappa_\Gamma \underset{\sim}{e}_\Gamma \ ,$$

gdzie tym razem prędkość inicjacji makropęknięcia wyraża się

http://rcin.org.pl

wzorem:

$$/3.15/ \qquad {}^{(m)}\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}} = \sum_{r=1}^{\rho} \kappa_r \underset{\sim}{e}_r \ .$$

Porównując /3.9/ i /3.15/ stwierdzamy, że dla $\rho = 1$ strumień inicjacji makropęknięcia ${}^{(m)}\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}}$ jest równoległy do kierunku głównego $\underset{\sim}{e}_r$ samosprzężonej części $\underset{\sim}{S}$ operatora degradacji plastycznej $\underset{\sim}{A}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$. Przypadek równoczesnego znikania kilku wartości własnych samosprzężonej części degradacji plastycznej odpowiada $\rho > 1$ powierzchniom inicjacji w punkcie $\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{M}$; wówczas strumień inicjacji makropęknięcia może mieć dowolny kierunek wyznaczony przez $\rho > 1$ osi głównych $\underset{\sim}{S}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$.

4. Elementy procedury operacyjnej. Reprezentacje w przestrzeni $\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}}$.

Przechodząc do procedury przydatnej do praktycznego wyznaczania kryteriów inicjacji makropęknięcia i odpowiednich równań dla strumienia inicjacji rozważymy prosty - ale ważny z praktycznego punktu widzenia - rozkład przestrzeni $\mathcal{V}$. Rozpatrujemy w tym momencie przestrzeń $\mathcal{V}$ jako zbiór tensorów symetrycznych drugiego rzędu działających na elementy z przestrzeni wektorowej $\mathcal{R}^3$; $\mathcal{V} = \mathcal{T}_2(\mathcal{R}^3)$. Uprzednio rozważaliśmy elementy przestrzeni $\mathcal{V}$ jako wektory pod działaniem operatorów liniowych $\underset{\sim}{A}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$, $\underset{\sim}{Q}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$, $\underset{\sim}{S}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$. Operatory te /dzięki istnieniu odpowiedniego izomorfizmu/ mogły być traktowane - tak jak np. $\underset{\sim}{Q}(\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}})$ w /3.6/$_3$ - jako tensory rzędu drugiego - funkcje bilinio-we na $\mathcal{V}$ - należące do przestrzeni $\check{\mathcal{T}}_2(\mathcal{V})$; względem przestrzeni wektorów $\mathcal{R}^3$ są to tensory rzędu czwartego należące do $\check{\mathcal{T}}_4(\mathcal{R}^3)$. Symbol "$\check{}$" nad literą $\mathcal{T}$ ma odróżniać te ostatnie tensory od tensorów - elementów przestrzeni $\mathcal{V}$ działających na $\mathcal{R}^3$.

Określimy podprzestrzeń $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ jako zbiór elementów /tensorów symetrycznych/ mających te same kierunki główne jak $\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}}$. Przyjmiemy oznaczenie $\mathcal{U} = \mathcal{V}_{\overset{*}{\underset{\sim}{\Phi}}}$. W oparciu o twierdzenie algebry mówiące, że jeśli $\mathcal{U}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{V}$ wówczas /a/

http://rcin.org.pl

dopełnienie ortogonalne $\mathcal{U}$ oznaczone jako $\mathcal{U}^{\perp}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{V}$, /b/ $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$, - otrzymujemy następujący, jednoznaczny i niezmienniczy rozkład $\mathcal{V}$:

$$/4.1/ \qquad \mathcal{V} = \mathcal{V}_V(\underset{\sim}{\Phi}) \oplus \mathcal{V}_T(\underset{\sim}{\Phi}) \ .$$

Zgodnie z definicją dopełnienia ortogonalnego, elementy należące do $\mathcal{U}^{\perp} = \mathcal{V}_T(\underset{\sim}{\Phi})$ są ortogonalne względem elementów $\mathcal{V}_V(\underset{\sim}{\Phi})$, tzn. względem wszystkich elementów w postaci tensorów prostych $\underset{\sim}{v} \otimes \underset{\sim}{v}$, gdzie $\underset{\sim}{v}$ jest dowolnym wektorem własnym /głównym/ $\underset{\sim}{\Phi}$. Można także udowodnić [4], że dla transformacji typu $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}]$ w przestrzeni tensorów symetrycznych $\mathcal{V}$ zachodzą relacje:

/a/ jeśli $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{V}_V(\underset{\sim}{\Phi})$ to $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] \in \mathcal{V}_V(\underset{\sim}{\Phi})$

/b/ jeśli $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{V}_T(\underset{\sim}{\Phi})$ to $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] \in \mathcal{V}_T(\underset{\sim}{\Phi})$.

Na podstawie /4.1/ dla dowolnego $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{V}$ mamy jednoznaczny rozkład

$$/4.2/ \qquad \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}_V \oplus \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}_T \ ,$$

któremu odpowiada rozkład degradacji plastycznej $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi}) \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{V})$ w postaci:

$$/4.3/ \qquad \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] = \underset{\sim}{A}_V(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}_V] + \underset{\sim}{A}_T(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}_T] \ .$$

$\underset{\sim}{A}_V$ i $\underset{\sim}{A}_T$ są odpowiednio operatorami na podprzestrzeniach $\mathcal{V}_V(\underset{\sim}{\Phi})$ i $\mathcal{V}_T(\underset{\sim}{\Phi})$. Mówimy, że endomorfizm $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ został zredukowany przez podprzestrzenie ortogonalne $\mathcal{V}_V$ i $\mathcal{V}_T$ tak, że zachodzi $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}_V + \underset{\sim}{A}_T$ i dla dowolnego elementu, np. elementu $\underset{\sim}{B}_V \in \mathcal{V}_V$ zachodzi $\underset{\sim}{A}[\underset{\sim}{B}_V] = \underset{\sim}{A}_V[\underset{\sim}{B}_V]$. Odpowiednio do rozkładu /4.2/ istnieje rozkład przestrzeni zerowej $\mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi})$ degradacji plastycznej, wyznaczającej strumień inicjacji makropęknięcia:

$$/4.4/ \qquad \mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi}) = \mathcal{N}_V(\underset{\sim}{\Phi}) \oplus \mathcal{N}_T(\underset{\sim}{\Phi})$$

http://rcin.org.pl

gdzie $\mathcal{N}_V = \mathcal{N}(\underset{\sim}{A}_V(\underset{\sim}{\Phi}))$, $\mathcal{N}_T = \mathcal{N}(\underset{\sim}{A}_T(\underset{\sim}{\Phi}))$.

Rozkład /4.4/ pozwala wyróżnić charakterystyczne mechanizmy inicjacji makropęknięć, związane z ich konfiguracjami w przestrzeni fizycznej względem pól mikroszczelin, których wzrost sprzężony ze wzrostem odkształceń plastycznych doprowadził do inicjacji zniszczenia. Wyróżnimy trzy przypadki:

/a/ $\mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi}) = \mathcal{N}_V(\underset{\sim}{\Phi})$

Jeśli $\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}}_{(m)} \in \mathcal{N}_V$ wówczas, zgodnie z /4.1/, /4.2/ kierunki główne $\underset{\sim}{\Phi}$, $\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}}_{(m)}$ pokrywają się; iloczyn wewnętrzny $(\underset{\sim}{\Phi}, \overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}})$ jest w ogólności różny od zera. Fizycznie oznacza to, że kierunek inicjacji makropęknięcia jest zgodny ze strukturą pola $\underset{\sim}{\Phi}$. Przypadek ten określamy mianem makropęknięcia zgodnego lub makroniszczenia zgodnego. Jest on symbolicznie zilustrowany na rys. 3a/.

/b/ $\mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi}) = \mathcal{N}_T(\underset{\sim}{\Phi})$

Jeśli $\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}}_{(m)} \in \mathcal{N}_T$ to, zgodnie z /4.1/, /4.2/ $\underset{\sim}{\Phi}$ oraz $\overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}}_{(m)}$ należą do podprzestrzeni ortogonalnych; ich iloczyn wewnętrzny /skalarny/ $(\underset{\sim}{\Phi}, \overset{\vee}{\underset{\sim}{\Phi}})$ jest więc tożsamościowo równy zeru /kierunki główne są ortogonalne/. Przypadek ten określamy mianem makropęknięcia ortogonalnego; jest on symbolicznie zilustrowany na rys. 3b/.

/c/ $\mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi}) \in \mathcal{N}_V(\underset{\sim}{\Phi})$ i $\mathcal{N}(\underset{\sim}{\Phi}) \in \mathcal{N}_T(\underset{\sim}{\Phi})$

Przypadek ten nazywamy makropęknięciem mieszanym /rys.3c/.

Rozpatrując /rozdz. 3/ tensory symetryczne w $\mathcal{V}$ w formie wektorów w ortonormalnej bazie $\underset{\sim}{e}_\alpha$ mieliśmy dla dowolnego elementu $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{V}$: $\underset{\sim}{B} = B_{jk}\, \underset{\sim}{i}_j \otimes \underset{\sim}{i}_k = b_\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha$, $j,k = 1,2,3$; $\alpha = 1,\ldots,6$; w naszym przypadku $\{\underset{\sim}{i}_k\}$ jest dowolną bazą ortonormalną w $\mathcal{R}^3$, choć w ogólności tensor $\underset{\sim}{B}$ może być generowany przez inną, dowolną bazę w $\mathcal{R}^3$. Dla bazy ortonormalnej, na podstawie równoważności obu reprezentacji, wykorzystując symetrię $B_{ij} = B_{ji}$, otrzymujemy: $\underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1$, $\underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2$, $\underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{i}_3 \otimes \underset{\sim}{i}_3$; $\underset{\sim}{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_3 + \underset{\sim}{i}_3 \otimes \underset{\sim}{i}_2)$, $\underset{\sim}{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_3 + \underset{\sim}{i}_3 \otimes \underset{\sim}{i}_1)$, $\underset{\sim}{e}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_1)$.

http://rcin.org.pl

Szczególnym przypadkiem bazy ortonormalnej $\{\underset{\sim}{i}_k\}$ w $\mathcal{R}^3$ jest baza złożona z wektorów własnych /głównych/ $\underset{\sim}{v}_{(k)}$ tensora mikroszczelin $\underset{\sim}{\Phi}$. Powyżej określono jednoznaczny i niezmienniczy rozkład przestrzeni $\mathcal{V}$ właśnie w odniesieniu do tensora $\underset{\sim}{\Phi}$, a także odpowiednie redukcje operatora degradacji $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$. Aby wykorzystać otrzymane dekompozycje posługując się równocześnie bardziej zwięzłą reprezentacją wektorową elementów przestrzeni $\mathcal{V}$, określimy ostatecznie bazę $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$ względem wektorów własnych tensora $\underset{\sim}{\Phi}$. Przyjmujemy więc $\{\underset{\sim}{i}_k\} = \{\underset{\sim}{v}_{(k)}\}$ i mamy analogicznie jak wyżej:

$$\underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{v}_{(1)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(1)}\ ,\ \cdots\ ,\ \underset{\sim}{e}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{v}_{(1)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(2)} + \underset{\sim}{v}_{(2)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(1)})\ ,$$

z tym, że odpowiednie reprezentacje dla aktualnego tensora $\underset{\sim}{\Phi}$ i elementów należących do $\mathcal{V}_V$ są teraz w postaci:

$$/4.5/\quad \underset{\sim}{\Phi} = \varphi_{(1)}\underset{\sim}{v}_{(1)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(1)} + \varphi_{(2)}\underset{\sim}{v}_{(2)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(2)} + \varphi_{(3)}\underset{\sim}{v}_{(3)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(3)} = \varphi_{(1)}\underset{\sim}{e}_1^{*} + \varphi_{(2)}\underset{\sim}{e}_2 + \varphi_{(3)}\underset{\sim}{e}_3$$

Obraz przestrzeni $\mathcal{V}$ tensorów symetrycznych, traktowanych jako wektory w bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$ zbudowanej z wektorów własnych tensora

$$/4.6/\quad \begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{v}_{(1)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(1)} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{e}_6 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\underset{\sim}{v}_{(1)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(2)} + \underset{\sim}{v}_{(2)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(1)}) \end{cases}$$

nazywamy przestrzenią $\overset{*}{\Phi}$. W przestrzeni tej relacja degradacji plastycznej

$$/2.4/\quad {}_{(p)}\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})[\overset{\nabla}{\underset{\sim}{\Phi}}]$$

przyjmuje postać

$$/4.7/\quad {}_{(p)}\overset{*}{\underset{\sim}{d}} = \overset{*}{\underset{\sim}{A}}(\overset{*}{\underset{\sim}{\varphi}})\overset{\nabla}{\overset{*}{\underset{\sim}{\varphi}}}\ ,$$

gdzie wektory ${}_{(p)}\overset{*}{\underset{\sim}{d}}, \overset{\nabla}{\overset{*}{\underset{\sim}{\varphi}}} \in \overset{*}{\Phi}$ są obrazami elementów ${}_{(p)}\underset{\sim}{D}, \overset{\nabla}{\underset{\sim}{\Phi}} \in \mathcal{V}$; wektor $\overset{*}{\underset{\sim}{\varphi}}$ jest obrazem $\underset{\sim}{\Phi}$. Na podstawie /4.5/ widzimy, że tensor $\underset{\sim}{\Phi}$ w reprezentacji wektorowej $\overset{*}{\underset{\sim}{\varphi}}$ posiada trójwymiarową

http://rcin.org.pl

reprezentację w podprzestrzeni $\overset{*}{\Phi}_3 \subset \overset{*}{\Phi}$, zwaną podprzestrzenią wartości głównych tensora mikroszczelin. Jest to podprzestrzeń analogiczna do podprzestrzeni naprężeń głównych,[4] . W rozdziale 3 operowaliśmy reprezentacją wektorową dla elementów $\mathcal{P}$, jednakże $\underset{\sim}{e}_\alpha$ było określone w ogólności względem dowolnej bazy $\{\underset{\sim}{i}_k\}$; odpowiedni obraz przestrzeni $\mathcal{P}$ był zatem różny od przestrzeni $\overset{*}{\Phi}$.

Przejdźmy teraz do reprezentacji degradacji plastycznej $\underset{\sim}{A}(\overset{\circ}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}]$ i jej szczególnej postaci $\underset{\sim}{R}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}$. Degradacja plastyczna /2.4/ jest funkcją o wartościach tensorowych, w przestrzeni tensorów symetrycznych, w szczególności funkcją liniową względem strumienia $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}$. Na podstawie odpowiednich twierdzeń o reprezentacjach funkcji tensorowych /por. np. [10]/ można przedstawić ją w postaci:

$$
\begin{aligned}
{}_{(p)}\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A}(\overset{\circ}{\Phi})[\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}] = [\Delta_1 \operatorname{tr}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + \Delta_2 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) + \Delta_3 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})]\underset{\sim}{1} + \\
+ [\Delta_4 \operatorname{tr}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + \Delta_5 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) + \Delta_6 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})]\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + [\Delta_7 \operatorname{tr}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + \Delta_8 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) \\
+ \Delta_9 \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})]\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2 + \Delta_{10}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + \Delta_{11}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} + \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) + \\
+ \Delta_{12}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2 + \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}^2\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}) \quad ,
\end{aligned}
\qquad /4.8/
$$

przy czym $\Delta_1, \ldots, \Delta_{12}$ są funkcjami podstawowych niezmienników $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}$: $I_{\overset{\circ}{\Phi}}$, $II_{\overset{\circ}{\Phi}}$, $III_{\overset{\circ}{\Phi}}$; $I_{\overset{\circ}{\Phi}} = \operatorname{tr}\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}} = \Phi_{kk}$, $II_{\overset{\circ}{\Phi}} = \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})^2 = \Phi_{ij}\Phi_{ji}$, $III_{\overset{\circ}{\Phi}} = \operatorname{tr}(\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}})^3 = \Phi_{ij}\Phi_{jk}\Phi_{ki}$.

W przestrzeni $\overset{*}{\Phi}$, gdzie odpowiednie składowe są wyrażone względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$, a ta z kolei zdefiniowana jest przez kierunki główne $\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Phi}}$ zgodnie z /4.6/, składowe macierzy degradacji plastycznej przyjmują następującą prostą formę /por. analogiczną reprezentację dla hyposprężystości w [4] /:

$$
\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{ik}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{ij}(\delta_{ik}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad , \qquad /4.8/'
$$

/nie sumować po i, j, k /

gdzie

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{kp} \equiv \Delta_1 + \Delta_4 \mathcal{F}_{(k)} + \Delta_2 \mathcal{F}_{(p)} + \Delta_7 \mathcal{F}_{(k)}^2 + \Delta_5 \mathcal{F}_{(k)}\mathcal{F}_{(p)} + \Delta_3 \mathcal{F}_{(p)}^2 + \\
+ \Delta_6 \mathcal{F}_{(k)}\mathcal{F}_{(p)}^2 + \Delta_8 \mathcal{F}_{(k)}^2\mathcal{F}_{(p)} + \Delta_9 \mathcal{F}_{(k)}^2\mathcal{F}_{(p)}^2 \quad , \\
\mathcal{B}_{km} \equiv \Delta_{10} + \Delta_{11}(\mathcal{F}_{(k)} + \mathcal{F}_{(m)}) + \Delta_{12}(\mathcal{F}_{(k)}^2 + \mathcal{F}_{(m)}^2) \quad ;
\end{aligned}
$$

http://rcin.org.pl

$\mathcal{S}_{(k)}$, k = 1, 2, 3, są wartościami głównymi tensora $\underset{\sim}{\Phi}$ /i składowymi wektora $\overset{*}{\underset{\sim}{\mathcal{S}}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$, por. /4.5//. Na podstawie /4.8/$_1$, /4.8/$_{2,3}$ otrzymuje się wygodną dla operacji praktycznych formę blokową macierzy $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$:

$$/4.9/ \qquad [\underset{\sim}{A}] = \begin{vmatrix} [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V] & [\underset{\sim}{0}] \\ [\underset{\sim}{0}] & [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T] \end{vmatrix} ,$$

gdzie $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V$ i $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T$ są operatorami liniowymi działającymi na elementy przestrzeni $\overset{*}{\Phi}$; operatory te są obrazami operatorów $\underset{\sim}{A}_V$ i $\underset{\sim}{A}_T$ /por. /4.3// działających na $\mathcal{V}$. Bloki $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V]$ i $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T]$ mają następujące reprezentacje macierzowe /składowe $\mathcal{A}_{ij}$, $\mathcal{B}_{ij}$ według /4.8/$_{2,3}$ / :

$$/4.10/ \quad [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V] = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{11}+\mathcal{B}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22}+\mathcal{B}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33}+\mathcal{B}_{33} \end{vmatrix} , \qquad [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T] = \begin{vmatrix} \mathcal{B}_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{31} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{12} \end{vmatrix} .$$

Posługując się reprezentacjami w przestrzeni $\overset{*}{\Phi}$ łatwo otrzymać odpowiedniki wyrażeń /3.8/$_2$, /3.9/ dla warunku inicjacji makropęknięcia w punkcie $\underset{\sim}{\Phi}$ i równania strumienia inicjacji makropęknięcia. Warunek inicjacji ma postać:

$$/4.11/ \qquad \det \underset{\sim}{\mathcal{A}}_V = 0 \qquad \text{lub/i} \qquad \det \underset{\sim}{\mathcal{A}}_T = 0 .$$

Jak widać, warunek ten można określić nie odwołując się do rozkładu polarnego /3.1/, ale bezpośrednio do reprezentacji macierzowej degradacji plastycznej w bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$, spełniającej /4.6/. Dzięki dekompozycjom /4.1/, /4.3/, podmacierze $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V]$ i $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T]$ są trójwymiarowe, co znacznie ułatwia praktyczną analizę inicjacji makrozniszczenia w konkretnych przypadkach. Z kolei równanie prędkości inicjacji /dla jednej powierzchni w punkcie $\underset{\sim}{\Phi}$ / ma w bazie $\{\underset{\sim}{e}_\alpha\}$, spełniającej /4.6/, postać:

$$/4.12/ \qquad {}^{(m)}\overset{\nabla *}{\underset{\sim}{\mathcal{S}}} = \varkappa \underset{\sim}{e}_r$$

http://rcin.org.pl

Nawiązując w dalszym ciągu do /3.9/ i /3.11/ możemy napisać:

$$/4.13/ \qquad \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}} = \sum_{\beta \neq \Gamma} \overset{*}{\varphi}_{\beta} \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\varepsilon}}_{\beta} + \varkappa \underset{\sim}{\overset{\nabla}{\varepsilon}}_{\Gamma} = {}_{(deg)}\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}} + {}_{(m)}\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}} ,$$

co oznacza, że istnieje addytywny rozkład strumienia $\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}}$ na część odpowiadającą degradacji plastycznej i część opisującą zapoczątkowanie makropęknięcia.

W konkretnych przypadkach można na podstawie /4.12/ - wykorzystując zależność /4.6/ - wyrazić jawnie strumień inicjacji makropęknięcia względem tensora mikrouszkodzeń, tj. otrzymać zależność ${}_{(m)}\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}} = F(\underset{\sim}{\overset{\nabla}{\Phi}})$. Pokażemy to w szczegółowym przykładzie zamieszczonym dalej.

5. Przykład: inicjacja makropękania zgodnego

Rozważmy dwa elementarne testy dla próbek sześciennych aż do inicjacji makropęknięcia. Na rysunku 4 zamieszczono schematy obciążenia wraz z umownie zaznaczonymi polami dominujących mikropęknięć; zaznaczono też kierunki makropęknięć. Schemat /b/ powtórzono dla próbki cylindrycznej; geometria mikropęknięć oraz prawie pionowa powierzchnia makropęknięcia jest charakterystyczna nie tylko dla jednoosiowego ściskania, ale także dla testów trójosiowych przy umiarkowanych ciśnieniach bocznych, niższych od ciśnienia pionowego. Na rys. 5 zamieszczono krzywe naprężenie - odkształcenie dla charakterystycznych kierunków oraz pokazano sposób deformacji kostek w obu przypadkach - dwu- i jednoosiowego ściskania. Zamieszczone krzywe mają charakter jakościowy; ich przebiegi i odpowiadające im mechanizmy mikro- makropękania odpowiadają danym eksperymentalnym opracowanym dla różnych rodzajów początkowo izotropowych betonów i skał w pracach [11, 12, 13, 14, 15]. W obu szczególnych przypadkach obciążenia dominuje mechanizm naruszenia struktury polegający na powstawaniu i otwieraniu się mikroszczelin prostopadle do ich płaszczyzn; mechanizm ten określa także zapoczątkowanie makropęknięcia. Mechanizm związany z poślizgami w płaszczyznach defektów wewnętrznych - mikro-

http://rcin.org.pl

pęknięć i dopiero co zainicjowanych makropęknięć jest drugorzędny; tak jest zresztą na ogół we wszystkich badanych przypadkach w płaskich stanach naprężenia, por. np. [12, 13, 15]. Widać stąd, że dla opisu degradacji plastycznej w tych przypadkach wystarczy do jakościowej analizy posłużyć się miarą

/5.1/ $$\Phi_{ij} = \zeta_{ij} = \beta n_i n_j$$

pomijając $\bar{\mu}_{ij} = \gamma \bar{\mu}_{ij}$ w reprezentacji /2.3/. Z rysunku 4 widać, że odpowiednie reprezentacje macierzowe dla tensora $\underset{\sim}{\Phi}$ w pewnym stadium monotonicznego procesu obciążenia są dla przypadków /a/ i /b/ jak niżej:

/5.2/ (a) $$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\zeta} = \begin{Vmatrix} \zeta_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$, (b) $$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\zeta} = \begin{Vmatrix} \zeta_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Stany powyższe traktujemy jako quasi-jednorodne. Zakładając geometrycznie wyidealizowany obraz degradacji plastycznej /tj. pomijając drugorzędne zaburzenia kierunków prędkości mikropękania w próbce/ możemy założyć, że odpowiednie macierze strumieni mikropękania $\overset{\bullet}{\underset{\sim}{\Phi}} = \overset{\bullet}{\underset{\sim}{\zeta}}$ mają analogiczne konfiguracje jak macierze tensorów $\underset{\sim}{\Phi}$. Zauważmy ponadto, że są to składowe główne. Porównując rysunek 4 i reprezentacje /5.2/ z rysunkiem 5 widzimy, że odpowiednie kierunki x_1, x_2, x_3 są zarazem kierunkami głównymi tensorów odkształcenia i prędkości odkształcenia, a odpowiednie składowe - wartościami głównymi. Dotyczy to w szczególności tensora prędkości deformacji plastycznych ${}^{(p)}D_{ij}$. Znaki składowych głównych prędkości deformacji /w tym - jej części plastycznej/ odpowiadają znakom głównych składowych odkształcenia dla obu przypadków /rozciąganie uważamy za dodatnie/. Dla mechanizmu (mikro)pękania, dla opisu którego wystarcza miara /5.1/, a którego szczególnymi przykładami są /a/ i /b/ przyjmujemy wstępnie następującą, szczególną reprezentację degradacji plastycznej /4.8/:

$$ {}^{(p)}\underset{\sim}{D} = \Delta_1 \mathrm{tr}(\overset{\bullet}{\underset{\sim}{\zeta}})\underset{\sim}{1} + \Delta_5 \mathrm{tr}(\underset{\sim}{\zeta}\overset{\bullet}{\underset{\sim}{\zeta}})\underset{\sim}{\zeta} + \Delta_{10}\overset{\bullet}{\underset{\sim}{\zeta}} \quad , $$

http://rcin.org.pl

albo w składowych:

$$/5.3/ \qquad {}^{(p)}D_{ij} = \Delta_1 \overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} + \Delta_5(\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn})\zeta_{ij} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{ij} .$$

gdzie, podobnie jak w przypadku ogólnym, Δ_1 , Δ_5 , Δ_{10} są funkcjami podstawowych niezmienników tensora $\underset{\sim}{\Phi} \equiv \underset{\sim}{\zeta}$. Szczegółowe reprezentacje dla przykładów /a/ i /b/ są podane niżej /traktujemy $\underset{\sim}{\zeta}$ jako zmienną niezależną degradacji plastycznej, a więc stan $\underset{\sim}{\zeta}$ jako znany, w celu weryfikacji relacji /5.3/, będącej szczególnym przypadkiem /2.4//.

Test /a/

$$/5.4/ \quad \begin{cases} {}^{(p)}D_{(1)} = \Delta_1 \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \Delta_5 \zeta_{(1)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)}\zeta_{(1)} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} & \text{/rozciąganie/} \\ {}^{(p)}D_{(2)} = \Delta_1 \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} \qquad {}^{(p)}D_{(2)} = {}^{(p)}D_{(3)} & \text{/ściskanie/} \\ {}^{(p)}D_{(3)} = \Delta_1 \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} & \text{/ściskanie/} \end{cases}$$

bowiem $\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} = \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)}$, $\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn} = \zeta_{(1)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)}$. Wynika stąd, że funkcja Δ_1 winna być ujemnie określona. Podobny wniosek można wyciągnąć z testu /b/, gdzie ujemne odkształcenia trwałe w kierunku pionowym x_3 można przypisać sumarycznemu wpływowi rozwierania się mikroszczelin w obu kierunkach bocznych. Mikroszczeliny są pionowe podobnie jak w /a/, ale nie równoległe do x_2 - tensory $\zeta_{ij} = \beta n_i n_j$ i $\overset{\nabla}{\zeta}_{ij}$ mają niezerowe składowe w kierunkach x_1 , x_2 . Mamy zatem dla /b/:

$$\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} = \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)} ; \quad \zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn} = \zeta_{(1)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \zeta_{(2)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(2)} ; \quad \zeta_{(1)} = \zeta_{(2)} , \ \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} = \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)}$$

$$/5.5/ \quad \begin{cases} {}^{(p)}D_{(1)} = \Delta_1(\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)}) + \Delta_5(\zeta_{(1)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \zeta_{(2)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(2)})\zeta_{(1)} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} & \text{/rozciąganie/} \\ {}^{(p)}D_{(2)} = \Delta_1(\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)}) + \Delta_5(\zeta_{(1)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \zeta_{(2)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(2)})\zeta_{(2)} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{(2)} & \text{/rozciąganie/} \\ \text{stąd } {}^{(p)}D_{(1)} - {}^{(p)}D_{(2)} & \\ {}^{(p)}D_{(3)} = \Delta_1(\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)}) & \text{/ściskanie/} . \end{cases}$$

Zauważmy, że człon $\Delta_1 \overset{\nabla}{\zeta}_{kk}$ jest istotny z punktu widzenia poprawności i dokładności opisu degradacji plastycznej. W rozważanych przypadkach opisuje on m.in. efekt ujemnego przyrostu odkształceń trwałych w kierunkach prostopadłych do mikropęka-

http://rcin.org.pl

nia; efekt ten zależy jawnie od prędkości wzrostu mikroporowatości $\dot{\zeta}_{kk}$. Przyjmiemy zatem, w ramach jakościowej aproksymacji degradacji typu normalnego /5.3/, że $\Delta_1 = \text{const} = \frac{1}{3}\vartheta < 0$.

Dla określenia kryterium zapoczątkowania makropękania kluczowe znaczenie ma nie tylko jakościowa, ale również ilościowa specyfikacja funkcji Δ_5 i Δ_{10} występujących w pozostałych składnikach związku /5.3/. W celu określenia właściwych współzależności, wyjdziemy z elementarnych przesłanek fizycznych, dotyczących degradacji materiału. Przez tzw. «degradację prostą» lub całkowitą będziemy rozumieć aktualną prędkość $\overset{\circ}{\zeta}$ /lub przyrost/ nałożoną na aktualną lokalną konfigurację istniejącego już pola ζ. Degradacja całkowita opisana jest przez drugi człon równania /5.3/ $\Delta_5(\zeta_{mn}\dot{\zeta}_{mn})\zeta_{ij}$. W tym sumarycznym procesie możemy w ogólności wyróżnić - z naszego punktu widzenia - - tzw. degradację plastyczną «netto» przenoszącą się niejako bezpośrednio na poziom makroskali przez przyrost odkształceń trwałych i tzw. «dyfuzję mikroszczelin» . Ten drugi mechanizm polega na łączeniu się mikroporów i defektów prowadzących do kruchego zniszczenia bez efektów plastycznych na poziomie makro. Termin «dyfuzja...» ma tu sens umowny zaczerpnięty z analizy zniszczenia przy pełzaniu /por. [2] /; bardziej poprawny byłby tu polski termin odpowiadający angielskiemu określeniu «microcrack coalescence» . Postulujemy, że efekt kruchego łączenia się mikroszczelin jest proporcjonalny i, w sensie kierunkowym, współosiowy względem strumienia $\overset{\circ}{\zeta}$ (lub $\dot{\zeta}$) . Efekt ten opisuje trzeci człon relacji /5.3/. Zakładając więc funkcję $\Delta_{10}(\text{Jnv}\,\dot{\zeta}) = \Delta_{10}(I_\zeta, II_\zeta, III_\zeta) = 2\mu(I_\zeta, II_\zeta, III_\zeta)$ jako ujemnie określoną, przy dodatnich wartościach Δ_5 opisujących efekt degradacji całkowitej otrzymujemy degradację plastyczną «netto» jako różnicę degradacji całkowitej i kruchej «dyfuzji» mikroszczelin:

$$\eta(\zeta_{mn}\dot{\zeta}_{mn})\zeta_{ij} - \bar{\mu}\dot{\zeta}_{ij}\,, \qquad /5.6/$$

gdzie $\eta = \text{const} = \Delta_5$; $\bar{\mu} = -2\mu(I_\zeta, II_\zeta, III_\zeta) = -\Delta_{10}(I_\zeta, II_\zeta, III_\zeta) > 0$

$\mu(I_\zeta, II_\zeta, III_\zeta) < 0$.

http://rcin.org.pl

Dla testu odniesienia (a), opisującego jednoosiową degradację ośrodka plastyczno-kruchego /5.4/ w kierunku x_1 mamy przykładowo:

$$/5.4'/ \qquad {}_{(p)}D_{(1)} = \frac{1}{3}\vartheta \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \eta \zeta^2_{(1)} \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + 2\mu \overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} ,$$

gdzie

$$/5.7/ \qquad \begin{cases} \vartheta = \text{const} < 0 \\ \eta = \text{const} > 0 \\ \mu = \mu(\text{Jnv}\,\zeta) < 0 \end{cases}$$

Do testu (a) powrócimy przy omawianiu sensu fizycznego warunku inicjacji makropękania.

Reasumując możemy powiedzieć, że druga część związku degradacji /tj. drugi składnik minus trzeci/ opisuje złożony efekt dodatniego przyrostu odkształceń trwałych w kierunku ζ_{ij} zależnie od wartości "rzutu" dodatniego strumienia mikropękania $\overset{\nabla}{\zeta}_{mn}$, na aktualny stan ζ_{mn}, czyli zależnie od konfiguracji strumienia mikropękania względem istniejącego stanu naruszenia struktury. Trzeba dodać, że szczegółowa reprezentacja /5.3/ jest być może wystarczająca do opisu procesów monotonicznych; do opisu efektów cyklicznych z przejściowym zamykaniem się mikroszczelin potrzebna byłaby reprezentacja bardziej złożona. Sumarycznemu zamykaniu się mikroszczelin odpowiada ujemna wartość iloczynu wewnętrznego $\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn}$, co przy $\eta > 0$, $\mu < 0$ daje ujemną prędkość deformacji współosiowej względem pola ζ_{ij}, o ile efekt drugiego składnika przewyższa trzeci, co ma miejsce w obszarze degradacji. Analizując w dalszym ciągu przesłanki fizykalne, dotyczące monotonicznych testów typu /a/, /b/ można się spodziewać, że warunek inicjacji makropękania zostanie osiągnięty w momencie, gdy degradacja plastyczna «netto» /5.6/ osiągnie wartość zero, tzn. kiedy degradacja całkowita $\eta(\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn})\zeta_{ij}$ stanie się równa co do wartości bezwzględnej /ujemnej/ wartości kruchej «dyfuzji» mikroszczelin $2\mu\zeta_{ij}$.

Rzeczywiście, przechodząc do reprezentacji degradacji plastycznej /5.3/' w przestrzeni $\overset{\nabla}{\varphi}$, otrzymujemy na podstawie za-

http://rcin.org.pl

leżności /4.7/, /4.8/' i /4.10/ następujące macierze $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V$ i $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T$:

$$/5.8/ \quad [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V] = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3}\vartheta + 2\mu + \eta\zeta_{(1)}^2 & \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(1)}\zeta_{(2)} & \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(1)}\zeta_{(3)} \\ \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(2)}\zeta_{(1)} & \frac{1}{3}\vartheta + 2\mu + \eta\zeta_{(2)}^2 & \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(2)}\zeta_{(3)} \\ \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(3)}\zeta_{(1)} & \frac{1}{3}\vartheta + \eta\zeta_{(3)}\zeta_{(2)} & \frac{1}{3}\vartheta + 2\mu + \eta\zeta_{(3)}^2 \end{Vmatrix},$$

$$/5.9/ \quad [\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T] = \begin{Vmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{Vmatrix}.$$

Macierz $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_T]$ jest macierzą nieosobliwą o wyrazach diagonalnych różnych od zera; macierzy tej nie można zatem przyporządkować warunku inicjacji makropęknięcia. Warunek taki może natomiast generować macierz symetryczna $[\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V]$ o następujących wartościach własnych:

$$/5.10/ \quad \begin{cases} \mathcal{A}_V^{(1)} = 2\mu + \eta\sum_{k=1}^{3}\zeta_{(k)}^2 \\ \mathcal{A}_V^{(2)} = \vartheta + 2\mu \\ \mathcal{A}_V^{(3)} = 2\mu \end{cases}$$

Z relacji /5.7/ wynika, że wartości $\mathcal{A}_V^{(2)}$ i $\mathcal{A}_V^{(3)}$ są ujemnie określone i nierówne zeru w przedziale możliwych konfiguracji $\underset{\sim}{\zeta}$. Może natomiast w trakcie procesu degradacji zajść równość

$$\mathcal{A}_V^{(1)} = 0$$

czyli

$$/5.11/ \quad 2\mu(\mathrm{Inv}\,\underset{\sim}{\zeta}) + \eta\sum_{k=1}^{3}\zeta_{(k)}^2 = 0,$$

co potwierdzałoby wniosek wyciągnięty z przesłanek fizykalnych, sugerujący osiągnięcie stanu, w którym chwilowa degradacja całkowita współosiowa z polem $\underset{\sim}{\zeta}$ jest równa prędkości kruchej «dyfuzji» mikroszczelin tak, że odpowiednia degradacja plastyczna «netto» w kierunku ζ_{ij} równa się zero. Dla jednoosiowej degradacji typu /a/ można przedstawić warunek /5.11/ graficznie jako punkt przecięcia się krzywych repre-

http://rcin.org.pl

zentujących funkcje występujące jako składniki lewej strony równania /5.11/, por. rys.6.

Jak widać, funkcja $f_2 = -\mu(\mathrm{Jnv}\,\underset{\sim}{\zeta})$ sterująca mechanizmem kruchego łączenia się defektów osiąga wartości mniejsze niż $f_1 = \eta \sum_k \zeta_{(k)}^2$ opisująca degradację całkowitą/«prostą»/. Odpowiednia różnica stanowi kierunkową degradację plastyczną «netto» w obszarze /zakresie/ degradacji plastycznej. Punkt A, w którym ta różnica $f^0 = f_1 - f_2$ osiąga zero odpowiada warunkowi /5.11/. Ponieważ w ramach przyjętych założeń $\eta = \mathrm{const}$, więc f_1 jest formą kwadratową względem składowych tensora $\underset{\sim}{\zeta}$ - w szczególności w przypadku /a/ /por. /5.4/'/ wartości $f_1(\zeta_{(1)})$ określone są jako rzędne paraboli drugiego stopnia. Oznacza to, że aby mogło nastąpić makropękanie kruche, /warunek /5.11/ równoważny przecinaniu się obu wykresów/ konfiguracja krzywej $f_2(\zeta)$ musi być typu jak na rys. 6, czyli $f_2(\zeta_{(1)})$ jest conajmniej parabolą trzeciego stopnia. Tak więc funkcja $\mu(\mathrm{Jnv}\,\underset{\sim}{\zeta})$ może zależeć od trzeciego niezmiennika $\mathrm{III}_{\underset{\sim}{\zeta}}$, albo od drugiego niezmiennika $\mathrm{II}_{\underset{\sim}{\zeta}}$ w stopniu wyższym niż pierwszy, etc... Otrzymany warunek jest zatem bardziej złożony niż arbitralnie przyjęty «warunek zniszczenia» ośrodków skałopodobnych w pracy [1] w postaci formy kwadratowej typu $\mathrm{I}_{\underset{\sim}{\zeta}}^2 + \mathrm{II}_{\underset{\sim}{\zeta}} = \mathrm{const}$. Transponując /5.11/ otrzymujemy:

$$/5.11/' \qquad \sum_{k=1}^{3} \zeta_{(k)}^2 = -\frac{2\mu(\mathrm{Jnv}\,\underset{\sim}{\zeta})}{\eta} \,,$$

gdzie lewą stronę można przedstawić w postaci:

$$\sum_{k=1}^{3} \zeta_{(k)}^2 = \zeta_{rs}\zeta_{rs} = \hat{\zeta}_{rs}\hat{\zeta}_{rs} + \frac{1}{3}\zeta_{kk}^2$$

gdzie $\hat{\zeta}_{rs}$ oznacza składową dewiatora $\underset{\sim}{\hat{\zeta}} = \underset{\sim}{\zeta} - \frac{1}{3}\underset{\sim}{1}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\zeta}$.
Mamy więc zgodnie z /5.11/

$$\hat{\zeta}_{rs}\hat{\zeta}_{rs} + \frac{1}{3}\zeta_{kk}^2 = -\frac{2\mu(\mathrm{I}_{\underset{\sim}{\zeta}}, \mathrm{II}_{\underset{\sim}{\zeta}}, \mathrm{III}_{\underset{\sim}{\zeta}})}{\eta}$$

czyli ogólnie

$$G(\mathrm{I}_{\underset{\sim}{\zeta}}, \mathrm{II}_{\underset{\sim}{\zeta}}, \mathrm{III}_{\underset{\sim}{\zeta}}) = 0$$

http://rcin.org.pl

przy czym stopień odpowiedniego wyrażenia względem ζ jest większy od 2 nawet jeśli w szczególnym przypadku μ nie zależy od III_ζ.

Jak powiedziano w rozdziale 4, operator $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{\Phi})$ odwzorowuje przestrzeń tensorów symetrycznych drugiego rzędu $\mathcal{V}^2$ na nią samą; $\underset{\sim}{A}_V$ jest operatorem ograniczonym działającym na tensory należące do $\mathcal{V}^2_V$, tj. tensory o kierunkach głównych równoległych do kierunków głównych $\underset{\sim}{v}_{(i)}$ tensora $\underset{\sim}{\Phi}$. Operator $\underset{\sim}{\mathcal{A}}_V(\hat{\underset{\sim}{\Phi}})$ jest obrazem operatora $\underset{\sim}{A}_V(\underset{\sim}{\Phi})$ w przestrzeni $\hat{\Phi}$, w której elementy należące do $\mathcal{V}^2$ są traktowane jako wektory w bazie $e_\alpha = \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \otimes \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}, \ldots$, etc..., zgodnie z /4.6/. W naszym przypadku niezerowe elementy jądra operatora degradacji plastycznej spełniają na podstawie /5.10/, /5.11/ zależność

$$/5.12/ \qquad \mathcal{N}(\hat{\underset{\sim}{\Phi}}) \equiv \mathcal{N}(\zeta) = \mathcal{N}_V(\zeta) \quad \Rightarrow \quad {}_{(m)}\hat{\underset{\sim}{\zeta}} \in \mathcal{N}_V(\zeta) \subset \mathcal{V}^2_V .$$

Mamy więc do czynienia ze zgodnym mechanizmem makropęknięcia. Jeżeli zatem wektor $\hat{\underset{\sim}{\zeta}}$ jest wektorem własnym z przestrzeni $\hat{\Phi}$, który odpowiada wartości własnej $\mathcal{R}^{(1)}_V$ operatora $\underset{\sim}{\mathcal{R}}_V$ na $\hat{\Phi}$, to wykorzystując ten fakt, mamy na podstawie /4.12/:

$$/5.13/ \qquad {}_{(m)}\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \varkappa \hat{\underset{\sim}{\zeta}}$$

lub, wracając do przestrzeni $\mathcal{V}^2$, otrzymujemy:

$$/5.14/ \qquad {}_{(m)}\underset{\sim}{\zeta} = \varkappa \underset{\sim}{\zeta} \quad ; \quad {}_{(m)}\zeta_{ij} = \varkappa \zeta_{ij} .$$

Reasumując, we wzorach na strumień inicjacji makropękania w przestrzeniach $\hat{\Phi}$ i $\mathcal{V}^2$ występuje tensor /wektor/ mikroszczelin $\underset{\sim}{\zeta}$, gdyż wszystkie elementy podprzestrzeni $\mathcal{V}^2_V$ są postaci $s\underset{\sim}{\zeta}$ /gdzie s jest dowolnym skalarnym mnożnikiem/ - bo wszystkie są współosiowe z $\underset{\sim}{\zeta}$. Z kolei ${}_{(m)}\underset{\sim}{\zeta}$ należy do przestrzeni zerowej $\mathcal{N}_V$ operatora $\underset{\sim}{A}_V$, przy czym $\mathcal{N}_V \subset \mathcal{V}^2_V$, zatem ${}_{(m)}\underset{\sim}{\zeta} \in \mathcal{V}^2_V$, a stąd mamy /5.14/ lub odpowiednio /5.13/ w $\hat{\Phi}$. Ostatecznie, zapoczątkowanie makrozniszczenia jest określone przez następujące relacje:

$$/5.15/ \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{3} \zeta^2_{(k)} = -\dfrac{2\mu(\mathrm{Jnv}\,\zeta)}{\eta} & \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}^{(1)}_V = 0 \\ {}_{(m)}\hat{\underset{\sim}{\zeta}} = \varkappa \hat{\underset{\sim}{\zeta}} . \end{cases}$$

http://rcin.org.pl

W momencie zapoczątkowania makropękania mamy zatem:

/5.16/
$$ {}^{(p)}D_{ij} = \frac{1}{3}\vartheta \overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} + \eta(\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn})\zeta_{ij} + 2\mu\overset{\nabla}{\zeta}_{ij} = \frac{1}{3}\vartheta\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} + \eta(\zeta_{mn}\times\zeta_{mn})\zeta_{ij} $$
$$ + 2\mu\times\zeta_{ij} = \frac{1}{3}\vartheta\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} + \times\zeta_{ij}(\eta\underbrace{\zeta_{mn}\zeta_{mn}}_{=0} + 2\mu) = \frac{1}{3}\vartheta\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} $$

Drugi składnik równa się zero na podstawie /5.15/$_1$. Otrzymujemy zatem, że w momencie zapoczątkowania makropękania, równolegle towarzysząca mu «szczątkowa» prędkość odkształcenia plastycznego odpowiada ujemnej zmianie objętości, por. rys.7, punkt B. Fakt, że prędkość ta jest różna od zera oznacza, że pewna część śladu strumienia ζ_{ij} powoduje wciąż szczątkową degradację plastyczną, podczas gdy cała pozostała część bierze udział w zapoczątkowaniu makropękania:

/5.17/
$$ \overset{\nabla}{\zeta}_{kk} = {}_{(m)}\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} + {}_{(deg)}\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} . $$

Dla testów odniesienia /a/, /b/ otrzymujemy odpowiednie:

/a/
/5.18/
$$ \begin{cases} \zeta^2_{(1)} = -\dfrac{2\mu(Jnv\,\zeta)}{\eta} \\ {}_{(m)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} = \times\zeta_{(1)} \end{cases} ; \quad {}^{(p)}D_{kk} = \vartheta\,{}_{(deg)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} $$

/b/
/5.19/
$$ \begin{cases} \zeta^2_{(1)} + \zeta^2_{(2)} = -\dfrac{2\mu(Jnv\,\zeta)}{\eta} \\ {}_{(m)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} = \times\zeta_{(1)} \;,\; {}_{(m)}\overset{\nabla}{\zeta}_{(2)} = \times\zeta_{(2)} \end{cases} ; \quad {}^{(p)}D_{kk} = \vartheta\,{}_{(deg)}(\overset{\nabla}{\zeta}_{(1)} + \overset{\nabla}{\zeta}_{(2)}) . $$

Powyższe relacje /5.15/ - /5.19/ wskazują na dość dobre przybliżenie jakościowe procesu krytycznego przejścia dla normalnego mechanizmu zniszczenia. Bliższa analiza pokazuje jednak, że postać związku degradacji jest zbyt uproszczona. Wniosek ten zdaje się nasuwać przy analizie degradacji resztkowej: rezultat /5.16/ - ujemna dylatacja rządzona przez stałą wartość ϑ - nie wydaje się dość realistyczny dla momentu zapoczątkowania makropękania. O ile więc opis kierunkowej degradacji plastycznej «netto», traktowanej jako różnica degradacji całkowitej i mechanizmu kruchego /«dyfuzyjnego»/, wydaje się wystarczająco dokładny - przynajmniej w zakresie jakościowego przybliżenia - i oparty na słusznych przesłankach fizycznych, to opis efektu bocznego degradacji i efektu resztkowego przez

http://rcin.org.pl

pierwszy składnik $\frac{1}{3}\vartheta\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij}$ może budzić wątpliwości. Składnik tego typu, tj. zawierający $\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}$ - lub też suma kilku składników - jako człon resztkowy degradacji winien dawać inne wielkości prędkości odkształcenia dla kierunku pękania niż dla kierunków bocznych. Należy zatem, być może, wzbogacić opis degradacji plastycznej o dodatkowy składnik zawierający, obok śladu strumienia $\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}$, aktualną wartość ζ_{ij}. Tak skorygowany związek degradacji należy ponownie zweryfikować, jak to pokazano powyżej dla relacji /5.3/, w oparciu o testy odniesienia. Skorygowany związek ma postać:

$$ {}^{(p)}D_{ij} = \Delta_1\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} + \Delta_4\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\zeta_{ij} + \Delta_5(\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn})\zeta_{ij} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{ij} $$

Postulując $\Delta_4(\mathrm{Inv}\,\zeta) = -\Delta_1(\mathrm{Inv}\,\zeta) = -\frac{1}{3}\vartheta(\mathrm{Inv}\,\zeta)$, otrzymujemy:

/5.20/ $$ {}^{(p)}D_{ij} = \Delta_1(\delta_{ij} - \zeta_{ij})\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} + \Delta_5(\zeta_{mn}\overset{\nabla}{\zeta}_{mn})\zeta_{ij} + \Delta_{10}\overset{\nabla}{\zeta}_{ij} . $$

Mówimy, że wyrażenie $\Delta_1(\delta_{ij} - \zeta_{ij})\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}$ opisuje «czysty» efekt boczny, bowiem generuje ono wyrażenie $\Delta_1\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij}$ jak poprzednio dla kierunku bocznego, gdzie $\zeta_{ij} = 0$, korygując równocześnie udział w kierunku otwierania się defektów przez uwzględnienie aktualnej wielkości ζ_{ij}. Mamy przy tym, przy dodatnich składowych ζ_{ij} i $\Delta_1 < 0$:

$$ \Delta_1\overset{\nabla}{\zeta}_{kk}\delta_{ij} < \Delta_1(\delta_{ij} - \zeta_{ij})\overset{\nabla}{\zeta}_{kk} . $$

Weryfikacja związku degradacji plastycznej i określenie kryterium zapoczątkowania makropękania w oparciu o ten związek oznacza zakończenie procedury formułowania równania ewolucji i odpowiadającego mu warunku utraty równowagi wewnętrznej w ramach modelu sprężysto-plastycznego, o którym wspomniano w rozdz.2. Jeśli równanie konstytutywne zostało także określone, można przystąpić do szczegółowej identyfikacji modelu /wyznaczenie stałych i funkcji materiałowych/ w oparciu o procesy (quasi)-jednorodne, a następnie przejść do zastosowania otrzymanej struktury do rozwiązywania problemów brzegowych. Trzeba tu zaznaczyć, że w ramach struktury modelu, w jego praktycznym zastosowaniu, relacja degradacji plastycznej -

http://rcin.org.pl

- uprzednio wyprowadzona i zweryfikowana - wystąpi w postaci odwrotnej, tj. np. postaci typu

/5.21/ $\underline{\Phi} = \sum_{\alpha} S_{\alpha}^{-1} h_{\alpha} \underline{e}_{\alpha}$, gdzie $h_{\alpha} = Q(\Phi)[\varphi \underline{D}, e_{\alpha}]$,

dla obszaru $\mathcal{D}$ i odpowiednio w postaci typu /3.13/ dla momentu zapoczątkowania makropękania. W ten sposób, w trakcie procesu mechanicznego, narastające odkształcenie niesprężyste pozwala określić proces naruszenia struktury materiału i dalej - odpowiednie wielkości rządzące wzmocnieniem/ osłabieniem plastycznym. W końcu, w trakcie odkształceń niesprężystych, w pewnym punkcie lub obszarze, zostaje spełnione kryterium typu /5.15/, tzn. możliwe staje się lokalne zapoczątkowanie makropękania. Tak więc cała przeprowadzona tu analiza relacji degradacji plastycznej w postaci /2.4/, gdzie strumień traktowany był jako zmienna niezależna, służyła wyprowadzeniu szukanego kryterium makrozniszczenia i jakościowej identyfikacji samej relacji degradacji po to, aby po przetransformowaniu do postaci /5.21/ opisywała ona w sposób poprawny zależność uszkodzenia materiału od przyrostu odkształceń niesprężystych i aby w sposób możliwie najściślejszy określić próg makropękania. Analiza powyższa ma sens dla ośrodków, w których zjawiska przejściowe, polegające na lokalizacji samych odkształceń plastycznych przed zapoczątkowaniem makropękania, są pomijalne. Ma ona zatem sens dla ośrodków, o których można założyć, że efekt kruchości pojawia się na poziomie makro niejako zamiast intensywnej lokalizacji odkształceń plastycznych - zjawiska charakterystycznego dla ciał ciągliwych. Materiały spełniające to założenie zostały tu, dla odróżnienia, nazwane plastyczno-kruchymi; do tej klasy należy większość ośrodków skalnych i skałopodobnych. W przypadku, gdy efekty niejednorodności odkształceń plastycznych typu lokalizacji są istotne, należy odwołać się do analizy przedstawionej m.in. w pracy [16] .

http://rcin.org.pl

6. Wnioski końcowe

Dla ośrodka skałopodobnego podano ogólny schemat równań prędkościowych sprężysto-plastyczności z tensorowym parametrem mikrospękań $\underset{\sim}{\Phi}$. Zbadano strukturę relacji degradacji plastycznej wiążącej prędkość deformacji plastycznych z ewolucją mikroszczelin opisaną przez strumień tensora $\underset{\sim}{\Phi}$. Na podstawie przesłanek fizycznych określono transformację osobliwą tej relacji, odpowiadającą lokalnemu zapoczątkowaniu makropękania. Odpowiednie kryterium transformacji składa się z /a/ warunku inicjacji makropękania w przestrzeni tensora mikroszczelin $\underset{\sim}{\Phi}$, /b/ równania prędkości inicjacji pękania określającego strumień krytyczny $\overset{(m)}{\underset{\sim}{\Phi}}$ /w chwili zapoczątkowania makropękania/. Postać tego ostatniego związku przypomina równanie idealnej plastyczności ze względu na występowanie nieokreślonego mnożnika skalarnego.

Określono również zredukowane, lokalne pole prędkości deformacji plastycznej dla chwili zapoczątkowania makropęknięcia. Sformułowano kryteria matematyczne rządzące różnymi mechanizmami powstania makropęknięć, w szczególności ich konfiguracjami względem pól mikroszczelin w materiałach. Podano konkretną postać degradacji plastycznej dla normalnego mechanizmu (mikro)pękania. Dla tej relacji określono odpowiedni warunek inicjacji i równanie prędkości zapoczątkowania makropękania i odniesiono je do testów krytycznych reprezentujących szczególne, proste przypadki obciążenia.

Zagadnienie inicjacji makrozniszczenia w ujęciu fenomenologicznym wymaga dalszych badań. Interesujące byłoby m.in. sformułowanie odpowiednich kryteriów zapoczątkowania makropękania dla mechanizmów złożonych typu mieszanego, a także uogólnienie proponowanego podejścia dla innych materiałów wykazujących w mniejszym stopniu własności kruche /np. dla ciągliwych metali z kruchymi wtrąceniami/.

http://rcin.org.pl

LITERATURA

1 A. DRAGON, Z. MRÓZ, Int. J. Engng. Sci., 17/1979/, 121-137.

2 A. DRAGON, Z. MRÓZ, Int. J., Rock Mech.Min. Sci.& Geomech. Abstr., 16/1979/, 253-259.

3 A. DRAGON, "Plastyczno-kruche zachowanie się skał z uwzględnieniem inicjacji makropękania"/w przygotowaniu.

4 T. TOKUOKA, Arch. Rat. Mech. Anal., 42/1971/, 239-252.

5 M.S. PATERSON, "Experimental rock deformation...", Springer, Berlin, 1978.

6 C.H. SCHOLZ, J. geophys. Res., 73/1968/, 1417-1433.

7 J.R. RICE, /w/"Constitutive equations in plasticity", Ed. A. Argon, /rozdz.4/ MIT, 1975.

8 M. KACHANOV, Brown Univ. Report No. 16, 1978.

9 R.M. BOWEN, C.-C. WANG, "Introduction to vectors and tensors /linear & multilinear algebra/", Vol.I, Plenum Press, New York - London, 1976.

10 A.J.M. SPENCER, /w/"Continuum physics," /część III/, Vol.I, Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York - London, 1971.

11 S. PENG, A.M. JOHNSON, Int. J.Rock Mech. Min. Sci., 9/1971/, 37-86.

12 K. NEWMAN, J.B. NEWMAN, /w/"Structure, solid mechanics, engng. design..." Proceedings, Part 2, 963-995, Wiley, 1971.

13 G.D. VILE, /w/"The structure of concrete", 275-288, Ed. A.E. Brooks, K. Newman, London, 1968.

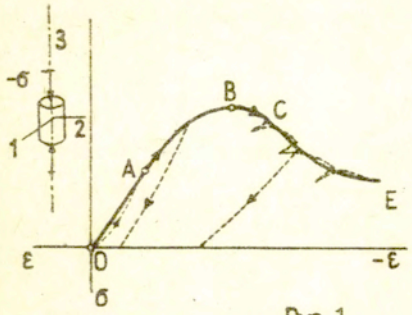
14 E. LAJTAI, Int. J. Fract., 10/1974/, 525-536.

15 H. KUPFER, H.K. HILSDORF, H. RÜSCH, ACI Journal, 8/1969/, 659-665.

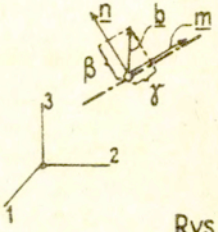
16 J.W. RUDNICKI, J.R. RICE, J. Mech. Phys. Solids, 23/1975/, 371-394.

http://rcin.org.pl

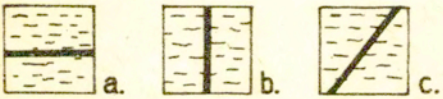
Rysunki :



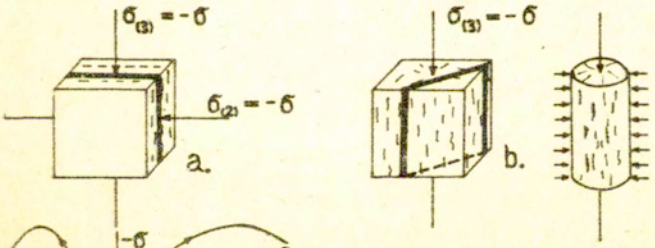
Rys. 1



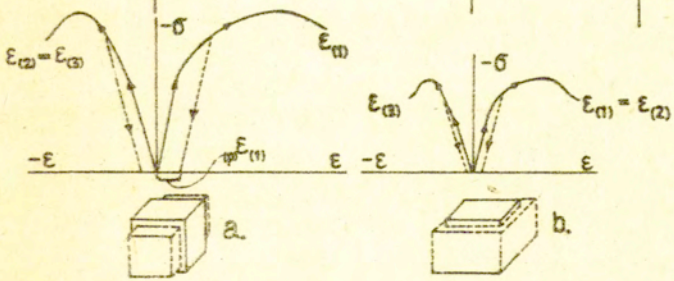
Rys. 2



Rys. 3

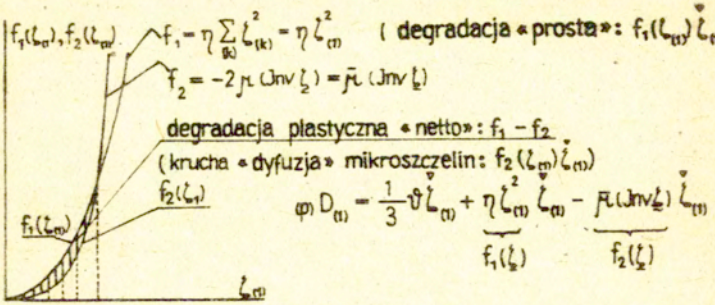


Rys. 4

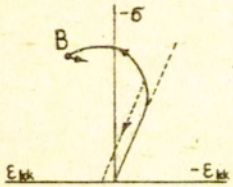


Rys. 5

http://rcin.org.pl



Rys. 6



Rys. 7

http://rcin.org.pl