

16 / 1980

Wojciech Nasalski

DYFRAKCJA FALI NIEJEDNORODNEJ
NA PÓLPLASZCZYZNIE IMPEDANCYJNEJ

p. 269



WARSZAWA 1980

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 171

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 maja 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 16/1980



57157



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 170 egz. Ark.wyd. 0,8. Ark.druk. 1,5.

Oddano do drukarni w maju 1980 r.

Nr zamówienia 397/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Wojciech Nasalski
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych
IPPT-PAN

DYFRAKCYJA FALI NIEJEDNORODNEJ NA PÓŁPŁASZCZYZNIE IMPEDANCYJNEJ

1. Wstęp

Problem dyfrakcji i generacji fal płaskich i fal **niejednorodnych** na półpłaszczyźnie impedancyjnej występuje w wielu zadaniach dyfrakcyjnych w geofizyce, akustyce, teorii anten i optyce zintegrowanej.

Przypadek dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie, o jednakowych impedancjach po obu stronach półpłaszczyzny, był analizowany w literaturze wielokrotnie [1, 2, 3, 4, 5]. Problem dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie o różnych impedancjach został rozwiązany po raz pierwszy w 1958 roku przez Maliużinca [6, 7], który uogólnił w nim typowe podejście Sommerfelda do zagadnień dyfrakcyjnych. Rozwiązanie Maliużinca zostało następnie zbadane i rozwinięte przez innych autorów [8, 9]. Jednakże burzliwy w ostatnich latach rozwój metod Wienera-Hopfa i Hilberta, w zastosowaniu do zagadnień dyfrakcyjnych, umożliwił otrzymanie nowego rozwiązania powyższego problemu. W roku 1975 Hurd [10], uogólniając metody Wienera - Hopfa i Hilberta, rozwiązał zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej o różnych impedancjach po różnych stronach. Nałożył on jednak w swoim rozwiązaniu poważne ograniczenia na wartości impedencji, eliminujące możliwość generacji fal powierzchniowych na krawędzi półpłaszczyzny.

W 1958 roku Maliużiniec [6] wskazał na możliwość zastosowania jego metody do rozwiązania problemu dyfrakcji fali powierzchniowej na powierzchni impedancyjnej. Jednakże zagadnienie to nie zostało jeszcze jak dotychczas wyczerpująco opracowane.

Problem dyfrakcji fali niejednorodnej, będącej uogólnieniem fali płaskiej na przypadek zespolonych kątów propagacji, zawiera w sobie, jako szczególne przypadki, zagadnienia dyfrakcji fali płaskiej i fali powierzchniowej, prowadzonej przez półpłaszczyzną impedancyjną. Celem niniejszej pracy jest otrzymanie rozwiązania problemu dyfrakcji fali niejednorodnej, padającej prostopadle do krawędzi, na półpłaszczyźnie impedancyjnej o różnych stronach, umieszczonej w izotropowym i jednorodnym ośrodku. Wykorzystana przy tym będzie metoda Wienera-Hopfa-Hilberta [10, 11], w szczególności poprzez uogólnienie otrzymanego przez Hurda rozwiązania dla fal płaskich [10] na przypadek zespolonych kątów propagacji i dowolnych wartości impedancji powierzchniowych półpłaszczyzny impedancyjnej.

2. Dyfrakcja fali niejednorodnej; rozwiązania ścisłe

Niech padająca prostopadle do krawędzi półpłaszczyzny fala niejednorodna ma postać:

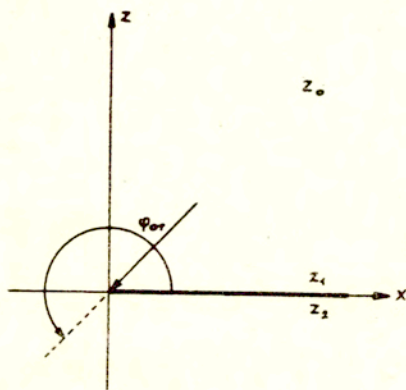
$$/2.1/ \quad u_i(x, z) = e^{ik(x \cos \psi_0 + z \sin \psi_0)} e^{-i\omega t},$$

$$\psi_0 = \psi_{0r} + i\psi_{0i}$$

$$k = k_r + ik_i, \quad k_r > 0, \quad k_i \geq 0,$$

gdzie wielkości ψ_{0r} , k_r i ψ_{0i} , k_i są odpowiednio rzeczywistymi i urojonymi częściami zespolonego kąta propagacji ψ_0 i liczby falowej k /zależność składowych pola od czasu typu $e^{-i\omega t}$ w dalszych rozważaniach będziemy opuszczać/. Zakładamy, że pole $u_i(x, z)$ jest skalarne lub wektorowe, o jedynej, nieznikającej składowej w kierunku równoległym do krawędzi półpłaszczyzny.

Impedancja falowa jednorodnego, izotropowego ośrodka wynosi z_0 . Zaś impedancje powierzchniowe górnej i dolnej części półpłaszczyzny impedancyjnej wynoszą odpowiednio z_1 i z_2 /rys. 1/.



Rys.1. Geometria problemu dyfrakcji fali niejednorodnej na półpłaszczyźnie impedancyjnej

Rozwiązanie $u(x,z)$ problemu dyfrakcji fali niejednorodnej na półpłaszczyźnie impedancyjnej jednoznacznie wyznaczają następujące równanie i warunki brzegowe:

pole $u(x,z)$ jest rozwiązaniem równania Helmholtza w całej przestrzeni

$$/2.2 \text{ a/} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u(x,z) = 0$$

- spełnia impedancyjne warunki brzegowe na półpłaszczyźnie dyfrakcyjnej

$$\begin{aligned} /2.2 \text{ b/} \quad & \left(\frac{\partial}{\partial z} - ik \sin \phi_1 \right) u(x, z) = 0 \quad \text{dla } x > 0, z = 0_+, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik \sin \phi_2 \right) u(x, z) = 0 \quad \text{dla } x > 0, z = 0_-, \end{aligned}$$

- jest ciągłe i ograniczone na krawędzi półpłaszczyzny

$$/2.2 \text{ c/} \quad u(x, z) \sim \text{const} + O(\tau^4), \quad u > 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \frac{1}{r} \in O(0)$$

- spełnia warunki wypromieniowania w nieskończoności

$$/2.2 \text{ d/} \quad u_d(x, z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0; \quad u_r \quad u_d - \text{pole dyfrakcyjne}$$

gdzie kąty ϕ_1, ϕ_2 wiążą się z impedancjami półpłaszczyzny z_1, z_2 i ośrodka z_0 poprzez równania:
dla problemu TM

$$/2.3 \text{ a/} \quad \sin \phi_1 = - \frac{z_0}{z_1}; \quad \sin \phi_2 = - \frac{z_0}{z_2}$$

dla problemu TE

$$/2.3 \text{ b/} \quad \sin \phi_1 = - \frac{z_1}{z_0}; \quad \sin \phi_2 = - \frac{z_2}{z_0}$$

Tak zdefiniowane kąty ϕ_1, ϕ_2 odpowiadają zespolonym kątom propagacji fali powierzchniowych prowadzonych przez górną i dolną część półpłaszczyzny dyfrakującej.

Szukamy rozwiązania $u(x, z)$ w postaci sumy pola padającego $u_i(x, z)$ i pola rozproszonego $u_s(x, z)$

$$/2.4 a/ \quad u(x, z) = u_i(x, z) + u_s(x, z),$$

gdzie

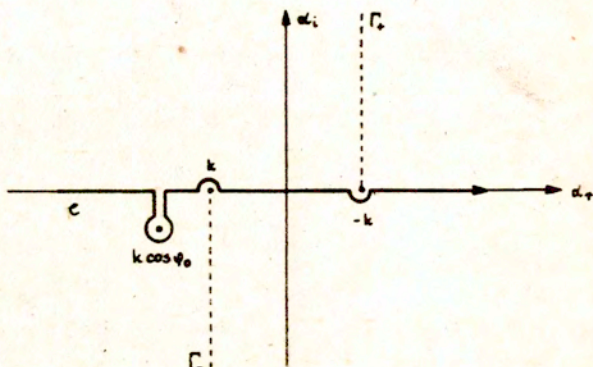
$$/2.4 b/ \quad u_s(x, z) = \int_{\mathcal{C}} A_1(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta z)} d\alpha, \quad z > 0,$$

$$/2.4 c/ \quad u_s(x, z) = \int_{\mathcal{C}} A_2(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta z)} d\alpha, \quad z < 0,$$

$$\beta(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$$

Kontur całkowania \mathcal{C} przebiega wzdłuż osi rzeczywistej w płaszczyźnie zmiennej zespolonej α z określonym poniżej poprzez równania /2 - 7/ ominięciem bieguna $\alpha_0 = k \cos \varphi_0$ fali padającej /rys. 2/. Wybór wartości funkcji $\beta(\alpha)$ na płaszczyźnie α , przy przyjętych liniach rozgałęzienia Γ_+ , Γ_- tej funkcji, wyznacza warunek

$$/2.5/ \quad \beta(\alpha) = k, \quad \text{gdy } \alpha = 0.$$



Rys.2. Kontur całkowania \mathcal{C} i linie rozgałęzienia Γ_+ , Γ_- funkcji $\beta(\alpha)$ ($k_i = 0$).

Wyznaczenie funkcji $A_1(\alpha)$, $A_2(\alpha)$ stanowi rozwiązanie problemu dyfrakcyjnego określonego poprzez zależności /2.1/ - /2.4/.

Wykorzystując ciągłość funkcji $u(x,z)$ i jej pochodnej $\frac{\partial}{\partial z} u(x,z)$ dla $z=0$, $x < 0$ otrzymujemy:

$$/2.6 \text{ a/} \quad A_1(\alpha) - A_2(\alpha) = L_1(\alpha)$$

$$/2.6 \text{ b/} \quad \beta(\alpha) [A_1(\alpha) + A_2(\alpha)] = L_2(\alpha)$$

gdzie funkcje $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ są holomorficzne w górnej części płaszczyzny α ograniczonej konturem \mathcal{C} .

Podobnie wykorzystując warunki brzegowe /2.2 b/ dla $z=0, x>0$ otrzymujemy:

$$/2.7 a/ \quad A_1(\alpha) (\beta(\alpha) - k \sin \varphi_1) = U_1(\alpha) - \frac{k (\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1)}{2\pi i (\alpha - k \cos \varphi_0)}$$

$$/2.7 b/ \quad A_2(\alpha) (\beta(\alpha) - k \sin \varphi_2) = U_2(\alpha) + \frac{k (\sin \varphi_0 + \sin \varphi_2)}{2\pi i (\alpha - k \cos \varphi_0)}$$

gdzie funkcje $U_1(\alpha), U_2(\alpha)$ są holomorficzne poniżej konturu całkowania \mathcal{C} .

Eliminując z równań /2.6/, /2.7/ funkcje $A^{(1)}(\alpha), A^{(2)}(\alpha)$ otrzymujemy wektorowe równanie Wienera-Hopfa

$$/2.8 a/ \quad \underline{G}(\alpha) \underline{L}(\alpha) = \underline{U}(\alpha) + \underline{P}(\alpha)$$

gdzie

$$/2.8 b, c/ \quad \underline{L}(\alpha) = \begin{bmatrix} L_1(\alpha) \\ L_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \underline{U}(\alpha) = \begin{bmatrix} U_1(\alpha) \\ U_2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$/2.8 d/ \quad \underline{P}(\alpha) = \frac{k}{2\pi i (\alpha - k \cos \varphi_0)} \begin{bmatrix} -\sin \varphi_0 + \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_0 + \sin \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$/2.8 e/ \quad \underline{G}(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta(\alpha) - k \sin \varphi_1 & \frac{1}{\beta(\alpha)} (\beta(\alpha) - k \sin \varphi_1) \\ -(\beta(\alpha) - k \sin \varphi_2) & -\frac{1}{\beta(\alpha)} (\beta(\alpha) - k \sin \varphi_2) \end{bmatrix}$$

Analogiczne równanie otrzymał Hurd [10] dla przypadku nie występowania odbitych fal powierzchniowych. Jednakże tutaj, fakt występowania odbitych fal powierzchniowych powoduje zerowanie się wyrażen $\beta - k \sin \varphi_1$, $\beta - k \sin \varphi_2$ na płacie zdefiniowanym zależnością /2.5/

$$/2.9 a/ \quad \beta(\alpha) - k \sin \varphi_1 = 0$$

$$/2.9 b/ \quad \beta(\alpha) - k \sin \varphi_2 = 0$$

co odpowiada następującym ograniczeniom nałożonym na wartości zespolone kątów φ_1 , φ_2 :

$$/2.10 a/ \quad 0 < \varphi_{1r} + \operatorname{sgn}(\varphi_{1i}) \operatorname{arccos}(1/\operatorname{ch} \varphi_{1i}) < \pi$$

$$/2.10 b/ \quad 0 < \varphi_{2r} + \operatorname{sgn}(\varphi_{2i}) \operatorname{arccos}(1/\operatorname{ch} \varphi_{2i}) < \pi$$

Jednocześnie z równań /2.8/, z przebiegu konturu całkowania \mathcal{C} i holomorficzności funkcji $\underline{L}(\alpha)$ poniżej konturu \mathcal{C} wynika, że wektorowe funkcje $\underline{G}(\alpha)$, $\underline{U}(\alpha)$, $\underline{P}(\alpha)$ są również holomorficzne w tym obszarze z wyjątkiem linii rozgałęzienia Γ . Stąd równania /2.9/ implikują następujące tożsamości:

$$/2.11 \text{ a}/ \quad U_1(-k \cos \varphi_1) + P_1(-k \cos \varphi_1) = 0,$$

$$/2.11 \text{ b}/ \quad U_2(-k \cos \varphi_2) + P_2(-k \cos \varphi_2) = 0,$$

gdzie jednoznacznie wyznaczając z równań /2.3/ wartości kątów φ_1 , φ_2 przyjeliśmy, że punkty $\alpha = -k \cos \varphi_1$, $\alpha = -k \cos \varphi_2$ leżą poniżej konturu całkowania \mathcal{C} . Równania /2.11/ są istotnym, dodatkowym ograniczeniem nałożonym na rozwiązanie równań Wienera-Hopfa /2.8/ i jak się okaże, determinują jednoznacznie rozwiązanie rozpatrywanego tutaj problemu dyfrakcyjnego. Jak wiadomo nie jest znana metoda bezpośredniego rozwiązania ogólnego równania wektorowego Wienera-Hopfa. Jednakże w roku 1975 Hurd [10] podał sposób sprowadzenia takich równań do problemu Hilberta na konturze Γ , który to problem jest w pewnej, określonej klasie przypadków rozwiązywalny [11]. Tę metodę, zwaną metodą Wienera-Hopfa-Hilberta można również zastosować do równań /2.8/.

Z własności holomorficzności funkcji $\beta(\alpha)$, $\underline{G}(\alpha)$, $\underline{U}(\alpha)$ w części płaszczyzny zespolonej α poniżej konturu \mathcal{C} z wyjątkiem linii rozgałęzienia Γ wynika istnienie granic lewostronnych $\beta^+(t)$, $\underline{G}^+(t)$, $\underline{U}^+(t)$ i granic prawostronnych $\beta^-(t)$, $\underline{G}^-(t)$, $\underline{U}^-(t)$ tych funkcji w każdym punkcie t konturu Γ oprócz jego końca $t = -k$. Funkcje $\underline{L}(\alpha)$, $\underline{P}(\alpha)$ jako holomorficzne w otoczeniu konturu Γ , posiadają równe sobie lewostronne i prawostronne granice w każdym punkcie t konturu Γ , wynoszące odpowiednio $\underline{L}(t)$, $\underline{P}(t)$.

Z równań Wienera-Hopfe /2.8/ otrzymujemy na konturze Γ_- :

$$/2.12 \text{ a/} \quad \underline{G}^+(t) \underline{L}(t) = U^+(t) + \underline{P}(t),$$

$$/2.12 \text{ b/} \quad \underline{G}^-(t) \underline{L}(t) = U^-(t) + \underline{P}(t).$$

Przy spełnieniu warunków niezzerowania się wyznacznika macierzy $\underline{G}_\pm(t)$ na Γ_\pm

$$/2.13 \text{ a/} \quad \beta(t) \neq +k \sin \varphi_1, \quad \beta(t) \neq +k \sin \varphi_2,$$

gdzie przyjęliśmy definicję funkcji $\beta(t)$ na Γ_-

$$\beta^+(t) = \beta(t), \quad \beta^-(t) = -\beta(t),$$

dochodzimy po krótkich przekształceniach do problemu Hilberta na konturze Γ_- dla funkcji $\underline{U}(\omega)$:

$$/2.14 \text{ a/} \quad \underline{H}(t) \underline{U}^-(t) = \underline{U}^+(t) + [\underline{I} - \underline{H}(t)] \underline{P}(t), \quad t \in \Gamma_-$$

$$/2.14 \text{ b/} \quad \underline{H}(t) = \underline{G}(t) [\underline{G}^-(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma(t) \\ \tau(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$/2.14 \text{ c, d/} \quad \sigma(t) = \frac{\beta(t) - k \sin \varphi_1}{\beta(t) + k \sin \varphi_2}, \quad \tau(t) = \frac{\beta(t) - k \sin \varphi_2}{\beta(t) + k \sin \varphi_1}.$$

Przy spełnieniu warunków /2.13 a, b/

$$/2.13 b/ \quad \beta(t) \neq -k \sin \varphi_1, \quad \beta(t) \neq -k \sin \varphi_2,$$

funkcje $\underline{H}(t)$ i $[\underline{I}-\underline{H}(t)]\underline{P}(t)$ spełniają warunek Höldera na konturze Γ i funkcja $H(t)$ nie zeruje się na Γ .

Rozwiązania $U(\alpha)$ problemu Hilberta /2.14/ będziemy poszukiwać w klasie funkcji

- holomorficznych w całej płaszczyźnie zespolonej α oprócz konturu Γ

$$/2.15 a/ \quad u(\alpha) \in A(C^1 - \Gamma_-)$$

- dopuszczających całkowalną osobliwość w punkcie $\alpha = -k$

$$/2.15 b/ \quad |U(\alpha)| \leq A|\alpha + k|^{-\delta}, \quad 0 < \delta < 1, A > 0, \alpha \in O(-k),$$

- zerujących się w nieskończoności

$$/2.15 c/ \quad |U(\alpha)| \leq A|\alpha|^{-u} \quad 0 < u < 1, A > 0, \frac{1}{\alpha} \in O(0).$$

- spełniających w punktach $\alpha = -k \cos \varphi_1$, $\alpha = -k \cos \varphi_2$ równania /11/

$$/2.15 d/ \quad U_1(-k \cos \varphi_1) = -P_1(-k \cos \varphi_1)$$

$$U_2(-k \cos \varphi_2) = -P_2(-k \cos \varphi_2)$$

Rozwiązanie jednorodnego problemu Hilberta, jak również rozwiązanie szczególne niejednorodnego problemu Hilberta /2.14/ otrzymuje się w sposób analogiczny do podanego przez Hurda [10], tak więc ograniczymy się tutaj do podania jedynie ostatecznych wzorów na te rozwiązania.

Jednorodny problem Hilberta

$$/2.16/ \quad \underline{H}(t) \underline{Y}_n^-(t) = \underline{Y}_n^+(t) ; \quad t \in \Gamma$$

posiada rozwiązanie w postaci:

$$/2.17 a/ \quad \underline{Y}_n(\alpha) = (\alpha + k)^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}(Q+R)} \\ (-1)^n e^{\frac{1}{2}(Q-R)} \end{bmatrix}$$

$$/2.17 b/ \quad Q(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{t-\alpha} \ln(\delta\tau)(t) dt ,$$

$$/2.17 c/ \quad R(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} (k+\alpha)^{\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} \frac{1}{t-\alpha} (k+\alpha)^{-\frac{1}{2}} \ln(\delta/\tau)(t) dt$$

Niejednorodny problem Hilberta /2.14/

$$\underline{H}(t) \underline{U}^-(t) = \underline{U}^+(t) + [\underline{1} - \underline{H}(t)] \underline{P}(t) , \quad t \in \Gamma$$

posiada rozwiązanie szczególne w postaci:

$$/2.18 a/ \quad \underline{U}_s(\alpha) = -\underline{P}(\alpha) + \underline{X}(\alpha) [\underline{X}(k \cos \varphi_0)]^{-1} \underline{P}(\alpha) ,$$

gdzie macierz $\underline{X}(\alpha)$ konstruujemy przy pomocy rozwiązań $\underline{Y}_1(\alpha)$
 $\underline{Y}_0(\alpha)$ jednorodnego problemu Hilberta

$$/2.18\ b/ \quad \underline{X}(\alpha) = [\underline{Y}_1(\alpha), \underline{Y}_0(\alpha)],$$

Macierz $\underline{X}(\alpha)$ stanowi rozwiązanie kanoniczne problemu Hilberta
 i faktoryzuje macierz $\underline{H}(\alpha)$.

$$/2.19/ \quad \underline{H}(\alpha) = \underline{X}^+(\alpha) [\underline{X}^-(\alpha)]^{-1}$$

Funkcja $U_3(\alpha)$ nie jest jednak rozwiązaniem ogólnym problemu
 Hilberta /2.14/, ponieważ nie spełnia równań /2.15 d/. Również
 rozwiązanie $\underline{Y}_n(\alpha)$, $\underline{U}_3(\alpha)$ jednorodnego i niejednorodnego pro-
 blemu Hilberta w przypadku występowania odbitych od krawędzi
 półpłaszczyzny fal powierzchniowych nie są równe odpowiednim
 rozwiązaniom otrzymanym przez Hurda dla przypadku nie występo-
 wania wyżej wymienionych fal. Wiąże się to z wynikającym ze
 spełnienia równań /2.10/ innym przebiegiem funkcji $Q(\alpha)$, a
 szczególnie z innym zachowaniem tej funkcji w otoczeniu punktu
 $\alpha = -k$.

Po pewnych obliczeniach, które z braku miejsca nie będą
 tutaj przytaczane, można otrzymać zachowanie się funkcji $Q(\alpha)$
 $R(\alpha)$ w otoczeniu punktu $\alpha = -k$ w przypadku spełnienia
 równań /2.10/.

$$/2.20/ \quad (\alpha + k)^{-1} e^{Q(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} (k^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$/2.21/ \quad e^{R(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}$$

Stąd otrzymujemy dla rozwiązań $\underline{Y}_n(\alpha)$, $\underline{U}_5(\alpha)$

$$/2.22/ \quad (\alpha + k)^{\frac{n}{2}-1} \underline{Y}_n(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} \begin{bmatrix} [S_1/(k^2 S_2^2)]^{1/4} \\ [S_2/(k^2 S_1^2)]^{1/4} \end{bmatrix}$$

$$/2.23/ \quad \underline{U}_5(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} \begin{bmatrix} -P_1(-k) \\ -P_2(-k) \end{bmatrix}$$

Ponieważ szukamy rozwiązania niejednorodnego problemu Hilberta /2.14/ w klasie funkcji dopuszczających całkowalną osobliwość w punkcie $\alpha = -k$, rozwiązanie ogólne $\underline{U}(\alpha)$ otrzymamy w postaci sumy rozwiązania szczególnego $\underline{U}_5(\alpha)$ i kombinacji rozwiązań ogólnych $\underline{Y}_n(\alpha)$, gdzie $n > -2$.

$$\underline{U}(\alpha) = \underline{U}_5(\alpha) + \sum_{n=-2}^{\infty} a_n \underline{Y}_n(\alpha)$$

Jednakże warunek (2-15c) nałożony na funkcję $\underline{U}(\alpha)$ wyklucza z powyższej sumy wszystkie człony dla $n > -1$. Stąd ostatecznie

$$/2.24 a/ \quad \underline{U}(\alpha) = \underline{U}_5(\alpha) + a_{-2} \underline{Y}_{-2}(\alpha) + a_{-1} \underline{Y}_{-1}(\alpha).$$

Współczynniki a_{-2} , a_{-1} można wyznaczyć z warunku /2.15d/. Otrzymujemy dla $C_0 = -C_1$, $C_0 = -C_2$ /

$$a_{-2} = \frac{1}{4\pi i} \frac{\sqrt{k(1-C_1)} \sqrt{k(1-C_2)}}{\sqrt{k(1-C_2)} + \sqrt{k(1+C_2)}} \times$$

/2.24 b/

$$\left\{ \frac{\sqrt{k(1-C_1)}}{C_1 + C_0} \left[(-S_0 + S_1) \left(1 + \sqrt{\frac{1-C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 + R_0)} + (S_0 + S_1) \left(1 - \sqrt{\frac{1-C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 - R_0)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{k(1-C_2)}}{C_2 + C_0} \left[(-S_0 + S_1) \left(1 - \sqrt{\frac{1-C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 + R_0)} + (S_0 + S_2) \left(1 + \sqrt{\frac{1-C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 - R_0)} \right] \right\}$$

/2.24 c/

$$a_{-1} = \frac{1}{4\pi i (\sqrt{k(1-C_1)} + \sqrt{k(1-C_2)})} \times$$

$$\left\{ \frac{k(1-C_1)}{C_1 + C_0} \left[(-S_0 + S_1) \left(1 + \sqrt{\frac{1-C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 + R_0)} + (S_0 + S_2) \left(1 - \sqrt{\frac{1-C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 - R_0)} \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{k(1-C_2)}{C_2 + C_0} \left[(-S_0 + S_1) \left(1 - \sqrt{\frac{1-C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 + R_0)} + (S_0 + S_2) \left(1 + \sqrt{\frac{1-C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(a_0 - R_0)} \right] \right\}$$

gdzie

$$S_0 = \sin \varphi_0, \quad C_0 = \cos \varphi_0, \quad Q_0 = Q(k, C_0), \quad R_0 = R(k, C_0)$$

$$S_1 = \sin \varphi_1, \quad C_1 = \cos \varphi_1,$$

$$S_2 = \sin \varphi_2, \quad C_2 = \cos \varphi_2.$$

Układ równań /2.14 c, d/, /2.17/, /2.18/, /2.24/ opisuje jednoznacznie rozwiązanie niejednorodnego problemu Hilberta /2.14/ w klasie funkcji określonych warunkami /2.15/.

Wykorzystując następnie równania /8/, /5/, /2/ otrzymujemy ścisłe jednoznaczne rozwiązanie $\underline{U}(x, z)$ problemu dyfrakcji fali niejednorodnej $\exp [ikx \cos \varphi_0 + ikz \sin \varphi_0]$ na półpłaszczyźnie impedancyjnej, spełniającej równanie Helmholtza /2.2 a/

warunki brzegowe na półpłaszczyźnie dyfrakującej /2.2 b/, warunki na krawędzi /2.2 c/ i warunek wypromieniowania /2.2 d/.

Przyjmując wartość rzeczywistą dla kąta φ_0 otrzymujemy również ściśle zagadnienie dyfrakcji fali płaskiej na półpłaszczyźnie impedancyjnej, o wartościach impedancji dopuszczających generowanie fal powierzchniowych przez krawędź półpłaszczyzny.

$$/2.25 a/ \quad u_+(x, z) = e^{ik(x \cos \varphi_0 + z \sin \varphi_0)} + \int_C A_+(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta z)} d\alpha; \quad z > 0$$

$$/2.25 b/ \quad u_-(x, z) = e^{ik(x \cos \varphi_0 + z \sin \varphi_0)} + \int_C A_-(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta z)} d\alpha; \quad z < 0$$

$$/2.25 c/ \quad A_+(\alpha) = \frac{k}{4\pi i (\alpha - k C_0) (\beta - k S_1)} e^{\frac{i}{2}(Q+R)} \left\{ \frac{4\pi i}{k} (\alpha - k C_0) \left(\frac{a_{-2}}{k+\alpha} + \frac{a_{-1}}{\sqrt{k+\alpha}} \right) + (-S_0 + S_1) \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+k C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(R_0+Q_0)} + (S_0 + S_2) \left(1 - \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+k C_0}} \right) e^{\frac{i}{2}(R_0-Q_0)} \right\},$$

$$/2.25 d/ \quad A_-(\alpha) = \frac{k}{4\pi i (\alpha - k C_0) (\beta - k S_2)} e^{\frac{i}{2}(Q-R)} \left\{ \frac{4\pi i}{k} (\alpha - k C_0) \left(\frac{a_{-2}}{k+\alpha} - \frac{a_{-1}}{\sqrt{k+\alpha}} \right) + (-S_0 + S_1) \left(1 - \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+k C_0}} \right) e^{-\frac{i}{2}(R_0+Q_0)} + (S_0 + S_2) \left(1 + \sqrt{\frac{k+\alpha}{k+k C_0}} \right) e^{\frac{i}{2}(R_0-Q_0)} \right\}.$$

Przy spełnieniu warunków /2.10/ współczynniki a_{-2} , a_{-1} wyznaczone są przez równania /2.15 d/; w przeciwnym przypadku równają się zeru. Jednakże przy szczególnych wartościach zespolonego kąta padania

$$/2.26 \text{ a, b/} \quad \psi_0 = \pi - \psi_1 \quad \text{lub} \quad \psi_0 = \pi - \psi_2$$

odpowiadających przypisaniu fali niejednorodnej postaci fali powierzchniowej, prowadzonej przez górną lub dolną stronę półpłaszczyzny impedancyjnej, ze spełnienia warunków /2.10/ wynika tylko jedno z dwóch równań /2.15 d/.

$$/2.27 \text{ a, b/} \quad U_2(-k \cos \psi_2) = -P_2(-k \cos \psi_2) \quad \text{lub}$$

$$U_1(-k \cos \psi_1) = -P_1(-k \cos \psi_1),$$

co nie wystarcza do wyznaczenia wartości współczynników a_{-1} , a_{-2} .

Związane jest to z faktem położenia w takim przypadku punktu $a = -k \cos \psi_1$ lub $a = -k \cos \psi_2$ ponad konturem całkowania ℓ w płaszczyźnie zmiennej zespolonej α .

Tak więc problem dyfrakcji fali powierzchniowej na półpłaszczyźnie impedancyjnej wymaga dodatkowej, oddzielnej analizy i nie będzie w tej pracy dalej rozpatrywany.

3. Rozwinięcie asymptotyczne rozwiązań

Bez utraty ogólności przyjmiemy w dalszych rozważaniach następujące ograniczenie na wartości zespolonego kąta propagacji fali padającej:

$$/3.1/ \quad \pi < \psi_{or} < \frac{1}{2} \pi, \quad \psi_{oi} < 0$$

jak również założymy, że impedancje po obu stronach półpłaszczyzny są typu pasywnego z nieznikającą częścią reaktywną,

z czego wynikają następujące ograniczenia na kąty ψ_1, ψ_2 :

$$/3.2 a/ \quad \sin \psi_{1r} < 0, \quad \cos \psi_{1r} \operatorname{sh} \psi_{1i} < 0,$$

$$/3.2 b/ \quad \sin \psi_{2r} < 0, \quad \cos \psi_{2r} \operatorname{sh} \psi_{2i} < 0.$$

Przechodząc poprzez równania:

$$/3.3 a, b/ \quad \alpha = k \cos \omega, \quad \beta = k \sin \omega$$

z płaszczyzny zmiennej zespolonej α do płaszczyzny zespolonego kąta ω ; $\omega = \omega_r + i \omega_i$ otrzymujemy z postaci wyrażeń /2.25/ i /2.10/ następujący rozkład biegunów funkcji $A_1(\alpha), A_2(\alpha)$ w płaszczyźnie zespolonej ω /rys. 3/:

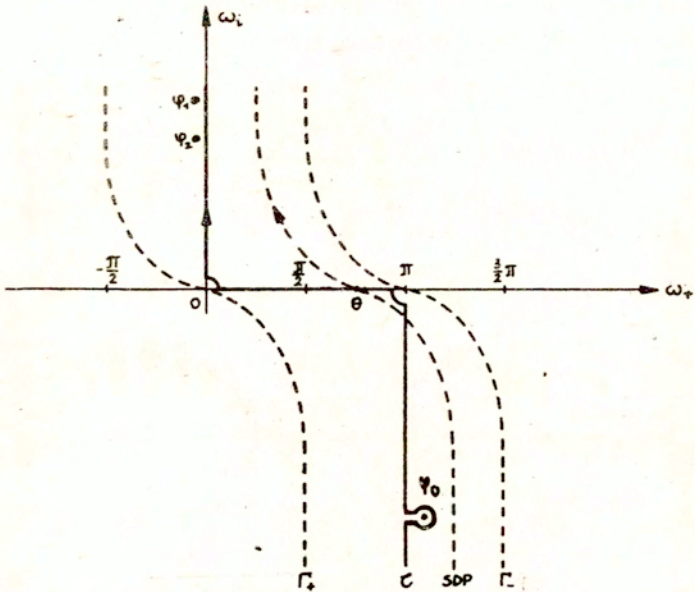
dla fali padającej - biegun pierwszego rzędu w punkcie $\omega = \psi_0$,
dla odbitych fal powierzchniowych - bieguny pierwszego rzędu
odpowiednio w punktach $\omega = \psi_1, \omega = \psi_2$, gdzie

$$/3.4 a/ \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{1r} < 0, \quad \psi_{1i} > 0$$

$$/3.4 b/ \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_{2r} < 0, \quad \psi_{2i} > 0$$

W płaszczyźnie (x, z) przyjmujemy wygodniejszy dla dalszych obliczeń układ współrzędnych (r, θ)

$$/3.5/ \quad x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$



Rys. 3. Kontur całkowania C , linie rozgałęzienia Γ_+ , Γ_- krzywa najszybszego spadku SDP i bieguny funkcji podcałkowej w płaszczyźnie ω ($k_i = 0$, $0 < \theta < \pi$).

Zmieniając kontur całkowania od krzywej C do krzywej najszybszego spadku SDP /rys. 3/, wyznaczonej równaniem

$$/3.6 \text{ a/} \quad \omega_r - \theta = -\text{sgn}(\omega_i) a + c \cos(1/ch\omega_i); \quad 0 < \theta < \pi$$

$$/3.6 \text{ b/} \quad \omega_r - (2\pi - \theta) = -\text{sgn}(\omega_i) a + c \cos(1/ch\omega_i); \quad \pi < \theta < 2\pi$$

i uwzględniając przyczynki do pola, wynikające z występowania biegunów funkcji $A_1(d)$, $A_2(d)$ pomiędzy tymi krzywymi, otrzymujemy następującą postać rozwiązania problemu dyfrakcji fali niejednorodnej na półpłaszczyźnie impedancyjne j:

$$u(r, \theta) = H \left\{ \theta - \psi_{0r} - \operatorname{sgn}(\psi_{0i}) \arccos [1/\operatorname{ch} \psi_{0i}] \right\} e^{ikr \cos(\psi_0 - \theta)}$$

/3.7 a/

$$+ \frac{S_0 + S_2}{S_0 - S_2} H \left\{ \theta - 2\pi + \psi_{0r} + \operatorname{sgn}(\psi_{0i}) \arccos [1/\operatorname{ch} \psi_{0i}] \right\} \times$$

$$\times e^{ikr \cos(\psi_1 + \theta)} + b_1 H \left\{ -\theta + \psi_{1r} + \operatorname{sgn}(\psi_{1i}) \arccos [1/\operatorname{ch} \psi_{1i}] \right\} \times$$

$$\times e^{ikr \cos(\psi_1 - \theta)} + b_2 H \left\{ \theta - 2\pi + \psi_{2r} + \operatorname{sgn}(\psi_{2i}) \arccos [1/\operatorname{ch} \psi_{2i}] \right\} \times$$

$$\times e^{ikr \cos(\psi_2 + \theta)} - \int_{\text{SDP}} A(k \cos \omega) k \sin \omega e^{ikr \cos[\omega + \theta \operatorname{sgn}(\theta - \pi)]} d\omega,$$

gdzie

/3.7 b/

$$b_1 = \frac{-1}{2C_1(C_1 - C_0)} e^{\frac{1}{2}(Q_1 + R_1)} \left\{ 4ni(C_1 - C_0) \left(\frac{a_{-2}}{k(1+C_1)} + \frac{a_{-1}}{\sqrt{k(1+C_1)}} \right) + \right.$$

$$\left. + (-S_0 + S_1) \left(1 + \sqrt{\frac{1+C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{1}{2}(Q_0 + R_0)} + \right.$$

$$\left. + (S_0 + S_2) \left(1 - \sqrt{\frac{1+C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{1}{2}(Q_0 - R_0)} \right\}$$

/3.7 c/

$$b_2 = \frac{-1}{C_2(C_2 - C_0)} e^{\frac{1}{2}(Q_2 - R_2)} \left\{ 4ni(C_2 - C_0) \left(\frac{a_{-2}}{k(1+C_2)} - \frac{a_{-1}}{\sqrt{k(1+C_2)}} \right) + \right.$$

$$\left. + (-S_0 + S_1) \left(1 - \sqrt{\frac{1+C_1}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{1}{2}(Q_0 + R_0)} + \right.$$

$$\left. + (S_0 + S_2) \left(1 + \sqrt{\frac{1+C_2}{1+C_0}} \right) e^{-\frac{1}{2}(Q_0 - R_0)} \right\}$$

$$A(d) = \begin{cases} A_1(d) & ; & 0 < \theta < \pi \\ A_2(d) & ; & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < 0 \\ 1 & ; & x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases},$$

$$\tilde{Q}_1 = Q(C_1), \quad Q_2 = Q(C_2), \quad R_1 = R(C_1), \quad R_2 = R(C_2)$$

Poszczególne składniki sumy występującej w równaniu /3.7 a/ można interpretować jako padającą falę niejednorodną, odbitą falę niejednorodną od dolnej części półpłaszczyzny, dwie wzbudzone na krawędzi półpłaszczyzny fale powierzchniowe, prowadzone przez górną i dolną część półpłaszczyzny i rozproszoną na krawędzi półpłaszczyzny falę cylindryczną.

LITERATURA

- [1] T.B.A. SENIOR - Diffraction by a semi - infinite metallic sheet. Proc. Roy. Soc. /London/, A 213, 436 - 458 /1952/.
- [2] T.B.A. SENIOR - Diffraction by an imperfectly conducting half - plane at oblique incidence. Appl. Sci. Res. Sect.B, 8, 35 - 61 /1960/.
- [3] W.E. WILLIAMS - Diffraction of an E - polarized plane wave by an imperfectly conducting wedge. Proc. Roy. Soc. /London/, 252, 376 - 393 /1959/.
- [4] W.E. WILLIAMS - Diffraction of an electromagnetic plane wave by a metallic sheet. Proc. Roy. Soc. /London/, A 257, 413 - 419 /1960/.
- [5] C.J. MARCINKOWSKI - Some diffraction patterns of an absorbing half-plane. Appl. Sci. Res. B, 189 - 198 /1959/.
- [6] G.D. MALIUŽINIEC - Wzbudzenie, odbicie i promieniowanie fal powierzchniowych na klinie z zadanymi impedancjami granic. Dokł. AN CCCP, 121, No 3, 436 - 439 /1958/.
- [7] G.D. MALIUŽINIEC - Das Sommerfeldsche Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten. Ann.Phys. /Leipzig/, 7, No 6, 107 - 112, /1960/.
- [8] W.E. WILLIAMS - Propagation of electromagnetic surface waves along wedge surfaces. Quart. J. Mech. Appl. Math., 13, 278 - 284 /1960/.
- [9] O.M. BUCCI, G. FRANCESCHETTI - Elektromagnetic scattering by a half plane with two face impedances. Radio Sci., 11, 49 - 59 /1976/.
- [10] R.A. HURD - The Wiener-Hopf-Hilbert method for diffraction problems, Can. J. Phys., 54, 775 - 780 /1975/.
- [11] R.A. HURD - A note the solvability of simultaneous Wiener-Hopf equations, Can. J. Phys., 57, 402 - 403 /1978/.