

P.269



**Maria Marks**

**O KOMPOZYTACH UZBROJONYCH  
DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEN**  
(Praca habilitacyjna)  
1/2004

h728

**WARSZAWA 2004**

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 7 październik 2003 r.

Recenzent - Prof. dr hab. inż. Romuald Świtka

Redaktor Naczelny - Prof. dr hab. Józef J. Telega



57259



**Praca habilitacyjna**

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 8,05 Ark. druk. 10,25  
Oddano do drukarni w maju 2004 r.

---

**ATOS** - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

<http://rcin.org.pl>

## O KOMPOZYTACH UZBROJONYCH DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEN

### STRESZCZENIE

Praca dotyczy kompozytów zbrojonych włóknami ciągłymi, mającymi szerokie zastosowanie zwłaszcza w nowoczesnych materiałach kompozytowych, w których matryca polimerowa, ceramiczna lub ze stopów metali uzbrojona jest włóknami szklanymi, węglowymi lub stalowymi. Również matryca betonowa, częściej zaprawa cementowa, może być zbrojona włóknami ciągłymi ułożonymi w sposób regularny jak np. siatkami stalowymi (siatkobeton) lub ciągłymi włóknami np. szklanymi alkalioodpornymi jak również w klasie wysokowartościowych kompozytów SIMCON, w których ciągłe włókna tworzące maty zatopione są w specjalnie zaprojektowanym zaczynie.

Rozważany jest materiał kompozytowy uzbrojony włóknami ciągłymi. Kompozyt składający się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien, ułożonymi symetrycznie względem płaszczyzny środkowej. Rodzinę włókien stanowią włókna identyczne ułożone równoległe względem siebie w pewnym kierunku na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny środkowej. Założono, że zarówno matryca jak i włókna są materiałami liniowo sprężystymi. Założono, że w kierunkach stycznych do rodzin występuje zgodność odkształceń między matrycą a włóknami.

W pracy rozwiązano dwa zagadnienia analizy i optymalizacji takich materiałów kompozytowych.

W pierwszym z nich rozpatrzono element tarczowy utworzony z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych nachylonych pod kątami  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do osi  $x_1$ . Element kompozytowy znajduje się w płaskim

stanie naprężenia opisanym trzema składowymi uogólnionego stanu naprężenia. Określono stan naprężenia i odkształcenia w elemencie poddanym obciążeniom normalnym i stycznym. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia elementu kompozytowego, którą sformułowano w układzie kierunków głównych naprężeń. Z twierdzenia Kuhna Tuckera określono warunki konieczne minimum. Przyjmując szczególne przypadki obciążenia elementu kompozytowego wyznaczono optymalne kąty ułożenia włókien w dwóch rodzajach kompozytów: kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi i wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi. Optymalne kąty zależą od stałych materiałowych matrycy i włókien oraz od zawartości objętościowej włókien i działających obciążeń. Zbadano wpływ stosunku naprężeń głównych na rozwiązanie w przypadku dwóch rodzajów kompozytów o zasadniczo różnych właściwościach włókien i matrycy.

Wyniki otrzymane w rozdziale czwartym zastosowano do numerycznego rozwiązania zagadnienia optymalizacji tarczy z materiału kompozytowego (załącznik).

Rozpatrzono również zagadnienie optymalizacji dwukryterialnej. Jako kryteria przyjęto minimum energii odkształcenia oraz minimum kosztu elementu kompozytowego. Jako zmienne decyzyjne przyjęto kąty nachylenia włókien oraz ich zawartość objętościową. Rozpatrując szczególne przypadki obciążeń w elementach kompozytowych o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi oraz w wysokowartościowych elementach kompozytowych o matrycach cementowych uzbrojonych włóknami stalowymi wyznaczono rozwiązania optymalne w sensie przyjętych kryteriów.

W drugim z nich rozpatrzono nieskończoną tarczę kompozytową utworzoną z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami równoległych włókien ciągłych osłabioną  $n$  szczelinami oddziaływanymi na siebie. Na tarczę tą w nieskończoności działa zadane pole naprężeń. Określono najpierw lokalny stan naprężenia w tarczy z  $j$ -tą szczeliną w jej własnym układzie współrzędnych. Następnie wyznaczono stan naprężenia na brzegu  $j$ -tej szczeliny jako sumę lokalnego stanu naprężenia i stanu naprężenia generowanego przez pozostałe szczeliny wzdłuż brzegu  $j$ -tej

szczeliny. Są to osobliwe równania całkowe pierwszego rodzaju z osobliwością typu Cauchy. Następnie określono współczynniki intensywności naprężeń i wyzwiania energii w wierzchołkach szczelin poprzez niewiadome funkcje określone w wierzchołkach.

Jako przypadek szczególny rozpatrzono tarczę o matrycy betonowej uzbrojoną dwiema rodzinami włókien stalowych z dwiema ustalonymi szczelinami. Otrzymano przybliżone rozwiązania układu równań całkowych stosując kolokacyjną metodę całkową Lobatto-Chebysheva. Wykorzystując przybliżone rozwiązania określono współczynniki intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$  oraz współczynniki wyzwiania energii  $G$  w wierzchołkach szczelin przy zmiennych kątach nachylenia włókien. Wyznaczono również kąty nachylenia włókien, przy których największy współczynnik wyzwiania energii przyjmuje wartości minimalne.

Celem pracy jest znalezienie w elemencie kompozytowym utworzonym z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych przy zadanych obciążeniach takich kątów ułożenia włókien, przy których energia odkształcenia osiąga minimum. Poza tym tak dobierano kąty nachylenia włókien i zawartość objętościową włókien, aby energia odkształcenia oraz koszt rozpatrywanego elementu kompozytowego osiągały minimum. Również w materiale kompozytowym osłabionym  $n$  szczelinami oddziaływanymi na siebie poszukiwano takich kątów nachylenia rodzin włókien, aby największy współczynnik wyzwiania energii przyjmował wartości minimalne.

## SPIS TREŚCI

<b>1. Przedmiot, cel i zakres pracy</b> .....	9
<b>2. Materiały kompozytowe uzbrojone włóknami</b> .....	17
2.1. Kompozyty o wysokiej wytrzymałości .....	17
2.2. Kompozyty o matrycach betonopodobnych.....	27
<b>3. Optymalizacja kompozytów zbrojonych włóknami</b> .....	33
3.1. Wprowadzenie.....	33
3.2. Formułowanie zagadnień optymalizacji wielokryterialnej .....	34
3.3. Przegląd zagadnień optymalizacji kompozytów uzbrojonych włóknami.....	37
<b>4. Element kompozytowy uzbrojony dwiema rodzinami włókien</b> ....	43
4.1. Odkształcenie elementu kompozytowego .....	43
4.2. Optymalne kierunki ułożenia włókien .....	49
4.2.1. Kryterium optymalizacji i warunki konieczne minimum.....	49
4.2.2. Optymalne kąty ułożenia włókien w kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi.....	58
4.2.3. Optymalne kąty ułożenia włókien w wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi .....	61
4.2.4. Zależność optymalnego ułożenia włókien w materiale kompozytowym od stosunku naprężeń głównych .....	65
4.2.5. Mechaniczna interpretacja warunków koniecznych ekstremum.....	69

4.3. Optymalne ułożenie i zawartość włókien.....	71
4.4. Optymalizacja wielokryterialna ukierunkowania i zawartości włókien.....	77
4.4.1. Kryteria optymalizacji.....	77
4.4.2. Minimalna energia odkształcenia i minimalny koszt w kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi.....	79
4.4.3. Minimalna energia odkształcenia i minimalny koszt w wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi.....	82
<b>5. Materiał kompozytowy uzbrojony dwiema rodzinami włókien osłabiony n szczelinami.....</b>	<b>85</b>
5.1. Sformułowanie zagadnienia.....	85
5.2. Stan naprężenia w tarczy zawierającej jedną szczelinę.....	89
5.3. Stan naprężenia na brzegu szczeliny wywołany oddziaływaniem innych szczelin.....	105
5.4. Współczynniki intensywności naprężenia i wyzwalań energii.....	114
5.5. Rozwiązanie przypadku szczególnego przy $n = 2$ . .....	119
<b>6. Podsumowanie i wnioski.....</b>	<b>129</b>
<b>Publikacje cytowane.....</b>	<b>141</b>
<b>Załącznik</b>	
Numeryczne rozwiązanie zagadnienia optymalizacji tarczy z materiału kompozytowego .....	151
<b>Summary.....</b>	<b>159</b>

## 1. PRZEDMIOT, CEL I ZAKRES PRACY

Kompozyty zbrojone włóknami są od szeregu lat przedmiotem badań doświadczalnych i rozważań teoretycznych. Właściwości mechaniczne kompozytu zależą od matrycy, od rodzaju i ilości włókien jak również od ich rozmieszczenia i ukierunkowania. Do wyznaczania stanu naprężenia i odkształcenia w kompozycie zbrojonym włóknami służą teorie kontynualne. W większości modeli kontynualnych kompozyty zbrojone włóknami są traktowane jako ośrodki jednorodne i anizotropowe. W modelach tych stałe sprężyste kompozytu przyjmowane są jako znane. Kompozyty zbrojone jedną rodziną włókien traktowane są jako ośrodki poprzecznie izotropowe. Materiały zbrojone dwiema rodzinami włókien o ile są to rodziny ortogonalne lub rodziny równoważne mechanicznie (nierozróżnialne w wyjątkiem swoich kierunków) traktowane są jako ośrodki ortotropowe [95].

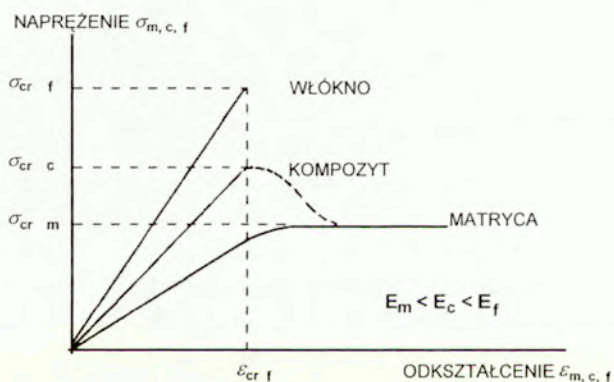
Innego rodzaju podejściem kontynualnym jest opis materiału kompozytowego uwzględniający własności fizyczne matrycy i włókien oraz modelu ich wzajemnego oddziaływania, w ramach którego opisany jest kompozyt rozpatrywany w niniejszej pracy. W wielu pracach przyjmowany jest model kompozytu uwzględniający opis wzajemnego oddziaływania poszczególnych faz na siebie i tak np. w pracach [49], [50], [98], [99] przyjęto, że odkształcenia w matrycy i we włóknach są identyczne we wszystkich kierunkach. To założenie wykorzystano do wyprowadzenia równań zginania płyt sprężystych uzbrojonych włóknami [98].

Przedmiotem pracy jest materiał kompozytowy uzbrojony włóknami ciągłymi. Rozważany jest kompozyt składający się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien, ułożonymi symetrycznie względem płaszczyzny środkowej. Rodzinę włókien stanowią włókna identyczne



ułożone równolegle względem siebie w pewnym kierunku na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny środkowej. Założono, że zarówno matryca jak i włókna są materiałami liniowo sprężystymi. Założono, że w kierunkach stycznych do rodzin występuje zgodność odkształceń między matrycą a włóknami.

Praca dotyczy kompozytów zbrojonych włóknami ciągłymi, ponieważ takie kompozyty mają szerokie zastosowanie zwłaszcza w nowoczesnych materiałach kompozytowych, w których matryca polimerowa, ceramiczna lub ze stopów metali uzbrojona jest włóknami szklanymi, węglowymi lub stalowymi. Również matryca betonowa częściej zaprawa cementowa może być zbrojona włóknami ciągłymi ułożonymi w sposób regularny jak np. siatkami stalowymi (siatkobeton) lub ciągłymi włóknami np. szklanymi alkalioodpornymi [76] jak również w klasie wysokowartościowych kompozytów SIMCON [61], w których ciągłe włókna tworzące maty zatopione są w specjalnie zaprojektowanym zaczynie.

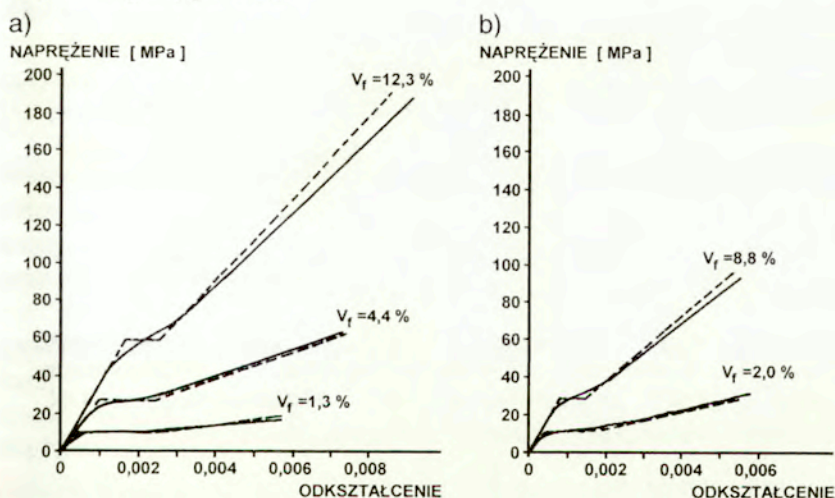


Rys. 1.1. Typowy wykres naprężenie-odkształcenie włókien, matrycy i materiału kompozytowego [18].

W mechanizmie odkształceń kompozytów, w których odkształcalność graniczna włókien jest znacznie większa od odkształcalności granicznej matrycy można wyróżnić trzy kolejne stany. W pierwszej fazie, gdy naprężenia rozciągające są małe, matryca i włókna

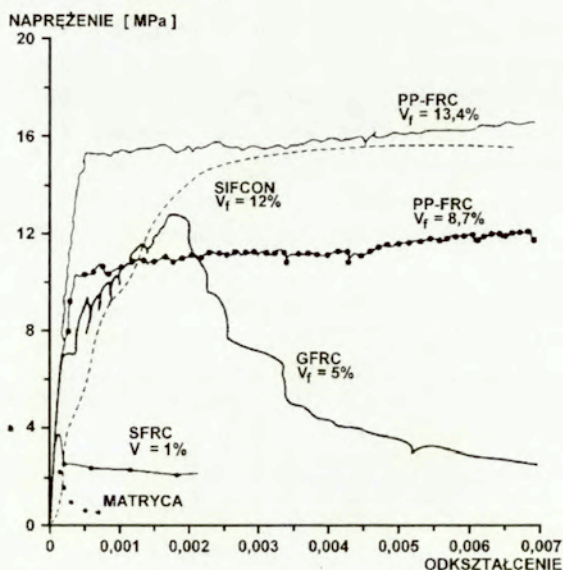
odkształcają się wspólnie, przenosząc siły wewnętrzne proporcjonalnie do pól ich przekrojów i modułów sprężystości. W tej fazie matryca i włókna zachowują się jak materiały sprężyste. W chwili, gdy naprężenia rozciągające w matrycy osiągną pewną wartość graniczną, przestają one wzrastać – przyjęć można, że rozciągana matryca weszła w obszar odkształceń quasi- plastycznych, w obrębie których wydłuża się ona nie wykazując wzrostu naprężeń. Cały przyrost sił wewnętrznych przejmują wówczas włókna. Gdy wydłużenia matrycy osiągną tę wartość graniczną, matryca przestaje się wydłużać, powstają w niej zarysowania. W tym momencie włókna przejmują już całkowitą siłę rozciągającą.

Wprowadzanie włókien o znacznie większej wytrzymałości od matrycy ma dwa cele: podnosi wartość naprężeń, przy których kompozyt przestaje zachowywać się jak materiał sprężysty (rys. 1.1 i 1.2) oraz pozwala na przeniesienie znacznie większych obciążeń w stanie zarysowanym (rys. 1.3).



Rys. 1.2. Wykres naprężenie-odkształcenie rozciąganego elementu kompozytowego o matrycy cementowej uzbrojonego ciągłymi a) włóknami węglowymi b) włóknami stalowymi (linia ciągła – wyniki doświadczalne, linia przerywana – wyniki uzyskane na podstawie teorii ACK [4]) [18], [58].

W pracy analizowano i optymalizowano materiały kompozytowe znajdujące się w pierwszej fazie obciążenia. Poszukiwane jest takie rozmieszczenie dwóch rodzin włókien, aby materiał zachował jak najdłużej cechy sprężyste, a w przypadku materiału z istniejącymi w nim rysami, aby propagacja tych rys rozpoczęła się przy możliwie największych obciążeniach.



Rys. 1.3. Wykres naprężenie-odkształcenie w stanie jednoosiowego rozciągania kompozytów o matrycy betonowej z różnym uzbrojeniem (matryca, SFRC – włókna stalowe, GFRC – włókna szklane, SIFCON, PP-FRC – włókna polipropylenowe) [65].

Celem pracy jest znalezienie w elemencie kompozytowym utworzonym z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych przy zadanych obciążeniach takich kątów ułożenia włókien, przy których energia odkształcenia osiąga minimum. Poza tym tak dobierano kąty nachylenia włókien i zawartość objętościową włókien, aby energia odkształcenia oraz koszt rozpatrywanego elementu kompozytowego

osiągały minimum. Również w materiale kompozytowym osłabionym  $n$  szczelinami oddziaływującymi na siebie poszukiwano takich kątów nachylenia rodzin włókien, aby największy współczynnik wyzwalaenia energii przyjmował wartości minimalne.

W rozdziale drugim omówiono materiały kompozytowe uzbrojone włóknami. Przedstawiono cechy, własności i zastosowanie kompozytów o wysokiej wytrzymałości, którymi są materiały utworzone z matrycy polimerowej, metalowej lub ceramicznej wzmocnione włóknami ciągłymi lub krótkimi o znacznej zawartości objętościowej włókien. Omówiono również kompozyty o matrycach z betonów lub zapraw cementowych zbrojonych włóknami stalowymi zwanych fibrobetonami, w których zawartość włókien stanowi niewielki procent objętości kompozytu. Wspomniano o nowej klasie fibrobetonów tzw. wysokowartościowych zbrojonych włóknami kompozytów o matrycy cementowej oraz o kompozytach cementowych, których zbrojeniem jest włókno szklane alkalioodporne.

W rozdziale trzecim omówiony jest sposób formułowania zagadnień optymalizacji wielokryterialnej materiału kompozytowego oraz dokonany jest przegląd prac dotyczących kompozytów uzbrojonych włóknami.

Oryginalnymi częściami pracy jest rozdział czwarty i piąty. Rozważania w nich dotyczą modelu materiału kompozytowego uzbrojonego dwiema rodzinami włókien wprowadzonego w ramach opisu kontynualnego uwzględniającego własności fizyczne matrycy i włókien oraz ich wzajemne oddziaływanie.

W rozdziale czwartym rozpatrzono element tarczowy utworzony z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych nachylonych pod kątami  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do osi  $x_1$ . Element kompozytowy znajduje się w płaskim stanie naprężenia opisanym trzema składowymi uogólnionego stanu naprężenia. Określono stan naprężenia i odkształcenia w elemencie poddanym obciążeniom normalnym i stycznym. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia elementu kompozytowego, wyrażoną w układzie kierunków naprężeń głównych. Z twierdzenia Kuhna-Tuckera określono warunki konieczne minimum. Wykazano, że przy optymalnych kątach ułożenia włókien kierunki główne naprężeń i odkształceń są współliniowe podobnie jak w

materiałach ortotropowych co zostało wykazane w pracach Pedersena [84], Rovatiego [90], jak również w materiałach poprzecznie izotropowych i o symetrii kubicznej w pracy Covina [26]. Przy różnych obciążeniach normalnych i stycznych wyznaczono optymalne kąty ułożenia włókien i ich zależność od kierunku naprężeń głównych w kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi oraz w wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi. Optymalne kąty ułożenia włókien zależą od stałych materiałowych matrycy i włókien, od działających obciążeń oraz od zawartości objętościowej włókien.

Rozpatrzono również zagadnienie optymalizacji dwukryterialnej. Jako kryteria przyjęto minimum energii odkształcenia oraz minimum kosztu elementu kompozytowego. Jako zmienne decyzyjne przyjęto kąty nachylenia włókien oraz ich zawartość objętościową. Rozpatrując szczególne przypadki obciążeń w elementach kompozytowych o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi oraz w elementach o matrycy z wysokowartościowego betonu uzbrojonego włóknami stalowymi wyznaczono rozwiązania optymalne w sensie przyjętych kryteriów.

Zagadnienia optymalizacji jedno i dwukryterialnej rozpatrywane w czwartym rozdziale różnią się istotnie od zagadnień rozpatrywanych w pracach dotyczących optymalizacji kompozytów uzbrojonych włóknami, których szerszy przegląd przedstawiony jest w podrozdziale 3.3. W pracach tych rozpatrywane są kompozyty z jedną rodziną włókien, traktowane jako materiał poprzecznie izotropowy lub w zagadnieniach dwuwymiarowych jako ortotropowy oraz kompozyty uzbrojone dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien. Kompozyty uzbrojone dwiema nieortogonalnymi rodzinami włókien nie były dotąd przedmiotem optymalizacji. Do nielicznych publikacji dotyczących optymalizacji wielokryterialnej materiałów kompozytowych uzbrojonych włóknami należą: praca Eschenauera [37] poświęcona optymalizacji konstrukcji warstwowych na podstawie kryteriów: minimum ciężaru oraz minimum największego ugięcia oraz prace wykonane w IPPT PAN [20 - 23], [41].

W rozdziale piątym rozpatrzono nieskończoną tarczę kompozytową utworzoną z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami równoległych

włókien ciągłych osłabioną  $n$  szczelinami oddziaływanymi na siebie. Na tarczę tą w nieskończoności działa zadane pole naprężeń. Określono najpierw lokalny stan naprężenia w tarczy z pojedynczą  $j$ -tą szczeliną w jej własnym układzie współrzędnych przez dwie nieznane funkcje. Następnie uwzględniając istnienie  $n$  szczelin wyznaczono stan naprężenia na brzegu  $j$ -tej szczeliny jako sumę lokalnego stanu naprężenia i stanu naprężenia generowanego przez pozostałe szczeliny wzdłuż brzegu  $j$ -tej szczeliny. Są to osobliwe równania całkowe pierwszego rodzaju z osobliwością typu Cauchy z nieznanymi funkcjami, których jest  $2n$ . Równania te, po zastosowaniu metody Lobatto-Chebysheva i uwzględnieniu warunków brzegowych można przybliżyć układem liniowych równań algebraicznych. Nieznane funkcje są poszukiwane w dyskretnych punktach jak również w punktach określających wierzchołki szczelin. Poprzez niewiadome funkcje określone w wierzchołkach można wyrazić współczynniki intensywności naprężeń i wyzwalań energii w wierzchołkach szczelin.

Jako przypadek szczególny rozpatrzono tarczę o matrycy betonowej uzbrojoną dwiema rodzinami włókien stalowych z dwiema ustalonymi szczelinami. Wykorzystując przybliżone rozwiązania określono współczynniki intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$  oraz współczynniki wyzwalań energii  $G$  w wierzchołkach szczelin przy zmiennych kątach nachylenia włókien. Wyznaczono również kąty nachylenia włókien, przy których największy współczynnik wyzwalań energii przyjmuje wartości minimalne.

Rozdział piąty zawiera sformułowanie i rozwiązanie oryginalnego zagadnienia optymalnego wyboru kątów nachylenia dwóch rodzin włókien w nieskończonej tarczy kompozytowej osłabionej  $n$  szczelinami. Większość prac dotyczących materiałów osłabionych szczelinami poświęcona jest rozpatrywaniu nieskończonych tarcz z materiału izotropowego, w których znajdują się jedna, dwie lub więcej szczelin, np. [5], [7], [88]. Z nielicznych prac dotyczących analizy tarcz osłabionych szczelinami i uzbrojonych włóknami należy wymienić prace Biniendy [8] oraz Świtki [100]. Praca [8] dotyczy analizy materiału kompozytowego z jednokierunkowym rozmieszczeniem włókien osłabionego  $n$  szczelinami, który opisany jest jako materiał ortotropowy. W pracy Świtki [100]

rozpatrywane jest zagadnienie nieograniczonej tarczy z materiału sprężystego uzbrojonej dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien ułożonymi równoległe do osi układu współrzędnych i osłabionej jedną szczeliną. Rozważania przeprowadzone w tej pracy dotyczą modelu kompozytu uwzględniającego własności fizyczne matrycy i włókien oraz ich wzajemne oddziaływanie [98]. Analiza tarcz kompozytowych uzbrojonych dwiema dowolnymi rodzinami włókien, a szczególnie ich optymalizacja jest zagadnieniem nowym.

W rozdziale szóstym przedstawiono podsumowanie otrzymanych wyników i sformułowano wnioski do dalszych badań.

W załączniku omówiono zastosowanie rozwiązań uzyskanych w rozdziale czwartym do numerycznego rozwiązania zagadnienia optymalizacji tarczy z materiału kompozytowego. Tarczę rozwiązano za pomocą programu opartego na metodzie elementów skończonych z wbudowanym modelem anizotropii [74]. Do programu tego zaimplementowano procedury optymalizacyjne CAMOS. Zamieszczono przykłady optymalizacyjne tarczy z wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi i tarczy z matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi.

## **2. MATERIAŁY KOMPOZYTOWE UZBROJONE WŁÓKNAMI**

### **2.1. KOMPOZYTY O WYSOKIEJ WYTRZYMAŁOŚCI**

Powstanie nowoczesnych materiałów kompozytowych związane jest z rozwojem technologii wytwarzania włókien sztucznych oraz wyprodukowaniem żywic syntetycznych. Produkcję włókien szklanych rozpoczęto w roku 1931 po otrzymaniu patentu przez dwie amerykańskie firmy - Owens Illinois Glas Co. i Corning Glass Works. Materiały z żywic zbrojonych włóknami szklanymi są stosowane coraz częściej, od momentu ich wprowadzenia w czasie II wojny światowej w przemyśle zbrojeniowym. Skala zainteresowań zwiększyła się znacznie wraz z odkryciem w 1950 r. termoutwardzalnych poliestrów. Dążenie do lekkich materiałów wymaganych w technice lotniczej przyczyniło się do powstania włókien węglowych - najpierw tzw. niskomodulowych w latach 50-tych, a następnie wysokomodulowych w latach 60-tych. W latach 70-tych powstały włókna aramidowe znane pod nazwą handlową Kewlar, a w latach 80-tych włókna z polietylenu [40], [108].

Gwałtowny wzrost wykorzystania kompozytów w konstrukcjach w ostatnich latach wynika z tego, że kompozyty mają bardzo dobre parametry mechaniczne i wytrzymałościowe oraz mały ciężar właściwy. Są przede wszystkim wykorzystane w konstrukcjach statków kosmicznych, samolotów, samochodów a także sprzętu sportowego np. narty, rakiety tenisowe, łodzie, rowery. Coraz częściej stosuje się nowoczesne kompozyty przy produkcji nadwozi samochodów sportowych.

Kompozyty o wysokiej wytrzymałości uzbrojone włóknami są materiałami utworzonymi z matrycy polimerowej, metalowej lub



ceramicznej wzmocnionymi ciągłymi lub krótkimi włóknami o wysokiej wytrzymałości, przy czym zawartość objętościowa włókien jest znaczna i przekracza niekiedy 60 %. Największe zastosowanie znajdują kompozyty o matrycy polimerowej, natomiast kompozyty o matrycy metalowej i ceramicznej są najczęściej wykorzystywane w elementach konstrukcji pracujących w wysokich temperaturach. Podstawowym elementem nośnym w tych kompozytach są włókna, natomiast matryca służy jako spoiwo i działa jako ośrodek przekazujący obciążenia zewnętrzne włóknom przenosząc jedynie małą część przyłożonego obciążenia, ponadto chroni ona włókna przed uszkodzeniami zewnętrznymi i reakcjami chemicznymi.

W kompozytach zbrojonych włóknami wykorzystuje się tę ważną właściwość większości materiałów, że włókna o małej średnicy mogą przenosić znacznie większe naprężenia rozciągające niż materiał o składzie włókien i dużych wymiarach. Tak na przykład stal konstrukcyjna ma wytrzymałość na rozciąganie w granicach 0,2-0,7 GPa, natomiast cienkie włókna stalowe osiągają wytrzymałość 4GPa, [40]. Większość włókien stosowanych w kompozytach ma średnice w granicach od 10 do 150  $\mu\text{m}$ .

Istotnym warunkiem, jaki powinien być spełniony szczególnie w przypadku włókien krótkich o wysokiej wytrzymałości i ciągliwej matrycy jest to, aby przyczepność między włóknami a matrycą była wystarczająco duża do przekazywania obciążeń. W wielu kompozytach polimerowych zwiększa się przyczepność poprzez odpowiednią obróbkę powierzchni włókien. Również w przypadku kompozytów o matrycy metalowej bardzo pożądana jest duża przyczepność między matrycą a włóknami. Natomiast w przypadku kompozytów o matrycy ceramicznej duża przyczepność jest wręcz unikana. W kompozytach o matrycy ceramicznej pożądane są mocne włókna i względnie słaba przyczepność tak, aby na skutek zerwania przyczepności, rysy w matrycy przebiegały wzdłuż włókien.

Głównym celem projektowania kompozytów jest otrzymanie materiału o określonych cechach mechanicznych, w następnej kolejności uwzględniane są inne czynniki np. koszt, łatwość technologii. Najlepsze

własności mechaniczne kompozytu uzyskuje się łącząc bardzo wytrzymałe długie włókna z matrycą, wtedy mamy do czynienia z uzbrojeniem włóknem ciągłym. Najczęściej uzbrojenie włóknem ciągłym w kompozytach przebiega w jednym kierunku oznaczane symbolicznie 1D. Kompozyty takie mają najwyższą wytrzymałość na rozciąganie i moduł sprężystości w kierunku równoległym do włókien. Wytrzymałość i moduł sprężystości w innych kierunkach są znacznie niższe niż w kierunku wzdłużnym i przyjmują najniższe wartości w kierunku normalnym do włókien. W układzie 2D włókna ułożone są w płaszczyznach równoległych. Mogą być one rozmieszczone w dwóch kierunkach, w wielu kierunkach lub w sposób przypadkowy. Włókna ułożone w dwóch kierunkach, w wielu kierunkach lub w sposób przypadkowy w przestrzeni to układ 3D. W układzie 2D i 3D włókna mogą być układane w postaci mat i tkanin.

Dobierając odpowiednio orientację włókien, można dla zadanego obciążenia uzyskać kompozyt o żądanych własnościach. Stosowane jest także uzbrojenie włóknem krótkim również w układzie 1D, 2D, 3D. Jeśli włókna są przypadkowo zorientowane wtedy własności mechaniczne takiego kompozytu są jednakowe we wszystkich kierunkach. Własności mechaniczne kompozytu o takim uzbrojeniu nie osiągają tak wysokich wartości jak przy uzbrojeniu włóknem ciągłym i dlatego stosowane są w przypadkach, gdy nie są wymagane bardzo wysokie wartości wytrzymałości i modułu sprężystości, albo gdy kierunki obciążeń nie są z góry określone.

W kompozytach włóknistych jako matryce stosowane są metale, materiały ceramiczne i żywice polimerowe. W tabelicy 2.1 zamieszczono własności niektórych matryc. Obszerniejsze zestawienie własności matryc można znaleźć m.in. w pracach [18], [65].

Kompozyty o matrycy metalowej oprócz wysokich modułów sprężystości i wytrzymałości, również w kierunku poprzecznym, wykazują odporność na wysoką temperaturę i tak np. kompozyty o matrycy metalowej uzbrojone włóknami wolframowymi mogą pracować w temperaturze przekraczającej nawet 1000°C. Wykazują odporność na ścieranie porównywalną z nieuzbrojoną matrycą. Są one wykorzystywane

## Własności wybranych matryc

Rodzaj matrycy	Własności matrycy					
	Gęstość $\gamma$ [ $\times 10^3$ kg/m <sup>3</sup> ]	Wytrzyma- łość na ściskanie $f_c$ [MPa]	Wytrzyma- łość na rozciąganie $f_t$ [MPa]	Moduł sprężystości $E$ [GPa]	$f_t$ /ciężar właściwy [ $\times 10^6$ mm]	$E$ /ciężar właściwy [ $10^6$ mm]
epoksydowa	1,1 – 1,2	90 - 200	35 - 100	1,5 – 7,0	3,2 – 8,3	136 – 580
poliestrowa	1,05 – 1,3	90 - 250	30 - 90	1,5 – 6,0	2,9 – 7,0	140 – 460
poliuretanowa	1,1 – 1,2		20 - 70	1,5 – 2,5	1,8 – 5,8	136 – 210
stop aluminium 6061 – T6	2,7		310	70	11,7	2600
stop tytanu Ti – 6Al – 4V	4,43		1171	110	26,9	2530

w przemyśle lotniczym, w produkcji silników i sprzętu wojskowego. Kompozyty o matrycy metalowej mają jednakże wysoki ciężar właściwy, wymagają wysokich temperatur podczas procesów technologicznych i wykazują tendencję do korozji na powierzchni granicznej między matrycą a włóknami, która jest redukowana poprzez odpowiednie otulenie włókien lub chemicznie.

Najczęściej stosowane w metalowych kompozytach są matryce wykonane z metali lekkich. Są to zwykle matryce wykonane ze stopów aluminium lub tytanu. Stopy aluminium są tańsze, ale stopy tytanu mają wyższą wytrzymałość właściwą (stosunek wytrzymałości do ciężaru właściwego). Ponadto współczynnik rozszerzalności cieplnej stopu tytanu jest bliższy współczynnikom zbrojących włókien, co wpływa na zmniejszenie residualnych naprężeń termicznych. Kompozyty o matrycach metalowych są zwykle zbrojone włóknami węglowymi, boronowymi, borsikowymi (są to włókna boru pokryte węglikiem krzemu) lub metalowymi np. wolframowymi [9]. Są głównie zbrojone włóknami ciągłymi w jednym kierunku. W kompozytach o matrycy ze

stopu aluminium z uzbrojeniem ciągłym jednokierunkowym, o zawartości objętościowej 50%, moduł sprężystości w kierunku włókien jest trzykrotnie wyższy niż moduł nieuzbrojonej matrycy i osiąga wartość bliską modułowi stali. Nawet moduł sprężystości w kierunku poprzecznym, który jest niższy niż w kierunku włókien, osiąga wartość wyższą niż samego stopu aluminium. Również wytrzymałość tych kompozytów jest wyższa niż samej matrycy, zwłaszcza przy większych średnicach włókien. W przypadku włókien boronowych/borsikowych o średnicy 145  $\mu\text{m}$  osiąga wytrzymałość w kierunku włókien 1400 MPa a w kierunku poprzecznym 100 MPa. Ta sama matryca zbrojona włóknami węglowymi wysokomodułowymi o średnicy mniejszej niż 20  $\mu\text{m}$  osiąga wartość w kierunku włókien 550 MPa a w kierunku poprzecznym 70 MPa [65].

Matryce metalowe zbrojone są również włóknami krótkimi i wiskersami. Wiskersy są to bardzo cienkie monokryształy o strukturze krystalicznej prawie bez dyslokacji, co powoduje ich wyjątkowo dużą wytrzymałość. Produkcja takich kompozytów wzrosła w latach 80-tych co było związane ze znaczną obniżką cen wiskersów z węgla krzemu. Zawartość objętościowa włókien w takich kompozytach wynosi od 5 do 25%. Moduły sprężystości kompozytów o matrycy ze stopu aluminium uzbrojonej wiskersami z węgla krzemu o zawartości objętościowej 20% osiągają wartości między 90 a 110 GPa, które są o 30% większe niż samego stopu aluminium. Wytrzymałość kompozytu na rozciąganie jest większa w przypadku uzbrojenia wiskersami niż włóknami krótkimi [65].

Kompozyty zbrojone włóknami o matrycy ceramicznej mają większą wytrzymałość i odporność na pękanie niż sama matryca. Elementy konstrukcji wykonane z tych kompozytów mogą pracować w wysokich temperaturach. Są wykorzystywane do produkcji części silników samochodowych i odrzutowych. Matryca ceramiczna może być zbrojona włóknami ciągłymi, ale również krótkimi i wiskersami. W przypadku zbrojenia wiskersami odporność na pękanie osiąga wartości 8-12  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ , podczas gdy sama matryca ma wartości 3-5  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ . Uzbrojenie włóknami ciągłymi powoduje znaczne powiększenie odporności na pękanie nawet do 25-35  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$  [65]. Włókna

zwiększając odporność na pękanie kruchej matrycy zwłaszcza wtedy, gdy nie są z nią zbyt mocno związane. W takim kompozycie powstałe pęknięcia przebiega wzdłuż granicy matrycy z włóknem a słabe powiązanie włókien z matrycą umożliwia wyciąganie się włókien z matrycy. W wyniku tych procesów pochłaniana jest dodatkowa energia a zatem zwiększona odporność na pękanie.

Obecnie największe zastosowanie praktyczne mają kompozyty zbrojone włóknami o matrycy polimerowej. Najważniejszą ich zaletą jest niski ciężar właściwy oraz duże wartości wytrzymałości i modułu sprężystości. Niski ciężar właściwy kompozytów wynika z małych ciężarów właściwych ich składników (tabl. 2.1 i 2.2). Niezależnie od użytej matrycy polimerowej, rodzaju włókien i ich zawartości objętościowej ciężar właściwy kompozytów jest niewielki w porównaniu z ciężarem stali czy stopu aluminium.

W kompozytach polimerowych zbrojonych włóknami istnieje możliwość ukierunkowania uzbrojenia tak, aby wytrzymałość i moduły sprężystości osiągały żądane wartości w wybranych kierunkach a nie były jednakowe jak w materiałach izotropowych.

W kompozytach o matrycy polimerowej współczynnik tłumienia jest wyższy niż w metalach, a zatem hałas i drgania w konstrukcjach wykonanych z tych kompozytów są efektywniej tłumione niż w konstrukcjach metalowych.

Matryca polimerowa w kompozytach pełni rolę spoiwa dla włókien tworząc razem z włóknami elementy powierzchniowe, z których mogą być wytwarzane elementy konstrukcyjne. Matryca stanowi również w pewnym stopniu powłokę ochronną dla włókien. Bierze udział również w przenoszeniu obciążeń jakim poddany jest kompozyt. Wpływ matrycy na charakterystyki sztywności i wytrzymałości kompozytu jest niewielki. Moduł sprężystości i wytrzymałość na rozciąganie matrycy polimerowej są mniejsze o około dwa rzędy w porównaniu z modułem sprężystości i wytrzymałością włókien.

Podstawowe klasy matrycy polimerowej to żywice termoplastyczne i termoutwardzalne. Żywice termoplastyczne od termoutwardzalnych różnią się zachowaniem przy ogrzewaniu i chłodzeniu. Żywice termoplastyczne poddane ogrzewaniu miękną, a chłodzone twardnieją.

Jest to proces odwracalny i powtarzalny podczas cyklu ogrzewanie-chłodzenie. Żywice termoutwardzalne poddane ogrzewaniu podlegają trwałemu utwardzeniu i nie zmieniają swojego stanu podczas następnego cyklu ogrzewanie-chłodzenie. Materiały termoutwardzalne niezależnie od zmian temperatury zachowują swój pierwotny kształt. Są one twardsze i bardziej wytrzymałe, ale bardziej kruche niż tworzywa termoplastyczne. W kompozytach zbrojonych włóknami ciągłymi stosowane są zazwyczaj żywice należące do klasy tworzyw termoutwardzalnych np. epoksydowa, fenolowa, poliestrowa. W kompozytach zbrojonych krótkimi włóknami używane są również matryce należące do klasy żywic termoplastycznych.

Kompozyty o matrycy polimerowej zbrojone są następującymi rodzajami włókien:

- Szklanymi, które są najtańsze i najczęściej stosowane w przemyśle samochodowym, lotnictwie, elektronice, szkutnictwie. Występują dwa typy włókien szklanych E i S. Włókna szklane typu E mają gorsze własności mechaniczne niż włókna typu S, ale zdecydowanie niższą cenę i wobec tego są znacznie częściej stosowane. Włókna typu S stosowane są przeważnie w przemyśle zbrojeniowym.

- Grafitowymi (węglowe o uporządkowanej strukturze), które przewyższają większością parametrów włókna szklane, ale są od nich zdecydowanie droższe. Występują trzy grupy włókien grafitowych: włókna wysokowytrzymałe, wysokomodułowe i ultrawysokomodułowe.

- Węglowymi o mniej uporządkowanej strukturze niż włókna grafitowe. Mają gorsze własności mechaniczne niż włókna grafitowe, ale są zdecydowanie od nich tańsze.

- Aramidowymi, które należą do grupy włókien organicznych. Mają one najlepsze własności mechaniczne, ale są najdroższe. Wykorzystywane są w przemyśle lotniczym, samochodowym a przede wszystkim do produkcji sprzętu sportowego jak np. narty, jachty i żagliwki wyczynowe. Ze względu na ich wysoką cenę często łączy się je z włóknami grafitowymi lub szklanymi typu E uzyskując wtedy kompozyt o nieco niższych własnościach mechanicznych, ale i o niższej cenie.

Własności wybranych włókien zestawiono w tabelicy 2.2. Własności wielu rodzajów włókien można znaleźć m.in. w pracach [9], [18], [65].

TABLICA 2.2

## Własności wybranych włókien

Rodzaj włókna	Własności włókien				
	Gęstość $\gamma$ [ $\times 10^3$ kg/m <sup>3</sup> ]	Wytrzymałość na rozciąganie $f_t$ [MPa]	Moduł sprężystości $E$ [GPa]	$f_t$ / ciężar właściwy [ $\times 10^6$ mm]	$E$ / ciężar właściwy [ $10^6$ mm]
szklane E	2,54	3700	77,5	150	3050
szklane S	2,45	4300	88	175	3600
szklane alkali- odporne Cem-FIL		2500	80		
grafitowe	1,6 – 2,2	1500 – 4000	200 - 450	95 – 180	12500 – 20500
węglowe	1,63	600 – 900	38,6	37 – 55	2370
boronowe	2,60	3000 – 4000	420	120 – 150	16000
SiC	3,50	1000 – 4000	400 - 450	30 – 115	11400 – 12900
aramidowe (Kevlar)	1,45	2900 – 4000	133	200 – 275	9170
stalowe	7,85	280 – 4200	210	3,6 – 54	2680

Najczęściej kompozyty o matrycy polimerowej składają się z warstw zwanych również laminami ułożonych jedna na drugiej i połączonych trwale ze sobą. Włókna stanowią zasadniczy element nośny warstwy, natomiast matryca pełni rolę spoiwa, chroni włókna przed uszkodzeniami jak również przekazuje obciążenia. Pojedynczą warstwę tworzą włókna połączone między sobą żywicą. Rodzaje włókien, ich orientacja może być w każdej warstwie inna. Warstwy połączone są tym samym materiałem, z którego wykonana jest matryca. Najczęściej w warstwie stosowane są włókna ciągle przebiegające w jednym kierunku. W większości zastosowań poszczególne warstwy kompozytu laminatowego różnią się między sobą jedynie orientacją włókien a zbudowane są z takiej samej matrycy (rys. 2.1). Sposób ułożenia warstw tzn. pod jakim kątem ułożone są włókna w poszczególnych warstwach określony jest za pomocą kodu podającego te kąty. Zwykle stosowane są następujące typy kompozytów

laminatowych:

- Kompozyt laminatowy jednokierunkowo zbrojony włóknami, tu w każdej warstwie nachylenie włókien jest takie samo np. ...  $\theta / \theta / \theta / \theta / \dots$  .

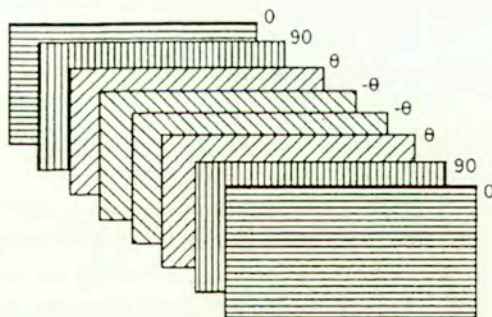
- Kompozyt laminatowy zbrojony równoległymi włóknami na przemian jedna warstwa pod kątem  $-\theta$  następna pod kątem  $+\theta$  tzn.

...-  $\theta / +\theta / -\theta / +\theta / \dots$  .

- Kompozyt laminatowy zbrojony na przemian w warstwach włóknami prostopadłymi do siebie tzn. ... $0 / 90 / 0 / 90 / \dots$  .

- Kompozyt laminatowy symetryczny tzn. taki, w którym warstwy są rozłożone symetrycznie względem płaszczyzny środkowej. Na przykład kompozyt o układzie warstw  $[0 / +30 / -30 / -30 / +30 / 0]$  jest laminatem symetrycznym, co możemy zapisać  $[0/\pm 30]_s$ , tu indeks s oznacza symetrię. Również kompozyt o układzie warstw  $[0 / +45 / -45 / 90 / -45 / +45 / 0]$  jest laminatem symetrycznym tu płaszczyzna środkowa laminatu pokrywa się z płaszczyzną środkową centralnej warstwy uzbrojonej włóknami pod kątem  $90^\circ$ .

- Kompozyt laminatowy quasi-izotropowy składa się z trzech lub więcej warstw ze specjalnie ułożonymi włóknami tak aby w płaszczyźnie laminatu moduł sprężystości, współczynnik Poissona, moduł ścinania były izotropowe. Przykładami takich kompozytów quasi-izotropowych są kompozyty o następującym ułożeniu warstw  $[0 / +60 / -60]$  i  $[0 / +45 / -45 / 90]$ .



Rys. 2.1. Kompozyt laminatowy symetryczny o układzie warstw  $[0 / 90 / \theta / -\theta / -\theta / \theta / 90 / 0]$ .



Czasami łączy się warstwy uzbrojone różnymi typami włókien lub w tej samej warstwie mogą występować różne rodzaje włókien i wtedy mamy do czynienia z kompozytami laminatowymi hybrydowymi. Powodem stosowania kompozytów hybrydowych jest obniżenie kosztu i tak na przykład włókna węglowe wysokomodułowe, które są bardzo drogie łączy się z włóknami tańszymi.

Głównym przeznaczeniem kompozytów polimerowych uzbrojonych włóknami było ich wykorzystanie w przemyśle lotniczym i kosmicznym. Jednakże od kilku lat znajdują one zastosowanie także w przemyśle samochodowym, petrochemicznym, ochronie środowiska, budownictwie a szczególnie w mostownictwie. Do najbardziej znanych zastosowań w mostownictwie należy zaliczyć wzmacnianie żelbetowych konstrukcji nośnych taśmami kompozytowymi [3], [91], zbrojenie elementów betonowych prętami z kompozytów polimerowych [33] oraz wzmacnianie podpór na terenach sejsmicznych np. przez owijanie słupów taśmami czy matami [96]. Ponadto kompozyty polimerowe zbrojone włóknami stosowane są do produkcji wyposażenia lub nawet całych mostów, charakteryzują się zwiększoną odpornością na korozję i większą wytrzymałością zmęczeniową w porównaniu do stali. Mają dobre właściwości mechaniczne, mały ciężar właściwy, są trwałe. Pomosty wykonane z tych materiałów kompozytowych nie wymagają tak częstych napraw i konserwacji jak pomosty mostów żelbetowych czy stalowych. Kompozyty polimerowe zbrojone włóknami są szczególnie użyteczne w środowiskach o dużej korozyjności np. w środowisku wody morskiej lub atmosferze zawierającej agresywne czynniki chemiczne.

Jedną z najnowszych metod wytwarzania elementów konstrukcyjnych z kompozytów polimerowych jest metoda przeciągania ciągłego. Polega ona na nasyceniu wiązki równoległych włókien lub mat żywicą a następnie przeciąganie przez rozgrzany element formujący, gdzie następuje utwardzenie żywicy i ostatecznie zostaje uformowany sztywny profil. Na przykład wyprodukowane tą metodą dwuteowniki szerokostopowe z dwukierunkowym układem włókien charakteryzują się dużą wytrzymałością i sztywnością oraz mają zapewnioną ciągłość włókien między półkami i środkiem.

Różne profile produkowane metodą prasowania ciągłego zostały

wykorzystane w latach dziewięćdziesiątych m. in. do budowy szeregu mostów np. kompozytowej kładki dla pieszych w Aberfeldy w Szkocji [45], [46], kładki nad linią kolejową w Kolding (Dania) [38], [97], mostu No-Name Creek w stanie Kansas (USA), mostu podnoszonego Bonds Mill Lift w zachodniej Anglii [106].

## **2.2.KOMPOZYTY O MATRYCACH BETONOPODOBNYCH**

Kompozyty o matrycach z betonów lub zapraw cementowych zbrojonych włóknami mają szerokie zastosowanie w konstrukcjach budowlanych. Różnią się one zasadniczo od kompozytów o wysokich wytrzymałościach. Różnice te wynikają głównie z tego, że matryca jest krucha, zawartość włókien stanowi niewielki procent objętości kompozytu, a ponadto przyczepność włókien do matrycy jest niedoskonała. Kompozyty o matrycach betonopodobnych zbrojone są przeważnie włóknami krótkimi: stalowymi, szklanymi, polipropylenowymi a także pochodzenia organicznego (np. z bawełny, sizalu). Włókna mogą być ułożone w sposób uporządkowany lub przypadkowy. Takie kompozyty nazwane są fibrobetonami. Matryca betonowa, zaczyn lub zaprawa cementowa, może być również zbrojona włóknami ciągłymi. Najbardziej rozpowszechniony jest siatkobeton. Jest to beton o drobnym kruszywie lub zaprawa cementowa uzbrojone siatkami z miękkiego drutu stalowego. Siatki mogą mieć oczka kwadratowe, sześciokątne, rombów lub inne. Najczęściej stosowane są siatki tkane, plecione, zgrzewane, skręcane [11], [18].

Włókna stalowe stosowane w fibrobetonach mają średnice od 0,4 do 1,1 mm; są to włókna najczęściej proste o przekroju okrągłym lub zbliżonym do kolistego. W celu poprawy współdziałania krótkich włókien stalowych z matrycą stosuje się również włókna o zwiększonej przyczepności: nagniatane, faliste albo zaopatrzone w haczyki na końcach. Najczęściej włókna wykonane są ze stali miękkiej rzadziej twardej. Ze względów technologicznych zawartość objętościowa włókien nie powinna przekraczać 3%, zwykle stosuje się 1,5-2%. Włókna

najczęściej mają długość od 25 do 100 mm tak, że stosunek długości do średnicy nie przekracza 100.

Obecność włókien w fibrobetonie powoduje, że kompozyt ten ma odmienne właściwości fizykalne od zwykłego betonu. Podstawowa różnica polega na tym, że fibrobeton po zarysowaniu matrycy może przenosić duże obciążenia. Po wystąpieniu rys w matrycy w obszarach naprężeń rozciągających wpływ uzbrojenia staje się decydujący. Rysy nie propagują się swobodnie i nie prowadzą do gwałtownego zniszczenia, powstrzymywane są przez włókna, których wyciągnięcie z matrycy wymaga znacznej pracy sił zewnętrznych.

Włókna w fibrobetonie mogą być rozmieszczone i ukierunkowane w sposób całkowicie przypadkowy. Taki układ oznacza się symbolem 3D. Układ włókien oznaczony symbolem 2D występuje w przypadku, gdy włókna rozmieszczone są również przypadkowo, ale równoległe do określonej płaszczyzny. W układzie 1D włókna usytuowane są równoległe do pewnego kierunku. Uzyskanie takiego układu możliwe jest przez odpowiednie zabiegi technologiczne np. w przypadku włókien stalowych za pomocą linearyzacji magnetyczne. W rzeczywistych materiałach układ włókien oraz ich procentowa zawartość są zmienne i zależą od miejsca. Określenie rzeczywistego rozkładu włókien jak też rzeczywistej zawartości włókien w elementach z fibrobetonu wymagają sprawdzenia doświadczalnego za pomocą fotografii rentgenowskich cienkich warstw elementu lub przez analizowanie metodami stereologii powierzchni przekrojów tych elementów.

Skuteczność uzbrojenia włóknami krótkimi rozproszonymi zależy od kilku czynników, z których najważniejsze to:

- procentowa zawartość włókien w kompozycie i ich rzeczywiste rozmieszczenie
- kształt włókien i ich przyczepność do matrycy
- ułożenie włókien w stosunku do kierunków głównych naprężeń rozciągających.

Kompozyty o matrycy cementowej uzbrojone włóknami wykazują wzrost wytrzymałości na rozciąganie i zginanie a przede wszystkim wykazują radykalną poprawę odporności na pękanie i na uderzenia.

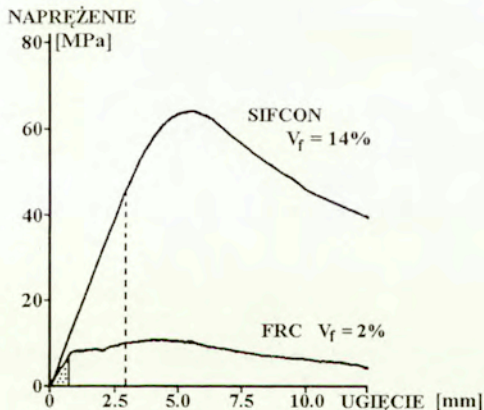
Na podstawie licznych badań stwierdzono, że wpływ dodatku 2,5%

włókien stalowych rozproszonych w sposób nieuporządkowany (3D) [11], może spowodować zależnie od rodzaju matrycy i innych warunków, następujące efekty:

- dwu a nawet trzykrotny wzrost obciążenia zginającego wywołującego określone rozwarście rys,
- dwukrotny wzrost wytrzymałości na rozciąganie przy rozłupywaniu,
- wzrost prawie o 50% wytrzymałości na rozciąganie bezpośrednie.

Obecność włókien nie ma wyraźnego wpływu na wytrzymałość elementów ściskanych.

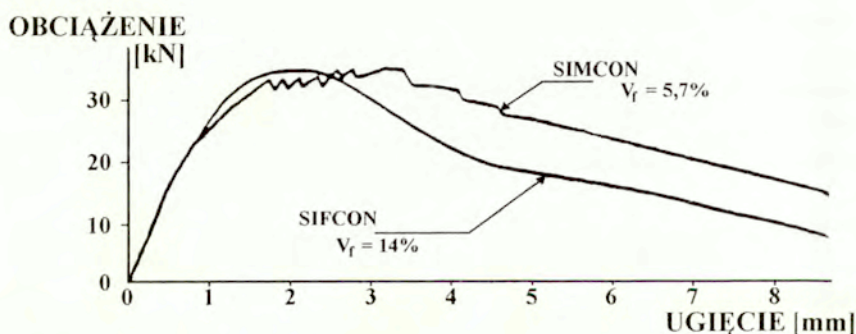
W latach 90-tych pojawiła się nowa klasa fibrobetonów tzw. wysokowartościowych zbrojonych włóknami kompozytów o matrycy cementowej, w języku angielskim określanymi jako HPRFRC (high performance fiber reinforced cementitious composites), charakteryzujących się wysoką zawartością włókien, znacznie większą niż w klasycznym fibrobetonie, określonym jako FRC, oraz zdecydowanie lepszymi własnościami mechanicznymi rys. 2.2 [79]. Reprezentantami nowej klasy kompozytów jest SIFCON i SIMCON.



Rys. 2.2. Krzywe naprężenie-ugięcie w zginanych elementach wykonanych z SIFCON i FRC.

SIFCON jest to kompozyt składający się z włókien o wysokiej zawartości objętościowej zatopionych w zaczynie cementowym. W przypadku włókien stalowych ta zawartość wynosi od 7 do 15%, a czasami nawet do 27%. Są to włókna często dłuższe niż w zwykłym fibrobetonie zakończone haczykami rozłożone w sposób przypadkowy. Włókna są najpierw układane w formie a następnie zalewane specjalnie zaprojektowanym zaczynem cementowym o ciekłej konsystencji [18], [79].

Natomiast SIMCON jest kompozytem składającym się z ciągłych włókien tworzących maty, zatopionych podobnie jak SIFCON, w specjalnie zaprojektowanym zaczynie cementowym. Zawartość objętościowa włókien w SIMCON wynosi do 8%. Orientacja włókien w matach może być odpowiednio dobierana. Wobec takiej możliwości bardzo wysoką wytrzymałość na rozciąganie i odporność na zniszczenie można uzyskać przy dużo niższej zawartości włókien niż w SIFCON-ie, w którym nie ma się wpływu na orientację włókien rys.2.3 [61].



Rys. 2.3. Wykresy obciążenie – ugięcie w zginanych elementach wykonanych z SIMCON i SIFCON.

W latach 70-tych zaczęto wykorzystywać w kompozytach cementowych włókna szklane alkalioodporne. Pierwszy patent na kompozycję szkła alkalioodpornego uzyskał A.J.Majundar [64].

Uzbrojenie w postaci włókien szklanych alkalioodpornych stosowane jest do zaczynów lub zapraw cementowych. W matrycach cementowych nie można używać włókien szklanych typu E bardzo rozpowszechnionych w kompozytach polimerowych, ponieważ ulegają one szybkiej korozji co wiąże się z utratą właściwości mechanicznych uzyskanych dzięki wprowadzeniu zbrojenia. Włókna szklane alkalioodporne mogą występować w postaci ciągłej tzw. rowingu lub w postaci włókien krótkich ciętych o długości od 6 do 40 mm. Pojedyncze włókna szklane mają średnice od 13 do 20 mikrometrów. Wytrzymałość na rozciąganie pasm włókien (kilkaset pojedynczych włókien ciągłych ułożonych równolegle) przewyższa wytrzymałość zaprawy o trzy rzędy wielkości. Natomiast ich moduł sprężystości jest około 3-4 razy większy niż moduł zaprawy. Powyższe właściwości, a także przyczepność włókien do matryc cementowych sprawiają, że można je stosować jako efektywne zbrojenie kompozytów [42]. W kompozytach o matrycach cementowych używane są przede wszystkim włókna krótkie cięte, które zwykle rozmieszczone są przypadkowo, ale równolegle do określonej płaszczyzny, zatem w układzie 2D. Zawartość objętościowa włókien szklanych ciętych w matrycach cementowych wynosi 2-4%.

W ostatnich latach w kompozytach cementowych oprócz włókien ciętych krótkich alkalioodpornych zaczęto używać włókna cięte dłuższe 50 mm w postaci płaskich mat jak również włókien ciągłych. Włókna ciągle są stosowane w postaci siatek podobnych do siatek używanych w kompozytach polimerowych, ponadto w postaci równoległych jednokierunkowych pasm utrzymywanych poprzecznie poprzez cienkie siatki oraz w postaci prętów utworzonych ze skręconych pasm włókien, które stanowią konkurencję dla prętów stalowych oraz kabli sprężających. W pracy [76] przedstawiono wyniki badań trzech typów belek różniących się uzbrojeniem. W pierwszej grupie występowało samo zbrojenie krótkimi włóknami 12 mm CEM-FIL 60/38 o zawartości wagowej wynoszącej 3%, w drugiej grupie zbrojeniem były trzy warstwy siatek CEM-FIL 120 g/cm<sup>2</sup> o zawartości uzbrojenia 0,82%. Natomiast w trzeciej grupie występowało uzbrojenie włóknami krótkimi w ilości 1,5% oraz dwie warstwy siatek. Tu całkowita zawartość uzbrojenia wynosiła 2,05%. Belki te poddano 4-punktowemu zginaniu. Najlepsze wyniki mechaniczne

otrzymano w przypadku belek z grupy trzeciej. Zatem ingerowanie w ułożenie i orientację włókien ciągłych alkalioodpornych ma wpływ na poprawę właściwości mechanicznych elementów konstrukcji.

## **3. OPTIMALIZACJA KOMPOZYTÓW ZBROJONYCH WŁÓKNAMI**

### **3.1. WPROWADZENIE**

Poszukiwanie materiałów kompozytowych o coraz doskonalszych właściwościach, w tym materiałów stosowanych w budownictwie, jest przedmiotem licznych badań zarówno teoretycznych jak i eksperymentalnych [17]. Materiałom tym stawiane są różnorodne wymagania, często ze sobą sprzeczne. Optymalizacja, zwłaszcza optymalizacja wielokryterialna, może pomóc w znalezieniu materiału o żądanych właściwościach w krótszym czasie i przy mniejszych nakładach. Dlatego też w wielu przypadkach warto skorzystać z metod optymalizacji wielokryterialnej.

Aby z rozwiązania zagadnienia optymalizacji uzyskać wyniki poprawne i przydatne muszą być spełnione dwa zasadnicze warunki. Po pierwsze przyjęty model matematyczny materiału kompozytowego musi dostatecznie dokładnie opisywać zachowanie tego materiału w rozpatrywanym zakresie oddziaływań. Optymalizujemy bowiem nie materiał, a jego model i uzyskane wyniki będą obarczone skutkami przyjętych założeń upraszczających. Po drugie samo zagadnienie optymalizacji musi być poprawnie sformułowane i rozwiązane dostatecznie dokładnie. Muszą być więc przyjęte kryteria optymalizacji oraz określone zmienne decyzyjne i ograniczenia. Nie istnieje bowiem materiał optymalny w ogóle, a jedynie optymalny w sensie przyjętych kryteriów, przy danych zmiennych decyzyjnych i ograniczeniach.

W optymalizacji materiałów kompozytowych rozpatrywane są zagadnienia, w których modele matematyczne przyjmowane są na podstawie rozważań teoretycznych, bądź też drogą wyboru funkcji



opisujących dostatecznie dokładnie zbiory zależności eksperymentalnych. W pierwszym przypadku występują analityczne zależności funkcji celu od zmiennych decyzyjnych oraz wyrażone analitycznie ograniczenia jako funkcje tych zmiennych. W drugim przypadku zbiór wartości funkcji celu odpowiadający pewnym wartościom zmiennych decyzyjnych aproksymowany jest funkcjami tych zmiennych, np. wielomianami odpowiednich stopni. Współczynniki występujące w tych funkcjach wyznaczane są zwykle metodą najmniejszych kwadratów.

Kryteriami optymalizacji są przede wszystkim właściwości materiałów kompozytowych, takie jak:

- wytrzymałości na ściskanie, rozciąganie i zginanie,
- naprężenia rysujące,
- energia odkształcenia,
- energia zniszczenia,
- współczynniki intensywności naprężeń lub współczynniki wyzwiania energii w wierzchołkach szczelin
- urabialność,
- mrozoodporność,
- skurcz,
- a także koszt.

Zmiennymi decyzyjnymi są przede wszystkim ilości i rodzaje poszczególnych składników oraz ich rozmieszczenie w przestrzeni. Zmienne decyzyjne mogą być określone w sposób ciągły, np. jako ilość poszczególnych składników materiału kompozytowego. Mogą być też określone w sposób nieciągły jako rodzaje tych składników.

## **3.2. FORMUŁOWANIE ZAGADNIEŃ OPTIMALIZACJI WIELOKRYTERIALNEJ**

Przy formułowaniu zagadnień optymalizacji podstawowymi pojęciami są: zmienne decyzyjne, ograniczenia oraz kryteria nazywane inaczej funkcjami celu.

Zmiennymi decyzyjnymi są wielkości opisujące materiał

i podlegające wariacjom w procesie optymalizacji. Zmienne te mogą być określone w sposób ciągły lub dyskretny. Zmienne decyzyjne mają postać wektora  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  w przestrzeni  $n$ -wymiarowej  $A$  zwanej przestrzenią zmiennych decyzyjnych.

W optymalizacji materiałów prawie nigdy nie są poszukiwane ekstrema bezwarunkowe funkcji celu. Zwykle występuje wiele ograniczeń, które określają obszar rozwiązań dopuszczalnych  $X$ , który stanowi zwykle część  $n$ -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych  $A$ . Granice obszaru dopuszczalnego wyznaczają ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne. Ograniczenia brzegowe występują w postaci jawnej i są nakładane na poszczególne zmienne decyzyjne:

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \overline{x}_i.$$

Ograniczenia zachowawcze występują w postaci uwikłanej, tzn. w postaci warunków nałożonych na pewne zależności pomiędzy zmiennymi decyzyjnymi. Ograniczenia te mają postać równości lub nierówności

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{x}) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, r, \\ g_j(\mathbf{x}) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

W  $n$ -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych ograniczenia przedstawiają hiperpowierzchnię zawierającą punkty spełniające te ograniczenia w postaci równości.

Funkcją celu lub kryterium w optymalizacji przyjęto nazywać wyrażenie matematyczne opisujące pewną własność materiału stanowiącą kryterium jego oceny.

Optymalizacja wielokryterialna polega na wyborze najlepszego rozwiązania z szeregu możliwych wariantów na podstawie wielu kryteriów, czyli wektora funkcji celu  $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_j)$ .

Sformułowanie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej (wektorowej) jest następujące. Znaleźć  $n$ -wymiarowy wektor zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x} \in X$ , który minimalizuje wektorową funkcję celu, tzn. znaleźć

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

gdzie:  $\mathbf{f}: X \Rightarrow \mathbb{R}^j$  jest wektorową funkcją celu i ma postać następującą:

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_j(\mathbf{x})\},$$

obszar  $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq 0\}$  jest obszarem dopuszczalnym.

Przestrzeń celów  $B$  jest przestrzenią  $j$ -wymiarową, w której wartości wektorowej funkcji celu  $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_j)$  są przedstawione w postaci punktu. Obszar celów  $Y$  jest częścią przestrzeni celów, stanowiącą odwzorowanie obszaru dopuszczalnego  $X$  z przestrzeni zmiennych decyzyjnych w przestrzeń celów.

Rozwiązaniem idealnym zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej nazywane jest takie rozwiązanie  $\mathbf{x}^{\text{id}}$ , które ekstremalizuje każdą funkcję celu niezależnie od pozostałych. A więc, w przypadku poszukiwania minimum  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}^{\text{id}}$  jest rozwiązaniem idealnym zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej jeżeli  $\mathbf{x}^{\text{id}} \in X$  i  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{\text{id}}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x})$  dla każdego  $\mathbf{x} \in X$ . Ponieważ funkcje celu są na ogół konfliktowe, rozwiązanie idealne najczęściej nie istnieje. W przypadku szczególnym zbiór kompromisów może się zredukować do jednego punktu. Oznacza to, że wszystkie kryteria mogą jednocześnie osiągnąć swoje wartości minimalne. Takie kryteria nazywane są kooperacyjnymi, a rozwiązanie idealnym.

Rozwiązaniem niezdominowanym nazywane jest rozwiązanie, w którym żadna funkcja celu nie może być polepszona bez jednoczesnego pogorszenia przynajmniej jednej z pozostałych funkcji celu. A więc  $\mathbf{x}_{\text{ND}}$  jest rozwiązaniem niezdominowanym jeżeli nie istnieje  $\mathbf{x} \in X$  takie, że  $f_j(\mathbf{x}) \leq f_j(\mathbf{x}_{\text{ND}})$  przy  $j \in J = \{1, 2, \dots, j\}$  oraz  $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{x}_{\text{ND}})$  dla przynajmniej jednego  $j \in J$ . Poszukiwanie rozwiązań niezdominowanych jest nazywane optymalizacją w sensie Pareto. Rozwiązanie w sensie Pareto nie jest na ogół jednoznaczne. Zwykle istnieje wiele wektorów  $\mathbf{x}^*$  w obszarze  $X$ , którym odpowiada wektor  $\mathbf{f}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$  stanowiący zbiór kompromisów.

Ze względu na dużą liczbę rozwiązań niezdominowanych trzeba dokonać wyboru rozwiązania najlepszego na podstawie dodatkowego kryterium. To rozwiązanie jest nazywane rozwiązaniem preferowanym.

Rozwiązanie preferowane  $\mathbf{x}^{pr}$  jest rozwiązaniem niezdominowanym wybranym na podstawie dodatkowego kryterium. Odpowiada ono wartościom funkcji celu  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{pr})$  leżącym w obszarze celów i jest ono uważane za rozwiązanie najlepsze.

Zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej rozwiązuje się najczęściej w dwu etapach. Najpierw poszukuje się zbioru kompromisów, a następnie wybiera się ze zbioru kompromisów rozwiązanie preferowane. Kilka metod wyznaczania zbioru kompromisów w przypadku zmiennych decyzyjnych ciągłych i dyskretnych oraz metod wyznaczania rozwiązań preferowanych przedstawiono w pracach [52], [54].

Rozwiązanie zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej obejmuje więc wielkości obiektywne, do których należą:

- zbiór kompromisów,
- punkt idealny

oraz wielkości zależne od dodatkowych preferencji:

- rozwiązanie preferowane, czyli wektor funkcji celów  $\mathbf{f}^{pr}$  i odpowiadający im wektor zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{x}^{pr}$ .

Jeżeli nie istnieją dodatkowe preferencje, za rozwiązanie preferowane uważany jest punkt należący do zbioru kompromisów leżący najbliżej punktu idealnego i odpowiadający mu wektor zmiennych decyzyjnych [52], [54].

### 3.3. PRZEGLĄD ZAGADNIEŃ OPTIMALIZACJI KOMPOZYTÓW UZBROJONYCH WŁÓKNAMI

Od szeregu lat prowadzone są prace dotyczące optymalizacji kompozytów uzbrojonych włóknami. Większość z nich dotyczy kompozytów o wysokich wytrzymałościach głównie kompozytów o matrycach polimerowych lub metalowych uzbrojonych włóknami grafitowymi, szklanymi lub stalowymi.

W pracy Brandmaiera [10] poszukiwany jest optymalny kierunek ułożenia rodziny włókien grafitowych w matrycy epoksydowej na

podstawie kryterium maksymalnej wytrzymałości kompozytu. Wytrzymałość kompozytu, traktowanego jako materiał poprzecznie izotropowy, określona jest za pomocą hipotezy Hilla.

W pracy Coxa [27] poszukiwane są optymalne kierunki włókien ze względu na ciężar konstrukcji. Zależność wytrzymałości kompozytów od kierunków włókien badali również Kelly i Davies [59]. Mullin i Mazzio [77] zastosowali metody optymalizacyjne w projektowaniu kompozytów o wysokich wytrzymałościach uzbrojonych włóknami przy uwzględnieniu procesów ich niszczenia.

Tauchert i Adibhatla [101] poszukiwali funkcji rozmieszczenia włókien wzdłuż wysokości belki o przekroju prostokątnym z kryterium minimum energii sprężystej oraz z kryterium Tsai-Hilla, przy założeniu ustalonej zawartości objętościowej włókien.

W szeregu interesujących pracach rozważane jest zagadnienie optymalizacji konstrukcji warstwowych i tak np. w pracach [47], [102] optymalizowano kompozytowe płyty warstwowe, przyjmując jako zmienne decyzyjne grubości warstw i kierunki nachylenia włókien w warstwach. Hirano [48] minimalizował ciężar płyt i cylindrycznych powłok przyjmując jako zmienne decyzyjne kierunki włókien. Również Schmit i Farshi [91] stosowali kryterium minimum ciężaru do optymalizacji prostokątnych płyt warstwowych uzbrojonych włóknami.

Jeden z rozdziałów książki Eschenauera [37] poświęcony jest zagadnieniom optymalizacji konstrukcji z warstwowych materiałów kompozytowych uzbrojonych włóknami. Poszczególne warstwy zbudowane są z rodziny jednokierunkowych włókien o wysokiej wytrzymałości umieszczonych w matrycy. Jako kryteria optymalizacji przyjmowano minimum ciężaru konstrukcji oraz minimum maksymalnego ugięcia przy zachowaniu warunków wytrzymałościowych. Jako zmienne decyzyjne przyjmowane są grubości warstw, kierunki włókien w warstwach oraz zawartość objętościowa włókien. W rozdziale tym omówiono również szereg szczegółowych rozwiązań uzyskanych przez Eschenauera i jego współpracowników np. optymalizację sandwichowej ortotropowej płyty pod działaniem obciążeń ciągłych i skupionych [37], optymalizację powłoki sferycznej wykonanej z kompozytu uzbrojonego włóknami węglowymi [39].

Wang i Karihaloo [107] rozpatrywali pasmo płytowe składające się z trzech warstw. W warstwie środkowej, w której włókna nachylone są pod kątem  $90^\circ$  występuje rysa. Celem pracy jest znalezienie takich kątów nachylenia włókien w zewnętrznych warstwach oraz ich grubości, aby współczynnik intensywności naprężeń przy wierzchołku szczeliny osiągał wartość minimalną i aby naprężenie graniczne na powierzchni między warstwami, wyznaczone z warunku Hubera-Mizesa, nie przekraczało zadanej wartości.

W pracy [2] Adali poszukiwana jest minimalna grubość laminowanej tarczy przy różnych obciążeniach. Z kryterium zniszczenia Tsai-Hilla określane są orientacje włókien będące zmiennymi decyzyjnymi. Minimalna grubość tarczy poszukiwana jest przy najbardziej niekorzystnej konfiguracji obciążenia.

W ostatnich latach na temat optymalnej orientacji włókien w materiałach ortotropowych spełniających kryterium minimum lub maksimum energii odkształcenia powstało wiele prac. Jedną z pierwszych prac dotyczącą tego zagadnienia jest praca Banichuka [6], w której poszukiwany jest kąt nachylenia osi ortotropii w płaskim stanie naprężenia na podstawie minimum pracy wykonanej przez przyłożone obciążenia zewnętrzne. Takie same warunki stacjonarności energii odkształcenia otrzymali niezależnie Pedersen [83]-[85] oraz Sacchi Landriani, Rovati [90]. Ponadto Pedersen [84] i Sacchi Landriani, Rovati [90] wykazali, że w materiałach ortotropowych w płaskim stanie naprężenia, w których orientacje włókien spełniają warunki ekstremum energii odkształcenia, kierunki główne naprężeń pokrywają się z kierunkami głównymi odkształceń, a w niektórych przypadkach kierunki główne naprężeń i odkształceń pokrywają się również z orientacją włókien. Pedersen w pracach [83], [84] przeprowadził pełną analizę minimum jak i maksimum energii odkształcenia w płaskim stanie naprężenia w zakresie wyodrębnionych dwóch klas materiałowych charakteryzujących małą i dużą sztywność względną na ścinanie. Przynależność do jednej z tych klas zależy od znaku parametru materiałowego  $\alpha_3$ . Bardziej rozszerzoną analizę maksimum jak i minimum sztywności (odpowiednio minimum, maksimum energii odkształcenia) dla zagadnień dwuwymiarowych przeprowadzili Pedersen i Bendsøe [86]

oraz Pedersen i Cheng [24]. W zależności od parametru materiałowego  $\alpha_3$  i odpowiadającego mu, w przypadku wyrażenia energii przez naprężenia, parametru  $\beta_3$  wprowadzono trzy klasy materiału ( $\alpha_3 < 0$  i  $\beta_3 > 0$ ;  $\alpha_3 > 0$  i  $\beta_3 < 0$ ;  $\alpha_3 > 0$  i  $\beta_3 > 0$ ). W każdej z klas określono orientację włókien odpowiadającą maksimum i minimum sztywności.

Podobnie w pracach [104], [105] poszukiwana jest maksymalna jak również minimalna sztywność ortotropowych tarcz kompozytowych. Rozpatrywany jest element tarczowy składający się z trzech warstw, w których włókna nachylone są w kolejnych warstwach pod kątem  $\theta$ ,  $\theta + 90^\circ$ ,  $\theta$ . Jako zmienne decyzyjne przyjęto orientację oraz zawartość włókien. Narzucono nierównościowe ograniczenie określające całkowity koszt lub ciężar tarczy kompozytowej. Sformułowano iteracyjną procedurę optymalizacyjną wykorzystującą kryterium opisane przez Pedersena [83]-[86], [24] i metody matematycznego programowania. Procedurę optymalizacyjną wykorzystano do rozwiązania kilku przykładów prostokątnych tarcz przy różnych obciążeniach i różnych liczebnie podziałach na elementy skończone.

Zagadnieniem ekstremum gęstości energii odkształcenia w trójwymiarowych materiałach liniowo sprężystych anizotropowych zajmował się Cowin [26]. W pracy tej problem ekstremum gęstości energii odkształcenia określony jest przez orientację układu współrzędnych związanych z przyjętym stanem naprężenia względem układu współrzędnych związanych z symetrią materiałową. Pożądane ekstrema mogą być określane przez składowe ortogonalnej transformacji między tymi układami współrzędnych. Warunek konieczny minimum lub maksimum gęstości energii odkształcenia wymaga zgodności osi głównych naprężeń i odkształceń. Ten warunek nie jest spełniony przez wszystkie materiały anizotropowe, jedynie przez materiały: poprzecznie izotropowe, ortotropowe i charakteryzujące się kubiczną symetrią (materiał opisany 3-ma stałymi sprężystymi  $E = E_1 = E_2 = E_3$ ,  $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$ ,  $\nu = \nu_{12} = \nu_{21} = \nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32}$ ) (ang. cubic symmetry). Spełnienie tego warunku przez materiały ortotropowe w zagadnieniach dwuwymiarowych zostało wykazane w pracach [84], [90]. W pracy sformułowano w układzie naprężeń i odkształceń głównych warunki pozwalające określić, które z rozwiązań spełniających warunki

stacjonarności osiągają minimum, a które maksimum gęstości odkształcenia. Na podstawie tych warunków wykazano, że w materiale charakteryzującym się kubiczną symetrią gdy  $E > G(1 + \nu)$  gęstość energii odkształcenia osiąga minimum, a gdy  $E < G(1 + \nu)$  gęstość energii odkształcenia osiąga maksimum przy wszystkich stanach naprężenia. Jest to jedyny ośrodek wśród materiałów sprężystych liniowo anizotropowych, w którym gęstość energii sprężystej osiąga ekstremum przy wszystkich stanach naprężenia. Również w ośrodku poprzecznie izotropowym i ortotropowym określono warunki jakie powinny spełniać współczynniki materiałowe, aby gęstość energii odkształcenia osiągała odpowiednio minimum, maksimum przy trzech jednoosiowych stanach naprężeń.

W pracy Cinquini, Rovatiego [25] poszukiwano lokalnej orientacji osi materiałowych w trójwymiarowym liniowo sprężystym ortotropowym ciele odpowiadającej ekstremalnym wartościom gęstości energii sprężystej. Wyznaczono warunki stacjonarności i również wykazano, że przy optymalnym rozwiązaniu osie główne odkształceń i naprężeń pokrywają się. Analityczne rozwiązanie ogólnego przypadku jest niezmiernie zawile, dlatego rozpatrzono szczególne przypadki rozwiązań przyjmując współliniowość między jednym kierunkiem odkształceń głównych a kolejną osią ortotropii. Natomiast w pracy Rovatiego i Taliercio [89] rozpatrywano warunki stacjonarności energii sprężystej w wybranych, charakteryzujących się określoną symetrią materiałową, trójwymiarowych liniowo sprężystych materiałach anizotropowych.

W ostatnich latach pojawiło się również szereg prac dotyczących optymalizacji kompozytów o matrycach betonopodobnych. Kilka prac opublikował V.C. Li wraz ze współpracownikami, poszukując optymalnych wartości poszczególnych parametrów opisujących skład i strukturę kompozytów betonowych uzbrojonych włóknami na podstawie różnych kryteriów. W pracy Li, Wang i Becker [62] funkcją celu była nagromadzona energia w procesie pęknięcia. Wywlekanie włókien z matrycy traktowane było jako najważniejszy mechanizm akumulacji energii. Uzyskane rozwiązania obejmowały określenie długości pojedynczego włókna, rozmieszczenia włókien i ich przyczepności do matrycy z warunku uzyskania maksimum tej energii. Również w pracy Li,



Maalej i Hashida [63] poszukiwano optymalnej kompozycji fibrobetonu.

Karihaloo w pracy [56] poszukiwał optymalnych wartości parametrów opisujących skład i strukturę wysokowartościowych zbrojonych włóknami kompozytów o matrycy betonowej (HPFRC) przyjmując jako kryteria największą wytrzymałość na rozciąganie i największą ciągliwość przy ustalonej wytrzymałości na ściskanie. Zagadnienie to zostało rozwiązane w zakresie optymalizacji dwukryterialnej.

Szereg prac z zakresu optymalizacji włókien w kompozytach cementowych wykonanych przez A.M. Brandta i jego współpracowników przedstawiono w monografiach [17], [19]. W pracy [12] Brandt określił energię zniszczenia w kompozytach uzbrojonych włóknami rozproszonymi w zależności od kierunku włókien w stosunku do rys w matrycy. Wykorzystując kryterium maksimum energii zgromadzonej w stanie granicznym zarysowania poszukiwał optymalnego kierunku ułożenia włókien [13], [14]. W pracach Brandta [15], [16] omówiono częściowe sprawdzenia doświadczalne rozwiązań analitycznych.

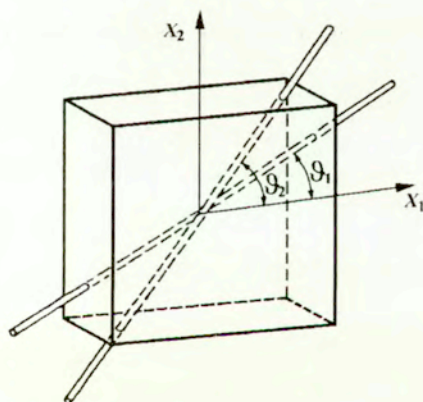
W pracach [20]-[22] Brandta i Marks rozwiązano kilka zagadnień z zakresu dwukryterialnej optymalizacji. Oprócz kryterium maksimum energii zniszczenia rozpatrywano kryterium maksymalnej wartości siły przenoszonej przez rozciągany element oraz kryterium minimum kosztu materiału kompozytowego. W zależności od wprowadzonego kryterium rozszerzono również zakres zmiennych decyzyjnych o długość i zawartość objętościową włókien. W pracy [23] Brandt i Marks rozwiązali zagadnienie rozciąganego elementu kompozytowego w zakresie wielokryterialnej optymalizacji wprowadzając oprócz kryterium zniszczenia, kryterium wytrzymałościowe określone na podstawie danych doświadczalnych oraz kryterium kosztu. Jako zmienne decyzyjne przyjęto kąt nachylenia włókien oraz zawartość objętościową włókien.

M.A. Glinicki i W. Marks [41] rozpatrywali zagadnienie zginanego elementu kompozytowego uzbrojonego włóknami stalowymi i węglowymi. Jako kryteria optymalizacji przyjęto kryterium zniszczenia elementu, kryterium maksymalnego naprężenia, przy którym pojawiła się pierwsza rysa, oraz kryterium kosztu uzbrojenia. Jako zmienne decyzyjne przyjęto zawartość objętościową włókien węglowych oraz stalowych.

## 4. ELEMENT KOMPOZYTOWY UZBROJONY DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEN

### 4.1. ODKSZTAŁCENIE ELEMENTU KOMPOZYTOWEGO

Rozważono element tarczowy składający się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami równoległych włókien nachylonych pod kątami  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do osi  $x_1$  (rys.4.1). Każdą rodzinę stanowią włókna identycznie ułożone równolegle względem siebie na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny środkowej. Każda rodzina włókien ułożona jest symetrycznie względem płaszczyzny środkowej elementu tarczowego.



Rys. 4.1. Element kompozytowy uzbrojony dwiema rodzinami włókien.

Element kompozytowy znajduje się w płaskim stanie naprężenia, który może być opisany trzema składowymi uogólnionego stanu naprężenia  $\sigma_{\alpha\beta}^{(c)}$   $\alpha, \beta = 1, 2$ . Wielkości  $\sigma_{\alpha\beta}^{(c)}$  są średnimi składowymi naprężeń

wzdłuż grubości tarczy. Z definicji uogólnionego stanu naprężenia wynika następująca zależność wiążąca średnie naprężenie w kompozycie  $\sigma_{\alpha\beta}^{(c)}$  ze średnimi naprężeniami w matrycy  $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$  i naprężeniami w obu rodzinach włókien  $\sigma_a^{(s)}, \sigma_b^{(s)}$  [67], [72]

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{h_m}{h} \sigma_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{h_a}{h} \sigma_a^{(s)} a_\alpha a_\beta + \frac{h_b}{h} \sigma_b^{(s)} b_\alpha b_\beta, \quad (4.1)$$

tutaj  $h_m$  określa grubość matrycy a  $h_a$  i  $h_b$  grubości warstw włókien o wektorach kierunkowych  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  ( $h = h_m + h_a + h_b$ ).

Zakładając, że matryca i cienkie włókna są materiałami liniowo sprężystymi i jednorodnymi oraz uwzględniając izotropowość matrycy równania konstytutywne określono następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(m)} &= \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\nu E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\delta}^{(m)}, \\ \sigma_a^{(s)} &= E^{(s)} \varepsilon_a^{(s)}, \quad \sigma_b^{(s)} = E^{(s)} \varepsilon_b^{(s)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie  $E^{(m)}$  oznacza moduł Younga matrycy,  $E^{(s)}$  moduł Younga włókien i  $\nu$  stałą Poissona matrycy. Założono, że między matrycą a włóknami zachodzi zgodność odkształceń tzn.

$$\varepsilon_a^{(s)} = \varepsilon_a^{(m)}, \quad \varepsilon_b^{(s)} = \varepsilon_b^{(m)}.$$

Wykorzystując zależności:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^{(m)} &= \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} a_\gamma a_\delta, \\ \varepsilon_b^{(m)} &= \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} b_\gamma b_\delta \end{aligned}$$

i związki konstytutywne (4.2), równania (4.1) określające składowe naprężenia w kompozycie przekształcono do następującej postaci

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\delta}^{(m)} \right) \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \frac{h_a}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} a_\gamma a_\delta a_\alpha a_\beta + E^{(s)} \frac{h_b}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} b_\gamma b_\delta b_\alpha b_\beta.$$

Uwzględniając postać wektorów kierunkowych odpowiednio do pierwszej i drugiej rodziny składowe naprężenia w kompozycie można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(c)} &= C_{11} \varepsilon_{11}^{(m)} + C_{12} \varepsilon_{22}^{(m)} + C_{13} (2\varepsilon_{12}^{(m)}) \\ \sigma_{22}^{(c)} &= C_{12} \varepsilon_{11}^{(m)} + C_{22} \varepsilon_{22}^{(m)} + C_{23} (2\varepsilon_{12}^{(m)}) \\ \sigma_{12}^{(c)} &= C_{13} \varepsilon_{11}^{(m)} + C_{22} \varepsilon_{22}^{(m)} + C_{33} (2\varepsilon_{12}^{(m)}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

gdzie:

$$C_{11} = \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \cos^4 \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \cos^4 \vartheta_2 \right),$$

$$C_{12} = \frac{\nu E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_2 \right),$$

$$C_{13} = E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin \vartheta_1 \cos^3 \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \sin \vartheta_2 \cos^3 \vartheta_2 \right),$$

$$C_{22} = \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^4 \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^4 \vartheta_2 \right),$$

$$C_{23} = E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^3 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^3 \vartheta_2 \cos \vartheta_2 \right),$$

$$C_{33} = \frac{E^{(m)}}{2(1+\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_1 + \frac{h_b}{h} \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_2 \right).$$

Przyjęto jednakowe rozmieszczenie włókien w obu kierunkach, czyli  $\frac{h_a}{h} = \frac{h_b}{h} = \frac{1}{2} \frac{h-h_m}{h}$ . Oznaczając kąt pomiędzy rodzinami włókien przez  $\alpha$ , kąt nachylenia drugiej rodziny włókien można przyjąć jako  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \alpha$ . Wprowadzając wielkość definiującą zawartość objętościową włókien  $\eta = \frac{h-h_m}{h}$ , składowe macierzy  $C_{ij}$  określono następującymi wyrażeniami:

$$C_{11} = \frac{E^{(m)}(1-\eta)}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{1}{2} E^{(s)} \eta \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha + \cos(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right],$$

$$C_{12} = \frac{\nu E^{(m)}(1-\eta)}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{1}{8} E^{(s)} \eta [1 - \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha],$$

$$C_{13} = \frac{1}{8} E^{(s)} \eta [2 \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha + \sin 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha], \quad (4.4)$$

$$C_{22} = \frac{E^{(m)}(1-\eta)}{(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{1}{2} E^{(s)} \eta \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \cos(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right],$$

$$C_{23} = \frac{1}{8} E^{(s)} \eta [2 \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha - \sin 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha],$$

$$C_{33} = \frac{E^{(m)}(1-\eta)}{2(1+\nu)} + \frac{1}{8} E^{(s)} \eta [1 - \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha].$$

Z równań (4.3) uwzględniając wyrażenia (4.4) wyznaczono składowe odkształcenia, które przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(m)} &= S_{11} \sigma_{11}^{(c)} + S_{12} \sigma_{22}^{(c)} + S_{13} \sigma_{12}^{(c)} \\ \varepsilon_{22}^{(m)} &= S_{12} \sigma_{11}^{(c)} + S_{22} \sigma_{22}^{(c)} + S_{23} \sigma_{12}^{(c)} \\ 2\varepsilon_{12}^{(m)} &= S_{13} \sigma_{11}^{(c)} + S_{23} \sigma_{22}^{(c)} + S_{33} \sigma_{12}^{(c)} \end{aligned}$$

gdzie:

$$S_{11} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} (1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)(1-\nu)} (1-\eta)\eta + \frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{8(1+\nu)} (1-\eta)\eta \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)} (1-\eta)\eta \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta)\eta \cos(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (E^{(s)})^2 (\eta)^2 [\cos \alpha - \cos(2\vartheta_1 + \alpha)]^2 \sin^2 \alpha \right\},$$

$$S_{12} = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{\nu(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} (1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)} (1-\eta)\eta [1 - \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha] \right. \\ \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{16} \eta^2 [\cos 2\alpha - \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha)] \sin^2 \alpha \right\},$$

$$S_{13} = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta)\eta \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1-\nu)} (1-\eta)\eta \sin 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha \right. \\ \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 [\cos \alpha - \cos(2\vartheta_1 + \alpha)] \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right\}, \quad (4.5)$$

$$S_{22} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} (1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)(1-\nu)} (1-\eta)\eta + \frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{8(1+\nu)} (1-\eta)\eta \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)} (1-\eta)\eta \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta)\eta \cos(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right.$$

$$+ \frac{1}{8} (E^{(s)})^2 (\eta)^2 [\cos \alpha + \cos(2\vartheta_1 + \alpha)]^2 \sin^2 \alpha \},$$

$$S_{23} = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{E^{(m)} E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta) \eta \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)} E^{(s)}}{4(1-\nu)} (1-\eta) \eta \sin 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha \right. \\ \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 [\cos \alpha + \cos(2\vartheta_1 + \alpha)] \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right\},$$

$$S_{33} = \frac{2}{D} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)(1-\nu)} (1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)} E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} (1-\eta) \eta \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)} E^{(s)}}{4(1-\nu)} (1-\eta) \eta [1 - \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha] \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (E^{(s)})^2 \eta^2 \sin^2(2\vartheta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \right\}$$

i

$$D = \frac{E^{(m)}(1-\eta)}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[ \frac{(E^{(m)})^2(1-\eta)^2}{(1+\nu)} + \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta(1-\eta)}{(1+\nu)} \right. \\ \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \right].$$

## 4.2 OPTYMALNE KIERUNKI UŁOŻENIA WŁÓKIEN

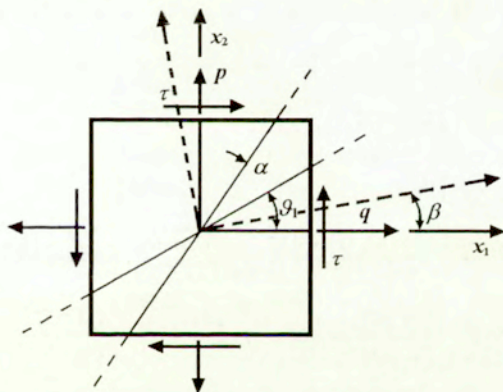
### 4.2.1 Kryterium optymalizacji i warunki konieczne minimum

Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia elementu kompozytowego [67], [70]. Energię tę można wyrazić w sposób następujący

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij}^{(c)} \varepsilon_{ij}^{(c)} dV = h \iint_{\Omega} W d\Omega,$$

gdzie funkcja podcałkowa

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left\{ S_{11} (\sigma_{11}^{(c)})^2 + 2S_{12} \sigma_{11}^{(c)} \sigma_{22}^{(c)} + S_{22} (\sigma_{22}^{(c)})^2 + 2S_{13} \sigma_{11}^{(c)} \sigma_{12}^{(c)} + 2S_{23} \sigma_{22}^{(c)} \sigma_{12}^{(c)} + S_{33} (\sigma_{12}^{(c)})^2 \right\}$$



Rys. 4.2. Obciążenia działające na element kompozytowy.

Przyjmując, że na element kompozytowy działają dwa obciążenia normalne:  $p$  w kierunku osi  $x_2$  i  $q$  w kierunku osi  $x_1$  oraz obciążenie



styczne  $\tau$  (rys.4.2), funkcja podcałkowa  $W$  określona jest następującym wyrażeniem:

$$\begin{aligned}
 W = \frac{1}{2D} & \left\{ K_1 - ((p-q)^2 - 4\tau^2) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)} \eta(1-\eta) \cos 2(2\vartheta_1 + \alpha) \cos 2\alpha \right. \right. \\
 & - \frac{(E^{(s)})^2}{8} \eta^2 \cos^2(2\vartheta_1 + \alpha) \sin^2 \alpha \left. \right] + \tau(p-q) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1-\nu)} \eta(1-\eta) \cos 2\alpha \right. \\
 & - \left. \left. \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 \right] \sin 2(2\vartheta_1 + \alpha) + (p^2 - q^2) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} \eta(1-\eta) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 \sin^2 \alpha \right] \cos(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha - \tau(p+q) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)} \eta(1-\eta) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{(E^{(s)})^2}{2} \eta^2 \sin^2 \alpha \right] \sin(2\vartheta_1 + \alpha) \cos \alpha + (p+q)^2 \frac{(E^{(s)})^2}{8} \eta^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right. \\
 & \left. + \tau^2 \frac{(E^{(s)})^2}{2} \eta^2 \sin^2 \alpha \right\} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 K_1 = & (q^2 - 2\nu pq + p^2 + 2(1+\nu)\tau^2) \frac{(E^{(m)})^2(1-\eta)^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + (q^2 - (1+\nu)pq + p^2 + 8\tau^2 \\
 & - 2(1+\nu)\tau^2) \frac{E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{4(1+\nu)(1-\nu)} + (p^2 + q^2) \frac{3E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{8(1+\nu)}.
 \end{aligned}$$

Zmiennymi decyzyjnymi są kąt pochylenia  $\vartheta_1$  jednej rodziny włókien do osi  $x_1$  oraz kąt  $\alpha$  pomiędzy rodzinami włókien, które podlegają następującym ograniczeniom:  $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$  i  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Minimum funkcjonału  $U$  można znaleźć z warunku Kuhna-Tuckera budując zastępczą funkcję celu

$$F = W - \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 (\vartheta_1 - \pi) - \mu_3 \alpha + \mu_4 (\alpha - \pi).$$

Warunki konieczne minimum wynikające z twierdzenia Kuhna-Tuckera są podane poniżej.

- Warunki równościowe

$$\vartheta_1 \left( \frac{\partial W}{\partial \vartheta_1} - \mu_1 + \mu_2 \right) = 0,$$

$$\alpha \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \mu_3 + \mu_4 \right) = 0, \quad (4.7)$$

$$- \mu_1 \vartheta_1 = 0, \quad \mu_2 (\vartheta_1 - \pi) = 0, \quad - \mu_3 \alpha = 0, \quad \mu_4 (\alpha - \pi) = 0,$$

-warunki nierównościowe

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta_1} - \mu_1 + \mu_2 \geq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \mu_3 + \mu_4 \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \vartheta_1 \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \mu_i \geq 0.$$

Pochodne funkcji  $W$  określone są skomplikowanymi wyrażeniami, zatem w celu uproszczenia wyznaczanych warunków stacjonarności, wprowadzono nowy układ współrzędnych  $(y_1, y_2)$  nachylony do układu współrzędnych  $(x_1, x_2)$  pod kątem  $\beta$ , który będzie układem kierunków głównych. W układzie tym różne od zera są tylko naprężenia normalne  $\sigma_I, \sigma_{II}$ , zatem

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \sigma_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \beta + \sigma_{22} \sin^2 \beta + 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta, \\ \sigma_{II} &= \sigma_{22} = \sigma_{11} \sin^2 \beta + \sigma_{22} \cos^2 \beta - 2\sigma_{12} \sin \beta \cos \beta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin 2\beta + \sigma_{12} \cos 2\beta = 0.$$

Z warunku zerowania naprężenia stycznego wynika, że

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (4.10)$$

W nowym układzie współrzędnych obróconym o kąt  $\beta$  względem układu  $(x_1, x_2)$  energia odkształcenia ma postać

$$W = \frac{1}{2}(S_{11}\sigma_I^2 + 2S_{12}\sigma_I\sigma_{II} + S_{22}\sigma_{II}^2),$$

gdzie  $S_{\gamma\delta}$  ( $\gamma, \delta = 1, 2$ ) są zależne od zmiennych  $(\vartheta_1 - \beta)$ ,  $\alpha$  i zgodnie z równaniami (4.5) przyjmują postać:

$$S_{11} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)}(1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)(1-\nu)}(1-\eta)\eta + \frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{8(1+\nu)}(1-\eta)\eta - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)}(1-\eta)\eta \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)}(1-\eta)\eta \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha + \frac{1}{8}(E^{(s)})^2(\eta)^2 [\cos \alpha - \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]]^2 \sin^2 \alpha \right\},$$

$$S_{12} = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{\nu(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)}(1-\eta)^2 \right.$$

$$-\frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)}(1-\eta)\eta[1-\cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]]\cos 2\alpha \\ + \frac{(E^{(s)})^2}{16}\eta^2[\cos 2\alpha - \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]]\sin^2 \alpha \Big\},$$

$$S_{22} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)}(1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)(1-\nu)}(1-\eta)\eta + \frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{8(1+\nu)}(1-\eta)\eta \right. \\ - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)}(1-\eta)\eta \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]\cos 2\alpha \\ + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)}(1-\eta)\eta \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]\cos \alpha \\ \left. + \frac{1}{8}(E^{(s)})^2(\eta)^2[\cos \alpha + \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]]^2 \sin^2 \alpha \right\}.$$

Po podstawieniu wyrażeń  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  energia odkształcenia wyrażona przez naprężenia główne przyjmuje następującą postać [73]:

$$W = \frac{1}{2D} \left\{ K_2 - (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \left[ \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{8(1-\nu)}\eta(1-\eta)\cos 2\alpha \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{16}\eta^2 \sin^2 \alpha \right] \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] - \frac{(E^{(s)})^2}{16}\eta^2 \sin^2 \alpha \right] \\ + (\sigma_{II} + \sigma_I)^2 \frac{(E^{(s)})^2}{8}\eta^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \tag{4.11} \\ \left. + (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)}\eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2 \sin^2 \alpha \right] \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]\cos \alpha \right\},$$

gdzie

$$K_2 = (\sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{(E^{(m)})^2(1-\eta)^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2) \frac{3E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{8(1+\nu)} \\ + (\sigma_I^2 - (1+\nu)\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{4(1+\nu)(1-\nu)}.$$

Natomiast pochodne energii odkształcenia występujące w warunkach koniecznych minimum wynikających z twierdzenia Kuhna-Tuckera, czyli w warunkach równościowych (4.7) i nierównościowych (4.8) mają następującą postać:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta_1} = \frac{(\sigma_{II} - \sigma_I)}{2D} \left\{ (\sigma_{II} - \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{2(1-\nu)} \cos 2\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} \sin^2 \alpha \right] \sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] - (\sigma_{II} + \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{(1+\nu)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \right\}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\Psi}{2D^2}, \quad (4.13)$$

gdzie

$$\Psi = (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \left[ \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}\eta(1-\eta)}{4(1-\nu)} (\sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin 2\alpha) + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{8} (-\sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \cos^2 [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin 2\alpha \left[ R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right] \\
& + \left[ -\frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{4(1-\nu)} \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha \right. \\
& \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} \cos^2 [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \right] R_2 (-\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha \\
& + (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \left[ \left[ -\frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{2(1+\nu)} (\sin [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin \alpha) + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} (-\sin [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \cos \alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin \alpha \cos^2 \alpha - \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^3 \alpha) \right] \right] \\
& * \left( R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right) + \left[ \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{(1+\nu)} \right. \\
& \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] R_2 (-\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \cos [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin \alpha \cos^2 \alpha \\
& + (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \left[ \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{8} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \left( R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right) \right. \\
& \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} R_2 (-\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha \right] \\
& + 2K_2 R_2 (-\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \sin \alpha \cos \alpha,
\end{aligned}$$

oraz

$$R_1 = \frac{(E^{(m)})^3(1-\eta)^3}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + \frac{(E^{(m)})^2 E^{(s)}(1-\eta)^2 \eta}{(1+\nu)^2(1-\nu)} + \frac{E^{(m)}(E^{(s)})^2(1-\eta)\eta^2}{4(1+\nu)(1-\nu)},$$

$$R_2 = \frac{E^{(m)}(E^{(s)})^2(1-\eta)\eta^2}{2(1+\nu)(1-\nu)}.$$

Warunki konieczne minimum wynikające z twierdzenia Kuhna-Tuckera (4.7), (4.8) są spełnione w obszarze  $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$  gdy pochodne  $W$  określone zależnościami (4.12), (4.13) osiągają wartości zerowe oraz  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ . Globalne minimum energii odkształcenia występuje w jednym z punktów określonych niżej przedstawionymi wyrażeniami [73].

1°

$$\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$$

i

(4.14)

$$\sin \alpha = 0,$$

2°

$$\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$$

i

(4.15)

$$\begin{aligned} & (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \left[ \left( \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{2(1-\nu)} + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} \right) \left( R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right) \cos \alpha \right. \\ & \left. - R_2 \left( \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{4(1-\nu)} \cos 2\alpha - \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} \sin^2 \alpha \right) (\nu \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \left[ \left( \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{2(1+\nu)} + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} (\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) \right) \right. \\
& * \left( R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right) \\
& - R_2 \left( \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{(1+\nu)} + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right) (\nu \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha \left. \right] \\
& + (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \left[ \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} \cos \alpha \cos 2\alpha \left( R_1 - \frac{1}{2} R_2 (\cos^4 \alpha + \nu \sin^4 \alpha) \right) \right. \\
& \left. + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{4} R_2 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha (\nu \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \right] \\
& + 2K_2 R_2 \cos \alpha (\nu \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

zatem gdy  $\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$ , przy czym kąt  $\alpha$  spełnia równanie (4.15)<sub>2</sub>,

3°

$$\cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = \frac{(\sigma_{II} + \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{(1+\nu)} + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] \cos \alpha}{(\sigma_{II} - \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1-\eta)}{(1-\nu)} \cos 2\alpha - \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right]}$$

przy  $\sigma_I \neq \sigma_{II}$

i

(4.16)

$\Psi = 0$ .



W szczególnym przypadku

$$\cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$$

i (4.17)

$$\cos \alpha = 0$$

spełniają układ równań (4.16).

Równanie (4.15)<sub>2</sub> jak również układ równań (4.16) rozwiązywane są numerycznie za pomocą programu MATHEMATICA.

Optymalne kąty ułożenia włókien przy różnych obciążeniach normalnych i stycznych wyznaczono w następujących dwóch rodzajach kompozytów:

- kompozyt o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi,
- wysokowartościowy kompozyt o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi ( SIMCON ).

Rozpatrzono element kompozytowy, na który działają obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$ ,  $q = kp$  w kierunku  $x_1$  oraz obciążenia styczne  $\tau = lp$  (rys.4.2). Przyjmując dowolne obciążenia normalne i styczne można na podstawie równań (4.14) – (4.16) wyznaczyć globalne minimum w obu rodzajach kompozytów.

#### **4.2.2 Optymalne kąty ułożenia włókien w kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi**

W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi przyjęto następujące stałe materiałowe  $E^{(m)} = 3,5 \text{ GPa}$ ,  $E^{(s)} = 220 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,35$  oraz zawartość objętościową włókien  $\eta = 0,6$ . Rozpatrzono następujące przypadki obciążeń:

1)  $k = 0,5$     $l = 0,3$

Z warunku (4.10) wyznaczono kierunek naprężeń głównych  $\beta = -0,4380$  ( $-25,1^{\circ}$ ). Energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= 0,63 \quad (36,17^{\circ}) \\ \alpha &= 1,0031 \quad (57,46^{\circ}),\end{aligned}$$

które otrzymano z rozwiązania układu równań (4.15).

2)  $k = 0,5 \quad l = 0$

W tym przypadku kierunek naprężeń głównych  $\beta = 0$ . Energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= 0,9617 \quad (55,1^{\circ}) \\ \alpha &= 1,2183 \quad (69,8^{\circ}),\end{aligned}$$

które również otrzymano z rozwiązania układu równań (4.15).

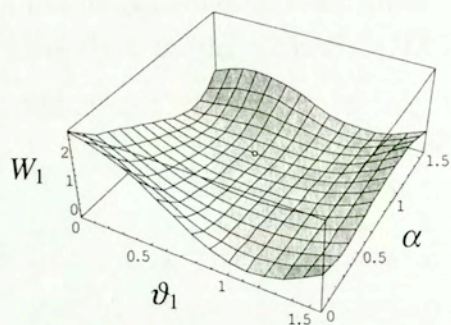
3)  $k = -0,5 \quad l = 0,3$

Kierunek naprężeń głównych  $\beta = -0,1903$  ( $-10,9^{\circ}$ ). Energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach

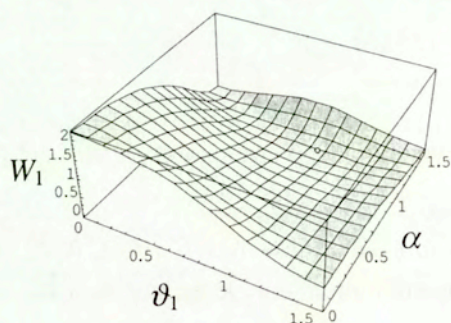
$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \beta + \frac{\pi}{2} = 1,3805 \quad (79,10^{\circ}), \\ \alpha &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

które otrzymano z rozwiązania układu równań (4.16). Rozwiązanie to spełnia również układ równań (4.17). Energia odkształcenia osiąga minimum gdy dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

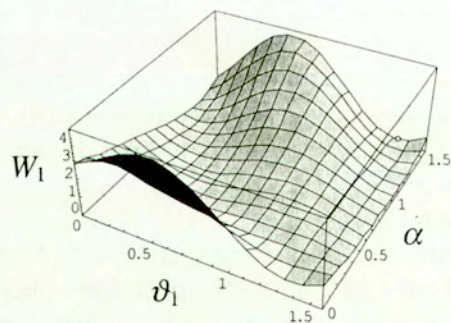
Optymalne kąty ułożenia włókien zależą od stałych materiałowych matrycy i włókien, od wartości obciążeń oraz od zawartości objętościowej włókien. Wpływ zawartości objętościowej włókien na optymalne kąty ich ułożenia rozpatrzono przyjmując takie same przypadki



Rys. 4.3. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k=0,5$   $l=0,3$



Rys. 4.4. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k=0,5$   $l=0$



Rys. 4.5. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k=-0,5$   $l=0,3$

obciążeń ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$  ;  $k = 0,5 \quad l = 0$  ;  $k = -0,5 \quad l = 0,3$ ) przy bardzo małej zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,1$  i  $\eta = 0,02$ . Przy zawartości włókien  $\eta = 0,1$  w pierwszych dwóch przypadkach obciążeń energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  leżących wewnątrz obszaru określoności zmiennych decyzyjnych spełniających układ równań (4.15) a zatem również warunek  $\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$ . Przy ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ) takimi optymalnymi kątami są  $\vartheta_1 = 0,77$  ( $44,18^\circ$ ) i  $\alpha = 0,72$  ( $41,44^\circ$ ), natomiast przy ( $k = 0,5 \quad l = 0$ ) takimi kątami są  $\vartheta_1 = 1,04$  ( $59,35^\circ$ ) i  $\alpha = 1,07$  ( $61,30^\circ$ ). W przypadku trzecim ( $k = -0,5 \quad l = 0,3$ ) energia odkształcenia osiąga minimum przy kątach  $\vartheta_1 = 1,3805$  ( $79,1^\circ$ ),  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  tak jak przy zawartości włókien  $\eta = 0,6$ . Natomiast przy zawartości włókien  $\eta = 0,02$  we wszystkich trzech przypadkach obciążeń optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych ( $\vartheta_1 = \beta + \frac{\pi}{2}$ ;  $\alpha = 0$ ). Optymalny kierunek ułożenia włókien wynika z rozwiązania równań (4.14).

Zależność energii odkształcenia, a w zasadzie funkcji  $W_1$  związanej z funkcją  $W$  w następujący sposób  $W = \frac{p^2}{2E^{(m)}}W_1$ , od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przedstawiono na rysunkach (4.3) – (4.5) przyjmując takie same stosunki obciążeń  $k$  i  $l$  jak w rozpatrywanych przykładach oraz zawartość objętościową włókien  $\eta = 0,6$ .

### 4.2.3 Optymalne kąty ułożenia włókien w wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi

W przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi (SIMCON) przyjęto następujące stałe materiałowe  $E^{(m)} = 40 \text{ GPa}$ ,  $E^{(s)} = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,23$  [1] oraz zawartość objętościową włókien  $\eta = 0,08$ . Rozpatrzono w pierwszych trzech przykładach takie same stosunki obciążeń  $k$  i  $l$  jak w

przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi. Natomiast w przykładzie czwartym przyjęto  $k = -0,5$   $l = 3$ . W rozważanych przypadkach globalne minimum energii odkształcenia wynika z rozwiązania układu równań (4.14) i (4.17), zatem przy:

$$1) \quad k = 0,5 \quad l = 0,3$$

$$\vartheta_1 = \beta + \frac{\pi}{2} = 1,1328 \quad (64,9^\circ)$$

$$\alpha = 0,$$

$$2) \quad k = 0,5 \quad l = 0$$

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = 0,$$

$$3) \quad k = -0,5 \quad l = 0,3$$

$$\vartheta_1 = \beta + \frac{\pi}{2} = 1,3805 \quad (79,10^\circ)$$

$$\alpha = 0.$$

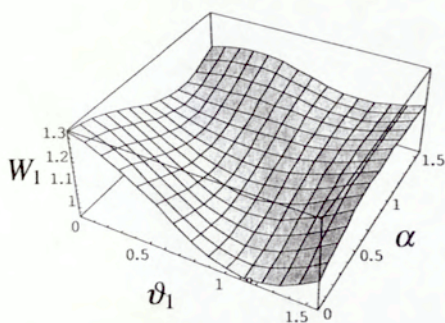
$$4) \quad k = -0,5 \quad l = 3$$

Kierunek naprężeń głównych  $\beta = -0,6629$  ( $-37,98^\circ$ ),

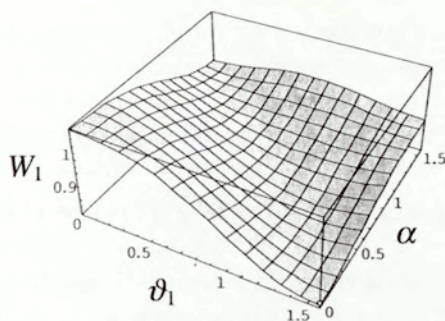
$$\vartheta_1 = \beta + \frac{\pi}{2} = 0,9079 \quad (52,02^\circ)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

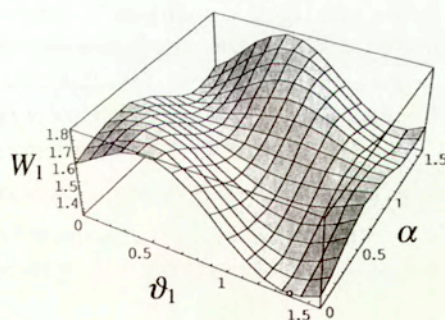
W pierwszych trzech przykładach przy różnych obciążeniach energia odkształcenia osiąga minimum przy jednej rodzinie włókien ułożonej wzdłuż kierunku głównego odpowiadającemu zadanemu obciążeniu ( $\vartheta_1 = \beta + \frac{\pi}{2}$ ;  $\alpha = 0$ ). Zatem rozwiązania te spełniają układ równań



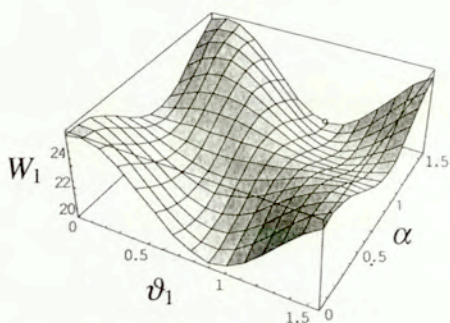
Rys. 4.6. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k = 0,5$   $l = 0,3$



Rys. 4.7. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k = 0,5$   $l = 0$



Rys. 4.8. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k = -0,5$   $l = 0,3$



Rys. 4.9. Zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy  $k = -0,5$   $l = 3$

(4.14). Natomiast w przypadku czwartym energia odkształcenia osiąga minimum, gdy dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych. To rozwiązanie spełnia układ równań (4.17), który jest szczególnym przypadkiem układu równań (4.16).

Na rysunkach (4.6) – (4.9) przedstawiono zależność energii odkształcenia od kątów  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  przy takich samych  $k$  i  $l$  jak w rozważanych przykładach, oraz przy zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,08$ .

Rozpatrzono wpływ zawartości objętościowej włókien na optymalne kąty ich ułożenia przyjmując obciążenia tak jak w przypadku pierwszym ( $k = 0,5$ ;  $l = 0,3$ ) przy dużej zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,4$  i  $\eta = 0,6$ . Tak przyjęte zawartości są nierealne ze względów technologicznych w kompozytach o matrycach cementowych służą one jedynie do zilustrowania czy duża zawartość włókien ma wpływ na kąty nachylenia włókien, przy których energia odkształcenia osiąga minimum. Przy zawartości włókien  $\eta = 0,4$  energia odkształcenia osiąga minimum gdy  $\vartheta_1 = 0,9155$  ( $52,45^\circ$ ) i  $\alpha = 0,4345$  ( $24,9^\circ$ ) natomiast przy  $\eta = 0,6$  optymalne kąty nachylenia włókien przyjmują wartości:  $\vartheta_1 = 0,7298$  ( $41,81^\circ$ ) i  $\alpha = 0,8060$  ( $46,18^\circ$ ). Oba te rozwiązania położone są wewnątrz obszaru określoności zmiennych decyzyjnych i są rozwiązaniami układu równań (4.15).

#### 4.2.4. Zależność optymalnego ułożenia włókien w materiale kompozytowym od stosunku naprężeń głównych

Rozwiązując analitycznie zagadnienie optymalizacji kierunków dwóch rodzin włókien w elemencie kompozytowym, przy wykorzystaniu warunków koniecznych ekstremum Kuhna-Tuckera, znaleziono trzy rozwiązania, w których może wystąpić minimum globalne funkcji  $W$ . Nie udało się niestety znaleźć analitycznej zależności między obciążeniami, stałymi materiałowymi oraz zawartością włókien pozwalającej na stwierdzenie, któremu z trzech możliwych rozwiązań odpowiada minimum globalne.

W celu zbadania, kiedy minimum globalne funkcji  $W$  odpowiada rozwiązaniu pierwszemu, drugiemu lub trzeciemu wykonano następujący eksperyment numeryczny. W przypadku dwóch różnych materiałów kompozytowych:

- wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi o zawartości objętościowej włókien 8% ( $E^{(m)} = 40$  GPa,  $E^{(s)} = 210$  GPa,  $\nu = 0,23$ ),

- kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi o zawartości objętościowej 60% ( $E^{(m)} = 3,5$  GPa,  $E^{(s)} = 220$  GPa,  $\nu = 0,35$ ),

porównano minima wyznaczone z trzech wymienionych wyżej rozwiązań w zależności od stosunku naprężeń głównych. Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 4.10 i 4.11.

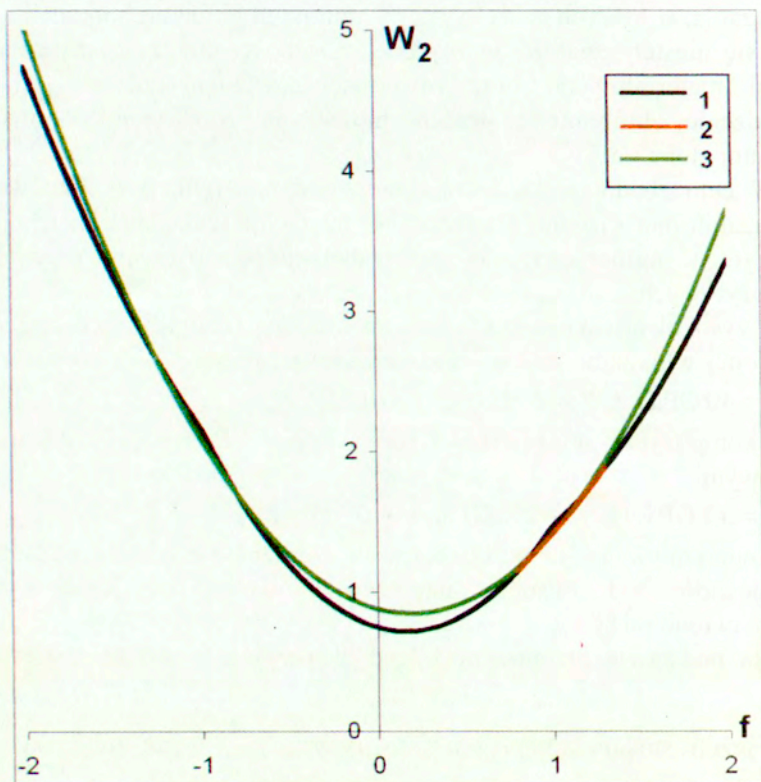
Na podstawie przeprowadzonego eksperymentu można stwierdzić, że:

- jeżeli stosunek naprężeń głównych  $f = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I}$  jest mniejszy od  $-1,25$ , zawarty w granicach od  $-0,8$  do  $0,8$  lub większy od  $1,3$  w kompozycie o matrycy cementowej oraz jest mniejszy od  $-9,5$ , zawarty w granicach od  $-0,1$  do  $0,02$  lub większy od  $70$  w kompozycie o matrycy epoksydowej, to optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien

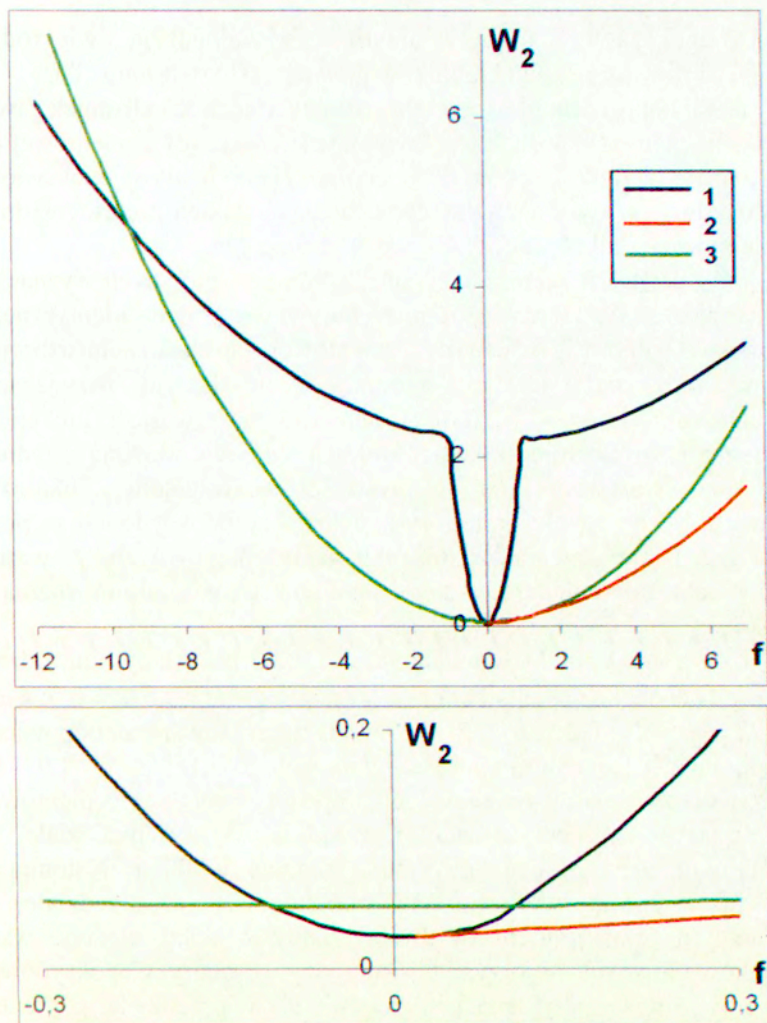


ułożona wzdłuż kierunku głównego odpowiadającemu większemu co do wartości bezwzględnej naprężeniu (rozwiązanie  $1^0$ ),

▪ jeżeli naprężenia główne mają przeciwne znaki, a ich stosunek zawiera się w granicach od około  $-1,25$  do  $-0,8$  w kompozycie o matrycy cementowej oraz w przedziale od  $-9,5$  do  $-0,1$  w kompozycie o



Rys. 4.10. Zależność rozwiązania optymalnego od stosunku naprężeń głównych w przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami (1 – rozwiązanie  $1^0$ , 2 – rozwiązanie  $2^0$ , 3 – rozwiązanie  $3^0$ ).



Rys. 4.11. Zależność rozwiązania optymalnego od stosunku naprężeń głównych w przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi (1 – rozwiązanie  $1^0$ , 2 – rozwiązanie  $2^0$ , 3 – rozwiązanie  $3^0$ ).

matrycy epoksydowej, to optymalnym rozwiązaniem są dwie rodziny włókien ułożonych wzdłuż kierunków głównych (rozwiązanie 3<sup>0</sup>),

- jeżeli naprężenia główne mają znaki zgodne, a ich stosunek zawiera się w granicach od 0,8 do 1,3 w kompozycie o matrycy cementowej oraz w przedziale od 0,02 do około 70 w kompozycie o matrycy epoksydowej, to optymalnym rozwiązaniem są dwie rodziny włókien nieortogonalnych, spełniających układ równań (4.15) (rozwiązanie 2<sup>0</sup>),

- przy pewnych zakresach stosunku naprężeń głównych wyznaczone minima różnią się znacznie, a przy innych są prawie identyczne. W przypadku kompozytu o matrycy cementowej wprowadzenie uzbrojenia dwiema rodzinami włókien, zgodnie z uzyskanym rozwiązaniem optymalnym, tylko w niewielkim stopniu zmniejsza wartość funkcji celu w stosunku do uzbrojenia jedną rodziną włókien ułożoną zgodnie z kierunkiem większego (co do wartości bezwzględnej) naprężenia głównego. W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej w prawie całym przedziale zmienności stosunku naprężeń głównych  $f$  wartości funkcji celu odpowiadające poszczególnym rozwiązaniom różnią się znacznie.

Rozwiązane w podrozdziałach 4.2.2 i 4.2.3 przykłady obu rodzajów kompozytów obciążonych siłami  $p, q = kp, \tau = lp$  ( $k = 0,5 \quad l = 0,3; k = 0,5 \quad l = 0; k = -0,5 \quad l = 0,3; k = -0,5 \quad l = 3$ ) scharakteryzowane są odpowiednio następującymi stosunkami naprężeń głównych  $f$ : 3,17; 2; -1,9; -1,18. W przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej w pierwszych trzech przykładach  $f$  znajduje się w przedziale, gdy optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien. Natomiast w przykładzie czwartym  $f = -1,18$  znajduje się w przedziale, gdy optymalnym rozwiązaniem są dwie rodziny włókien ułożone wzdłuż kierunków głównych. W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej w pierwszych dwóch przykładach  $f$  znajduje się w przedziale, gdy energia odkształcenia osiąga minimum globalne przy dwóch rodzinach włókien, których wartości kątów nachylenia wynikają z rozwiązania 2<sup>0</sup>. Natomiast w przykładzie trzecim  $f = -1,9$  energia odkształcenia osiąga minimum globalne w przedziale, gdy dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

#### 4.2.5. Mechaniczna interpretacja warunków koniecznych ekstremum

Pedersen [84] i Rovati w pracach [90], [25] wykazali, że w materiałach ortotropowych w płaskim stanie naprężenia, w których orientacje włókien spełniają warunki ekstremum energii sprężystej, kierunki główne odkształceń i naprężeń są współliniowe. Ekstremum energii sprężystej może wystąpić w następujących trzech przypadkach, gdy kąt  $\psi$  pomiędzy kierunkiem odkształceń głównych  $\varepsilon_1$  a osią ortotropii jest  $0^\circ$  lub  $90^\circ$  lub  $\cos 2\psi = -\gamma$ , gdzie  $\gamma$  jest parametrem zależnym od odkształceń głównych i stałych materiałowych. W pierwszych dwóch przypadkach osie główne odkształceń i naprężeń pokrywają się z kierunkami ortotropii. Natomiast kierunki nachylenia włókien wynikające z nietrywialnego rozwiązania trzeciego mogą okazać się dla pewnych materiałów ortotropowych globalnym ekstremum [84], [85], dla których kierunki główne odkształceń i naprężeń pokrywają się, ale nie są współliniowe z osiami materiałowymi ortotropii.

W niniejszym podrozdziale badano czy w elemencie kompozytowym uzbrojonym dwiema rodzinami włókien znajdującym się w płaskim stanie naprężenia, w którym orientacje włókien  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_1 + \alpha$  spełniają ekstremum energii sprężystej, kierunki naprężeń i odkształceń głównych pokrywają się. W tym celu sprawdzono czy w układzie współrzędnych  $(y_1, y_2)$  pokrywającym się z układem kierunków głównych naprężeń spełniony jest warunek  $S_{13}\sigma_I + S_{23}\sigma_{II} = 0$ , który implikuje zerowanie odkształcenia stycznego, zatem warunek współliniowości kierunków głównych naprężeń i odkształceń. Po podstawieniu wyrażeń:

$$S_{13} = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta)\eta \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \right. \\ \left. + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1-\nu)} (1-\eta)\eta \sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha \right. \\ \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 [\cos \alpha - \cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]] \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \right\},$$

$$S_{23} = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)} (1-\eta)\eta \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1-\nu)} (1-\eta)\eta \sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha \right. \\ \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 [\cos \alpha + \cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta]] \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \right\},$$

otrzymano

$$S_{13}\sigma_I + S_{23}\sigma_{II} = \frac{1}{2D} \left\{ (\sigma_{II} - \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1-\nu)} \eta(1-\eta) \cos 2\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 \sin^2 \alpha \right] \sin 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \right. \\ \left. - (\sigma_{II} + \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{2} \eta^2 \sin^2 \alpha \right] \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \right\}. \quad (4.18)$$

Iloczyn prawej strony równania (4.18) i czynnika  $(\sigma_{II} - \sigma_I)$  jest równy pochodnej funkcji  $W$  względem zmiennej  $\vartheta_1$  (4.12). Wobec tego kierunki główne naprężeń i odkształceń są współliniowe jeśli spełniony jest jeden z warunków (4.14), (4.16)<sub>1</sub>, (4.17). W przypadku spełnienia równań (4.14) optymalna orientacja jednej rodziny włókien pokrywa się z kierunkiem głównym naprężeń i odkształceń. Takie rozwiązania uzyskano we wszystkich rozważanych przykładach dotyczących wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi rys. 4.6 – 4.8. W przypadku spełnienia równań (4.17) optymalna orientacja dwóch rodzin ortogonalnych pokrywa się ze współliniowymi kierunkami głównymi naprężeń i odkształceń. Takie rozwiązanie otrzymano w przykładzie dotyczącym kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi poddanej obciążeniu  $p, q$

$= -0,5p$ ,  $\tau = 0,3p$  (rys. 4.5). Natomiast w przypadku spełnienia równań (4.15) kierunki główne naprężeń i odkształceń pozostają współliniowe, ale optymalne orientacje włókien różnią się od kierunków głównych naprężeń.

### 4.3. OPTYMALNE UŁOŻENIE I ZAWARTOŚĆ WŁÓKIEN

Ze względu na minimum energii odkształcenia elementu kompozytowego omówionego w podrozdziale 4.2. poszukiwane są kierunek pochylenia  $\vartheta_1$  jednej rodziny włókien, kąt  $\alpha$  pomiędzy rodzinami włókien oraz zawartość objętościowa włókien  $\eta$ .

Zmienne decyzyjne podlegają następującym ograniczeniom:

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta},$$

gdzie  $\underline{\eta}, \bar{\eta}$  są odpowiednio ograniczeniami dolnym i górnym zawartości objętościowej włókien.

W celu znalezienia rozwiązania trzeba utworzyć zastępczą funkcję celu

$$F^* = W - \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 (\vartheta_1 - \pi) - \mu_3 \alpha + \mu_4 (\alpha - \pi) + \mu_5 (\underline{\eta} - \eta) + \mu_6 (\eta - \bar{\eta}) \quad (4.19)$$

gdzie funkcja  $W$  określona jest zależnością (4.11). Warunki konieczne minimum wynikające z twierdzenia Kuhna-Tuckera są następujące:

warunki równościowe:

$$\vartheta_1 \left( \frac{\partial W}{\partial \vartheta_1} - \mu_1 + \mu_2 \right) = 0,$$

$$\alpha \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \mu_3 + \mu_4 \right) = 0,$$

$$\eta \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} - \mu_5 + \mu_6 \right) = 0, \quad (4.20)$$

$$- \mu_1 \vartheta_1 = 0, \quad \mu_2 (\vartheta_1 - \pi) = 0, \quad - \mu_3 \alpha = 0, \quad \mu_4 (\alpha - \pi) = 0, \\ \mu_5 (\underline{\eta} - \eta) = 0, \quad \mu_6 (\eta - \bar{\eta}) = 0;$$

warunki nierównościowe:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta_1} - \mu_1 + \mu_2 \geq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \mu_3 + \mu_4 \geq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} - \mu_5 + \mu_6 \geq 0, \\ \frac{\partial F^*}{\partial \mu_i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad \vartheta_1 \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \mu_i \geq 0. \quad (4.21)$$

Tutaj pochodne  $\frac{\partial W}{\partial \vartheta_1}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$  określone są odpowiednio wyrażeniami (4.12), (4.13), natomiast  $\frac{\partial W}{\partial \eta}$  przyjmuje postać:

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{E^{(m)}}{2(1+\nu)(1-\nu)D^2} \Omega \quad (4.22)$$

gdzie

$$\Omega = (\sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} (1-\eta)^2 \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta(2-\eta)(1-\cos^4\alpha - \nu\sin^4\alpha) \right] \\ + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2} (1-\eta)^2 \left[ \frac{(\sigma_I^2 - (1+\nu)\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2)}{2(1+\nu)(1-\nu)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\sigma_{II} - \sigma_I)^2}{4(1-\nu)} \cos 2[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos 2\alpha \\
& + \frac{(\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2)}{(1+\nu)} \cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \cos \alpha \\
& + \frac{3(\sigma_{II}^2 + \sigma_I^2)}{4(1+\nu)} \left] \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)(1+\eta) + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \right] \right. \\
& + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \cos^2 [(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \right. \\
& \left. + (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right] \\
& * \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 (2+\eta) + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} (1-\eta)\eta(1+\eta) \right. \\
& \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^3 (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \right].
\end{aligned}$$

Dołączając do równań (4.14) – (4.16) warunek zerowania pochodnej  $W$  względem  $\eta$  otrzymano następujące możliwe przypadki, w których może występować globalne minimum energii odkształcenia:

$$\begin{aligned}
1^\circ \\
\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] &= 0 \\
\sin \alpha &= 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$(1-\eta)^2 \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2} \left[ (\sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{E^{(m)}(E^{(m)} - E^{(s)})}{(1+\nu)(1-\nu)} (1-\eta)^2 \right.$$



$$+(\sigma_{II})^2 E^{(s)}(E^{(m)}(1-\eta^2)+E^{(s)}\eta^2)]=0$$

2°

$$\sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{E^{(m)}}{(1-\nu^2)}(1-\eta) \left\{ (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \left( \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1-\nu)}\eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2 \right) \cos\alpha \right. \\ & - \left. (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \left( \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)}\eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2(\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha) \right) \right\} \\ & + (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2 \cos\alpha \cos 2\alpha \left[ \left( \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)}(1-\eta)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)}\eta(1-\eta) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2(1 - \cos^4\alpha - \nu \sin^4\alpha) \right) \right. \\ & \left. + \frac{(E^{(s)})^2}{2}\eta^2 \left[ -(\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \left( \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{4(1-\nu)}\eta(1-\eta)\cos 2\alpha - \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2 \sin^2\alpha \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \left( \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)}\eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{2}\eta^2 \sin^2\alpha \right) \right] \cos\alpha \right. \\ & \left. + (\sigma_I + \sigma_{II})^2 \frac{(E^{(s)})^2}{4}\eta^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \right. \\ & \left. + 2(\sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)}(1-\eta)^2 \right. \\ & \left. + (\sigma_I^2 - (1+\nu)\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)(1-\nu)}\eta(1-\eta) \right. \\ & \left. + (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2) \frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{4(1+\nu)}\eta(1-\eta) \right] (\nu \sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \cos\alpha \Big\} = 0 \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2) \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} (1-\eta)^2 \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 \right. \\
& \left. - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta(2-\eta)(1-\cos^4\alpha - \nu\sin^4\alpha) \right] \\
& + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2} (1-\eta)^2 \left[ \frac{(\sigma_I^2 - (1+\nu)\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2)}{2(1+\nu)(1-\nu)} + \frac{3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2)}{4(1+\nu)} \right. \\
& \left. - \frac{(\sigma_{II} - \sigma_I)^2}{4(1-\nu)} \cos 2\alpha + \frac{(\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2)}{(1+\nu)} \cos \alpha \right] \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)(1+\eta) + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta^2 \right. \\
& \left. - \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 (1-\cos^4\alpha - \nu\sin^4\alpha) \right] + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{II} - \sigma_I)^2 \sin^2\alpha \right. \\
& \left. + (\sigma_{II}^2 - \sigma_I^2) \sin^2\alpha \cos\alpha + \frac{(\sigma_I + \sigma_{II})^2}{2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha \right] \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 (2+\eta) \right. \\
& \left. + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta(1-\eta)(1+\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{4} \eta^3 (1-\cos^4\alpha - \nu\sin^4\alpha) \right] = 0
\end{aligned}$$

3°

$$\cos[(2\vartheta_I + \alpha) - 2\beta] = \frac{(\sigma_{II} + \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta(1-\eta) + \frac{(E^{(s)})^2}{2} \eta^2 \sin^2\alpha \right] \cos\alpha}{(\sigma_{II} - \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1-\nu)} \eta(1-\eta) \cos 2\alpha - \frac{(E^{(s)})^2}{2} \eta^2 \sin^2\alpha \right]}$$

$$\Psi = 0, \tag{4.25}$$

$$\Omega = 0,$$

gdzie  $\Psi$  i  $\Omega$  są określone wyrażeniami odpowiednio (4.13)<sub>2</sub> i (4.22)<sub>2</sub>.

W szczególnym przypadku układ równań (4.25) jest spełniony, gdy

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0, \quad (4.26)$$

$$E^{(m)}(1-\eta)^2 \left\{ \left( \sigma_I^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2 \right) \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} (1-\eta)^2 - \frac{(1-\nu)(E^{(s)})^2}{4} \eta(2-\eta) \right] + \frac{E^{(s)}}{2(1+\nu)} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2) \right. \\ \left. * \left[ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)} (1-\eta)(1+\eta) + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \eta^2 - \frac{(1-\nu)(E^{(s)})^2}{4} \eta^2 \right] \right\} = 0.$$

Podobnie jak w podrozdziale 4.2 rozpatrzono różne przypadki obciążeń  $p$ ,  $q = kp$  i  $\tau = lp$  działających na element kompozytowy dla dwóch rodzajów kompozytów: kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi o minimalnej zawartości włókien wynoszącej  $\underline{\eta} = 0,1$  i maksymalnej  $\bar{\eta} = 0,6$  oraz wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi (SIMCON) o dolnej i górnej zawartości włókien wynoszącej odpowiednio  $\underline{\eta} = 0,02$  i  $\bar{\eta} = 0,08$ . Rozwiązując numerycznie układy równań (4.23), (4.24), (4.25) przy  $k = 0,5$   $l = 0,3$ ;  $k = 0,5$   $l = 0$ ;  $k = -0,5$   $l = 0,3$  dla obu rodzajów kompozytu, otrzymano rozwiązania większe od górnego ograniczenia  $\bar{\eta}$  tzn. poza przedziałem określoności  $\underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta}$ . W rozpatrywanych przykładach energia odkształcenia osiąga minimum przy maksymalnej zawartości włókien  $\eta = \bar{\eta}$  i przy wyznaczonych kątach nachylenia włókien leżących wewnątrz obszaru określoności, których dokładne wartości przedstawione są w podrozdziale 4.2.

## 4.4. OPTYMALIZACJA WIELOKRYTERIALNA UKIERUNKOWANIA I ZAWARTOŚCI WŁÓKIEN

### 4.4.1. Kryteria optymalizacji

Rozpatrzono element kompozytowy uzbrojony dwiema rodzinami włókien. Przyjęto dwa kryteria optymalizacji i trzy zmienne decyzyjne. Pierwszym kryterium jest minimum energii odkształcenia takie samo jak w podrozdziałach 4.2 i 4.3. Drugim kryterium jest minimum kosztu elementu kompozytowego, które przyjęto w następującej postaci [72]:

$$K(\eta) = (1 - \eta)k_1 + \eta k_2 \quad (4.27)$$

tutaj  $k_1$  i  $k_2$  są jednostkowymi kosztami matrycy i włókien, przy czym  $k_2 > k_1$ . Zmiennymi decyzyjnymi są dwa kąty nachylenia włókien  $\vartheta_1$  i  $\alpha$  oraz zawartość objętościowa włókien  $\eta$ , które podlegają następującym ograniczeniom:

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \underline{\eta} \leq \eta \leq \bar{\eta},$$

gdzie  $\underline{\eta}$ ,  $\bar{\eta}$  są odpowiednio ograniczeniami dolnym i górnym zawartości objętościowej włókien.

Aby otrzymać rozwiązanie zagadnienia optymalizacji dwukryterialnej należy znaleźć zbiór kompromisów, rozwiązanie idealne i rozwiązanie preferowane. W tym celu należy utworzyć znormalizowane funkcje:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\vartheta_1, \alpha, \eta) &= \frac{W(\vartheta_1, \alpha, \eta)}{W_o}, \\ \Phi_2(\eta) &= \frac{K(\eta)}{K_o}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

tu  $W(\vartheta_1, \alpha, \eta)$  określona jest zależnością (4.11),  $K(\eta)$  zależnością (4.27) a  $W_o$  i  $K_o$  są największymi wartościami tych funkcji należącymi do zbioru kompromisów. Zauważmy, że  $K_o = (1 - \bar{\eta})k_1 + \bar{\eta}k_2$ , zatem funkcja  $\Phi_2$  zależy od ilorazu jednostkowych kosztów włókien i matrycy

$$\Phi_2(\eta) = \frac{(1 - \eta) + \eta \frac{k_2}{k_1}}{(1 - \bar{\eta}) + \bar{\eta} \frac{k_2}{k_1}} \quad (4.29)$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie idealne trzeba najpierw znaleźć minimum energii odkształcenia  $W(\vartheta_1, \alpha, \eta)$  i funkcji kosztu  $K(\eta)$ . Energia odkształcenia osiąga minimum przy maksymalnej zawartości włókien  $\eta = \bar{\eta}$  i przy kątach nachylenia włókien  $\vartheta_1 = \overset{\circ}{\vartheta}_1$  i  $\alpha = \overset{\circ}{\alpha}$  wyznaczonych z rozwiązania jednego z układów równań (4.14) – (4.16) zależnie od rodzaju kompozytu a więc od stałych materiałowych matrycy i włókien, od obciążeń  $p, q = kp$  i  $\tau = lp$  działających na element kompozytu i od wartości maksymalnej zawartości włókien  $\bar{\eta}$ . Funkcja kosztu elementu kompozytowego (4.27) jest funkcją liniową względem zmiennej decyzyjnej  $\eta$  i osiąga minimum przy minimalnej zawartości włókien  $\underline{\eta}$ . Zatem rozwiązanie idealne ma następujące współrzędne:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{id} &= \frac{W\left(\overset{\circ}{\vartheta}_1, \overset{\circ}{\alpha}, \bar{\eta}\right)}{W_o} \\ \Phi_2^{id} &= \frac{1 - \underline{\eta} + \underline{\eta} \frac{k_2}{k_1}}{k_o} \end{aligned} \quad (4.30)$$

tu  $k_0 = 1 - \bar{\eta} + \bar{\eta} \frac{k_2}{k_1}$ , natomiast  $W_0$  jest minimalną wartością  $W$  przy  $\eta = \underline{\eta}$

i kątach  $\vartheta_1 = \vartheta_1^*$ ,  $\alpha = \alpha^*$  wyznaczonych z rozwiązania jednego z układu równań (4.14) – (4.16).

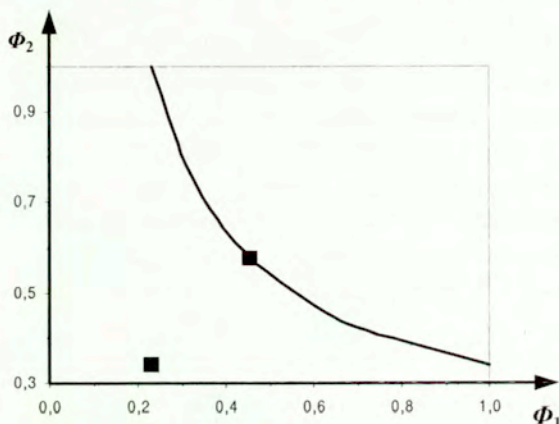
Ponieważ funkcja kosztu jest funkcją liniową jednej zmiennej decyzyjnej  $\eta$  a funkcja energii jest funkcją trzech zmiennych decyzyjnych  $\vartheta_1, \alpha, \eta$  to, aby wyznaczyć zbiór kompromisów należy przy różnych wartościach  $\eta \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}]$  na podstawie równań (4.14) – (4.16) znaleźć minimalne wartości energii odkształcenia oraz wartości funkcji  $K$  a następnie określić odpowiadające im bezwymiarowe, znormalizowane funkcje celu (4.28)<sub>1</sub>, (4.29). Rozwiązanie preferowane można wyznaczyć metodą funkcji metrycznej [52], [54], tzn. utworzyć funkcję wyrażającą odległość pomiędzy zbiorem kompromisów i punktem idealnym i wyznaczyć jej minimum. W sensie metryki euklidesowej współrzędne punktu idealnego wyznaczone są z warunku minimum następującej funkcji:

$$T(\vartheta_1, \alpha, \eta) = \left\{ \left[ \Phi_1(\vartheta_1, \alpha, \eta) - \Phi_1^{id} \right]^2 + \left[ \Phi_2(\eta) - \Phi_2^{id} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.31)$$

#### 4.4.2 Minimalna energia odkształcenia i minimalny koszt w kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi

Przyjęto element kompozytowy z żywicy epoksydowej uzbrojony włóknami węglowymi. Rozpatrzono takie same przypadki obciążeń jak w poprzednich podrozdziałach tzn.  $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ;  $k = 0,5 \quad l = 0$ ;  $k = -0,5 \quad l = 0,3$ . Przyjęto minimalną i maksymalną zawartość włókien  $\underline{\eta} = 0,1$  i  $\bar{\eta} = 0,6$ . W funkcji kosztu przyjęto stosunek cen  $1 \text{ m}^3$  włókien węglowych do ceny  $1 \text{ m}^3$  żywicy epoksydowej  $\frac{k_2}{k_1} = 7,4$ . Rozwiązania znaleziono numerycznie korzystając z programu MATHEMATICA.

W pierwszym przykładzie ( $k = 0,5$   $l = 0,3$ ) funkcja  $W$  osiąga minimum przy  $\vartheta_1 = 36,17^\circ$ ,  $\alpha = 57,47^\circ$ ,  $\eta = 0,6$ , a funkcja  $\Phi_2(\eta)$  osiąga minimum przy  $\eta = 0,1$  i  $k_0 = 4,84$ . Jako  $W_0$  przyjęto  $W$  w punkcie  $\vartheta_1 = 44,18^\circ$ ,  $\alpha = 41,44^\circ$ ,  $\eta = 0,1$ , która przyjmuje wartość  $W_0 = 0,2485$ . Jest to największa wartość ze zbioru minimalnych wartości funkcji  $W$  określonych w zbiorze kompromisów. Na rys.4.9. w bezwymiarowej przestrzeni celów  $\Phi_1\Phi_2$  przedstawiono wyznaczony zbiór kompromisów,



Rys. 4.12. Zbiór kompromisów przy  $k = 0,5$  i  $l = 0,3$ .

punkt idealny  $A$ , który zgodnie z zależnością (4.30) określony jest następującymi współrzędnymi:

$$\Phi_1^{id} = 0,2325, \quad \Phi_2^{id} = 0,3388$$

oraz jako rozwiązanie preferowane przyjęto punkt  $D$  ze zbioru kompromisów najbliższy punktowi idealnemu. Jego współrzędne wyznaczone z warunku minimum funkcji (4.31) są następujące:

$$\Phi_1 = 0,4569, \quad \Phi_2 = 0,5769.$$

Punktowi preferowanemu w zbiorze zmiennych decyzyjnych odpowiadają następujące zmienne:

$$\vartheta_1 = 37,86^\circ, \quad \alpha = 54,09^\circ, \quad \eta = 0,28.$$

W drugim przykładzie ( $k = 0,5 \quad l = 0$ ) funkcja  $W$  osiąga minimum przy  $\vartheta_1 = 55,1^\circ, \alpha = 69,8^\circ, \eta = 0,6$ . Jako  $W_0$  przyjęto  $W$  w punkcie  $\vartheta_1 = 59,35^\circ, \alpha = 61,30^\circ, \eta = 0,1$ , która przyjmuje wartość  $W_0 = 0,2485$ . Rozwiązaniem idealnym jest punkt o współrzędnych

$$\Phi_1^{id} = 0,2321, \quad \Phi_2^{id} = 0,3388.$$

Punkt preferowany w zbiorze kompromisów najbliższy punktowi idealnemu jest określony następującymi współrzędnymi

$$\Phi_1 = 0,4580 \quad \Phi_2 = 0,5757.$$

W zbiorze zmiennych decyzyjnych odpowiadają mu następujące zmienne:

$$\vartheta_1 = 56,03^\circ, \quad \alpha = 67,95^\circ, \quad \eta = 0,2791.$$

W trzecim przykładzie ( $k = -0,5 \quad l = 0,3$ ) funkcja  $W$  osiąga minimum przy  $\vartheta_1 = 79,10^\circ, \alpha = 90^\circ, \eta = 0,6$ . Jako  $W_0$  przyjęto  $W$  w punkcie  $\vartheta_1 = 79,10^\circ, \alpha = 90^\circ, \eta = 0,1$ , która przyjmuje wartość  $W_0 = 0,3702$ . Rozwiązaniem idealnym jest punkt o współrzędnych

$$\Phi_1^{id} = 0,2014, \quad \Phi_2^{id} = 0,3388.$$

Punkt preferowany w zbiorze kompromisów jest określony następującymi współrzędnymi:

$$\Phi_1 = 0,4196 \quad \Phi_2 = 0,5693,$$

któremu odpowiadają następujące zmienne decyzyjne:

$$\vartheta_1 = 79,1^\circ, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \eta = 0,2743.$$

W rozpatrywanych przykładach wyznaczone zbiory kompromisów mają podobny charakter jak przedstawiony na rys.4.12. W pierwszych dwóch przykładach, gdy na element kompozytowy działają obciążenia rozciągające  $p$  w kierunku  $x_2$ , obciążenia  $q = 0,5p$  w kierunku  $x_1$  i w pierwszym przykładzie obciążenia styczne  $\tau = 0,3p$  rozwiązaniu



preferowanemu odpowiada element kompozytowy uzbrojony dwiema rodzinami włókien o zawartości objętościowej wynoszącej 28%, które nachylone są pod następującymi kątami:

- w pierwszym przykładzie jedna rodzina nachylona jest pod kątem  $37,86^\circ$  do osi  $x_1$  a druga odchylna od pierwszej o kąt  $54,08^\circ$ ,

- w drugim przykładzie jedna rodzina nachylona jest pod kątem  $56,03^\circ$  a druga odchylna od pierwszej o kąt  $67,94^\circ$ .

Natomiast w trzecim przykładzie, gdy na element kompozytowy działają obciążenia normalne rozciągające  $p$  w kierunku  $x_2$ , obciążenia ściskające  $q = -0,5p$  w kierunku  $x_1$  i styczne  $\tau = 0,3p$  optymalnym jest kompozyt, w którym występują dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywające się z kierunkami naprężeń głównych przy zawartości objętościowej uzbrojenia wynoszącym 27%.

#### 4.4.3 Minimalna energia odkształcenia i minimalny koszt w wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi

Przyjęto element z wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi (SIMCON) o minimalnej i maksymalnej zawartości włókien  $\underline{\eta} = 0,02$  i  $\bar{\eta} = 0,08$ . Rozpatrzono dwa przykłady przyjmując obciążenia ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ;  $k = -0,5 \quad l = 0,3$ ). W funkcji kosztu przyjęto stosunek cen  $1m^3$  włókien stalowych do ceny  $1m^3$  betonu klasy B70  $\frac{k_2}{k_1} = 100$ .

W pierwszym przykładzie ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ) funkcja  $W$  osiąga minimum w punkcie  $\vartheta_1 = 64,9^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\eta = 0,08$ , natomiast funkcja  $\Phi_2$  osiąga minimum przy  $\eta = 0,02$  i  $k_0 = 8,92$ . Jako  $W_0$  przyjęto wartość funkcji  $W$  w punkcie  $\vartheta_1 = 64,9^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\eta = 0,02$ . Na rys 4.13 w bezwymiarowej przestrzeni celów przedstawiono wyznaczony zbiór kompromisów, punkt idealny  $A$ , który zgodnie z zależnością (4.30) określony jest przez następujące współrzędne:

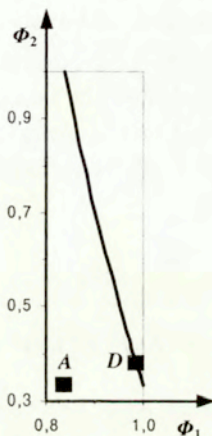
$$\Phi_1^{id} = 0,8373, \quad \Phi_2 = 0,3341,$$

oraz jako rozwiązanie preferowane przyjęto punkt  $D$  zbioru kompromisów najbliższy punktowi idealnemu. Jego współrzędne wyznaczone z warunku minimum funkcji (4.31) są następujące:

$$\Phi_1 = 0,9868, \quad \Phi_2 = 0,3783,$$

któremu w zbiorze zmiennych decyzyjnych odpowiadają:

$$\vartheta_1 = 64,9^\circ, \quad \alpha = 0^\circ, \quad \eta = 0,02398.$$



Rys. 4.13. Zbiór kompromisów przy  $k = 0,5$   $l = 0,3$

W przykładzie drugim ( $k = -0,5$   $l = 3$ ) energia odkształcenia osiąga minimum w punkcie  $\vartheta_1 = 52,02^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\eta = 0,08$ . Jako  $W_0$  przyjęto wartość funkcji  $W$  w punkcie  $\vartheta_1 = 52,02^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\eta = 0,02$ . Rozwiązaniem idealnym jest punkt  $A$  o współrzędnych:

$$\Phi_1^{id} = 0,8867, \quad \Phi_2^{id} = 0,3341.$$

W rozpatrywanym przykładzie punktem preferowanym ze zbioru kompromisów najbliższym punktowi idealnemu jest punkt  $D$  o następujących współrzędnych:

$$\Phi_1 = 0,9960, \quad \Phi_2 = 0,3549.$$

Punktowi preferowanemu  $D$  odpowiadają następujące zmienne decyzyjne:

$$\vartheta_1 = 52,02^\circ, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \eta = 0,0219.$$

W rozpatrywanych przykładach wyznaczone zbiory kompromisów mają podobny charakter jak przedstawiony na rys.4.13. W pierwszym przykładzie rozwiązaniu preferowanemu odpowiada element kompozytowy uzbrojony jedną rodziną włókien ułożoną w kierunku pokrywającym się z osią naprężeń głównych  $\vartheta_1 = 64,9^\circ$  i przy zawartości objętościowej włókien 2,4%. Natomiast w przykładzie drugim rozwiązaniu preferowanemu odpowiada element kompozytowy uzbrojony dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien pokrywającymi się z kierunkami naprężeń głównych ( $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ = 52,02^\circ$ ) i przy zawartości uzbrojenia wynoszącym 2,2%.

## 5. MATERIAŁ KOMPOZYTOWY UZBROJONY DWIEMA RODZINAMI WŁÓKIEN OSŁABIONY $n$ SZCZELINAMI

### 5.1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Zadania opisujące występowanie w ciele liniowo sprężystym wielu szczelin dowolnie rozmieszczonych i ich oddziaływanie na siebie jest przedmiotem wielu artykułów. Najczęściej przyjmowanym materiałem, w którym rozpatrywane są szczeliny jest materiał izotropowy i tak na przykład praca Badaliance i Gupta [5] dotyczy dwóch szczelin o różnej długości i rozmieszczeniu. Praca Romalis i Tamuż [88] dotyczy jednej makroszczeliny i  $n$  mikroszczelin. W pracy [7] Binienda, Arnold i inni przyjęli  $n$  dowolnie rozmieszczonych szczelin. Natomiast w pracy [8] Binienda przyjął jako materiał, w którym występuje  $n$  szczelin, kompozyt z jednokierunkowym rozmieszczeniem włókien. W wielu pracach między innymi w pracy Dancyszina i Sawruka [29] oraz we wspomnianych [5], [88], [7], [8] nieznanne siły oddziaływań pomiędzy szczelinami powiązane są układami osobliwych równań całkowych, określonych względem niewiadomych funkcji charakteryzujących skok przemieszczeń na powierzchni szczelin. Spośród wielu przybliżonych metod analizy naprężeń w ciałach sprężystych z wieloma oddziaływującymi szczelinami na uwagę zasługuje metoda Kachanova [55], w której przyjęto, że nieznanne naprężenia generowane na powierzchni danej szczeliny przez inne szczeliny zależą przede wszystkim od naprężeń średnich na powierzchniach tych szczelin.

W niniejszym rozdziale jako materiał kompozytowy przyjęto matrycę uzbrojoną dwiema rodzinami włókien ciągłych, w którym występuje  $n$  oddziaływujących na siebie szczelin. Jako szczególnie przypadek rozpatrzono dwie ustalone szczeliny. Wykorzystując

przybliżone rozwiązanie układu równań całkowych określono współczynniki intensywności naprężeń oraz współczynniki wyzwiania energii w wierzchołkach każdej szczeliny przy zmiennych kątach nachylenia włókien. Wyznaczono również takie kąty nachylenia rodzin włókien, aby największy współczynnik wyzwiania energii przyjmował wartości minimalne.

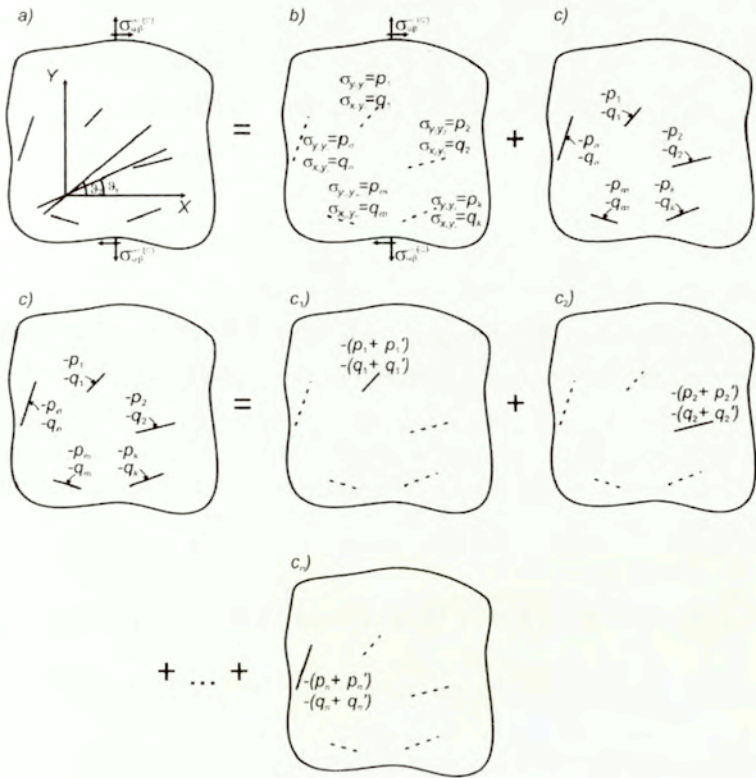
Założono, że w nieskończonej tarczy składającej się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami równoległych włókien nachylonych pod kątami  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do osi  $X$ , w której zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w rozdziale 4 składowe naprężenia określone są równaniem

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(c)} = & \frac{E^{(m)}}{1+\nu} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m)} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\delta\delta}^{(m)} \right) \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \frac{h_a}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} a_\gamma a_\delta a_\alpha a_\beta \\ & + E^{(s)} \frac{h_b}{h} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(m)} b_\gamma b_\delta b_\alpha b_\beta \end{aligned} \quad (5.1)$$

występuje  $n$  szczelin prostoliniowych:  $|x_j| < a_j$ ,  $y_j = 0$   $j = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $(x_j, y_j)$  jest lokalnym układem współrzędnych, w którym określona jest  $j$ -ta szczelina. Przyjęto, że na tarczę tą w nieskończoności działa pole naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta}^{\infty(c)}$  a brzegi szczelin są wolne od naprężeń (rys.5.1a). Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego na (rys5.1a) można przedstawić jako sumę rozwiązań dwóch prostszych zagadnień.

(I) Zagadnienia nieskończonej tarczy nie zawierającej szczelin obciążonej w nieskończoności polem naprężeń  $\sigma_{\alpha\beta}^{\infty(c)}$  (rys.5.1b), w wyniku których na powierzchniach  $|x_j| < a_j$ ,  $y_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) występują następujące składowe normalne i styczne tensora naprężeń:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_j y_j}^{(c)}(x_j, 0) &= p_j(x_j) \\ \sigma_{x_j y_j}^{(c)}(x_j, 0) &= q_j(x_j), \end{aligned}$$



Rys.5.1. Metoda rozwiązania

a) nieskończona tarcza obciążona w nieskończoności polem naprężeń  $\sigma_{\infty}^{(c)}$  uzbrojona dwiema rodzinami włókien, w której występuje  $n$  szczelin,

b) nieskończona tarcza nie zawierająca szczelin obciążona w nieskończoności polem naprężeń  $\sigma_{\infty}^{(c)}$ , które wywołuje na powierzchniach odpowiadających szczelinom obciążenia normalne  $p_j$  i styczne  $q_j$   $j=1, \dots, n$ ,

c) nieskończona tarcza ze szczelinami, na powierzchniach których działają obciążenia o znaku przeciwnym ale takiej samej wielkości jak w tarczy ciągłej na powierzchniach odpowiadających szczelinom,

c<sub>1</sub>), c<sub>2</sub>), ..., c<sub>n</sub>) nieskończona tarcza zawierająca tylko jedną  $j$ -tą szczelinę  $j=1, \dots, n$  obciążoną na swojej powierzchni siłami normalnymi  $-(p_j + p_j')$  i stycznymi  $-(q_j + q_j')$  gdzie  $p_j'$ ,  $q_j'$  są nieznanymi obciążeniami generowanymi na powierzchni  $j$ -tej szczeliny przez pozostałe szczeliny opisane w rozdziale 5.3 (dla przejrzystości rysunków w b), c), c<sub>1</sub>), c<sub>2</sub>), ..., c<sub>n</sub>) nie zaznaczono ani osi globalnego układu współrzędnych ani rodzin włókien).

gdzie

$$\begin{aligned}
 p_j(x_j) &= \sigma_{xx}^{(\infty(c))} \sin^2 \varphi_j + \sigma_{yy}^{(\infty(c))} \cos^2 \varphi_j - \sigma_{xy}^{(\infty(c))} \sin 2\varphi_j, \\
 q_j(x_j) &= \frac{1}{2} (\sigma_{yy}^{(\infty(c))} - \sigma_{xx}^{(\infty(c))}) \sin 2\varphi_j + \sigma_{xy}^{(\infty(c))} \cos 2\varphi_j,
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

tu kąt  $\varphi_j$  jest kątem nachylenia osi  $x_j$  do osi  $X$ .

(II) Zagadnienia nieskończonej tarczy zawierającej  $n$  szczelin obciążonej wyłącznie na ich powierzchniach  $|x_j| < a_j$ ,  $y_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) siłami przeciwnymi co do znaku ale równymi co do wartości polu naprężeń otrzymanym w tarczy bez szczelin wzdłuż tych samych powierzchni (rys.5.1c), zatem na brzegach szczelin zadane są następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_j y_j}^{(c)}(x_j, 0) &= -p_j(x_j), \\
 \sigma_{x_j y_j}^{(c)}(x_j, 0) &= -q_j(x_j),
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Poza szczelinami

$$u_j^{(+)}(x_j, 0) = u_j^{(-)}(x_j, 0) \quad \text{i} \quad v_j^{(+)}(x_j, 0) = v_j^{(-)}(x_j, 0) \quad \text{przy} \quad |x_j| > a_j.
 \tag{5.4}$$

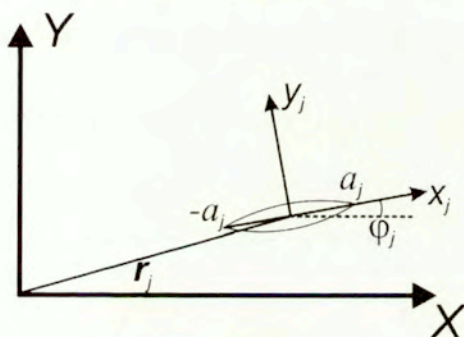
ze względu na ciągłość przemieszczeń. Znak (+) oznacza tutaj wartość przemieszczenia przy  $y_j > 0$ , natomiast (-) oznacza wartość przemieszczenia w tym samym punkcie przy  $y_j < 0$ .

Zagadnienie (II) jest rozpatrywane jako superpozycja  $n$  problemów (rys. 5.1c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, ..., c<sub>n</sub>), każdy zawierający tylko jedną  $j$ -tą szczelinę ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) obciążoną na swoim brzegu naprężeniami normalnymi  $-(p_j + p_j')$  i stycznymi  $-(q_j + q_j')$ , gdzie  $p_j$  i  $q_j$  są naprężeniami generowanymi na powierzchni danej szczeliny przez pozostałe szczeliny.

Ten sposób rozwiązania był przyjmowany m.in. w pracach: [7], [8], [29], [51]. W dwóch następujących podrozdziałach przedstawione jest rozwiązanie takiego problemu.

## 5.2. STAN NAPRĘŻENIA W TARCZY ZAWIERAJĄCEJ JEDNĄ SZCELINĘ

W niniejszym rozdziale poszukiwany jest stan naprężenia w tarczy zawierającej pojedynczą szczelinę. Każda  $j$ -ta szczelina o długości  $2a_j$  określona jest w swoim lokalnym układzie współrzędnych  $(x_j, y_j)$  symetrycznie względem środka układu. Środek każdego układu lokalnego względem układu globalnego  $(X, Y)$  określony jest wektorem położenia  $(r_{jX}, r_{jY})$  a oś  $x_j$  nachylona jest pod kątem  $\varphi_j$  do osi  $X$  (rys.5.2).



Rys. 5.2.  $J$ -ta szczelina w swoim lokalnym układzie współrzędnych.

W dwuwymiarowej tarczy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien, wykorzystując niezmienniczość równania (5.1) i postać wektorów stycznych odpowiednio do pierwszej i drugiej rodziny

$$\mathbf{a} = (\cos(\vartheta_1 - \varphi), \sin(\vartheta_1 - \varphi), 0),$$

$$\mathbf{b} = (\cos(\vartheta_2 - \varphi), \sin(\vartheta_2 - \varphi), 0),$$



otrzymano równania określające składowe naprężenia przez składowe odkształcenia w układzie współrzędnych  $(x_j, y_j)$  w następującej postaci:

$$\sigma_{x_j x_j}^{(c)} = a_{11} \varepsilon_{x_j x_j}^{(m)} + a_{12} \varepsilon_{y_j y_j}^{(m)} + a_{13} \varepsilon_{x_j y_j}^{(m)},$$

$$\sigma_{y_j y_j}^{(c)} = a_{12} \varepsilon_{x_j x_j}^{(m)} + a_{22} \varepsilon_{y_j y_j}^{(m)} + a_{23} \varepsilon_{x_j y_j}^{(m)},$$

$$\sigma_{x_j y_j}^{(c)} = \frac{1}{2} a_{13} \varepsilon_{x_j x_j}^{(m)} + \frac{1}{2} a_{23} \varepsilon_{y_j y_j}^{(m)} + a_{33} \varepsilon_{x_j y_j}^{(m)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \cos^4(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \cos^4(\vartheta_2 - \varphi_j) \right), \\ a_{12} &= \frac{\nu E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_b}{h} \sin^2(\vartheta_2 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_2 - \varphi_j) \right), \\ a_{13} &= E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_2 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_2 - \varphi_j) \right), \\ a_{22} &= \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} + E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^4(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin^4(\vartheta_2 - \varphi_j) \right), \quad (5.5) \\ a_{23} &= E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_2 - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_2 - \varphi_j) \right), \\ a_{33} &= \frac{E^{(m)}}{(1+\nu)} \frac{h_m}{h} + \frac{1}{2} E^{(s)} \left( \frac{h_a}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin^2 2(\vartheta_2 - \varphi_j) \right). \end{aligned}$$

Natomiast składowe odkształcenia można wyrazić w następujący sposób

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{x_j x_j}^{(m)} &= b_{11} \sigma_{x_j x_j}^{(c)} + b_{12} \sigma_{y_j y_j}^{(c)} + b_{13} \sigma_{x_j y_j}^{(c)}, \\
\mathcal{E}_{y_j y_j}^{(m)} &= b_{12} \sigma_{x_j x_j}^{(c)} + b_{22} \sigma_{y_j y_j}^{(c)} + b_{23} \sigma_{x_j y_j}^{(c)}, \\
\mathcal{E}_{x_j y_j}^{(m)} &= \frac{1}{2} b_{13} \sigma_{x_j x_j}^{(c)} + \frac{1}{2} b_{23} \sigma_{y_j y_j}^{(c)} + b_{33} \sigma_{x_j y_j}^{(c)},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{1}{D} \left[ a_{22} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{23})^2 \right], & b_{12} &= \frac{1}{D} \left[ \frac{1}{2} a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33} \right], \\
b_{13} &= \frac{1}{D} [a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}], & b_{22} &= \frac{1}{D} \left[ a_{11} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{13})^2 \right], \\
b_{23} &= \frac{1}{D} [a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23}], & b_{33} &= \frac{1}{D} [a_{11} a_{22} - (a_{12})^2]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{23}}{2} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
&= \frac{(E^{(m)})^3}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left( \frac{h_m}{h} \right)^3 + \frac{(E^{(m)})^2 E^{(s)}}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left( \frac{h_a}{h} + \frac{h_b}{h} \right) \left( \frac{h_m}{h} \right)^2 \\
&+ \frac{E^{(m)} (E^{(s)})^2}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \frac{h_a h_b}{h^2} \{ \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \sin^2(\vartheta_2 - \varphi_j) \} \\
&* [ \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \cos^2(\vartheta_2 - \varphi_j) ] \\
&+ \frac{1}{2} [ \cos 2(\vartheta_1 + \vartheta_2 - 2\varphi_j) - \cos 2(\vartheta_2 - \vartheta_1) ] \cos^2(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \nu \sin^4(\vartheta_2 - \vartheta_1) \}.
\end{aligned}$$

Aby rozwiązać przedstawiony problem tarczy ze szczeliną, wprowadzono funkcję naprężeń Airy'ego spełniającą zależności

$$\sigma_{x_j x_j}^{(c)} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_j^2}, \quad \sigma_{x_j y_j}^{(c)} = -\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j \partial y_j}, \quad \sigma_{y_j y_j}^{(c)} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_j^2}.$$

Równanie nierozdzielności odkształceń

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x_j x_j}^{(m)}}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y_j y_j}^{(m)}}{\partial x_j^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{x_j y_j}^{(m)}}{\partial x_j \partial y_j}$$

wyrażono przez składowe naprężeń i funkcję Airiego. Po przekształceniach otrzymano następujące równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu

$$\frac{\partial^4 F_j}{\partial x_j^4} + m_1 \frac{\partial^4 F_j}{\partial x_j^3 \partial y_j} + m_2 \frac{\partial^4 F_j}{\partial x_j^2 \partial y_j^2} + m_3 \frac{\partial^4 F_j}{\partial x_j \partial y_j^3} + m_4 \frac{\partial^4 F_j}{\partial y_j^4} = 0, \quad (5.8)$$

w którym

$$m_1 = \frac{2k_2}{k_1}, \quad m_2 = \frac{2k_3}{k_1}, \quad m_3 = -\frac{2k_4}{k_1}, \quad m_4 = \frac{k_5}{k_1}$$

gdzie

$$k_1 = a_{11} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{13})^2 = b_{22} D, \quad k_2 = a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13} = -b_{23} D,$$

$$k_3 = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 - \left( a_{12} a_{33} - \frac{1}{2} a_{13} a_{23} \right) = (b_{33} + b_{12}) D,$$

$$k_4 = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} = b_{13} D, \quad k_5 = a_{22} a_{33} - \frac{1}{2} (a_{23})^2 = b_{11} D.$$

Wykorzystując zależności (5.5) i przyjmując że kąt nachylenia drugiej rodziny włókien można wyrazić jako  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \alpha$  po dokonaniu przekształceń algebraicznych i trygonometrycznych współczynniki równania określono następującymi wyrażeniami:

$$k_1 = \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left(\frac{h_m}{h}\right)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\ \left. + \frac{h_b}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right]$$

$$+ \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \cos^4(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \cos^4(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right]$$

$$+ 2(E^{(s)})^2 \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2 \alpha,$$

$$k_2 = \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\ \left. + \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right]$$

$$- \frac{\nu E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\ \left. + \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right]$$

$$+ 2(E^{(s)})^2 \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \cos(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2 \alpha \sin(2\vartheta_1 + \alpha - 2\varphi_j),$$

$$k_3 = \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left(\frac{h_m}{h}\right)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left(\frac{h_a}{h} + \frac{h_b}{h}\right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3E^{(m)}E^{(s)}}{4(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right] \\
& + \frac{3(E^{(s)})^2}{2} \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \sin^2 \alpha \sin^2(2\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) - \frac{(E^{(s)})^2}{2} \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \sin^4 \alpha, \\
k_4 = & \frac{\nu E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\
& + \left. \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right] \\
& - \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\
& + \left. \frac{h_b}{h} \sin 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \cos^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right] \\
& - 2(E^{(s)})^2 \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \sin(\vartheta_1 - \varphi_j) \sin(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2 \alpha \sin(2\vartheta_1 + \alpha - 2\varphi_j),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5 = & \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left( \frac{h_m}{h} \right)^2 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{2(1+\nu)(1-\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 - \varphi_j) \right. \\
& + \left. \frac{h_b}{h} \sin^2 2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right] \\
& + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)} \frac{h_m}{h} \left[ \frac{h_a}{h} \sin^4(\vartheta_1 - \varphi_j) + \frac{h_b}{h} \sin^4(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \right] \\
& + 2(E^{(s)})^2 \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} \sin^2(\vartheta_1 - \varphi_j) \sin^2(\vartheta_1 + \alpha - \varphi_j) \sin^2 \alpha,
\end{aligned}$$

$$D = E^{(m)} \left\{ \frac{(E^{(m)})^2}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left( \frac{h_m}{h} \right)^3 + \frac{E^{(m)}E^{(s)}}{(1+\nu)^2(1-\nu)} \left( \frac{h_a}{h} + \frac{h_b}{h} \right) \left( \frac{h_m}{h} \right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{(E^{(s)})^2}{(1-\nu)^2} \frac{h_m}{h} \frac{h_a}{h} \frac{h_b}{h} (1 - \cos^4 \alpha - \nu \sin^4 \alpha) \}. \quad (5.9)$$

W celu znalezienia rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu (5.8) zastosowano pojedynczą transformację wykładniczą Fouriera określoną związkami<sup>1</sup>

$$\tilde{F}(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{isx} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^r F(x, y)}{\partial x^r} e^{isx} dx = (-is)^r \tilde{F}(s, y),$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(s, y) e^{-isx} ds.$$

Mnożąc równanie (5.8) przez  $e^{isx}$  i całkując względem  $x$  od  $-\infty$  do  $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} e^{isx} dx + m_1 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} e^{isx} dx + m_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{isx} dx + m_3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x} e^{isx} dx + m_4 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \int_{-\infty}^{\infty} F e^{isx} dx = 0,$$

po przekształceniach otrzymano

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial y^4} - i \frac{m_3}{m_4} s \frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial y^3} - \frac{m_2}{m_4} s^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} + \frac{m_1}{m_4} i s^3 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} + \frac{1}{m_4} s^4 \tilde{F} = 0. \quad (5.10)$$

Podstawiając do równania (5.10) rozwiązanie w postaci  $\tilde{F} = e^{\lambda y}$ , a współczynnik  $\lambda$  przyjmując jako  $\lambda = i\beta s$  tak aby otrzymać równanie o współczynnikach rzeczywistych otrzymano następujące równanie

<sup>1</sup> Ponieważ rozwiązywany jest problem tarczy z jedną szczeliną, to aby nie komplikować wyrażień oznaczono współrzędne  $j$ -szczeliny  $(x_j, y_j)$  przez  $(x, y)$ ; do poprzednich oznaczeń powrócono ponownie we wzorze (5.18)

$$\beta^4 - \frac{m_3}{m_4} \beta^3 + \frac{m_2}{m_4} \beta^2 - \frac{m_1}{m_4} \beta + \frac{1}{m_4} = 0, \quad (5.11)$$

$$\text{tutaj } \frac{m_3}{m_4} = -\frac{2k_4}{k_5}, \quad \frac{m_2}{m_4} = \frac{2k_3}{k_5}, \quad \frac{m_1}{m_4} = \frac{2k_2}{k_5}, \quad \frac{1}{m_4} = \frac{k_1}{k_5}.$$

Jest to równanie czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1. Jeśli pierwiastkami równania są pierwiastki zespolone, to są one parami sprzężone, zatem

$$\beta_1 = b + ia, \quad \beta_2 = d + ic, \quad \beta_3 = b - ia, \quad \beta_4 = d - ic$$

co odpowiada

$$\lambda_1 = is\beta_1 = s(-a + ib), \quad \lambda_2 = s(-c + id), \quad \lambda_3 = s(a + ib), \quad \lambda_4 = s(c + id).$$

Wobec tego rozwiązanie równania (5.10) ma następującą postać

$$\tilde{F} = C_1 e^{(-a+ib)sy} + C_2 e^{(-c+id)sy} + C_3 e^{(a+ib)sy} + C_4 e^{(c+id)sy}$$

tutaj  $a, c > 0$  a  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) są nieznanymi funkcjami zależnymi od  $s$ .

Funkcja naprężeń Airygo  $F$  musi w obszarze tarczy przyjmować wartości skończone, zatem w górnej półpłaszczyźnie  $y > 0$  przyjmuje postać

$$F(x, y^{(+)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_1 e^{(ibs-a|s|)y} + C_2 e^{(ids-c|s|)y}] e^{-isx} ds,$$

natomiast w dolnej półpłaszczyźnie przy  $y < 0$  przyjmuje następującą postać

$$F(x, y^{(-)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C_3 e^{(ibs+a|s|)y} + C_4 e^{(ids+c|s|)y}] e^{-isx} ds.$$

Składowe naprężenia na górnej i na dolnej półpłaszczyźnie mają następującą postać

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(+)} &= \frac{\partial^2 F(x, y^{(+)})}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C_1 (ibs - a|s|)^2 e^{(ibs - a|s|)y} + C_2 (ids - c|s|)^2 e^{(ids - c|s|)y} \right] e^{-isx} ds \\ \sigma_{yy}^{(+)} &= \frac{\partial^2 F(x, y^{(+)})}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left[ C_1 e^{(ibs - a|s|)y} + C_2 e^{(ids - c|s|)y} \right] e^{-isx} ds\end{aligned}\quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(+)} &= -\frac{\partial^2 F(x, y^{(+)})}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \left[ C_1 (ibs - a|s|) e^{(ibs - a|s|)y} + C_2 (ids - c|s|) e^{(ids - c|s|)y} \right] e^{-isx} ds \\ \sigma_{xx}^{(-)} &= \frac{\partial^2 F(x, y^{(-)})}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C_3 (ibs + a|s|)^2 e^{(ibs + a|s|)y} + C_4 (ids + c|s|)^2 e^{(ids + c|s|)y} \right] e^{-isx} ds \\ \sigma_{yy}^{(-)} &= \frac{\partial^2 F(x, y^{(-)})}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left[ C_3 e^{(ibs + a|s|)y} + C_4 e^{(ids + c|s|)y} \right] e^{-isx} ds\end{aligned}\quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(-)} &= -\frac{\partial^2 F(x, y^{(-)})}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} is \left[ C_3 (ibs + a|s|) e^{(ibs + a|s|)y} + C_4 (ids + c|s|) e^{(ids + c|s|)y} \right] e^{-isx} ds.\end{aligned}$$



Z warunku ciągłości składowych naprężeń  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{xy}$  względem  $y = 0$  wynikają następujące zależności

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4$$

$$C_1(bs + ia|s|) + C_2(ds + ic|s|) = C_3(bs - ia|s|) + C_4(ds - ic|s|). \quad (5.14)$$

Z powyższych warunków wiążących cztery funkcje zależne od  $s$  można dwie funkcje wyrazić przy pomocy dwóch pozostałych następującymi wyrażeniami

$$C_3 = \frac{(c+a)|s| + i(d-b)s}{(c-a)|s| + i(d-b)s} C_1 + \frac{2c|s|}{(c-a)|s| + i(d-b)s} C_2$$

$$C_4 = -\frac{2a|s|}{(c-a)|s| + i(d-b)s} C_1 - \frac{(a+c)|s| - i(d-b)s}{(c-a)|s| + i(d-b)s} C_2. \quad (5.15)$$

Podobnie jak w wielu pracach dotyczących szczelin w ciele liniowo sprężystym np. [8], [31], [82] wprowadzono pomocnicze funkcje wyrażone przez skoki składowych przemieszczeń na powierzchni szczeliny

$$f_1(x) = \frac{\partial [u^{(+)}(x,0) - u^{(-)}(x,0)]}{\partial x}$$

$$f_2(x) = \frac{\partial [v^{(+)}(x,0) - v^{(-)}(x,0)]}{\partial x},$$

tu  $[u^{(+)}(x,0) - u^{(-)}(x,0)]$  i  $[v^{(+)}(x,0) - v^{(-)}(x,0)]$  określają skok składowej przemieszczenia  $u$  i odpowiednio  $v$  przy  $y = 0$ . Zgodnie z zależnością (5.4) wprowadzone funkcje są niezerowe tylko wewnątrz szczeliny, a poza nią równe zero. Za pomocą tych funkcji można określić nieznanne funkcje  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  i  $C_4$ . Wykorzystując związek pomiędzy przemieszczeniem  $u$  a składową odkształcenia  $\epsilon_{xx}$  i związek konstytutywny (5.6)<sub>1</sub> otrzymano

$$\frac{\partial u^{(+)}}{\partial x} - \frac{\partial u^{(-)}}{\partial x} = b_{11}(\sigma_{xx}^{(+)} - \sigma_{xx}^{(-)}),$$

ponieważ

$$\sigma_{yy}^{(+)} = \sigma_{yy}^{(-)} \text{ i } \sigma_{xy}^{(+)} = \sigma_{xy}^{(-)} \text{ przy } y = 0,$$

tutaj  $b_{11}$  określony jest równaniem (5.9)<sub>5</sub> i (5.9)<sub>6</sub>. Podstawiając składowe naprężenia  $\sigma_{xx}$  na górnej i dolnej płaszczyźnie określone równaniami (5.12)<sub>1</sub>, (5.13)<sub>1</sub> przy  $y = 0$  otrzymano

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b_{11} [C_1(ibs - a|s|)^2 + C_2(ids - c|s|)^2 - C_3(ibs + a|s|)^2 - C_4(ids + c|s|)^2] e^{-isx} ds.$$

Na podstawie definicji transformacji wykładniczej Fouriera otrzymano następującą zależność wiążącą funkcje  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

$$b_{11} [C_1(ibs - a|s|)^2 + C_2(ids - c|s|)^2 - C_3(ibs + a|s|)^2 - C_4(ids + c|s|)^2] = \int_{-a}^a f_1(t) e^{ist} dt. \quad (5.16)$$

Wykorzystując związek pomiędzy przemieszczeniem  $v$  a składową odkształcenia  $\varepsilon_{yy}$  i składowymi naprężeniami zarówno na górnej jak i dolnej płaszczyźnie

$$v^{(+)}(x, y^{(+)}) = \int \varepsilon_{yy}^{(+)}(x, y^{(+)}) dy = b_{12} \int \sigma_{xx}^{(+)}(x, y^{(+)}) dy + b_{22} \int \sigma_{yy}^{(+)}(x, y^{(+)}) dy + b_{23} \int \sigma_{xy}^{(+)}(x, y^{(+)}) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ b_{12} \int_{-\infty}^{\infty} [C_1 (ibs - a|s|) e^{(ibs-a|s|)y} + C_2 (ids - c|s|) e^{(ids-c|s|)y}] e^{-isx} ds \right. \\
&- b_{22} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left[ \frac{C_1}{(ibs - a|s|)} e^{(ibs-a|s|)y} + \frac{C_2}{(ids - c|s|)} e^{(ids-c|s|)y} \right] e^{-isx} ds \\
&\left. + b_{23} \int_{-\infty}^{\infty} is [C_1 e^{(ibs-a|s|)y} + C_2 e^{(ids-c|s|)y}] e^{-isx} ds \right\}
\end{aligned}$$

$$v^{(-)}(x, y^{(-)}) = \int \mathcal{E}_{yy}^{(-)}(x, y^{(-)}) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ b_{12} \int_{-\infty}^{\infty} [C_3 (ibs + a|s|) e^{(ibs+a|s|)y} + C_4 (ids + c|s|) e^{(ids+c|s|)y}] e^{-isx} ds \right. \\
&- b_{22} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \left[ \frac{C_3}{(ibs + a|s|)} e^{(ibs+a|s|)y} + \frac{C_4}{(ids + c|s|)} e^{(ids+c|s|)y} \right] e^{-isx} ds \\
&\left. + b_{23} \int_{-\infty}^{\infty} is [C_3 e^{(ibs+a|s|)y} + C_4 e^{(ids+c|s|)y}] e^{-isx} ds \right\}
\end{aligned}$$

obliczając zgodnie z definicją wprowadzonej funkcji  $f_2(x)$  pochodną po  $x$  różnicy przemieszczeń  $v$  z górnej i dolnej płaszczyzny przy  $y = 0$ , uwzględniając związki (5.14) oraz wykorzystując transformację wykładniczą Fouriera otrzymano następującą zależność

$$b_{22} is^3 \left[ \frac{C_1}{(ibs - a|s|)} + \frac{C_2}{(ids - c|s|)} - \frac{C_3}{(ibs + a|s|)} - \frac{C_4}{(ids + c|s|)} \right] = \int_{-a}^a f_2(t) e^{ist} dt. \quad (5.17)$$

W obu równaniach (5.16) i (5.17) po prawych stronach występują całki w przedziale  $(-a, a)$ , ponieważ całki od  $-\infty$  do  $+\infty$  redukują się do tego przedziału, gdyż tylko w tym przedziale funkcje  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  są różne od

zera. Dysponując równaniami (5.15) – (5.17) można jednoznacznie określić funkcje  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , które mają postać następującą

$$C_1 = \int_{-a}^a \frac{|s| [i(d-b)s - (c+a)s] (ids + c|s|) (b^2 + a^2) f_1(t) e^{ist} dt}{2as^4 Q b_{11}}$$

$$+ \int_{-a}^a \frac{|s| [i(a+c)s + (d-b)s] (ids + c|s|) (b^2 + a^2) (ibs + a|s|) (d^2 + c^2) f_2(t) e^{ist} dt}{2as^5 Q b_{22}}$$

$$C_2 = \int_{-a}^a \frac{|s| [i(d-b)s + (c+a)s] (ibs + a|s|) (d^2 + c^2) f_1(t) e^{ist} dt}{2cs^4 Q b_{11}}$$

$$+ \int_{-a}^a \frac{|s| [(d-b)s - i|s|(a+c)] (ids + c|s|) (b^2 + a^2) (ibs + a|s|) (d^2 + c^2) f_2(t) e^{ist} dt}{2cs^5 Q b_{22}}$$

$$C_3 = \int_{-a}^a \frac{\{-|s| [(a+c)^2 + (d-b)^2] (b^2 + a^2) (ids + c|s|)\}}{2as^2 Q b_{11}}$$

$$+ \frac{2a [i(d-b)s + (c+a)s] (ibs + a|s|) (d^2 + c^2) \}}{2as^2 Q b_{11}} \frac{f_1(t) e^{ist} dt}{[(c-a)|s| + i(d-b)s]}$$

$$+ \int_{-a}^a \frac{\{i|s| [(a+c)^2 + (d-b)^2] + 2a [(d-b)s - i(a+c)|s|]\}}{2as^3 Q b_{22}}$$

$$* \frac{(ids + c|s|) (ibs + a|s|) (b^2 + a^2) (d^2 + c^2) f_2(t) e^{ist} dt}{[(c-a)|s| + i(d-b)s]}$$

$$C_4 = \int_{-a}^a \frac{\{-|s| [(a+c)^2 + (d-b)^2] (d^2 + c^2) (ibs + a|s|)\}}{2cs^2 Q b_{11}}$$

$$- \frac{2c [i(d-b)s - (c+a)s] (ids + c|s|) (b^2 + a^2) \}}{2cs^2 Q b_{11}} \frac{f_1(t) e^{ist} dt}{[(c-a)|s| + i(d-b)s]}$$

$$+ \int_{-a}^a \frac{\{i|s|[(a+c)^2 + (d-b)^2] - 2c[i(a+c)|s| + (d-b)s]\}}{2cs^3 Q b_{22}} \\ * \frac{(ids + c|s|)(ibs + a|s|)(b^2 + a^2)(d^2 + c^2)f_2(t)e^{ist} dt}{[(c-a)|s| + i(d-b)s]}$$

gdzie

$$Q = [(a+c)^2 + (d-b)^2]\{i[b(d^2 + c^2) - d(a^2 + b^2)]s \\ + [a(d^2 + c^2) - c(a^2 + b^2)]|s|\}$$

Podstawiając do wzorów (5.12) i (5.13) określone funkcje  $C_1, C_2, C_3, C_4$  otrzymano składowe naprężenia w dość skomplikowanej postaci. Rozdzielając zmienną całkowania  $s \in (-\infty, +\infty)$  na dwa przedziały  $(-\infty, 0)$  i  $[0, +\infty)$ ; dokonując podstawienia  $s' = -s$  w przedziale  $(-\infty, 0)$  otrzymano wszystkie całki w przedziale dodatnim. Wykorzystując fakt, że

$$\int_0^{\infty} e^{-ps} ds = \frac{1}{p} \text{ przy } p = \pm ay \pm i(by + t - x) \text{ lub } p = \pm cy \pm i(dy + t - x),$$

eliminując wyrażenia urojone występujące w mianownikach wyrażeń oraz stosując program MATHEMATICA, który znakomicie upraszcza postać współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennych  $y$  i  $(t-x)$  w poszczególnych składnikach składowych naprężenia, otrzymano w następującej postaci składowe lokalnego stanu naprężenia w tarczy z  $j$ -tą szczeliną w jej własnym lokalnym układzie współrzędnych

$$\sigma_{x_j x_j}^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \left\{ [R_1 y_j^3 + R_2 y_j^2 (t_j - x_j) + R_3 y_j (t_j - x_j)^2 + R_4 (t_j - x_j)^3] \frac{f_{1j}(t_j)}{Q_0 b_{11}} \right. \\ \left. + [R_5 y_j^3 + R_6 y_j^2 (t_j - x_j) + R_7 y_j (t_j - x_j)^2 + R_8 (t_j - x_j)^3] \right. \\ \left. * (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \frac{f_{2j}(t_j)}{Q_0 b_{22}} \right\} dt_j \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y_j y_j}^{[j]} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \left\{ [S_1 y_j^3 + S_2 y_j^2 (t_j - x_j) + S_3 y_j (t_j - x_j)^2 + S_4 (t_j - x_j)^3] \frac{f_{1j}(t_j)}{Q_0 b_{11}} \right. \\ &+ [S_5 y_j^3 + S_6 y_j^2 (t_j - x_j) + S_7 y_j (t_j - x_j)^2 + S_8 (t_j - x_j)^3] \\ &\left. * (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \frac{f_{2j}(t_j)}{Q_0 b_{22}} \right\} dt_j \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x_j x_j}^{[j]} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \left\{ [T_1 y_j^3 + T_2 y_j^2 (t_j - x_j) + T_3 y_j (t_j - x_j)^2 + T_4 (t_j - x_j)^3] \frac{f_{1j}(t_j)}{Q_0 b_{11}} \right. \\ &+ [T_5 y_j^3 + T_6 y_j^2 (t_j - x_j) + T_7 y_j (t_j - x_j)^2 + T_8 (t_j - x_j)^3] \\ &\left. * (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \frac{f_{2j}(t_j)}{Q_0 b_{22}} \right\} dt_j \end{aligned} \quad (5.20)$$

gdzie:

$$R_1 = (a^2 c + b^2 c + ac^2 + ad^2)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

$$R_2 = a^2 bc^3 + b^3 c^3 + 2abc^4 + 2a^4 cd + 4a^2 b^2 cd + 2b^4 cd + a^3 c^2 d + ab^2 c^2 d + a^2 bcd^2 + b^3 cd^2 + 4abc^2 d^2 + a^3 d^3 + ab^2 d^3 + 2abd^4,$$

$$R_3 = a^4 c + 2a^2 b^2 c + b^4 c + 2a^3 c^2 + 2ab^2 c^2 + 2a^2 c^3 + ac^4 + 2a^2 bcd + 2b^3 cd + 2abc^2 d + 2a^2 cd^2 + 2ac^2 d^2 + 2abd^3 + ad^4,$$

$$R_4 = a^2 bc + b^3 c + 2abc^2 + 2a^2 cd + ac^2 d + ad^3,$$

$$R_5 = (bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

$$R_6 = -a^3 c^2 - ab^2 c^2 - a^2 c^3 + b^2 c^3 + 2a^2 bcd + 2b^3 cd + 2abc^2 d + a^2 d^3 + ab^2 d^2 - a^2 cd^2 + b^2 cd^2 + 2abd^3,$$

$$R_7 = a^2bc + b^3c + 2b^2cd + ac^2d + 2abd^2 + ad^3,$$

$$R_8 = a^2c + b^2c + ac^2 + ad^2,$$

$$S_1 = (a+c)(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

$$S_2 = bc^3 + a^3d + ab^2d + bcd^2 + 2bd(bc+ad),$$

$$S_3 = -(a^2-b^2)c + 2bd(a+c) - a(c^2-d^2),$$

$$S_4 = bc + ad,$$

$$S_5 = 2abc^2 + bc^3 + a^3d + ab^2d + 2a^2cd + bcd^2,$$

$$S_6 = a^3 + ab^2 + 2a^2c + 2ac^2 + c^3 + 2abd + 2bcd + cd^2,$$

$$S_7 = 2ab + bc + ad + 2cd,$$

$$S_8 = a + c,$$

$$T_1 = (bc+ad)(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

$$T_2 = -a^3c^2 - ab^2c^2 - a^2c^3 + b^2c^3 + 2a^2bcd + 2b^3cd + 2abc^2d + a^3d^2 \\ + ab^2d^2 - a^2cd^2 + b^2cd^2 + 2abd^3,$$

$$T_3 = a^2bc + b^3c + 2b^2cd + ac^2d + 2abd^2 + ad^3,$$

$$T_4 = c(a^2+b^2) + a(c^2+d^2),$$

$$T_5 = (a+c)(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

$$T_6 = bc^3 + a^3d + ab^2d + 2b^2cd + 2abd^2 + bcd^2,$$

$$T_7 = -a^2c + b^2c - ac^2 + ad^2 + 2abd + 2bcd,$$

$$T_8 = ad + bc$$

$$Q_o = ac[(a+c)^2 + (b-d)^2] \{ [(a^2+b^2)y_j^2 + 2by_j(t_j-x_j) + (t_j-x_j)^2] \\ * [(c^2+d^2)y_j^2 + 2d y_j(t_j-x_j) + (t_j-x_j)^2] \}$$

### 5.3. STAN NAPRĘŻENIA NA BRZEGU SZCZELINY WYWOŁANY ODDZIAŁYWANIEM INNYCH SZCZELIN

Stan naprężenia na brzegu  $p$ -tej szczeliny jest sumą lokalnego stanu naprężenia i stanu naprężenia generowanego przez pozostałe szczeliny wzdłuż brzegu  $p$ -tej szczeliny  $y_p = 0$ . Zatem

$$\begin{aligned}\sigma_{x_p y_p}^{(c)} &= \sigma_{x_p y_p}^{\{p\}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \sigma_{x_p y_p}^{\prime\{j\}}, \\ \sigma_{y_p y_p}^{(c)} &= \sigma_{y_p y_p}^{\{p\}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \sigma_{y_p y_p}^{\prime\{j\}},\end{aligned}\tag{5.21}$$

przy  $p = 1, \dots, n$ ,

tutaj  $\sigma_{x_p y_p}^{\{p\}}$ ,  $\sigma_{y_p y_p}^{\{p\}}$  są składowymi lokalnego stanu naprężenia na brzegu  $p$ -tej szczeliny w jej lokalnym układzie współrzędnych  $(x_p, y_p)$  przy  $y_p = 0$ ,  $\sigma_{x_p y_p}^{\prime\{j\}}$ ,  $\sigma_{y_p y_p}^{\prime\{j\}}$  są transformowanymi składowymi lokalnego tensora naprężenia  $j$ -tej szczeliny z układu  $(x_j, y_j)$  do układu współrzędnych  $(x_p, y_p)$  przy  $y_p = 0$ . Występujące po prawej stronie równania wyrażenia

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \sigma_{x_p y_p}^{\prime\{j\}}, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \sigma_{y_p y_p}^{\prime\{j\}}$$

są składowymi lokalnego stanu naprężenia od wszystkich pozostałych szczelin w układzie współrzędnych  $p$ -tej szczeliny przy  $y_p = 0$ , które są odpowiednio wielkościami  $q_p'$  i  $p_p'$  zaznaczonymi na rys. 5.1c<sub>1</sub>), ..., c<sub>n</sub>). Wielkości te określone są przez nieznanne funkcje  $f_{\eta j}$  ( $\eta = 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, n$ ;  $j \neq p$ ). Składowe stanu naprężenia spełniają warunki brzegowe (5.3) zatem

$$\sigma_{x_p y_p}^{(c)}(x_p) = -q_p(x_p) \quad \text{oraz} \quad \sigma_{y_p y_p}^{(c)}(x_p) = -p_p(x_p) \quad \text{przy } p = 1, \dots, n.$$



Lokalny stan naprężenia na brzegu  $p$ -tej szczeliny  $y_p = 0$  otrzymano z równań (5.19) i (5.20) wprowadzając jednocześnie znormalizowane zmienne  $x_p = a_p \xi$  i  $t_p = a_p \tau$ , gdzie  $\xi$  i  $\tau$  są definiowane w przedziale  $(-1, 1)$ , zatem

$$\begin{aligned} \sigma_{x_p y_p}^{\{p\}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{[c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)]}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{f_{1p}(\tau)}{b_{11}(\tau - \xi)} \right. \\ &+ \left. \frac{(ad + bc)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{f_{2p}(\tau)}{b_{22}(\tau - \xi)} \right\} d\tau, \\ \sigma_{y_p y_p}^{\{p\}} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(bc + ad)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{f_{1p}(\tau)}{b_{11}(\tau - \xi)} \right. \\ &+ \left. \frac{(a+c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{f_{2p}(\tau)}{b_{22}(\tau - \xi)} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Równania opisujące lokalny stan naprężeń na brzegu  $p$ -tej szczeliny są osobliwymi równaniami całkowymi.

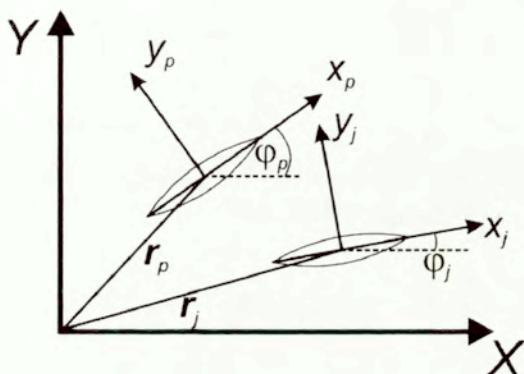
Aby znaleźć stan naprężenia na brzegu  $p$ -tej szczeliny należy znaleźć stan naprężenia od wszystkich pozostałych szczelin w układzie współrzędnych rysy  $p$  przy  $y_p = 0$ , zatem określić regularne wyrażenia osobliwego równania całkowego (5.21). W tym celu należy przetransformować składowe naprężenia od wszystkich pozostałych szczelin z ich lokalnych układów współrzędnych do lokalnego układu współrzędnych  $p$ -tej szczeliny. Transformacja współrzędnych z układu  $(x_j, y_j)$  do układu  $(x_p, y_p)$  wynika z następującej zależności

$$\begin{aligned} r_{jX} + x_j \cos \varphi_j - y_j \sin \varphi_j &= r_{pX} + x_p \cos \varphi_p - y_p \sin \varphi_p \\ r_{jY} + x_j \sin \varphi_j + y_j \cos \varphi_j &= r_{pY} + x_p \sin \varphi_p + y_p \cos \varphi_p, \end{aligned}$$

którą otrzymano dokonując transformacji lokalnych układów współrzędnych  $(x_j, y_j)$  i  $(x_p, y_p)$  do globalnego układu współrzędnych  $(X, Y)$

(rys.5.3). Przyjmując w równaniach  $y_p = 0$  ponadto mnożąc pierwsze równanie przez  $\cos \varphi_j$  a drugie przez  $\sin \varphi_j$  i dodając stronami otrzymano

$$x_j = (r_{pY} - r_{jY}) \sin \varphi_j + (r_{pX} - r_{jX}) \cos \varphi_j + x_p \cos(\varphi_p - \varphi_j).$$



Rys.5.3. Dwie szczeliny w swoich lokalnych układach współrzędnych.

Przekształcając podobnie otrzymano

$$y_j = (r_{pY} - r_{jY}) \cos \varphi_j - (r_{pX} - r_{jX}) \sin \varphi_j + x_p \sin(\varphi_p - \varphi_j).$$

Zatem współrzędne  $x_j, y_j$  można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} x_j &= p_1 + x_p \cos \gamma \\ y_j &= p_2 + x_p \sin \gamma \end{aligned}$$

gdzie  $\gamma$  jest kątem obrotu pomiędzy lokalnymi układami współrzędnych  $(x_p, y_p)$  a  $(x_j, y_j)$  zatem  $\gamma = \varphi_p - \varphi_j$  a  $p_1, p_2$  określone zależnościami

$$\begin{aligned} p_1 &= (r_{pY} - r_{jY}) \sin \varphi_j + (r_{pX} - r_{jX}) \cos \varphi_j \\ p_2 &= (r_{pY} - r_{jY}) \cos \varphi_j - (r_{pX} - r_{jX}) \sin \varphi_j \end{aligned}$$

są współrzędnymi przetransformowanego wektora łączącego środki  $j$ -tego i  $p$ -tego układu współrzędnych o składowych  $(r_{pX} - r_{jX}), (r_{pY} - r_{jY})$  w układzie  $(X, Y)$  do układu lokalnego  $(x_j, y_j)$ .

Przetransformowane składowe naprężenia z lokalnego układu współrzędnych związanego z  $j$ -tą szczeliną do lokalnego układu współrzędnych związanego z  $p$ -tą szczeliną mają postać następującą:

$$\begin{aligned}\sigma'_{x_p y_p}^{(j)} &= -(\sigma_{x_j x_j}^{(j)} - \sigma_{y_j y_j}^{(j)}) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{x_j y_j}^{(j)} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma), \\ \sigma'_{y_p y_p}^{(j)} &= \sigma_{x_j x_j}^{(j)} \sin^2 \gamma + \sigma_{y_j y_j}^{(j)} \cos^2 \gamma - 2\sigma_{x_j y_j}^{(j)} \sin \gamma \cos \gamma.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Podstawiając  $\sigma_{x_j x_j}^{(j)}, \sigma_{y_j y_j}^{(j)}, \sigma_{x_j y_j}^{(j)}$  określone wzorami (5.18)-(5.20) i dokonując normalizacji współrzędnych  $x_p = a_p \xi, t_j = a_j \tau$  przedstawiono równania (5.23) w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\sigma'_{x_p y_p}^{(j)} &= \int_{-1}^1 k_1^{(j)} f_{1j} d\tau + \int_{-1}^1 k_2^{(j)} f_{2j} d\tau, \\ \sigma'_{y_p y_p}^{(j)} &= \int_{-1}^1 k_3^{(j)} f_{1j} d\tau + \int_{-1}^1 k_4^{(j)} f_{2j} d\tau,\end{aligned}\quad (5.24)$$

tutaj

$$\begin{aligned}k_1^{(j)} &= \frac{a_j}{2\pi Q_0 b_{11}} \left\{ [(a+c) - [c(a^2+b^2) + a(c^2+d^2)]](a^2+b^2)(c^2+d^2) \right. \\ & * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\ & + [bc(c^2+d^2) + ad(a^2+b^2) + 2bd(bc+ad) - (bc+ad)(a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ & - 2cd(a^2+b^2)^2 - 2ab(c^2+d^2)^2] (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\ & + [(bd-ac)(a+c) + (bc+ad)(b+d) - [(a^2+b^2)^2 c + a(c^2+d^2)^2 \\ & + 2(ac+bd)(c(a^2+b^2) + a(c^2+d^2))] (p_2 + a_p \xi \sin \gamma) (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\ & + [(bc+ad) - [bc(a^2+b^2) + 2ac(bc+ad) + ad(c^2+d^2)]] \\ & * (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \left. \right\} \sin \gamma \cos \gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{(bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\
& + [c(bd - ac) + d(bc + ad)](a^2 + b^2) \\
& + [a(bd - ac) + b(bc + ad)](c^2 + d^2)\}(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [bc(a^2 + b^2) + ad(c^2 + d^2) + 2bd(bc + ad)] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + [c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)](a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma\}, \quad (5.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2^{(j)} &= \frac{a_j}{2\pi Q_o b_{22}} \{ [bc(c^2 + d^2) + ad(a^2 + b^2) + 2ac(bc + ad) \\
& - (bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\
& + [a(a^2 + b^2) + 2(a + c)(ac + bd) + c(c^2 + d^2) - [c(bd - ac) + d(bc + ad)]] \\
& * (a^2 + b^2) - [a(bd - ac) + b(bc + ad)](c^2 + d^2) \} \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [2(ab + cd) + (bc + ad) - [bc(a^2 + b^2) + 2bd(bc + ad) + ad(c^2 + d^2)]] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma) (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + [(a + c) - c(a^2 + b^2) - a(c^2 + d^2)](a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \} \sin \gamma \cos \gamma \\
& + \{ [(a + c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\
& + [bc(c^2 + d^2) + ad(a^2 + b^2) + 2bd(bc + ad)] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [(a + c)(bd - ac) + (b + d)(ad + bc)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + (ad + bc)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \} \{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma\} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2), \quad (5.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3^{(j)} = & \frac{a_j}{2\pi Q_o b_{11}} \left[ [c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)](a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \right. \\
& + [(bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - 2cd(a^2 + b^2)^2 - 2ab(c^2 + d^2)^2] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [c(a^2 + b^2)^2 + a(c^2 + d^2)^2 + 2(ac + bd)[c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)]] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + [bc(a^2 + b^2) + 2ac(bc + ad) + ad(c^2 + d^2)](a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \left. \right] \sin^2 \gamma \\
& + \{ (a + c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\
& + [bc(c^2 + d^2) + ad(a^2 + b^2) + 2bd(bc + ad)] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [(bd - ac)(a + c) + (bc + ad)(b + d)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + (bc + ad)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \} \cos^2 \gamma \\
& - 2 \{ (bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \\
& + [c(bd - ac) + d(ad + bc)](a^2 + b^2) + [a(bd - ac) + b(bc + ad)](c^2 + d^2) \} \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [bc(a^2 + b^2) + ad(c^2 + d^2) + 2bd(bc + ad)] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + [c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)](a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \} \sin \gamma \cos \gamma, \quad (5.27)
\end{aligned}$$

$$k_4^{(j)} = \frac{a_j}{2\pi Q_o b_{22}} \left[ (bc + ad)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ [c(bd - ac) + d(ad + bc)](a^2 + b^2) + [a(bd - ac) + b(bc + ad)](c^2 + d^2) \right] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [bc(a^2 + b^2) + 2bd(bc + ad) + ad(c^2 + d^2)] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + [c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)](a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \sin^2 \gamma \\
& + \left[ [bc(c^2 + d^2) + ad(a^2 + b^2) + 2ac(bc + ad)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \right. \\
& \left. + [a(a^2 + b^2) + 2(a + c)(ac + bd) + c(c^2 + d^2)] \right] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [2(ab + cd) + (bc + ad)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + (a + c)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \cos^2 \gamma \\
& - \left[ [2(a + c)(a^2 + b^2)](c^2 + d^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^3 \right. \\
& \left. + [bc(c^2 + d^2) + ad(a^2 + b^2) + 2bd(bc + ad)] \right] \\
& * (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) \\
& + [(a + c)(bd - ac) + (b + d)(ad + bc)](p_2 + a_p \xi \sin \gamma)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \\
& + (ad + bc)(a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^3 \sin \gamma \cos \gamma (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \quad (5.28)
\end{aligned}$$

W każdym wyrażeniu  $k_1^{(j)}$ ,  $k_2^{(j)}$ ,  $k_3^{(j)}$ ,  $k_4^{(j)}$  występują czynniki  $\frac{1}{Q_o b_{11}}$  lub  $\frac{1}{Q_o b_{22}}$ , które określone są następująco:

$$Q_o = ac[(a + c)^2 + (b - d)^2] \left\{ (a^2 + b^2)(p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 + 2b(p_2 + a_p \xi \sin \gamma) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & * (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) + (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \left\{ (c^2 + d^2) (p_2 + a_p \xi \sin \gamma)^2 \right. \\
 & \left. + 2d (p_2 + a_p \xi \sin \gamma) (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma) + (a_j \tau - p_1 - a_p \xi \cos \gamma)^2 \right\}, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

$b_{11} = \frac{k_5}{D}$ ,  $b_{22} = \frac{k_1}{D}$  gdzie  $k_1$  i  $k_5$  określają współczynniki równania (5.8) i są przedstawione zależnościami (5.9)<sub>1</sub>, (5.9)<sub>5</sub> a  $D$  określone jest zależnością (5.9)<sub>6</sub>.

Zatem stan naprężenia na krawędzi  $p$ -tej szczeliny zgodnie z równaniem (5.21) uwzględniając równania (5.22) i (5.23) ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_p y_p}^{r\{p\}} = & \left\{ \int_{-1}^1 k_1^{(1)} f_{11} d\tau + \int_{-1}^1 k_2^{(1)} f_{21} d\tau + \dots + \int_{-1}^1 k_1^{(p-1)} f_{1(p-1)} d\tau + \int_{-1}^1 k_2^{(p-1)} f_{2(p-1)} d\tau \right. \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{[c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)]}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{1}{b_{11}(\tau - \xi)} f_{1p} d\tau \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(ad + bc)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{1}{b_{22}(\tau - \xi)} f_{2p} d\tau \\
 & \left. + \int_{-1}^1 k_1^{(p+1)} f_{1(p+1)} d\tau + \int_{-1}^1 k_2^{(p+1)} f_{2(p+1)} d\tau + \dots + \int_{-1}^1 k_1^{(n)} f_{1n} d\tau + \int_{-1}^1 k_2^{(n)} f_{2n} d\tau \right\}, \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_p y_p}^{r\{p\}} = & \left\{ \int_{-1}^1 k_3^{(1)} f_{11} d\tau + \int_{-1}^1 k_4^{(1)} f_{21} d\tau + \dots + \int_{-1}^1 k_3^{(p-1)} f_{1(p-1)} d\tau + \int_{-1}^1 k_4^{(p-1)} f_{2(p-1)} d\tau \right. \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(bc + ad)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{1}{b_{11}(\tau - \xi)} f_{1p} d\tau \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(a+c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} \frac{1}{b_{22}(\tau - \xi)} f_{2p} d\tau \\
 & \left. + \int_{-1}^1 k_3^{(p+1)} f_{1(p+1)} d\tau + \int_{-1}^1 k_4^{(p+1)} f_{2(p+1)} d\tau + \dots + \int_{-1}^1 k_3^{(n)} f_{1n} d\tau + \int_{-1}^1 k_4^{(n)} f_{2n} d\tau \right\}, \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

przy czym składowe stanu naprężenia  $\sigma_{x_p y_p}^{T\{p\}}$  i  $\sigma_{y_p x_p}^{T\{p\}}$  spełniają warunki brzegowe (5.3) przy  $p = 1, \dots, n$ . Równania (5.30), (5.31) z zadanymi funkcjami  $q_p$  i  $p_p$  są układem osobliwych równań całkowych pierwszego rodzaju z prostą osobliwością typu Cauchy z nieznanymi funkcjami  $f_{\eta_j}$  ( $\eta = 1, 2; j = 1, \dots, n$ ). Aby funkcje  $f_{\eta_j}$  były jednoznacznie wyznaczone powinny spełniać następujący warunek [5], [7], [34]

$$\int_{-1}^1 f_{\eta_j}(\tau) d\tau = 0 \quad \eta = 1, 2; \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.32)$$

Stosując standardową metodę rozwiązywania układu równań osobliwych [34],[36] poszukiwano rozwiązania w następującej postaci

$$f_{\eta_j}(\tau) = H_{\eta_j}(\tau)w(\tau) \quad (5.33)$$

gdzie  $H_{\eta_j}$  są nieznanymi funkcjami ograniczonymi i ciągłymi w przedziale  $-1 \leq \tau \leq 1$  a  $w(\tau)$  jest fundamentalną funkcją osobliwych równań całkowych, która w przypadku równań (5.30),(5.31) przyjmuje następującą postać [5],[8],[34],[36]

$$w(\tau) = (1 - \tau^2)^{-1/2}.$$

Tak określona funkcja fundamentalna jest wagą wielomianów Chebysheva pierwszego rodzaju  $T_n(\tau)$ .

Przyjmując poszukiwane rozwiązanie w postaci (5.33), układ osobliwych równań całkowych (5.30), (5.31), po uwzględnieniu warunków brzegowych (5.3) oraz dodatkowych warunków (5.32), można przybliżyć układem liniowych równań stosując np. metodę Gaussa-Chebysheva [34], [36] lub metodę Lobatto-Chebysheva [103], [53], [43], [8]. Metoda Gaussa-Chebysheva pozwala wyznaczyć niewiadome funkcje  $H_{\eta_j}$  w punktach  $\tau_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) będących pierwiastkami wielomianu  $T_n(\tau)$  znajdującymi się w przedziale  $[-1, 1]$ , które nie pokrywają się z punktami granicznymi  $\pm 1$ . Wartości funkcji  $H_{\eta_j}$  w punktach granicznych mogą być wyznaczone przez ekstrapolację wartości  $H_{\eta_j}(\tau_k)$  otrzymanych z rozwiązania układu liniowego równań. Natomiast w metodzie Lobatto-Chebysheva wartości funkcji  $H_{\eta_j}$  w punktach



granicznych należą do zbioru poszukiwanych niewiadomych. Stosując metodę Lobatto-Chebysheva można z większą dokładnością i przy mniejszym nakładzie obliczeń wyznaczyć współczynniki intensywności naprężenia i wyzwiania energii w wierzchołkach szczelin.

## 5.4. WSPÓŁCZYNNIKI INTENSYWNOŚCI NAPRĘŻENIA I WYZWALANIA ENERGII

Na podstawie prac [30-32], [35] przyjęto standardową definicję współczynników intensywności naprężeń w następującej postaci <sup>2</sup>

$$K_I^{+(j)} = \lim_{x_j \rightarrow a_j} [2\pi(x_j - a_j)]^{\frac{1}{2}} \{\sigma_{y_j y_j}^{(c)}(x_j, 0)\},$$

$$K_{II}^{+(j)} = \lim_{x_j \rightarrow a_j} [2\pi(x_j - a_j)]^{\frac{1}{2}} \{\sigma_{x_j y_j}^{(c)}(x_j, 0)\},$$

$$K_I^{-(j)} = \lim_{x_j \rightarrow -a_j} [2\pi(-a_j - x_j)]^{\frac{1}{2}} \{\sigma_{y_j y_j}^{(c)}(x_j, 0)\},$$

$$K_{II}^{-(j)} = \lim_{x_j \rightarrow -a_j} [2\pi(-a_j - x_j)]^{\frac{1}{2}} \{\sigma_{x_j y_j}^{(c)}(x_j, 0)\}.$$

Aby wyznaczyć współczynniki intensywności naprężeń należy podstawić odpowiednio równania (5.30), (5.31) opisujące stan naprężenia na brzegu  $j$ -tej szczeliny określony przez znormalizowane zmienne  $\xi$  i  $\tau$  w przedziale  $(-1, 1)$ . Ponieważ jądra równań całkowych  $k_1^{(j)}$ ,  $k_2^{(j)}$ ,  $k_3^{(j)}$ ,  $k_4^{(j)}$  są ograniczone w przedziale  $[-1, 1]$  należy rozpatrzeć osobliwe wyrażenia równań całkowych. Na podstawie metod opisanych w pracach [36], [32], [78] uwzględniając postać poszukiwanej funkcji  $f_{nj}$  (5.33) można

<sup>2</sup> W wielu pracach np. [5],[7],[8], [30]-[32], [34], [35] określone są współczynniki intensywności naprężeń  $k_1^{\pm}$ ,  $k_2^{\pm}$ , które związane są z  $K_I^{\pm}$  i  $K_{II}^{\pm}$  w następujący sposób  $K_I^{\pm} = \pi^{1/2} k_1^{\pm}$ ,  $K_{II}^{\pm} = \pi^{1/2} k_2^{\pm}$ . Wielkości  $K_I^{\pm}$ ,  $K_{II}^{\pm}$  są również nazwane współczynnikami intensywności naprężeń np. w pracach [60], [66], [80], [94], [109].

wyrazić osobliwe wyrażenia równań całkowych przez funkcje  $H_{\eta}$  określone w wierzchołkach szczeliny w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_{\eta}(\tau)}{\tau - \xi} d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{H_{\eta}(\tau)}{(1-\tau)^{\frac{1}{2}}(1+\tau)^{\frac{1}{2}}(\tau-\xi)} d\tau \\ &= \frac{H_{\eta}(-1)}{\sqrt{2(-1-\xi)}} - \frac{H_{\eta}(1)}{\sqrt{2(\xi-1)}} + G_{\eta}(\xi). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Funkcje  $G_{\eta}(\xi)$  są ograniczone a w wierzchołkach szczeliny spełniają zależność

$$|G_{\eta}(\xi)| \leq \frac{C_{\eta}}{|\xi \mp 1|^{\gamma_{\eta}}} \quad \gamma_{\eta} < \frac{1}{2}$$

gdzie  $C_{\eta}$ ,  $\gamma_{\eta}$  są stałymi rzeczywistymi.

Podstawiając odpowiednio równania (5.30),(5.31) i uwzględniając zależność (5.34), otrzymano współczynniki intensywności naprężenia w następującej postaci:

$$\begin{aligned} K_I^{+(j)} &= -\sqrt{\pi} \left[ \frac{(bc+ad)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2] b_{11}} H_{1j}(1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a+c)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2] b_{22}} H_{2j}(1) \right] \sqrt{a_j}, \\ K_{II}^{+(j)} &= -\sqrt{\pi} \left[ \frac{[c(a^2+b^2) + a(c^2+d^2)]}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2] b_{11}} H_{1j}(1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(ad+bc)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2] b_{22}} H_{2j}(1) \right] \sqrt{a_j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_i^{-(j)} &= \sqrt{\pi} \left[ \frac{(bc+ad)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2]} b_{11} H_{1j}(-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(a+c)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2]} b_{22} H_{2j}(-1) \right] \sqrt{a_j}, \\
K_{II}^{-(j)} &= \sqrt{\pi} \left[ \frac{[c(a^2+b^2)+a(c^2+d^2)]}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2]} b_{11} H_{1j}(-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(ad+bc)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2]} b_{22} H_{2j}(-1) \right] \sqrt{a_j}.
\end{aligned}
\tag{5.35}$$

Bardzo istotną wielkością w mechanice zniszczenia jest współczynnik wyzwalaenia energii potencjalnej oznaczany jako  $G$ . Warunek Griffitha będący warunkiem koniecznym lokalnego zniszczenia odpowiada równości wyzwalaenia energii potencjalnej z podwójną wartością jednostkowej energii powierzchniowej  $\gamma$ . Czerepanow [28] wykazał, że w przypadku ciała anizotropowego

$$G = \frac{1}{2} \left[ -K_I^2 \operatorname{Im} \left( b_{22} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \right) + K_{II}^2 \operatorname{Im} (b_{11} (\beta_1 + \beta_2)) \right]$$

gdzie  $\beta_1, \beta_2$  są pierwiastkami równania (5.11). Ponieważ  $\beta_1 = b+ia, \beta_2 = d+ic$ , zatem współczynnik wyzwalaenia energii dla  $j$ -tej szczeliny jest określony następującą zależnością

$$\begin{aligned}
G^{(j)} &= \frac{1}{2} \left[ (K_i^{(j)})^2 b_{22} \frac{[(a+c)(ac-bd)+(b+d)(bc+ad)]}{[(bd-ac)^2+(bc+ad)^2]} \right] \\
&\quad + (K_{II}^{(j)})^2 b_{11} (a+c).
\end{aligned}
\tag{5.36}$$

Aby rozwiązać układ osobliwych równań całkowych (5.30), (5.31) spełniających warunki brzegowe (5.2), przyjęto podobnie jak w pracy [8] metodę całkową Lobatto-Chebysheva. Nieznane funkcje  $H_{\eta}$  są poszukiwane w dyskretnych punktach  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ , które są pierwiastkami równania  $(1-\tau^2)U_{m-2}(\tau)=0$ , gdzie  $U_{m-2}(\tau)$  jest wielomianem Chebysheva drugiego rodzaju. Postać wektorów  $\tau_r$  przyjmujących wartości  $-1$  i  $1$  oraz pierwiastki równania  $U_{m-2}(\tau_l)=0$   $l = 2, 3, \dots, m-1$  określone są następującą zależnością:

$$\tau_r = \cos \frac{(r-1)\pi}{m-1} \quad r = 1, \dots, m. \quad (5.37)$$

Punkty kolokacyjne  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$  będące pierwiastkami wielomianu  $T_{m-1}(\xi_k)$  przyjmują następującą postać

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m-2} \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (5.38)$$

a wyznaczone współczynniki wagowe określone są w następujący sposób

$$w_1 = w_m = \frac{\pi}{2(m-1)} \quad \text{i} \quad w_r = \frac{\pi}{m-1} \quad \text{przy} \quad r = 2, 3, \dots, m-1. \quad (5.39)$$

Zatem równania (5.30), (5.31) po uwzględnieniu warunków brzegowych (5.2) sprowadzają się do następującego układu równań algebraicznych:

$$\sum_{r=1}^m k_1^{[1]}(\tau_r, \xi_k) H_{11}(\tau_r) w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{[1]}(\tau_r, \xi_k) H_{21}(\tau_r) w_r + \dots \\ + \sum_{r=1}^m k_1^{[p-1]}(\tau_r, \xi_k) H_{1(p-1)}(\tau_r) w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{[p-1]}(\tau_r, \xi_k) H_{2(p-1)}(\tau_r) w_r$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^m \frac{[c(a^2+b^2)+a(c^2+d^2)]}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2] b_{11}} \frac{H_{1p}(\tau_r)w_r}{(\tau_r-\xi_k)} \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^m \frac{(ad+bc)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2] b_{22}} \frac{H_{2p}(\tau_r)w_r}{(\tau_r-\xi_k)} \\
& + \sum_{r=1}^m k_1^{[p+1]}(\tau_r, \xi_k) H_{1(p+1)}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{[p+1]}(\tau_r, \xi_k) H_{2(p+1)}(\tau_r)w_r + \dots \\
& + \sum_{r=1}^m k_1^{[n]}(\tau_r, \xi_k) H_{1n}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{[n]}(\tau_r, \xi_k) H_{2n}(\tau_r)w_r = -q_p(a_p \xi_k) \quad (5.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^m k_3^{[1]}(\tau_r, \xi_k) H_{11}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{[1]}(\tau_r, \xi_k) H_{21}(\tau_r)w_r + \dots \\
& + \sum_{r=1}^m k_3^{[p-1]}(\tau_r, \xi_k) H_{1(p-1)}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{[p-1]}(\tau_r, \xi_k) H_{2(p-1)}(\tau_r)w_r \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^m \frac{(bc+ad)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2] b_{11}} \frac{H_{1p}(\tau_r)w_r}{(\tau_r-\xi_k)} \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^m \frac{(a+c)(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{2ac[(a+c)^2+(b-d)^2] b_{22}} \frac{H_{2p}(\tau_r)w_r}{(\tau_r-\xi_k)} \\
& + \sum_{r=1}^m k_3^{[p+1]}(\tau_r, \xi_k) H_{1(p+1)}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{[p+1]}(\tau_r, \xi_k) H_{2(p+1)}(\tau_r)w_r + \dots \\
& + \sum_{r=1}^m k_3^{[n]}(\tau_r, \xi_k) H_{1n}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{[n]}(\tau_r, \xi_k) H_{2n}(\tau_r)w_r = -p_p(a_p \xi_k) \quad (5.41)
\end{aligned}$$

W równaniach (5.40), (5.41) niewiadomych  $H_{11}(\tau_r), H_{21}(\tau_r), \dots, H_{1n}(\tau_r), H_{2n}(\tau_r)$  jest  $2nm$ , natomiast równań  $2(m-1)n$ . Aby otrzymać układ  $2nm$  równań algebraicznych, trzeba dołączyć warunek (5.32), który po zastosowaniu metody Lobatto-Chebysheva przyjmuje następującą postać

$$\sum_{r=1}^m H_{1j}(\tau_r)w_r = 0, \quad (5.42)$$

$$\sum_{r=1}^m H_{2j}(\tau_r)w_r = 0 \quad j = 1, \dots, n.,$$

## 5.5. ROZWIĄZANIE PRZYPADKU SZCZEGÓLNEGO PRZY $N = 2$

Rozpatrzono tarczę uzbrojoną dwiema rodzinami włókien nachylonych pod kątem  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_1 + \alpha$ , w której znajdują się dwie szczeliny o długości  $2a_1$  usytuowane pod kątami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  do osi  $X$  i oddalone od siebie o odległość  $\zeta = 0,1a_1$ , podlegającą rozciąganiu  $\sigma_{rr}^\infty$ . W tak sformułowanym zadaniu równania (5.40), (5.41), (5.42) przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{[c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)]}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{11} \sum_{r=1}^m \frac{H_{11}(\tau_r)w_r}{\tau_r - \xi_k} \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{(ad + bc)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{22} \sum_{r=1}^m \frac{H_{21}(\tau_r)w_r}{\tau_r - \xi_k} \\ & + \sum_{r=1}^m k_1^{[2]}(\tau_r, \xi_k) H_{12}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{[2]}(\tau_r, \xi_k) H_{22}(\tau_r)w_r = -\frac{1}{2} \sigma_{rr}^\infty \sin 2\varphi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{(bc + ad)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{11} \sum_{r=1}^m \frac{H_{11}(\tau_r)w_r}{\tau_r - \xi_k} \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{(a+c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{22} \sum_{r=1}^m \frac{H_{21}(\tau_r)w_r}{\tau_r - \xi_k} \\ & + \sum_{r=1}^m k_3^{[2]}(\tau_r, \xi_k) H_{12}(\tau_r)w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{[2]}(\tau_r, \xi_k) H_{22}(\tau_r)w_r = -\sigma_{rr}^\infty \cos^2 \varphi_1 \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^m k_1^{(1)}(\tau_r, \xi_k) H_{11}(\tau_r) w_r + \sum_{r=1}^m k_2^{(1)}(\tau_r, \xi_k) H_{21}(\tau_r) w_r, \quad (5.43)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{[c(a^2 + b^2) + a(c^2 + d^2)]}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{11} \sum_{r=1}^m \frac{H_{12}(\tau_r) w_r}{\tau_r - \xi_k}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{(ad + bc)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{22} \sum_{r=1}^m \frac{H_{22}(\tau_r) w_r}{\tau_r - \xi_k} = -\frac{1}{2} \sigma_{YY}^{\infty} \sin 2\varphi_2$$

$$\sum_{r=1}^m k_3^{(1)}(\tau_r, \xi_k) H_{11}(\tau_r) w_r + \sum_{r=1}^m k_4^{(1)}(\tau_r, \xi_k) H_{21}(\tau_r) w_r,$$

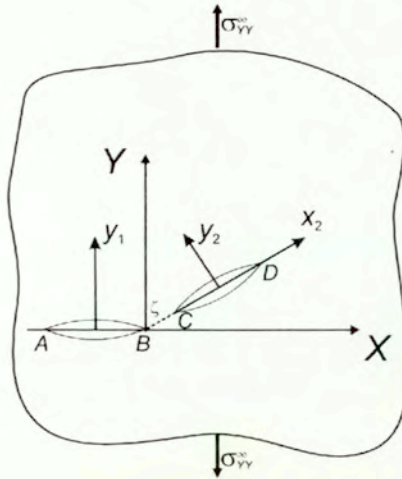
$$+ \frac{1}{\pi} \frac{(bc + ad)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{11} \sum_{r=1}^m \frac{H_{12}(\tau_r) w_r}{\tau_r - \xi_k}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{(a+c)(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{2ac[(a+c)^2 + (b-d)^2]} b_{22} \sum_{r=1}^m \frac{H_{22}(\tau_r) w_r}{\tau_r - \xi_k} = -\sigma_{YY}^{\infty} \cos^2 \varphi_2$$

$$\sum_{r=1}^m H_{11}(\tau_r) w_r = 0, \quad \sum_{r=1}^m H_{21}(\tau_r) w_r = 0, \quad \sum_{r=1}^m H_{12}(\tau_r) w_r = 0, \quad \sum_{r=1}^m H_{22}(\tau_r) w_r = 0.$$

W układzie równań (5.43) punkty  $\tau_r$  ( $r = 1, \dots, m$ ),  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, m-1$ ) i współczynniki wagowe  $w_r$  są określone zależnościami (5.37)-(5.39). Jest to układ  $4m$  równań z  $4m$  niewiadomymi  $H_{11}(\tau_r)$ ,  $H_{21}(\tau_r)$ ,  $H_{12}(\tau_r)$ ,  $H_{22}(\tau_r)$ . Wyrażenia  $k_1^{(n)}(\tau_r, \xi_k)$ ,  $k_2^{(n)}(\tau_r, \xi_k)$ ,  $k_3^{(n)}(\tau_r, \xi_k)$ ,  $k_4^{(n)}(\tau_r, \xi_k)$  ( $n = 1, 2$ ) są określone równaniami (5.26), (5.27), (5.28), (5.29), w których wielkości  $b$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $c$  są częściami rzeczywistymi i urojonymi pierwiastków zespolonych równania algebraicznego (5.11) odpowiadającego odpowiedniej szczelinie, podobnie wielkości  $b_{11}$ ,  $b_{22}$  określone są przy odpowiednim  $\varphi_n$  ( $n = 1, 2$ ).

Przyjęto, że rozważana tarcza jest kompozytem o matrycy betonowej uzbrojonej dwiema rodzinami włókien stalowych o zawartości objętościowej wynoszącej 2% i jednakowym rozmieszczeniu w obu rodzinach, że obie szczeliny mają połówkową długość  $a_1 = 1$  i są nachylone pod kątem  $\varphi_1 = 180^\circ$  i  $\varphi_2 = 30^\circ$  (rys.5.4).



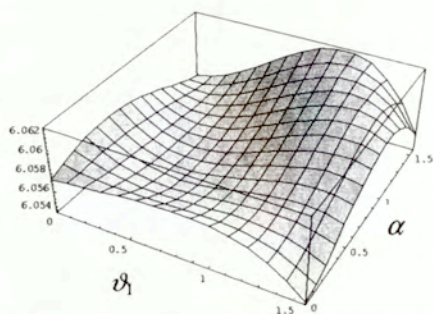
Rys. 5.4. Tarcza kompozytowa o matrycy betonowej ze szczeliną  $AB$  nachyloną pod kątem  $180^\circ$  i ze szczeliną  $CD$  nachyloną pod kątem  $30^\circ$  do osi  $X$ .

Przyjęto zatem następujące dane:

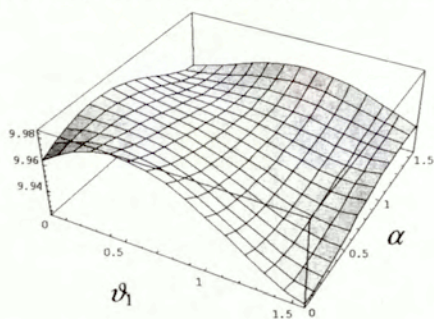
$$\frac{E^{(m)}}{E^{(s)}} = \frac{1}{7}, \quad \nu = \frac{1}{6}, \quad \frac{h_m}{h} = 0,98, \quad \frac{h_a}{h} = 0,01, \quad \frac{h_b}{h} = 0,01, \quad \frac{\sigma_{yy}^\infty}{E^{(m)}} = 0,0001.$$

Przy tak wprowadzonych danych stosując program MATHEMATICA rozwiązano układ równań (5.43) przy różnych kątach nachylenia włókien  $\vartheta_1 = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$  i  $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ , wykorzystując części rzeczywiste i urojone wyznaczonych pierwiastków zespolonych równania (5.11) również przy tych samych kątach. Dysponując wyznaczonymi wielkościami  $H_{11}(\tau_r), H_{21}(\tau_r), H_{12}(\tau_r), H_{22}(\tau_r)$  ( $r = 1, \dots, m$ ) można na podstawie równania (5.35) określić współczynniki intensywności naprężenia dla obu szczelin wykorzystując jedynie niewiadome  $H_{11}, H_{21}, H_{12}, H_{22}$  w wierzchołkach szczelin czyli w punktach  $\tau_1 = 1$  i  $\tau_m = -1$  przy różnych kątach nachylenia włókien. Aproksymując uzyskane wyniki wielomianem odpowiedniego stopnia przedstawiono na rysunkach 5.5 - 5.8 zależność pomiędzy współczynnikami intensywności naprężeń  $K_I$  w poszczególnych wierzchołkach szczelin a kątami nachylenia włókien.

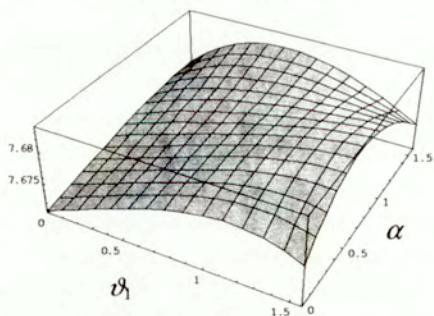




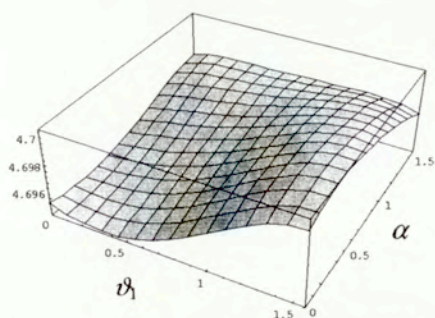
Rys. 5.5. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  w wierzchołku szczeliny  $A$  od kątów nachylenia włókien.



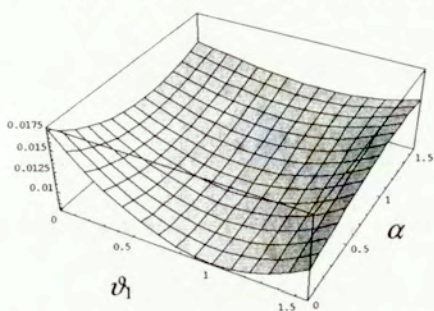
Rys. 5.6. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  w wierzchołku szczeliny  $B$  od kątów nachylenia włókien.



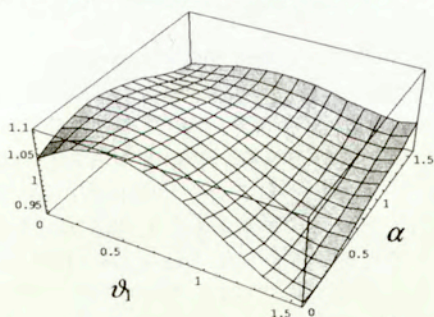
Rys. 5.7. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  w wierzchołku szczeliny  $C$  od kątów nachylenia włókien.



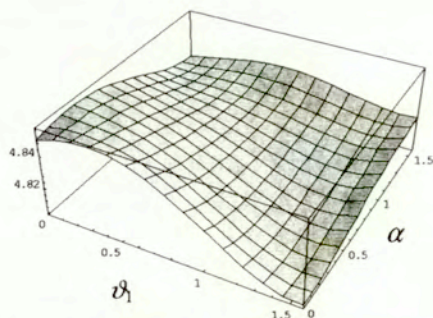
Rys. 5.8. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  w wierzchołku szczeliny  $D$  od kątów nachylenia włókien.



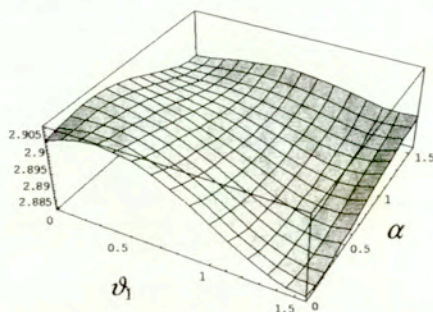
Rys. 5.9. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_{II}$  w wierzchołku szczeliny  $A$  od kątów nachylenia włókien.



Rys. 5.10. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_{III}$  w wierzchołku szczeliny  $B$  od kątów nachylenia włókien.

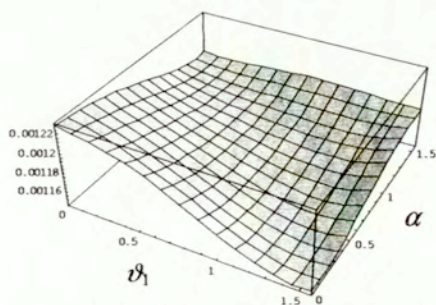


Rys. 5.11. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_{II}$  w wierzchołku szczeliny  $C$  od kątów nachylenia włókien.

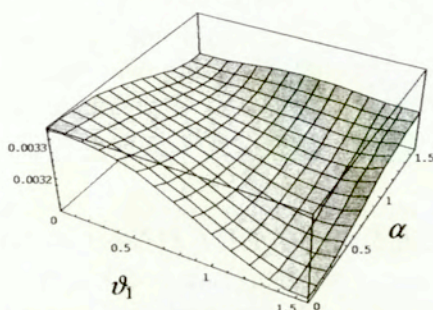


Rys. 5.12. Zależność współczynnika intensywności naprężeń  $K_{II}$  w wierzchołku szczeliny  $D$  od kątów nachylenia włókien.

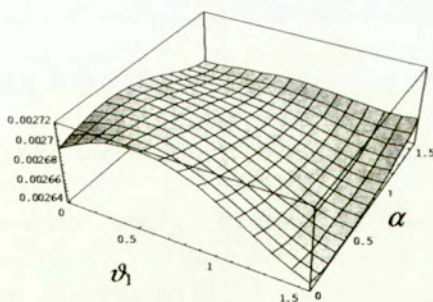
Podobnie na rys. 5.9 - 5.12 przedstawiono zależność pomiędzy współczynnikami intensywności naprężeń  $K_{II}$  w wierzchołkach pierwszej i drugiej szczeliny a kątami nachylenia obu rodzin włókien. W rozważanym zadaniu największe wartości współczynnika intensywności naprężenia  $K_I$  osiąga w wierzchołku  $B$ , mniejsze w sąsiadującym wierzchołku szczeliny nachylonej pod kątem  $30^\circ$  punkcie  $C$ , a najmniejsze w zewnętrznym wierzchołku szczeliny nachylonej, czyli w punkcie  $D$ . Natomiast współczynnik intensywności naprężeń  $K_{II}$  osiąga największe wartości w wierzchołkach szczeliny nachylonej, czyli w punkcie  $C$ , nieco mniejsze w punkcie  $D$ , a najmniejsze w wierzchołku  $A$ .



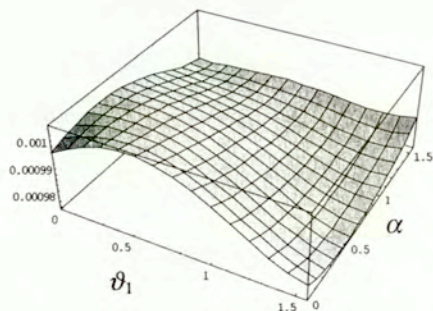
Rys. 5.13. Zależność współczynnika wyzwala energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $A$  od kątów nachylenia włókien.



Rys. 5.14. Zależność współczynnika wyzwala energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $B$  od kątów nachylenia włókien.



Rys. 5.15. Zależność współczynnika wyzwala energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $C$  od kątów nachylenia włókien.



Rys. 5.16. Zależność współczynnika wyzwalaenia energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $D$  od kątów nachylenia włókien.

Dysponując z kolei wyznaczonymi współczynnikami intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$  można na podstawie wzoru (5.36) określić współczynniki wyzwalaenia energii  $G$  w poszczególnych wierzchołkach szczelin przy różnych kątach nachylenia włókien. Te zależności przedstawiono na rys. 5.13 – 5.16.

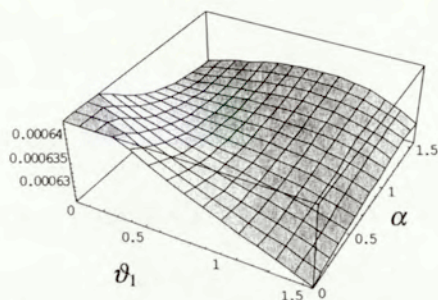
Współczynniki wyzwalaenia energii  $G$  w wierzchołkach szczeliny  $AB$ , oznaczone odpowiednio  $G_A$  i  $G_B$  są największe wtedy, gdy obie rodziny włókien pokrywają się i są nachylone pod kątem  $0^\circ$  do osi  $X$ , zatem pokrywają się ze szczeliną  $AB$ , a najmniejsze  $G_A$  i  $G_B$  są wtedy, gdy obie rodziny włókien pokrywają się i są nachylone pod kątem  $90^\circ$  do osi  $X$  i do kierunku szczeliny  $AB$ . Współczynniki wyzwalaenia energii w wierzchołkach szczeliny  $CD$   $G_C$  i  $G_D$  są największe wtedy, gdy obie rodziny włókien pokrywają się i są nachylone pod kątem  $30^\circ$  czyli zgodnie z kierunkiem usytuowania szczeliny  $CD$ , a najmniejsze  $G_C$  i  $G_D$  są wtedy, gdy występują dwie rodziny włókien, w których jedna nachylona jest pod kątem  $90^\circ$ , a druga odchylna od niej o  $30^\circ$  czyli pod kątem  $120^\circ$ .

W rozważanym zadaniu największe wartości współczynnik wyzwalaenia energii osiąga w wierzchołku  $B$ , mniejsze w sąsiadującym wierzchołku drugiej szczeliny  $C$ , a najmniejsze w wierzchołku  $D$ . Ponieważ w wierzchołku  $B$  wartości współczynnika wyzwalaenia energii są największe, zatem punkt ten może stanowić zarodek dalszego pękania

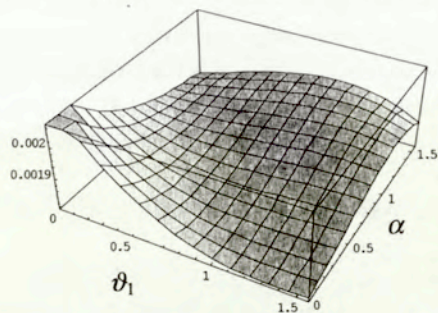
[94]. Wobec tego włókna w kompozycie powinny być tak ułożone, aby wartość współczynnika wyzwiania energii w wierzchołku  $B$  przy takim ułożeniu była jak najmniejsza. Ten warunek jest spełniony przez dwie pokrywające się rodziny włókien ( $\alpha = 0$ ) nachylone pod kątem  $90^\circ$ .

Rozwiązano ponadto zadanie analogiczne do poprzedniego przyjmując, że szczelina  $AB$  nachylona jest pod kątem  $\varphi_1 = 135^\circ$  natomiast szczelina  $CD$  pozostaje bez zmiany i jest nachylona pod kątem  $\varphi_2 = 30^\circ$ .

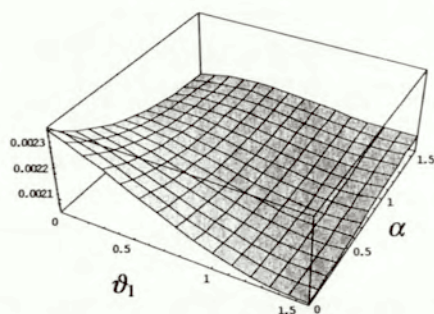
Wyznaczono współczynniki wyzwiania energii  $G$  w poszczególnych wierzchołkach szczelin w zależności od kątów nachylenia obu rodzin włókien rys. 5.17 – 5.20.



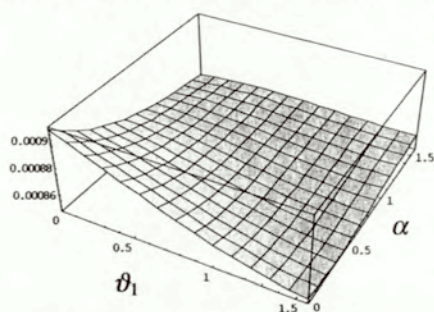
Rys. 5.17. Zależność współczynnika wyzwiania energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $A$  od kątów nachylenia włókien przy  $\varphi_1 = 135^\circ$



Rys. 5.18. Zależność współczynnika wyzwiania energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $B$  od kątów nachylenia włókien przy  $\varphi_1 = 135^\circ$



Rys. 5.19. Zależność współczynnika wyzwala energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $C$  od kątów nachylenia włókien przy  $\varphi_1 = 135^\circ$



Rys. 5.20. Zależność współczynnika wyzwala energii  $G$  w wierzchołku szczeliny  $D$  od kątów nachylenia włókien przy  $\varphi_1 = 135^\circ$

Okazuje się, że największe wartości współczynnik wyzwala energii osiąga w wierzchołku  $C$  szczeliny nachylonej pod kątem  $30^\circ$ , nieco mniejsze w sąsiadującym wierzchołku  $B$  szczeliny nachylonej pod kątem  $135^\circ$ , a najmniejsze w wierzchołku  $A$ . Warunek minimalnej wartości współczynnika wyzwala energii w wierzchołku  $C$  jest spełniony przez dwie pokrywające się rodziny włókien ( $\alpha = 0$ ) nachylone pod kątem  $90^\circ$ .

Zatem niezależnie czy szczelina  $AB$  nachylona jest pod kątem  $180^\circ$  czy pod kątem  $135^\circ$  największy współczynnik wyzwala energii  $G_B$  przy  $\varphi_1 = 180^\circ$  i  $G_C$  przy  $\varphi_1 = 135^\circ$  osiąga swoje minimum, gdy obie rodziny włókien pokrywają się i są skierowane w kierunku działania obciążeń.

## 6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy rozważano kompozyt składający się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych nachylonych pod kątami  $\vartheta_1$  i  $\vartheta_2$  do osi  $x_1$ . Przy zadanych obciążeniach działających na element kompozytowy poszukiwano takich kątów ułożenia włókien, przy których energia odkształcenia osiąga minimum. Ponadto dobierano kąty nachylenia włókien i ich zawartość objętościową tak, aby w sensie optymalizacji dwukryterialnej energia odkształcenia oraz koszt rozpatrywanego elementu osiągały minimum. Poszukiwano również w materiale kompozytowym osłabionym  $n$  szczelinami oddziaływującymi na siebie takich kątów nachylenia włókien, aby największy współczynnik wyzwalaenia energii przyjmował wartości minimalne.

Energię odkształcenia elementu kompozytowego określono w układzie kierunków głównych naprężeń. Analityczna postać warunków stacjonarności pozwala wyznaczyć kąty nachylenia włókien z następujących równań:

$$1^\circ \quad \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - \beta] = 0 \quad \text{i} \quad \sin \alpha = 0,$$

$$2^\circ \quad \sin[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0, \quad \text{gdzie kąt } \alpha \text{ spełnia równanie (4.15)}_2,$$

3°

$$\cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = \frac{(\sigma_{II} + \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1 - \eta)}{(1 + \nu)} + \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right] \cos \alpha}{(\sigma_{II} - \sigma_I) \left[ \frac{E^{(m)} E^{(s)} \eta (1 - \eta)}{(1 - \nu)} \cos 2\alpha - \frac{(E^{(s)})^2 \eta^2}{2} \sin^2 \alpha \right]}$$

$$\text{i} \quad \Psi = 0,$$



gdzie  $\Psi$  jest określone zależnością ( 4.13 ).

W szczególnym przypadku układ równań 3<sup>o</sup> jest spełniony przez kąty wyznaczone z następujących wyrażeń:

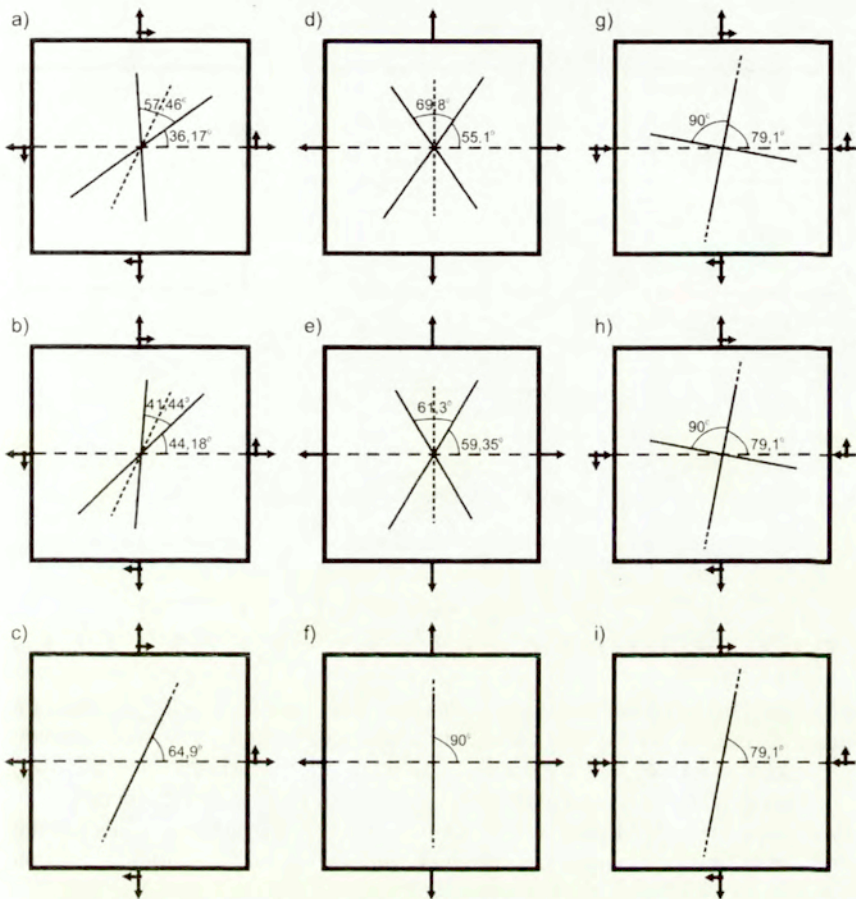
$$\cos[(2\vartheta_1 + \alpha) - 2\beta] = 0 \quad \text{i} \quad \cos \alpha = 0.$$

Przyjmując, że na element kompozytowy działają obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$ ,  $q = kp$  w kierunku  $x_1$  i obciążenia styczne  $\tau = lp$  wyznaczono optymalne kąty ułożenia włókien w dwóch rodzajach kompozytów:

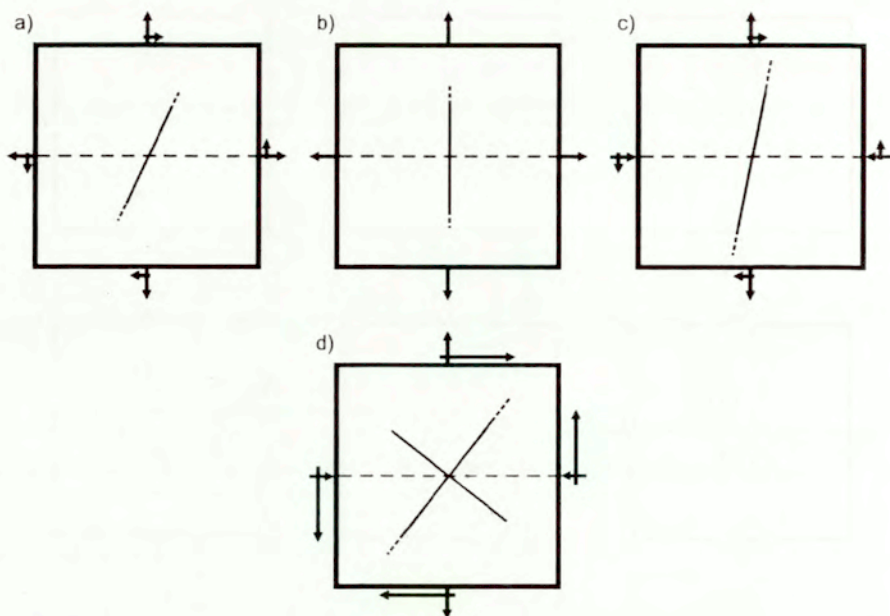
- kompozycie o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi,
- wysokowartościowym kompozycie o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi ( SIMCON ).

W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi o zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,6$  przyjęto następujące przypadki obciążeń (  $k = 0,5 \quad l = 0,3$  ;  $k = 0,5 \quad l = 0$  ;  $k = -0,5 \quad l = 0,3$  ). W pierwszych dwóch przypadkach obciążeń otrzymano rozwiązania wynikające z równań zamieszczonych w punkcie 2<sup>o</sup>, tzn. przy  $k = 0,5 \quad l = 0,3$  rozwiązaniami optymalnymi są  $\vartheta_1 = 36,17^\circ$  i  $\alpha = 57,46^\circ$  przy  $\beta = -25,1^\circ$  (rys. 6.1a) a przy  $k = 0,5 \quad l = 0$  rozwiązaniami są  $\vartheta_1 = 55,1^\circ$  i  $\alpha = 69,8^\circ$  przy  $\beta = 0^\circ$  (rys. 6.1d). Natomiast w przypadku obciążeń  $k = -0,5 \quad l = 0,3$  optymalnymi rozwiązaniami są  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 90^\circ$  przy  $\beta = -10,9^\circ$  (rys. 6.1g) a więc pokrywające się ze szczególnym rozwiązaniem równań zamieszczonych w punkcie 3<sup>o</sup>. Zatem w tym przypadku energia odkształcenia osiąga minimum, gdy dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych.

Badając wpływ zawartości włókien na optymalne kąty ich ułożenia przyjęto takie same przypadki obciążeń i bardzo małe zawartości włókien. Przy zawartości włókien  $\eta = 0,1$  w pierwszych dwóch przypadkach obciążeń optymalne rozwiązania wynikają z rozwiązań równań zamieszczonych w punkcie 2<sup>o</sup>, tzn. przy  $k = 0,5 \quad l = 0,3$  rozwiązaniami optymalnymi są  $\vartheta_1 = 44,18^\circ$  i  $\alpha = 41,44^\circ$ , a przy  $k = 0,5 \quad l = 0$  rozwiązaniami są  $\vartheta_1 = 59,35^\circ$  i  $\alpha = 61,3^\circ$  (rys. 6.1b,e). W trzecim przypadku obciążeń rozwiązanie pokrywa się ze szczególnym



Rys.6.1. Kąty ułożenia rodzin włókien  $\vartheta_1$  i  $\alpha$ , przy których energia odkształcenia w elemencie kompozytowym o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi osiąga minimum. Linia kropkowaną oznaczono kierunek naprężenia głównego  $\sigma_{II}$ . Na rysunkach a, b, c przyjęto obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$ ,  $0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenie styczne  $0,3p$ ; tu kąt nachylenia kierunku naprężeń głównych  $\beta = -25,1^\circ$ . Na rysunkach d, e, f przyjęto tylko obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$  i  $0,5p$  w kierunku  $x_1$ , natomiast na rysunkach g, h, i przyjęto obciążenia normalne rozciągające  $p$  w kierunku  $x_2$ , ściskające  $-0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenie styczne  $0,3p$  tu  $\beta = -10,9^\circ$ .



Rys.6.2. Kąty ułożenia rodzin włókien  $\vartheta_1$  i  $\alpha$ , przy których energia odkształcenia w wysokowartościowym elemencie kompozytowym o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi o zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,08$  osiąga minimum pod działaniem następujących obciążeń:

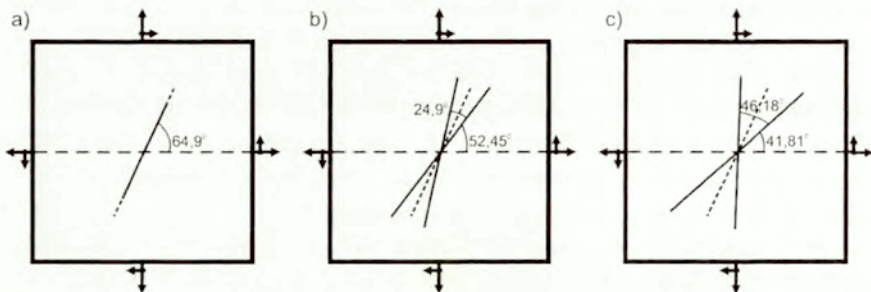
- a) obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$ ,  $0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenie styczne  $0,3p$ ; optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 0$  tu  $\beta = -25,1^\circ$ ,
- b) tylko obciążenia normalne  $p$  w kierunku  $x_2$  i  $0,5p$  w kierunku  $x_1$ ; optymalnym rozwiązaniem jest również jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych  $\vartheta_1 = 90^\circ$  i  $\alpha = 0$ ,
- c) obciążenia normalne rozciągające  $p$  w kierunku  $x_2$ , ściskające  $0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenie styczne  $0,3p$ ; optymalnym rozwiązaniem jest  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 0$  tu  $\beta = -10,9^\circ$
- d) obciążenia normalne rozciągające  $p$  w kierunku  $x_2$ , ściskające  $0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenie styczne  $3p$ ; optymalnym rozwiązaniem jest  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 90^\circ$  tu  $\beta = -37,98^\circ$

rozwiązaniem równań zamieszczonych w punkcie 3° czyli dokładnie pokrywa się z rozwiązaniem uzyskanym przy  $\eta = 0,6$  (rys. 6.1h).

Natomiast przy zawartości włókien  $\eta = 0,02$  we wszystkich trzech przypadkach obciążeń optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 0^\circ$  (rys. 6.1c,f,i). Optymalny kierunek ułożenia włókien wynika z rozwiązania równań zamieszczonych w punkcie 1°.

W przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi o zawartości objętościowej włókien  $\eta = 0,08$  przyjęto następujące przypadki obciążeń ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ;  $k = 0,5 \quad l = 0$ ;  $k = -0,5 \quad l = 0,3$ ;  $k = -0,5 \quad l = 3$ ). W pierwszych trzech przypadkach obciążeń jako optymalne rozwiązania otrzymano jedną rodzinę włókien ułożoną wzdłuż kierunku głównego odpowiadającemu zadanemu obciążeniu ( $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 0^\circ$ ) (rys. 6.2a,b,c). Natomiast w przypadku czwartym energia odkształcenia osiąga minimum, gdy dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywają się z kierunkami naprężeń głównych (rys. 6.2d). W celu zbadania wpływu zawartości objętościowej włókien na optymalne rozwiązania w wysokowartościowych kompozytach o matrycy cementowej przyjęto nierealne ze względów technologicznych objętościowe zawartości włókien  $\eta = 0,4$  i  $\eta = 0,6$ . Zakładając, że na element kompozytowy działają obciążenia tak jak w przypadku pierwszym ( $k = 0,5 \quad l = 0,3$ ) otrzymano zarówno przy  $\eta = 0,4$  jak i przy  $\eta = 0,6$  optymalne rozwiązania w postaci dwóch rodzin włókien, których wartości wynikają z rozwiązań równań zamieszczonych w punkcie 2° (przy  $\eta = 0,6 \quad \vartheta_1 = 41,81^\circ$  i  $\alpha = 46,18^\circ$  (rys. 6.3c), przy  $\eta = 0,4 \quad \vartheta_1 = 52,45^\circ$  i  $\alpha = 24,9^\circ$  (rys. 6.3b)). Na podstawie przedstawionych rozważań wynika, że optymalne kąty ułożenia włókien zależą od stałych materiałowych matrycy i włókien, od wartości obciążeń i silnie od zawartości objętościowej włókien.

Wykazano, że w rozważanym elemencie kompozytowym kierunki główne naprężeń i odkształceń są współliniowe jeśli spełniony jest jeden z warunków 1° – 3°. Jeśli rozwiązanie 1° określa minimum energii odkształcenia wtedy optymalna orientacja jednej rodziny włókien pokrywa się z kierunkiem głównym naprężeń i odkształceń. Takie rozwiązania otrzymano w pierwszych trzech rozważanych przykładach



Rys.6.3. Kąty ułożenia rodzin włókien  $\vartheta_1$  i  $\alpha$ , przy których energia odkształcenia w wysokowartościowym elemencie kompozytowym o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi pod działaniem obciążeń normalnych  $p$  w kierunku  $x_2$ ,  $0,5p$  w kierunku  $x_1$  i obciążenia stycznego  $0,3p$  osiąga minimum przy następujących zawartościach włókien:

a) przy zawartości włókien  $\eta = 0,08$  optymalnym rozwiązaniem jest jedna rodzina włókien nachylona zgodnie z kierunkiem naprężeń głównych  $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 0$ ,

b) przy zawartości włókien  $\eta = 0,4$  optymalne kąty ułożenia włókien spełniają warunek  $2\vartheta_1 + \alpha = 2\beta + \pi$  i wynoszą one  $\vartheta_1 = 52,45^\circ$  i  $\alpha = 24,9^\circ$ ,

c) przy zawartości włókien  $\eta = 0,6$  optymalne kąty ułożenia włókien spełniają warunek  $2\vartheta_1 + \alpha = 2\beta + \pi$  i wynoszą one  $\vartheta_1 = 41,81^\circ$  i  $\alpha = 46,18^\circ$ .

dotyczących wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi (rys. 6.2a,b,c). Jeśli rozwiązanie szczególne układu  $3^\circ$   $\vartheta_1 = \beta + 90^\circ$  i  $\alpha = 90^\circ$  określa minimum energii odkształcenia wtedy optymalna orientacja dwóch rodzin ortogonalnych pokrywa się ze współliniowymi kierunkami głównymi naprężeń i odkształceń. Takie rozwiązanie otrzymano w przykładzie dotyczącym kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi poddanej obciążeniu  $p, q = -0,5p, \tau = 0,3p$  (rys. 6.1g,h) oraz w przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej poddanej obciążeniu  $p, q = -0,5p, \tau = 3p$  (rys. 6.2d). Natomiast w przypadku spełnienia rozwiązań  $2^\circ$  kierunki główne naprężeń i odkształceń pozostają współliniowe, ale optymalne orientacje włókien różnią się od kierunków głównych naprężeń.

Analityczna postać warunków stacjonarności pozwala wyznaczyć trzy rozwiązania, w których może wystąpić minimum globalne energii odkształcenia. Nie można niestety znaleźć analitycznej zależności między obciążeniami, stałymi materiałowymi oraz zawartością włókien pozwalającej stwierdzić, któremu z trzech możliwych rozwiązań odpowiada globalne minimum. Na podstawie przeprowadzonego eksperymentu numerycznego udało się określić wpływ stosunku naprężeń głównych  $f = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I}$  na optymalne rozwiązanie w przypadku dwóch

rodzajów kompozytów o zasadniczo różnych właściwościach matrycy i włókien oraz ich zawartości. W przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi i kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi określono przedziały w których rozwiązaniu globalnemu odpowiada jedna rodzina włókien ułożona wzdłuż kierunku głównego odpowiadającemu większemu co do wartości bezwzględnej naprężeniu, dwie ortogonalne rodziny włókien ułożone wzdłuż kierunków głównych oraz dwie rodziny włókien nieortogonalnych spełniających układ równań (4.15). Przedziały te różne dla obu rodzajów kompozytów przedstawiono w tablicy 6.1.

TABLICA 6.1

	Kompozyt wysokowartościowy o matrycy cementowej	Kompozyt o matrycy epoksydowej
Jedna rodzina włókien (rozw. 1 <sup>o</sup> )	$f \leq -1,25$ lub $-0,8 \leq f < 0,8$ lub $f > 1,3$	$f \leq -9,5$ lub $-0,1 \leq f < 0,02$ lub $f > 70$
Dwie rodziny włókien (rozw. 3 <sup>o</sup> )	$-1,25 < f < -0,8$	$-9,5 \leq f < -0,1$
Dwie rodziny włókien (rozw. 2 <sup>o</sup> )	$0,8 \leq f \leq 1,3$	$0,02 \leq f < 70$

W pewnych zakresach stosunków naprężeń głównych wyznaczone minima różnią się znacznie, a przy innych są prawie identyczne. W przypadku kompozytu o matrycy cementowej wprowadzenie uzbrojenia dwiema rodzinami włókien, zgodnie z uzyskanym rozwiązaniem optymalnym, tylko w niewielkim stopniu zmniejsza wartość funkcji celu w stosunku do uzbrojenia jedną rodziną włókien ułożoną zgodnie z kierunkiem większego (co do wartości bezwzględnej) naprężenia głównego (rys. 4.10). W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej w prawie całym przedziale zmienności stosunku naprężeń głównych wartości funkcji celu odpowiadające poszczególnym rozwiązaniom różnią się znacznie (rys. 4.11).

Przyjmując szczególne przypadki obciążeń w elementach kompozytowych o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi oraz w wysokowartościowych elementach kompozytowych o matrycach cementowych uzbrojonych włóknami stalowymi, wyznaczono kąty nachylenia włókien oraz ich zawartość objętościową optymalne w sensie przyjętych kryteriów – minimum energii odkształcenia i minimum kosztu rozpatrywanego elementu. W wysokowartościowych kompozytach o matrycach cementowych, w których minimalna i maksymalna zawartość włókien wynosi odpowiednio 2% i 8%, punktowi preferowanemu odpowiada jedna rodzina włókien ułożona w kierunku pokrywającym się z osią naprężeń głównych i zawartością włókien bliską 2%.

Natomiast gdy na element kompozytowy z żywicy epoksydowej uzbrojony włóknami węglowymi z minimalną i maksymalną zawartością włókien wynoszącą odpowiednio 10% i 60% działają obciążenia ( $k = 0,5$   $l = 0,3$  ;  $k = 0,5$   $l = 0$  ) rozwiązaniu preferowanemu odpowiadają dwie rodziny włókien o zawartości objętościowej włókien wynoszącej 28%, których kąty spełniają warunek  $2\vartheta_1 + \alpha = 2\beta + \pi$  ( przy  $k = 0,5$   $l = 0,3$   $\vartheta_1 = 36,17^\circ$   $\alpha = 57,46^\circ$ ; przy  $k = 0,5$   $l = 0$   $\vartheta_1 = 56,03^\circ$   $\alpha = 67,94^\circ$  ). Gdy na element działają obciążenia  $k = -0,5$   $l = 0,3$  punktowi preferowanemu odpowiadają dwie ortogonalne rodziny włókien pokrywające się z kierunkami naprężeń głównych przy zawartości objętościowej uzbrojenia wynoszącym 27%.

Rozwiązania analityczne otrzymane w szczególnych przypadkach mogą być wykorzystywane do sprawdzania poprawności wyników

uzyskiwanych z rozwiązań numerycznych zadań optymalizacji konstrukcji kompozytowych. Analityczna postać warunków koniecznych minimum Kuhna-Tuckera może stanowić podstawę do opracowania efektywnej metody numerycznej do wyznaczania optymalnych rozwiązań określonych zagadnień brzegowych. Jej algorytm może być oparty na śledzeniu spełnienia warunków stacjonarności i iteracyjnego zbliżania się do nich. Ponadto wykorzystanie analitycznej postaci wyrażeń na pochodne funkcji celu może w znacznym stopniu zredukować numeryczne koszty obliczeń w przypadku stosowania gradientowych metod optymalizacji.

Przykładowo rozwiązano zagadnienie optymalizacji usytuowania włókien ze względu na minimum energii odkształcenia w tarczy z  $N$  elementów kompozytowych za pomocą programu bazującego na metodzie elementów skończonych z wbudowanym modelem anizotropii. Do programu tego zaimplementowano procedury optymalizacyjne CAMOS. Zadanie zostało rozwiązane metodą iteracyjną. W pierwszym kroku przyjęto, że tarcza jest wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego. Po wyznaczeniu stanu naprężenia dobrano optymalny układ włókien i wyznaczono odpowiednie wyrazy w macierzy sztywności tarczy. Przy tych wielkościach ponownie wyznaczono stan naprężenia w tarczy i dobrano optymalne kierunki włókien. Ten sposób postępowania powtarzano aż do uzyskania w kolejnych krokach dostatecznie małej różnicy w wielkości energii sprężystej tarczy. Zaproponowany sposób iteracyjnego rozwiązania jest bardzo szybko zbieżny. Przedstawiona metoda, dzięki wykorzystaniu rozwiązań analitycznych, pozwala na szybkie znalezienie optymalnego układu dwóch rodzin włókien w elementach kompozytowych.

Rozwiązano dwa przykłady optymalizacji tarczy wspornikowej z wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi o zawartości objętościowej włókien 8% i z kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi o zawartości włókien 60%.

W przypadku wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej uzbrojonej włóknami stalowymi w większości elementów kompozytowych optymalne usytuowanie włókien otrzymano w przypadku



rozwiązania  $1^0$  tzn. wtedy, gdy występuje jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem jednego z naprężeń głównych. Włókna te ułożone są zgodnie z kierunkiem naprężenia głównego, większego co do wartości bezwzględnej. W kilkudziesięciu elementach, widocznych na rys. Z.4, minimum energii występuje w przypadku rozwiązania  $3^0$ , tzn. wtedy gdy element uzbrojony jest dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien ułożonymi wzdłuż kierunków głównych.

W przypadku kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi w większej części tarczy optymalne usytuowanie włókien otrzymano z rozwiązania  $3^0$  tzn. wtedy, gdy element uzbrojony jest dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien ułożonymi wzdłuż kierunków głównych. W znacznej liczbie elementów optymalne uzbrojenie odpowiada rozwiązaniu  $1^0$ , czyli występuje jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężenia głównego, większego co do wartości bezwzględnej. W obydwu przypadkach w kilku elementach minimum energii wystąpiło w przypadku rozwiązania  $2^0$ , tzn. spełniającego układ równań (4.15), czyli optymalne jest uzbrojenie dwiema rodzinami włókien nieortogonalnych. Wynika stąd, że optymalny układ włókien nie zawsze pokrywa się z kierunkami naprężeń głównych oraz że czasem korzystne jest uzbrojenie tylko jedną rodziną włókien lub dwiema rodzinami włókien nieortogonalnych spełniających układ równań (4.15).

Również Pedersen w pracach [8], [9] wykazał, że dla pewnych materiałów ortotropowych kierunki nachylenia włókien określające globalne ekstremum nie muszą pokrywać się z kierunkami głównymi naprężeń i odkształceń.

Jako szczególny przypadek materiału kompozytowego osłabionego szczelinami rozpatrzono nieograniczoną tarczę o matrycy betonowej uzbrojoną dwiema rodzinami włókien stalowych z dwiema szczelinami ułożonymi pod kątami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  do osi  $x$ , na którą w nieskończoności działa rozciągające obciążenie w kierunku  $y$ . Wykorzystując przybliżone rozwiązanie układu równań całkowych określono współczynniki intensywności naprężeń oraz współczynniki wyzwalań energii w wierzchołkach każdej szczeliny przy zmiennych kątach nachylenia włókien. Wyznaczono również takie kąty nachylenia rodzin włókien, aby

największy współczynnik wyzwala energii, który może określać zarodek dalszego pęknięcia, przyjmował wartości minimalne. Rozwiązano dwa zadania. W pierwszym przyjęto, że szczelina AB (rys. 5.4) nachylona jest pod kątem  $\varphi_1 = 180^\circ$  a szczelina CD nachylona jest pod kątem  $\varphi_2 = 30^\circ$ . W drugim zadaniu przyjęto nachylenie szczeliny AB pod kątem  $\varphi_1 = 135^\circ$  natomiast szczelina CD pozostaje bez zmiany i jest nachylona pod kątem  $\varphi_2 = 30^\circ$ .

W pierwszym zadaniu największe wartości współczynnik wyzwala energii osiąga w wierzchołku B. Ponieważ w wierzchołku B wartości współczynnika wyzwala energii są największe, zatem włókna w kompozycie powinny być tak ułożone, aby wartość współczynnika wyzwala energii w wierzchołku B przy takim ułożeniu była jak najmniejsza. Ten warunek jest spełniony przez dwie pokrywające się rodziny włókien ( $\alpha = 0$ ) nachylone pod kątem  $90^\circ$ .

W drugim zadaniu największe wartości współczynnik wyzwala energii osiąga w wierzchołku C szczeliny nachylonej pod kątem  $30^\circ$ . Warunek minimalnej wartości współczynnika wyzwala energii w wierzchołku C jest również spełniony przez dwie pokrywające się rodziny włókien ( $\alpha = 0$ ) nachylone pod kątem  $90^\circ$ . Zatem w obu zadaniach współczynnik wyzwala energii osiąga swoje minimum, gdy obie rodziny włókien pokrywają się i są skierowane w kierunku działającego obciążenia.

Sformułowane zagadnienie optymalnego projektowania kompozytu ze szczelinami ma sens techniczny wtedy, gdy:

- można przewidzieć układ szczelin i projektowany rozkład włókien ma za zadanie powstrzymać ich rozwój w momencie, gdy powstaną,
- należy wzmocnić istniejący spękany element konstrukcji wprowadzając włókna wzmacniające.

Wprowadzony model materiału kompozytowego osłabionego  $n$  szczelinami pozwala rozwiązać szereg zagadnień w zależności od różnej konfiguracji dwóch, trzech i więcej szczelin w tarczy podlegającej w nieskończoności różnym obciążeniom. Przy różnej konfiguracji szczelin i różnych obciążeniach można wyznaczyć w wierzchołkach szczelin współczynniki wyzwala energii w zależności od kątów nachylenia

włókien. Obok kryterium minimum największego współczynnika wyzwania energii można wprowadzić inne kryteria mechaniczne i poszukiwać kątów nachylenia włókien w sensie optymalizacji wielokryterialnej.

## PUBLIKACJE CYTOWANE

1. Aitcin P.C., *High-performance concrete*, E&FN SPON, 1998.
2. Adali S., *Convex and fuzzy modeling of uncertainties in the optimal design of composite structures*, w: *Optimal Design with Advanced Materials*, red. P.Pedersen, Elsevier Science Publishers B.V.,1993.
3. Arduini M., Nanni A., *Behavior of precracked RC beams strengthened with Carbon FRP sheets*, *Journal of Composites for Construction*, 5, 1997.
4. Aveston J., Cooper G.A., Kelly A., *Single and multiple fracture. The properties of fibre composites*, Conf. Proc. National Physics Lab., IPC Science and Technol. Press, 1971, 15-24.
5. Badaliane R., Gupta G.G., *Growth characteristics of two interacting cracks*, *Eng. Fract. Mech.*, 8, 2, 1976, 341-353.
6. Banichuk N.V., *Optimization problems for elastic anisotropic bodies*, *Archives of Mechanics*, 33, 3, 1981, 347-363.
7. Binienda W.K., Arnold S.M., Tan H.Q., Xu M.H., *Stress intensity factors in a fully interacting, multicracked, isotropic plate*, *Comp. Mech.*, 12, 5, 1993, 297-314.
8. Binienda W.K., *Crack interaction in brittle anisotropic materials*, *Arch. Mech.*, 47, 1, 1995, 39-67.
9. Blicharski M., *Wstęp do inżynierii materiałowej*, WNT,1998.
10. Brandmeier H.E., *Optimum filament orientation criteria*, *Journal of Composite Materials*, 4, 1970, 422-425.
11. Brandt A.M., *Materiały złożone – kompozyty. Budowa i właściwości. Kompozyty betonowe*, w: *Wybrane zagadnienia z mechaniki*

- kompozytów, Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Białystok 1982.
12. Brandt A.M., *O składowych energii zniszczenia w zginanych elementach fibrobetonowych (SFRC)*, Arch. Inż. Łąd., 28, 3-4, 1982, 271-279.
  13. Brandt A.M., *On the optimization of the internal structure of fibre reinforced composite materials*, w: Proc. 164 Euromech. Coll. Optimization Methods in Structural Design, red. H. Eschenauer i N. Olhoff, Wissenschaftsverlag BI ( Bibliographisches Institut ) Siegen 1982, 295-300.
  14. Brandt A.M., *On the optimal direction of short metal fibres in brittle matrix composites*, J. Mater. Sci., 20, 1985, 3831-41.
  15. Brandt A.M., *Influence of the fibre orientation on the energy absorption at fracture of SFRC specimens*, w: Proc. Int. Symp. Brittle Matrix Composites 1, Jabonna 1985, red. A.M.Brandt i I.H.Marshall, Elsevier Applied Sci. Publ.London 1986, 403-420.
  16. Brandt A.M., *Influence of the fibre orientation on the mechanical properties of fibre reinforced cement ( FRC ) specimens*, w: Proc. Int. Congres RILEM, vol. 2, Versailles 1987, 651-658.
  17. Brandt A.M. (red.), *Metody optymalizacji materiałów kompozytowych o matrycach cementowych*, Studia z Zakresu Inżynierii, 38, Warszawa 1994.
  18. Brandt A.M., *Cement-based composites: materials, mechanical properties and performance*, E&FN Spon, 1995.
  19. Brandt A.M. (red.), *Optimization methods for material design of cement-based composites*, E&FN Spon, 1998.
  20. Brandt A.M., Marks M., *Optymalizacja składu i struktury kompozytów betonowych*, XXXVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1992.
  21. Brandt A.M., Marks M., *Optimization of cement based composites*, w: Proc. Int. Conf. "Concrete 92", Techeran 1992, 429-441.

22. Brandt A.M., Marks M., *Examples of the multicriteria optimization of cement-based composites*, Composite Structures, vol. 25, 1993, 51-60.
23. Brandt A.M., Marks M., *Optimization of the material structure and composition of cement based composites*, Cement and Concrete Composites, vol.18, 1996, 271-279.
24. Cheng G., Pedersen P., *On sufficiency conditions for optimal design based on extremum principles of mechanics*, J. Mech. Phys. Solids, 45, 1, 1997, 135-150.
25. Cinquini C., Rovati M., *Optimal orientation of orthotropic properties for continuum bodies and structural elements*, w: Optimization of Large Structural Systems, G.I.N. Rozwany (red.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, vol.2, 1993, 707-729.
26. Cowin S.C., *Optimization of the strain energy density in linear anisotropic elasticity*, Journal of Elasticity, 34, 1994, 45-68.
27. Cox H.L., *The general principles governing the stress analysis of composites*, w: Proc. Conf., Fibre Reinforced Materials: Design and Engineering Applications, Institution of Civil Engineers, Londyn 1977, 9-13.
28. Cherepanov G.P., *Mechanics of brittle fracture*, Mc Graw-Hill, 1979.
29. Dacyszyn A.D., Sawruk M.D., *Układ dowolnie rozmieszczonych szczelin w ciałach sprężystych*, Matematyka i Mechanika Stosowana (Prikl. Mat. Mekh. po rosyjsku), 37, 1973, 326-332.
30. Delale F., Erdogan F., *The problem of internal and edge cracks in an orthotropic strip*, ASME Journal of Applied Mechanics, 44, 2, 1977, 237-242.
31. Delale F., Bakirtas I., Erdogan F., *The problem of an inclined crack in an orthotropic strip*, ASME Journal of Applied Mechanics, 46, 1, 1979, 90-96.
32. Delale F., Erdogan F., *Bonded orthotropic strips with cracks*, International Journal of Fracture, 15, 4, 1979, 343-364.

33. Ehsani M.R., Saadatmanesh H., Tao S., *Design recommendations for bond of GFRP rebars to concrete*, Journal of Struct. Eng. Div., ASCE, 122(3), 1996, 247-254.
34. Erdogan F., Gupta G.D., *On the numerical solution of singular integral equations*, Quart. Appl. Math., 29, 4, 1972, 525-534.
35. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S., *Numerical solution of singular integral equations*, w: Methods of analysis and solutions of crack problems, w: Mechanics of Fracture, G.C. Sih (red.), Noordhoff International Publishing, Leyden, 1, 1973, 368-425.
36. Erdogan F., *Mixed boundary-value problems in mechanics*, Mechanics Today, red. S. Nemat-Nasser, 4, Pergamon Press, New York 1978, 1-32.
37. Eschenauer H.E., *Numerical and Experimental Investigations on Structural Optimization of Engineering Design*, Inst. of Mech. and Control Engineering, Univ. of Siegen, FR Germany, Siegen 1986.
38. Ewert S., *Die Fiberline Brücke der Welt aus glasfaserverstärkten Kunststoffen über eine Bahnstrecke*, Bauingenieur, Januar 1, 1998.
39. Fuchs W., *Strukturanalyse und Optimierung anisotroper Schalen aus Vertundwerkstoff*, Universität – GH Siegen, praca doktorska, 1986.
40. German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, skrypt, Politechnika Krakowska, 1996.
41. Glinicki M.A., Marks W., *Optymalizacja wielokryterialna hybrydowego uzbrojenia włóknistego materiału kompozytowego*, XXXVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1992, t.3, 25-30.
42. Glinicki M.A., *Mechanizmy kruchości i trwałość kompozytów cementowych z włóknami szklanymi*, IPPT PAN, praca habilitacyjna, 11, 1999.
43. Golberg M.A., *Introduction to the numerical solution of Cauchy singular integral equations*, w: Numerical Solution of Integral

- Equations, M.A. Golberg (red.), Plenum Press, New York 1990, 183-308.
44. Grzeszczyk S., *Wybrane materiały kompozytowe w budownictwie*, XLVII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Opole-Krynica, 2001, 255-273.
  45. Harvey W.J., *A reinforced plastic footbridge*. Aberfeldy, UK. Structural Engineering International, 4, 1993, 229-232.
  46. Head P., *Looking ahead*. Bridge Design & Engineering, 10, 1995.
  47. Hirano Y., *Optimum design of laminated plates under shear*, J. Composite Materials, 13, Oct.1979, 329-334.
  48. Hirano Y., *Optimization of laminated composite plates and shells*, w: Proc. of IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials, red. Hashin Z., Herakovich C.T., Pergamon Press, 1982, 355-365.
  49. Holnicki-Szulc J., *Zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 16, 1978, 41-55.
  50. Holnicki-Szulc J., *Dystorsje w układach konstrukcyjnych. Analiza, sterowanie, modelowanie*, PWN, Warszawa-Poznań, 1990.
  51. Horii H., Nemat-Nasser S., *Elastic fields of interacting inhomogeneities*, Int. J.Solids Structures, 21, 7, 1985, 731-745.
  52. Hwang C.L., Masud A.S.M., *Multiple Objective Decision Making – Methods and Applications – A State-of-art-survey*. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin 1979.
  53. Ioakimidis N.I., *A strange convergence property of the Lobatto-Chebyshev method for the numerical determination of stress intensity factors*, Computers & Structures, 17, 2, 1983, 205-209.
  54. Jendo S., Marks W., *O wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji*, Archiwum Inż. Łądowej, 1984, 30, 1.
  55. Kachanov M., *Elastic solids with many cracks: a simple method of analysis*, Int. J.Solids Structures, 23, 1, 1987, 23-43.



56. Karihaloo B.L., *Optimum design of high-performance steel fibre-reinforced concrete mixes* w: Proc. Int. Symp. Brittle Matrix Composites 6, red. A.M. Brandt, V.C.Li, I.H. Marshall, ZTUREK RSI and Woodhead Publ., Warsaw 2000, 3-16.
57. Kasperkiewicz J., *Wytrzymałość i odkształcalność fibrobetonu przy rozciąganiu osiowym*, w: Mechanika kompozytów betonopodobnych, red. J. Kasperkiewicz, Ossolineum, 1982, 23-69.
58. Kasperkiewicz J., *Struktura wewnętrzna a procesy pęknięcia w kompozytach z kruchą matrycą*, IPPT PAN, praca habilitacyjna, 39, 1983.
59. Kelly A., Davies G.J., *The principles of the fibre reinforcement of metals*, Metallurgical Review, 10, 37, 1965, 1-77.
60. Knott J.F., *Fundamentals of fracture mechanics*, Butterworths, London 1973.
61. Krstulovic-Opara N., Al-Shannag M.J., *Slurry infiltrated mat concrete (SIMCON)-based shear retrofit of reinforced concrete members*, ACI Structural Journal, January-February 1999.
62. Li V.C., Wang Y., Backer S., *Fracture energy optimization in synthetic fiber reinforced cementitious composites*, w: Proc. Sump. 26-28 November 1990, Boston, red. S. Mindess i J. Skalny, Mat. Res. Soc. Vol. 211, Pittsburgh, 1991, 63-69.
63. Li V.C., Maalej M., Hashida T., *Optimization of discontinuous fiber composites*, w: Proc. ASCE 9<sup>th</sup> Engineering Mechanics Conf. 1992.
64. Majumdar A.J., *Glass fibres and compositions containing glass fibres*, US Patent 3 887 386, 1975.
65. Mallick P.K. (red), *Composites engineering handbook*, Marcel Dekker, Inc., 1997.
66. Marks M., *Podstawowe pojęcia mechaniki zniszczenia*, w: Mechanika kompozytów betonopodobnych, red. J. Kasperkiewicz, Ossolineum, 1982, 341-376.

67. Marks M., *Elementy kompozytowe o minimalnej odkształcalności uzbrojone dwiema rodzinami włókien*, Rozprawy Inżynierskie, 36, 3, 1988, 541-562.
68. Marks M., *Optimal fibre orientation in concrete like composites*, w: Proc. Inf. Symp. Brittle Matrix Composites 2, Cedzyna 1988, red. A.M. Brandt i I.H. Marshall, Elsevier Applied Science, London 1989, 54-64.
69. Marks M., *Optimal fibre orientation in composite element*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 4, 30, 1992, 769-782.
70. Marks M., *Optymalizacja uzbrojenia dwiema rodzinami włókien*, w: Metody optymalizacji materiałów kompozytowych o matrycach cementowych, A.M.Brandt (red.), Studia z Zakresu Inżynierii, 38, Warszawa 1994, 184-198.
71. Marks M., *Determination of strain energy release rates at crack ends in a composite reinforced by two families of fibres*, Archives of Civil Engineering, XLV, 1, 1999, 21-57.
72. Marks M., *Analiza i optymalizacja kompozytów uzbrojonych dwiema rodzinami włókien*, Studia z Zakresu Inżynierii, 49, Warszawa 2000.
73. Marks M., *Element kompozytowy o minimalnej odkształcalności*, II Sympozjon Kompozyty, Konstrukcje Warstwowe, PTMTS – Oddział we Wrocławiu, Karpacz 7-9.11, 2002, 173-180.
74. Marks M., Marczevska I., *Optimization orientation of fibres in composite disc*, Archives of Civil Engineering, L, 4, 2004 (w druku).
75. Matczyński M., Sokołowski M., *Interaction of cracks in elastic media*, Arch.Mech., 34, 23, 1982, 89-104.
76. Muller D., *Positioned reinforcement for enhanced GRC performances*, Proc. Int. Congress GRC'98, Glassfibre Reinforced Cement Association, Cambridge, 14-16 April, 1998.
77. Mullin J.V., Mazzio V.F., *Optimizing composite properties*, Society for the Advancement of Materials and Process Engineering (SAMPE) Quartely, 3, 2, 1972, 22-27.

78. Muskhelishvili N.I., *Osobliwe równania całkowe*, Państwowe Wydawnictwo Fizyczno-Matematycznej Literatury, Moskwa 1962 (po rosyjsku).
79. Naaman A.E., *SIFCON tailored properties for structural performance*, in High performance fibre-reinforced cement composites, red. H.W. Reinhardt, A.E. Naaman, Proc. Int. Workshop RILEM/ACI, 23-26 June 1991, Mainz, Chapman and Hall/ Spoon, London 1992, 18-38.
80. Neimitz A., *Mechanika pękania*, PWN, Warszawa, 1998.
81. Osyczka A., *Computer Aided Multicriterion Optimization System (CAMOS)*, International Software Publishers, Kraków 1992.
82. Panasjuk W.W., Sawruk M.P., Dancyszyn A.P., *Rozkład naprężeń wokół szczelin w płytach i powłokach*, Naukowa Dumka, Kijów, 1976 (po rosyjsku).
83. Pedersen P., *On optimal orientation of orthotropic materials*, Structural Optimization, 1, 1989, 101-106.
84. Pedersen P., *Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials*, Structural Optimization, 2, 1990, 55-63.
85. Pedersen P., *On thickness and orientational design with orthotropic materials*, Structural Optimization, 3, 1991, 69-78.
86. Pedersen P., Bendsøe M.P., *On strain-stress fields resulting from optimal orientation*, Proc. WCSMO-1, Goslar, Germany, Elsevier, 1995, 243-250.
87. Puciłowski K., *Przewidywanie wybranych właściwości kompozytów w mechanice technicznej*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, z.128, 1990.
88. Romalis N.B., Tamuž V.P., *Propagacja głównej rysy w materiale z rozmieszczonymi mikrorysami*, Mechanika Kompozytowych Materiałów, 1, 1984, 42-51 (po rosyjsku).

89. Rovati M., Taliercio A., *On coaxiality of stress and strain fields and stationarity of elastic energy in anisotropic solids*, Short Papers of the Fifth Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization WCSMO-5, Lido di Jesolo, Italy, 19-23.05, 2003, 237-238.
90. Sacchi Landriani G., Rovati M., *Optimal design of two-dimensional structures made of composite materials*, Journal of Engineering Materials and Technology, 113, 1991, 88-92.
91. Schmit L.A., Farshi S.N., *Optimum design of laminated fibre composite plates*, Int. Journ. for Num. Methods in Engineering, Vol.11, 1977, 623-640.
92. Schittkowski K., *The nonlinear method of Wilson, Han and Powell with an augmented lagrangian type line search function*, Numerische Mathematic 38, 1981.
93. Siwowski T., Radomski W., *Pierwsze krajowe zastosowania taśm kompozytowych do wzmocnienia mostu*, Inżynieria i Budownictwo, 7, 1998.
94. Sokołowski M., *Teoria pękania a elastostatyka klasyczna*, w: Mechanika zniszczenia, teoria i zastosowanie, Konf. Jabłonna 1974 PAN, Ossolineum 1976.
95. Spencer A.J.M., *Constitutive theory for strongly anisotropic solids*, wykłady na kursie "Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites", CISM Udine, 20-24. 07, 1981.
96. Sumerak J.E., *Variable cross-section pultruded profiles offer new design options for structural applications*, Proceedings of ICCE, 2, August 1995.
97. Swiatecki S., *A plastic composite bridge claimed to be the world's first to cross a railway has been built in Denmark*, Civil Engineering International, 10, 1997.
98. Świtka R., *Equations of the fibre composite plates*, Engineering Trans., 40, 2, 187-201, 1992.

99. Świtka R., *Thermoelasticity of fiber composites*, J. Theoret. and Applied Mech. 33, 2, 1995, 385-400.
100. Świtka R., *Stresses in the neighbourhood of a line crack in an infinite sheet made of fibrous composite*, Studia Geotechnica et Mechanica, 23, 1-2, 2001, 5-31.
101. Tauchert T.R., Adibhatla S., *Optimum elastic design of a reinforced beam*, J. Composite Materials, 16, Sept., 1982, 433-445.
102. Tauchert T.R., Adibhatla S., *Design of laminated plates for maximum stiffness*, J. Composite Materials, 18, Jan., 1984.
103. Theocaris P.S., Ioakimidis N.I., *Numerical integration methods for the solution of singular integral equations*, Quarterly of Applied Mathematics, April, 1977, 173-183.
104. Thomsen J., Olhoff N., *Optimization of fibre orientation and concentration in composites*, Control and Cybernetics, 19, 1990, 327-341.
105. Thomsen J., *Optimization of composite discs*, Structural Optimization, 3, 1991, 89-98.
106. Trochymiak W., *Mosty z polimerów wzmacnianych włóknami*, Drogownictwo 4, 1999.
107. Wang J., Karihaloo B.L., *Design of crack-insensitive composite laminates*, Optimal Design with Advanced Materials, red. P. Pedersen, Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
108. Wilczyński A.P., *Polimerowe kompozyty włókniste*, WNT, 1996.
109. Wnuk M.P., *Podstawy mechaniki pękania*, Skrypt Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1977.

# NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI TARCZY Z MATERIAŁU KOMPOZYTOWEGO

## 1. SFORMUŁOWANIE I SPOSÓB ROZWIĄZANIA

Przedmiotem rozważań jest tarcza złożona z  $N$  elementów kompozytowych. Każdy z tych elementów składa się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien. Przyjęto, że zawartość objętościowa włókien  $\eta$  w obu rodzinach jest jednakowa (rozdział 4). Kierunki ułożenia włókien w każdym elemencie mogą być różne, czyli tarcza jest złożona z elementów przygotowanych niezależnie i następnie zespolonych. Jest to zatem tarcza wykonana z materiału anizotropowego i niejednorodnego. Celem pracy jest poszukiwanie kierunków ułożenia rodzin włókien tak aby tarcza spełniała kryterium minimum energii odkształcenia. Całkowita energia odkształcenia w tarczy jest sumą energii odkształcenia zgromadzonej w każdym z  $N$  elementów tarczowych powstałych z podziału tarczy. Zatem  $U = \sum_{e=1}^N U_e$ , gdzie  $U_e$  jest energią odkształcenia  $e$ -tego elementu tarczowego. Rozwiązanie takiego zagadnienia ma charakter poznawczy i może stanowić punkt odniesienia do oceny tarcz projektowanych przy założeniu, że są one podzielone na obszary uzbrojone włóknami ułożonymi w jednakowych kierunkach.

Tarczę rozwiązano za pomocą programu bazującego na metodzie elementów skończonych z wbudowanym modelem anizotropii. Do programu tego zaimplementowano procedury optymalizacyjne CAMOS. Rozwiązania poszukiwano wstępnie metodą Monte Carlo a następnie metodą podatnych ograniczeń [81]. Sformułowanie zagadnienia

poszukiwania optymalnego nachylenia kierunków włókien ze względu na minimum energii odkształcenia jest następujące: Znaleźć minimum funkcji

$$U = \sum_{e=1}^N U_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \iiint_{V_e} [S_{11}^e (\sigma_1^e)^2 + 2S_{12}^e \sigma_1^e \sigma_{II}^e + S_{22}^e (\sigma_{II}^e)^2] dV_e \quad (Z.1)$$

względem kątów nachylenia pierwszej rodziny włókien  $\vartheta_1^e$  i kątów pomiędzy rodzinami włókien  $\alpha^e$  w  $e$ -tym elemencie przy ograniczeniach

$$\mathbf{Kq}=\mathbf{F} \quad (Z.2)$$

$$0 \leq \vartheta_1^e \leq \pi \quad (Z.3)$$

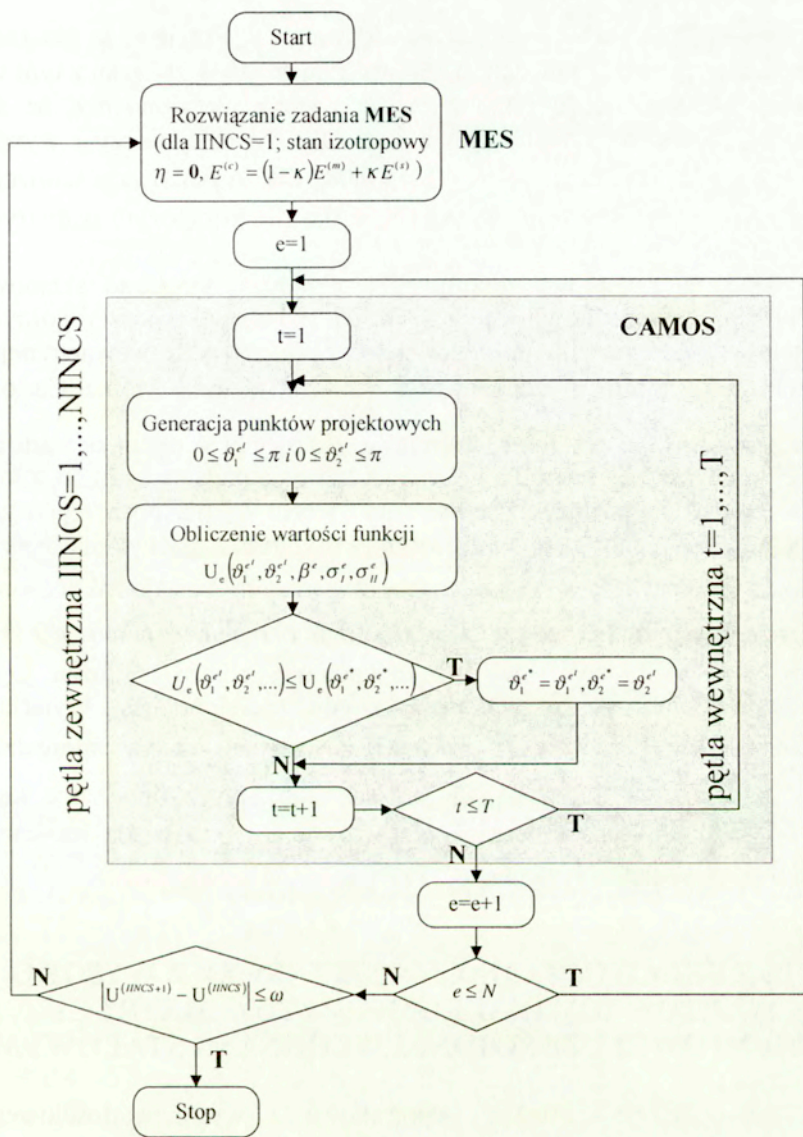
$$0 \leq \alpha^e \leq \pi$$

$\sigma_1^e, \sigma_{II}^e$  są naprężeniami głównymi w  $e$ -tym elemencie tarczy,  $S_{ij}^e, i, j = 1, 2$  są składowymi odwrotnej macierzy stałych materiałowych łączącej naprężenia z odkształceniami (rozdział 4),  $V_e$  jest objętością elementu,  $\mathbf{q}$  jest globalnym wektorem przemieszczeń węzłowych tarczy,  $\mathbf{K}$  jest globalną macierzą sztywności układu,  $\mathbf{F}$  globalnym wektorem oddziaływań zewnętrznych. Globalna macierz układu  $\mathbf{K}$  jest budowana z macierzy sztywności elementów

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_e \mathbf{B}_e dV_e$$

gdzie  $\mathbf{B}_e$  jest macierzą pochodnych funkcji kształtu,  $\mathbf{C}_e$  jest macierzą stałych materiałowych, której składowe podano wzorami (4.4). Funkcja podcałkowa wyrażenia (Z.1) odpowiada energii odkształcenia określonej wzorem (4.11). Ograniczenie (Z.2) jest równaniem równowagi MES. Ograniczenie (Z.3) określa zakres zmienności poszukiwanych kątów.

Algorytm określania optymalnego nachylenia kierunków dwóch rodzin włókien jest realizowany według schematu przedstawionego na rys.Z.1. Schemat realizowany jest w dwóch pętlach: w pętli zewnętrznej nazwanej IINCS, oraz w pętli wewnętrznej  $t$  realizowanej dla każdego



Rys. Z.1 Schemat blokowy algorytmu iteracyjnego.

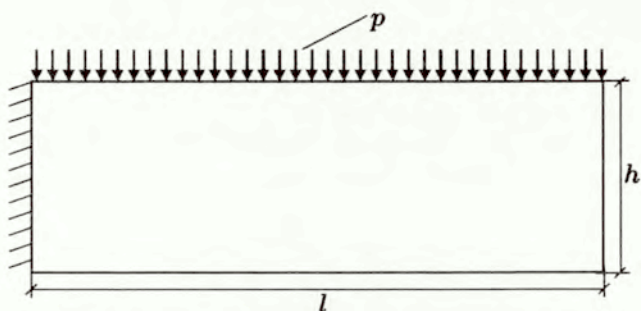


elementu  $e$ . Punktem wyjścia jest stan izotropowy. Przyjęto, że parametr objętościowego udziału dwóch rodzin włókien  $\eta = 0$ , w związku z tym we wzorach (4.4) pozostają tylko pierwsze wyrazy. Przyjmujemy, że dla stanu izotropowego moduł Younga jest stały dla całej tarczy i wynosi  $E^{(c)} = (1 - \kappa)E^{(m)} + \kappa E^{(s)}$ , gdzie  $\kappa = 0,08$  dla wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej i  $\kappa = 0,6$  dla kompozytu o matrycy epoksydowej.

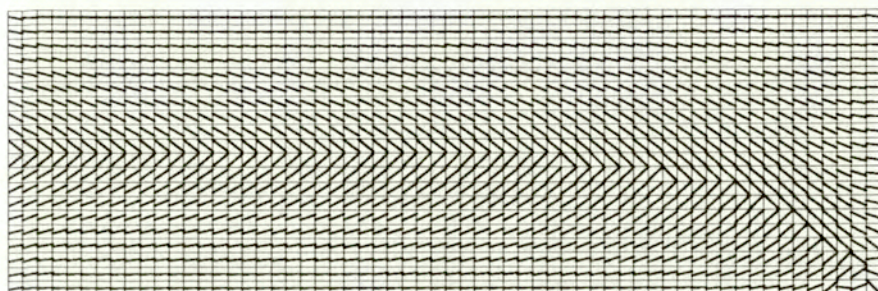
Następnie przeprowadzono analizę układu i określono składowe naprężenia, naprężenia główne i kierunki główne dla poszczególnych elementów. Kolejno dla każdego elementu  $e$ , w pętli wewnętrznej  $t$  poszukiwano minimum funkcji celu  $\min_{\vartheta_1^e, \alpha^e} U_e$  metodą Monte Carlo i metodą podatnych ograniczeń. Danymi wejściowymi w pętli  $t$  są wartości naprężeń głównych i kierunku głównego, które po podstawieniu do wzoru (4.11) pozwalają wyliczyć wartość funkcji celu  $U_e$  dla poszczególnych elementów. Zmiennymi wyjściowymi są kierunki nachylenia rodzin włókien  $\vartheta_1^e = \vartheta_1^{e*}$  i  $\vartheta_2^e = \vartheta_1^{e*} + \alpha^{e*}$ . Proces iteracyjny zostaje zakończony, gdy  $t=T$ . W programie przyjęto  $T=10000$ . Tak określone zmienne  $\vartheta_1^e$  i  $\vartheta_2^e$  są danymi wejściowymi w pętli zewnętrznej IINCS. Główna pętla iteracyjna IINCS zostaje zakończona gdy spełnione jest kryterium zbieżności  $|U^{IINCS+1} - U^{IINCS}| \leq \omega = 0.001$ . Następnie należy sprawdzić, który z warunków (4.14)-(4.16) jest spełniony przez optymalne kąty  $\vartheta_1^e$  i  $\alpha^e$  czyli któremu z warunków (4.14)-(4.16) odpowiada minimum energii odkształcenia elementu.

## 2. PRZYKŁAD OPTYMALIZACJI TARCZY Z WYSOKOWARTOŚCIOWEGO KOMPOZYTU O MATRYCY CEMENTOWEJ UZBROJONEJ WŁÓKNAMI STALOWYMI

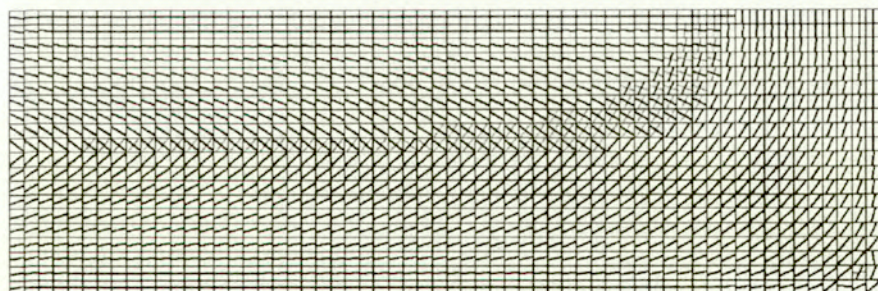
Zoptymalizowano tarczę wspornikową z wysokowartościowego kompozytu o matrycy cementowej o wymiarach i obciążeniu przedstawionych na rys. Z.2, ( $p = 200$  kN/m,  $h = 10$  m,  $l = 30$  m,  $N =$



Rys. Z.2 Wymiary i obciążenie tarczy.



Rys. Z.3. Kierunki naprężeń głównych w elementach tarczy z wysokowartościowego kompozytu uzbrojonego włóknami stalowymi.



Rys. Z.4. Optymalne kierunki włókien w elementach tarczy z wysokowartościowego kompozytu uzbrojonego włóknami stalowymi.

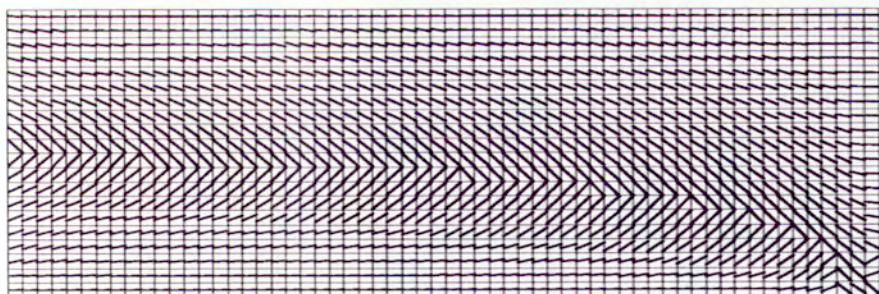
1200), uzbrojoną dwiema rodzinami włókien stalowych. Przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E^{(m)} = 40 \text{ GPa}$ ,  $E^{(s)} = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,23$  oraz zawartość objętościową włókien  $\eta = 0,08$ .

Na rys. Z.3 przedstawiono kierunki naprężeń głównych w poszczególnych elementach tarczy, a na rys. Z.4 optymalne kierunki usytuowania włókien. W większej części tarczy optymalne usytuowanie włókien otrzymano w przypadku rozwiązania pierwszego (4.14) tzn. wtedy, gdy występuje jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem jednego z naprężeń głównych. Włókna te ułożone są zgodnie z kierunkiem naprężenia głównego, większego co do wartości bezwzględnej. W kilkudziesięciu elementach, widocznych na rys. Z.4, minimum energii występuje w przypadku rozwiązania trzeciego (4.16), tzn. wtedy gdy element uzbrojony jest dwiema ortogonalnymi rodzinami włókien ułożonymi wzdłuż kierunków głównych. Jedynie w jednym elemencie minimum energii wystąpiło w przypadku rozwiązania drugiego, tzn. spełniającego układ równań (14.15). Proces iteracyjny jest bardzo szybko zbieżny – rozwiązanie uzyskano w piątej iteracji.

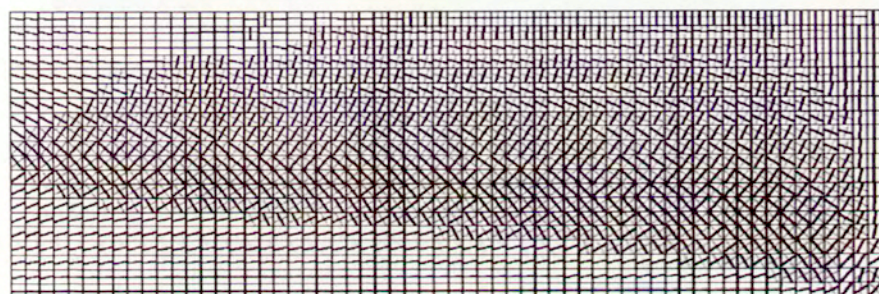
### **3. PRZYKŁAD OPTYMALIZACJI TARCZY O MATRYCY EPOKSYDOWEJ UZBROJONEJ WŁÓKNAMI WĘGLOWYMI**

Zoptymalizowano tarczę wspornikową o matrycy epoksydowej uzbrojonej dwiema rodzinami włókien węglowych o wymiarach i obciążeniu analogicznym jak w przykładzie poprzednim. Przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E^{(m)} = 3,5 \text{ GPa}$ ,  $E^{(s)} = 220 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,35$  oraz zawartość objętościową włókien  $\eta = 0,60$ .

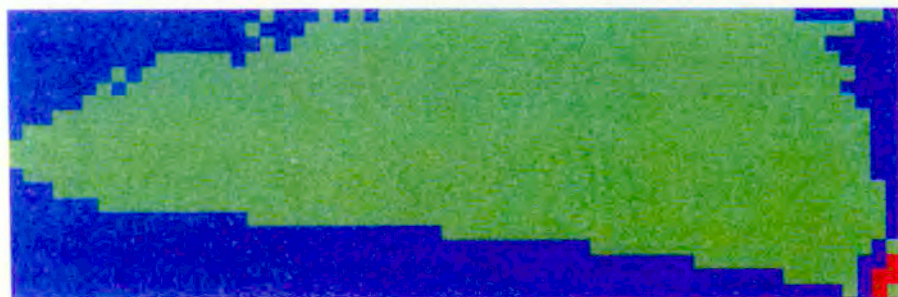
Tarczę rozwiązano metodą elementów skończonych, analogicznie jak w przykładzie poprzednim. Na rys. Z.5 przedstawiono kierunki naprężeń głównych w poszczególnych elementach tarczy, a na rys. Z.6 optymalne kierunki usytuowania włókien. W tym przypadku w większej części tarczy optymalne usytuowanie włókien otrzymano z rozwiązania trzeciego (4.16) tzn. wtedy gdy element uzbrojony jest dwiema



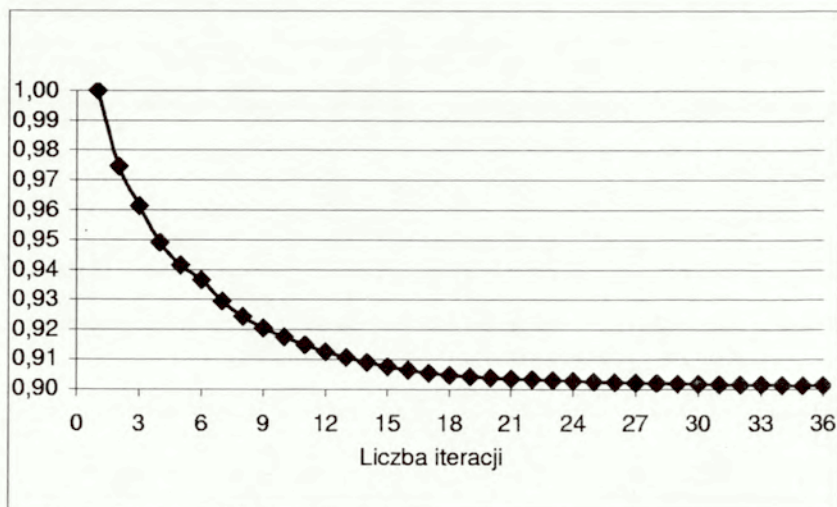
Rys. Z.5. Kierunki naprężeń głównych w elementach tarczy z kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi.



Rys. Z.6. Optymalne kierunki włókien w elementach tarczy z kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi.



Rys. Z.7. Podział tarczy na elementy, w których występują rozwiązania: pierwsze ■, drugie ■, lub trzecie ■.



Rys. Z.8. Stosunek wartości energii odkształcenia tarczy z kompozytu o matrycy epoksydowej uzbrojonej włóknami węglowymi, w kolejnym kroku iteracji do wartości energii w pierwszym kroku iteracji.

ortogonalnymi rodzinami włókien ułożonymi wzdłuż kierunków głównych. W znacznej liczbie elementów optymalne uzbrojenie odpowiada rozwiązaniu pierwszemu (4.14), czyli występuje jedna rodzina włókien ułożona zgodnie z kierunkiem naprężenia głównego, większego co do wartości bezwzględnej. Jedynie w czterech elementach minimum energii wystąpiło w przypadku rozwiązania drugiego, tzn. spełniającego układ równań (4.15). Na rys. Z.7 różnymi kolorami pokazano elementy w których wystąpiły poszczególne rozwiązania. Proces iteracyjny jest również szybko zbieżny – rozwiązanie uzyskano po kilkunastu iteracjach (rys. Z.8).

# THE COMPOSITES REINFORCED BY TWO FAMILIES OF FIBRES

## SUMMARY

The paper concerns composite materials reinforced by continuous fibres. They have widespread use, particularly in modern composite materials in which polymer, ceramic or metal alloy matrix is reinforced by glass, carbon or steel fibres. Concrete matrix, most often cement mortar, can be reinforced using continuous fibres arranged in a regular way, e.g. steel mesh (ferrocement) or continuous alkali-resistant glass fibres, as well as in SIMCON, a high performance composite class in which continuous fibre mats are immersed in a specially designed slurry.

The subject of this study is composite material reinforced by continuous fibres. The composite consists of matrix reinforced by two families of fibres placed symmetrically with respect to the mid-plane. Fibre family consist of identical fibres placed parallel to each other in a given direction, on planes parallel to the mid-plane. It is assumed that both the matrix and the fibres are linear elastic materials. Further it was assumed that in the directions tangent to fibre systems, the continuity of strains occurs between the matrix and the fibres.

Two problems of analysis and optimization of such composite materials have been solved in the paper.

In the first problem of analysis, a plate element was considered composed of matrix reinforced by two families of continuous fibres, inclined at angles  $\vartheta_1$  and  $\vartheta_2$  to the  $x_1$  axis. Composite element is in the state of plane stress described by three components of the generalized state of stress. Stress and strain states were determined in an element subjected to normal and tangential loads. Minimum strain energy of composite element was assumed as criterion of optimization. The strain

energy is determined with respect to the system of principal axes of stress. The necessary minimum conditions were determined from Kuhn-Tucker theorem. Assuming particular cases of loading in composites of epoxy resin elements reinforced by carbon fibres and in high performance fiber reinforced cementitious composite elements, optimum angles of fibre placing were determined. The optimum solutions depend on material constants of the matrix and fibres, on volumetric content of fibres and on applied loads. In the case of two kind of composites with significantly different properties of fibres and matrices the influence of ratio of the principal stresses on optimum solutions was investigated.

The analytical conditions for the minimum strain energy, obtained in chapter 4, were applied for numerical solution of optimization of composite discs (appendix).

The problem of two-criteria optimization was also considered. Minimum strain energy and minimum cost of composite element were assumed as criteria. Angles of fibre inclinations and fibre volumetric content were assumed as decision variables. Examining particular load cases in composite of epoxy reinforced by carbon fibres elements and in high performance fiber reinforced cementitious composite elements, optimum solutions have been determined in the sense of assumed criteria.

In the latter an infinite elastic plate is considered, in which the matrix is reinforced by two families of continuous, parallel fibres and weakened by  $n$  interacting cracks. The appropriate stress field acts on this plate at an infinite distance. First, the local stress state for each  $j$ -th crack is determined in its local coordinate system. Next, the total stress at the edge of the  $j$ -th crack is assigned as the sum of the local states of stress as well as the state of stress generated along the line  $j$ -th crack by all remaining cracks. This constitutes a system of singular integral equations of the first kind with simple Cauchy-type singularities. Next, the stress intensity factors and the strain energy release rate at crack ends are determined by unknown functions evaluated at the tips of the cracks.

As a particular case, it was assumed that the plate is a composite consisting of concrete matrix reinforced by two families of steel fibres, weakened by two stationary cracks. Applying Lobatto-Chebyshev collocation integration method, the approximate solution of the set of

singular integral equations is obtained. Taking advantage of the approximate solution, stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  are determined as well as the strain energy release rate  $G$  at the ends of each crack, at various angles of inclination of the fibres. Fibre inclination angles at which maximum energy release coefficient assumes minimum values have also been determined.

The objective of this paper is to find – in a composite element consisting of the matrix reinforced by two families of continuous fibres, at a given imposed loading – such angles of inclination of fibres at which the strain energy attains minimum. Apart from this, angles of inclination and volumetric content of fibres were selected so, that the strain energy and the cost of the composite element under consideration attained minimum. In a composite material weakened by  $n$  interacting cracks, a search was also carried out to find such fibre families inclination angles for which the maximum energy release coefficient assumed minimum values.