Tadeusz Klecha

# NAPRĘŻENIOWE FALE POWIERZCHNIOWE W NIEJEDNORODNYM OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

3/2002



WARSZAWA 2002

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 20 grudnia 2001 r.

Praca recenzowana



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd.0,75 Ark. druk. 1,0
Oddano do drukarni w lutym 2002 r.

ATOS - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

Tadeusz Klecha
ul. Widok 16 m. 82
31-564 Kraków

# Naprężeniowe fale powierzchniowe w niejednorodnym ośrodku sprężystym.

**Słowa kluczowe:** nieliniowy problem własny, uogólniony problem własny, niejednorodna izotropowa i anizotropowa półprzestrzeń sprężysta, fale powierzchniowe naprężeniowe, liczba falowa, równania dyspersji, twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności fali powierzchniowej, problematyka małych niejednorodności, teoria perturbacji Friedrichsa, $B$-holomorficzna teoria operatorów T. Kato; izotropia prosta, transwersalna; twierdzenie Gurtina-Ignaczaka, anizotropia ogólna – model T. Rożnowskiego.

## 1. Wstęp

W pracy [1] był badany problem propagacji naprężeniowych fal powierzchniowych zarówno w niejednorodnym izotropowym ośrodku jak również w niejednorodnym anizotropowym ośrodku sprężystym jako pewien nieliniowy problem własny. Wychodząc z naprężeniowych równań ruchu (por. Ignaczak [2]) dla ośrodka niejednorodnego pokazano, że prędkość i amplituda propagującej się fali powierzchniowej jest funkcją analityczną liczby falowej $s$. Do dowodu użyto $B$-holomorficznej teorii perturbacji operatorów liniowych w szczególności różniczkowych zaproponowaną przez T. Kato [3], a polegającej na konstrukcji form, których domknięcia generują rodzinę $B$-holomorficznych operatorów. Z twierdzenia T. Kato ($B$-kryterium) zastosowanego do przypadku naprężeniowych fal powierzchniowych, w którym wektor amplitudy i prędkości fali spełniają uogólniony problem własny postaci $A(s)\boldsymbol{\alpha} - \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} = 0$ wynika, że wektor $\alpha$ jest analityczny w całej dziedzinie określoności $s$. To samo dotyczy prędkości fali propagującej się w ośrodku sprężystym. Ponadto w pracy [1] zbadano szczególny przypadek niejednorodności, gdy moduł Poissona jest ograniczoną funkcją głębokości półprzestrzeni klasy $C^2[0, +\infty)$. Wykazano istnienie i jedyność takiej fali (por. [4], [5]).

W pracy [6] rozwiązano problem propagacji fali powierzchniowej używając teorii funkcji Greena. Stosując twierdzenie o punkcie stałym wykazano istnienie fal powierzchniowych dla dużych liczb falowych $s$. W tejże pracy użyto metody perturbacji operatorów proponowanej przez K. O. Friedrichsa (por. [7]), dla analizy małych niejednorodności w przypadku gdy a) gęstość oraz

b) moduł ścinania spełniają założenie „małej niejednorodności". Wektor amplitudy naprężeniowej fali powierzchniowej znaleziono w postaci szeregów potęgowych zmiennej $\varepsilon$ (małego parametru), a także wykazano, że prędkość fali jest funkcją analityczną małego parametru $\varepsilon$ i liczby falowej $s$. W niniejszej pracy zbadano istnienie fal powierzchniowych w przypadku „słabo" niejednorodnej anizotropowej półprzestrzeni sprężystej. W tym celu została użyta metoda perturbacji widma dyskretnego oraz metoda perturbacji segmentu widma dyskretnego zaproponowana przez K.O. Friedrichsa.

Zaproponowana metoda małego parametru w szczególności rozwiązuje problem a) prostej izotropii, b) transwersalnej izotropii i c) ogólnej anizotropii. W pracy uogólniono przypadek transweralnej anizotropii Rożnowskiego (por. [8] praca habilitacyjna T. Rożnowskiego, 1990).

## 2. Liniowe równanie przemieszczeniowe i naprężeniowe elastyczności dla ciała anizotropowego i niejednorodnego

Nasze rozważania opieramy na następujących związkach:

1. liniowych zależnościach kinematycznych

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)) = u_{(i,j)}(x,t) \tag{2.1}$$

2. równaniach równowagi dynamicznej pędu:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) + F_i(x,t) = \varrho(x)\ddot{u}_i(x,t), \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.2}$$

3. równaniach konstytutywnych

$$\sigma_{ij}(x,t) = c_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}(x,t) \tag{2.3}$$

lub

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \kappa_{ijkl}(x)\sigma_{kl}(x,t)$$

4. warunkach nierozdzielczości

$$e_{pkl}e_{qmn}\varepsilon_{km,ln} = 0 \tag{2.4}$$

Przez podstawienie $(2.3)_1$ i (2.1) do (2.2) otrzymamy równanie przemieszczeniowe ruchu ośrodka (w warunkach izotermicznych)

$$[C_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,t)]_{,j} + \varrho(x)(f_i(x,t) - \ddot{u}_i) = 0 \tag{2.5}$$

Eliminując $u_i$ i $\varepsilon_{ij}$ z równań (2.1)-(2.3) możemy napisać rówananie ruchu ośrodka w naprężeniach (w warunkach izotermicznych)

$$\begin{aligned} 2\kappa_{ijkl}(x)\ddot{\sigma}_{kl}(x,t) &= [\varrho^{-1}(x)\sigma_{ik,k}(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)\sigma_{jk,k}(x,t)]_{,i} + \\ &+ [\varrho^{-1}(x)F_i(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)F_j(x,t)]_{,i} \end{aligned} \tag{2.6}$$

W powyższych równaniach zastosowano oznaczenia:

$u_i$ – sładowa wektora przemieszczenia,

$\varepsilon_{ij}$ – składowa tensora odkształcenia,

$\sigma_{ij}$ – składowa tensora naprężenia,

$x$ – zmienna przestrzenna $(x_1, x_2, x_3)$ lub $(x, y)$ w układzie współrzędnych prostokątnych

$t$ – czas,

$e_{pkl}$ – tensor alternatywny – symbol permutacji, (2.7)

$C_{ijkl}(x)$ – tensor 4-go rzędu modułów sprężystości jako funkcja współrzędnej przestrzennej,

$\kappa_{ijkl}(x)$ – tensor 4-go rzędu modułów podatności jako funkcja współrzędnej przestrzennej,

$\varrho(x)$ – gęstość ośrodka,

$F_i(x,t) = \varrho(x) f_i(x,t)$ – siła masowa.

Z symetrii macierzy $[\sigma_{ij}]$ i $[\varepsilon_{ij}]$ wynikają związki

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk},$$

które redukują liczbę niezależnych współczynników sprężystości z 81 do 36. Następny związek

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

powoduje dalsze zmniejszenie liczby współczynników do 21.

Ciało wykazujące właściwości transwersalnej anizotropii jest opisywane przez 5 różnych parametrów sprężystości. Żąda się ponadto spełnienia warunku silnej eliptyczności w postaci

$$C_{ijkl} a_i b_k a_j b_l > 0$$

dla każdej pary wektorów $a$ i $b$.

Inne oznaczenia: kropka nad symbolem oznacza różniczkowanie względem czasu, indeksy po przecinku wskazują różniczkowanie cząstkowe względem zmiennych przestrzennych.
Jeżeli $G_{ij}(x,t)$ jest rozwiązaniem równania (2.6) przy jednorodnych warunkach początkowych, wówczas wektor przemieszczenia wyraża się równaniem (J. Ignaczak, 1963, por. [2]).

$$u_i(x,t) = \varrho^{-1}(x) \int_0^t (1-\tau)[\sigma_{ij,j}(x,\tau) + F_i(x,\tau)]d\tau. \tag{2.8}$$

Związek (2.8) został uogólniony przez M. E. Gurtina, 1964, tak, że obejmuje niejednorodne warunki początkowe i ma postać (por. [8], [9]):

$$u_i(x,t) = \varrho^{-1}(x) \int_0^t (1-\tau)[\sigma_{ij,j}(x,\tau) + F_i(x,\tau)]d\tau + u_{i_{|t=0}} + t\,\dot{u}_{i_{|t=0}}. \tag{2.9}$$

W 1963 roku J. Ignaczak wyprowadził naprężeniowe rówanaie ruchu dla dowolnego anizotropowego ośrodka w postaci (2.6) gdzie $\kappa_{ijkl} = \kappa_{ijkl}(x)$ jest tensorem podatności sprężystej zależnym od $x$. J. Ignaczak oraz M. Gurtin wykazali, że układ ten jest podstawowym dynamicznym układem naprężeniowym, to znaczy, że jeżeli znany jest tensor $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,t)$ spełniający (2.6) to przemieszczenie oblicza się według wzoru (2.9). Korzystając z równania (2.6) J. Ignaczak sformułował problem fal Rayleigha w niejednorodnej izotropowej i sprężystej półprzestrzeni poszukując rozwiązań dwuwymiarowych naprężeniowych równań przy założeniu, że deformacja jest płaska, czyli $u_3 = 0$ w zbiorze $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 \in \mathbb{R} \ \wedge\ x_2 \in (0,+\infty)\}$ przy czym naprężenia na brzegu spełniają związki

$$\begin{gathered} \sigma_{22}(x_1,0,\tau) = \sigma_{12}(x_1,0,\tau) = 0 \\ \sigma_{22}(x_1,\infty,\tau) = \sigma_{11}(x_1,\infty,\tau) = \sigma_{12}(x_1,0,\tau) = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

tutaj $\tau$ jest bezwymiarowym czasem.

## 3. Fale powierzchniowe w anizotropowej, niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Rozważmy dwuwymiarowe naprężeniowe równania ruchu dla niejednorodnej anizotropowej półprzestrzeni spężystej:

$$2\kappa_{ijkl}(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ddot{\tau}_{kl}(x,t) = [\varrho^{-1}(x)\tau_{ik,k}(x,t)]_{,j} + [\varrho^{-1}(x)\tau_{jkk,}(x,t)]_{,i} \tag{3.1}$$

gdzie $\tau_{kl} = \tau_{kl}(x,t)$, $(i,j,k,l = 1,2)$, $x = (x_1,x_2)$ jest poszukiwanym polem naprężeń (por. [2]). Tensor $\kappa_{ijkl}$ jest zadanym 4-wskaźnikowym polem tensorowym, spełniającym warunki:

a) symetrii:

$$\kappa_{ijkl} = \kappa_{jikl} = \kappa_{ijlk} = \kappa_{lkij} \tag{3.2}$$

b) silnej eliptyczności:

$$\kappa_{ijkl}\, a_i\, b_k\, a_j\, b_l > 0 \tag{3.3}$$

dla dowolnych wektorów $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, zaś $\varrho(x)$ oznacza gęstość ośrodka sprężystego.
Zakładamy, że funkcje $\kappa_{ijkl}(x)$, $\varrho(x)$ $(i = 1, 2)$ zależą od $x_2$ i są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0, \infty)$.
W półprzestrzeni sprężystej:

$$U = \Big\{(x_1, x_2):\quad |x_1| < \infty,\;\; x_2 \geqslant 0\Big\} \tag{3.4}$$

poszukujemy rozwiązania $\tau_{kl}(x, t)$ równania (3.1) w postaci:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \alpha_{11}(x_2)\exp\Big[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})\Big] \\ \tau_{22} &= \alpha_{22}(x_2)\exp\Big[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})\Big] \\ \tau_{12} &= i\alpha_{12}(x_2)\exp\Big[i(sx_1 - t\sqrt{\lambda})\Big] \;\text{ dla }\; t \in \langle 0, +\infty), \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$, $s > 0$, $\lambda > 0$ spełniającego warunki:

$$\tau_{22}(x_1, 0, t) = \tau_{12}(x_1, 0, t) = 0 \quad \text{dla }\; x_1 \in \mathbb{R},\, t \in \langle 0, +\infty) \tag{3.6}$$

$$\tau_{22}(x_1, \infty, t) = \tau_{12}(x_1, \infty, t) = \tau_{11}(x_1, \infty, t) = 0 \;\; \text{dla }\; x_1 \in \mathbb{R},\, t \in \langle 0, +\infty) \tag{3.7}$$

Po podstawieniu (3.5) do (3.1) i wykorzystaniu warunków (3.7) i (3.7) oraz symetrii tensora $\boldsymbol{\tau}$ problem propagacji fali powierzchniowej redukujemy do badania uogólnionego problemu własnego

$$\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\alpha} - \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \tag{3.8}$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{11}\;\; \alpha_{12}\;\; \alpha_{22}]^T$,

$$\boldsymbol{A}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{\varrho} & \dfrac{s}{\varrho}D & 0 \\ -sD\dfrac{1}{\varrho} & \dfrac{s^2}{\varrho} - D\dfrac{1}{\varrho}D & s\dfrac{1}{\varrho}D \\ 0 & -sD\dfrac{1}{\varrho} & -D\dfrac{1}{\varrho}D \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 \\ C_2 & C_3 & C_5 \\ C_4 & C_5 & C_6 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \kappa_{1111}(x_2), & C_2 &= 2\kappa_{1112}(x_2), \\ C_3 &= 4\kappa_{1212}(x_2), & C_4 &= \kappa_{1122}(x_2), \\ C_5 &= 2\kappa_{1222}(x_2), & C_6 &= \kappa_{2222}(x_2). \\ D &= \frac{d}{dx_2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dziedzinami operatorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ są zbiory

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \boldsymbol{A} &= \Big\{ \boldsymbol{\alpha}\colon\ \boldsymbol{\alpha} \in C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty); \\ &\qquad \alpha_{12}(0) = \alpha_{22}(0) = \alpha_{12}(\infty) = \alpha_{22}(\infty) = \alpha_{11}(\infty) = 0 \Big\} \\ \operatorname{dom} \boldsymbol{B} &= \Big\{ \boldsymbol{\alpha}\colon\ \boldsymbol{\alpha} \in C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty) \times C^2[0,\infty) \Big\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Rozpatrywany przypadek anizotropowości półprzestrzeni zawiera **a)** izotropię prostą, **b)** izotropię poprzeczną oraz **c)** ogólną anizotropię [por [8]].
Ponieważ $\kappa_{ijkl}(x_2)$ są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$ więc funkcje $C_1(x_2)$, $C_2(x_2)$, $\ldots$, $C_6(x_2)$ też są ograniczonymi funkcjami klasy $C^2[0,\infty)$. Podobnie gęstość ośrodka $\varrho(x_2)$ jest także ograniczoną funkcją klasy $C^2[0,\infty)$.
Jeżeli

$$C_1 = \frac{1-\nu}{2\mu},\ C_2 = \frac{-\nu}{2\mu},\ C_3 = \frac{1-\nu}{2\mu},\ C_4 = 0,\ C_5 = 0,\ C_6 = \frac{1}{\mu},$$

oraz odpowiednio

$$C_1 = -B_1(x_2),\ C_2 = 0,\ C_3 = 2B_2(x_2),\ C_4 = -4f(x_2),\ C_5 = 0,\ C_6 = B(x_2)f(x_2)g(x_2)$$

to otrzymujemy odpowiednio izotropię prostą i transwersalną izotropię (por. [8]). Parametry: $B(x_2)$, $B_1(x_2)$, $B_2(x_2)$, $f(x_2)$, $g(x_2)$ są zdefiniowane przez T. Rożnowskiego w pracy [8].
Ponieważ macierz $B$ jest dodatnio określona więc dla każdego $x_2 \in \langle 0, +\infty)$ zachodzą związki

$$\begin{aligned} &C_1(x_2) := \kappa_{1111}(x_2) \geqslant \kappa_{1111}^{min} = d_1 > 0 \\ &C_1C_3 - C_2^2 := \kappa_{1111}(x_2)\kappa_{1212}(x_2) - \kappa_{1112}^2(x_2) \geqslant d_2 > 0 \\ &\det B(x_2) \geqslant d_3 > 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdzie $d_1$, $d_2$, $d_3$ są pewnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

## 4. Perturbacja widma dyskretnego w przypadku „małej” anizotropii

Łatwo sprawdzić, że w przestrzeni Hilberta z normą

$$||\alpha|| = \int_0^\infty \Big( |\alpha_{11}|^2 + |\alpha_{22}|^2 + |\alpha_{12}|^2 \Big) dx_2 < +\infty \tag{4.1}$$

operatory

$$A_0 := \begin{bmatrix} \dfrac{s^2}{\varrho_0} & \dfrac{s}{\varrho_0} D & 0 \\ -\dfrac{s}{\varrho_0} D & \dfrac{s^2}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho_0} D^2 & \dfrac{s}{\varrho_0} D \\ 0 & -\dfrac{s}{\varrho_0} D & -\dfrac{1}{\varrho_0} D^2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$B_0 := \begin{bmatrix} \kappa_{1111} & 2\kappa_{1112} & \kappa_{1122} \\ 2\kappa_{1112} & 4\kappa_{1212} & 2\kappa_{1222} \\ \kappa_{1122} & 2\kappa_{1222} & \kappa_{2222} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

(Elementy macierzy $B_0$: $\kappa_{1111}$, $\kappa_{1112}$, $\kappa_{1122}$, $\kappa_{1212}$, $\kappa_{1222}$, $\kappa_{2222}$ są const oraz spełniają warunki by macierz $B_0$ była dodatnio określona) są operatorami hermitowskimi.
Łatwo wykazać, że uogólniony problem własny

$$(A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha_0 = 0 \tag{4.4}$$

gdzie wektor amplitudy $\alpha_0 = [\alpha_{11}^0, \alpha_{22}^0, \alpha_{12}^0]^T$ spełnia warunki brzegowe

$$\begin{cases} \alpha_{12}^0(0) = \alpha_{22}^0(0) = 0 \\ \alpha_{11}^0(\infty) = \alpha_{12}^0(\infty) = \alpha_{22}^0(\infty), \end{cases} \tag{4.5}$$

ma niepuste widmo dyskretne.
Wartość własna $\lambda_0 = C_{OR}^2 \cdot s^2$ związana z prędkością $C_{OR}$ fali Rayleigha propagującej się w anizotropowym ośrodku ($s > 0$ – liczba falowa) generuje jednowymiarową podprzestrzeń własną postaci

$$\alpha_0 = c \begin{bmatrix} \alpha_{11}^0 \\ \alpha_{22}^0 \\ \alpha_{12}^0 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0 \tag{4.6}$$

Ponieważ wartość własna $\lambda_0$ jest prostą wartością własną, zatem równanie

$$(A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha = g \tag{4.7}$$

ma rozwiązanie dla dowolnego $g \perp \alpha_0$ spełniającego warunki zgodności dwuwymiarowej teorii sprężystości.
Niech problem własny

$$\left[A_0 - \lambda(B_0 + \varepsilon B_1)\right]\alpha_\varepsilon = 0 \tag{4.8}$$

ma wartość własną postaci:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots \tag{4.9}$$

oraz wektor własny postaci:

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \ldots \tag{4.10}$$

Są one funkcjami analitycznymi zmiennej $\varepsilon$ oraz są zbieżne dla dostatecznie małego parametru $\varepsilon$.

Operator $B_1$ występujący w (4.7) jest postaci

$$B_1 \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{1111}(x_2)^{(1)} & 2\kappa_{1112}(x_2)^{(1)} & \kappa_{1122}(x_2)^{(1)} \\ 2\kappa_{1112}(x_2)^{(1)} & 4\kappa_{1212}(x_2)^{(1)} & 2\kappa_{1222}(x_2)^{(1)} \\ \kappa_{1122}(x_2)^{(1)} & 2\kappa_{1222}(x_2)^{(1)} & \kappa_{2222}(x_2)^{(1)} \end{bmatrix}$$

jest hermitowskim operatorem dodatnio określonym.
Elementy macierzy $B_1$ są ograniczonymi funkcjami zmiennej $x_2$, klasy $C^2[0,\infty)$.
Podstawiając (4.9) i (4.10) do równania

$$A_0\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(B_0 + \varepsilon B_1)\alpha_\varepsilon \tag{4.11}$$

otrzymujemy układ

$$\begin{cases} (A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha_0 = 0 \\ (A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha_1 = [\lambda_0 B_1 + \lambda_1 B_0]\alpha_0 \\ (A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha_2 = \lambda_0 B_1\alpha_1 + \lambda_1[B_0\alpha_1 + B_1\alpha_0] + \lambda_2 B_0\alpha_0 \\ \dots \end{cases} \tag{4.12}$$

Jest oczywiste, że wektor $\alpha_\varepsilon$ w tych równaniach jest określony niejednoznacznie, a z dokładnością do czynnika, który może być dowolną funkcją zależną od $\varepsilon$. Ponieważ $\alpha_0 \neq 0$ więc mnożnik ten może być określony z warunku, że $||\alpha_\varepsilon|| = 1$ dla dostatecznie małych $\varepsilon$. A zatem

$$(\alpha_0, \alpha_\varepsilon) = 1, \tag{4.13}$$

skąd wynika, że iloczyny skalarne

$$(\alpha_0, \alpha_1) = (\alpha_0, \alpha_2) = \ldots = 0 \tag{4.14}$$

Mnożąc skalarnie pierwsze równanie (4.12) przez $\alpha_1$, drugie przez $\alpha_0$ i odejmując stronami otrzymujemy

$$\lambda_1 = -\lambda_0 \frac{(B_1\alpha_0, \alpha_0)}{(B_0\alpha_0, \alpha_0)} \tag{4.15}$$

Postępując podobnie otrzymamy

$$\lambda_2 = -\lambda_0 \frac{(B_1\alpha_0, \alpha_0)}{(B_0\alpha_0, \alpha_0)} - \lambda_1 \frac{\{(B_0\alpha_1, \alpha_0) + (B_1\alpha_0, \alpha_0)\}}{(B_0\alpha_0, \alpha_0)} \tag{4.16}$$

zaś

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [A_0 - \lambda_0 B_0]^{-1}\{\lambda_0 B_0\alpha_0 + \lambda_1 B_0\alpha_0\} \\ \alpha_2 &= [A_0 - \lambda_0 B_0]^{-1}\{\lambda_0 B_0\alpha_0 + \lambda_1[B_0\alpha_1 + B_1\alpha_0] + \lambda_2 B_0\alpha_0\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

W przypadku gdy

$$A_0 = A_0(s;\varrho_0) = \begin{bmatrix} \frac{s^2}{\varrho_0} & \frac{s}{\varrho_0}D & 0 \\ -\frac{s}{\varrho_0}D & \frac{s^2}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_0}D^2 & \frac{s}{\varrho_0}D \\ 0 & -\frac{s}{\varrho_0}D & -\frac{1}{\varrho_0}D^2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$B_0 = B_0(\mu_0,\nu_0) = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_0}{2\mu_0} & \frac{-\nu_0}{2\mu_0} & 0 \\ -\frac{\nu_0}{2\mu_0} & \frac{1-\nu_0}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_0} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Konstrukcja ciągu $\alpha_i$, $i = 0,1,2,\ldots$ sprowadza się do znalezienia pewnego operatora $(A_0 - \lambda_0 B_0)^{-1}$ określonego na podprzestrzeni $H$ ortogonalnej do wektora $\alpha_0$. Tutaj

$$\alpha_0 := \begin{bmatrix} \alpha_{11}^0 \\ \alpha_{21}^0 \\ \alpha_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} -\beta_0\left[e^{-x_2h_2} - \frac{-2+\omega_0(1-2\kappa_0)}{2-\omega)}e^{-x_2h_2}\right] \\ \beta_0\left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right] \\ -\frac{2}{s}\frac{\beta_0}{2-\Omega}h_1\left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right] \end{bmatrix} =$$

$$= \beta_0 \begin{bmatrix} -\left[e^{-x_2h_2} - \frac{-2+\omega_0(1-2\kappa_0)}{2-\omega)}e^{-x_2h_2}\right] \\ \left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right] \\ -\frac{2}{s}\frac{1}{2-\Omega}h_1\left[e^{-x_2h_2} - e^{-x_2h_1}\right] \end{bmatrix}, \quad \beta_0 \neq 0 \tag{4.20}$$

gdzie $\kappa_0 = \frac{1-2\nu_0}{2-\nu_0}$, $\beta_0 = const$, $h_1 = s\sqrt{1-\omega\kappa_0}$, $h_2 = s\sqrt{1-\omega}$, zaś $\omega$ spełnia równanie $(2-\omega)^2 = 4\sqrt{(1-\omega)(1-\omega\kappa_0)}$. Jest przy tym jedynym pierwiastkiem rzeczywistym.
Między prędkością fali $C_{OR}$, a $\mu_0$, $\varrho_0$, $\omega$ zachodzi relacja

$$C_{OR} = \mu_0^{1/2}\varrho_0^{-1/2}\omega^{1/2} \tag{4.21}$$

Aby wyznaczyć $(A_0 - \lambda_0 B_0)^{-1}$ rozpatrujemy równanie

$$(A_0 - \lambda_0 B_0)\alpha = g \tag{4.22}$$

gdzie $g = (g_{11}, g_{22}, g_{12})$ jest pewnym wektorem przestrzeni $H$ spełniającym związki

1. $(g,\alpha)=0$ oraz

2. warunek zgodności

$$-\ddot{g}_{11}+s^2 g_{22}-s\dot{g}_{12}=0$$

Wektor amplitudy $\alpha$ spełnia także warunek zgodności dwuwymiarowej teorii sprężystości. Można wykazać, że

$$\alpha(x_2)=\int\limits_0^\infty \begin{bmatrix} K_{11}(x_2,t) & K_{12}(x_2,t) & K_{13}(x_2,t) \\ K_{21}(x_2,t) & K_{22}(x_2,t) & K_{23}(x_2,t) \\ K_{31}(x_2,t) & K_{32}(x_2,t) & K_{33}(x_2,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(t) \\ g_{22}(t) \\ g_{12}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 g_{11}(x_2) \\ 0 \\ d_2\dot{g}_{11}(x_2)+d_2 g_{13}(x_2) \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

gdzie

$$K_{11}(x_2,t)=\begin{cases} \widetilde{a}_2\widetilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_2\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot \\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_4\widetilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot \\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_4\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_2+\widetilde{c}_1)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)} & \text{dla} \quad 0\leqslant t\leqslant x_2, \\ \dfrac{\widetilde{a}_2\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_2\widetilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+ \\ +\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}+ \\ +\dfrac{\widetilde{a}_4\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_4\widetilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)} & \text{dla} \quad x_2\leqslant t<+\infty \end{cases}$$

$$K_{12}(x_2,t)=\begin{cases} \widetilde{a}_3\widetilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_3\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot \\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_5\widetilde{b}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_5\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot \\ \cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla} \quad 0\leqslant t\leqslant x_2, \\ \dfrac{\widetilde{a}_3\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_3\widetilde{b}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+ \\ +\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_5\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+ \\ +\dfrac{\widetilde{a}_5\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla} \quad x_2\leqslant t<+\alpha \end{cases}$$

$$
K_{13}(x_2,t)=\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}-\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\
\cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}-\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\
\cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}\quad \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\
-\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}-\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\
+\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\\
\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}\quad \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty
\end{array}\right.
$$

$$
K_{21}(x_2,t)=\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{a}_2e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\
\cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_4e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_4(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\
\cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2}\quad \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\
\dfrac{\widetilde{a}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_2e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\
+\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_4(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\\
\widetilde{a}_4e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}\quad \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty
\end{array}\right.
$$

$$
K_{22}(x_2,t)=\left\{\begin{array}{l}
\widetilde{a}_3e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_3(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\
\cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_5e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_5(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\
\cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}\quad \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\
\dfrac{\widetilde{a}_3(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_3e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\
+\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_5(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\\
\widetilde{a}_5e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)}\quad \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty
\end{array}\right.
$$

$$K_{23}(x_2,t)=\begin{cases}\widetilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}-\dfrac{\widetilde{a}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}-\widetilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\ \cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\ -\dfrac{\widetilde{a}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}-\widetilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\ +\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\\ \widetilde{a}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

$$K_{31}(x_2,t)=\begin{cases}\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)\widetilde{c}_1}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_4\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_4\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\ \cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\ \dfrac{\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}-\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\ +\dfrac{2\widetilde{a}_4\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_4\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\\ \widetilde{a}_4\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_2\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

$$K_{32}(x_2,t)=\begin{cases}\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_3(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\widetilde{a}_5\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_5\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\ \cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\ \dfrac{\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}-\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\ +\dfrac{2\widetilde{a}_5\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_5\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\\ \widetilde{a}_5\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}+\dfrac{2\widetilde{a}_3\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

$$K_{33}(x_2,t)=\begin{cases}\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2-t)}-\dfrac{\widetilde{a}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}\cdot\\ \cdot e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}-\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2-t)}+\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}\cdot\\ \cdot e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad 0\leqslant t\leqslant x_2,\\ -\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(x_2+t)}+\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1 e^{-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}(t-x_2)}+\\ +\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1-\widetilde{c}_2}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1}t+\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}x_2)}+\dfrac{\widetilde{a}_1\widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1+\widetilde{c}_2)}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(x_2+t)}-\\ \widetilde{a}_1\widetilde{c}_2 e^{-s\sqrt{1-\omega_1}(t-x_2)}-\dfrac{2\widetilde{a}_1\widetilde{c}_1\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_2-\widetilde{c}_1}e^{-s(\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}t+\sqrt{1-\omega_1}x_2)} & \text{dla}\quad x_2\leqslant t<+\infty\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_1 &= -\frac{\varrho_1(2-\omega_1)}{2\omega_1^2(1-\kappa_1)(1-\nu_1)s},\\
\tilde{a}_2 &= \frac{1}{2s^3\omega_1(1-\kappa_1)\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}}\Big[\frac{-s^2(1-\omega_1)\varrho_1(2-\omega_1)}{\omega_1(1-\nu_1)}+\\
&- \frac{s^2\varrho_1(1-\omega_1)[\omega_1(1-\nu_1)-2])}{\omega_1(1-\nu_1)}+s^2(1-\omega_1\kappa_1)\Big(\frac{\varrho_1(2-\omega_1)}{\omega_1(1-\nu_1)}+\varrho_1\Big)\Big],\\
\tilde{a}_3 &= \frac{1}{2s^3\omega_1(1-\kappa_1)\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}}\Big[-\varrho_1 s^2(1-\omega_1\kappa_1)+\frac{s^2\varrho_1(1-\omega_1)[\omega_1(1-\nu_1)-2]}{\omega_1(1-\nu_1)}\Big],\\
\tilde{a}_4 &= \frac{-1}{2s^3\omega_1(1-\kappa_1)\sqrt{1-\omega_1}}\Big[\frac{-s^2(1-\omega_1)\varrho_1(2-\omega_1)}{\omega_1(1-\nu_1)}+\\
&+ s^2(1-\omega_1)\Big(\frac{\varrho_1(2-\omega_1)}{\omega_1(1-\nu_1)}+\varrho_1\Big)-\frac{s^2\varrho_1(1-\omega_1)[\omega_1(1-\nu_1)-2]}{\omega_1(1-\nu_1)}\Big],\\
\tilde{a}_5 &= \frac{-1}{2s^2\omega_1(1-\kappa_1)\sqrt{1-\omega_1}}\Big[-\varrho_1 s^2(1-\omega_1)+\frac{s^2\varrho_1(1-\omega_1)[\omega_1(1-\nu_1)-2]}{\omega_1(1-\nu_1)}\Big],\\
\tilde{b}_1 &= \frac{2(1-\omega_1\kappa_1)}{\omega_1-2}+\frac{\omega_1}{\omega_1-2},\\
\tilde{b}_2 &= \frac{2(1-\omega_1)}{\omega_1-2}+\frac{\omega_1}{\omega_1-2},\\
\tilde{c}_1 &= \Big[(-s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1})^3\Big(-\frac{\omega_1(1-\nu_1)}{s^3(\omega_1-1)(\omega_1-2)}\Big)+\\
&- s\sqrt{1-\omega_1\kappa_1}\Big(\frac{\omega_1\nu_1-2}{2s(\omega_1-1)}-\frac{\omega_1^2(1-\nu_1)}{2s(\omega_1-1)(\omega_1-2)}\Big)\Big]\\
\tilde{c}_2 &= \Big[(-s\sqrt{1-\omega_1})^3\Big(-\frac{\omega_1(1-\nu_1)}{s^3(\omega_1-1)(\omega_1-2)}\Big)+\\
&+ s\sqrt{1-\omega_1}\Big(\frac{2-\omega_1\nu_1}{2s(\omega_1-1)}+\frac{\omega_1^2(1-\nu_1)}{2s(\omega_1-1)(\omega_1-2)}\Big)\Big]\\
d_1 &= \frac{2\varrho_1(2\omega_1\nu_1-\omega_1-2)}{s^2\omega_1(\omega_1-2)(1-\nu_1)},\\
d_2 &= \frac{2\varrho_1(2-\omega_1\nu_1)}{s^3(\omega_1-1)(\omega_1-2)},\\
d_3 &= \frac{2\varrho_1}{s^2(\omega_1-1)}.
\end{aligned}
$$

## Literatura

[1] T. Klecha, Surface stress waves in a nonhomogeneous elastic half-space, Part I. General results based on spectral analysis. Existence and analyticity theorems. Arch. Mech., **48**, 3, 493 - 512, 1996.

[2] J. Ignaczak, Zagadnienia zupełności dla naprężeniowych równań ruchu w liniowej teorii sprężystości, Rozprawa habilitacyjna, Biblioteka IPPT PAN, W-wa 1963.

[3] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag – Berlin, Heidelbergn New York, 1966.

[4] T. Klecha, Propagation of surface waves in a nonhomogeneous anisotropic elastic semi space, Bull. Pol Ac. Sci tech. **46**, 2, 163-176, 1998.

[5] T. Klecha, Existence and uniqueness of the solution to the problem of surface wav propagation in nonhomogeneous isotropic elastic half-space, Bull. Pol Ac. Sci tech. **47** 3, 221-225, 1999.

[6] T. Klecha, Surface stress waves in a nonhomogeneous elastic half-space, Part II Existence of surface waves for an arbitrary variation of Poisson's ratio. Approximat solution based on perturbation methods. Arch. Mech. **48**, 3, 513-539, 1996.

[7] Kurt O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilbert Space, American Mathematica Society, Providence, Rhode Irland, 1965.

[8] T. Rożnowski, Naprężeniowe fale powierzchniowe w półprzestrzeni sprężystej transwer salnie izotropowej niejednorodnej, Prace IPPT PAN, 1990 (rozprawa habilitacyjna).

[9] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, Elastodynamics, Vol II, Academic Press, NY 1975.

[10] M. E. Gurtin, The Linear Theory of Elasticity in Encyclopedia of Physics, Vol VI a/ Springer Verlag, 1972.