A. J. Turski, B. Atamaniuk i E. Turska

ELEMENTY RACHUNKU FRAKCJALNEGO, CAŁKO-POCHODNE DOWOLNEGO RZĘDU

Zeszyt 1

2/2004

WARSZAWA 2004

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 kwietnia 2004 r.
Praca recenzowana

IPPT PAN

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 120 egz. Ark. wyd. 1,85 Ark. druk. 2,5
Oddano do drukarni w maju 2004 r.

ATOS - Poligrafia-Reklama, W-wa, ul. Jana Kazimierza 35/37

PRZEDMOWA

Pierwszy Zeszyt z serii *Elementy Rachunku Frakcjalnego* wprowadza tematykę całko-pochodnych dowolnego rzędu. Tematyka ta jest całkowicie nieobecna w polskojęzycznej literaturze. Polska nomenklatura jest nieznana.

Raptownie rosnące zainteresowanie tym przedmiotem wynika z możliwości zastosowań, na przykład w zakresie procesów stochastycznych, zjawisk falowych, dyfuzyjnych i konwekcji oraz ważnych zmian pojęciowych, na przykład ciągłego przejścia od równania falowego przez równanie dyfuzyjne (przewodnictwa) do równania statycznego (Laplace'a) zmieniając, w sposób ciągły, rząd pochodnej czasowej od 2 (równanie falowe) do zera (równanie Laplace'a).

Długość przekątnej kwadratu nie daje się wyrazić przy pomocy liczb wymiernych a długość obwodu koła jest liczbą przestępną. Czy wszystkie zjawiska i procesy w przyrodzie i Wszechświecie są adekwatnie opisywane przy pomocy równań o pochodnych i całkach rzędu całkowitego? Znamy wiele przykładów świadczących, że tak nie jest! Otwiera się nowa możliwość- należy z niej skorzystać.

Koncepcja zera została odkryta na Wschodzie-w Arabii-kilkaset lat przed narodzeniem Chrystusa. Na pełne konsekwencje tego odkrycia czekaliśmy do odkrycia teorii liczb rzeczywistych i analizy funkcjonalnej. Ch. Seife, *ZERO - The Biography of dangerous Idea.*

Rachunek frakcjalny to historyczna nazwa wywodząca się od czasów Leibniza i D'Hospitala. Odkrywamy na nowo 19-wieczne definicje takich kreatorów analizy matematycznej jak Riemanna, Liouville, Euler, Mittag-Leffler, Grünwald, Letnikow i inni.

Postawiliśmy sobie trudne i ambitne zadanie. Ten Zeszyt ma w możliwie przystępny i interesujący sposób zaznajomić i wprowadzić czytelnika do *ogrodu całko-pochodnych.* Jednocześnie staraliśmy się by ten *ogród ukwiecony matematycznym myśleniem* nie był banalny.

Wybrano oryginalny i prosty sposób zapoznania czytelnika z tematem. Przejście od pochodnych rzędu całkowitego n i n- krotnie iterowanych całek do α -krotnie iterowanych (rzędu-α) całko-pochodnych, gdzie α jest liczbą rzeczywistą, wprowadza się analogicznie do przejścia od dwumianu Newtona $(1+x)^n$ do szeregu Taylora dla $(1+x)^\alpha$. Korzysta się z własności funkcji gamma Eulera. Ten sposób pozwala wyprowadzić i wyliczyć wszystkie wzory i definicje rachunku frakcjalnego w tym Zeszycie.

Andrzej J. Turski, Barbara Atamaniuk i Ewa Turska
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych- IPPT.

ELEMENTY RACHUNKU FRAKCJALNEGO, CAŁKO-POCHODNE DOWOLNEGO RZĘDU
Zeszyt 1
Dwumian Newtona, całko-pochodne funkcji elementarnych, klasyczne definicje

STRESZCZENIE

Przedstawimy elementy teorii i zastosowań pochodnych rzędu niecałkowitego i całek niecałkowitej krotności. Mamy do czynienia z operacją liniową, która w szczególności jest równoważna operacji różniczkowania i całkowania. Dla funkcji wielu zmiennych takie operacje nazywane są pseudoróżniczkowymi. Praca została podzielona na kilka części. W części pierwszej (Zeszyt 1) omówimy myśl prowadzącą do unifikacji pojęcia pochodnej rzędu całkowitego- n i całki n-krotnej. W klasycznej analizie pojęcia te są prezentowane oddzielnie. Przedstawimy przykład oparty na dwumianie Newtona całkowitego dodatniego stopnia i przejście do ujemnego i dodatniego, ale niecałkowitego stopnia. Wielomian o skończonej liczbie wyrazów przechodzi w szereg nieskończony, np. $(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}x^{k}$, $|x|<1$. Przy tych uogólnieniach ważną rolę pełnią funkcje Gamma Eulera. Podobnie przedstawimy pochodną rzędu całkowitego- n dostatecznie gładkiej funkcji $f(x)$ przy pomocy granicy ilorazu różnicowego zawierającego $n+1$ wyrazów. Następnie uogólnimy to wyrażenie, stosując funkcje gamma, na ujemny całkowity stopień- $-n$ prowadząc do nielokalnego pojęcia n- krotnie iterowanej całki i wreszcie otrzymamy wzór Grünwalda-Letnikowa definiujący całko-pochodną dowolnego rzędu. W dalszym ciągu tego Zeszytu przedstawimy proste przykłady całko-pochodnych funkcji potęgowych, wykładniczych i trygonometrycznych. Wyprowadzimy ogólną definicje całki i pochodnej rzędu niecałkowitego odniesionych do przedziału. Definicje te powstały w 19-ym wieku i oparte są na wzorze Cauchy'ego typu splotu dla całki wielokrotnie iterowanej- noszą one nazwę wzorów Riemanna-Liouville'a. Zwrócimy uwagę na równoważność i warunki równoważności definicji Grünwalda-Letnikowa i Riemanna-Lioville'a. Definicje te są również obecnie stosowane i mają fundamentalne znaczenie. Ten Zeszyt zostanie zakończony przykładami, odpowiedziami na pytania zadane w tekście, zadaniami, tablicą całko-pochodnych i obszernym wykazem literatury.

1. WSTĘP

Rachunek różniczkowo-całkowy jest gigantycznym osiągnięciem naszej cywilizacji. Można się spierać czy każda wysoko rozwinięta cywilizacja w końcu odkryje ten rachunek czy też dalszy rozwój tej cywilizacji jest uwarunkowany tym odkryciem? Można zastanawiać się czy cywilizacje starsze od naszej, które nie odkryły rachunku różniczkowo-całkowego nie rozwinęły się dalej właśnie z tego powodu? Jest jednak niewątpliwym, że bez tego odkrycia nie powstałyby takie działy matematyki jak równania różniczkowe i całkowe, geometria różniczkowa, analiza funkcjonalna, probabilistyka, teoria informacji i stochastyka. Bez tych odkryć nie byłoby takich działów nauki jak teoria i zastosowania elektromagnetyzmu, mechanika, biofizyka, biochemia, teoria kwantów, teorie relatywistyczne i kosmologia. Czy powstałyby takie działy techniki i technologii jak elektronika, techniki informatyczne oparte na komputerach, komunikacja, tele- i radio-komunikacja, budownictwo i nowoczesne materiały? Trudno znaleźć dziedziny współczesnej działalności ludzi, które nie były w pośredni a nawet bezpośredni sposób związane z tymi odkryciami.

Pojęcie pochodnej funkcji jednej zmiennej $f(x)$ i $g(x)$ jest ogólnie znane. Zwykła notacja pochodnych w postaci $\frac{df(x)}{dx}$ lub $D^1 f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ lub $D^2 f(x)$ jest powszechnie przyjęta i pochodzi od G. W. Leibniza. Również znane są podstawowe własności rachunku różniczkowego

$D(af(x)+bg(x)) = aDf(x)+bDg(x)$, gdzie a, b - stałe,

$D^n(D^m f(x)) = D^{n+m} f(x)$, gdzie m, n -liczby naturalne,

$D^n[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^k f(x) D^{n-k} g(x)$, wzory Leibniza a $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}$.

Lecz jaki sens miałby zapis $\frac{d^{1/2} f(x)}{dx^{1/2}}$ lub $D^{1/2} f(x)$? Większość polskich czytelników nie spotkało się z pochodną „rzędu ½", ponieważ prawie żaden polski podręcznik analizy matematycznej tego nie wspomina! W ogólnie dostępnych polskich bibliotekach istnieją tylko pojedyncze egzemplarze bardzo nielicznych książek z tego zakresu w języku angielskim i rosyjskim. Jednak to pojęcie było dyskutowane już w 17-tym wieku przez Leibniza, jednego obok Newtona twórcy rachunku całkowo-różniczkowego. Byli i inni znakomici matematycy, którzy zajmowali się tym przedmiotem. W 1695 L'Hospital w liście do Leibniza zapytuje, jakie znaczenie miałoby wyrażenie d^n/dx^n w przypadku $n = 1/2$? Tak powstała nazwa „Calculus Fractionale". Leibniz w odpowiedzi i w korespondencji z innym matematykiem (stosował zapis $d^{1/2}y$) J. Wallisem przewidywał, że kiedyś w przyszłości wynikną z tego „pożyteczne konsekwencje". Wymienimy tu jeszcze Bernoullich (bracia), Eulera, Laplace'a, Riemanna, Fouriera, Liouville'a i

Heaviside'a. Również polski matematyk Antoni Zygmud jest często cytowanym autorem prac z tego zakresu. Dzisiaj istnieje obszerna literatura na temat przedmiotu zwanego „rachunkiem frakcjalnym" (*Fractional Calculus*). Kilka monografii i podręczników poświęcono temu przedmiotowi, patrz [1] do [9]. Aczkolwiek nazwa „rachunek frakcjalny" jest myląca to jednak nazwa ta utrzymuje się od czasów Leibniza-D'Hospitala.

Obecnie rachunek frakcjalny (nie mylić z *„fraktalnym"*) przeżywa renesans szczególnie intensywny od 1974, tj. od pierwszej międzynarodowej konferencji na ten temat. Uczestniczyło w tej konferencji 94 matematyków i wydano 26 prac konferencyjnych, [10]. Następna konferencja odbyła się w Glasgow, Szkocja w 1984. Prace z tej konferencji wydano w 1985, [11]. W 1989 została zorganizowana kolejna konferencja przez K. Nishimoto w Tokio w Japonii, [12]. Trzecia z kolei konferencja pod kierownictwem prof. V. Kiryakowej odbyła się w Warnie, w Bułgarii, 1996. Istnieją dwa regularnie ukazujące się czasopisma naukowe poświęcone rachunkowi frakcjalnemu, [13], [14]. Przegląd historyczny rozwoju rachunku frakcjalnego można znaleźć w [2], [8], [9] i [10].

Zastosowania analizy opartej o pochodne frakcjalne rozwinęły się niezwykle szeroko. Obejmują one konwekcje, dyfuzje i fale w ośrodkach fraktalnych, tj. takich, których struktura ma charakter, *fraktali skalowanych* [9], (porowatość, granulacje, łańcuchy ziaren). Zainteresowanego czytelnika w aktualnej tematyce odsyłamy do Internetu. Wpisując odpowiednie hasło w przeglądarce, np. *„fractional calculus"*, lub *„fractional derivative"* można otrzymać setki pozycji. Sądzimy jednak, że zastosowania, chociaż ważne są skutkiem ważniejszej zmiany pojęciowej. Może ona owocować zupełnie nowymi działami matematyki stosowanej i nowymi metodami opisującymi zjawiska i procesy, np. rząd całko-pochodnej jest zmienną, która może podlegać całko -różniczkowaniu.

Celem naszej pracy jest wprowadzenie elementów rachunku frakcjalnego w sposób możliwie naturalny. Nie będziemy stosować schematu „definicja- lemat-twierdzenie-dowód" jak to zwykle przyjęto, ale będziemy wprowadzać pojęcie frakcjonału (całko-pochodnej) wskazując przykłady znanych pochodnych, np. $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, następnie zastępując liczbę naturalną-n przez dowolną liczbę, np. 1/2. W ten sposób, podobnie jak detektyw, będziemy odkrywać matematyczną strukturę, jaka może być ukryta w nowych pojęciach rachunku frakcjalnego. Unikając formalnych definicji będziemy eksponować możliwości różnych podejść do objaśnianego pojęcia. W końcu przytoczona formalna definicja stanie się bardziej naturalna.

Ponieważ nie jest znane polskie nazewnictwo w tym zakresie wprowadzimy następujące nazwy na potrzeby tego i dalszych Zeszytów. Całko-pochodna (lub też C-pochodna) ${}_aD_x^{\alpha}f(x)$ (lub też frakcjonał) funkcji $f(x)$ rzędu α na przedziale (a,x), gdzie $\alpha \in \mathrm{R}$ dowolna liczba, a-dolna a x górna granica całko-pochodnej. Jeżeli liczba α określająca rząd będzie ujemna ($\alpha < 0$) to całko-pochodną będziemy nazywać całką krotności ułamkowej (niecałkowitej) lub całkowitej (zwykła całka określona). Jeżeli liczba α określająca rząd będzie dodatnia ($\alpha > 0$) to całko-pochodną będziemy nazywać pochodną rzędu ułamkowego (niecałkowitego) lub całkowitego (zwykła pochodna). W przypadkach niebudzących wątpliwości nazwy te będziemy skracać. Pozostaje jeszcze jedna kwestia terminologiczna, która dotyczy przedziału całkowania (a,x). Występują dwa przypadki a mianowicie, gdy $a < x$ i $a > x$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą (również $\pm\infty$) i stanowi dolną lub górną granicę całkowania. Pierwszy przypadek będzie zwany lewostronną całko-pochodną i tym przypadkiem zajmujemy się w tym Zeszycie. Natomiast drugi przypadek dotyczy prawostronnej całko-pochodnej i zajmować się nim będziemy w następnych Zeszytach. W trakcie pisania tekstu będziemy zadawać pytania i prosić o przemyślenia, a odpowiedzi na zadane pytania zamieścimy na końcu tego Zeszytu.

2. DWUMIAN DOWOLNEGO STOPNIA

Dwumian Newtona zwykle zapisuje się w postaci $(a+b)^n$, gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą i dodatnią). Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $|a| > |b|$ i wtedy $(a+b)^n = a^n(1+x)^n$, gdzie $x = b/a$. Jak wiemy, obowiązuje następujący wzór;

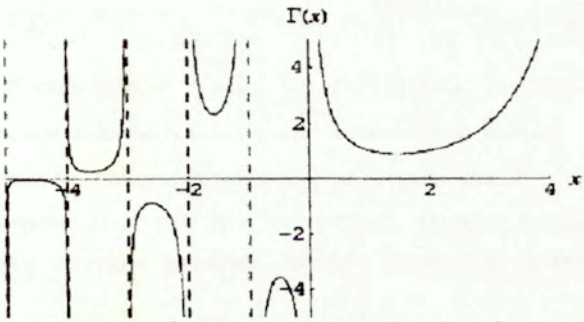
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}x^p + \ldots + x_n$$
$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p \tag{2.1}$$

gdzie, współczynnik Newtona $C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$, mnożąc licznik i mianownik przez $(n-p)!$, otrzymujemy $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Dokonamy teraz ważnej zamiany liczby naturalnej n na dowolną liczbę α wprowadzając funkcję gamma w miejsce silni. Funkcja gamma nadaje ogólniejsze znaczenia $n!$. Funkcja gamma (zupełna) została wprowadzona przez Eulera w 18-tym wieku. Całka niewłaściwa określająca tę funkcje dla $\mathrm{Re}\,z > 0$ ma postać;

$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$. Funkcja gamma określana jest również przez granicę

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \quad (z \neq 0, -1, -2, \ldots)$$



Rys. 1. Zupełna funkcja gamma $\Gamma(x)$ dla zmiennej rzeczywistej x.

Funkcja $\Gamma(z)$ jest funkcją meromorficzną i ma jednokrotne bieguny w z=0, -1, -2, -3,... o residuach w punktach $z = -k$, wynoszących $\mathrm{Re}\,z = \frac{(-1)^k}{k!}$ oraz jej odwrotność wynosi

$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})^{-z/k}$, gdzie $\gamma = 0.57721...$ jest stałą Eulera a $1/\Gamma(z)$ jest funkcją całkowitą (analityczna na całej płaszczyźnie z). Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z nie ma punktów, dla których $\Gamma(z) = 0$. Obowiązują następujące wzory

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+1) = (-1)^n\Gamma(z)\Gamma(1-z) \tag{2.2}$$

dla n całkowitych. Dalsze wzory dla funkcji gamma, które warto tu wymienić to uogólniony współczynnik Newtona

$$C_{-z}^{\zeta} = \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(\zeta+1)\Gamma(1-z-\zeta)}, \tag{2.3}$$

gdzie z i ζ to dowolne liczby zespolone. Formuła podwajania z

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) \tag{2.4}$$

i wreszcie tzw. formuła refleksyjna

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Na uwagę zasługują dwa następujące wzory asymptotyczne

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to\infty}{\to} x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x} \text{ oraz } x^{b-a}\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = 1 + O(x^{-1}) \tag{2.5}$$

Obok funkcji elementarnych funkcja $\Gamma(z)$ jest jedną z najważniejszych w analizie frakcjalnej. Jest ona uogólnieniem funkcji $n!$ na dowolne wartości zmiennej zespolonej z w taki sposób, że jednocześnie uogólnia wyrażenia matematyczne zawierające te funkcje. Przepiszemy, więc wzór (2.1), zastępując silnie funkcjami gamma. Otrzymamy wzór na ułamkowe i ujemne potęgi dwumianu

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\alpha-p+1)}x^p \tag{2.6}$$

Okazuje się, że wyrażenie to ma sens nie tylko dla n naturalnego, ale i dla dowolnej liczby α (nawet zespolonej). W przypadku liczb rzeczywistych różnych od naturalnych mamy rozwinięcie w nieskończony szereg zbieżny dla $|x| < 1$ i można na tej podstawie wyznaczyć szeregi potęgowe, np. dla $(1+x)^{-1}$,

$(1+x)^{-1/2}$. Warto odnotować, że dla dodatnich α szeregi te są zbieżne, gdy $|x| \leq 1$ i wtedy suma współczynników $\sum_{p=0}^{\infty} C_\alpha^p = 2^\alpha$, podobnie jak w przypadku n równego liczbie naturalnej, gdy liczba wyrazów jest skończona. Wreszcie odnotujemy przejście od dyskretnych stopni dwumianu $n \in N$ i dyskretnych współczynników C_p^n do dowolnych stopni dwumianu- $\alpha \in R$, zadanych w sposób ciągły jak funkcja $f(x,\alpha)$ i szeregu potęgowego, którego współczynniki C_α^p zależą w sposób ciągły od α. W następnych rozdziałach będziemy podobnie konstruować frakcjonały, które będą w sposób ciągły zależeć od rzędu α.

PYTANIA;

P 2.1. Sprawdzić, korzystając z własności funkcji gamma, czy uogólnione współczynniki Newtona $C_\alpha^p = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(\alpha-p+1)}$ są jednocześnie współczynnikami szeregu Taylora funkcji $(1+x)^\alpha$?

P 2.2. Jaka własność matematyczna funkcji jest odpowiedzialna za pozytywny wynik z punktu P 2.1 ?

P 2.3. Sprawdzić czy $C_n^p = C_n^{n-p}$ oraz $C_\alpha^p = C_\alpha^{\alpha-p}$, gdy n jest liczbą naturalną oraz α liczbą dowolną?

3. UNIFIKACJA CAŁKI i POCHODNEJ RZĘDU CAŁKOWITEGO

Przedstawimy sposób unifikacji dwóch pojęć zwykle prezentowanych oddzielnie. W klasycznej analizie pochodne rzędu całkowitego-n i całki n-krotnie iterowane to pojęcia bliższe niż powszechnie przyjmuje się.

Rozpatrzymy na początek gładką funkcję $y = f(x)$, rozwijalną w szereg Taylora. Zgodnie z klasyczną definicją pochodnej, tj. granicą ilorazu różnicowego, mamy

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

W wyniku dalszego różniczkowania, otrzymuje się

$$f''(x) = D^2 f = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2},$$

$$f'''(x) = D^3 f = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}$$

i n-ta pochodna przyjmuje postać

$$f^{(n)}(x) = D^n f = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p f(x-ph), \tag{3.1}$$

gdzie współczynnik dwumianu Newtona C_n^p dany jest wzorem (2.1). Odnotujmy podobieństwo licznika ilorazu różnicowego do dwumianu Newtona.

Wprowadzamy następujące oznaczenie

$$f_h^{(n)}(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p f(x-ph) \tag{3.2}$$

gdzie n i p są liczbami naturalnymi. Oczywiście dla każdego $n \in N$, mamy

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = D^n f(x).$$

Wyrażenie (3.2), składa się z $n+1$ wyrazów.

Jeżeli zamienimy n na $-n$, wtedy

$$(-1)^p C_{-n}^p = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)}{p!} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ostatniego wyrażenia przez $(n-1)!$ otrzymuje się

$$(-1)^p C_{-n}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)}.$$

Tak jak w Rozdz. 2, mamy nieskończony ciąg współczynników C_{-n}^p, gdzie $n = 0, 1, 2, 3\ldots$. Współczynniki te są analogiczne do współczynników szeregu Taylora funkcji $(1+x)^{-n}$, gdzie n jest liczbą naturalną. Przyjmując, $h = \frac{x-a}{m}$ dla $x > a$ i $m \in N$ zmierzające do nieskończoności wykażemy, że (3.2) dla wartości $-n$ zmierza do n-krotnie iterowanej całki Riemanna na przedziale (a, x). Zapiszemy to w następującej postaci

$${}_aD_x^{-n} f(x) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ mh = x-a}} f_h^{(-n)}(x) = \lim_{m\to\infty} h^n \sum_{p=0}^{m} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p+1)} f(x-ph) \tag{3.3}$$

Rozważymy kilka szczególnych przypadków. Dla $n = 1$, mamy

$$f_h^{(-1)}(x) = h\sum_{p=0}^{m} f(x-ph),$$

gdzie współczynniki dwumianu i zarazem współczynniki szeregu Taylora są jak dla funkcji $(1-x)^{-1}$;

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p + \ldots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1)\Gamma(p+1)} x^p.$$

Ponieważ $x-a = mh$ oraz zgodnie z definicją całki Riemanna, mamy

$$_aD_x^{-1} f = \lim_{h\to 0} f_h^{(-1)}(x) = \int_0^{x-a} f(x-t)dt = \int_a^x f(t)dt \tag{3.4}$$

Odnotujemy, że h, w przyjętym zapisie, przechodzi w symbol dx, podczas gdy ph przechodzi w zmienną całkowania t, a granica sumy w oznaczoną całkę Riemanna.

Dla $n=2$, mamy

$$f_h^{(-2)}(x) = h^2 \sum_{p=0}^{m} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)\Gamma(p+1)} f(x-ph) = h\sum_{p=1}^{m} phf(x-ph).$$

Granica tego wyrażenia dla $m\to\infty$, $h := dt$ i $ph := t$ wynosi

$$_aD_x^{-2} f(x) = \int_0^{x-a} tf(x-t)dt = \int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} f(t)dt. \tag{3.5}$$

Przypadek n=3 prowadzi do 3- krotnie iterowanej całki, ponieważ

$$\frac{\Gamma(3+p)}{\Gamma(3)\Gamma(p+1)} = \frac{(p+1)(p+2)}{2!}$$

i wtedy

$$f_h^{(-3)}(x) = \frac{h}{2}\sum_{p=0}^{m} (p+2)(p+1)h^2 f(x-ph)$$

Oznaczając $y = x+h$, rozpoczynamy sumowanie od $p=1$ i wtedy mamy

$$f_h^{(-3)}(x) = \frac{h}{2}\sum_{p=1}^{m} p(p+1)h^2 f(y-ph) = \frac{h}{2}\sum_{p=1}^{m} (ph)^2 f(y-ph) + \frac{h^2}{2}\sum_{p=1}^{m} (ph) f(y-ph).$$

Przechodząc do granicy pomijamy drugi człon prawej strony jako nieskończenie małą drugiego rzędu (h^2) i otrzymujemy

$$ {}_aD_x^{-3}f(x)=\frac{1}{2!}\int_0^{x-a}y^2f(x-y)dy=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-t)^2f(t)dt=\int_a^x dx_1\int_a^{x_1}dx_2\int_a^{x_2}f(x_3)dx_3 \tag{3.6} $$

Dla dowolnego n mamy

$$ \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p+1)}=\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{(n-1)!} $$

i wtedy

$$ f_h^{(-n)}=\frac{h}{(n-1)!}\sum_{p=0}^{m}(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)h^{n-1}f(y-ph)= $$

$$ =\frac{h}{(n-1)!}\sum_{p=1}^{m}p(p+1)(p+2)\dots(p+n-2)h^{n-1}f(y-ph), $$

gdzie $y=x+h$ i sumowanie rozpoczyna się od $p=1$. Współczynnik ostatniej sumy jest zwany symbolem Pachhamera

$$ (a)_{n-1}=p(p+1)(p+2)\dots(p+n-2)=\frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(p)} $$

i wynosi zgodnie z wzorem (2.5)

$$ (a)_{n-1}=\frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(p)}=p^{n-1}(1+O(p^{-1})). $$

Możemy, więc napisać,

$$ \begin{aligned} f_h^{(-n)}&=\frac{h}{(n-1)!}\sum_{p=1}^{m}(ph)^{n-1}f(y-ph)+B_1\frac{h^2}{(n-1)!}\sum_{p=1}^{m}(ph)^{n-2}f(y-ph)+\dots+\\ &+B_k\frac{h^{k+1}}{(n-1)!}\sum_{p=1}^{m}(ph)^{n-k-1}f(y-ph)+\dots \end{aligned} \tag{3.7} $$

gdzie B_k są odpowiednimi współczynnikami liczbowymi. Przechodząc do granicy i pomijając nieskończenie małe wyrazy wyższych rzędów $(h)^2,(h)^3,\dots$, otrzymujemy

$$ \begin{aligned} {}_aD_y^{-n}f(y)&=\lim_{h\to0}f_h^{(-n)}=\lim_{\substack{h\to0\\ m\to\infty}}\frac{h}{(n-1)!}\sum_{p=1}^{m}(ph)^{n-1}f(y-ph)=\\ &=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^y(y-t)^{n-1}f(t)dt \end{aligned} \tag{3.8} $$

Na podstawie wzoru Cauchy'ego dla całki n - krotnie iterowanej, mamy

$$ {}_aD_y^{-n} f(y) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^y (y-t)^{n-1} f(t)dt = \int_a^y\int_a^{x_1}\dots\int_a^{x_n} f(x_n)dx_n dx_{n-1}\dots dx_1 \;. \tag{3.9} $$

W monografiach [2], [3], [4] i [8] wzór ten dowodzi się metodą indukcji matematycznej, Dowód ten można przeprowadzić korzystając z rachunków tu przeprowadzonych. Wzór

$$ {}_aD_x^n f(x) = \lim_{h\to 0,\; m=(x-a)/h} \frac{h^{-n}}{\Gamma(-n)}\sum_{p=0}^{m}\frac{\Gamma(p-n)}{\Gamma(p+1)} f(x-ph), \tag{3.10} $$

unifikuje definicję całki i pochodnej. Nazywamy go całko-pochodną (differ-integral) rzędu całkowitego. Należy odnotować, że w przypadku liczby naturalnej n, szereg (3.10), jest sumą skończoną o liczbie wyrazów $(n+1)$. Wynika to z zerowania się ilorazu $\dfrac{\Gamma(p-n)}{\Gamma(p+1)\Gamma(-n)} = 0$, dla $p = n+1, n+2, \dots$, natomiast dla $n = \alpha \neq 1,2,3,\dots$, iloraz ten jest różny od zera dla $p = 0,1,2,3,\dots$.

Iloraz różnicowy (3.10), dla n naturalnego przyjmuje klasyczną postać, ponieważ sumowanie odbywa się w otoczeniu zmiennej x, czyli jest operacją lokalną. W przypadku całkowitego i ujemnego $-n$, h pojawia się w liczniku i jest mnożone przez $f(x-ph)$ dając całkę określoną na przedziale (a,x) wzorem (3.9). W 19-tym wieku matematyk niemiecki A.K. Grünwald [16] a potem matematyk rosyjski A.V. Letnikow [17] uogólnili wzór (3.10) na przypadek liczby rzeczywistej α i wzór ten stał się definicją frakcjonału (całko-pochodnej). W następnym rozdziale wykażemy, że również przypadek α niecałkowitego dodatniego i ujemnego jest operacją nielokalną.

PYTANIA

P 3.1. Wykazać, że współczynnik $\dfrac{\Gamma(p-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(p+1)} = 0$ dla liczby naturalnej n, gdy $p = n+1,\ n+2, \dots n+k$, oraz $k = 1,2\dots$

P 3.2. Wykazać, że $\dfrac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(p+1)} \neq 0$ dla liczby $p = 0,1,2,\dots$, gdy $\alpha \neq 1,2,3\dots$

P 3.3. Korzystając ze wzoru (3.10) wykazać, że ${}_aD_x^2 f(x)$ jest lokalną pochodną rzędu drugiego- $f''(x)$ w otoczeniu x natomiast ${}_aD_x^{-2} f(x)$ jest dwukrotnie iterowaną całką określoną na przedziale (a,x).

4. CAŁKO-POCHODNA GRÜNWALDA-LETNIKOWA

Zakładamy, ze całko-różniczkowalna funkcja $f(x)$ jest określona na przedziale $(0,b)$ i punkt x jest wewnątrz tego przedziału. Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Grünwald i Letnikow zdefiniowali operator frakcjalny ${}_0D_x^\alpha$ działający na $f(x)$ w przedziale $(0,x)$ w następujący sposób;

$$\boxed{{}_0D_x^\alpha f(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\alpha)} f\left(x-p\frac{x}{m}\right)} \tag{4.1}$$

Istnienie tej granicy, czyli całko- różniczkowalność pewnej klasy funkcji $f(x)$, określono w [2], [4], [16], [17] i [18]. Definicja (4.1), jest uogólnieniem wzoru (3.10) z tym, że przedział (a,x) zastąpiono przedziałem $(0,x)$ oraz pominięto parametr h zastępując go stosunkiem $\frac{x}{m}$. Definicja (4.1), przyjmowana była ze sceptycyzmem ponieważ nie zawiera operacji różniczkowania i całkowania. Wykazano jednak, że jest ona równoważna znanym operacjom rachunku różniczkowo-całkowego i definiuje operacje frakcjalne w sposób równoważny z definicją Riemanna-Liouville'a, która jest oparta na n- krotnie iterowanej całce (wzór Cauchy'ego), [8]. Definicja (4.1) jest wygodna dla obliczeń numerycznych przybliżonych wartości całko-pochodnych. Niestety wadą tej definicji są trudności analitycznego wyznaczania całko-pochodnych nawet funkcji elementarnych. Trudności te zademonstrujemy na przykładzie funkcji $f(x)=x^n$ gdzie $n=1,2,3,\ldots$ Spodziewany wynik jest

$${}_0D_x^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha} \tag{4.2}$$

gdzie α może być dowolną liczbą również ujemną (całkowanie). Zaczniemy obliczenia od przypadku szczególnego, gdy $f(x)=1$, tzn. $n=0$ i wtedy mamy,

$$ {}_0D_x^{\alpha}1=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{x}{m}\right)^{-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p+1)} \tag{4.3} $$

W celu obliczenia granicy musimy obliczyć sumę $\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p+1)}$. Skorzystamy z mało znanego wzoru, [8]

$$ (\alpha-\beta)\sum_{p=0}^{k}\frac{\Gamma(p+\alpha)}{\Gamma(p+\beta+1)}=\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}-\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)} \tag{4.4} $$

i na tej podstawie otrzymujemy

$$ \sum_{p=0}^{m-1}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p+1)}=\frac{1}{(-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}. $$

Wzór (4.3), przyjmuje postać

$$ {}_0D_x^{\alpha}1=\frac{x^{-\alpha}}{(-\alpha)\Gamma(-\alpha)}\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}m^{\alpha}, $$

następnie zgodnie z wzorem (2.5) mamy $m^{\alpha}\frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}=1+O(m^{-1})$ oraz ponieważ $(-\alpha)\Gamma(-\alpha)=\Gamma(1-\alpha)$ ostatecznie otrzymujemy ${}_0D_x^{\alpha}1=\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ (4.5),

dla dowolnej wartości α.

W przypadku $f(x)=x^n, n=1,2,\ldots$ mamy

$$ {}_0D_x^{\alpha}x^n=\frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\lim_{m\to\infty}m^{\alpha}\sum_{p=0}^{m}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p+1)}\left(1-\frac{p}{m}\right)^n. \tag{4.6} $$

W celu wyprowadzenia tego wzoru należy $(1-\frac{p}{m})^n$ rozwinąć w sumę potęg (dwumian Newtona) i następnie zsumować podwójne szeregi. Jest to zadanie rachunkowo bardzo żmudne, patrz [3].

Definicja (4.1), jest równoważna innym definicjom, o których powiemy w Rozdz. 8.

W następnych 3-ch rozdziałach przedstawimy intuicyjne wyprowadzanie całko-pochodnych wybranych funkcji elementarnych.

PYTANIA

P 4.1. Wykazać, że dla α zmierzającego do 1, 2, 3, ...pochodna ${}_0D_x^{\alpha}1 \Rightarrow 0$.

P 4.2. Na podstawie wzoru (4.5), wyznaczyć n-krotnie iterowaną całkę dla funkcji $f(x)=1$ w granicach $(0,x)$.

P 4.3. Obliczyć pochodną i całkę połówkową (semi- pochodna, semi -całka), $\alpha = 1/2, -1/2$ z funkcji $f(x)=1$ w granicach $(0,x)$.

P 4.4. Obliczyć pochodną i całkę rzędu 3/2 z funkcji $f(x)=x^2$ w granicach $(0,x)$.

P 4.5. Uogólniając wzór (4.2) na funkcje $f(x)=x^{\beta}$, gdzie β jest dowolną liczbą, piszemy

$$ {}_0D_x^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}x^{\beta-\alpha}. $$

Wykazać, że ${}_0D_x^{-\alpha}[D_0^{\alpha}f(x)] = f(x)$.

5 CAŁKO-POCHODNA FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Rozpatrzymy pochodną funkcji wykładniczej $e^{\beta x}$ w celu zademonstrowania elementarnego sposobu wyznaczania frakcjalnych pochodnych. Jak wiemy

$$ D^1e^{\beta x} = \beta e^{\beta x},\ D^2e^{\beta x} = \beta^2 e^{\beta x}, ..D^n e^{\beta x} = \beta^n e^{\beta x}, \tag{5.1} $$

gdzie n jest liczbą naturalną. Czy możemy zastąpić n przez dowolną liczbę rzeczywistą a nawet zespoloną α ?. Zdobywając się na odwagę napiszemy

$$ D^{\alpha}e^{\beta x} = \beta^{\alpha}e^{\beta x} \tag{5.2} $$

Oczywiście chcemy by $e^{\beta x} = D^1(D^{-1}e^{\beta x})$. Ponieważ $e^{\beta x} = D^1(\frac{1}{\beta}e^{\beta x})$ więc $D^{-1}e^{\beta x} = \int e^{\beta x}dx$. Podobnie $D^{-2}e^{\beta x} = \iint e^{\beta x}dxdx$ a zatem jest sens interpretować ujemną całkowitą liczbę $-n$ jak n- krotną całkę. D^{α} przedstawia pochodną jeżeli α jest dodatnią liczbą rzeczywistą i całkę gdy jest ujemną liczbą rzeczywistą.

Odnotujmy, że już podaliśmy ogólną definicję całko-pochodnej (4.1). Teraz jednak będziemy posługiwać się intuicją tak jak postępowali 19-to wieczni matematycy. J. Liouville podobnie rozpoczynał swoje prace nad różniczkowaniem frakcjonalnym, [19], [20].

PYTANIA

P 5.1. Czy są prawdziwe następujące związki?

$$D^{\alpha}(c_1 e^{\beta_1 x} + c_2 e^{\beta_2 x}) = c_1 D^{\alpha} e^{\beta_1 x} + c_2 D^{\alpha} e^{\beta_2 x}$$

$$D^{\alpha_1}(D^{\alpha_2} e^{\beta x}) = D^{\alpha_1+\alpha_2} e^{\beta}$$

P 5.2. Czy związki $D^{-1}e^{\beta x} = \int e^{\beta x}dx$ i $D^{-2}e^{\beta x} = \int\int e^{\beta x}dxdx$ są prawdziwe czy coś zostało zgubione?

6. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE: SINUS i COSINUS

Znane są pochodne $\sin x$; $D^1 \sin x = \cos x, D^2 \sin x = -\sin x, D^3 \sin x = -\cos x$. Za każdym razem różniczkowana funkcja sinus i cosinus jest przesuwana w lewo o $\pi/2$. Różniczkując n-razy mamy $D^n \sin x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. Tak jak poprzednio, liczbę całkowitą n zastąpimy dowolną liczbą α i napiszemy

$$D^{\alpha} \sin x = \sin(x + \frac{\alpha\pi}{2}), \quad D^{\alpha} \cos x = \cos(x + \frac{\alpha\pi}{2}) \tag{6.1}$$

Naturalne pytanie, jakie musimy zadać, to czy nasze założenia są zgodne z poprzednimi? Korzystając z wzoru Eulera $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, mamy

$$D^{\alpha} e^{ix} = i^{\alpha} e^{ix} = e^{i(x+\alpha\pi/2)} = \cos(x + \frac{\alpha\pi}{2}) + i \sin(x + \frac{\alpha\pi}{2})$$ a więc jest zgodność.

PYTANIE

P 6.1. Na podstawie (5.2) i (6.1), określić całko-pochodną $D^{\alpha} \sin(\beta x)$!

7. CAŁKO-POCHODNA FUNKCJI POTĘGOWEJ

Teraz przypomnijmy zwykłe pochodne funkcji potęgowej

$$\begin{aligned} &D^0 x^p = x^p, D^1 x^p = px^{p-1}, \; D^2 x^p = p(p-1)x^{p-2}, .. D^n x^p = \\ &p(p-1)(p-2)...(p-n+1)x^{p-n}... \end{aligned} \tag{7.1}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $(p-n)!$, otrzymuje się

$$D^n x^p = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}. \tag{7.2}$$

Jest to ogólne wyrażenie na $D^n x^p$. Zastępując całkowite liczby n i p przez liczby α i β oraz zastępując silnie $p!$ i $(p-n)!$ przez odpowiednie funkcje gamma napiszemy wzór (7.2) w postaci uogólnionej

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{7.3}$$

Przy pomocy tego wyrażenia możemy obliczyć całko-pochodną dowolnego rzędu z funkcji $f(x)$, która jest rozwijalna w zbieżny szereg Taylora i zbieżny szereg całko-pochodnych jego wyrazów potęgowych. Niech $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ i niech całko-pochodna tej funkcji będzie

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m D^\alpha x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1} x^{m-\alpha}. \tag{7.4}$$

Końcowe wyrażenia jest możliwym kandydatem na definicje frakcjonału (całko-pochodnej) szerokiej klasy funkcji analitycznych.

Teraz przedstawimy kontrowersję, która w 19-tym wieku doprowadziła do dyskredytacji rachunku frakcjalnego i na wiele lat opóźniła rozwój badań tego przedmiotu. Sądzimy, że czytelnik już zauważył, że nasze intuicyjne rachunki, choć bardzo przekonywujące obywają się bez określenia przedziału (a,x) z Rozdz. 3 i 4.

Matematycy, poza nielicznymi, byli przekonani, że pochodna rzędu ułamkowego musi być operacją lokalną tak jak zwykła pochodna. Właśnie, dlatego że jest uogólnieniem zwykłej pochodnej, które przedstawiliśmy w Rozdz. 5 do 7.

Następujący fakt, który zilustrujemy poniżej, był ogromnym zaskoczeniem. Frakcjalna pochodna (od tej historycznej nazwy trochę bardziej wolimy nazwę całko-pochodnej) funkcji wykładniczej

$$D^\alpha e^x = e^x, \text{ gdzie } e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m,$$

po zastosowaniu wzoru (7.4), przyjmuje postać szeregu

$$D^\alpha e^x = x^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m-\alpha+1)}, \tag{7.5}$$

którego suma wynosi $D^{\alpha}e^{x}=x^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(x)$, gdzie $E_{a,b}(z)$ jest funkcją Mittag-Lefflera, funkcją równie ważną dla rachunku frakcjalnego jak funkcja gamma. Funkcja ta jest określona przez następujący szereg

$$E_{a,b}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(ak+b)}. \tag{7.6}$$

Szereg (7.5), jest zbieżny dla $\alpha=0,1,2,3,\ldots$ ($D^{n}e^{x}$ jest wtedy zwykłą lokalną pochodną) i wynosi e^{x}. Odnotujemy, że funkcja e^{x} jest funkcją własną równania $f'(x)-f(x)=0$, tzn. każde kolejne różniczkowanie pozostawia tę funkcję niezmienioną. W każdym innym przypadku, tj. $\alpha\neq 0,1,2,\ldots$, szereg (7.5) jest zbieżny, ale do całkowicie innej funkcji o wyższym stopniu transcendentalności (przestępności). Wyjaśnimy to na przykładzie. Dla $\alpha=1/2$, całko-pochodna (7.5) wynosi

$$D^{1/2}e^{x}=x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}}{\Gamma(m+1/2)}=x^{-1/2}E_{1,1/2}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+e^{x}erf(\sqrt{x}),$$

gdzie $erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z}e^{-t^{2}}dt$.

Stawiano pytanie, dlaczego tak się dzieje? Dlaczego, wzór (5.2), nie jest zgodny z wzorem (7.3) i (7.4)?

W celu wyjaśnienia tej niezgodności zbadamy intuicyjnie otrzymane wzory w Rozdz. 5 i 7. Matematycy w 19-tym i początku 20-ego wieku, nie byli zdziwieni, że *frakcjalne całki* zawierają granice całkowania, bo całki (Riemanna) tak się określa. Ponieważ zwykłe pochodne nie są określone na przedziałach nie spodziewano się by, frakcjalne pochodne zależały od przedziału. Myślimy o pochodnych jako o operacjach lokalnych. Całko-pochodna D^{α} zawiera zarówno pochodne (dodatnie α) jak i całki (ujemne α). Całki są w granicach lub pojawia się stała całkowania.

Powodem niezgodności tu przytoczonej jest to, że granice określoności dla całko-pochodnych ze wzorów (5.2) i (7.3) są różne. Jeżeli zapiszemy

$${}_{a}D_{x}^{-1}e^{\beta x}=\int_{a}^{x}e^{\beta t}dt=\frac{1}{\beta}(e^{\beta x}-e^{\beta a}) \tag{7.7}$$

to otrzymamy wzór (5.2), gdy przyjmiemy dolną granicę $a=-\infty$. Zatem otrzymujemy ${}_{-\infty}D_x^{-1}=\beta^{-1}e^{\beta x}$. Natomiast dla $f(x)=x^{\beta}$ mamy

$$ {}_aD_x^{-1}x^{\beta}=\int_a^x t^{\beta}dt=\frac{1}{\beta+1}(x^{\beta+1}-a^{\beta+1}) $$

i wzór jest prawdziwy dla $a=0$. Należy więc pisać ${}_0D_x^{-1}e^{\beta x}=\dfrac{e^{\beta+1}}{\beta+1}$. Całko-pochodna zależy od przedziału (a,x) i dla tego samego rzędu wynoszącego 1/2 i tej samej funkcji na przedziale $(-\infty,x)$ oraz przedziale $(0,x)$ mamy odpowiednio następujące całko-pochodne

$$ {}_{-\infty}D_x^{1/2}e^{\beta x}=\beta^{1/2}e^{\beta x} \text{ oraz } {}_0D_x^{1/2}e^{\beta x}=\sqrt{\frac{1}{\pi x}}+\beta^{1/2}e^{\beta x}erf(\sqrt{\beta x}),\quad \beta>0. $$

Zasługuje na uwagę fakt istnienia funkcji własnych dla ułamkowych pochodnych, tzn. powtarzana operacja całko-różniczkowania pozostawia tę funkcje niezmienioną. Dla zwykłego różniczkowania taką funkcją jest funkcja wykładnicza.

Równanie z *„połówkową"* pochodną

$$ {}_0D_x^{1/2}y(x)-y(x)=0 \tag{7.8} $$

jest spełnione przez funkcje $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}+e^{x}erf(-\sqrt{x})$. Odnotujemy, że jeżeli tu przytoczona funkcja $y(x)$ jest funkcją własną równania (7.8) to również jest ona funkcją własną równań; $y'(x)-y(x)=0$, $y''(x)-y(x)=0$, ..., jeżeli prawdziwa jest relacja ${}_0D_x^{1/2}[{}_0D_x^{1/2}y(x)]={}_0D_x^{1}y(x)$. Zadanie 5 demonstruje ten przypadek.

Negatywny wynik może być zneutralizowany na różne sposoby. Istnieje możliwość zastosowań tej własności do równań różniczkowych, np. równania struny, prowadząc do funkcji własnej wyższego rzędu przestępności. W pracy [21] uogólniono tę metodę na frakcjalne laplasjany otrzymując w prosty sposób rozwiązania równań Helmholtza i Schrödingera o wyższym stopniu przestępności niż znane funkcje własne typu funkcji wykładniczych i trygonometrycznych.

PYTANIA

P 7.1. Czy znana jest interpretacja geometryczna całko-pochodnej ${}_aD_x^{\alpha}f(x)$?

8. CAŁKO-POCHODNA RIEMANNA-LIOUVILLE'A

W Rozdz. 3 pisaliśmy o wielokrotnym różniczkowaniu i na tej podstawie wyprowadziliśmy definicje całko-pochodnej Grünwalda-Letnikowa. Całki z funkcji jednej zmiennej też mogą być wielokrotnie iterowane, np.

$$ {}_0D_x^{-2} f(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 = \int_0^x dt_1 \int_{t_1}^x f(t_2) dt_2 , $$

gdzie obszar całkowania jest trójkątem równoramiennym na płaszczyźnie (t_1, t_2). Jeżeli zamienimy kolejność całkowania, otrzymamy

$$ {}_0D_x^{-2} f(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt . $$

Postępując tak dalej otrzymamy znany wzór całkowy Cauchy'ego

$$ {}_0D_x^{-3} f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t) dt, \ldots, {}_0D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^n f(t) dt . \qquad (8.1) $$

Teraz, postępując tak jak w przypadku ilorazu różnicowego dla pochodnej n-tego rzędu, zastąpimy $-n$ przez dowolną liczbę α i silnię $(n-1)!$ przez $\Gamma(-\alpha)$, otrzymując następującą całkę splotową, podobną do wzoru Cauchy'ego dla funkcji zmiennej zespolonej

$$ {}_0D_x^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}} . \qquad (8.2) $$

Jest to ogólne wyrażenie (przy użyciu całki) dla C-pochodnej, które jest kandydatem na definicje. Jednak są trudności, których nie było w przypadku definicji (4.1). Jeżeli $\alpha > -1$ całka (8.2) jest niewłaściwa, ponieważ gdy $t \to x$, to $x - t \to 0$. Całka jest rozbieżna dla każdego $\alpha \geq 0$. Gdy $-1 < \alpha < 0$, to całka niewłaściwa jest zbieżna a dla $\alpha < -1$ całka jest właściwa i zbieżna. Ponieważ całka (8.2) jest zbieżna tylko dla ujemnych α to (8.2) jest całką frakcjalną (dowolnego stopnia). Odnotujemy, że wybór zera jako dolnej granicy całki nie stanowi ograniczenia ogólności. Należy jednak pamiętać, że wynik całkowania zależy od granic całkowania.

W dalszym ciągu pozostał nam problem z określeniem definicji splotowej dla $\alpha > 0$, to jest pochodnej frakcjalnej (ułamkowej) oraz równoważności definicji splotowej z definicją Grünwalda-Letnikowa (4.1). Równoważność definicji, warunki równoważności lub odstępstwa od równoważności mają ogromne znaczenie. Braki w tym względzie prowadziłyby do nieporozumień, błędnych interpretacji i złej klasyfikacji.

Na podstawie definicji (4.1), można otrzymać następujący wzór na C-pochodną rzędu α, patrz [8] str.55,

$$ {}_aD_x^p f(x) = \frac{1}{(x-a)^p}\sum_{k=0}^{m}\frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^x (x-t)^{m-p} f^{(m+1)}(t)dt, \quad (8.3) $$

gdzie $m \le p < m+1$. Wzór ten został wyprowadzony przy założeniu, że pochodne $f^{(k)}(x)$, $(k = 1,2,...,m+1)$ istnieją i są ciągłe w zamkniętym przedziale $[a,x]$ i m jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub zerem). Wzór (8.3), możemy zapisać w postaci

$$ {}_aD_x^p f(x) = {}_aD_x^{m+1}\int_a^x (x-t)^{m-p} f(t)dt, \quad m \le p < m+1 \quad (8.4) $$

i stanowi on definicję całko-pochodnej, która spełnia warunki unifikacji całki i pochodnej rzędu całkowitego. Dla $p = m > 0$ na podstawie (8.3), mamy równość ${}_aD_x^m f(x) = f^{(m)}(x)$ oraz na podstawie (8.4), dla $p = m = -k$, $k > 0$ możemy napisać

$$ {}_aD_x^{-k} f(x) = \int_0^x\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_k} f(t_k)dt_{k-1}dt_{k-2}\dots dt_1 . $$

Definicja (8.4) jest równoważna definicji (4.1), przy założeniach, przy których został wyprowadzony wzór (8.3). Definicja (8.4), jest niepraktyczna, bo jeżeli mamy obliczyć, np. pochodną rzędu $3\,{}^1\!/_2$ lub całkę iterowaną krotności $3\,{}^1\!/_2$ to obliczamy całkowity rząd lub krotność zgodnie ze zwykłymi wzorami a następnie ułamkową całko-pochodną wg wzorów RIEMANNA-LIOUVILLE'A

$$ \boxed{{}_aD_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ 0 < \alpha < 1} \text{ (całka } \alpha \text{ -krotna)} \quad (8.5) $$

$$ \boxed{{}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt, \ 0 < \alpha < 1} \text{ (pochodna rzędu } \alpha \text{)} \quad (8.6) $$

Wzory te można otrzymać z (8.3), przyjmując odpowiednio $m = -1$ oraz $m = 0$.

Usunęliśmy kłopoty ze zbieżnością całki (8.2) i otrzymaliśmy całki splotowe. Bez utraty ogólności możemy przyjąć $a=0$ lub $a=-\infty$ by stosować transformatę Laplace'a lub odpowiednio transformatę Fouriera (podwójną Laplace'a) dla obliczenia C-pochodnych. Korzystając z tablic transformat, np. [25], możemy praktycznie obliczyć wiele C-pochodnych.

Odnotujemy, że przedstawione definicje nie spełniają współczesnych wymagań związanych z licznymi zastosowaniami rachunku frakcjalnego. W przypadku równań różniczkowych rzędu ułamkowego, gdy chcemy zadać warunek początkowy dla pochodnej rzędu całkowitego, bo taki warunek ma sens fizyczny lub geometryczny, to w miejsce definicji (8.6), wprowadza się definicję M. Caputo [8]. W następnych Zeszytach, przy okazji zastosowań rachunku frakcjalnego, omówimy szerzej te zagadnienia. Dla przedziałów nieskończonych wprowadza się definicje lewo-i prawo-stronnej całko-pochodnej o odpowiednich granicach całkowania, tj.
$(-\infty, x)$, (x,∞). Obliczanie takich C-pochodnych jest możliwe stosując transformacje Fouriera, Hilberta czy Mellina [8]. Ważne równania fizyki, chemii i nauk technicznych zawierają operacje różniczkową zwaną laplasjanem. Pojęcie C-pochodnej może być uogólnione, przy pomocy potencjału Riesz'a, na frakcjalny laplasjan, który znajduje pożyteczne zastosowania w teorii anomalnej dyfuzji (sub- i super-dyfuzja), teorii falowej w ośrodkach fraktalnych i procesach stochastycznych, np. Lévy'ego, patrz [4], [8], [9], [21] i [22].

9. ZAKOŃCZENIE

Pochodna całkowitego rzędu i C-pochdna dowolnego rzędu-α są w pewnym sensie analogiczne odpowiednio, do dwumianu Newtona o skończonej ilości wyrazów i szeregu potęgowego $(1+x)^\alpha$ gdzie α nie jest liczbą naturalną. Zgodnie z definicją Grünwalda-Letnikowa (4.1), dla całkowitej pochodnej, licznik o skończonej liczbie wyrazów $n+1$, patrz (3.2), ma postać

$\frac{1}{h^n}\sum_{p=0}^{n}\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p+1)}f(x-p\frac{x}{m})$ i dla $m\to\infty$ zmierza w granicy do $d^n f$, to jest symbolicznie zapisanego nieskończenie małego przyrostu funkcji rzędu n. Mianownik tego ilorazu przy podstawieniu h^n, (dx^n) w granicy daje klasyczną lokalną pochodną rzędu n. Natomiast dla całko-pochodnej rzędu, $\alpha \neq n = 1,2,3,...$, mamy do czynienia z nieskończoną liczbą wyrazów różnych od zera, gdy $m \to \infty$. Wtedy właśnie przyjmujemy $(n-1)! = \Gamma(-\alpha)$ oraz

$(pk)^{n-1} = (pk)^{-\alpha-1}$, $(pk)^{n-2} = (pk)^{-\alpha-2}$ itd. Następnie pomijamy wyrazy, przed którymi występują $h^2, h^3, ...$ jako małe wyższego rzędu i ostatecznie możemy napisać

$$f_k^{(\alpha)}(x) = \frac{h}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{p=0}^{m} (ph)^{-\alpha-1} f(y-ph) + ... \tag{9.1}$$

Wyrażenie to otrzymano z (4.1). Jeszcze raz zapiszemy wzór na klasyczną pochodną rzędu n, którą otrzymaliśmy z tego samego wzoru (4.1),

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{m} \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(n)\Gamma(p+1)} f(x - p\frac{x}{m}) \tag{9.2}$$

Jak wiemy, jest to klasyczny iloraz różnicowy określający n-tą pochodną funkcji $f(x)$. Natomiast wzór (9.1) różni się tym, że w liczniku pojawi się dy zamiast h i sumowanie odbywa się na przedziale $(y-a)$ oraz $ph := t$, gdzie t jest zmienną całkowania. Wyrażenie (9.1) w granicy $m \to \infty$ staje się całką (8.2). Zatem

$${}_aD_y^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{f(y-t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{f(t)}{(y-t)^{\alpha+1}} dt \tag{9.3}$$

Zbieżność tej całki była omawiana w Rozdz. 8. W celu uniknięcia rozbieżności całki dla $0 < \alpha < 1$ przyjmujemy wzór (8.4) dla $m = 0$ lub wzór (8.6). Tajemnica zależności C-pochodnej od przedziału jest ukryta w sprowadzeniu wzoru (4.1) do (9.1). To przejście usprawiedliwia przyjętą nazwę całko-pochodnej (differ-integral, integro-proizwodna), [2], [4], [8] i i. W 19-tym wieku ten temat stanowił przedmiot kontrowersji.

Należy tu odnotować zadziwiający fakt. W literaturze dotyczącej operatorów pseudoróżniczkowych, np. [28], [29] oraz w literaturze na temat frakcjalnych całko-pochodnych jest kompletny brak wzajemnych odniesień. Można by sądzić, że są to zupełnie oddzielne działy matematyki. Czy tak jest naprawdę? By odpowiedzieć na to pytanie- należałoby zapoznać się z definicją operatora pseudoróżniczkowego (dotyczy funkcji wielu-zmiennych), a następnie odnieść tę definicję do definicji całko-pochodnych. W jednym z następnych Zeszytów omówimy te relacje.

10. PRZYKŁADY

Na zakończenie tego Zeszytu przedstawimy przykłady obliczeń C-pochodnych w oparciu o przekształcenie Laplace'a i inne proste obliczenia przydatne do ilustracji tu omawianych zagadnień.

Transformatę Laplace'a i jej odwrotność będziemy oznaczać;

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=F(s),\ L^{-1}\{F(s)\}=\oint_L e^{sx}F(s)ds=f(t).$$

Transformata splotu: $h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)dt=\int_0^x f(t)g(x-t)dt$, $L\{h(x)\}=F(s)G(s)$.

Transformata pochodnej; $L\{f^{(n)}(x)\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$.

Zadanie 1.

Obliczyć całkę α-krotnie iterowaną w przedziale $(0,x)$ z funkcji $f(x)=x^\beta$, gdy $0<\alpha<1$ i β dowolna dodatnia liczba. Na podstawie wzoru (8.5), mamy

$$L\{{}_0D_x^{-\alpha}x^\beta\}=L\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\beta dt\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}L\{x^{\alpha-1}\}L\{x^\beta\}=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\alpha+\beta+1}},\quad {}_0D_x^{-\alpha}x^\beta=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta} \tag{10.1}$$

Odpowiedź:

Całka α-krotnie iterowana wynosi ${}_0D_x^{-\alpha}x^\beta=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}$. Można sprawdzić, że dla $\alpha=1$ i dla $\alpha=0$ mamy odpowiednio $\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}$ i x^β pamiętając, że $\Gamma(\beta+2)=(\beta+1)\Gamma(\beta+1)$.

Zadanie 2.

Obliczyć pochodną rzędu α z funkcji $f(x)=x^\beta$. Oznaczamy

$h(x)={}_0D_x^\alpha x^\beta=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}t^\beta dt$. Możemy napisać

$$L\{h(x)\}=\frac{s}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta-\alpha+1}}$$, a więc

$$h(x)=L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta-\alpha+1}}\right\}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}.$$

Odpowiedź:

$${}_0D_x^{\alpha}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}.$$

Jak można sprawdzić dla $\alpha=1$ i $\alpha=0$ mamy odpowiednio $\beta x^{\beta-1}$ i x^{β}. Korzystamy tu z równości $\Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta)$. Również dla $\beta=0$, tj. dla stałej funkcji $f(x)=1$, mamy $\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$. Wyrażenie to otrzymaliśmy w Rozdz. 4, (4.5), korzystając z definicji (4.1). Wymagało to trochę więcej obliczeń.

Uwaga

Pochodna funkcji skoku jednostkowego (funkcja Heaviside'a)

$H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ często służy do wyznaczania delty Diraca $\delta(x)$. Funkcja $H(x)$ jest nieróżniczkowalna w punkcie $x=0$ (nieciągłość skoku) a delta Diraca nie jest funkcją-nie ma określonej wartości w punkcie $x=0$ - tylko jest zdefiniowana przez całkę $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)f(t)dt=f(x)$. Pisząc $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(x-t)f(t)dt$, (splot względem transformaty Fouriera), gdy całka niewłaściwa istnieje i jest różniczkowalna, mamy;

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}H(x-t)f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=f(x),$$

lub $g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}H(x-t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-t)f(t)dt=f(x)$.

Pochodną ułamkową $(0<\alpha<1)$ funkcji $H(x)$ z dolną granicą $x=0$ obliczyliśmy w tym rozdziale a pochodną z dolną granicą $x=-\infty$ łatwo obliczyć stosując transformatę Fouriera i wynik podaliśmy w Tablicy na końcu Zeszytu 1. C-pochodne rzędu $n+\alpha$, $(n\in N)$ i $(|\alpha|<1)$ funkcji $H(x)$ są C-pochodnymi delty Diraca. Mają one ważne zastosowania do obliczania *fraktalnych* źródeł pola elektromagnetycznego. Okazuje się, że wyładowania atmosferyczne, pole magnetyczne słońca i innych obiektów astronomicznych w dużych odległościach mogą być traktowane jako *fraktalne multipole* opisywane przez pochodne ułamkowe funkcji $H(x)$ i $\delta(x)$, patrz [8] i [23].

Zadanie 3.

Obliczyć pochodną ułamkową (z dolną granicą w zerze) rzędu α, $\alpha > 0$ z funkcji wykładniczej $f(x) = e^{\beta x}$. Na podstawie wzoru (8.6), mamy

$$h(x) = {}_0D_x^{\alpha} x^{\beta x} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} e^{\beta t} dt.$$

Transformata Laplace'a tej funkcji wynosi

$$L\{h(x)\} = \frac{s}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} \frac{1}{s-\beta} = \frac{s^{\alpha}}{s-\beta}.$$

Ponieważ, nie znajdujemy w zwykłych tablicach odwrotnej transformaty tej funkcji (za wyjątkiem $\alpha = 1/2$, patrz Rozdz. 7) więc rozwiniemy w szereg potęgowy funkcję wykładniczą i będziemy całko-różniczkować wyraz po wyrazie;

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\beta t} dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^p}{p!} dt = h(x),$$

$$L\{h(x)\} = \frac{s}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\beta\, p! (\frac{s}{\beta})^{p+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^p}{s^{p-\alpha+1}},$$

ponieważ $L^{-1}\left\{\frac{\beta^p}{s^{p-\alpha+1}}\right\} = x^{-\alpha} \frac{(\beta x)^p}{\Gamma(p-\alpha+1)}$ to mamy,

Odpowiedź:

$${}_0D_x^{\alpha} e^{\beta x} = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\beta t} dt = x^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\beta x)^p}{\Gamma(p-\alpha+1)} = x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\beta x)$$

Funkcja Mittag-Lefflera $E_{a,b}(z)$ została zdefiniowana w Rozdz. 7 i w [8].

Zadanie 4.

Obliczyć C-pochodną rzędu α i $-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ na przedziale $(-\infty, x)$ z funkcji $f(x) = e^{\beta x}$, $\beta > 0$.

Zgodnie z definicją (8.6), mamy

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha} e^{\beta x} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\beta t} dt . $$

Obliczamy całkę przez zamianę zmiennej całkowania; $\tau = x - t$,

$\int_{-\infty}^{x} \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\beta t} dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \tau^{-\alpha} e^{\beta(x-\tau)} d\tau = \beta^{\alpha-1} e^{\beta x}$ i następnie różniczkujemy

otrzymując

Odpowiedź

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha} e^{\beta x} = \beta^{\alpha} e^{\beta x} $$

Dla obliczenia całki iterowanej ułamkowej krotności skorzystamy z wzoru (8.5). Zamieniamy zmienną całkowania jak poprzednio, otrzymując

$$ {}_{-\infty}D_x^{-\alpha} e^{\beta x} = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\beta t} dt = \int_{0}^{\infty} \frac{(\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\beta(x-t)} dt = \beta^{-\alpha} e^{\beta x}. $$

Zadanie 5.

Sprawdzić czy funkcja $y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + e^{x} erfc(-\sqrt{x})$ spełnia równanie $y_{1/2}(x) - y(x) = 0$ oraz równanie $y^{(n)}(x) - y(x) = 0$, gdzie $n \in N$ i $y^{1/2}(x) = {}_0D_x^{1/2} y$.

Przypomnimy, że $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - erf(x)$ oraz

$e^{x} erfc(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t} dt}{\sqrt{t}}$. Transformata Laplace'a funkcji $y(x)$ istnieje i wynosi

$L\{y(x)\} = \frac{1}{s^{1/2} - 1}$. Zgodnie z wzorem (8.6), mamy $L\{y^{1/2}(x)\} = \frac{s^{1/2}}{s^{1/2} - 1} - Y(0)$. Stała $Y(0)$ powstała przy obliczaniu transformaty Laplace'a z pochodnej $Y(x)$

$L\left\{\frac{d}{dx} Y(x)\right\} = sY(s) - Y(0)$ gdzie $Y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt$ oraz $sY(s) = \frac{s^{1/2}}{s^{1/2} - 1}$.

Obliczenie $Y(0)$ wymaga uwzględnienia przyczynku od części osobliwej funkcji $y(x)$, który jest $1/\sqrt{\pi x}$, czyli wyznaczenia całki

$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\pi t(x-t)}} = 1$. Możemy, więc napisać, że

$L\{y^{1/2}(x)\} = \frac{s^{1/2}}{s^{1/2}-1} - Y(0) = \frac{s^{1/2}}{s^{1/2}-1} - 1 = \frac{1}{s^{1/2}-1}$. W odpowiedzi otrzymujemy, $y^{1/2}(x) - y(x) = 0$. Natomiast $y'(x) - y(x) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi x^3}}$. Zatem nie jest spełniony związek $y^{(n)}(x) - y(x) = 0$ dla funkcji $y(x)$ ze względu na osobliwość tej funkcji w zerze przy $\alpha = 1$. Wzory (8.5) i (8.6) obowiązują dla $0 < \alpha < 1$ i $\alpha = 1$ nie spełnia tego warunku.

Zadanie 6.

Zastosowanie pochodnych ułamkowych do całkowania równania różniczkowego drugiego rzędu ze zmiennymi współczynnikami.

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \tag{Z6.1}$$

Równanie to było szczegółowo analizowane przez szwedzkiego matematyka Hj. Holmgrena [4], [27], w 1867. Stosując bardzo trafne podstawienia, Holmgren otrzymał rozwiązanie w postaci funkcji hipergeometrycznych.

Będziemy poszukiwać rozwiązania w postaci ułamkowej całko-pochodnej ${}_aD_x^{\alpha} z(x) = y(x)$, gdzie rząd pochodnej ułamkowej α wyznaczymy z odpowiedniego równania kwadratowego (charakterystycznego). Zgodnie z wzorami Leibniza, patrz Wstęp, mamy

$$\begin{aligned} &x\,{}_aD_x^{\alpha+1} z(x) = {}_aD_x^{\alpha+1}[xz(x)] - (\alpha+1)\,{}_aD_x^{\alpha} z(x) \\ &x^2\,{}_aD_x^{\alpha+2} z(x) = {}_aD_x^{\alpha+1}[x^2 z(x)] - 2(\alpha+2)\,{}_aD_x^{\alpha+1}[x\,z(x)] + (\alpha+1)(\alpha+2)\,{}_aD_x^{\alpha+1} z(x) \end{aligned} \tag{Z6.2}$$

Do równania (6.1), podstawiamy

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = {}_aD_x^{\alpha+2} z(x),\quad \frac{dy}{dx} = {}_aD_x^{\alpha+1} z(x),\quad x^2\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2\,{}_aD_x^{\alpha+2} z(x)\quad x\frac{dy}{dx} = x\,{}_aD_x^{\alpha+1} z(x),$$

otrzymując

$$\begin{aligned} &{}_aD_x^{\alpha+2}[(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)z(x)] + {}_aD_x^{\alpha+1}[(a_1 + b_1 x - 2c_2(\alpha+2)x - b_2(\alpha+2))z(x)] + \\ &{}_aD_x^{\alpha}[(a_0 - b_1(\alpha+1) + (\alpha+1)(\beta+2)c_2)z(x)] = 0 \end{aligned} \tag{Z6.3}$$

Rozwiązania poszukujemy w klasie funkcji całkowalnych $z(x)$ na przedziale $[a,x]$, spełniających warunki $z(a)=z'(a)=0$, które są konieczne dla spełnienia zależności

$${}_aD_x^\alpha \frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}{}_aD_x^\alpha, \quad {}_aD_x^\alpha \frac{d^2}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}{}_aD_x^\alpha, \text{ dla } \alpha<0.$$

Przyjmując parametr α jako jedno z rozwiązań równania kwadratowego

$$a_0-b_1(\alpha+1)-c_2(\alpha+1)(\alpha+2)=0, \qquad (Z6.4)$$

otrzymujemy następujące równanie na $z(x)$

$\frac{dz}{z}=-\frac{a_1+b_1x-(1+\alpha)(b_2+2c_2x)}{a_2+b_2x+c_2x^2}dx$, którego rozwiązanie przyjmuje postać

$$z(x)=(a_2+b_2x+c_2x^2)\exp\left(-\int_a^x\frac{a_1+b_1x}{a_2+b_2x+c_2x^2}dx\right). \qquad (Z6.5)$$

Rozwiązanie (Z6.1), trzeba wyznaczyć z wyrażenia $y(x)={}_aD_x^{\alpha_{1,2}}z(x)$, gdzie parametr $\alpha_{1,2}$ jest rozwiązaniem równania (Z6.4). Odnotujemy, że całko-pochodna (Z6.5) jest wyższego stopnia transcendentalności niż funkcja wykładnicza. Postępując jak Holmgren, oraz przyjmując następujące równanie hipergeometryczne, patrz [4],

$(x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(1+a+b)x]\frac{dy}{dx}+aby=0$. Rząd całko-pochodnej α przyjmuje wartości $\alpha_1=a-1$, $\alpha_2=b-1$ i wtedy dla pierwszej wartości własnej α_1 mamy rozwiązanie w formie funkcji hipergeometrycznej

$$y(x)={}_aD_x^{\alpha_1}z(x)=\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)}x^{1-c}{}_2F_1(1+a-c,1+b-c,2-c,x).$$

ODPOWIEDZI

P 2.1 Współczynniki szeregu Taylora $f(x)=(1+x)^\alpha$ dla $\alpha>0$ wynoszą dokładnie C_α^p! Pochodna rzędu p dla tego szeregu podzielona przez $p!$ wynosi

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-p+1)}{p!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-p+1)\Gamma(\alpha-p+1)}{p!\Gamma(\alpha-p+1)}=C_\alpha^p.$$

P 2.2 Ta własność to analityczność funkcji, tj. rozwijalność funkcji w zbieżny szereg Taylora.

P 2.3. Jak można zauważyć na podstawie definicji współczynników Newtona

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p \text{ i podobnie}$$

$$C_\alpha^{\alpha-p} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(\alpha-\alpha+p+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(p+1)} = C_\alpha^p.$$

P 3.1. Podstawiając $p = n+k$, otrzymujemy

$$\frac{\Gamma(p-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(-n)(n+k+1)!} = \frac{(k-1)!}{(n+k+1)!}\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \text{ gdzie } 1/\Gamma(-n) = 0, \text{ patrz,}$$

Rozdz. 2.

P 3.2. Przekształcamy wyrażenie

$$\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(p+1)} = \frac{1}{p!}\frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} = \frac{1}{p!}(-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)\ldots$$ Również jest to

odpowiedź na poprzednie pytanie, gdy podstawimy $\alpha = n$.

P 3.3. Zgodnie ze wskazanym wzorem, mamy

$$f_h^{(2)} = \frac{1}{h_2}\sum_{p=0}^{m}\frac{\Gamma(p-2)}{\Gamma(-2)\Gamma(p+1)}f(x-ph) = \frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}.$$ W granicy

otrzymujemy $\lim_{h\to 0} f_h^{(2)}{}' = f''(x)$.

Następnie obliczamy całkę

$$f_h^{(-2)} = h^2\sum_{p=0}^{m}\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(2)\Gamma(p+1)}f(x-ph) = h\sum_{p=0}^{m}(p+1)hf(x-ph).$$

Oznaczając $y = x+h$ rozpoczynamy sumowanie od p=1, otrzymując

$f_h^{(-2)} = h\sum_{p=1}^{m-1} ph(f(x-ph)$. W granicy ostatnie wyrażenie przyjmuje postać dwukrotnie iterowanej całki

$$ {}_aD_x^{-2}f(x)=\int_0^{x-a}tf(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt=\int_0^x dt_1\int_0^{t_1}f(t_2)dt_2 . $$

P 4.1. Można tu skorzystać z wzoru ${}_0D_x^{\alpha}1=\dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\Rightarrow 0$, gdy $\alpha\to 1,2,3,\ldots$ bo $1/\Gamma(1-\alpha)=0$. Wynika to również z wzoru (3.2). Ponieważ dla $f(x)=1$ i $\alpha=n$, mamy $f_h^{(n)}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p f(x-ph)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p=0$.

P 4.2. Podstawiając do wzoru (4.5) $\alpha=n$, otrzymujemy znany wzór na n-krotnie iterowaną całkę z funkcji $f(x)=1$. ${}_0D_x^{(-n)}=\dfrac{x^n}{\Gamma(1+n)}=\dfrac{x^n}{n!}$.

P 4.3. Podstawiając do wzoru (4.5) $\alpha=1/2$, mamy ${}_0D_x^{1/2}1=\dfrac{x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$, oraz

$$ {}_0D_x^{-1/2}1=\frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}} . $$

Uwaga

Ponieważ $\dfrac{d}{dx}\left(2\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ oraz $\int_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{\pi t}}=2\sqrt{\dfrac{x}{\pi}}$ zatem spełnione są związki

${}_0D_x^1({}_0D_x^{-1/2}1)={}_0D_x^{1/2}1$, ${}_0D_x^{-1}({}_0D_x^{1/2}1)={}_0D_x^{-1/2}1$.

Zgodnie z definicją (8.5) i (8.6), napiszemy

$$ {}_0D_x^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{\pi t(x-t)}}=1, $$

$$ {}_0D_x^{1/2}2\sqrt{\frac{x}{\pi}}=\frac{2}{\Gamma(1/2)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\sqrt{t}dt}{\sqrt{\pi(x-t)}}=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\frac{\pi x}{2}=1 . $$

Odnotujemy ciekawy przypadek splotowych całek niewłaściwych, którym nadaje się ciekawe interpretacje geometryczne,

$$ \int_0^x\frac{t\,dt}{\sqrt{t(x-t)}}=\frac{\pi}{2}x, \qquad \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}}=\pi . $$

Uwaga

Na podstawie ostatnich obliczeń możemy napisać

${}_0D_x^{1/2}({}_0D_x^{-1/2}1)={}_0D_x^{-1/2}({}_0D_x^{1/2}1)={}_0D_x^{0}1=1$.

P 4.4. Korzystamy z wzoru (4.2) i dla $\alpha=3/2$, mamy

$$ {}_0D_x^{3/2}x^2=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+1-3/2)}x^{2-3/2}=4\sqrt{\frac{x}{\pi}}, $$

Następnie dla $\alpha=-3/2$, obliczamy *całkę frakcjalną*

$$ {}_0D_x^{-3/2}x^2=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+3/2)}x^{2+3/2}=\frac{32}{105}\frac{x^{3\,1/2}}{\sqrt{\pi}}. $$

P 4.5. Podstawiając do wzoru, mamy

$$ {}_0D_x^{-\alpha}\left({}_0D_x^{\alpha}x^{\beta}\right)={}_0D_x^{-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}x^{\beta-\alpha}\right)=\frac{\Gamma(\beta+1+\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}x^{\beta}=x^{\beta}. $$

Wykazaliśmy związek

${}_0D_x^{-\alpha}\left({}_0D_x^{\alpha}x^{\beta}\right)={}_0D_x^{\alpha}\left({}_0D_x^{-\alpha}x^{\beta}\right)=x^{\beta}$.

P 5.1. Oczywiście te związki są prawdziwe dla szerokiej klasy funkcji (nie tylko $e^{\beta x}$) zgodnie z wszystkimi znanymi definicjami frakcjonałów. Wszakże jednak pod pewnymi warunkami. Określony musi być przedział, na którym obliczamy całko-pochodną oraz spełniony warunek całko-różniczkowalności. W Zadaniu 5 przedstawiono przykład, który wskazuje, że dla funkcji $y(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+e^{x}erfc(-\sqrt{x})$

nie jest spełniony związek ${}_0D_x^{1}y(x)={}_0D_x^{1/2}(D_x^{1/2}y(x))$.

P 5.2. Tak. Zgubione są stałe całkowania lub zgubione są granice całkowania.

P 6.1. Napiszemy, że

$$ {}_{-\infty}D_x^{\alpha}\sin(\beta x)={}_{-\infty}D_x^{\alpha}\frac{1}{2i}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})=\frac{\beta^{\beta}}{2i}(e^{i(\beta x+\frac{\pi}{2}\alpha)}-e^{-i(\beta x+\frac{\pi}{2}\alpha)})=\beta^{\alpha}\sin(\beta x+\frac{\pi}{2}\alpha), $$

gdzie $(\pm i)^{\alpha}=e^{\pm i\frac{\pi}{2}\alpha}$.

P 7.1. Wiemy, że $D^1f(x)$ jest nachyleniem krzywej $f(x)$ i że $D^2f(x)$ daje nam wypukłość tej krzywej. Lecz dla wyższych pochodnych nie mamy prostej interpretacji geometrycznej. Nie należy dziwić się, że całko-pochodne nie mają prostej interpretacji geometrycznej. W okresie ostatnich lat usilnie zabiega się o nadanie interpretacji geometrycznej lub fizycznej C- pochodnym dowolnego rzędu wierząc, że to zwiększy stosowalność rachunku frakcjalnego.

Tabela całko-pochodnych, Riemanna -Liouville'a z dolną granicą w zerze

$f(x)$	${}_0D_x^\alpha f(x) \qquad (x>0, \quad \alpha \in R)$
$H(x)$	$\dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$H(x-b)$	$\begin{cases} \dfrac{(x-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & x>0 \\ 0, & 0 \le x \le b \end{cases}$
$\delta(x)$	$\dfrac{x^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
$\delta^{(n)}(x)$	$\dfrac{x^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-\alpha-n)}, \qquad (n \in N)$ *(liczby naturalne)*
x^β	$\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta+\alpha}, \qquad \beta > -1$
$e^{\lambda x}$	$x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda x), \quad \lambda^{-1/2} e^{\lambda x} erf(\sqrt{\lambda x}),\ dla\ \alpha = -1/2,\ \lambda > 0$
$\cosh(\sqrt{\lambda x})$	$x^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda x^2)$
$\dfrac{\sinh(\sqrt{\lambda x})}{\sqrt{\lambda x}}$	$x^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda x^2)$
$\ln(x)$	$\dfrac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}(\ln(x) + \Psi(1) + \Psi(1-\alpha)), \quad \Psi(x) = \dfrac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$
$x^{\beta-1} \ln(x)$	$\dfrac{\Gamma(\beta) x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln(x) + \Psi(\beta) + \Psi(\beta-\alpha)), \ \mathrm{Re}(\beta) > 0$

Tabela całko-pochodnych Riemanna -Liouville'a z dolną granicą w $-\infty$

$f(x)$	${}_{-\infty}D_x^{\alpha} f(x) \qquad (x>0, \quad \alpha \in R)$
$H(x-b)$	$\begin{cases} \dfrac{(x-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & x>0 \\ 0, & x \le b \end{cases}$
$H(x)$	$\dfrac{\lvert x\rvert^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{\alpha} e^{\lambda x}, \quad \lambda>0$
$\cos(\lambda x)$	$\lambda^{\alpha} \cos(\lambda x + \frac{\pi\alpha}{2}), \quad \lambda>0, \ \alpha>-1$
$\sin(\lambda x)$	$\lambda^{\alpha} \sin(\lambda x + \frac{\pi\alpha}{2}), \ \lambda>0, \ \alpha>-1$
$e^{\nu x}\sin(\lambda x)$	$r^{\alpha} e^{\nu x} \sin(\lambda x + \alpha\varphi), \ r=\sqrt{\lambda^2+\nu^2}, \ \tan\varphi = \dfrac{\nu}{\lambda}, \ \lambda>0, \nu>0$
$e^{\nu x}\cos(\lambda x)$	$r^{\alpha} e^{\nu x} \cos(\lambda x + \alpha\varphi), \ r=\sqrt{\lambda^2+\nu^2}, \ \tan\varphi = \dfrac{\nu}{\lambda}, \ \lambda>0, \nu>0$

LITERATURA

[1]. V. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus & Applications*, Research Notes in Mathematics, No. 301, 1994.

[2]. K. J. B. Oldham and Spanier, *The fractional Calculus*, Academic Press, 1974.

[3]. K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, J. Wiley & Sons, 1993.

[4]. S, G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichew, *Integrały i proizwodnyje drobnowo poriadka i niekatoryje ich priłożenia*, Nauka i Technika, Minsk, 1987, (po rosyjsku).

[5]. K. Nishimoto, *Fractional Calculus*, Vols I-IV, Descartes Press, Korijama, 1984-1991.

[6]. K. Nishimoto, *Fractional Calculus and its Application*, College of Engineering, Nikon University, Japan, 1990.

[7]. K. Nishimoto, *An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus*, Descartes Press, Korijama, 1991.

[8]. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.

[9]. R. Hilfer, *Application of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 2000.

[10]. B. Ross, (ed.), *Proceedings of the International Conference on Fractional Calculus and its Applications*, Springer-Verlag, 1975.

[11]. A. C. Mc Bride and G.F. Roach, Fractional Calculus, Pitman, 1985.

[12]. K. Nishimoto (Ed.), *Fractional Calculus and its Applications*, College of Engineering, Nikon University, Japan, 1990.

[13]. K. Nishimoto (Ed), *Journal of Fractional Calculus*, Descartes Press, Korijama, (pismo wydawane od 1998)

[14]. V. Kiryakova (Ed.), *Fractional Calculus & Applied Analysis*, Inst. of Math. & Informatics, Bulg. Acad. Sci., Sofia, (pismo wydawane od 1998).

[15]. B. Ross, *The development of fractional calculus 1695-1900*, Historia Mathematica, 4, 75-89, 1977.

[16]. A. K. Grünwald, *Über begrentzte Derivationen und deren Anwendung*, Z. Angew. Math. Phys., **12**, 441-486, 1867.

[17]. A. V. Letnikow, *Teoria differencirowania drobnowo poriadka*, Mat. Sbornik, **3**, 1-68, 1868.

[18]. S Samko, T*he multidimensional fractional integrodifferentiation and the Grünwald- Letnikov approach to fractional calculus*, Proceedings of the International Conference on Fractional Calculus, 221-115, patrz [6].

[19]. J. Liouville, *Memoire sur quelque questions de geometrie et de mecanique , et sur un noveau gentre pour resoudre ces questions*, J. Ecole Polytech., **13**, 1-69, 1832.

[20]. J. Liouville, *Memoire sur le calcul de diferentielles a indices quelconques*, J. Ecole Polytech., **13**, 71-162, 1832.

[21].A. J. Turski, B. Atamaniuk, E. Turska, *Fractional derivative analysis of Helmholtz and paraxial-wave equations*, J. Tech. Phys. **44**, 2, 193-206, 2003.

[22}. Metzler, J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Physics Reports 339, 1-77, 2000.

[23]. N. Engheta, *Fractional paradigm in Electromagnetic Theory*, rozdz. w Frotiers in Electromagnetics, D. H. Werner & Mitra (Eds), IEEE Press, Chapter 12, 523-552, 2000.

[24]. J. Spanier, K. B. Oldham, *An Atlas of Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[25]. M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum Publishing Co. N. York 1965.
[26]. I. N. Bronsztejn & K. A. Semendajew, *Sprawocznik po matematike*, Gos. Izdat Techn.- Teoretycz.. Literatura, 1954.
[27]. Hj. Holmgren, *Sur l'integration de l'equation differemtielle* $(a_2+b_2x+c_2x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\dfrac{dy}{dx}+a_0y=0$, Kogl. Svenska Vetenskaps, (Akademia Handlowa- Sztokholm), Bd. 7, 9. 1-58, 1867.
[28]. M. E. Taylora, *Pseudodifferential Operators*, Princenton Mathematical Series, Princeton University Press, Princenton, 1981.
[29]. F. Trev, (F. Trève), *Wwiedenie w teoriu psewdodyferencjalnych operatorow i integralnych operatorow Fourie*, przekład z ang., Moskwa-Mir, 1984.

SPIS RZECZY

E-mail: aturski@ippt.gov.pl