WENCK

Die graphische ARITHMETIK

Die graphische Arithmetik

und ihre

Anwendungen auf die Geometrie.

Ein Lehrbuch

von

Dr. Julius Wenck

Direktor der Herzogl. Baugewerbe- und Gewerbeschule zu Gotha.

Mit 13 lithogr. Tafeln.

BERLIN

Nicolaische Verlags-Buchhandlung

R. Stricker.

1879.

S. Dickstein

350

Vorrede.

Die graphische Arithmetik wurde von mir gleichzeitig mit der graphischen Statik der Bearbeitung unterworfen, da ich ursprünglich die Absicht hatte beide Disciplinen in einem Buche zu vereinigen; allein es stellte sich bald heraus, dass eine solche Vereinigung nicht nur nicht nothwendig, sondern sogar unthunlich war. Nothwendig war sie deshalb nicht, weil die Kenntniss der einen zum Verständniss der andern nicht erforderlich ist und unthunlich war sie deshalb, weil beide gänzlich unabhängig voneinander sich entwickeln und in ihren Zielen wesentlich auseinandergehen.

Denn während die Statik ausschliesslich nur der technischen Richtung dienen und für den Unterricht an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Bildungsanstalten bestimmt sein sollte, konnte die Arithmetik diesen Zweck nicht in gleicher Weise verfolgen, da sie schon ihres allgemeineren Charakters wegen das Interesse auch noch anderer Kreise für sich in Anspruch nimmt, und daher nicht nur für den Unterricht an technischen Bildungsanstalten, sondern auch für den Unterricht an Realschulen, höheren Bürgerschulen u. s. w. geeignet ist.

Ich habe bei der Bearbeitung mich an den Gang gehalten, welcher beim Unterrichte in der allgemeinen Arithmetik üblich ist und die Operationen in derselben Weise aufeinander folgen lassen. Die Anwendungen der graphischen Arithmetik auf die Geometrie haben eine ausführliche Behandlung erfahren, weil sie nicht nur an sich sehr interessant, sondern auch für den Techniker von besonderer Wichtigkeit sind.

Möge auch diese Arbeit von den geehrten Fachgenossen freundlich aufgenommen werden.

Gotha, im Mai 1879.

Dr. Wenck.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Seite

Die graphische Darstellung der Zahlen und das Wesen der graphischen Arithmetik 1

Erster Abschnitt.

Die arithmetischen Operationen.

1. Die Addition und Subtraktion gerader Linien 3
2. Die Multiplikation gerader Linien oder Construktion des Produktes $a\,b$ 6
3. Verwandlung eines Produktes in ein anderes, welches einen gegebenen Faktor hat 8
4. Verwandlung mehrerer Produkte in andere, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben 9
5. Addition und Subtraktion von Produkten. 10
6. Division gerader Linien oder Construktion des Quotienten $\frac{a}{b}$ . . . 11
7. Verwandlung eines Quotienten in einen andern mit gegebenem Divisor 11
8. Verwandlung einer Linie in einen Quotienten oder das Verhältniss von zwei Linien 12
9. Verwandlung von mehreren Quotienten in andere, welche einen gemeinschaftlichen Divisor haben 12
10. Addition und Subtraktion von Quotienten und Linien 13
11. Multiplikation von Quotienten mit Quotienten und Linien 14
12. Division von Quotienten mit Quotienten und Linien 20
13. Das Potenziren von Linien 23
14. Das Potenziren von Quotienten oder Verhältnissen zweier Linien . . 26
15. Potenzen mit negativen Exponenten 32
16. Das Ausziehen der zweiten Wurzel 33
17. Die logarithmische Linie 34
18. Operationen mit der logarithmischen Linie 35
19. Die logarithmische Spirale. 37
20. Operationen mit der logarithmischen Spirale 40

Zweiter Abschnitt.

Die Gleichungen.

Seite

1. Die Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten 42
   a. Construktion der Gleichungen 42
   b. Auflösung der Gleichungen 46
2. Die Gleichungen vom ersten Grade mit zwei Unbekannten 47
3. Die Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten 48
   a. Auflösung der Gleichungen 48
   b. Construktion der Gleichungen:
      1. Der Kreis 51
      2. Die Ellipse 53
      3. Die Hyperbel 56
      4. Die Parabel 58
4. Höhere Gleichungen:
   Graphische Bestimmung der Wurzeln 60

Dritter Abschnitt.

Die Progressionen.

1. Die arithmetische Progression 63
2. Die geometrische Progression 64
3. Die Zinsrechnung. 66

Vierter Abschnitt.

Vervielfältigung und Theilung von Linien und Winkeln.

1. Vervielfältigung einer geraden Linie 68
2. Theilung einer geraden Linie 68
3. Construktion eines Winkels, der einem gegebenen Winkel gleich ist . 69
4. Addition von Winkeln 69
5. Subtraktion von Winkeln 69
6. Vervielfältigung eines Winkels 69
7. Theilung eines Winkels 70

Fünfter Abschnitt.

Verwandlung der Figuren.

1. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von gegebener Grundlinie 70
2. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von gegebener Höhe . . 71
3. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm von gegebener Grundlinie 72
4. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm von gegebener Höhe 73
5. Verwandlung eines Dreiecks in ein Quadrat 73
6. Verwandlung eines Trapezes in ein Dreieck von gegebener Basis . . 74
7. Verwandlung eines Trapezes in ein Dreieck von gegebener Höhe . . 75
8. Verwandlung eines Trapezes in ein Parallelogramm von gegebener Basis 75

Seite

9. Verwandlung eines Trapezes in ein Parallelogramm von gegebener Höhe 76
10. Verwandlung eines Trapezes in ein Quadrat 76
11. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gegebener Grundlinie 76
12. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gegebener Höhe 77
13. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck von gegebener Grundlinie 78
14. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck von gegebener Höhe 78
15. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Quadrat 79
16. Verwandlung eines Quadrates in ein Parallelogramm von gegebener Grundlinie 79
17. Verwandlung eines Quadrates in ein Parallelogramm von gegebener Höhe 79
18. Verwandlung eines Quadrates in ein Dreieck von gegebener Grundlinie 80
19. Verwandlung eines Quadrates in ein Dreieck von gegebener Höhe . 80

Sechster Abschnitt.

Die graphische Berechnung des Flächeninhaltes der Figuren.

1. Das Dreieck 81
2. Das Trapez 82
3. Das Parallelogramm 82
4. Das Rechteck 83
5. Das Quadrat 83
6. Das unregelmässige Viereck 84
7. Das regelmässige Vieleck 85
8. Das unregelmässige Vieleck 85
9. Der Kreis 85
10. Der Kreisausschnitt 86
11. Der Kreisabschnitt 87
12. Der Ring 87
13. Die Ellipse 88
14. Das Parabelsegment 88
15. Die krummlinig begrenzte unregelmässige Fläche 89

Siebenter Abschnitt.

Addition und Subtraktion der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Dreiecke ist 90
2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Dreiecke ist 91
3. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Dreiecke ist 91

Seite

4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Dreiecke ist 92
5. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Trapeze ist . . . . , ... 93
6. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Trapezen ist 94
7. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Trapeze ist 95
8. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Trapezen ist 96
9. Construktion eines Parallelogramms, von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist 96
10. Construktion eines Parallelogramms von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Parallelogrammen ist 97
11. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist. 98
12. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Parallelogrammen ist 98
13. Construktion eines Quadrates, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist 99
14. Construktion eines Quadrates, welches gleich dem Unterschiede von zwei Quadraten ist 100
15. Construktion eines Parallelogramms von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist 100
16. Construktion eines Parallelogramms von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei gegebenen Quadraten ist 101
17. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist. 102
18. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Quadrate ist 102
19. Construktion eines Kreises, welcher gleich der Summe mehrerer Kreise ist 103
20. Construktion eines Kreises, welcher gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist 103
21. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Kreise ist 104
22. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist 105
23. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Kreise ist 105
24. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist 106
25. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist 107

Seite

26. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche gleich dem Unterschiede zweier gegebener Ellipsen ist 107
27. Construktion eines Kreises, welcher gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist 108
28. Construktion eines Kreises, welcher gleich dem Unterchiede von zwei Ellipsen ist 108
29. Constrnktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist. 109
30. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Ellipsen ist 109
31. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist 110
32. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Ellipsen ist 110
33. Construktion eines Parallelogramms, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist, wenn das Verhältniss von Grundlinie und Höhe gegeben ist 111

Achter Abschnitt.

Multiplikation der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks, welches ein Vielfaches eines gegebenen Dreiecks ist 113
2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches ein Vielfaches eines gegebenen Dreiecks ist 113
3. Construktion eines Parallelogramms, welches ein Vielfaches eines gegebenen Parallelogramms ist 114
4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches ein Vielfaches eines gegebenen Parallelogramms ist 114
5. Construktion eines Quadrates, welches ein Vielfaches eines gegebenen Quadrates ist 115
6. Construktion eines Kreises, welcher ein Vielfaches eines gegebenen Kreises ist 115
7. Construktion einer Ellipse, welche ein Vielfaches einer gegebenen Ellipse ist 116
8. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche ein Vielfaches einer gegebenen Ellipse ist 116
9. Construktion einer Figur, welche ein Vielfaches von einem unregelmässigen Vielecke ist 116
10. Construktion einer Figur, welche ein Vielfaches einer gegebenen Figur und dieser ähnlich ist 116

Neunter Abschnitt.

Division der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Dreiecks ist 118

Seite

2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Dreiecks ist 119
3. Construktion eines Parallelogramms, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Parallelogramms ist 119
4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Parallelogramms ist. 120
5. Theilung eines Dreiecks nach gegebenem Verhältniss 120
6. Theilung eines Parallelogramms nach gegebenem Verhältniss . . . 121
7. Construktion eines Quadrates, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Quadrates ist 121
8. Construktion von zwei Quadraten, deren Summe gleich einem gegebenen Quadrate ist und deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten. 122
9. Construktion eines Kreises, welcher ein bestimmter Theil eines gegebenen Kreises ist 123
10. Construktion von zwei Kreisen, deren Summe gleich einem gegebenen Kreise ist und deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten . . 123

Zehnter Abschnitt.

Graphische Bestimmung der Volumina der Körper.

1. Das Prisma 125
2. Die Pyramide 127
3. Die abgestumpfte Pyramide 129
4. Das Prismatoid 130
5. Der Ponton 132
6. Das gerade schief abgeschnittene Prisma 133
7. Der Kreiscylinder 135
8. Der Kegel 135
9. Der abgestumpfte Kegel 136
10. Die Kugel 137
11. Das Drehungs-Ellipsoid. 137
12. Bestimmung des Volumens von Umdrehungskörpern nach der guldinischen Regel 138

Elfter Abschnitt.

Graphische Bestimmung der Oberflächen der Körper.

1. Das Prisma 139
2. Die Pyramide 139
3. Die abgestumpfte Pyramide 140
4. Das Prismatoid 141
5. Der gerade Kreiscylinder 141
6. Der gerade Kreiskegel 141
7. Der abgestumpfte Kegel 142
8. Die Kugel 142

Einleitung.

Die graphische Darstellung der Zahlen und das Wesen der graphischen Arithmetik.

Das ganze Gebiet der positiven und negativen, rationalen und irrationalen Zahlen lässt sich durch eine gerade Linie (Fig. 1) darstellen, welche von einem Punkte aus, den wir als den Anfangspunkt oder den Nullpunkt bezeichnen, nach zwei entgegengesetzten Richtungen unbegrenzt fortgeht.

Nehmen wir eine gewisse Länge als Einheit an, und tragen sie von 0 aus nach beiden Richtungen auf der geraden Linie auf, so entspricht der Abstand eines jeden auf diese Weise bestimmten Punktes vom Nullpunkte, also die zwischen diesem Punkte und dem Nullpunkte liegende Strecke der geraden Linie, einer ganzen Zahl. Nehmen wir eine solche Strecke ohne Rücksicht auf die Richtung, so stellt sie eine absolute ganze Zahl dar; bezeichnen wir aber die Richtung von null aus nach rechts mit plus und daher die Richtung von null aus nach links mit minus, so stellt jede Strecke zwischen null und irgend einem der erhaltenen Punkte auf der rechten Seite eine positive, auf der linken Seite dagegen eine negative ganze Zahl dar. Es stellt also z. B. die Strecke von 0 bis 5 auf der rechten Seite die Zahl $+5$, auf der linken Seite aber die Zahl -5 dar. Dasselbe gilt für jede andere Zahl.

Theilen wir die als Einheit angenommene Linie in irgend eine Anzahl gleicher Theile, etwa b, so ist ein jeder solcher Theil der $b$te Theil der angenommenen Einheit, also $\frac{1}{b}$, und 2. 3. 4. . . solcher Theile stellen $\frac{2}{b}, \frac{3}{b}, \frac{4}{b}, \ldots$ dar. Da wir nun die Einheit in jede beliebige Anzahl gleicher Theile theilen und jede Anzahl dieser Theile innerhalb zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen nehmen können, so können wir überhaupt auf diese Weise eine jede gebrochene Zahl oder jeden Bruch als gerade Linie darstellen. Ebenso ist auch eine jede Zahl, welche aus einer ganzen und einer gebrochenen Zahl besteht, also eine sogenannte gemischte Zahl gleichviel ob positiv oder negativ, durch eine gerade Linie darstellbar.

Theilen wir die Einheit in zehn gleiche Theile, das Zehntel wieder in zehn gleiche Theile, und setzen wir diese Theilung in zehn gleiche Theile so lange fort, als sie überhaupt möglich ist, so erhalten wir Linien, durch welche wir einen jeden Dezimalbruch darstellen können. Fällt endlich ein Punkt, soweit wir auch diese Theilung fortsetzen mögen, niemals mit einem Theilpunkte zusammen, sondern stets zwischen zwei Theilpunkte, so dass wir uns diesem Punkte zwar mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit nähern, ihn selbst aber nie erreichen können, so stellt der Abstand dieses Punktes vom Nullpunkte eine Irrationalzahl dar.

Da wir nun hiernach jede Zahl als gerade Linie darstellen können, so kann auch umgekehrt eine jede gerade Linie als eine Zahl angesehen werden. Der numerische Werth einer solchen geraden Linie als Zahl, wird durch Vergleichung der Linie mit der Zahlenlinie, indem man die Länge derselben auf der Zahlenlinie abgreift, bestimmt. Nach diesen Betrachtungen ist aber klar, dass man eine jede Zahl in eine gerade Linie, und eine jede gerade Linie in eine Zahl umsetzen kann, wenn man sich einer, nach einer gewissen Einheit construirten Zahlenlinie bedient, die dann in diesem Falle ein Zahlenmassstab genannt wird.

Sind Zahlenwerthe als gerade Linien gegeben, welche sich alle auf denselben Zahlenmassstab beziehen, denen also dieselbe Einheit zu Grunde liegt und werden die arithmetischen Operationen mit diesen Linien durch Construktionen bewirkt, so nennt man die Lehre von diesen Construktionen die graphische Arithmetik.

Das Wesen der graphischen Arithmetik besteht hiernach darin, dass sie ihre Operationen nicht mit Zahlen, sondern mit Linien, also nicht durch Rechnung, sondern durch Construktionen ausführt, und dass sich daher ihre Resultate auch nicht als Zahlen, sondern als gerade Linien darstellen. Sind diejenigen Grössen, mit welchen operirt werden soll, als Zahlen gegeben, so müssen sie zuerst, durch Abgreifen auf dem Zahlenmassstabe, in gerade Linien verwandelt werden. Die als Resultate der graphischen Operationen erhaltenen geraden Linien können dann, durch Abgreifen auf dem Zahlenmassstabe, wieder in Zahlen umgesetzt werden, wenn eine solche Umsetzung nöthig sein sollte. Die Genauigkeit der Resultate hängt hierbei überall von der Genauigkeit der Construktionen und von der geeigneten Wahl des Zahlenmassstabes, also der angenommenen Einheit ab.

Erster Abschnitt.

Die arithmetischen Operationen.

1. Die Addition und Subtraktion gerader Linien.

Die Addition der Zahlen besteht bekanntlich darin, dass diese Zahlen in gleichem Sinne gezählt oder zusammengezählt werden, so dass das Resultat der Addition oder die Summe diejenige Zahl ist, welche so gross ist, wie die addirten Zahlen zusammen genommen. Dem entsprechend besteht die graphische Addition darin, dass die geraden Linien in gleichem Sinne oder nach gleicher Richtung aneinander gesetzt werden, so dass das Resultat der Addition oder die Summe diejenige gerade Linie ist, welche ebenso gross ist, wie die addirten Linien zusammengenommen. Hierbei werden die geraden Linien so aneinander gesetzt, dass der Anfangspunkt einer jeden folgenden mit dem Endpunkte der vorhergehenden zusammenfällt. Die graphische Summe ist daher auch diejenige gerade Linie, welche den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkte der letzten Linie verbindet.

Nehmen wir auf der Zahlenlinie die Strecken 0 2 und 0 3, welche den Zahlen 2 und 3 entsprechen, und setzen sie nach gleicher Richtung aneinander, so erhalten wir die Strecke 0 5, welche der Zahl 5 entspricht. Dasselbe gilt für irgend zwei andere, sowie für beliebig viele Strecken auf der Zahlenlinie. Wir erhalten stets denjenigen Punkt der Zahlenlinie, dessen Abstand vom Nullpunkte der Zahl entspricht, welche die Summe der addirten Zahlen, beziehungsweise die Summe der zusammengesetzten Linien darstellt.

Die Subtraktion der Zahlen besteht bekanntlich darin, dass die zweite Zahl, der Subtrahendus, im entgegengesetzten Sinne der ersten Zahl, des Minuendus gezählt wird, so dass das Resultat der Subtraktion, also die Differenz oder der Unterschied, diejenige Zahl ist, welche angibt um wieviel der Minuendus grösser oder kleiner als der Subtrahendus ist, oder um wieviel diese beiden Zahlen differiren. Hierbei sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

Ist der Minuendus grösser als der Subtrahendus, so ist die Differenz eine Zahl im Sinne des Minuendus, also positiv oder negativ, je nachdem der Minuendus positiv oder negativ, der Subtrahendus mithin negativ oder positiv ist.

Ist der Minuendus kleiner als der Subtrahendus, so ist die Differenz eine Zahl im Sinne des Subtrahendus, also negativ oder positiv, je nachdem der Subtrahendus negativ oder positiv, der Minuendus mithin positiv oder negativ ist.

Ist der Minuendus gleich dem Subtrahendus, so ist die Differenz gleich null.

Dem entsprechend besteht die graphische Subtraktion darin, dass die zweite Linie, der Subtrahendus, im entgegengesetzten Sinne der ersten Linie, des Minuendus, oder überhaupt in entgegengesetzter Richtung an die erste Linie angesetzt wird, so dass das Resultat der Subtraktion, also die Differenz, diejenige gerade Linie ist, welche angibt, um wieviel die beiden Linien sich voneinander unterscheiden. Hierbei werden die Linien so aneinander gesetzt, dass der Anfangspunkt der zweiten mit dem Endpunkte der ersten zusammenfällt. Die graphische Differenz ist daher nach Grösse und Richtung diejenige gerade Linie, welche den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkte der zweiten Linie verbindet.

Aus der Betrachtung der Zahlenlinie ergibt sich leicht Folgendes:

Ist der Minuendus grösser als der Subtrahendus, so liegt die Differenz auf der Seite des Minuendus, ist also eine Linie im Sinne des Minuendus; ist der Minuendus kleiner als der Subtrahendus, so liegt die Differenz auf der entgegengesetzten Seite des Minuendus, ist also eine Linie im Sinne des Subtrahendus, und sind Minuendus und Subtrahendus einander gleich, so ist die Differenz gleich null.

Nehmen wir auf der Zahlenlinie die Strecken $0\,(+5)$ und $0\,(-3)$ und setzen die eine in der ihrem Sinne entsprechenden Richtung an die andere, so erhalten wir als Differenz die Strecke $0\,(+2)$; denn nehmen wir erst die Strecke von 0 bis $+5$ und gehen von hier aus in entgegengesetzter Richtung um 3 Einheiten, also um -3 fort, so kommen wir auf den Punkt $+2$; oder nehmen wir erst die Strecke von 0 bis -3 und gehen von hier aus in entgegengesetzter Richtung um 5 Einheiten, also um $+5$ fort, so kommen wir ebenfalls auf den Punkt $+2$. Nehmen wir dagegen die Strecken $0\,(-5)$ und $0\,(+3)$ und setzen die eine in der ihrem Sinne entsprechenden Richtung an die andere, so erhalten wir als Differenz die Strecke $0\,(-2)$; denn nehmen wir erst die Strecke von 0 bis -5 und gehen von hier aus in entgegengesetzter Richtung um 3 Einheiten, also um $+3$ fort, so kommen wir auf den Punkt -2; oder nehmen wir erst die Strecke von 0 bis $+3$ und gehen von hier aus in entgegengesetzter Richtung um 5 Einheiten, also um -5 fort, so kommen wir ebenfalls auf den Punkt -2.

Setzen wir aber die Strecken $0\,(+5)$ und $0\,(-5)$ zusammen, so erhalten wir den Punkt 0.

Sind nun a und b (Fig. 2) zwei gerade Linien, welche addirt werden sollen, so dass die Summe $a+b$ gebildet wird, so mache man auf einer beliebigen Geraden $0\,1 = a$, $1\,2 = b$, dann ist $0\,2 = a + b$, wie sich aus der früher gegebenen Erklärung der graphischen Summe ergibt.

Sind mehrere Linien a, b, c, d (Fig. 3) zu addiren, so mache man auf einer Geraden $0\,1 = a$, $1\,2 = b$, $2\,3 = c$, $3\,4 = d$; dann ist

$$0\,4 = a + b + c + d$$

und es ist leicht einzusehen, dass dieselbe Linie $0\,4$ erhalten worden wäre, wenn man die Linien in irgend einer andern Reihenfolge zusammengesetzt hätte.

Sind die Linien a und b (Fig. 4) gegeben, ist a grösser als b und soll b von a subtrahirt werden, soll also die Differenz $a - b$ gebildet werden, so mache man auf einer Geraden $0\,1 = a$ und in entgegengesetzter Richtung $1\,2 = b$, so ist $0\,2 = a - b$ und es hat $0\,2$ die Richtung von a.

Sind wieder die Linien a und b (Fig. 5) gegeben, ist aber a kleiner als b und soll die Differenz $a - b$ gebildet werden, so mache man auf einer Geraden $0\,1 = a$ und in entgegengesetzter Richtung $1\,2 = b$, so ist $0\,2 = a - b$ und es hat $0\,2$ die Richtung von b.

Sind a und b einander gleich (Fig. 6) und soll die Differenz $a - b$ gebildet werden, so mache man auf einer Geraden $0\,1 = a$ und in entgegengesetzter Richtung $1\,2 = b$, so ist ebenfalls $0\,2 = a - b$. Da aber der Endpunkt 2 mit dem Anfangspunkte 0 zusammenfällt, so ist $a - b = 0$.

Sind endlich die Linien a, b, c, d, e (Fig. 7) durch Addition und Subtraktion zu verbinden, so dass die algebraische Summe

$$a - b - c + d + e$$

zu bilden ist, so hat man diese Linien mit Rücksicht auf ihre durch das Vorzeichen bestimmte Richtung so aneinander zu setzen, dass der Anfangspunkt einer jeden folgenden mit dem Endpunkte einer jeden vorhergehenden zusammenfällt. Die graphische Summe ist sodann diejenige gerade Linie, welche den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkte der letzten Linie verbindet.

Macht man daher auf einer geraden Linie $0\,1 = a$, $1\,2 = b$, $2\,3 = c$, $3\,4 = d$, $4\,5 = e$, so erhält man den Linienzug $0\,1\,2\,3\,4\,5$ und es ist $0\,5$ die graphische Summe der gegebenen Linien. Diese Linien können auch in jeder anderen Reihenfolge zusammengesetzt werden, das Resultat ist immer dasselbe.

2. Die Multiplikation gerader Linien oder Construktion des Produktes $a\,b$.

Sind a und b zwei gerade Linien, welche mit einander multiplizirt werden sollen, so bedeutet das Produkt $a\,b$ derselben geometrisch eine Fläche, und zwar ein Rechteck, dessen Seiten die geraden Linien a und b sind. Das Produkt der Längenzahlen der geraden Linien a und b ist aber wieder eine Zahl, nämlich eine Flächenzahl, welche ebensoviele Einheiten darstellt, als das Rechteck Flächeneinheiten hat. Wenn wir nun die Multiplikation graphisch, also mit den Linien a und b ausführen wollen, so soll das Resultat derselben weder ein Rechteck noch eine Zahl sein, sondern eine gerade Linie, welche ebensoviele Einheiten darstellt, als die Flächenzahl; es soll also die Flächenzahl des Rechtecks durch die Längenzahl einer geraden Linie dargestellt werden, oder das Produkt aus zwei Linien soll wieder eine Linie sein. Hierzu gelangt man durch folgende einfache Betrachtung. Verwandelt man das Rechteck aus den Seiten a und b in ein anderes, dessen eine Seite die Längeneinheit ist, so ist die andere Seite desselben eine gerade Linie, welche ebensoviele Längeneinheiten darstellt, als das Rechteck Flächeneinheiten besitzt, und welche demnach das graphische Produkt der Linien a und b ist.

Bezeichnen wir diese Linie mit p, so muss die Gleichung bestehen

$$p\,.\,1 = a\,b.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich aber die Proportion

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{p}$$

und es ist daher die gesuchte Linie die vierte Proportionale zu den beiden gegebenen Linien a und b und der Einheit. Es kann mithin die Linie p durch die Construktion ähnlicher Dreiecke, wie die Geometrie sie lehrt, leicht gefunden werden.

Sind a und b (Fig. 8) die gegebenen geraden Linien, deren Produkt gebildet werden soll und ist m die Einheit, so mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,1 = 1$, auf dem andern Schenkel dieses Winkels $0\,a = a$ und ziehe die Gerade $1\,a$; hierauf mache man wieder auf dem ersten Schenkel des Winkels $0\,b = b$ und lege durch b eine Parallele zu $1\,a$, so schneidet diese den anderen Schenkel in p und es ist nun $0\,p$ die gesuchte Linie p; denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,b}{0\,p} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{b}{p}$$

so dass

$$1\,.\,p = a\,b.$$

Die Linie $0\,p = p$ ist mithin das graphische Produkt der Linien a und b.

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 9). Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, lege durch den Punkt 1 eine andere Gerade, welche mit der ersteren einen beliebigen Winkel bildet und mache auf dieser $1\,a = a$; hierauf lege man durch 0 und a den Strahl $0\,s$; auf der Geraden $0\,X$ mache man $0\,b = b$ und lege durch b eine Parallele zu $1\,a$, bis sie die Linie $0\,s$ im Punkte p trifft, so ist $b\,p$ die gesuchte Linie p, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1}{1\,a} = \frac{0\,b}{b\,p} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{b}{p}$$

woraus

$$p = a\,b.$$

Anstatt des beliebigen Winkels, den die Linie $1\,a$ mit der Linie $0\,X$ macht, kann man die Construktion auch so ausführen, dass dieser Winkel ein rechter wird (Fig. 10). Auf der Linie $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, errichte in 1 eine Senkrechte auf $0\,X$, mache auf der Senkrechten $1\,a = a$ und lege durch 0 und a eine Gerade $0\,s$. Hierauf mache man auf der Linie $0\,X$ die Strecke $0\,b = b$, und errichte wieder in b eine Senkrechte, bis sie die Linie $0\,s$ in p trifft, so ist $b\,p$ die gesuchte Linie p, denn es besteht wie vorhin die Proportion

$$\frac{0\,1}{1\,a} = \frac{0\,b}{b\,p} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{b}{p}$$

woraus

$$p = a\,b.$$

Hat man ein Produkt von mehr als zwei Factoren, etwa das Produkt $a\,b\,c\,d$ zu bilden, so construire man erst das Produkt $a\,b = p_1$, hierauf das Produkt $p_1\,c = p_2$ und sodann das Produkt $p_2\,d = p_3$, dann ist

$$p_3 = a\,b\,c\,d.$$

Zu diesem Zwecke mache man (Fig. 11) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, $0\,c = c$ und $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel aber $0\,a = a$. Zieht man die Gerade $1\,a$ und durch b eine Parallele zu ihr, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt p_1 und es ist $0\,p_1 = p_1$. Hierauf ziehe man die Gerade $1\,p_1$ und durch c eine Parallele zu ihr, so erhält man den Punkt p_2 und es ist $0\,p_2 = p_2$. Ferner ziehe man die Grade $1\,p_2$ und durch d eine Parallele zu ihr, so erhält man den Punkt p_3 und es ist $0\,p_1 = p_3$. Denn wir haben die Proportionen

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{p_1}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{c}{p_2}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{d}{p_3}.$$

Multiplicirt man diese Proportionen, so erhält man

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} = \frac{b}{p_1} \cdot \frac{c}{p_2} \cdot \frac{d}{p_3}$$

und hieraus

$$p_3 = a\,b\,c\,d.$$

Eine andere Construktion ist folgende (Fig. 12). Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, $0\,c = c$ und $0\,d = d$, errichte in 1 eine Senkrechte auf $0\,X$ und mache auf dieser $1\,a = a$, lege durch 0 und a eine Gerade und errichte in b eine Senkrechte, welche in p_1 mit dieser Geraden zusammentrifft, so ist $b\,p_1 = p_1$; durch p_1 lege man eine Parallele zu $0\,X$, bis sie in p'_1 mit der in 1 errichteten Senkrechten zusammentrifft, lege durch 0 und p'_1 eine Gerade und errichte in c eine Senkrechte, so treffen diese beiden Linien im Punkte p_2 zusammen, und es ist $c\,p_2 = p_2$; durch p_2 lege man eine Parallele zu $0\,X$, bis sie in p'_2 mit der in 1 errichteten Senkrechten zusammentrifft, lege durch 0 und p'_2 eine Gerade, und errichte in d eine Senkrechte auf $0\,X$, so treffen diese beiden Linien im Punkte p_3 zusammen und es ist $d\,p_3 = p_3$. Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{p_1}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{c}{p_2}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{d}{p_3}.$$

Multiplicirt man diese Proportionen, so erhält man

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{p_2} = \frac{b}{p_1} \cdot \frac{c}{p_2} \cdot \frac{d}{p_3}$$

und hieraus

$$p_3 = a\,b\,c\,d.$$

3. Verwandlung eines Produktes in ein anderes, welches einen gegebenen Faktor hat.

Soll das Produkt $a\,b$ in ein anderes verwandelt werden, welches den Faktor f hat, so ist der zu f gehörige andere Faktor zu bestimmen. Bezeichnen wir diesen Faktor mit x, so muss die Gleichung bestehen

$$f\,x = a\,b.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber die Proportion

$$\frac{f}{a} = \frac{b}{x},$$

so dass x die vierte Proportionale zu f, a und b ist. Um diese Linie zu erhalten, macht man (Fig. 13) auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,f = f$ auf dem andern Schenkel $0\,a = a$ und verbindet die Punkte f und a durch eine Gerade. Hierauf macht man auf dem ersten Schenkel $0\,b = b$ und legt durch b eine Parallele zu $f\,a$, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt x, und es ist nun $0\,x$ die gesuchte vierte Proportionale. Denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,f}{0\,a} = \frac{0\,b}{0\,x} \text{ das ist } \frac{f}{a} = \frac{b}{x}$$

und folglich

$$f\,x = a\,b.$$

4. Verwandlung mehrerer Produkte in andere, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben.

Sind mehrere Produkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ in andere zu verwandeln, welche den gemeinschaftlichen Faktor f haben, und bezeichnen wir die nichtgemeinschaftlichen Faktoren beziehungsweise mit x_1, x_2, x_3, so müssen die Gleichungen bestehen

$$f x_1 = a_1 b_1, \quad f x_2 = a_2 b_2, \quad f x_3 = a_3 b_3,$$

woraus die Proportionen sich ergeben

$$\frac{f}{a_1} = \frac{b_1}{x_1}, \quad \frac{f}{a_2} = \frac{b_2}{x_2}, \quad \frac{f}{a_3} = \frac{b_3}{x_3}$$

Diese Proportionen lassen sich auf folgende Weise construiren (Fig. 14). Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels mache man $0f = f$, $0b_1 = b_1$, $0b_2 = b_2$, $0b_3 = b_3$, und auf dem andern Schenkel mache man $0a_1 = a_1$, $0a_2 = a_2$, $0a_3 = a_3$.

Zieht man nun die Grade fa_1 und zu ihr durch b_1 eine Parallele $b_1 x_1$, so ist $0x_1 = x_1$, zieht man ferner fa_2 und zu ihr durch b_2 eine Parallele $b_2 x_2$, so ist $0x_2 = x_2$; zieht man endlich fa_3 und zu ihr die Parallele $b_3 x_3$, so ist $0x_3 = x_3$, womit die nichtgemeinschaftlichen Faktoren bestimmt sind, denn aus der Construktion folgt

$$\frac{0f}{0a_1} = \frac{0b_1}{0x_1} \text{ das ist } \frac{f}{a_1} = \frac{b_1}{x_1}$$
$$\frac{0f}{0a_2} = \frac{0b_2}{0x_2} \text{ das ist } \frac{f}{a_2} = \frac{b_2}{x_2}$$
$$\frac{0f}{0a_3} = \frac{0b_3}{0x_3} \text{ das ist } \frac{f}{a_3} = \frac{b_3}{x_3}$$

und weiter

$$f x_1 = a_1 b_1, \; f x_2 = a_2 b_2, \; f x_3 = a_3 b_3.$$

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 15). Auf einer Geraden $0X$ mache man $0f = f$, $0b_1 = b_1$, $0b_2 = b_2$, $0b_3 = b_3$, errichte in f eine Senkrechte und mache auf dieser $fa_1 = a_1$, $fa_2 = a_2$, $fa_3 = a_3$, lege durch 0 und a_1, durch 0 und a_2, durch 0 und a_3 die geraden Linien s_1, s_2, s_3 und errichte in b_1, b_2, b_3 Senkrechte, bis sie die durch a_1, a_2, a_3 gelegten Geraden in den Punkten x_1, x_2, x_3 treffen, so ist $b_1 x_1 = x_1$, $b_2 x_2 = x_2$, $b_3 x_3 = x_3$, denn es ergeben sich aus der Construktion die Proportionen

$$\frac{0f}{fa_1} = \frac{0b_1}{b_1 x_1} \text{ das ist } \frac{f}{a_1} = \frac{b_1}{x_1}$$
$$\frac{0f}{fa_2} = \frac{0b_2}{b_2 x_2} \text{ das ist } \frac{f}{a_2} = \frac{b_2}{x_2}$$
$$\frac{0f}{fa_3} = \frac{0b_3}{b_3 x_3} \text{ das ist } \frac{f}{a_3} = \frac{b_3}{x_3}$$

und aus den Proportionen folgt weiter

$$f x_1 = a_1 b_1, \quad f x_2 = a_2 b_2, \quad f x_3 = a_3 b_3.$$

5. Addition und Subtraktion von Produkten.

Die Addition und Subtraktion von Produkten lässt sich so ausführen, dass man entweder jedes einzelne Produkt construirt und die erhaltenen Linien addirt und subtrahirt, oder dass man die Produkte in andere mit einem gemeinschaftlichen Faktor verwandelt, die nichtgemeinschaftlichen Faktoren addirt und subtrahirt und hierauf das Produkt aus dem gemeinschaftlichen Faktor und der algebraischen Summe der nichtgemeinschaftlichen Faktoren construirt.

Sind z. B. die Produkte

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4$$

durch Addition und Subtraktion zu vereinigen, und will man sie erst in andere mit dem beliebigen gemeinschaftlichen Faktor f und den nichtgemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3, x_4 verwandeln, so mache man (Fig. 16) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$, $0\,b_4 = b_4$, $0\,f = f$, auf dem andern Schenkel aber $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,a_3 = a_3$, $0\,a_4 = a_4$, ziehe die Gerade $f\,a_1$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ziehe ferner $f\,a_2$ und parallel dazu $b_2\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, ebenso $f\,a_3$ und parallel dazu $b_3\,x_3$, so ist $0\,x_3 = x_3$, endlich $f\,a_4$ und parallel dazu $b_4\,x_4$, so ist $0\,x_4 = x_4$, denn aus der Construktion folgen die Proportionen

$$\frac{0\,f}{0\,a_1} = \frac{0\,b_1}{0\,x_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{f}{a_1} = \frac{b_1}{x_1}$$

$$\frac{0\,f}{0\,a_2} = \frac{0\,b_2}{0\,x_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{f}{a_2} = \frac{b_2}{x_2}$$

$$\frac{0\,f}{0\,a_3} = \frac{0\,b_3}{0\,x_3} \quad \text{das ist} \quad \frac{f}{a_3} = \frac{b_3}{x_3}$$

$$\frac{0\,f}{0\,a_4} = \frac{0\,b_4}{0\,x_4} \quad \text{das ist} \quad \frac{f}{a_4} = \frac{b_4}{x_4}$$

und aus diesen Proportionen ergibt sich dann weiter

$$f\,x_1 = a_1\,b_1, \quad f\,x_2 = a_2\,b_2, \quad f\,x_3 = a_3\,b_3, \quad f\,x_4 = a_4\,b_4.$$

Daher ist auch

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 = f x_1 - f x_2 + f x_3 - f x_4 = f(x_1 - x_2 + x_3 - x_4).$$

Auf einer beliebigen geraden Linie mache man dann mit Rücksicht auf die Vorzeichen $0\,1 = x_1$, $1\,2 = x_2$, $2\,3 = x_3$, $3\,4 = x_4$, so ist

$$0\,4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

daher endlich

$$f(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = f \,.\, 0\,4.$$

Nun mache man (Fig. 17) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,f = f$ und auf dem andern Schenkel $0\,x = 0\,4$, ziehe $1\,x$ und parallel dazu fs, so ist $0\,s$ das Resultat der Rechnung; denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,x} = \frac{0\,f}{0\,s} \text{ das ist } \frac{1}{0\,4} = \frac{f}{0\,s},$$

daher

$$0\,s = f \,.\, 0\,4 = a_1\,b_1 - a_2\,b_2 + a_3\,b_3 - a_4\,b_4.$$

6. Division gerader Linien oder Construktion des Quotienten $\frac{a}{b}$.

Der Quotient zweier Linien a und b drückt das Verhältniss dieser beiden Linien zu einander aus. Er ist daher eine Zahl, welche angibt, wie vielmal a grösser oder kleiner als b ist. Wenn wir nun diese Zahl graphisch, also als Linie darstellen wollen, so müssen wir unter der Einheit dieser Linie diejenige Längeneinheit verstehen, welche wir der Construktion zu Grunde legen. Dann verhält sich aber die Länge dieser Linie zur Längeneinheit ebenso wie sich die Linie a zur Linie b verhält. Hiernach besteht nun, wenn wir diese Zahl mit z bezeichnen die Gleichung

$$\frac{z}{1} = \frac{a}{b},$$

so dass z die vierte Proportionale zu den Linien a, b und 1 ist. Um daher z durch Construktion als Linie zu bekommen, mache man (Fig. 18) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, sowie auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und durch 1 zu ihr eine Parallele, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt z, so dass $0\,z = z$ ist, denn aus der Construktion folgt die Proportion

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z}{1} \text{ oder } z = \frac{a}{b}.$$

7. Verwandlung eines Quotienten in einen andern mit gegebenem Divisor.

Soll ein Quotient $\frac{a}{b}$ in einen andern mit dem Divisor d verwandelt werden oder was dasselbe ist, soll das Verhältniss von zwei geraden Linien in ein anderes Verhältniss verwandelt werden, von welchem die eine Linie gegeben ist, und man bezeichnet den diesem Divisor entsprechenden Dividenden mit x, so muss die Gleichung bestehen

$$\frac{x}{d} = \frac{a}{b}.$$

Zur Bestimmung von x haben wir nun dieselbe Construktion (Fig. 19). Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels mache man $0\,b = b$ und $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und zu ihr durch d eine Parallele, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt x und es ist nun $0\,x = x$; denn aus der Construktion ergibt sich die Proportion

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,x}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{x}{d}.$$

8. Verwandlung einer Linie in einen Quotienten oder das Verhältniss von zwei Linien.

Soll eine Linie a in einen Quotienten mit einem gegebenen Divisor d verwandelt werden und bezeichnen wir den gesuchten Dividenden mit x, so muss dieser Dividend zu dem gegebenen Divisor sich ebenso verhalten, wie die gegebene Linie zur Einheit, es muss daher die Gleichung bestehen

$$\frac{x}{d} = \frac{a}{1}.$$

Die Construktion ist einfach folgende (Fig. 20). Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels mache man $0\,1 = 1$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe durch 1 und a eine Gerade und durch d hierzu die Parallele $d\,x$, so ist $0\,x = x$, denn aus der Construktion folgt die Proportion

$$\frac{0\,a}{0\,1} = \frac{0\,x}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a}{1} = \frac{x}{d}, \text{ daher ist } a = \frac{x}{d}.$$

9. Verwandlung von mehreren Quotienten in andere, welche einen gegebenen Divisor haben.

Sollen mehrere Quotienten

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}$$

in andere mit dem gemeinschaftlichen Divisor d verwandelt werden, und bezeichnen wir die Dividenden beziehungsweise mit x_1, x_2, x_3, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{x_1}{d} = \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{x_2}{d} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{x_3}{d} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Diese lassen sich nun auf folgende Weise construiren.

Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 21) mache man vom Scheitel aus $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel aber mache man $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,a_3 = a_3$. Zieht man nun $a_1\,b_1$ und parallel dazu durch d eine Gerade $d\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, zieht man ferner die Gerade $a_2\,b_2$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$; zieht man endlich die Gerade $a_3\,b_3$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_3$, so ist $0\,x_3 = x_3$, denn aus der Construktion ergibt sich

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{d}$$

$$\frac{0\,a_3}{0\,b_3} = \frac{0\,x_3}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_3}{d}.$$

10. Addition und Subtraktion von Quotienten und Linien.

Aus den zuletzt angestellten Betrachtungen folgt nun auch das Verfahren, nach welchem Quotienten mit Quotienten sowol als Quotienten mit Linien zu addiren und zu subtrahiren sind.

Man verwandelt die durch Addition und Subtraktion zu vereinigenden Quotienten und Linien in Quotienten, welche denselben Divisor haben, addirt und subtrahirt die Dividenden, und gibt der Summe den gemeinschaftlichen Divisor. Dieser Quotient ist dann noch als Linie darzustellen. Hat man zu bilden

$$a - \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} + b,$$

so sind zunächst alle Glieder in Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Divisor d zu verwandeln. Bezeichnen wir die Dividenden beziehungsweise mit x, x_1, x_2, x_3 und y, so müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{x}{d} = \frac{a}{1}, \quad \frac{x_1}{d} = \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{x_2}{d} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{x_3}{d} = \frac{a_3}{b_3}, \quad \frac{y}{d} = \frac{b}{1}.$$

Um diese Gleichungen zu construiren und die gesuchten Dividenden zu bestimmen, mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 22) $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$, $0\,d = d$; auf dem andern Schenkel aber mache man $0\,a = a$, $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,a_3 = a_3$, $0\,b = b$.

Zieht man nun die Gerade $1\,a$ und durch d dazu eine Parallele $d\,x$, so ist $0\,x = x$; zieht man ferner $a_1\,b_1$ und durch d dazu eine Parallele $d\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, zieht man weiter $a_2\,b_2$ und durch d dazu eine Parallele $d\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, zieht man ebenso $a_3\,b_3$ und durch d dazu eine Parallele $d\,x_3$, so ist $0\,x_3 = x_3$; zieht man endlich $1\,b$ und durch d dazu eine Parallele $d\,y$, so ist $0\,y = y$ und sämmtliche Dividenden sind bestimmt, denn aus der Construktion ergeben sich die Proportionen

$$\frac{0\,a}{0\,1} = \frac{0\,x}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a}{1} = \frac{x}{d}$$

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{d}$$

$$\frac{0\,a_3}{0\,b_3}=\frac{0\,x_3}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_3}{b_3}=\frac{x_3}{d}$$

$$\frac{0\,b}{0\,1}=\frac{0\,y}{0\,d} \text{ das ist } \frac{b}{1}=\frac{y}{d}$$

und hieraus folgt weiter

$$a-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}+b=\frac{x}{d}-\frac{x_1}{d}+\frac{x_2}{d}-\frac{x_3}{d}+\frac{y}{d}=\frac{x-x_1+x_2-x_3+y}{d}.$$

Um diese Summe zu bilden mache man auf der Geraden $0\,X$ mit Rücksicht auf die Vorzeichen $0.1=x$, $1\,2=x_1$, $2\,3=x_2$, $3\,4=x_3$, $4\,5=y$, so ist $0\,5$ diese Summe. Bezeichnen wir sie mit s, so ist

$$s=x-x_1+x_2-x_3+y$$

und daher

$$\frac{s}{d}=\frac{x-x_1+x_2-x_3+y}{d}=a-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}+b.$$

Um endlich diesen Quotienten als Linie zu erhalten, setze man

$$\frac{s}{d}=\frac{z}{1},$$

mache auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 23) $0\,1=1$, $0\,d=d$, auf dem andern Schenkel aber $0\,s=s$, ziehe $d\,s$ und durch 1 die Parallele $1\,z$ dazu, so ist $0\,z=z$, denn es ist

$$\frac{0\,s}{0\,d}=\frac{0\,z}{0\,1} \text{ das ist } \frac{s}{d}=\frac{z}{1}, \text{ daher } \frac{s}{d}=z.$$

11. Multiplikation von Quotienten mit Quotienten und Linien.

Ist ein Quotient $\frac{a}{b}$ mit einer Linie c zu multipliciren, so setze man

$$\frac{a}{b}\,.\,c=z, \text{ dann ist } \frac{a}{b}=\frac{z}{c},$$

und es ist also z die vierte Proportionale zu a, b und c. Um diese Proportion zu construiren, mache man (Fig. 24) auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,b=b$, $0\,c=c$ und auf dem andern Schenkel $0\,a=a$, ziehe $a\,b$ und parallel zu ihr durch c die Gerade $c\,z$, so ist $0\,z=z$, denn es ist

$$\frac{0\,a}{0\,b}=\frac{0\,z}{0\,c} \text{ das ist } \frac{a}{b}=\frac{z}{c}, \text{ daher } \frac{a}{b}\,.\,c=z.$$

Die Construktion kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden (Fig. 25). Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,b=b$ und $0\,c=c$, errichte in b eine Senkrechte, auf welcher man $b\,a=a$ macht, hierauf lege man durch 0 und a die Gerade $0\,s$ und errichte in c eine Senkrechte, bis sie $0\,s$ in z trifft, so ist $c\,z=z$, denn es ist

$$\frac{0\,b}{b\,a}=\frac{0\,c}{c\,z} \text{ das ist } \frac{b}{a}=\frac{c}{z}, \text{ woraus } \frac{a}{b}\,.\,c=z.$$

Sind zwei Quotienten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ mit einander zu multipliciren, so sei

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = z.$$

Man setze nun zuerst

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{1} \text{ und hierauf } \frac{a_2}{b_2} \cdot x = z, \text{ woraus } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}$$

hervorgeht. Wir haben daher zuerst die Proportion

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{1} \text{ und sodann die Proportion } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}$$

zu construiren. Zu diesem Zwecke mache man (Fig. 26) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$ und auf dem andern Schenkel $0\,a_1 = a_1$, ziehe die Gerade $a_1\,b_1$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,x$, so ist $0\,x = x$, denn es ist

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{1}.$$

Hierauf mache man wieder auf dem ersten Schenkel $0\,x' = x$, $0\,b_2 = b_2$ und auf dem zweiten Schenkel $0\,a_2 = a_2$, ziehe die Gerade $a_2\,b_2$ und parallel zu ihr durch x' die Gerade $x'\,z$, so ist $0\,z = z$, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,z}{0\,x'} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}.$$

Durch Multiplikation der beiden Proportionen erhält man

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{x}{1} \cdot \frac{z}{x} = z.$$

Will man das andere Constructionsverfahren in Anwendung bringen, so mache man auf einer Geraden $0\,X$ (Fig. 27), $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, errichte in b_1 und b_2 Senkrechte, und mache $b_1\,a_1 = a_1$, sowie $b_2\,a_2 = a_2$, lege durch 0 und a_1 den Strahl s_1 und durch 0 und a_2 den Strahl s_2. Errichtet man nun auf $0\,X$ im Punkte 1 eine Senkrechte bis sie in x mit dem Strahle s_1 zusammentrifft, so ist $1\,x = x$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a_1\,b_1}{0\,b_1} = \frac{x\,1}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{1}.$$

Man mache ferner auf der Linie $0\,X$ die Strecke $0\,x' = 1\,x$ und errichte in x' eine Senkrechte, bis sie im Punkte z mit dem Strahle s_2 zusammentrifft, so ist $x'\,z = z$, denn wir haben die Proportion:

$$\frac{a_2\,b_2}{0\,b_2} = \frac{x'\,z}{0\,x'} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}.$$

Durch Multiplikation der beiden Proportionen erhalten wir aber:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{x}{1} \cdot \frac{z}{x} = z.$$

Soll das Produkt aus beiden Quotienten nicht als eine Linie, sondern wieder als Quotient oder als das Verhältniss zweier Linien dargestellt werden, so muss der Divisor dieses Quotienten gegeben sein. Bezeichnen wir diesen Divisor mit d, so muss die Gleichung bestehen

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{d}$$

und es tritt nun d an die Stelle, an welcher sich vorher die Einheit befand. Die Construktion wird folgende: Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 28) mache man $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$ und $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel mache man $0\,a_1 = a_1$ und $0\,a_2 = a_2$. Zieht man die Gerade $a_1\,b_1$ und zu ihr durch d die Parallele $d\,x$, so ist $0\,x = x$; macht man ferner auf dem ersten Schenkel $0\,x' = 0\,x$, zieht die Gerade $a_2\,b_2$ und zu ihr durch x' die Parallele $x'\,z$, so ist $0\,z = z$: denn es bestehen die Proportionen:

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{d}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,z}{0\,x'} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}.$$

Multiplicirt man die beiden Proportionen, so erhält man:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{x}{d} \cdot \frac{z}{x} = \frac{z}{d}.$$

Will man das andere Verfahren anwenden, so mache man auf der Geraden $0\,X$ (Fig. 29) $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$ und $0\,d = d$, errichte in b_1 und b_2 Senkrechte auf $0\,X$, mache $b_1\,a_1 = a_1$ und $b_2\,a_2 = a_2$, lege hierauf durch 0 und a_1, sowie durch 0 und a_2 die Strahlen s_1 und s_2, errichte in d eine Senkrechte auf $0\,X$, bis sie im Punkte x mit dem Strahle s_1 zusammentrifft, so ist $d\,x = x$. Nun mache man wieder auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,x' = d\,x$ und errichte in x' eine Senkrechte, bis sie mit dem Strahle s_2 im Punkte z zusammentrifft, so ist $x'\,z = z$, denn wir haben die Proportionen:

$$\frac{a_1\,b_1}{0\,b_1} = \frac{x\,d}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{d}$$

$$\frac{a_2\,b_2}{0\,b_2} = \frac{x'\,z}{0\,x'} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{z}{x}.$$

Multipliciren wir die beiden Proportionen, so erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{x}{d} \cdot \frac{z}{x} = \frac{z}{d}.$$

Sind mehr als zwei Quotienten, etwa $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$ zu multipliziren und soll das Produkt eine Linie sein, so setze man erst:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}, \text{ hierauf: } \frac{a_2}{b_2} \,.\, x_1 = x_2 \text{ und endlich: } \frac{a_3}{b_3} \,.\, x_2 = z.$$

Um dieses aber zu construiren, mache man (Fig. 30) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$ und auf dem andern Schenkel des Winkels $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,a_3 = a_3$. Zieht man hierauf die Gerade $a_1\,b_1$ und durch 1 parallel zu ihr die Gerade $1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$. Man macht nun auf dem ersten Schenkel $0\,x_1' = x_1$, zieht durch a_2 und b_2 eine Gerade und legt durch x_1' parallel zu ihr die Gerade $x_1'\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$; ferner macht man auf dem ersten Schenkel $0\,x_2' = x_2$, zieht die Gerade $a_3\,b_3$ und parallel zu ihr durch x_2' die Gerade $x_2'\,z$, so ist $0\,z = z$, denn aus der Construktion folgt:

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,x_1'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{0\,a_3}{0\,b_3} = \frac{0\,z}{0\,x_2'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{x_2}.$$

Durch Multiplikation dieser Proportionen erhält man:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{z}{x_2}, \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = z.$$

Es ist nun leicht einzusehen, wie das Verfahren für beliebig viele Quotienten fortzusetzen ist.

Will man sich der andern Construktionsweise bedienen, so mache man auf der Geraden $0\,X$ (Fig. 31) $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$ und $0\,b_3 = b_3$, errichte in b_1, b_2, b_3 Senkrechte auf $0\,X$ und mache auf diesen Senkrechten $b_1\,a_1 = a_1$, $b_2\,a_2 = a_2$, $b_3\,a_3 = a_3$; hierauf lege man durch 0 und a_1 den Strahl s_1, durch 0 und a_2 den Strahl s_2, sowie durch 0 und a_3 den Strahl s_3, errichte auf $0\,X$ in 1 eine Senkrechte, bis sie mit dem Strahle s_1 in x_1 zusammentrifft, so ist $1\,x_1 = x_1$. Man mache weiter auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,x_1' = x_1$ und errichte in x_1' eine Senkrechte, bis sie in x_2 mit dem Strahle s_2 zusammentrifft, so ist $x_1'\,x_2 = x_2$. Weiter mache man auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,x_2' = x_2$, errichte in x_2' eine Senkrechte, bis sie in z mit dem Strahle s_3 zusammentrifft, so ist $x_2'\,z = z$; denn es bestehen die Proportionen:

$$\frac{a_1\,b_1}{0\,b_1} = \frac{1\,x_1}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}$$

$$\frac{a_2\,b_2}{0\,b_2} = \frac{x_2\,x_1'}{0\,x_1'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{a_3\,b_3}{0\,b_3} = \frac{z\,x_2'}{0\,x_2'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{x_2}.$$

Durch Multiplikation dieser Proportionen erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{z}{x_2} \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = z.$$

Soll das Produkt der drei Quotienten $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$ nicht eine Linie, sondern wieder ein Quotient oder das Verhältniss zweier Linien sein und ist d der Divisor dieses Quotienten, so haben wir zu setzen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{a_2}{b_2} \cdot x_1 = x_2 \quad \text{also} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{a_3}{b_3} \cdot x_2 = z \quad \text{also} \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{x_2}$$

und diese Proportionen zu construiren. Wir machen zu diesem Zwecke (Fig. 32) auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel aber $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,a_3 = a_3$, ziehen $a_1\,b_1$ und parallel dazu durch d die Gerade $d\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$; wir machen auf dem ersten Schenkel $0\,x'_1 = x_1$, ziehen die Gerade $a_2\,b_2$ und parallel dazu durch x'_1 die Gerade $x'_1\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$; wir machen ferner auf dem ersten Schenkel $0\,x'_2 = x_2$, ziehen die Gerade $a_3\,b_3$ und parallel dazu durch x'_2 die Gerade $x'_2\,z$, so ist $0\,z = z$. Denn aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,x'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{0\,a_3}{0\,b_3} = \frac{0\,z}{0\,x'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{x_2}$$

durch Multiplikation dieser Proportionen erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_1}{d} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{z}{x_2}, \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{d}.$$

Nach dem andern Constructionsverfahren mache man auf der Geraden $0\,X$ (Fig. 33), $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,b_3 = b_3$, $0\,d = d$; errichte in b_1, b_2, b_3 Senkrechte auf $0\,X$ und mache auf diesen Senkrechten $b_1\,a_1 = a_1$, $b_2\,a_2 = a_2$, $b_3\,a_3 = a_3$; hierauf ziehe man durch 0 und a_1, 0 und a_2, 0 und a_3 die Strahlen s_1, s_2, s_3 und errichte in d auf $0\,X$ eine Senkrechte, bis sie mit dem Strahle s_1 in x_1 zusammentrifft, so ist $d\,x_1 = x_1$. Man mache weiter auf der Geraden $0\,X$, die Strecke $0\,x'_1 = x_1$, errichte in x'_1 eine Senkrechte, bis sie mit dem Strahle s_2 in x_2 zusammentrifft, so ist $x'_1\,x_2 = x_2$; man mache weiter auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,x'_2 = x_2$, errichte in x'_2 eine Senkrechte, bis sie mit dem Strahle s_3 in z zusammentrifft, so ist $x'_2\,z = z$. Denn aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{a_1\,b_1}{0\,b_1} = \frac{x_1\,d}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{a_2\,b_2}{0\,b_2} = \frac{x_2\,x'_1}{0\,x'_1} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{a_3\,b_3}{0\,b_3} = \frac{z\,x'_2}{0\,x'_2} \text{ das ist } \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{x_2}.$$

Multipliciren wir diese Proportionen, so erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{x_1}{d} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{z}{x_2}, \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{z}{d}.$$

Sind mehrere Quotienten und Linien miteinander zu multipliciren, ist etwa das Produkt

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot c_1 \cdot c_2$$

zu bilden, so gebe man den Linien den Divisor 1, setze also

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} \cdot x_1 = x_2 \text{ also } \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{c_1}{1} \cdot x_2 = x_3 \text{ also } \frac{c_1}{1} = \frac{x_3}{x_2}$$

$$\frac{c_2}{1} \cdot x_3 = z \text{ also } \frac{c_2}{1} = \frac{z}{x_3}$$

und construire diese Proportionen.

Wir machen deshalb (Fig. 34) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, und auf dem andern Schenkel $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, $0\,c_1 = c_1$, $0\,c_2 = c_2$, ziehen die Gerade $a_1\,b_1$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$; wir machen auf dem ersten Schenkel $0\,x'_1 = x_1$, ziehen die Gerade $a_2\,b_2$ und parallel zu ihr durch x'_1 die Gerade $x'_1\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$; wir machen ferner auf dem ersten Schenkel $0\,x'_2 = x_2$, ziehen die Gerade $1\,c_1$ und parallel zu ihr durch x'_2 die Gerade $x'_2\,x_3$, so ist $0\,x_3 = x_3$; wir machen endlich auf dem ersten Schenkel $0\,x'_3 = x_3$, ziehen die Gerade $1\,c_2$ und parallel zu ihr durch x'_3 die Gerade $x'_3\,z$, so ist $0\,z = z$.

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}$$

$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,x'_1} \text{ das ist } \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{0\,c_1}{0\,1} = \frac{0\,x_3}{0\,x'_2} \text{ das ist } \frac{c_1}{1} = \frac{x_3}{x_2}$$

$$\frac{0\,c_2}{0\,1} = \frac{0\,z}{0\,x'_3} \text{ das ist } \frac{c_2}{1} = \frac{z}{x_3}$$

Durch Multiplikation dieser Proportionen erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{c_1}{1} \cdot \frac{c_2}{1} = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{z}{x_3}, \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot c_1 \cdot c_2 = z.$$

Wenn man das andere Constructionsverfahren anwendet, so macht man auf der Geraden $0X$ (Fig. 35), $0\,1 = 1$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, errichtet in 1, b_1 und b_2 Senkrechte auf $0X$ und macht auf diesen Senkrechten $b_1 a_1 = a_1$, $b_2 a_2 = a_2$, $1\,c_1 = c_1$ und $1\,c_2 = c_2$, zieht durch 0 und a_1, 0 und a_2, 0 und c_1, 0 und c_2, die Strahlen s_1, s_2, s' und s''. Die in 1 errichtete Senkrechte, schneidet den Strahl s_1 in x_1 und es ist $1\,x_1 = x_1$. Man mache auf der Geraden $0X$ die Strecke $0\,x'_1 = x_1$, errichte in x'_1 eine Senkrechte, bis sie den Strahl s_2 in x_2 trifft, so ist $x'_1 x_2 = x_2$. Man mache ferner auf der Geraden $0X$ die Strecke $0\,x'_2 = x_2$, errichte in x'_2 eine Senkrechte, bis sie den Strahl s' in x_3 trifft, so ist $x'_2 x_3 = x_3$. Man mache endlich auf der Geraden $0X$ die Strecke $0\,x'_3 = x_3$ und errichte in x'_3 eine Senkrechte, bis sie den Strahl s'' in z trifft, so ist $x'_3 z = z$.

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{a_1 b_1}{0\,b_1} = \frac{x_1\,1}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{1}$$

$$\frac{a_2 b_2}{0\,b_2} = \frac{x_2 x'_1}{0\,x'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{c_1\,1}{0\,1} = \frac{x_3 x'_2}{0\,x'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{c_1}{1} = \frac{x_3}{x_2}$$

$$\frac{c_2\,1}{0\,1} = \frac{x'_3 z}{0\,x'_3} \quad \text{das ist} \quad \frac{c_2}{1} = \frac{z}{x_3}.$$

Durch Multiplikation dieser Proportionen erhalten wir:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{c_1}{1} \cdot \frac{c_2}{1} = \frac{x_1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \frac{z}{x_3}, \text{ das ist aber } \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot c_1 \cdot c_2 = z.$$

Soll das Resultat dieser Multiplikation nicht eine Linie, sondern wieder ein Quotient oder das Verhältniss zweier Linien sein und ist d der Divisor dieses Quotienten, so tritt überall d an die Stelle von 1, indem das Verfahren übrigens dasselbe bleibt.

12. Division von Quotienten mit Quotienten und Linien.

Ist ein Quotient $\frac{a_1}{b_1}$ durch einen andern Quotienten $\frac{a_2}{b_2}$ zu dividiren, so dass man hat

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2},$$

so verwandle man beide Quotienten in andere, welche denselben Divisor haben und führe die Division mit diesen Quotienten aus, dann erhält man einen Quotienten oder das Verhältniss zweier Linien; dieser Quotient lässt sich weiter durch eine Linie darstellen. Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Divisor mit d und die Dividenden beziehungsweise mit x_1 und x_2, so erhält man:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{d} \text{ und weiter } \frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2}$$

und es ist somit das Resultat der Division das Verhältniss der beiden Linien x_1 und x_2. Will man endlich das Resultat der Division als Linie haben, so bilde man weiter

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1},$$

wo dann die Linie z der Quotient aus beiden Quotienten ist.

Um diese Constructionen auszuführen, mache man (Fig. 36) auf einem Schenkel eines Winkels $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel aber $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$. Man ziehe die Gerade $a_1\,b_1$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$; man ziehe ferner die Gerade $a_2\,b_2$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$. Man mache dann weiter auf dem ersten Schenkel $0\,x'_2 = x_2$ und $0\,1 = 1$, ziehe die Gerade $x'_2\,x_1$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,z$, so ist $0\,z = z$.

Aus dieser Construktion ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,a_1}{0\,b_1} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{x_1}{d}$$
$$\frac{0\,a_2}{0\,b_2} = \frac{0\,x_2}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_2}{d}$$
$$\frac{0\,x_1}{0\,x'_2} = \frac{0\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

und hieraus ergibt sich weiter

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2} = z$$

Man kann auch hier das andere Construktionsverfahren in Anwendung bringen.

Soll ein Quotient $\frac{a}{b}$ durch eine Linie c dividirt werden, so hat man die Form

$$\frac{a}{b} : c \text{ wofür man setzt } \frac{a}{b} : \frac{c}{1}$$

und dasselbe Verfahren anwendet. Ist d der gemeinschaftliche Divisor und sind x_1 und x_2 beziehungsweise die Dividenden, so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{x_1}{d}, \quad \frac{c}{1} = \frac{x_2}{d} \text{ und daher } \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2}$$

Soll nun das Verhältniss der beiden Linien x_1 und x_2 durch eine Linie z dargestellt werden, so hat man weiter

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

zu setzen und dieses zu construiren, woraus sich dann z ergibt.

Um diese Construktionen auszuführen, macht man (Fig. 37) auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, $0\,c = c$, zieht die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ferner zieht man die Gerade $1\,c$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $\mathrm{d}\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$; weiter macht man auf dem ersten Schenkel $0\,x'_2 = x_2$, zieht die Gerade $x'_2\,x_1$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,z$, so ist $0\,z = z$.

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{0\,c}{0\,1} = \frac{0\,x_2}{0\,d} \text{ das ist } \frac{c}{1} = \frac{x_2}{d}$$

$$\frac{0\,x_1}{0\,x'_2} = \frac{0\,z}{0\,1} \text{ das ist } \frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

und hieraus folgt dann weiter:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

Soll eine Linie c durch einen Quotienten $\frac{a}{b}$ dividirt werden, so hat man die Form

$$c : \frac{a}{b} \text{ wofür man setzt } \frac{c}{1} : \frac{a}{b}$$

und dasselbe Verfahren wieder anwendet. Ist d der gemeinschaftliche Divisor und sind x_1 und x_2 beziehungsweise die Dividenden, so wird

$$\frac{c}{1} = \frac{x_1}{d};\ \frac{a}{b} = \frac{x_2}{d} \text{ daher } \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2}$$

Soll endlich das Verhältniss der beiden Linien x_1 und x_2 durch eine Linie z dargestellt werden, so hat man weiter

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

zu setzen und dieses zu construiren. Man mache zu diesem Zwecke (Fig. 38) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, $0\,c = c$, ziehe die Gerade $c\,1$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $\mathrm{d}\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$; ferner ziehe man die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$. Weiter mache man auf dem ersten Schenkel $x'_2 = x_2$ ziehe die Gerade $x'_2 x_1$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1 z$, so ist $0 z = z$.

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,c}{0\,1} = \frac{0\,x_1}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{c}{1} = \frac{x_1}{d}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,x_2}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{x_2}{d}$$

$$\frac{0\,x_1}{0\,x'_2} = \frac{0\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

und aus diesen Proportionen folgt dann weiter

$$\frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{x_1}{d} : \frac{x_2}{d} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{1}$$

Hat man mit mehreren Quotienten nach einander zu dividiren, so dass man die Form hat

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} : \frac{a_3}{b_3} : \frac{a_4}{b_4} \ldots .$$

so bilde man zuerst

$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{x_1}{x_2}$ sodann $\frac{x_1}{x_2} : \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1}{y_2}$ und ferner $\frac{y_1}{y_2} : \frac{a_4}{b_4} = \frac{z_1}{z_2}$ u. s. w.

Da die Division mit einem Quotienten auch Multiplikation mit seinem umgekehrten Werthe ist, so lässt sich in allen hier betrachteten Fällen die Division auf die Multiplikation zurückführen, wenn man den Divisor umkehrt.

13. Das Potenziren von Linien.

Wenn in dem Producte $a\,b\,c\,d \ldots$ sämmtliche Faktoren einander gleich werden, so geht es in eine Potenz über, wie denn überhaupt die Potenzirung aus der Multiplikation hervorgeht. Daher lässt sich auch die Potenzirung durch dieselben Constructionen ausführen, durch welche die Multiplikation ausgeführt wurde.

Wenn wir die Potenzen

$$a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 \ldots$$

bilden wollen, so machen wir entsprechend einer früheren Construktion (Fig. 39) auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,1 = 1$ und $0\,a' = a$, auf dem anderen Schenkel aber $0\,a = a$. Ziehen wir nun die Gerade $1\,a$ und parallel zu ihr durch a' die Gerade $a'p_1$, so ist $0\,p_1 = p_1$, ziehen wir weiter die Gerade $1\,p_1$ und parallel zu ihr durch a' die Gerade $a'p_2$, so ist $0\,p_2 = p_2$, ziehen wir ferner die Gerade $1\,p_2$ und parallel zu ihr durch a' die Gerade $a'p_3$, so ist $0\,p_3 = p_3$ und es ist leicht einzusehen, wie diese Construktion weiter fortgesetzt werden kann. Aus der Construktion aber ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,a'}{0\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1}$$
$$\frac{0\,1}{0\,p_1} = \frac{0\,a'}{0\,p_2} \text{ das ist } \frac{1}{p_1} = \frac{a}{p_2}$$
$$\frac{0\,1}{0\,p_2} = \frac{0\,a'}{0\,p_3} \text{ das ist } \frac{1}{p_2} = \frac{a}{p_3} \text{ u. s. f.}$$

Hieraus folgt nun weiter

$$p_1 = a \,.\, a = a^2,\ p_2 = a\,p_1 = a^3,\ p_3 = a\,p_2 = a^4 \text{ u. s. f.}$$

und wir sehen daher, dass die geraden Linien

$$0\,a,\ 0\,p_1,\ 0\,p_2,\ 0\,p_3 \ldots$$

die aufeinander folgenden Potenzen von a darstellen.

Eine andere Construktion, ebenfalls einer früheren Construktion entsprechend, ist die folgende (Fig. 40):

Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, $0\,a = a$, und errichte in 1 und a Senkrechte auf $0\,X$; hierauf mache man auf der durch 1 gelegten Senkrechten $1\,a' = a$ und lege durch 0 und a' eine Gerade, welche die durch a gelegte Senkrechte in p_1 trifft, so ist $a\,p_1 = p_1$. Durch p_1 lege man $p_1\,p'_1$ parallel zu $0\,X$ und ziehe $0\,p'_1$ bis p_2, so ist $a\,p_2 = p_2$; durch p_2 lege man $p_2\,p'_2$ parallel zu $0\,X$ und ziehe $0\,p'_2$ bis p_3, so ist $a\,p_3 = p_3$ und es ist leicht einzusehen, wie diese Construktion weiter fortzusetzen ist.

Aus der Construktion ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,1}{1\,a'} = \frac{0\,a}{a\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1}$$
$$\frac{0\,1}{1\,p'_1} = \frac{0\,a}{a\,p_2} \text{ das ist } \frac{1}{p_1} = \frac{a}{p_2}$$
$$\frac{0\,1}{1\,p'_2} = \frac{0\,a}{a\,p_3} \text{ das ist } \frac{1}{p_2} = \frac{a}{p_3} \text{ u. s. f.}$$

Aus diesen Proportionen folgt nun weiter

$$p_1 = a \,.\, a = a^2,\ p_2 = a \,.\, p_1 = a^3,\ p_3 = a \,.\, p_2 = a^4 \text{ u. s. f.}$$

und es ergibt sich, dass die Linien

$$a\,p_1,\ a\,p_2,\ a\,p_3 \ldots$$

die aufeinander folgenden Potenzen von a sind.

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 41). Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels mache man $0\,1 = 1$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$ und ziehe die Gerade $1\,a$, sodann mache man wieder auf dem ersten Schenkel $0\,a' = a$ und ziehe durch a' eine Parallele zu $1\,a$, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt p_1 und es ist $0\,p_1 = p_1$. Man mache weiter auf dem ersten Schenkel $0\,p'_1 = p_1$ und ziehe durch p'_1 eine Parallele zu $1\,a$, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt p_2 und es ist $0\,p_2 = p_2$. Man mache ferner auf dem ersten Schenkel $0\,p'_2 = p_2$ und ziehe durch p'_2 eine Parallele zu $1\,a$, so erhält man auf dem andern Schenkel den Punkt p_3 und es ist $0\,p_3 = p_3$, und es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren weiter fortgesetzt werden kann.

Aus der Construktion ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,a'}{0\,p_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1}$$

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,p'_1}{0\,p_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,p'_2}{0\,p_3} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{p_2}{p_3} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus den Proportionen folgt dann weiter

$$p_1 = a\,.\,a = a^2,\quad p_2 = a\,.\,p_1 = a^3,\quad p_3 = a\,.\,p_2 = a^4 \quad \text{u. s. w.}$$

Es sind daher die Linien

$$0\,p_1,\ 0\,p_2,\ 0\,p_3\ \ldots$$

die aufeinander folgenden Potenzen von a.

Noch eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 42).

Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, errichte in 1 eine Senkrechte, mache auf dieser $1\,a = a$ und lege durch 0 und a den Strahl $0\,s$. Hierauf mache man wieder auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,a' = a$ und errichte in a' eine Senkrechte bis sie den Strahl s im Punkte p_1 trifft, so ist $a'p_1 = p_1$; man mache ferner auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,p'_1 = p_1$, errichte in p'_1 eine Senkrechte, bis sie den Strahl s in p_2 trifft, so ist $p'_1\,p_2 = p_2$; in derselben Weise mache man auf $0\,X$ die Strecke $0\,p'_2 = p_2$, errichte in p'_2 eine Senkrechte, bis sie den Strahl s in p_3 trifft, so ist $p'_2\,p_3 = p_3$ und es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren weiter fortgesetzt werden kann.

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen

$$\frac{0\,1}{1\,a} = \frac{0\,a'}{a'p_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1}$$

$$\frac{0\,1}{1\,a} = \frac{0\,p'_1}{p'_1\,p_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{0\,1}{1\,a} = \frac{0\,p'_2}{p'_2\,p_3} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{p_2}{p_3} \quad \text{u. s. w.}$$

und aus den Proportionen folgt weiter

$$p_1 = a\,.\,a = a^2,\quad p_2 = a\,.\,p_1 = a^3,\quad p_3 = a\,.\,p_2 = a^4 \quad \text{u. s. w.}$$

so dass die Linien

$$a'\,p_1,\ p'_1\,p_2,\ p'_2\,p_3\ \ldots$$

die aufeinander folgenden Potenzen von a darstellen.

14. Das Potenziren von Quotienten oder Verhältnissen zweier Linien.

Ist ein Quotient oder ein Verhältniss $\frac{a}{b}$ zu potenziren und soll die Potenz als Linie dargestellt werden, so hat man zunächst zu beachten, ob das Verhältniss grösser oder kleiner als eins ist, ob also a grösser oder kleiner als b ist. Denn ist a grösser als b, so wachsen die Potenzen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ und die Linien, welche diese Potenzen darstellen, werden daher immer grösser, weshalb es nöthig ist, eine möglichst kleine Einheit, etwa einen bestimmten Theil der ursprünglichen Einheit, der Construktion zu Grunde zu legen. Ist aber a kleiner als b, so nehmen die Potenzen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ ab, und die Linien, welche diese Potenzen darstellen, werden daher immer kleiner, weshalb es nöthig ist, eine möglichst grosse Einheit, etwa ein bestimmtes Vielfache der ursprünglichen Einheit der Construktion zu Grunde zu legen.

Ist nun zunächst a grösser als b, so lassen sich folgende Construktionen ausführen. Auf dem einen Schenkel eines Winkels (Fig. 43) mache man $0\,1 = 1$, $0\,b = b$ und auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,z$. Hierauf mache man auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z$ und ziehe durch z' die Gerade $z'\,z_1$ parallel zu $1\,z$, ziehe ferner $1\,z_1$ und parallel dazu durch z' die Gerade $z'\,z_2$, ziehe weiter $1\,z_2$ und parallel dazu durch z' die Gerade $z'\,z_3$ und setze das Verfahren in derselben Weise fort, dann ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{0\,z}{0\,1} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{0\,z_1}{0\,1} = \frac{0\,z_2}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{z_1}{1} = \frac{z_2}{z}$$

$$\frac{0\,z_2}{0\,1} = \frac{0\,z_3}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{z_2}{1} = \frac{z_3}{z} \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus folgt nun weiter

$$z_1 = z\,.\,z = z^2, \quad z_2 = z\,.\,z_1 = z^3, \quad z_3 = z\,.\,z_2 = z^4 \text{ u. s. w.}$$

Da nun aber

$$z = \frac{a}{b}, \text{ so ist } z_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3, \quad z_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{u. s. w.}$$

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig 44). Auf dem einen Schenkel eines Winkels mache man $0\,b = b$, $0\,1 = 1$; auf dem andern

Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,z$; so erhält man auf dem zweiten Schenkel den Punkt z; hierauf mache man auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z_1$ und ziehe durch z' eine Parallele zu $a\,b$, so erhält man auf dem zweiten Schenkel den Punkt z_1; man mache wieder auf dem ersten Schenkel $0\,z'_1 = 0\,z_1$, und ziehe durch z'_1 eine Parallele zu $a\,b$, so erhält man auf dem zweiten Schenkel den Punkt z_2; man mache wieder auf dem ersten Schenkel $0\,z'_2 = 0\,z_2$ und ziehe durch z'_2 eine Parallele zu $a\,b$, so erhält man auf dem zweiten Schenkel den Punkt z_3 u. s. w. Hieraus ergeben sich nun folgende Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$
$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$
$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$
$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Multiplicirt man nun die ersten zwei, drei, vier u. s. w. Proportionen, so erhält man

$$\frac{a}{b} = z$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} = z_1$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = z_2$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = z_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Man hätte auch folgende Proportionen aufstellen können:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$
$$\frac{0\,z}{0\,1} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_1}{z}$$
$$\frac{0\,z}{0\,1} = \frac{0\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_2}{z_1}$$
$$\frac{0\,z}{0\,1} = \frac{0\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{a}{b} = z, \quad z_1 = z \,.\, z = z^2, \quad z_2 = z \,.\, z_1 = z^3, \quad z_3 = z \,.\, z_2 = z^4 \quad \text{u. s. w.}$$

Da nun

$z = \frac{a}{b}$ so ist $z_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, $z_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3$, $z_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^4$ u. s. w.

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 45). Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, errichte in b eine Senkrechte auf $0\,X$ und mache diese Senkrechte $b\,a = a$, hierauf lege man durch 0 und a den Strahl $0\,s$ und errichte in 1 auf $0\,X$ eine Senkrechte bis zum Strahle $0\,s$, so erhält man den Punkt z. Man mache auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z' = 1\,z$ und $z'\,z_1$ senkrecht auf $0\,X$, man mache ferner auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z'_1 = z'\,z_1$ und $z'_1\,z_2$ senkrecht auf $0\,X$, man mache ferner auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z'_2 = z'_1\,z_2$ und $z'_2\,z_3$ senkrecht auf der Geraden $0\,X$ u. s. w., dann ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{1\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$
$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$
$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_1\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$
$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_2\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. f.}$$

Multiplicirt man nun die ersten zwei, drei, vier u. s. w. Proportionen, so erhält man

$$\frac{a}{b} = z$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} = z_1$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = z_2$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = z_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Man kann auch folgende Proportionen aufstellen:

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{1\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$
$$\frac{1\,z}{0\,1} = \frac{z'\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_1}{z}$$
$$\frac{1\,z}{0\,1} = \frac{z'_1\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_2}{z_1}$$
$$\frac{1\,z}{0\,1} = \frac{z'_2\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{z}{1} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Hieraus ergibt sich

$\frac{a}{b} = z$, $z_1 = z \,.\, z = z^2$, $z_2 = z \,.\, z_1 = z^3$, $z_3 = z \,.\, z_2 = z^4$ u. s. w.

Und weil

$$z = \frac{a}{b} \text{ so ist } z_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3, \quad z_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ u. s. f.}$$

Ist ferner a kleiner als b, so sind die Construktionen in folgender Weise auszuführen. Auf dem einen Schenkel eines Winkels (Fig. 46) mache man $0\,1 = 1$ und nehme diese Einheit möglichst gross, ferner $0\,b = b$ und auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch den Punkt 1 die Gerade $1\,z$. Hierauf mache man auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z$ und ziehe $z'\,z_1$ parallel zu $1\,z$, ziehe ferner $1\,z_1$ und parallel dazu $z'\,z_2$, ziehe $1\,z_2$ und parallel dazu $z'\,z_3$ u. s. f. Es ergeben sich dann die Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{0\,z}{0\,1} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \text{ das ist } \frac{z}{1} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{0\,z_1}{0\,1} = \frac{0\,z_2}{0\,z'} \text{ das ist } \frac{z_1}{1} = \frac{z_2}{z}$$

$$\frac{0\,z_2}{0\,1} = \frac{0\,z_3}{0\,z'} \text{ das ist } \frac{z_2}{1} = \frac{z_3}{z} \text{ u. s. w.}$$

und hieraus folgt weiter

$$\frac{a}{b} = z, \quad z_1 = z\,.\,z = z^2, \quad z_2 = z\,.\,z_1 = z^3, \quad z_3 = z\,.\,z_2 = z^4 \text{ u. s. w.}$$

und weil

$$z = \frac{a}{b} \text{ so ist } z_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3, \quad z_3 = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \text{ u. s. f.}$$

Eine andere Construktion ist folgende (Fig. 47). Auf dem einen Schenkel eines Winkels mache man $0\,1 = 1$, $0\,b = b$ und auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch 1 die Gerade $1\,z$, mache auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z$ und $z'\,z_1$ parallel zu $a\,b$, mache wieder auf dem ersten Schenkel $0\,z'_1 = 0\,z_1$ und $z'_1\,z_2$ parallel zu $a\,b$ u. s. f., dann hat man die Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,1} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_2}{0\,z'_1} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_3}{0\,z'_2} \text{ das ist } \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \text{ u. s. w.}$$

und aus diesen Proportionen weiter

$$\frac{a}{b} = z$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} = z_1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = z_2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = z_3 \text{ u. s. w.}$$

Eine andere Construktion ist folgende (Fig. 48). Auf einer Geraden $0\,X$ mache man $0\,1 = 1$, $0\,b = b$, errichte in b eine Senkrechte und mache $b\,a = a$. Hierauf lege man durch 0 und a den Strahl $0\,s$ und errichte in 1 die Senkrechte $1\,z$, mache auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z' = 1\,z$ und errichte die Senkrechte $z'\,z_1$, mache ferner auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z'_1 = z'\,z_1$ und errichte die Senkrechte $z'_1\,z_2$ u. s. f., dann hat man die Proportionen:

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{1\,z}{0\,1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_1\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_2\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

und hieraus weiter

$$\frac{a}{b} = z$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} = z_1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = z_2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = z_3 \text{ u. s. w.}$$

Ist ferner ein Quotient $\frac{a}{b}$ zu potenziren, und soll die Potenz nicht als eine gerade Linie, sondern als das Verhältniss von zwei geraden Linien dargestellt werden, so muss der Divisor dieses Verhältnisses gegeben sein oder beliebig angenommen werden können. Hierbei hat man ebenso zu beachten, ob das Verhältniss grösser oder kleiner als 1 ist, ob also a grösser oder kleiner als b ist. Denn ist a grösser als b, so wachsen auch hier die Potenzen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ und die Linien, welche diese Potenzen darstellen, werden daher immer grösser, weshalb es nöthig ist, einen möglichst kleinen Divisor der Construktion zu Grunde zu legen. Ist aber a kleiner als b, so nehmen die Potenzen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ beständig ab und die Linien, welche diese Potenzen darstellen, werden daher immer kleiner, weshalb es nöthig ist, einen möglichst grossen Divisor der Construktion zu Grunde zu legen.

Es sind hier dieselben Construktionen anwendbar, welche vorher ausgeführt wurden, wenn man überall an die Stelle von 1 den Divisor d treten lässt. Wir wollen indessen auch hier einige Construktionen ausführen.

Es sei zunächst a grösser als b.

Man mache auf dem einen Schenkel eines Winkels (Fig. 49) $0\,b = b$, $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehe die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,z$, mache auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z$ und dann $z'\,z_1$ parallel zu $a\,b$; mache ferner auf dem ersten Schenkel $0\,z'_1 = 0\,z_1$ und dann $z'_1\,z_2$ parallel zu $a\,b$; mache wieder auf dem ersten Schenkel $0\,z'_2 = 0\,z_2$ und hierauf $z'_2\,z_3$ parallel zu $a\,b$ u. s. w., dann ergeben sich folgende Proportionen:

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{d}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. f.}$$

Hieraus folgt dann weiter

$$\frac{a}{b} = \frac{z}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} = \frac{z_1}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{d}$$

Es sei ferner a kleiner als b. Man mache auf einer Geraden $0\,X$ (Fig. 50) $0\,b = b$ und $0\,d = d$, errichte in b eine Senkrechte und mache auf derselben $b\,a = a$, lege durch 0 und a den Strahl $0\,s$ und errichte in d die Senkrechte $d\,z$, mache auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z' = dz$ und errichte die Senkrechte $z'\,z_1$, mache wieder auf der Geraden $0\,X$ die

Strecke $0\,z'_1 = z'\,z_1$ und errichte die Senkrechte $z'_1\,z_2$, mache ferner auf der Geraden $0\,X$ die Strecke $0\,z'_2 = z'_1\,z_2$ und errichte die Senkrechte $z'_2\,z_3$ u. s. f., so hat man folgende Proportionen:

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z\,d}{0\,d} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z}{d}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'\,z_1}{0\,z'} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_1\,z_2}{0\,z'_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{a\,b}{0\,b} = \frac{z'_2\,z_3}{0\,z'_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{a}{b} = \frac{z_3}{z_2} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Proportionen folgt weiter

$$\frac{a}{b} = \frac{z}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} = \frac{z_1}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{d}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{z}{d} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_3}{d} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Potenzirung eines Quotienten lässt sich auch in der Weise ausführen, dass man jedes Glied desselben potenzirt und die erhaltenen Potenzen der Glieder dividirt.

15. Potenzen mit negativen Exponenten.

Sind Potenzen mit negativen Exponenten graphisch darzustellen, so hat man zu beachten, dass

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Setzt man daher

$$\frac{1}{a} = z, \text{ construirt } z \text{ durch die Proportion } \frac{1}{a} = \frac{z}{1}$$

und bildet die Potenzen von z, so erhält man die Potenzen von $\frac{1}{a}$ oder von a^{-1}. Um dieses auszuführen, mache man (Fig. 51) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,a = a$, $0\,1' = 1$ und auf dem andern Schenkel $0\,1 = 1$, ziehe die Gerade $1\,a$ und parallel zu ihr $1'\,z$, mache auf dem ersten Schenkel $0\,z' = 0\,z$ und ziehe parallel zu $1\,a$ die Gerade $z'\,z_1$, mache wieder auf dem ersten Schenkel $0\,z'_1 = 0\,z_1$ und ziehe parallel zu $1\,a$ die Gerade $z'_1\,z_2$ u. s. w., so ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,z}{0\,1'} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{z}{1}$$

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,z_1}{0\,z'} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{z_1}{z}$$

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,z_2}{0\,z'_1} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,z_3}{0\,z'_2} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{z^3}{z_2} \text{ u. s. w.}$$

und hieraus folgt weiter, indem man zwei, drei u. s. w. Proportionen multiplicirt

$$\frac{1}{a} = \frac{z}{1}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} = z_1$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} = z_2$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^4 = \frac{z}{1} \cdot \frac{z_1}{z} \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = z_3 \text{ u. s. w.}$$

16. Das Ausziehen der zweiten Wurzel.

Ist $\sqrt{a}$ zu construiren, so haben wir zu beachten, dass $a = 1 \,.\, a$ ist; wir haben daher $\sqrt{a} = \sqrt{1 \,.\, a}$ und setzen wir $\sqrt{1 \,.\, a} = x$, so ist x die mittlere Proportionale zwischen 1 und a. Zur Bestimmung der mittleren Proportionalen dienen aber folgende Construktionen.

Auf einer Geraden mache man (Fig. 52) $0\,a = a$ und $a\,1 = 1$, beschreibe über $0\,1$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in a eine Senkrechte auf dem Durchmesser, bis sie die Kreislinie in x trifft, dann ist

$$a\,x = x = \sqrt{a}.$$

Auf einer Geraden mache man (Fig. 53) $0\,a = a$, $a\,1 = 1$ beschreibe über $0\,a$ als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in 1 eine Senkrechte auf dem Durchmesser, bis sie die Kreislinie in x trifft und ziehe $a\,x$, so ist

$$a\,x = x = \sqrt{a}.$$

Auf einer Geraden (Fig. 54) mache man $0\,a = a$, $a\,1 = 1$, beschreibe über $0\,1$ als Durchmesser einen Halbkreis und lege an diesen von a aus die Tangente $a\,x$, so ist

$$a\,x = x = \sqrt{a}.$$

Auf einer Geraden (Fig. 55) mache man $0\,a = a$, $0\,1 = 1$ und $0\,b = 1\,a$, beschreibe dann aus a mit $a\,0$ und aus b mit $b\,1$ die Kreisbogen, welche sich in x schneiden, zieht man dann $0\,x$ und $1\,x$, so ist

$$0\,x = 1\,x = x = \sqrt{a}.$$

Hat man $\sqrt{a\,b}$ zu bilden, so sind die Construktionen dieselben wie vorher, wenn man überall b an die Stelle von 1 treten lässt.

Hat man $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zu bilden, so construire man zuerst $\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$ und hierauf $\sqrt{x}$.

Hat man $\sqrt{a^m}$ zu bilden, so construire man zuerst $a^m = x$ und sodann $\sqrt{x}$.

Hat man $\sqrt{\sqrt{a}}$ zu bilden, so construire man zuerst $\sqrt{a} = x$ und sodann $\sqrt{x}$.

17. Die logarithmische Linie.

Wenn man nach Fig. 40 die Potenzen von a construirt hat (Fig. 56), und trägt auf der Geraden $0\,X$ die Einheit noch mehrere male auf, so dass $0\,1 = 1\;2 = 2\;3 = 3\;4 \ldots = 1$ ist, errichtet sodann in den Punkten 0, 2, 3 4, ... Senkrechte auf $0\,X$, macht $0\,1' = 1$ und zieht durch p_1, p_2, p_3 ... Parallele zu $0\,X$, so dass die durch p_1 gelegte Parallele die durch 2 gelegte Senkrechte in a_2, die durch p_2 gelegte Parallele die durch 3 gelegte Senkrechte in a_3, die durch p_3 gelegte Parallele die durch 4 gelegte Senkrechte in a_4 trifft u. s. w. und man verbindet die Punkte 1', a_1, a_2, a_3 ... stetig mit einander, so erhält man eine Kurve, für welche folgende Beziehungen bestehen.

Während die Abstände auf der Geraden $0\,X$ von 0 aus wie die natürlichen Zahlen wachsen, also eine arithmetische Reihe bilden, wachsen die den Abständen zugehörigen Senkrechten nach Potenzen von a, und bilden also eine geometrische Reihe, und zwar so, dass jede Zahl auf der Geraden $0\,X$ der Potenz-Exponent für diejenige Senkrechte ist, welche in dem mit der Zahl bezeichneten Punkte errichtet wurde, denn die in den Punkten 1, 2, 3, 4, ... errichteten Senkrechten stellen beziehungsweise die Potenzen a, a^2, a^3, a^4 ... dar.

Bezeichnet man daher allgemein den Abstand auf der Geraden $0\,X$ von 0 aus mit x und die Senkrechte, welche in dem betreffenden Abstande errichtet ist mit y, so lassen sich die hier für x und y bestehenden Beziehungen durch die Gleichung

$$y = a^x$$

darstellen. Denn setzt man in dieser Gleichung der Reihe nach

$x = 0$ so ist $y = a^0 = 1$

$x = 1$ so ist $y = a$

$x = 2$ so ist $y = a^2$

$x = 3$ so ist $y = a^3$ u. s. w.

Betrachtet man nun die Linie a als die Basis eines logarithmischen Systems, so ist zufolge der obigen Gleichung

$$x = \log y$$

und es ist daher der Abstand auf der Geraden $0\,X$ von 0 aus gerechnet der Logarithmus, die in diesem Abstande errichtete Senkrechte aber der diesem Logarithmus entsprechende Numerus. Wegen dieser Eigenschaft wird die Kurve eine logarithmische Linie genannt.

Will man die Linie über null hinaus auf der entgegengesetzten Seite fortsetzen, so werden die Logarithmen negativ und daher die Potenzen kleiner als die Einheit, also gebrochene Zahlen oder Brüche. Zu diesem Zwecke hat man die Potenzen von a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} ... zu bilden, auf der Linie $0\,X$ die Einheit nach einander aufzutragen, so dass man die Punkte -1, -2, -3, ... erhält, in diesen Punkten Senkrechte zu errichten und diese Senkrechten gleich den Linien a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} u. s. w. zu machen.

18. Operationen mit der logarithmischen Linie.

Hat man nun für irgend eine Basis eine solche logarithmische Linie construirt, wobei es für die Construktion zweckmässig ist, wenn sich die Basis nur wenig von der Einheit unterscheidet, so lassen sich mit Hilfe der logarithmischen Linie alle diejenigen Operationen graphisch ausführen, welche mit einer Logarithmentafel arithmetisch ausgeführt werden.

Für die Multiplikation hat man Folgendes: Ist das Produkt $b\,c$ zu bilden, so trage man b und c in die logarithmische Linie (Fig. 57) ein. Zu diesem Zwecke mache man auf der Geraden $0\,Y$ von 0 aus $0\,b = b$, $0\,c = c$, lege durch b und c Parallele zu $0\,X$, bis sie die Kurve in y_1 und y_2 treffen und construire die Senkrechten $y_1\,x_1$ und $y_2\,x_2$, so ist

$$x_1\,y_1 = b,\; x_2\,y_2 = c \text{ und daher } 0\,x_1 = \log b,\; 0\,x_2 = \log c.$$

Nun ist für ein jedes Logarithmensystem

$$\log (b\,c) = \log b + \log c.$$

Macht man daher $x_1\,x = 0\,x_2$ oder $x_2\,x = 0\,x_1$, so ist

$$\begin{aligned} 0\,x &= 0\,x_1 + 0\,x_2 \\ &= \log b + \log c \\ &= \log (b\,c). \end{aligned}$$

Errichtet man in x die Senkrechte $x\,y$, so ist folglich

$$x\,y = b\,c.$$

Für die Division hat man Folgendes: Ist der Quotient $\frac{c}{b}$ zu bilden, so ist wieder

$$x_1\,y_1 = b,\; x_2\,y_2 = c, \text{ sowie } 0\,x_1 = \log b,\; 0\,x_2 = \log c.$$

Nun ist aber

$$\log \frac{c}{b} = \log c - \log b,$$

macht man daher $x_2 x' = 0 x_1$ in entgegengesetzter Richtung, so ist

$$\begin{aligned} 0 x' &= 0 x_2 - 0 x_1 \\ &= \log c - \log b \\ &= \log \frac{c}{b} \end{aligned}$$

Construirt man die Senkrechte $x' y'$, so ist

$$x' y' = \frac{c}{b}$$

Bildet man den Quotienten $\frac{b}{c}$ so ist

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c,$$

weil aber b kleiner als c, so ist auch $\log b$ kleiner als $\log c$ und folglich die Differenz $\log b - \log c$ negativ. Macht man daher $x_1 x'' = 0 x_2$ in entgegengesetzter Richtung, so ist

$$- 0 x'' = 0 x_1 - 0 x_2 \text{ und daher } - 0 x'' = \log \frac{b}{c}$$

Errichtet man in x'' die Senkrechte $x'' y''$, so ist

$$x'' y'' = \frac{b}{c}$$

welches kleiner als eins ist. Wäre $b = c$, so wäre

$$\log \frac{b}{c} = 0 \text{ und } \frac{b}{c} = 1.$$

Für die Potenzirung hat man Folgendes: Ist allgemein die Potenz b^m zu bilden, so ist

$$\log b^m = m \,.\, \log b.$$

Trägt man die Linie b in die logarithmische Linie (Fig. 58) ein, so dass $x y = b$ ist, so ist

$$0 x = \log b.$$

Trägt man weiter auf der Geraden $0 X$ die Strecke $0 x$ von 0 aus m mal auf, bildet also $m \,.\, 0 x$ das ist $m \,.\, \log b$ und errichtet in dem so erhaltenen Punkte eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte die gesuchte Potenz b^m. Ist z. B. $m = 3$, so mache man $0 x_3 = 3 \,.\, 0 x$, dann ist

$$0 x_3 = 3 \log b = \log b^3$$

und wenn wir die Senkrechte $x_3 y_3$ errichten, so ist

$$x_3 y_3 = b^3.$$

Für die Radicirung hat man Folgendes: Ist allgemein $\sqrt[m]{b}$ zu construiren, so ist

$$\log \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log b.$$

Trägt man die Linie b in die logarithmische Linie (Fig. 59) ein, so dass $x y = b$ ist, so ist

$$0 x = \log b.$$

Theilt man nun die Strecke $0\,x$ in m gleiche Theile, bildet also von 0 aus $\frac{1}{m}\,0\,x$ das ist $\frac{1}{m}\log b$ und errichtet in dem so erhaltenen Punkte eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte die gesuchte Wurzel $\sqrt[m]{b}$. Ist z. B. $m = 3$, so mache man $0\,x' = \frac{1}{3}\,0\,x$ dann ist

$$0\,x' = \frac{1}{3}\log b = \log \sqrt[3]{b}$$

und construirt man die Senkrechte $x'\,y'$ so ist

$$x'\,y' = \sqrt[3]{b}.$$

Für die Potenzirung mit gebrochenen Exponenten ergibt sich Folgendes. Hat man allgemein $b^{\frac{m}{n}}$ zu construiren, so ist

$$\log b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \,.\, \log b.$$

Ist z. B. $m = 3$, $n = 2$, so hat man die Linie b in die logarithmische Linie (Fig. 60) einzutragen, so dass $x\,y = b$ ist, dann ist

$$0\,x = \log b.$$

Macht man nun $0\,x_3 = 3 \,.\, 0\,x$ und $0\,x_2 = \frac{1}{2}\,0\,x_3$, so ist $0\,x_2 = \frac{3}{2}\,0\,x$, daher ist auch

$$0\,x_2 = \frac{3}{2}\log b.$$

Errichtet man in x_2 die Senkrechte $x_2\,y_2$, so ist

$$x_2\,y_2 = b^{\frac{3}{2}}.$$

Wir sehen daher, dass mit der logarithmischen Linie alle diejenigen Operationen graphisch ausgeführt werden können, welche mit den Logarithmentafeln arithmetisch ausgeführt werden.

19. Die logarithmische Spirale.

Construirt man (Fig. 61) einen spitzen Winkel $A\,o\,B$, macht auf dem ersten Schenkel $A\,o$ desselben $0\,1_0 = 1$, $0\,a_0 = a$, auf dem anderen Schenkel $B\,o$ aber $0\,a_1 = a$, zieht die Gerade $1_0\,a_1$ und parallel zu ihr durch a_0 die Gerade $a_0\,p_1$, so ist $0\,p_1 = p_1$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1_0}{0\,a_1} = \frac{0\,a_0}{0\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1} \text{ woraus } p_1 = a^2.$$

Legt man hierauf denselben spitzen Winkel an die Seite $B\,o$ an, macht also den Winkel $B\,o\,C$ gleich dem Winkel $A\,o\,B$, macht auf dem Schenkel $o\,B$ die Strecke $0\,1_1 = 1$ und auf dem andern Schenkel $o\,C$ die Strecke

$0\,a_2 = a$, zieht die Gerade $1_1\,a_2$ und parallel zu ihr durch p_1 die Gerade $p_1\,p_2$, so ist $0\,p_2 = p_2$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1_1}{0\,a_2} = \frac{0\,p_1}{0\,p_2} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{p_1}{p_2} \text{ woraus } p_2 = a\,p_1 = a^3.$$

Man kann nun wieder denselben Winkel an die Seite $0\,C$ antragen, auf $0\,C$ die Strecke $0\,1_2 = 1$ machen und auf dem folgenden Schenkel wieder die Linie a auftragen u. s. f.; allein wenn man berücksichtigt, dass die Punkte 1_0, 1_1, 1_2 ... alle um die Länge 1, und die Punkte a_0, a_1, a_2 ... alle um die Länge a von 0 entfernt sind, dass also die Punkte 1_0, 1_1, 1_2 ... auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser 1, und die Punkte a_0, a_1, a_2 ... auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser a liegen, beide Kreise aber concentrisch sind, da beide den Punkt 0 als Mittelpunkt haben, so lässt sich die Construktion auf folgende Weise ausführen.

Man beschreibe (Fig. 62) um den Punkt 0 mit den Halbmessern 1 und a concentrische Kreise und ziehe vom Mittelpunkte aus den beliebigen Strahl c_0, hierauf trage man von diesem Strahle aus, auf einem der Kreise einen kleinen Bogen beliebig vielmal auf und lege durch die Theilpunkte die Strahlen c_1, c_2, c_3 ..., so erhält man auf dem kleineren Kreise die Punkte 1_0, 1_1, 1_2, 1_3 ... und auf dem grösseren Kreise die Punkte a_0, a_1, a_2, a_3 ... Nun ziehe man die Geraden $1_0\,a_1$, $1_1\,a_2$, $1_2\,a_3$, $1_3\,a_4$ ... und lege durch a_0 die Gerade $a_0\,p_1$ parallel zu $1_0\,a_1$, durch p_1 die Gerade $p_1\,p_2$ parallel zu $1_1\,a_2$, durch p_2 die Gerade $p_2\,p_3$ parallel zu $1_2\,a_3$ u. s. f., so erhält man die gebrochene Linie $a_0\,p_1\,p_2\,p_3$ ...

Aus der Construktion ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{0\,1_0}{0\,a_1} = \frac{0\,a_0}{0\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{a}{p_1}$$

$$\frac{0\,1_1}{0\,a_2} = \frac{0\,p_1}{0\,p_2} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{0\,1_2}{0\,a_3} = \frac{0\,p_2}{0\,p_3} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{p_2}{p_3}$$

$$\frac{0\,1_3}{0\,a_4} = \frac{0\,p_3}{0\,p_4} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{p_3}{p_4} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt weiter:

$p_1 = a\,a = a^2$, $p_2 = a\,p_1 = a^3$, $p_3 = a\,p_2 = a^4$, $p_4 = a\,p_3 = a^5$ u. s. w. und es stellen also die Strahlen

$$0\,p_1,\ 0\,p_2,\ 0\,p_3,\ 0\,p_4 \ldots$$

die aufeinanderfolgenden Potenzen von a dar.

Tragen wir den Winkel, den je zwei Strahlen mit einander machen, und den wir mit α bezeichnen wollen, noch einmal rückwärts, also auf der andern Seite von c_0 auf, construiren den Strahl $0\,c$, nehmen diesen als Anfangsstrahl an und ziehen die Gerade $1\,a_0$, so ergeben sich für die Winkel, welche die Strahlen nach einander mit dem Anfangsstrahle machen und welche wir mit w bezeichnen wollen, so wie für die den Winkeln zugehörigen Strahlen p folgende Beziehungen.

Ist $w = 0$ so ist $p = 1$
„ $w = a$ „ $p = a$
„ $w = 2\,a$ „ $p = a^2$
„ $w = 3\,a$ „ $p = a^3$
„ $w = 4\,a$ „ $p = a^4$ u. s. w.

Hieraus ergiebt sich aber Folgendes: Während die Winkel, welche die Strahlen mit dem Anfangsstrahle machen, wie die natürlichen Zahlen wachsen, also eine arithmetische Reihe bilden, wachsen die den Winkeln entsprechenden Strahlen nach den Potenzen von a, und bilden also eine geometrische Reihe und zwar so, dass jede Zahl, welche den Winkel als ein Vielfaches von a bezeichnet der Potenzexponent für den diesem Winkel entsprechenden Strahl ist, so dass den Winkeln

$$0,\ a,\ 2\,a,\ 3\,a,\ 4\,a,\ \ldots$$

beziehungsweise die Strahlen

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

entsprechen.

Je kleiner der Winkel a wird, um so näher rücken die Punkte p und um so mehr nähert sich die gebrochene Linie einer Kurve, welche eine Spirale ist, sodass für unendlich kleine a die gebrochene Linie in eine Kurve übergeht, für welche die oben dargestellten Beziehungen ebenfalls gelten.

Bezeichnet man daher allgemein irgend einen Strahl mit p und den Winkel, den er mit dem Anfangsstrahle macht mit w, so lassen sich die hier bestehenden Beziehungen durch die Gleichung

$$p = a^w$$

darstellen. Denn setzt man in dieser Gleichung

$w = 0$ so ist $p = a^0 = 1$
$w = 1$ „ $p = a^1$
$w = 2$ „ $p = a^2$
$w = 3$ „ $p = a^3$ u. s. w.

Betrachtet man die Linie a als die Basis eines logarithmischen Systems, so ist

$$w = \log p$$

und es ist daher der Winkel, den ein Strahl mit dem Anfangsstrahle macht der Logarithmus, der Strahl aber ist der diesem Logarithmus entsprechende Numerus. Wegen dieser Eigenschaften wird die Kurve eine logarithmische Spirale genannt.

Setzt man die Construktion vom Strahle c aus nach der entgegengesetzten Richtung fort, so werden die Winkel negativ und die Werthe von p kleiner als eins.

20. Operationen mit der logarithmischen Spirale.

Hat man nun für irgend eine Basis eine solche logarithmische Spirale construirt, so lassen sich mit Hilfe derselben alle diejenigen Operationen graphisch ausführen, welche mit einer Logarithmentafel arithmetisch ausgeführt werden.

Ist das Produkt $b\,c$ zu bilden, so trage man diese Linien als Strahlen in die Spirale ein (Fig. 63), mache also $0\,b = b$, $0\,c = c$, dann ist

$$\text{Bog. } a_0\,a_1 = \log b;\quad \text{Bog. } a_0\,a_2 = \log c.$$

Macht man nun Bog. $a_2\,a_3 =$ Bog. $a_0\,a_1$, so ist

$$\begin{aligned}\text{Bog. } a_0\,a_3 &= \text{Bog. } a_0\,a_1 + \text{Bog. } a_0\,a_2\\ &= \log b + \log c\\ &= \log (b\,c).\end{aligned}$$

Legt man daher durch a_3 den Strahl $0\,d$ so ist

$$0\,d = b\,c.$$

Ist der Quotient $\frac{c}{b}$ zu bilden und ist wieder $0\,b = b$, $0\,c = c$, so ist auch Bog. $a_0\,a_1 = \log b$, Bog. $a_0\,a_2 = \log c$.

Macht man nun in entgegengesetzter Richtung Bog. $a_2\,a' =$ Bog. $a_0\,a_1$ so ist

$$\begin{aligned}\text{Bog. } a_0\,a' &= \text{Bog. } a_0\,a_2 - \text{Bog. } a_0\,a_1\\ &= \log c - \log b\\ &= \log \frac{c}{b}.\end{aligned}$$

Legt man daher durch a' den Strahl $0\,d'$ so ist

$$0\,d' = \frac{c}{b}.$$

Bildet man den Quotienten $\frac{b}{c}$, so ist, weil b kleiner als c und $\frac{b}{c}$ kleiner als eins, auch $\log b$ kleiner als $\log c$ und folglich die Differenz $\log b - \log c$ negativ. Macht man in entgegengesetzter Richtung

$$\text{Bog. } a_1\,a'' = \text{Bog. } a_0\,a_2$$

so ist

$$\begin{aligned}\text{Bog. } a_0\,a'' &= \text{Bog. } a_0\,a_1 - \text{Bog. } a_0\,a_2\\ &= \log b - \log c\\ &= \log \frac{b}{c}.\end{aligned}$$

Legt man daher durch a'' den Strahl $0\,d''$ so ist

$$0\,d'' = \frac{b}{c}.$$

Ist eine Potenz z. B. b^4 zu construiren, so trägt man die Linie b als Strahl in die Spirale ein (Fig. 64), so dass $0\,b = b$ ist. Dieser Strahl schneidet den Kreis im Punkte a_1 und es ist daher Bog. $a_0\,a_1 = \log b$.

Macht man nun Bog. $a_0\,a_4 = 4$. Bog. $a_0\,a_1$, so ist Bog. $a_0\,a_4 = 4. \log b$ und zieht man durch den Punkt a_4 den Strahl $0\,b'$ so ist

$$0\,b' = b^4.$$

Ist eine Wurzel, z. B. $\sqrt[4]{b'}$ zu construiren, so trägt man die Linie b' als Strahl in die Spirale ein, so dass $0\,b' = b'$ ist. Dieser Strahl schneidet den Kreis im Punkte a_4 und es ist daher Bog. $a_0\,a_4 = \log b'$. Theilt man diesen Bogen in vier gleiche Theile, so dass

Bog. $a_0\,a_1 = \frac{1}{4}$ Bog. $a_0\,a_4$ ist, so ist auch Bog. $a_0\,a_1 = \frac{1}{4} \log b'$

und zieht man durch den Punkt a_1 den Strahl $0\,b$ so ist

$$0\,b = \sqrt[4]{b'}$$

Für die Construktion einer Potenz mit gebrochenem Exponenten ergibt sich nach dem Vorausgegangenen sehr leicht Folgendes. Soll z. B. $b^{\frac{3}{2}}$ construirt werden, so trage man (Fig. 65) die Linie b als Strahl in die Spirale ein, so dass $0\,b = b$ ist. Dieser Strahl schneidet den Kreis im Punkte a_1 und es ist daher

$$\text{Bog. } a_0\,a_1 = \log b.$$

Macht man Bog. $a_0\,a_3 = 3$. Bog. $a_0\,a_1$ und Bog. $a_0\,a_2 = \frac{1}{2}$ Bog. $a_0\,a_3$ so ist

$$\text{Bog. } a_0\,a_2 = \frac{3}{2} \text{ Bog. } a_0\,a_1$$
$$= \frac{3}{2} \log b.$$

Legt man endlich durch den Punkt a_2 den Strahl $0\,b'$ so ist

$$0\,b' = b^{\frac{3}{2}}.$$

Zweiter Abschnitt.

Die Gleichungen.

1. Die Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten.

a. Construktion der Gleichungen.

Wenn das Verhältniss $\frac{a}{b}$ von zwei unveränderlichen Linien a und b gegeben ist, so lässt sich ein Verhältniss $\frac{y}{x}$ von zwei veränderlichen Linien y und x, von denen die eine beliebig angenommen werden kann, construiren, welches dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ stets gleich ist, so dass für jedes beliebig angenommene x die Proportion

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$$

besteht.

Um dieses zu construiren macht man auf einer Geraden $0\,X$ (Fig. 66) die Strecke $0\,b = b$, errichtet in b eine Senkrechte auf $0\,X$, macht auf dieser Senkrechten $b\,a = a$ und zieht durch 0 und a die Gerade $0\,s$. Nimmt man nun auf der Geraden $0\,X$ einen beliebigen Punkt x an, so dass die Strecke $0\,x = x$ ist, oder den Werth von x darstellt, und errichtet im Punkte x eine Senkrechte auf $0\,X$ bis zur Linie $0\,s$, so ist diese Senkrechte das dem beliebig angenommenen x entsprechende y, denn es besteht die Proportion

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$$

und diese Proportion besteht fort, wo man auch den Punkt x auf der Geraden $0\,X$ annehmen mag, d. h. für jeden beliebig angenommenen Werth von x. Aus der Proportion folgt die Gleichung

$$y = \frac{a}{b}\,x,$$

durch welche für jeden beliebig angenommenen Werth von x der Werth von y bestimmt wird, welche also die Abhängigkeit des Werthes y vom Werthe x darstellt.

Stellen wir uns nun vor, es bewege sich von 0 aus auf der Geraden $0X$ ein Punkt und gleichzeitig in der Richtung des y ein zweiter Punkt, so dass er immer in der in x errichteten Senkrechten bleibt und dass der Abstand dieser beiden Punkte, den wir eben mit y bezeichnet haben, fortwährend, also für die continuirliche Veränderung des Werthes von x der Proportion

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$$

entspricht, so beschreibt der zweite Punkt bei seiner Bewegung die gerade Linie 0 s, so dass durch die Gleichung

$$y = \frac{a}{b} x$$

die Lage und Richtung der Geraden $0s$ bestimmt wird und in der Gleichung das Bildungsgesetz dieser Linie ausgesprochen liegt. Man nennt deshalb auch diese Gleichung die Gleichung der geraden Linie $0s$.

Verlängern wir die Gerade $0X$ in der entgegengesetzten Richtung $0X'$ (Fig. 67) und nehmen auf dieser Verlängerung Werthe von x an, so sind diese Werthe, den Werthen auf der andern Seite entgegengesetzt und daher mit minus zu bezeichnen. Zufolge der Gleichung werden aber dann auch die Werthe von y negativ, so dass auch diese in der entgegengesetzten Richtung zu nehmen sind. Für einen solchen Werth $0x'$ erhalten wir den zugehörigen Werth $x'y'$, so dass y' auf der in der entgegengesetzten Richtung verlängerten Geraden $0s'$ liegt.

Legt man (Fig. 68) durch 0 die Gerade YY' senkrecht auf XX', so entspricht die Richtung von $0Y$ der Richtung der Werthe $+y$ und die Richtung $0Y'$ der Richtung der Werthe $-y$.

Von je zwei zusammengehörigen Werthen von x und y sagt man sie seien einander zugeordnet, coordinirt, und nennt die beiden Geraden, welche diese Werthe darstellen, Coordinaten, und zwar die Coordinaten desjenigen Punktes der Linie ss', der eben durch sie bestimmt wird. Es wird auch x als Abscisse und y als Ordinate bezeichnet. Die beiden Geraden XX' und YY' nennt man die Coordinatenaxen und ihren Durchschnittspunkt 0 den Anfangspunkt der Coordinaten, weil von diesem Punkte aus die Werthe von x und y gezählt werden. Die Axen theilen die Ebene in vier Quadranten, man bezeichnet den zwischen X und Y als den ersten, den zwischen Y und X' als den zweiten, den zwischen X' und Y' als den dritten und den zwischen Y' und X als den vierten Quadranten.

Die Gerade $0s$ bleibt für jeden Werth von x dieselbe, so lange das Verhältniss $\frac{a}{b}$ dasselbe bleibt; denn dieses Verhältniss bestimmt den Winkel, den die Gerade $0s$ mit der X Axe bildet und zwar ist es die trigonometrische Tangente dieses Winkels.

Wir haben ursprünglich den Werth des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ als positiv angenommen; allein dieses Verhältniss kann auch negativ werden und dieses hängt davon ab, ob a und b positiv oder negativ sind. Es sind in dieser Beziehung folgende Fälle möglich:

Ist a positiv und b positiv, so ist $\frac{a}{b}$ positiv

Ist a positiv und b negativ, so ist $\frac{a}{b}$ negativ

Ist a negativ und b negativ, so ist $\frac{a}{b}$ positiv

Ist a negativ und b positiv, so ist $\frac{a}{b}$ negativ.

Für den ersten und dritten Fall hat die Gerade die Lage $s\,s'$ (Fig. 69 u. 70), durchschneidet also den ersten und dritten Quadranten; für den zweiten und vierten Fall hat die Gerade die Lage $s_1\,s'_1$ (Fig. 71 u. 72), durchschneidet also den zweiten und vierten Quadranten.

Wird der Werth des Verhältnisses $\frac{a}{b}$ unendlich gross, so fällt die Linie mit der Y Axe zusammen und ist das Verhältniss $\frac{a}{b}$ Null oder unendlich klein, so fällt die Linie mit der X Axe zusammen; wird das Verhältniss $\frac{a}{b} = 1$, so halbirt die Linie den Winkel der Coordinatenaxen.

Wenn das Verhältniss $\frac{a}{b}$ von zwei unveränderlichen Linien a und b gegeben ist, so lässt sich ein Verhältniss für die veränderlichen Linien y und x in der Art construiren, dass die Differenz zwischen y und einer constanten Linie d sich zu x verhält wie a zu b und zwar für jeden beliebig angenommenen Werth von x, so dass immer die Proportion

$$\frac{y-d}{x} = \frac{a}{b}$$

besteht.

Diese Construktion lässt sich auf folgende Weise ausführen (Fig. 73). Wir setzen wieder a und b als positiv voraus und machen daher auf der positiven Seite der X Axe $0\,b = b$, errichten in b in der positiven Richtung der y eine Senkrechte und machen auf dieser $b\,a = a$, hierauf legen wir durch 0 und a die Gerade $0\,s$. Tragen wir dann auf der positiven Seite der Y Axe die Strecke $0\,d = d$ auf und legen durch d die Gerade $d\,l$ parallel zu $0\,s$, so ergibt sich leicht Folgendes.

Nehmen wir auf der positiven Seite der X Axe den beliebigen Punkt x an, und errichten in diesem Punkte eine Senkrechte, bis zur

Linie $d\,l$, so ist $x\,y = y$, $y\,m = d$ und daher $x\,m = y - d$ und es besteht die Proportion

$$\frac{y-d}{x} = \frac{a}{b}.$$

Aus der Proportion folgt die Gleichung

$$y = \frac{a}{b}\,x + d$$

und dieses ist die Gleichung der Geraden l, in welcher für $x = 0$, $y = d$ wird.

Soll sich dagegen die Summe von y und einer constanten Zahl d zu x verhalten wie a zu b, so hat man folgende Construktion (Fig. 74). Setzen wir a sowohl als b als positiv voraus, so macht man auf der positiven Seite der XAxe $0\,b = b$, errichtet in b in der positiven Richtung von y eine Senkrechte und macht auf dieser $b\,a = a$, hierauf legt man durch 0 und a die Gerade $0\,s$. Man macht hierauf auf der negativen Seite der YAxe $0\,d = d$ und legt durch d eine Parallele l_1 zu $0\,s$, nimmt auf der XAxe einen beliebigen Punkt x an und errichtet die Senkrechte $x\,m$, welche die Gerade l_1 in y schneidet, so ist $x\,y = y$, $y\,m = d$, daher $x\,m = y + \mathrm{d}$ und es besteht die Proportion

$$\frac{y+d}{x} = \frac{a}{b}$$

aus der Proportion aber folgt die Gleichung

$$y = \frac{a}{b}\,x - d$$

und dieses ist die Gleichung der Geraden l_1 in welcher für $x = 0$, $y = -d$ wird.

Wenn wir nun berücksichtigen, dass das Verhältniss $\frac{a}{b}$ somal positiv als negativ sein kann, so ist ganz allgemein

$$y = \pm\,\frac{a}{b}\,x \pm d.$$

die Gleichung einer geraden Linie, deren Lage durch die Vorzeichen der Constanten a, b, d, bestimmt wird, so dass folgende vier Fälle

$$y = +\,\frac{a}{b}\,x + d$$

$$y = +\,\frac{a}{b}\,x - d$$

$$y = -\,\frac{a}{b}\,x + d$$

$$y = -\,\frac{a}{b}\,x - d \text{ möglich sind.}$$

b. Auflösung der Gleichungen.

Jede Gleichung vom ersten Grade mit einer Unbekannten lässt sich stets auf die Form

$$0 = \pm \frac{a}{b} x \pm d$$

und für den Fall, dass $b = 1$ ist oder die Gleichung mit diesem Divisor multiplicirt wurde, auf die Form

$$0 = \pm a x \pm d$$

bringen. Es stellt also eine solche Gleichung die Gleichung einer geraden Linie dar und zwar für den speciellen Fall, dass $y = 0$ ist.

Bestimmt man aus einer solchen Gleichung den Werth von x, so sagt man, die Gleichung sei für x aufgelöst und nennt den erhaltenen Werth eine Wurzel der Gleichung. Setzt man diesen Werth in die Gleichung ein, so wird sie wirklich null.

Die Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade besteht demnach darin, denjenigen Werth von x zu bestimmen, für welchen sie null wird.

Wollen wir nun diese Auflösung graphisch bewirken, so setzen wir den auf 0 reducirten Ausdruck gleich y, setzen also y für null und construiren diejenige Gerade, welcher die Gleichung entspricht. In dieser Construktion wird nun y in demjenigen Punkte 0, in welchem die Gerade die X Axe schneidet und es ist mithin diejenige Strecke auf der X Axe, welche zwischen dem Anfangspunkte und dem Durchschnittspunkte der Geraden liegt, der Werth von x, für welchen die Gleichung null wird, also die Wurzel der Gleichung. Gleichzeitig ergibt sich aus der Lage dieser Strecke, ob x positiv oder negativ ist.

Aus der Gleichung

$$0 = \pm \frac{a}{b} x \pm d \text{ folgt die Proportion } \mp \frac{d}{x} = \pm \frac{a}{b}$$

Bezeichnen wir in den Fig. 73 und 74 den Durchschnittspunkt der Geraden l und l_1 mit der X Axe mit w, indem wir gleichzeitig mit w die Strecke $0\,w$, also den Werth der Wurzel bezeichnen, so ergibt sich aus der Fig. 73 sofort, dass die Dreiecke $0\,b\,a$ und $w\,0\,d$ ähnlich sind, sowie aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke die Proportion

$$\frac{0\,d}{0\,w} = \frac{b\,a}{b\,0} \text{ das ist aber } \frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

und da $0\,w$ auf der negativen Seite der X Axe liegt, so ist die Wurzel negativ. Dieses folgt auch aus der entsprechenden Gleichung

$$0 = \frac{a}{b} x + d \text{ denn aus dieser folgt die Proportion } -\frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

Wenn wir ferner in der Fig. 74 $w\,d'$ parallel mit $0\,d$ ziehen, so ist $w\,d' = d$; die Dreiecke $0\,b\,a$ und $0\,w\,d'$ sind aber ähnlich und aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt die Proportion

$$\frac{w\,d'}{w\,0} = \frac{b\,a}{b\,0} \text{ das ist aber } \frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

und da $0\,w$ auf der positiven Seite der X Axe liegt, so ist die Wurzel positiv. Dieses ergibt sich auch aus der entsprechenden Gleichung

$$0 = \frac{a}{b}\,x - d \text{ denn aus dieser folgt die Proportion } \frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

Sieht man von den Vorzeichen ab, so lässt sich die Proportion

$$\frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

allgemein auf folgende Weise construiren und die Wurzel der Gleichung bestimmen. Auf dem einen Schenkel eines Winkels (Fig. 75) macht man $0\,a = a$ und $0\,d = d$, auf dem andern Schenkel aber $0\,b = b$, zieht die Gerade $a\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade d x, so ist $0\,x = x$. Denn aus der Construktion ergibt sich die Proportion

$$\frac{0\,d}{0\,x} = \frac{0\,a}{0\,b} \text{ das ist } \frac{d}{x} = \frac{a}{b}$$

und es ist mithin $0\,x$ der absolute Werth der Wurzel, dem man dann das positive oder negative Vorzeichen beizulegen hat, wie es sich aus der Proportion ergibt.

2. Die Gleichungen vom ersten Grade mit zwei Unbekannten.

Wenn zwei Unbekannte durch Gleichungen bestimmt werden sollen, so müssen auch zwei von einander unabhängige Gleichungen gegeben sein, welche die beiden Unbekannten enthalten. Bei der arithmetischen Bestimmung dieser Unbekannten verfährt man nun gewöhnlich so, dass man die eine Gleichung für eine Unbekannte auflöst und den gefundenen Ausdruck in die andere Gleichung einsetzt, wodurch man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, die sich dann aus dieser Gleichung bestimmen lässt. Den für diese Unbekannte gefundenen Werth setzt man dann in die für die erste Unbekannte aufgelöste Gleichung ein, welche nun auch nur eine Unbekannte enthält, die aus dieser Gleichung bestimmt wird.

Dieses Verfahren könnte auch graphisch ausgeführt und die beiden Unbekannten könnten nach einander bestimmt werden. Allein ein kürzeres und eleganteres Verfahren ergibt sich aus folgender Betrachtung. Da jede der beiden gegebenen Gleichungen eine Gleichung vom ersten Grade ist, so entspricht auch jede derselben einer geraden Linie. Bringen wir daher eine jede der beiden Gleichungen auf die Form

$$y = \frac{a}{b} + d$$

so können wir die beiden geraden Linien construiren. Nun haben die beiden Unbekannten x und y in beiden Gleichungen denselben Werth; daher müssen sie durch diejenigen Coordinaten dargestellt werden, welche beiden geraden Linien gemeinschaftlich angehören. Es können folglich nur die Coordinaten eines Punktes sein, welcher in beiden geraden Linien liegt. Nun haben aber zwei gerade Linien, wenn sie nicht parallel sind, nur einen Punkt, nämlich ihren Durchschnittspunkt mit einander gemein, und folglich müssen die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes die gesuchten Unbekannten sein.

Die graphische Bestimmung der Unbekannten besteht daher darin, dass man die den beiden vorgelegten Gleichungen entsprechenden Graden construirt und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes bestimmt.

Es mögen nun

$$y = \frac{a_1}{b_1} x + d_1$$

$$y = \frac{a_2}{b_2} x + d_2$$

die beiden vorgelegten und entsprechend umgestalteten Gleichungen sein.

Macht man in dem Coordinatensystem (Fig. 76) $0\,b_1 = b_1$, $b_1\,a_1 = a_1$ und $0\,d_1 = d_1$, zieht die Gerade $0\,a_1$ und parallel zu ihr durch d_1 die Gerade l_1, so entspricht diese der Gleichung

$$y = \frac{a_1}{b_1} x + d_1$$

Macht man ferner $0\,b_2 = b_2$, $b_2\,a_2 = a_2$ und $0\,d_2 = d_2$, zieht die Gerade $0\,a_2$ und parallel zu ihr durch d_2 die Gerade l_2, so entspricht diese der Gleichung

$$y = \frac{a_2}{b_2} x + d_2$$

Construirt man endlich für den Durchschnittspunkt beider Geraden die Coordinaten, so sind $0\,x$ und $x\,y$ die beiden Unbekannten.

Ist $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ so sind die Linien l_1 und l_2 parallel, daher treffen sie erst in unendlicher Entfernung zusammen und es sind folglich auch x und y unendlich gross. Dasselbe Resultat ergibt sich aus der arithmetischen Behandlung der Gleichungen.

3. Die Gleichungen vom zweiten Grade mit einer Unbekannten.

a. Auflösung der Gleichungen.

Jede vollständige Gleichung vom zweiten Grade mit einer Unbekannten lässt sich stets auf die Form

$$x^2 \pm a\,x \pm b = 0$$

bringen und es gehen daraus rücksichtlich der Vorzeichen folgende vier Fälle hervor:

1. $x^2 + a\,x + b = 0$ 2. $x^2 + a\,x - b = 0$
3. $x^2 - a\,x + b = 0$ 4. $x^2 - a\,x - b = 0$

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung, also diejenigen Werthe von x, für welche die Gleichung 0 wird, mit α und β und führt in der Gleichung

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

die Multiplikation aus, so erhält man

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

und es geht hieraus hervor, dass in einer jeden vollständigen und geordneten Gleichung vom zweiten Grade der Faktor von x gleich der Summe der Wurzeln, das bekannte Glied aber gleich dem Produkte der Wurzeln der Gleichung ist. Es ist also

$$a=\alpha+\beta;\ b=\alpha\beta.$$

und man kann daher aus den Vorzeichen von a und b auf die Vorzeichen der Wurzeln schliessen.

Ist b positiv, so sind entweder beide Wurzeln positiv oder es sind beide Wurzeln negativ; sie sind aber beide positiv wenn a negativ, und beide negativ wenn a positiv ist.

Ist b negativ, so ist die eine Wurzel positiv, die andere negativ und es ist die positive grösser als die negative wenn a negativ, dagegen die negative grösser als die positive, wenn a positiv ist.

Nach diesen Merkmalen hat die erste Gleichung zwei negative Wurzeln, die dritte Gleichung zwei positive Wurzeln, während die zweite und vierte Gleichung je eine positive und eine negative Wurzel hat und zwar ist in der zweiten Gleichung die negative Wurzel grösser als die positive, in der vierten Gleichung aber die positive Wurzel grösser als die negative.

Man nennt nun zwei aufeinanderfolgende gleiche Zeichen eine Zeichenfolge, zwei aufeinanderfolgende ungleiche Zeichen aber einen Zeichenwechsel. Demnach sind in der ersten Gleichung zwei Zeichenfolgen, in der dritten Gleichung zwei Zeichenwechsel, in den übrigen beiden Gleichungen aber eine Zeichenfolge und ein Zeichenwechsel enthalten. Daher kann man sagen: jeder Zeichenfolge entspricht eine negative und jedem Zeichenwechsel entspricht eine positive Wurzel der Gleichung.

Bringt man in den vorstehenden Gleichungen das bekannte Glied auf die rechte Seite, so gehen sie in die folgenden über:

$$1.\ x^2+ax=-b. \qquad 2.\ x^2+ax=b$$
$$3.\ x^2-ax=-b. \qquad 4.\ x^2-ax=b$$

Die Gleichung 1 lässt sich auch so schreiben

$$(-x)^2+(-a).(-x)=-b$$

und wenn man $-x=y$ setzt, so geht sie über in

$$y^2-ay=-b.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit -1, so erhält man

$$-y^2+ay=b.$$

Wird die Gleichung 3 mit -1 multiplicirt, so erhält man

$$-x^2 + a\,x = b.$$

Unsere Gleichungen nehmen daher folgende Gestalt an

$$1.\ -y^2 + a\,y = b \qquad 2.\ x^2 + a\,x = b.$$
$$3.\ -x^2 + a\,x = b \qquad 4.\ x^2 - a\,x = b.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen lassen sich nun in Produkte von zwei Faktoren verwandeln, so dass wir erhalten

$$1.\ y\,(a - y) = b. \qquad 2.\ x\,(x + a) = b$$
$$3.\ x\,(a - x) = b. \qquad 4.\ x\,(x - a) = b$$

und da das bekannte Glied b gleich dem Produkte der Wurzeln ist, so sind die Faktoren der Produkte auf der linken Seite die Wurzeln der Gleichungen.

Wäre nun das bekannte Glied b ein Quadrat, so wäre die Seite dieses Quadrates die mittlere Proportionale zu den Faktoren auf der linken Seite. Das bekannte Glied b lässt sich aber auf folgende Weise in ein Quadrat verwandeln. Bezeichnen wir die Quadratseite mit d, so muss sein

$$1\,.\,b = d^2$$

wonach d die mittlere Proportionale zu b und der Construktionseinheit ist. Machen wir daher (Fig. 77) $0\,b = b$, $b\,1 = 1$, beschreiben über $0\,1$ als Durchmesser einen Halbkreis, und errichten in b auf dem Durchmesser die Senkrechte $b\,d$, so ist $b\,d = d$.

Führen wir nun dieses Quadrat in die Gleichungen ein, so erhalten wir

$$1.\ y\,(a - y) = d^2 \qquad 2.\ x\,(x + a) = d^2$$
$$3.\ x\,(a - x) = d^2 \qquad 4.\ x\,(x - a) = d^2$$

und wenn wir durch Construktion die Faktoren auf der linken Seite bestimmt haben, so stellen die erhaltenen Linien die Wurzeln der Gleichungen dar. Diese Constructionen lassen sich aber auf folgende Weise ausführen. Für die Gleichung

$$1.\ y\,(a - y) = d^2$$

ergibt sich folgende Construktion.

Auf einer Geraden (Fig. 78) mache man $0\,a = a$ und construire über $0\,a$ als Durchmesser einen Halbkreis, errichte hierauf in a eine Senkrechte auf $0\,a$ und mache auf dieser Senkrechten $a\,d = d$, lege durch d die Gerade $d\,d'$ parallel zum Durchmesser und mache $d'm$ senkrecht auf den Durchmesser, welcher hierdurch in die Linien $0\,m$ und $a\,m$ getheilt wird und zwar so, dass $d'm$ die mittlere Proportionale zu $0\,m$ und $a\,m$ ist.

Es sind daher $0\,m$ und $a\,m$ die Wurzeln der Gleichung, welche aus den früher angegebenen Gründen beide negativ sind.

Für die Gleichung

$$2.\ x\,(x + a) = d^2$$

ergibt sich die folgende Construktion:

Auf einer Geraden (Fig. 79) mache man $0\,a = a$ und construire mit $0\,a$ als Durchmesser einen Kreis. Hierauf errichte man in a eine Senkrechte auf dem Durchmesser und mache auf dieser Senkrechten $a\,d = d$. Zieht man nun durch d und den Mittelpunkt des Kreises eine Gerade, so trifft diese den Kreis in den Punkten m und n und es ist $a\,d$ die mittlere Proportionale zu $n\,d$ und $m\,d$. Ist daher $m\,d = x$, so ist $n\,d = x + a$ und mithin sind $m\,d$ und $n\,d$ die Wurzeln der Gleichung und zwar ist $n\,d$ negativ, $m\,d$ positiv.

Die Gleichung

$$3.\quad x\,(a - x) = d^2$$

stimmt der Form nach mit der Gleichung 1 überein, daher ist hier dieselbe Construktion wie dort anzuwenden, auch hier sind $a\,m$ und $0\,m$ die Wurzeln der Gleichung, welche beide positiv sind.

Für die Gleichung

$$4.\quad x\,(x - a) = d^2$$

hat man dieselbe Construktion wie für die Gleichung 2 auszuführen. Es ist aber hier $n\,d = x$ und $m\,d = x - a$, daher sind $m\,d$ und $n\,d$ die Wurzeln der Gleichung und zwar ist die grössere $n\,d$ positiv, die kleinere $m\,d$ negativ.

b. Construktion der Gleichungen.

Wenn eine Gleichung vom zweiten Grade zwei veränderliche Linien x und y enthält, welche so von einander abhängen, dass für jeden beliebig angenommenen Werth von x ein Werth von y aus der Gleichung sich ergibt, so kann man diese Gleichung ebenso construiren, also die der Gleichung entsprechende Linie ebenso darstellen, wie wir dieses für die Gleichung des ersten Grades und die ihr entsprechende gerade Linie kennen gelernt haben.

Wir wollen die Construktion einiger der bekanntesten dieser Gleichungen vornehmen und die wichtigsten Eigenschaften der ihnen entsprechenden Linien betrachten.

1. Der Kreis.

Ist die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2$$

das ist die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, gegeben, und lösen wir sie für y auf, so erhalten wir

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Beziehen wir diese Gleichung auf das rechtwinkelige Coordinatensystem, (Fig. 80) so sehen wir zunächst, dass es für jeden Werth von x zwei Werthe von y gibt, welche einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so dass der eine Werth von y auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Y Axe liegt. Hieraus geht aber hervor, dass die der Gleichung entsprechende Linie zur X Axe symmetrisch ist.

Setzen wir $x = \pm r$, so wird für jeden dieser beiden Werthe $y = 0$. Die Linie schneidet hiernach die X Axe sowol auf der positiven als auch auf der negativen Seite in der Entfernung r vom Coordinaten-Anfang.

Wird x grösser als r, so wird die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ und folglich wird y imaginär. Es geht hieraus hervor, dass es für Werthe von x, welche grösser als r sind, keine Werthe mehr für y gibt, dass also r der grösste Werth ist, den x überhaupt annehmen kann.

Setzen wir $x = 0$, so wird $y = \pm r$, die Linie schneidet daher die Y Axe, sowol auf der positiven als auf der negativen Seite, in der Entfernung r vom Coordinaten-Anfang.

Aus dem Bisherigen folgt aber, dass alle Werthe von x, für welche sich Werthe von y ergeben, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pm r$ liegen, sowie dass y für $x = 0$ am grössten und für $x = r$ am kleinsten ist.

Wächst daher x von null bis r, so nimmt y beständig ab. Da aber für einen jeden Werth von x die Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2$$

besteht, so ist für einen jeden Werth von x innerhalb der angegebenen Grenzen, r die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten x und y sind. Hieraus folgt aber, dass jeder durch die Coordinaten x und y bestimmte Punkt, mithin ein jeder Punkt der Linie, vom Anfangspunkte der Coordinaten gleich weit, nämlich um die Länge r entfernt ist. Hieraus folgt dann weiter, dass die der Gleichung entsprechende Linie ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt im Coordinaten-Anfang liegt, und dessen Halbmesser die Constante r ist.

Für die Tangente eines Kreises besteht die Bedingung, dass sie auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Halbmesser senkrecht steht.

Es ist nun entweder der Berührungspunkt gegeben, in welchem eine Tangente an den Kreis gelegt werden soll, oder es ist ein Punkt ausserhalb des Kreises gegeben, von welchem aus eine Tangente an den Kreis gelegt werden soll.

Ist der Berührungspunkt t gegeben (Fig. 81), so ziehe man den Halbmesser $c\,t$ und errichte auf diesem in t eine Senkrechte, dann ist diese Senkrechte die verlangte Tangente.

Ist ein Punkt p ausserhalb des Kreises gegeben (Fig. 82), so verbinde man ihn mit dem Mittelpunkte des Kreises c durch die Gerade $c\,p$ und beschreibe über $c\,p$ als Durchmesser einen Kreis, welcher den ersten Kreis in den Punkten t und t' schneidet. Zieht man dann die Geraden $p\,t$ und $p\,t'$, so sind diese Geraden Tangenten an den Kreis.

2. Die Ellipse.

Ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, das ist die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $= a$ und deren halbe kleine Axe $= b$ ist, und lösen wir sie für y auf, so erhalten wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Beziehen wir diese Gleichung auf das rechtwinkelige Coordinatensystem (Fig. 83), so sehen wir, dass es für jeden Werth von x zwei Werthe von y gibt, welche einander gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind, so dass der eine Werth von y auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der YAxe liegt. Es geht hieraus hervor, dass die der Gleichung entsprechende Linie zur XAxe symmetrisch ist.

Setzen wir $x = \pm a$, so wird für einen jeden dieser beiden Werthe $y = 0$. Hiernach schneidet die Linie die XAxe, sowohl auf der positiven als auch auf der negativen Seite, in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang.

Wird x grösser als a, so wird die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ und folglich wird y imaginär. Hieraus folgt, dass es für Werthe von x, welche grösser als a sind, keine Werthe für y gibt, dass also a der grösste Werth ist, den x überhaupt annehmen kann.

Setzen wir $x = 0$, so wird $y = \pm b$. Die Linie schneidet daher die YAxe, sowohl auf der positiven als auf der negativen Seite in der Entfernung b vom Coordinaten-Anfang.

Aus den bis jetzt angestellten Betrachtungen folgt aber, dass alle Werthe von x, für welche sich Werthe von y ergeben, zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \pm a$ liegen, sowie dass y für $x = 0$ am grössten und für $x = a$ am kleinsten ist, dass also y beständig abnimmt, wenn x von 0 bis a wächst.

Um nun ein Gesetz für diese Abnahme zu finden, haben wir zu beachten, dass der Werth von y für jedes beliebig angenommene x durch zwei Faktoren dargestellt wird, nämlich durch den constanten Faktor $\frac{b}{a}$ und den veränderlichen Faktor $\sqrt{a^2 - x^2}$. Der constante Faktor $\frac{b}{a}$ ist das Verhältniss der kleinen halben Axe zur grossen halben Axe der Ellipse, und der veränderliche Faktor $\sqrt{a^2 - x^2}$ ist die Ordinate eines Kreises, dessen Halbmesser die grosse halbe Axe der Ellipse ist. Bezeichnen wir diese Ordinate mit y', setzen wir also

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und führen diese Ordinate in die obige Gleichung der Ellipse ein, so erhalten wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot y' \text{ woraus die Proportion hervorgeht } \frac{y}{y'} = \frac{b}{a}$$

Diese sagt nun: Für dieselbe Abscisse x verhält sich die Ordinate der Ellipse zur Ordinate des mit der halben grossen Axe der Ellipse beschriebenen Kreises, wie die kleine halbe Axe zur grossen halben Axe der Ellipse.

Die Construktion der vorstehenden Proportion lässt sich auf folgende Weise ausführen. Man beschreibe (Fig. 84) mit $0\,a = a$ den Kreisbogen $a\,a'$, nehme auf der Abscissenaxe den beliebigen Punkt x an, und construire die zugehörige Ordinate des Kreises $x\,y' = y'$, hierauf ziehe man den Halbmesser $0\,y'$, mache auf demselben $0\,b' = b$ und ziehe durch b' die Gerade $b'y$ parallel zur X Axe, so sind die Dreiecke $0\,y'\,x$ und $b'\,y'\,y$ ähnlich. Hieraus folgt die Proportion

$$\frac{x\,y'}{x\,y} = \frac{0\,y'}{0\,b'} \text{ das ist } \frac{y'}{y} = \frac{a}{b} \text{ oder } \frac{y}{y'} = \frac{b}{a}$$

Da diese Proportion für jeden Werth von x gilt, so kann man für jedes beliebig angenommene x das zugehörige y und mithin beliebig viele Punkte der Ellipse construiren, welche sodann stetig zu verbinden sind.

Am einfachsten gestaltet sich die Construktion auf folgende Weise (Fig. 85). Man beschreibe über den Axen der Ellipse zwei concentrische Kreise und ziehe eine beliebige Anzahl gemeinschaftlicher Durchmesser, durch die Endpunkte der Durchmesser des grossen Kreises ziehe man Parallelen zur kleinen Axe, und durch die Endpunkte der Durchmesser des kleinen Kreises ziehe man Parallelen zur grossen Axe. Die von demselben gemeinschaftlichen Durchmesser ausgehenden Linien schneiden sich und ihre Durchschnittspunkte sind Punkte der Ellipse.

Auf der grossen Axe der Ellipse, in gleichen Abständen vom Mittelpunkte derselben, befinden sich zwei Punkte, welche Brennpunkte genannt werden. Der Abstand eines jeden Brennpunktes vom Mittelpunkte heisst Excentricität der Ellipse. Jede gerade Linie, welche von einem der beiden Brennpunkte nach irgend einem Punkte der Ellipse gezogen wird, nennt man Leitstrahl, *radius vector.* Es besteht nun die Beziehung, dass die Summe der von beiden Brennpunkten nach irgend einem Punkte der Ellipse gezogenen Leitstrahlen gleich der grossen Axe der Ellipse ist.

Wenn daher die beiden Axen der Ellipse gegeben sind, so lassen sich die Brennpunkte auf folgende Weise bestimmen (Fig. 86). Man nimmt die halbe grosse Axe in den Zirkel und beschreibt von einem Endpunkte der kleinen Axe aus Bogen, welche die grosse Axe zu beiden Seiten des Mittelpunktes in den Punkten f und f' schneiden. Diese Schnittpunkte sind die Brennpunkte der Ellipse.

Aus der Eigenschaft, dass die irgend einem Punkte der Ellipse entsprechenden Leitstrahlen zusammen so gross sind wie die grosse Axe, ergibt sich folgende Construktion der Ellipse, wenn die grosse Axe und die Brennpunkte gegeben sind (Fig. 87).

Nimmt man auf der Axe, zwischen den Brennpunkten, beliebige Punkte n_1, n_2, n_3, n_4 an, so wird durch einen jeden solchen Punkt die Axe in zwei Theile getheilt. Nimmt man nun zuerst den Theil $n_1\,a$ in den Zirkel und beschreibt damit aus den Brennpunkten die kleinen Bogen bei p_1, nimmt hierauf den anderen Theil $n_1\,b$ in den Zirkel und beschreibt damit wieder aus den Brennpunkten die anderen kleinen Bogen bei p_1, so schneiden sich diese Bogen, und die Durchschnittspunkte sind vier Punkte der Ellipse. Verfährt man mit den Theilen $n_2\,a$ und $n_2\,b$ ebenso, so erhält man wieder vier Punkte p_2 der Ellipse und man sieht leicht ein, wie man auf diese Weise beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen kann.

Eine Ellipse lässt sich auch auf folgende Weise construiren (Fig. 88). Verbindet man den Endpunkt a der grossen Axe mit dem Endpunkte c der kleinen Axe durch die Gerade $a\,c$ und errichtet auf ihr in a eine Senkrechte, welche die Verlängerung der kleinen Axe in n schneidet, sowie in c eine Senkrechte, welche die grosse Axe in m schneidet, so ist $m\,0$ der Krümmungshalbmesser für die Endpunkte a und b der grossen Axe, sowie $n\,0$ der Krümmungshalbmesser für die Endpunkte c und d der kleinen Axe. Man mache nun $c\,n_1 = d\,n_2 = n\,0$ und beschreibe aus n_1 den Bogen durch c sowie aus n_2 den Bogen durch d. Ebenso mache man $a\,m_1 = bm_2 = m\,0$ und beschreibe aus m_1 den Bogen durch a, sowie aus m_2 den Bogen durch b. Die fehlenden Bogenstücke lassen sich leicht dadurch ergänzen, dass man einige Punkte nach dem vorausgegangenen Verfahren bestimmt.

Soll an eine Ellipse eine Tangente gelegt werden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, so sind mehrere Construktionen möglich. Wir wollen hier einige derselben ausführen. Ist m der gegebene Berührungspunkt (Fig. 89), so beschreibe man über der grossen Axe einen Halbkreis und lege durch m eine Senkrechte auf die grosse Axe, welche den Halbkreis in m' trifft. Legt man nun in m' eine Tangente an den Halbkreis, so schneidet diese die Verlängerung der grossen Axe in p, und legt man endlich durch p und m eine Gerade, so ist diese Gerade die verlangte Tangente.

Man ziehe (Fig. 90) nach dem gegebenen Berührungspunkte m die Leitstrahlen $f\,m$ und $f'\,m$, halbire den Winkel, den sie mit einander bilden und errichte in m auf der Halbirunglinie eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte die Tangente.

Man ziehe (Fig. 91) nach dem gegebenen Berührungspunkte m die Leitstrahlen $f\,m$ und $f'\,m$. Verlängert man nun einen derselben über m

hinaus und halbirt den dadurch entstandenen Nebenwinkel desjenigen Winkels, den die Leitstrahlen mit einander machen, so ist die Halbirungslinie die verlangte Tangente.

Ist ein Punkt p ausserhalb der Ellipse gegeben und soll von diesem Punkte aus eine Tangente an die Ellipse gelegt werden (Fig. 92), so beschreibe man über der grossen Axe als Durchmesser einen Kreis; hierauf verbinde man einen der Brennpunkte, etwa f', mit p und beschreibe über der Verbindungslinie $f'p$ als Durchmesser einen Kreis, welcher den die Ellipse umschliessenden Kreis in zwei Punkten n und n' schneidet. Legt man nun durch p und n, sowie durch p und n' Gerade, so sind diese Geraden Tangenten an die Ellipse und es ergibt sich also hieraus, dass von einem Punkte ausserhalb der Ellipse zwei Tangenten an die Ellipse gezogen werden können. Um die Berührungspunkte genau zu bestimmen, zieht man durch 0 und n, sowie durch 0 und n' Gerade, und sodann durch den anderen Brennpunkt f Parallele zu diesen Geraden, so erhält man die Punkte m und m', welches die Berührungspunkte sind.

3. Die Hyperbel.

Ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben, so ist dieses die Gleichung einer Hyperbel, deren halbe Hauptaxe $= a$ und deren halbe Nebenaxe $= b$ ist. Lösen wir sie für y auf, so erhalten wir

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Beziehen wir diese Gleichung auf das rechtwinkelige Coordinaten-System (Fig. 93), so sehen wir, dass es für jeden Werth von x zwei Werthe von y gibt, welche einander gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind, so dass der eine Werth von y auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Y Axe liegt. Es geht hieraus hervor, dass die der Gleichung entsprechende Linie zur X Axe symmetrisch ist.

Setzen wir $x = \pm a$, so wird für einen jeden dieser beiden Werthe $y = 0$. Hiernach schneidet die Linie die X Axe sowol auf der positiven als auch auf der negativen Seite in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfang.

Wird x kleiner als a, so wird die Differenz unter dem Wurzelzeichen negativ und folglich wird y imaginär. Hieraus folgt aber, dass es für Werthe von x, welche kleiner als a sind, keine Werthe für y gibt, dass also a der kleinste Werth ist, den x überhaupt annehmen kann. Da nun auch für $x = 0$, y imaginär wird, so gibt es in der Y Axe keinen Punkt der Linie.

Für jeden positiven oder negativen Werth von x, welcher grösser als a ist, gibt es stets zwei Werthe von y, welche mit x beständig und über alle Grenzen hinaus wachsen.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun, dass die Linie aus zwei getrennten Theilen besteht, welche in den Entfernungen $+a$ und $-a$ vom Coordinaten-Anfange die X Axe schneiden, und dass ein jeder Theil von diesen Punkten an in zwei Zweigen, welche sich immer weiter von der X Axe entfernen, unendlich fortgeht.

Auf der X Axe, in gleichen Abständen vom Anfangspunkte der Coordinaten, befinden sich zwei Punkte, die Brennpunkte der Hyperbel. Der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte oder dem Anfangspunkte der Coordinaten wird die Excentricität genannt. Bezeichnen wir sie mit e, so wird sie durch die Gleichung

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

bestimmt.

Machen wir daher auf der Y Axe $0\,b = b$ und ziehen $b\,a$, so ist dieses die Excentricität e, und machen wir weiter auf der X Axe $0\,f = 0\,f' = e$ so sind f und f' die Brennpunkte der Hyperbel.

Da nun für $x = 0$, $y = \pm b\sqrt{-1}$ wird, so nennt man die Gerade $2\,b$ auf der Y Axe auch die imaginäre Axe der Hyperbel.

Jede gerade Linie, welche von einem der beiden Brennpunkte nach irgend einem Punkte der Hyperbel gezogen wird, nennt man Leitstrahl, *radius vector.* Es besteht nun die Beziehung, dass die Differenz der von beiden Brennpunkten nach irgend einem Punkte der Hyperbel gezogenen Leitstrahlen gleich der Hauptaxe der Hyperbel, also gleich $2\,a$ ist.

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich folgende Construktion der Hyperbel (Fig. 94), wenn die Hauptaxe und die Brennpunkte gegeben sind. Nimmt man auf der Verlängerung der Axe, also ausserhalb der Brennpunkte, beliebige Punkte n_1, n_2, n_3 . . . an, so hat man für einen jeden solchen Punkt zwei Abstände von den Scheitelpunkten a' und a der Hyperbel, nämlich für den Punkt n_1 die Abstände $n_1\,a'$ und $n_1\,a$. Beschreibt man mit einem jeden dieser Abstände aus den Brennpunkten kleine Bogen, so schneiden sich diese in den Punkten p_1 und es sind dieses vier Punkte der Hyperbel. Verfährt man mit den Abständen $n_2\,a'$ und $n_2\,a$ ebenso, so erhält man die vier Punkte p_2 und es ist leicht einzusehen, wie man auf diese Weise beliebig viele Punkte der Hyperbel bestimmen kann.

Soll an eine Hyperbel eine Tangente gelegt werden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, so sind mehrere Constructionen möglich, von denen wir einige hier ausführen wollen.

Ist m der gegebene Berührungspunkt (Fig. 95), so ziehe man die Ordinate $m\,x$ und mache auf derselben $x\,n = x\,0$ sowie $x\,n' = x\,a$, ziehe die Gerade $a' n$ und parallel zu ihr durch n' die Gerade $n' p$. Zieht man dann $p m$, so ist diese Gerade die verlangte Tangente.

Man ziehe (Fig. 96) nach dem gegebenen Berührungspunkte m die Leitstrahlen $f m$ und $f' m$ und halbire den Winkel, den sie mit einander bilden, so ist die Halbirungslinie die gesuchte Tangente.

Ist ein Punkt p ausserhalb der Hyperbel gegeben und soll von diesem Punkte aus eine Tangente an die Hyperbel gelegt werden (Fig. 97), so beschreibe man über der Axe $a a'$ als Durchmesser einen Kreis, hierauf verbinde man einen der Brennpunkte, etwa f, mit p und beschreibe über der Verbindungslinie $f p$ als Durchmesser einen zweiten Kreis, welcher den über der Axe beschriebenen Kreis in zwei Punkten n und n' schneidet. Legt man nun durch p und n sowie durch p und n' Gerade, so sind diese Geraden Tangenten an die Hyperbel und es ergibt sich hieraus, dass von einem Punkte ausserhalb einer Hyperbel zwei Tangenten an die Hyperbel gelegt werden können. Um die Berührungspunkte genau zu bestimmen, zieht man durch 0 und n, sowie durch 0 und n' Gerade und sodann $f' m$ parallel zu $0 n$ und $f' m'$ parallel zu $0 n'$.

4. Die Parabel.

Ist die Gleichung

$$y^2 = 2 p x$$

gegeben, so ist dieses die Gleichung einer Parabel, deren halber Parameter $= p$ ist. Lösen wir sie für y auf, so erhalten wir

$$y = \pm \sqrt{2 p x}$$

Beziehen wir diese Gleichung auf das rechtwinkelige Coordinaten-System (Fig. 98), so sehen wir, dass es für jeden Werth von x zwei Werthe von y gibt, welche einander gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind, so dass der eine Werth von y auf der positiven, der andere auf der negativen Seite der Y Axe liegt. Es ergibt sich hieraus, dass die der Gleichung entsprechende Linie zur X Axe symmetrisch ist.

Setzen wir $x = 0$, so wird auch $y = 0$. Hiernach schneidet die Linie die X Axe im Coordinaten-Anfang. Diesen Punkt nennt man den Scheitel der Parabel. Setzen wir $x = \frac{1}{2} p$ das ist gleich dem Abstande des Brennpunktes vom Anfangspunkte der Coordinaten, so wird $y = \pm p$, also gleich dem halben Parameter. Mithin ist die Doppelordinate des Brennpunktes der Parameter der Parabel.

Wird x negativ, so wird y imaginär, daher gibt es über den Scheitel hinaus auf der negativen Seite der X Axe keine Punkte der Parabel.

Wächst x von null an in positiver Richtung, so wächst auch y, und da beide Veränderliche unaufhörlich wachsen können, so geht die Parabel in zwei zur X Axe symmetrischen Zweigen unbegrenzt fort.

Aus der Gleichung

$$y^2 = 2\,p\,x$$

ergibt sich als ein charakteristisches Merkmal der Parabel, dass die Quadrate der Ordinaten den zugehörigen Abscissen proportional sind.

Bilden wir aus der Gleichung die Proportion

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2p}$$

so heisst dieses: Die Ordinate ist die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse und dem Parameter. Hieraus ergibt sich aber eine einfache Construktion der Parabel.

Macht man auf der negativen Seite der X Axe (Fig. 99) vom Scheitel aus $0\,p = 2\,p$, also gleich dem Parameter, nimmt dann auf der positiven Seite der X Axe die beliebigen Abscissen $0\,x_1$, $0\,x_2$, $0\,x_3$ ... an und beschreibt über $p\,x_1$, $p\,x_2$, $p\,x_3$ ... als Durchmesser Kreise, so schneiden diese die Y Axe in den Punkten $y_1\,y'_1$, $y_2\,y'_2$, $y_3\,y'_3$ ... und es ist y_1, sowie y'_1 die mittlere Proportionale zu $0\,p$ und $0\,x_1$, y_2 sowie y'_2 die mittlere Proportionale zu $0\,p$ und $0\,x_2$, y_3 sowie y'_3 die mittlere Proportionale zu $0\,p$ und $0\,x_3$ u. s. f. Legt man durch alle x Parallele zur Y Axe und durch alle y Parallele zur X Axe, so schneiden sich die einander entsprechenden Linien in den Punkten m_1, m_2, m_3 ... m'_1 m'_2, m'_3 ... so dass dieses Punkte der Parabel sind, welche man stetig mit einander zu verbinden hat.

Wenn man auf der negativen Seite der X Axe in der Entfernung $\frac{1}{2}\,p$ vom Scheitel der Parabel eine Senkrechte zur Axe zieht, so nennt man diese Linie die Leitlinie oder Direktrix der Parabel. Es besteht nun die Beziehung, dass ein jeder Punkt der Parabel von der Leitlinie und dem Brennpunkte gleich weit absteht, oder dass der Leitstrahl für jeden Punkt der Parabel gleich dem Abstande des Punktes von der Leitlinie ist.

Hieraus ergibt sich folgende Construktion (Fig. 100). Man mache auf der Axe der Parabel vom Scheitel 0 aus $0\,a = 0\,f = \frac{1}{2}\,p$, so ist f der Brennpunkt; und wenn man durch a eine Senkrechte auf die Axe zieht, so ist dieses die Leitlinie. Nimmt man auf der Axe die beliebigen Abscissen $0\,x_1$, $0\,x_2$, $0\,x_3$ ... an, zieht durch x_1, x_2, x_3 ... Senkrechte zur Axe und schneidet nun vom Brennpunkte aus mit $a\,x_1$ die durch x_1, mit $a\,x_2$ die durch x_2, mit $a\,x_3$ die durch x_3 gelegte Senkrechte, so erhält man die Durchschnittspunkte $y_1\,y'_1$, $y_2\,y'_2$, $y_3\,y'_3$ ... Diese Punkte sind dann Punkte der Parabel.

Soll an eine Parabel eine Tangente gelegt werden, wenn der Berührungspunkt gegeben ist, so sind mehrere Constructionen möglich.

Ist m der gegebene Berührungspunkt (Fig. 101), so construire man die zu m gehörige Ordinate $m x$, mache auf der Axe $0 p = 0 x$ und ziehe $p m$. so ist dieses die Tangente.

Man ziehe (Fig. 102) den Leitstrahl $f m$, mache $f p = f m$ und ziehe $p m$, so ist dieses die Tangente.

Man ziehe (Fig. 103) den Leitstrahl $f m$, mache $m n$ parallel zur Axe und halbire den Winkel $f m n$, so ist die Halbirungslinie $m p$ die Tangente.

Wenn von einem Punkte p ausserhalb einer Parabel (Fig. 104) eine Tangente an die Parabel gezogen werden soll, so construire man zunächst die Scheiteltangente, welche im Scheitel auf der Axe senkrecht steht. Hierauf verbinde man den Punkt p mit dem Brennpunkte f und beschreibe über $p f$ als Durchmesser einen Kreis. Dieser Kreis schneidet die Scheiteltangente in den Punkten n und n' und wenn man nun durch p und n, sowie durch p und n' Gerade zieht, so sind diese Geraden Tangenten an die Parabel. Es geht hieraus hervor, dass von einem Punkte ausserhalb einer Parabel zwei Tangenten an die Parabel gezogen werden können. Um die Berührungspunkte genau zu bestimmen, beschreibt man aus dem Brennpunkte f mit $f t$ den Bogen $t m$ und mit $f t'$ den Bogen $t' m'$ dann sind m und m' die Berührungspunkte.

4. Höhere Gleichungen.

Graphische Bestimmung der Wurzeln.

Jede Gleichung mit einer Unbekannten, welche den zweiten Grad übersteigt, wird eine höhere Gleichung genannt. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

Diejenigen Werthe von x, welche in die Gleichung eingesetzt die Bedingung erfüllen, dass die linke Seite zu null wird, nennt man die Wurzeln der Gleichung und es gibt für die Gleichung so viele Wurzeln, als der höchste Exponent von x Einheiten hat. Sind die Coefficienten a_1, a_2, a_3 ... bestimmte Zahlen, so wird die Gleichung eine numerische genannt. Setzt man y für 0, schreibt man also

$$y = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m$$

und bezieht diese Gleichung auf ein rechtwinkeliges Coordinaten-System, so kann man, wenn die Gleichung eine numerische ist, dem x beliebige Werthe beilegen und das einem jeden solchen Werthe von x entsprechende y berechnen. Wird nun der Werth von x als Abscisse, der zugehörige Werth von y als Ordinate aufgetragen und werden die Endpunkte der auf diese Weise erhaltenen y stetig mit einander verbunden, so erhält man im Allgemeinen eine krumme Linie, welche die Abhängigkeit der Werthe von y von den Werthen von x, also gleichsam das graphische Bild der Gleichung darstellt. Für jeden Werth von x, für welchen y zu null wird, muss die Kurve die X Axe schneiden; daher entspricht auch umgekehrt ein jeder Durchschnittspunkt der Kurve mit der X Axe einer Wurzel der Gleichung, so dass derjenige Werth von x, welcher dem Durchschnittspunkte zugehört, eine Wurzel der Gleichung ist. Man wird nun die Wurzeln mit um so grösserer Genauigkeit finden, je genauer die Durchschnittspunkte der Kurve mit der X Axe bestimmt sind, wobei man besonders Folgendes zu beachten hat. Wenn y den Werth null annimmt, so muss es aus dem Positiven in das Negative, oder umgekehrt aus dem Negativen in das Positive übergehen. Die dem Werthe $y = 0$ zunächst liegenden Werthe von y sind daher so beschaffen, dass der eine positiv der andere negativ ist. Je enger mithin die Grenzen sind, in welche man den Werth von $y = 0$ einschliesst, um so genauer erhält man den Werth der Wurzel.

Wir wollen dieses Verfahren an einigen Beispielen erläutern.

Ist die Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

gegeben, und sollen die Wurzeln derselben bestimmt werden, so erhalten wir

für $x = 0$	$y = +1$
für $x = +1$	$y = 0$
für $x = +2$	$y = -3$
für $x = +3$	$y = 0$
für $x = +4$	$y = +15$
für $x = -1$	$y = 0$
für $x = -2$	$y = -15$

und es geht hieraus hervor, dass $+1$, $+3$ und -1 die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind; denn für diese drei Werthe von x nimmt y den Werth null an.

Beziehen wir die Werthe von x und y auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem (Fig. 105), tragen auf der positiven Seite der X Axe nach dem angenommenen Massstabe die Strecken 1, 2, 3, 4, auf der negativen Seite der X Axe die Strecken -1, -2 auf, errichten in 2, 4 und -2 Senkrechte, wie sie dem Vorzeichen von y jedesmal entsprechen und machen auf der positiven Seite der Y Axe $0\,a = 1$, $4\,c = 15$, sowie auf der negativen Seite der y, $2\,b = 3$, $-2\,d = 15$, so sind d, -1, a, $+1$, b, $+3$, c Punkte der Kurve. Werden diese Punkte stetig mit einander verbunden, so erhält man die Kurve selbst, welche das graphische Bild der vorgelegten Gleichung ist, und welche die X Axe in den Punkten -1, $+1$ und $+3$ schneidet. Entwickelt man das Produkt

$$(x - 1)(x - 3)(x + 1) = 0,$$

so erhält man die rechte Seite der vorgelegten Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

Ist die Gleichung

$$y = x^4 - 5{,}75\,x^3 + 5{,}375\,x^2 + 5{,}625\,x - 4{,}5$$

gegeben und sollen die Wurzeln dieser Gleichung bestimmt werden, so haben wir

für $x = 0$ $\quad y = -4{,}5$
für $x = -1$ $\quad y = 0$
für $x = +1$ $\quad y = 3{,}75$
für $x = +2$ $\quad y = 2{,}25$
für $x = +3$ $\quad y = -7{,}5$
für $x = +4$ $\quad y = 0$

Wir haben hier zwei Werthe von x, für welche $y = 0$ wird, nämlich $x = -1$ und $x = +4$. Es sind daher -1 und $+4$ zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung.

Beziehen wir die Werthe von x und y auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem (Fig. 106) und tragen sie ihren Vorzeichen entsprechend auf, indem wir $0\,a = -4{,}5$, $1\,b = 3{,}75$, $2\,c = 2{,}25$, $3\,d = -7{,}5$ machen und die Punkte -1, a, b, c, d, $+4$ stetig mit einander verbinden, so erhalten wir eine Kurve, welche das graphische Bild der Gleichung ist. Diese Kurve schneidet die Abscissenaxe zwischen 0 und $+1$ im Punkte m und zwischen $+2$ und $+3$ im Punkte n, so dass $0\,m$ und $0\,n$ die beiden anderen Wurzeln der Gleichung sind, welche bei sorgfältiger Zeichnung und einem geeigneten Massstabe mit hinlänglicher Genauigkeit abgegriffen werden können, wo nun $0\,m = 0{,}5$ und $0\,n = 2{,}25$ ist.

Aus der Betrachtung der Werthe von x und y ergibt sich aber Folgendes.

Für $x = 0$ ist $y = -4{,}5$, für $x = +1$ ist $y = 3{,}75$; es geht daher zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = +1$ der Werth von y aus dem Negativen in das Positive über, daher muss zwischen den Werthen $x = 0$ und $x = +1$ eine Wurzel der Gleichung liegen. Setzen wir dem Werthe $0\,m$ entsprechend $x = 0{,}5$, so erhalten wir $y = 0$ und es ist mithin $+0{,}5$ diese Wurzel der Gleichung. Es ist ferner für $x = +2$, $y = 2{,}25$, für $x = +3$, $y = -7{,}5$; es geht also zwischen den Grenzen $x = +2$ und $x = +3$ der Werth von y aus dem Positiven in das Negative über; daher liegt zwischen diesen beiden Werthen von x eine Wurzel der Gleichung. Setzen wir dem Werthe $0\,n$ entsprechend $x = 2{,}25$, so finden wir für diesen Werth von x, dass $y = 0$ ist. Daher ist auch 2,25 eine Wurzel der Gleichung und wir haben die vier Wurzeln -1, $+0{,}5$, $+2{,}25$, $+4$ gefunden. Entwickelt man das Produkt

$$(x + 1)\,(x - 0{,}5)\,(x - 2{,}25)\,(x - 4) = 0,$$

so erhält man die rechte Seite der vorgelegten Gleichung

$$y = x^4 - 5{,}75\,x^3 + 5{,}375\,x^2 + 7{,}625\,x - 4{,}5.$$

Dritter Abschnitt.

Die Progressionen.

1. Die arithmetische Progression.

Eine arithmetische Progression hat die Form

$$a,\ a+d,\ a+2\,d,\ a+3\,d\ \ldots$$

Das allgemeine oder $n$te Glied hat daher die Form

$$a+(n-1)\,d$$

Setzen wir dieses allgemeine Glied $= y$ und setzen wir $n-1=x$, so erhalten wir

$$y=\frac{d}{1}\,x+a$$

und dieses ist die Gleichung einer Geraden, die wir leicht construiren können.

Wir machen auf der positiven Seite der XAxe (Fig. 107) $0\,1=1$ errichten in 1 eine Senkrechte, machen auf dieser $1\,d=d$ und ziehen die Gerade $0\,d$, hierauf machen wir auf der positiven Seite der YAxe $0\,a=a$ und legen durch a eine Parallele $a\,l$ zu $0\,d$, so ist diese Gerade diejenige, welche der obigen Gleichung entspricht. Setzen wir nun der Reihe nach

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

so ergibt sich Folgendes:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } x=0 & \text{ist } y=0\,a & = a \\
\text{,, } x=1 & \text{,, } y=1\,y_1 & = a+d \\
\text{,, } x=2 & \text{,, } y=2\,y_2 & = a+2\,d \\
\text{,, } x=3 & \text{,, } y=3\,y_3 & = a+3\,d \\
\text{,, } x=4 & \text{,, } y=4\,y_4 & = a+4\,d \\
\vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\text{für } x=n-1 \text{ ist } y=(n-1)\,y_{n-1}=a+(n-1)\,d$$

und wir sehen hieraus, dass die aufeinander folgenden Ordinaten die aufeinander folgenden Glieder der Progression darstellen.

Hat man die Linie $a\,l$ construirt, so kann man jedes einzelne Glied der Progression bestimmen, ohne die vorausgegangenen Glieder vorher bestimmt zu haben. Soll allgemein das $n$te Glied bestimmt werden, so trägt man auf der X Axe die Einheit $n-1$ mal auf; die im letzten Punkte errichtete Senkrechte stellt dann das $n$te Glied der Progression dar.

Bezeichnen wir das $n$te Glied einer arithmetischen Progression mit z, so ist

$$z = a + (n-1)\,d.$$

Betrachten wir nun dieses Glied als das letzte und bezeichnen die Summe dieser n Glieder mit s, so ist

$$s = \frac{n\,(a+z)}{2}$$

Hieraus folgt

$2\,s = n\,(a+z)$ und hieraus die Proportion $\frac{2}{n} = \frac{a+z}{s}$ welche sich leicht construiren lässt.

Wir machen (Fig. 108) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,2 = 2$ und $0\,z = a + z$, auf dem andern Schenkel $0\,n = n$, ziehen die Gerade $2\,n$ und parallel zu ihr durch z die Gerade $z\,s$, so ist $0\,s = s$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,2}{0\,n} = \frac{0\,z}{0\,s} \text{ das ist aber } \frac{2}{n} = \frac{a+z}{s}$$

2. Die geometrische Progression.

Eine geometrische Progression hat folgende Form

$$a,\ a\,e,\ a\,e^2,\ a\,e^3,\ a\,e^4\ \ldots;$$

das allgemeine oder $n$te Glied hat daher die Form

$$a\,e^{n-1}.$$

Setzen wir dieses allgemeine Glied $= y$ und setzen wir $n-1 = x$, so erhalten wir

$$y = a\,e^x$$

Setzen wir ferner

$$e^x = z, \text{ so wird } y = a\,z.$$

Aus der Gleichung

$$e^x = z \text{ folgt aber } x \log e = \log z.$$

Haben wir nun eine logarithmische Linie (Fig. 109), welche auf die Axen $0\,X$ und $0\,Y$ bezogen ist, so machen wir auf der Y Axe $0\,e' = e$, legen durch e' eine Parallele zur X Axe, bis sie die Kurve in e trifft und machen $e\,e_1$ senkrecht auf die X Axe, dann ist $e\,e_1 = e$ und folglich $0\,e_1 = \log e$. Machen wir weiter $0\,z_1 = x\,.\,0\,e_1$, so ist $0\,z_1 = \log z$, und errichten wir endlich in z_1 eine Senkrechte bis zur Kurve, so ist $z_1\,z = z$. Auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels (Fig. 110) machen wir sodann $0\,1 = 1$, $0\,z = z$ und auf dem andern Schenkel $0\,a = a$, ziehen die

Gerade $1\,a$ und parallel zu ihr durch z die Gerade $z\,y$, so ist $0\,y = y$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,a} = \frac{0\,z}{0\,y} \text{ das ist } \frac{1}{a} = \frac{z}{y} \text{ woraus } y = a\,z.$$

Auf diese Weise kann ein jedes Glied der Progression bestimmt werden, wenn man für x die dem Gliede entsprechende Zahl setzt.

Soll die Summe von 2. 3. 4 . . . n Gliedern der Progression bestimmt werden, so hat man auf folgende Weise zu verfahren.

Auf der positiven Seite der XAxe (Fig. 111) mache man $0\,1 = 1$, errichte in 1 eine Senkrechte, mache auf dieser $1\,e = e$ und ziehe die Gerade $0\,e$, hierauf mache man auf der positiven Seite der YAxe $0\,a = a$ und lege durch a eine Parallele zu $0\,e$. Nun mache man weiter auf der XAxe $0\,a' = a$ und errichte in a' eine Senkrechte $a'\,y_1 = y_1$, mache auf der XAxe $0\,y'_1 = y_1$ und errichte die Senkrechte $y'_1\,y_2 = y_2$, mache auf der XAxe $0\,y'_2 = y_2$ und errichte die Senkrechte $y'_2\,y_3 = y_3$, mache auf der XAxe $0\,y'_3 = y_3$ und errichte die Senkrechte $y'_3\,y_4 = y_4$ u. s. f. Dann ergibt sich Folgendes. Es ist

$$y_1 = a'\,n_1 + n_1\,y_1\,; \quad n_1\,y_1 = a.$$

Aus der Proportion

$$\frac{0\,1}{1\,e} = \frac{0\,a'}{a'\,n_1} \text{ das ist } \frac{1}{e} = \frac{a}{a'\,n_1} \text{ folgt } a'\,n_1 = a\,e \text{ daher ist}$$

$$y_1 = a\,e + a.$$

Es ist ferner

$$y_2 = y'_1\,n_2 + n_2\,y_2\,; \quad n_2\,y_2 = a.$$

Aus der Proportion

$$\frac{0\,1}{1\,e} = \frac{0\,y'_1}{y'_1\,n_2} \text{ das ist } \frac{1}{e} = \frac{y_1}{y'_1\,n_2} \text{ folgt } y'_1\,n_2 = y_1\,e \text{ daher ist}$$

$$y_2 = y_1\,e + a$$

und wenn man für y_1 seinen Werth setzt,

$$\begin{aligned} y_2 &= (a\,e + a)\,e + a \\ &= a\,e^2 + a\,e + a. \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$y_3 = y'_2\,n_3 + n_3\,y_3\,; \quad n_3\,y_3 = a.$$

Aus der Proportion

$$\frac{0\,1}{1\,e} = \frac{0\,y'_2}{y'_2\,n_3} \text{ das ist } \frac{1}{e} = \frac{y_2}{y'_2\,n_3} \text{ folgt } y'_2\,n_3 = y_2\,e \text{ daher ist}$$

$$y_3 = y_2\,e + a$$

und wenn man für y_2 seinen Werth setzt,

$$\begin{aligned} y_3 &= (a\,e^2 + a\,e + a)\,e + a \\ &= a\,e^3 + a\,e^2 + a\,e + a. \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$y_4 = y'_3\,n_4 + n_4\,y_4\,; \quad n_4\,y_4 = a.$$

Aus der Proportion

$$\frac{01}{1e} = \frac{0y'_3}{y'_3 n_4} \text{ das ist } \frac{1}{e} = \frac{y_3}{y'_3 n_4} \text{ folgt } y'_3 n_4 = y_3 e \text{ daher ist}$$

$$y_4 = y_3 e + a$$

und wenn man für y_3 seinen Werth setzt,

$$y_4 = (a e^3 + a e^2 + a e + a) e + a$$
$$= a e^4 + a e^3 + a e^2 + a e + a.$$

Es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren beliebig weit fortgesetzt werden kann und dass man allgemein hat

$$y_n = a e^n + a e^{n-1} + a e^{n-2} + \ldots + a$$

3. Die Zinsrechnung.

Wenn die Zinsen für ein ausgeliehenes Kapital in gewissen gleichen Zeitabschnitten, etwa nach einem Jahre oder einem halben Jahre, ausgezahlt werden, so lässt sich die Vergrösserung des ursprünglichen Kapitals, oder auch der Nutzen, den das Kapital nach einer Reihe von Jahren gebracht hat, auf folgende Weise berechnen.

Bezeichnet man das ausgeliehene Kapital mit k und die Zinsen, welche von der Kapitaleinheit, z. B. einem Thaler, einer Mark u. s. w. für einen Zeitabschnitt zu entrichten sind, mit z, so ist $k z$ das am Ende eines jeden Zeitabschnittes zu entrichtende Zinsquantum.

Wird z. B. das Kapital k mit 4 Procent verzinst, werden also für je 100 Kapitaleinheiten 4 Kapitaleinheiten Zinsen entrichtet, so ist

$$z = \frac{4}{100} = 0{,}04 \text{ und daher } k z = \frac{4}{100} k = 0{,}04 k$$

Nach 2, 3, 4 ... t Zeitabschnitten betragen demnach die Zinsen

$$2 k z,\ 3 k z \ldots t k z$$

so dass der nach t Zeitabschnitten von dem Kapitale k erzielte Nutzen $t k z$ beträgt. Wird hierzu das ursprüngliche Kapital k addirt, so ist das durch diese Verzinsung vergrösserte Kapital

$$K = k + t k z.$$

Setzt man das ursprüngliche oder ausgeliehene Kapital $k = 1$, so betragen die Zinsen nach t Zeitabschnitten $t z$, und das durch diese Verzinsung vergrösserte Kapital ist

$$1 + t z.$$

Um diese Berechnung graphisch auszuführen, wollen wir das Zinsquantum nach t Zeitabschnitten oder den nach t Zeitabschnitten erzielten Nutzen mit y bezeichnen, dann ist für die Kapitaleinheit

$$y = t z$$

das ist aber die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Coordinatenanfang geht, wenn wir die Werthe von t oder die Zeit auf der Abscissenaxe auftragen. Der Faktor z bestimmt dann den Winkel, den die gerade Linie mit der Abscissenaxe macht. Da nun der Werth von z von dem Procentsatze abhängig und um so grösser ist, je grösser dieser Procentsatz ist, so ergibt sich hieraus, dass man nicht nur für einen jeden Procentsatz eine andere gerade Linie erhält, sondern auch, dass der Winkel, den die Gerade mit der Abscissenaxe macht, um so grösser ist, je grösser der Procentsatz ist.

Die auf diese Weise erhaltene der Abscisse t entsprechende Ordinate y ist dann noch mit dem ebenfalls durch eine gerade Linie darzustellenden Kapitale k zu multipliciren.

Soll die Summe des ursprünglichen Kapitals und des nach t Zeitabschnitten erzielten Nutzens graphisch dargestellt werden, und wir bezeichnen diese Summe mit y, so ist für die Kapitaleinheit

$$y = z\,t + 1$$

das ist aber die Gleichung einer geraden Linie, welche der vorher betrachteten parallel ist und die Ordinatenaxe in der Entfernung 1 vom Coordinatenanfange schneidet.

Die der Abscisse t entsprechende Ordinate y ist dann ebenfalls noch mit dem durch eine gerade Linie dargestellten Kapitale k zu multipliciren.

Werden die nach einem jeden Zeitabschnitte fälligen Zinsen zum Kapitale geschlagen und mit verzinst, ist das ausgeliehene Kapital k und hat z seine frühere Bedeutung, so ist das Kapital am Ende des ersten Zeit-Abschnittes

$$k_1 = k + k\,z = k\,(1 + z)$$

so dass wir also das während eines Zeitabschnittes durch die Zinsen vermehrte Kapital erhalten, wenn wir das zu Anfange des Zeitabschnitts vorhandene Kapital mit dem Faktor $1 + z$ multipliciren. Setzen wir $1 + z = q$ und bezeichnen wir die durch die Zinsen vermehrten Kapitale am Ende des ersten, zweiten, dritten u. s. w. $t$ten Zeitabschnittes beziehungsweise mit $k_1\ k_2\ k_3\ \ldots\ k_t$ so ist

$$\begin{aligned} k_1 &= k\,q \\ k_2 &= k_1\,q = k\,q^2 \\ k_3 &= k_2\,q = k\,q^3 \\ k_4 &= k_3\,q = k\,q^4 \\ &\vdots \\ k_t &= k_{t-1}\,q = k\,q^t \end{aligned}$$

Der nach t Zeitabschnitten durch Zinsen und Zinseszinsen vermehrte Werth eines Kapitals ist mithin das allgemeine Glied einer geometrischen Progression und ist daher durch dieselbe Construktion zu berechnen, welche wir bei der Bestimmung dieses allgemeinen Gliedes in Anwendung gebracht haben.

Vierter Abschnitt.

Vervielfältigung und Theilung von Linien und Winkeln.

1. Vervielfältigung einer geraden Linie.

Die Vervielfältigung einer geraden Linie oder die Multiplication derselben mit einer Zahl wird dadurch ausgeführt, dass man die gegebene Linie soviel mal nebeneinander setzt, als der Multiplikator Einheiten hat.

Ist $a\,b$ (Fig, 112) die zu multiplicirende Gerade und ist der Multiplikator 3, so mache man auf einer beliebigen Geraden $0\,1 = 1\,2 = 2\,3 = a\,b$, dann ist $0\,3 = 3\,.\,a\,b$.

2. Theilung einer geraden Linie.

Die Theilung einer geraden Linie in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile oder die Division derselben mit einer Zahl, lässt sich auf folgende Weise ausführen. Ist $a\,b$ (Fig. 113) die gegebene Gerade und soll sie in 5 gleiche Theile getheilt werden, so lege man an den einen Endpunkt der Geraden, etwa a, unter einem beliebigen Winkel eine andere gerade Linie an und trage auf dieser von der Spitze des Winkels aus 5 gleiche Strecken von beliebiger Länge auf, verbinde den letzten Punkt 5 mit dem anderen Endpunkte b der gegebenen Geraden, und ziehe durch die Punkte 4, 3, 2, 1 Parallele zu $5\,b$, so wird hierdurch die gerade Linie $a\,b$ in fünf gleiche Theile getheilt.

Eine andere Construktion ist die folgende. Man ziehe zur gegebenen Geraden $a\,b$ (Fig. 114) eine Parallele, trage auf dieser fünf gleiche Theile auf und lege dann durch 0 und a sowie durch 5 und b gerade Linien, welche in m sich schneiden. Zieht man dann durch m und die übrigen Theilpunkte 1, 2, 3, 4 gerade Linien, so wird hierdurch die Gerade $a\,b$ in fünf gleiche Theile getheilt.

Wenn eine gerade Linie in zwei oder mehr Theile getheilt werden soll, welche sich wie gegebene Zahlen verhalten, so lege man unter einem beliebigen Winkel an die gegebene eine andere Gerade und trage auf dieser die Summe der Theilungszahlen auf, verbinde den letzten Theilpunkt mit dem anderen Endpunkte der gegebenen geraden Linie durch eine gerade Linie und ziehe zu dieser durch die anderen Theilpunkte Parallele.

Soll z. B. die Gerade *a b* (Fig. 115) in drei Theile getheilt werden, welche sich wie 2 : 3 : 5 verhalten, so lege man im Punkte *a* unter einem beliebigen Winkel an die Gerade *a b* eine andere Gerade und trage auf dieser $2 + 3 + 5 = 10$ gleiche Theile auf, verbinde den Punkt 10 mit dem Endpunkte *b* der gegebenen Geraden und lege durch die Punkte 2 und 5 Parallele zu dieser Verbindungslinie, so wird die Gerade *a b* in drei Theile getheilt, welche sich wie 2 : 3 : 5 verhalten.

3. Construktion eines Winkels, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Wenn von einem Punkte *m* aus (Fig. 116) an eine Gerade ein gegebener Winkel α angetragen werden soll, so beschreibe man vom Scheitel des gegebenen Winkels aus zwischen seinen Schenkeln den Bogen *a b* und mit derselben Zirkelöffnung von *m* aus einen Bogen, welcher die Gerade in a' schneidet. Macht man hierauf den Bogen $a' b'$ gleich dem Bogen *a b* und zieht die Gerade $m b'$, so ist der Winkel $a' m b'$ gleich dem Winkel α.

4. Addition von Winkeln.

Sind α und β zwei gegebene Winkel (Fig. 117) und soll ein Winkel construirt werden, welcher gleich der Summe dieser beiden Winkel ist, so beschreibe man mit derselben Zirkelöffnung zwischen den Schenkeln der Winkel die Bogen *a b* und *c d*, sowie aus einem beliebigen Punkte *m* einer Geraden einen Bogen, welcher die Gerade in a' schneidet. Macht man nun den Bogen $a' b'$ gleich dem Bogen *a b* und in derselben Richtung den Bogen $b' c'$ gleich dem Bogen *c d* und zieht die Gerade $m c'$, so ist der Winkel $a' m c'$ eben so gross, wie die beiden Winkel α und β zusammen genommen, es ist also der Winkel $a' m c'$ die Summe der Winkel α und β.

5. Subtraktion von Winkeln.

Wenn dagegen ein Winkel construirt werden soll, welcher gleich dem Unterschiede der beiden gegebenen Winkel (α und β Fig. 118) ist, so mache man, nachdem die Bogen mit derselben Zirkelöffnung beschrieben worden sind, den Bogen $a' b'$ gleich dem Bogen *a b* und in entgegengesetzter Richtung den Bogen $b' c'$ gleich dem Bogen *c d* und ziehe die Gerade $m c'$ so ist der Winkel $a' m c'$ gleich dem Unterschiede der Winkel α und β.

6. Vervielfältigung eines Winkels.

Wenn ein Winkel construirt werden soll, welcher ein Vielfaches eines gegebenen Winkels ist, so hat man die Vervielfältigung an dem Bogen auszuführen. Ist z. B. α (Fig. 119) der gegebene Winkel und soll ein Winkel construirt werden, welcher dreimal so gross wie der Winkel α ist, so beschreibe man zwischen den Schenkeln des Winkels α den Bogen $a\,b$ und mit derselben Zirkelöffnung vom Punkte m einer geraden Linie aus einen Bogen, welcher die Linie im Punkte a' schneidet. Hierauf mache man auf dem letzteren Bogen $a'\,1 = 1\,2 = 2\,3 = a\,b$, so ist der Bogen $a'\,3 = 3 \,.\, a\,b$ und zieht man die Gerade $m\,3$, so ist $a'\,m\,3 = 3\,\alpha$.

7. Theilung eines Winkels.

Wenn ein gegebener Winkel in eine vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll, so hat man zwischen den Schenkeln des Winkels einen Bogen zu construiren und diesen in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Theile zu theilen. Zieht man dann durch die Theilpunkte gerade Linien nach der Spitze des Winkels, so wird dieser in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt.

Soll z. B. der Winkel α (Fig. 120) in fünf gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man zwischen seinen Schenkeln den Bogen $a\,b$ und theile diesen in fünf gleiche Theile. Diese Theilung muss durch Probiren bewirkt werden, was bei einiger Uebung rasch und sicher ausgeführt werden kann.

Fünfter Abschnitt.

Verwandlung der Figuren.

1. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von gegebener Grundlinie.

Ist b die Grundlinie und h die Höhe des gegebenen Dreiecks, so ist

$$\frac{b\,h}{2}$$

die Fläche desselben.

Soll nun ein anderes gleichflächiges Dreieck von der Basis b_1 construirt werden, so ist die Höhe dieses Dreiecks unter der Bedingung zu bestimmen, dass die beiden Dreiecke gleichflächig sind. Bezeichnet man die Höhe des gesuchten Dreiecks mit x, so muss also sein

$$\frac{b_1\,x}{2} = \frac{b\,h}{2} \text{ oder } b_1\,x = b\,h$$

und hieraus folgt die Proportion

$$\frac{b_1}{h} = \frac{b}{x}$$

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 121 und Fig. 122) das gegebene Dreieck und $a\,b = b$, so errichte man in a eine Senkrechte auf $a\,b$ und lege durch c eine Parallele zu $a\,b$, bis sie in h die Senkrechte trifft, dann ist $a\,h = h$.

Man mache nun auf $a\,b$ (Fig. 121) oder wenn b_1 grösser als b ist, auf der Verlängerung derselben (Fig. 122) $a\,b_1 = b_1$, ziehe die Gerade $b_1\,h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,x$, dann ist $a\,x = x$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b_1}{a\,h} = \frac{a\,b}{a\,x} \text{ das ist } \frac{b_1}{h} = \frac{b}{x}$$

Ein jedes Dreieck, welches über der Geraden $a\,b_1$ als Grundlinie mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, entspricht dem gesuchten.

Die Verwandlung lässt sich auch auf folgende Weise bewirken.

Auf $a\,b$ (Fig. 123) oder seiner Verlängerung (Fig. 124) mache man $a\,b_1 = b_1$, ziehe die Gerade $b_1\,c$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,c_1$, sowie endlich die Gerade $b_1\,c_1$, so ist $a\,b_1\,c_1$ das gesuchte Dreieck. Denn es ist (Fig. 122)

$$a\,b\,c = a\,b_1\,c + b_1\,c\,b$$
$$a\,b_1\,c_1 = a\,b_1\,c + b_1\,c\,c_1$$

Weil aber die Dreiecke $b_1\,c\,b$ und $b_1\,c\,c_1$ die gemeinschaftliche Grundlinie $b_1\,c$ besitzen und mit ihren Spitzen b und c_1 in der zur Grundlinie Parallelen $b\,c_1$ liegen, mithin auch in den Höhen übereinstimmen, so sind sie gleichflächig und daher ist auch das Dreieck $a\,b_1\,c_1$ gleich dem Dreiecke $a\,b\,c$.

Ebenso ist (Fig. 123)

$$a\,b\,c = a\,b\,c_1 + b\,c_1\,c$$
$$a\,b_1\,c_1 = a\,b\,c_1 + b\,c_1\,b_1$$

und weil die Dreiecke $b\,c_1\,c$ und $b\,c_1\,b_1$ die gemeinschaftliche Grundlinie $b\,c_1$ besitzen und mit ihren Spitzen c und b_1 in der zur Grundlinie Parallelen $c\,b_1$ liegen, mithin auch in den Höhen übereinstimmen, so sind sie gleichflächig, und daher ist auch das Dreieck $a\,b_1\,c_1$ gleich dem Dreiecke $a\,b\,c$.

2. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes von gegebener Höhe.

Ist b die Grundlinie und h die Höhe des gegebenen Dreiecks, so ist $\frac{b\,h}{2}$ sein Flächeninhalt. Ist nun h_1 die gegebene Höhe des gesuchten Dreiecks und bezeichnen wir die noch unbekannte Grundlinie mit x, so ist der Flächeninhalt $\frac{x\,h_1}{2}$. Aus der Bedingung

$$\frac{x\,h_1}{2} = \frac{b\,h}{2} \text{ oder } x\,h_1 = b\,h \text{ folgt die Proportion } \frac{h_1}{b} = \frac{h}{x}$$

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 125 und 126) das gegebene Dreieck und $a\,b = b$, so errichte man in a eine Senkrechte auf $a\,b$ und ziehe durch c eine Parallele zu $a\,b$, bis sie die Senkrechte in h trifft, dann ist $a\,h = h$. Man mache nun auf $a\,h$ (Fig. 125) oder wenn h_1 grösser als h ist auf der Verlängerung derselben (Fig. 126) $a\,h_1 = h_1$, ziehe die Gerade $h_1\,b$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,x$, welche $a\,b$ (Fig. 126) oder seine Verlängerung (Fig. 125) in x schneidet, dann ist $a\,x = x$, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,h_1}{a\,b} = \frac{a\,h}{a\,x} \text{ das ist } \frac{h_1}{b} = \frac{h}{x}$$

und ein jedes Dreieck, welches über der Geraden $a\,x$ als Grundlinie mit der Höhe $a\,h_1$ construirt wird, entspricht der Verwandlung.

3. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm von gegebener Grundlinie.

Ist b die Basis und h die Höhe des Dreiecks, so ist $\frac{b\,h}{2}$ sein Flächeninhalt; ist ferner b_1 die gegebene Grundlinie und x die noch unbekannte Höhe des Parallelogramms, so ist $b_1\,x$ der Flächeninhalt desselben. Da nun der Flächeninhalt des Parallelogramms dem Flächeninhalte des Dreiecks gleich sein soll, so muss sein

$$b_1\,x = \frac{b\,h}{2} \text{ oder } b_1\,x = b\,.\,\frac{h}{2}$$

Hieraus folgt die Proportion

$$\frac{b_1}{\frac{h}{2}} = \frac{b}{x}$$

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 127 und 128) das gegebene Dreieck und $ab = b$, so errichte man in a auf $a\,b$ eine Senkrechte und ziehe durch c eine Parallele zu $a\,b$, bis sie in h die Senkrechte trifft, dann ist $a\,h = h$. Man theile nun $a\,h$ in zwei gleiche Theile, so dass $a\,h' = \frac{h}{2}$ ist, mache auf $a\,b$ (Fig. 127) oder seiner Verlängerung (Fig. 128) $a\,b_1 = b_1$, ziehe die Gerade $b_1\,h'$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,x$, dann ist $a\,x = x$, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,b_1}{a\,h'} = \frac{a\,b}{a\,x} \text{ das ist } \frac{b_1}{\frac{h}{2}} = \frac{b}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a\,b_1$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist nun gleichflächig dem Dreiecke $a\,b\,c$, entspricht also der gestellten Forderung. Da man aber auch über der Basis $a\,b_1$ mit der Höhe $a\,x$ ein Rechteck construiren kann, so ist dieses ebenfalls gleichflächig dem Dreiecke $a\,b\,c$, und es ist folglich die Verwandlung eines Dreiecks in ein Rechteck von gegebener Basis hier ebenfalls mit ausgeführt.

4. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm von gegebener Höhe.

Ist b die Basis und h die Höhe des Dreiecks, so ist $\frac{bh}{2}$ sein Flächeninhalt, ist ferner h_1 die gegebene Höhe und x die noch unbekannte Basis des Parallelogramms, so ist $h_1 x$ der Flächeninhalt desselben. Da nun der Flächeninhalt des Parallelogramms dem Flächeninhalte des Dreiecks gleich sein soll, so muss sein

$$h_1 x = \frac{bh}{2} \text{ oder } h_1 x = \frac{b}{2} \,.\, h$$

Hieraus folgt die Proportion

$$\frac{h_1}{\frac{b}{2}} = \frac{h}{x}$$

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 129) das gegebene Dreieck und $a\,b = b$, so errichte man in a auf $a\,b$ eine Senkrechte und lege durch c eine Parallele zu $a\,b$, bis sie in h die Senkrechte trifft, dann ist $a\,h = h$. Ferner mache man auf dieser Senkrechten $a\,h_1 = h_1$ und halbire $a\,b$, so dass $a\,b' = \frac{b}{2}$ ist. Zieht man nun die Gerade $h_1\,b'$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,x$, so ist $a\,x = x$, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,h_1}{a\,b'} = \frac{a\,h}{a\,x} \text{ das ist } \frac{h_1}{\frac{b}{2}} = \frac{h}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a\,x$ mit der Höhe $a\,h_1$ construirt wird, ist gleichflächig dem Dreiecke $a\,b\,c$, entspricht also der gestellten Forderung. Da aber auch über der Basis $a\,x$ mit der Höhe $a\,h_1$ ein Rechteck construirt werden kann, so ist dieses ebenfalls gleichflächig dem Dreiecke $a\,b\,c$ und es ist daher die Verwandlung eines Dreiecks in ein Rechteck von gegebener Höhe hier gleichzeitig mit ausgeführt.

5. Verwandlung eines Dreiecks in ein Quadrat.

Ist b die Basis und h die Höhe des Dreiecks, so ist $\frac{bh}{2}$ sein Flächeninhalt, ist ferner x die Seite des Quadrates, so ist x^2 sein Flächeninhalt. Da nun die Flächen beider Figuren gleich sein sollen, so muss sein

$$x^2 = \frac{bh}{2} \text{ oder } x^2 = \frac{b}{2} \,.\, h \text{ oder } x^2 = b \,.\, \frac{h}{2}$$

Aus der letzten Gleichung folgt die Proportion

$$\frac{\frac{h}{2}}{x} = \frac{x}{b}$$

Ist nun $a\,b\,c$ (Fig. 130) das gegebene Dreieck und ist $a\,b = b$, so errichte man in a auf $a\,b$ eine Senkrechte und lege durch c eine Parallele zu $a\,b$, bis sie die Senkrechte in h trifft, dann ist $a\,h = h$. Halbirt man $a\,h$ in h' und macht auf der Verlängerung von $a\,b$ $a\,h'_1 = a\,h'$, beschreibt sodann über $h'_1\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis, so schneidet dieser die in a errichtete Senkrechte in x und es ist $a\,x = x$, das ist die Seite desjenigen Quadrates, welches mit dem Dreiecke gleichflächig ist.

Die andere Gleichung

$$x^2 = \frac{b}{2}\,.\,h \text{ gibt die Proportion } \frac{h}{x} = \frac{x}{\frac{b}{2}}$$

Um diese zu construiren, mache man (Fig. 131) $a\,h' = a\,h$ und $a\,b' = \frac{1}{2}\,a\,b$ und beschreibe über $h'\,b'$ einen Halbkreis, welcher die in a errichtete Senkrechte in x schneidet, so dass $a\,x$ die Seite des Quadrates ist.

6. Verwandlung eines Trapezes in ein Dreieck von gegebener Basis.

Sind b_1 und b_2 die parallelen Seiten des Trapezes und ist h der Abstand derselben. so ist sein Flächeninhalt

$$\frac{(b_1 + b_2)\,h}{2}$$

Ist die gegebene Basis des Dreiecks b' und bezeichnen wir seine noch unbekannte Höhe mit x, so ist $\frac{b'\,x}{2}$ sein Flächeninhalt. Da nun die Flächen des Trapezes und des Dreiecks gleich sein sollen, so muss sein

$$\frac{b'\,x}{2} = \frac{(b_1 + b_2)\,h}{2} \quad \text{also } b'\,x = (b_1 + b_2)\,h$$

Dieses gibt die Proportion

$$\frac{b'}{h} = \frac{b_1 + b_2}{x}$$

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 132) das gegebene Trapez, ist $a\,b = b_1$, $c\,d = b_2$, so mache man auf der Verlängerung von $a\,b$

$$b\,e = c\,d \text{ dann ist } ae = b_1 + b_2,$$

ferner errichte man in a auf $a\,e$ eine Senkrechte und verlängere $c\,d$, bis die Verlängerung die Senkrechte in h trifft, so ist $a\,h = h$. Macht man nun $a\,b' = b'$, zieht die Gerade $b'\,h$ und parallel zu ihr durch e die Gerade $e\,x$, so ist $a\,x = x$. Man hat die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h} = \frac{a\,e}{a\,x} \text{ das ist } \frac{b'}{h} = \frac{b_1 + b_2}{x}$$

und ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist gleichflächig dem gegebenen Trapeze.

7. Verwandlung eines Trapezes in ein Dreieck von gegebener Höhe.

Bezeichnen wir die gegebene Höhe des Dreiecks mit h' und die noch unbekannte Basis mit x, so erhalten wir die Gleichung

$$h'x = (b_1 + b_2)\,h \text{ und hieraus die Proportion } \frac{h'}{b_1 + b_2} = \frac{h}{x}$$

Macht man (Fig. 133) auf der in a errichteten Senkrechten $a\,h' = h'$, zieht die Gerade $h'\,e$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,x$, so ist $a\,x = x$, denn wir haben die Proportion

$$\frac{a\,h'}{a\,e} = \frac{a\,h}{a\,x} \text{ das ist } \frac{h'}{b_1 + b_2} = \frac{h}{x}$$

und ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a\,x$ mit der Höhe $a\,h'$ construirt wird, ist gleichflächig mit dem Trapeze.

8. Verwandlung eines Trapezes in ein Parallelogramm von gegebener Basis.

Ist die gegebene Basis des Parallelogramms b' und die Höhe x, so ist $b'\,x$ sein Flächeninhalt. Behalten wir die Bezeichnung für das Trapez bei, so haben wir die Gleichung

$$b'\,x = \frac{(b_1 + b_2)\,h}{2} \text{ und hieraus die Proportion } \frac{b'}{\frac{h}{2}} = \frac{b_1 + b_2}{x}$$

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 134) das Trapez, so construire man wie vorher $a\,e = b_1 + b_2$ und $a\,h = h$, man halbire $a\,h$ in h', mache $a\,b' = b'$ und ziehe die Gerade $h'\,b'$, sowie parallel zu ihr durch e die Gerade $e\,x$, dann ist $a\,x = x$, denn man hat die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h'} = \frac{a\,e}{a\,x} \text{ das ist } \frac{b'}{\frac{h}{2}} = \frac{b_1 + b_2}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist gleichflächig dem Trapeze $a\,b\,c\,d$. Es kann daher auch über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ ein Rechteck construirt werden, welches dem Trapeze $a\,b\,c\,d$ gleichflächig ist, so dass die Verwandlung eines Trapezes in ein Rechteck von gegebener Basis hier gleichzeitig mit bewirkt wurde.

9. Verwandlung eines Trapezes in ein Parallelogramm von gegebener Höhe.

Ist h' die gegebene Höhe des Parallelogramms und bezeichnen wir die noch unbekannte Basis desselben mit x, so ist $h' x$ sein Flächeninhalt und wir haben die Gleichung

$$h' x = \frac{(b_1 + b_2) h}{2} \quad \text{oder } 2 h' x = (b_1 + b_2) h$$

woraus die Proportion folgt

$$\frac{2 h'}{b_1 + b_2} = \frac{h}{x}$$

Wir machen (Fig. 135) $a e = b_1 + b_2$ und $a h = h$, hierauf $a h'_1 = 2 h'$ ziehen die Gerade $h'_1 e$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h x$, so ist $a x = x$, denn wir haben die Proportion

$$\frac{a h'_1}{a e} = \frac{a h}{a x} \quad \text{das ist} \quad \frac{2 h'}{b_1 + b_2} = \frac{h}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ construirt wird, ist gleichflächig dem Trapeze $a b c d$. Es kann daher auch über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ ein Rechteck construirt werden, welches mit dem Trapeze $a b c d$ gleichen Flächeninhalt besitzt, so dass die Verwandlung eines Trapezes in ein Rechteck von gegebener Höhe hier ebenfalls mit ausgeführt worden ist.

10. Verwandlung eines Trapezes in ein Quadrat.

Wenn wir die Seite des gesuchten Quadrates mit x bezeichnen, so haben wir für die Verwandlung des Trapezes in ein Quadrat die Gleichung

$$x^2 = \frac{(b_1 + b_2) h}{2}$$

Hieraus folgt die Proportion

$$\frac{h}{x} = \frac{x}{\frac{b_1 + b_2}{2}}$$

Um diese zu construiren, machen wir (Fig. 136) $a e = b_1 + b_2$ und $a h = h$, machen dann $a h' = a h$ und $a b' = \frac{1}{2} a e$ das ist $\frac{b_1 + b_2}{2}$, sodann beschreiben wir über $h' b'$ als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die in a errichtete Senkrechte in x schneidet, so ist $a x = x$ also die Seite des gesuchten Quadrates.

11. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gegebener Grundlinie.

Ist b die Basis und h die Höhe des gegebenen Parallelogramms, so ist $b h$ sein Flächeninhalt, ist ferner b' die gegebene Grundlinie des gesuchten

Parallelogramms und bezeichnen wir seine noch unbekannte Höhe mit x, so ist $b' x$ sein Flächeninhalt und wir haben für die Verwandlung die Gleichung

$$b' x = b h, \text{ woraus die Proportion folgt } \frac{b'}{h} = \frac{b}{x}$$

Ist $a b c d$ (Fig. 137) das gegebene Parallelogramm $a b = b$, wir errichten in a auf $a b$ eine Senkrechte und verlängern $c d$, bis sie diese Senkrechte in h trifft, so ist $a h = h$. Machen wir nun auf $a b$ oder seiner Verlängerung $a b' = b'$, ziehen die Gerade $b' h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b x$, so ist $a x = x$ die gesuchte Höhe, denn wir haben die Proportion

$$\frac{a b'}{a h} = \frac{a b}{a x} \text{ das ist } \frac{b'}{h} = \frac{b}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a b'$ mit der Höhe $a x$ construirt wird, ist gleichflächig dem Parallelogramm $a b c d$. Es kann daher auch über der Basis $a b'$ mit der Höhe $a x$ ein Rechteck construirt werden, welches dem Parallelogramm $a b c d$ gleichflächig ist, und mithin ist die Verwandlung eines Parallelogramms in ein gleichflächiges Rechteck von gegebener Basis hier gleichzeitig mit ausgeführt worden. Da ferner das gegebene Parallelogramm auch ein Rechteck sein kann, so ist die Verwandlung eines Rechtecks in ein anderes von gegebener Basis in derselben Weise auszuführen.

12. Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes von gegebener Höhe.

Bezeichnen wir mit h' die gegebene Höhe und mit x die noch unbekannte Basis des gesuchten Parallelogramms, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$h' x = b h \text{ und hieraus die Proportion } \frac{h'}{b} = \frac{h}{x}$$

Nachdem wir (Fig. 138) die Höhe $a h = h$ des gegebenen Parallelogramms $a b c d$ construirt haben, machen wir auf der Geraden $a h$ oder ihrer Verlängerung $a h' = h'$, ziehen $h' b$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h x$, welche $a b$ oder die Verlängerung von $a b$ in x schneidet. Es ist dann $a x = x$ die gesuchte Basis; denn wir haben die Proportion

$$\frac{a h'}{a b} = \frac{a h}{a x} \text{ das ist } \frac{h'}{b} = \frac{h}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ construirt wird, ist mit dem Parallelogramm $a b c d$ gleichflächig. Da nun auch über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ ein Rechteck construirt werden kann, welches mit dem Parallelogramm $a b c d$ gleichflächig ist, so ist die Verwandlung eines Parallelogramms in ein Rechteck von gegebener Höhe hier gleichzeitig mit bewirkt worden.

Weil ferner das gegebene Parallelogramm $a\,b\,c\,d$ auch ein Rechteck sein kann, so ist die Verwandlung eines Rechtecks in ein anderes von gegebener Höhe in gleicher Weise auszuführen.

13. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck von gegebener Basis.

Ist b' die gegebene Basis des Dreiecks und bezeichnen wir seine noch unbekannte Höhe mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$\frac{b'\,x}{2} = b\,h \quad \text{oder} \quad b'\,x = 2\,b\,h$$

woraus die Proportion folgt

$$\frac{b'}{2\,h} = \frac{b}{x}$$

Machen wir (Fig. 139) auf $a\,b$ oder seiner Verlängerung $a\,b' = b'$ und auf der in a errichteten Senkrechten $a\,h' = 2\,h$, ziehen die Gerade $h'\,b'$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,x$, welche die Senkrechte in x schneidet, so ist $a\,x = x$ die Höhe des Dreiecks, denn wir haben die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h'} = \frac{a\,b}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{b'}{2\,h} = \frac{b}{x}$$

Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist gleichflächig dem Parallelogramm $a\,b\,c\,d$. Da dieses Parallelogramm aber auch ein Rechteck sein kann, so wird die Verwandlung eines Rechtecks in ein Dreieck von gegebener Basis in derselben Weise bewirkt.

14. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Dreieck von gegebener Höhe.

Ist h' die gegebene Höhe des Dreiecks und bezeichnen wir seine noch unbekannte Basis mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$\frac{h'\,x}{2} = b\,h \quad \text{oder} \quad h'\,x = 2\,b\,h$$

woraus die Proportion folgt

$$\frac{h'}{2\,b} = \frac{h}{x}$$

Machen wir (Fig. 140) auf der Verlängerung von $a\,b$ $a\,b' = 2\,b$ und auf der Verlängerung von $a\,h$ $a\,h' = h'$, ziehen die Gerade $h'\,b'$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,x$, so ist $a\,x = x$ die gesuchte Basis des Dreiecks, denn wir haben die Proportion

$$\frac{a\,h'}{a\,b'} = \frac{a\,h}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{h'}{2\,b} = \frac{h}{x}$$

Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a\,x$ mit der Höhe $a\,h'$ construirt wird, ist gleichflächig dem Parallelogramm $a\,b\,c\,d$. Da dieses

Parallelogramm aber auch ein Rechteck sein kann, so wird die Verwandlung eines Rechtecks in ein Dreieck von gegebener Höhe in derselben Weise ausgeführt.

15. Verwandlung eines Parallelogramms in ein Quadrat.

Bezeichnen wir die noch unbekannte Seite des Quadrates mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$x^2 = b\,h, \text{ woraus die Proportion folgt } \frac{h}{x} = \frac{x}{b}$$

Machen wir (Fig. 141) auf der Verlängerung von $a\,b$ $a\,h' = a\,h$ und beschreiben über $h'\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis, so schneidet dieser die in a errichtete Senkrechte in x und es ist $a\,x = x$ die Seite des gesuchten Quadrates.

Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat wird auf dieselbe Weise ausgeführt, da das Parallelogramm auch ein Rechteck sein kann.

16. Verwandlung eines Quadrates in ein Parallelogramm von gegebener Grundlinie.

Bezeichnen wir die Seite des Quadrates mit s, die gegebene Basis des Parallelogramms mit b' und seine noch unbekannte Höhe mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$b'\,x = s^2 \text{ und hieraus die Proportion } \frac{b'}{s} = \frac{s}{x}$$

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 142) das Quadrat, so machen wir auf der Verlängerung von $a\,b$ $a\,b' = b'$, ziehen die Gerade $b'\,d$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,x$, dann ist $a\,x = x$, das ist die Höhe des gesuchten Parallelogramms, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,d} = \frac{a\,b}{a\,x} \text{ das ist } \frac{b'}{s} = \frac{s}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist gleichflächig dem gegebenen Quadrate. Es kann also auch über der Basis $a\,b'$ mit der Höhe $a\,x$ ein Rechteck construirt werden und es ist somit die Verwandlung eines Quadrates in ein Rechteck von gegebener Basis auf dieselbe Weise zu bewirken.

17. Verwandlung eines Quadrates in ein Parallelogramm von gegebener Höhe.

Ist h' die gegebene Höhe des Parallelogramms und bezeichnen wir seine noch unbekannte Basis mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$h'\,x = s^2 \text{ und hieraus die Proportion } \frac{h'}{s} = \frac{s}{x}$$

Machen wir (Fig. 143) auf der Verlängerung von $a\,d$ $a\,h' = h'$, ziehen die Gerade $h' b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d x$, so ist $a x = x$ die Basis des gesuchten Parallelogramms, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a h'}{a b} = \frac{a d}{a x} \text{ das ist } \frac{h'}{s} = \frac{s}{x}$$

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ construirt wird, ist gleichflächig dem gegebenen Quadrate. Es kann also auch über der Basis $a x$ mit der Höhe $a h'$ ein Rechteck construirt werden, welches mit dem Quadrate gleichen Flächeninhalt hat, und es ist somit die Verwandlung eines Quadrates in ein Rechteck von gegebener Höhe hier ebenfalls mit bewirkt.

18. Verwandlung eines Quadrates in ein Dreieck von gegebener Grundlinie.

Bezeichnen wir die gegebene Grundlinie des Dreiecks mit b' und seine noch unbekannte Höhe mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$\frac{b' x}{2} = s^2 \text{ oder } b' x = 2 s . s$$

und hieraus die Proportion

$$\frac{b'}{2 s} = \frac{s}{x}$$

Wir machen (Fig. 144) auf $a b$ oder seiner Verlängerung $a b' = b'$, ferner machen wir auf der Verlängerung von $a d$ $a s' = 2 s$, ziehen die Gerade $b' s'$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b x$, so ist $a x = x$ die gesuchte Höhe des Dreiecks, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a b'}{a s'} = \frac{a b}{a x} \text{ das ist } \frac{b'}{2 s} = \frac{s}{x}$$

und es ist ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a b'$ mit der Höhe $a x$ construirt wird, gleichflächig dem gegebenen Quadrate.

19. Verwandlung eines Quadrates in ein Dreieck von gegebener Höhe.

Bezeichnen wir die gegebene Höhe des Dreiecks mit h' und seine noch unbekannte Grundlinie mit x, so haben wir für diese Verwandlung die Gleichung

$$\frac{h' x}{2} = s^2 \text{ oder } h' x = 2 s . s$$

und hieraus die Proportion

$$\frac{h'}{2 s} = \frac{s}{x}$$

Wir verlängern (Fig. 145) $a b$ und machen $a s' = 2 s$, verlängern $a d$ und machen $a h' = h'$; hierauf ziehen wir die Gerade $h' s'$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,x$, so ist $a\,x = x$ die gesuchte Grundlinie des Dreiecks, denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,h'}{a\,s'} = \frac{a\,d}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{h'}{2\,s} = \frac{s}{x}$$

und es ist ein jedes Dreieck, welches über der Basis $a\,x$ mit der Höhe $a\,h'$ construirt wird, gleichflächig dem gegebenen Quadrate.

Sechster Abschnitt.

Die graphische Berechnung des Flächeninhaltes der Figuren.

Die graphische Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren hat den Zweck, den Flächeninhalt durch eine gerade Linie darzustellen, so dass er auf einem Massstabe abgegriffen werden kann.

1. Das Dreieck.

Bezeichnet man mit b die Grundlinie oder Basis, mit h die Höhe und mit f die Fläche des Dreiecks, so ist bekanntlich

$$f = \frac{b\,h}{2} \quad \text{daher} \quad 2\,f = b\,h.$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{2}{b} = \frac{h}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{h} = \frac{b}{f}$$

welche sich leicht construiren lassen.

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 146) das Dreieck und nehmen wir $a\,b$ als Grundlinie an, errichten in a eine Senkrechte auf $a\,b$ und legen durch c eine Parallele zu $a\,b$, so ist $a\,h$ die Höhe des Dreiecks. Machen wir nun, dem angenommenen Massstabe entsprechend, auf $a\,h$ die Strecke $a\,2 = 2$, ziehen die Gerade $2\,b$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,f$, welche in f die Verlängerung von $a\,b$ schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,2}{a\,b} = \frac{a\,h}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{2}{b} = \frac{h}{f}$$

Machen wir dagegen (Fig. 147) auf der Grundlinie $a\,b$ die Strecke $a\,2 = 2$, ziehen die Gerade $2\,h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,f$, welche die Verlängerung von $a\,h$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,2}{a\,h} = \frac{a\,b}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{2}{h} = \frac{b}{f}$$

2. Das Trapez.

Sind a und b die parallelen Seiten des Trapezes, ist h der Abstand derselben und bezeichnet man die Fläche mit f, so ist

$$f = \frac{(a+b)\,h}{2} \text{ daher } 2\,f = (a+b)\,h$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{2}{a+b} = \frac{h}{f} \text{ und } \frac{2}{h} = \frac{a+b}{f}$$

welche sich auf folgende Weise construiren lassen.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 148) das Trapez und machen wir auf der Verlängerung von $a\,b$ die Strecke $b\,e = d\,c$, so ist $a\,e = a + b$. Errichten wir in a eine Senkrechte auf $a\,e$ und verlängern $d\,c$ bis zu dieser Senkrechten, so ist $a\,h = h$. Machen wir nun auf $a\,h$ die Strecke $a\,2 = 2$, ziehen die Gerade $2\,e$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,f$, welche die Verlängerung von $a\,e$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,2}{a\,e} = \frac{a\,h}{a\,f} \text{ das ist } \frac{2}{a+b} = \frac{h}{f}$$

Ist wieder $a\,b\,c\,d$ (Fig. 149) das Trapez und macht man auf der Verlängerung von $a\,b$ die Strecke $b\,e = d\,c$, so ist $a\,e = a + b$, errichtet man in a eine Senkrechte auf $a\,e$ und verlängert $d\,c$, so ist $a\,h = h$. Macht man nun auf $a\,e$ die Strecke $a\,2 = 2$, zieht die Gerade $2\,h$ und parallel zu ihr durch e die Gerade $e\,f$, welche in f die Verlängerung von $a\,h$ schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,2}{a\,h} = \frac{a\,e}{a\,f} \text{ das ist } \frac{2}{h} = \frac{a+b}{f}$$

3. Das Parallelogramm.

Bezeichnet man eine Seite des Parallelogramms mit a und den Abstand ihrer Gegenseite mit h, sowie den Flächeninhalt mit f, so ist

$$f = a\,h \text{ das ist aber auch } 1\,.\,f = a\,h.$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{1}{a} = \frac{h}{f} \text{ und } \frac{1}{h} = \frac{a}{f}$$

Die Constructionen sind in folgender Weise auszuführen.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 150) das Parallelogramm und $a\,b = a$, so errichte man in a eine Senkrechte und verlängere die Gegenseite dc bis zu dieser Senkrechten, dann ist $a\,h = h$. Macht man nun auf der Linie $a\,h$ die Strecke $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,b$ und parallel zu ihr durch h die

Gerade $b\,f$, welche die Verlängerung von $a\,b$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn aus der Construktion folgt die Proportion

$$\frac{a\,1}{a\,b} = \frac{a\,h}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{h}{f}$$

Macht man aber (Fig. 151) auf der Seite $a\,b$ die Strecke $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,f$, welche die Verlängerung von $a\,h$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$. Denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,1}{a\,h} = \frac{a\,b}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{h} = \frac{a}{f}$$

4. Das Rechteck.

Sind a und b die in einer Ecke zusammenstossenden Seiten, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks

$$f = a\,b \quad \text{das ist auch} \quad 1\,.\,f = a\,b.$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{f} \quad \text{und} \quad \frac{1}{b} = \frac{a}{f}$$

welche sich wie folgt construiren lassen.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 152) das Rechteck, ist $a\,b = a$ und $a\,d = b$, macht man auf $a\,d$ die Strecke $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,f$, welche die Verlängerung von $a\,b$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,1}{a\,b} = \frac{a\,d}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{b}{f}$$

Macht man dagegen (Fig. 153) auf der Geraden $a\,b$ die Strecke $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,d$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,f$, welche die Verlängerung von $a\,d$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$. Denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{a\,1}{a\,d} = \frac{a\,b}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{b} = \frac{a}{f}$$

5. Das Quadrat.

Ist a die Seite des Quadrates, so ist der Flächeninhalt

$$f = a^2 \quad \text{das ist auch} \quad 1\,.\,f = a^2.$$

Hieraus folgt die Proportion

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{f}$$

welche sich auf verschiedene Weise construiren lässt.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 154) das Quadrat und man macht auf irgend einer Seite desselben, etwa $a\,d$, die Strecke $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,b$ und parallel zu ihr durch d die Gerade $d\,f$, welche die Verlängerung von $a\,b$ in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,1}{a\,b} = \frac{a\,d}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{f}$$

Verlängert man (Fig. 155) die Seite $a\,b$ über a und b hinaus, macht auf der einen Verlängerung $a\,1 = 1$, zieht die Gerade $1\,d$ und errichtet auf ihr in d eine Senkrechte, welche die andere Verlängerung in f schneidet, so ist $a\,f = f$, denn es ist $1\,d\,f$ ein rechtwinkeliges Dreieck, $1\,f$ die Hypotenuse, $d\,a$ die aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse herabgelassene Senkrechte, so dass $1\,a$ und $a\,f$ die beiden Abschnitte der Hypotenuse sind. Da nun die Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, so besteht die Proportion

$$\frac{1\,a}{a\,d} = \frac{a\,d}{a\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{f}$$

6. Das unregelmässige Viereck.

Zieht man in einem solchen Vierecke eine Diagonale, so zerfällt es in zwei Dreiecke, und nimmt man die Diagonale als gemeinschaftliche Grundlinie an, so sind die von den gegenüberliegenden Ecken auf die Diagonale gezogenen Senkrechten die Höhen der Dreiecke. Bezeichnet man die Diagonale mit d, die Höhen mit h_1 und h_2, sowie die Flächen mit f_1 und f_2, so ist

$$f_1 = \frac{d\,h_1}{2}; \quad f_2 = \frac{d\,h_2}{2}$$

Bezeichnet man die Fläche des Vierecks mit f, so ist

$$f = f_1 + f_2 = \frac{d\,h_1}{2} + \frac{d\,h_2}{2} = \frac{d\,(h_1 + h_2)}{2} \quad \text{woraus } 2\,f = d\,(h_1 + h_2)$$

Daraus folgt die Proportion

$$\frac{2}{h_1 + h_2} = \frac{d}{f}$$

und diese lässt sich auf folgende Weise construiren.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 156) das gegebene Viereck, so ziehe man eine Diagonale $a\,c$ und zu ihr Parallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte b und d, sowie durch a eine Senkrechte zu $a\,c$, welche die Parallelen in den Punkten m und n schneidet, dann ist $m\,n = h_1 + h_2$. Macht man nun $m\,0 = a\,c$ und $m\,2 = 2$, zieht die Gerade $2\,n$ und parallel zu ihr durch 0 die Gerade $0\,f$, welche die Verlängerung von $m\,n$ in f schneidet, so ist $m\,f = f$: denn es ergibt sich die Proportion

$$\frac{m\,2}{m\,n} = \frac{m\,0}{m\,f} \quad \text{das ist} \quad \frac{2}{h_1 + h_2} = \frac{d}{f}$$

7. Das regelmässige Vieleck.

Man zerlege das Vieleck (Fig. 157) in congruente Dreiecke, deren Grundlinien die Seiten des Vielecks sind und deren Spitzen im Mittelpunkte desselben liegen, bestimme für ein solches Dreieck $a\,b\,c$ die Fläche $a\,f = f$ und multiplicire f mit der Anzahl der Seiten, so ist der Flächeninhalt des Vielecks, wenn das Vieleck m Seiten hat,

$$F = m\,.\,f.$$

8. Das unregelmässige Vieleck.

Um den Flächeninhalt eines unregelmässigen Vielecks (Fig. 158) zu bestimmen, hat man dasselbe in Dreiecke zu zerlegen, die Flächen dieser Dreiecke zu bestimmen und die ihnen entsprechenden Linien zu addiren. Die Summe derselben ist dann der Flächeninhalt des Vielecks.

9. Der Kreis.

Bekanntlich ist der Kreis gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie der Umfang und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist. Bezeichnen wir den Umfang mit u, den Halbmesser mit r und die Fläche mit f, so ist

$$f = \frac{u\,.\,r}{2} \text{ daraus } 2\,f = u\,.\,r$$

woraus die Proportion folgt

$$\frac{2}{u} = \frac{r}{f}$$

Um diese construiren zu können, muss zuerst die Kreislinie in eine gerade Linie verwandelt werden, was bekanntlich nicht genau, sondern nur näherungsweise geschehen kann. Wir wollen einige Construktionen angeben, nach welchen diese Verwandlung sich bewirken lässt.

Gewöhnlich nimmt man für praktische Zwecke, wo keine grössere Genauigkeit erforderlich ist, $u = \frac{22}{7}\,d$, das ist $= 3\,d + \frac{1}{7}\,d$.

Um dieses zu construiren, bestimme man (Fig. 159) $\frac{1}{7}\,d$, so dass $b\,c = \frac{1}{7}\,a\,b$ ist. Hierauf mache man auf einer Geraden $m\,n = 3\,a\,b$ und $n\,0 = b\,c$, dann ist $m\,0 = u$ näherungsweise. Mit der Rechnung verglichen ist die Länge des Umfangs um 0,001265 zu gross.

Eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 160). Man theile den Durchmesser $a\,b$ in fünf gleiche Theile und construire ein rechtwinkeliges Dreieck so, dass die eine Kathete $m\,n = \frac{6}{5}\,a\,b$ und die andere Kathete $m\,0 = \frac{3}{5}\,a\,b$ ist, dann ist der Umfang dieses Dreiecks nahe gleich dem

Umfange des Kreises. Macht man auf einer Geraden $m' n' = m n$, $n' 0' = n 0$ und $0' m'' = 0 m$, so ist $m' m''$ gleich dem Umfange des Kreises. Mit der Rechnung verglichen gibt diese Construktion den Umfang um 0,0000581 zu gross.

Noch eine andere Construktion ist die folgende (Fig. 161). Man ziehe einen Durchmesser $a b$ und durch den Endpunkt a desselben eine Tangente, also eine Gerade, welche auf dem Durchmesser senkrecht steht, beschreibe aus a mit dem Halbmesser einen Bogen, welcher den Kreis in c schneidet, sowie aus c mit demselben Halbmesser einen Bogen, welcher den ersteren in d schneidet. Zieht man die Gerade $m d$, so schneidet diese die Tangente in e. Trägt man nun von e aus auf der Tangente den Halbmesser dreimal auf, so dass $e f = 3 . a m$ ist und zieht die Gerade $f b$, so ist diese Gerade nahe gleich dem halben Umfange des Kreises. Mit der Rechnung verglichen gibt diese Construktion den Umfang um 0,0000593 zu klein.

Hat man auf irgend eine Weise den Umfang in eine gerade Linie verwandelt, so mache man auf einer beliebigen Geraden (Fig. 162) $0 u = u$, errichte in 0 eine Senkrechte und mache auf dieser $0 r = r$, also gleich dem Halbmesser des Kreises, sowie $0 2 = 2$; ziehe die Gerade $2 u$ und parallel zu ihr durch r die Gerade $r f$, so ist $0 f = f$.

Die Gleichung für den Flächeninhalt des Kreises lässt sich aber auch so schreiben

$$f = \frac{u}{2} \cdot r$$

und es ist hiernach die Fläche des Kreises gleich der Fläche eines Rechteckes, dessen Seiten beziehungsweise der halbe Umfang und der Halbmesser des Kreises sind. Aus der Gleichung folgt die Proportion

$$\frac{1}{\frac{u}{2}} = \frac{r}{f}$$

Macht man also (Fig. 163) $0 u = \frac{u}{2}$, errichtet in 0 eine Senkrechte, macht auf dieser $0 r = r$ und $0 1 = 1$, zieht die Gerade $u 1$ und parallel zu ihr durch r die Gerade $r f$, so ist $0 f = f$.

10. Der Kreisausschnitt.

Die Fläche eines Kreisausschnittes ist gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie der Bogen und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist, so dass, wenn der Halbmesser mit r, der Bogen mit b und die Fläche mit f bezeichnet wird,

$$f = r . b$$

Ist $a b c$ (Fig. 164) ein solcher Kreisausschnitt, $a b$ der Bogen,

$a\,c$ der Halbmesser, so hat man zunächst den Bogen in eine gerade Linie zu verwandeln. Dieses geschieht am einfachsten auf folgende Weise. Man errichtet im Endpunkte a des Halbmessers eine Senkrechte, hierauf nimmt man einen Bogentheil in den Zirkel, der so klein ist, dass er ohne merklichen Fehler als eine gerade Linie angesehen werden kann und trägt diesen Bogentheil auf dem Bogen $a\,b$ sovielmal auf, als es möglich ist, sodann trägt man ihn auf der Tangente von a aus ebensovielmal auf, als er auf dem Bogen aufgetragen wurde. Ist nun noch ein Bogentheil vorhanden, welcher kleiner ist als der, welcher in den Zirkel genommen wurde, so trägt man auch diesen noch auf der Tangente auf, und es kann dann die hierdurch erhaltene gerade Linie gleich der Länge des Bogens gesetzt werden. Man erhält durch dieses Verfahren die Gerade $a\,d$, welche dem Bogen $a\,b$ gleich zu setzen ist. Das Dreieck $a\,d\,c$ ist dann dasjenige, welches mit dem Ausschnitte $a\,b\,c$ gleichen Flächeninhalt hat. Macht man auf dem Halbmesser $a\,c$ die Strecke $a\,2 = 2$, zieht die Gerade $2\,d$ und parallel zu ihr durch c die Gerade $c\,f$, welche die Tangente in f schneidet, so ist $a\,f = f$.

11. Der Kreisabschnitt.

Die Fläche des Kreisabschnittes $a\,b$ (Fig. 165) ist der Unterschied der Flächen des Kreisausschnittes $a\,b\,c$ und des Mittelpunkts-Dreiecks $a\,b\,c$. Construirt man im Endpunkte a des Halbmessers $a\,c$ eine Tangente, macht auf dieser die Strecke $a\,d$ gleich der Länge des Bogens und zieht $c\,d$, so ist das Dreieck $a\,d\,c$ gleichflächig dem Ausschnitte $a\,b\,c$. Macht man $b\,e$ senkrecht auf $a\,d$, also parallel mit $a\,c$, und zieht $c\,e$, so ist das Dreieck $a\,e\,c$ gleich dem Dreiecke $a\,b\,c$, denn sie haben dieselbe Grundlinie $a\,c$ und ihre Spitzen b und e liegen in der zur Grundlinie parallelen Linie $b\,e$, weshalb sie auch in den Höhen übereinstimmen.

Nimmt man von dem Dreiecke $a\,d\,c$ das Dreieck $a\,e\,c$ hinweg, so bleibt das Dreieck $c\,e\,d$, welches mithin gleichflächig mit dem Kreis-Abschnitte $a\,b$ sein muss. Macht man $c\,c'$ parallel zu $a\,d$, macht $e\,2 = 2$, zieht die Gerade $2\,d$ und parallel zu ihr durch c' die Gerade $c'\,f$, welche die Tangente in f schneidet, so ist $e\,f = f$ gleich dem Flächeninhalte des Abschnittes $a\,b$.

12. Der Ring.

Bezeichnet man die Halbmesser der concentrischen Kreise (Fig. 166) mit r und r_1 und den Flächeninhalt des Ringes mit f, so ist

$$f = (r^2 - r_1^2)\,\pi \text{ oder auch } f = (r + r_1)(r - r_1)\,\pi$$

Schreiben wir die Gleichung so

$$f = 2\left(\frac{r + r_1}{2}\right)\pi\,.\,(r - r_1) \text{ dann ist der Faktor } 2\left(\frac{r + r_1}{2}\right)\pi$$

der Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $\frac{r + r_1}{2}$, also gleich der halben Summe der concentrischen Kreise ist. Der andere Faktor $(r - r_1)$ stellt aber die Breite des Ringes dar.

Dieser Kreis lässt sich leicht construiren, denn es ist $a\,c = r$, $a\,b = r_1$; machen wir daher auf der Verlängerung von $a\,c$ die Strecke $c\,d = a\,b = r_1$, so ist $a\,d = r + r_1$, und wird diese Linie in e halbirt, so ist $a\,e = \frac{r + r_1}{2}$; mithin ist der mit dem Halbmesser $a\,e$ beschriebene Kreis der gesuchte. Weil aber $a\,b = c\,d$, so ist auch $b\,e = c\,e$, woraus hervorgeht, dass dieser Kreis in der Mitte zwischen den gegebenen concentrischen Kreisen liegt, weshalb er der Mittelkreis genannt werden soll. Wir können folglich sagen: Die Fläche eines Ringes ist gleich der Fläche eines Rechtecks, dessen eine Seite der Umfang des Mittelkreises und dessen andere Seite die Breite des Ringes ist.

Machen wir daher auf einer beliebigen Geraden $0\,u$ gleich dem Umfange des Mittelkreises, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,b$ gleich der Breite des Ringes, so ist das Rechteck $0\,u\,b'\,b$ dasjenige, welches mit dem Ringe gleichen Flächeninhalt hat. Machen wir endlich $0\,1 = 1$, ziehen die Gerade $1\,u$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,f$, so ist $0\,f = f$, das ist der Flächeninhalt des Ringes.

13. Die Ellipse.

Bezeichnen wir die halbe grosse Axe mit a, die halbe kleine Axe mit b und die Fläche mit f, so ist

$$f = a\,b\,\pi$$

Dafür können wir schreiben

$$f = a\,\pi\,.\,b = b\,\pi\,.\,a$$

und es ist hiernach die Fläche der Ellipse gleich einem Rechtecke, dessen eine Seite die Hälfte eines mit der einen halben Axe als Halbmesser beschriebenen Kreises und dessen andere Seite die andere Halbaxe ist.

Beschreibt man daher mit der einen Halbaxe einen Halbkreis und verwandelt diesen in eine gerade Linie, so hat man die beiden Seiten des Rechtecks, welches nun leicht construirt und berechnet werden kann.

14. Das Parabelsegment.

Der Flächeninhalt eines Parabelsegments ist gleich $\frac{2}{3}$ desjenigen Rechtecks, von welchem es umschlossen wird. Um dieses Rechteck zu construiren, legt man (Fig. 167) eine zur Sehne $a\,b$ parallele Tangente an die Kurve und errichtet in a und b Senkrechte, welche die Tangente in c und d treffen, so ist $a\,b\,d\,c$ das Rechteck, von welchem das Parabelsegment umschlossen wird. Theilt man nun eine der Seiten $a\,c$ oder $b\,d$ in 3 gleiche Theile und legt durch den Theilpunkt 2 eine Parallele zu den anderen Seiten, so ist das Rechteck $a\,b\,2'\,2$ gleichflächig dem Parabel-Segmente.

Es kann aber auch die Fläche des Parabelsegmentes als Dreieck dargestellt werden (Fig. 168). Man lege an die Kurve eine Tangente parallel zur Sehne $a\,b$ und lasse vom Berührungspunkte c die Senkrechte $c\,d$ auf die Sehne herab; hierauf theile man $c\,d$ in 3 gleiche Theile und mache $c\,e = \frac{1}{3}\,c\,d$; zieht man dann die Geraden $a\,e$ und $b\,e$, so ist das Dreieck $a\,b\,e$ ebenfalls gleichflächig dem Parabelsegmente. Denn bezeichnet man $a\,b$ mit s, $c\,d$ mit h, so ist $d\,e = \frac{4}{3}\,h$ und der Flächeninhalt des Dreiecks ist daher

$$\frac{\frac{4}{3}\,h\,.\,s}{2} \quad \text{das ist} \quad \frac{2}{3}\,h\,s$$

Wenn eine Fläche von einer geraden Linie und einer Kurve begrenzt wird, deren Gestalt einer Parabel sich nähert, so kann eine solche Fläche innerhalb gewisser Grenzen als Parabelsegment angesehen und demgemäss berechnet werden.

15. Die krummlinig begrenzte unregelmässige Fläche.

Wenn eine Fläche von einer beliebigen krummen Linie begrenzt wird (Fig. 169), so lässt sich ihr Inhalt auf folgende Weise bestimmen. Man zerlegt die Fläche durch parallele Linien in Streifen von gleicher Breite, so dass diese Streifen als Trapeze angesehen werden können. Construirt man nun in einem jeden solchen Streifen die Mittellinie, so ist das Produkt aus der Mittellinie und der Breite des Streifens sein Flächeninhalt. Bezeichnen wir die allen Streifen gemeinsame Breite mit b, ihre Mittellinien mit h_1, h_2, h_3 . . . so ist die Summe der Streifenflächen

$$b\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots)$$

mithin gleich einem Rechtecke, dessen eine Seite die Breite der Streifen und dessen andere Seite die Summe der Mittellinien sämmtlicher Streifen ist. Die beiden sich hierbei ergebenden Endflächen sind als Parabelsegmente zu betrachten und als solche zu berechnen. Die Summe des Rechtecks und der beiden Parabelsegmente ist aber die Fläche der Figur.

Siebenter Abschnitt.

Addition und Subtraktion der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Dreiecke ist.

Wenn mehrere Dreiecke zu einem Dreiecke von gegebener Grundlinie vereinigt werden sollen, so dass die Fläche dieses Dreiecks gleich der Summe der Flächen jener Dreiecke ist und man bezeichnet mit b_1, b_2, b_3 ... die Grundlinien, mit h_1, h_2, h_3 ... die Höhen der gegebenen Dreiecke, sowie mit b die gegebene Grundlinie und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Dreiecks, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \frac{b_1\,h_1}{2} + \frac{b_2\,h_2}{2} + \frac{b_3\,h_3}{2} + \dots$$

oder

$$b\,x = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + b_3\,h_3 + \dots$$

so dass nun die auf der rechten Seite befindlichen Produkte zu addiren sind. Dieses geschieht dadurch, dass man die Produkte in andere verwandelt, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, die Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren bildet und diese mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplicirt.

Nimmt man als gemeinschaftlichen Faktor die gegebene Grundlinie des gesuchten Dreiecks, also b, und bezeichnet man die nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit x_1, x_2, x_3 ... d. h. verwandelt man sämmtliche Dreiecke in solche mit der Basis b und sind dann x_1, x_2, x_3 ... die zugehörigen Höhen, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$b\,x = b\,(x_1 + x_2 + x_3 + \dots) \text{ woraus } x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

und es ist mithin die Höhe des gesuchten Dreiecks gleich der Summe der Höhen der verwandelten Dreiecke.

Sind z. B. (Fig. 170) die Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ gegeben, ist $a_1\,b_1 = b_1$, $a_1\,h_1 = h_1$, $a_2\,b_2 = b_2$, $a_2\,h_2 = h_2$ und sollen sie zu einem Dreiecke vereinigt werden, dessen Basis b ist, so mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,b = b$, $0\,b_1 = b_1$, $0\,b_2 = b_2$, auf dem andern Schenkel des Winkels aber $0\,h_1 = h_1$, $0\,h_2 = h_2$. Man ziehe die Gerade $b\,h_1$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ferner ziehe man die Gerade $b\,h_2$ und parallel zu ihr durch b_2 die Gerade $b_2\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, denn es bestehen folgende Proportionen

$$\frac{0\,b}{0\,h_1} = \frac{0\,b_1}{0\,x_1} \text{ das ist } \frac{b}{h_1} = \frac{b_1}{x_1}$$

$$\frac{0\,b}{0\,h_2} = \frac{0\,b_2}{0\,x_2} \text{ das ist } \frac{b}{h_2} = \frac{b_2}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen folgen die Gleichungen

$$b\,x_1 = b_1\,h_1 \text{ und } b\,x_2 = b_2\,h_2$$

Nun soll sein

$b\,x = b_1\,h_1 + b_2\,h_2$, daher ist auch $b\,x = bx_1 + b\,x_2$, also $x = x_1 + x_2$.

Um endlich das Dreieck zu construiren, mache man auf einer Geraden $0\,b = b$, errichte in 0 eine Senkrechte auf $0\,b$ und mache auf dieser Senkrechten $0\,x_1 = x_1$, sowie in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x$.

Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist ein Dreieck, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ ist.

2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Dreiecke ist.

Wenn ein Dreieck über einer gegebenen Basis construirt werden soll, dessen Flächeninhalt gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Dreiecke ist, so hat man für dieselben Bezeichnungen die Gleichung

$$b\,x = b_1\,h_1 - b_2\,h_2$$

und das Verfahren ist dasselbe, wie wir es soeben bei der Addition gezeigt haben. Nehmen wir dieselben Dreiecke und mit ihnen dieselben Verwandlungen vor, so ist

$$b\,x = b\,x_1 - b\,x_2,\text{ also } x = x_1 - x_2$$

Die Höhe des gesuchten Dreiecks ist mithin die Differenz der Höhen der verwandelten Dreiecke.

Um dieses Dreieck zu construiren, mache man (Fig. 171) auf einer Geraden $0\,b = b$, errichte in 0 eine Senkrechte und mache auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, dann ist $0\,x_2 = x_1 - x_2 = x$ und ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist ein solches, dessen Flächeninhalt gleich dem Unterschiede der Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ ist.

3. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Dreiecke ist.

Wenn eine Summe von Dreiecken als ein Parallelogramm von gegebener Basis dargestellt werden soll, und man bezeichnet mit $b_1, b_2 \ldots$

die Grundlinien, mit h_1, h_2 ... die Höhen der gegebenen Dreiecke, sowie mit b die gegebene Grundlinie und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Parallelogramms, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \frac{b_1\,h_1}{2} + \frac{b_2\,h_2}{2} + \ldots \text{ oder } 2\,b\,x = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + \ldots$$

und es sind die Produkte auf der rechten Seite zu addiren. Nimmt man b als gemeinschaftlichen Faktor und bezeichnet die nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit x_1, x_2 ... verwandelt man also sämmtliche Dreiecke in solche mit der Basis b und sind dann x_1, x_2, ... die zugehörigen Höhen, so wird die Gleichung

$$2\,b\,x = b\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } 2\,x = x_1 + x_2 + \ldots$$

und mithin

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots}{2}$$

Es ist daher die Höhe des gesuchten Parallelogramms gleich der halben Summe der Höhen der verwandelten Dreiecke.

Nehmen wir wieder dieselben Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ bestimmen die Höhen x_1 und x_2 der verwandelten Dreiecke und halbiren ihre Summe, so ist diese halbe Summe die gesuchte Höhe des Parallelogramms.

Machen wir auf einer Geraden (Fig. 172) $0\,b = b$, errichten auf derselben in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ so ist $0\,x$ die Höhe des Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist ein solches, dessen Flächeninhalt gleich der Summe der Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ ist. Da nun dieses Parallelogramm auch ein Rechteck sein kann, so ist hiermit gleichzeitig die Aufgabe gelöst, eine Summe von Dreiecken als ein Rechteck von gegebener Basis darzustellen.

4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Dreiecke ist.

Soll ein Parallelogramm über einer gegebenen Basis construirt werden, dessen Flächeninhalt gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Dreiecke ist, so hat man die Gleichung

$$b\,x = \frac{b_1\,h_1}{2} - \frac{b_2\,h_2}{2} \text{ oder } 2\,b\,x = b_1\,h_1 - b_2\,h_2$$

Verwandeln wir die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhalten wir die Gleichung

$$2\,b\,x = b\,(x_1 - x_2) \text{ und hieraus } x = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

Die Höhe des gesuchten Parallelogramms ist daher gleich dem halben Unterschiede der Höhen der verwandelten Dreiecke.

Machen wir auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x = x = \frac{x_1 - x_2}{2}$ so ist $0\,x$ die Höhe desjenigen Parallelogramms, dessen Flächeninhalt gleich dem Unterschiede der Dreiecke $a_1\,b_1\,c_1$ und $a_2\,b_2\,c_2$ ist.

Dieses gilt für ein jedes Parallelogramm, welches über der Grundlinie $0\,b$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, daher gilt es auch für ein Rechteck, so dass die Aufgabe, den Unterschied zweier Dreiecke als Rechteck von gegebener Basis darzustellen, hier ebenfalls gelöst ist.

5. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Trapeze ist.

Wenn eine Summe von Trapezen als ein Dreieck von gegebener Basis dargestellt werden soll und man bezeichnet mit b_1, b_2; b'_1, b'_2 ... die parallelen Seiten, mit h_1, h_2 ... die Höhen der Trapeze, sowie mit b die Basis des Dreiecks und mit x seine noch unbekannte Höhe, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h_1 + \frac{b'_1 + b'_2}{2}\,h_2 + \ldots$$

Bestimmen wir die Mittellinien der Trapeze und setzen

$$\frac{b_1 + b_2}{2} = m_1, \quad \frac{b'_1 + b'_2}{2} = m_2 \ldots$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = m_1\,h_1 + m_2\,h_2 + \ldots$$

wo nun jedes Trapez als Rechteck mit der Basis m dargestellt ist. Verwandeln wir die Produkte in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3 ... so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b\,x_1 + b\,x_2 + \ldots \text{ woraus } x = 2\,(x_1 + x_2 + \ldots)$$

Es ist also die Höhe des Dreiecks gleich der doppelten Summe der Höhen der verwandelten Trapeze.

Sind z. B. die Trapeze $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ und $a_2\ b_2\ c_2\ d_2$ gegeben (Fig. 173) und sollen sie zu einem Dreiecke mit der Basis b vereinigt werden, so construire man die Höhen h_1 und h_2, halbire sie und ziehe durch die Halbirungspunkte Parallelen zu den parallelen Seiten der Trapeze, so erhält man die Mittellinien m_1 und m_2 der Trapeze. Nun mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,b = b$, $0\,m_1 = m_1$, $0\,m_2 = m_2$ und auf dem andern Schenkel $0\,h_1 = h_1$, $0\,h_2 = h_2$, ziehe die Gerade $b\,h_1$ und parallel zu ihr durch m_1 die Gerade $m_1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ferner ziehe man die Gerade $b\,h_2$ und parallel zu ihr durch m_2 die Gerade $m_2\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, denn es bestehen folgende Proportionen

$$\frac{0\,b}{0\,h_1} = \frac{0\,m_1}{0\,x_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{b}{h_1} = \frac{m_1}{x_1}$$
$$\frac{0\,b}{0\,h_2} = \frac{0\,m_2}{0\,x_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{b}{h_2} = \frac{m_2}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen folgen die Gleichungen

$$b x_1 = m_1\,h_1\,; \quad b\,x_2 = m_2\,h_2$$

Nun soll sein

$$\frac{b\,x}{2} = m_1\,h_1 + m_2\,h_2, \text{ daher ist auch } \frac{b\,x}{2} = b\,x_1 + b\,x_2$$

woraus folgt

$$x = 2\,(x_1 + x_2)$$

Um das Dreieck zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ $x_1\,x_2 = x_2$ und sodann $0\,x = 2\,.\,0\,x_2$, so ist

$$0\,x = 2\,(x_1 + x_2)$$

das ist die Höhe des Dreiecks.

Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist daher gleichflächig der Summe der Trapeze $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$.

6. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Trapezen ist.

Soll ein Dreieck über einer gegebenen Basis construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Trapeze ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h_1 - \frac{b'_1 + b'_2}{2}\,h_2$$

und führt man die Mittellinien ein, so ist

$$\frac{b\,x}{2} = m_1\,h_1 - m_2\,h_2$$

Verwandeln wir die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b\,(x_1 - x_2) \text{ und hieraus } x = 2\,(x_1 - x_2)$$

Die Höhe des Dreiecks ist daher gleich dem doppelten Unterschiede der Höhen der verwandelten Trapeze.

Nehmen wir dieselben Trapeze und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien.

Um dieses Dreieck zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$: machen wir dann weiter $0\,x = 2\,0\,x_2$, so ist $0\,x = 2\,(x_1 - x_2)$ die Höhe des Dreiecks.

7. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Trapeze ist.

Soll eine Summe von Trapezen als Parallelogramm von gegebener Basis dargestellt werden und man bezeichnet mit b_1, b_2, b'_1, b'_2 ... die parallelen Seiten, mit h_1, h_2 ... die Höhen der Trapeze, sowie mit b die Basis des Parallelogramms und mit x seine noch unbekannte Höhe, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h_1 + \frac{b'_1 + b'_2}{2}\,h_2 + \ldots$$

Bestimmen wir die Mittellinien der Trapeze und setzen

$$\frac{b_1 + b_2}{2} = m_1; \quad \frac{b'_1 + b'_2}{2} = m_2 \ldots$$

so erhalten wir die Gleichung

$$b\,x = m_1\,h_1 + m_2\,h_2 + \ldots$$

wo nun jedes Trapez als Rechteck mit der Basis m dargestellt ist. Verwandeln wir die Produkte in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3 ... so erhalten wir die Gleichung

$$b\,x = b\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } x = x_1 + x_2 + \ldots$$

Es ist also die Höhe des Parallelogramms gleich der Summe der Höhen der verwandelten Trapeze.

Nehmen wir wieder dieselben Trapeze, bestimmen die Höhen x_1 und x_2 der verwandelten Trapeze und bilden die Summe $x_1 + x_2$ derselben, so ist diese Summe die gesuchte Höhe des Parallelogramms.

Machen wir auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten auf derselben in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2$ die Höhe des Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist gleichflächig der Summe der Trapeze $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$. Da nun dieses Parallelogramm auch ein Rechteck sein kann, so ist die Aufgabe, eine Summe von Trapezen als ein Rechteck von gegebener Basis darzustellen, gleichzeitig mit gelöst.

8. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Trapezen ist.

Soll ein Parallelogramm über einer gegebenen Basis construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Trapeze ist, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \frac{b_1 + b_2}{2}\,h_1 - \frac{b'_1 + b'_2}{2}\,h_2$$

und wenn man die Mittellinie einführt, so ist

$$b\,x = m_1\,h_1 - m_2\,h_2$$

Verwandeln wir die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhalten wir die Gleichung

$$b\,x = b\,(x_1 - x_2) \text{ daher } x = x_1 - x_2$$

Die Höhe des Parallelogramms ist daher gleich dem Unterschiede der Höhen der verwandelten Trapeze.

Nehmen wir dieselben Trapeze und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien.

Um dann das Parallelogramm zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2 = x$ die Höhe des Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist gleichflächig dem Unterschiede der Trapeze $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$ und weil dieses Parallelogramm auch ein Rechteck sein kann, so ist die Aufgabe, den Unterschied von Trapezen als Rechteck von gegebener Basis darzustellen, gleichzeitig mit gelöst.

9. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist.

Wenn eine Summe von Parallelogrammen als Parallelogramm von gegebener Basis dargestellt werden soll und man bezeichnet mit b_1, b_2, b_3 ... die Grundlinien, mit h_1, h_2, h_3 ... die Höhen der gegebenen Parallelogramme, ferner mit b die gegebene Basis und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Parallelogramms, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + \ldots$$

Werden die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3 ... verwandelt, so erhält man die Gleichung

$$x = b\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } x = x_1 + x_2 + \ldots$$

Es ist also die Höhe des gesuchten Parallelogramms gleich der Summe der Höhen der auf die Basis b verwandelten gegebenen Parallelogramme.

Sind nun z. B. (Fig. 174) die Parallelogramme $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2$ gegeben und sollen sie zu einem Parallelogramme mit der Basis b vereinigt werden, sind $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ die Grundlinien, so construire man die Höhen h_1 und h_2. Hierauf mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0b = b$, $0b_1 = b_1$, $0b_2 = b_2$ und auf dem andern Schenkel $0h_1 = h_1$, $0h_2 = h_2$, ziehe die Gerade bh_1 und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1 x_1$, so ist $0x_1 = x_1$, ferner ziehe man die Gerade bh_2 und parallel zu ihr durch b_2 die Gerade $b_2 x_2$, so ist $0x_2 = x_2$, denn es bestehen die Proportionen

$$\frac{0b}{0h_1} = \frac{0b_1}{0x_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{b}{h_1} = \frac{b_1}{x_1}$$

$$\frac{0b}{0h_2} = \frac{0b_2}{0x_2} \quad \text{das ist} \quad \frac{b}{h_2} = \frac{b_2}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen ergeben sich die Gleichungen

$$bx_1 = b_1 h_1; \quad bx_2 = b_2 h_2$$

Nun soll sein

$$bx = b_1 h_1 + b_2 h_2, \text{ daher ist auch } bx = b(x_1 + x_2) \text{ woraus folgt}$$

$$x = x_1 + x_2$$

Um das Parallelogramm zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1 x_2 = x_2$, so ist $0x_2 = x_1 + x_2$ die Höhe des Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm, welches sich über der Basis $0b$ mit der Höhe $0x_2$ construiren lässt, ist gleich der Summe der gegebenen Parallelogramme $a_1 b_1 c_1 d_1$ und $a_2 b_2 c_2 d_2$; da man aber auch ein Rechteck construiren kann, so ist die Darstellung einer Summe von Parallelogrammen als Rechteck von gegebener Basis hier ebenfalls ausgeführt.

10. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Parallelogrammen ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede von zwei gegebenen Parallelogrammen ist, so hat man die Gleichung

$$bx = b_1 h_1 - b_2 h_2$$

und verwandelt man die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhält man die Gleichung

$$bx = b(x_1 - x_2) \text{ und hieraus } x = x_1 - x_2.$$

Die Höhe des gesuchten Parallelogramms ist daher gleich dem Unterschiede der Höhen der auf die Basis b verwandelten Parallelogramme.

Nehmen wir dieselben Parallelogramme und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir daher, um das Parallelogramm zu construiren, auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$, das ist die Höhe des gesuchten Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist gleich dem Unterschiede der gegebenen Parallelogramme.

11. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist.

Wenn eine Summe von Parallelogrammen als Dreieck von gegebener Basis dargestellt werden soll und man bezeichnet mit $b_1, b_2 \ldots$ die Grundlinien, mit $h_1, h_2 \ldots$ die Höhen der gegebenen Parallelogramme, ferner mit b die gegebene Basis und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Dreiecks, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + \ldots$$

Werden die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, $x_2 \ldots$ verwandelt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } x = 2\,(x_1 + x_2 + \ldots)$$

Es ist also die Höhe des gesuchten Dreiecks gleich der doppelten Summe der Höhen der auf die Basis b verwandelten gegebenen Parallelogramme.

Nehmen wir wieder dieselben Parallelogramme, bestimmen die Höhen x_1 und x_2 der verwandelten Parallelogramme und bilden die doppelte Summe $2\,(x_1 + x_2)$ derselben, so ist diese Summe die gesuchte Höhe des Dreiecks.

Machen wir zu diesem Zwecke auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten auf derselben in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x = 2\,(x_1 + x_2)$ so ist $0\,x$ die Höhe des Dreiecks und ein jedes Dreieck, welches über $0\,b$ als Basis mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist gleich der Summe der gegebenen Parallelogramme.

12. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Parallelogrammen ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede von zwei gegebenen Parallelogrammen ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b_1\,h_1 - b_2\,h_2$$

und verwandelt man die Produkte auf der rechten Seite in solche mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhält man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = b\,(x_1 - x_2) \text{ und hieraus } x = 2\,(x_1 - x_2)$$

Die Höhe des gesuchten Dreiecks ist daher gleich dem doppelten Unterschiede der Höhen der auf die Basis b verwandelten Parallelogramme.

Nehmen wir dieselben Parallelogramme und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir daher, um das Dreieck zu construiren, auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$· machen wir endlich $0\,x = 2 \,.\, 0\,x_2$, so ist $0\,x$ die Höhe des gesuchten Dreiecks und ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist gleich dem Unterschiede der gegebenen Parallelogramme.

13. Construktion eines Quadrates, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist.

Wenn eine Summe von Quadraten als Quadrat construirt werden soll, und wir bezeichnen die Seiten dieser Quadrate mit a, b, c . . . die Seite des gesuchten Quadrates aber mit x, so haben wir die Gleichung

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots$$

Um diese Gleichung zu construiren, bilde man nacheinander

$$a^2 + b^2 = x_1^{\,2}$$
$$x_1^{\,2} + c^2 = x_2^{\,2}$$
$$x_2^{\,2} + d^2 = x_3^{\,2}$$

u. s. f. bis zur Seite des letzten Quadrates. Das letzte x, welches wir auf diese Weise erhalten, ist das gesuchte, also die Seite desjenigen Quadrates, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen sämmtlicher Quadrate ist.

Machen wir auf einer Geraden (Fig. 175) $0\,a = a$, errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,b = b$ und ziehen die Gerade $b\,a$, so ist $b\,a = x_1$, denn es besteht die Gleichung

$$a^2 + b^2 = x_1^{\,2}$$

Errichten wir ferner auf $a\,b$ in b eine Senkrechte, machen auf dieser $b\,c = c$ und ziehen die Gerade $c\,a$, so ist $c\,a = x_2$, denn es besteht die Gleichung

$$x_1^{\,2} + c^2 = x_2^{\,2}$$

Errichten wir weiter auf $a\,c$ in c eine Senkrechte, machen auf dieser

$c\,d = d$ und ziehen die Gerade $d\,a$, so ist $d\,a = x_3$, denn es besteht die Gleichung

$$x_2^2 + d^2 = x_3^2$$

und es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren weiter fortzusetzen ist. Wäre nun die Gleichung

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

zu construiren gewesen, so wäre

$$x_3 = x$$

und daher $a\,d$ die Seite desjenigen Quadrates, dessen Fläche gleich der Summe der gegebenen Quadrate ist.

14. Construktion eines Quadrates, welches gleich dem Unterschiede von zwei Quadraten ist.

Soll ein Quadrat construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Quadrate ist, so haben wir die Gleichung

$$x^2 = a^2 - b^2$$

Um diese zu construiren, machen wir auf einer Geraden (Fig. 176) $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und schneiden diese von b aus mit $b\,a = a$, so ist $0\,a = x$, denn es ist

$$\overline{0\,a}^2 = \overline{a\,b}^2 - \overline{0\,b}^2 \text{ das ist } x^2 = a^2 - b^2$$

15. Construktion eines Parallelogramms von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist.

Wenn eine Summe von Quadraten als Parallelogramm oder Rechteck von gegebener Basis construirt werden soll und wir bezeichnen die Seiten dieser Quadrate mit a, b, c ... die gegebene Basis des Parallelogramms mit g, und die noch unbekannte Höhe desselben mit x, so haben wir die Gleichung

$$g\,x = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$$

Verwandelt man die Quadrate auf der rechten Seite in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor g und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3 ... so erhalten wir die Gleichung

$$g\,x = g\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots) \text{ woraus } x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

und es ist die Höhe des gesuchten Parallelogramms gleich der Summe der Höhen der auf die Basis g verwandelten Quadrate.

Sind nun z. B. (Fig. 177) die Quadrate $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$ gegeben und sollen sie zu einem Parallelogramme mit der Basis g vereinigt werden, ist a die Seite des Quadrates $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und b die Seite des Quadrates $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$, so mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0\,a = a$, $0\,b = b$ und $0\,g = g$, auf dem andern Schenkel $0\,a' = a$, $0\,b' = b$, ziehe die Gerade $g\,a'$ und parallel zu ihr durch a die

Gerade $a\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ferner ziehe man die Gerade $g\,b'$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, denn es bestehen die Proportionen

$$\frac{0\,g}{0\,a'} = \frac{0\,a}{0\,x_1} \text{ das ist } \frac{g}{a} = \frac{a}{x_1}$$

$$\frac{0\,g}{0\,b'} = \frac{0\,b}{0\,x_2} \text{ das ist } \frac{g}{b} = \frac{b}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen folgen nun die Gleichungen

$$g\,x_1 = a^2; \quad g\,x_2 = b^2$$

Nun soll sein

$g\,x = a^2 + b^2$, daher ist auch $g\,x = g\,x_1 + g\,x_2$, woraus folgt

$$x = x_1 + x_2$$

Um das Parallelogramm zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0\,g = g$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, dann ist $0\,x_2 = x_1 + x_2$, das ist die gesuchte Höhe des Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm und folglich auch das Rechteck, welches über der Basis $0\,g$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist gleichflächig der Summe der Quadrate $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$.

16. Construktion eines Parallelogramms von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Quadraten ist.

Soll ein Parallelogramm über einer gegebenen Basis construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Quadrate ist, so hat man die Gleichung

$$g\,x = a^2 - b^2$$

Verwandelt man die Quadrate in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor g und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhält man die Gleichung

$$g\,x = g\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = x_1 - x_2$$

folglich ist die Höhe des gesuchten Parallelogramms gleich dem Unterschiede der Höhen der auf die Basis g verwandelten Quadrate.

Nehmen wir dieselben Quadrate und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien, und um das Parallelogramm zu construiren, machen wir auf einer Geraden $0\,g = g$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$, das ist die Höhe des. Parallelogramms.

Ein jedes Parallelogramm und folglich auch das Rechteck, welches über der Basis $0\,g$ mit der Höhe $0\,x_2$ construirt wird, ist gleich der Differenz der Quadrate $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$.

17. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Quadrate ist.

Wenn eine Summe von Quadraten als Dreieck von gegebener Basis construirt werden soll und wir bezeichnen die Seiten dieser Quadrate mit $a, b, c \ldots$ die gegebene Basis des Dreiecks mit g und die noch unbekannte Höhe desselben mit x, so haben wir die Gleichung

$$\frac{g\,x}{2} = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$$

Verwandeln wir die Quadrate in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor g und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{g\,x}{2} = g\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots) \text{ woraus } x = 2\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

und es ist demnach die Höhe des gesuchten Dreiecks gleich der doppelten Summe der Höhen der auf die Basis g verwandelten Quadrate.

Nehmen wir dieselben Quadrate und führen dieselbe Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir sodann, um das Dreieck zu construiren, auf einer Geraden $0\,g = g$, errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, sowie $0\,x = 2 \,.\, 0\,x_2$, so ist $0\,x = 2\,(x_1 + x_2)$, das ist die Höhe des Dreiecks. Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,g$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist gleich der Summe der beiden gegebenen Quadrate.

18. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Quadrate ist.

Soll ein Dreieck über einer gegebenen Basis construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede zweier Quadrate ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{g\,x}{2} = a^2 - b^2$$

Werden die Quadrate in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor g und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2 verwandelt, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{g\,x}{2} = g\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = 2\,(x_1 - x_2)$$

und es ist mithin die Höhe des gesuchten Dreiecks gleich dem doppelten Unterschiede der Höhen der auf die Basis g verwandelten Quadrate.

Für dieselben Quadrate erhalten wir dieselben Linien für x_1 und x_2. Machen wir daher auf einer Geraden $0\,g = g$ errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, hierauf $0\,x = 2\,.\,0\,x_2$, so ist $0\,x = 2\,(x_1 - x_2)$ die Höhe des gesuchten Dreiecks.

19. Construktion eines Kreises, welcher gleich der Summe mehrerer Kreise ist.

Wenn ein Kreis construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Kreise ist und wir bezeichnen die Halbmesser der gegebenen Kreise mit r_1, r_2, r_3, ... den Halbmesser des gesuchten Kreises aber mit x, so haben wir die Gleichung

$$x^2 \pi = r_1{}^2 \pi + r_2{}^2 \pi + \ldots \text{ daher } x^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 + \ldots$$

Bilden wir nun der Reihe nach

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 = x_1{}^2$$
$$x_1{}^2 + r_3{}^2 = x_2{}^2$$
$$x_2{}^2 + r_4{}^2 = x_3{}^2$$

und so weiter, bis zum Halbmesser des letzten Kreises, so ist das letzte x welches wir auf diese Weise erhalten, der Halbmesser desjenigen Kreises, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen sämmtlicher Kreise ist.

Machen wir auf einer Geraden (Fig. 178) $0\,r_1 = r_1$, errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,r_2 = r_2$ und ziehen die Gerade $r_2\,r_1$, so ist $r_2\,r_1 = x_1$, denn wir haben die Gleichung

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 = x_1{}^2$$

Errichten wir ferner auf $r_2\,r_1$ in r_2 eine Senkrechte, machen auf dieser $r_2\,r_3 = r_3$ und ziehen die Gerade $r_3\,r_1$, so ist $r_3\,r_1 = x_2$, denn wir haben die Gleichung

$$x_1{}^2 + r_3{}^2 = x_2{}^2$$

Errichten wir weiter auf $r_3\,r_1$ in r_3 eine Senkrechte, machen auf dieser $r_3\,r_4 = r_4$ und ziehen die Gerade $r_4\,r_1$, so ist $r_4\,r_1 = x_3$, denn wir haben die Gleichung

$$x_2{}^2 + r_4{}^2 = x_3{}^2$$

und es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren weiter fortzusetzen ist.

Wäre daher die Gleichung

$$x^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 + r_4{}^2$$

zu construiren gewesen, so wäre $x_3 = x$ und daher $r_4\,r_1$ der Halbmesser desjenigen Kreises, dessen Fläche gleich der Summe der gegebenen Kreise ist.

20. Construktion eines Kreises, welcher gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist.

Soll ein Kreis construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Kreise ist, so haben wir die Gleichung

$$x^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2$$

Wir machen, um diese zu construiren, auf einer Geraden (Fig. 179) $0\,r_2 = r_2$, errichten in 0 eine Senkrechte und schneiden diese von r_2 aus mit $r_2\,r_1 = r_1$, so ist $0\,r_1 = x$, denn es ist

$$\overline{0\,r_1}^2 = \overline{r_2\,r_1}^2 - \overline{0\,r_2}^2 \text{ das ist } x^2 = r_1^2 - r_2^2$$

21. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Kreise ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Kreise ist und wir bezeichnen die Halbmesser der Kreise mit $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die gegebene Basis des Parallelogramms mit b und seine noch unbekannte Höhe mit x, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \pi\,(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots)$$

oder

$$\frac{b\,x}{\pi} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots$$

Verwandelt man die Quadrate der Halbmesser in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ so erhält man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{\pi} = b\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

und hieraus

$$x = \pi\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

Die Höhe des Parallelogramms ist daher die πfache Summe der Höhen der auf die Basis b verwandelten Quadrate der Halbmesser der Kreise.

Sind r_1 und r_2 die Halbmesser zweier gegebener Kreise und ist b die gegebene Basis des Rechtecks, so mache man (Fig. 180) auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,b = b$, $0\,r_1 = r_1$, $0\,r_2 = r_2$ und auf dem andern Schenkel $0\,r_1' = r_1$, $0\,r_2' = r_2$, ziehe die Gerade $b\,r_1'$ und parallel zu ihr durch r_1 die Gerade $r_1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ziehe ferner die Gerade $b\,r_2'$ und parallel zu ihr durch r_2 die Gerade $r_2\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\,b}{0\,r_1'} = \frac{0\,r_1}{0\,x_1} \text{ das ist } \frac{b}{r_1} = \frac{r_1}{x_1}$$

$$\frac{0\,b}{0\,r_2'} = \frac{0\,r_2}{0\,x_2} \text{ das ist } \frac{b}{r_2} = \frac{r_2}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen folgt

$$b\,x_1 = r_1^2;\quad b\,x_2 = r_2^2$$

Nun soll sein

$$\frac{b\,x}{\pi} = r_1^2 + r_2^2 \text{ daher ist auch } \frac{b\,x}{\pi} = b\,(x_1 + x_2) \text{ woraus folgt}$$

$$x = \pi\,(x_1 + x_2)$$

Macht man auf einer Geraden $0\,b = b$, errichtet in 0 eine Senkrechte, macht auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, sowie $3\frac{1}{7}(x_1 + x_2) = 0\,x$, so ist $0\,x$ die Höhe des Parallelogramms.

22. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Kreise ist, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \pi(r_1^2 - r_2^2) \text{ oder } \frac{b\,x}{\pi} = r_1^2 - r_2^2$$

Verwandelt man die Quadrate der Halbmesser in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so geht die Gleichung in folgende über

$$\frac{b\,x}{\pi} = b\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = \pi(x_1 - x_2)$$

Die Höhe des Parallelogramms ist daher gleich dem πfachen Unterschiede der Höhen der auf die Basis b verwandelten Quadrate der Halbmesser der Kreise.

Nehmen wir dieselben Kreishalbmesser und dieselbe Basis des Parallelogramms und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir dann auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$, machen wir sodann $0\,x = 3\frac{1}{7}\,0\,x_2$, so ist $0\,x$ die Höhe des Parallelogramms.

23. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Kreise ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Kreise ist und wir bezeichnen die Halbmesser der Kreise mit r_1, r_2, r_3 ... die gegebene Basis des Dreiecks mit b und seine noch unbekannte Höhe mit x, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots)$$

oder

$$\frac{b\,x}{2\pi} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots$$

Verwandelt man die Quadrate der Halbmesser in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2, x_3 \ldots$ so erhält man die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2\,\pi} = b\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

und hieraus

$$x = 2\,\pi\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

Die Höhe des Dreiecks ist daher die $2\,\pi$fache Summe der Höhen der auf die Basis b verwandelten Quadrate der Halbmesser der Kreise.

Nehmen wir dieselben Kreishalbmesser und dieselbe Basis und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien; machen wir dann auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 + x_2$, machen wir dann $0\,x = 2\,.\,3\frac{1}{7}\,.\,0\,x_2$, so ist $0\,x$ die Höhe des Dreiecks.

Ein jedes Dreieck, welches über der Basis $0\,b$ mit der Höhe $0\,x$ construirt wird, ist gleich der Summe der beiden Kreise.

24. Construktion eines Dreiecks von gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Kreise ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Kreise ist, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \pi\,(r_1{}^2 - r_2{}^2) \text{ oder } \frac{b\,x}{2\,\pi} = r_1{}^2 - r_2{}^2$$

Verwandelt man die Quadrate der Halbmesser in Produkte mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so erhält man folgende Gleichung

$$\frac{b\,x}{2\,\pi} = b\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = 2\,\pi\,(x_1 - x_2)$$

Die Höhe des Dreiecks ist daher gleich dem $2\,\pi$fachen Unterschiede der Höhen der auf die Basis b verwandelten Quadrate der Kreishalbmesser. Nehmen wir dieselben Halbmesser und dieselbe Basis und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir dann auf einer Geraden $0\,b = b$, errichten in 0 eine Senkrechte, machen auf dieser $0\,x = x_1$ und in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2$, machen wir sodann $0\,x = 2\,.\,3\frac{1}{7}\,.\,0\,x_2$ so ist $0\,x$ die Höhe des Dreiecks.

25. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist.

Wenn eine Ellipse construirt werden soll, deren Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Ellipsen ist, indem eine der Halbaxen dieser Ellipse gegeben ist, und wir bezeichnen die Halbaxen der gegebenen Ellipsen mit a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; ... die gegebene Halbaxe der gesuchten Ellipse mit a und die noch unbekannte andere Halbaxe mit x, so haben wir die Gleichung

$$a\,x\,\pi = \pi\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots) \text{ oder } a\,x = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots$$

Verwandelt man die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor a und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2, x_3, \ldots$ so wird die Gleichung

$$a\,x = a\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots) \text{ woraus } x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

Die gesuchte Halbaxe der Ellipse ist daher gleich der Summe der andern Halbaxen, welche man erhält, wenn die Ellipsen auf die gemeinschaftliche Halbaxe a verwandelt werden.

Sind nun z. B. (Fig. 181) zwei Ellipsen gegeben, deren Halbaxen a_1, b_1 und a_2, b_2 sind und ist a die gegebene Halbaxe der gesuchten Ellipse, so machen wir auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,a = a$, $0\,a_1 = a_1$, $0\,a_2 = a_2$, auf dem andern Schenkel aber $0\,b_1 = b_1$ und $0\,b_2 = b_2$, ziehen die Gerade $a\,b_1$ und parallel zu ihr durch a_1 die Gerade $a_1\,x_1$, so ist $0\,x_1 = x_1$, ziehen ferner die Gerade $a\,b_2$ und parallel zu ihr durch a_2 die Gerade $a_2\,x_2$, so ist $0\,x_2 = x_2$, denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\,a}{0\,b_1} = \frac{0\,a_1}{0\,x_1} \text{ das ist } \frac{a}{b_1} = \frac{a_1}{x_1}$$

$$\frac{0\,a}{0\,b_2} = \frac{0\,a_2}{0\,x_2} \text{ das ist } \frac{a}{b_2} = \frac{a_2}{x_2}$$

Aus diesen Proportionen folgt

$$a\,x_1 = a_1\,b_1; \qquad a\,x_2 = a_2\,b_2$$

Nun ist

$$a\,x = a_1\,b_1 + a_2\,b_2, \text{ daher auch } a\,x = a\,(x_1 + x_2) \text{ woraus}$$

$$x = x_1 + x_2$$

Macht man auf einer Geraden $0\,a = a$, errichtet in 0 eine Senkrechte, macht auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 + x_2 = x$ die gesuchte andere Halbaxe der Ellipse.

26. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche gleich dem Unterschiede zweier Ellipsen ist.

Soll mit einer gegebenen Halbaxe eine Ellipse construirt werden, deren Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Ellipsen ist, so haben wir die Gleichung

$$a\,x\,\pi = \pi\,(a_1\,b_1 - a_2\,b_2) \text{ oder } a\,x = a_1\,b_1 - a_2\,b_2$$

Verwandelt man die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor a und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2, so wird die Gleichung

$$a\,x = a\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = x_1 - x_2$$

Die gesuchte Halbaxe ist daher gleich dem Unterschiede der andern Halbaxen, welche man erhält, wenn die Ellipsen auf die gemeinschaftliche Halbaxe a verwandelt werden.

Nehmen wir dieselben Halbaxen und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien. Machen wir dann auf einer Geraden $0\,a = a$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0\,x_1 = x_1$, sowie in entgegengesetzter Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, so ist $0\,x_2 = x_1 - x_2 = x$ die gesuchte Halbaxe der Ellipse.

27. Construktion eines Kreises, welcher gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist.

Wenn ein Kreis construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Ellipsen ist und wir bezeichnen die Halbaxen der Ellipsen mit a_1, b_1; a_2, b_2; . . . den Halbmesser des Kreises mit x, so haben wir die Gleichung

$$x^2\pi = \pi\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots) \text{ oder } x^2 = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots$$

Verwandelt man die Produkte in andere mit dem beliebig angenommenen gemeinschaftlichen Faktor a und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1, x_2, x_3 . . . so wird die Gleichung

$$x^2 = a\,(x_1 + x_2 + \ldots)$$

Setzen wir nun

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = b \text{ so wird } x^2 = a\,b$$

und construiren wir die Proportion

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

so ist der Halbmesser des Kreises bestimmt.

Nehmen wir dieselben Ellipsen und denselben Faktor a und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien und es ist dann $x_1 + x_2 = b$.

Macht man nun auf einer Geraden (Fig. 182) $0\,a = a$, beschreibt über $0\,a$ als Durchmesser einen Halbkreis, macht $0\,b = b$, errichtet in b eine Senkrechte $b\,x$ und zieht die Gerade $0\,x$, so ist $0\,x$ der Halbmesser des Kreises, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen beider Ellipsen ist.

28. Construktion eines Kreises, welcher gleich dem Unterschiede von zwei Ellipsen ist.

Wenn ein Kreis construirt werden soll, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier gegebener Ellipsen ist, so haben wir die Gleichung

$$x^2\pi = \pi\,(a_1\,b_1 - a_2\,b_2) \text{ oder } x^2 = a_1\,b_1 - a_2\,b_2$$

Werden die Produkte in andere mit dem beliebig angenommenen gemeinschaftlichen Faktor a und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2 verwandelt, so wird die Gleichung

$x^2 = a(x_1 - x_2)$ und setzen wir $x_1 - x_2 = b$, so wird $x^2 = a\,b$.

Construiren wir endlich die Proportion

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

so ist der Halbmesser des Kreises bestimmt.

Nehmen wir dieselben Ellipsen und denselben Faktor a und führen die Construktion aus, so erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien, und es ist $x_1 - x_2 = b$.

Macht man nun auf einer Geraden (Fig. 183) $0\,a = a$, beschreibt über $0\,a$ als Durchmesser einen Halbkreis, macht $0\,b = b$, errichtet in b eine Senkrechte $b\,x$ und zieht die Gerade $0\,x$, so ist $0\,x$ der Halbmesser des Kreises, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen beider Ellipsen ist.

29. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer Ellipsen ist, werden die Halbaxen der Ellipsen wie vorher bezeichnet, ist b die gegebene Basis des Parallelogramms und x seine noch unbekannte Höhe, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \pi\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots)$$

Verwandelt man die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2 \ldots$ so wird die Gleichung

$$b\,x = b\,\pi\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } x = \pi\,(x_1 + x_2 + \ldots)$$

Es ist also die Höhe des Parallelogramms gleich der πfachen Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

Nehmen wir dieselben Ellipsen und für die Basis b die mit a bezeichnete Linie und führen die Construktion aus, so erhalten wir auch für x_1 und x_2 dieselben Linien. Macht man nun auf einer Geraden $0\,b = b$, errichtet in 0 eine Senkrechte, macht auf dieser $0\,x_1 = x_1$ und in derselben Richtung $x_1\,x_2 = x_2$, ferner $0\,x = \pi\,.\,0\,x_2$, so ist $0\,x$ die Höhe des Parallelogramms.

30. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede zweier Ellipsen ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Ellipsen ist, so haben wir die Gleichung

$$b\,x = \pi\,(a_1\,b_1 - a_2\,b_2)$$

und wenn die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2 verwandelt werden,

$$b\,x = b\,\pi\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = \pi\,(x_1 - x_2)$$

Es ist daher die Höhe des Parallelogramms gleich dem πfachen Unterschiede der nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

Für dieselben Ellipsen und dieselbe Basis erhalten wir auch für x_1 und x_2 dieselben Linien, deren πfacher Unterschied die Höhe des Parallelogramms ist.

31. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich der Summe mehrerer Ellipsen ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer Ellipsen ist, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \pi\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots)$$

und werden die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren $x_1, x_2 \ldots$ verwandelt

$$\frac{b\,x}{2} = \pi\,b\,(x_1 + x_2 + \ldots) \text{ woraus } x = 2\,\pi\,(x_1 + x_2 + \ldots)$$

Es ist daher die Höhe des Dreiecks gleich der $2\,\pi$fachen Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

Für dieselben Ellipsen und dieselbe Basis erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien, deren $2\,\pi$fache Summe die Höhe des Dreiecks ist.

32. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches gleich dem Unterschiede von zwei Ellipsen ist.

Soll über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden, dessen Fläche gleich dem Unterschiede der Flächen zweier Ellipsen ist, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b\,x}{2} = \pi\,(a_1\,b_1 - a_2\,b_2)$$

und werden die Produkte in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor b und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren x_1 und x_2 verwandelt

$$\frac{b\,x}{2} = \pi\,b\,(x_1 - x_2) \text{ woraus } x = 2\,\pi\,(x_1 - x_2)$$

Es ist daher die Höhe des Dreiecks gleich dem $2\,\pi$fachen Unterschiede der nicht gemeinschaftlichen Faktoren.

Für dieselben Ellipsen und dieselbe Basis erhalten wir für x_1 und x_2 dieselben Linien, deren $2\,\pi$facher Unterschied die Höhe des Dreiecks ist.

Bei der Darstellung von Summen und Unterschieden von Flächen als

Dreieck oder Parallelogramm haben wir stets angenommen, dass die Basis des Dreiecks oder Parallelogramms gegeben sei; es hätten aber ebensogut die Höhen dieser Figuren gegeben sein können, die Betrachtungen und Construktionen wären dieselben gewesen.

33. Construktion eines Parallelogramms, welches gleich der Summe mehrerer Parallelogramme ist, wenn das Verhältniss von Grundlinie und Höhe gegeben ist.

Es kann nun aber auch der Fall eintreten, dass keine der beiden die Fläche bestimmenden Dimensionen, sondern dass nur das Verhältniss dieser beiden Dimensionen gegeben ist.

Wir wollen dieses für einen Fall betrachten.

Wenn ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche gleich der Summe der Flächen mehrerer gegebener Parallelogramme ist, wenn $b_1, b_2 \ldots$ die Grundlinien, $h_1, h_2 \ldots$ die Höhen der gegebenen Parallelogramme sind und man bezeichnet die Basis des gesuchten Parallelogramms mit x, seine Höhe mit y, so hat man die Gleichung

$$x\,y = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + \ldots$$

wo x und y unbekannt sind. Besteht nun ferner die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \text{ so folgt hieraus } x = \frac{m}{n}\,y$$

Setzen wir diesen Werth für x in die erste Gleichung ein, so wird sie

$$\frac{m}{n}\,y^2 = b_1\,h_1 + b_2\,h_2 + \ldots$$

Werden die Produkte rechts in andere mit dem gemeinschaftlichen Faktor m und den nicht gemeinschaftlichen Faktoren y_1, y_2 ... verwandelt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{m}{n}\,y^2 = m\,(y_1 + y_2 + \ldots) \text{ und hieraus weiter}$$

$$y^2 = n\,(y_1 + y_2 + \ldots)$$

Bildet man die Summe der y und setzt

$$y_1 + y_2 + \ldots = h \text{ so wird } y^2 = nh$$

woraus die Proportion

$$\frac{n}{y} = \frac{y}{h}$$

sich ergibt. Wird diese in bekannter Weise construirt, so erhält man y und aus der Gleichung

$$x = \frac{m}{n}\,y \text{ folgt dann weiter die Proportion } \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

woraus sich endlich auch x ergibt.

Sind z. B. (Fig. 184) $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$ zwei Parallelogramme, deren Flächen zu einem Parallelogramme vereinigt werden sollen, sind $a_1\,b_1$

$= b_1$ und $a_2 b_2 = b_2$ die Grundlinien, so construire man zunächst die Höhen $a_1 h_1 = h_1$ und $a_2 h_2 = h_2$.

Sind ferner m und n die beiden Linien, welche das Verhältniss der Grundlinie und Höhe des gesuchten Parallelogramms bestimmen, so mache man auf dem einen Schenkel eines beliebigen Winkels $0 b_1 = b_1$, $0 b_2 = b_2$ und $0 m = m$, auf dem andern Schenkel aber $0 h_1 = h_1$ und $0 h_2 = h_2$, ziehe die Gerade $m h_1$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1 y_1$, so ist $0 y_1 = y_1$, man ziehe ferner die Gerade $m h_2$ und parallel zu ihr durch b_2 die Gerade $b_2 y_2$, so ist $0 y_2 = y_2$, denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\,m}{0\,h_1} = \frac{0\,b_1}{0\,y_1} \text{ das ist } \frac{m}{h_1} = \frac{b_1}{y_1}$$

$$\frac{0\,m}{0\,h_2} = \frac{0\,b_2}{0\,y_2} \text{ das ist } \frac{m}{h_2} = \frac{b_2}{y_2}$$

und aus diesen Proportionen ergeben sich die Gleichungen

$$m\,y_1 = b_1\,h_1; \qquad m\,y_2 = b_2\,h_2$$

Nun soll sein

$$\frac{m}{n}\,y^2 = b_1\,h_1 + b_2\,h_2, \text{ daher ist auch } \frac{m}{n}\,y^2 = m(y_1 + y_2)$$

woraus folgt

$$y^2 = n\,(y_1 + y_2)$$

Wir machen nun auf einer Geraden $0 y_1 = y_1$, $y_1 y_2 = y_2$, so ist $0 y_2 = y_1 + y_2 = h$ und wir erhalten die Gleichung

$$y^2 = n\,h$$

Wir machen ferner auf einer Geraden $0 n = n$, $n h = h$, beschreiben über $0 h$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichten in n die Senkrechte $n y$, so ist $n y = y$.

Wir machen weiter auf dem einen Schenkel eines Winkels $0 m = m$, auf dem andern Schenkel $0 n = n$ und $0 y = y$, ziehen die Gerade $m n$ und parallel zu ihr durch y die Gerade $y x$, so ist $0 x = x$, denn wir haben die Proportion

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$$

und es sind somit die beiden Dimensionen, Grundlinie und Höhe des gesuchten Parallelogramms bestimmt.

Machen wir endlich auf einer Geraden $0 x = x$, errichten in 0 eine Senkrechte und machen auf dieser $0 y = y$, so ist ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $0 x$ mit der Höhe $0 y$ construirt wird, gleichflächig der Summe der beiden Parallelogramme $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ und $a_2\,b_2\,c_2\,d_2$ und es verhält sich die Grundlinie zur Höhe wie m zu n.

Achter Abschnitt.

Multiplikation der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks, welches ein Vielfaches eines gegebenen Dreiecks ist.

Wenn ein Dreieck construirt werden soll, dessen Flächeninhalt ein Vielfaches eines gegebenen Dreiecks ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Dreiecks, mit n den Multiplikator und mit f die Fläche des gesuchten Dreiecks, so ist

$$f = n \cdot \frac{b\,h}{2}, \text{ wofür wir auch schreiben können}$$

$$f = \frac{(n\,b) \cdot h}{2} = \frac{b \cdot (n\,h)}{2}$$

und man hat also dem gesuchten Dreiecke entweder das $n$fache der Grundlinie des gegebenen Dreiecks als Grundlinie, oder das $n$fache der Höhe des gegebenen Dreiecks als Höhe zu geben.

Ist $a\,b\,c$ (Fig. 185 und 186) das gegebene Dreieck, $a\,b$ die Grundlinie b und $a\,h$ die Höhe h sowie $n = 2$ und macht man (Fig. 185) $a\,b_1 = 2 \cdot a\,b$, so ist jedes Dreieck wie $a\,b_1\,c_1$, welches über $a\,b_1$ als Basis mit der Höhe h construirt wird, zweimal so gross als das gegebene Dreieck. Oder macht man (Fig. 186) $a\,h_1 = 2 \cdot a\,h$, so ist jedes Dreieck wie $a\,b\,c_1$, welches über $a\,b$ als Basis mit der Höhe $a\,h_1$ construirt wird, zweimal so gross als das gegebene Dreieck.

2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches ein Vielfaches eines gegebenen Dreiecks ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden soll, dessen Flächeninhalt das $n$fache eines gegebenen Dreiecks ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Dreiecks, mit b' die gegebene Basis und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Dreiecks, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b'\,x}{2} = n \cdot \frac{b\,h}{2} \text{ oder } b'\,x = (n\,b)\,h = b \cdot (n\,h)$$

Es ergeben sich hieraus die Proportionen

$$\frac{b'}{h} = \frac{n\,b}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{b'}{n\,h} = \frac{b}{x}$$

aus welchen x bestimmt wird.

Es sei nun (Fig. 187) $a\,b\,c$ das gegebene Dreieck, $a\,b = b$, $a\,h = h$ und $n = 2$. Man mache auf der Verlängerung von $a\,b$ die Strecke $a\,b_2 = 2\,b$ und $a\,b' = b'$, ziehe die Gerade $b'\,h$ und parallel zu ihr durch b_2 die Gerade $b_2\,x$, so ist $a\,x = x$ die gesuchte Höhe des Dreiecks, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h} = \frac{a\,b_2}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{b'}{h} = \frac{2\,b}{x}$$

3. Construktion eines Parallelogramms, welches ein Vielfaches eines gegebenen Parallelogramms ist.

Wenn ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche das Vielfache der Fläche eines gegebenen Parallelogramms ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Parallelogramms, mit n den Multiplikator und mit f die Fläche des gesuchten Parallelogramms, so ist

$$f = n\,.\,b\,h = n\,b\,.\,h = b\,.\,n\,h$$

Man hat also dem gesuchten Parallelogramm entweder das $n$fache der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms als Grundlinie oder das $n$fache der Höhe des gegebenen Parallelogramms zur Höhe zu geben.

Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 188 und 189) das gegebene Parallelogramm, $a\,b = b$ die Grundlinie und $a\,h = h$ die Höhe desselben, sowie $n = 2$ und macht man (Fig. 188) $a\,b_2 = 2\,b$, so ist jedes Parallelogramm wie $a\,b_2\,c'\,d$, welches über $a\,b_2$ als Basis mit der Höhe $a\,h$ construirt wird, zweimal so gross als das Parallelogramm $a\,b\,c\,d$. Oder macht man (Fig. 189) $a\,h_2 = 2\,h$, so ist jedes Parallelogramm wie $a\,b\,c'\,d'$, welches über der Basis $a\,b$ mit der Höhe $a\,h_2$ construirt wird, zweimal so gross als das gegebene Parallelogramm.

4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches ein Vielfaches eines gegebenen Parallelogramms ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche das $n$fache der Fläche eines gegebenen Parallelogramms ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Parallelogramms, sowie mit b' die gegebene Basis, mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Parallelogramms, so haben wir die Gleichung

$$b'\,x = n\,.\,b\,h = n\,b\,.\,h = b\,.\,n\,h$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{b'}{h} = \frac{n\,b}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{b'}{n\,h} = \frac{b}{x}$$

durch welche die Unbekannte x bestimmt wird.

Es sei nun (Fig. 190) $a\,b\,c\,d$ das gegebene Parallelogramm, $a\,b = b$, $a\,h = h$ und $n = 2$. Macht man auf der Verlängerung von $a\,b$ die Strecke $a\,b_2 = 2b$ und $a\,b' = b'$, zieht die Gerade $b'\,h$ und parallel zu ihr durch b_2 die Gerade $b_2\,x$, so ist $a\,x = x$ die Höhe des gesuchten Parallelogramms, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h} = \frac{a\,b_2}{x} \quad \text{das ist} \quad \frac{b'}{h} = \frac{2\,b}{x}$$

5. Construktion eines Quadrates, welches ein Vielfaches eines gegebenen Quadrates ist.

Wenn ein Quadrat construirt werden soll, welches ein Vielfaches eines gegebenen Quadrates ist, wir bezeichnen die Seite des gegebenen Quadrates mit a, die Seite des gesuchten Quadrates mit x und den Multiplikator mit n, so haben wir die Gleichung

$$x^2 = n\,a^2$$

Diese Gleichung lässt sich auf folgende Weise construiren. Ist $a\,b\,c\,d$ (Fig. 191) das gegebene Quadrat und man zieht eine Diagonale, etwa $d\,b$, so ist

$$\overline{d\,b}^2 = a^2 + a^2 = 2\,.\,a^2$$

Errichtet man in d eine Senkrechte, macht auf dieser $d\,e = a$ und zieht die Gerade $e\,b$, so ist

$$\overline{e\,b}^2 = \overline{d\,b}^2 + a^2 = 3\,.\,a^2$$

Errichtet man ferner in e eine Senkrechte, macht auf dieser $e\,f = a$ und zieht die Gerade $f\,b$, so ist

$$\overline{f\,b}^2 = \overline{e\,b}^2 + a^2 = 4\,.\,a^2$$

und es ist leicht einzusehen, wie dieses Verfahren weiter fortzusetzen ist.

6 Construktion eines Kreises, welcher ein Vielfaches eines gegebenen Kreises ist.

Wenn ein Kreis construirt werden soll, dessen Fläche ein Vielfaches der Fläche eines gegebenen Kreises ist, man bezeichnet den Halbmesser des gegebenen Kreises mit r, den Halbmesser des gesuchten Kreises mit x und den Multiplikator mit n. so hat man die Gleichung

$$x^2\,\pi = n\,r^2\,\pi \quad \text{also} \quad x^2 = n\,r^2$$

und es ist diese Gleichung ebenso zu construiren, wie im vorhergegangenen Falle. Die letzte Quadratseite ist der Halbmesser des gesuchten Kreises.

7. Construktion einer Ellipse, welche ein Vielfaches einer gegebenen Ellipse ist.

Wenn eine Ellipse construirt werden soll, deren Flächeninhalt ein Vielfaches einer gegebenen Ellipse ist, wir bezeichnen mit a und b die Halbaxen der gegebenen Ellipse, mit n den Multiplikator und mit f die Fläche der gesuchten Ellipse, so ist

$$f = n \,.\, a\, b\, \pi$$
$$= (n\, a) \,.\, b\, \pi = a \,.\, (n\, b)\, \pi$$

Man hat also die eine der gegebenen Halbaxen entsprechend zu vervielfachen.

8. Construktion einer Ellipse mit gegebener Halbaxe, welche ein Vielfaches einer gegebenen Ellipse ist.

Soll die Ellipse über einer gegebenen Halbaxe construirt werden und wir bezeichnen diese mit a', sowie die andere noch unbekannte Halbaxe mit x, so haben wir die Gleichung

$$a'\, x\, \pi = n \,.\, a\, b\, \pi$$
$$a'\, x = n\, a \,.\, b = a \,.\, n\, b$$

Hieraus folgen die Proportionen

$$\frac{a'}{b} = \frac{n\, a}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{a'}{n\, b} = \frac{a}{x}$$

Macht man auf dem einen Schenkel eines Winkels (Fig. 192) $0\, a' = a'$ und $0\, a_2 = 2\, a$ wenn $n = 2$ ist, sowie auf dem andern Schenkel $0\, b = b$, zieht die Gerade $a'\, b$ und parallel zu ihr durch a_2 die Gerade $a_2\, x$, so ist $0\, x = x$ die andere Halbaxe der Ellipse, denn es besteht die Proportion

$$\frac{0\, a'}{0\, b} = \frac{0\, a_2}{0\, x} \quad \text{das ist} \quad \frac{a'}{b} = \frac{2\, a}{x}$$

9. Construktion einer Figur, welche ein Vielfaches von einem unregelmässigen Vielecke ist.

Wenn eine Figur construirt werden soll, welche ein Vielfaches von einem beliebigen gegebenen unregelmässigen Vieleck ist, so hat man das gegebene Vieleck zuerst in ein Dreieck zu verwandeln und mit diesem die Multiplikation vorzunehmen. Das Vielfache dieses Dreiecks ist dann auch das Vielfache der gegebenen Figur.

10. Construktion einer Figur, welche ein Vielfaches einer gegebenen Figur und dieser ähnlich ist.

Wenn eine Figur construirt werden soll, welche nicht nur ein Vielfaches einer gegebenen Figur, sondern dieser auch ähnlich ist, so hat man zu berücksichtigen, dass die Flächen ähnlicher Figuren sich verhalten wie die Quadrate homologer Seiten. Ist nun a eine Seite einer gegebenen Figur, deren Flächeninhalt mit f bezeichnet werden mag, ist a' die homologe Seite der gesuchten Figur und f' der Flächeninhalt derselben, so besteht die Proportion

$$\frac{f}{f'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

Soll sich nun verhalten

$$\frac{f}{f'} = \frac{1}{n} \text{ soll also } f' = n\,f \text{ sein, so ist auch}$$

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{1}{n} \text{ daher } a'^2 = n\,a^2$$

und wir haben, um die Seite a' zu finden, ebenso zu verfahren, wie bei der Multiplikation der Quadrate.

Ist z. B. $a\,b\,c\,d$ (Fig. 193) ein gegebenes Viereck und soll ein anderes diesem ähnliches Viereck construirt werden, dessen Flächeninhalt dreimal so gross als der Flächeninhalt des gegebenen Vierecks ist, so wählen wir eine Seite, etwa $a\,b$, und construiren die ihr homologe Seite des gesuchten ähnlichen Vierecks. Zu diesem Zwecke machen wir (Fig. 194) auf den Schenkeln eines rechten Winkels $0\,a = 0\,a' = a\,b$ und ziehen die Gerade $a\,a'$ so ist $\overline{a\,a'}^2 = 2\,\overline{a\,b}^2$, wir errichten ferner in a' eine Senkrechte, machen auf dieser $a'\,a'' = a\,b$ und ziehen $a\,a''$ so ist $\overline{a\,a''}^2 = 3\,\overline{a\,b}^2$, also ist $a\,a''$ die zu $a\,b$ homologe Seite eines Vierecks, welches dem gegebenen ähnlich ist und eine dreimal so grosse Fläche als das gegebene Viereck besitzt.

Um dieses Viereck zu construiren, kann man auf verschiedene Weise verfahren, jenachdem man den Aehnlichkeitspunkt in einem Eckpunkte der Figur oder innerhalb der Figur oder ausserhalb der Figur annimmt.

Legt man den Aehnlichkeitspunkt in einen Eckpunkt der Figur, etwa den Punkt a (Fig. 195), so fallen auch die in diesem Punkte zusammenstossenden Seiten der ähnlichen Figuren zusammen. Man hat daher die Seiten $a\,b$ und $a\,d$ zu verlängern und durch den Punkt c den Strahl $a\,c$ zu legen. Hierauf macht man $a\,b' = aa''$, also gleich der zu $a\,b$ homologen Seite, macht $b'\,c'$ parallel zu $b\,c$ und $c'\,d'$ parallel zu $c\,d$, so ist $a\,b'\,c'\,d'$ das gesuchte Viereck.

Legt man den Aehnlichkeitspunkt in das Innere des Vierecks (Fig. 196), so hat man von diesem Punkte aus Strahlen durch alle Eckpunkte der Figur zu legen. Hierauf zieht man durch einen beliebigen Punkt m des Strahles $s\,a$ eine Parallele zu $a\,b$, macht auf dieser $m\,n$ gleich der zu $a\,b$ homologen Seite, also gleich $a\,a''$ und legt durch n eine Parallele zum Strahle $s\,a$, bis sie den Strahl $s\,b$ im Punkte b' trifft. Durch b' legt man eine Parallele zu $a\,b$ und erhält so die Seite $a'\,b'$ des gesuchten Vierecks. Macht man ferner $b'\,c'$ parallel zu $b\,c$, $c'\,d'$ parallel zu $c\,d$, so muss sich $d'\,a'$ parallel zu $d\,a$ ergeben. Es ist dann $a'\,b'\,c'\,d'$ das gesuchte Viereck.

Nimmt man den Aehnlichkeitspunkt s ausserhalb der Figur (Fig. 197) an, so hat man zunächst von s aus durch alle Eckpunkte der Figur Strahlen zu legen. Hierauf zieht man durch einen beliebigen Punkt m des Strahles $s\,b$ eine Parallele zur Seite $a\,b$, macht auf dieser $m\,n$ gleich der zu $a\,b$ homologen Seite, also gleich $a\,a''$, und legt durch n eine Parallele zum Strahle $s\,b$, bis sie den Strahl $s\,a$ im Punkte a' trifft. Durch a' legt man dann eine Parallele zu $a\,b$ und erhält so die Seite $a'\,b'$ des gesuchten Vierecks. Macht man ferner $b'\,c'$ parallel zu $b\,c$ und $c'\,d'$ parallel zu $c\,d$, so ergibt sich $d'\,a'$ parallel zu $d\,a$ und es ist $a'\,b'\,c'\,d'$ das gesuchte Viereck.

Neunter Abschnitt.

Division der Figuren.

1. Construktion eines Dreiecks, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Dreiecks ist.

Wenn ein Dreieck construirt werden soll, dessen Flächeninhalt ein bestimmter Theil eines gegebenen Dreiecks ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Dreiecks, mit n den Divisor und mit f die Fläche des gesuchten Dreiecks, so ist

$$f = \frac{1}{n} \cdot \frac{b\,h}{2}$$

wofür wir auch schreiben können

$$f = \frac{\frac{b}{n} \cdot h}{2} = \frac{b \cdot \frac{h}{n}}{2}$$

und man hat also dem gesuchten Dreiecke entweder den $n$ten Theil der Grundlinie des gegebenen Dreiecks als Grundlinie oder den $n$ten Theil der Höhe des gegebenen Dreiecks zur Höhe zu geben.

Es sei $a\,b\,c$ (Fig. 198) das gegebene Dreieck, $a\,b$ die Grundlinie, $a\,h$ die Höhe und $n = 3$. Theilt man die Grundlinie in 3 gleiche Theile, so ist ein jedes Dreieck, welches über dem dritten Theile der Grundlinie mit der Höhe $a\,h$ construirt wird, der dritte Theil des Dreiecks $a\,b\,c$. Theilt man die Höhe in drei gleiche Theile, so ist ein jedes Dreieck, welches über der Grundlinie $a\,b$ mit dem dritten Theile von $a\,h$ als Höhe construirt wird, der dritte Theil des Dreiecks $a\,b\,c$.

2. Construktion eines Dreiecks über gegebener Basis, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Dreiecks ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Dreieck construirt werden soll, dessen Flächeninhalt der $n$te Theil eines gegebenen Dreiecks ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Dreiecks, mit b' die gegebene Basis und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Dreiecks, so haben wir die Gleichung

$$\frac{b'\,x}{2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{b\,h}{2} \text{ oder } b'\,x = \frac{b}{n} \,.\, h = b \,.\, \frac{h}{n}$$

Hieraus ergeben sich die Proportionen

$$\frac{b'}{h} = \frac{\frac{b}{n}}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{b'}{\frac{h}{n}} = \frac{b}{x}$$

aus welchen x bestimmt wird.

Es sei nun $a\,b\,c$ (Fig. 199) das gegebene Dreieck, $a\,b = b$, $a\,h = h$ und $n = 3$. Man mache $a\,b_1 = \frac{1}{3}\,a\,b$ und $a\,b' = b'$, ziehe die Gerade $b'\,h$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1\,x$, so ist $a\,x = x$ die gesuchte Höhe des Dreiecks, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h} = \frac{a\,b_1}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{b'}{h} = \frac{\frac{b}{3}}{x}$$

Ein jedes Dreieck, welches über $a\,b'$ als Grundlinie mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist der dritte Theil des Dreiecks $a\,b\,c$.

3. Construktion eines Parallelogramms, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Parallelogramms ist.

Wenn ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Fläche ein bestimmter Theil eines gegebenen Parallelogramms ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Parallelogramms, mit n den Divisor und mit f die Fläche des gesuchten Parallelogramms, so ist

$$f = \frac{1}{n} \,.\, b\,h = \frac{b}{n} \,.\, h = b \,.\, \frac{h}{n}$$

Man hat also dem gesuchten Parallelogramme entweder den $n$ten Theil der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms als Grundlinie oder den $n$ten Theil der Höhe des gegebenen Parallelogramms als Höhe zu geben.

Ist $a\,b\,c$ d (Fig. 200) das gegebene Parallelogramm, $a\,b$ die Grundlinie b und $a\,h$ die Höhe h sowie $n = 3$ und macht man $a\,b_1 = \frac{1}{3}\,a\,b$ so ist ein jedes Parallelogramm, welches über $a\,b_1$ als Basis mit der Höhe h construirt wird, der dritte Theil des gegebenen Parallelogramms. Oder macht man $a\,h_1 = \frac{1}{3}\,a\,h$, so ist ein jedes Parallelogramm, welches über $a\,b$ als Basis mit der Höhe $a\,h_1$ construirt wird, der dritte Theil des gegebenen Parallelogramms.

4. Construktion eines Parallelogramms über gegebener Basis, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Parallelogramms ist.

Wenn über einer gegebenen Basis ein Parallelogramm construirt werden soll, dessen Flächeninhalt der $n$te Theil eines gegebenen Parallelogramms ist, wir bezeichnen mit b die Basis, mit h die Höhe des gegebenen Parallelogramms, mit b' die gegebene Basis und mit x die noch unbekannte Höhe des gesuchten Parallelogramms, so haben wir die Gleichung

$$b'\,x = \frac{1}{n}\,b\,h \text{ oder } b'\,x = \frac{b}{n}\,.\,h = b\,.\,\frac{h}{n}$$

Hieraus ergeben sich die Proportionen

$$\frac{b'}{h} = \frac{\frac{b}{n}}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{b'}{\frac{h}{n}} = \frac{b}{x}$$

durch welche x bestimmt wird.

Es sei nun $a\,b\,c\,d$ (Fig. 201) das gegebene Parallelogramm, $a\,b = b$, $a\,h = h$ und $n = 3$. Man mache $a\,b_1 = \frac{1}{3}\,a\,b$ und $a\,b' = b'$, ziehe die Gerade $b'\,h$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1\,x$, so ist $a\,x = x$ die Höhe des gesuchten Parallelogramms, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b'}{a\,h} = \frac{a\,b_1}{a\,x} \quad \text{das ist} \quad \frac{b'}{h} = \frac{\frac{b}{3}}{x}$$

und ein jedes Parallelogramm, welches über der Basis $a\,b$ mit der Höhe $a\,x$ construirt wird, ist der dritte Theil des Parallelogramms $a\,b\,c\,d$.

5. Theilung eines Dreiecks nach gegebenem Verhältniss.

Soll ein Dreieck in zwei oder mehr Theile getheilt werden, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten, so hat man zu berücksichtigen, dass die Flächen von Dreiecken bei gleicher Höhe sich wie die Grundlinien verhalten. Theilt man daher die Grundlinie nach dem gegebenen Verhältniss und verbindet die Theilpunkte mit dem der Grundlinie gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks, so sind die so erhaltenen Theile des Dreiecks die gesuchten.

Ist z. B. $a\,b\,c$ (Fig. 202) das gegebene Dreieck, welches so in drei Theile getheilt werden soll, dass sich die Theile wie 2 : 3 : 4 verhalten und nimmt man die Seite $a\,b$ als Grundlinie an, so hat man diese Seite in 9 gleiche Theile zu theilen. Macht man nun $a\,b_1 = \frac{2}{9}\,a\,b$, $b_1\,b_2 = \frac{3}{9}\,a\,b$ und $b_2\,b = \frac{4}{9}\,a\,b$, so verhält sich

$$a\,b_1 : b_1\,b_2 : b_2\,b = 2 : 3 : 4$$

und zieht man die Geraden $b_1\,c$ und $b_2\,c$, so verhalten sich die Dreiecke

$$a\,c\,b_1 : b_1\,c\,b_2 : b_2\,c\,b = 2 : 3 : 4$$

6. Theilung eines Parallelogramms nach gegebenem Verhältniss.

Soll ein Parallelogramm in zwei oder mehr Theile getheilt werden, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten, so gilt auch für Parallelogramme, dass die Flächen bei gleicher Höhe sich wie die Grundlinien verhalten. Theilt man daher die Grundlinie nach dem gegebenen Verhältniss und zieht durch die Theilpunkte Parallelen zu den der Grundlinie anliegenden Seiten, so sind die erhaltenen Theile des Parallelogramms die gesuchten.

Ist z. B. $a\,b\,c\,d$ (Fig. 203) das gegebene Parallelogramm, welches so in zwei Theile getheilt werden soll, dass sich die Theile wie 3 : 5 verhalten und nimmt man die Seite $a\,b$ als Grundlinie an, so hat man diese Seite in acht gleiche Theile zu theilen. Macht man nun $a\,b_1 = \frac{3}{8}\,a\,b$, $b_1\,b = \frac{5}{8}\,a\,b$, so verhält sich

$$a\,b_1 : b_1\,b = 3 : 5$$

und zieht man die Gerade $b_1\,c_1$ parallel zu $a\,d$, so ist

$$a\,b_1\,c_1\,d : b_1\,b\,c\,c_1 = 3 : 5$$

7. Construktion eines Quadrates, welches ein bestimmter Theil eines gegebenen Quadrates ist.

Wenn ein Quadrat construirt werden soll, dessen Flächeninhalt ein bestimmter Theil eines gegebenen Quadrates ist, wir bezeichnen mit a die Seite des gegebenen, mit x die Seite des gesuchten Quadrates und mit n den Divisor, so haben wir die Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{n}\,a^2, \text{ wofür wir schreiben können, } x^2 = \frac{a}{n}\,.\,a$$

und es ist hiernach x die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{a}{n}$

Ist nun $a\,b\,c\,d$ (Fig. 204) das gegebene Quadrat und $n = 5$, so theilen wir eine Seite, etwa $a\,b$, in fünf gleiche Theile, so dass $b\,b_1 = \frac{1}{5}\,a\,b$ ist, beschreiben über $a\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichten in b_1 die Senkrechte $b_1\,e$; ziehen wir dann die Gerade $b\,e$, so ist dieses die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt der fünfte Theil des Quadrates $a\,b\,c\,d$ ist, denn es ist

$$\overline{b\,e}^2 = a\,b\,.\,b\,b_1 = a\,.\,\frac{1}{5}\,a = \frac{1}{5}\,a^2$$

8. Construktion von zwei Quadraten, deren Summe gleich einem gegebenen Quadrate ist und deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten.

Sollen zwei Quadrate construirt werden, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten und deren Summe gleich einem gegebenen Quadrate ist, oder was dasselbe ist, soll ein Quadrat in zwei Theile getheilt werden, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten, und sollen diese Theile selbst als Quadrate dargestellt werden, so haben wir die eine Seite des Quadrates nach dem gegebenen Verhältniss zu theilen, über der getheilten Seite als Durchmesser einen Halbkreis zu construiren und im Theilpunkte eine Senkrechte zu errichten. Die beiden Sehnen vom Endpunkte der Senkrechten nach den Endpunkten des Durchmessers sind die Seiten der gesuchten Quadrate.

Ist z. B. $a\,b\,c$ d (Fig. 205) das gegebene Quadrat, welches so in zwei Theile getheilt werden soll, dass sich diese Theile wie $3:5$ verhalten und sollen diese Theile selbst wieder als Quadrate dargestellt werden, so theile man eine Seite des Quadrates, etwa $a\,b$, in $5 + 3 = 8$ gleiche Theile. Macht man nun $a\,a_1 = \frac{5}{8}\,a\,b$, so ist $a_1\,b = \frac{3}{8}\,a\,b$ und es verhält sich

$$a_1\,b : a\,a_1 = 3 : 5$$

Zieht man die Gerade $a_1\,c_1$ senkrecht auf $a\,b$, so zerfällt das gegebene Quadrat in die beiden Rechtecke $a_1\,b\,c\,c_1$ und $a\,a_1\,c_1\,d$ und es besteht auch hier die Proportion

$$a_1\,b\,c\,c_1 : a\,a_1\,c_1\,d = 3 : 5$$

Construirt man über $a\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis, so schneidet dieser die Gerade $a_1\,c_1$ in b_1 und zieht man die Sehnen $a\,b_1$ und $b\,b_1$, so ist bekanntlich

$$\overline{b\,b_1}^2 = a_1\,b\,c\,c_1\,; \quad \overline{a\,b_1}^2 = a\,a_1\,c_1\,d$$

daher ist auch

$$\overline{b\,b_1}^2 : \overline{a\,b_1}^2 = 3 : 5$$

endlich ist

$$\overline{b\,b_1}^2 + \overline{a\,b_1}^2 = \overline{a\,b}^2$$

9. Construktion eines Kreises, welcher ein bestimmter Theil eines gegebenen Kreises ist.

Wenn ein Kreis construirt werden soll, dessen Flächeninhalt ein bestimmter Theil eines gegebenen Kreises ist, wir bezeichnen mit r den Halbmesser des gegebenen, mit x den Halbmesser des gesuchten Kreises und mit n den Divisor, so haben wir die Gleichung

$$x^2 \pi = \frac{1}{n} r^2 \pi \text{ also } x^2 = \frac{r}{n} . r$$

und es ist somit x die mittlere Proportionale zwischen r und $\frac{r}{n}$.

Ist $a\,b$ (Fig. 206) der Halbmesser des gegebenen Kreises und $n = 3$, so theile man $a\,b$ in 3 gleiche Theile, mache $a\,b_1 = \frac{1}{3}\,ab$ und beschreibe über $b\,b_1$ als Durchmesser einen Halbkreis; errichtet man dann in a die Senkrechte $a\,c$, so ist sie der Halbmesser des gesuchten Kreises, denn es besteht die Proportion

$$\frac{a\,b_1}{a\,c} = \frac{a\,c}{a\,b} \quad \text{das ist} \quad \frac{\frac{r}{3}}{x} = \frac{x}{r}$$

woraus

$$x^2 = \frac{r}{3} . r$$

Da nun der mit dem Halbmesser $a\,c$ beschriebene Kreis $\frac{1}{3}$ des gegebenen Kreises ist, so ist die Fläche des zwischen diesen beiden Kreisen liegenden Ringes $\frac{2}{3}$ des gegebenen Kreises.

Errichtet man im Punkte d, in welchem der kleine Kreis den Durchmesser des grossen Kreises schneidet, die Senkrechte $d\,e$, so ist diese bekanntlich der Halbmesser eines Kreises, welcher mit dem Ringe gleichen Flächeninhalt hat. Beschreiben wir daher mit dem Halbmesser $d\,e$ einen Kreis, so ist die Fläche desselben gleich $\frac{2}{3}$ des gegebenen Kreises und es verhält sich daher die Fläche des mit dem Halbmesser $a\,c$ beschriebenen Kreises zur Fläche des mit dem Halbmesser $d\,e$ beschriebenen Kreises wie $1 : 2$, während die Summe der Flächen beider Kreise gleich der Fläche des gegebenen Kreises ist.

10. Construktion von zwei Kreisen, deren Summe gleich einem gegebenen Kreise ist und deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten.

Wenn zwei Kreise construirt werden sollen, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten und deren Summe gleich einem gegebenen Kreise ist, oder was dasselbe ist, wenn ein Kreis in zwei Theile getheilt werden soll, deren Flächen sich wie gegebene Zahlen verhalten und diese Theile selbst als Kreise dargestellt werden sollen, so hat man den Halbmesser in dem gegebenen Verhältnisse zu theilen und die vorausgegangene Construktion anzuwenden.

Soll z. B. der gegebene Kreis (Fig. 207) so in zwei Theile getheilt werden, dass sich diese Theile wie zwei zu drei verhalten und sollen diese Theile selbst wieder als Kreise dargestellt werden, so theile man den Halbmesser $a\,b$ in $2 + 3 = 5$ gleiche Theile. Macht man nun $a\,a_1 = \frac{2}{5}\,a\,b$ und beschreibt über $a_1\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis, in welchem man dann die Senkrechte $a\,c$ errichtet, so ist diese der Halbmesser desjenigen Kreises, dessen Fläche $\frac{2}{5}$ der Fläche des gegebenen Kreises ist. Beschreibt man diesen Kreis und errichtet in seinem Durchschnittspunkte mit dem Durchmesser die Senkrechte $d\,e$, so ist diese der Halbmesser eines Kreises, welcher mit dem Ringe gleichen Flächeninhalt hat und dessen Fläche daher gleich $\frac{3}{5}$ der Fläche des gegebenen Kreises ist. Die Flächen der mit den Halbmessern $a\,c$ und $d\,e$ beschriebenen Kreise verhalten sich daher wie $2:3$ und ihre Summe ist gleich der Fläche des gegebenen Kreises, denn es ist

$$\overline{a\,c}^2 = \frac{2}{5}\,a\,b\,.\,a\,b = \frac{2}{5}\,\overline{a\,b}^2$$

$$\overline{d\,e}^2 = d\,b_1\,.\,d\,b = (a\,b - a\,c)\,(a\,b + a\,c)$$

$$= \overline{a\,b}^2 - \overline{a\,c}^2 = \overline{a\,b}^2 - \frac{2}{5}\,\overline{a\,b}^2$$

$$= \frac{3}{5}\,\overline{a\,b}^2$$

und daher

$$\overline{a\,c}^2 + \overline{d\,e}^2 = \frac{2}{5}\,\overline{a\,b}^2 + \frac{3}{5}\,\overline{a\,b}^2 = \overline{a\,b}$$

also auch

$$\overline{a\,c}^2\,.\,\pi + \overline{d\,e}^2\,.\,\pi = \overline{a\,b}^2\,.\,\pi$$

Die Construktion kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden (Fig. 208). Man theile den Halbmesser $a\,b$ in 5 gleiche Theile, nehme $a\,a_1 = \frac{2}{5}\,a\,b$, $a_1\,b = \frac{3}{5}\,a\,b$, beschreibe über $a\,b$ als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in a_1 die Senkrechte $a_1\,c$, dann sind $a\,c$ und $b\,c$ die Halbmesser der gesuchten Kreise. Denn es ist

$$\overline{a\,c}^2 = a\,a_1\,.\,a\,b;\quad \overline{b\,c}^2 = a_1\,b\,.\,a\,b$$

das ist

$$\overline{ac}^2 = \frac{2}{5}\, ab \,.\, ab = \frac{2}{5}\, \overline{ab}^2$$

$$\overline{bc}^2 = \frac{3}{5}\, ab \,.\, ab = \frac{3}{5}\, \overline{ab}^2$$

daher

$$\overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) \overline{ab}^2 = \overline{ab}^2$$

und mithin auch

$$\overline{ac}^2 \pi + \overline{bc}^2 \pi = \overline{ab}^2 \pi$$

Die Flächen der Kreise verhalten sich daher wie 2 : 3 und ihre Summe ist gleich dem gegebenen Kreise.

Zehnter Abschnitt.

Graphische Bestimmung der Volumina der Körper.

1. Das Prisma

Das Volumen eines Prismas ist ein Produkt aus seiner Grundfläche und seiner Höhe, also ein Produkt aus einer Fläche und einer Linie. Bezeichnet man die Grundfläche mit g, die Höhe mit k und das Volumen mit v, so ist

$$v = g\, k$$

Die Grundfläche kann nun aber ein Dreieck, Viereck oder Vieleck sein, welches durch die sie bestimmenden Dimensionen gegeben sein muss. Ist die Grundfläche ein Dreieck, dessen Basis b und dessen Höhe h ist, so ist

$$g = \frac{b\, h}{2}$$

und daher

$$v = \frac{b\, h}{2} \,.\, k$$

$$= \frac{b}{2} \,.\, h \,.\, k = b \,.\, \frac{h}{2} \,.\, k$$

und somit ist das Volumen ein Produkt aus drei geraden Linien, welches nach den Regeln der graphischen Multiplikation gebildet werden kann, wenn diese drei Linien gegeben sind.

Ist die Grundfläche ein Trapez, dessen parallele Seiten b_1 und b_2 sind und dessen Höhe h ist, so ist

$$g = \frac{b_1 + b_2}{2} . h \text{ und daher } v = \frac{b_1 + b_2}{2} . h . k$$

Bildet man die Summe $b_1 + b_2$ oder führt man die Mittellinie ein, so dass

$$\frac{b_1 + b_2}{2} = m \text{ und daher } v = m . h . k$$

ist, so ist wieder das Volumen des Prismas ein Produkt aus drei geraden Linien.

Ist die Grundfläche ein Parallelogramm oder Rechteck, dessen Basis b und dessen Höhe h ist, so ist

$$g = b\,h \text{ und daher } v = b\,h\,k$$

das ist ein Produkt aus drei geraden Linien.

Ist die Grundfläche ein Quadrat und a die Seite desselben, so ist

$$g = a . a \text{ und folglich } v = a\,a\,k$$

Ist auch $k = a$ also der Körper ein Würfel, so ist

$$v = a . a . a = a^3$$

Ist die Grundfläche ein unregelmässiges Viereck oder Vieleck, so hat man dieses in ein Dreieck zu verwandeln. Ist b die Basis, h die Höhe dieses Dreiecks, so ist

$$g = \frac{b\,h}{2} \text{ und daher } v = \frac{b}{2} . h . k$$

Ist die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck von n Seiten, bezeichnet s eine Seite und r den Halbmesser des einzuschreibenden Kreises, so ist

$$g = \frac{n\,s . r}{2} \text{ und daher } v = \frac{n\,s}{2} . r . k$$

Es geht hieraus noch hervor, dass ein jedes Prisma in ein gerades Parallelepiped von rechteckiger Basis verwandelt worden ist, dessen Kanten die drei Faktoren sind.

Es sei z. B. ein gerades dreiseitiges Prisma (Fig 209) durch seine Projektionen gegeben, das Dreieck $a\,b\,c$ sei die Grundfläche g und die Kante $a_0\,a'$ die Höhe k. Nehmen wir die Seite $a\,b$ als Basis des Dreiecks an, errichten in b eine Senkrechte und legen durch c eine Parallele zur Basis $a\,b$, so ist $b\,h = h$, halbiren wir endlich $a\,b$ in d, so ist $a\,d = b\,d = \frac{1}{2}\,b$. Um nun das Volumen

$$v = \frac{b}{2} . h . k$$

zu construiren, machen wir auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,h = h$, $0\,k = k$ und auf dem andern Schenkel $0\,b = \frac{b}{2}$, ziehen die

Gerade $1\,b$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\,p$; hierauf ziehen wir wieder die Gerade $1\,p$ und parallel zu ihr durch k die Gerade $k\,v$, so ist $0\,v = v$, das ist das Volumen des Prismas. Denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\,1}{0\,b} = \frac{0\,h}{0\,p} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{\frac{b}{2}} = \frac{h}{p}$$

und

$$\frac{0\,1}{0\,p} = \frac{0\,k}{0\,v} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{p} = \frac{k}{v}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$p = \frac{b}{2} \,.\, h \text{ und } v = p\,k$$

Setzt man den Werth von p aus der ersten Gleichung in die zweite, so erhält man

$$v = \frac{b}{2} \,.\, h \,.\, k$$

das ist das Volumen des Prismas.

2. Die Pyramide.

Das Volumen einer Pyramide ist der dritte Theil des Produktes aus ihrer Grundfläche und ihrer Höhe oder der dritte Theil eines Prismas, welches mit der Pyramide dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.

Behalten wir dieselben Bezeichnungen wie beim Prisma bei, so ist das Volumen der Pyramide

$$v = \frac{1}{3} \,.\, g\,k$$

und es gelten in Beziehung auf die Grundfläche g dieselben Betrachtungen, welche wir bei dem Prisma angestellt haben.

Ist die Grundfläche ein Dreieck, so ist

$$v = \frac{1}{3} \,.\, \frac{b}{2} \,.\, h \,.\, k$$

Ist die Grundfläche ein Trapez, so ist

$$v = \frac{1}{3} \,.\, \frac{b_1 + b_2}{2} \,.\, h \,.\, k$$

oder wenn wir die Mittellinie einführen

$$v = \frac{1}{3} \,.\, m \,.\, h \,.\, k$$

Ist die Grundfläche ein Parallelogramm oder Rechteck, so ist

$$v = \frac{1}{3} \,.\, b\,h\,k$$

Ist die Grundfläche ein Quadrat, so ist

$$v = \frac{1}{3} . a\, a\, k$$

Ist die Grundfläche ein unregelmässiges Viereck oder Vieleck, welches in ein Dreieck verwandelt wurde, so ist

$$v = \frac{1}{3} . \frac{b}{2} . h . k$$

Ist die Grundfläche ein regelmässiges Vieleck von n Seiten, so ist

$$v = \frac{1}{3} . \frac{n\, s}{2} . r . k.$$

Wir haben demnach dieselben Construktionen auszuführen, welche bei Berechnung des Volumens eines Prismas auszuführen sind und die erhaltene Linie in drei gleiche Theile zu theilen.

Ist z. B. eine vierseitige Pyramide, deren Grundfläche ein Trapez ist, durch ihre Projektionen gegeben (Fig. 210), ist das Trapez $a\, b\, c\, d$ die Grundfläche g und $s_0\, s'$ die Höhe k; errichten wir in a eine Senkrechte auf $a\, b$ und verlängern $d\, c$ bis sie die Senkrechte in h schneidet, so ist $a\, h = h$; halbiren wir h und legen durch den Halbirungspunkt eine Parallele zu den parallelen Seiten, so ist $m\, n$ die Mittellinie, also

$$m\, n = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

daher sind $m\, n$, $a\, h$ und $s_0\, s'$ die drei geraden Linien, deren Produkt zu bilden ist. Zu diesem Zwecke machen wir auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\, 1 = 1$, $0\, h = h$, $0\, s = s_0\, s'$ und auf dem andern Schenkel $0\, m = m\, n$, ziehen die Gerade $1\, m$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h\, p_1$; hierauf ziehen wir die Gerade $1\, p_1$ und parallel zu ihr durch s die Gerade s p, so ist $0\, p = p$ das Produkt der drei geraden Linien, denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\, 1}{0\, m} = \frac{0\, h}{0\, p_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{m} = \frac{h}{p_1}$$

$$\frac{0\, 1}{0\, p_1} = \frac{0\, s}{0\, p} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{s_0\, s'}{p}$$

Hieraus ergibt sich weiter

$$p_1 = m . h; \qquad p = p_1\, s_0\, s' = p_1\, k.$$

Setzt man den Werth von p_1 aus der ersten in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$p = m\, h\, k$$

Macht man endlich $p\, v = \frac{1}{3}\, 0\, p = \frac{1}{3}\, p = v$, so ist dieses das Volumen der Pyramide, denn es ist

$$v = \frac{1}{3}\, m\, h\, k \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{3}\, \frac{b_1 + b_2}{2} . h . k$$

3. Die abgestumpfte Pyramide.

Bezeichnen wir die Grundfläche der abgestumpften Pyramide mit g, die Abstumpfungsfläche mit g_1, die Höhe mit k und das Volumen mit v, so ist

$$v = \frac{k}{3}(g + \sqrt{g\,g_1} + g_1)$$

Um diese Rechnung graphisch auszuführen, bestimmt man zuerst die den Flächen g und g_1 entsprechenden Linien. Hierauf construirt man zu diesen Linien die mittlere Proportionale. Diese drei Linien werden sodann addirt und ihre Summe wird mit der Linie k multiplizirt. Nimmt man endlich den dritten Theil dieses Produktes, so stellt er das Volumen der abgestumpften Pyramide dar.

Es sei z. B. eine abgestumpfte Pyramide, deren Grundfläche und Abstumpfungsfläche Parallelogramme sind, durch ihre Projektionen gegeben, (Fig. 211). $a\,b\,c\,d$ sei die Grundfläche, $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ die Abstumpfungsfläche und $s_0\,s'$ die Höhe der abgestumpften Pyramide. Nehmen wir $a\,b$ als Grundlinie des Parallelogramms $a\,b\,c\,d$ an, errichten auf ihr in a eine Senkrechte und verlängern die Gegenseite $c\,d$, bis sie in h die Senkrechte trifft, so ist $a\,h = h$ die Höhe dieses Parallelogramms. Nehmen wir ebenso $a_1\,b_1$ als Grundlinie des Parallelogramms $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ an, errichten auf ihr in a_1 eine Senkrechte und verlängern die Gegenseite $c_1\,d_1$, bis sie in h_1 die Senkrechte trifft, so ist $a_1\,h_1$ die Höhe dieses Parallelogramms. Machen wir nun auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = a\,b = b$, $0\,b_1 = a_1\,b_1 = b_1$ und auf dem andern Schenkel $0\,h = h$, $0\,h_1 = h_1$, ziehen die Gerade $1\,h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,g$, so ist $0\,g = g$, das ist diejenige Gerade, welche die Grundfläche darstellt; ziehen wir ferner die Gerade $1\,h_1$ und parallel zu ihr durch b_1 die Gerade $b_1\,g_1$, so ist $0\,g_1 = g_1$, das ist diejenige Gerade, welche die Abstumpfungsfläche darstellt. Machen wir weiter auf einer Geraden $0\,g = g$, $0\,g_1 = g_1$, beschreiben über $0\,g$ als Durchmesser einen Halbkreis, errichten in g_1 die Senkrechte $g_1\,m$ und ziehen $0\,m$, so ist $0\,m$ die mittlere Proportionale zu g und g_1, es ist also $0\,m = m = \sqrt{g\,g_1}$.

Machen wir endlich auf dem ersten Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,g = g$, $g\,g_1 = g_1$, $g_1\,m = m$, so ist $0\,m = g + g_1 + m$; theilen wir diese Linie in 3 gleiche Theile, so dass $0\,t = \frac{1}{3}\,0\,m$ ist, machen wir weiter auf dem andern Schenkel des Winkels $0\,s = s_0\,s'$, ziehen die Gerade $1\,s$ und parallel zu ihr durch t die Gerade $t\,v$, so ist

$$\begin{aligned} 0\,v &= 0\,s\,.\,0\,t \\ &= s_0\,s'\,.\,\frac{1}{3}(g + g_1 + m) \\ &= \frac{1}{3}\,k\,(g + g_1 + \sqrt{g\,g_1} \end{aligned}$$

das ist das Volumen der abgestumpften Pyramide.

4. Das Prismatoid.

Dieser Körper (Fig. 212) wird gebildet durch zwei parallele Vielecke $A\,B\,C\,D$ und $E\,F\,G$ als Grundflächen und im allgemeinen durch Dreiecke wie $A\,B\,E$, $E\,B\,C$, $C\,E\,F$ ... als Seitenflächen, so dass eine Seite eines solchen Dreiecks mit einer Seite der einen Grundfläche, die gegenüberliegende Ecke aber mit einer Ecke der andern Grundfläche zusammenfällt. Wenn eine Seite der einen Grundfläche einer Seite der andern Grundfläche parallel ist, so fallen die zu diesen Kanten gehörigen Seiten-Dreiecke in eine Ebene, so dass ein Trapez oder ein Parallelogramm entsteht. Legt man durch den Mittelpunkt der Höhe eine Ebene parallel zu den Grundflächen, so wird das in dieser Ebene entstehende Vieleck $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$ die Mittelfigur des Prismatoids genannt.

Nimmt man in der Ebene der Mittelfigur einen beliebigen Punkt 0 an und zieht von ihm nach den Ecken beider Grundflächen gerade Linien, legt hierauf durch jede Grund- und Seitenkante und die von 0 ausgehenden geraden Linien-Ebenen, so zerfällt das Prismatoid in lauter Pyramiden, deren Spitzen sämmtlich in 0 liegen und deren Grundflächen die Grund- und Seitenflächen des Prismatoids sind. Die auf den Grundflächen stehenden Pyramiden, haben diese Flächen als Grundflächen und die halbe Höhe des Prismatoids zur Höhe, die auf den Seitenflächen stehenden Pyramiden aber sind zusammengenommen gleich dem Doppelten einer Pyramide, welche die Mittelfigur zur Grundfläche und die Höhe des Prismatoids zur Höhe hat.

Bezeichnen wir daher die untere Grundfläche des Prismatoids mit g, seine obere Grundfläche mit g_1, seine Höhe mit k und die Mittelfigur mit m, endlich das Volumen des Primatoids mit v, so ist

$$v = \frac{1}{3}\,g\,\frac{k}{2} + \frac{1}{3}\,g_1\,\frac{k}{2} + 2\,.\,\frac{1}{3}\,m\,k$$

Bestimmt man das Volumen einer jeden dieser drei Pyramiden und addirt die erhaltenen Linien, so stellt ihre Summe das Volumen des Prismatoids dar.

Man kann aber auch den Ausdruck auf folgende Weise zusammenfassen

$$v = \frac{1}{3}\,k\left(\frac{g + g_1}{2} + 2\,m\right)$$

Hiernach hat man die Grundflächen und die Mittelfigur zu bestimmen, die halbe Summe der Grundflächen und das zweifache der Mittelfigur zu addiren und die so erhaltene Linie mit der Höhe zu multipliciren. Der dritte Theil dieses Produktes ist dann das Volumen des Prismatoids.

Ist ein Prismatoid durch seine Projektionen gegeben (Fig. 213), ist die untere Grundfläche ein Trapez $a\,b\,c\,d$, die obere Grundfläche ein Dreieck $a_1\,b_1\,c_1$ und ist $b_1\,c_1$ mit $b\,c$ parallel, so ist die diesen Kanten entsprechende Seitenfläche ein Trapez. Man construire zuerst die Mittelfigur 1 2 3 4 5 6, hierauf die Mittellinie $e\,f$ und die Höhe $a\,h_1$ des Trapezes $a\,b\,c\,d$, sowie die Höhe $b_1\,h_2$, des Dreiecks $a_1\,b_1\,c_1$ und mache $b_1\,b_2 = \frac{1}{2}\,b_1\,c_1$, die Mittelfigur verwandle man in das Trapez 1 2 3′ 4′, ziehe die Mittellinie $i\,i'$ und die Höhe $l\,l'$.

Nun mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,f = e\,f$ und auf dem andern Schenkel $0\,h_1 = a\,h_1$, ziehe $1\,h_1$ und parallel dazu durch f die Gerade $f\,g$, so ist $0\,g = g$ die Grundfläche $a\,b\,c\,d$, denn wir haben die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,h_1} = \frac{0\,f}{0\,g} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{a\,h_1} = \frac{e\,f}{g} \quad \text{woraus } g = e\,f\,.\,a\,h_1$$

Wir machen ferner auf dem ersten Schenkel des Winkels $0\,b_1 = b_1\,b_2$ und auf dem zweiten Schenkel $0\,h_2 = b_1\,h_2$, ziehen $1\,h_2$ und parallel dazu durch b_1 die Gerade $b_1\,g_1$, so ist $0\,g_1 = g_1$ die obere Grundfläche $a_1\,b_1\,c_1$, denn wir haben die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,h_2} = \frac{0\,b_1}{0\,g_1} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{b_1\,h_2} = \frac{b_1\,b_2}{g_1}$$

woraus

$$g_1 = b_1\,b_2\,.\,b_1\,h_2 = \frac{1}{2}\,b_1\,c_1\,.\,b_1\,h_2$$

Wir machen weiter auf dem ersten Schenkel $0\,i = i\,i'$ und auf dem zweiten Schenkel $0\,l = l\,l'$, ziehen $1\,l$ und parallel dazu durch i die Gerade $i\,m$, so ist $0\,m = m$ die Fläche der Mittelfigur 1 2 3 4 5 6, denn wir haben die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,l} = \frac{0\,i}{0\,m} \quad \text{das ist} \quad \frac{1}{l\,l'} = \frac{i\,i'}{m} \quad \text{woraus } m = i\,i'\,.\,l\,l'$$

Auf einer geraden Linie machen wir $0\,g = g$, $g\,g_1 = g_1$ und halbiren $0\,g_1$ in s, so ist $0\,s = \frac{g + g_1}{2}$; auf einer andern Geraden machen wir $0\,m' = 2\,m$ und auf einer dritten Geraden machen wir

$$\begin{aligned} 0\,p &= 0\,s + 0\,m' \\ &= \frac{g + g_1}{2} + 2\,m \end{aligned}$$

und theilen $0\,p$ in drei gleiche Theile, so dass

$$\begin{aligned} 0\,p' &= \frac{1}{3}\,0\,p \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{g + g_1}{2} + 2\,m\right) \end{aligned}$$

auf dem ersten Schenkel des Winkels machen wir $0\,p_1 = 0\,p'$, auf dem andern Schenkel des Winkels machen wir aber $0\,k = a_0\,a'_1$, das ist gleich der Höhe des Prismatoids, ziehen $1\,k$ und parallel dazu durch p_1 die

Gerade $p_1\,v$, so ist $0\,v = v$ das Volumen des Prismatoids, denn wir haben die Proportion

$$\frac{0\,1}{0\,k} = \frac{0\,p_1}{0\,v} \text{ woraus } 0\,v = 0\,k\,.\,0\,p_1 = v.$$

Nun ist

$$0\,k = a_0\,a'_1 = k$$

$$0\,p_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{g+g_1}{2} + 2\,m\right)$$

daher

$$v = \frac{1}{3}\,k\left(\frac{g+g_1}{2} + 2\,m\right)$$

das Volumen des Prismatoids.

5. Der Ponton.

Ein spezieller Fall vom Prismatoid ist der Ponton (Fig. 214). Die Grundflächen dieses Körpers sind Rechtecke, die Seitenflächen Trapeze. Bezeichnet man zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten der unteren Grundfläche mit a und b, die entsprechenden Seiten der oberen Grundfläche mit a_1 und b_1, so ist die untere Grundfläche $g = a\,b$, die obere Grundfläche $g_1 = a_1\,b_1$ und die Mittelfigur

$$m = \frac{a+a_1}{2}\cdot\frac{b+b_1}{2}$$

$$= \frac{a\,b + a_1\,b + a\,b_1 + a_1\,b_1}{4}$$

Setzt man diese Werthe in die Formel für das Volumen des Prismatoids ein und bezeichnet man die Höhe des Ponton mit k, so ist sein Volumen

$$v = \frac{1}{3}\,k\left(\frac{a\,b + a_1\,b_1}{2} + 2\,.\,\frac{a\,b + a_1\,b + a\,b_1 + a_1\,b_1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\,k\,(2\,a\,b + 2\,a_1\,b_1 + a\,b_1 + a_1\,b)$$

Ist ein Ponton durch seine Projektionen gegeben (Fig. 215) und sind die Dimensionen wie vorher bezeichnet, so mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,a = a$, $0\,a_1 = a_1$, auf dem andern Schenkel $0\,b = b$, $0\,b_1 = b_1$, ziehe $1\,b$ und parallel dazu durch a die Gerade $a\,p_1$, so ist $0\,p_1 = a\,b$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,b} = \frac{0\,a}{0\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{b} = \frac{a}{p_1} \text{ daher } p_1 = a\,b$$

Man ziehe die Gerade $1\,b_1$ und parallel dazu durch a_1 die Gerade $a_1\,p_2$, so ist $0\,p_2 = a_1\,b_1$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,b_1} = \frac{0\,a_1}{0\,p_2} \text{ das ist } \frac{1}{b_1} = \frac{a_1}{p_2} \text{ daher } p_2 = a_1\,b_1$$

Man ziehe ferner durch a die Gerade $a\,p_3$ parallel zu $1\,b_1$, so ist $0\,p_3 = a\,b_1$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,b_1} = \frac{0\,a}{0\,p_3} \text{ das ist } \frac{1}{b_1} = \frac{a}{p_3} \text{ daher } p_3 = a\,b_1$$

Man ziehe durch a_1 die Gerade $a_1\,p_4$ parallel zu $1\,b$, so ist $0\,p_4 = a_1\,b$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,b} = \frac{0\,a_1}{0\,p_4} \text{ das ist } \frac{1}{b} = \frac{a_1}{p_4} \text{ daher } p_4 = a_1\,b$$

Man mache nun auf einer Geraden $0\,p_1 = 2\,p_1$, $p_1\,p_2 = 2\,p_2$, $p_2\,p_3 = p_3$ und $p_3\,p_4 = p_4$, so ist

$$0\,p_4 = 2\,a\,b + 2\,a_1\,b_1 + a\,b_1 + a_1\,b$$

Man theile ferner $0\,p_4$ in sechs gleiche Theile, so dass $0\,p = \frac{1}{6}\,0\,p_4$ wird, mache auf dem ersten Schenkel des Winkels $0\,p = \frac{1}{6}\,0\,p_4$ und auf dem andern Schenkel $0\,k = k$, ziehe $1\,k$ und parallel dazu durch p die Gerade $p\,v$, so ist $0\,v = v$ das Volumen des Ponton. Denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,k} = \frac{0\,p}{0\,v} \text{ das ist } \frac{1}{k} = \frac{p}{v} \text{ woraus } v = k\,.\,p$$

und setzt man für p seinen Werth

$$v = \frac{1}{6}\,k\,(2\,a\,b + 2\,a_1\,b_1 + a\,b_1 + a_1\,b)$$

6. Das gerade, schief abgeschnittene Prisma.

Das Volumen eines geraden und auf der einen Seite schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche und dem Abstande des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche von der Grundfläche.

Bezeichnen wir also die Grundfläche mit g und den Abstand des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche von der Grundfläche mit k, so ist das Volumen

$$v = g\,k$$

Ist ein solches Prisma durch seine Projektionen gegeben (Fig. 216), so bestimme man zuerst die Gestalt der schiefen Schnittfläche $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$, indem man die schneidende Ebene in die Projektionsebene umlegt. Hierauf bestimme man den Schwerpunkt s der Schnittfläche, seine Lage s' in der Projektion, sowie seinen Abstand $s_0\,s'$ von der Grundfläche. Die Grundfläche des Prismas ist ein Trapez, $m\,n$ seine Mittellinie und $b\,h$ seine Höhe. Man mache daher auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,m = m\,n$ und $0\,k = s_0\,s' = k$, auf dem andern Schenkel aber $0\,h = b\,h$. Zieht man die Gerade $1\,h$ und parallel zu ihr durch m die Gerade $m\,g$, so ist $0\,g = g$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,h} = \frac{0\,m}{0\,g} \text{ das ist } \frac{1}{b\,h} = \frac{m\,n}{g} \text{ daher } g = m\,n\,.\,b\,h$$

Zieht man ferner die Gerade $1\,g$ und parallel dazu durch k die Gerade $k\,v$, so ist $0\,v = v$ das Volumen des Prismas, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,g} = \frac{0\,k}{0\,v} \text{ das ist } \frac{1}{g} = \frac{k}{v} \text{ woraus } v = g\,k$$

oder wenn man für g seinen Werth setzt

$$v = m\,n\,.\,b\,h\,.\,k$$

Wenn ein Prisma auf beiden Seiten schiefe Endflächen hat, so legt man durch dasselbe einen normalen Schnitt und theilt es auf diese Weise in zwei Prismen, von denen dann jedes eine normale Grundfläche und eine schiefe Schnittfläche besitzt. Bezeichnet man die normale gemeinschaftliche Grundfläche mit g und die Abstände der Schwerpunkte der schiefen Schnittflächen von der normalen Grundfläche mit k_1 und k_2, so ist das Volumen des Prismas

$$v = g\,(k_1 + k_2)$$

Ist ein solches Prisma durch seine Projektionen gegeben (Fig. 217), so ist die eine Schnittfläche $a_1\,b_1\,c_1$ bereits vorhanden, die andere $a_2\,b_2\,c_2$ aber ist erst durch Umlegen der schneidenden Ebene zu bestimmen. Man bestimme in diesen Schnittebenen die Schwerpunkte s_1 und s_2, sowie ihre Lage s_1' und s_2' in der betreffenden Projektion des Prismas. Hierauf lege man einen normalen Schnitt durch das Prisma, bestimme die Schnittfläche $a\,b\,c$ und mache in dieser $a\,a' = \frac{1}{2}\,a\,c$, also gleich der Hälfte der Grundlinie, sowie $b\,h$ gleich der Höhe dieses Dreiecks. Endlich ziehe man noch von s_1' und s_2' die Senkrechten k_1 und k_2 auf die normale Grundfläche. Nun mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,b = a\,a'$, $0\,k = k_1 + k_2$, auf dem andern Schenkel $0\,h = b\,h$, ziehe die Gerade $1\,h$ und parallel zu ihr durch b die Gerade $b\,g$, so ist $0\,g = g$, also gleich der Fläche des Dreiecks $a\,b\,c$; denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,h} = \frac{0\,b}{0\,g} \text{ das ist } \frac{1}{b\,h} = \frac{a\,a'}{g}$$

daher

$$g = a\,a'\,.\,b\,h = \frac{a\,c}{2}\,.\,b\,h$$

Man ziehe ferner $1\,g$ und parallel dazu durch k die Gerade $k\,v$, dann ist $0\,v = v$ das Volumen des Prismas; denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,g} = \frac{0\,k}{0\,v} \text{ das ist } \frac{1}{g} = \frac{k}{v} \text{ woraus } v = g\,.\,k$$

oder

$$v = \frac{a\,c}{2}\,.\,b\,h\,.\,(k_1 + k_2)$$

7. Der Kreiscylinder.

Das Volumen des Kreiscylinders wird gefunden, wenn man seine Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt. Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche mit r, die Höhe mit h und das Volumen mit v, so ist

$$v = r^2 \pi h$$

wofür wir auch schreiben können

$$v = r \pi . r . h$$

Hier ist $r \pi$ der halbe Umfang des Kreises und wenn dieser in eine gerade Linie verwandelt wird, so ist das Volumen des Cylinders ein Produkt aus drei geraden Linien.

Es sei ein Cylinder durch seine Projektionen gegeben (Fig. 218), es sei $a b = r$, $c d = h$. Man mache zuerst auf einer Geraden $e f = 3{,}14 . a b$ so ist $e f = r \pi$. Hierauf mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0 h = c d = h$, $0 f = e f = r \pi$ und auf dem andern Schenkel $0 r = a b = r$. Man ziehe die Gerade $1 r$ und parallel zu ihr durch h die Gerade $h p$; hierauf ziehe man $1 p$ und parallel dazu durch f die Gerade $f v$, so ist $0 v = v$ das Volumen des Cylinders. Denn wir haben die Proportionen

$$\frac{0\,1}{0 r} = \frac{0 h}{0 p} \text{ das ist } \frac{1}{r} = \frac{h}{p}$$

$$\frac{0\,1}{0 p} = \frac{0 f}{0 v} \text{ das ist } \frac{1}{p} = \frac{r \pi}{v}$$

hieraus aber

$$p = r h; \quad v = p . r \pi$$

und setzt man den Werth von p aus der ersten Gleichung in die zweite, so wird

$$v = r h . r \pi$$

8. Der Kegel.

Das Volumen des Kegels ist

$$v = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

wenn wir mit r den Halbmesser der Grundfläche und mit h die Höhe des Kegels bezeichnen. Schreiben wir

$$v = \frac{1}{3} r \pi . r . h$$

so ist das Volumen des Kegels durch dieselbe Constraktion zu bestimmen, welche wir zur Bestimmung des Volumens des Cylinders angewendet haben; vom erhaltenen Resultate aber ist der dritte Theil zu nehmen. Wir haben daher die Linie $0 v$ in drei gleiche Theile zu theilen.

9. Der abgestumpfte Kegel.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche des abgestumpften Kegels mit r, den Halbmesser der Abstumpfungsfläche mit r_1, die Höhe mit k und das Volumen mit v, so ist

$$v = \frac{\pi k}{3} (r^2 + r\, r_1 + r_1{}^2)$$

Um diese Rechnung graphisch auszuführen, bestimme man zuerst die drei Produkte in der Parenthese, addire sie und dividire die Summe durch drei. Die so erhaltene Linie multiplicire man mit der Höhe k und nehme dieses Resultat $3\frac{1}{7}$ mal, wodurch auch die Multiplikation mit π ausgeführt ist.

Ist ein abgestumpfter Kegel durch seine Projektionen oder durch seine Bestimmungsstücke r, r_1 und k gegeben (Fig. 219), so mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,r = r$, $0\,r_1 = r_1$, und auf dem andern Schenkel $0\,r' = r$, $0\,r'_1 = r_1$. Zieht man $1\,r'$ und durch r dazu die Parallele $r\,p$, so ist $0\,p = r^2$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,r'} = \frac{0\,r}{0\,p} \text{ das ist } \frac{1}{r} = \frac{r}{p} \text{ daher } p = r^2$$

Zieht man $1\,r'_1$ und durch r_1 dazu die Parallele $r_1\,p_1$, so ist $0\,p_1 = r_1{}^2$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,r_1{}'} = \frac{0\,r_1}{0\,p_1} \text{ das ist } \frac{1}{r_1} = \frac{r_1}{p_1} \text{ daher } p_1 = r_1{}^2$$

Zieht man endlich durch r die Gerade $r\,p'$ parallel zu $1\,r'_1$, so ist $0\,p' = r\,r_1$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,r_1{}'} = \frac{0\,r}{0\,p'} \text{ das ist } \frac{1}{r_1} = \frac{r}{p'} \text{ daher } p' = r\,r_1$$

Man mache auf einer Geraden $0\,p = p$, $p\,p_1 = p_1$, $p_1\,p' = p'$, so ist

$$0\,p' = r^2 + r\,r_1 + r_1{}^2$$

Theilt man $0\,p'$ in drei gleiche Theile, so dass $0\,3 = \frac{1}{3}\,0\,p'$ ist, trägt $0\,3$ auf den ersten und $0\,k = k$ auf den zweiten Schenkel des Winkels, zieht dann die Gerade $1\,k$ und zu ihr durch 3 die Parallele $3\,t$, so ist $0\,t = \frac{1}{3}\,0\,p' \,.\, k$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,k} = \frac{0\,3}{0\,t} \text{ das ist } \frac{1}{k} = \frac{\frac{1}{3}\,0\,p'}{t} \text{ daher } t = \frac{1}{3}\,0\,p' \,.\, k$$

Setzt man für $0\,p'$ seinen Werth, so ist

$$t = \frac{1}{3}\,k\,(r^2 + r\,r_1 + r_1^2)$$

und folglich

$$v = \pi t = \pi \,.\, \frac{1}{3}\,k\,(r^2 + r\,r_1 + r_1^2)$$

Construirt man eine Gerade, welche $3{,}14 \,.\, 0\,t$ ist, so stellt sie das Volumen des abgestumpften Kegels dar.

10. Die Kugel.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel mit r und das Volumen mit v, so ist

$$v = \frac{4}{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi$$

Dafür können wir aber schreiben

$$v = \frac{2\,r\,\pi}{3} \,.\, 2\,r \,.\, r$$

wo $2\,r\,\pi$ der Umfang eines grössten Kugelkreises ist. Verwandeln wir diesen Kreis in eine Gerade und nehmen davon den dritten Theil, so ist das Volumen der Kugel ein Produkt aus drei geraden Linien, nämlich dem dritten Theile des Umfanges eines grössten Kreises, dem Durchmesser und dem Halbmesser. Ist daher der Halbmesser der Kugel gegeben, so hat man zuerst $\frac{2\,r\,\pi}{3}$ zu bilden und sodann die Multiplikation der drei geraden Linien auszuführen.

11. Das Drehungs-Ellipsoid.

Bezeichnet man die grosse Halbaxe mit a, die kleine Halbaxe mit b und findet die Drehung um die kleine Axe $2\,b$ statt, so ist das Volumen

$$v = \frac{4}{3}\,a^2\,b\,\pi \text{ wofür wir schreiben können } v = \frac{2\,a\,\pi}{3} \,.\, 2\,a \,.\, b$$

Findet dagegen die Drehung um die grosse Axe $2\,a$ statt, so ist

$$v = \frac{4}{3}\,a \,.\, b^2\,\pi \text{ wofür wir schreiben können } v = \frac{2\,b\,\pi}{3} \,.\, 2\,b \,.\, a$$

Verwandelt man $2\,a\,\pi$, das ist ein Kreis vom Halbmesser a, oder $2\,b\,\pi$, das ist ein Kreis vom Halbmesser b in eine gerade Linie, nimmt davon den dritten Theil und führt sodann die Multiplikation der drei geraden Linien aus, so ist das Produkt derselben gleich dem Volumen des Ellipsoids.

12. Bestimmung des Volumens von Umdrehungskörpern nach der guldinischen Regel.

Wenn eine ebene Figur sich um eine in derselben Ebene liegende Gerade als Axe dreht, so dass die gegenseitige Lage der Figur und der Geraden immer dieselbe bleibt, so beschreibt die Figur einen Körper, welcher seiner Entstehung entsprechend ein Umdrehungskörper genannt wird. Jeder Punkt der Figur beschreibt hierbei einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Drehungsaxe liegt.

Das Volumen eines solchen Umdrehungskörpers ist ein Produkt aus dem Flächeninhalte der erzeugenden Figur und dem Umfange desjenigen Kreises, den ihr Schwerpunkt bei der Umdrehung beschreibt. Bezeichnen wir daher den Flächeninhalt der Figur mit f, den Abstand ihres Schwerpunktes von der Drehungsaxe mit a und das Volumen des Umdrehungskörpers mit v, so ist

$$v = f \,.\, 2\, a\, \pi$$

Hat keine ganze Umdrehung stattgefunden und der Schwerpunkt nur einen Bogen beschrieben, den wir mit b bezeichnen wollen, so ist das Volumen des erzeugten Körpers

$$v = f\, b$$

Man hat also bei der Berechnung des Volumens eines solchen Körpers den Flächeninhalt der erzeugenden Figur zu bestimmen und diesen mit der Länge des vom Schwerpunkte beschriebenen Bogens zu multipliciren.

Ist ein solcher Körper durch seine Projektionen gegeben (Fig. 220), ist die erzeugende Figur ein Trapez $a\,b\,c\,d$, $m\,n$ die Mittellinie, $d\,h$ die Höhe desselben und s' sein Schwerpunkt, ist ferner $s\,s_0$ der vom Schwerpunkte beschriebene Bogen, so hat man diesen Bogen zunächst in eine gerade Linie $0\,s'$ zu verwandeln. Hierauf mache man auf dem einen Schenkel eines Winkels $0\,1 = 1$, $0\,m = m\,n$, $0\,s = 0\,s'$ und auf dem andern Schenkel $0\,h = d\,h$, ziehe $1\,h$ und parallel dazu durch m die Gerade $m\,t$, so entspricht $0\,t$ dem Flächeninhalte des Trapezes $a\,b\,c\,d$, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,h} = \frac{0\,m}{0\,t} \text{ das ist } \frac{1}{d\,h} = \frac{m\,n}{0\,t} \text{ daher } 0\,t = d\,h \,.\, m\,n = f$$

Zieht man weiter die Gerade $1\,t$ und parallel dazu durch s die Gerade $s\,v$, so entspricht $0\,v$ dem Volumen des Körpers, denn es ist

$$\frac{0\,1}{0\,t} = \frac{0\,s}{0\,v} \text{ das ist } \frac{1}{0\,t} = \frac{0\,s'}{0\,v} \text{ daher } 0\,v = 0\,t \,.\, 0\,s'$$

Nun ist aber $0\,t = f$ der Flächeninhalt der erzeugenden Figur und $0\,s' = b$ der vom Schwerpunkte derselben beschriebene Bogen, daher $0\,v = v$ das Volumen des Körpers, also

$$v = f\, b.$$

Elfter Abschnitt.

Graphische Bestimmung der Oberflächen der Körper.

1. Das Prisma.

Die Oberfläche eines Prismas besteht aus den beiden Grundflächen und den Seitenflächen. Die Grundflächen sind beliebige congruente Vielecke, die Seitenflächen sind Parallelogramme. Man kann eine jede dieser Flächen berechnen und es stellt dann die Summe der erhaltenen Linien die Oberfläche des Prismas dar. Man kann ferner das Netz zeichnen, die erhaltenen Figuren in Dreiecke oder Rechtecke verwandeln und diese berechnen; die Summe der erhaltenen Linien stellt dann ebenfalls die Oberfläche des Prismas dar.

Sind die Projektionen eines geraden vierseitigen Prismas (Fig. 221) gegeben, ist $a\,b\,c\,d$ die Grundfläche und $a_0\,a'$ die Höhe desselben, so ziehe man die Diagonale $a\,c$, wodurch das Viereck in die beiden Dreiecke $a\,b\,c$ und $a\,d\,c$ zerfällt. Man betrachte nun diese Diagonale als die gemeinschaftliche Grundlinie beider Dreiecke und construire die Höhen $b\,h_1$ und $d\,h_2$. Hierauf mache man, um das Rechteck f zu construiren, $a_1\,b_1 = ac$, errichte in a_1 eine Senkrechte und mache auf dieser $a_1\,h_1 = b\,h_1$, $h_1\,h_2 = d\,h_2$, so ist das Dreieck $a_1\,b_1\,h_2$ gleich dem Vierecke $a\,b\,c\,d$; macht man sodann $b_1\,c_1$ parallel $a_1\,h_2$ und $h_2\,c_1$ parallel $a_1\,b_1$, so erhält man das Rechteck f, welches das Doppelte des Dreiecks $a_1\,b_1\,h_2$, also auch das Doppelte des Vierecks $a\,b\,c\,d$ und daher gleich der Summe der beiden Grundflächen des Prismas ist,

Trägt man ferner die Seiten des Vierecks $a\,b\,c\,d$ nebeneinander auf einer Geraden auf, macht $a_2\,b_2 = a\,b$, $b_2\,c_2 = b\,c$, $c_2\,d_2 = c\,d$, $d_2\,a_3 = d\,a$, so ist $a_2\,a_3$ gleich dem Umfange des Vierecks; errichtet man in a_2 eine Senkrechte und macht auf dieser $a_2\,a'_2 = a_0\,a'$, so ist $a_2\,a'_2$ die Höhe des Prismas. Construirt man nun aus den beiden Seiten $a_2\,a_3$ und $a_2\,a'_2$ das Rechteck m, so ist dieses der Mantel des Prismas. Die Oberfläche des Prismas ist daher durch die beiden Rechtecke f und m dargestellt. Werden die Flächen dieser beiden Rechtecke graphisch berechnet und die erhaltenen Linien addirt, so ist ihre Summe gleich der Oberfläche des Prismas.

2. Die Pyramide.

Die Oberfläche einer Pyramide besteht aus der Grundfläche, welche ein beliebiges Vieleck sein kann und aus den Seitenflächen, welche sämmtlich Dreiecke sind. Man kann auch hier eine jede dieser Flächen für sich berechnen und die erhaltenen Linien addiren; ihre Summe ist dann die Oberfläche der Pyramide. Man kann aber auch die Seitenflächen zu einer Figur vereinigen und diese in ein Dreieck oder Rechteck verwandeln, so dass man zwei Figuren erhält, die Grundfläche und den Mantel. Berechnet man diese beiden Figuren, so ist die Summe der beiden Linien, welche man auf diese Weise erhält, die Oberfläche der Pyramide.

Ist eine dreiseitige Pyramide durch ihre Projektionen gegeben (Fig. 222), ist $a\,b\,c$ die Grundfläche und s die Spitze derselben, nimmt man im Dreiecke $a\,b\,c$ die Seite $a\,c$ als Grundlinie an und construirt die zugehörige Höhe $b\,h$, so kann der Flächeninhalt desselben sofort bestimmt werden. Will man die Seitendreiecke $s\,a\,b$, $s\,b\,c$ und $s\,c\,a$ in eine Fläche ausbreiten, so hat man zuerst die Länge der Kanten $s\,a$, $s\,b$, $s\,c$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke legt man durch die Projektion s eine Parallele zum Grundschnitt der Projektionsebenen und macht auf dieser $s\,a_0 = s\,a$, $s\,b_0 = s\,b$ und $s\,c_0 = s\,c$, hierauf bestimmt man die Punkte a', b', c' und verbindet sie mit der Spitze s', so sind $s'\,a'$, $s'\,b'$, $s'\,c'$ die wahren Längen der Kanten $s\,a$, $s\,b$, $s\,c$ und es sind nun von einem jeden Seitendreiecke die drei Seiten bekannt, so dass diese Dreiecke vom Punkte s_1 aus nebeneinander gelegt werden können, wodurch der Mantel der Pyramide construirt ist.

Um diesen Mantel weiter in ein Dreieck zu verwandeln, wurde die Seite $s_1\,c_1$ als gemeinschaftliche Grundlinie angenommen, dann sind $a_2\,h_1$ und $b_1\,h_2$ die Höhen der Dreiecke $s_1\,b_1\,c_1$ und $s_1\,a_2\,c_1$; das dritte Dreieck $s_1\,a_1\,b_1$ wurde erst in das Dreieck $s_1\,c_1'\,b_2$ mit der Basis $s_1\,c_1' = s_1\,c_1$ und der Höhe $b_2\,h_3$ verwandelt. Hierauf machte man auf einer Geraden $m\,n = s_1\,c_1$ das ist gleich der gemeinschaftlichen Grundlinie der drei Dreiecke, errichtete in m eine Senkrechte und machte auf dieser $m\,h_1 = a_2\,h_1$, $h_1\,h_2 = b_1\,h_2$, $h_2\,h_3 = b_2\,h_3$, also gleich der Summe der drei Höhen der Dreiecke. Das Dreieck $m\,n\,h_3$ ist daher gleich dem Mantel der Pyramide und kann nun berechnet werden. Die Summe der beiden Linien, welche man als Flächen der Dreiecke $a\,b\,c$ und $m\,n\,h_3$ erhält, ist aber die Oberfläche der Pyramide.

3. Die abgestumpfte Pyramide.

Die Oberfläche der abgestumpften Pyramide besteht aus der Grundfläche, welche ein beliebiges Vieleck sein kann, aus der Abstumpfungsfläche, welche eine der Grundfläche ähnliche Figur ist, und aus den Seitenflächen, welche sämmtlich Trapeze sind. Das Verfahren bei der Berechnung der Oberfläche ist im Wesentlichen dasselbe, wie wir es bei der ganzen Pyramide kennen gelernt haben.

Sind die Projektionen einer abgestumpften Pyramide (Fig. 223) gegeben, ist die Pyramide eine gerade und die Grundfläche $a\ b\ c\ d$ ein Quadrat, so ist auch die Abstumpfungsfläche $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$ ein Quadrat und es können die Flächen dieser beiden Quadrate ohne Weiteres berechnet werden. Die Construktion des Mantels ist hier sehr einfach. Da alle Seitenkanten, sowol der ganzen als auch der abgestumpften Pyramide, gleich sind, so bestimmen wir eine derselben $s'\ c'_2$ und $m\ c'_2$. Wir beschreiben dann von s_1 aus mit $s'\ c'_2$ und $s'\ m$ Bogen und tragen auf diesen die Seiten der Quadrate viermal auf, so erhalten wir den Mantel, welcher aus vier Trapezen besteht. Da aber diese Trapeze congruent sind, so haben wir nur nöthig, die Fläche eines solchen Trapezes zu berechnen und das Resultat viermal zu nehmen. Die Summe der Linien, welche wir für die beiden Quadrate und den Mantel erhalten, stellt dann die Oberfläche der abgestumpften Pyramide dar.

4. Das Prismatoid.

Bei der Bestimmung der Oberfläche des Prismatoids, wird es in den meisten Fällen nöthig sein, jede Fläche für sich zu berechnen und die erhaltenen Resultate zu addiren. Da die Grundflächen beliebige Vielecke sein können, so hat man diese erst in Dreiecke zu verwandeln: die Seitenflächen sind aber Dreiecke, Trapeze oder Parallelogramme, welche ohne vorausgegangene Verwandlung sofort berechnet werden können.

5. Der gerade Kreiscylinder.

Die Oberfläche des Cylinders besteht aus den beiden Grundflächen, welche Kreise sind, und aus derjenigen krummen Fläche, welche der Mantel des Cylinders genannt wird. Denkt man sich den Cylindermantel in eine Ebene gelegt, so erscheint er als Rechteck, indem die eine Seite der Umfang des Kreises, die andere Seite die Mantellinie oder Höhe des Cylinders ist. Bezeichnen wir nun mit r den Halbmesser des Kreises, mit m die Mantellinie, so ist die Fläche eines jeden der beiden Kreise $r^2 \pi$, der Mantel aber ist $2\,r\,\pi\,.\,m$. Mithin ist die ganze Oberfläche des Cylinders

$$\begin{aligned} 0 &= 2\,r^2\,\pi + 2\,r\,\pi\,.\,m \\ &= 2\,r\,\pi\,(r + m) \end{aligned}$$

Die ganze Oberfläche erscheint daher als ein Rechteck, dessen eine Seite der Umfang des Cylinders und dessen andere Seite die Summe des Halbmessers und der Mantellinie ist. Dieses Rechteck lässt sich ohne Weiteres construiren und berechnen.

6. Der gerade Kreiskegel.

Die Oberfläche des Kegels besteht aus der Grundfläche, welche ein Kreis ist und aus dem Mantel. Wird der Mantel in eine Ebene gelegt, so erscheint er als Sector eines Kreises, dessen Halbmesser die Mantellinie und dessen Bogen der Umfang des Grundkreises ist. Bezeichnen wir die Mantellinie mit m und den Halbmesser des Grundkreises mit r, so ist der Mantel $\frac{2\,r\,\pi\,m}{2} = r\,\pi\,m$. Die Fläche des Grundkreises ist $r^2\pi$ und daher die Oberfläche des Kegels

$$0 = r^2\pi + r\,\pi\,m$$
$$= r\,\pi\,(r+m)$$

Die Oberfläche des Kegels erscheint daher als ein Rechteck, dessen eine Seite die Hälfte des Grundkreises, und dessen andere Seite die Summe des Halbmessers und der Mantellinie ist.

7. Der abgestumpfte Kegel.

Die Oberfläche des abgestumpften Kegels besteht aus den beiden Kreisen und dem Mantel. Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche mit r, den Halbmesser der Abstumpfungsfläche mit r_1 und die Mantellinie mit m, so ist

die Grundfläche gleich $r^2\pi$

die Abstumpfungsfläche gleich $r_1{}^2\pi$

der Mantel gleich $\frac{2\,r\,\pi + 2\,r_1\,\pi}{2}\,.\,m = (r+r_1)\,\pi\,.\,m$

und folglich ist die Oberfläche

$$0 = r^2\pi + r_1{}^2\pi + (r+r_1)\,m\,.\,\pi = [r^2 + r_1{}^2 + (r+r_1)\,m]\,\pi$$

Bildet man die drei in der Parenthese enthaltenen Produkte, addirt sie und nimmt ihre Summe $3\frac{1}{7}$ mal, so erhält man die Oberfläche des abgestumpften Kegels.

8. Die Kugel.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel mit r, so ist bekanntlich die Oberfläche der Kugel

$$0 = 4\,r^2\pi$$

Dafür können wir schreiben

$$0 = 2\,r\,\pi\,.\,2\,r$$

das ist ein Produkt aus dem Umfange eines grössten Kugelkreises und dem Durchmesser. Verwandelt man diesen Kreis in eine gerade Linie und multiplicirt sie mit dem Durchmesser, so ist das Produkt die Oberfläche der Kugel.

W. Moeser Hofbuchdruckerei, Berlin, Stallschreiberstrasse 34. 35.

Taf. 1.

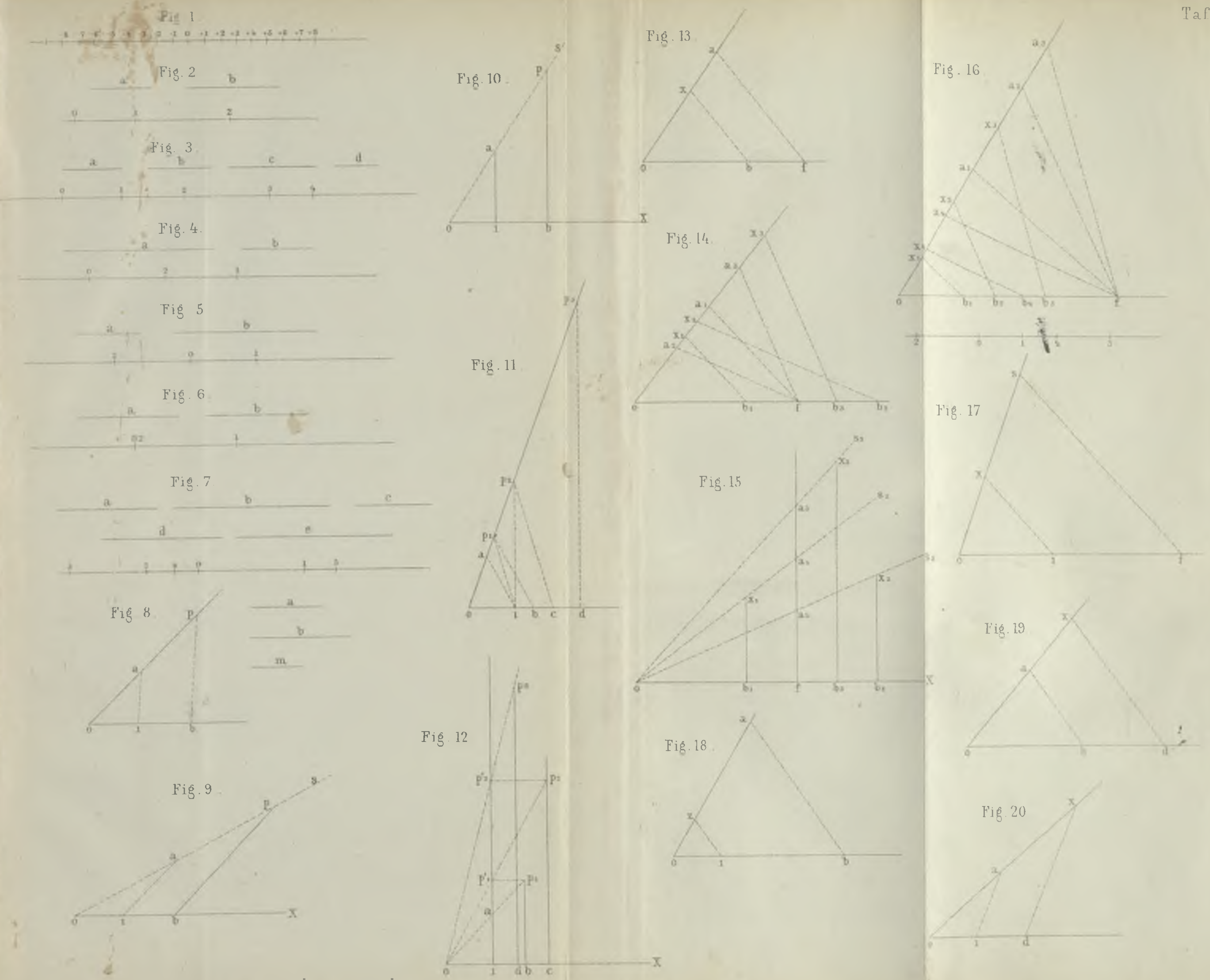


Fig. 21.

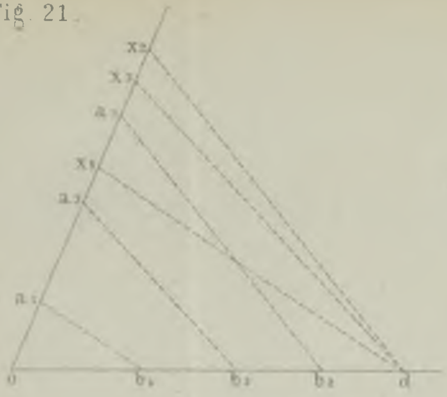


Fig. 22.

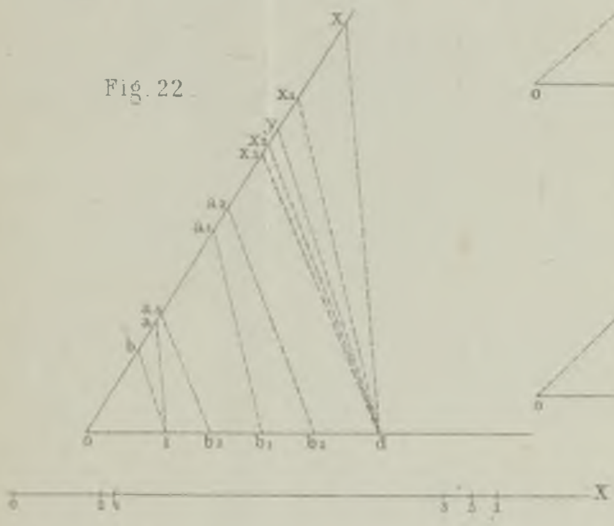


Fig. 23.

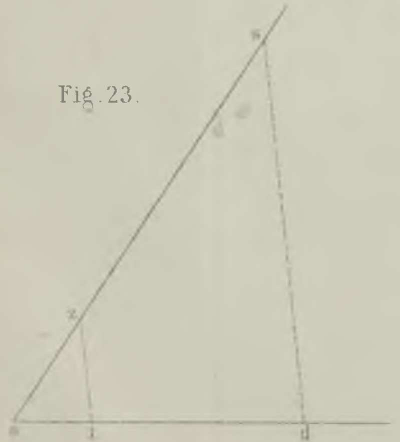


Fig. 24.

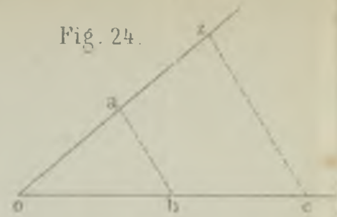


Fig. 25.

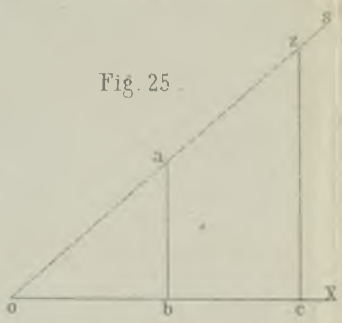


Fig. 26.

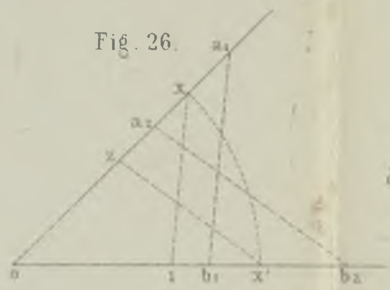


Fig. 27

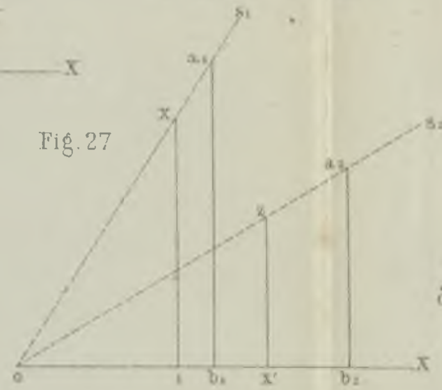


Fig. 28

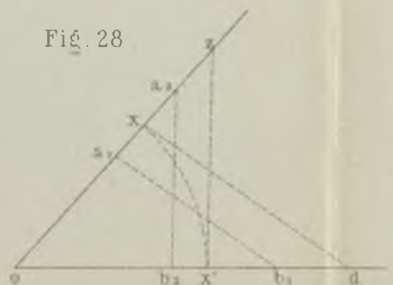


Fig. 29

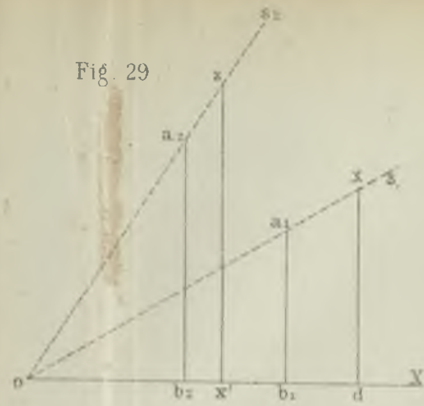


Fig. 30.

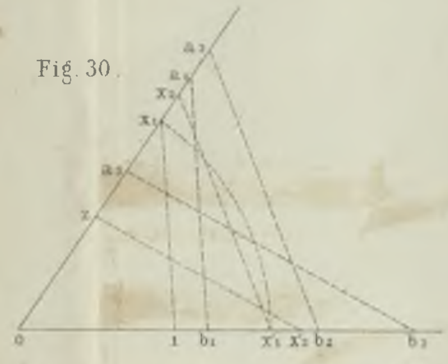


Fig. 31.

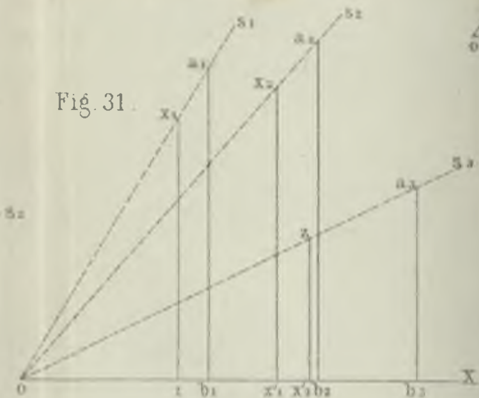


Fig. 32.

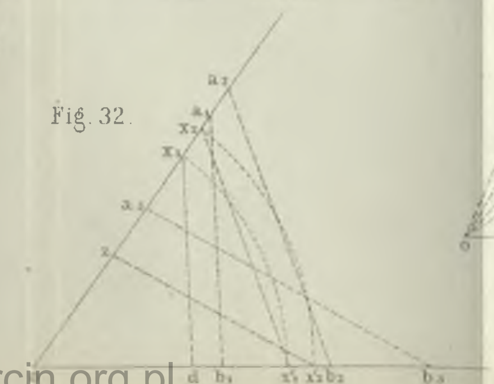


Fig. 33

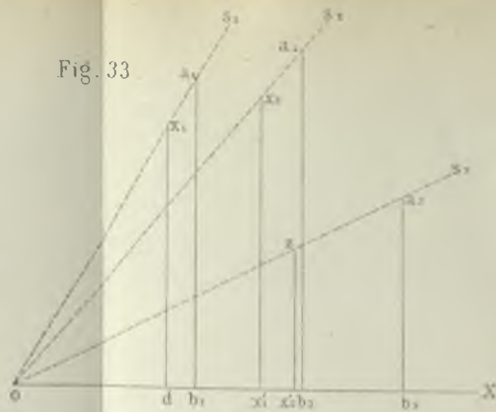


Fig. 34.

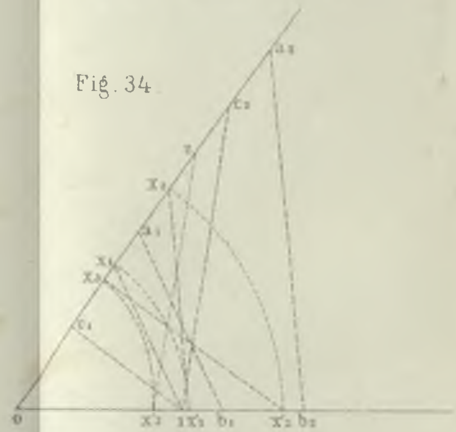
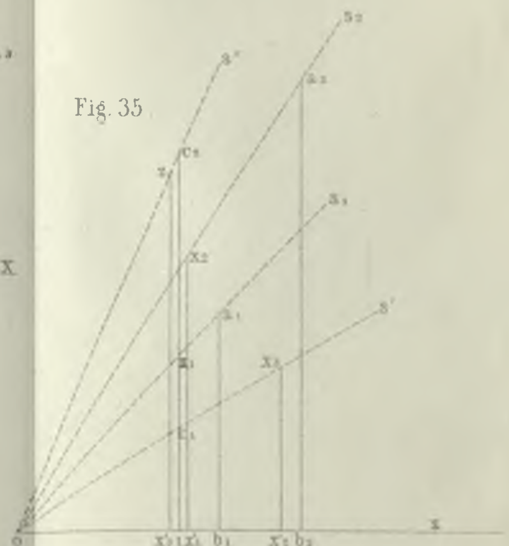


Fig. 35.



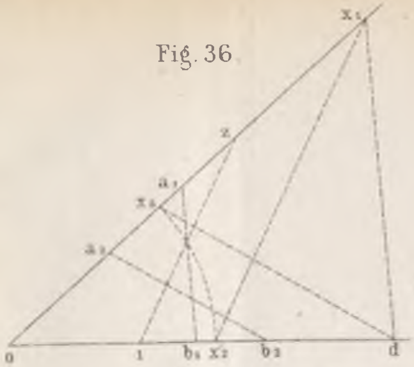


Fig. 36.

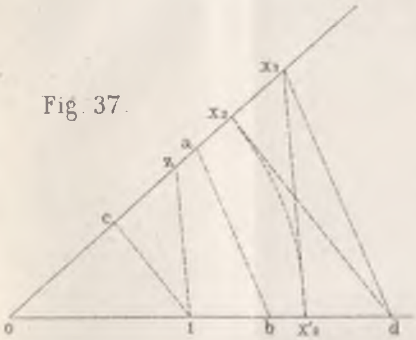


Fig. 37.

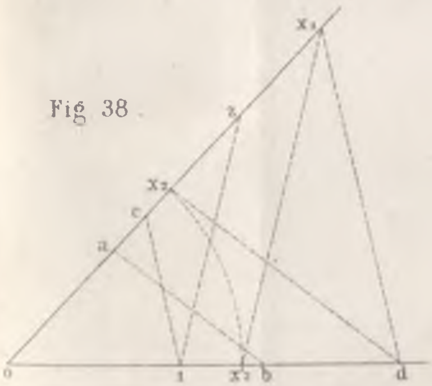


Fig. 38.

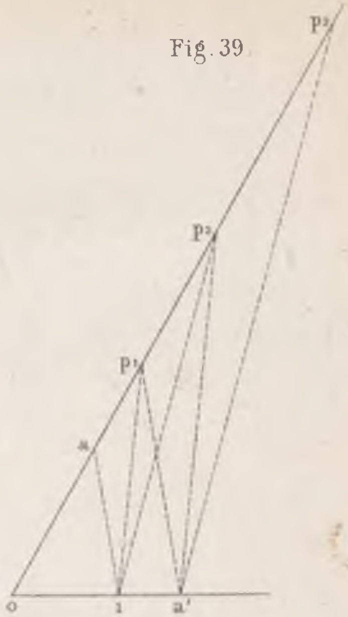


Fig. 39.

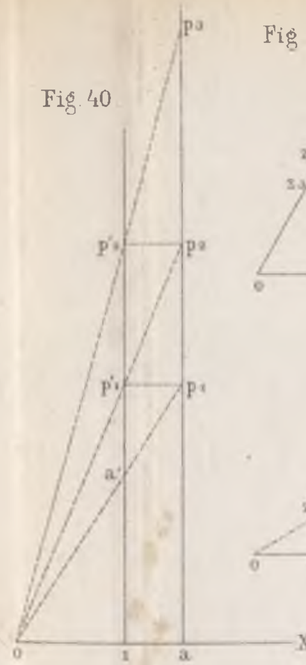


Fig. 40.

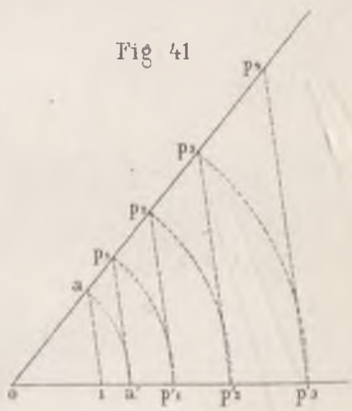


Fig. 41.

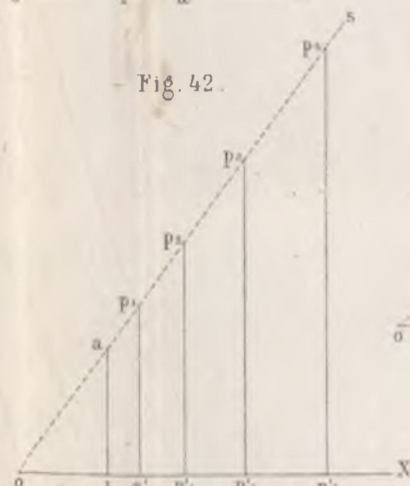


Fig. 42.


Fig. 43.

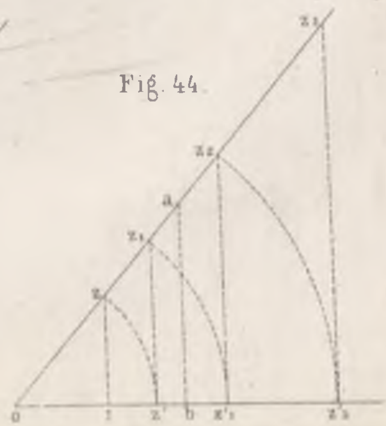


Fig. 44.

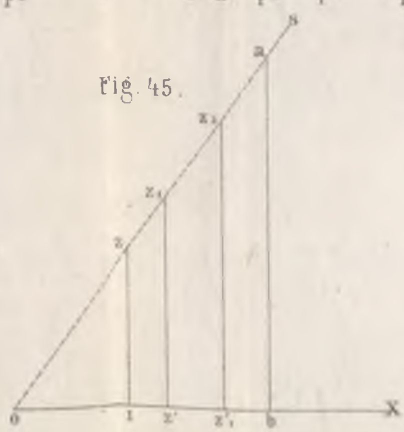


Fig. 45.

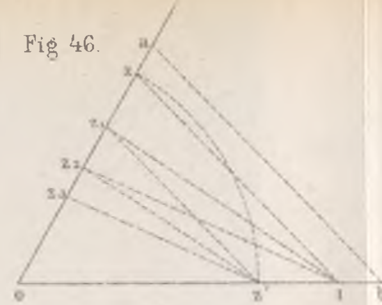


Fig. 46.

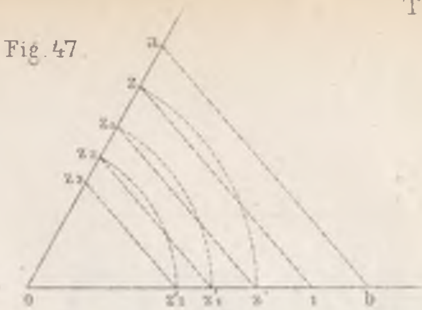


Fig. 47.

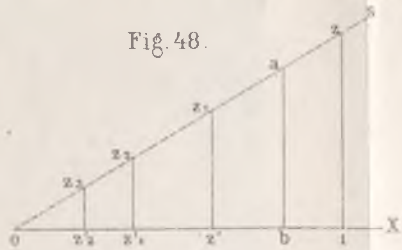


Fig. 48.

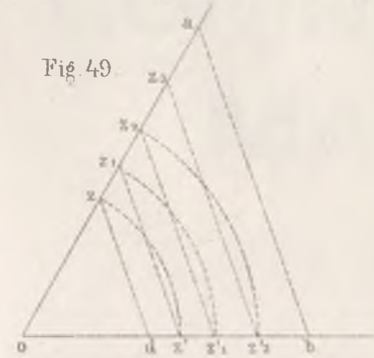


Fig. 49.

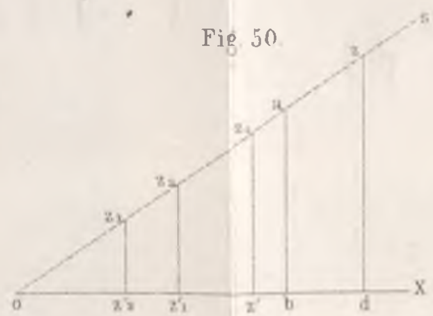


Fig. 50.

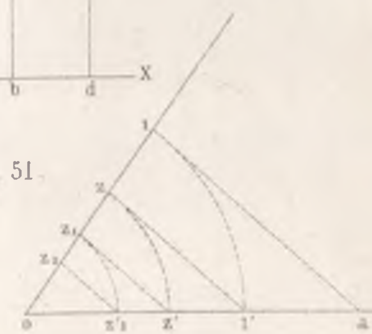


Fig. 51.


Fig. 52.

Fig. 53.

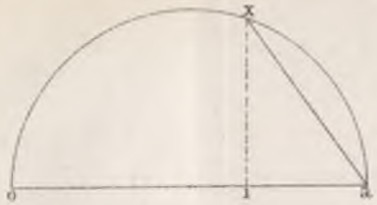


Fig. 54.

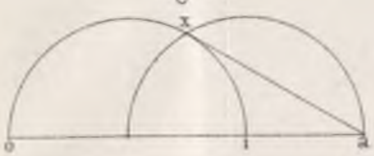


Fig. 55.

Fig. 56.

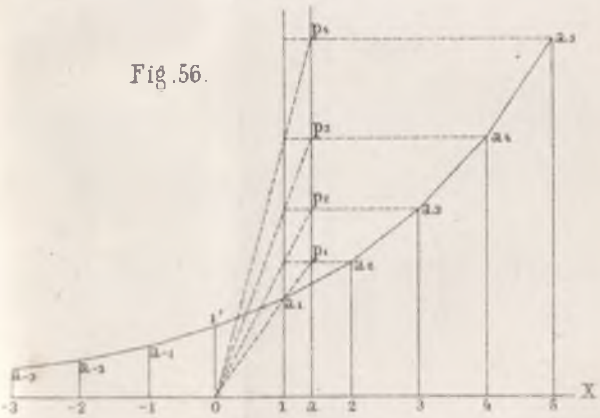


Fig. 57

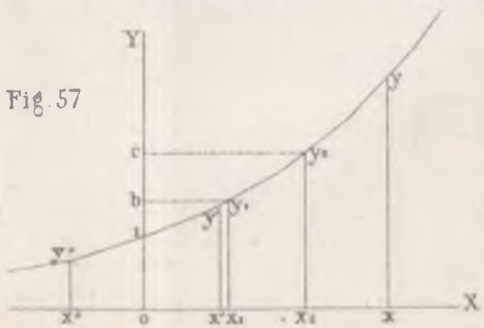


Fig. 58.

Fig. 59

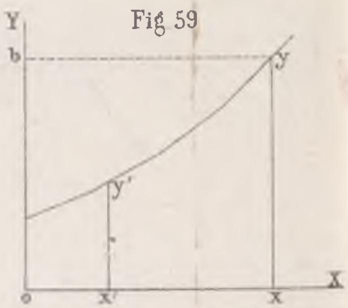


Fig. 60

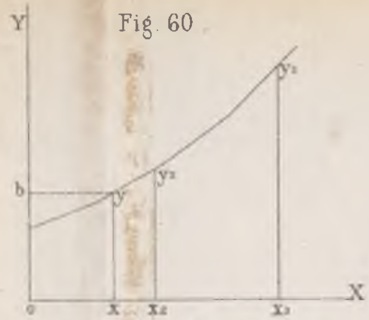


Fig. 61

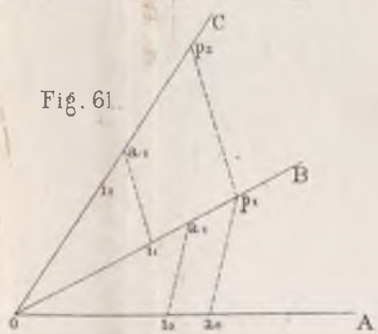


Fig. 62.

Fig 63

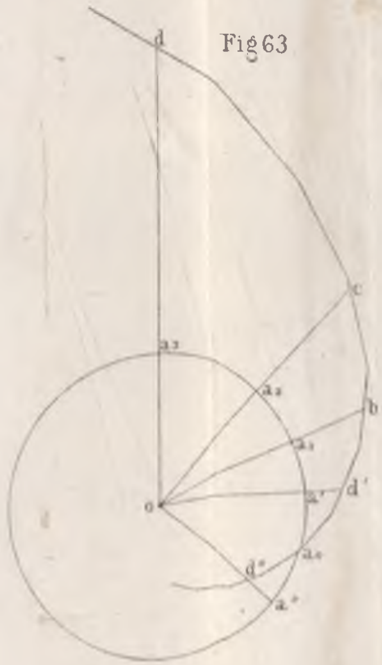


Fig. 64.

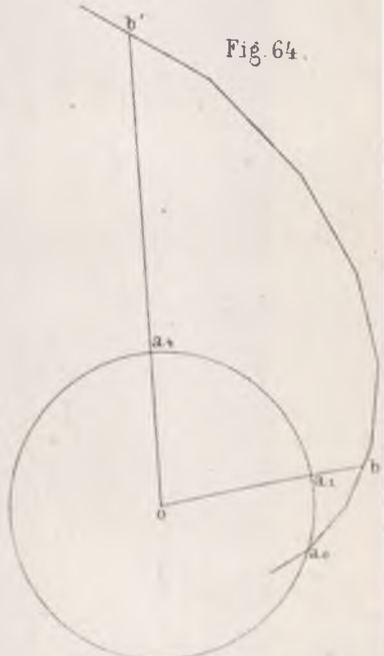


Fig. 65

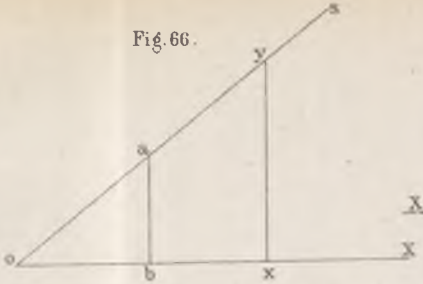


Fig. 66.

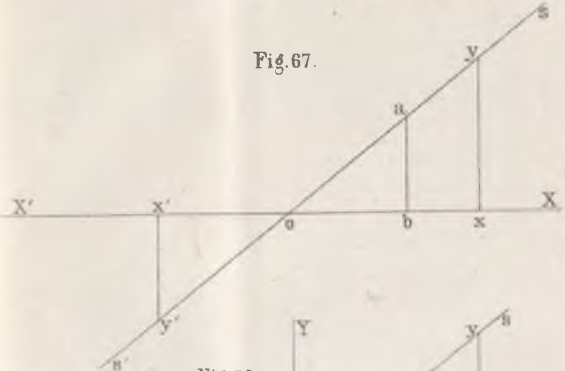


Fig. 67.

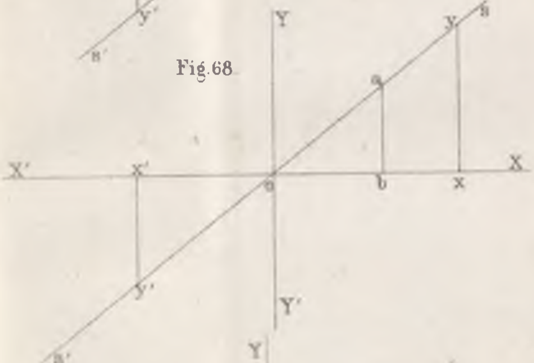


Fig. 68.


Fig. 69.


Fig. 70.

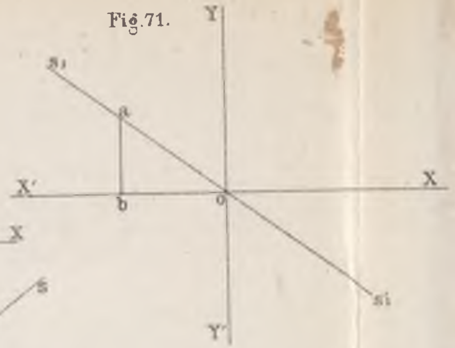


Fig. 71.

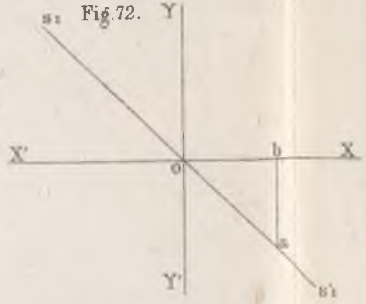


Fig. 72.

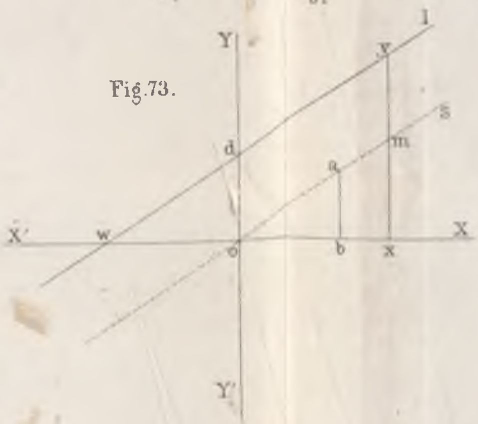


Fig. 73.

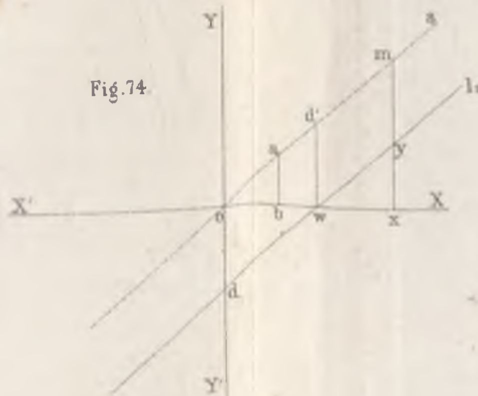


Fig. 74.

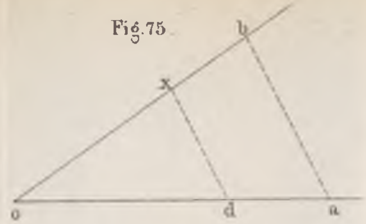


Fig. 75.

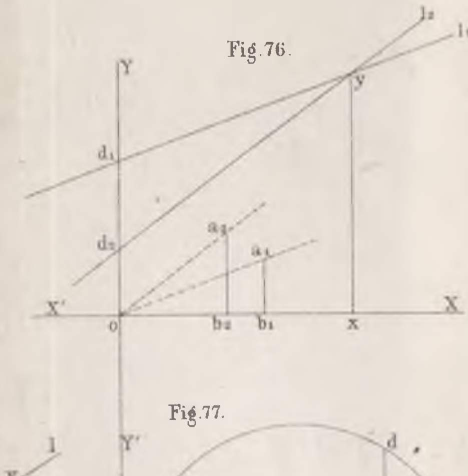


Fig. 76.

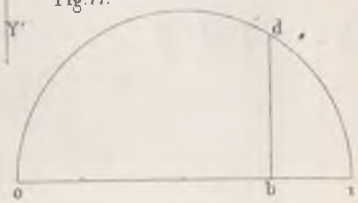


Fig. 77.


Fig. 78.

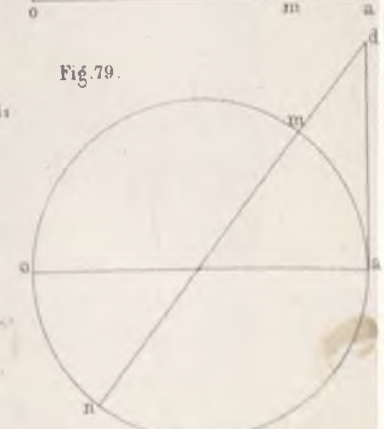


Fig. 79.

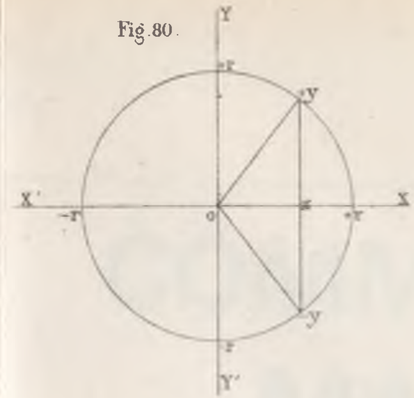


Fig. 80.


Fig. 81.

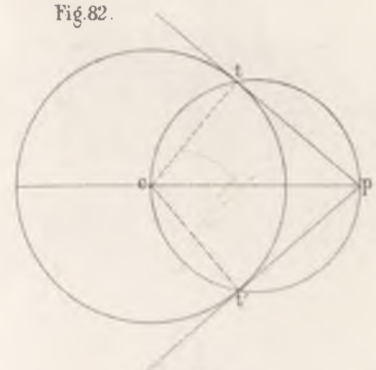


Fig. 82.


Fig. 83.


Fig. 84.


Fig. 85.

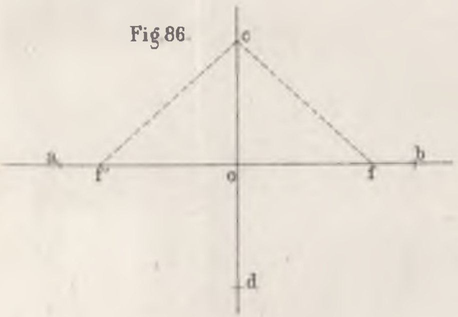


Fig. 86.


Fig. 87.

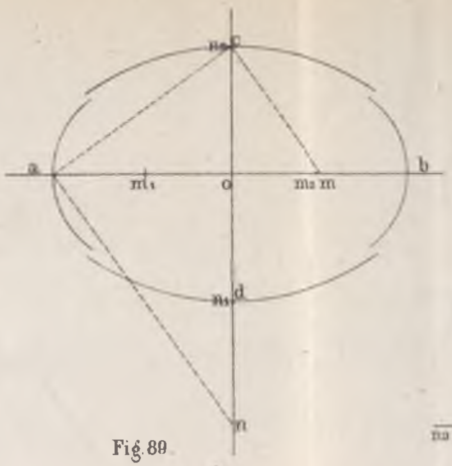


Fig. 88.

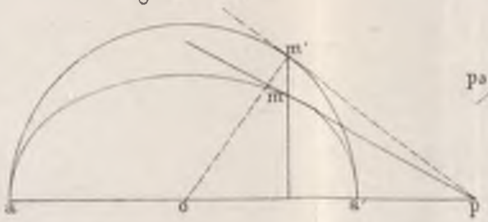


Fig. 89.


Fig. 90.

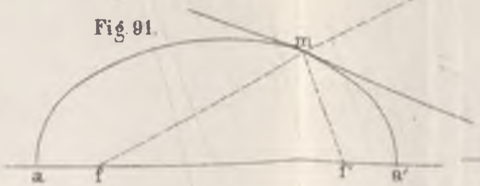


Fig. 91.

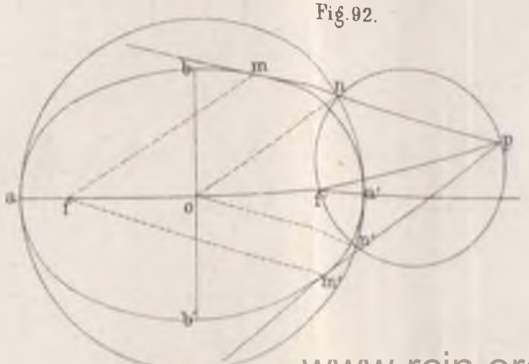


Fig. 92.

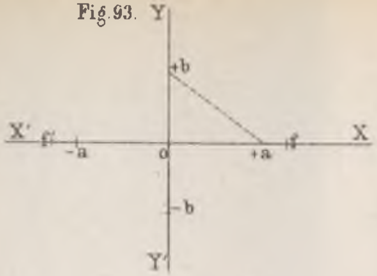


Fig. 93.

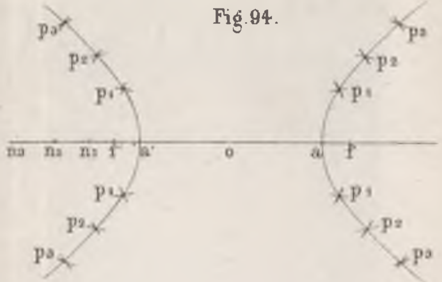


Fig. 94.

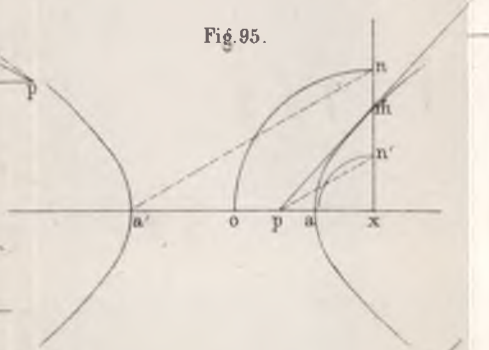


Fig. 95.

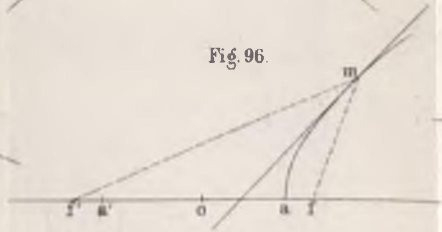


Fig. 96.

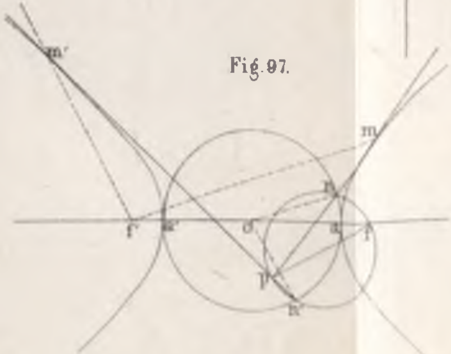


Fig. 97.

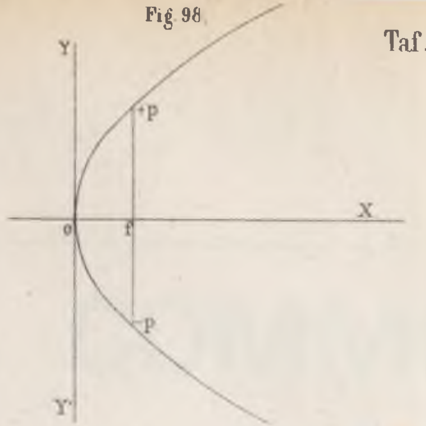


Fig. 98.

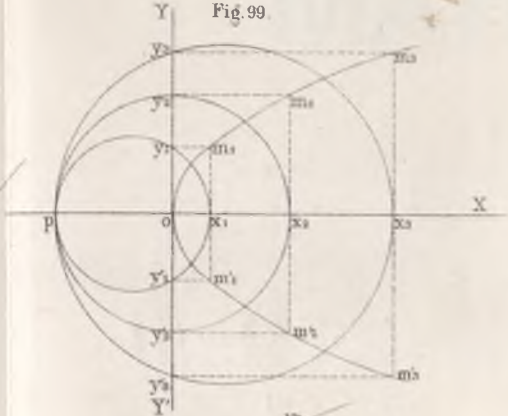


Fig. 99.

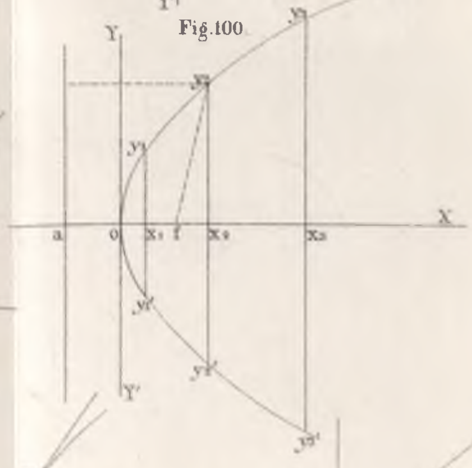


Fig. 100.

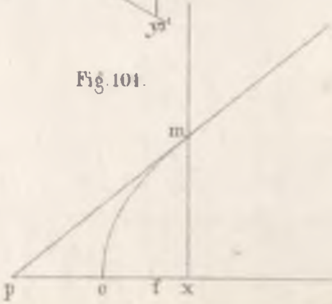


Fig. 101.

Fig. 102.

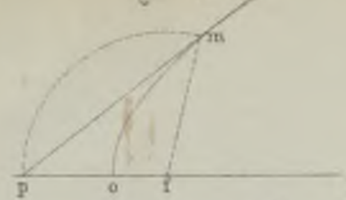


Fig. 103.

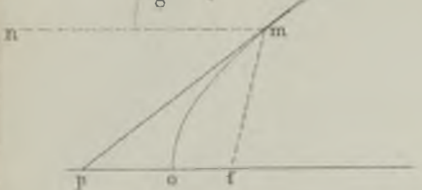


Fig. 104.

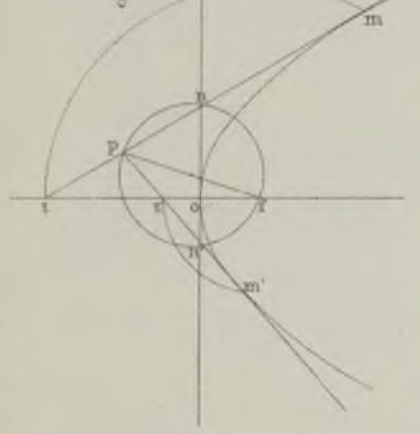


Fig. 105.

Fig. 106.

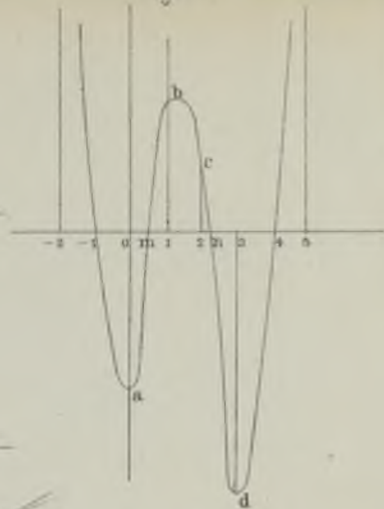


Fig. 107.

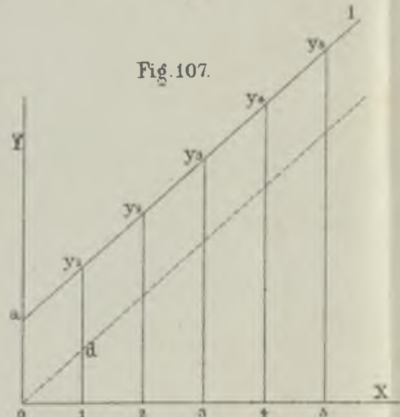


Fig. 108.

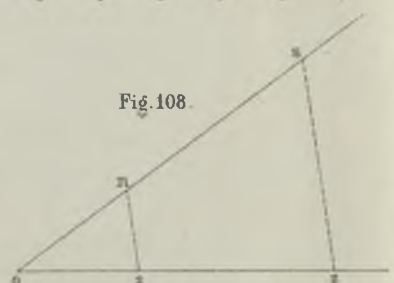


Fig. 109.

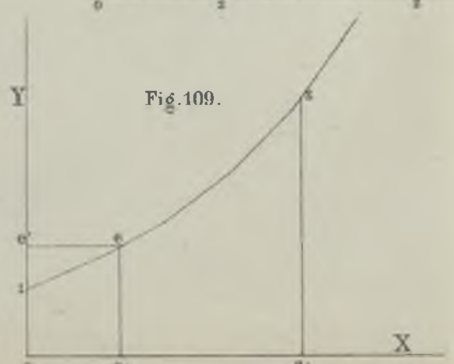


Fig. 110.

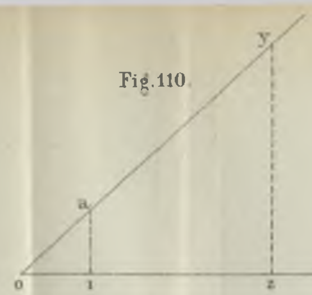


Fig. 111.

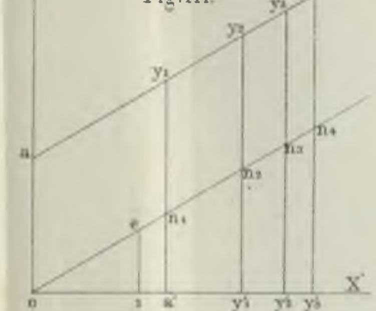


Fig. 112.

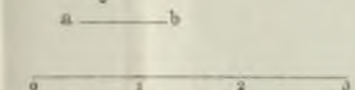


Fig. 113.

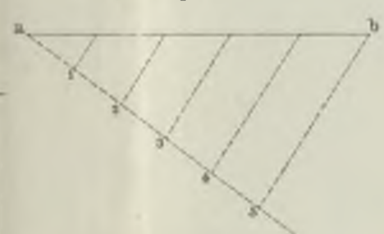


Fig. 114.

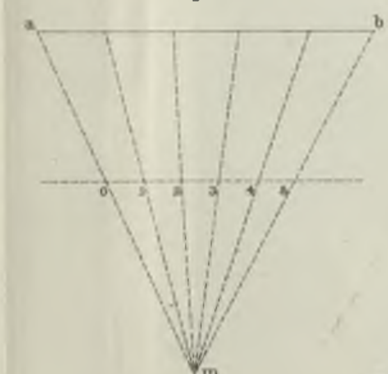


Fig. 115.

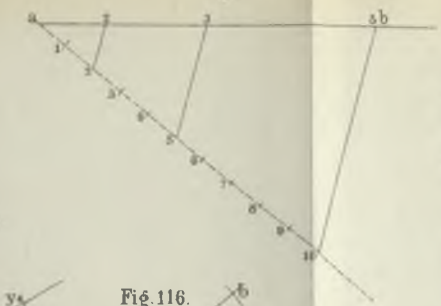


Fig. 116.

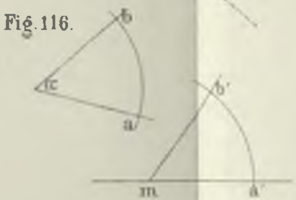
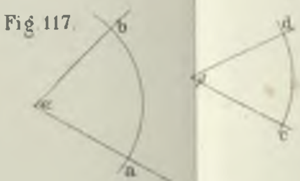


Fig. 117.



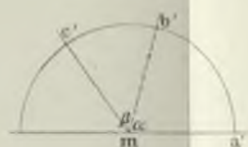


Fig. 118.

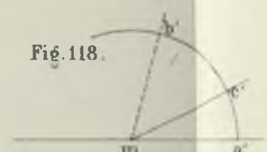
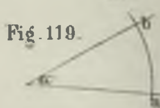


Fig. 119.



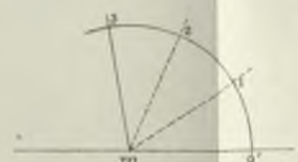


Fig. 120.

Fig. 121.

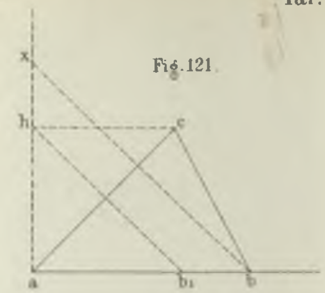


Fig. 122.

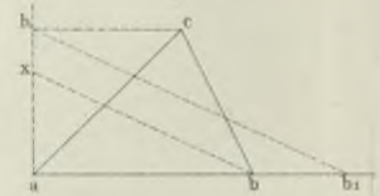


Fig. 123.

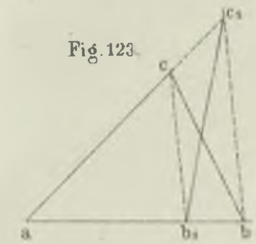


Fig. 124.

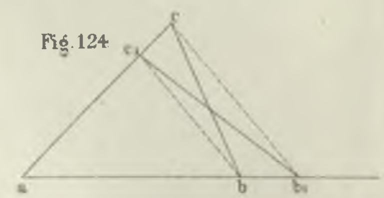


Fig. 125.

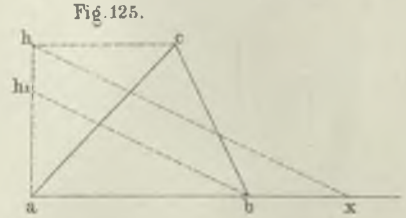
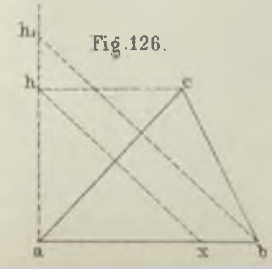


Fig. 126.



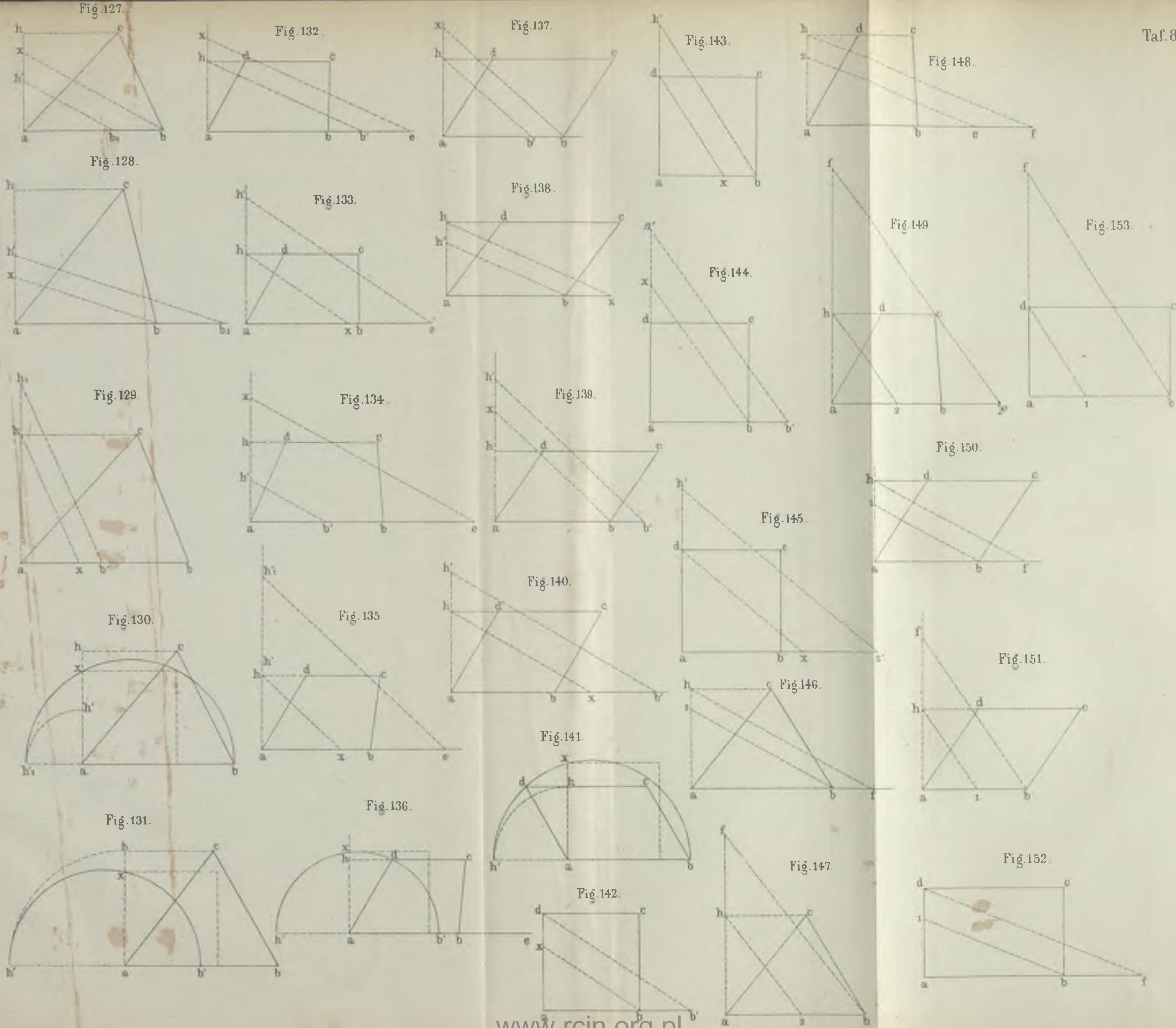


Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.

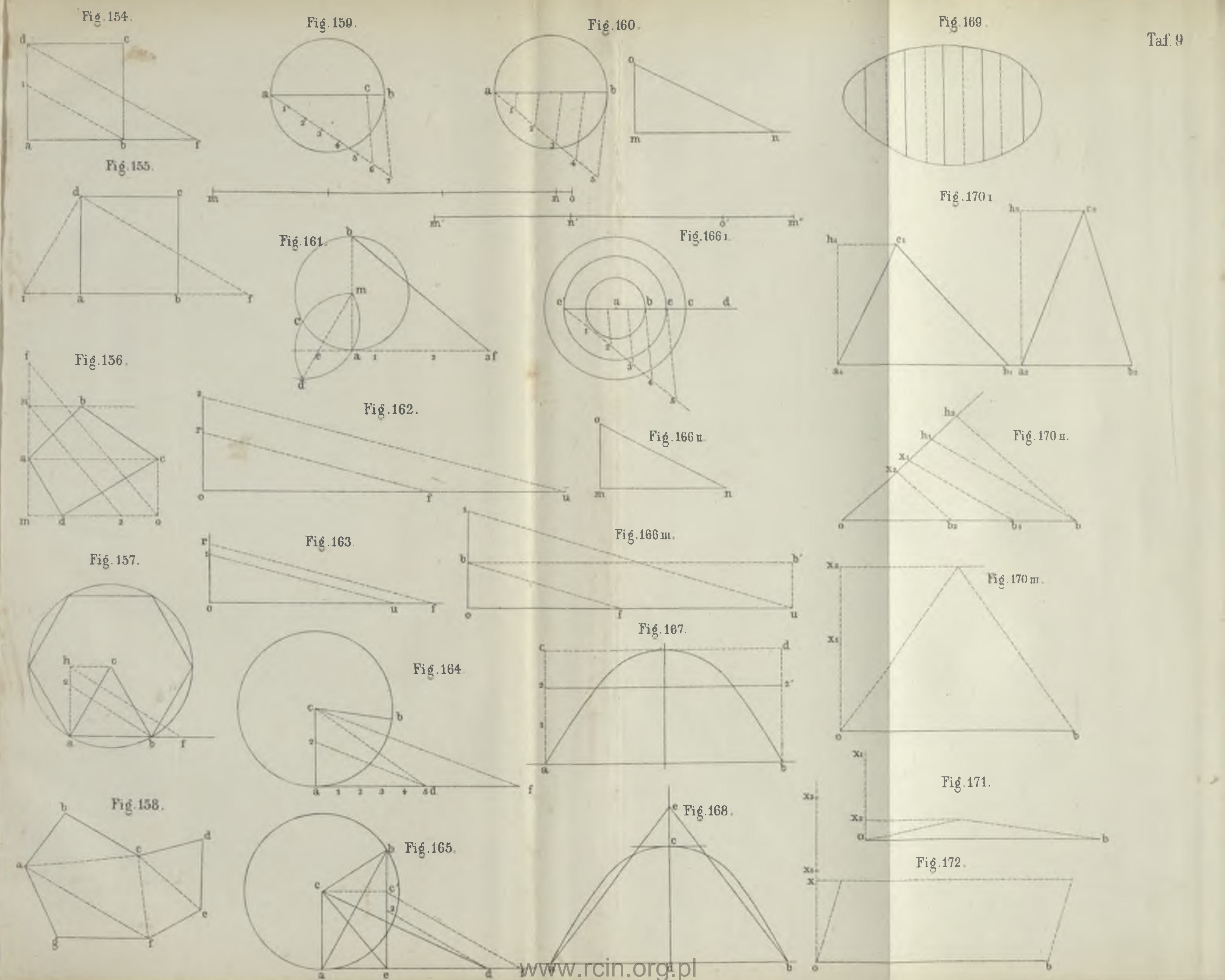


Fig. 154. Fig. 155. Fig. 156. Fig. 157. Fig. 158. Fig. 159. Fig. 160. Fig. 161. Fig. 162. Fig. 163. Fig. 164. Fig. 165. Fig. 166 I. Fig. 166 II. Fig. 166 III. Fig. 167. Fig. 168. Fig. 169. Fig. 170 I. Fig. 170 II. Fig. 170 III. Fig. 171. Fig. 172.

Fig. 173 I.

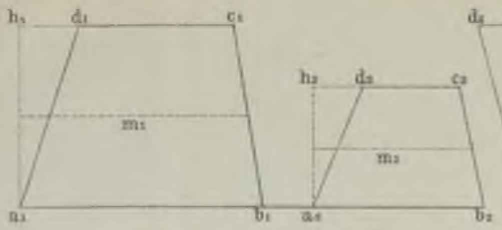


Fig. 174 I.

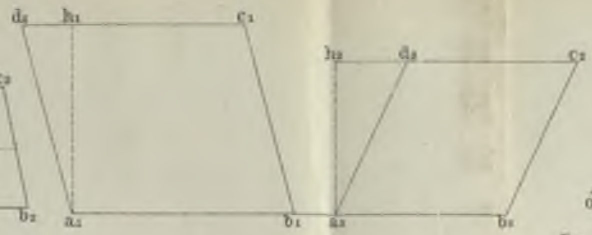


Fig. 181 I.

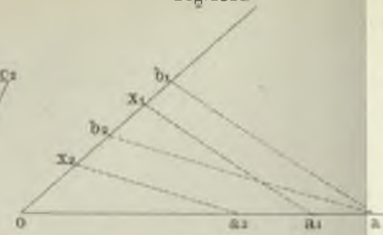


Fig. 182.

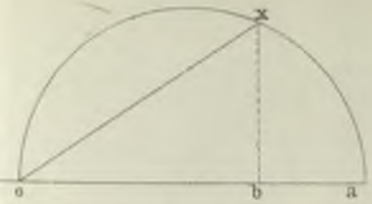


Fig. 173 II.

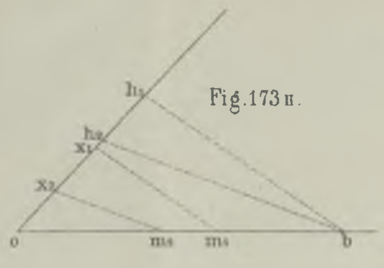


Fig. 174 II.

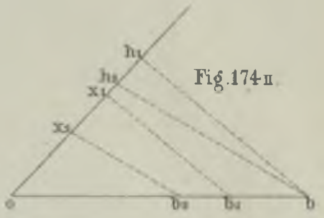


Fig. 178.

Fig. 181 II.

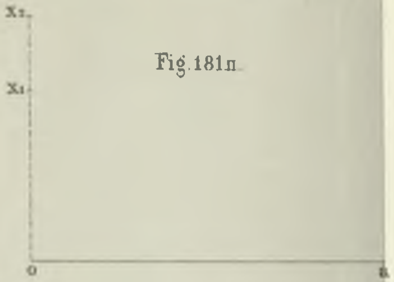


Fig. 183.

Fig. 173 III.

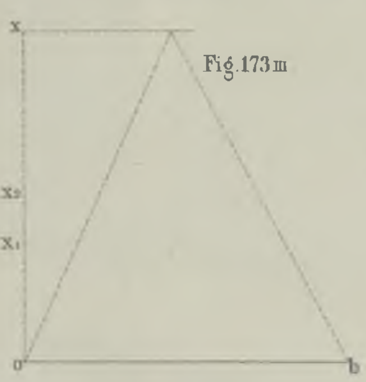


Fig. 174 III.

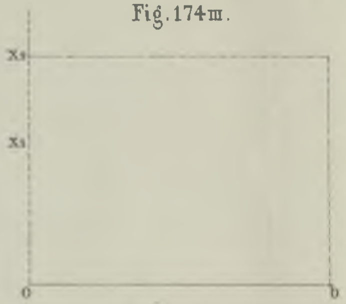


Fig. 184 I.

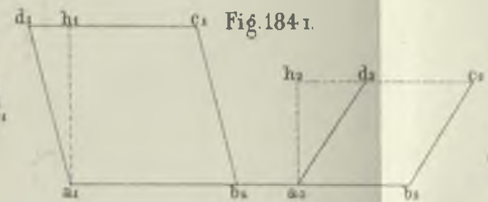


Fig. 184 II.

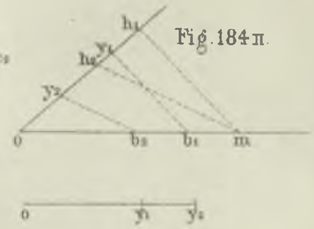


Fig. 179.

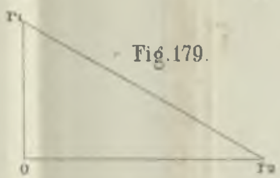


Fig. 184 III.

Fig. 184 IV.

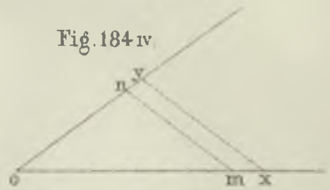


Fig. 177 I.

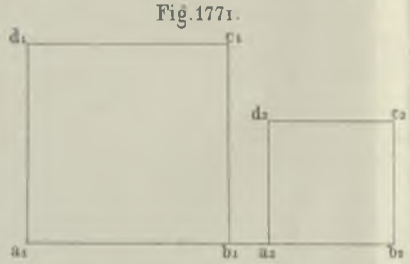


Fig. 180 I.

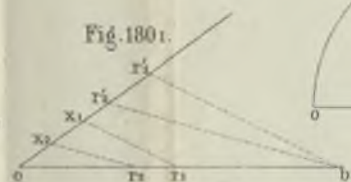


Fig. 175.

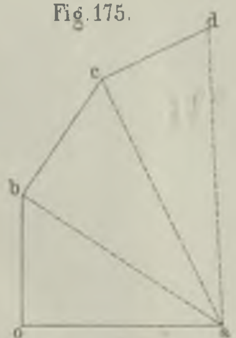


Fig. 184 V.

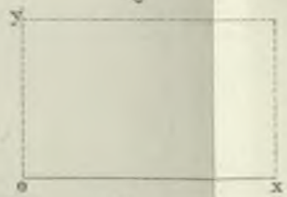


Fig. 185.

Fig. 180 II.

Fig. 177 II.

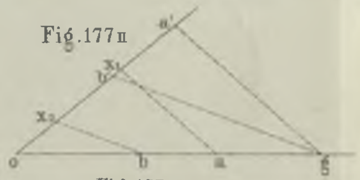


Fig. 186.

Fig. 177 III.

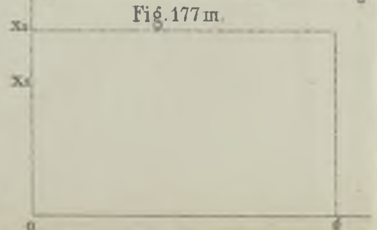


Fig. 176.

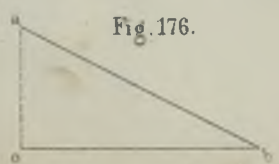
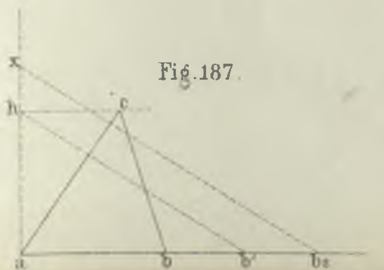


Fig. 187.



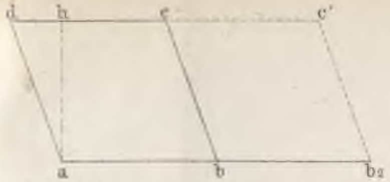


Fig. 188.


Fig. 189.

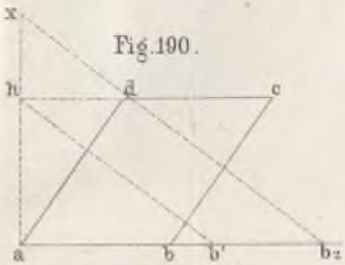


Fig. 190.

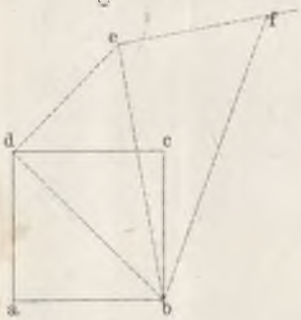


Fig. 191.

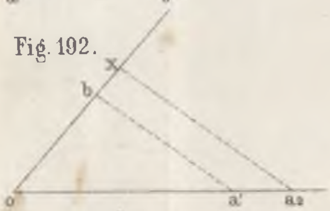


Fig. 192.


Fig. 193.


Fig. 194.

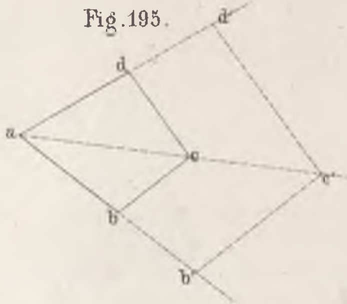


Fig. 195.

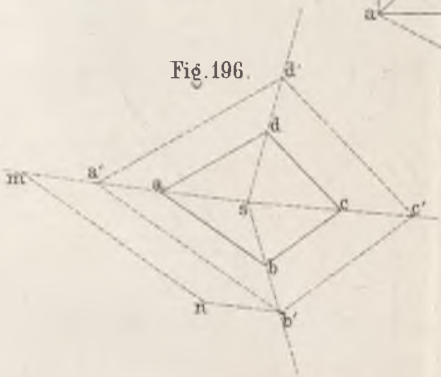


Fig. 196.

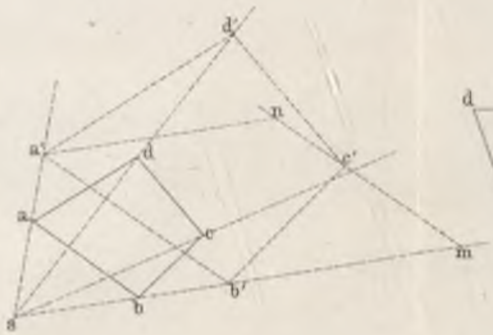


Fig. 197.

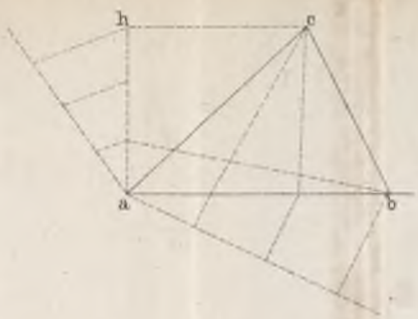


Fig. 198.


Fig. 199.


Fig. 200.

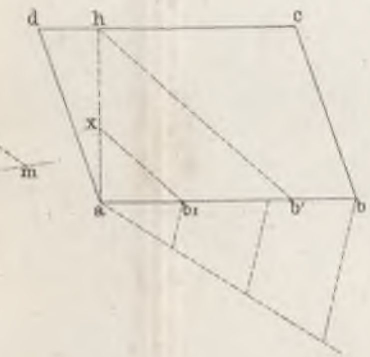


Fig. 201.

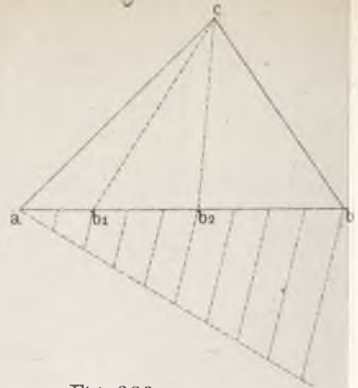


Fig. 202.


Fig. 203.

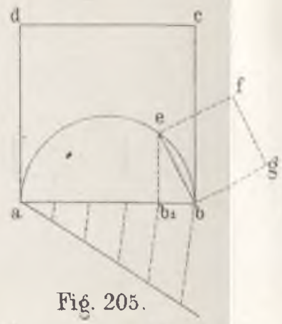


Fig. 204.

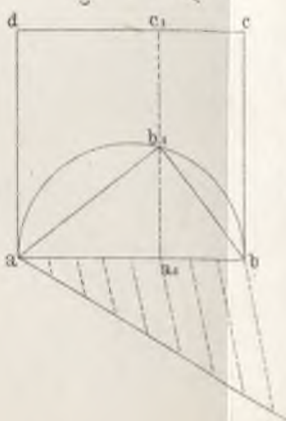


Fig. 205.

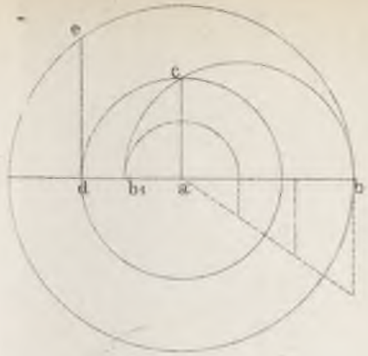


Fig. 206.

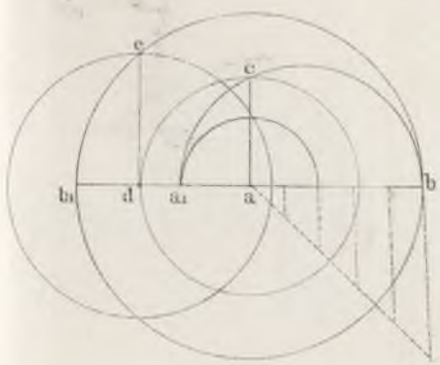


Fig. 207.

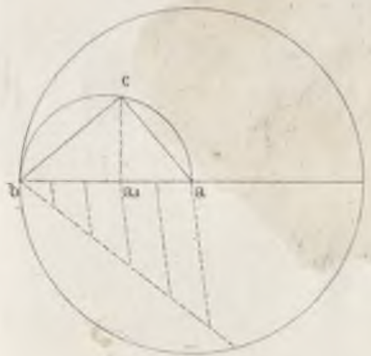


Fig. 208.

Fig. 209 I.

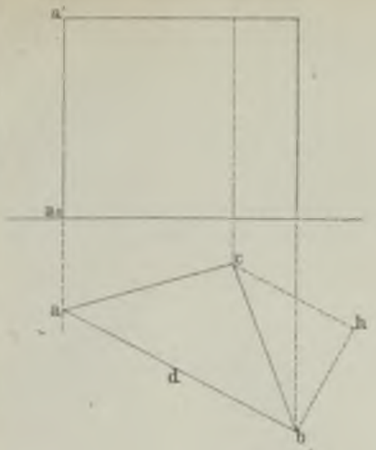


Fig. 210 I.

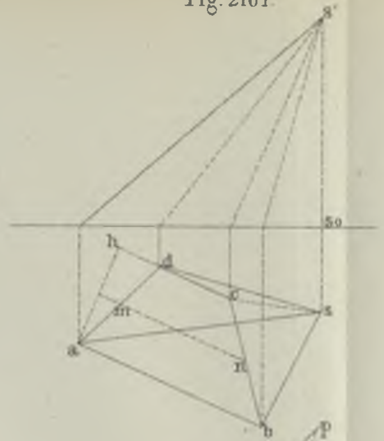


Fig. 211 I.

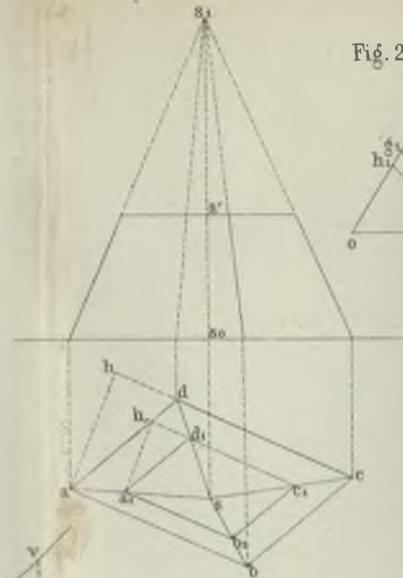


Fig. 211 II.

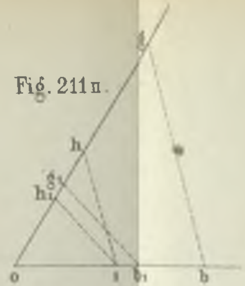


Fig. 211 III.

Fig. 212.

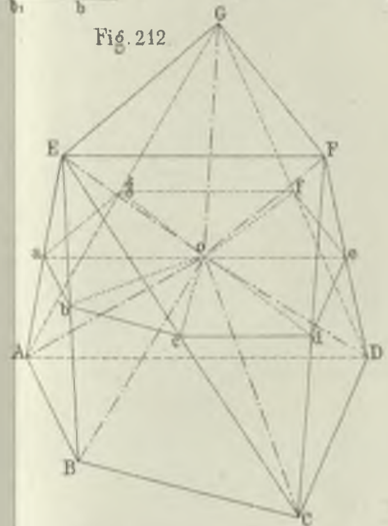


Fig. 209 II.

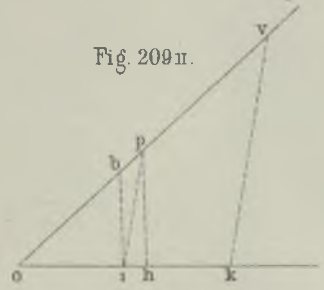


Fig. 210 II.

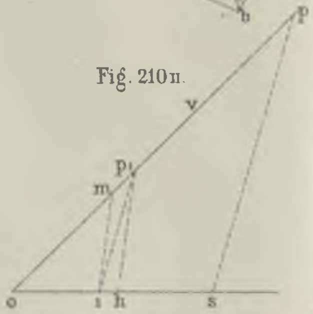


Fig. 211. IV.

Fig. 213 I.

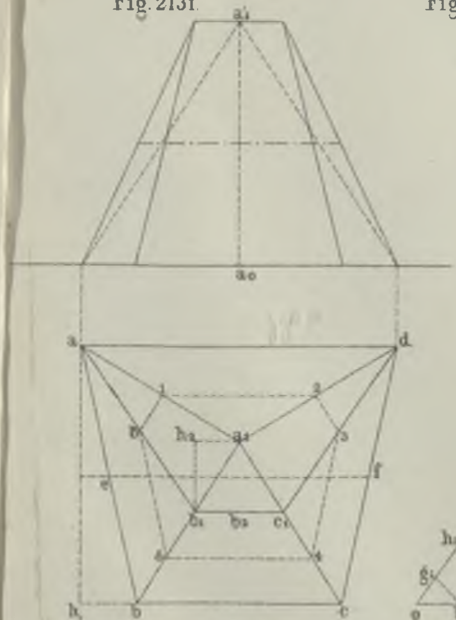


Fig. 213 II.

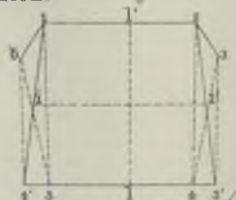


Fig. 213 III.

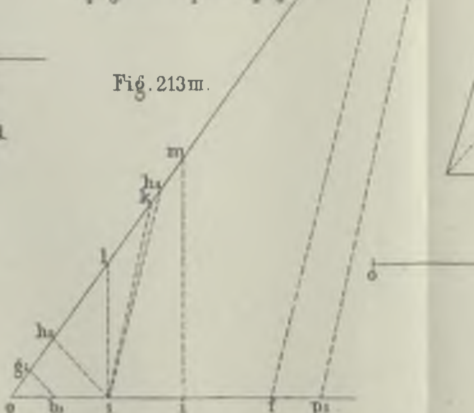


Fig. 214.

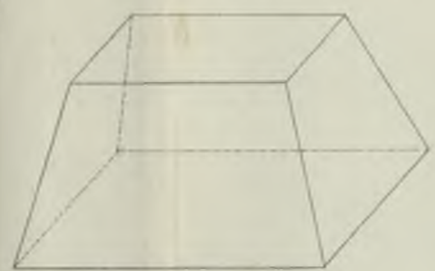
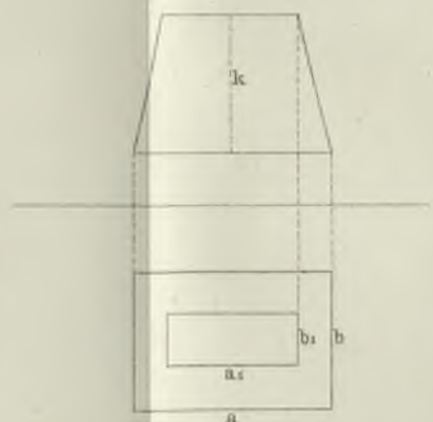


Fig. 215 I.



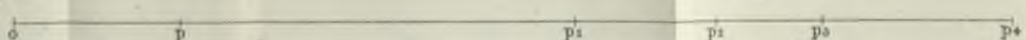
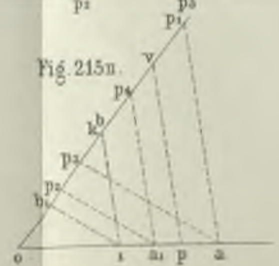
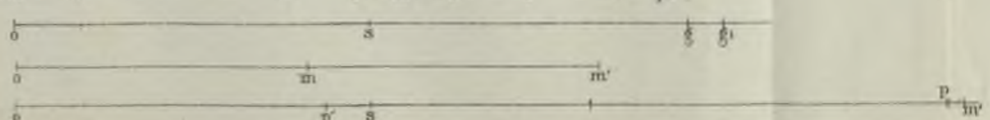


Fig. 215 II.





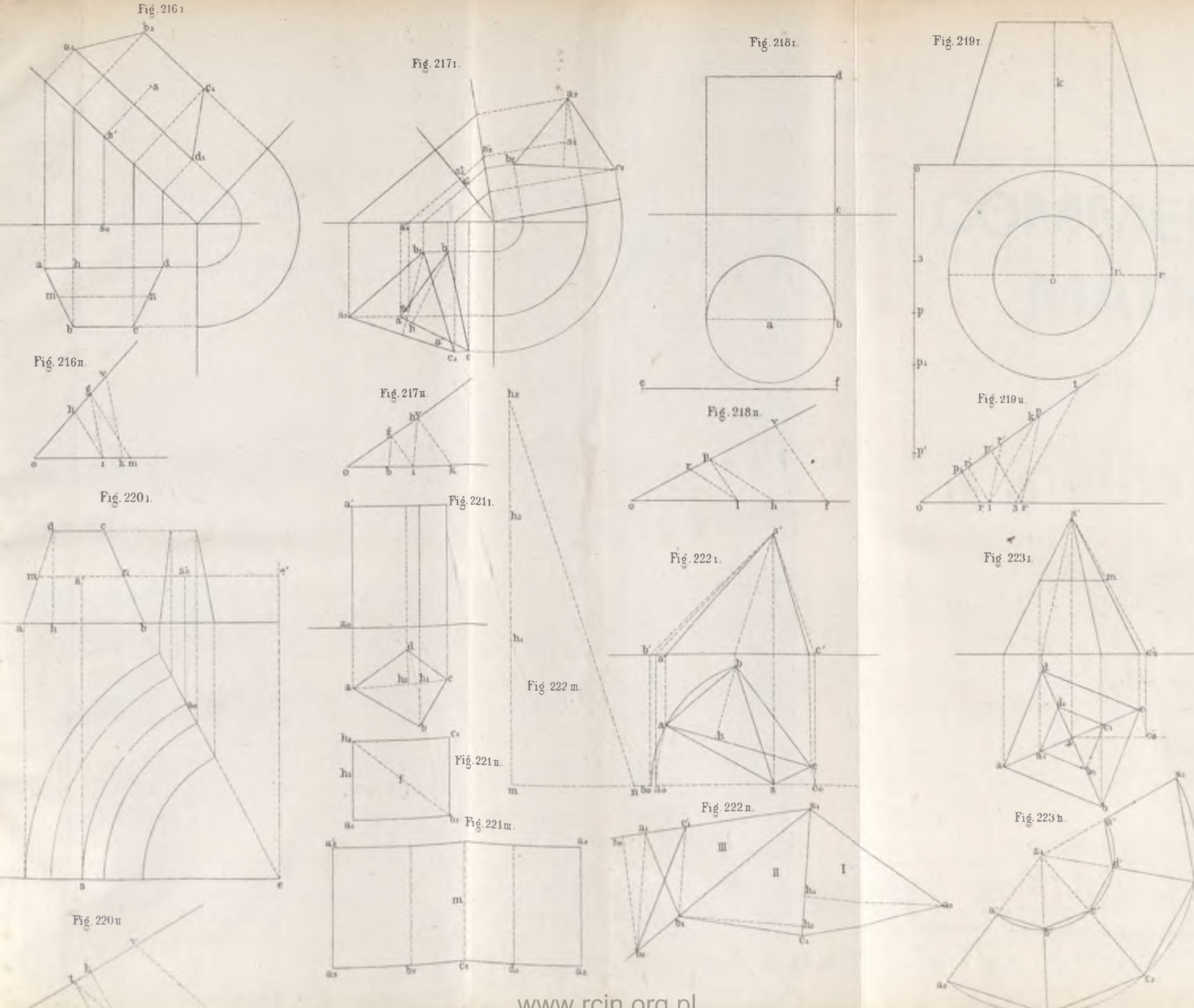


Fig. 216 I
Fig. 216 II
Fig. 217 I
Fig. 217 II
Fig. 218 I
Fig. 218 II
Fig. 219 I
Fig. 219 II
Fig. 220 I
Fig. 220 II
Fig. 221 I
Fig. 221 II
Fig. 221 III
Fig. 222 I
Fig. 222 II
Fig. 222 III
Fig. 223 I
Fig. 223 II