ЫЧЕТОВЪ

ТЕОРІЯ

ИНТЕГРАЛЬНЫХЪ ВЫЧЕТОВЪ

СЪ НѢКОТОРЫМИ ПРИЛОЖЕНІЯМИ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

Ю. Сохоцкаго

НАПИСАННОЕ НА СТЕПЕНЬ МАГИСТРА МАТЕМАТИКИ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи А. Якобсона (Вас. Остр. 9 лин. № 8).

1868.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета печатать дозволяется.

Деканъ *А. Бекетовъ*.

С.-Петербургъ 7 Марта 1868.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Исчисленіе интегральныхъ вычетовъ составляетъ, безспорно, одно изъ замѣчательнѣйшихъ открытій Коши. Обширность примѣненій и простота, съ которою рѣшаются посредствомъ него многія трудныя и сложныя задачи, ставятъ его на ряду съ главными орудіями Математическаго Анализа. Не смотря на все это, исчисленіе интегральныхъ вычетовъ почти вовсе не разработывается учеными нынѣшняго времени. Кромѣ сочиненія Лорана, составленнаго изъ компиляцѣи различныхъ мемуаровъ Коши, мнѣ не извѣстенъ ни одинъ спеціальный трудъ по этой части.

Въ настоящемъ разсужденіи я излагаю общія начала исчисленія интегральныхъ вычетовъ и показываю нѣкоторыя изъ его примѣненій, именно такія, которыхъ я вовсе не нашелъ между работами Коши, или же нашелъ ихъ изложенными не въ столь простой и наглядной формѣ въ какой мнѣ удалось ихъ представить.

Поэтому, разсужденіе мое раздѣлено на двѣ части, изъ которыхъ первая заключаетъ теорію, а вторая ея приложенія.

Такъ какъ теорія интегральныхъ вычетовъ основана на общихъ началахъ теоріи функцій отъ комплексныхъ величинъ, то первая часть моего разсужденія состоитъ изъ двухъ главъ, изъ которыхъ первая посвящена общимъ свойствамъ функцій отъ комплексныхъ величинъ, вторая-же заключаетъ, собственно, теорію интегралныхъ вычетовъ.

Между различными приложеніями, заключающимися во второй части, я укажу на выводъ ряда Лагранжа, какъ на одно изъ замѣчательнѣйшихъ примѣненій исчисленія интегральныхъ вычетовъ. Здѣсь я употребляю пріемъ, который сразу приводитъ къ требуемому результату. Кромѣ того, тѣмъ же пріемомъ можно воспользоваться для рѣшенія многихъ другихъ вопросовъ Анализа, что я и дѣлаю при выводѣ одного извѣстнаго выраженія Лежандровой функціи X_n на стран. 82, также при выводѣ формулы Лагранжа и Варинга, относящихся къ симметрическимъ функціямъ, на страницахъ 124 и 127.

Въ статьѣ, подъ заглавіемъ: **Непрерывныя дроби**, я даю двѣ формулы, которыхъ до сихъ поръ нигдѣ не встрѣчалъ, и изъ которыхъ прямо вытекаютъ многія весьма интересныя теоремы, выведенныя въ общеизвѣстномъ мемуарѣ Чебышева »*Sur les fractions continues*«, совершенно другимъ путемъ. Тѣ же теоремы старались вывести: Руше въ мемуарѣ помѣщенномъ въ 37-й тетради Журнала Политехнической Школы, и Гейне въ мемуарѣ помѣщенномъ въ 67-мъ т. Журнала Креля. Но оба они разбираютъ частные случаи, и изысканія ихъ уклонились отъ простоты, съ которою можно получить всѣ ихъ результаты, слѣдуя другому пути.

Далѣе, я излагаю свойства Лежандровой функціи X_n, основываясь на особенномъ ея представленіи подъ видомъ интегральнаго вычета. Хотя это новое изложеніе не приводитъ ни къ какимъ новымъ результатамъ, но оно даетъ полезные примѣры для упражненія въ примѣненіи началъ исчисленія интегральныхъ вычетовъ. Въ этой же статьѣ читатель найдетъ много теоремъ, не имѣющихъ, повидимому, никакого отношенія къ интегральнымъ вычетамъ; но онѣ показались мнѣ необходимыми отчасти для полноты изложенія, отчасти для лучшаго поясненія того, что будетъ сказано въ послѣдующей статьѣ. Притомъ, доказательства нѣкоторыхъ теоремъ мнѣ удалось значительно сократить: въ этомъ отношеніи больше всего заслуживаетъ вниманія доказательство теоремы Гейне о разложеніи функціи $\frac{1}{y-x}$ въ рядъ, расположенный по Лежандровымъ функціямъ.

Послѣдняя статья, подъ заглавіемъ: *О разложеніи функціи въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей*, заключаетъ весьма интересныя формулы, изъ которыхъ однѣ не были вовсе до сихъ поръ извѣстны, другія же выведены Чебышевымъ, только подъ другимъ видомъ, въ его замѣчательномъ мемуарѣ, подъ заглавіемъ: *О разложеніи функціи въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей*, въ которомъ въ первый разъ обращено вниманіе на функціи, означенныя чрезъ R_n. Именно этотъ трудъ Чебышева побудилъ меня къ составленію послѣдней статьи этого разсужденія.

Таково содержаніе предлагаемаго разсужденія. При этомъ, я предположилъ, что читатель хорошо знакомъ съ элементарными понятіями и свойствами, относящимися къ функціямъ отъ комплексныхъ величинъ, какъ, напримѣръ, распредѣленіе значеній данной функціи на координатной плоскости, опредѣленіе линій или точекъ разрыва, и т. п.

Ю. Сохоцкій.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Непрерывныя дроби.

О функціи X_n.

О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.

Прибавленіе 1-ое.

Симметрическія функціи.

Прибавленіе 2-ое.

Непрерывныя дроби.

ОБЪ ИНТЕГРАЛЬНЫХЪ ВЫЧЕТАХЪ.

§ 1. Введеніе.

1. Означимъ чрезъ $f(x, y)$ функцію, зависящую отъ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, и положимъ

$$x + iy = z,$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$.

Для того, чтобы функцію $f(x, y)$ можно было разсматривать какъ зависящую отъ одной перемѣнной z, достаточно и необходимо условіе

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Всякую функцію $f(x, y)$, удовлетворяющую этому уравненію (1), мы будемъ означать чрезъ $f(z)$ и такія только функціи составляютъ предметъ занимающей насъ теоріи.

Производная функціи $f(z)$, или, другими словами, предѣлъ отношенія

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

когда h стремится къ нулю, не зависитъ вовсе отъ величины h, то есть, не зависитъ отъ направленія, по которому точка $z + h$ стремится совпасть съ точкою z: это характеристическое свойство разсматриваемыхъ функцій есть слѣдствіе уравненія (1) и можетъ вполнѣ его замѣнить.

2. По числу различныхъ значеній, соотвѣтствующихъ одному и тому-же значенію независимой перемѣнной, функціи бываютъ *одиночныя* и *многозначныя*.

Функція называется *одиночною* тогда, когда для всякаго значенія независимой перемѣнной, принимаетъ одно только значеніе, — нѣкоторыя точки могутъ составлять исключеніе. Сюда принадлежатъ функціи раціональныя, тригонометрическія, показательныя, эллиптическія. Всѣ эти функціи могутъ допускать разрывъ въ нѣкоторыхъ особенныхъ точкахъ но никакъ не на продолженіи конечной линіи.

Напримѣръ, каждая изъ функцій

$$\frac{1}{z-a}, \quad \sin\frac{1}{z-b},$$

есть одиночная, между тѣмъ первая изъ нихъ въ точкѣ $z=a$ принимаетъ два различныя значенія

$$+\infty \text{ и } -\infty,$$

вторая же въ точкѣ $z=b$ принимаетъ всевозможныя значенія.

Если для однаго и тогоже значенія независимой перемѣнной, функція принимаетъ болѣе чѣмъ одно значеніе, тогда она называется *многозначною.* Сюда принадлежатъ функціи ирраціональныя, логариѳмическія, обратныя круговыя, обратныя эллиптическія и проч.

Если для значеній независимой перемѣнной z, содержащихся внутри нѣкоторой площади, данная функція $f(z)$ остается неразрывною, исключая нѣкоторыя особенныя точки, тогда мы говоримъ, что функція $f(z)$ остается *однозначною* внутри разсматриваемой поверхности

Напримѣръ, функція

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Черт. 1.

остается однозначною внутри площади *abcdo* (Черт. 1); точно также функція

$$\log(1+z)$$

остается однозначною внутри круга, начерченнаго радіусомъ равнымъ единицѣ и имѣющимъ центръ въ точкѣ $z=0$.

3. Выраженіе $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$ есть ничто иное, какъ значеніе интеграла

$$(2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} f(x+iy)\;(dx+idy),$$

взятаго по нѣкоторой кривой, соединяющей точку z_0 съ точкою z_1.

Подобно тому, какъ производная $\frac{\partial f(z)}{dz}$ не зависитъ отъ аргумента дифференціала dz, точно также значеніе интеграла (2), за исключеніемъ нѣкоторыхъ случаевъ, не зависитъ отъ вида кривой, соединяющей точки z_0 и z_1.

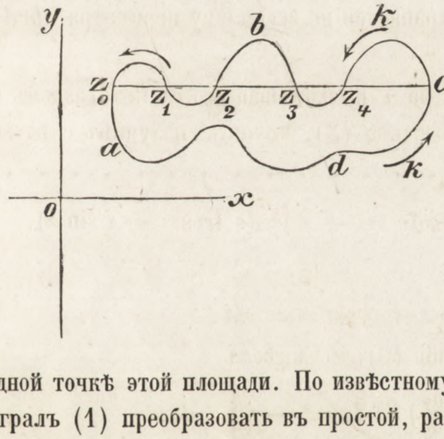
Теорема эта, доказанная впервые Коши, служитъ исходною точкою для дальнѣйшихъ изслѣдованій по теоріи функцій отъ комплексныхъ величинъ.

Общія свойства однозначныхъ функцій.

§ 2. Теорема Коши.

1. Начертимъ гдѣ нибудь на плоскости координатъ сомкнутую кривую $abcd$ (Черт. 2) и примемъ во вниманіе двойной интегралъ

Черт. 2.



$$(1) \quad \iint\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dxdy,$$

распространенный на всю площадь, ограниченную кривою $abcd$, причемъ предполагаемъ, что произвольная функція φ не дѣлается разрывною ни въ одной точкѣ этой площади. По извѣстному правилу, не трудно двойной интегралъ (1) преобразовать въ простой, распространенный на всѣ точки кривой $abcd$.

Дѣйствительно, если разсматриваемый интегралъ представимъ въ видѣ суммы двухъ интеграловъ

$$(2) \qquad \iint\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ \partial xdy+i\iint\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ \partial xdy,$$

то въ первомъ изъ нихъ можно произвести интегрированіе по перемѣнной x, вслѣствіе чего, онъ приметъ видъ

$$(3) \qquad \int(-\varphi_0+\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\ .\ .\ \pm\varphi_n)\,dy,$$

гдѣ φ_0, φ_1, . . . φ_n суть значенія функціи φ соотвѣтствующія точкамъ z_0, z_1, ... z_n, въ которыхъ произвольная линія параллельная оси x пересѣкаетъ кривую $abcd$. Но въ выраженіи (3) вмѣсто dy можно подставить

$$\pm\, ds \sin\alpha,$$

гдѣ α означаетъ уголъ, содержащійся между осью x и направніемъ дуги ds, опредѣляемымъ стрѣлкою k; знакъ — относится къ точкамъ такимъ какъ z_0, z_2, z_4, ...; знакъ $+$ къ точкамъ такимъ какъ z_1, z_3, . . .; вслѣдствіе того, вмѣсто интеграла (3), мы получаемъ новый интегралъ

$$(4) \qquad \int \varphi\, ds \sin\alpha,$$

распространенный на всю длину периметра $abcd$, по направленію стрѣлки. Поступая точно такимъ же образомъ и со вторымъ интеграломъ, входящимъ въ выраженіе (2), получимъ, вмѣсто него,

$$(5) \qquad -\int \varphi\, ds \cos\alpha,$$

гдѣ интегралъ также распространяется на всю длину периметра $abcd$, по направленію стрѣлки.

Умножая выраженіе (5) на i и складывая его съ интеграломъ (4), получимъ сумму равную выраженію (3), то есть, получимъ слѣдующее уравненіе:

$$(6) \qquad \iint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dxdy = -\, i \int \varphi\, ds\, (\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Но очевидно, что

$$ds\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = dz,$$

слѣдовательно, вмѣсто уравненія (6), мы имѣемъ

$$(7) \qquad \iint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dxdy = -\, i \int^{(abc\,\ldots\,d)} \varphi\, dz.$$

До сихъ мы предполагали, что φ означаетъ какую угодно функцію отъ x и y, лишь не допускающую точекъ разрыва внутри поверхности $abcd$; допустимъ же теперь, что

$$\varphi(x, y) = f(x + iy) = f(z):$$

въ такомъ случаѣ лѣвая сторона уравненія (7) тождественно обращается въ нуль, и мы получаемъ

$$(\mathrm{I}) \qquad \int^{(abc\,\ldots\,d)} f(z)\, dz = 0,$$

въ чемъ и заключается теорема Коши.

2. Взявъ во вниманіе двѣ точки a и c, лежащія на кривой $abcd$, мы можемъ интегралъ уравненія (I) представить въ видѣ разности двухъ интеграловъ: одного отъ a чрезъ d до c и другаго отъ a чрезъ b до c; на основаніи уравненія (I), оба эти интеграла равны между собою, то есть,

$$\text{(II)} \qquad \int^{(adc)} f(z)\,dz = \int^{(abc)} f(z)\,dz.$$

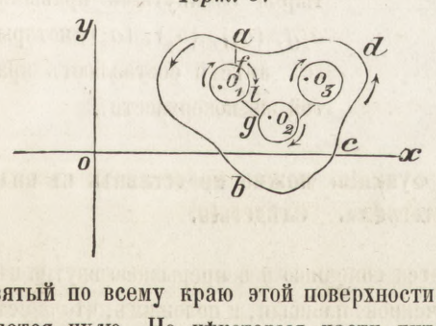
Это уравненіе доказываетъ намъ, что если внутри нѣкоторой площади, ограниченной одною сомкнутою линіею, данная функція $f(z)$ остается конечною и неразрывною, то функція

$$\int_a^z f(z)\,dz,$$

во всѣхъ точкахъ той же поверхности, представляетъ функцію конечную и однозначную.

3. Представимъ себѣ теперь, что мы начертили такую сомкнутую кривую $abcd$ (Чер. 3), внутри которой находится одна или сколько угодно разрывныхъ точекъ o_1, o_2, o_3, etc., и что, проведя около каждой изъ нихъ очень малыя сомкнутыя кривыя (o_1), (o_2), ..., мы соединили ихъ поочередно одну съ другою такъ, какъ показано на чертежѣ 3.

Черт. 3.



Вслѣдствіе того, получится со всѣхъ сторонъ ограниченная площадь, внутри которой нѣтъ ни одной точки разрыва, и слѣдовательно интегралъ

$$(8) \qquad \int f(z)\,dz,$$

взятый по всему краю этой поверхности, по направленію стрѣлки, равняется нулю. Но нѣкоторыя части интеграла (8), именно тѣ, которыя соотвѣтствуютъ двумъ сторонамъ линій af, lg и т. д., очевидно взаимно уничтожаются, вслѣдствіе чего мы видимъ, что интегралъ (8), взятый по направленію стрѣлокъ, по кривымъ $abcd$, (o_1), (o_2), (o_3), и т. д., равенъ нулю. Перемѣняя направленія интеграловъ взятыхъ по (o_1), (o_2),.. на противоположныя, значенія ихъ примутъ противоположныя знаки и окончательно мы получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема. Интегралъ

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по произвольной сомкнутой кривой, равняется суммѣ такихъ же интеграловъ, взятыхъ по произвольно малымъ сомкнутымъ кривымъ, окружающимъ тѣ точки разрыва функціи $f(z)$, которыя находятся внутри кривой. При этомъ всѣ интегралы должны быть взяты по одному и тому же направленію.

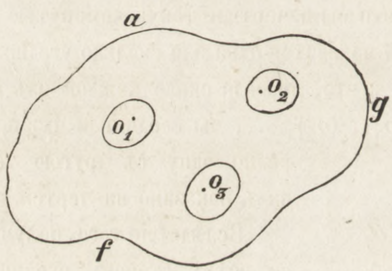
Называя положительнымъ направленіемъ края данной площади, направленіе той стрѣлки, относительно которой самая площадь находится съ лѣвой стороны, предъидущую теорему можно выразить еще такими словами.

Интегралъ

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый въ положительномъ направленіи по всему краю нѣкоторой, со всѣхъ сторонъ ограниченной, площади, не содержащей ни одной точки разрыва функціи $f(z)$, равенъ нулю.

Черт. 4.



Чертежъ (4) представляетъ поверхность ограниченную четырмя сомкнутыми кривыми: afg, (o_1), (o_2), (o_3), которыя всѣ вмѣстѣ составляютъ край той же поверхности.

§ 3. Всякую однозначную функцію можно представить въ видѣ конечнаго интеграла. Слѣдствія.

1. Пусть функція $f(z)$ остается конечною и непрерывною внутри нѣкоторой, со всѣхъ сторонъ ограниченной, площади, и положимъ, что x есть произвольно взятая точка внутри этой площади.

Назовемъ чрезъ (p) кривую, или совокупность кривыхъ, составляющихъ край площади, а чрезъ (x) окружность круга, начерченнаго изъ точки x произвольно малымъ радіусомъ r. Такъ какъ $\frac{f(z)}{z-x}$, внутри нашей площади, кромѣ точки $z = x$, нигдѣ не дѣлается разрывною, то, по теоремѣ Коши, мы получаемъ слѣдующее уравненіе:

$$\int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int^{(x)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Полагая въ интегралѣ съ правой стороны

$$z = x + re^{i\theta},$$

получимъ

$$\int^{(p)} \frac{f(z)dz}{z-x} = i\int_0^{2\pi} f(x + re^{i\theta})\,d\theta;$$

но если r есть величина безконечно малая, то

$$\lim \int_0^{2\pi} f(x + re^{i\theta})\,d\theta = 2\pi f(x),$$

и слѣдовательно

$$\int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = 2\pi i f(x),$$

откуда

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} \frac{f(z)dz}{z-x}.$$

Это уравненіе въ высшей степени замѣчательно; оно указываетъ намъ на возможность вычислить значеніе функціи $f(z)$ для какой угодно точки x, содержащейся внутри нѣкоторой, со всѣхъ сторонъ ограниченной, площади, не содержащей ни одной точки разрыва функціи $f(z)$, по значеніямъ той же функціи на краѣ разсматриваемой площади.

Дифференцируя обѣ стороны уравненія (1) n разъ по x, получимъ

$$\text{(II)} \qquad f^n(x) = \frac{1.\,2.\,3 \ldots n}{2\pi i}\int^{(l)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

Уравненіе (II) показываетъ намъ, что если внутри нѣкоторой, со всѣхъ сторонъ ограниченной площади, функція $f(z)$ остается неразрывною, то и производная отъ этой функціи какого нибудь порядка, остается тоже неразрывною; ибо подъинтегральная функція съ правой стороны уравненія (II) нигдѣ, въ предѣлахъ интеграла, не обращается въ ∞ и, вмѣстѣ съ x, измѣняется непрерывнымъ образомъ.

Формулы (I) и (II) составляютъ основаніе теоріи интегральныхъ вычетовъ, одной изъ самыхъ плодовитыхъ въ наукѣ, и которою мы займемся ниже; теперь же покажемъ другія слѣдствія, вытекающія изъ этихъ формулъ.

2. Если предположимъ, что функція $f(z)$, ни для одного конечнаго или безконечнаго значенія перемѣнной z, не обращается въ ∞, тогда мы вправѣ допустить, что, въ уравненіи (I), кривая (p) есть кругъ начерченный около начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ.

Допустивъ это на самомъ дѣлѣ, и положивъ

$$z = re^{i\theta},$$

изъ уравненія (I) получимъ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})\, d\theta}{1 - \dfrac{x}{re^{i\theta}}};$$

но если $r = \infty$, то

$$\frac{x}{re^{i\theta}} = 0;$$

слѣдовательно

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Вторая половина этого уравненія не зависитъ отъ x и потому $f(x)$ есть величина постоянная. И такъ мы видимъ, что всякая одиночная функція, нигдѣ не обращающаяся въ ∞, равняется непремѣнно величинѣ постоянной.

Если $f(z)$ не есть величина постоянная, то, на основаніи только что сказаннаго, она необходимо, по крайней мѣрѣ для одного значенія перемѣнной z, обращается въ ∞; а изъ этого непосредственно слѣдуетъ, что та же функція $f(z)$ должна получать всевозможныя значенія. Дѣйствительно, еслибы функція $f(z)$ ни для одного значенія z не принимала значенія равнаго произвольно постоянной C, тогда функція

$$\frac{1}{f(z) - C},$$

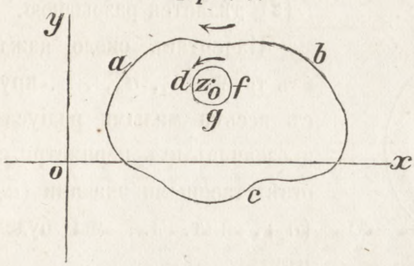
ни для одного значенія перемѣнной z, не обращалась бы въ ∞, и функція $f(z)$ была бы величиною постоянною, что противорѣчитъ нашему предположенію.

3. Функція $f(z)$ не иначе можетъ быть разрывною въ данной точкѣ, какъ обращаясь въ ∞.

Дѣйствительно, положимъ, что въ точкѣ z_0, нѣкоторая функція $f(z)$ дѣлается разрывною, не обращаясь въ ∞.

Опишемъ около z_0 двѣ сомкнутыя линіи: одну abc (Черт. 5), не содержащую внутри себя ни одной точки разрыва, кромѣ z_0, и другую dfg, составляющую окружность безконечно малаго круга, начерченнаго изъ точки z_0, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ r; назовемъ периметръ acb чрезъ (p), а периметръ dfg чрезъ (z_0).

Черт. 5.



По формулѣ (I), мы имѣемъ

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2\pi i}\int^{(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

гдѣ x есть произвольная точка, содержащаяся между (p) и (z_0), и оба интеграла во второй части взяты по направленію стрѣлки. Полагая

$$z = z_0 + re^{i\theta},$$

мы получимъ

$$\int^{(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \lim \left(ri \int_0^{2\pi} \frac{f(z)\,e^{i\theta}\,d\theta}{z-x} \right)_{r=0} = 0,$$

и слѣдовательно, вмѣсто уравненія (1), получаемъ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

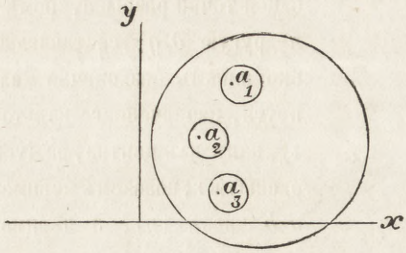
Но такъ какъ вторая часть этого уравненія составляетъ функцію конечную и неразрывную отъ независимой перемѣнной x для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри кривой (p), то и функція $f(x)$, внутри той же кривой, остается конечною и неразрывною, и слѣдовательно точка z_0 не есть точка разрыва функціи $f(z)$.

§ 4. Разложеніе однозначной функціи въ рядъ по восходящимъ и нисходящимъ степенямъ независимой перемѣнной. Дополнительные члены.

1. Изъ произвольной точки a произвольнымъ радіусомъ r начертимъ кругъ, периметръ котораго означимъ чрезъ (p) (Черт. 6); и поло-

жимъ, что внутри этого круга находится n точекъ a_1, a_2, a_3 . . . a_n, въ которыхъ данная функція $f(z)$ дѣлается разрывною.

Черт. 6.



Начертивъ около каждой изъ точекъ a_1, a_2, . . . круги съ весьма малыми радіусами и означивъ ихъ периметри соотвѣтственными знаками (a_1), (a_2), и т. д., мы будемъ имѣть

$$(1)\qquad \int^{(p)} f(z)\,dz = \int^{(a_1)} f(z)\,dz + \int^{(a_2)} f(z)\,dz + \ldots.$$

Если теперь, вмѣсто функціи $f(z)$, возьмемъ функцію

$$\frac{f(z)}{z-x},$$

гдѣ x означаетъ произвольную точку внутри круга (p), но не совпадающую ни съ одной изъ точекъ a_1, a_2, . . .; то, очевидно, чтобы получить уравненіе такое какъ (1), надо къ точкамъ a_1, a_2, . . . прибавить точку x, и слѣдовательно будемъ имѣть

$$(2)\qquad \int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int^{(x)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int^{(a_1)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \ldots.$$

Первый интегралъ во второй части уравненія (2), на основаніи формулы (I) предъидущаго параграфа, равенъ $2\pi i f(x)$: подставляя и перенося члены, получимъ

$$(3)\qquad 2\pi i f(x) = \int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \int^{(a_1)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \int^{(a_2)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \ldots.$$

Первый интегралъ съ правой стороны уравненія (3) можетъ быть представленъ слѣдующимъ образомъ:

$$(4)\qquad \int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{z-a-(x-a)};$$

но такъ какъ точка x находится внутри круга (p), то, очевидно,

$$\mathrm{mod}\,(x-a) < \mathrm{mod}\,(z-a),$$

и потому дробь

$$\frac{1}{z-a-(x-a)}$$

можетъ быть разложена въ рядъ сходящійся, по восходящимъ степенямъ $(x-a)$. Сдѣлавъ это на самомъ дѣлѣ, вмѣсто интеграла (4) мы получимъ слѣдующій сходящійся рядъ:

$$\int^{(p)}\frac{f(z)dz}{z-a}+(x-a)\int^{(p)}\frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+(x-a)^2\int^{(p)}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}+\ldots$$

$$+(x-a)^n\int^{(p)}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}+K_n$$

котораго дополнительный членъ K_n будетъ

$$K_n=\int^{(p)}\frac{(x-a)^{n+1}\,f(z)dz}{(z-a)^{n+1}\,(z-x)}.$$

Примемъ теперь во вниманіе второй интегралъ съ правой стороны уравненія (3); онъ можетъ быть представленъ такимъ образомъ:

$$\int^{(a_1)}\frac{f(z)dz}{z-a_1-(x-a_1)};$$

но такъ какъ въ предѣлахъ интеграла $\operatorname{mod}(x-a_1)>\operatorname{mod}(z-a_1)$, то, слѣдовательно,

$$\frac{1}{z-a_1-(x-a_1)}=-\frac{1}{x-a_1}-\frac{z-a_1}{(x-a_1)^2}-\frac{(z-a_1)^2}{(x-a_1)^3}-\ldots-\frac{(z-a_1)^{n-1}}{(x-a_1)^n}-\frac{(z-a_1)^n}{(x-a_1)^n(x-z)},$$

и

$$\int^{(a_1)}\frac{f(z)dz}{z-x}=-\frac{1}{x-a_1}\int^{(a_1)}f(z)dz-\frac{1}{(x-a_1)^2}\int^{(a_1)}f(z)\,(z-a_1)dz-\ldots\ldots$$

$$-\frac{1}{(x-a_1)^n}\int^{(a_1)}f(z)\,(z-a_1)^{n-1}\,dz-K'_n,$$

гдѣ дополнительный членъ K'_n ряда, составляющаго правую сторону, опредѣляется формулой

$$K'_n=\int^{(a_1)}\frac{(z-a_1)^n\,f(z)dz}{(x-a_1)^n\,(x-z)},$$

и, очевидно, въ предѣлѣ при $n = \infty$ обращается въ нуль. Поступая подобнымъ образомъ съ прочими интегралами уравненія (3) и подставляя вмѣсто каждаго изъ нихъ получаемый рядъ, мы находимъ

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{aligned}
f(x) &= A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n + R_n \\
&+ \frac{B_1}{x-a_1} + \frac{B_2}{(x-a_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{B_n}{(x-a_1)^n} + R'_n \\
&+ \frac{C_1}{x-a_2} + \frac{C_2}{(x-a_2)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{(x-a_2)^n} + R''_n \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}
\right.
$$

причемъ

$$A_i = \frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{i+1}}, \quad B_i = \frac{1}{2\pi i}\int^{(a_1)} f(z)(z-a_1)^{i-1}dz, \ldots .$$

$$\lim\,(R_n)_{n=\infty} = \lim\,(R'_n)_{n=\infty} = \lim\,(R''_n)_{n=\infty} = \ldots = 0.$$

Каждый изъ рядовъ, составляющихъ вторую часть уравненія (I), есть сходящійся, и дополнительные ихъ члены опредѣляются по слѣдующимъ формуламъ:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} \frac{(x-a)^{n+1} f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-x)} \\
R'_n &= \frac{1}{2\pi i}\int^{(a_1)} \frac{(z-a_1)^n f(z)\,dz}{(x-a_1)^n(x-z)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Уравненіе (I) даетъ намъ общій аналитическій видъ всякой однозначной функціи для всѣхъ значеній независимой перемѣнной, содержащихся внутри произвольнаго круга (p).

2. Что касается до членовъ дополнительныхъ, опредѣляемыхъ уравненіями (5), то мы можемъ вычислить высшіе предѣлы ихъ модулей, по способу указанному Коши *.

Принявъ во вниманіе первое изъ уравненій (5), мы положимъ

$$z = a + re^{i\theta};$$

тогда получимъ

$$(6) \qquad R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{f(z)\, e^{-n\theta i}\, d\theta}{(z-x)},$$

* Resumé d'un memoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. Exercices d'Anal. et de Physique Math. T II. p. 41.

Полагая теперь

$$\mathrm{mod}\ (x-a)=\xi$$

и означая чрез M самый большой модуль, который получаетъ функція

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

на периметрѣ (p), изъ уравненія (6) получаемъ,

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{mod}\ R_n < \frac{\xi^{n+1}}{r^n} M.$$

Можно еще иначе вычислить высшій предѣлъ модуля R_n, именно, слѣдующимъ образомъ:

Уравненіе (6) представимъ такъ:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(z) e^{-n\theta i}\, d\theta}{z-a-(x-a)}.$$

Отсюда, разлагая множитель

$$\frac{1}{z-a-(x-a)}$$

подъинтегральной функціи въ рядъ по восходящимъ степенямъ $x-a$, мы получаемъ

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{2\pi r^n} \left[\int_0^{2\pi} \frac{f(z)\, e^{-ni\theta}}{z-a}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{f(z)\,(x-a)\, e^{-n\theta i}}{(z-a)^2}\, d\theta + \ldots\right],$$

или

$$R_n = \frac{1}{2\pi r^n} \left[(x-a)^{n+1} \int_0^{2\pi} \frac{f(z) e^{-n\theta i}}{z-a}\, d\theta + (x-a)^{n+2} \int_0^{2\pi} \frac{f(z) e^{-n\theta i}}{(z-a)^2}\, d\theta + \ldots\right].$$

Означая найбольшій модуль, который получаетъ функція $f(z)$ на окружности (p), чрез N, будемъ имѣть

$$\mathrm{mod}\ (x-a)^{n+1} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)\, e^{-n\theta i}\, d\theta}{z-a} < 2\pi \frac{\xi^{n+1}}{r} N,$$

$$\mathrm{mod}\ (x-a)^{n+2} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)\, e^{-n\theta i}\, d\theta}{(z-a)^2} < 2\pi \frac{\xi^{n+2}}{r^2} N,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

слѣдовательно,

$$\mathrm{mod}\ R_n < \left(\frac{\xi^{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{\xi^{n+2}}{r^{n+2}} + \frac{\xi^{n+3}}{r^{n+3}} + \ldots\ldots\right) N,$$

или, окончательно,

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{mod} R_n < \frac{\xi^{n+1}}{r^n(r-\xi)} N.$$

3. Показавъ, какимъ образомъ вычисляется высшій предѣлъ дополнительнаго члена R_n, не трудно тѣмъ же самымъ пріемомъ воспользоваться, чтобы вычислить высшіе предѣлы модулей остальныхъ дополнительныхъ членовъ R'_n, R''_n, и т. д.

Возьмемъ, напримѣръ, формулу

$$(7) \qquad R'_n = \frac{1}{2\pi i}\int^{(a_1)} \frac{(z-a_1)^n f(z)\,dz}{(x-a_1)^n (x-z)}.$$

Окружность (a_1), на которую распространенъ интегралъ съ правой стороны, предполагалась до сихъ поръ безконечно малою, но очевидно, что, не перемѣняя значенія интеграла (7), можно увеличивать радіусъ круга (a_1) до тѣхъ поръ, пока окружность его не коснется одной изъ точекъ a_2, a_3, ... a_n, x. Означимъ радіусъ круга (a_1) чрезъ r_1 и представимъ уравненіе (7) подъ видомъ

$$R'_n = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(x-a_1)^n}\int^{(a_1)} \frac{(z-a_1)^n f(z)\,dz}{x-a_1-(z-a_1)},$$

или, полагая

$$z = a_1 + r_1 e^{i\theta},$$

$$R'_n = \frac{r_1^{\,n+1}}{2\pi}\,\frac{1}{(x-a_1)^n}\int_0^{2\pi} \frac{e^{n\theta i} f(z)\,d\theta}{x-a_1-(z-a_1)}.$$

Такъ какъ въ предѣлахъ интеграла мы имѣемъ

$$\operatorname{mod.}(z-a_1) < \operatorname{mod}(x-a_1),$$

то слѣдовательно

$$\frac{1}{x-a_1-(z-a_1)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{z-a_1}{(x-a_1)^2} + \frac{(z-a_1)^2}{(x-a_1)^3} + \dots,$$

и

$$(8) \qquad R'_n = \frac{r_1^{\,n+1}}{2\pi}\Big[\frac{1}{(x-a_1)^{n+1}}\int_0^{2\pi} e^{n\theta i} f(z)\,d\theta + \frac{1}{(x-a_1)^{n+2}}\int_0^{2\pi} e^{n\theta i} f(z)\,(z-a_1)\,d\theta$$

$$+ \frac{1}{(x-a_1)^{n+3}}\int_0^{2\pi} e^{n\theta i} f(z)\,(z-a_1)^2\,d\theta + \dots\Big].$$

Полагая теперь

$$\operatorname{mod}(x-a_1)=\xi_1,$$

и означая чрезъ N_1 наибольшій модуль функціи $f(z)$ на окружности (a_1), мы найдемъ, что

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(x-a_1)^{n+1}}\int_0^{2\pi}e^{n\theta i}f(z)\,d\theta<2\pi\,\frac{1}{\xi_1^{\,n+1}}\,N_1,$$

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(x-a_1)^{n+2}}\int_0^{2\pi}e^{n\theta i}\,(z-a_1)f(z)\,d\theta<2\pi\,\frac{r_1}{\xi_1^{\,n+2}}N_1,$$

. . . . и т. д. . . . . .

Принимая въ соображеніе эти неравенства, изъ (8) получаемъ

$$\operatorname{mod}R'_n<\left(\frac{r_1^{\,n+1}}{\xi_1^{\,n+1}}+\frac{r_1^{\,n+2}}{\xi_1^{\,n+2}}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right)N_1,$$

или, окончательно,

$$\text{(IV)}\qquad \operatorname{mod}R'_n<\frac{r_1^{\,n+1}}{\xi_1^{\,n}(\xi_1-r_1)}\,N_1$$

Такъ какъ въ формулахъ (III) и (IV) величины r и r_1 могутъ быть произвольно увеличиваемы или умѣньшаемы между извѣстными предѣлами, то очевидно, что на практикѣ нужно брать такія значенія для r и r_1, при которыхъ вторыя части неравенствъ (III) и (IV) будутъ minimum.

Изъ уравненія (I) вытекаетъ, непосредственно, много замѣчательныхъ слѣдствій, на которыя постараемся указать въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 5. Слѣдствія, вытекающія изъ формулы (I) предъидущаго параграфа.

1. Если въ точкѣ z_0 функція $f(z)$ остается конечною, то означивъ чрезъ (p) окружность круга начерченнаго изъ точки z_0 радіусомъ меньшимъ чѣмъ разстояніе точки z_0 отъ ближайшей изъ точекъ разрыва функціи $f(z)$, для значеній z, содержащихся внутри круга (p), мы будемъ имѣть

$$\text{(1)}\qquad f(z)=A_0+A_1(z-z_0)+A_2(z-z_0)^2+\ldots\ldots,$$

гдѣ

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int^{(p)}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Принимая въ соображеніе формулу (II) § 3, мы видимъ, что

$$A_n = \frac{1}{1.2.3.\ldots n} f^n(z_0),$$

и слѣдовательно, уравненіе (1) можетъ быть представлено такъ:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1.2} f''(z_0) + \ldots\ldots$$

Это — извѣстная формула Тайлора: она, какъ было сказано, имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній перемѣнной z, заключающихся внутри круга (p).

2. Если въ точкѣ z_0 функція $f(z)$ обращается въ ∞, то для значеній z достаточно близкихъ къ z_0 будемъ имѣть

$$f(z) = \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \frac{A_3}{(z - z_0)^3} + \ldots\ldots$$
$$+ B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

Это уравненіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній перемѣнной z, содержащихся внутри круга, начерченнаго изъ точки z_0 радіусомъ меньшимъ чѣмъ разстояніе z_0 отъ ближайшей изъ прочихъ точекъ разрыва функціи $f(z)$.

3. Если функція $f(z)$ ни въ одной изъ конечныхъ точекъ на плоскости координатъ, не обращается въ ∞, то, на основаніи уравненія (1), для всякаго значенія перемѣнной z, мы будемъ имѣть

$$f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots + A_n(z - z_0)^n + \ldots\ldots$$

Такая функція называется *цѣлою*.

4. Если въ точкѣ z_0 функція $f(z)$ обращается въ нуль, то тогда въ формулѣ (1) будемъ имѣть

$$A_0 = 0.$$

Можетъ случиться, что и послѣдующіе коэфиціенты $A_1, A_2, \ldots$ будутъ равняться нулю; но непремѣнно долженъ встрѣтиться коэфиціентъ не равный нулю, ибо иначе функція $f(z)$ для всѣхъ значеній перемѣнной z была бы равна нулю, чего мы не предполагаемъ. — Пусть A_n будетъ первый изъ коэфиціентовъ

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots,$$

не равный нулю; тогда функція $f(z)$, вблизи точки z_0, будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$(2) \qquad f(z) = (z - z_0)^n \,\tilde{\omega}(z),$$

гдѣ $\tilde{\omega}(z)$ означаетъ нѣкоторую функцію, остающуюся въ точкѣ z_0 конечною, но не равною нулю.

Цѣлое и положительное число n называютъ числомъ нулей функціи $f(z)$ въ точкѣ z_0.

5. Если въ точкѣ $z = z_0$ функція $f(z)$ равняется ∞ и не принимаетъ другаго конечнаго значенія, то, на основаніи только что сказаннаго, для значеній z близкихъ къ z_0, мы будемъ имѣть

$$(3) \qquad \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \tilde{\omega}(z),$$

гдѣ n — число цѣлое и положительное, а $\tilde{\omega}(z)$ — нѣкоторая функція, остающаяся въ точкѣ z_0 конечною и не равною нулю. Но изъ уравненія (3) мы получаемъ

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{\tilde{\omega}(z)},$$

или, полагая

$$\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} = \psi(z),$$

$$(4) \qquad f(z) = (z - z_0)^{-n} \psi(z),$$

гдѣ $\psi(z)$ есть нѣкоторая функція, получающая въ точкѣ $z = z_0$ значеніе не равное нулю и конечное.

Уравненіе (4) даетъ намъ общій видъ функціи $f(z)$ вблизи точки, въ которой $f(z)$ обращается въ ∞, не принимая приэтомъ другаго конечнаго значенія.

Цѣлое число n называется порядкомъ безконечности функціи $f(z)$, или, какъ вообще говорятъ, это есть число безконечностей функціи $f(z)$ въ точкѣ z_0.

Изъ сказаннаго въ двухъ послѣднихъ номерахъ ясно видно, что если данная функція $f(z)$ въ нѣкоторой точкѣ z_0 обращается въ ∞ безконечнаго порядка, то непремѣнно въ этой же точкѣ функція $f(z)$ должна принимать всевозможныя значенія. Дѣйствительно, между различными значеніями $f(z)$ будетъ непремѣнно находиться нуль, ибо, въ противномъ случаѣ, функція

$$\frac{1}{f(z)}$$

была бы въ разсматриваемой точкѣ конечною и не разрывною, что противорѣчитъ предположенію; но отсюда слѣдуетъ, что и всякое другое значеніе должно здѣсь находиться, ибо функція

$$f(z) - \text{Const}.$$

обращаясь въ разсматриваемой точкѣ въ ∞ безконечнаго порядка, обращается непремѣнно въ той же точкѣ въ нуль.

Обратно, если въ нѣкоторой точкѣ z_0 данная функція принимаетъ два значенія — конечное и безконечное, то порядокъ безконечности будетъ безконечно большимъ и функція принимаетъ въ точкѣ z_0 всевозможныя значенія.

6. Если дано значеніе однозначной функціи $f(z)$ и всѣхъ ея производныхъ въ точкѣ z_0, то, помощью формулы Тайлора, можно найти значеніе функціи $f(z)$ для какой угодно точки z.

Дѣйствительно, положивъ, что искомая функція $f(z)$ обращается въ ∞ въ точкахъ a_1, a_2, a_3, . . . , начертимъ около точки z_0 кругъ, котораго радіусъ меньше чѣмъ разстояніе точки z_0 отъ ближайшей изъ точекъ a_1, a_2, a_3, ...

Для всякой точки, лежащей внутри этого круга, будемъ имѣть

$$(5) \qquad f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{1.2}f''(z_0)+\ldots,$$

слѣдовательно, функція $f(z)$, внутри начерченнаго круга, вмѣстѣ съ ея производными, вполнѣ опредѣлена.

Начертимъ теперь другой кругъ, не содержащій внутри себя ни одной изъ точекъ a_1, a_2, a_3 . . . и имѣющій центръ гдѣ нибудь внутри круга предъидущаго, но такъ, чтобы часть его находилась внѣ перваго круга. Такъ какъ значенія функціи $f(z)$ и ея производныхъ, для центра втораго круга, могутъ быть вычислены изъ уравненія (5), то означивъ этотъ новый центръ чрезъ z_1, мы будемъ имѣть, для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри втораго круга, такое равенство:

$$f(z)=f(z_1)+(z-z_1)f'(z_1)+\frac{(z-z_1)^2}{1.2}f''(z_1)+\ldots\ldots;$$

слѣдовательно, функція $f(z)$ вмѣстѣ съ ея производными въ новомъ пространствѣ будутъ вполнѣ опредѣлены.

Проводя подобнымъ образомъ рядъ круговъ различныхъ радіусовъ во всѣ стороны, мы будемъ опредѣлять значенія функціи $f(z)$ все дальше и дальше, пока наконецъ не дойдемъ до такого мѣста, на которомъ пожелаемъ остановиться.

Изъ сказаннаго нами видно, что если даны значенія однозначной функціи $f(z)$ внутри нѣкоторой произвольно малой площади или на нѣкоторой произвольно малой линіи, то можно вычислить значенія той же функціи для какой угодно точки; ибо тогда будемъ имѣть такую точку, для которой значеніе $f(z)$ и всѣхъ производныхъ отъ $f(z)$ будутъ опредѣлены.

Наконецъ замѣтимъ, что однозначная функція не можетъ, ни на продолженіи произвольно малой линіи, ни внутри произвольно малой площади равняться постоянной величинѣ; ибо тогда, для всѣхъ точекъ такой линіи или площади, производныя

$$f'(z), f''(z), \ldots ,$$

были бы равны нулю, и слѣдовательно, функція $f(z)$, внутри каждаго изъ круговъ, проводимыхъ по вышеуказанному способу, равнялась бы одной и той же постоянной величинѣ: но это невозможно, если функція $f(z)$ не есть величина постоянная.

§ 6. Видъ однозначной функціи, при безконечно большомъ значеніи независимой перемѣнной.

1. Тутъ могутъ встрѣтиться два случая: или разсматриваемая функція $f(z)$ въ точкѣ $z = \infty$ остается конечною, или же — обращается въ ∞.

Въ первомъ случаѣ, функція $f\left(\frac{1}{u}\right)$ въ точкѣ нуль остается конечною, и потому, на основаніи сказаннаго въ предъидущемъ параграфѣ, для достаточно малыхъ значеній u, будемъ имѣть

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_n u^n + \ldots$$

Подставляя въ этомъ уравненіи $\frac{1}{z}$ вмѣсто u, мы получимъ

$$(1)\quad f(z) = A + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots$$

Это уравненіе даетъ намъ видъ функціи $f(z)$ для достаточно большихъ значеній перемѣнной z, въ томъ предположеніи, что $f(\infty) =$ конечной величинѣ.

Во второмъ случаѣ, когда $f(\infty) = \infty$, функція $f\left(\frac{1}{u}\right)$ въ точкѣ нуль обращается въ ∞, и потому для достаточно малыхъ значеній u, будемъ имѣть

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{B_1}{u} + \frac{B_2}{u^2} + \ldots + \frac{B_n}{u^n}$$
$$+ C + C_1 u + C_2 u^2 + \ldots$$

Подставляя въ этомъ уравненіи z вмѣсто $\frac{1}{u}$, мы получимъ уравненіе

$$(2) \qquad f(z) = + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_n z^n + C + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots + \frac{C_n}{z^n} + \ldots$$

которое даетъ намъ общій видъ функціи $f(z)$ для достаточно большихъ значеніи z, въ томъ предположеніи, что $f(\infty) = \infty$.

Въ уравненіи (2) цѣлое число n можетъ быть конечное или безконечно большое. Въ первомъ случаѣ функція $f(z)$ въ точкѣ ∞ обращается въ ∞ n-го порядка, или, что все равно, обращается n разъ въ ∞; во второмъ случаѣ, функція $f(z)$, въ точкѣ ∞, обращается въ безконечность безконечнаго порядка и, кромѣ того, въ этой же точкѣ принимаетъ всевозможныя значенія.

Если въ уравненіи (1) случится, что

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0,$$

то тогда функція $f(z)$ обращается въ точкѣ ∞ въ нуль n-го порядка или, все тоже, обращается n разъ въ нуль.

Не трудно также замѣтить, что если R означаетъ радіусъ круга начерченнаго изъ начала координатъ, внѣ котораго данная функція $f(z)$ остается конечною и однозначною, причемъ точка $z = \infty$ можетъ составлять исключеніе; то уравненіе (1) или (2) имѣетъ мѣсто для всѣхъ точекъ z, удовлетворяющихъ условію

$$\mathrm{mod}\, z > R.$$

§ 7. Случаи, когда одиночная функція бываетъ раціональною.

1. Послѣ того что было сказано въ предъидущихъ параграфахъ, не трудно доказать слѣдующія двѣ теоремы, выражающія собою условія, чтобы данная одиночная функція была раціональною.

Теорема 1. Если одиночная функція $f(z)$ ни для однаго значенія перемѣнной z не обращается въ ∞, но въ точкѣ $z = \infty$ обращается въ ∞ конечнаго n-го порядка (n число цѣлое), то $f(z)$ есть цѣлая раціональная функція n-ой степени.

Дѣйствительно, такъ какъ, на основаніи нашего предположенія, для достаточно большихъ значеній перемѣнной z мы будемъ имѣть [См. § 6. фор. (2)].

$$f(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \ldots\ldots + B_n z^n + \tilde{\omega}(z),$$

гдѣ $\tilde{\omega}(z)$ есть нѣкоторая функція, остающаяся конечною въ точкѣ ∞, то полагая, при всѣхъ значеніяхъ независимой перемѣнной z,

$$(1)\qquad f(z)-B_1z-B_2z^2-\ldots\ldots B_nz^n=\tilde{\omega}(z),$$

функція $\tilde{\omega}(z)$ будетъ одиночная, не обращающаяся въ ∞ ни для какого значенія перемѣнной z, и слѣдовательно будетъ равна нѣкоторой постоянной величинѣ B_0, которую внеся вмѣсто $\tilde{\omega}(z)$ въ уравненіе (1), получимъ

$$f(z)=B_0+B_1z+B_2z^2+\ldots\ldots+B_nz^n. \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема 2. Если данная одиночная функція $f(z)$ обращается въ ∞ конечное число разъ, то она есть функція раціональная.

Пусть $$a_1,\ a_2,\ldots\ldots a_n,\ \infty$$

суть тѣ точки, въ которыхъ $f(z)$ обращается въ ∞ порядковъ:

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots p_n,\ l,$$

При весьма большихъ значеніяхъ перемѣнной z, мы будемъ имѣть

$$f(z)=A_1z+A_2z^2+\ldots\ldots+A_lz^l+\tilde{\omega}(z),$$

причемъ $\tilde{\omega}(\infty)$ равняется величинѣ конечной.

Полагая теперь, при какомъ угодно z,

$$(2)\qquad f(z)-A_1z-A_2z^2-\ .\quad .\quad -A_lz^l=\tilde{\omega}(z),$$

то функція $\tilde{\omega}(z)$ будетъ обращаться въ точкахъ $a_1,\ a_2,\ a_n$ въ ∞ порядковъ $p_1\ p_2\ \ldots\ p_n$; во всѣхъ другихъ точкахъ она будетъ оставаться конечною, и потому, принимая въ соображеніе формулу (I) § 4, мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned}(3)\qquad \tilde{\omega}(z)=\ &\frac{B_1}{z-a_1}+\frac{B_2}{(z-a_1)^2}+\ldots+\frac{B_{p_1}}{(z-a_1)^{p_1}}\\ &+\frac{C_1}{z-a_2}+\frac{C_2}{(z-a_2)^2}+\ldots+\frac{C_{p_2}}{(z-a_2)^{p_2}}\\ &+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ &+\frac{K_1}{z-a_n}+\frac{K_2}{(z-a_n)^2}+\ldots+\frac{K_{p_n}}{(z-a_n)^{p_n}}+\text{Const.}\end{aligned}$$

Внеся это выраженіе на мѣсто функціи $\tilde{\omega}(z)$ въ уравненіе (2), мы получимъ выраженіе $f(z)$ въ видѣ раціональной функціи. ч. т. д.

Если, въ точкѣ $z=\infty$, функція $f(z)$ не обращается въ ∞, то въ уравненіи (2) надо положить

$$A_1=A_2=\ .\ .\ .\ .=A_l=0;$$

вслѣдствіе того

$$f(z) = \bar{\omega}(z),$$

и вторая часть уравненія (3) дастъ намъ выраженіе функціи $f(z)$.

§ 8. Выводъ формулы, опредѣляющей разность числа нулей и числа безконечностей данной функціи $f(z)$ внутри нѣкоторой площади.

1. Положимъ, что функція $f(z)$ въ точкѣ z_0 обращается въ нуль n-го порядка. На основаніи уравненія (2) § 5, для точекъ близкихъ къ z_0, будемъ имѣть

$$(1) \qquad f(z) = (z - z_0)^n \bar{\omega}(z),$$

причемъ $\bar{\omega}(z_0)$ не равняется ни нулю, ни ∞.

Дифференцируя обѣ стороны уравненія (1), получимъ

$$(2) \quad f'(z)\, z = n(z - z_0)^{n-1}\, \bar{\omega}(z) + (z - z_0)^n \bar{\omega}'(z);$$

отсюда, дѣля уравненіе (2) на (1),

$$(3) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\bar{\omega}')z)}{\bar{\omega}(z)},$$

гдѣ $\bar{\omega}'(z)$, означая производную отъ $\bar{\omega}(z)$, остается въ точкѣ z_0 конечною, и слѣдовательно функція $\frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)}$ въ точкѣ $z = z_0$ остается конечною.

Если бы функція $f(z)$ въ точкѣ z_0 обращалась въ ∞ n-го порядка, то подобнымъ образомъ, мы получили бы

$$(4) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z - z_0} + \frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)},$$

причемъ частное $\frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)}$ въ точкѣ нуль получаетъ конечное значеніе.

Уравненія (3) и (4) показываютъ, что если функція $f(z)$ обращается въ нѣкоторой точкѣ z_0 въ нуль или безконечность конечнаго n-го порядка, то функція

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

въ той же точкѣ обращается всегда въ ∞ перваго порядка.

2. Проведемъ около точки z_0 сомкнутую кривую такъ малую, чтобы внутри ея не находилась, кромѣ z_0, ни одна изъ точекъ, обращающихъ $f(z)$ въ 0 или въ ∞; назовемъ эту кривую чрезъ (p) и примемъ во вниманіе интегралъ

$$\int^{(p)} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \int^{(p)} \frac{d \log f(z)}{dz}\,dz,$$

который, смотря по тому, будетъ ли имѣть мѣсто уравненіе (3) или уравненіе (4), выразится слѣдующимъ образомъ:

$$(5) \qquad \int^{(p)} \frac{f'(z)}{f\,dz}\,dz = \pm \int^{(p)} \frac{n\,dz}{z - z_0} + \int^{(p)} \frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)}\,dz.$$

Такъ какъ

$$\int^{(p)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

и кромѣ того, $\frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)}$ въ точкѣ 0 получаетъ конечное значеніе, то,

$$\int^{(p)} \frac{\bar{\omega}'(z)}{\bar{\omega}(z)}\,dz = 0;$$

слѣдовательно, вмѣсто уравненія (5), мы имѣемъ

$$\int^{(p)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \pm 2n\pi i,$$

откуда

$$(\mathrm{I}) \qquad \pm n = \frac{1}{2\pi i} \int^{(p)} d\log f(z).$$

Формулу эту мы вывели въ томъ предположеніи, что внутри сомкнутой кривой p находится только одна точка, обращающая функцію $f(z)$ въ 0 или ∞.

Допустивъ теперь, что внутри сомкнутой кривой (p) находятся точки

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,$$

въ которыхъ $f(z)$ обращается въ нуль порядковъ

$$p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n;$$

и точки

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_m,$$

въ которыхъ $f(z)$ обращается въ ∞ порядковъ

$$q_1\cdot\ q_2,\ \ldots\ q_m;$$

проведемъ около каждой изъ точекъ $a_1,\ a_2, \ldots,\ b_1,\ b_2, \ldots$ безконечно малыя сомкнутыя кривыя $(a_1),\ (a_2), \ldots (b_1),\ (b_2), \ldots$ и примемъ во вниманіе равенство

$$(6)\qquad \int^{(p)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int^{(a_1)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int^{(a_2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \ldots$$

$$+ \int^{(b_1)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int^{(b_2)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \ldots$$

Каждый изъ интегеаловъ, составляющихъ вторую часть этого равенства (6) можетъ быть опредѣленъ помощью формулы (I). На самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\int^{(a_i)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i p_i, \qquad \int^{(b_i)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -2\pi i\, q_i;$$

подставляя эти значенія въ уравненіе (6), получимъ

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\,(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) - 2\pi i\,(q_1 + q_2 + \ldots,),$$

или

$$(\mathrm{II})\qquad (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) - (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots) = \frac{1}{2\pi i} \int d \log f(z).$$

Итакъ, мы видимъ, что значеніе интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int d \log f(z),$$

взятаго по всему краю нѣкоторой площади, будетъ всегда цѣлое число, выражающее собою разность между числомъ нулей и числомъ безконечностей функціи $f(z)$, содержащихся внутри той же площади.

Теорія интегральныхъ вычетовъ.

§ 9. Опредѣленіе интегральныхъ вычетовъ.

1. Коши назвалъ *интегральнымъ вычетомъ* функціи $f(z)$ въ точкѣ z_0 значеніе интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(z)\;dz,$$

взятаго по безконечно малой сомкнутой кривой, окружающей точку z_0, въ положительномъ направленіи относительно безконечно малой площади, содержащей точку z_0.

Очевидно, что если функція $f(z)$ въ точкѣ z_0 не обращается въ ∞, то ея интегральный вычетъ въ точкѣ z_0 равняется нулю.

Допустимъ теперь, что функція $f(z)$ въ точкѣ z_0 обращается въ ∞; тогда для точекъ z близкихъ къ z_0 будемъ имѣть

$$(1) \qquad f(z) = \frac{A_1}{z-z_0} + \frac{A_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \bar{\omega}(z),$$

гдѣ $\bar{\omega}(z)$ означаетъ функцію конечную въ точкѣ z_0.

Называя окружность безконечно малаго круга, начерченнаго изъ точки z_0 радіусомъ равнымъ r, чрезъ (p), и интегрируя обѣ стороны уравненія (1), мы получаемъ

$$(2) \qquad \int^{(p)} f(z)\,dz = A_1 \int^{(p)} \frac{dz}{z-z_0} + A_2 \int^{(p)} \frac{dz}{(z-z_0)^2} + \cdots + \int^{(p)} \bar{\omega}(z)\,dz.$$

Но полагая

$$z = z_0 + re^{i\theta},$$

мы находимъ

$$\int^{(p)} \frac{dz}{z-z_0} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i,$$

$$\int^{(p)} \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \frac{i}{r^{m-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(m-1)\theta i} d\theta = 0, \qquad (m > 1);$$

кромѣ того, интегралъ

$$\int^{(p)} \bar{\omega}(z)\,dz$$

равняется нулю, ибо $\bar{\omega}(z_0)$ есть величина конечная. Подставляя полученныя значенія въ уравненіе (2), получимъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(p)} f(z)\,dz = A_1.$$

Это уравненіе показываетъ намъ, что интегральный вычетъ какой нибудь функціи $f(z)$ относительно точки z_0 равняется коэфиціенту при

$$\frac{1}{z-z_0}$$

въ разложеніи функціи $f(z)$ по восходящимъ и нисходящимъ степенямъ $(z - z_0)$; и поэтому, можно еще опредѣлить интегральный вычетъ, какъ коэфиціентъ при $\frac{1}{z-z_1}$ въ разложеніи данной функціи по цѣлымъ степенямъ $(z - z_0)$.

Всякая теорема, относящаяся къ интегральнымъ вычетамъ, можетъ быть доказана двумя путями, смотря по тому, какое мы примемъ опредѣленіе для интегральнаго вычета; но вообще первое опредѣленіе болѣе предпочтительно.

Для удобства въ вычисленіи, мы будемъ изображать интегральный вычетъ функціи $f(z)$ въ точкѣ z_0 посредствомъ символа

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z) \quad \text{или} \quad \underset{(z_0)}{\mathcal{E}} f(z);$$

если же придется взять сумму нѣсколькихъ интегральныхъ вычетовъ одной и той же функціи относительно различныхъ точекъ, то мы будемъ изображать эту сумму такимъ образомъ:

$$\underset{(z=z_0, z_1, z_2, \ldots)}{\mathcal{E}} f(z) \quad \text{или} \quad \underset{(z_0, z_1, z_2, \ldots)}{\mathcal{E}} f(z).$$

Наконецъ, мы согласимся изображать чрезъ

$$\mathcal{E} f(z)\,((\varphi(z)))$$

сумму всѣхъ интегральныхъ вычетовъ функціи $f(z)\,\varphi(z)$, относящихся къ точкамъ, обращающимъ функцію $\varphi(z)$ въ ∞, а чрезъ

$$\mathcal{E}\,((f(z))) \quad \text{или} \quad \mathcal{E} f(z)$$

сумму интегральныхъ вычетовъ функціи $f(z)$, относящихся ко всѣмъ конечнымъ точкамъ, обращающимъ $f(z)$ въ ∞.

2. Опредѣленіе интегральнаго вычета не трудно распространить и на точку $z = \infty$. Для этого, мы условимся сперва смотрѣть на координатную плоскость, какъ на поверхность сферы съ безконечно большимъ радіусомъ. Въ этомъ предположеніи точка $z = \infty$ будетъ ничто иное, какъ пересѣченіе оси x съ осью y, діаметрально противоположное точкѣ $z = 0$. Если теперь вообразимъ себѣ, что около точки $z = \infty$ мы провели сомкнутую кривую, не содержащую внутри себя ни одной изъ

конечныхъ точекъ, обращающихъ данную функцію $f(z)$ въ ∞, то интегралъ

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

взятый по этой кривой въ положительномъ направленіи относительно точки $z=\infty$, будетъ интегральнымъ вычетомъ функціи $f(z)$ относительно точки $z=\infty$.

Сомкнутая кривая, которую мы провели около точки $z=\infty$, раздѣляетъ всю поверхность координатной сферы на двѣ отдѣльныя части. Первая изъ нихъ, которую означимъ чрезъ A, содержитъ точку $z=\infty$ и ни одной изъ конечныхъ точекъ, обращающихъ функцію $f(z)$ въ ∞; вторая часть, которую означимъ чрезъ B, содержитъ точку $z=0$ и всѣ конечныя точки, обращающія функцію $f(z)$ въ ∞. Обѣ эти части имѣютъ общій край, и значеніе интеграла (3), взятаго по краю поверхности A въ положительномъ направленіи относительно A, равняется значенію того же интеграла (3), взятаго по краю поверхности B въ положительномъ направленіи относительно B, но со знакомъ перемѣненнымъ на противоположный. Слѣдовательно, если примемъ въ соображеніе, что интегралъ (3), взятый по краю поверхности B, равняется суммѣ интегральныхъ вычетовъ, относящихся ко всѣмъ конечнымъ точкамъ, обращающимъ функцію $f(z)$ въ ∞, то мы приходимъ къ тому заключенію, что интегральный вычетъ функціи $f(z)$ относительно точки $z=\infty$, равняется суммѣ интегральныхъ вычетовъ функціи $f(z)$, относящихся ко всѣмъ конечнымъ точкамъ, обращающимъ $f(z)$ въ ∞, взятой съ противоположнымъ знакомъ, т. е., по принятому нами знакоположенію,

$$(4) \qquad \mathcal{E}((f(z))) = -\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}} f(z).$$

Положимъ теперь, что, при достаточно большихъ значеніяхъ независимой перемѣнной z, имѣетъ мѣсто уравненіе

$$(5) \qquad f(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots$$
$$+ B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots .$$

Умножая обѣ части этого уравненія на dz и интегрируя по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ R, въ положительномъ направленіи, мы получимъ

$$\int f(z)\,dz = A_1\int\frac{dz}{z} + A_2\int\frac{dz}{z^2} + A_3\int\frac{dz}{z^3} + \cdots$$
$$+ B_0\int dz + B_1\int z\,dz + B_2\int z^2\,dz + \ldots$$

Но

$$\int\frac{dz}{z} = 2\pi i,$$
$$\int\frac{dz}{z^n} = 0, \quad (n > 1),$$
$$\int z^n dz = 0, \quad (n \geq 0);$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz = A_1,$$

или, такъ какъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz = \mathcal{E}((f(z))),$$

то, на основаніи уравненія (4),

$$A_1 = -\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}} f(z).$$

Это уравненіе показываетъ намъ, что интегральный вычетъ функціи $f(z)$ относительно точки $z = \infty$, равняется коэфиціенту при $\frac{1}{z}$ въ разложеніи функціи $f(z)$ въ рядъ вида (5), при безконечно большихъ значеніяхъ перемѣнной z, взятому съ противоположнымъ знакомъ.

§ 10. Основныя теоремы, относящіяся къ теоріи интегральныхъ вычетовъ.

Основываясь на вышеизложенномъ опредѣленіи интегральныхъ вычетовъ, не трудно вывести рядъ слѣдующихъ основныхъ теоремъ.

Теорема 1. Интегральный вычетъ суммы нѣсколькихъ функцій равняется суммѣ интегральныхъ вычетовъ отъ каждой изъ слагаемыхъ функцій. Напримѣръ,

$$\underset{(z=a)}{\mathcal{E}}[\varphi(z) + \psi(z) + \theta(z)] = \underset{(z=a)}{\mathcal{E}}\varphi(z) + \underset{(z=a)}{\mathcal{E}}\psi(z) + \underset{(z=a)}{\mathcal{E}}\theta(z)$$

или

$$\underset{(z=a,b,..)}{\mathcal{E}}[\varphi(z) + \psi(z) + \theta(z)] = \underset{(z=a,b,..)}{\mathcal{E}}\varphi(z) + \underset{(z=a,b..)}{\mathcal{E}}\psi(z) + \underset{(z=a,b..)}{\mathcal{E}}\theta(z).$$

Обозначивъ $\varphi(z)+\psi(z)+\theta(z) = \chi(z)$, получаемъ [illegible]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\chi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\varphi(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\psi(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\theta(z)\,dz$$

или [illegible]

Теорема 2. Можно постоянный множитель вывести за знакъ $\mathcal{E}$, не перемѣняя значенія интегральнаго вычета, т. е.

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(z=b,c,..)} a\,\varphi(z) = a \mathop{\mathcal{E}}_{(z=b,c..)} \varphi(z),$$

если a означаетъ число произвольное.

Теорема 3. Если функція $\varphi(z, x)$ обращается въ ∞ въ точкѣ $z = z_0$, а z_0 не зависитъ отъ x, то

$$\frac{d}{dx} \mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \varphi(z, x) = \mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \frac{d\,\varphi(z, x)}{dx}, \quad +$$

и

$$\int \mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \varphi(z, x)\, dx = \mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \int \varphi(z, x)\, dx. \quad x+$$

Теорема 4. Если функція $\varphi(z, x)$ — однозначная относительно обѣихъ перемѣнныхъ x и z, и въ двухъ постоянныхъ точкахъ $x = a$ и $z = b$ обращается въ ∞, и, кромѣ того, если для произвольныхъ значеній x и z достаточно близкихъ къ точкамъ a и b, функція $\varphi(z, x)$ остается конечною, то

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(x=a)} \mathop{\mathcal{E}}_{(z=b)} \varphi(z, x) = \mathop{\mathcal{E}}_{(z=b)} \mathop{\mathcal{E}}_{(x=a)} \varphi(z, x). \quad xxx$$

Теорема 5. Если $f'(z)$ означаетъ производную отъ однозначной функціи $f(z)$, то во всѣхъ точкахъ $z_1, z_2, z_3, \ldots z_i, \ldots$, обращающихъ $f(z)$ въ ∞, имѣетъ мѣсто равенство

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_i)} f'(z) = 0.$$

Дѣйствительно, мы знаемъ, что интегральный вычетъ функціи $f'(z)$ относительно точки $z = z_i$, равняется коэфиціенту при $\frac{1}{z-z_i}$ въ разложеніи функціи $f'(z)$ по степенямъ $z - z_i$; но такъ какъ функція $f(z)$ — однозначная, то, вблизи точки z_i, мы имѣемъ уравненіе

$$f(z) = \frac{A_1}{z - z_i} + \frac{A_2}{(z - z_i)^2} + \ldots + \bar{\omega}(z);$$

отсюда, дифференцируя обѣ части, получаемъ

$+ \quad \mathcal{E}_{z_0} \varphi(z,x) = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi$

$\frac{d}{dx}\mathcal{E}_{z_0} \varphi(z,x) = \frac{1}{2\pi i}\int$

$= \mathcal{E}_{z_0} \frac{d\,\varphi}{dx}$

$x+ \quad \mathcal{E}\varphi(z,x) = \frac{1}{2\pi i}$

$\int \mathcal{E}\varphi(z,x)\,dx =$

$= \mathcal{E}\int$

$xxx \quad \mathcal{E}_{z=b}\varphi(z,x) = \frac{1}{2\pi i}$

$\mathcal{E}_{x=a}\mathcal{E}_{z=b}\varphi(z,x)$

$= \frac{1}{2\pi i}\int$

$= \frac{1}{2\pi i}\mathcal{E}\int$

$= \mathcal{E}\frac{1}{2\pi i}$

$= \mathcal{E}_{z=b}$

$$(1)\qquad f'(z) = -\frac{A_1}{(z-z_i)^2} - \frac{2A_2}{(z-z_i)^3} + \ldots$$
$$+ \tilde{\omega}'(z),$$

гдѣ $\tilde{\omega}'(z)$ означаетъ функцію, остающуюся конечною вблизи точки z_i. Это уравненіе (1) показываетъ намъ, что въ разложеніи функціи $f'(z)$ по степенямъ $(z - z_0)$ нѣтъ члена вида

$$\frac{A}{z - z_i};$$

слѣдовательно

$$\underset{(z=z_i)}{\mathcal{E}} f'(z) = 0.$$

Теорема 6. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ изображаютъ двѣ однозначныя функціи, и произведеніе $f(z)\varphi(z)$ обращается въ точкѣ $z = z_0$ въ безконечность, то

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z)\,\varphi'(z) = -\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f'(z)\,\varphi(z).$$

Дѣйствительно, на основаніи предъидущей теоремы, мы имѣемъ

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{d\,f(z)\,\varphi(z)}{dz} = 0;$$

отсюда

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} [f'(z)\,\varphi(z) + f(z)\,\varphi'(z)] = 0,$$

или, принимая во вниманіе теорему 1-ую,

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f'(z)\,\varphi(z) + \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z)\,\varphi'(z) = 0.$$

Теорема 7. Если $f(x)$ изображаетъ какую нибудь однозначную функцію, то для всѣхъ значеній x, не обращающихъ $f(x)$ въ ∞, имѣетъ мѣсто формула

$$f(x) = \mathcal{E}\frac{f(z)}{((z-x))}.$$

Эта формула тождественна съ формулой (I) § 3.

Впрочемъ, ее можно легко вывести, основываясь на второмъ опредѣленіи интегральнаго вычета. Дѣйствительно, по формулѣ Тайлора, для значеній z близкихъ къ x, мы имѣемъ

$$(2)\qquad f(z) = f(x) + (z - x)\,f'(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2}\,f''(x) + \ldots$$

Дѣля обѣ части этого уравненія на $z - x$, мы получаемъ

$$\frac{f(z)}{z-x} = \frac{f(x)}{z-x} + f'(x) + \frac{z-x}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

откуда ясно видно, что

$$f(x) = \mathcal{E} \frac{f(z)}{((z-x))}.$$

Теорема 8. Если $f^{(n)}(x)$ означаетъ n-ую производную отъ однозначной функціи $f(x)$, то, для всѣхъ значеній перемѣнной x, не обращающихъ $f(x)$ въ ∞, имѣетъ мѣсто формула

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots n \, \mathcal{E} \frac{f(z)}{(((z-x)^{n+1}))}.$$

Эта формула ничемъ не разнится отъ формулы (II) § 3; но можно ее вывести непосредственно изъ уравненія (2), дѣля обѣ его части на $(z-x)^{n+1}$ и замѣчая, что, послѣ того, коэфиціентъ при $\frac{1}{z-x}$ во второй части будетъ

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n} f^{(n)}(x).$$

Теорема 9. Если однозначная функція $f(z)$ въ точкѣ $z = z_0$ обращается въ ∞ n-го порядка, то

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z) = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\frac{d^{n-1}\,(z-z_0)^n f(z)}{dz^{n-1}}\right]_{z=z_0}.$$

Дѣйствительно, по нашему предположенію, для точекъ z близкихъ къ z_0, мы имѣемъ

$$(3) \quad f(z) = \frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-z_0} + A_n + A_{n+1}(z-z_0) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots$$

Умножая обѣ части этого уравненія на $(z-z_0)^n$, мы получаемъ

$$(4) \quad f(z)(z-z_0)^n = A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots.$$

Вторая часть уравненія (4) представляетъ собою разложеніе функціи $f(z)(z-z_0)^n$ въ рядъ по степенямъ $(z-z_0)$; слѣдовательно,

$$A_{n-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\frac{d^{n-1}\, f(z)(z-z_0)_n}{dz^{n+1}}\right]_{z=z_0}.$$

Но изъ уравненія (3) видно, что

$$A_{n-1} = \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z);$$

слѣдовательно

$$(5) \qquad \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z) = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\frac{d^{n-1} f(z)(z-z_0)^n}{dz^{n-1}} \right]_{z=z_0}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $n = 1$, изъ формулы (5) получаемъ

$$(6) \qquad \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z) = \left[f(z)(z-z_0) \right]_{z=z_0}.$$

Вообще, изъ теоремы 9-ой слѣдуетъ, что всякій разъ, когда функція $f(z)$ въ точкѣ $z = z_0$ обращается въ безконечность конечнаго порядка, интегральный вычетъ функціи $f(z)$ относительно точки $z = z_0$ получается посредствомъ простаго дифференцированія.

Теорема 10. Если однозначная функція $f(z)$ въ точкѣ $z = z_0$ обращается въ безконечность конечнаго или безконечнаго порядка, то дробная часть функціи $f(z)$, соотвѣтствующая точкѣ $z = z_0$, равняется

$$\underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)}{z-u}.$$

Дробною частью $f(z)$, соотвѣтствующею точкѣ $z = z_0$, называется сумма всѣхъ членовъ въ разложеніи функціи $f(z)$ по степенямъ $(z-z_0)$, которые содержатъ $(z-z_0)$ въ степени отрицательной.

Положимъ, что для точекъ z близкихъ къ z_0, мы имѣемъ равенство

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z)^{n-1}} + \ldots + A_n + A_{n+1}(z-z_0) + \ldots$$

Дробная часть функціи $f(z)$, соотвѣтствующая точкѣ $z = z_0$, есть слѣдующая:

$$\frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-z_0};$$

но такъ какъ

$$A_0 = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} f(u)(u-z_0)^{n-1},$$

$$A_1 = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} f(u)(u-z_0)^{n-2},$$

$$A_2 = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} f(u)\,(u-z_0)^{n-3},$$

. . . .

$$A_{n-1} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} f(u),$$

то

$$\frac{A_0}{(z-z_0)^n} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)\,(u-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

$$\frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)\,(u-z_0)^{n-2}}{(z-z_0)^{n-1}},$$

$$\frac{A_2}{(z-z_0)^{n-2}} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)\,(u-z_0)^{n-3}}{(z-z_0)^{n-2}},$$

. . . .

$$\frac{A_{n-1}}{z-z_0} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)}{z-z_0},$$

и

$$\frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-z_0} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \left[\frac{f(u)(u-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} + \frac{f(u)(u-z_0)^{n-2}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{f(u)}{z-z_0}\right].$$

Сумма всѣхъ членовъ, содержащихся подъ знакомъ $\mathcal{E}$ во второй части послѣдняго уравненія, равняется

$$\frac{f(u)\,[(u-z_0)^n - (z-z_0)^n]}{(z-z_0)^n\,(u-z)};$$

подставляя, мы получаемъ

$$\frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{z-z_0} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)\,(u-z_0)^n}{(z-z_0)^n\,(u-z)} + \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)}{z-u}.$$

Первый интегральный вычетъ во второй части послѣдняго равенства равняется нулю, ибо функція подъ знакомъ $\mathcal{E}$ при $u=z_0$ не обращается въ ∞; слѣдовательно,

$$(7)\qquad \frac{A_0}{(z-z_0)^n} + \frac{A_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{z-z_0} = \underset{(u=z_0)}{\mathcal{E}} \frac{f(u)}{z-u},$$

что и требовалось доказать *.

* Тоже самое можно получить прямо изъ формулы (I) §-а 4-го, сличая ее съ равенствомъ (3) того-же §-а.

Равенство (7) имѣетъ мѣсто при какомъ угодно n, слѣдовательно и при $n = \infty$; тогда первая часть этого равенства (7) будетъ безконечнымъ рядомъ вида

$$\frac{A}{z-z_0} + \frac{B}{(z-z_0)^2} + \frac{C}{(z-z_0)^3} + \ldots\ldots$$

На основаніи только что доказанной теоремы, мы заключаемъ, что всякая функція $f(z)$, обращающаяся въ точкѣ $z = z_0$ въ ∞, для значеній z близкихъ къ z_0 выражается такимъ образомъ:

$$f(z) = \mathop{\mathcal{E}}_{(u=z_0)} \frac{f(u)}{z-u} + \bar{\omega}(z),$$

гдѣ $\bar{\omega}(z)$ изображаетъ функцію конечную въ точкѣ $z = z_0$.

Если функція $f(z)$ обращается въ ∞ въ нѣсколькихъ точкахъ

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,$$

то сумма дробныхъ частей функціи $f(z)$, соотвѣтствующихъ этимъ точкамъ, равняется

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(u=z_0, z_1, ..)} \frac{f(u)}{z-u}.$$

Теорема 11. Если однозначная функція $f(z)$ обращается въ точкѣ $z = z_0$ въ нуль n-го порядка или — въ ∞ n-го порядка, то

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \frac{d \log f(z)}{dz} = \pm n;$$

и если $\psi(z)$ изображаетъ однозначную функцію, остающуюся конечною въ точкѣ $z = z_0$, то

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(z=z_0)} \frac{d \log f(z)}{dz} \psi(z) = \pm n \psi(z_0).$$

Первая часть этой теоремы вытекаетъ непосредственно изъ формулы (I) § 8; вторая же часть можетъ быть доказана на основаніи того замѣчанія, что

$$\lim \left[(z-z_0) \frac{f'(z)}{f(z)}\right]_{z=z_0} = \pm n.$$

Дѣйствительно, принимая въ соображеніе формулу (6) мы получаемъ

$$\mathcal{E}\frac{d\log f(z)}{dz}\psi(z)=\left[\frac{f'(z)(z-z_0)}{f(z)}\psi(z)\right]_{z=z_0}=\pm n\psi(z_0).$$

Теорема 12. Если одиночная функція $f(z)$ обращается въ ∞ въ конечномъ числѣ точекъ, то сумма интегральныхъ вычетовъ функціи $f(z)$, взятыхъ относительно всѣхъ конечныхъ точекъ, обращающихъ $f(z)$ въ ∞, равняется интегральному вычету функціи

$$\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}$$

въ точкѣ $u=0$; т. е.

$$\mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))}.$$

Чтобы доказать эту теорему, мы начертимъ изъ начала координатъ радіусомъ достаточно большимъ, кругъ, внутри котораго содержались бы всѣ конечныя точки, обращающія $f(z)$ въ ∞. Назовемъ окружность этого круга чрезъ (p), а радіусъ чрезъ r; тогда мы будемъ имѣть

$$\mathcal{E}((f(z)))=\frac{1}{2\pi i}\int^{(p)}f(z)\,dz,$$

или, полагая $z=\frac{1}{u}$,

$$(8)\qquad \mathcal{E}((f(z)))=-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}\,du.$$

Интегралъ во второй части этого уравненія долженъ быть взятъ по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ $\frac{1}{r}$, въ отрицательномъ направленіи. Но такъ какъ внутри этого круга не можетъ находиться ни одна точка, обращающая $f(z)$ въ ∞, то, слѣдовательно, вторая часть уравненія (8) равняется

$$\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))};$$

вслѣдствіе этого, уравненіе (8) принимаетъ видъ

$$\mathcal{E}((f(z)))=\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))},$$

и такимъ образомъ теорема наша доказана.

Если произвольная функція $f(z)$ остается однозначною вблизи точки $z = \infty$, то, по вышесказанному,

$$(9) \qquad \underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}} f(z) = -\mathcal{E}\frac{f(u)}{((u^2))}.$$

Теорема 13. Если $f(z)$ изображаетъ функцію однозначную, обращающуюся въ точкѣ $z = z_0$ въ ∞, а $\psi(u)$ означаетъ другую произвольную функцію, однозначную вблизи точки $u = u_0$, и если u_0 есть величина удовлетворяющая уравненію

$$\psi(u_0) = z_0,$$

то

$$\underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z) = \frac{1}{m} \underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} f(\psi(u))\,\psi'(u),$$

гдѣ m означаетъ число нулей функціи

$$\psi(u) - \psi(u_0)$$

въ точкѣ $u = u_0$.

Для доказательства этой теоремы, мы примемъ во вниманіе равенство

$$(10) \qquad f(z) = \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \ldots$$
$$+ B_0 + B_1(z - z_0) + \ldots,$$

имѣющее мѣсто для значеній z близкихъ къ z_0.

Подставляя въ обѣихъ частяхъ (10) $\psi(u)$ вмѣсто z и $\psi(u_0)$ вмѣсто z_0, будемъ имѣть, для значеній u близкихъ къ u_0,

$$f(\psi(u)) = \frac{A_1}{\psi(u) - \psi(u_0)} + \frac{A_2}{(\psi(u) - \psi(u_0))^2} + \ldots$$
$$+ B_0 + B_1(\psi(u) - \psi(u_0)) + \ldots;$$

отсюда, умножая обѣ части на $\frac{d\psi(u)}{du} = \psi'(u)$,

$$f(\psi(u))\psi'(u) = A_1 \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - \psi(u_0)} + A_2 \frac{\psi'(u)}{(\psi(u) - \psi(u_0))^2} + \ldots$$
$$+ B_0\,\psi'(u) + B_1(\psi(u) - \psi(u_0))\,\psi'(u) + \ldots,$$

или

$$(11) \qquad f(\psi(u))\,\psi'(u) = A_1 \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - \psi(u_0)} + \frac{d}{du}\,\phi(u),$$

гдѣ

$$\phi(u) = -\frac{A_2}{\psi(u) - \psi(u_0)} - \dots$$
$$+ B_0\,\psi(u) + \tfrac{1}{2} B_1 (\psi(u) - \psi(u_0))^2 + \dots$$

Изъ уравненія (11) мы получаемъ

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} f\,(\psi(u))\,\psi'(u) = A_1 \underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - \psi(u_0)} + \underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{d}{du}\phi(u);$$

но изъ предъидущаго уравненія видно, что функція $\phi(u)$ остается однозначною вблизи точки $u = u_0$, поэтому, на основаніи теоремы 5-ой,

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{d}{du}\phi(u) = 0,$$

и слѣдовательно,

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} f\,(\psi(u))\,\psi'(u) = A_1 \underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - \psi(u_0)}.$$

Принимая во вниманіе теорему 11-ую, мы получаемъ,

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{\psi'(u)}{\psi(u) - \psi(u_0)} = \underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} \frac{d \log(\psi(u) - \psi(u_0))}{du} = m;$$

слѣдовательно,

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} f\,(\psi(u))\,\psi'(u) = m A_1.$$

Но равенство (10) показываетъ намъ, что

$$A_1 = \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z);$$

слѣдовательно,

$$\underset{(u=u_0)}{\mathcal{E}} f(\psi(u))\,\psi'(u) = m \underset{(z=z_0)}{\mathcal{E}} f(z),$$

что и требовалось доказать.

Подобнымъ образомъ можно доказать справедливость нашей теоремы и въ томъ случаѣ, когда $z_0 = \infty$; только тогда число m будетъ изображать собою число безконечностей функціи $\psi(u)$ во точкѣ u_0.

Теорема 14. Если однозначная функція $f(z)$ удовлетворяетъ уравненію

$$\lim(z f(z))_{z=\infty} = 0,$$

то
$$\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}} f(z)=0.$$

Дѣйствительно, такъ какъ въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто равенство
$$\lim\left(\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{u}\right)_{u=0}=0,$$
то
$$\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))}=0,$$
или [См. форм. (9)]
$$\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}} f(z)=0. \qquad \text{Ч. т. д.}$$

Слѣдствіе. Если въ раціональной дроби
$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$
степень числителя $\varphi(z)$ ниже по крайней мѣрѣ двумя единицами чѣмъ степень знаменателя $\psi(z)$, то, по доказанному, интегральный вычетъ этой функціи, взятый относительно точки $z=\infty$, равняется нулю, т. е.
$$\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=0.$$

Но, по формулѣ (4) § 9, мы имѣемъ
$$\underset{(z=\infty)}{\mathcal{E}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=-\mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{((\psi(z)))};$$
слѣдовательно,
$$\mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{((\psi(z)))}=0.$$

Это уравненіе показываетъ намъ, что если степень цѣлой раціональной функціи $\varphi(z)$ ниже по крайней мѣрѣ двумя единицами чѣмъ степень цѣлой раціональной функціи $\psi(z)$, то сумма интегральныхъ вычетовъ функціи
$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$
взятыхъ относительно всѣхъ точекъ, обращающихъ $\psi(z)$ въ нуль, равняется нулю.

Теорема 15. Если $f(z)$ означаетъ одиночную функцію, обращающуюся въ ∞ въ конечномъ числѣ точекъ, то
$$f(z)=\mathcal{E}\frac{((f(u)))}{z-u}+\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-uz)}.$$

Для доказательства этой теоремы, мы примемъ во вниманіе вышедоказанное равенство

$$\mathcal{E}\,((f(u))) = \mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u^2))},$$

и подставимъ въ немъ, вмѣсто $f(u)$, $\frac{f(u)}{u-z}$; тогда мы получимъ

$$\mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{((u-z))} = \mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-uz)};$$

но очевидно, что

$$\mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{((u-z))} = f(z) + \mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{u-z},$$

слѣдовательно,

$$(12) \qquad f(z) = \mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{z-u} + \mathcal{E}\,\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-uz)}. \qquad \text{Ч. т. д.}$$

Постараемся теперь разъяснить значеніе двухъ членовъ во второй части формулы (12).

По доказанному въ § 4, функція $f(z)$, внутри круга съ безконечно большимъ радіусомъ, разлагается на сумму нѣсколькихъ рядовъ, изъ которыхъ первый будетъ расположенъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной z, остальные же будутъ расположены по цѣлымъ отрицательнымъ степенямъ отъ

$$z-a, \quad z-b, \quad z-c, \ldots \text{и т. д.} \ldots,$$

гдѣ $a, b, c, \ldots$ означаютъ точки, обращающія $f(z)$ въ ∞. Первый изъ этихъ рядовъ называется *цѣлою частью* функціи $f(z)$, а сумма всѣхъ остальныхъ рядовъ называется *дробною частью* функціи $f(z)$.

Изъ теоремы 10-ой прямо вытекаетъ то слѣдствіе, что дробная часть функціи $f(z)$ равняется

$$\mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{z-u};$$

слѣдовательно, цѣлая часть функціи $f(z)$ равняется

$$f(z) - \mathcal{E}\,\frac{((f(u)))}{z-u}.$$

Но равенство (12) показываетъ намъ, что разность эта равняется

$$(13)\qquad \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-uz)};$$

слѣдовательно, выраженіе (13) выражаетъ собою цѣлую часть функціи $f(z)$.

И такъ, мы видимъ, что изображая цѣлую часть функціи $f(z)$ чрезъ

$$\mathrm{E}\, f(z),$$

а дробную ея часть чрезъ

$$\mathrm{F}\, f(z),$$

то

$$(14)\qquad \mathrm{E}\, f(z) = \mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-uz)},$$

$$(15)\qquad \mathrm{F}\, f(z) = \mathcal{E}\frac{((f(u)))}{z-u}.$$

Чрезъ послѣдовательное дифференцированіе обѣихъ частей уравненія (15) по z, получаемъ

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}\,\dfrac{d\,f(z)}{dz} = -\mathcal{E}\dfrac{((f(u)))}{(z-u)^2}, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \mathrm{F}\,\dfrac{d^i f(z)}{dz^i} = (-1)^i\,\Gamma(i+1)\,\mathcal{E}\dfrac{((f(u)))}{(z-u)^{i+1}}. \end{array}\right.$$

§ 11. Обобщенное опредѣленіе интегральнаго вычета. Нѣкоторыя замѣчанія.

1. Хотя до сихъ поръ мы разсматривали только однозначныя функціи, допускающія точки разрыва, но не трудно доказать, что большая часть разультатовъ, выведеныхъ нами въ предыдущихъ §-фахъ, можетъ быть распространена и на тотъ случай, когда разсматриваемая функція допускаетъ линіи разрыва. Напримѣръ, если въ § 4 допустимъ, что вмѣсто нѣкоторыхъ изъ точекъ разрыва $a_1, a_2, \ldots$ существуютъ конечныя, сомкнутыя или несомкнутыя линіи $a_1\,b_1, a_2\,b_2, \ldots$, на продолженіи которыхъ данная функція $f(z)$ остается разрывною, то все таки формулы

(I), (II) и (III) того-же §-фа будутъ имѣть мѣсто, — но только въ настоящемъ случаѣ круги (a_1), (a_2), . . . не могутъ быть произвольно малыми, ибо каждый изъ нихъ долженъ содержать внутри себя по крайней мѣрѣ одну линію разрыва; а перемѣнная z должна находиться внутри круга (p) и внѣ прочихъ круговъ, такихъ какъ (a_1) (a_2), . . .

2. Мы согласимся называть интегральнымъ вычетомъ функціи $f(z)$ относительно линіи разрыва ab значеніе интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz,$$

взятаго по сомкнутой линіи, не содержащей внутри себя ни одной линіи или точки разрыва функціи $f(z)$, кромѣ одной линіи ab. Это опредѣленіе интегральнаго вычета — болѣе общее, чѣмъ то, которое мы дали въ § 9, ибо то, очевидно, составляетъ частный случай настоящаго.

Большая часть теоремъ, доказанныхъ въ предъидущемъ §-фѣ, могутъ быть обобщены и для настоящаго случая.

Что касается до знакоположенія, то мы будемъ изображать интегральный вычетъ функціи $f(z)$ относительно линіи разрыва ab, чрезъ

$$\underset{(ab)}{\mathcal{E}} f(z)$$

Если $f(z)$ допускаетъ конечное число разрывныхъ линій, изъ которыхъ ни одна не проходитъ чрезъ точку $z=\infty$, и, кромѣ того, конечное число точекъ разрыва; то сумму интегральныхъ вычетовъ функціи $f(z)$, взятыхъ относительно всѣхъ разрывныхъ линій и всѣхъ конечныхъ точекъ разрыва, мы будемъ изображать чрезъ

$$\mathcal{E}((f(z))).$$

3. Начертивъ изъ начала координатъ достаточно большимъ радіусомъ r кругъ, внутри котораго содержались бы всѣ разрывныя линіи и всѣ конечныя точки разрыва функціи $f(z)$, то, внѣ этого круга, функція $f(z)$ разлагается въ двойной рядъ вида

$$f(z)=A+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots$$
$$+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\frac{B_3}{z^3}+\ldots$$

Первый изъ этихъ рядовъ составляетъ цѣлую часть функціи $f(z)$, то есть,

$$A + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots = \mathrm{E} f(z);$$

второй — дробную, т. е.

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \ldots = \mathrm{F} f(z).$$

Предположивъ это, не трудно доказать слѣдующія двѣ формулы:

$$\mathrm{F} f(z) = \mathcal{E} \frac{((f(u)))}{z-u},$$

$$\mathrm{E} f(z) = \mathcal{E} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1-zu)}.$$

Дѣйствительно, означивъ окружность радіуса r чрезъ (r) и начертивъ изъ начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ второй кругъ, окружность котораго будемъ изображать чрезъ (R), мы будемъ имѣть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(R)} \frac{f(u)\,du}{u-z} + \frac{1}{2\pi i} \int^{(r)} \frac{f(u)\,du}{z-u}.$$

Но въ первомъ интегралѣ во второй части мы можемъ положить

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \frac{z^2}{u^3} + \ldots,$$

ибо $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} u$; а во второмъ интегралѣ

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} + \ldots,$$

ибо $\operatorname{mod} u < \operatorname{mod} z$. Подставляя, мы находимъ

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(R)} \frac{f(u)\,du}{u-z} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ ,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int^{(R)} \frac{f(u)\,du}{z-u} = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \ldots\ ,$$

гдѣ $A_0, A_1, \ldots B_1, B_2, \ldots$ означаютъ нѣкоторые постоянные коэфиціенты. Слѣдовательно,

$$\mathrm{E} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(R)} \frac{f(u)\,du}{u-z}, \tag{1}$$

$$\mathrm{F} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(R)} \frac{f(u)\,du}{z-u}. \tag{2}$$

Подставляя во второй части формулы (1) вмѣсто u, $\frac{1}{u}$, мы получаемъ

$$(3) \qquad \mathrm{E} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f\left(\frac{1}{u}\right) du}{u(1 - zu)},$$

гдѣ интегралъ въ второй части взятъ по безконечно малой окружности, начерченной около точки $z = 0$, въ положительномъ направленіи.

Но очевидно, что формулы (2) и (3) можно выразить такъ:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F} f(z) &= \mathcal{E} \frac{((f(u)))}{z - u}, \\ \mathrm{E} f(z) &= \mathcal{E} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1 - zu)}; \end{aligned} \right.$$

а это суть именно тѣ формулы которыя мы желали вывести. Онѣ, по наружности, тождественны съ формулами (14) и (15) предъидущаго §-фа.

Хотя въ обѣихъ формулахъ (I) мы предполагаемъ, что $\mathrm{mod}\, z > r$, но не трудно замѣтить, что вторыя ихъ части, именно:

$$\mathcal{E} \frac{((f(u)))}{z - n} \quad \text{и} \quad \mathcal{E} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1 - zu)}$$

суть функціи однозначныя, конечныя и неразрывныя для всевозможныхъ значеній перемѣнной z, не совпадающихъ съ точками или линіями разрыва разсматриваемой функціи $f(z)$. На этомъ основаніи, мы станемъ называть, при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной z, функцію

$$\mathcal{E} \frac{((f(u)))}{z - u}$$

дробною частью функціи $f(z)$, а функцію

$$\mathcal{E} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{((u))(1 - zu)}$$

цѣлою частью функціи $f(z)$,

Обобщеніе другихъ теоремъ предъидущаго §-фа мы предоставляемъ читателю.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

Разложеніе въ ряды функціи обратныхъ.

§ 12. Опредѣленіе радіуса сходимости.

1. Положимъ, что мы имѣемъ одиночную функцію z, зависящую отъ перемѣнной u, и явнымъ образомъ опредѣленную уравненіемъ

$$z = f(u); \tag{1}$$

а требуется разложить въ рядъ, по формулѣ Тайлора, обратную функцію u, разсматривая ее, какъ зависящую отъ независимой перемѣнной z.

Для того, чтобы можно было выполнить эту задачу, необходимо знать напередъ, между какими предѣлами можно разсматривать функцію u, какъ однозначную и конечную; ибо, какъ извѣстно, при этихъ только условіяхъ можно выполнить требуемое разложеніе.

Мы допустимъ, что для $u = 0$, функція $f(u)$ обращается въ нуль перваго порядка. Первая часть этого предположенія всегда возможна, вторая же — необходима; ибо еслибы, ири $z = 0$, функція u не равнялась нулю а нѣкоторой величинѣ a, то, полагая $u = a + v$, вмѣсто уравненія (1), мы взяли бы уравненіе

$$z = f(a + v),$$

въ которомъ обѣ величины z и v вмѣстѣ обращаются въ нуль; еслибы, во вторыхъ, при $u = 0$, функція $f(u)$ обращалась въ нуль высшаго порядка, то тогда обратная функція u, для значеній z близкихъ къ нулю, не была бы однозначною, и требуемое разложеніе было бы невозможно.

Вообразимъ себѣ теперь двѣ координатныя плоскости, изъ которыхъ первая служитъ для обозначенія значеній перемѣнной z, вторая — для обозначенія значеній перемѣнной u; и возьмемъ во вниманіе наименьшій модуль функціи $f(re^{i\theta})$, соотвѣтствующій всевозможнымъ значеніямъ угла θ отъ 0 до 2π, который означимъ чрезъ M. Величина M зависитъ отъ r; при $r = 0$, $M = 0$; съ постепеннымъ увеличеніемъ r отъ нуля до безконечности, M будетъ или возрастать до безконечности, или же сначала возрастая, достигнетъ maximum своего значенія и послѣ станетъ уменьшаться, чтобы, достигнувъ minimum своего значенія, опять возрастать, и т. д. Кромѣ того, мы возьмемъ еще во вниманіе тотъ корень уравненія

$$f(u) = 0,$$

который, по величинѣ своего модуля, слѣдуетъ первымъ послѣ нуля, и означимъ его модуль чрезъ b. Если изъ точки $u = 0$ радіусомъ равнымъ b начертимъ кругъ, то, внутри этого круга, функція $f(u)$ обращается одинъ только разъ въ нуль, именно, въ точкѣ $u = 0$; этотъ кругъ мы означимъ чрезъ (b).

Внутри круга (b), величина M будетъ достигать одинъ или нѣсколько разъ maximum своего значенія. Мы означимъ чрезъ u_0 ту точку, находящуюся внутри круга (b), въ которой значеніе величины M не меньше всѣхъ другихъ значеній той же величины, получаемыхъ внутри круга (b); и изъ точки $z = 0$ радіусомъ равнымъ $\operatorname{mod} f(u_0)$ начертимъ кругъ, который означимъ чрезъ (a).

Не трудно доказать, что внутри круга (a) обратная функція u остается конечною и неразрывною.

Для этого, мы начертимъ изъ точки $u = 0$ радіусомъ равнымъ $\operatorname{mod} u_0$ кругъ, который означимъ чрезъ (c), и возьмемъ произвольную точку z, находящуюся внутри круга (a). Если u означаетъ произвольную точку на окружности круга (c), то

$$\operatorname{mod} f(u) \geqq \operatorname{mod} f(u_0),$$

ибо $\operatorname{mod} f(u_0)$ есть minimum относительно всѣхъ прочихъ значеній $\operatorname{mod} f(u)$, получаемыхъ на окружности (c); но такъ какъ

$$\operatorname{mod} f(u_0) > \operatorname{mod} z,$$

то, слѣдовательно,

$$\operatorname{mod} f(u) > \operatorname{mod} z,$$

и

$$\operatorname{mod} \frac{z}{f(u)} < 1.$$

Такъ какъ неравенство это имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній u, находящихся на окружности (c), то функція

$$\frac{z}{f(u)} - 1$$

обращается внутри круга (с) столько разъ въ нуль сколько разъ въ безконечность. Дѣйствительно, такъ какъ $\mathrm{mod}\,\frac{z}{f(u)} < 1$, то, для всѣхъ точекъ на окружности (c), мы имѣемъ

$$\log\left(1 - \frac{z}{f(u)}\right) = \frac{z}{f(u)} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{f(u)^2} + \cdots,$$

отсюда

$$\int d\log\left(1 - \frac{z}{f(u)}\right) = z\int \mathrm{d}\frac{1}{f(u)} + \frac{z^2}{2}\int \mathrm{d}\frac{1}{f(u)^2} + \ldots$$

но, очевидно (См. теор. 5 § 10),

$$\int d\left(\frac{1}{f(u)}\right) = 0, \quad \int d\left(\frac{1}{f(u)^2}\right) = 0, \ldots\ldots$$

(интегралы взяты по окружности (c)), слѣдовательно

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int d\log\left(\frac{z}{f(u)} - 1\right) = 0.$$

Принимая теперь въ соображенiе формулу (II) § 8, мы заключаемъ, на основанiи равенства (2), что функцiя $\frac{z}{f(u)} - 1$ обращается внутри круга (c) столько разъ въ нуль сколько разъ въ безконечность. Но функцiя $\frac{z}{f(u)} - 1$ обращается внутри круга (c) одинъ только разъ въ ∞, именно, въ точкѣ $u = 0$; слѣдовательно, она обращается одинъ только разъ въ нуль, внутри того же круга (c), или, другими словами, уравненiе

$$z = f(u)$$

имѣетъ одинъ только корень, содержащiйся внутри круга (с). На основанiи этого, принимая въ соображенiе извѣстный законъ о непрерывности корней, *) мы прямо заключаемъ, что функцiя u, опредѣляемая уравненiемъ (1) и обращающаяся въ нуль при $z = 0$, остается внутри круга (a) конечною и однозначною. Ч. т. д.

И такъ, мы видимъ, что для всѣхъ точекъ, содержащихся внутри круга (a), обратная функцiя u и всякая конечная и однозначная функцiя отъ перемѣнной u, разлагаются въ рядъ по цѣлымъ восходящимъ степенямъ независимой перемѣнной z.

---

*) Cauchy. Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une equation qui renferme un paramètre variable. Exer. d'Anal. et de Phys. T. II p. 109.

2. Если функція $f(u)$ не обращается въ нуль ни въ одной конечной точкѣ, кромѣ $u=0$, то тогда радіусъ круга (b) равняется ∞, а радіусъ круга (a) будетъ равняться maximum maximorum величины M.

Чтобы опредѣлить тѣ точки u_0, въ которыхъ величина M достигаетъ maximum своего значенія, мы положимъ

$$u = r\, e^{i\theta},$$
$$f(u) = R\, e^{i\psi};$$

тогда координаты r и θ, опредѣляющія искомыя точки, будутъ удовлетворять такимъ уравненіямъ:

$$\frac{dR}{dr} = 0, \quad \frac{dR}{d\theta} = 0. \tag{3}$$

Такъ какъ

$$\left\{ \begin{aligned} u f'(u) &= r\frac{dR}{dr} e^{i\psi} + ir Re^{i\psi}\frac{d\psi}{dr}, \\ u f'(u) &= -i\frac{dR}{d\theta} e^{i\psi} + Re^{i\psi}\frac{d\psi}{d\theta}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

то

$$r\frac{dR}{dr} + irR\frac{d\psi}{dr} = -i\frac{dR}{d\theta} + R\frac{d\psi}{d\theta},$$

отсюда

$$\frac{dR}{d\theta} = -rR\frac{d\psi}{dr}, \quad r\frac{dR}{dr} = +R\frac{d\psi}{d\theta}. \tag{5}$$

На основаніи уравненій (3) и (5), изъ уравненій (4) мы получаемъ

$$f'(u_0) = 0;$$

то есть, что уравненіе

$$z = f(u) \tag{6}$$

при $z = \operatorname{mod} f(u_0)$ имѣетъ два равные корни.

Это свойство показываетъ намъ, что если ξ означаетъ наименьшій модуль величины z, при которомъ уравненіе (6) имѣетъ равные корни, то внутри круга, начерченнаго изъ точки $z=0$ радіусомъ равнымъ ξ, функція u остается конечною и неразрывною и, слѣдовательно, разлагается въ рядъ по цѣлымъ, положительнымъ и восходящимъ степенямъ z; ибо радіусъ круга, означеннаго нами выше чрезъ (a), не можетъ быть меньше чѣмъ величина ξ.

§ 13. Выводъ формулы Лагранжа.

1. Приступимъ теперь къ самому разложенію. Принимая z за независимую перемѣнную и означая чрезъ ξ значенія z, соотвѣтствующія точкамъ на окружности (a), мы получимъ

$$(1) \qquad F(u) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(a)} \frac{F(u)\,d\xi}{\xi - z},$$

гдѣ $F(u)$ означаетъ какую нибудь функцію отъ u, конечную и однозначную внутри круга (c).

Такъ какъ, по предположенію, точка z находится внутри круга (a), то

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \xi,$$

и слѣдовательно, вмѣсто формулы (1), можно написать

$$F(u) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(a)} F(u) \left[\frac{1}{\xi} + \frac{z}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^3} + \ldots \right] d\xi,$$

или

$$(2) \qquad F(u) = \mathcal{E} \frac{F(u)}{((z))} + z\, \mathcal{E} \frac{F(u)}{((z^2))} + z^2\, \mathcal{E} \frac{F(u)}{((z^3))} + \ldots$$

Въ этомъ ряду коэфиціентъ при z^n можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\mathcal{E} \frac{F(u)}{((z^{n+1}))} = -\frac{1}{n} \mathop{\mathcal{E}}_{(z=0)} F(u) \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{n} \mathcal{E} \frac{F'(u)\frac{du}{dz}}{((z^n))};$$

вводя въ послѣднее выраженіе, вмѣсто независимой перемѣнной z, новую независимую перемѣнную u, опредѣляемую уравненіемъ

$$z = f(u),$$

мы получимъ

$$\frac{1}{n} \mathcal{E} \frac{F'(u)\frac{du}{dz}}{((z^n))} = \frac{1}{n} \mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)} \frac{F'(u)\frac{du}{dz}\frac{dz}{du}}{f(u)^n} = \frac{1}{n} \mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)} \frac{F'(u)}{f(u)^n};$$

слѣдовательно, окончательно, мы имѣемъ такое равенство:

$$(3) \qquad \mathcal{E} \frac{F(u)}{((z^{n+1}))} = \frac{1}{n} \mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)} \frac{F'(u)}{f(u)^n}.$$

Внося въ формулу (2), вмѣсто прежнихъ коэфиціентовъ, ихъ новыя выраженія, опредѣляемыя уравненіемъ (3), мы получаемъ рядъ

$$\text{(I)}\qquad F(u)=F(o)+z\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)}+\frac{z^2}{2}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^2}+\frac{z^3}{3}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^3}+\ldots,$$

или, принимая въ соображеніе что

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^n}=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left(\frac{u^n F'(u)}{f(u)^n}\right)_{u=0},$$

$$\text{(II)}\qquad F(u)=F(o)+z\left(\frac{u\,F'(u)}{f(u)}\right)_{u=0}+\frac{z^2}{1.2}\frac{d}{du}\left(\frac{u^2F'(u)}{f(u)^2}\right)_{u=0}+\ldots$$

$$+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left(\frac{u^nF'(u)}{f(u)^n}\right)_{u=0}+\ldots$$

Формула (I) даетъ возможность вычислить высшій предѣлъ дополнительнаго члена, когда мы желаемъ ограничиться первыми n членами.

Дѣйствительно, коэфиціентъ при $\frac{z^n}{n}$ въ формулѣ (I) равняется

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^n}=\frac{1}{2\pi i}\int^{(c)}\frac{F'(u)\,du}{f(u)^n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\,F'(ce^{i\theta})\,d\theta}{f(u)^n},$$

гдѣ c означаетъ радіусъ круга (c).

Отсюда, называя чрезъ N наибольшій модуль функціи $F'(ce^{i\theta})$ при всевозможныхъ значеніяхъ угла θ, мы получаемъ

$$\text{(4)}\qquad \operatorname{mod}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^n}<\frac{Nc}{M^n}.$$

Обозначая чрезъ R_n дополнительный членъ ряда (I), мы будемъ имѣть

$$R_n=\frac{z^n}{n}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^n}+\frac{z^{n+1}}{n+1}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^{n+1}}+\ldots,$$

отсюда, полагая $\operatorname{mod} z=\xi$,

$$\operatorname{mod}R_n<\frac{\xi^n}{n}\operatorname{mod}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^n}+\frac{\xi^{n+1}}{n+1}\operatorname{mod}\mathop{\mathcal{E}}_{(u=0)}\frac{F'(u)}{f(u)^{n+1}}+\ldots,$$

или, пользуясь неравенствомъ (4)

$$\operatorname{mod}R_n<Nc\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\xi}{M}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(\frac{\xi}{M}\right)^{n+1}+\frac{1}{n+2}\left(\frac{\xi}{M}\right)^{n+2}+\ldots\right],$$

$$\text{(III)}\qquad \operatorname{mod}R_n<N\frac{c}{n}\,\frac{\xi^n}{M^{n-1}(M-\xi)}.$$

2. Подставляя въ формулу (II), вмѣсто $f(u)$,

$$\frac{u}{\psi(a+u)},$$

и предполагая что $\psi(a)$ не равняется ни нулю, ни безконечности, мы получимъ слѣдующее выраженіе для $F(a+u)$:

$$F(a+u)=F(a)+\frac{z}{1}F'(a)\psi(a)+\frac{z^2}{1.2}\frac{d}{da}(F'(a)\psi(a)^2)$$

$$\text{(IV)} \qquad +\frac{z^3}{1.2.3}\frac{d^2}{da^2}(F'(a)\psi(a)^3)+\ldots\ldots,$$

причемъ u изображаетъ корень уравненія

$$u=z\psi(a+u).$$

Полагая, въ формулѣ (IV), $a+u=v$, мы получимъ

$$\text{(V)} \quad F(v)=F(a)+\frac{z}{1}F'(a)\psi(a)+\frac{z^2}{1.2}\frac{d}{da}(F'(a)\psi(a)^2)+\ldots,$$

причемъ v изображаетъ корень уравненія

$$v-a=z\psi(v).$$

Формула (V) извѣстна подъ названіемъ формулы Лагранжа.

Симметрическія функціи.

§ 14. Формула Лагранжа.

1. По большей части, всѣ задачи, относящіяся къ симметрическимъ функціямъ отъ корней алгебраическихъ или трансцендентныхъ уравненій, рѣшаются весьма удобно, помощью интегральныхъ вычетовъ. Въ настоящемъ разсужденіи, мы ограничимся изложеніемъ формулы Лагранжа, которая, какъ намъ кажется, не была до сихъ поръ излагаема на основаніи началъ теоріи интегральныхъ вычетовъ. Она служитъ исходною точкою въ теоріи симметрическихъ функціи* и замѣчательна по своей аналогіи съ формулой Лагранжа, данной въ предъидущемъ §-фѣ.

Пусть будетъ выраженіе

$$\mathcal{E}\frac{\varphi(x)}{u-x+f(x)},$$

въ которомъ $f(x)$ означаетъ цѣлую раціональную функцію, дѣлящуюся безъ остатка на x; u означаетъ нѣкоторую постоянную величину не рав-

*) Cours d'Algèbre Supérieure par Serret. T. I. p. 431.

ную нулю, а $\varphi(x)$ означаетъ произвольную раціональную функцію, обращающуюся въ ∞ при $x=0$.

Такъ какъ, при безконечно маломъ x,

$$\mathrm{mod}\, f(x) < \mathrm{mod}\,(u-x),$$

то, для значеній x близкихъ къ нулю, имѣетъ мѣсто такое равенство:

$$\frac{\varphi(x)}{u-x+f(x)} = \frac{\varphi(x)}{u-x} - \frac{\varphi(x)\,f(x)}{(u-x)^2} + \frac{\varphi(x)\,f(x)^2}{(u-x)^3} - \ldots\ ;$$

и слѣдовательно,

$$(1)\quad \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{\varphi(x)}{u-x+f(x)} = \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{\varphi(x)}{u-x} - \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{\varphi(x)\,f(x)}{(u-x)^2} + \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{\varphi(x) f(x)^2}{(u-x)^3} - \ldots$$

Положимъ теперь, что

$$\varphi(x) = -\left[-1 + f'(x)\right]\psi(x),$$

гдѣ $\psi(x)$ означаетъ произвольную функцію вида

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots\ ;$$

тогда, вмѣсто равенства (1), мы получимъ

$$(2)\quad -\mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x) = \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{1-f'(x)}{u-x}\psi(x) - \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{f(x)-f(x)f'(x)}{(u-x)^2}\psi(x)$$
$$+ \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{f(x)^2-f(x)^2 f'(x)}{(u-x)^3}\psi(x) - \mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{f(x)^3-f(x)^3 f'(x)}{(u-x)^4}\psi(x)$$
$$+ \ldots\ldots$$

Разсмотримъ сначала первую часть уравненія (2), которая равняется

$$-\mathop{\mathcal{E}}_{(x=0)} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x).$$

Такъ какъ степень функціи, находящейся подъ знакомъ $\mathcal{E}$ въ этомъ выраженіи, не превышаетъ -2, то слѣдовательно сумма всѣхъ интегральныхъ вычетовъ функціи

$$\frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\ \psi(x)$$

равняется нулю (См. теорему 14 § 10). Обозначая корни уравненія

$$u - x + f(x) = 0$$

чрезъ $a, b, c, \ldots l$, и принимая во вниманіе что

$$\underset{(x=a)}{\mathcal{E}} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x)=\psi(a),$$

$$\underset{(x=b)}{\mathcal{E}} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x)=\psi(b),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\underset{(x=l)}{\mathcal{E}} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x)=\psi(l),$$

мы получимъ

$$\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{-1+f'(x)}{u-x+f(x)}\psi(x)+\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l)=0,$$

откуда

$$(3)\qquad -\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{-1+f'(x)}{u-x-f(x)}\psi(x)=\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l).$$

Подставивъ, вмѣсто 1-ой части равенства (2), ея значеніе, опредѣляемое уравненіемъ (3), мы получимъ

$$(4)\quad \psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l)=\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{1-f'(x)}{u-x}\psi(x)-\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)-f(x)f'(x)}{(u-x)^2}\psi(x)$$

$$+\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^2-f(x)^2f'(x)}{(u-x)^3}\psi(x)+\ldots\ldots$$

Остается преобразовать вторую часть послѣдняго уравненія. Для этого мы замѣтимъ, что

$$\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)\psi(x)}{(u-x)^2}=\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} f(x)\psi(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u-x}\right)=-\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f'(x)\psi(x)}{(u-x)}-\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)\psi'(x)}{(u-x)},$$

$$\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^2\psi(x)}{(u-x)^3}=\frac{1}{2}\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} f(x)^2\psi(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u-x}\right)^2=-\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)\psi(x)f'(x)}{(u-x)^2}-\frac{1}{2}\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^2\psi'(x)}{(u-x)^2},$$

$$\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^3\psi(x)}{(u-x)^4}=\frac{1}{3}\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} f(x)^3\psi(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u-x}\right)^3=-\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^2\psi(x)f'(x)}{(u-x)^3}-\frac{1}{3}\underset{(x=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x)^3\psi'(x)}{(u-x)^3},$$

. . . .

. . . . и т. д. . . . .

Внося полученныя такимъ образомъ выраженія во вторую часть равенства (4), мы получимъ

$$\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l)=\underset{(x=o)}{\mathcal{E}}\frac{\psi(x)}{u-x}+\underset{(x=o)}{\mathcal{E}}\frac{f(x)\psi'(x)}{u-x}-\frac{1}{2}\underset{(x=o)}{\mathcal{E}}\frac{f(x)^2\psi'(x)}{(u-x)^2}$$

$$+\frac{1}{3}\underset{(x=o)}{\mathcal{E}}\frac{f(x)^3\psi'(x)}{(u-x)^3}-\ldots,$$

или, такъ какъ $\psi(x)$ обращается въ ∞ только при $x=0$,

$$\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l)=\mathcal{E}\frac{((\psi(x)))}{u-x}+\mathcal{E}\frac{((f(x)\psi'(x)))}{u-x}-\frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{((f(x)^2\psi'(x)))}{(u-x)^2}$$

$$(5)\qquad +\frac{1}{3}\mathcal{E}\frac{((f(x)^3\psi'(x)))}{(u-x)^3}-\ldots.$$

Принимая въ вниманіе формулы (15) и (16) § 10, мы получаемъ

$$\mathcal{E}\frac{((\psi(x)))}{u-x}=\mathrm{F}\,\psi(u),$$

$$\mathcal{E}\frac{((f(x)\psi'(x)))}{u-x}=\mathrm{F}f(u)\psi'(u),$$

$$\mathcal{E}\frac{((f(x)^2\psi'(x)))}{(u-x)^2}=-\mathrm{F}\frac{d\,f(u)^2\psi'(u)}{du}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{E}\frac{((f(x)^i\psi'(x)))}{(u-x)^i}=\frac{(-1)^{i-1}}{1.2..(i-1)}\mathrm{F}\frac{d^{i-1}f(u)^i\psi'(u)}{du^{i-1}}.$$

Подставляя полученныя выраженія вмѣсто членовъ второй части равенства (5), мы будемъ имѣть

$$\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l)=\mathrm{F}\Big[\psi(u)+f(u)\psi'(u)+\frac{1}{1.2}\frac{d\,f(u)^2\psi'(u)}{du}+\ldots$$

$$(\mathrm{I})\qquad +\frac{1}{1.2.3\ldots i}\frac{d^{i-1}f(u)^i\psi'(u)}{du^{i-1}}+\ldots\Big].$$

Формула эта есть именно та, которую далъ Лагранжъ и которую мы желали вывести.

Сравнивая выраженіе, находящееся подъ знакомъ F во второй части уравненія (I), со второю частью формулы (V) предъидущаго §-фа, мы видимъ, что уничтожая знакъ F во второй части формулы (I), вмѣсто симметрической функціи

$$\psi(a)+\psi(b)+\ldots+\psi(l),$$

мы получимъ разложеніе функціи $\psi(x)$, гдѣ x есть корень уравненія

$$x-u=f(x).$$

Непрерывныя дроби.

§. 15. Выводъ двухъ замѣчательныхъ формулъ въ томъ случаѣ, когда непрерывная дробь конечна.

1. Пусть будетъ раціональная функція

$$\frac{F(x)}{f(x)},$$

гдѣ $F(x)$ и $f(x)$ означаютъ цѣлыя функціи.

Положимъ, что разлагая эту функцію въ непрерывную дробь, мы нашли такое равенство:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \cdots + \cfrac{a_n}{q_n + \cdots + \cfrac{a_m}{q_m}}}}},$$

гдѣ $q_0, q_1, q_2, \ldots$ изображаютъ цѣлые многочлены, содержащіе x по крайней мѣрѣ въ первой степени; $a_1, a_2, a_3, \ldots$ означаютъ нѣкоторыя постоянныя величины.

Изображая подходящія дроби чрезъ

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \ldots \frac{P_n}{Q_n}, \ldots;$$

принимая во вниманіе что

$$P_{n+1} = q_n P_n + a_n P_{n-1},$$

$$Q_{n+1} = q_n Q_n + a_n Q_{n-1},$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_n Q_{n+1}};$$

и полагая

$$x_n = q_n + \cfrac{a_{n+1}}{q_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{q_{n+2} + \cdots + \cfrac{a_m}{q_m}}},$$

мы будемъ имѣть такое равенство:

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{f(x)} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1} a_n)}.$$

Умножая обѣ части (1) на $Q_m Q_n$, и предполагая притомъ что $m < n$, мы получимъ

$$\frac{F(x)\,Q_m Q_n}{f(x)} = P_n\, Q_m + (-1)^{n-1}\, \frac{a_1 a_2 \ldots a_n\, Q_m}{Q_n x_n + Q_{n-1} a_n},$$

отсюда, взявъ сумму интегральныхъ вычетовъ отъ обѣихъ частей,

$$(2)\ \mathcal{E}\frac{F(x)\,Q_m\,Q_n}{((f(x)))} = \mathcal{E}P_n Q_m + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n\, \mathcal{E}\frac{Q_m}{((Q_n x_n + Q_{n-1} a_n))},$$

Но, очевидно,

$$\mathcal{E}P_n\, Q_m = 0,$$

и, кромѣ того, такъ какъ, по предположенію, $m < n$, то степень фунціи

$$\frac{Q_m}{Q_n x_n + Q_{n-1}\ a_u}$$

не превышаетъ числа -2, и потому

$$\mathcal{E}\frac{Q_m}{((Q_n\, x_n\, Q_{n-1}\, a_n))} = 0.$$

На основаніи двухъ послѣднихъ равенствъ, вмѣсто равенства (2), мы получаемъ такую формулу:

$$(\mathrm{I})\qquad \mathcal{E}\frac{F(x)\,Q_m\,Q_n}{((f(x)))} = 0, \quad \text{гдѣ } m \lessgtr n.$$

2. Если теперь положимъ что $m = n$, то равенство (2) приметъ видъ

$$\mathcal{E}\frac{F(x)\,Q_n^2}{((f(x)))} = \mathcal{E}P_n Q_n + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n\, \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_n x_n + Q_{n-1} a_n))},$$

или

$$(3)\qquad \mathcal{E}\frac{F(x)\,Q_n^2}{((f(x)))} = (-1)^{n-1}\ a_1 a_2 \ldots a_n\, \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_n\, x_n + Q_{n-1}\, a_n))}.$$

Такъ какъ

$$\frac{Q_n}{Q_n\, x_n + Q_{n-1}\, a_n} = \frac{Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{Q_n^2\, a_{n+1}}{Q_{n+1}\,(Q_{n+1}\, x_{n+1} + Q_n\, a_{n+1})},$$

то

$$(4)\ \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_n x_n + Q_{n-1}\, a_n))} = \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_{n+1}))} - \mathcal{E}\frac{Q_n^2\ a_{n+1}}{((Q_{n+1}))\,((Q_{n+1}\, x_{n+1} + Q_n\, a_{n+1}))}$$

или

$$(5)\qquad \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_n\, x_n + Q_{n+1}\, a_n))} = \mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_{n+1}))};$$

ибо степень функціи, находящейся во второй части равенства (4) подъ вторымъ знакомъ $\mathcal{E}$, не превышаетъ числа -3.

Вторую часть равенства (5) можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_{n+1}))}=\mathcal{E}\frac{q_n\,Q_n}{((q_n\,Q_{n+1}))}=\mathcal{E}\frac{Q_{n+1}-a_n\,Q_{n-1}}{((q_n\;Q_{n+1}))}$$
$$=\mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}-\mathcal{E}\frac{a_n\,Q_{n-1}}{((q_n\,Q_{n+1}))};$$

но

$$\mathcal{E}\frac{a_n\,Q_{n-1}}{((q_n\,Q_{n+1}))}=0,$$

ибо степень знаменателя превышаетъ, по крайней мѣрѣ, на три единицы степень числителя $a_n\;Q_{n-1}$; слѣдовательно

(6) $$\mathcal{E}\frac{Q_n}{((Q_{n+1}))}=\mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}.$$

На основаніи равенствъ (4), (5) и (6), вмѣсто равенства (3), мы получаемъ такую формулу:

(II). $$\mathcal{E}\frac{F\,(x)\,Q_n^2}{((f\,(x)))}=(-1)^{n-1}a_1\,a_2\,.\,.\,.\,a_n\,\mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}.$$

2. Первыя части у каждой изъ формулъ (I) и (II) могутъ быть выражены въ видѣ симметрическихъ функцій отъ корней уравненія $f(x)=0$; тогда онѣ выразятъ собою формулы для вычисленія нѣкоторыхъ симметрическихъ функцій.

Полагая

$$F\,(x)=f'(x)\;\theta\;(x),$$

гдѣ $f'\,(x)$ изображаетъ производную отъ $f\,(x)$, а $\theta\;(x)$ означаетъ произвольную цѣлую раціональную функцію, не имѣющую общаго дѣлителя съ $f\,(x)$; и принимая во вниманіе равенство

$$\mathcal{E}\frac{f'(x)}{((f(x)))}\varphi(x)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\,.\,.\,.+\varphi(x_m),$$

гдѣ $x_1,\,x_2,\,.\,.\,.$ означаютъ корни уравненія $f(x)=0$. (См. теор. 11 § 10); вмѣсто формулъ (I) и (II), мы получимъ

(III) $$\begin{cases}\sum\limits_i Q_m\;(x_i)\;Q_n\;(x_i)\;\theta(x_i)=0, & (i=1,\,2,\,3,\,.\,.\,.\,m);\\ \sum\limits_i Q_n^{\;2}(x_i)\,\theta\,(x_i)=(-1)^{n-1}\;a_1\,a_2\,.\,.\,a_n\,\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_n}\right)\right), & (i=1,\,2,\,3,\,...\,m),\end{cases}$$

гдѣ $Q_n(x)$ изображаетъ знаменателя n-ой подходящей дроби, получаемой отъ разложенія функціи

$$\frac{f'(x)\;\theta\,(x)}{f(x)}$$

въ непрерывную дробь.

3. Въ томъ случаѣ, когда всѣ неполныя частныя $q_1, q_2, q_3, \ldots$ — первой степени относительно x, если положимъ

$$q_n = A_n x + B_n,$$

то получимъ

$$(7) \qquad \mathcal{E} \frac{1}{((q_n))} = \mathcal{E} \frac{1}{((A x_n + B_n))} = \frac{1}{A_n}.$$

Внося во вторую формулу (III), вмѣсто интегральнаго вычета во второй части, его значеніе, опредѣляемое уравненіемъ (7), мы получимъ

$$(\mathrm{IV}) \qquad \sum_i Q_n^2(x_i)\,\theta(x_i) = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{A_n}, \quad (i=1,2,\ldots m).$$

Этотъ частный случай имѣетъ мѣсто всегда, когда всѣ корни уравненія $f(x) = 0$ — вещественны и неравны и, кромѣ того, функція $\theta(x)$ вещественна и не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ, заключающемся между двумя крайними корнями уравненія $f(x) = 0$.

Для доказательства этого, мы положимъ что

$$\frac{f'(x)\,\theta(x)}{f(x)} = q_0 + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ изображаетъ остатокъ, полученный отъ раздѣленія $f'(x)\,\theta(x)$ на $f(x)$. Если степень функціи $f(x)$ равна m, то степень остатка $\varphi(x)$ равна $m - 1$. Ибо означивъ чрезъ x_i и x_{i+1} два непосредственно одинъ за другимъ слѣдующіе корня уравненія $f(x) = 0$, а чрезъ ε произвольную безконечно малую положительную величину, то не трудно убѣдиться, что двѣ величины

$$\frac{\varphi(x_i + \varepsilon)}{f(x_i + \varepsilon)} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(x_{i+1} - \varepsilon)}{f(x_{i+1} - \varepsilon)}$$

будутъ противоположныхъ знаковъ; но такъ какъ $f(x_i + \varepsilon)$ и $f(x_{i+1} - \varepsilon)$ имѣютъ одинаковые знаки, то слѣдовательно, $\varphi(x_i + \varepsilon)$ и $\varphi(x_{i+1} - \varepsilon)$ будутъ имѣть знаки противоположные, и потому $\varphi(x)$ между двумя предѣлами x_i и x_{i+1} непремѣнно обращается въ нуль; слѣдовательно, степень остатка $\varphi(x)$ равняется числу корней $x_1, x_2, x_3, \ldots$ безъ единицы, т. е. $m - 1$.

Теперь мы произведемъ надъ двумя функціями

$$\varphi(x) \ \text{и} \ f(x)$$

рядъ такихъ-же дѣйствій, которыя, по теоремѣ Штурма, нужно было бы произвести надъ двумя функціями

$$f'(x) \ \text{и} \ f(x)$$

для того, чтобы изслѣдовать корни уравненія $f(x) = 0$; и означимъ остатки, получаемые при этомъ, чрезъ

$$V_1, V_2, V_3, \ldots V_l.$$

Для того чтобы уравненіе $f(x) = 0$ имѣло всѣ корни вещественные, необходимо, чтобы число остатковъ

$$V_1, V_2, \ldots . V_l$$

равнялось $m - 1$; но такъ какъ степень V_1 не выше $m - 2$, степень V_l равняется нулю и, кромѣ того, степени функцій $V_1, V_2, \ldots$ составляютъ рядъ убывающій, то слѣдовательно

$$\begin{array}{lll} \text{степень } V_1 & \text{равняется} & m-2, \\ \text{»} \quad V_2 & \text{»} & m-3, \\ \text{»} \quad V_3 & \text{»} & m-4, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ \text{»} \quad V_i & \text{»} & m-i-1 \ldots \text{ и т. д.} \end{array}$$

Отсюда ясно видно, что степень каждаго послѣдующаго остатка единицею ниже чѣмъ степень остатка предъидущаго; но такъ какъ неполное частное, получаемое отъ раздѣленія функціи V_i на V_{i+1}, равняется $\pm q_{i+1}$, то слѣдовательно степень каждой изъ функцій $q_1, q_2, \ldots$ равняется единицѣ. Ч. т. д.

§ 16. Случай, когда непрерывная дробь безконечна.

1. Пусть $\varphi(x)$ изображаетъ функцію конечную и однозначную для всѣхъ значеній независимой перемѣнной x, которыхъ модуль превышаетъ нѣкоторую постоянную величину r, и обращающуюся въ точкѣ $x = \infty$ или въ величину конечную, или въ безконечность конечнаго порядка. Положимъ дальше что, разлагая функцію $\varphi(x)$ въ непрерывную дробь, мы нашли такое равенство:

$$(1) \qquad \varphi(x) = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \ldots + \cfrac{a_n}{q_n + \ldots}}}}$$

Отсюда мы получаемъ

$$\varphi(x)\, Q_m\, Q_n = P_n\, Q_m + (-1)^{n-1} \frac{a_1\, a_2 \ldots a_n\, Q_m}{Q_n x_n + Q_{n-1}\, a_n},$$

$$\varphi(x)\, Q^2{}_n = P_n\, Q_n + (-1)^{n-1} \frac{a_1\, a_2 \ldots a_n\, Q_n}{Q_n x_n + Q_{n-1}\, a_n}.$$

Умножая оба эти уравненія на dx и интегрируя обѣ части, по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ, мы получимъ

$$(2) \begin{cases} \int \varphi(x)\, Q_m\, Q_n\, dx = \int P_n\, Q_m\, dx + (-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n \int \dfrac{Q_m\, dx}{Q_n x_n + Q_{n-1}\, a_n}, \\ \int \varphi(x)\, Q^2{}_n\, dx = \int P_n Q_n\, dx + (-1)^{n-1} a_1\, a_1 \ldots a_n \int \dfrac{Q_n\, dx}{Q_n x_n + Q_{n-1}\, a_n}. \end{cases}$$

Принимая въ соображеніе что если функція $f(x)$ цѣла или удовлетворяетъ условію

$$\lim\, (x\, f(x))_{x=\infty} = 0,$$

то интегралъ

$$\int f(x)\, dx,$$

взятый по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ, равняется нулю, и, поступая съ уравненіями (2) точно также какъ мы поступали въ предъидущемъ §-фѣ съ уравненіями (2) и (3), мы получимъ такія двѣ формулы:

$$(3) \begin{cases} \int \varphi(x)\, Q_m\, Q_n\, dx = 0, \\ \int \varphi(x)\, Q_n^2\, dx = (-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n \int \dfrac{dx}{q_n}. \end{cases}$$

Такъ какъ $\varphi(x)$, по предположенію, остается конечною внѣ круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ r, исключая точку $x = \infty$, то вмѣсто интеграловъ

$$\int \varphi(x)\, Q_m\, Q_n dx, \quad \int Q_n^2\, \varphi(x) dx,$$

взятыхъ по безконечно большой окружности, можно взять интегралы

$$\int^{(r)} \varphi(x)\, Q_m\, Q_n dx, \quad \int^{(r)} \varphi(x)\, Q_n^2 dx,$$

распространенные на окружность круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ r. Слѣдовательно, уравненія (3) можно представить такимъ образомъ:

$$\int^{(r)} \varphi(x)\, Q_m\, Q_n\, dx = 0$$

$$\int^{(r)} \varphi(x)\, Q_n^2\, dx = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \,.\,.\,.\, a_n \int \frac{dx}{q_n},$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{dx}{q_n} = \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}.$$

Вслѣдствіе того, предъидущія формулы принимаютъ такой видъ:

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{(r)} \varphi(x)\, Q_m\, Q_n\, dx = 0, \\ &\frac{1}{2\pi i}\int^{(r)} \varphi(x)\, Q_n^2 dx = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}. \end{aligned} \right.$$

Эти двѣ формулы, въ настоящемъ случаѣ, заступаютъ мѣсто формулъ (I) и (II) предъидущаго §-фа.

Формулы (3) можно еще иначе представить, именно, слѣдующимъ образомъ:

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{E}_{(x=\infty)} \varphi(x)\, Q_m\, Q_n = 0, \\ &\mathcal{E}_{(x=\infty)} \varphi(x)\, Q_n^2 = (-1)^n\, a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_n \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}. \end{aligned} \right.$$

Наконецъ, принимая въ соображеніе все сказанное въ § 11, мы можемъ формулы (I) представить подъ такимъ видомъ:

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{E}\varphi(x)\, Q_m\, Q_n\, dx = 0, \\ &\mathcal{E}\varphi(x)\, Q_n^2\, dx = (-1)^{n-1}\, a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_n \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}. \end{aligned} \right.$$

Такимъ образомъ мы получили формулы совершенно сходныя съ формулами (I) и (II) предъидущаго §-фа.

Если степень неполнаго частнаго q_n превышаетъ единицу, то

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_n}\right)\right) = 0,$$

и слѣдовательно

$$\mathcal{E}\varphi(x)\, Q_n^2 = 0.$$

2. Постараемся теперь дать нѣсколько примѣровъ.

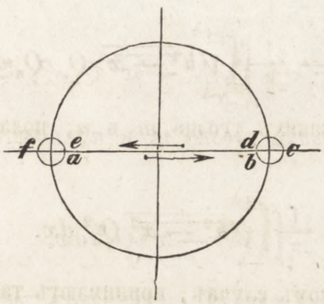
Примѣръ 1. Положимъ

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2-h^2}.$$

и допустимъ что h есть величина вещественная.

Если соединимъ точку $+h$ съ точкою $-h$ прямою линіей, и, кромѣ того, около каждой изъ нихъ начертимъ кругъ безконечно малаго радіуса, то получимъ сомкнутую линію $abcdefa$ (Чер. 7), внѣ которой данная функція $\sqrt{x^2-h^2}$ остается конечною и однозначною, исключая точку $x=\infty$, въ которой разсматриваемая функція обращается въ ∞ перваго порядка.

Черт. 7.



Точно также, если изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ h начертимъ кругъ, то внѣ его функція $\sqrt{x^2-h^2}$ остается однозначною и конечною, исключая точку $x=\infty$.

Изъ тождественнаго уравненія

$$\sqrt{x^2-h^2}-x=\frac{h^2}{2x+(x^2-h^2-x)},$$

мы получаемъ слѣдующее разложеніе функціи $\sqrt{x^2-h^2}$ въ непрерывную дробь:

$$\sqrt{x^2-h^2}=x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\ldots}}}$$

Слѣдовательно, для разсматриваемаго частнаго случая, нужно въ формулахъ (I) положить

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=-h^2,$$
$$q_0=x,\quad q_1=q_2=\ldots=2x,\quad r=h.$$

Такъ какъ функція $\sqrt{x^2-h^2}$ остается конечною внутри площади, заключающейся между двумя сомкнутыми линіями (h) и $abcdea$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_mQ_n\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int^{(ab)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_mQ_n\,dx+\frac{1}{2\pi i}\int^{(de)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_mQ_n\,dx$$

гдѣ (h) означаетъ окружность круга, начерченнаго изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ h. Но, принимая въ соображеніе что разсматриваемая функція $\sqrt{x^2-h^2}$, при x вещественномъ и большемъ чѣмъ h, остается положительною, мы получаемъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(ab)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_m\,Q_n\,dx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_m\,Q_n\,dx,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(de)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_m\,Q_n\,dx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_m\,Q_n\,dx.$$

Слѣдовательно,

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_m Q_n\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_m\,Q_n\,dx.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто при какихъ угодно m и n; полагая $m=n$, мы получимъ

$$(6)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_n^{\,2}\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_n^{\,2}\,dx.$$

Двѣ формулы (I), въ разсматриваемомъ случаѣ, принимаютъ такой видъ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_m\,Q_n\,dx=0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{x^2-h^2}\,Q_n^{\,2}\,dx=-\tfrac{1}{2}\,h^{2n};$$

но, на основаніи уравненій (5) и (6), онѣ могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_m\,Q_n\,dx=0,\\&\int_{-h}^{+h}\sqrt{h^2-x^2}\,Q_n^{\,2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,h^{2n}.\end{aligned}\right.$$

Если вмѣсто функціи $\sqrt{x^2-h^2}$ мы возьмемъ функцію $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}$, то будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{x^2-h^2}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\dots}}}},$$

$$q_0=0,\ q_1=x,\ q_2=q_3=q_4=\ldots=2x;$$

$$a_1=1,\ a_2=a_3=\ \ldots\ =-h^2.$$

Означивъ знаменатели подходящихъ дробей второй части равенства (8), какъ всегда, чрезъ $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, и примѣняя формулы (I) къ настоящему случаю, мы получимъ слѣдующія равенства:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-h}^{+h} \frac{Q_m Q_n\, dx}{\sqrt{h^2-x^2}} = 0, \\ &\int_{-h}^{+h} \frac{Q_n^2\, dx}{\sqrt{h^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} h^{2(n-1)}, \qquad (n > 1), \\ &\int_{-h}^{+h} \frac{Q_1^2\, dx}{\sqrt{h^2-x^2}} = \pi. \end{aligned} \right.$$

Примѣръ 2. Положимъ что

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{x-h}{x+h}},$$

гдѣ h означаетъ вещественную величину.

Подставляя въ тождественномъ уравненіи

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} = 1 - \frac{2h}{x+h+\sqrt{x^2-h^2}}$$

вмѣсто $\sqrt{x^2-h^2}$, непрерывную дробь, найденную въ предъидущемъ примѣрѣ, мы получимъ

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}} = 1 - \cfrac{2h}{2x+h - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \ldots}}}$$

Слѣдовательно, для настоящаго случая мы имѣемъ

$$a_1 = -2h, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = -h^2,$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2x + h, \quad q_2 = q_3 = \ldots = 2x.$$

Подставляя эти значенія въ формулы (I), и замѣчая что $r = h$, мы получимъ

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)} \sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, Q_m Q_n\, dx = 0, \\ &\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)} \sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\, Q_n^2\, dx = -h^{2n-1}. \end{aligned} \right.$$

Такъ какъ функція $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$ остается конечною внутри площади, заключающейся между окружностью (h) и линіей $abcdefa$ (Черт. 7), и значенія ея, соотвѣтствующія двумъ сторонамъ линіи ab равны между собою но съ противоположными знаками, то слѣдовательно

$$(11) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q_m Q_n dx = \frac{1}{2\pi i}\int^{(abcdea)}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q_m Q_n\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_{-h}^{+h}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q_m Q_n\, dx.$$

Интегралъ

$$\int_{-h}^{+h}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q_m Q_n\, dx,$$

составляющій вторую часть равенства (11), относится къ значеніямъ функціи

$$\sqrt{\frac{x-h}{x+h}},$$

получаемымъ съ нижней стороны линіи ab. Но допустивъ, что разсматриваемая функція $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$, для вещественныхъ значеній x большихъ чѣмъ h, принимаетъ положительныя значенія, не трудно убѣдиться, что функція $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$, для всѣхъ вещественныхъ значеній x, содержащихся между $-h$ и $+h$, можетъ быть представлена подъ видомъ

$$-i\sqrt{\frac{h-x}{h+x}},$$

причемъ значеніе корня $\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}$ должно быть взято со знакомъ $+$, если желаемъ получать значенія, получаемыя функціей $\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}$ съ нижней стороны линіи ab. Принимая это въ соображеніе, вмѣсто равенства (11) мы получаемъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q_m Q_n dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}\,Q_m\, Q_n\, dx.$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $m = n$, мы получимъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\sqrt{\frac{x-h}{x+h}}\,Q^2{}_n\, dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-h}^{+h}\sqrt{\frac{h-x}{h+x}}\,Q^2{}_n\, dx.$$

На основаніи двухъ послѣднихъ равенствъ, формулы (10) принимаютъ такой видъ:

$$(12)\quad \begin{cases} \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{h-x}{h+x}}\, Q_m\, Q_n\, dx = 0 \\ \int_{-h}^{+h} \sqrt{\frac{h-x}{h+x}}\, Q^2_n\, dx = \pi\, h^{2n-1}. \end{cases}$$

Примѣръ 3. Положимъ

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h}.$$

Если означимъ чрезъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ гипергеометрическій рядъ

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1) . \beta(\beta+1) .}{1 . 2 . \quad \gamma(\gamma+1)}\, x^2 + \ldots,$$

то

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h} = \frac{h}{x}\, F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \frac{h^2}{x^2}\right).$$

Вторая часть этого равенства представляетъ собою рядъ, который по одной извѣстной теоремѣ о гипергеометрическихъ рядахъ, можетъ быть выраженъ въ видѣ непрерывной дроби. Сдѣлавъ это на самомъ дѣлѣ, мы получимъ

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h} = \cfrac{h}{x - \cfrac{b_1 h^2}{x - \cfrac{b_2 h^2}{x - \cfrac{b_3 h^3}{x - \ldots}}}},$$

гдѣ

$$b_1 = \frac{1 . 1}{1 . 3}, \quad b_2 = \frac{2 . 2}{3 . 5}, \quad b_3 = \frac{3 . 3}{5 . 7}, \ldots$$

$$b_n = \frac{n . n}{(2n-1)(2n+1)}, \quad \ldots$$

Слѣдовательно, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, мы имѣемъ

$$q_0 = 0,\ q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n = \ldots = x,$$

$$a_1 = h,\ a_2 = -\, b_1\, h^2,\ a_3 = -\, b_2\, h^2, \ldots\ a_{n+1} = -b_n\, h^2, \ldots$$

Подставляя эти значенія въ формулы (I) и замѣчая что $r = h$, получимъ

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int^{(h)} \tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h}\, Q_m\, Q_n\, dx = 0, \\ \frac{1}{2\pi i} \int^{(h)} \tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h}\, Q^2_n\, dx = \frac{h^{2n-1}}{2n-1} \left[\frac{1.2.3\ldots n-1}{1.3.5\ldots 2n-3}\right]^2. \end{cases}$$

Функція

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}$$

остается однозначою и конечною внутри площади, содержащейся между окружностью (h) и сомкнутою линіей $abcdefa$ (См. Чер. 7); кромѣ того, значенія этой функціи въ каждой изъ точекъ на линіи ab съ нижней стороны, превышаютъ на постоянную величину πi значенія тойже функціи, получаемыя съ верхней стороны линіи ab. Принимая все это въ соображеніе, мы выводимъ, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_n\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int^{(abcdefa)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_n\,dx,$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_1\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int^{(ab)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_n\,dx$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(cd)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_n\,dx,$$

откуда

$$(14)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q_m Q_n\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{-h}^{+h}Q_m Q_n\,dx.$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $m=n$, мы получаемъ

$$(15)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(h)}\tfrac{1}{2}\log\frac{x+h}{x-h}Q^2{}_n\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{-h}^{+h}Q^2{}_n\,dx.$$

На основаніи уравненій (14) и (15), двѣ формулы (13) принимаютъ такой видъ:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{-h}^{+h}Q_m Q_n\,dx=0,\\ &\int_{-h}^{+h}Q^2{}_n\,dx=\frac{2h^{2n-1}}{2n-1}\cdot\left[\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(2n-3)}\right]^2.\end{aligned}\right.$$

Примѣръ 4. Наконецъ, мы возьмемъ такую функцію:

$$\psi(x)=\int_a^b\frac{f(z)\,dz}{x-z},$$

гдѣ интегралъ взятъ по прямой линіи, соединяющей точку a съ точкою b; а $f(z)$ изображаетъ произвольную функцію, удовлетворяющую одному только условію, именно, оставаться въ предѣлахъ интеграла конечною. Не трудно убѣдиться, что такимъ образомъ опредѣленная функція $\psi(x)$ остается во всей координатной плоскости конечною и однозначною, исключая прямую линію ab, которая представляетъ линію разрыва.

Полагая теперь

$$\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z} = \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + \frac{a_3}{q_3} + \ldots$$

и изображая чрезъ

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ Q_3(x),\ \ldots$$

знаменатели подходящихъ дробей, мы примѣнимъ къ функціи

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

обѣ формулы (I); тогда получимъ такія два равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\int_a^b \frac{f(z)Q_m(x)Q_n(x)}{x-z}\,dz\,dx = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\int_a^b \frac{f(z)Q^2{}_n(x)}{x-z}\,dz\,dx = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))},$$

гдѣ вторые интегралы, относящіеся къ перемѣнной x, взяты по произвольной сомкнутой кривой, окружающей линію ab, — въ положительномъ направленіи. Перемѣняя въ обоихъ равенствахъ порядокъ интегрированія, мы получимъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b f(z)\int \frac{Q_m(x)Q_n(x)}{x-z}\,dx\,dz = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b f(z)\int \frac{Q^2{}_n(x)}{x-z}\,dx\,dz = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))},$$

или, что все равно,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b f(z)\,\mathcal{E}\frac{Q_m(x)Q_n(x)}{((x-z))}\,dz = 0,\\ &\int_a^b f(z)\,\mathcal{E}\frac{Q^2_n(x)}{((x-z))}\,dz = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}.\end{aligned}\right.$$

Но, на основаніи теоремы 7 § 10, мы имѣемъ

$$\mathcal{E}\frac{Q_m(x)Q_n(x)}{((x-z))} = Q_m(z)\,Q_n(z),$$

$$\mathcal{E}\frac{Q_n^2(x)}{((x-z))} = Q_n^2(z);$$

слѣдовательно, на мѣсто (17), мы получаемъ такія двѣ формулы: (*)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b f(z)\,Q_m(z)\,Q_n(z)\,dz = 0,\\ &\int_a^b f(z)\,Q_n^2(z)\,dz = (-1)^{n-1}\,a_1\,a_2\,\ldots\,a_n\,\mathcal{E}\frac{1}{((q_n))}. \end{aligned}\right.$$

§ 17. Различныя приложенія формулъ, выведенныхъ въ двухъ предъидущихъ §-фахъ.

1. На основаніи формулъ (III) § 15, не трудно рѣшить слѣдующую задачу:

Найти такую цѣлую функцію $F(z)$ n-ой степени, которая для частныхъ значеній z:

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots\ z_n,\ z_{n+1},$$

принимала бы значенія равняющіяся:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ ,\ \ldots\ u_n,\ u_{n+1}.$$

На самомъ дѣлѣ, положимъ

$$(z-z_1)\,(z-z_2)\,(z-z_3)\ldots(z-z_n)\,z-z_{n+1}) = f(z),$$

и означимъ чрезъ

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \ldots\ \psi_i(z),\ \ldots$$

знаменатели подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ разложенія функціи

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\theta(z)$$

въ непрерывную дробь, причемъ $\theta(z)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію. Вообще, степень функціи $\psi_i(z)$ равняется i — хотя частныя случаи могутъ составлять исключеніе, но мы упустимъ ихъ изъ виду. Предположивъ это, мы можемъ искомую функцію $F(z)$ представить подъ видомъ

(*) Tchebychef. Mémoire sur les fractions continues. Jour. Liouville. Deuxième Serie T. III. p. 289.

Heine. Mittheilung über Kettenbrüche. Journal für die reine und angew. Math. B. 67. J. 1867.

$$(1)\quad F(z)=A_0\psi_0(z)+A_1\psi_1(z)+A_2\psi_2(z)+\ldots+A_n\psi_n(z),$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, . . . означаютъ неизвѣстные коэффиціенты.

Умноживъ обѣ стороны уравненія (1) на $\psi_l(z)\;\theta(z)$, мы получимъ

$$F(z)\psi_l(z)\theta(z)=A_0\psi_0(z)\,\psi_l(z)\,\theta(z)+\ldots+A_l\psi_l^{\,2}(z)\theta(z)+\ldots$$
$$+A_n\psi_n(z)\,\psi_l(z)\,\theta(z);$$

подставляя въ этомъ уравненіи вмѣсто z,

$$z_1,\ \ z_2,\ \ z_3,\ \ldots\ldots z_n,$$

и суммируя полученныя отъ этого равенства, будемъ имѣть

$$\sum_i F(z_i)\psi_l(z_i)\theta(z_i)=A_0\sum_i\psi_0(z_i)\psi_l(z_i)\theta(z_i)+\ldots+A_l\sum_i\psi_l^{\,2}(z_i)\theta(z_i)+\ldots$$
$$+A_n\sum_i\psi_n(z_i)\,\psi_l(z_i)\,\theta(z_i),$$

гдѣ суммированія распространяются на $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$; но, по формулѣ (III) § 15, мы имѣемъ

$$\sum_i\psi_k(z_i)\;\psi_{k'}(z_i)\,\theta(z_i)=0,$$

слѣдовательно,

$$\sum_i F(z_i)\;\psi(z_i)\;\theta(z_i)=A_l\sum_i\psi_l(z_i)^2\;\theta(z_i),$$

откуда

$$A_l=\frac{\Sigma_i\,(z_i)\;\psi_l(z_i)\;\theta(z_i)}{\Sigma_i\,\psi_l^{\,2}(\ \ _i)\,\theta(z_i)}=\frac{\Sigma_i\;u_i\;\psi_l(z_i)\;\theta(z_i)}{\Sigma_i\;\psi_l^{\,2}(z_i)\;\theta(z_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$, мы опредѣлимъ такимъ образомъ всѣ коэффиціенты A_0, A_1, A_2, . . . ; подставляя полученныя значенія въ уравненіе (1), мы получимъ слѣдующее выраженіе искомой функціи:

$$(\mathrm{I})\ F(z)=\frac{\Sigma_i u_i\psi_0(z_i)\theta(z_i)}{\Sigma_i\psi_0^2(z_i)\theta(z_i)}\psi_0(z)+\frac{\Sigma_i u_i\psi_1(z_i)\theta(z_i)}{\Sigma_i\psi_1^2(z_i)\theta(z_i)}\psi_1(z)+\frac{\Sigma_i u_i\psi_2(z_i)\theta(z_i)}{\Sigma_i\psi_2^2(z_i)\theta(z_i)}\psi_2(z)+\ldots$$

Принимая во вниманіе формулу (IV) § 15 и замѣчая, что, по нашему знакоположенію, $Q_n(x)=\psi_{n-1}(x)$, мы будемъ имѣть

$$\sum_i\psi_0^2(z_i)\;\theta(z_i)=\frac{a_1}{A_1},$$

$$\sum_i\psi_1^2(z_i)\;\theta(z_i)=-\frac{a_1\;a_2}{A_2},$$

$$\sum_i\psi_2^2(z_i)\;\theta(z_i)=\frac{a_1\,a_2\,a_3}{A_3},$$

. . . . и т. д. . . . ,

вслѣдствіе чего формула (I) принимаетъ видъ

$$\text{(II)}\quad F(z)=\frac{A_1}{a_1}\Big[\sum_i u_i\psi_0(z_i)\theta(z_i)\Big]\psi_0(z)-\frac{A_2}{a_1\,a_2}\Big[\sum_i u_i\psi_1(z_i)\theta(z_i)\Big]\psi_1(z)$$
$$+\frac{A_3}{a_1\,a_2\,a_3}\Big[\sum_i u_i\,\psi_2(z_i)\Big]\psi_2(z)+\ldots$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ означаютъ числители въ непрерывной дроби

$$\frac{f'(z)\,\theta(z)}{f(z)}=q_0+\cfrac{a_1}{q_1+\cfrac{a_2}{q_2+\cfrac{a_3}{q_3+\ldots}}}$$

а $A_1\ A_2\ A_3, \ldots$ означаютъ коэффиціенты при z въ неполныхъ частныхъ $q_1, q_2, q_3, \ldots$, которыя, по нашему предположенію, суть функціи линейныя относительно z.

2. Перейдемъ теперь къ другому приложенію вышеупомянутыхъ формулъ.

Положимъ, что мы имѣемъ два ряда вещественныхъ величинъ

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \ldots\ x_m,$$
$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots\ u_m,$$

и пусть

$$\theta^2(x_1),\ \theta^2(x_2),\ \theta^2(x_3),\ \theta^2(x_4),\ \ldots\ \theta^2(x_m),$$

означаютъ частныя положительныя значенія, которыя получаетъ произвольная цѣлая вещественная функція $\theta(x)$, возвышенная въ квадратъ: требуется найти такую цѣлую раціональную функцію n-ой степени $F(x)$, которая удовлетворяла бы условію

$$(2)\qquad \sum_i[u_i-F(x_i)]^2\theta^2(x_i)=\text{Minimum},$$

причемъ мы предполагаемъ что $m>n$.

Означивъ чрезъ $f(x)$ произведеніе

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\ \ldots(x-x_m),$$

мы разложимъ функцію

$$\frac{f'(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}$$

въ непрерывную дробь

$$\frac{f(x)\,\theta^2(x)}{f(x)}=q_0+\cfrac{a_1}{q_1+\cfrac{a_2}{q_2+\cfrac{a_3}{q_3+\ldots}}}$$

и изобразимъ знаменатели подходящихъ дробей чрезъ

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x)\ .\ .\ .\ .\ \psi_n(x),$$

которыхъ степени равняются

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad .\ .\ .\ .\quad n.$$

Представляя функцію $F(x)$ подъ видомъ

$$F(x) = A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + A_2\psi_2(x) + \ .\ .\ .\ + A_n\psi_n(x),$$

гдѣ A_0, A_1, A_2, ... означаютъ неизвѣстные коэффиціенты, вмѣсто условнаго уравненія (2), мы будемъ имѣть

$$\sum[u_i - A_0\psi_0(x_i) - A_1\psi_1(x_i) - A_2\psi_2(x_i) - \ldots - A_n\psi_n(x)]^2\,\theta^2(x) = \text{Min}.$$

Дифференцируя первую часть этого уравненія сперва по A_0, послѣ по A_1, по A_2, и т. д.; приравнивая, получаемыя вслѣдствіе этого выраженія, нулю, и принимая въ соображеніе формулу (III) § 15, мы получимъ

$$A_0 = \frac{\Sigma_i u_i\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$A_1 = \frac{\Sigma_i u_i \psi_1(x_i)\ \theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)},$$

$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\ ,$$

$$A_n = \frac{\Sigma_i u_i \psi_n(x_i)\ \theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}.$$

Вслѣдствіе того, искомая функція $F(x)$ равняется

(III) $$F(x) = \frac{\Sigma_i u_i\,\psi_0(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_0^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_0(x) + \frac{\Sigma_i u_i\,\psi_1(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_1^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_1(x) + \ldots$$
$$+\ .\ .\ .\ + \frac{\Sigma_i u_i\,\psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_n^2(x_i)\,\theta^2(x_i)}\psi_n(x),$$

или, принимая во вниманіе формулу (IV) § 15,

$$F(x) = \frac{A_1}{a_1}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi_0(x) - \frac{A_2}{a_1 a_2}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi(x)$$

(IV) $$+ \frac{A_3}{a_1 a_2 a_3}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_2(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi_2(x) - \ .\ .\ .\ .$$

$$\pm \frac{A_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_n(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi_n(x).$$

Того же результата можно достигнуть еще проще слѣдующимъ образомъ:

Положимъ

$$U_i = [B_0\psi_0(x_i) + B_1\psi_1(x_i) + B_2\psi_2(x_i) + \ldots + B_n\psi_n(x_i) - u_i]\theta(x_i)$$

гдѣ B_0, B_1, B_2, ... означаютъ совершенно произвольныя величины, и

$$V_i = [A_0\psi_0(x_i) + A_1\psi_1(x_i) + A_2\psi_2(x_i) + \ldots + A_n\psi_n(x_i) - u_i]\theta(x_i),$$

гдѣ A_0, A_1, A_2,.... означаютъ искомые коэффиціенты въ выраженіи функціи $F(x)$

$$F(x) = A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + A_2\psi_2(x) + \ldots + A_n\psi_n(x).$$

Положивъ это, мы получимъ

$$\begin{aligned} \sum_i (V_i - U_i)U_i = {} & \sum_l B_l(A_l - B_l)\sum_i \psi_l^2(x_i)\,\theta^2(x_i) \\ (3) \qquad & + \sum_l \sum_{l'} B_{l'}(A_l - B_l)\sum_i \psi_l(x_i)\,\psi_{l'}(x_i)\,\theta^2(x_i) \\ & - \sum_l (A_l - B_l)\sum_i \psi_l(x_i)\,\theta^2(x_i)\,u_i, \end{aligned}$$

гдѣ суммированіе распространяется на

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n;$$
$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots m.$$

Если теперь мы положимъ

$$B_l = \frac{\Sigma_i u_i \psi_l(x_i)\theta^2(x_i)}{\Sigma_i \psi_l^2(x_i)\theta^2(x_i)},$$

то тогда вторая часть равенства (3) будетъ тождественно равняться нулю, ибо

$$\sum_i \psi_l(x_i)\,\psi_{l'}(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,$$

$$B_l \sum_i \psi_l^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = \sum_i u_i\,\psi_l(x_i)\,\theta^2(x_i);$$

слѣдовательно

$$\sum_i (V_i - U_i)U_i = 0,$$

откуда

$$\sum_i V_i^2 = \sum_i U_i^2 + \sum_i (V - U_i)^2.$$

Это уравненіе показываетъ намъ, что при измѣненіи коэффиціентовъ

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots A_n,$$

сумма

$$\sum_i V_i^2, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots m),$$

достигнетъ тогда minimum своего значенія, когда будетъ удовлетворено уравненіе

$$V_i = U_i, \quad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots .\ m);$$

но отсюда слѣдуетъ, что

$$A_l = B_l, \quad (l = 1,\ 2,\ 3, \ldots .\ n),$$

и такимъ образомъ коэффиціенты A_0, A_1, A_2, . . . опредѣлены. *

Рѣшеніе двухъ послѣднихъ задачъ приводитъ насъ къ слѣдующей въ высшей степени замѣчательной теоремѣ. **

Теорема. Если x_1, x_2, x_3, . . . x_{m+1} означаютъ вещественныя и неравныя величины, а $\theta(x)$ изображаетъ произвольную цѣлую функцію съ вещественными коэффиціентами, то, полагая

$$\sum \frac{\theta^2(x_i)}{x - x_i} = \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \ldots + \cfrac{a_{m+1}}{q_{m+1}}}}},$$

$$q_1 = A_1 x + B_1, q_2 = A_2 x + B_2, \ldots\ q_{m+1} = A_{m+1}\, x + B_{m+1};$$

и изображая чрезъ $\psi_i(x)$ знаменателя $(i+1)$-ой подходящей дроби, степень котораго равняется i, — мы будемъ имѣть:

1) всякая цѣлая функція $F(x)$ m-ой степени, которой $(m+1)$ частныхъ значеній

$$F(x_1),\ F(x_2),\ F(x_3), \ldots . F(x_m),\ F(x_{m+1})$$

извѣстны, можетъ быть представлена подъ такимъ видомъ:

$$F(x) = \frac{A_1}{a_1}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_0(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi_0(x) - \frac{A_2}{a_1 a_2}\Big[\sum_i F(x_i)\psi_1(x_i)\theta^2(x_i)\Big]\psi_1(x)$$

$$+ \ldots . \pm \frac{A_{m+1}}{a_1 a_2 \ldots a_{m+1}}\Big[\sum_i F(x_i)\,\psi_m(x_i)\,\theta^2(x_i)\Big]\,\psi_m(x);$$

2) если во второй части этой формулы удержимъ только нѣкоторое число первыхъ членовъ, впрочемъ произвольное, и означимъ это число чрезъ $n+1$, остальные же члены отбросимъ, то такимъ образомъ получимъ приближенное значеніе $F(x)$ въ видѣ цѣлой функціи n-ой степени съ коэффиціентами, опредѣленными по способу наименьшихъ квадратовъ, предполагая притомъ, что вѣроятности погрѣшностей величинъ

* Доказательство это заимствовано изъ мемуара Rouché — Dévelоppement des fonctions en séries etc. Journal de l'école Polytech. Cah. 37 p. 19.

**Tchebychef. Sur les fractions continues. Journal de Liouville. Série II T. III.

$$F(x_1),\quad F(x_2),\quad F(x_3),\ldots$$

пропорціональны

$$\frac{1}{\theta(x_1)},\ \frac{1}{\theta(x_2)},\ \frac{1}{\theta(x_3)},\ldots$$

3. Положимъ, что мы имѣемъ конечную или безконечную непрерывную дробь

$$\varphi(x)=q_0+\frac{a_1}{q_1+\frac{a_2}{q_2+\ldots}},$$

въ которой всѣ неполныя частныя $q_1, q_2, \ldots$ суть функціи 1-ой степени; и пусть

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots$$

изображаютъ знаменателей подходящихъ дробей; положимъ дальше, что мы имѣемъ функцію $f(x)$, которая разлагается въ рядъ вида

$$f(x)=A_0\,\psi_0(x)+A_1\,\psi_1(x)+A_2\,\psi_2(x)+A_3\,\psi_3(x)+\ldots$$

Умножая обѣ стороны этого уравненія на $\psi_n(x)\,\varphi(x)$ и интегрируя по сомкнутой линіи, окружающей линію или точку разрыва, функціи $\varphi(x)$, или — по нѣсколькимъ сомкнутымъ линіямъ, окружающимъ всѣ линіи и точки разрыва функціи $\varphi(x)$, мы получаемъ

$$(4)\qquad \int f(x)\,\psi_n(x)\,\varphi(x)\,dx=A_0\int\psi_0(x)\,\psi_n(x)\,\varphi(x)\,dx+$$
$$A_1\int\psi_1(x)\psi_n(x)\,\varphi(x)\,dx+\ldots+A_n\int\psi_n^2(x)\,\varphi(x)\,dx+\ldots$$

Принимая теперь въ соображеніе формулы (1) § 16, мы видимъ, что всѣ члены во второй части уравненія (4) равняются нулю, кромѣ члена

$$A_n\int\psi_n^2(x)\,\varphi(x)\,dx;$$

слѣдовательно,

$$(5)\qquad A_n=\frac{\int f(x)\,\psi_n(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int\psi_n^2(x)\,\varphi(x)\,dx}.$$

Вслѣдствіе этого, мы получаемъ такое выраженіе функціи $f(x)$:

$$(6)\quad f(x)=\frac{\int f(x)\,\psi_0(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int\psi_0^2(x)\,\varphi(x)\,dx}\,\psi_0(x)+\frac{\int f(x)\,\psi_1(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int\psi_1^2(x)\,\varphi(x)\,dx}\,\psi_1(x)+\ldots$$
$$+\ldots$$

Принимая въ соображеніе формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int \psi_n{}^2(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^n\, a_1\, a_1 \ldots a_{n+1} \mathcal{E} \frac{1}{((q_{n+1}))},$$

на мѣсто формулы (6) можемъ написать

$$\text{(V)}\quad f(x) = \frac{\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\psi_0(x)\varphi(x)\,dx}{a_1 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_1}\right)\right)}\psi_0(x) - \frac{\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\psi_1(x)\varphi(x)\,dx}{a_1\, a_2 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_2}\right)\right)}\psi_1(x)$$

$$+ \ldots$$

Полагая

$$q_i = A_i\, x + B_i,$$

будемъ имѣть

$$\mathcal{E}\frac{1}{((q_i))} = \frac{1}{A_i},$$

и формула (V) приметъ видъ

$$\text{(V)}\quad 2\pi i f(x) = \frac{A_1}{a_1}\left[\int f(x)\psi_0(x)\varphi(x)\,dx\right]\psi_0(x) - \frac{A_2}{a_1 a_2}\left[\int f(x)\,\psi_1(x)\varphi(x)\,dx\right]\,\psi_1(x)$$

$$+ \frac{A_3}{a_1\ a_2\ a_3}\left[\int f(x)\psi_2(x)\varphi(x)\,dx\right]\,\psi_2(x) - \ldots$$

Если функція $f(x)$ ни въ одной конечной точкѣ не обращается въ ∞, то тогда мы можемъ предположить, что интегралы во второй части формулъ (V) взяты по сомкнутой линіи, удаленной до безконечности. Но въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\ \varphi(x)\ \psi_n(x)\ dx = \mathcal{E}\, f(x)\,\varphi\,(x)\,\psi_n\,(x);$$

и слѣдовательно, формулы (V) можно представить такимъ образомъ:

$$\text{(VI)}\qquad f(x) = \frac{\mathcal{E} f(x)\,\varphi(x)\psi_0(x)}{a_1 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_1}\right)\right)}\ \psi_0\,(x) - \frac{\mathcal{E} f(x)\varphi(x)\psi_1(x)}{a_1\ a_2 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_2}\right)\right)}\ \psi_1\,(x)$$

$$+ \frac{\mathcal{E} f(x)\varphi(x)\psi_1(x)}{a_1 a_2 a_3\ \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_3}\right)\right)}\psi_2(x) - \ldots,$$

$$\text{(VI)}\, f(x) = \frac{A_1}{a_1}\left[\mathcal{E} f(x)\varphi(x)\psi_0(x)\right]\psi_0(x) - \frac{A_2}{a_1 a_2}\left[\mathcal{E} f(x)\varphi(x)\psi_1(x)\right]\psi_1(x)$$

$$+ \frac{A_3}{a_1 a_2 a_3}\left[\mathcal{E}\, f(x)\ \varphi\,(x)\ \psi_2\,(x)\right]\ \psi_2\,(x) - \ldots.$$

Означивъ чрезъ K_n коэффиціентъ при $\frac{1}{x}$ въ разложеніи функціи

$$f(x)\ \varphi\ (x)\ \psi_n\ (x)$$

въ рядъ по цѣлымъ степенямъ x, при x безконечно большомъ, формулы (VI) могутъ быть представлены слѣдующимъ образомъ:

$$(\mathrm{VII})\, f(x) = \frac{K_0}{a_1 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_1}\right)\right)}\psi_0(x) - \frac{K_1}{a_1 a_2 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_2}\right)\right)}\psi_1(x) + \frac{K_2}{a_1 a_2 a_3 \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{q_2}\right)\right)}\psi_2(x)$$

$$- \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad ,$$

$$(\mathrm{VII})\, f(x) = \frac{A_1 K_0}{a_1}\psi_0(x) - \frac{A_2 K_1}{a_1 a_2}\psi_1(x) + \frac{A_3 K_2}{a_1 a_2 a_3}\psi_2\ (x) - \ .\ .\ .\ .\ .$$

Если, кромѣ того, $f(x)$ обращается въ точкѣ $x = \infty$ въ безконечность конечнаго порядка, то тогда коэффиціенты K_0, K_1, K_2,... могутъ быть выражены въ видѣ производныхъ отъ нѣкоторыхъ функцій. (См. фор. (5) § 10).

Если функція $f(x)$ обращается въ ∞ въ нѣсколькихъ конечныхъ точкахъ:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .\ .\ ,$$

то тогда каждый изъ интеграловъ во вторыхъ частяхъ формулъ (V) можетъ быть выраженъ въ видѣ суммы нѣсколькихъ интегральныхъ вычетовъ. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(x)\varphi(x)\psi_n(x)\,dx = -\underset{(x=\infty,\ b_1,\ b_2,\ldots)}{\mathcal{E}} f(x)\varphi(x)\psi_n(x).$$

Имѣя это въ виду, если допустимъ, что функція $f(x)$ равняется раціональной дроби

$$\frac{F(x)}{f(x)};$$

тогда, означая корни уравненія $f(x) = 0$ чрезъ x_1, x_2, ... x_m, мы будемъ имѣть

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(x)}{f(x)}\varphi(x)\psi_n(x)\,dx = K_n - \sum_i \frac{F(x_i)}{f'(x_i)}\varphi\ (x_i)\ \psi_n\ (x_i),$$

гдѣ K_n означаетъ коэффиціенты при $\frac{1}{x}$ въ разложеніи функціи

$$\frac{F(x)}{f(x)}\ \varphi(x)\ \psi_n(x)$$

въ рядъ по цѣлымъ степенямъ x, при безконечно большихъ значеніяхъ x, — притомъ мы предполагаемъ, что двѣ функціи $\varphi(x)$ и $f(x)$ не имѣютъ ни одной общей точки разрыва.

О функціи X_n.

§ 18. Опредѣленіе функціи X_n. Ея свойства.

1. Коэффиціентъ при t^n въ разложеніи функціи

$$(1)\qquad (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

въ рядъ по восходящимъ степенямъ перемѣнной t, называется функціею Лежандра, и изображается обыкновенно знакомъ X_n. Слѣдовательно, функція (1) есть производящая функціи X_n, и поэтому X_n будетъ функціею цѣлою отъ независимой перемѣнной x.

На основаніи такого опредѣленія функціи X_n, мы имѣемъ слѣдующую формулу:

$$(\mathrm{I})\qquad X_n = \mathcal{E}\,\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\,\frac{1}{((t^{n+1}))}.$$

Отсюда легко получить нѣкоторыя основныя свойства функціи X_n.

2. Во первыхъ, не трудно доказать, что функція X_n — четная, если n число четное, и — нечетная, если n число нечетное. Дѣйствительно, если вмѣсто X_n согласимся писать $X_n(x)$, то

$$(2)\, X_n(x)+X_n(-x) = \mathcal{E}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}}\right]\frac{1}{((t^{n+1}))},$$

$$(3)\, X_n(x)-X_n(-x) = \mathcal{E}\left[\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\right]\frac{1}{((t^{n+1}))},$$

Если n четное, то функція находящаяся подъ знакомъ $\mathcal{E}$ во второй части уравненія (3) — четная; если же n число нечетное, то тогда функція подъ знакомъ $\mathcal{E}$ во второй части уравненія (2) — четная. Но значеніе каждаго изъ двухъ интегральныхъ вычетовъ, составляющихъ вторыя части уравненій (2) и (3), пропорціонально значенію интеграла, взятаго по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ произвольно малымъ радіусомъ; если притомъ подъинтегральная функція будетъ четная, то элементы интеграла въ двухъ діаметрально противоположныхъ точкахъ будутъ знаковъ противоположныхъ, и, слѣдовательно, значеніе интеграла вмѣстѣ со значеніемъ интегральнаго вычета будутъ равняться нулю.

И такъ, мы видимъ, что, когда n четное, вторая половина уравненія (3) равняется нулю, т. е.

$$X_n(x) - X_n(-x) = 0,$$

откуда

$$X_n(x) = X_n(-x),$$

и слѣдовательно функція X_n въ этомъ случаѣ — четная; если же число n нечетное, то тогда вторая часть уравненія (2) равняется нулю, вслѣдствіе чего

$$X_n(x) + X_n(-x) = 0,$$

откуда

$$X_n(x) = -X_n(-x),$$

т. е. функція X_n въ этомъ случаѣ — нечетная.

3. Второе, весьма полезное свойство функціи X_n можно получить слѣдующимъ образомъ:

Принимая во вниманіе формулу

$$\mathcal{E}\, u\frac{dv}{dt} = -\mathcal{E}\, v\frac{du}{dt},$$

и замѣчая, что

$$\frac{d}{dt}\sqrt{1-2xt+t^2} = \frac{t-x}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

мы получимъ

$$n\,\mathcal{E}\frac{\sqrt{1-2xt+t^2}}{((t^{n+1}))} = \underset{(t=0)}{\mathcal{E}}\sqrt{1-2xt+t^2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

$$= \mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\sqrt{1-2xt+t^2}}{((t^n))},$$

$$n\,\mathcal{E}\frac{\sqrt{1-2xt+t^2}}{((t^{n+1}))} = \mathcal{E}\frac{t(t-x)}{\sqrt{1-2xt+t^2}\,((t^{n+1}))},$$

откуда

$$\mathcal{E}\frac{n(1+t^2-2xt)-t^2+tx}{\sqrt{1-2tx+t^2}\,((t^{n+1}))} = 0,$$

или

$$n \mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}((t^{n+1}))} - (2n-1)x \mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}((t^n))}$$

$$+ (n-1) \mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}((t^{n-1}))} = 0,$$

или

$$\text{(II)} \qquad n X_n - (2n-1) x X_{n-1} + (n-1) X_{n-2} = 0$$

Это равенство даетъ возможность, по двумъ смежнымъ функціямъ X_{n-1} и X_{n-2}, вычислить слѣдующую за ними X_n.

Въ частномъ случаѣ, когда $n = 0$, выводъ формулы (II) перестаетъ быть точнымъ, но тогда получаемъ прямо

$$X_0 = \mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}((t))} = 1.$$

Кромѣ того, формула (I) показываетъ намъ, что

$$X_{-n} = 0.$$

Принимая все это въ соображеніе и полагая въ формулѣ (II) $n = 1, 2, 3, ..,$ мы будемъ получать

$$X_1 = x,$$

$$X_2 = \tfrac{3}{2}\left(x - \tfrac{1}{2} x\right),$$

$$X_3 = \tfrac{5}{2}\left(x - \tfrac{3}{5} x\right),$$

. . . . и т. д. . . .

4. Полагая въ формулѣ (I) $x = 1$, мы получимъ

$$X_n(1) = \mathcal{E} \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} \cdot \frac{1}{((t^{n+1}))},$$

или

$$X_n(1) = \mathcal{E} \frac{1}{(1-t)((t^{n+1}))}.$$

Слѣдовательно

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} X_n(1) = 1 \\ X_n(-1) = (-1)^n \end{cases}$$

§. 19. Опредѣленіе коэффиціента при x^m въ выраженіи функціи X_n.

1. Полагая

$$X_n = A_n x^n + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_m x^m + \ldots,$$

мы будемъ имѣть

$$A_m = \mathcal{E} \frac{X_n}{((x^{m+1}))},$$

или, подставляя вмѣсто X_n его выраженіе, данное въ предъидущемъ §-фѣ,

$$A_m = \mathcal{E}\mathcal{E}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\frac{1}{((x^{m+1}\ t^{n+1}))}.$$

Для того, чтобы найти значеніе второй части этого уравненія, мы представимъ его такъ:

$$A_m = \mathcal{E}\frac{1}{((t^{n+1}))}\mathcal{E}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\frac{1}{((x^{m+1}))},$$

и постараемся сперва опредѣлить значеніе вычета, относящагося къ x. Для этого, мы положимъ

$$\sqrt{1-2tx+t^2} = \sqrt{1+t^2}+u;$$

тогда получимъ

$$\mathcal{E}\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}((x^{m+1}))} = (-1)^m\ 2^{m+1}\,\mathcal{E}\frac{t^m}{(2\sqrt{1+t^2}+u)^{m+1}((u^{m+1}))}$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{2^m 1.2.3.\ldots m}\frac{t^m}{(1+t^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

и слѣдовательно

$$A_m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots.2m}{2^m.\ 1.2.3\ldots m}\mathcal{E}\frac{1}{(1+t^2)^{m+\frac{1}{2}}((t^{n-m+1}))}.$$

Такъ какъ въ разложеніи функціи $(1+t^2)^{-m-\frac{1}{2}}$, по биному Ньютона, содержатся только четные показатели t, то изъ послѣдней формулы видно, что, въ томъ случаѣ, когда число $n-m$ нечетное, $A_m = 0$: это потверждается тѣмъ, что функція X_n такой же четности какъ и число n.

Если число $(n-m)$ — четное, то, полагая

$$n-m=2k,$$

мы будемъ имѣть

$$A_m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots.2m}{2^m 1.2.3\ldots m}\mathcal{E}\frac{1}{(1+t^2)^{m+\frac{1}{2}}((t^{2k+1}))},$$

или

$$A_m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots.2m}{2^m 1.2.3\ldots m}\mathcal{E}\frac{1}{(1+t)^{m+\frac{1}{2}}((t^{k+1}))};$$

но

$$\mathcal{E}\frac{1}{(1+t)^{m-\frac{1}{2}}((t^{k+1}))} = (-1)^k\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(n+m-1)}{2^k 1.2.3\ldots k},$$

слѣдовательно

$$(2)\qquad A_m = \frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{2^m 1.2.3\ldots m}\,(-1)^k\,\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(n+m-1)}{2^k 1.2.3\ldots k},$$

или

$$(\mathrm{I})\qquad A_m = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots m}\,(-1)^k\,\frac{(2m+1)(2m+3\ldots(n+m-1)}{2^k 1.2.3\ldots k}.$$

Такое значеніе коэффиціента при x^m въ выраженіи функціи X_n. Полагая $m = n$, будемъ имѣть

$$k = 0,$$

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n};$$

раздѣляя значеніе коэффиціента A_m на значеніе коэффиціента A_n получимъ

$$\frac{A_m}{A_n} = (-1)^k\,\frac{(m+1)(m+2)\ldots n}{(2m+1)(2m+3)\,.(2n-1)}\,\frac{(2m+1)(2m+3)\ldots(n+m-1)}{2^k 1.2.3\ldots k},$$

или

$$\frac{A_m}{A_n} = (-1)^k\,\frac{(m+1)(m+2)\ldots n}{(n+m+1)(n+m+3)\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{2^k 1.2.3\ldots k};$$

подставляя вмѣсто m, $n-2k$, получимъ окончательно

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{A_{n-2k}}{A_n} = (-1)^k\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2k+1)}{2^k 1.2.3\ldots k(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}.$$

Эта формула употребляется тогда, когда функцію X_n желаемъ представить подъ видомъ

$$X_n = A_n\left(x^n + \frac{A_{n-2}}{A_n}x^{n-2} + \frac{A_{n-4}}{A_n}x^{n-4} + \ldots\right)$$

2. Вернемся къ формулѣ (2), и подставимъ въ ней, $n-2k$ вмѣсто m; тогда получимъ

$$A_{n-2k} = (-1)^k\,\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(2n-4k)}{2^{n-2k}1.2.3\ldots(n-2k)}\,\frac{(2n-4k+1)(2n-4k+3)\ldots(2n-2k-1)}{2^k 1.2.3\ldots k}.$$

Умножая числителя и знаменателя второй части на

$$2^{2k}(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots n$$

и групируя множителей въ ихъ натуральномъ порядкѣ, получимъ

$$A_{n-2k} = (-1)^k\,\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(2n-2k)}{2^n 1.2.3\ldots n}\,\frac{(2n-2k+2)(2n-2k+4)\ldots 2n}{2^k 1.2.3\ldots k},$$

или

$$\text{(III)}\quad A_{n-2k}=\frac{(-1)^k}{2^n 1.2.3...n}\,\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1.2.3...k}\,(2n-2k)(2n-2k-1)...\\ ...(n-2k+1).$$

Изъ этой формулы ясно видно, что, въ выраженіи функціи X_n членъ $A_{n-2k}\,x^{n-2k}$ можетъ быть представленъ такъ:

$$A_{n-2k}\,x^{n-2k}=\frac{(-1)^k}{2^n\,1.\,2.\,3...n}\,\frac{n(n-1)..(n-k+1)}{1.\,2.\,3...k}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2)^{n-k}.$$

Но отсюда получаемъ

$$X_n=\sum A_{n-2k}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n 1.\,2.\,3...n}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum(-1)^k\frac{n(n-1)..(n-k+1)}{1.2.3...k}(x^2)^{n-k},$$

гдѣ суммированіе распространяется на $k=0,1,2,...n$; или еще

$$\text{(IV)}\qquad X_n=\frac{1}{2^n 1.\,2.\,3..n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n.$$

Это выраженіе функціи X_n далъ въ первый разъ Ивори.

3. Первое, что можно вывести изъ формулы (IV), это то, что уравненіе

$$\text{(3)}\qquad X_n=0$$

имѣетъ всѣ корни вещественные и что всѣ они содержатся между -1 и $+1$. Дѣйствительно, такъ какъ всѣ корни уравненія

$$(x^2-1)^n=0$$

вещественны и равняются $+1$ или -1, то, по теоремѣ Ролля, n-ая производная отъ $(x^2-1)^n$ непремѣнно обращается n разъ въ нуль между предѣлами -1 и $+1$; притомъ всѣ корни уравненія (3) будутъ неравные между собою.

§ 20. Новый выводъ формулы (IV) предъидущаго параграфа.

Формулу (IV) предъидущаго параграфа можно вывести весьма легко помощью тѣхъ же пріемовъ, которые послужили намъ для вывода формулы Лагранжа (См. § 13).

Для этого, мы сначала проинтегрируемъ обѣ части уравненія

$$X_n\,dx=\mathcal{E}\,\frac{dx}{(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}}\,((t^{n+1}))},$$

вслѣдствіе чего получимъ

$$\int X_n\, dx = \mathcal{E}\frac{1}{((t^{n+1}))}\int\frac{dx}{(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Но

$$\int\frac{dx}{(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{t}\,(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} + F(t),$$

гдѣ $F(t)$ означаетъ произвольную функцію отъ t; слѣдовательно

(1) $$\int X_n\, dx = \mathcal{E}\left[F(t)-\frac{1}{t}(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{((t^{n+1}))}.$$

Положимъ теперь

(2) $$F(t)-\frac{1}{t}\,(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} = z,$$

и постараемся опредѣлить функцію $F(t)$ такъ, чтобы t выражалось раціональнымъ образомъ посредствомъ z: этого мы достигаемъ, полагая

(3) $$F(t) = \frac{1}{t};$$

ибо тогда на мѣсто уравненія (2) получаемъ

(4) $$\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\,(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}} = z,$$

откуда

(5) $$t = 2\frac{z-x}{z^2-1}.$$

На основаніи уравненій (3) и (4), формула (1) принимаетъ такой видъ:

$$\int X_n\, dx = \mathcal{E}\frac{z}{((t^{n+1}))},$$

или

$$\int X_n\, dx = -\frac{1}{n}\mathcal{E}z\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^n}\right).$$

Но, интегрируя по частямъ, мы находимъ

$$\mathcal{E}z\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^n}\right) = -\mathcal{E}\frac{\frac{dz}{dt}}{((t^n))};$$

слѣдовательно

$$\int X_n\, dx = \frac{1}{n}\mathcal{E}\frac{\frac{dz}{dt}}{((t^n))}.$$

Вводя теперь во вторую часть (6) вмѣсто независимой перемѣнной t новую перемѣнную z, опредѣляемую уравненіемъ (5), мы сначала получимъ (См. теор. 13 § 10)

$$\mathcal{E}\frac{\frac{dz}{dt}}{((t^n))}=\frac{1}{2^n}\mathcal{E}\frac{\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dz}\;(z^2-1)^n}{(((z-x)^n))},$$

то есть,

$$\mathcal{E}\frac{\frac{dz}{dt}}{((t^n))}=\frac{1}{2^n}\mathcal{E}\frac{(z^2-1)^n}{(((z-x)^n))},$$

вслѣдствіе чего

$$\int X_n\,dx=\frac{1}{2^n n}\mathcal{E}\frac{(z^2-1)^n}{(((z-x)^n))}.$$

Принимая, наконецъ, въ соображеніе формулу (5) § 10, мы находимъ

$$\mathcal{E}\frac{z^2-1}{(((z-x)^n))}=\frac{1}{1.\,2.\,3\ldots n-1}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}};$$

слѣдовательно

$$\int X_n\,dx=\frac{1}{2^n\,1.\,2.\,3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}},$$

откуда, чрезъ дифференцированіе обѣихъ частей,

$$X_n=\frac{1}{2^n\,1.\,2.\,3\ldots n}\,\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n}.$$

§ 21. Выводъ дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція X_n.

1. Положивъ, для удобства въ вычисленіи,

$$1-2xt+t^2=T,\qquad T^{-\frac{1}{2}}=u,$$

не трудно получить слѣдующій рядъ уравненій:

$$X_n=\mathcal{E}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}((t^{n+1}))},\qquad u=\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dX_n}{dx}=\mathcal{E}\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}((t^n))},\qquad \frac{du}{dt}=\frac{x-t}{T^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2X_n}{dx^2}=\mathcal{E}\frac{3}{T^{\frac{5}{2}}((t^{n-1}))},\qquad \frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}+3\,\frac{(x-t)^2}{T^{\frac{5}{2}}}.$$

Возьмемъ теперь во вниманіе выраженіе

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))},$$

значеніе котораго не трудно получить, выполняя два раза сряду интегрированіе по частямъ. На самомъ дѣлѣ, мы находимъ

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=-(n+1)\mathcal{E}\frac{\frac{du}{dt}}{((t^n))}=n(n+1)\mathcal{E}\frac{u}{((t^{n+1}))};$$

но

$$u=(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

слѣдовательно

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=n(n+1)\frac{1}{\sqrt{(1-2txt+t^2((t^{n+1}))}},$$

или

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=n(n+1)X_n. \tag{1}$$

Выполняя дифференцированіе въ первой части (1) и подставляя на мѣсто u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ ихъ значенія, мы получаемъ

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=-\mathcal{E}\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}((t^{n-1}))}+3\mathcal{E}\frac{(x-t)^2}{T^{\frac{5}{2}}((t^{n-1}))}$$

$$+2\mathcal{E}\frac{x-t}{T^{\frac{3}{2}}((t^n))},$$

или, принимая во вниманіе вышеприведенныя выраженія X_n, $\frac{dX_n}{dx}$, $\frac{d^2X_n}{dx^2}$,

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=-\mathcal{E}\frac{T}{T^{\frac{5}{2}}((t^{n-1}))}+x^2\frac{d^2X_n}{dx^2}+3\mathcal{E}\frac{t^2-2tx}{T^{\frac{5}{2}}((t^{n-1}))}$$

$$+2x\frac{dX_n}{dx}-2\mathcal{E}\frac{T}{T^{\frac{5}{2}}((t^{n-1}))}.$$

Подставляя во вторую часть этого равенства $T-1$ вмѣсто t^2-2tx, и складывая подобные члены, получимъ

$$\mathcal{E}\frac{\frac{d}{dt}\left(t^2\frac{du}{dt}\right)}{((t^{n+1}))}=x^2\frac{d^2X_n}{dx^2}-\frac{d^2X_n}{dx^2}+2x\frac{dX_n}{dx}. \tag{2}$$

Сравнивая равенство (1) съ равенствомъ (2), мы находимъ

$$(1) \qquad (1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2}-2x\frac{dX_n}{dx}+n(n+1)X_n=0$$

И такъ, мы видимъ, что функція X_n удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію втораго порядка безъ послѣдняго члена.

2. Изъ уравненія (1) вытекаетъ прямо слѣдствіе, доказанное въ предъидущемъ §-фѣ, именно, что уравненіе

$$X_n = 0$$

имѣетъ всѣ корни вещественные и неравные.

Доказательство этого можно найти въ Cours d'Algèbre Supérieure par Serret (3 édition T. 1. p. 187).

§ 22. О второмъ интегралѣ дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ функція X_n.

Такъ какъ одинъ интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$(1) \qquad (1-x^2)\frac{d^2z_n}{dx^2}-2x\frac{dz_n}{dx}+n(n+1)z_n=0$$

намъ извѣстенъ, и равняется X_n, то, пользуясь извѣстнымъ методомъ, мы можемъ найти второй интегралъ того-же уравненія. На самомъ дѣлѣ мы находимъ

$$(2) \qquad z_n = CX_n\int\frac{dx}{(x^2-1)X_n^2},$$

гдѣ C означаетъ произвольную постоянную.

Не трудно показать, какія логарифмическія функціи будутъ содержаться въ выраженіи неопредѣленнаго интеграла, находящагося во второй части формулы (2). Для этого, мы положимъ

$$X_n = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n),$$

$$(3) \quad \frac{1}{(x^2-1)X_n^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{A'_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_1}{(x-\alpha_1)^2}+\frac{A'_2}{x-\alpha_2}+\frac{A_2}{(x-\alpha_2)^2}+\ldots,$$

и посмотримъ, чему равняются коэффиціенты a, b, A_1, A_1', A_2, A'_2,… и т. д.

Во первыхъ, мы имѣемъ

$$A'_1 = \underset{(x=\alpha_1)}{\mathcal{E}} \frac{1}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{(x-\alpha_1)^2}{(x^2-1)X_n^2}\right)_{x=\alpha_1},$$

или, полагая

$$\frac{(x-\alpha_1)^2}{(x^2-1)X_n^2} = f(x),$$

$$A'_1 = f'(\alpha_1).$$

Но изъ уравненія

$$\log f(x) = 2\log(x-\alpha_1) - \log(x^2-1) - 2\log X_n$$

мы получаемъ

$$\frac{f'(x)}{2f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} - \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{X_n}\frac{dX_n}{dx},$$

или

$$\frac{f'(x)}{2f(x)} = -\frac{x}{x^2-1} + \frac{X_n - (x-\alpha_1)\frac{dX_n}{dx}}{(x-\alpha_1)X_n},$$

откуда, полагая $x = \alpha_1$ и замѣчая, что

$$\left(\frac{X_n - (x-\alpha_1)\frac{dX_n}{dx}}{(x-\alpha_1)X_n}\right)_{x=\alpha_1} = -\left(\frac{\frac{d^2X_n}{dx^2}}{2\frac{dX_n}{dx}}\right)_{x=\alpha_1},$$

мы находимъ

$$\frac{f'(\alpha_1)}{2f(\alpha_1)} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2-1} - \frac{\left(\frac{d^2X_n}{dx^2}\right)_{x=\alpha_1}}{2\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=\alpha_1}},$$

или

$$\frac{f'(\alpha_1)}{2f(\alpha_1)} = -\frac{(\alpha_1^2-1)\left(\frac{d^2X_n}{dx^2}\right)_{x=\alpha_1} + 2\alpha_1\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=\alpha_1}}{2(\alpha_1^2-1)\left(\frac{dX_n}{dx}\right)_{x=\alpha_1}}.$$

Принимая во вниманіе дифференціальное уравненіе (1), которому удовлетворяетъ функція X_n, мы видимъ, что числитель второй части послѣдняго уравненія равняется $n(n+1)\,(X_n)_{x=\alpha_1}$, т. е., равняется нулю; слѣдовательно

$$\frac{f'(\alpha_1)}{2f(\alpha_1)} = 0.$$

Такъ какъ $f(\alpha_1)$ не равняется нулю, то изъ послѣдняго уравненія слѣдуетъ, что

$$f'(\alpha_1) = 0,$$

т. е.

$$A'_1 = 0.$$

То, что мы доказали относительно A'_1, относится и къ прочимъ коэффиціентамъ, такимъ какъ A'_2, A'_3, . . . и т. д.; вслѣдствіе этого, вмѣсто уравненія (3) мы имѣемъ

$$(4) \qquad \frac{1}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{A_1}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots,$$

гдѣ

$$a = \left[\frac{x-1}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=1} = \frac{1}{2},$$

$$b = \left[\frac{x+1}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{2},$$

$$A_1 = \left[\frac{(x-\alpha_1)^2}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=\alpha_1},$$

. . . . . . и т. д. . . . . . .

Интегрируя обѣ части уравненія (4), мы получаемъ

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} - \frac{A_1}{x-\alpha_1} - \frac{A_2}{x-\alpha_2} - \ldots,$$

или

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} - X_n \sum_i \frac{A_i}{x-\alpha_i},$$

гдѣ суммированіе распространяется на $i = 1, 2, 3, \ldots n$.

Вслѣдствіе этого уравненіе (2) принимаетъ такой видъ:

$$(6) \qquad z_n = C\left[\frac{X_n}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + S_n\right],$$

гдѣ

$$S_n = -X_n \sum_i \frac{A_i}{x-\alpha_i}, \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n),$$

и слѣдовательно S_n изображаетъ цѣлую раціональную функцію.

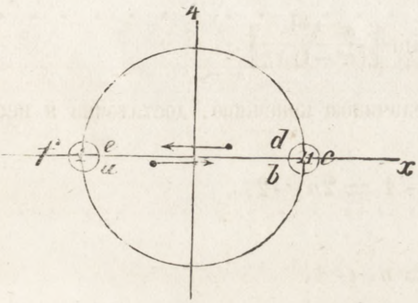
2. Мы положимъ въ формулѣ (6) $C = -1$ и займемся преимущественно функціей

$$(I)\qquad Z_n = -X_n\int_\infty^x \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2} = \tfrac{1}{2}X_n \log\frac{x+1}{x-1} - S_n,$$

которая въ точкѣ $x=\infty$ обращается въ нуль.

Проведя около двухъ точекъ -1 и $+1$ сомкнутую линію *abcdefa* (См. Чер. 8), функція Z_n, опредѣляемая формулой (I), будетъ, очевидно, конечною и неразрывною во всѣхъ точкахъ координатной плоскости, находящихся внѣ линіи *abcdefa*; притомъ два совпадающіе края *ab* и *ed* образуютъ линію разрыва такого свойства, что, въ каждой ея точкѣ, значеніе функціи Z_n, соотвѣтсвующее нижнему краю превышаетъ на πi значеніе той-же функціи, соотвѣтствующее верхнему краю. Кромѣ того, изъ формулы (I) ясно видно, что функція Z_n есть четная или нечетная, смотря по тому, четное ли число $(n+1)$ или нечетное.

Черт. 8.



Если изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ единицѣ начертимъ кругъ, то, для всѣхъ точекъ, лежащихъ внѣ этого круга, будемъ имѣть

$$Z_n = \frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m+2}}{x^{m+2}} + \frac{A_{m+4}}{x^{m+4}} + \ldots,$$

причемъ цѣлое число m опредѣляетъ порядокъ функціи X_n въ точкѣ $x=\infty$. Это число вмѣстѣ съ коэффиціентомъ A_m могутъ быть опредѣлены безъ затрудненія при помощи формулы (I).

На самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$\lim\,(Z_n x^m)_{x=\infty} = A_m,$$

то

$$\lim\left[x^m X_n\int_\infty^x \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=\infty} = -A_m;$$

но, при безконечно большомъ значенiи x, мы имѣемъ

(8) $$X_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...u} x^n (1+\varepsilon), \quad (\lim \varepsilon = 0),$$

слѣдовательно

$$\lim \left[x^{m+n} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=\infty} = -A_m \frac{1.2.3....n}{1.3.5..(2n-1)}.$$

Отыскивая предѣлъ первой части этого уравненiя, которая при $x=\infty$ принимаетъ видъ $\infty\, 0$, мы находимъ, что онъ равняется

(9) $$-\frac{1}{m+n} \lim \left[\frac{x^{m+n+1}}{(x^2-1)X_n^2}\right]_{x=\infty};$$

но чтобы этотъ предѣлъ былъ величиною конечною, достаточно и необходимо, чтобы

$$m+n+1 = 2n+2,$$

откуда получаемъ

(10) $$m = n+1.$$

Подставляя въ выраженiе (9) $n+1$ вмѣсто m, мы получимъ

$$-\frac{1}{2n+1} \lim \left(\frac{x^{2n+2}}{(x^2-1)X_n^2}\right)_{x=\infty},$$

или, принимая во вниманiе уравненiе (8),

$$-\frac{1}{2n+1} \lim \left[\frac{(1.2.3....n)^2}{(1.3.5..(2n-1)^2} \frac{x^{2n+2}}{(x^2-1)x^{2n}(1+\varepsilon)^2}\right],$$

т. е.,

$$-\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1.2.3....n}{1.3.5...(2n-1)}\right]^2.$$

Это есть значенiе первой части уравненiя

$$\lim \left[x^{m+n} \int_{\infty}^{x} \frac{dx}{(x^2-1)X_n^2}\right] = -A_m \frac{1.2.3....n}{1.3.5...(2n-1)};$$

слѣдовательно

$$-\frac{1}{2n+1}\left[\frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)}\right]^2 = -A_{n+1} \frac{1.2.3...n}{1.3.5...(2n-1)},$$

откуда

(11) $$A_{n+1} = \frac{1.2.3. ..n}{1.3.5...(2n+1)}.$$

И такъ, мы нашли значеніе числа m и коэффиціента A_m, — первое изъ нихъ показываетъ намъ, что функція Z_n обращается въ точкѣ $x = \infty$: въ нуль $(n + 1)$-го порядка. Что касается до прочихъ коэффиціентовъ A_{n+3}, A_{n+5}, ..., то мы можемъ ихъ опредѣлить, подставляя въ дифференціальное уравненіе (1), вмѣсто Z_n,

$$\frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{A_{n+3}}{x^{n+3}} + \ldots,$$

и приравнивая коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x нулю.

Такимъ образомъ мы можемъ представить функцію Z_n въ видѣ ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ $\frac{1}{x}$ и сходящагося при $\mathrm{mod}\ x > 1$. Но можно также найти другой рядъ, который дастъ возможность вычислять значеніе функціи Z_n не только тогда, когда $\mathrm{mod}\ x > 1$, но для всякаго значенія x, содержащагося внѣ сомкнутой линіи $abcdefa$ (Чер. 8), т. е., для всѣхъ значеній независимой перемѣнной x, кромѣ вещественныхъ, содержащихся между -1 и $+1$. Этотъ рядъ будетъ гораздо намъ полезнѣе чѣмъ предъидущій, и потому мы постараемся опредѣлить его въ точности.

Не трудно убѣдиться, что если положимъ

$$z + \frac{1}{z} = 2x,$$

то, въ то время, когда перемѣнная точка x опишетъ сомкнутую линію $abcdefa$ (Чер. 8), по направленію стрѣлки, перемѣнная z опишетъ около начала координатъ полную окружность круга O радіуса равнаго единицѣ, въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, смотря по тому, которое изъ двухъ значеній перемѣнной z:

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

мы примемъ во вниманіе. Для избѣжанія сбивчивости, мы будемъ исключительно пользоваться формулой

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

предполагая при этомъ, что при $x = \infty$, $z = \infty$.

Очевидно, что такимъ образомъ функція z вполнѣ опредѣлена для всѣхъ точекъ координатной плоскости, не лежащихъ на линіи ab (Чер. 8), и, когда перемѣнная x станетъ двигаться по линіи $abcdefa$ по направленію стрѣлки, въ то время перемѣнная z будетъ двигаться въ положительномъ направленіи по окружности округа O. Кромѣ того, значенія функціи z, для всѣхъ точекъ на линіи ab съ нижней стороны, можно вычислить по формулѣ

$$z = x - i\sqrt{1 - x^2}, \quad (\sqrt{1-x^2} > 0),$$

а для всѣхъ точекъ линіи ab съ верхней стороны, по формулѣ

$$z = x + i\sqrt{1 - x^2}, \quad (\sqrt{1-x^2} > 0).$$

Всякой точкѣ x, не лежащей на линіи ab, будетъ соотвѣтствовать одна только точка z, внѣ круга O, — и обратно.

Принимая все это въ соображеніе, мы заключаемъ, что функція Z_n, разсматриваемая какъ зависящая отъ перемѣнной z будетъ конечная и неразрывная во всей безконечной плоскости, содержащейся внѣ круга O. Кромѣ того, функція Z_n обращается въ точкѣ $z = \infty$ въ нуль $(n+1)$-го порядка, а коэффиціентъ A_1 при первомъ членѣ въ разложеніи функціи Z_n въ рядъ по цѣлымъ степенямъ z, можно опредѣлить помощію выраженія (11), на основаніи того замѣчанія, что, при безконечно большомъ значеніи x, $z = 2x$. На самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$A_1 = \lim\, (Z_n\, z^{n+1})_{z=\infty},$$

или

$$A_1 = 2^{n+1} \lim\, (Z_n\, x^{n+1})_{z=\infty},$$

а, по формулѣ (11),

$$\lim\, (Z_n\, x^{n+1}) = \frac{1.2.3....n}{1.3.5...(2n+1)},$$

то

$$(12) \qquad A_1 = 2^{n+1}\, \frac{1.2.3\, ...n}{1.3.5...(2n+1)}.$$

Для того, чтобы опредѣлить прочіе коэффиціенты въ ряду

$$(13)\quad Z_n = \frac{A_1}{z^{n+1}} + \frac{A_3}{z^{n+3}} + \frac{A_5}{z^{n+5}} + \ldots + \frac{A_{2k+1}}{z^{n+2k+1}} + \ldots\, ,$$

нужно сперва составить дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ функція Z_n, разсматриваемая какъ зависящая отъ перемѣнной z; но это сдѣлать не трудно, ибо стоитъ только въ уравненіе (1) ввести, вмѣсто независимой перемѣнной x, новую независимую перемѣнную z. На самомъ дѣлѣ мы получимъ:

$$z^2(1 - z^2)\frac{d^2 z_n}{dz^2} - 2z^3\frac{dz_n}{dz} - n(n+1)(1 - z^2)\, z_n = 0.$$

Вносся въ это уравненіе вмѣсто z_n, вторую часть уравненія (13), и приравнивая нулю коэффиціентъ при $\frac{1}{z^{2k+1}}$, мы найдемъ

$$A_{2k+3} = A_{2k+1} \frac{(n+k+1)(2k+1)}{(k+1)(2n+2k+3)},$$

откуда

$$\frac{A_{2k+3}}{A_{2k+1}} = \frac{(k+\frac{1}{2})(n+k+1)}{(k+1)\left(\frac{2n+3}{2}+k\right)}.$$

Полагая въ этой формулѣ поочередно

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

и принимая во вниманіе формулу (12), мы будемъ получать значенія коэффиціентовъ

$$A_3,\ A_5,\ A_7,\ \ldots\ldots$$

Такимъ образомъ получимъ

$$Z_n = 2^{n+1} \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)} \left[\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2}.(n+1)}{1.\frac{2n+3}{2}} \frac{1}{z^{n+3}} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1).(n+1)(n+2)}{1.2.\frac{2n+3}{2}\left(\frac{2n+3}{2}+1\right)} \frac{1}{z^{n+5}} + \ldots\ldots\right],$$

или

$$Z_n = 2^{n+1} \frac{1.2.3..n}{1.3.5..(2n+1)} \frac{1}{z^{n+1}} \left[1 + \frac{\frac{1}{2}.(n+1)}{1.\frac{2n+3}{2}} \frac{1}{z^2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(n+1)(n+2)}{1.2.\frac{2n+3}{2}\left(\frac{2n+3}{2}+1\right)} \frac{1}{z^4} + \ldots\ldots\right].$$

Рядъ, содержащійся между скобками во второй части послѣдняго уравненія, принадлежитъ къ гипергеометрическимъ рядамъ; три параметра его равняются

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = n+1,\ \gamma = \frac{2n+3}{2};$$

вслѣдствіе этого, послѣднее уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$\text{(II)} \quad Z_n = 2^{n+1} \frac{1.2.3\ldots n}{1.3.5\ldots(2n+1)} \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\tfrac{1}{2},\ n+1,\ \frac{2n+3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right).$$

Формула эта даетъ намъ возможность вычислять значенія функціи Z_n для значеній перемѣнной z съ модулемъ большимъ единицы, и слѣдовательно, для всѣхъ значеній независимой перемѣнной x, не находящихся на линіи ab (чер. 8).

3. Функцію Z_n можно представить еще иначе, именно, въ видѣ опредѣленнаго интеграла: для этого, стоитъ только воспользоваться одною формулой Эйлера.

На самомъ дѣлѣ, допустивъ что

$$\mod z > 1 \text{ и } \mod u \leqq 1,$$

мы будемъ имѣть

$$u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{-c}=u^{a-1}(1-u^{b-1})\left[1+\frac{c}{1}\frac{u}{z}+\frac{c(c+1)u^2}{1.2}\frac{}{z^2}+\cdots\right].$$

Предполагая теперь, что вещественныя части величинъ a и b положительны, мы умножимъ обѣ части послѣдняго равенства на du и проинтегрируемъ ихъ отъ 0 до 1; тогда получимъ

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{-c}du=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du+\frac{c}{1}\frac{1}{z}\int_0^1 u^{a}(1-u)^{b-1}du$$

$$+\frac{c(c+1)}{1.2.}\frac{1}{z^2}\int_0^1 u^{a+1}(1-u)^{b-1}du+\ldots\ldots;$$

но

$$\int_0^1 u^{a+k}(1-u)^{b-1}du=\frac{\Gamma(a+k+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+k+1)},$$

слѣдовательно,

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{-c}du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[1+\frac{a.c}{1.(a+b)}\frac{1}{z}+\frac{a(a+1)c(c+1)}{1.2.(a+b)(a+b+1)}\frac{1}{z^2}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots\right],$$

или

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{-c}du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,F\left(a,c,a+b,\frac{1}{z}\right)$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$a=\tfrac{1}{2},\quad b=n+1,\quad c=n+1,$$

и подставляя z^2 вмѣсто z, мы получимъ

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-(n+1)}du=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}\,F\left(\frac{1}{2},n+1,\frac{2n+3}{2},\frac{1}{z^2}\right)$$

отсюда, умножая обѣ стороны на $z^{-(n+1)}$,

$$(14)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(z-\frac{u}{z}\right)^{-(n+1)}du=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}\frac{1}{z^{n+1}}F\left(\frac{1}{2},n+1,\frac{2n+3}{2},\frac{1}{z^2}\right).$$

Если предположимъ теперь, что n число цѣлое, то, изъ уравненія

$$\Gamma\left(n+1+\tfrac{1}{2}\right)=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

не трудно вывести, что

$$\Gamma(n+1+\tfrac{1}{2})=(n+\tfrac{1}{2})(n+\tfrac{1}{2}-2)\,(n+\tfrac{1}{2}-2)\ldots.\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

или

$$\Gamma\left(n+1+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1\,3.5\ldots..(2n+1)}{2^{n+1}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right);$$

подставляя во вторую часть формулы (14), вмѣсто $\Gamma(n+1+\frac{1}{2})$, полученное выраженіе, мы находимъ

$$\int u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(z-\frac{u}{z}\right)^{-(n+1)}du=2^{n+1}\frac{1.2\,3\ldots..n}{1.3.5\ldots.(2n+1)}\frac{1}{z^{n+1}}F\left(\frac{1}{2},n+1,\frac{2n+3}{2}\frac{1}{z^2}\right).$$

Вторая часть этой формулы образуетъ ничто иное, какъ разсматриваемую нами функцію Z_n (См. формулу II); слѣдовательно, мы получаемъ такое новое выраженіе для функціи Z_n:

$$Z_n=\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^n\left(z-\frac{u}{z}\right)^{-(n+1)}du.$$

Полагая

$$u=\frac{v-1}{v+1},$$

мы получаемъ

$$Z_n=2^{n+1}\int_1^\infty\frac{1}{\left[z+\frac{1}{z}+v\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^{n+1}}\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}};$$

полагая, во вторыхъ,

$$v=\operatorname{cosit},$$

будемъ имѣть

$$Z_n=2^{n+1}\int_0^\infty\frac{dt}{\left[z+\frac{1}{z}+\operatorname{cosit}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^{n+1}}.$$

Но

$$z+\frac{1}{z}=2x,\quad z=x+\sqrt{x^2-1},\quad z-\frac{1}{z}=2\sqrt{x^2-1}$$

слѣдовательно,

$$\text{(III)}\qquad Z_n=\int_0^\infty \frac{dt}{(x+\operatorname{cosi}t\,\sqrt{x^2-1})^{n+1}}.$$

Это есть, именно, то выраженіе функціи Z_n, которое мы желали вывести; оно имѣетъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ x, — даже при вещественныхъ, содержащихся между -1 и $+1$, ибо въ этомъ случаѣ, подъинтегральная функція въ предѣлахъ интегрированія не обращается въ ∞ и вмѣстѣ съ тѣмъ остается неразрывною относительно смежныхъ точекъ, лежащихъ по одной сторонѣ линіи ab (См. Чер. 8).

4. Вернемся къ формулѣ

$$Z_n=\tfrac{1}{2}\,X_n\log\frac{x+1}{x-1}-S_n,$$

и представимъ ее такъ:

$$\text{(15)}\qquad \tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{S_n}{X_n}=\frac{Z_n}{X_n}.$$

Такъ какъ функція

$$\frac{Z_n}{X_n},$$

при безконечно большихъ значеніяхъ x, $(2n+1)$-ой степени относительно $\frac{1}{x}$, а степень функціи X_n равняется n, то изъ уравненія (15) слѣдуетъ, что разлагая функцію

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

въ непрерывную дробь, между ея подходящими дробями будетъ непремѣнно находиться дробь

$$\frac{S_n}{X_n}.$$

Кромѣ того, такъ какъ двѣ функціи S_n и X_n не имѣютъ общаго дѣлителя зависящаго отъ x, что ясно видно изъ формулы (7), то слѣдовательно, обозначая чрезъ

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

ту подходящую дробь, знаменатель которой n-ой степени, мы будемъ имѣть:

$$S_n = C_n P_{n+1},$$
$$X_n = C_n Q_{n+1},$$

гдѣ C_n изображаетъ нѣкоторую величину, независящую отъ x, но которая можетъ перемѣняться вмѣстѣ съ n.

§ 23. Свойства функцій X_n, разсматриваемыхъ какъ знаменатели подходящихъ дробей.

1. Въ концѣ §-фа 16 дано было слѣдующее равенство

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{x+h}{x-h} = \cfrac{h}{x - \cfrac{b_1 h^2}{x - \cfrac{b_2 h^2}{x - \dots}}},$$

причемъ

$$b_n = \frac{n.n}{(2n-1)(2n+1)};$$

полагая $h = 1$, мы будемъ имѣть

(1)
$$\tfrac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} = \cfrac{1}{x - \cfrac{b_1}{x - \cfrac{b_2}{x - \dots}}}.$$

Коэффиціенты при наивысшихъ степеняхъ x въ числителяхъ и знаменателяхъ подходящихъ дробей, получаемыхъ отъ второй части равенства (1), равняются единицѣ; но такъ какъ коэффиціентъ при наивысшей степени x въ выраженіи функціи X_n равняется

$$\frac{1.3.5....2n-1}{1.2.3....n},$$

то слѣдовательно, для числа, означеннаго нами въ концѣ предъидущаго § чрезъ C_n, мы имѣемъ:

(2)
$$C_n = \frac{1.3.5...2n-1}{1.2.3....n}.$$

2. Примѣняя формулы (16) § 16 къ уравненію (1) и замѣчая, что въ нашемъ случаѣ, на основаніи формулы (2), имѣемъ

$$Q_{n+1} = \frac{1.2.3....n}{1.3.5......(2n-1)} X_n,$$

мы получимъ такія двѣ формулы:

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} X_m X_n\,dx = 0,\\ &\int_{-1}^{+1} X^2_n\,dx = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}\right.$$

Отсюда мы выводимъ слѣдующія заключенія:

1) Если данная функція $f(x)$ разлагается въ рядъ вида

$$(3)\qquad f(x) = A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_nX_n + \ldots,$$

при всѣхъ значеніяхъ x, содержащихся между -1 и $+1$, то коэффиціенты $A_0, A_1, A_2, \ldots$ могутъ быть опредѣлены по формулѣ

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,X_n\,dx.$$

2) Если функція $f(x)$ равняется нулю, то $A_n = 0$: это показываетъ что произвольная функція не можетъ быть двоякимъ образомъ представлена подъ видомъ (3).

3) Наконецъ, изъ формулы

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n = 0$$

вытекаетъ слѣдствіе, что всѣ корни уравненія

$$X_n = 0$$

вещественны и содержатся между -1 и $+1$(*).

§ 24. Разложеніе x^n въ рядъ вида $A_0\,X_0 + A_1\,X_1 + \ldots$

1. Если положимъ

$$(1)\qquad x^n = A_n\,X_n + A_{n-2}\,X_{n-2} + \ldots + A_k\,X_k + \ldots,$$

то

$$(2)\qquad A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} x^n\,X_k\,dx.$$

Для того, чтобы выполнить на самомъ дѣлѣ интегрированіе во второй части формулы (2), мы внесемъ

$$\frac{1}{2^k\,\Gamma(k+1)}\,\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}$$

(*) Legendre. Exercices de Calcul intégral.

на мѣсто X_k; тогда получимъ

$$A_k = \frac{2k+1}{2^{k+1}\,\Gamma(k+1)} \int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx.$$

Но, интегрируя по частямъ, мы находимъ

$$\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx = -n\int_{-1}^{+1} x^{n-1} \frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\,dx$$

$$= n(n-1)\int_{-1}^{+1} x^{n-2} \frac{d^{k-2}(x^2-1)^k}{dx^{k-2}}\,dx = \text{и т. д.},$$

откуда

$$\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx = (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\int_{-1}^{+1} x^{n-k}(x^2-1)^k\,dx,$$

или, такъ какъ $(n-k)$ — число четное,

$$\int_{-1}^{+1} x^n \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx = 2(-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\int_0^1 x^{n-k}(x^2-1)^k\,dx;$$

слѣдовательно

$$(3)\qquad A_k = \frac{(2k+1)(-1)^k\,2n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2^{k+1}\,\Gamma(k+1)}\int_0^1 x^{n-k}(x^2-1)^k\,dx.$$

Подставивъ въ опредѣленный интегралъ второй части этой формулы (3) x вмѣсто x^2, мы получимъ

$$\int_0^1 x^{n-k}(x^2-1)^k\,dx = \frac{(-1)^k}{2}\int_0^1 x^{\frac{n-k-1}{2}}(1-x)^k\,dx,$$

или

$$\int_0^1 x^{n-k}(x^2-1)^k\,dx = \frac{(-1)^k}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{n-k+1}{2},\,k+1\right);$$

вслѣдствіе чего,

$$A_k = \frac{(2k+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2^{k+1}\,\Gamma(k+1)}\,\mathrm{B}\left(\frac{n-k+1}{2},\,k+1\right),$$

или

$$A_k = \frac{(2k+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2^{k+1}\,\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}+k+1\right)};$$

но

$$\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}+k+1\right)=\frac{1}{2^{k+1}}(n+k+1)(n+k-1)\ldots(n-k+1)\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right);$$

слѣдовательно

$$A_k=\frac{(2k+1)\,n(n-1)\ \ldots(n-k+1)\,\Gamma(k+1)}{(n+k+1)(n+k-1)\ldots(n-k+1)\Gamma(k+1)},$$

или, по сокращеніи,

$$(\mathrm{I})\qquad A_k=\frac{(2k+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+k+1)(n+k-1)\ldots(n-k+1)}.$$

На основаніи этой формулы, мы будемъ имѣть

$$(\mathrm{II})\,x^n=\frac{1.2\,3..n}{1.3.5..2n+1}\Big[(2n+1)X_n+(2n-3)\frac{2n+1}{2}X_{n-2}+(2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2.4}X_{n-4}$$
$$+\ldots\ldots\Big].$$

§ 25. Разложеніе функціи $\frac{1}{y-x}$ въ рядъ по функціямъ X_0, X_1, X_2, ... Слѣдствія.

1. Такъ какъ функція

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

есть производящая отъ функціи X_n, то, разлагая ее въ рядъ по цѣлымъ восходящимъ степенямъ t, мы будемъ имѣть

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=X_0+X_1t+X_2t^2+\ldots+X_n t^n+\ldots;$$

и равенство это будетъ имѣть мѣсто внутри круга, начерченнаго изъ точки $t=0$ радіусомъ равнымъ $\mathrm{mod}(x-\sqrt{x^2-1})$, причемъ знакъ корня $\sqrt{x^2-1}$ долженъ быть такой, чтобы $\mathrm{mod}(x-\sqrt{x^2-1})<1$.

Для того, чтобы изъ равенства (1) можно было вывести разложеніе функціи $\frac{1}{y-x}$, мы возьмемъ во вниманіе функцію

$$\Phi=\frac{\sqrt{1-2ty+t^2}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{(y-x)(t^2-1)}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

то

$$\frac{1}{y-x}\frac{d\Phi}{dt}=\frac{t^2-1}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

откуда

$$(2)\qquad \frac{1}{y-x}\,\Phi=\int\frac{(t^2-1)\,dt}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Принимая теперь въ соображеніе, что при $t=\infty$, $\Phi=1$, а при $t=y+\sqrt{y^2-1}$, $\Phi=0$, изъ послѣдняго уравненія мы получаемъ

$$\frac{1}{y-x}=\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{(t^2-1)\,dt}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Формула эта даетъ намъ возможность выполнить требуемое разложеніе функціи $\frac{1}{y-x}$. Для этого, мы предположимъ сперва, что

$$\operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1})>1,$$

и постараемся выполнить разложеніе подъинтегральнаго множителя

$$\frac{t^2-1}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

въ рядъ, расположенный по функціямъ X_0, X_1, X_2, . . . , и сходящійся при всѣхъ значеніяхъ t такихъ, что

$$\operatorname{mod} t>\operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Дифференцируя обѣ части уравненія (1) по t, мы получаемъ

$$\frac{-t+x}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}=X_1+2X_2t+\ldots+nX_n t^{n-1}+\ldots;$$

отсюда, умножая обѣ части на $2t$,

$$\frac{-2t^2+2xt}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}=2X_1t+4X_2t^2+\ldots+2nX_nt^n+\ldots,$$

или

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1-2tx+t^2)^{\frac{1}{2}}}=2X_1t+4X_2t^2+\ldots+2nX_nt^n+\ldots.$$

Складывая это уравненіе съ уравненіемъ (1), мы находимъ

$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}=X_0+3X_1t+5X_2t^2+\ldots\ldots+(2n+1)X_nt^n+\ldots\ldots;$$

отсюда, подставляя вмѣсто t, $\frac{1}{t}$, и дѣля обѣ части на t,

$$\frac{t^2-1}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}}=X_0\frac{1}{t}+3X_1\frac{1}{t^2}+5X_2\frac{1}{t^3}+\ldots+(2n+1)X_n\frac{1}{t^{n+1}}+\cdots$$

Это уравненіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній t, находящихся внѣ круга, начерченнаго изъ точки $t=0$ радіусомъ равнымъ $\mathrm{mod}(x+\sqrt{x^2-1})$, причемъ $\mathrm{mod}(x+\sqrt{x^2-1})>1$.

Допустимъ теперь, что

$$\mathrm{mod}\,(x+\sqrt{x^2-1})<\mathrm{mod}\,(y+\sqrt{y^2-1}),$$

умножимъ обѣ части послѣдняго уравненія на

$$\frac{1}{(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

и проинтегрируемъ отъ $t=y+\sqrt{y^2-1}$ до $t=\infty$; тогда получимъ

$$\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{(t^2-1)dt}{(1-2tx+t^2)^{\frac{3}{2}}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}=X_0\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}+\ldots+(2n+1)X_n\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$+\ \ldots$ и т. д. $\ldots$

Первая часть этой формулы, на основаніи формулы (2), равняется $\frac{1}{y-x}$; слѣдовательно

$$(3)\quad \frac{1}{y-x}=X_0\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}+\ldots+(2n+1)X_n\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$

Съ другой стороны, полагая

$$t=y+\cos iz\sqrt{y^2-1},$$

мы получаемъ

$$dt=-i\sin iz\sqrt{y^2-1}\,dz,$$

$$(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}=-i\sin iz\sqrt{y^2-1},$$

откуда

$$\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}(1-2ty+t^2)^{\frac{1}{2}}}=\int_0^{\infty}\frac{dz}{(y+\cos iz\sqrt{y^2-1})^{n+1}},$$

или (См. ф. III § 22)

$$\int_{y+\sqrt{y^2-1}}^{\infty}\frac{dt}{t^{n+1}(1-2ty+t^2)}=Z_n.$$

Вслѣдствіе этого, вмѣсто формулы (3), мы получаемъ

$$\frac{1}{y-x}=X_0Z_0+3X_1Z_1+5X_2Z_2+\ldots+(2n+1)X_nZ_n+\ldots$$

или

$$\text{(I)}\qquad \frac{1}{y-x}=\sum_n(2n+1)X_nZ_n,\qquad (n=0,1,2,\ldots\infty).$$

Эта формула даетъ намъ требуемое разложеніе функціи $\frac{1}{y-x}$; она имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$\text{(4)}\qquad \operatorname{mod}(x+\sqrt{x^2-1})<\operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1}).$$

Условіе это можно выразить геометрически.

Для этого, означивъ чрезъ ξ и η координатныя оси, мы положимъ

$$\text{(5)}\qquad x=\cos(\omega-i\delta),$$

гдѣ ω и δ суть величины вещественныя: эти величины мы примемъ за новыя координаты для опредѣленія положенія точки

$$\text{(6)}\qquad x=\xi+i\eta.$$

Сравнивая уравненіе (5) съ (6), получаемъ

$$\xi+i\eta=\cos(\omega-i\delta),$$

или

$$\xi+i\eta=\cos\omega\cos i\delta+i\sin\omega\frac{\sin i\delta}{i},$$

откуда

$$\text{(7)}\qquad \begin{cases}\xi=\cos\omega\cos i\delta,\\ \eta=\sin\omega\frac{\sin i\delta}{i};\end{cases}$$

эти два уравненія даютъ намъ возможность перейти отъ новыхъ координатъ ω и δ къ старымъ ξ и η.

Кромѣ того, на основаніи уравненія (7), не трудно убѣдиться, что

$$(8)\qquad \frac{\xi^2}{\cos^2\omega}-\frac{\eta^2}{\sin^2\omega}=1,$$

$$(9)\qquad \frac{\xi^2}{\left(\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}\right)^2}=1;$$

откуда видно, что точка $x=\xi+i\eta$ опредѣляется пересѣченіемъ двухъ софокусныхъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ фокусы въ точкахъ -1 и $+1$, изъ которыхъ первое есть гипербола, второе эллипсъ. Каждому данному значенію ξ и η соотвѣтствуетъ одно положительное значеніе величины ω, содержащееся между 0 и π, и одно положительное значеніе величины δ, содержащееся между 0 и ∞. Обратно, даннымъ частнымъ значеніямъ ω и δ находящимся между упомянутыми предѣлами, соотвѣтствуютъ четыре точки, опредѣляемыя пересѣченіемъ эллипса (8) съ гиперболой (9). Для двухъ частныхъ значеній δ, уравненіе (9) даетъ два софокусные эллипса, изъ которыхъ тотъ которому соотвѣтствуетъ большее значеніе параметра δ, будетъ находиться внѣ остальнаго.

Положимъ теперь, что значенію перемѣнной y, входящей въ выраженіе формулы (I), соотвѣтствуютъ значенія старыхъ координатъ: ξ_1 и η_1, а новыхъ координатъ: ω_1 и δ_1. Слѣдовательно, мы имѣемъ два такія уравненія:

$$y=\xi_1+i\eta_1=\cos(\omega_1-i\delta_1),$$
$$x=\xi+i\eta=\cos(\omega-i\delta);$$

отсюда получаемъ

$$y+\sqrt{y^2-1}=\cos(\omega_1-i\delta_1)\pm i\sin(\omega_1-i\delta_1),$$

$$(10)\qquad \operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1})=\operatorname{mod} e^{\pm i(\omega_1-i\delta_1)}=e^{\pm\delta_1}.$$

Если

$$\operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1})>1,$$

то во второй части уравненія (10) должно удержать знакъ $+$, и тогда будемъ имѣть

$$(11)\qquad \operatorname{mod}(y+\sqrt{y^2-1})=e^{\delta_1}.$$

Точно также, полагая что

$$\operatorname{mod}(x + \sqrt{x^2 - 1}) > 1,$$

мы получимъ

(12) $$\operatorname{mod}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = e^{\delta}.$$

На основаніи уравненій (11) и (12), неравенство (4) принимаетъ такой видъ:

$$e^{\delta_1} > e^{\delta},$$

откуда получаемъ

$$\delta_1 > \delta.$$

Это неравенство показываетъ намъ, что если чрезъ каждую изъ точекъ y и x проведемъ эллипсъ, имѣющій фокусы въ точкахъ -1 и $+1$, то эллипсъ, проходящій чрезъ точку x, будетъ находиться внутри эллипса, проходящаго чрезъ точку y, или, другими словами, точка x будетъ находиться внутри эллипса, проходящаго чрезъ точку y.

3. Если функція $f(x)$ конечная и неразрывная, внутри нѣкотораго эллипса, имѣющаго фокусы въ точкахъ -1 и $+1$, то, называя периметръ этого эллипса чрезъ (e), мы будемъ имѣть:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} \frac{f(y)dy}{y-x}.$$

Такъ какъ мы предполагаемъ, что точка x находится внутри эллипса (e), то, во вторую часть этой формулы, вмѣсто $\frac{1}{y-x}$ мы можемъ подставить вторую часть формулы (I); тогда получимъ

$$f(x) = X_0 \frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y) Z_0 dy + 3X_1 \frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y)\, Z_1\, dy + \ldots$$

$$+ (2n+1) X_n \frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y)\, Z_n\, dy + \ldots$$

Формула эта доказываетъ намъ слѣдующую теорему:

Теорема. Всякая однозначная функція $f(x)$, конечная и неразрывная внутри эллипса, имѣющаго фокусы въ точкахъ -1 и $+1$, разлагается, внутри того же эллипса, въ рядъ по функціямъ X_0, X_1, . . . *

---

* Теорема эта принадлежитъ Нейману.

Принимая въ соображеніе формулу (I) § 22, мы находимъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y) Z_n dy = \frac{-1}{2\pi i}\int^{(e)} S_n f(y) dy + \frac{1}{4\pi i}\int^{(e)} X_n f(y) \log\frac{y+1}{y-1}\, dy;$$

но

$$\int^{(e)} S_n f(y)\, dy = 0,$$

слѣдовательно

$$(13) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y)\, Z_n\, dy = \frac{1}{4\pi i}\int^{(e)} X_n f(y)\, \log\frac{y+1}{y-1}\, dy.$$

Извѣстно, что прямая линія, соединяющая точки — 1 и + 1, образуетъ линію разрыва функціи

$$\log\frac{y+1}{y-1},$$

и что, изображая значенія этой функціи, получаемыя съ нижней стороны линіи $(-1, +1)$, чрезъ

$$\mathrm{Log}\,\frac{y+1}{y-1},$$

а значенія той-же функціи, получаемыя съ верхней стороны линіи $(-1, +1)$, чрезъ

$$\log\frac{y+1}{y-1},$$

мы имѣемъ

$$\mathrm{Log}\,\frac{y+1}{y-1} - \log\frac{y+1}{y-1} = 2\pi i.$$

Вслѣдствіе этого,

$$\int^{(e)} X_n f(y) \log\frac{y+1}{y-1}\, dy = \int_{-1}^{+1} X_n f(y)\, \mathrm{Log}\,\frac{y+1}{y-1}\, dy + \int_{+1}^{-1} X_n f(y) \log\frac{y+1}{y-1}\, dy$$

$$= \int_{-1}^{+1} X_n\, f(y)\, \left[\mathrm{Log}\,\frac{y+1}{y-1} - \log\frac{y+1}{y-1}\right] dy,$$

или

$$\int^{(e)} X_n f(y) \log\frac{y+1}{y-1}\, dy = 2\pi i\int_{-1}^{+1} X_n f(y)\, dy.$$

Сравнивая это уравненіе съ (13), мы получаемъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(e)} f(y)\, Z_n\, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} X_n\, f(y)\, dy.$$

Подставляя это въ формулу (II), мы получаемъ

$$(\mathrm{III})\, f(x)=\tfrac{1}{2}X_0\int_{-1}^{+1}X_0 f(y)\,dy+\tfrac{3}{2}X_1\int_{-1}^{+1}X_1 f(y)\,dy+\ldots+\frac{2n+1}{2}X_n\int_{-1}^{+1}X_n f(y)\,dy$$

$$+\ldots\ldots$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что коэффиціенты при X_0, X_1, X_2, ... опредѣляются по способу, указанному въ § 23.

4. Не трудно также доказать, что если функція $f(x)$ остается однозначною и конечною внутри площади, ограниченной периметрами двухъ софокусныхъ эллипсовъ, то, для всѣхъ точекъ, содержащихся внутри этой площади, функція $f(x)$ разлагается въ двойной рядъ вида

$$(\mathrm{IV})\qquad f(x)=A_0X_0+A_1X_1+A_2X_2+\ldots+A_nX_n+\ldots$$
$$+B_0Z_0+B_1Z_1+B_2Z_2+\ldots+B_nZ_n+\ldots,$$

гдѣ

$$A_n=\frac{2n+1}{2\pi i}\int^{(e)}f(x)\,Z_n\,dx,$$

$$B_n=\frac{2n+1}{2\pi i}\int^{(e_1)}f(x)\,X_n\,dx.$$

(e изображаетъ периметръ внѣшняго эллипса, e_1 — внутренняго).

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ такое равенство:

$$(15)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(e)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}-\frac{1}{2\pi i}\int^{(e_1)}\frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Такъ какъ въ первомъ интегралѣ во второй части этого равенства, точка x находится внутри эллипса, по которому движется точка z, то

$$\frac{1}{z-x}=X_0Z_0+3X_1Z_1+5X_2Z_2+\ldots,$$

и слѣдовательно

$$\int^{(e)}\frac{f(\;)dz}{z-x}=X_0\int^{(e)}Z_0 f(z)\,dz+3X_1\int^{(e)}Z_1 f(z)\,dz+5X_2\int^{(e)}Z_2 f(z)\,dz+\ldots$$

Подобнымъ образомъ получимъ для втораго интеграла

$$\int^{(e_1)}\frac{f(\;)dz}{z-x}=-Z_0\int^{(e_1)}X_0 f(z)\,dz-3Z_1\int^{(e_1)}X_1 f(z)\,dz-5Z_2\int^{(e_1)}X_2 f(z)\,dz-\ldots$$

Внося эти выраженія во вторую часть (15), мы получимъ разложеніе функціи $f(x)$ въ рядъ вида (IV).

Разложеніе функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.

§ 26. Опредѣленіе функцій R_n. Нѣкоторыя ихъ свойства.

1. Пусть φ изображаетъ функцію отъ независимой перемѣнной y, которая, при достаточно большихъ значеніяхъ y, разлагается въ двойной рядъ по цѣлымъ восходящимъ и нисходящимъ степенямъ y. Положимъ дальше, что при достаточно большихъ значеніяхъ перемѣнной y, имѣетъ мѣсто такое равенство:

(1) $$\varphi = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \dots}}}$$

Обозначимъ числителя и знаменателя n-ой подходящей дроби чрезъ P_n и Q_n, такъ, что

$$\frac{P_n}{Q_n} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \dots + \cfrac{a_{n-1}}{q_{n-1}}}}},$$

и положимъ

(I) $$R_n = \varphi Q_n - P_n.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ рядъ функцій

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots\dots,$$

изслѣдованіемъ свойства которыхъ теперь и займемся. *

2. Во первыхъ, не трудно доказать, что степень функціи R_n, при безконечно большихъ значеніяхъ независимой перемѣнной y, равняется степени функціи $\frac{1}{Q_{n+1}}$.

Дѣйствительно, изъ формулы (I) мы получаемъ

(2) $$R_n = (-1)^{n-1}\, a_1\, a_2 \dots a_n \frac{1}{Q_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{\underset{\sim}{y_{n+1}}} Q_n},$$

---

* Чебышевъ первый обратилъ вниманіе на эти функціи въ своемъ мемуарѣ «*О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.*» Приложеніе къ IX тому записокъ Имп. Акад. Наукъ 1866.

гдѣ y_{n+1} изображаетъ $(n+1)$-ое полное частное. Но степень функціи Q_n ниже степени функціи Q_{n+1}, а степень y_{n+1} не ниже единицы; слѣдовательно, степень второй части равенства (2) равняется степени $\frac{1}{Q_{n+1}}$.

Отсюда слѣдуетъ, что въ ряду

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots\ldots$$

всѣ функціи будутъ степеней отрицательныхъ, и степени ихъ представляютъ рядъ понижающійся.

3. На основаніи того, что степень функціи R_n равняется степени $\frac{1}{Q_{n+1}}$, не трудно доказать, что если ω_m изображаетъ цѣлую раціональную функцію степени ниже чѣмъ q_m, и если $m < n$, то имѣетъ мѣсто такая формула:

(II) $$\mathrm{E}\ q_n \omega_m Q_m R_n = 0, \quad (m < n).$$

Дѣйствительно, функція R_n будучи степени равной $\frac{1}{Q_{n+1}}$, степень произведенія $q_n\ \omega_m\ Q_m\ R_n$ равняется степени

$$\frac{q_n\ \omega_m\ Q_m}{Q_{n+1}},$$

и слѣдовательно, ниже степени

$$\frac{q_n\ q_m\ Q_m}{Q_{n+1}},$$

или

$$\frac{q_n\ Q_{m+1}}{q_n\ Q_n},$$

ибо, при всякомъ n, степень $q_n\ Q_n$ равняется степени Q_{n+1}.

И такъ, мы видимъ, что степень функціи $q_n\ \omega_m\ Q_m\ R_n$ ниже степени

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_n};$$

но такъ какъ, по предположенію $m < n$, то

$$m+1 \leqq n,$$

и слѣдовательно, степень

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_n}$$

не превышаетъ нуля.

Отсюда слѣдуетъ, что степень разсматриваемой функціи

$$q_n \, \omega_m \, Q_m \, R_n$$

равняется величинѣ отрицательной, или, другими словами, цѣлая часть

$$q_n \, \omega_m \, Q_m \, R_n$$

равняется нулю.

Подобнымъ образомъ можно доказать, что если $m < n$ и степень цѣлой раціональной функціи ω_m ниже степени q_m то,

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{E}\; q_m \omega_n Q_m R_n = 0, \qquad (m < n).$$

Въ самомъ дѣлѣ, степень функціи

$$q_m \, \omega_n \, Q_m \, R_n$$

равняется степени

$$\frac{\omega_n Q_{m+1}}{Q_{n+1}},$$

и слѣдовательно ниже степени

$$\frac{q_n Q_{m+1}}{Q_{n+1}}, \text{ или } \frac{Q_{m+1}}{Q_n};$$

но такъ какъ, $m < n$, то степень

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_n}$$

не выше нуля, и потому степень

$$q_m \, \omega_n \, Q_m \, R_n$$

равняется величинѣ отрицательной.

4. Постараемся теперь узнать какой видъ приметъ формула (II) въ томъ случаѣ, когда $m = n$.

Для этого, мы умножимъ обѣ части равенства (2) на

$$q_n \, \omega_n \, Q_n;$$

тогда получимъ

$$q_n \omega_n Q_n R_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \frac{q_n \, \omega_n \, Q_n}{Q_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{y_{n+1}} Q_n},$$

или

$$q_n \, \omega_n \, Q_n \, R_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \frac{q_n \, \omega_n \, Q_n}{Q_n q_n + a_n Q_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{y_{n+1}} Q_n},$$

или еще

$$q_n\omega_u Q_u R_u = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n - (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \frac{\frac{a_{n+1}}{y_{n+1}} + a_n \frac{Q_{n-1}}{Q_n}}{q_n + \frac{a_{n+1}}{y_{n+1}} + a_n \frac{Q_{n-1}}{Q_n}} \omega_n.$$

Но степень послѣдняго члена во второй части этого равеьства ниже нуля, ибо степень ω_n, по предположенію, ниже степини q_n; слѣдовательно,

(IV) $$\mathrm{E}\, q_n\omega_n Q_n R_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n.$$

5. Перемножая обѣ части равенства

$$R_m = \varphi Q_m - P_m$$

на Q_n, получаемъ

(3) $$R_m Q_n = \varphi Q_n Q_m - P_m Q_n$$

Но

$$\varphi\, Q_n = R_n + P_n;$$

внося во вторую часть равенства (3) $R_n + P_n$ на мѣсто $\varphi\, Q_n$, получимъ

$$R_m Q_n = P_n Q_m - P_m Q_n + R_n Q_m,$$

откуда

(V) $$\mathrm{F}\omega R_n Q_m = \mathrm{F}\omega R_m Q_n,$$

гдѣ ω означаетъ произвольную цѣлую раціональную функцію.

Формула (V) даетъ намъ возможность опредѣлить дробную часть функціи $\omega\, R_n\, Q_m$, въ томъ случаѣ, когда степень функціи ω ниже степени q_m или q_n.

Дѣйствительно, если $m < n$ и степень ω ниже q_n, то

(4) $$\mathrm{F}\, \omega R_n Q_m = \omega R_n Q_m;$$

ибо степень $\omega\, R_n\, Q_m$ ниже степени $\frac{q_n Q_m}{Q_{n+1}}$ или, что все равно, ниже степени

$$\frac{q_n Q_m}{q_n Q_n},$$

или еще — ниже степени

$$\frac{Q_m}{Q_n};$$

но такъ какъ $m < n$, то степень $\frac{Q_m}{Q_n}$ равна величинѣ отрицательной, и слѣдовательно степень $\omega\, R_n\, Q_m$ равняется величинѣ отрицательной.

Точно также, равенство (4) имѣетъ мѣсто, если $m < n$ и степень ω ниже степени q_m; ибо тогда степень

$$\omega\, R_n\, Q_m$$

ниже степени

$$\frac{q_m Q_m}{Q_{n+1}},$$

или ниже степени

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_{n+1}},$$

т. е. ниже величины отрицательной.

Если $m > n$ и степень ω ниже степени q_m или q_n, то, по формулѣ (IV), мы имѣемъ

$$\mathrm{F}\, \omega R_n Q_m = \mathrm{F}\, \omega R_m Q_n,$$

а на основанiи равенства (4),

$$\mathrm{F}\, \omega R_m Q_n = \omega\, R_m\, Q_n;$$

слѣдовательно

(5) $$\mathrm{F}\, \omega R_n Q_m = \omega\, R_m\, Q_n$$

Наконецъ, если $m = n$, и степень ω ниже степени q_n, то

(6) $$\mathrm{F}\, \omega R_n Q_n = \omega\, R_n\, Q_n;$$

ибо степень $\omega\, R_n\, Q_n$ ниже степени $\frac{q_n Q_n}{Q_{n+1}}$, то есть, ниже нуля.

§ 27. Новыя формулы, относящіяся къ функціямъ R_n и Q_n.

1. Изъ формулъ выведенныхъ въ предъидущемъ §-фѣ мы постараемся теперь вывести рядъ новыхъ, замѣчательныхъ формулъ, которыя будутъ служить намъ впослѣдствіи при разложеніи произвольныхъ функцій въ ряды, расположенные по функціямъ Q_n или R_n.

Во первыхъ, мы докажемъ, что если ω_m изображаетъ произвольную цѣлую раціональную функцію степени ниже чѣмъ q_m, то

(I) $$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E}\, q_n\, \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = 0, \\ \mathrm{E}\, q_n\, \mathrm{F}\, \omega_n R_n Q_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\, \omega_n. \end{array}\right.$$

Для этого, относительно первой изъ этихъ двухъ формулъ, мы разсмотримъ отдѣльно два случая: когда $m < n$, и когда $m > n$.

Въ первомъ случаѣ, когда $m < n$, по формулѣ (5) предъидущаго §-фа, мы имѣемъ

$$\mathrm{F}\omega_m R_m Q_n = \omega_m R_n Q_m;$$

слѣдовательно

$$\mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = \mathrm{E}\, q_n \omega_m R_n Q_m.$$

Но, на основаніи формулы (II) предъидущаго §-фа, вторая часть послѣдняго равенства равняется нулю; слѣдовательно

$$\mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = 0.$$

Во второмъ случаѣ, когда $m > n$, на основаніи равенства (4) предъидущаго §-фа, имѣемъ

$$\mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = \omega_m R_m Q_n;$$

слѣдовательно

$$\mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = \mathrm{E}\, q_n \omega_m R_m Q_n.$$

Но, по формулѣ (III) предъидущаго §-фа, вторая часть этого равенства равняется нулю; слѣдовательно

$$\mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = 0,$$

и такимъ образомъ первая изъ формулъ (I) доказана.

Чтобы доказать вторую формулу (I), мы примемъ во вниманіе равенство (6) предъидущаго параграфа, въ силу котораго имѣемъ

$$\mathrm{E} q_n \mathrm{F} \omega_n R_n Q_n = \mathrm{E} q_n \omega_n R_n Q_n.$$

Сравнивая это равенство съ формулою (IV) предъидущаго §-фа, мы получаемъ

$$\mathrm{E} q_n \mathrm{F} \omega_n R_n Q_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n.$$

Это и есть, именно, та формула, которую мы желали вывести.

2. На основаніи формулъ (I) §-фа 11, мы находимъ

$$\mathrm{F}\omega_m R_m Q_n = \mathcal{E} \frac{\omega_m(z)\,((R_m(z)))\, Q_n(z)}{y-z};$$

отсюда

$$q_n \mathrm{F}\omega_m R_m Q_n = q_n \mathcal{E} \frac{\omega_m(z)\,((R_m(z)))\, Q_n(z)}{y-z},$$

или

$$(1) \qquad q_n \mathrm{F}\omega_m R_m Q_n = \mathcal{E} \frac{q_n(y) - q_n(z)}{y-z}\, \omega_m(z)\,((R_m(z)))\, Q_n(z)$$
$$+ \mathcal{E} \frac{q_n(z)\, \omega_m(z)\,((R_m(z)))\, Q_n(z)}{y-z}.$$

Но, принимая во вниманіе, что функція

$$\frac{q_n(y)-q_n(z)}{y-z}$$

цѣлая относительно y, мы видимъ, что первый членъ второй части равенства (1) есть функція цѣлая, а такъ какъ второй членъ второй части того же равенства есть функція дробная, то слѣдовательно

$$(2) \qquad \mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_m R_m Q_n = \mathcal{E} \frac{q_n(y)-q_n(z)}{y-z} \omega_m(z) \,((R_m(z)))\, Q_n(z).$$

Полагая въ этомъ равенствѣ $m=n$, получимъ

$$(3) \qquad \mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, \omega_n R_n Q_n = \mathcal{E} \frac{q_n(y)-q_n(z)}{y-z} \varpi_n(z) \,((R_n(z)))\, Q_n(z).$$

Сравнивая два послѣднія равенства (2) и (3) съ двумя формулами (I) и полагая для краткости

$$\frac{q_n(y)-q_n(z)}{y-z} = \lambda_n,$$

мы получаемъ слѣдующія двѣ новыя формулы:

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \mathcal{E} \lambda_n \omega_m(z) R_m(z) Q_n(z) = 0, \\ \mathcal{E} \lambda_n \omega_n(z) R_n(z) Q_n(z) = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n. \end{cases}$$

гдѣ ω_n, какъ выше было сказано, означаетъ произвольную цѣлую раціональную функцію отъ независимой перемѣнной y, степени ниже чѣмъ q_n.

3. Подставляя въ формулы (II)

$$\varphi(z) Q_m(z) - P_m(z)$$

вмѣсто

$$R_m(z),$$

и

$$\varphi(z) Q_n(z) P_n(z)$$

вмѣсто

$$R_n(z),$$

и принимая въ соображеніе, что интегральный вычетъ цѣлой функціи равняется нулю, мы получаемъ

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} \mathcal{E} \lambda_n \omega_m(z) Q_m(z) Q_n(z) \varphi(z) = 0, \\ \mathcal{E} \lambda_n \omega_n(z) Q_n^2(z) \varphi(z) = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n. \end{cases}$$

Эти формулы, равно какъ и формулы (II) приводятъ ко многимъ замѣчательнымъ результатамъ, на которые мы здѣсь не станемъ указывать, а только замѣтимъ, что формулы выведенныя нами въ § 15 и 16, могутъ быть также выведены изъ формулъ (III).

4. Если въ двѣ формулы §-фа 16, именно,

$$\mathcal{E}\, \varphi\, Q_m\, Q_n = 0,$$

$$\mathcal{E}\, \varphi\, Q_n^2 = (-1)^{n-1} a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_n\, \mathcal{E} \frac{1}{((q_n))}$$

внесемъ $R_m\, P_m$ вмѣсто $\varphi\, Q_m$ и $R_n + Q_n$ вмѣсто $\varphi\, Q_n$, и примемъ въ соображеніе, что интегральный вычетъ всякой цѣлой функціи равняется нулю, то получимъ

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \mathcal{E}\, R_m\, Q_n = 0, \\ \mathcal{E}\, R_n\, Q_n = (-1)^{n-1} a_1\, a_2 \,.\,.\,.\, a_n\, \mathcal{E} \dfrac{1}{((q_n))}. \end{cases}$$

Эти двѣ формулы соотвѣтствуютъ формуламъ (III) §-фа 16 и могутъ быть въ свою очередь выведены изъ формулъ (II).

§ 28. Разложеніе функцій въ ряды, расположенные по функціямъ Q_n.

1. Мы сдѣлаемъ здѣсь предположеніе, что всякая функція $f(x)$ конечная и однозначная внутри нѣкоторой площади A, содержащей внутри себя всѣ линіи и точки разрыва функціи $\varphi(x)$, разлагается въ рядъ вида

$$(1) \quad f(x) = \omega_1\, Q_1 + \omega_2\, Q_2 + \omega_3\, Q_3 + \,.\,.\,.\, + \omega_n\, Q_n + \,.\,.\,,$$

причемъ ω_n означаетъ цѣлую раціональную функцію степени ниже чѣмъ q_n, и разложеніе это будетъ имѣть мѣсто внутри нѣкоторой площади B, содержащей внутри себя всѣ линіи и точки разрыва функціи $\varphi(x)$.

Предположеніе это всегда имѣетъ мѣсто, если функція $f(x)$ цѣлая и раціональная: мы удерживаемъ его и на тотъ случай, когда функція $f(x)$ трансцендентна и удовлетворяетъ вышеупомянутымъ условіямъ.

Послѣ этого, остается только показать способъ опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ ω_1, ω_2, ω_3, ... въ ряду (1), что достигается весьма просто помощью формулъ предъидущаго §-фа.

Въ самомъ дѣлѣ, подставимъ въ уравненіе (1) z вмѣсто независимой перемѣнной x, умножимъ обѣ части того-же уравненія на

$$\lambda_n Q_n(z) \varphi(z),$$

гдѣ

$$\lambda_n = \frac{q_n(x) - q_n(z)}{x - z},$$

и возьмемъ сумму интегральныхъ вычетовъ обѣихъ частей относительно всѣхъ линій и точекъ разрыва функціи $\varphi(z)$: тогда получимъ

$$\mathcal{E}\, \lambda_n Q_n(z) ((\varphi(z))) f(z) = \mathcal{E}\, \lambda_n \omega_1(z) Q_n(z) Q_1(z) \varphi(z) + \mathcal{E}\, \lambda_n \omega_2(z) Q_n(z) Q_2(z) \varphi(z)$$

$$+ \dots + \mathcal{E}\, \lambda_n \omega_n(z) Q_n^2(z) \varphi(z) + \dots$$

Но, на основаніи формулы (III) предъидущаго §-фа, мы имѣемъ

$$\mathcal{E}\, \lambda_n \omega_m(z) Q_n(z) Q_m(z) \varphi(z) = 0,$$

$$\mathcal{E}\, \lambda_n \omega_n(z) Q_n^2(z) \varphi(z) = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n;$$

слѣдовательно

$$\text{(I)} \qquad (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n = \mathcal{E}\, \lambda_n Q_n(z) ((\varphi(z))) f(z).$$

Формула эта даетъ намъ значеніе неизвѣстнаго коэффиціента ω_n. Полагая $n = 1, 2, 3, \dots$, мы будемъ получать значенія всѣхъ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ, и такимъ образомъ задача наша объ опредѣленіи коэффиціентовъ рѣшена.

Если $f(z)$ во всей координатной плоскости остается конечною и неразрывною, то въ такомъ случаѣ формула (I) можетъ быть представлена еще слѣдующимъ образомъ:

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n = \mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, Q_n \varphi f(x),$$

или

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n = \mathrm{E}\, q_n Q_n \varphi f(x) - q_n \mathrm{E}\, Q_n \varphi f(x).$$

Замѣчая же, что ω_n есть цѣлая функція степени ниже чѣмъ q_n, и что членъ

$$q_n \mathrm{E}\, Q_n \varphi f(x)$$

есть произведеніе q_n на цѣлую функцію, мы изъ этой формулы заключаемъ, что $(-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_n \omega_n$ будетъ представлять остатокъ, получаемый при дѣленіи на q_n функціи

$$\mathrm{E}\, q_n Q_n \varphi f(x).$$

2. Допустивъ, что всѣ неполныя частныя $q_1\, q_2\, q_3, \ldots$ 1-ой степени, и положивъ

$$q_n = B_n + A_n\, x,$$

будемъ имѣть

$$\lambda_n = \frac{q_n(x) - q_n(y)}{x-y} = A_n.$$

Слѣдовательно

$$(-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n\, \omega_n = A_n \mathop{\Large\mathcal{E}} Q_n^2\,((\varphi))\, f(z),$$

откуда

$$\omega_n = \frac{(-1)^{n-1} A_n}{a_1\, a_2 \ldots a_n} \mathop{\Large\mathcal{E}} Q_n^2\,((\varphi))\, f(z).$$

Формула эта совпадаетъ съ формулой (5) §-фа 17.

3. Переходя къ частному случаю, мы положимъ

$$f(x) = \frac{1}{y-x};$$

тогда формула (I) приметъ такой видъ

$$(-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n\, \omega_n = \mathop{\Large\mathcal{E}} \frac{\lambda_n\, Q_n(z)\,((\varphi(z)))}{y-z},$$

гдѣ

$$\lambda_n = \frac{q_n(x) - q_n(z)}{x-z}.$$

Но

$$\mathop{\Large\mathcal{E}} \frac{\lambda_n\, Q_n(z)((\varphi(z)))}{y-z} = \mathrm{F}\, \lambda_n(y)\, Q_n(y)\, \varphi(y),$$

гдѣ

$$\lambda_n(y) = \frac{q_n(x) - q_n(y)}{x-y};$$

слѣдовательно

$$(-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n\, \omega_n = \mathrm{F} \lambda_n(y)\, Q_n(y)\, \varphi(y),$$

или

$$(-1)^{n-1} a_1\, a_2 \ldots a_n\, \omega_n = \mathrm{F} \lambda_n(y)\, R_n(y).$$

Съ другой стороны, такъ какъ степень $R_n(y)$ равняется степени $\frac{1}{q_n Q_n}$, а степень $\lambda_n(y)$ ниже степени q_n, то слѣдовательно степень

$$\lambda_n(y)\, R_n(y)$$

равняется величинѣ отрицательной, то есть,

$$F\lambda_n(y)\,R_n(y)=\lambda_n(y)\,R_n(y),$$

вслѣдствіе чего

$$(-1)^{n-1}\,a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n=\lambda_n(y)\,R_n(y).$$

На основаніи этой формулы, мы получаемъ такое разложеніе функціи $\frac{1}{y-x}$:

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{y-x}=\mu_1 Q_1(x)\,R_1(y)+\mu_2 Q_2(x)\,R_2(y)+\mu_3 Q_3(x)\,R_3(y)+\ldots,$$

гдѣ

$$\mu_n=\frac{(-1)^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}\,\frac{q_n(x)-q_n(y)}{x-y}.$$

Если всѣ неполныя частныя $q_1, q_2, q_3, \ldots$, первой степени, то полагая

$$q_n=B_n+A_n x,$$

получимъ

$$\mu_n=\frac{(-1)^{n-1}A_n}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

и слѣдовательно

$$\text{(IV)}\quad \frac{1}{y-x}=\frac{A_1}{a_1}Q_1(x)\,R_1(y)-\frac{A_2}{a_1 a_2}Q_2(x)\,R_2(y)+\frac{A_3}{a_1 a_2 a_3}Q_3(x)\,R_3(y)$$

$$-\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

Эта формула дана Чебышевымъ въ его письмѣ къ Брашману, помѣщенномъ въ 1-мъ томѣ Сборника Математическихъ наукъ.

Полагая

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$$

изъ формулы (IV) получимъ разложенія функціи $\frac{1}{y-x}$ въ рядъ, расположенный по Лежандровымъ функціямъ, то есть, получимъ формулу (I) параграфа 25.

§ 29. Разложеніе функцій въ ряды, расположенные по функціямъ R_n.

1. Для избѣжанія всякихъ предположеній о сходимости рядовъ, мы представимъ нашу задачу, къ изложенію которой теперь приступаемъ, подъ такимъ видомъ, какъ она изложена въ Мемуарѣ Чебышева: *О разложеніи функціи въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей.*

Въ мемуарѣ этомъ мы находимъ рѣшеніе такой задачи:

Имѣя какую нибудь функцію $f(x)$ способную разлагаться въ рядъ по цѣлымъ нисходящимъ степенямъ y, требуется разложить эту функцію въ рядъ по функціямъ $R_1, R_2, R_3, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы сумма первыхъ членовъ искомаго ряда до члена $\omega_n R_n$ включительно выражала функцію $f(y)$ вѣрно до членовъ порядка R_n включительно.

Задача эта, какъ не трудно убѣдиться, совершенно тождественна съ задачею о разложеніи $f(y)$ въ рядъ вида

$$f(y) = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots\ldots + \omega_n R_n + \ldots$$

гдѣ ω_n изображаетъ цѣлую раціональную функцію степени ниже чѣмъ q_n.

Приступая къ рѣшенію занимающаго насъ вопроса, мы возьмемъ во вниманіе дробную часть функціи $f(y)$, которую можно изобразить такимъ образомъ:

$$f(y) - \mathrm{E}\, f(y).$$

Дѣля эту разность на R, мы найдемъ въ частномъ нѣкоторую цѣлую функцію ω_1 и остатокъ r_1, степени ниже чѣмъ R_1. Дѣля r_1 на R_2, мы также найдемъ въ частномъ цѣлую функцію ω_2, и полученный при этомъ остатокъ будетъ степени ниже R_2. Продолжая такимъ образомъ дѣленіе получаемыхъ остатковъ на R_3, $R_4, \ldots$, мы найдемъ рядъ частныхъ

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots,$$

представляющихъ собою цѣлыя функціи и рядъ остатковъ, которыхъ степени ниже степеней

$$R_1, R_2, R_3, \ldots,$$

и эти функціи будутъ связаны уравненіями

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(y) - \mathrm{E}f(y) &= \omega_1 R_1 + r_1, \\ r_1 &= \omega_2 R_2 + r_2, \\ r_2 &= \omega_3 R_3 + r_3, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-1} &= \omega_n R_n + r_n. \end{aligned} \right.$$

Эти же уравненія, по исключенію изъ нихъ r_1, $r_2, \ldots r_{n-1}$, даютъ такую формулу для выраженія функціи $f(y)$:

$$f(y) = \mathrm{E}f(y) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots\ldots + \omega_n R_n + r_n$$

Такъ какъ r_n, по вышесказанному, будетъ степени ниже чѣмъ R_n, эта формула, вѣрно до членовъ порядка R_n включительно, представитъ функцію $f(y)$ подъ такимъ видомъ:

$$f(y) = \mathrm{E}f(y) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots + \omega_n R_n$$

гдѣ ω_1, $\omega_2, \ldots \omega_n$ цѣлыя функціи

Всякій разъ, когда непрерывная дробь

$$\varphi = q_0 + \frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2 + \ldots}$$

будетъ безконечная, рядъ функцій

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

тоже будетъ безконечный, и слѣдовательно число n въ вышенайденномъ выраженіи функціи $f(y)$ можно будетъ увеличивать безпредѣльно, что и дастъ такой безконечный рядъ для разложенія $f(y)$:

$$f(y) = \mathrm{E}f(y) + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \omega_3 R_3 + \ldots$$

2. Въ каждомъ частномъ случаѣ, какъ мы видѣли, функціи

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots,$$

входящія въ формулу (4) могутъ быть найдены послѣдовательно дѣленіями; мы теперь покажемъ общее выраженіе этихъ функцій, по которому каждая изъ нихъ найдется непосредственно.

Для этого мы сначала докажемъ, что функціи

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

будутъ на самомъ дѣлѣ степеней нисшихъ чѣмъ

$$q_1, q_2, q_3, \ldots$$

Дѣйствительно, изъ уравненій (1) ясно видно, что степени функцій

(2) $$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$$

будутъ ниже, чѣмъ степени выраженій

(3) $$\frac{1}{R_1}, \frac{R_1}{R_2}, \frac{R_2}{R_3}, \ldots.$$

Но функціи R_1, R_2, R_3,... одинаковыхъ степеней съ функціями

$$\frac{1}{Q_2},\ \frac{1}{Q_3},\ \frac{1}{Q_4},\ \ldots,$$

вслѣдствіе чего выраженія (3) будутъ одинаковыхъ степеней съ функціями

$$(4)\qquad Q_2,\ \frac{Q_3}{Q_2},\ \frac{Q_4}{Q_3},\ \ldots$$

Но такъ какъ

$$Q_2 = q_1,\quad \frac{Q_3}{Q_2} = q_2 + a_2\frac{Q_1}{Q_2},\quad \frac{Q_4}{Q_3} = q_3 + a_3\frac{Q_2}{Q_3},\ \ldots,$$

то ясно, что функціи (4) и, слѣдовательно, (3) будутъ одинаковыхъ степеней со знаменателями

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,$$

и потому функціи

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots$$

будутъ степеней нисшихъ.

Переходя къ опредѣленію функцій

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,$$

мы умножимъ обѣ части уравненія

$$f(z) = \omega_1(z)R_1(z) + \omega_2(z)R_2(z) + \ldots + \omega_n(z)R_n(z) + r_n(z)$$

на

$$\lambda_n Q_n(z)\,dz,$$

гдѣ

$$\lambda_n = \frac{q_n(y) - q_n(z)}{y - z},$$

и, послѣ того, проинтегрируемъ обѣ части по окружности круга, начерченнаго изъ начала координатъ безконечно большимъ радіусомъ; тогда получимъ

$$(5)\quad \mathcal{E}\lambda_n Q_n(z) f(z) = \mathcal{E}\lambda_n\omega_1(z)R_1(z)Q_n(z) + \mathcal{E}\lambda_n\omega_2(z)R_2(z)Q_n(z)$$
$$+ \ldots + \mathcal{E}\lambda_n\omega_n(z)R_n(z)Q_n(z) + \mathcal{E}\lambda_n r_n(z)Q_n(z).$$

Такъ какъ степень λ_n единицею ниже чѣмъ степень q_n, а степень r_n по крайней мѣрѣ единицею ниже чѣмъ степень $\frac{1}{Q_{n+1}}$, то, слѣдовательно, степень

$$\lambda_n r_n(z) Q_n(z)$$

по крайней мѣрѣ двумя единицами ниже чѣмъ степень

$$\frac{q_n Q_n}{Q_{n+1}}.$$

Но степень функціи $\frac{q_n Q_n}{Q_{n+1}}$ равняется нулю; слѣдовательно степень функціи $\lambda_n r_n(z) Q_n(z)$ не превышаетъ -2, вслѣдствіе чего

$$\mathcal{E}\lambda_n r_n(z) Q_n(z) = 0. \tag{5}$$

Кромѣ того, по формулѣ (II) предъидущаго §-фа, мы имѣемъ

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{E}\lambda_n \omega_m(z) R_m(z) Q_n(z) = 0 \\ \mathcal{E}\lambda_n \omega_n(z) R_n(z) Q_n(z) = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n. \end{array}\right. \tag{6}$$

Внося въ уравненіе (4) на мѣсто членовъ во второй части ихъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (5) и (6), получаемъ

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = \mathcal{E}\lambda_n Q_n(z) f(z). \tag{I}$$

Это и есть формула, опредѣляющая значеніе искомыхъ коэффиціентовъ

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$$

Она можетъ быть представлена еще иначе, именно, слѣдующимъ образомъ:

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = \mathrm{E}\, q_n \mathrm{F}\, Q_n f(y). \tag{II}$$

Подъ такимъ видомъ ее далъ Чебышевъ въ вышеупомянутомъ мемуарѣ.

Подставляя въ формулѣ (II)

$$Q_n f(y) - \mathrm{E}\, Q_n f(y)$$

на мѣсто

$$\mathrm{F}\, Q_n f(y),$$

получимъ

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = \mathrm{E}\, q_n Q_n f(y) - q_n \mathrm{E}\, Q_n f(y).$$

Замѣчая-же, что ω_n есть цѣлая фуркція степени ниже чѣмъ q_n, мы изъ этой формулы заключаемъ, что

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n$$

будетъ представлять остатокъ, получаемый при дѣленіи на q_n функціи $\mathrm{E}\, q_n Q_n f(y)$.

Допустивъ, что всѣ неполныя частныя $q_1, q_2 \ldots$ первой степени, и положивъ

$$q_n = B_n + A_n y,$$

получимъ

$$\lambda_n = A_n.$$

Слѣдовательно

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = A_n \mathcal{E} Q_n f(z),$$

откуда

$$\omega_n = \frac{(-1)^{n-1} A_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} \mathcal{E} Q_n f(z). \tag{III}$$

5. Переходя къ частному случаю, мы положимъ

$$f(y) = \frac{1}{y-x};$$

тогда формула (I) приметъ такой видъ:

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = \mathcal{E} \frac{\lambda_n Q_n(z)}{z-x},$$

то есть,

$$(-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n \omega_n = \lambda_n(x) Q_n(x),$$

гдѣ

$$\lambda_n(x) = \frac{q_n(y) - q_n(x)}{y-x}.$$

Вслѣдствіе этого, мы получаемъ такое разложеніе функціи $\dfrac{1}{y-x}$ въ рядъ, расположенный по функціямъ R_n:

$$\frac{1}{y-x} = \mu_1 Q_1(x) R_1(y) + \mu_2 Q_2(x) R_2(y) + \ldots$$

гдѣ

$$\mu_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_1 a_2 \ldots a_n} \frac{q_n(y) - q_n(x)}{y-x}.$$

Формула эта тождественна съ формулой (III) предъидущаго параграфа.

ПРИБАВЛЕНІЕ I.

Симметрическія функціи.

Новое доказательство формулы Лагранжа, данной въ § 14-мъ.

1. Тѣ самые пріемы, которые въ § 13-мъ послужили намъ для вывода ряда Лагранжа, даютъ весьма простое и удобное средство вывести формулу для вычисленія симметрической функціи

$$(1) \qquad \sum_0^n \psi(x_r) = \psi(x_0) + \psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots . \psi(x_{n-1})$$

отъ корней уравненія

$$(2) \qquad f(x) = z\,(x - u);$$

причемъ $\psi(x)$ изображаетъ раціональную функцію вида

$$(3) \qquad \psi(x) = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_3}{x^3} + \ldots \frac{B_m}{x^m},$$

$f(x)$ изображаетъ цѣлую раціональную функцію степени n, дѣлящуюся на x, но не дѣлящуюся ни на x^2, ни на $x - u$, и не содержащую въ выраженіи своемъ перемѣнной z; u есть произвольная постоянная величина не равная нулю.

На самомъ дѣлѣ, сумма

$$\sum_0^n \psi(x_r),$$

разсматриваемая какъ функція отъ независимой перемѣнной z, остается однозначною и неразрывною во всей координатной плоскости, за исключеніемъ точки $z = 0$, въ которой имѣемъ

$$\sum_0^n \psi(x_r) = \infty;$$

ибо функція $\psi(x)$ обращается въ ∞ только при $x = 0$, а между корнями уравненія (2) тогда только можетъ находиться нуль, когда $z = 0$. Кромѣ того, при $z = \infty$, $n - 1$ корней уравненія (2) обращается въ ∞, вслѣдствіе чего

$$\sum_0^n \psi(x_r) = \psi(u).$$

Принимая все это въ соображеніе, мы заключаемъ, что

$$(4)\qquad \sum_{o}^{n}\psi(x_r)=\psi(u)+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\dots\frac{A_i}{z^i}+\dots$$

Остается опредѣлить неизвѣстные коэффиціенты

$$A_1,\ A_2,\ \dots\dots A_i,\ \dots\dots$$

Для этого, мы замѣчаемъ что

$$A_i=\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\, z^{i-1}\sum_{o}^{n}\psi(x_r),$$

или

$$A_i=\frac{1}{i}\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\frac{dz^i}{dz}\sum_{o}^{n}\psi(x_r),$$

откуда, интегрируя по частямъ

$$A_i=-\frac{1}{i}\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\, z^i\sum_{o}\psi'(x_r)\frac{dx_r}{dz},$$

то есть,

$$(5)\,A_i=-\frac{1}{i}\Big[\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}z^i\psi'(x_0)\frac{dx_0}{dz}+\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}z^i\psi'(x_1)\frac{dx_1}{dz}+\dots+\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}z^i\psi'(x_{n-1})\frac{dx_{n-1}}{dz}\Big].$$

Но если, предполагая z безконечно малымъ, обозначимъ чрезъ x_0 тотъ корень уравненія

$$f(x)=z\,(x-u),$$

который при $z=0$ обращается въ нуль, то

$$\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\, z^i\,\psi'\,(x_1)\,\frac{dx_1}{dz}=0,$$

$$\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\, z^i\,\psi'\,(x_2)\,\frac{dx_2}{dz}=0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\underset{(z=0)}{\mathcal{E}}\, z^i\,\psi'\,(x_{n-1})\,\frac{dx_{n-1}}{dz}=0;$$

ибо, по предположенію, ни одинъ изъ корней $x_1,\ x_2,\ \dots x_{n-1}$ при безконечно маломъ z, не есть величина безконечно малая, вслѣдствіе чего, каждая изъ функцій

$$\psi(x_1),\ \psi(x_2),\ \dots\ \psi(x_{n-1})$$

остается вблизи точки $z=0$ не только однозначною, но и конечною, и слѣдовательно ихъ производныя

$$\psi'(x_1)\frac{dx_1}{dz},\ \psi'(x_2)\frac{dx_2}{dz},\ \ldots\ \psi'(x_{n-1})\frac{dx_{n-1}}{dz}$$

остаются также, вблизи точки $z=0$, не только функціями однозначными, но и конечными.

На основаніи этого, вмѣсто уравненія (5) мы получаемъ

$$A_i = -\frac{1}{i}\underset{(z=0)}{\mathcal{E}} z^i\,\psi'(x_0)\,\frac{dx_0}{dz}.$$

Полагая

$$z = \frac{f(x_0)}{x_0-u},$$

и принимая x_0 за независимую перемѣнную, мы находимъ

$$A_i = -\frac{1}{i}\underset{(x_0=0)}{\mathcal{E}} \frac{f(x_0)^i\,\psi'(x_0)\,\frac{dx_0}{dz}\,\frac{dz}{dx_0}}{(x_0-u)^i},$$

или, подставляя x на мѣсто x_0 и упрощая,

$$A_i = (-1)^{i-1}\,\frac{1}{i}\mathcal{E}\frac{((f(x)^i\,\psi'(x)))}{(u-x)^i}.$$

Принимая теперь въ соображеніе формулы 16 §-фа 10, мы видимъ, что

$$(-1)^{i-1}\,\frac{1}{i}\mathcal{E}\frac{((f(x)^i\,\psi'(x)))}{u-x} = \frac{1}{1.2.3....i}\,\mathrm{F}\,\frac{d^{i-1}\,f(u)^i\,\psi'(u)}{du^{i-1}},$$

слѣдовательно

(I) $$A_i = \frac{1}{1.2.3....i}\,\mathrm{F}\,\frac{d^{i-1}f(u)^i\psi'(u)}{du^{i-1}}.$$

Отсюда видно, что при $i > m$,

$$A_i = 0,$$

ибо функція

$$f(u)^i\,\psi'(u),$$

при $i > m$. есть цѣлая.

Принимая это въ соображеніе и внося въ уравненіе (4) на мѣсто

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots$$

ихъ значенія, получаемыя изъ формулы (I), мы находимъ такое выраженіе для искомой функціи:

$$(\mathrm{II})\sum_0^n\psi(x_r)=\mathrm{F}\left[\psi(u)+f(u)\psi'(u)\frac{1}{z}+\frac{1}{1.2}\frac{df(u)^2\psi'(u)}{du}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^2f(u)^3\psi'(u)}{du^3}\frac{1}{z^3}\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{m-1}f(u)^m\psi'(u)}{du^{m-1}}\frac{1}{z^m}\right],$$

гдѣ знакъ F относится къ перемѣнной u.

Положивъ здѣсь $z=1$, мы получимъ формулу (I) §-фа 14, дающую значеніе симметрической функціи

$$\psi(x_0)+\psi(x_1)+\ldots+\psi(x_{n-1})$$

отъ корней уравненія

$$f(x)-x+u=0.$$

Выводъ формулы Варинга.

1. Пусть будетъ алгебраическое уравненіе

$$(1)\qquad x^n=z\,f(x),$$

гдѣ

$$(2)\qquad f(x)=-p_1x^{n-1}-p_2x^{n-2}-\ldots-p_n,$$

и пусть будетъ симметрическая функція

$$(3)\qquad \sum_0^n\psi(x_r)=\psi(x_0)+\psi(x_1)+\psi(x_2)+\ldots+\psi(x_{n-1}),$$

гдѣ

$$(4)\qquad \psi(x)=B_1x+B_2x^2+\ldots+B\ \ x^m.$$

Сумма

$$\sum_0^n\psi(x_r),$$

разсматриваемая какъ функція отъ независимой перемѣнной z, остается конечною и однозначною во всей координатной плоскости, и обращается въ безконечность не иначе, какъ при $z=\infty$. Кромѣ того, та же сумма въ точкѣ $z=0$ обращается въ нуль; ибо при $z=0$ всѣ корни уравненія (1) обращаются въ нуль.

Вслѣдствіе этого, мы имѣемъ такое уравненіе:

(5) $\sum\psi(x_r) = A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_i z^i + \ldots,$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots$ суть неизвѣстные коэффиціенты, зависящіе отъ $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Прежде чѣмъ приступимъ къ опредѣленію коэффиціентовъ

$$A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots,$$

мы замѣтимъ, что, при безконечно малыхъ значеніяхъ на z, каждый изъ корней

$$x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$$

не можетъ быть разсматриваемъ какъ однозначная функція отъ независимой перемѣнной z. Для избѣжанія этого неудобства, мы положимъ

$$z = \xi^n,$$

влѣдствіе чего, на мѣсто уравненій (1) и (5) получимъ

$$x^n = \xi^n f(x), \tag{6}$$

$$\sum(x_i) = A_1\xi^n + A_2\xi^{2n} + A_3\xi^{3n} + \ldots + A_i\xi^{in}\ldots \tag{7}$$

и, какъ показываетъ уравненіе (6), каждый изъ корней

$$x_0, x_1, \ldots x_{n-1},$$

вблизи точки $\xi = 0$, есть функція однозначная отъ независимой перемѣнной ξ.

Переходя къ опредѣленію коэффиціентовъ

$$A_1, A_2, \ldots A_i \ldots,$$

мы замѣчаемъ, что уравненіе (7) даетъ намъ такое выраженіе для коэффиціента A_i:

$$A_i = \mathcal{E}\frac{\sum_0^n \psi(x_r)}{((\xi^{ni+1}))},$$

или

$$A_i = \frac{-1}{ni}\underset{(\xi=0)}{\mathcal{E}}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\right)^{ni}\sum_0^n \psi(x_r),$$

откуда, интегрируя по частямъ,

$$A_i = \frac{1}{ni}\mathcal{E}\frac{\sum_0^n \psi'(x_r)\frac{dx_r}{d\xi}}{((\xi^{ni}))}.$$

Такъ какъ каждый изъ корней x_0, $x_1, \ldots x_{n-1}$, при безконечно маломъ ξ, есть функція однозначная отъ перемѣнной ξ, то послѣднее равенство можно представить еще такимъ образомъ:

$$(8)\quad A_i = \frac{1}{ni}\left[\mathcal{E}\frac{\psi'(x_0)\dfrac{dx_0}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} + \mathcal{E}\frac{\psi'(x_1)\dfrac{dx_1}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} + \ldots + \mathcal{E}\frac{\psi'(x_{n-1})\dfrac{dx_{n-1}}{d\xi}}{((\xi^{ni}))}\right].$$

Возьмемъ теперь во вниманіе одинъ изъ членовъ, составляющихъ вторую часть (8), то есть,

$$\mathcal{E}\frac{\psi'(x_r)\dfrac{dx_r}{d\xi}}{((\xi^{ni}))},$$

и положивъ

$$x_r^n = \xi^n f(x_r),$$

примемъ x_r за независимую перемѣнную, на мѣсто прежней независимой перемѣнной ξ: * тогда получимъ:

$$\mathcal{E}\frac{\psi'(x_r)\dfrac{dx_r}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} = \mathcal{E}\frac{f(x_r)^i\,\psi'(x_r)\dfrac{dx_r}{d\xi}\dfrac{d\xi}{dx_r}}{((x_r{}^{ni}))},$$

или

$$\mathcal{E}\frac{\psi'(x_r)\dfrac{dx_r}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} = \mathcal{E}\frac{f(x)^i\,\psi'(x)}{((x^{ni}))}.$$

Вторая часть этого равенства не зависитъ отъ указателя r, слѣдовательно

$$(9)\quad \mathcal{E}\frac{\psi'(x_0)\dfrac{dx_0}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} + \mathcal{E}\frac{\psi'(x_1)\dfrac{dx_1}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} + \cdots + \mathcal{E}\frac{\psi'(x_{n-1})\dfrac{dx_{n-1}}{d\xi}}{((\xi^{ni}))} = n\,\mathcal{E}\frac{f(x)^i\,\psi'(x)}{((x^{ni}))}.$$

Сравнивая между собою уравненія (8) и (9), получаемъ

$$(10)\quad A_i = \frac{1}{i}\,\mathcal{E}\frac{f(x)^i\psi'(x)}{((x^{ni}))}.$$

Такое общее выраженіе коэффиціента при z^i въ формулѣ (5).

Изъ формулы (10) видно, что, при $i > m$

$$A_i = 0;$$

---

* Это возможно, ибо, при безконечно малыхъ значеніяхъ x_r, функція ξ, опредѣляемая уравненіемъ (9), есть однозначная относительно независимой перемѣнной x_r.

ибо тогда степень функціи

$$\frac{f(x)^i \psi'(x)}{x^{ni}}$$

ниже — 1. Слѣдовательно

$$\text{(I)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_0^n \psi(x_r) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m, \\ &A_i = \frac{1}{i} \mathcal{E} \frac{f(x)^i \psi'(x)}{((x^{ni}))}. \end{aligned} \right.$$

2. Разсмотримъ теперь частный случай, именно, когда

$$\psi(x) = x^m.$$

Подставляя въ послѣднюю изъ формулъ (I) mx^{m-1} на мѣсто $\psi'(x)$, получимъ такое выраженіе для коэффиціента A_i:

$$A_i = \frac{m}{i} \mathcal{E} \frac{f(x)}{((x^{ni-m+1}))}$$

Формула эта показываетъ, что

$$\frac{i}{m} A_i$$

равняется коэффиціенту при x^{ni-m} въ разложеніи функціи

$$f(x)^i$$

въ рядъ по степенямъ x.

Но такъ какъ

$$f(x) = -(p_1^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}, x + p_n)$$

то

$$f(x)^i = (-1)^i \sum \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)} p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n} x^{(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \ldots + (n-n)\lambda_n},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя положительныя числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — считая и нуль за число положительное, — удолетворяющія уравненію

$$(11)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = i.$$

Слѣдовательно

$$A_i = (-1)^i \frac{m}{i} \sum \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n},$$

или

$$(12)\qquad A_i = (-1)^i m \sum \frac{\Gamma(i)}{\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n},$$

гдѣ числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n,$$

на которыя распространяется суммированіе должны удовлетворять, кромѣ уравненія (11), еще такому уравненію:

$$(13) \qquad (n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \ldots + (n-n)\lambda_n = ni - m.$$

Умножая обѣ части уравненія (11) на n и вычитая изъ (13), получимъ на мѣсто уравненія (13) такое:

$$(14) \qquad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots\ldots + n\lambda_n = m.$$

Дѣлая въ формулѣ (12)

$$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m,$$

мы будемъ получать значенія коэффиціентовъ

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_m.$$

Внося такимъ образомъ полученныя значенія во вторую часть формулы

$$\sum x = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m,$$

будемъ имѣть

$$(15) \qquad \sum_o^n x_r^m = m \sum_o^{m+1} \sum \frac{(-1)^i \Gamma(i)}{\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p^{\lambda_n^\varepsilon} z^i,$$

гдѣ первое суммированіе во второй части распространяется на всѣ значенія цѣлыя положительныя или нуль чиселъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n$, удовлетворяющихъ двумъ такимъ уравненіямъ:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n = m,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = i;$$

второе же суммированіе распространяется на

$$i = 1, 2, 3, 4, \ldots m.$$

Формулу (15) можно еще представить такимъ образомъ:

$$\sum_0^n x_r^m = m \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \Gamma(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}{\Gamma(\lambda_1+1)\ldots\Gamma(\lambda_n+1)} p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n} z^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ значенія цѣлыя положительныя или нуль чиселъ $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, удовлетворяющихъ одному уравненію

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n = m.$$

Дѣлая въ послѣдней формулѣ $z = 1$, получимъ слѣдующее выраженіе для суммы m—ыхъ степеней всѣхъ корней уравненія

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0:$$

$$\text{(II)} \quad \sum_0^n x_r^m = m \sum \frac{(-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} \Gamma(\lambda_1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{\Gamma(\lambda_1 + 1) \ldots \Gamma(\lambda_n + 1)} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя положительныя или нуль числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, удовлетворяющія уравненію

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m.$$

Это и есть формула Варинга.

ПРИБАВЛЕНІЕ 2.

Непрерывныя дроби.

Доказательство одной теоремы относительно степеней неполныхъ частныхъ.

1. Въ §-фѣ 15 на стр. 37 было доказано, что если цѣлая раціональная функція $\theta(x)$ не мѣняетъ ни разу своего знака въ промежуткѣ, заключающемся между крайними корнями уравненія

$$f(x) = 0,$$

гдѣ $f(x)$ означаетъ цѣлую раціональную функцію, не имѣющую мнимыхъ корней, и не имѣющую общаго дѣлителя съ $\theta(x)$: то всѣ неполныя частныя

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_n,$$

заключающіяся въ непрерывной дроби

$$\frac{f'(x)\theta(x)}{f(x)} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \ldots + \cfrac{a_n}{q_n}}}},$$

будутъ функціи линейныя относительно перемѣнной x.

Принимая во вниманіе нѣкоторыя изъ нашихъ формулъ, данныхъ въ §-фахъ 15 и 16, мы можемъ ту же теорему вывести гораздо проще чѣмъ въ выше упомянутомъ параграфѣ и, кромѣ того, распространить ее на функціи трансцендентныя.

На самомъ дѣлѣ, по формулѣ (III) §-фа 15, мы имѣемъ

$$(I)\qquad \sum Q^2_m(x_i)\,\theta(x_i) = (-1)^{n-1} a_1 .\ a_2 .\ .\ .\ a_n \mathcal{E} \frac{1}{((q_n^2))},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ корни уравненія

$$f(x) = 0,$$

а $Q_m(x)$ изображаетъ знаменателя m-ой подходящей дроби, степень котораго очевидно ниже чѣмъ степень функціи $f(x)$.

Принявъ это въ соображеніе, мы допустимъ, что степень q_m больше единицы; тогда

$$\mathcal{E} \frac{1}{((q_m))} = 0,$$

и равенство (1) приметъ такой видъ:

$$\sum Q^2_m(x_i)\,\theta(x_i) = 0$$

Но всѣ члены, составляющіе первую часть этого уравненія, имѣютъ одинаковые знаки, ибо $\theta(x)$ по предположенію, не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ между крайними корнями уравненія

$$f(x) = 0;$$

кромѣ того, не можетъ быть, чтобы всѣ значенія

$$Q_m(x_1),\ \ Q_m(x_2),\ \ Q_m(x_3),\ .\ .\ .$$

равнялись нулю, ибо степень функціи $Q_m(x)$ ниже чѣмъ степень $f(x)$. Слѣдовательно, ясно видно, что уравненіе (2) не можетъ имѣть мѣста; а это показываетъ, что степень q_m не можетъ превышать единицу.

Такимъ образомъ теорема наша доказана.

2. Возьмемъ функцію

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z},$$

и допустимъ, что a и b суть величины вещественныя, а $f(z)$ изображаетъ функцію вещественную, не мѣняющую своего знака въ промежуткѣ между $z = a$ и $z = b$.

Допустивъ все это, и положивъ, что

$$\varphi(x) = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \dots + \cfrac{a_n}{q_n + \dots}}}},$$

не трудно доказать, что всѣ неполныя частныя

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \dots$$

суть функціи линейныя.

Дѣйствительно, такъ какъ, по формулѣ (18) § 16,

$$\int_a^b f(x) Q_n^2(x)\, dx = (-1)^{n-1} a_1 . a_2 \dots a_n \mathop{\mathcal{E}} \frac{1}{((q_n))},$$

то, допустивъ, что степень q_n больше единицы, мы будемъ имѣть

$$\mathop{\mathcal{E}} \frac{1}{((q_n))} = 0,$$

и слѣдовательно

$$\int_a^b f(x)\ Q_n^2(x)\ dx = 0.$$

Но это невозможно, ибо подъинтегральная функція не мѣняетъ своего знака въ промежуткѣ заключающемся между предѣлами интеграла. Слѣдовательно невозможно и то, чтобы степень неполнаго частнаго q_n превышала единицу.

3. Вообще, во всякомъ частномъ случаѣ, если мы докажемъ, что величина

$$\mathop{\mathcal{E}} \varphi(x)\ Q_n^2(x)$$

не равняется нулю, при какомъ угодно n, то отсюда заключаемъ, что всѣ неполныя частныя

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \dots,$$

заключающіяся въ непрерывной дроби

$$\varphi(x) = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \dots}}}$$

суть функціи линейныя.

Напримѣръ, положивъ

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-a)\ (x-b)},$$

и допустивъ, что a и b суть величины вещественныя, и что $b > a$, мы получимъ

$$\mathop{\mathcal{E}} \varphi(x)\ Q_n^2(x) = 2 \int_a^b \sqrt{(x-a)\ (x-b)}\ Q_n^2(x)\ dx,$$

или

$$\mathcal{E}\,\varphi(x)\;Q_n^2(x) = \pm\, 2i\int_a^b \sqrt{(x-a)\,(b-x)}\;Q_n^2(x)\,dx.$$

Такъ какъ подъинтегральная функція во второй части этого равенства между предѣлами интеграла остается вещественною и не мѣняетъ своего знака, то

$$\mathcal{E}\,\varphi(x)\;Q_n^2(x),$$

при какомъ угодно n, не можетъ равняться нулю, и слѣдовательно всѣ неполныя частныя

$$q_1,\, q_2,\, q_3,\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;,$$

содержащіяся въ непрерывной дроби

(3) $$\sqrt{(x-a)\,(x-b)} = q_0 + \cfrac{a_1}{q_1 + \cfrac{a_2}{q_2 + \cfrac{a_3}{q_3 + \ldots}}},$$

суть функціи линейныя.

Хотя мы предполагали, что a и b суть величины вещественныя, но, очевидно, равенство (3) остается безъ перемѣны, при какихъ угодно величинахъ a и b — вещественныхъ или мнимыхъ.

Замѣченныя опечатки.

Страница.	Строка.			
7	12 сн.	(1)	вмѣсто	(I)
8	9 сн.	произвольно	»	произвольной
13	7 сн.	найбольшій	»	наибольшій
15	3 св.	найбольшій	»	наибольшій
22	12 св.	$f'(z)\,z$	»	$f'(z)$
48	8 сн.	z_n	»	z^n