STANDAERT — QUESTIONS SUR LES NOMBRES

S. Dickstein

QUESTIONS

SUR

LES NOMBRES

QUESTIONS

SUR

LES NOMBRES

A L'USAGE

DES ÉLÈVES QUI SE DESTINENT

AUX

ÉCOLES SPÉCIALES

AVEC LES DÉMONSTRATIONS

PAR

A. STANDAERT,
Ancien professeur de mathématiques supérieures
au Collége communal de Thuin,
Maître d'études à l'Athénée royal de Bruxelles.

BRUXELLES
H. MANCEAUX, LIBRAIRE-ÉDITEUR
IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE
Rue des Trois-Têtes, 12 (Montagne de la Cour).

1880

ERRATA.

—

Page 7. Ligne 10. Au lieu de : — 95, lisez : — 9 S.

— 54. Avant dernière ligne. Au lieu de : $7n, + 9$, lisez : $7n' + 9$.

— 107. Ligne 23. Au lieu de : $2, 5^2$ ou $2^2\,5$, lisez : 2×5^2 ou $2^2 \times 5$.

— 108. Ligne 15. Au numérateur, lisez : $(10^n - 1)$, au lieu de : $(10^{2n} - 1)$.

— 112. Ligne 15. Au lieu de : Car la différence des carrés de deux nombres consécutifs, lisez : Car la différence de deux nombres consécutifs.

— 113. Ligne 8. Au lieu de : (nº 168), lisez : (nº 175).

— 118. Ligne 5. Au lieu de : $\frac{ab}{2m+1} - \frac{ab}{2m+1}$, lisez : $\frac{2ab}{2m+1} - \frac{2ab}{2m+1}$.

— 123. Ligne 13. Au lieu de : $9n^3$, lisez : $27n^3$.

— 125. Ligne 18. Au lieu de : $3m + 1$, lisez : $3m \pm 1$.

— 126. Ligne 21. Au lieu de : $20m\,(m \pm 1)$, lisez : $20m\,(5m \pm 1)$.

— 126. Ligne 25. Au lieu de : $40m\,(m \pm 1)$, lisez : $40m\,(5m \pm 1)$.

— 126. Ligne 27. Au lieu de : $5m \pm 3$, serait pair, lisez : $5m \pm 1$ et $5m \pm 3$, seraient pairs.

— 145. Ligne 9. Au lieu de : $m.10 - 8$, lisez : $m.10 - 81$.

— 148 et 149. Le nº 246, doit précéder le nº 245.

QUESTIONS SUR LES NOMBRES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES

AVEC

LES DÉMONSTRATIONS

1.

Combien y a-t-il de nombres composés de n chiffres?

Les nombres de 1 chiffre commencent à 1 pour finir à 10 exclusivement.

Il y a donc 9 nombres de 1 chiffre.

Les nombres de 2 chiffres commencent à 10 pour finir à 100 exclusivement.

Il y a donc 90 ou 9×10 nombres de 2 chiffres.

Les nombres de 3 chiffres commencent à 100 pour finir à 1000 exclusivement.

Il y a donc 900 ou 9×10^2 nombres de 3 chiffres.

. . . .

Les nombres de n chiffres commencent à 10^{n-1} pour finir à 10^n exclusivement.

Il y a donc $10^n - 10^{n-1}$ ou $10^{n-1}(10-1)$ ou $9 \times 10^{n-1}$ nombres de n chiffres.

2.

Combien faut-il de chiffres pour écrire tous les nombres composés de n chiffres ?

Il y a 9 nombres d'un seul chiffre (nº 1) ; il faut donc pour les écrire : 9 chiffres.

Il y a 90 ou 9×10 nombres de 2 chiffres ; il faut donc pour les écrire : $2 \times 9 \times 10$ ou 180 chiffres.

Il y a 900 ou 9×10^2 nombres de 3 chiffres ; il faut donc pour les écrire : $3 \times 9 \times 10^2$ ou 2700 chiffres.

. . . .

Il y a $9 \times 10^{n-1}$ nombres de n chiffres ; il faut donc pour les écrire : $n \times 9 \times 10^{n-1}$ chiffres.

3.

Combien faut-il de chiffres pour écrire tous les nombres de 1 à n chiffres inclusivement ?

Prouver que le nombre que vous obtenez a pour chiffre des unités un 9, précédé d'un certain nombre de 8 qui sont précédés d'un nombre contenant autant d'unités qu'il y a de chiffres 8 à sa droite.

Pour écrire tous les nombres de 1 chiffre il faut 9 chiffres.

Pour écrire tous les nombres de 2 chiffres il faut $2 \times 9 \times 10$ chiffres.

. . . .

Pour écrire tous les nombres de n chiffres il faut $n \times 9 \times 10^{n-1}$ chiffres (nº 2).

Donc pour écrire tous les nombres de 1 à n chiffres inclusivement il faut : $9 + 2 \times 9 \times 10 + 3 \times 9 \times 10^2 + \cdots + n \times 9 \times 10^{n-1}$ chiffres.

Représentons cette somme par S ; il vient :

(1) $S = 9\,[1 + 2 \times 10 + 3 \times 10^2 + \cdots + n \times 10^{n-1}]$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par 10, elle devient :

(2) $10\,S = 9\,[10 + 2.\,10^2 + 3.10^3 + \cdots + n \times 10^n]$

Soustrayons (2) de (1) et nous aurons :

$-\,95 = 9\,[1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{n-1} - n\,10^n]$

Ou : $-\,S = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} - n\,10^n$.

Ou : $S = n\,10^n - [1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}]$

Ou : $S = n\,10^n - \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Ou enfin : $S = n\,10^n - \overbrace{111\ldots1}^{n \text{ chiffres}}$.

Le nombre $n\,10^n$ est formé de n suivi de n zéros; le nombre suivant $111\cdots1$ est formé de n chiffres 1 ; donc leur différence est terminée par un 9.

Les n-1 chiffres précédents sont des 8 lesquels sont précédés du nombre n-1.

4.

On écrit la suite naturelle des nombres sans les séparer : **1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15......** ... Quel est le 75892$^{\text{me}}$ chiffre de cette suite.

Nous savons (n° 3) que pour écrire tous les nombres :

1° de 1 chiffre : il faut 9 chiffres.

2° de 1 et 2 chiffres : il faut 189 chiffres.

3° de 1, 2 et 3 chiffres : il faut 2889 chiffres.

4° de 1, 2, 3 et 4 chiffres : il faut 38889 chiffres.

5° de 1, 2, 3, 4 et 5 chiffres : il faut 488889 chiffres.

Donc si nous enlevons de 75892 les 38889 chiffres nécessaires pour écrire tous les nombres de 1, 2, 3 et 4 chiffres le problème est ramené à chercher le 37003^{me} chiffre à partir du 1er chiffre des nombres de 5 chiffres.

Divisons 37003 par 5. Il vient 7400 pour quotient et 3 pour reste. Le chiffre cherché est donc le 3^{me} du 7401^{me} nombre de 5 chiffres.

Le 1er nombre de 5 chiffres est			10000
— 2^{me}	—	—	10000 + 1
— 3^{me}	—	—	10000 + 2
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
— 7401^{me}	—	—	10000 + 7400 ou 17400

Le chiffre cherché est donc : 4.

5.

On écrit tous les nombres de 1 à *n* chiffres inclusivement ; combien de fois écrit-on le même chiffre.

Prenons par exemple, le chiffre 1.

1° Pour les nombres d'un seul chiffre, on écrit le chiffre 1 une fois.

2° Pour les nombres de deux chiffres, on écrit le chiffre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{1° 10 fois à gauche dans la 1}^{\text{re}}\text{ dizaine}\\ \text{2° 1 fois à droite dans chaque dizaine}\end{array}\right\}\ \text{19 fois.}$$

3° Pour les nombres de trois chiffres, on écrit le chiffre 1 :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{1° 100 fois à gauche dans la 1}^{\text{re}}\text{ centaine}\\ \text{2° 9 fois à droite du chiffre des centaines dans}\\ \quad\text{chaque centaine}\\ \text{3° 9 fois à droite du chiffre des dizaines dans}\\ \quad\text{chaque centaine}\end{array}\right\}\ \text{280 fois.}$$

4° Pour les nombres de quatre chiffres, on écrit le chiffre 1 :

$$\left.\begin{array}{l} 1^o\ 1000 \text{ fois à gauche dans le } 1^{er} \text{ mille} \\ 2^o\ 90 \text{ fois à droite du chiffre des mille dans} \\ \quad \text{chaque dizaine de mille} \\ 3^o\ 90 \text{ fois à droite du chiffre des centaines} \\ \quad \text{dans chaque dizaine de mille} \\ 4^o\ 90 \text{ fois à droite du chiffre des dizaines} \\ \quad \text{dans chaque dizaine de mille} \end{array}\right\} \text{3700 fois.}$$

Donc pour les nombres :

De 1 et de 2 chiffres réunis on écrit le chiffre 1 : $1 + 19 = 2 \times 10$ fois.

De 1, de 2 et de 3 chiffres réunis on écrit le chiffre : $1 + 19 + 280 = 3 \times 10^2$ fois.

De 1, de 2, de 3, et de 4 chiffres réunis on écrit le chiffre : $1 + 19 + 280 + 3700 = 4 \times 10^3$ fois.

. . . .

Donc pour les nombres de : 1, 2, 3, 4..... n chiffres réunis on écrit le même chiffre : $n \times 10^{n-1}$ fois.

6.

Si l'on considère deux nombres quelconques 1 et 2 par exemple, et qu'on forme une suite de nombres tels que chacun soit égal à la somme des deux précédents, c'est-à-dire, si l'on opère de la manière suivante : 1 et 2 font 3; 2 et 3 font 5; 3 et 5 font 8...... prouver qu'en continuant ainsi indéfiniment il y aura toujours 4 nombres consécutifs au moins de cette série et 5 au plus qui auront le même nombre de chiffres.

Soient A et B les termes de la série immédiatement inférieurs à 10^n; les termes suivants seront :

$A + B$, $A + 2B$, $2A + 3B$, $3A + 5B$, $5A + 8B$, $8A + 13B$.....

Or, par hypothèse : $A < B$, $A < 10^n$, $B < 10^n$ et $A + B > 10^n$; donc on a :

1° $A + B < 10^n + 10^n$ ou $A + B < 2.10^n < 10^{n+1}$

2° $A + 2B < 10^n + 2.10^n$ ou $A + 2B < 3.10^n < 10^{n+1}$

3° $2A + 3B < 2.10^n + 3.10^n$ ou $2A + 3B < 5.10^n < 10^{n+1}$

4° $3A + 5B < 3.10^n + 5.10^n$ ou $3A + 5B < 8.10^n < 10^{n+1}$

5° $5A + 8B < 5.10^n + 8.10^n$ ou $5A + 8B < 13.10^n$ et $\overset{<}{\underset{>}{=}} 10^{n+1}$

6° $8A + 13B < 8.10^n + 13.10^n$ ou $8A + 13B < 21.10^n$ et je dis que $8A + 13B$ est toujours plus grand que 10^{n+1}

En effet, $8A + 13B = 10A + 10B + 3B - 2A = 10(A + B) + 3B - 2A$

Or, par hypothèse, on a $A + B > 10^n$ donc on a : $10(A + B) > 10^{n+1}$ et de plus B étant, par hypothèse $> A$, $3B$ est $> 2A$ donc enfin : $8A + 13B$ est $> 10^{n+1}$.

Il y a donc toujours quatre termes de la série compris entre 10^n et 10^{n+1} et il ne peut y en avoir plus de cinq.

7.

Faire voir qu'entre $2K$ et $2K + 2m$ il y a $m - 1$ nombres pairs et m nombres impairs.

1° De $2K$ à $2K + 2m$ les nombres pairs sont :

$$\underset{(1)}{2K},\quad \underset{(2)}{2K+2},\quad \underset{(3)}{2K+4},\quad \underset{(4)}{2K+6}\ldots,\quad \underset{(m+1)}{2K+2m}.$$

Il y en a donc $m + 1$ et par suite la quantité de nombres pairs compris entre $2\,K$ et $2\,K + 2\,m$ est $m + 1 - 2$ ou $m - 1$.

2° De $2\,K$ à $2\,K + 2\,m$ les nombres impairs sont :

$2\,K + 1,\ 2\,K + 3,\ 2\,K + 5,\ 2\,K + 7 \ldots\ldots 2\,K + 2\,m - 1,$

ou

$$\underset{(1)}{2\,K + 1}\ \left\{\underset{(2)}{\begin{matrix}2\,K + 1\\ + 1.2,\end{matrix}}\right.\ \left\{\underset{(3)}{\begin{matrix}2\,K + 1\\ + 2.2,\end{matrix}}\right.\ \left\{\underset{(4)}{\begin{matrix}2\,K + 1\\ + 3.2,\end{matrix}}\right.\ \left\{+\ldots\right.\ \left\{\underset{(m)}{\begin{matrix}2\,K + 1\\ + (m-1).2\end{matrix}}\right.$$

Donc il y en a m.

8.

Une loterie se compose de 200 numéros.

On ne possède que les numéros : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Comment doit-on s'y prendre pour faire le tirage,

Pour chaque billet on sera forcé de faire trois tirages successifs.

Pour le 1er tirage on ne mettra dans l'urne que les numéros 0 et 1 ; ce tirage fera connaître le chiffre des centaines.

Pour le 2me et le 3me tirages on mettra dans l'urne les 10 numéros. Le 2me tirage fera connaître le chiffre des dizaines et le 3me celui des unités.

Tous les numéros pourront sortir, excepté le numéro 200. On pourra convenir que ce numéro gagnera si les trois tirages successifs amènent 0.

Si plusieurs billets devaient gagner, comme le même numéro pourrait sortir plusieurs fois, en pourrait convenir qu'à chaque fois il gagne ou bien annuler l'opération qui amène un billet déjà sorti.

9.

On a 5 poids d'un gramme, 5 poids de 10 grammes, 5 poids de 100 grammes, 5 poids de 1000 grammes. ...... Montrer qu'à l'aide d'une balance on peut peser un objet dont le poids est un nombre quelconque de grammes.

Soient A et B les deux plateaux de la balance. Mettons le corps sur le plateau A. Plaçons sur le plateau B, tour à tour, des poids de 1 gr., de 1 décagr., de 1 hectogr........ nous trouverons ainsi quelle est la plus haute unité contenue dans le poids du corps. Supposons que ce poids soit compris entre 1 hectogr. et 1 kilogr.

Plaçons successivement sur le plateau B des poids de 1, 2, 3, 4, 5 hectogr. ;

Si le plateau B penche à 4, par exemple, il s'en suit que le corps pèse moins de 4 hectogr, et plus de 3.

Si 5 hectogr. ne faisaient pas pencher le plateau B, on mettrait 1 kilogr. sur le plateau B et 1, 2, 3, 4 ou 5 hectogr. sur le plateau A, jusqu'à ce que celui-ci penche; 3 par exemple; la différence entre 10 et 3 étant 7, on en conclut que le corps pèse plus de 7 hectog. et moins de 8.

On procédera de la même manière pour déterminer ensuite le nombre de décagrammes et de grammes.

10.

Pour ajouter les nombres A et B, on peut procéder comme suit : à l'un des deux A, par exemple, ajouter une unité de l'ordre immédiatement supérieur aux plus hautes unités de B, et de cette somme retrancher le complément de B.

Exemple : soit à ajouter les nombres 33256 et 352. J'augmente 33256 de 1000. De la somme 34256, je retranche 648, complément de 352. Il reste 33608 pour résultat de l'opération.

En effet, soit n le nombre de chiffres de B.
On a identiquement : $A + B = A + 10^n - 10^n + B$
Ou $A + B = A + 10^n - (10^n - B)$
Ou $A + B = A + 10^n$ — Complément de B.

11.

Pour soustraire le nombre A du nombre B on peut opérer comme suit : au nombre B ajouter le complément du nombre A et diminuer la somme trouvée d'une unité de l'ordre immédiatement supérieur aux plus hautes unités du nombre à soustraire.

Exemple : soit à soustraire 365 de 94856.

Le complément de 365 est 635. Ce complément, ajouté à 94856, donne 95491 pour somme. Cette somme, diminuée de 1000, donne 94491 pour reste de la soustraction.

En effet, soit n le nombre de chiffres de A.
On a identiquement : $B - A = B + (10^n - A) - 10^n$.
Ou $B - A = B +$ complément de $A - 10^n$.

12.

Si l'on fait la différence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé, on trouve 9 pour chiffre du milieu et 9 pour somme des chiffres extrêmes.

Soit : $100\,a + 10b + c$ ce nombre ; le nombre renversé est : $100\,c + 10b + a$ et leur différence : $100\,a + 10b + c - 100c - 10b - a$, ou : $100\,(a - c) + c - a$, et puisque évidemment a est plus grand que c et plus petit que 10, cette différence peut s'écrire :

$100\,(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$.

Donc le chiffre des dizaines est 9.

La somme du chiffre des centaines et de celui des unités est : $a - c - 1 + 10 + c - a$ ou 9.

13.

Si d'un nombre formé par trois chiffres consécutifs on retranche le nombre renversé le reste est 198.

Soient : n, $n - 1$, $n - 2$ ces trois chiffres.

Le nombre est : $100\,n + 10\,(n - 1) + n - 2$, le nombre renversé : $100\,(n - 2) + 10\,(n - 1) + n$ et leur différence $100\,n + 10\,(n - 1) + n - 2 - 100\,(n - 2) - 10\,(n - 1) - n$, ou : $100\,n + 10\,n - 10 + n - 2 - 100\,n + 200 - 10\,n + 10 - n$ ou 198.

14.

On écrit à la suite les uns des autres sans les séparer, en commençant par le plus grand et de gauche à droite, trois nombres consécutifs d'un même nombre de chiffres et de ce résultat on soustrait les mêmes nombres écrits dans les mêmes conditions, mais en allant de droite à gauche.

Le résultat obtenu sera **198**, **19998**, **1999998**, ...$\overset{2n-1}{\overline{199\ldots\ldots9}}98$, suivant que les nombres employés ont : **1**, **2**, **3**, ...n chiffres.

Le théorème précédent fait voir que le théorème est vrai lorsque les nombres sont formés d'un seul chiffre.

Soient donc trois nombres consécutifs formés des chiffres a et b.

Ces nombres seront $10\,a + b$, $10\,a + b - 1$, $10\,a + b - 2$.

Le premier résultat est :

$100000\,a + 10000\,b + 1000\,a + 100\,(b - 1) + 10\,a + b - 2$

Et il faut en soustraire :

$100000\,a + 10000\,(b - 2) + 1000\,a + 100\,(b - 1) + 100 + b$.

Le résultat donne $20000 - 2$ ou 19998.

Donc, si les nombres sont composés de un chiffre, cette différence est de $2 \times 10^2 - 2 = 198$.

Si les nombres sont composés de 2 chiffres, cette différence est de $2 \times 10^4 - 2 = 19998$.

On trouverait de même que ni les nombres sont composés de 3 chiffres, cette différence est de $2 \times 10^6 - 2 = 1999998$.

Donc, si les nombres étaient composés de n chiffres, cette différence serait de $2 \times 10^{2n} - 2 = 1\overbrace{99\ldots\ldots 99}^{2n-1}8$.

15.

1° Si l'on ajoute la somme de deux nombres à leur différence, on obtient pour résultat le double du plus grand.

2° Si l'on retranche la différence de deux nombres de leur somme, on obtient pour résultat le double du plus petit.

3° En déduire que le plus grand des deux nombres vaut leur demi-somme plus leur demi-différence et le plus petit leur demi-somme moins leur demi-différence.

Soient $A > B$ ces deux nombres; S leur somme et D leur différence. Il vient :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ A + B = S \\ (2)\ A - B = D\end{array}\right\}$$

Ajoutant (2) et (1) on obtient : $2\,A = S + D$ (3).

Soustrayant (2) de (1) on obtient : $2\,B = S - D$ (4).

De l'égalité (3) on déduit : $A = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$ et de l'égalité (4) : $B = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$.

16.

Quand on ajoute plusieurs nombres, la somme des chiffres du résultat est surpassée par la somme totale des nombres ajoutés, d'un nombre exact de fois 9.

S'il n'y a pas de retenue, la somme des chiffres du résultat est évidemment la même que la somme des chiffres des nombres ajoutés.

S'il y a une retenue de a, par exemple, sur le chiffre des dizaines, la somme des chiffres des nombres ajoutés surpassera de 10 le chiffre du résultat ; mais le chiffre des centaines étant augmenté de a unités, la différence entre la somme des chiffres des trois premières colonnes et la somme des trois premiers chiffres du résultat est de : $10\,a - a$ ou de $9\,a$.

La même chose peut se dire à chaque retenue.

17.

Si l'on ajoute 11 à un nombre, la différence entre la somme des chiffres de rang impair et la somme des chiffres de rang pair, ne peut être changée que d'un nombre entier de fois 11.

Soit a un chiffre de rang *impair* du nombre proposé.

Si l'on ajoute 1 à a et que a soit plus petit que 9, la somme des chiffres de rang impair et, par suite, la différence en question est augmentée de 1.

Si a est 9, ce chiffre et tous les 9 qui se trouvent à sa gauche seront remplacés par des zéros et le premier chiffre différent de 9 sera augmenté de 1.

Or, il se présente ici deux cas.

1° Il y a un nombre impair de 9 à sa gauche.

En remplaçant ces 9, qui sont en nombre pair, par des zéros, on diminue du même nombre la somme des chiffres de rang impair et celle des chiffres de rang pair et comme le premier chiffre différent de 9 est, par hypothèse, de rang impair, on augmente cette différence de 1.

2° Il y a un nombre pair de 9 à sa gauche.

En remplaçant ces 9, qui sont en nombre impair, par des zéros, on aura diminué de 9 la somme des chiffres de rang impair et augmenté de 1 la somme des chiffres de rang pair; ce qui fait, en tout, pour la différence, une diminution de 10, ou une augmentation de 1 et une diminution de 11, ou une augmentation de 1 en négligeant 1 fois le nombre 11.

Donc, quand on ajoute 1 à un chiffre de rang impair, on augmente la différence en question d'une unité.

On démontrerait semblablement que si l'on ajoutait 1 à un chiffre de rang pair, on diminuerait cette différence d'une unité.

Or, ajouter 11 à un nombre revient à ajouter 1 au chiffre des unités et 1 au chiffre des dizaines. Donc, ou bien on ne change pas la différence entre la somme des chiffres de rang impair et celle des chiffres de rang pair, ou bien on ne la change que d'un certain nombre entier de fois 11.

18.

1° Le produit de deux nombres pairs est pair.

2° Le produit de deux nombres impairs est impair.

3° Le produit d'un nombre pair par un nombre impair est pair.

1°

Le produit de ces deux nombres étant divisible par 2, ce produit est pair.

2°

Soient $2n + 1$ et $2n' + 1$ ces deux nombres impairs;

leur produit est de la forme $2m + 1$ et par suite impair.

3°

Le produit de ces deux nombres étant divisible par 2, ce produit est pair.

19.

Comment peut-on faire le produit de deux nombres en employant au lieu du multiplicateur le complément de ce nombre.

Soient m le multiplicande et n le multiplicateur composé de p chiffres ou $10^{p-1} < n < 10^p$, nous avons identiquement :

$m \times n = m \times (10^p - 10^p + n)$.

Ou $m \times n = m \times 10^p - m\,(10^p - n)$.

Ou $m \times n = m \times 10^p - m \times$ complément de n.

Donc : on écrira à la droite du multiplicande autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le multiplicateur ; de ce résultat on soustraira le produit du multiplicande par le complément du multiplicateur ; le reste est le produit cherché.

Exemple : soit à multiplier 3284 par 998.

Le produit de 3284 par 2, complément de 998 est 6568 ; ce nombre soustrait de 3284000 donne 3277432 pour produit demandé.

20.

Le produit de deux facteurs diminue lorsqu'on augmente le plus grand nombre et qu'on diminue le plus petit d'une unité.

Soient $m > n$ ces deux facteurs.

Leur produit est $m \times n$.

Le nouveau produit est : $(m + 1)(n - 1)$ ou $m \times n + n - m - 1$ ou $m \times n - (m + 1 - n)$, résultat évidemment inférieur à $m \times n$ de la différence des deux facteurs augmentée d'une unité.

21.

Quel changement subit un produit de deux facteurs lorsqu'on diminue le plus grand et qu'on augmente le plus petit d'une unité.

Soient $m > n$ ces deux facteurs.

Leur produit est : $m \times n$.

Le nouveau produit est $(m - 1) \times (n + 1)$

Ou : $m \times n + m - (n + 1)$.

1° Si le plus petit facteur augmenté d'une unité est égal au plus grand facteur, le produit ne change pas de valeur.

2° Si le plus petit facteur augmenté d'une unité est plus petit que le plus grand facteur, le nouveau produit est supérieur à l'ancien.

En résumé : Si les deux facteurs ne diffèrent que d'une unité le produit ne change pas, s'ils diffèrent de plus d'une unité ce produit augmente.

22.

Le nombre des chiffres d'un produit de deux facteurs est égal à la somme des nombres de chiffres du multiplicande et du multiplicateur, ou égal à cette somme diminuée d'une unité.

Soient A et B ces deux facteurs.

Admettons que A ait m chiffres et que B en ait n de sorte que l'on a :

$10^{m-1} \leqq A < 10^m$ et $10^{n-1} \leqq B < 10^n$ et multipliant il vient :

$10^{m+n-2} \leqq A \times B < 10^{m+n}$.

Donc $A \times B$ est plus grand que le plus petit nombre de $m + n - 1$ chiffres, ou au moins égal à ce nombre; donc il ne peut avoir moins de $m + n - 1$ chiffres.

Le produit $A \times B$ est plus petit que le plus petit nombre de $m + n + 1$ chiffres, il ne peut donc avoir plus de $m + n$ chiffres.

23.

Lorsqu'on multiplie n nombres A, B, C, ..., S ayant respectivement a, b, c, ..., s chiffres le produit aura au moins : $a + b + c + ... + s - n + 1$ chiffres et au plus : $a + b + c + ... + s$.

On a : n nombres.
$$\left\{\begin{array}{l} 10^{a-1} \leqq A < 10^a \\ 10^{b-1} \leqq B < 10^b \\ 10^{c-1} \leqq C < 10^c \\ \cdots\cdots\cdots \\ 10^{s-1} \leqq S < 10^s \end{array}\right.$$

et faisant le produit :

$10^{a+b+c+....+s-n} \leqq A \times B \times C \times .... \times S < 10^{a+b+c+....+s}$.

Donc le produit $A \times B \times C \times ... \times S$ est plus grand que le plus petit nombre de : $a + b + c + ... + s - n + 1$ chiffres, ou au moins égal à ce nombre; donc il ne peut en avoir moins.

Ce même produit étant plus petit que le plus petit nombre de : $a + b + c + \dots s + 1$ chiffres ne peut avoir plus de : $a + b + c + \dots + s$ chiffres.

24.

Pour faire le produit de deux nombres compris entre 5 et 10 on peut procéder de la manière suivante : Fermer dans la main gauche autant de doigts qu'il manque d'unités au multiplicande pour être égal à 10. Fermer dans la main droite autant de doigts qu'il manque d'unités au multiplicateur pour être égal à 10. Faire le produit de ces deux nombres de doigts et lui ajouter autant de dizaines qu'il est resté de doigts non fermés.

Soient m le multiplicande et n le multiplicateur.
Le nombre des doigts fermés sera :

$10 - m$ pour la main gauche.

$10 - n$ pour la main droite.

Le produit de ces deux nombres est :

$$100 - 10\,m - 10\,n + m \times n. \quad (a)$$

Le nombre de doigts ouverts sera :

$m - 5$ pour la main gauche.

$n - 5$ pour la main droite.

La somme de ces deux nombre est :

$m + n - 10$. Ce nombre multiplié par 10 donne

$10\,m + 10\,n - 100. \quad (b)$

Ajoutant les résultats (a) et (b) il vient : $m \times n$.

25.

On prend un nombre quelconque de chiffres. On double le 1er, on ajoute 5 au résultat et on multiplie la somme par 5. Au produit obtenu on ajoute le second chiffre, puis on multiplie le résultat par 10. A ce produit on ajoute le 3me chiffre et on multiplie la somme obtenue par 100 et on ajoute le 4me chiffre .... Faire voir que le résultat obtenu diminué de 25, de 250, de 2500 ..... suivant que l'on a employé 2, 3, 4 .... chiffres est égal au nombre formé par ces chiffres écrits dans l'ordre où on les avait placés.

Soient : a, b, c trois chiffres.

En doublant le 1er on obtient	: $2a$
En ajoutant 5 il vient	: $2a + 5$
Multiplions par 5	: $10a + 25$
Ajoutons b	: $10a + b + 25$
Multiplions par 10	: $100a + 10b + 250$
Ajoutons c	: $100a + 10b + c + 250$

De ce résultat enlevons 250 et il reste : $100a + 10b + c$.

26.

Le carré, le cube, la n^{me} puissance d'un nombre entier est terminé par le même chiffre que le carré, le cube, la n^{me} puissance du chiffre de ses unités.

En effet tout nombre entier est de la forme $10a + b$, a représentant la partie des dizaines et b étant le chiffre des unités. Or, si l'on élève $10a + b$ au carré, au cube, à la n^{me} puissance le résultat sera évidemment de l'une des formes $10a' + b^2$, $10a' + b^3$, $10a' + b^n$; donc b^2, b^3, b^n détermineront le chiffre des unités.

27.

Le produit de deux nombres qui diffèrent de deux unités augmenté de 1 donne le carré du nombre intermédiaire.

Soient n et $n - 2$ ces deux nombres. Leur produit est $n^2 - 2n$ qui augmenté de 1 donne $n^2 - 2n + 1$ ou $(n - 1)^2$.

28.

Si au produit de deux nombres consécutifs on ajoute le plus grand, le résultat est le carré du plus grand.

Soient n et $n - 1$ ces deux nombres.

Leur produit est $n(n - 1)$ ou $n^2 - n$ qui augmenté de n donne n^2.

Conséquence : Le produit de deux nombres consécutifs n'est jamais un carré parfait.

En effet, pour que ce produit soit carré parfait, il faut qu'il soit augmenté du plus grand des deux nombres.

29.

Si au produit de trois nombres consécutifs on ajoute le quart du plus petit, ce résultat peut être un carré parfait.

A quelle condition ?

Quelle est la condition nécessaire pour que ce résultat soit un carré parfait entier.

Soient : n, $n+1$, $n+2$ ces trois nombres.

Leur produit est : $n(n+1)(n+2)$ ou $n(n+1)[(n+1)+1]$ ou $n(n+1)^2+n(n+1)$, expression qui, augmentée de $\frac{n}{4}$ donne : $n(n+1)^2+n(n+1)+\frac{n}{4}$, ou :

$$\left[\sqrt{n}\,(n+1)+\frac{\sqrt{n}}{2}\right]^2 \text{ ou } \frac{n}{4}\times\left[2(n+1)+1\right]^2.$$

Il faut donc que n soit un carré parfait.

Pour que cette expression soit un carré parfait entier, il faut que n soit un carré parfait divisible par 4.

Conséquence : Le produit de trois nombres consécutifs n'est jamais un carré parfait.

En effet, pour que ce produit puisse être un carré parfait, il faut qu'il soit augmenté du quart du plus petit de ces trois nombres.

30.

Le produit de quatre nombres consécutifs augmenté d'une unité est un carré parfait.

Soient : n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ ces quatre nombres. Leur produit est :

$n(n+1)(n+2)(n+3)$, ou $n(n+3)[n^2+3n+2]$, ou $n(n+3)[n(n+3)+2]$, ou $n^2(n+3)^2+2n(n+3)$ qui, augmenté d'une unité, donne : $n^2(n+3)^2+2n(n+3)+1$, ou $[n(n+3)+1]^2$.

Conséquence : Le produit de quatre nombres consécutifs n'est jamais un carré parfait.

En effet, pour que ce produit soit un carré parfait, il faut qu'il soit augmenté de 1.

31.

Si au produit de trois nombres consécutifs on ajoute le moyen, le résultat est le cube du moyen.

Soient $n - 1$, n, $n + 1$ ces trois nombres; leur produit est $n^3 - n$ qui augmenté de n donne n^3 pour résultat.

Conséquence : Le produit de trois nombres consécutifs n'est jamais un cube parfait.

En effet, pour que ce produit soit un cube parfait, il faut qu'il soit augmenté du moyen.

32.

Un nombre terminé par un des chiffres 2, 3, 7, 8 ne peut être un carré parfait.

En effet tous les nombres étant terminés par l'un des chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 leurs carrés seront terminés (nº 26) par un des chiffres : 1, 4, 5, 6, 9, donc aucun nombre terminé par un des chiffres 2, 3, 7, 8 ne peut être carré parfait.

33.

Aucun nombre terminé par 5 ne peut être carré parfait, à moins que le chiffre des dizaines ne soit 2.

Si un nombre est terminé à son carré par 5, ce nombre est le carré d'un nombre de la forme : $10a + 5$.

Or le caré de $10a + 5$ étant $100a^2 + 100a + 25$ les parties $100a^2$ et $100a$ sont terminées au moins par deux zéros, donc la somme des trois parties ou le carré de $10a + 5$ est terminé par 25.

34.

1° Un nombre terminé par un nombre impair de zéros ne peut être un carré parfait.

2° Un nombre terminé par un nombre de zéros non divisible par 3 ne peut être un cube parfait.

En effet un nombre terminé au carré ou au cube par des zéros provient d'un nombre de la forme 10^n ; or si on élève 10^n au carré et au cube il vient : 10^{2n} et 10^{3n} ; ce qui démontre le théorème.

35.

Un nombre n'est pas un cube parfait lorsque :

1° Le chiffre des unités étant 2 ou 6, le chiffre des dizaines est pair.

2° Le chiffre des unités étant 8 ou 4, le chiffre des dizaines est impair.

3° Le chiffre des unités étant 5, le chiffre des dizaines n'est ni 2 ni 7.

1°

Tout nombre terminé au cube par 2 ou 6 provient d'un nombre de la forme : $10\,n + 8$ ou $10\,a + 6$.

Les cubes de ces deux nombres sont :

$100\,n^3 + 2400\,n^2 + 1920\,a + 512$

$1000\,a^3 + 1800\,n^2 + 1080\,a + 216$

Les deux premières parties de chacun de ces deux nombres sont terminées par deux zéros au moins. Dans la 3^{me} partie le chiffre des dizaines est évidemment pair. Dans la 4^{me} le chiffre des dizaines est impair.

Donc la somme de ces deux dernières parties donnera pour le chiffre des dizaines un nombre impair, car il n'y a pas de report possible de la somme des unités.

2°

Tout nombre terminé au cube par 8 ou 4 provient d'un nombre de la forme : $10\,a + 2$ ou $10\,a + 4$. Les cubes de ces deux nombres sont :

$1000\,n^3 + 600\,n^2 + 120\,a + 8$

$1000\,n^3 + 1200\,a^2 + 480\,a + 64$

Les deux premières parties de chacun de ces deux nombres sont terminées par deux zéros au moins. Dans la 3me partie le chiffre des dizaines est évidemment pair. Dans la 4me le chiffre des dizaines est pair.

Donc la somme des deux dernières parties donnera pour le chiffre des dizaines un nombre pair, car il n'y a pas de report possible de la somme des unités.

3°

Tout nombre terminé au cube par 5 provient d'un nombre de la forme : $10\,a + 5$. Son cube est : $1000\,n^3 + 1500\,a^2 + 750\,a + 125$.

Les deux premières parties sont terminées par deux zéros au moins.

Or a peut être pair ou impair.

Si a est pair la 3me partie $750\,a$ est terminée par deux zéros au moins et comme le chiffre des dizaines de la 4me partie est 2, ce chiffre sera le chiffre des dizaines du cube de $10\,a + 5$.

Si a est impair la 3me partie $750\,a$ se termine par 50 et comme le chiffre des dizaines de la 4me partie est 2 le chiffre des dizaines de leur somme sera 7.

Donc 7 sera le chiffre des dizaines du cube de $10\,a + 5$.

Donc si un nombre est terminé par 5 son cube sera terminé par 25, si le chiffre des dizaines est pair et par 75, si le chiffre des dizaines est impair.

36.

Si deux nombres m et n jouissent de cette propriété que chacun d'eux est la somme des carrés de deux nombres entiers, le produit $m \times n$ de ces nombres sera également la somme des carrés de deux nombres entiers.

Soient : $m = a^2 + b^2$

et : $n = c^2 + d^2$

On aura : $m \times n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$= a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2$

Ce produit peut s'écrire :

$$m \times n = a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2\,a\,b\,c\,d$$
$$+ a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2\,a\,b\,c\,d \text{ ou}$$
$$m \times n = (a\,c + b\,d)^2 + (a\,d - b\,c)^2 .$$

37.

Etant données deux suites de nombres qui en contiennent l'une autant que l'autre, et si on les dispose par ordre de grandeur décroissante la somme des produits obtenus en multipliant les nombres correspondants sera la plus grande possible.

Examinons d'abord le cas où chaque suite ne renferme que deux nombres.

Soient $a > b$ les termes de la première suite et $a' > b'$

ceux de la seconde; je dis que $aa' + bb'$ est plus grand que $ab' + ba'$.

Démontrons que $ab' + ba'$ peut se retrancher de $aa' + bb'$. Effectuant cette soustraction il vient : $aa' + bb' - ab' - ba'$ ou $a(a' - b') - b(a' - b')$ ou $(a - b) \times (a' - b')$. Or, par hypothèse on a : $a > b$ et $a' > b'$, donc la soustration est possible et par suite $aa' + bb'$ est plus grand que $ab' + ba'$. Je dis que le théorème est vrai pour les deux suites quelconques :

$$a > b > c > \ldots. > k > l.$$
$$a' > b' > c' > \ldots. > k' > l'.$$

Il s'agit de prouver que $aa' + kk'$ est plus grand que $ak' + ka'$. En appliquant la démonstration précédente on trouve que $ak' + ka'$ peut se retrancher de $aa' + kk'$. Donc $aa' + kk'$ est plus grand que $ak' + ka'$.

38.

La somme des carrés de deux nombres est plus grande que leur double produit.

Soient $a > b$ ces deux nombres. Il s'agit de prouver que l'on a : $a^2 + b^2 > 2\,ab$.

En effet, en vertu du théorème précédent, on a :

$aa + bb > ab + ab$, ou $a^2 + b^2 > 2\,ab$.

Autrement. Posons : $a = b + d$, il vient :

$a^2 + b^2 = (b + d)^2 + b^2 = 2\,b^2 + 2\,bd + d^2.$

$2\,ab = 2b\,(b + d) \qquad = 2\,b^2 + 2\,bd.$

D'où : $a^2 + b^2 - 2\,ab = d^2$.

Donc enfin $a^2 + b^2$ surpasse $2\,ab$ du carré de la différence entre a et b.

39.

On marque sur une droite AB deux points C et D et l'on mesure AB, CD, AC, BD, BC, AD, vérifier qu'on a l'identité : AB × CD + AC × BD = AD × BC.

Posons : $\begin{cases} AC = a \\ CD = b \\ BD = c \end{cases}$ Nous aurons : $\begin{cases} AB = a + b + c \\ AD = a + b \\ BC = b + c \end{cases}$

Et par suite :

$AB \times CD = (a + b + c) \times b = ab + b^2 + bc.$

$AC \times BD = \qquad\qquad\qquad\qquad = ac.$

Donc : $AB \times CD + AC \times BD = ab + b^2 + bc + ac$

$= b\,(a + b) + c\,(a + b) = (a + b)\,(b + c).$

Donc enfin : AB × CD + AC × BD = AD × BC.

40.

Le quotient d'une division renferme autant de chiffres qu'il y en a de plus au dividende qu'au diviseur, ou autant plus 1.

Soit D le dividende ayant m chiffres, d le diviseur de n chiffres, q le quotient de cette division et x le nombre de ses chiffres.

$d \times q$ aura $n + x$ ou $n + x - 1$ chiffres (nº 22).

On a donc : ou bien $m = x + n$, d'où $x = m - n$; ou bien $m = x + n - 1$, d'où $x = m - n + 1$.

Donc le quotient a : $m - n$ ou $m - n + 1$ chiffres.

41.

On divise un nombre de m chiffres par un nombre de n chiffres, le quotient par un nombre de p chiffres, le nouveau quotient par un nombre de q chiffres, etc.

Déterminer le nombre des chiffres de chaque quotient.

D'abord le 1er quotient aura $m - n$ ou $m - n + 1$ chiffres (nº 40).

Nous avons donc à diviser un nombre de $m - n$ chiffres par un nombre de p chiffres ou un nombre de $m - n + 1$ chiffres par un nombre de p chiffres.

Le 1er résultat sera compris entre un nombre de $m - n - p$ ou de $m - n - p + 1$ chiffres.

Le 2me résultat sera compris entre un nombre de $m - n + 1 - p$ ou de $m - n + 1 - p + 1 = m - n - p + 2$ chiffres.

Donc enfin le 2me quotient aura au moins $m - n - p$ et au plus $m - n - p + 2$ chiffres.

Un raisonnement analogue donnera pour le 3me quotient un nombre de chiffres égal à : $m - n - p - q$ au moins et à $m - n - p - q + 3$ au plus.

En général si s désigne le nombre des chiffres du Kme diviseur, le Kme quotient aura au moins : $m - n - p - q - \ldots - s$ et au plus : $m - n - p - q - \ldots - s + k$ chiffres.

42.

a, b, c étant les nombres de chiffres des nombres A, B, C, trouver entre quelles limites est compris le nombre des chiffres de $\left(\frac{A \times B}{c}\right)^n$

Le produit $A \times B$ a au plus $a + b$ et au moins $a + b - 1$ chiffres (nº 22).

L'expression $\frac{A \times B}{c}$ aura donc (nº 40) au plus $a + b - c + 1$ et au moins $a + b - c - 1$ chiffres.

Le nombre des chiffres de : $\left(\frac{A \times B}{c}\right)^2$ sera donc compris entre $2(a+b-c+1)$ et $2(a+b-c)-1$ (nº 22).

Celui de $\left(\frac{A \times B}{c}\right)^3$ entre :

$3(a+b-c+1)$ et $3(a+b-c)-2$.

. . . .

Celui de $\left(\frac{A \times B}{c}\right)^n$ entre :

$n(a+b-c+1)$ et $n(a+b-c)-(n-1)$.

43.

Soient A et B deux nombres entiers et A plus petit que B. Divisons B par A soient q et R le quotient et le reste de cette division. Divisons B par R et soient q' et R' le quotient et le reste de cette division. Divisons B par R' etc. Continuons ainsi jusqu'à ce que nous trouvions une division qui réussisse, nous aurons :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'q''} - \frac{1}{qq'q''q'''} + \text{etc.}$$

Nous avons : $B = Aq + R$, d'où : $Aq = B - R$ et $\frac{Aq}{B} = 1 - \frac{R}{B}$ ou $\frac{A}{B} = \frac{1}{q} - \frac{R}{B} \times \frac{1}{q}$ (1).

De $B = Rq' + R'$ nous déduirons de même :

$$\frac{R}{B} = \frac{1}{q'} - \frac{R'}{B} \times \frac{1}{q'} \quad (2).$$

De même $B = R'q'' + R''$ donnera :

$$\frac{R'}{B} = \frac{1}{q''} - \frac{R''}{B} \times \frac{1}{q''} \quad (3), \text{ etc.}$$

Dans (1) remplaçons $\frac{R}{B}$ par sa valeur (2) et il vient :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'} \times \frac{R'}{B} \text{ (4).}$$

Remplaçons dans (4) $\frac{R'}{B}$ par sa valeur (3) et il vient :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'q''} - \frac{1}{qq'q''} \times \frac{R''}{B}$$

Soit $\frac{B}{R''} = q'''$, d'où $\frac{R''}{B} = \frac{1}{q'''}$ et nous avons enfin :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'q''} - \frac{1}{qq'q'q'''}.$$

44.

Forme d'un nombre par rapport à un diviseur donné.

Un nombre quelconque N divisé par un diviseur d donne pour reste l'un des nombres : 0, 1, 2, 3, ..., $d - 1$.

Si nous représentons le quotient entier par q le nombre N sera par rapport au diviseur d de l'une des formes suivantes :

$$dq,\ dq + 1,\ dq + 2,\ dq + 3,\ .....,\ dq + (d - 1).$$

45.

On divise les carrés de tous les nombres par 7, quels sont les restes que l'on obtient.

Un nombre quelconque est par rapport à 7 de l'une des formes suivantes :

$7n$, $7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$, son carré est donc de l'une des formes :

$$7n',\ 7n' + 1,\ 7n' + 4,\ 7n, + 9.$$

Donc les restes que l'on peut obtenir sont : 0, 1, 4, et 2.

46.

Si un nombre divisé par 9 donne pour reste 2, 3, 4, 5, 6 ou 7, ce nombre n'est pas un cube parfait.

Tout nombre est par rapport à 9 de l'une des formes suivantes :

$$9n,\ 9n \pm 1,\ 9n \pm 2,\ 9n \pm 3,\ 9n \pm 4;$$

Donc le cube de ce nombre est de l'une des formes :

$$9n,\ 9n \pm 1,$$

Or parmi ces formes on n'en trouve aucune qui divisée par 9 donne pour reste un des nombres : 2, 3, 4, 5, 6, 7.

47.

De deux nombres pairs consécutifs $2n$ et $2n + 2$, l'un est toujours divisible par 4.

Si n est pair, $2n$ est divisible par 4.

Si n est impair, $n + 1$ est pair et par suite $2n + 2$ ou $2(n + 1)$ est divisible par 4.

48.

1° La somme de 3 nombres consécutifs est divisible par 3.

2° La somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5.

. . . .

3° La somme de $2n + 1$ nombres consécutifs est divisible par $2n + 1$.

1°

Ces trois nombres peuvent se représenter par $K - 1$, K, $K + 1$, (K étant un nombre entier quelconque) et leur somme est : $3K$.

2°

Ces cinq nombres peuvent se représenter par $K - 2$, $K - 1$, K, $K + 1$, $K + 2$, el leur somme est : $5K$.

3°

Ces $2n + 1$ nombres peuvent se représenter par :

$K - n, K - (n - 1), \ldots\ldots K - 1, K, K + 1, \ldots\ldots, K + (n - 1)$, $K + n$, et leur somme est : $(2n + 1)K$.

49.

Le produit de deux nombres consécutifs est divisible par le produit des deux premiers nombres entiers.

Soient n et $n + 1$ ces deux nombres.

Leur produit est $n(n + 1)$.

Si n est pair le théorème est démontré.

Si n est impair, $n + 1$ sera pair et le produit $n(n + 1)$ est divisible par 2.

50.

Le produit de trois nombres consécutifs est divisible par le produit des trois premiers nombres entiers.

Soient $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ ces trois nombres.

D'abord le produit $(n - 1) \times n(n + 1)$ est divisible par 2 (n° 49).

Il reste à démontrer que ce produit est divisible par 3, n est par rapport à 3 de l'une des formes suivantes :

$3p$, $3p+1$ ou $3p+2$.

Si $n=3p$, le produit est divisible par 3.

Si $n=3p+1$, le nombre $n-1=3p$ et par suite le produit est divisible par 3.

Si $n=3p+2$, le nombre $n+1=3p+3=m\,3$ et par suite le produit est divisible par 3.

Donc ce produit est divisible par 2 et par 3 et par suite par $1 \times 2 \times 3$ ou 6.

Conséquence : Etant donnés 3 nombres consécutifs, l'un des trois est divisible par 3.

51.

Le produit de quatre nombres consécutifs est divisible par le produit des quatre premiers nombres entiers.

Soient n, $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$ ces quatre nombres, leur produit est : $n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$.

D'abord ce produit est divisible par $1 \times 2 \times 3$ (nº 50).

Il reste à prouver qu'il est divisible par 4.

Si n est pair, n ou $n+2$ est divisible par 4 (nº 47).

Si n est impair, $n+1$ et $n+3$ seront pairs et l'un des deux sera divisible par 4.

Donc enfin ce produit est divisible par $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ou 24.

52.

Le produit de cinq nombres consécutifs est divisible par le produit des cinq premiers nombres entiers.

Soient n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, ces cinq nombres.

Leur produit est : $n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times (n+4)$.

D'abord ce produit est divisible par $1 \times 2 \times 3 \times 4$ (nº 51).

Il reste à prouver qu'il est divisible par 5.

Si n est divisible par 5, le théorème est démontré.

Si n n'est pas divisible par 5, n est par rapport à 5 de l'une des formes.

$$5m+1.\ 5m+2,\ 5m+3,\ 5m+4.$$

Si n est de la forme	$5m+1$,	alors	$n+4$	est divisible par 5
»	$5m+2$,	»	$n \pm 3$	»
»	$5m+3$,	»	$n+2$	»
»	$5m+4$,	»	$n+1$	»

Donc, dans tous les cas, ce produit est divisible par 5 et par $1 \times 2 \times 3 \times 4$, il l'est donc par $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ ou 120.

53.

Le produit de n nombres consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres.

Admettons que le théorème soit vrai pour $n - 1$ nombres et démontrons qu'il est vrai pour n nombres.

Le théorème étant vrai pour 2 nombres, il sera vrai pour 3 nombres : étant vrai pour 3 nombres, il le sera pour 4, etc.

Il s'agit de prouver que l'expression

$$\frac{(p+1) \times (p+2) \times (p+3) \times \ldots\ldots \times (p+n-1) \times (p+n)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times (n-1) \times n} \quad (a)$$

est entière. Cette expression peut s'écrire :

$$\frac{p\,(p+1)\,(p+2) \ldots\ldots (p+n-2)\,(p+n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times (n-1) \times n} + \frac{(p+1)\,(p+2) \ldots\ldots (p+n-1)\,n}{1 \times 2 \times \ldots\ldots \times (n-1) \times n} \quad (b)$$

La seconde partie de l'expression (b) est entière par hypothèse ; il reste à prouver que la première partie l'est.

Cette partie peut s'écrire :

$$\frac{(p-1)\,p\,(p+1)\,.....\,(p+n-3)\,(p+n-2)}{1\times 2\times 3\times\,....\,\times(n-1)\quad\times n}+$$
$$\frac{p\,(p+1)\,(p+2)\,.....\,(p+n-1)\,n}{1\times 2\times 3\times\,....\,\times\quad(n-1)\times n}\quad(c)$$

La seconde partie de l'expression (c) étant entière par hypothèse, il reste à prouver que la première partie l'est.

. . . .

En continuant à raisonner ainsi, on verra que toutes les expressions que l'on aura examinées seront entières si : $\frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}$ est une expression entière. Or, celle-ci est égale à 1.

54.

Le reste de la division de deux nombres ne change pas quand on ajoute au dividende ou quand on en retranche un multiple du diviseur.

En effet, pour avoir le reste d'une division il faut, du dividende, retrancher le diviseur autant de fois que cela est possible, par conséquent, ce reste ne peut changer quand on recommence la division après avoir augmenté ou diminué le dividende d'une ou de plusieurs fois le diviseur.

55.

Si deux nombres diffèrent entre eux d'un multiple d'un troisième et qu'on les divise l'un et l'autre par celui-ci on obtient des restes égaux.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

56.

Le reste de la division d'un produit de deux ou de plusieurs facteurs par un diviseur ne change pas, quand on augmente ou que l'on diminue l'un quelconque des facteurs d'un multiple du diviseur.

En effet, si l'on augmente ou que l'on diminue le multiplicande d'un nombre égal au diviseur, le produit augmente ou diminue d'autant de fois le diviseur qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; donc (nº 54) le reste de la division n'est pas altéré.

On peut, en conséquence, sans changer le reste, répéter plusieurs fois la même opération sur l'un ou l'autre facteur puisque chacun de ceux-ci peut être considéré comme multiplicande.

57.

Une division ayant été effectuée on la recommence en divisant le dividende par le quotient obtenu. Dans quels cas trouvera-t-on pour quotient et pour reste dans cette dernière opération le diviseur et le reste de la première division.

Si le reste de la division est nul, l'opération est évidemment possible.

Soient M le dividende, m le diviseur, q le quotient et r le reste obtenu.

Nous avons : $M = m \times q + r$, d'où :

$$\frac{M}{m} = q + \frac{r}{m} \quad \text{et} \quad \frac{M}{q} = m + \frac{r}{q}.$$

1° Si l'on a $r < q$, l'opération est possible.

En effet puisque le reste r de la première division est plus petit que le quotient q l'ancien diviseur m doit, dans la seconde opération, devenir le nouveau quotient.

2° Si l'on a $r = q$, le nouveau quotient surpasse l'ancien d'une unité.

3° Si l'on a $r > q$ en posant $r = sq + r'$ (r' pouvant être nul), le nouveau quotient surpasse l'ancien de s unités.

Donc la question n'est possible que dans le cas où le reste est plus petit que le quotient obtenu.

58.

Une division ayant été effectuée on la recommence après avoir augmenté le diviseur d'une unité, dans quels cas les deux opérations donneront-elles le même quotient.

Dans quel cas peut-on augmenter le diviseur de 1, 2, 3,...., m unités sans que le quotient change.

Lorsqu'on augmente le diviseur d'une unité le reste diminue d'une fois le quotient. Donc pour que l'opération soit possible il faut que le reste égale ou surpasse le quotient obtenu.

Si le reste contient 1, 2, 3,..., m fois le quotient obtenu, on pourra augmenter le diviseur de 1, 2, 3,...., m unités sans que le quotient change.

59.

Une division ayant été effectuée on la recommence après avoir diminué le diviseur d'une unité, dans quels cas les deux opérations donneront-elles le même quotient.

Dans quel cas pourra-t-on diminuer le diviseur de 1, 2, 3,..., m unités sans que le quotient change.

Lorsqu'on diminue le diviseur d'une unité le reste augmente d'une fois le quotient. Donc pour que l'opération soit possible il faut que le reste augmenté du quotient soit plus petit que le diviseur diminué d'une unité.

Si donc, d, q, r désignent respectivement le diviseur, le quotient et le reste d'une division il faut que la relation $r + q < d - 1$ soit satisfaite.

Donc si l'on veut savoir de combien d'unités on pourra diminuer le diviseur sans que le quotient change il suffit de chercher pour quelle valeur de m, l'inégalité $r + m\,q < d - m$ est satisfaite.

De cette inégalité on déduit $m\,q + m < d - r$ ou $m\,(q + 1) < d - r$ ou $m < \frac{d-r}{q+1}$. — Donc on pourra diminuer le diviseur d'autant d'unités que l'indique le quotient entier de $\frac{d-r}{q+1}$, sous la condition : $\frac{d-r}{q+1} > 1$.

60.

Si un nombre est exactement divisible par 9 pour trouver le quotient de la division on peut procéder de la manière suivante :

Soit le nombre 51246 à diviser par 9. Retranchez ce nombre d'un nombre qui ayant un zéro pour chiffre des unités aurait pour les autres chiffres ceux que fournit la soustraction elle-même. Ainsi dites : 6 de 10 reste 4; 4 est le chiffre des dizaines du nombre dont on soustrait ; 4 et 1 font 5; 5 de 14 reste 9; 9 est le chiffre des centaines du nombre dont on soustrait ; 2 et 1 font 3 ; 3 de 9 reste 6 ; 6 est le chiffre des mille ; 1 de 6 reste 5 ; 5 est le chiffre des dizaines de mille ; 5 de 5 reste 0. Le quotient cherché est 5694 et l'opération s'écrit :

$$\begin{array}{r} 56940 \\ 51246 \\ \hline 5694 \end{array}$$

Soit q le quotient. Nous avons :

$51246 = 9\,q$ ou $51246 = 10\,q - q$ d'où $q = 10\,q - 51246$. Nous ne connaissons pas $10\,q$ mais nous savons que son premier chiffre est 0 ; donc le premier chiffre de q est $10 - 6 = 4$. Donc 4 est le second chiffre de $10\,q$; donc $14 - (4+1) = 9$ est le second chiffre de q et le troisième de $10\,q$; etc.

61.

Si un nombre est exactement divisible par 11 on peut faire la division d'une manière analogue à celle du théorème précédent.

Soit le nombre 345785 à diviser par 11. Retranchez du dividende un nombre qui ayant 0 pour chiffre des unités aurait pour chiffres suivants ceux fournis par la soustraction elle-même. On trouve ainsi 31435 pour quotient et l'opération se dispose comme suit :

$$\begin{array}{r} 345785 \\ 314350 \\ \hline 31435 \end{array}$$

Soit q le quotient, nous aurons :

$345785 = 11\,q$ ou $345785 = 10\,q + q$ d'où $q = 345785 - 10q$. 0 étant le premier chiffre de $10\,q$, 5 sera le premier chiffre de q et le second de $10\,q$. Donc $8 - 5 = 3$ sera le second chiffre de q et le troisième de $10\,q$; etc.

62.

Si un nombre est exactement divisible par 99 on peut procéder de la manière suivante pour obtenir le quotient.

Soit le nombre 56529 à diviser par 99. Retranchez le dividende d'un nombre qui terminé par deux zéros a pour ses autres chiffres ceux que fournit la soustraction elle-même.

Désignons par q le quotient; nous aurons : $56529 = 99\,q$ ou : $56529 = 100\,q - q$; d'où : $q = 100\,q - 56529$. Les deux premiers chiffres de $100\,q$ étant connus, la soustraction fera connaître les deux premiers de q et par suite le troisième et le quatrième de $100\,q$; etc.

63.

Lorsque dans une multiplication on oublie de reculer d'un rang les chiffres d'un produit partiel la preuve par 9 réussira.

En effet dans ce cas on prend le produit partiel 10 fois trop peu. Donc au lieu de prendre ce produit 10 fois on ne le prend que 1 fois; on l'a donc pris 9 fois de trop peu. Donc l'erreur est un multiple de 9 et la preuve par 9 ne la fera pas ressortir.

64.

Lorsque dans une multiplication on recule les chiffres d'un produit partiel de deux rangs de trop vers la gauche les preuves par 9 et par 11 réussiront.

En effet dans ce cas on prend ce produit partiel 100 fois trop. Donc au lieu de prendre ce produit 1 fois on le prend 100 fois. Donc on l'a pris 99 fois de trop. Donc l'erreur est un multiple de 99, c'est-à-dire de 9 et de 11 et la preuve par 9 ou par 11 ne la fera pas ressortir.

65.

Si l'on fait la somme d'un nombre quelconque de nombres, le reste de la division de cette somme par un diviseur quelconque d sera le même que le reste obtenu en divisant par d la somme des restes correspondants aux différents nombres.

Soient : A, B, C, trois nombres.

On a : $A = md + r$

$$B = m'd + r'$$

$$C = m''d + r''$$

D'où : $A + B + C = md + m'd + m''d + r + r' + r''$

ou $A + B + C = Md + r + r' + r''$

et $\dfrac{A + B + C}{d} = M + \dfrac{r + r' + r''}{d}$

66.

Si l'on fait la différence de deux nombres, le reste de la division de cette différence par un diviseur quelconque d sera le même que le reste obtenu en divisant par d la différence des restes correspondants aux deux nombres.

Soient $A > B$ ces deux nombres.

On a : $A = md + r$

$B = m'd + r'$

D'où : $A - B = md + r - m'd - r'$

Ou $A - B = d(m - m') + r - r'$

Ou $A - B = Md + r - r'$

D'où : $\frac{A - B}{d} = M + \frac{r - r'}{d}$

Si l'on avait $r < r'$, l'égalité ci-dessus devrait s'écrire : $\frac{A - B}{d} = M + \frac{r' - r}{d}$.

67.

Si l'on fait le produit d'un nombre quelconque de facteurs, le reste de la division de ce produit par un diviseur quelconque d sera le même que le reste obtenu en divisant par d le produit des restes correspondants aux différents facteurs.

Soient A, B, C, trois nombres.

On a : $A = m.d + r$

$B = m.'d + r'$

$C = m.''d + r''$. D'où :

$A \times B \times C = (m.d + r) \times (m.'d + r') \times (m.''d + r'')$, ou

$A \times B \times C = M.d + r \times r' \times r''$. D'où :

$$\frac{A \times B \times C}{d} = M + \frac{r \times r' \times r''}{d}.$$

68.

Si deux nombres a et b divisés par un même troisième d donnent le même reste r, la différence $a - b$ de ces deux nombres est divisible par ce troisième nombre.

En effet : $a = dq + r$,
$b = dq' + r$,
D'où : $a - b = dq - dq'$, ou $a - b = m.d$.

69.

Si deux nombres a et b sont tels que leur différence est divisible par le même nombre d, ces deux nombres divisés par ce troisième donneront le même reste.

Supposons, s'il est possible, que nous ayons :
$a = md + r$,
$b = m'd + r'$, d'où $a - b = md - m'd + r - r'$, ou en divisant par d,

$$\frac{a-b}{d} = m - m' + \frac{r - r'}{d}.$$

Or, $\frac{a-b}{d}$ est une expression entière, par hypothèse; donc $r - r'$ doit être divisible par d, ce qui est impossible, car r et r' sont tous deux plus petits que d.

Donc : $r = r'$.

70.

La différence entre deux nombres formés des mêmes chiffres est divisible par 9.

Ce théorème est évident par le n° 68.

Soient $1000a + 100b + 10c + d$ et $1000b + 100a + 10d + c$ ces deux nombres.

On aura :

$1000a + 100b + 10c + d = m9 + (a + b + c + d)$

$1000b + 100a + 10d + c = m9 + (a + b + c + d)$

Donc la différence de ces deux nombres est un multiple de 9.

71.

Si à un nombre composé d'un nombre pair de chiffres on ajoute le même nombre renversé, la somme est un nombre divisible par 11.

Soit n ce nombre.

On a : $n = m.\,11 +$ somme des chiffres de rang impair.
— somme des chiffres de rang pair (1).

Mais en renversant le nombre n les chiffres de rang pair deviennent chiffres de rang impair et réciproquement ; de sorte que dans le nombre renversé n', la somme des chiffres de rang impair ou de rang pair est égale à la somme des chiffres de rang pair ou de rang impair de n.

On a donc : $n' = m11 +$ somme des chiffres de rang pair de n.
— somme des chiffres de rang impair de n (2).

Et si l'on ajoute (1) et (2) il vient $n + n' = m.\,11$.

72.

Soient a et b deux nombres quelconques.

1° a et b divisés par leur différence $a - b$ donnent des restes égaux.

2° a^m et b^m divisés par $a - b$ donnent des restes égaux, quel que soit le nombre entier m.

3° $a^m - b^m$ est divisible par $a - b$ quel que soit le nombre entier m.

1°

Posons $a - b = d$ et nous avons identiquement: $a = a - b + b$ ou $a = d + b$ d'où $\frac{a}{d} = 1 + \frac{b}{d}$ ce qui prouve le théorème.

2°

En effet, par rapport au diviseur $d = a - b$ (n° 67), le reste de : $a \times a$ ou de a^2 est égal au reste de $r \times r$ ou de r^2; le reste de : $a \times a \times a$ ou de a^3 est égal au reste de $r \times r \times r$ ou de r^3; de même le reste de a^m est égal au reste de r^m.

Le même raisonnement prouvera que le reste de b^m est le même que celui de r^m.

Or, a et b divisés par $d = a - b$ donnent le même reste (1°).

Donc a^m et b^m divisés par $a - b$ ou d donnent le même reste.

3°

Puisque (2°) a^m et b^m divisés par $a - b$ donnent le même reste leur différence $a^m - b^m$ est divisible par $a - b$ (n° 68).

73.

Si l'on divise un nombre entier N par le nombre a, le quotient obtenu q par le nombre b, le nouveau quotient q' par le nombre c: prouver que le troisième quotient q'' représente la partie entière du quotient de N par $a \times b \times c$.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien aucune de ces divisions ne laisse de reste, ou bien quelques-unes ou toutes donnent des restes.

1[er] CAS.

Soient : $N = aq$, $q = bq'$, $q' = cq''$, multipliant membre à membre ces trois égalités, il vient :

$$N \times q \times q' = a \times b \times c \times q \times q' \times q'',$$

$$\text{Ou} : N = a \times b \times c \times q''; \text{ d'où} : \frac{N}{a \times b \times c} = q''.$$

2[me] CAS.

Soient : $N = aq + R$ (1), $q = bq' + R'$ (2), $q' = cq'' + R''$ (3).

Remplaçant dans (2) q' par sa valeur, il vient : $q = bcq'' + b\,R'' + R'$, et substituant à q cette valeur dans (1), il vient :

$$N = a \times b \times c \times q'' + ab R'' + aR' + R,$$

$$\text{D'où} : \frac{N}{a \times b \times c} = q'' + \frac{ab\,R'' + a\,R' + R}{a \times b \times c}$$

Il s'agit de prouver que le numérateur de cette fraction est toujours plus petit que $a \times b \times c$.

La plus grande valeur de R est $a - 1$, celle de R' est $b - 1$ et celle de R'' est $c - 1$. Remplaçant ces quantités par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{N}{a \times b \times c} = q'' + \frac{ab\,(c-1) + a\,(b-1) + a - 1}{a \times b \times c} = q'' + \frac{abc - ab + ab - a + a - 1}{a \times b \times c}$$

$$\text{Ou : } \frac{N}{a \times b \times c} = q'' + \frac{abc-1}{a \times b \times c}$$

74.

Le quotient de deux puissances d'un même nombre est une puissance du même nombre dont l'exposant est égal à l'excès de l'exposant du dividende sur l'exposant du diviseur.

Supposons qu'il s'agisse de diviser 5^7 par 5^3. D'après ce qui vient d'être établi, il suffira de diviser 5^7 successivement trois fois par 5 ; ce qui donnera le résultat 5^{7-3} ou 5^4.

75.

Pour diviser un nombre entier de n chiffres par 9, on fait la somme des chiffres du nombre et on divise cette somme par 9 ; au quotient obtenu on ajoute :

1° Le premier chiffre à gauche du nombre.

2° La tranche des deux premiers chiffres à gauche.

3° La tranche des trois premiers chiffres à gauche.

. . . .

N — 1° La tranche des $n-1$ premiers chiffres à gauche. Cette somme est le quotient cherché.

Soit le nombre : $N = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$.

On a :

$N = 999a + a + 99b + b + 9c + c + d$, ou :

$N = 9 \times 111a + 9 \times 11b + 9 \times c + a + b + c + d$, divisant par 9, il vient :

$$\frac{N}{9} = 111\,a + 11\,b + c + \frac{a+b+c+d}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } 111\,a &= 100\,a + 10\,a + a \\ 11\,b &= 10\,b + b \\ c &= c \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\frac{N}{9} = (100a + 10b + c) + (10a + b) + a + \frac{a+b+c+d}{9}$$

ce qui démontre le théorème.

76.

On donne le nombre **12345679**, par quel facteur faut-il le multiplier pour que le produit soit formé de neuf chiffres égaux.

Représentons ce facteur inconnu par m. Le produit devant être composé de 9 chiffres égaux est divisible par 9. Donc m est divisible par 9, puisque l'autre facteur :

1 2 3 4 5 6 7 9 ne l'est pas. Posons : $m = 9q$, et il vient, en supposant que le que le produit doive être formé de neuf chiffres 5.

$$12345679 \times 9q = 555555555$$

$$\text{Ou} : q = \frac{61728395}{12345679} = 5$$

Donc $m = 9 \times 5$. Donc ce facteur doit être égal au produit de 9 par le chiffre à reproduire.

77.

Exposez la marche à suivre pour déterminer le caractère de divisibilité d'un nombre entier N par le diviseur d.

On divisera successivement 1, 10, 100, 1000, ... par d jusqu'à ce que l'on arrive à un reste déjà trouvé ou à un reste nul et l'on aura par exemple :

$$\begin{aligned} 1 &= m.\,d+1 \\ 10 &= m.\,d+r \\ 100 &= m.\,d+r' \\ 1000 &= m.\,d+r'' \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or une unité étant un multiple de d augmenté de 1 unité, 2, 3, 4, ..., 9 unités seront des multiples de d augmentés de 2, 3, 4, ..., 9 unités simples; de même une dizaine étant un multiple de d augmenté de r unités, 2, 3, 4, ..., 9 dizaines seront des multiples de d augmentés de 2, 3, 4, ..., 9 fois r unités.

. . . .

Donc si l'on conçoit le nombre N décomposé en ses diverses collections d'unités, chacune de ces collections égalera un multiple de d augmenté d'un certain nombre de fois : 1, r, r', r'', ... Et si l'on fait la somme on aura N égal à un multiple de d plus un certain nombre de fois : 1, r', r'', r''', ...

Si donc cette dernière partie est divisible par d, les deux parties de N seront divisibles par d, et par suite N sera divisible par d.

78.

Cherchez le caractère de divisibilité d'un nombre par 4, 6, 7, 8, 11, 33, 99.

Un nombre est divisible (nº 77) :

1º par 4.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \text{m. } 4+1 \\ 10 &= \text{m. } 4+2 \\ 100 &= \text{m. } 4+0 \end{aligned}\right\}$$

Lorsque le chiffre des unités augmenté de 2 fois le chiffre des dizaines forme un nombre divisible par 4.

2° par 6.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m.\ 6 + 1 \\ 10 &= m.\ 6 + 4 \\ 100 &= m.\ 6 + 4 \end{aligned}\right\}$$

Lorsque le chiffre des unités augmenté de 4 fois la somme de tous les chiffres forme un nombre divisible par 6.

3° par 7.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m.\ 7 + 1 \\ 10 &= m.\ 7 + 3 \\ 100 &= m.\ 7 + 2 \\ 1000 &= m.\ 7 + 6 = m.\ 7 - 1 \\ 10000 &= m.\ 7 + 4 = m.\ 7 - 3 \\ 100000 &= m.\ 7 + 5 = m.\ 7 - 2 \\ 1000000 &= m.\ 7 + 1 \end{aligned}\right\}$$

Lorsqu'en le partageant en tranches de 3 chiffres à partir de la droite, et qu'en multipliant le 1er, le 2me et le 3me chiffre de chaque tranche respectivement par 1, 3 et 2 la somme des tranches des rang impair diminuée de la somme de tranches de rang pair forme un nombre divisible par 7.

4° par 8.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m.\ 8 + 1 \\ 10 &= m.\ 8 + 2 \\ 100 &= m.\ 8 + 4 \\ 1000 &= m.\ 8 + 0 \end{aligned}\right\}$$

Lorsque le chiffres des unités, plus 2 fois le chiffre des dizaines, plus 4 fois le chiffre des centaines forment un nombre divisible par 8.

5° par 11, 33 ou 99.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= m.\ 11 + 1 \\ 10 &= m.\ 11 + 10 \\ 100 &= m.\ 11 + 1 \\ 1 &= m.\ 33 + 1 \\ 10 &= m.\ 33 + 10 \\ 100 &= m.\ 33 + 1 \\ 1 &= m.\ 99 + 1 \\ 10 &= m.\ 99 + 10 \\ 100 &= m.\ 99 + 1 \end{aligned}\right\}$$

Lorsqu'en le partageant en tranches de 2 chiffres à partir de la droite la somme des tranches forme un nombre divisible par 11, 33 ou 99.

79.

1° Un nombre quelconque est divisible par $10a-1$ lorsque la somme de la partie des dizaines et de a fois le chiffre des unités de ce nombre est divisible par $10a-1$.

2° Un nombre est divisible par $10a+1$ lorsque la partie des dizaines moins a fois le chiffre des unités de ce nombre est divisible par $10a+1$.

3° Un nombre est divisible par $10a+3$ lorsque la partie des dizaines plus $3a+1$ fois le chiffre des unités est divisible par $10a+3$.

4° Un nombre est divisible par $10a-3$ lorsque la partie des dizaines moins $3a-1$ fois le chiffre des unités est divisible par $3a-1$.

1°

Soit $10d+u$ un nombre. Il s'agit de prouver que si : $d+au$ est divisible par $10a-1$ le nombre lui-même est divisible par $10a-1$.

$d+au=K(10a-1)$ donne : $d=K(10a-1)-au$ d'où : $10d+u$ devient : $10K(10a-1)-10au+u$ ou : $10K(10a-1)-u(10a-1)$

D'où : $10d+u=m.(10a-1)$.

Donc le nombre est divisible par $10a-1$.

2° 3° 4°

La même démonstration est applicable.

80.

Si $n - 1$ est un multiple de 3, $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ est un multiple entier de 9.

En effet : $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2} = \frac{(n^2 - 1) + (n - 1)}{2}$
$= \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

Or, par hypothèse, $n = m.\ 3 + 1$ donc $n + 2 = m.\ 3$ et comme $n - 1 = m.\ 3$ le numérateur est un multiple de 9.

Si n est pair $n + 2$ est divisible par 2.

Si n est impair $n - 1$ est divisible par 2.

Donc enfin : $\frac{(n-1)(n+2)}{2} = m.\ 9$ (m étant entier).

81.

n désignant un nombre entier quelconque l'expression : $n^3 + 5\,n$ est divisible par 6.

$n^3 + 5\,n = n^3 + 6\,n - n = 6\,n + n\,(n^2 - 1)$; d'où $n^3 + 5\,n = 6\,n + n\,(n-1)\,(n+1)$.

Or le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6; donc $n\,(n-1)\,(n+1)$ est un multiple de 6 et comme $6\,n$ est divisible par 6, les deux parties de l'expression $n^3 + 5\,n$ sont divisibles par 6 et par suite cette expression l'est elle-même.

82.

n étant un nombre entier quelconque l'expression : $10^n\,(9\,n - 1) + 1$ est toujours divisible par 9.

En effet : $10^n\,(9\,n - 1) + 1$ peut s'écrire $9\,n \times 10^n - 10^n$

$+1$ ou $9\,n \times 10^n - (10^n - 1)$ ou $9\,n.\,10^n - \overbrace{99\ldots\ldots 9}^{n \text{ chiffres}}$, donc les deux parties de cette expression sont divisibles par 9 et par suite l'expression elle-même l'est.

83.

Le nombre $(2\,a)\ (2\,b)\ (2\,c)\ a\ b\ c$ est divisible par $23 \times 29 \times 3 = 2001$.

$(2\,a)\ (2\,b)\ (2\,c)\ a\ b\ c$ peut s'écrire :

$(2\,a)\ (2\,b)\ (2\,c)\ 000 + a\,b\,c$ ou $2000 \times a\,b\,c + a\,b\,c$ ou $2001 \times a\,b\,c$; or, $2001 = 3 \times 23 \times 29$, donc l'expression est divisible par $3 \times 23 \times 29$.

84.

Si n est un nombre entier pair $n(n^2+20)$, $n(n^2-20)$, $n\ (n^2+4)$ et $n\ (n^2-4)$ sont quatre expressions divisibles par 8.

Posons $n = 2\,m$, il vient :

1° $n\,(n^2+20) = 2\,m\,(4\,m^2+20) = 8\,m\,(m^2+5)$

2° $n\,(n^2-20) = 2\,m\,(4\,m^2-20) = 8\,m\,(m^2-5)$

3° $n\,(n^2+\ \ 4) = 2\,m\,(4\,m^2+\ \ 4) = 8\,m\,(m^2+1)$

4° $n\,(n^2-\ \ 4) = 2\,m\,(4\,m^2-\ \ 4) = 8\,m\,(m^2-1)$

85.

Si n est un nombre entier impair $n^5 - n$ est divisible par 48.

$n^5 - n = n\,(n^4-1) = (n^2+1)\,n\,(n+1)\,(n-1)$.

Or : $n\ (n+1)\ (n-1)$ est divisible par 3 (n° 50) n^2+1, $n+1$, $n-1$ sont divisibles par 2 et de plus (n° 47) l'un des deux derniers facteurs est divisible par 4, donc le produit

$(n+1)(n-1)(n^2+1)$ est divisible par 16 et par suite n^5-n est divisible par $3 \times 16 = 48$.

86.

Si a est un nombre impair l'expression $a^4 - 3^4 + 18 (3^2 - a^2)$ est divisible par 64.

$a^4 - 3^4 + 18 (3^2 - a^2) = (a^2 - 3^2)(a^2 + 3^2) - 18 (a^2 - 3^2)$ ou $(a^2 - 3^2)(a^2 + 9 - 18)$ ou $(a^2 - 3^2)(a^2 - 3^2)$ ou $(a^2 - 3^2)^2$.

Or, a étant impair est de la forme $2n+1$.

Donc la dernière expression devient $[(2n+1)^2 - 3^2]^2 = [4n^2 + 4n + 1 - 9]^2 = [4n^2 + 4n - 8]^2 = 16[n^2 + n - 2]^2 = 16[n(n+1) - 2]^2$.

Les deux parties de l'expression entre crochets sont divisibles par 2; donc cette expression elle-même l'est et par suite son carré est divisible par 4. Donc $16[(n+1)n - 2]^2 = 16 \times m.\ 4$.

Donc enfin l'expression proposée est divisible par 64.

N. B. Il en est de même de l'expression $a^4 + 9(9 - 2a^2)$. En effet cette expression peut s'écrire $(a^2 - 3^2)^2$.

87.

Déterminer x et y de manière que le nombre $1234xy$ soit divisible par 8 et par 9.

La somme des chiffres du nombre proposé devant être un multiple de 9 on a :

$1 + 2 + 3 + 4 + x + y = m.\ 9$ ou $x + y = m.\ 9 - 1$.

Or, x et y devant être des nombres d'un seul chiffre, il faut que l'on ait :

$x + y = 9 - 1$, d'où : $x + y = 8$ (1).

ou $x + y = 18 - 1$, d'où : $x + y = 17$ (2).

Le nombre proposé devant être divisible par 8, il faut que : $400+10x+y=m.8$ ou que $2x+y=m.8$.

Or, x et y devant être des nombres d'un seul chiffre il faut que l'on ait :

$2x+y=8$ (3) ou $2x+y=16$ (4) ou $2x+y=24$ (5).

Combinons (1) successivement avec (3), (4) et (5).

(1) donne : $y=8-x$, d'où (3) $x=0$.

Donc : $x=0$ et $y=8$.

(1) donne : $y=8-x$, d'où (4) $x=8$.

Donc : $x=8$ et $y=0$.

(1) donne : $y=8-x$, d'où (5) $x=16$.

Valeur à rejeter.

Maintenant, les valeurs admissibles pour (2) sont évidemment, d'après les conditions de l'énoncé, soit $x=9$ et $y=8$, soit $x=8$ et $y=9$; et pour ces deux valeurs, le nombre proposé devient: 123498 et 123489.

Donc, dans ce cas, le nombre proposé n'est pas divisible par 8.

Donc les seules valeurs admissibles sont : $x=0$ et $y=8$, ou $y=0$ et $x=8$.

Les nombres cherchés sont donc :

123408 et 123480.

88.

Si l'on range par ordre de grandeur tous les diviseurs d'un nombre en commençant par l'unité et finissant par le nombre lui-même, le produit des diviseurs à égale distance des extrêmes est égal au nombre lui-même.

Soient : $1<a<b<c<\ldots\ldots<k<m<n$ les diviseurs du nombre n.

Les quotients $\frac{n}{n} < \frac{n}{m} < \frac{n}{k} < \ldots < \frac{n}{b} < \frac{n}{a} < \frac{n}{1}$ représentent également tous les diviseurs de n et seront respectivement égaux aux précédents donc on a :

$\frac{n}{n} = 1$, d'où : $n = 1 \times n$

$\frac{n}{m} = a$, d'où : $n = a \times m$

$\frac{n}{b} = k$, d'où : $n = b \times k$, etc.

89.

Le produit de tous les diviseurs d'un nombre A dont les facteurs premiers sont a^m, b^n, c^r, est :

$$\sqrt{A^{(m+1)(n+1)(r+1)}}$$

Soient $1, a, b, c, \ldots, h, k, e$, A les diviseurs de ce nombre.

Représentant leur produit par P nous aurons :

$P = 1 \times a \times b \times c \times \ldots \times k \times e \times A.$

$P = A \times e \times k \times \ldots \quad \times b \times a \times 1.$

Multipliant membre à membre il vient : $P^2 = (1 \times A) \times (a \times e) \times (b \times k) \times \ldots \times (b \times k) \times (a \times e) \times (1 \times A)$ ou, en vertu du théorème précédent :

$P^2 = A \times A \times A \times \ldots \times A \times A \times A.$

C'est-à-dire que P^2 est égal au produit d'autant de facteurs égaux à A que ce nombre a de diviseurs. Or, A a $(m+1)(n+1)(r+1)$ diviseurs, donc $P^2 = A^{(m+1)(n+1)(r+1)}$

D'où : $P = \sqrt{A^{(m+1)(n+1)(r+1)}}$.

90.

Soit $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ce nombre peut être décomposé de $\frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, manières différentes en un produit de deux facteurs A et B (a, b, c sont les facteurs premiers de N).

En effet, chaque diviseur de A est accompagné de son inverse $\frac{N}{A}$, donc le nombre des produits A $\times$ B est égal à la moitié des diviseurs de N et ceux-ci sont au nombre de $(\delta + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

91.

Trouver un nombre qui ait m diviseurs.

Soit : $m = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, ($a$, b, c étant les facteurs premiers de m) et soit N le nombre cherché.

On aura : $N = x^{a^{\alpha} - 1} y^{b^{\beta} - 1} z^{c^{\gamma} - 1}$ (x, y, z étant des nombres entiers tout-à-fait indéterminés différents de 1).

En effet, le nombre des diviseurs de N est $(a^{\alpha} - 1 + 1)$ $(b^{\beta} - 1 + 1)$ $(c^{\gamma} - 1 + 1)$, ou $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ ou m.

Exemple : Trouver un nombre qui ait 180 diviseurs. $180 = 2^2.3^2.5$.

Donc $N = x^{2^2 - 1} y^{3^2 = 1} z^{5 - 1}$, ou $N = x^3 y^8 z^4$.

Ainsi : $2^8.3^4.5^3 = 2592000$ admet 180 diviseurs, y compris l'unité et le nombre lui-même.

92.

Déterminez le plus petit nombre qui, divisé successivement par 6, par 18, par 9 et par 12, donne toujours pour reste 4.

Le plus petit nombre exactement divisible par 6, 8, 9 et 12 est évidemment le moindre multiple de ces quatre nombres ou 72.

Donc $72 + 4$ ou 76 est le nombre qui répond à la question.

93.

Tout nombre qui divise $m + n$ et $m \times n$, ne divise pas nécessairement m et n (m et n étant supposé deux nombres entiers).

Ainsi : 4 divise $6 + 18$ et 6×18 mais, ne divise ni 6, ni 18.

En effet, soient : $m = p\,\alpha$ et $n = p^2\,\alpha$.

D'où : $m \times n = p^3\,\alpha^2$ et $m + n = p\,\alpha\,(p + 1)$ et si l'on suppose $p + 1 = \mathrm{K}.\alpha$; on a : $m + n = p.\mathrm{K}.\alpha^2$.

Donc $p\,\alpha^2$ divise $m + n$ et $m \times n$ mais ne divise ni m ni n.

94.

Trouver tous les diviseurs communs à deux nombres, à leur somme et à leur produit.

Soient m et n ces deux nombres, $m + n$ leur somme et $m \times n$ leur produit.

Tout facteur commun à m et à n est facteur commun à $m + n$ et à $m \times n$.

Mais si un nombre divise $m + n$ et $m \times n$ ce nombre ne doit pas nécessairement diviser m et n (nº 93) et par suite les facteurs communs à $m + n$ et à $m \times n$ ne sont pas nécessairement facteurs communs à m et à n.

Donc les seuls facteurs communs à m, à n, à $m + n$ et à $m \times n$ sont les facteurs communs à m et à n.

95.

1° Le P. G. C. D. entre A et B ne peut avoir d'autres facteurs que ceux du P. G. C. D. entre $A + B$ et $A \times B$.

2° Le P. G. C. D. entre $A + B$ et $A \times B$ peut être plus grand que le P. G. C. D. entre A et B.

1° En effet, tous les facteurs communs à A et à B doivent diviser la somme $A + B$ et le produit $A \times B$. Donc le P. G. C. D. entre A et B ne peut contenir d'autres facteurs que les facteurs communs à $A + B$ et à $A \times B$.

2° Le P. G. C. D. entre A et B contient les facteurs communs à A et à B.

Le P. G. C. D. entre $A + B$ et $A \times B$ contient d'abord les facteurs communs à A et à B et ensuite (n° 93) les facteurs communs à $A + B$ et $A \times B$, qui ne sont pas communs à A et B; donc il peut être plus grand que le P. C. C. D. entre A et B.

Exemple : le P. C. C. D. entre 6 et 14 est 2, tandis que le P. C. C. D. entre $6 + 14$ et 6×14 est 4.

96.

Le produit de deux nombres entiers est égal au produit de leur P. G. C. D. par leur P. P. C. M.

En effet, le P. G. C. D. de deux nombres contient tous les facteurs communs à ces deux nombres, chacun d'eux étant pris avec son plus petit exposant; et le P. P. C. M. de ces deux nombres contient tous les facteurs communs avec leur plus grand exposant et de plus tous les facteurs non communs.

Donc le produit du P. G. C. D. de deux nombres par leur P. P. C. M. contient : 1° tous les facteurs non communs à ces deux nombres ; 2° tous leurs facteurs communs avec leur plus petit exposant ; 3° tous les facteurs communs avec leur grand exposant.

Donc enfin ce produit contient tous les facteurs des deux nombres et par suite il est égal au produit de ces deux nombres.

Autrement : Soient $A = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ et $B = a^{\alpha+1} b^{\beta-1}$ ces deux nombres.

Leur produit $A \times B = a^{2\alpha+1} b^{2\beta-1} c^{\gamma}$ (1).

Leur P. G. C. D. est $a^{\alpha} b^{\beta-1}$.

Leur P. P. C. M. est $a^{\alpha+1} b^{\beta} c^{\gamma}$.

Dans le produit du P. G. C. D. par le produit P. P. C. M. est $a^{2\alpha+1} b^{2\beta-1} c^{\gamma}$ (2).

Donc : A × B = P. G. C. D. × P. P. C. M.

Conséquences : 1° Le P. G. C. D. de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur P. P. C. M.

2° Le P. P. C. M. de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur P. G. C. D.

97.

Pour trouver le P. G. C. D. de deux nombres A et B on peut procéder de la manière suivante : former les B premiers multiples de A : A, 2 A, 3 A, *m* A, B × A, et chercher ceux qui sont divisibles par B. Leur nombre est le P. G. C. D. cherché.

Soit n le nombre de termes divisibles par B.

Supposons que m. A $= q$ B soit le premier de ces multiples, les autres seront : 2 m.A = 2 q. B, 3 m. A = 3 q.B.

...... $n. mA. = n\, q. B = B. A$, car nous avons supposé que m. A était le moindre multiple de A divisible par B.

On a donc : $n \times m\ A = B. A$ et $n \times q\ B = B. A$ d'où : $m = \frac{B}{n}$ et $q = \frac{A}{n}$; mais m et q sont premiers entre eux, car s'ils avaient un facteur commun, m.A ne serait pas le plus petit multiple de A divisible par B. Donc n est le P. C. C. D. entre A et B.

98.

Pour trouver le P. G. C. D. de trois nombres A, B, C on peut procéder de la manière suivante : former les C premiers multiples de A et de B.

A, 2 A, 3 A, ..., m. A, ..., C. A.

B, 2 B, 3 B, ..., m B, ..., C. B. et chercher combien il arrive de fois que les deux nombres correspondant dans les deux lignes sont divisibles à la fois par C.

Ce nombre de fois est le P. G. C. D. de A, B et C.

Soient $mA = q.C$ et $m.B = q'.C$ les premiers termes qui dans les deux suites sont en même temps divisibles par C, les autres seront :

$2. mA = 2. qC$, $3\, mA = 3. qC$, ..., $n. mA = n. qC = CA$.
$2. mB = 2. q'C$, $3\, mB = 2. q'C$, ..., $n. mB = n. q'C = CB$.

Car nous avons supposé que mA et mB étaient les moindres multiples de A et de B divisibles par C.

$$\text{On a donc : } \left.\begin{array}{r} n. mA = A.C \\ n. qC = A.C \end{array}\right\} \text{ Et } \begin{array}{l} n. mB = B.C. \\ n. q'C = B.C. \end{array}$$

D'où : $m = \frac{C}{n}$, $q = \frac{A}{n}$, $q' = \frac{B}{n}$.

Mais m, q et q' sont premiers entre eux : car s'il en était autrement, puisque $m.A = q.C$ et $m.B = q.C$, il existerait deux multiples de A et de B moindres que $m.A$ et $m.B$ qui seraient à la fois divisibles par C, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc n est le P. G. C. D. entre A, B et C.

99.

Pour trouver le P. G. C. D. entre trois nombres A, B, C, on divise par le plus petit C les deux autres ; soient R et R′ les restes obtenus; ensuite on divise par le plus petit des trois nombres R, R′ et C, les deux autres, etc. Le dernier diviseur qui donne un reste nul est le P. G. C. D. des trois nombres : A, B, C.

En effet, on a : $A = C\,q + R$

$$B = C\,q' + R'$$

Donc tout diviseur commun à : A, B, C, est diviseur commun à : R, R′, C, et réciproquement.

100.

Pour trouver le P. G. C. D. entre le nombre N et le produit de plusieurs facteurs $A \times B \times C$, on peut opérer comme suit :

Chercher le P. G. C. D. entre N et A; soit D ce nombre.

Diviser N par D et chercher le P. G. C. D. entre ce quotient q et B; soit D′ ce nombre.

Diviser q par D′ et chercher le P. G. C. D. entre le quotient q' et C; soit D″ ce nombre.

Le P. G. C. D. entre N et $A \times B \times C$ est $D \times D' \times D''$.

En effet, il est évident que $D \times D' \times D''$ est le produit de tous les facteurs communs à N et à $A \times B \times C$. Donc $D \times D' \times D''$ est le P. C. C. D. de N et de $A \times B \times C$.

101.

Si l'on forme la suite : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... dont chaque terme est la somme des deux précédents, et si dans l'opération du P. G. C. D. entre P et Q, deux restes consécutifs tombent entre deux des mêmes termes de cette suite, il n'y en aura aucun dans l'intervalle précédent.

Soit la suite :

$1, 2, 3, 5, \ldots, A, B, A + B, A + 2B, 2A + 3B, \ldots.$

Soient R, S, T, trois restes consécutifs de la recherche du P. G. C. D. entre P et Q, je dis que si R et S tombent entre B et $A + B$, on n'aura aucun reste entre B et A.

En effet, nous avons : $R = mS + T$, d'où $T = R - mS$. Or, si nous remplaçons R par $A + B$, nombre plus grand que R, et S par B, nombre plus petit que S, nous avons $T < A + B - mB$ ou $T < A - B(m - 1)$, ou à plus forte raison $T < A$. Donc le reste suivant ne tombe pas entre B et A.

102.

La recherche du P. G. C. D. de deux nombres exige un nombre de divisions au plus égal à cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres.

Soient $A > B$ deux nombres, $B < 10^n$ et R, S, T, les restes successifs obtenus dans la recherche du P. C. C. D. entre A et B.

Nous savons (nº 6) que deux termes de la suite : $1, 10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^{n-1}, 10^n$, (1) ne peuvent comprendre plus de cinq termes de cette autre suite :

$1, 2, 3, 5, \ldots A, B, A + B, A + 2B, 2A + 3B \ldots$ (2) et qu'entre trois termes consécutifs de la suite (2), il n'y a jamais plus de deux des restes R, S, T. (nº 101). Il peut y avoir au plus cinq termes de la suite (2), dans chacun des n intervalles de la suite (1), ce qui faut au plus $5\,n$ termes de 1 à 10^n.

Entre chacun des $5\,n - 1$ intervalles que présentent ces termes, il y a au plus un reste ; donc il y aura au plus $5\,n - 1$ restes.

Donc enfin le nombre des restes est plus petit que $5\,n$.

103.

Le nombre de divisions à effectuer pour trouver le P. G. C. D. de deux nombres entiers est au plus égal à l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 2 pour obtenir le plus petit des deux nombres ou le nombre immédiatement inférieur à ce dernier.

Supposons que n soit le nombre de divisions nécessaires pour obtenir le P. G. C. D., D entre A et B, nous aurons :

$$A = Bq_1 + R_1$$
$$B = R_1 q_2 + R_2$$
$$R_1 = R_2 q_3 + R_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_{n-2} = R_{n-1} q_n + R_n$$

Ou $R_{n-2} = D \times Q_n$; car $R_{n-1} = D$ et $R_n = 0$.

Or, on peut toujours supposer le reste plus petit que le demi-diviseur employé, en prenant le quotient entier par défaut ou par excès, car le P. G. C. D. cherché ne sera pas altéré par la forme négative que prendrait un reste.

Donc : $2\,R_1 \leqq B.$

$2\,R_2 \leqq R_1.$

. . . .

$2\,R_{n-2} \leqq R_{n-3}.$

$2\,D \leqq R_{n-2}.$

Multipliant et simplifiant, il vient : $2^n.\ D \leqq B.$

Or, le cas le plus défavorable étant lorsqu'on a : $D = 1$, il vient : $2^n \leqq B.$

104.

Si deux nombres a et b sont premiers entre eux le P. G. C. D. de $a + b$ et de $a - b$ est au plus égal à **2**.

Le P. C. C. D. de $a + b$ et de $a - b$ doit diviser leur somme $2\,a$ et leur différence $2\,b$. Il ne peut donc être plus grand que le P. C. C. D. de $2\,a$ et de $2\,b$ qui est 2.

105.

Tout nombre qui n'est pas premier admet au moins un diviseur premier.

En effet, soit A un nombre non premier. Puisque A n'est pas premier, il admet un diviseur d, plus grand que 1 et plus petit que A. Si d est premier, le théorème est démontré. Si d n'est pas premier, d admet un diviseur $d' > 1$ et $< d$.

Si d' est premier, le théorème est démontré. Car, d' divisant d, divise forcément A.

Si d' n'est pas premier, d' admet un diviseur $d'' > 1$ et $< d'$.

Si d'' est premier, le théorème est démontré; etc.

Les diviseurs d, d', d'',..., tous plus grands que 1, allant en diminuant, leur nombre est nécessairement limité, et le dernier d'entre eux est premier.

Donc A admet un diviseur premier.

106.

La suite des nombres premiers est illimitée.

Soit P un nombre premier aussi grand qu'on voudra ; je dis qu'il y a un nombre premier P′ plus grand que P.

Formons le produit de tous les nombres premiers depuis 2 jusqu'à P et ajoutons 1 à ce produit.

Il vient : $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times P + 1 = S$.

S est évidemment plus grand que P.

Si S est premier, le théorème est démontré.

Si S n'est pas premier, il admet un diviseur premier P′ (nº 105). Or, ce diviseur P′ ne peut être aucun des facteurs premiers 2, 3, 5, ..., P ; car autrement ce facteur P′, divisant S et $2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times P$, devrait diviser 1, ce qui est impossible.

Donc P′ est plus grand que P, ce qu'il fallait démontrer.

107.

Comment peut-on s'assurer si un nombre entier proposé N est premier ou non.

Il suffit de le diviser sucessivement par les nombres premiers moindres que lui, jusqu'à ce que l'on arrive à un quotient inférieur au diviseur. Si aucune de ces divisions ne réussit, le nombre proposé est premier.

En effet, soit d le plus grand nombre premier essayé, tel que le quotient q soit plus petit que d. Si l'on pouvait faire exactement la division de N par un nombre plus grand que d le quotient de cette division serait aussi un diviseur de N et il serait moindre que d et par suite N aurait un diviseur premier plus petit que d. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc N est premier.

108.

On peut trouver une suite de m nombres consécutifs dont aucun n'est premier.

En effet, quel que soit le nombre entier m, le produit :

1° $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (m+1) + 2$, est divisible par 2.

2° $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (m+1) + 3$, est divisible par 3.

3° $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (m+1) + 4$, est divisible par 4.

. . . .

m^{o} $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (m+1) + (m+1)$, est divisible par $m+1$.

Donc aucun de ces m nombres n'est premier.

109.

Forme générale d'un nombre premier avec un diviseur donné.

Soit 6 ce diviseur.

Tout nombre est par rapport à 6 de l'une des formes; (m étant entier).

$6m$, $6m+1$, $6m+2$, $6m+3$, $6m+4$, $6m+5$,

$6m$ est divisible par 6.

$6m+2$, » par 2.

$6m+3$, » par 3.

$6m+4$, » par 2.

Donc les formes $6m+1$ et $6m+5$ ne donneront que des nombres premiers avec 6.

110.

Deux nombres consécutifs sont premiers entre eux.

Soient n et $n+1$ ces deux nombres.

Si n et $n+1$ avaient un facteur commun, ce diviseur devrait diviser leur différence qui est 1.

Donc n et $n+1$ sont premiers entre eux.

111.

B et $mB+1$ (m et B étant deux nombres entiers) sont premiers entre eux.

En effet, tout nombre qui divise B divise mB et par suite, si un nombre n divisait B et $mB+1$ il devrait diviser 1, ce qui est impossible.

Donc B et $mB+1$ sont deux nombres premiers entre eux.

112.

Tout nombre impair et la moitié du nombre pair suivant sont deux nombres premiers entre eux.

Soient $2n+1$ et $2n+2$ ces deux nombres. Il s'agit de prouver que $2n+1$ et $n+1$ sont deux nombres premiers entre eux.

$2n+1$ peut s'écrire : $n+(n+1)$.

Si $n+1$ et $2n+1$ avaient un facteur premier commun ce facteur divisant la somme $2n+1$ et l'une de ses parties $n+1$ devrait diviser l'autre partie n de cette somme. Or, n et $n+1$ sont premiers entre eux; donc aussi $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

113.

Les trois nombres n, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux deux à deux.

En effet, n et $n+1$ sont premiers entre eux (nº 110).

$n+1$ et $2n+1$ sont aussi premiers entre eux (nº 112).

Enfin, n et $2n+1$ sont aussi deux nombres premiers entre eux (nº 111).

Donc les trois nombres n, $n+1$, $2n+1$ sont premiers entre eux deux à deux.

114.

Si a et b désignent deux nombres premiers entre eux $a+b$ et ab seront aussi premiers entre eux.

Si $a+b$ et ab ne sont pas premiers entre eux, soit α un de leurs facteurs premiers communs.

α étant premier et divisant ab doit diviser a ou b. Admettons qu'il divise b. α divisant b et $a+b$ doit diviser a. Donc

a et b auraient un facteur commun ce qui est contraire à l'hypothèse.

115.

Si a et b désignent deux nombres premiers entre eux $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ ne peuvent avoir d'autre facteur premier commun que 3.

$a^2 - a\,b + b^2$ peut s'écrire : $a^2 + 2\,a\,b + b^2 - 3\,a\,b$ ou $(a + b)^2 - 3\,a\,b$. Or, (n° 114) $a + b$ et $a\,b$ sont premiers entre eux. Donc le facteur 3 est le seul qui puisse être commun à $(a + b)^2$ et à $3\,a\,b$. Donc $a^2 - a\,b + b^2$ et $a + b$ n'ont d'autre diviseur commun que 3.

116.

Si un nombre n'est pas divisible par 3, son double + 1 ou son double — 1 est divisible par 3.

Tout nombre non divisible par 3 est de la forme $3\,n \pm 1$. Le double de ce nombre est $6\,n \pm 2$; et ce nombre augmenté de 1 ou diminué de 1 suivant qu'il est de la forme $6\,n + 2$ ou $6\,n - 2$ est évidemment un multiple de 3.

117.

Si n est un nombre premier avec 3, $4\,n^2 - 1$ est divisible par 3.

En effet, n étant premier avec 3, est de la forme $3\,m \pm 1$ et par suite :

$2\,n$ est de la forme $6\,m \pm 2$; donc $4\,n^2 - 1$ devient :

$(6\,m \pm 2)^2 - 1$, ou $36\,m^2 \pm 24\,m + 4 - 1 = 36\,m^2 + 24\,m + 3 = M.\,3$.

118.

Tout nombre qui précède ou celui qui suit un nombre premier absolu plus grand que 3 est divisible par 6.

Soit n un nombre premier plus grand que 3; n est impair. Le nombre qui précède n est $n - 1$, celui qui suit n est $n + 1$. Or, $n - 1$ et $n + 1$ sont pairs et par suite divisibles par 2.

De plus $n - 1$, n, $n + 1$ étant trois nombres consécutifs l'un d'eux, est divisible par 3. Or, ce ne peut être n qui est premier; ce doit donc être $n - 1$ ou $n + 1$.

$n - 1$ et $n + 1$ étant tous deux divisibles par 2, et l'un d'eux étant divisible par 3, $n - 1$ ou $n + 1$ doit être divisible par 6.

119.

Tout nombre premier absolu plus grand que 3 est de la forme $6\,m \pm 1$.

En effet, (nº 118) tout nombre qui précède ou qui suit un nombre premier absolu plus grand que 3, est de la forme $6\,m$. Donc tout nombre premier plus grand que 3, est de la forme $6\,m \pm 1$.

120.

Quel que soit le nombre entier n, l'expression $n\,(2\,n^2 + 1)$ est toujours divisible par 3.

Si n est divisible par 3, le théorème est évident. Si n n'est pas divisible par 3, n est de la forme $3P \pm 1$ et $n^2 = 9P^2 \pm 6P + 1 = m.3 + 1$ et par suite $2n^2 = m.3 + 2$ et enfin $2n^2 + 1 = m.3$.

Donc le produit $n(2n^2 + 1)$ est toujours divisible par 3.

121.

Si l'on multiplie deux nombres consécutifs, leur produit est pair. En prenant la moitié de ce produit, on aura un nombre qui, divisé par 3, ne pourra jamais donner 2 pour reste. Ou : le produit de deux nombres consécutifs divisé par 6 ne peut jamais donner 4 pour reste.

Soient n et $n + 1$ ces deux nombres consécutifs. L'un d'eux étant pair leur produit $n(n + 1)$ est divisible par 2.

Supposons n pair et égal à : $2m$. Nous aurons donc : $n(n + 1) = 2m(2m + 1)$ et en divisant ce produit par 2 : $m(2m + 1)$. Il s'agit donc de prouver que $m(2m + 1)$ divisé par 3, ne peut jamais donner 2 pour reste.

m est par rapport à 3, de l'une des formes : $3p$, $3p + 1$ ou $3p + 2$ et par suite $2m + 1$ est de l'une des formes correspondantes : $6p + 1$, $6p + 3$ ou $6p + 2$.

Donc enfin le produit $m(2m + 1)$ est de l'une des deux formes : $3p(6p + 1)$ ou $(3p + 2)(6p + 2) = 2Kp + 1$ et par suite, $m(2m + 1)$ divisé par 3, ne peut donner pour reste que 0 ou 1, mais jamais 2.

On traiterait de la même manière le cas de n impair.

122.

Un nombre est de la forme $n^2 + n + 1$ (n étant entier) démontrer :

1° Que ce nombre est impair.

2° Que, divisé par 3, il donne pour reste 1 ou 0.

3° Que le chiffre des unités ne peut être que 1, 3 ou 7.

1°

$n^2 + n + 1$ est impair.

Si n est pair : $n^2 + n + 1$ est impair.

Si n est impair : n est de la forme $2p + 1$ et $n^2 + n + 1$, devient $4p^2 + 4p + 1 + 2p + 1 + 1$ ou $m. 2 + 1$; donc $m^2 + n + 1$ est impair.

2°

$n^2 + n + 1$ divisé par 3, donne pour reste 1 ou 0.

Si n est divisible par 3, il est évident que $n^2 + n + 1$, divisé par 3, donne 1 pour reste.

Si n n'est pas divisible par 3, il est de la forme $3n \pm 1$ et $n^2 + n + 1$ devient $9n^2 \pm 6n + 1 + 3p \pm 1 + 1$, c'est-à-dire de la forme $m. 3 + 2 \pm 1$, et en divisant ce résultat par 3, il reste 0 ou 1.

3°

$n^2 + n + 1$ est toujours terminé par 1, 3, ou 7.

Si n est terminé par 0, $n^2 + n + 1$ est évidemment terminé par 1.

Si n est terminé par 1 ou 9, n^2 est terminé par 1 ; donc

$n^2 + n + 1$ est terminé par $1 + 1 + 1$, c'est-à-dire par 3, ou par $1 + 9 + 1$, c'est-à-dire par 1.

Si n est terminé par 2 ou 8, n^2 est terminé par 4 ; donc $n^2 + n + 1$ est terminé par $4 + 2 + 1$, c'est-à-dire par 7, ou par $4 + 8 + 1$, c'est-à-dire par 3.

Si n est terminé par 3 ou 7, n^2 est terminé par 9 ; donc $n^2 + n + 1$ est terminé par $9 + 3 + 1$, c'est-à-dire par 3, ou par $9 + 7 + 1$, c'est-à-dire par 7.

Si n est terminé par 4 ou 6, n^2 est terminé par 6 ; donc $n^2 + n + 1$ est terminé par $6 + 4 + 1$, c'est-à-dire par 1, ou par $6 + 6 + 1$, c'est-à-dire par 3.

Si n est terminé par 5, n^2 est terminé par 5 ; donc $n^2 + n + 1$ est terminé par $5 + 5 + 1$, c'est-à-dire par 1.

Donc enfin $n^2 + n + 1$ est toujours terminé par un des chiffres 1, 3, 7.

123.

n désignant un nombre entier quelconque, le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6.

D'abord $n(n + 1)$ est divisible par 2 ; car le produit de deux nombres consécutifs est pair.

Si n est divisible par 3, le théorème est démontré.

Si n n'est pas divisible par 3, n est par rapport à 3 de l'une des formes $3m + 1$ ou $3m - 1$.

Si n est de la forme $3m - 1$, $n + 1$ sera divisible par 3.

Si n est de la forme $3m + 1$, $2n + 1$ sera de la forme $6m + 2 + 1 = m.3$, et par suite divisible par 3.

Donc enfin ce produit est divisible par 2 et par 3, et par suite par 6.

124.

Le produit de tous les nombres entiers consécutifs depuis 1 jusqu'à P — 1 n'est jamais divisible par P, si P est un nombre premier et l'est toujours si P n'est pas un nombre premier.

Si P est un nombre premier, il sera premier avec tous les nombres 1, 2, 3, ..., P — 1, et par suite avec leur produit; donc il ne peut le diviser.

Si $P = a^n$, a étant un nombre premier, on aura : $P - 1 = a^n - 1$; donc $P - 1$ est plus petit que $a^n - a^{n-1}$, ou que $a^{n-1}(a - 1)$ et $a^{n-1}(a - 1)$ surpasse a^{n-1}.

Par conséquent, dans la suite des nombres 1, 2, 3, ..., P — 1, on trouvera a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}.

Donc le produit $1 \times 2 \times 3 \times ... \times (P - 1)$ contiendra le facteur a élevé à une puissance au moins égale à : $1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)$, nombre toujours supérieur à n. Donc le produit est divisible par a^n et par suite par P.

Si $P = a^n b^m c^r$; d'après le même raisonnement, le produit $1 \times 2 \times 3 \times .... \times (P - 1)$ sera divisible par a^n, par b^m et par c^r, et puisque a^n, b^m, c^r sont premiers entre eux deux à deux, ce produit est divisible par $a^m \times b^n \times c^r$ ou par P.

Si $n = 2$; $P = a^2$ et $P - 1 = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$.

Dans ce cas, $P - 1$ est plus grand que $a(a - 1)$; on trouvera donc parmi les facteurs du produit: a, $2a$, $3a$, ...; $(a - 1)a$; donc le produit sera divisible par a^{a-1}, et par conséquent par $a^2 = P$, si a est plus grand que 2.

Si $a = 2$; $P = 2^2$; alors le théorème est en défaut, car $1 \times 2 \times 3$ n'est pas divisible par 4.

125.

a et b étant deux nombres premiers, il y a $(a - 1)$

$(b - 1)$ nombres premiers avec ab et plus petits que ab.

Les $ab - 1$, nombres inférieurs à ab, peuvent se partager en trois groupes.

1° Ceux qui sont divisibles par a.

$a, 2a, 3a, \ldots\ldots, (b-1)\,a$, et il y en a : $b - 1$.

2° Ceux qui sont divisibles par b.

$b, 2b, 3b, \ldots\ldots, (a-1)\,b$, et il y en a : $a - 1$.

3° Ceux qui ne sont divisibles ni par a ni par b, leur nombre est :

$ab - 1 - (a-1) - (b-1)$. ou $ab - 1 - a + 1 - b + 1$, ou $ab - b - a + 1$, ou $b\,(a-1) - (a-1)$, c'est-à-dire : $(a-1)\,(b-1)$.

126.

Soit $N = a^\alpha\, b^\beta$, (a et b étant les facteurs premiers de N), démontrer que : $N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$ exprime le nombre de nombres premiers avec N et plus petits que N.

Il est évident que si de la série $1, 2, 3, \ldots, N$. (1) nous enlevons tous les nombres divisibles par a, il ne restera que des nombres premiers avec a. Si de ceux-ci nous enlevons tous les nombres divisibles par b, il ne restera que des nombres premiers avec a et b et par suite avec $a \times b$ ou N.

Les nombres compris entre 1 et N, divisibles par a sont : $a, 2\,a, 3\,a, \ldots, \frac{N}{a} \times a$ et leur nombre est $\frac{N}{a}$ $\left(\frac{N}{a}\right.$ représentant la partie entière du quotient de N par a). En supprimant ces $\frac{N}{a}$ nombres dans la série (1), il restera $N - \frac{N}{a} =$

$N\left(1-\frac{1}{a}\right)$ nombres premiers avec a compris entre 1 et N.

Il faut ôter de ceux-ci tous les nombres divisibles par b, compris entre 1 et N. D'après le raisonnement ci-dessus il y en a $\frac{N}{b}$. Mais il faut en déduire de $\frac{N}{b}$ les multiples de b contenus dans les nombres : a, $2\,a$, $3\,a$, ... , $\frac{N}{a} \times a$, déjà enlevés et ces multiples sont évidemment au nombre de $\frac{N}{a\,b}$. Donc il y a $\frac{N}{b} - \frac{N}{a\,b}$ multiples de b à enlever de $N\left(1-\frac{1}{a}\right)$; ce qui donne $N\left(1-\frac{1}{a}\right) - \frac{N}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ ou $N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ nombres premiers avec a et b et compris entre 1 et N.

127.

Si a, b, c, d sont quatres nombres premiers avec un cinquième P et si $a \times b - c \times d$ et $a - c$ sont divisibles par P, $b - d$ sera aussi divisible par P.

$ab - cd$ peut s'écrire :

$ab - ad + ad - cd$, ou $a\,(b - d) + d\,(a - c)$.

Or, P divisant $ab - cd$, ou $a\,(b - d) + d\,(a - c)$ et $a - c$ doit diviser $a \times (b - d)$. Or il est premier avec a, donc il doit diviser $b - d$.

128.

On ne peut élever une fraction au carré, au cube,... à la n^{me} puissance sans changer la valeur de cette fraction.

En effet, en élevant une fraction au carré, au cube, ..., à la n^{me} puissance, on multiplie ses deux termes par des nombres différents ; donc cette fraction change de valeur.

129.

On ne peut extraire la racine carrée, cubique, ... des deux termes d'une fraction sans changer la valeur de la fraction.

En effet, en élevant la racine trouvée au carré, au cube, ..., on devrait reproduire la fraction équivalente primitive, ce qui est impossible (n° 128).

130.

Une fraction ne change pas de valeur quand on reproduit les nombres qui la forment, en ayant soin au préalable d'amener par des zéros le même nombre de chiffres à ses deux termes.

Ainsi : $\frac{abc}{mn}$ est égal à : $\frac{abc\;abc\;abc}{mn0mn0mn}$.

En effet : $\frac{abc\;abc\;abc}{mn\;0\;mn\;0\;mn} = \frac{abc \times 1001001}{mn \times 1001001} = \frac{abc}{mn}$.

131.

Lorsqu'on ajoute un même nombre aux deux termes d'une fraction, le résultat sera compris entre l'unité et la fraction elle-même, en sorte que la fraction augmentera si elle est plus petite que l'unité et diminuera si elle est plus grande que l'unité.

Soit $\frac{a}{b}$ cette fraction, ajoutant c à ces deux termes, il vient : $\frac{a+c}{b+c}$.

1^er^ CAS : $a < b$.

Alors $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ et $1 - \frac{a+c}{b+c} = \frac{b-a}{b+c}$.

Ces deux différences ont le même numérateur. Donc, la seconde, qui a le plus grand dénominateur. est la plus petite ; donc : $\frac{a+c}{b+c}$ est plus près de 1 que $\frac{a}{b}$.

2^me^ CAS : $a > b$.

Alors : $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$, et $\frac{a+c}{b+c} - 1 = \frac{a-b}{b+c}$ et l'on voit comme précédemment que $\frac{a}{b}$ est plus près de 1 que $\frac{a-b}{b+c}$.

132.

Si l'on soustrait un même nombre des deux termes d'une fraction, le résultat sera compris entre l'unité et la fraction elle-même, en sorte que la fraction augmentera si elle est plus grande que 1 et diminuera si elle est plus petite que 1.

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

133.

Comparer deux fractions équivalentes non irréductibles après avoir augmenté leurs deux termes d'un même nombre.

Soient $\frac{am}{bm}$ et $\frac{an}{bn}$ ces deux fractions, et p le nombre donné.

Ajoutant p à leurs deux termes et réduisant au même dénominateur, il vient :

(1) $\frac{am + p}{bm + p}$, (2) $\frac{an + p}{bn + p}$ et $\frac{abmn + bpn + amp + p^2}{(bm + p)(bn + p)}$ $\frac{abmn + bmp + anp + p^2}{(bm + p)(bn + p)}$.

Les deux numérateurs ayant la partie $abmn + p^2$ commune, il reste à comparer les parties non communes.

$p\,(bn + am)$ et $p\,(bm + an)$, ou $bn + am$ et $bm + an$.

1re hypothèse : $bn + am > bm + an$.

2me » $bn + am < bm + an$.

La première relation peut s'écrire :

$$n\,(b - a) > m\,(b - a), \text{ d'où } n > m$$

Et $m\,(a - b) > n\,(a - b)$, d'où $m > n$.

Donc, lorsque la fraction proposée $\frac{a}{b}$ est plus petite que l'unité, la fraction résultante (1) sera plus grande que la fraction résultante (2) ; si n est plus grand que m et lorsque la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que l'unité, la fraction (1) sera plus grande que la fraction (2), si m est plus grand que n.

La deuxième relation conduira à des conclusions absolument contraires.

134.

Comparer deux fractions non irréductibles mais équivalentes, après avoir diminué leurs deux termes d'un même nombre.

La marche à suivre est analogue à celle du théorème précédent.

135.

Etant données plusieurs fractions, trouver d'autres fractions respectivement égales aux premières et telles que le dénominateur de chacune d'elles soit égal au numérateur de la suivante.

Soient : $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, trois fractions données, et soient ; $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{f}$, $\frac{f}{g}$, les trois fractions qui répondent à la question :

On aura : (1) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

(2) $\frac{d}{f} = \frac{a'}{b}$

(3) $\frac{f}{g} = \frac{a''}{b''}$

et multipliant terme à terme :

$$\frac{c \times d \times f}{d \times f \times g} = \frac{a \times a' \times a''}{b \times b' \times b''} \text{ ou } \frac{c}{g} = \frac{a\, a'\, a''}{b\, b'\, b''}$$

D'où $c \times b\, b'\, b'' = g \times a\, a'\, a''$ et par suite $c = a \times a' \times a''$ et $g = b \times b' \times b''$.

En remplaçant g par sa valeur dans (3) on trouve $f = b\, b'\, a''$ et par suite $d = b\, a'\, a''$.

Donc enfin les trois fractions demandées sont : $\frac{a\,a'\,a''}{b\,a'\,a''}$, $\frac{b\,a'\,a''}{b\,b'\,a''}$, $\frac{b\,b'\,a''}{b\,b'\,b''}$.

136.

La somme des numérateurs de plusieurs fractions divisée par celle de leurs dénominateurs est comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions.

Soient : $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} > \frac{d}{d'} > \ldots > \frac{k}{k'} > \frac{l}{l'}$ ces fractions.

Nous avons :

1° $b < \frac{a}{a'} \times b'$.

$c < \frac{a}{a'} \times c'$.

$d < \frac{a}{a'} \times d'$.

. . . .

$l < \frac{a}{a'} \times l'$.

$a = \frac{a}{a'} \times a'$, et faisant la somme :

$$a + b + c + d \,\ldots. + l < \frac{a}{a'}(a' + b' + c' + d' + \ldots + l').$$

Ou : $\frac{a + b + c + d + \ldots + l}{a' + b' + c' + d' + \ldots + l'} < \frac{a}{a'}$.

2° $k > \frac{l}{l'} \times k'$.

. . . .

$b > \frac{l}{l'} \times b'$.

$a > \frac{l}{l'} \times a'$.

$l = \frac{l}{l'} \times l'$, et faisant la somme :

$$a + b + \ldots. + k + l > \frac{l}{l'}\ (a' + b' + \ldots + k' + l').$$

Ou : $$\frac{a + b + \ldots + k + l}{a' + b' + \ldots + k' + l'} > \frac{l}{l'}.$$

137.

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible, $1 \pm \frac{a}{b}$ sera une expression irréductible.

$$1 \pm \frac{a}{b} = \frac{b \pm a}{b}.$$

En effet, si $b \pm a$ et b avaient un facteur commun α, ce facteur divisant $b \pm a$ et b devrait diviser a; donc a et b auraient un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.

138.

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible $m \pm \frac{a}{b}$ sera irréductible (m est un nombre entier).

$$m \pm \frac{a}{b} = \frac{mb \pm a}{b}.$$

En effet, si $m\,b \pm a$ et b avaient un facteur commun α, ce facteur divisant $m\,b \pm a$ et b devrait diviser a; donc a et b auraient un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.

139.

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible $\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}$ est aussi irréductible.

$$\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b} \text{ peut s'écrire } \frac{ab + a^2}{b^2} \text{ ou } \frac{a\,(b + a)}{b^2}.$$

Si la fraction $\dfrac{a(b+a)}{b^2}$ n'est pas irréductible, il faut que a et b ou $a+b$ et b aient un facteur premier commun.

Or a et b étant par hypothèse premiers entre eux n'ont pas de facteurs communs. $a+b$ et b ne peuvent non plus en avoir ; car tout facteur qui diviserait b et $a+b$ devrait diviser leur différence a ; donc a et b auraient un facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc enfin $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a^2}{b^2}$ est une expression irréductible.

140.

Si a, b, c, sont trois nombres premiers entre eux deux à deux : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ est une expression irréductible.

Cette expression peut s'écrire : $\dfrac{bc+ac+ab}{abc}$.

Supposons qu'un facteur premier m soit commun au numérateur et au facteur b du dénominateur. Le facteur m divisant le numérateur et les deux parties bc et ab de ce numérateur, doit diviser la troisième partie $a \times c$ et par suite il doit diviser a ou c, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc l'expression proposée est irréductible.

141.

Dans quel cas le quotient de deux fractions irréductibles, est-il un nombre entier.

Soient $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ deux fractions irréductibles. Il faut que l'on ait : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = q$. Ou : $\frac{a \times d}{b \times c} = q$ (q étant un nombre entier).

Il faut donc que $a \times d$ soit exactement divisible par $b \times c$.

Or c étant premier avec d et devant diviser $a \times d$ doit diviser a.

Donc : $a = m \times c$.

De même b, devant diviser $a \times d$ et étant premier avec a, doit diviser d.

Donc : $d = n \times b$.

Donc le numérateur de la fraction dividende doit être un multiple entier du numérateur de la fraction diviseur, et le dénominateur de la fraction diviseur doit être un multiple entier du dénominateur de la fraction dividende.

142.

Étant données plusieurs fractions irréductibles, trouver la plus petite fraction irréductible qui, divisée par chacune des fractions proposées, donne des quotients entiers.

Soient $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, trois fractions irréductibles données et $\frac{q}{q'}$ la fraction irréductible cherchée.

Nous devons avoir :

$$\frac{q}{q'} : \frac{a}{a'} = \text{E, ou } \frac{a'q}{aq'} = \text{E}.$$

$$\frac{q}{q'} : \frac{b}{b'} = \text{E}' \text{ ou } \frac{b'q}{bq'} = \text{E}'$$

$$\frac{q}{q'} : \frac{c}{c'} = \text{E}'' \text{ ou } \frac{c'q}{cq'} = \text{E}''.$$

D'où (nº 141) :

1º $a' = m.\ q'$ et $q = m.\ a$

2° $b' = m.\ q'$ et $q = m.\ b$

3° $c' = m.\ q'$ et $q = m.\ c$

Donc a', b', c', doivent être divisibles par q' et a, b, c, doivent diviser q.

Or, par hypothèse, q doit être le plus petit possible et q' le plus grand possible.

Donc q doit être le moindre multiple des nombres a, b, c, et q' doit être le plus grand commun diviseur des nombres a', b', c'.

Je dis que la fraction $\frac{q}{q'}$ est irréductible. Car si le P. G. C. D. de a', b', c', et le P. P. C. M. de a, b, c, avaient un facteur commun, ce facteur devant se trouver dans tous les dénominateurs et au moins dans l'un des numérateurs d'une des fractions proposées, cette fraction ne serait plus irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc enfin $\frac{q}{q'}$ est la fraction qui répond à la question.

N. B. Si les dénominateurs des fractions proposées étaient des nombres premiers entre eux, leur P. G. C. D. serait l'unité et dans ce cas la fraction $\frac{q}{q'}$ se réduirait au nombre entier q, c'est-à-dire au P. P. C. M. des numérateurs.

143.

Trouver la plus grande fraction irréductible, plus petite que l'unité, qui divise un nombre entier.

Soient n ce nombre entier et $\frac{a}{b}$ la fraction cherchée.

Nous devons avoir :

1° a plus petit que b.

2° a le plus grand possible.

3° $\frac{a}{b}$ le plus près possible de l'unité.

4° n : $\frac{a}{b}$ ou $\frac{n \times b}{a} =$ un nombre entier.

Or, a étant premier avec b pour que $\frac{n \times b}{a}$ soit un nombre entier, il faut que a divise n et comme a doit être plus grand possible, il faut que $a = n$.

De plus a devant être plus petit que b et $\frac{a}{b}$ devant être le plus près possible de l'unité il faut que $b = a + 1 = n + 1$.

La fraction cherchée est donc $\frac{n}{n+1}$.

144.

Deux fractions irréductibles ne peuvent avoir pour somme ou pour différence un nombre entier que si elles ont le même dénominateur.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ces deux fractions et supposons que l'on puisse avoir $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = q$, (nombre entier).

D'où : $a\,d \pm b\,c = b\,d\,q$.

b divise $b\,c$ et $b\,d\,q$ donc il divise $a\,d$ et par suite d.

d divise $a\,d$ et $b\,d\,q$ donc il divise $b\,c$ et par suite b.

Donc $b = d$.

145.

La somme de trois fractions irréductibles ne peut être un nombre entier si l'un des trois dénominateurs contient un facteur premier qui ne divise aucun des deux autres.

Soient $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c}$, ces trois fractions et supposons que l'on ait : $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = q$ (nombre entier).

On en déduit $\frac{ab' + ba'}{a'b'} + \frac{c}{c'} = q$.

Posons $\frac{ab' + ba'}{a'b'} = \frac{d}{d'}$, $\left(\frac{d}{d'}\right.$ représentant la fraction irréductible équivalente à : $\left.\frac{ab' + ba'}{a'b'}\right)$.

Nous avons donc : $\frac{d}{d'} + \frac{c}{c'} = q$.

Et par suite (nº 144) $d' = c'$.

Or, $a'\,b'$ est un multiple de d' ; donc c' divise $a'\,b'$ ce qui ne peut avoir lieu que pour autant que tous les facteurs premiers de c' entrent dans a' ou b'.

146.

Si l'on range par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles moindres que l'unité dont le dénominateur est inférieur à un nombre entier n, les fractions à égale distance des extrêmes auront le même dénominateur et leur somme sera l'unité.

Soient $\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} > \ldots > \frac{h}{h'} > \frac{k}{k'}$ et $k' < n$.

Les fractions complémentaires

$$\frac{a' - a}{a'} < \frac{b' - b}{b'} < \frac{c' - c}{c'} < \ldots < \frac{h' - h}{h'} < \frac{k' - k}{k'}$$

seront toutes différentes en même nombre que les premières et irréductibles (nº 137).

De plus leurs dénominateurs étant tous plus petits que n, ces fractions doivent être égales aux premières, prises en ordre inverse.

Donc :

$$\frac{a}{a'} = \frac{k' - k}{k'}, \text{ d'où } \frac{a}{a'} = 1 - \frac{k}{k'}, \text{ et par suite :}$$

$$\frac{a}{a'} + \frac{k}{k'} = 1.$$

De même :

$$\frac{b}{b'} = \frac{h' - h}{h'} = 1 - \frac{h'}{h'}, \text{ d'où } \frac{b}{b'} + \frac{h}{h'} = 1, \text{ et d'après}$$

(nº **144**) : $a' = k'$; $b' = h'$, etc.

147.

Prouver que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ est égal à $\frac{n+1}{2n+3}$, quel que soit le nombre entier n.

On a :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{3 \times 5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{5 \times 7} = \frac{3}{7} - \frac{2}{5}.$$

$$\frac{1}{7 \times 9} = \frac{4}{9} - \frac{3}{7}.$$

. . . .

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1}.$$

Ajoutant membre à membre et réduisant, il vient :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

148.

Soit la suite des fractions.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}$, prouver que cette somme est plus petite que l'unité et en diffère de $\frac{1}{n+1}$, (n étant un nombre entier).

On a :

$$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$
$$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.$$
$$\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Ajoutant membre à membre et réduisant, il vient :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

149.

Soient les fractions : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$, prouver qu'on peut en prendre un assez grand nombre pour que leur somme surpasse un nombre quelconque n.

On peut grouper les fractions comme suit :

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7},\ldots$$

La forme générale de ces fractions est donc :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Or cette dernière expression est évidemment plus grande que : $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Donc, chaque groupe est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Donc n étant un nombre quelconque, en prenant $2n$ groupes, on sera sûr d'avoir une somme plus grande que $2n \times \frac{1}{2}$ ou que n.

150.

Addition et soustraction des fractions décimales périodiques simples et périodiques mixtes ayant le même nombre de chiffres non périodiques.

1° Soit à ajouter :

0,123123123 et 0,121212.

On cherche le moindre multiple du nombre des chiffres des périodes. La première fraction a une période de 3 chiffres la seconde de 2. Le moindre multiple de 2 et de 3 étant 6, on aura à ajouter :

0,123123	123123	
0,121212	121212	ce qui donne
0,144335	144335	pour somme.

2° Soit à ajouter :

0,23456456 et 0,123434.

On trouvera comme ci-dessus que l'on a à ajouter :

0,23	456456	
0,12	343434	ce qui donne
0,35	799890	pour somme.

N. B. on agirait de même pour la soustraction.

151.

Addition et soustraction des fractions décimales périodiques n'ayant pas le même nombre de chiffres non périodiques.

Soit à ajouter :

0. 23456456 et 0,24545.

Multiplions ces deux fractions par 100. Il vient : 23, 456 456 et 24, 5454 appliquant la marche ci-dessus (n° 150), il vient : 23,456456 + 24,545454 = 48,001911 et divisant par 100. Il vient : 0,48001911 pour somme cherchée.

N. B. On agirait de même pour la soustraction.

152.

On ajoute 2, 3, .., n fractions décimales périodiques simples moindres que l'unité entre quelles limites la somme est-elle comprise et quelle est cette somme.

Considérons 2 fractions.

Leur somme est plus petite que 2, car chacune d'elles est plus petite que 1, mais leur somme peut être 1.

Exemple : $0{,}22 + 0{,}77 = \frac{2}{9} + \frac{7}{9} = \frac{9}{9} = 1.$

Prenons 3 fractions.

Leur somme est plus petite que 3, car chacune d'elles est plus petite que 1, mais elle peut être égale à 2.

Exemple : $0{,}888 + 0{,}777 + 0{,}333 = \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \frac{3}{9} = 2$

Si l'on a n fractions.

Leur somme est plus petite que n, mais peut être égale à

n — 1 et cela arrive lorsque les fractions ayant le même nombre de chiffres à la période, la somme des n périodes vaut n — 1 fois le dénominateur commun, qui n'est composé que du chiffre 9, ce chiffre écrit n fois consécutives.

Enfin si la somme n'est pas un nombre entier elle ne peut être qu'une fraction décimale périodique simple, car le dénominateur ne peut se composer que d'une suite de 9.

153.

On ajoute 2, 3, ..., n fractions décimales périodiques mixtes moindres que l'unité entre quelles limites cette somme est-elle comprise et quelle est cette somme.

Considérons 2 fractions.

Leur somme est plus petite que 2, car chacune d'elles est plus petite que 1; mais leur somme peut être 1.

Exemple : 0,677 + 0,322 .... = 0,99 .... = 1.

Prenons 3 fractions.

Leur somme est plus petite que 3, car chacune d'elles est plus petite que 1, mais leur somme peut être 2.

Exemple : 0,811 + 0,922 + 0,266 = 1,999 ... = 2.

Prenons n fractions.

Leur somme est plus petite que n, mais elle peut être égale à n — 1.

Enfin si la somme n'est pas un nombre entier; elle peut être une fraction décimale exacte, périodique simple ou périodique mixte.

154.

On soustrait l'une de l'autre deux fractions décimales périodiques simples moindres que l'unité, quel est le résultat obtenu ?

La différence a pour dénominateur un nombre formé d'une suite de 9 et le numérateur est nécessairement plus petit que le dénominateur ; par suite, le résultat est une fraction décimale périodique simple, moindre que l'unité.

155.

Quel est le reste que l'on obtient en soustrayant l'une de l'autre deux fractions décimales périodiques mixtes plus petites que l'unité.

Le reste ne peut jamais être un nombre entier, car chacune des deux fractions est plus petite que l'unité, mais le reste peut être une fraction décimale exacte.

Exemple : 0,8333 — 0,1333 = 0,7.

Ou une fraction décimale périodique simple.

Exemple : 0,81111 — 0,03333 = 0,777.

Ou une fraction périodique mixte.

Exemple : 0,42333 — 0,1777 = 0.24555.

156.

Le produit de 2, 3, ..., *n* fractions décimales périodiques simples moindres que l'unité est une fraction décimale périodique simple moindre que l'unité.

La génératrice d'une fraction décimale périodique simple est une fraction ordinaire dont le dénominateur est premier avec 2 et 5.

Le produit des génératrices est donc une fraction moindre que l'unité dont le dénominateur est un nombre premier avec 2 et 5 et, par conséquent, celle-ci, réduite en décimales, donnera naissance à une fraction décimale périodique simple.

157.

Déterminer le produit que l'on obtient en multipliant l'une par l'autre deux fractions décimales périodiques mixtes plus petites que l'unité.

Le produit ne peut être un nombre entier parce que chacune des deux fractions est plus petite que l'unité.

Le produit peut être une fraction décimale exacte.

Exemple : $0{,}1466 \times 0{,}40909. = \frac{132}{900} \times \frac{405}{990} = 0{,}06.$

Ou une fraction décimale périodique simple.

Exemple : $\frac{5}{18} \times \frac{4}{495} = \frac{2}{99 \times 9} = \frac{2}{297}.$

Ou une fraction décimale périodique mixte.

Exemple : $\frac{5}{12} \times \frac{3}{14} = \frac{5}{56}.$

158.

Déterminer le quotient de deux fractions déci-

males périodiques simples moindres que l'unité.

Soit à diviser :

1° Deux fractions décimales périodiques ayant le même nombre de chiffres à la période,

0, *abc* .... *k* *abc* .... *k* par 0, $a'b'c'$ ... $k'a'b'c'$ ... k'.

Ce qui revient à diviser :

$$\frac{abc\ ....\ k}{999\ ....\ 9} \text{ par } \frac{a'b'c'\ ....\ k'}{9\,9\,9\ ....\ 9}.$$

Le quotient est : $\dfrac{a\,b\,c\ ....\ k}{a'b'c'\ ....\ k'}$.

Si donc *a b c* ... *k* est exactement diaisible par a' b' c' ... k' le quotient est un nombre entier.

Si, après simplification, le dénominateur ne contient ni 2 ni 5, le quotient est une fraction décimale périodique simple.

Si après simplification le dénominateur ne contient que des 2 et des 5, le quotient est une fraction décimale exacte.

Si, après simplification, le dénominateur contient des 2, des 5 et d'autres facteurs, le quotient est une fraction décimale périodique mixte.

2° Deux fractions décimales périodiques simples n'ayant pas le même nombre de chiffres à la période,

0,*abc* ... k' *abc* ... *k* par 0,$a'b'c'$ ... $k'l'a'b'c'$ ... $k'l'$.

Le quotient est : $\dfrac{a\,b\,c\ \ ....\ \ k \times 9}{a'b'c'\ .....\ \ k'l'}$.

Un raisonnement analogue à celui ci-dessus conduira aux mêmes conclusions.

159.

Déterminez le quotient de la division de deux fractions décimales périodiques mixtes moindres que l'unité.

Le quotient peut être un nombre entier.

Exemple : $0{,}388 : 0{,}0777 = \frac{7}{18} : \frac{7}{90} = 5$.

Ou une fraction décimale exacte.

Exemple : $0{,}188 : 0{,}277 = \frac{17}{90} : \frac{25}{90} = \frac{17}{25} = 0{,}68$.

Ou une fraction décimale périodique simple.

Exemple : $0{,}1777 : 0{,}1888 = \frac{16}{90} : \frac{17}{90} = \frac{16}{17}$.

Ou une fraction décimale périodique mixte.

Exemple : $0{,}1222 : 0{,}1555 = \frac{11}{90} : \frac{14}{90} = \frac{11}{14}$.

160.

Soit la fraction périodique mixte : *o, abpqr pqr*. Prouver que les deux résultats : $\frac{abpqr - ab}{99900}$ et : $\frac{abpqr\,pq - abpq}{9990000}$ sont identiques.

En effet : $\frac{abpqr\,pq - abpq}{9990000}$ peut s'écrire :

$$\frac{abpqr\,00 + pq - ab\,00 - pq}{9990000}, \text{ ou}$$

$$\frac{abpqr\,00 - ab\,00}{9990000}, \text{ ou } \frac{abpqr - ab}{99900}.$$

N. B. Il suffit de remarquer que les deux derniers chiffres à droite des deux parties du numérateur de la seconde fraction sont les mêmes, et que par suite les deux termes de la fraction sont divisibles par 100.

161.

Si b est un nombre entier premier avec 2, 3 et 5, prouver la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ donne naissance à une fraction décimale périodique simple dont la période est divisible par 9.

On a : $\frac{a}{b} = \frac{mnp \ldots s}{999 \ldots 9}$, d'où :

$a \times 999 \ldots 9 = b \times mnp \ldots s.$

Or b est premier avec 9 et avec a, donc $mnp \ldots s$ est un multiple de 9.

162.

La génératrice d'une fraction décimale périodique dont la période est 9, s'obtient en ajoutant 1 au chiffre précédent la période.

En effet :

$$0,\overset{m}{\overline{abc \ldots hk}}\,\overset{n}{\overline{99 \ldots 9}} = 0,\overset{m}{\overline{abc \ldots hk}} + \frac{\overset{n}{\overline{99 \ldots 9}}}{\overset{n}{\overline{99 \ldots 9}}\,\overset{m}{\overline{00 \ldots 0}}}$$

$$= 0,\overset{m}{\overline{abc \ldots hk}} + \frac{1}{1\,\overset{m}{\overline{00..0}}}$$

$$= \frac{abc \ldots hk + 1}{1\,\overset{m}{\overline{00 \ldots . 00}}}.$$

Exemples : $0,99 = 1.$

$2,34999 = 2,35.$

163.

Pour déterminer le nombre des chiffres périodiques que l'on obtient en convertissant une fraction ordinaire irréductible en fraction décimale, il suffit de diviser une suite de chiffres 9 par le produit des facteurs, autres que 2 et 5 qui se trouvent dans le dénominateur de la fraction. Le nombre de chiffres 9 employés pour arriver à un quotient exact indiquera le nombre des chiffres de la période.

Supposons que la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ donne naissance à une fraction décimale périodique simple, dont la période est : *mnp ... s*.

Nous aurons : $\frac{a}{b} = \frac{mnp \ldots. s}{999 \ldots. 9}$ et il y aura autant de chiffres au numérateur qu'il y a de chiffres 9 au dénominateur.

Or, d'après un théorème connu, on a :

$mnp \ldots s = p \times a$ et $999 \ldots 9 = p \times b$.

Donc, 999 ... 9, est exactement divisible par b, et comme il doit y avoir au numérateur autant de chiffres qu'il y a de 9 au dénominateur, le nombre de 9 employés pour arriver à un reste nul, indiquera le nombre des chiffres de la période.

Si $\frac{a}{b}$ donnait naissance à une fraction décimale périodique mixte : *o, abc pqrs pqrs*, celle-ci pouvant s'écrire : $\frac{abc}{1000}$ + *o, pqrs pqrs*, le même raisonnement s'y appliquerait.

Conséquences :

1° Un nombre premier autre que 2 et 5 divise exactement un nombre formé d'une certaine suite de chiffres 9.

2° Le nombre des chiffres de la période est indépendant du numérateur de la fraction génératrice.

Par exemple : $\frac{a}{7}$ (a étant un nombre entier quelconque autre que 7 ou un multiple de 7) donnera naissance à une fraction qui aura 6 chiffres dans la période ;

3° Deux fractions irréductibles, de même dénominateur, réduites en décimales, auront le même nombre de chiffres périodiques.

(Voir n° 164 pour la démonstration directe.)

164.

Si deux fractions irréductibles ont le même dénominateur et qu'on les réduise en décimales, les périodes auront le même nombre de chiffres.

Soit $\frac{1}{b}$ une fraction (b étant premier avec 10), qui donne naissance à une période de n chiffres, nous aurons :

$\frac{1}{b} = \frac{P}{10^n - 1}$, et par suite $\frac{a}{b} = \frac{aP}{10^n - 1}$, ($a$ étant premier avec b).

Donc la période de $\frac{a}{b}$ aura au plus n chiffres.

Je dis qu'elle ne peut en avoir moins.

En effet, dans cette hypothèse, on aurait (m étant plus petit que n) : $\frac{a}{b} = \frac{aP}{10m - 1}$ et par suite : $\frac{1}{b} = \frac{P}{10m - 1}$; donc $\frac{1}{b}$ n'aurait que m chiffres dans la période, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc enfin les deux fractions ont le même nombre de chiffres dans la période.

Si b n'était pas premier avec 10, on aurait $\frac{1}{b} = \frac{1}{c \times d}$, d contenant les facteurs 2 et 5 et c les facteurs premiers avec 10.

Soit 10^n la plus petite puissance de 10 exactement divisible par d, on aura :

$\frac{a}{b} = \frac{a}{d \times c} = \frac{1}{10^n} \times \frac{a'}{c}$, donc la période ne dépend que de c et elle renfermera le même nombre de chiffres, quel que soit a, pourvu que a soit premier avec d.

165.

La somme des périodes des fractions périodiques équivalentes à $\frac{k}{n}$ et à $\frac{n-k}{n}$ est : 999 .... 9.

($\frac{k}{n}$ étant une fraction irréductible donnant naissance à une fraction décimale périodique simple).

En effet : $\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = 1$.

Or : $\frac{k}{n} = \frac{abc \ldots f}{999 \ldots 9}$ et (nº 137 et nº 164) : $\frac{n-k}{n} = \frac{a'b'c' \ldots f}{999 \ldots 9}$.

Donc : $1 = \frac{abc \ldots f}{999 \ldots 9} + \frac{a'b'c' \ldots f'}{999 \ldots 9}$.

D'où : $999 \ldots 9 = a\, b\, c \ldots f + a'\, b'\, c' \ldots f'$.

166.

Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en décimales, donnent naissance à une fraction décimale périodique simple de : 1, 2, 3, ..., n chiffres.

On sait que 0, $mnpq\ mnpq = \frac{mnpq}{9999}$.

Soit $\frac{a}{b}$ (irréductible) $= \frac{mnpq}{9999}$. Nous aurons : $b = \frac{9999}{M}$.

Ainsi les dénominateurs b qui donnent une période de 1 chiffre sont les diviseurs de 9 ; ceux qui donnent une période de deux chiffres sont des diviseurs de 99 ; ceux qui donnent une période de trois chiffres sont des diviseurs de 999 ; etc.

Or : $9 = 3^2$.

$99 = 3^2 \times 11$.

$999 = 3^3 \times 37$.

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$.

La période de deux chiffres fournie par les dénominateurs 3 et 3^2 se composant de deux chiffres égaux, ces dénominateurs ne conviennent pas au second cas ; de même ceux qui conviennent aux deux premiers cas, sont à déduire du troisième ; ceux des trois premiers, sont à déduire du quatrième ; etc.

Nous avons donc, les dénominateurs suivants pour une période de :

1 chiffre : 3, 9.

2 chiffres : 11 ; 33 ; 99.

3 chiffres : 27. 37 ; 111 ; 333 ; 999.

4 chiffres : 101 ; 303 ; 909 ; 1111 ; 3333 ; 9999.

167.

Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction périodique mixte qui a :

1° 1 chiffre dans la partie non périodique et 1 chiffre dans la période ;

2° 2 chiffres dans la partie non périodique et 2 chiffres dans la période ;

3° 2 chiffres dans la partie non périodique et 3 chiffres dans la période, etc.

1°

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible.

Le dénominateur b doit contenir le facteur 2, ou le facteur 5 ou tous les deux, à la première puissance.

De plus b doit contenir le facteur 3 ou 9 (n° 166).

Donc enfin b doit contenir les facteurs 2 et 5, ou l'un des deux et l'un des facteurs 3 ou 9; donc il doit être égal à l'un des produits 2×3, 2×9, 5×3, 5×9, $2 \times 5 \times 3$, $2 \times 5 \times 9$.

2°

En raisonnant d'une manière analogue on trouve que b doit contenir 1° les facteurs 2 ou 5 à la seconde puissance ou tous les deux à la seconde puissance.

De plus la période devant avoir deux chiffres, 9 doit contenir un des facteurs 11, 33, 99 (n° 166).

Donc b doit être égal à 2^2 ou 5^2 ou $2^2 \times 5^2$ ou $2{,}5^2$ ou $2^2 5$, multiplié par l'un des nombres 11, 33, 99.

3°

On trouve que b doit être égal à : 2.5^2 ou $2^2.5.$ ou 2^2 ou 2^2 ou 5^2 ou $2^2 \times 5^2$, multiplié par l'un des nombres, 27, 37, 111, 333, 999.

168.

Lorsqu'en réduisant en fraction décimale une fraction ordinaire irréductible $\frac{a}{b}$ $(a < b)$ dont le dénominateur b est premier avec 10, on arrive à un reste b-a, la période sera composée d'un nombre pair de chiffres.

Supposons que l'on ait : $\frac{a}{b} = 0, abc \ldots k + \frac{b-a}{b}$ et que la période $0, abc \ldots k$ ait n chiffres.

On aura : $\frac{a}{b} = \frac{abc \ldots\ldots k}{10^n} + \frac{b-a}{b.\ 10^n}$;

D'où : $a.\ 10^n = (abc \ldots\ldots k)\, b + b - a$, ou :

$a\,(10^n + 1) = b\,[abc \ldots\ldots k + 1]$;

D'où enfin ; $\frac{a}{b} = \frac{abc \ldots k + 1}{10^n + 1}$.

Multiplions les deux termes du second membre par : $10^n - 1$, nous aurons :

$$\frac{a}{b} = \frac{(abc \ldots k + 1)\,(10^{2n} - 1)}{10^{2n} - 1}.$$

Or, $10^{2n} - 1$ est un nombre composé d'un nombre pair de chiffres 9. Donc la période aura un nombre pair de chiffres.

169.

Lorsqu'on réduit en fraction décimale une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ $(a < b)$ dont le dénominateur b est premier avec 10 et que l'on arrive à un reste $b - a$, les chiffres suivants de la période pourront se déduire des chiffres déjà trouvés en retranchant ceux-ci de 9 et de gauche à droite.

Exemple : soit à réduire : $\frac{3}{7}$ en décimales. $7 - 3 = 4$;

$$\begin{array}{l|l} 3 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}428 \\ \ 20 & \\ \ \ 60 & \\ \cline{1-1} \ \ \ 4 & \end{array}$$

donc les chiffres suivants de la période seront : $999 - 428 = 571$ et l'on aura

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ 428571.$$

D'abord la période est composée de $2n$ chiffres (nº 168).

Soit donc : $\frac{a}{b} = q + \frac{b-a}{b}$ (q ayant n chiffres);

On aura : $\frac{a}{b} = \frac{q}{10^n} + \frac{b-a}{10^n\, b}$;

D'où $a.\, 10^n = bq + b - a$ ou $a\,(10^n + 1) = bq + b$;

Multiplions par $10^n - 1$; il vient :

$a\,(10^{2n} - 1) = bq\,(10^n - 1) + b\,(10^n - 1)$, ou :

$a.\, 10^{2n} = b\,[q.\, 10^n + (10^n - 1) - q] + a.$

Donc en divisant $a.\, 10^{2n}$ par b, le reste est a.

La première période, composée de $2n$ chiffres, est donc : $q.\, 10^n + (10^n - 1) - q.$

Or q représente les n premiers chiffres déjà calculés; $10^n - 1$ est une suite de n chiffres 9, et si l'on en soustrait 9, on aura les n chiffres suivants de la période, et puisque 9 est suivi de n zéros, la période sera :

$$q\,\overline{00\ldots0}^{\,n} + \left(\overline{99\ldots.9}^{\,n} - q\right).$$

170.

Lorsqu'on réduit en fraction décimale une fraction irréductible ($a < b$) dont le dénominateur b est premier avec 10 et que l'on arrive à un reste b-a, la somme de 2 chiffres occupant le même rang dans chaque demi-période sera 9.

D'abord la période est composée de $2n$ chiffres (nº 168); et la seconde moitié de la période s'obtient en retranchant de 9, et de gauche à droite, les chiffres de la première partie de la période (nº 169).

Donc la somme des 2 premiers chiffres, de chaque demi-période, sera 9; de même, la somme des seconds sera 9; etc.

171.

Si deux fractions irréductibles $\frac{N}{D}$ et $\frac{n}{d}$, (D et d sont supposés premiers avec 10), converties en décimales, donnent lieu à des périodes composées respectivement de M et de m chiffres, dans le cas où D est divisible par d, le nombre M sera également divisible par le nombre m.

Nous savons que : $K\,D = \overline{99\ldots.9}^{\,M}$ et que : $k'\,d = \overline{99\ldots.9}^{\,m}$ (nº 163).

Or D est divisible par d, donc $\overline{99\ldots.9}^{\,M}$ est divisible par d, et par suite M est un multiple de m.

172.

Si plusieurs fractions irréductibles, dont les dénominateurs sont premiers absolus ou n'ont pas d'autres facteurs communs que les puissances de 2 ou 5, donnent lieu à des périodes de m, m', m'', chiffres, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur le produit des dénominateurs des premières, conduit à une période dont le nombre des chiffres est le P. P. G. M. de m, m', m''.

Soient $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, les fractions proposées, et supposons que leurs dénominateurs soient premiers avec 10, et premiers absolus.

Supposons que la fraction irréductible : $\frac{P}{B\ B'\ B''}$ ... conduise à une période de M chiffres. Je dis que M est le moindre multiple de m, m', m''. Soit K ce moindre multiple. K étant divisible par m, m', m'' ; $10^k - 1$ sera divisible par : B, B', B''. et par leur produit, puisque ces nombres sont premiers absolus.

Donc K est un multiple de M.

Or M (nº 171) est divisible par m, m', m'', il est donc aussi divisible par K, car tout nombre, qui est divisible par plusieurs autres, l'est aussi par leur P. P. C. M.; donc, enfin, $M = K$.

173.

La différence des carrés de deux nombres consécutifs est égale à la somme de ces deux nombres.

En effet, si l'on représente par $n + 1$ et n ces deux nombres, l'on aura :

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 = 2n + 1 = (n + 1) + n$$

174.

Le produit de deux nombres premiers entre eux ne peut être carré parfait que pour autant que chacun des deux nombres soit lui-même un carré parfait.

En effet, pour qu'un nombre soit carré parfait, il faut que les exposants de ses facteurs premiers soient tous pairs.

Or les deux nombres proposés n'ayant pas de facteurs communs, leur produit contient tous les facteurs de ces deux nombres, chacun d'eux avec son propre exposant. Donc ce produit ne peut être carré parfait, que pour autant que chacun de ces exposants soit pair; ce qui arrive, lorsque chacun des deux nombres proposés est carré parfait.

175.

Le produit de deux nombres consécutifs n'est jamais carré parfait.

En effet, deux nombres consécutifs sont toujours premiers entre eux; et de plus, si l'un d'eux est carré parfait, l'autre ne l'est pas. Car la différence des carrés de deux nombres consécutifs $n + 1$ et n est 1; tandis que la différence des carrés de ces deux mêmes nombres est $2n + 1$.

176.

Le produit de trois nombres consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Soient : $n - 1$, n, $n + 1$ ces trois nombres. Leur produit est : $n(n - 1)(n + 1)$ ou $n(n^2 - 1)$.

Or n et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux; donc le produit $n(n^2 - 1)$ et par suite le produit de trois nombres consécutifs ne peut être un carré parfait que pour autant que n et $n^2 - 1$ soient tous deux des carrés parfaits.

Or, si n est carré parfait, $n^2 - 1$ ne peut l'être. En effet, pour que $n^2 - 1$ soit un carré parfait, il faut que $n + 1$

et $n - 1$ soient tous deux carrés parfaits. Et, en vertu du théorème précédent, si n est carré parfait, ni $n + 1$, ni $n - 1$ ne peuvent l'être. Donc $n^2 - 1$ n'est pas carré parfait si n est carré parfait.

Si $n^2 - 1$ est carré parfait n ne peut l'être.

En effet, pour que $n^2 - 1$ soit carré parfait, il faut que $n + 1$ et $n - 1$ soient des carrés parfaits; or si $n + 1$ ou $n - 1$ est un carré parfait, n ne peut l'être (nº 168).

Donc enfin n et $n^2 - 1$ ne peuvent être à la fois carrés parfaits.

Le même raisonnement serait explicable si l'on écrivait ce produit sous les formes : $(n^2 + n)(n - 1)$ ou $(n^2 - n)(n + 1)$.

177.

Le produit de quatre nombres consécutifs n'est jamais un carré parfait.

En effet, le produit de quatre nombres consécutifs, augmenté d'une unité, est un carré parfait (nº 30). Et la différence des carrés de deux nombres consécutifs ne peut être 1.

178.

Un nombre entier N étant donné comment s'assurer s'il est la différence des carrés de deux nombres consécutifs.

Trouver ces deux nombres.

D'abord N est nécessairement impair, car la différence des carrés de deux nombres consécutifs est impaire.

Soient $a + 1$ et a ces deux nombres.

Si N est la différence de leurs carrés, on doit avoir :

$N = (a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$;

D'où : $\frac{N - 1}{2} = a$.

Donc si l'on ôte l'unité du nombre N, le reste, divisé par 2, donnera le plus petit des deux nombres.

Conséquence : Tout nombre impair N est la différence des carrés de deux nombres consécutifs, dont le plus petit est : $\frac{N - 1}{2}$.

179.

Un nombre entier N étant donné comment s'assurer s'il est la différence des cubes de deux nombres consécutifs.

Trouver ces deux nombres.

1° D'abord N est nécessairement impair; car la différence des cubes de deux nombres consécutifs est impaire.

Soient $a + 1$ et a ces deux nombres. Si N est la différence de leurs cubes, on doit avoir :

$N = (a + 1)^3 - a^3$ ou $N = 3a^2 + 3a + 1$, d'où : $\frac{N - 1}{3} = a\,(a + 1)$. Donc, si l'on ôte l'unité du nombre N, le reste doit être divisible par 3, et donner pour quotient le produit des deux nombres consécutifs dont il est la différence des cubes;

2° Or : $\frac{N - 1}{3} = a^2 + a$; donc, si l'on extrait la racine carrée de $\frac{N - 1}{3}$, le reste doit être égal à la racine trouvée, et ce reste sera le plus petit des deux nombres cherchés.

180.

Si un nombre est la somme de deux carrés son carré est aussi la somme de deux carrés.

Soit :

$$n = a^2 + b^2 \text{ et } a > b.$$

On aura :

$$n^2 = a^4 + b^4 + 2a^2 b^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2.$$

181.

Si un nombre est la somme de trois carrés son carré est aussi la somme de trois carrés.

Soient : $a > b > c$ trois nombres et $n = a^2 + b^2 + c^2$, je dis que :

$n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$ est la somme de trois carrés.

En effet : $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - 4a^2 b^2 - 4a^2 c^2 + 4a\, b^2 + 4a^2 c^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4a^2 b^2 + 4a^2 c^2$:

Donc : $n^2 = (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$.

Si $b^2 + c^2$ était plus grand que a^2, on aurait $n^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$.

182.

Si un nombre est la somme de deux autres, la somme des carrés de leurs produits deux à deux est un carré.

Soit : $a = b + (a - b)$.

Il s'agit de prouver que :

$(ab)^2 + [b(a - b)]^2 + [a(a - b)]^2$ est un carré.

Cette expression développée devient :

$a^4 - 2a^3 b + 3a^2 b^2 - 2ab^3 + b^4$; ce qui est le carré de $a^2 - ab + b^2$.

183.

Tout multiple de 4 est la différence de deux carrés entiers.

Ces carrés doivent évidemment être tous deux pairs, ou tous deux impairs.

Soient d'abord $4n^2$ et $4n'^2$ ces deux carrés.

Leur différence est $4n^2 - 4n'^2 = m. 4$.

D'où : $m = n^2 - n'^2$.

Soient maintenant : $(2n + 1)^2$ et $(2n' + 1)^2$ ces deux carrés; leur différence est :

$4n^2 + 4n - 4n'^2 - 4n^2 = m. 4$;

D'où $m = n^2 + n - n'^2 - n'$.

184.

Si deux nombres entiers sont tous deux pairs ou tous deux impairs, la demi-somme de leurs carrés es une somme de deux carrés.

1° Soient $2n$ et $2n'$ ces deux nombres.

On doit prouver que : $\dfrac{(2n)^2 + (2n')^2}{2} = 2n^2 + 2n'^2$ est la somme de 2 carrés.

On a : $2n^2 + 2n'^2 = n^2 + 2nn' + n'^2 + n^2 - 2nn' + n'^2$ $= (n + n')^2 + (n - n')^2$.

2° Soient $2n + 1$ et $2n' + 1$ ces deux nombres; on doit prouver que: $\dfrac{(2n+1)^2+(2n'+1)^2}{2} = 2\,(n^2+n'^2+n+n')+1$ est la somme de deux carrés.

On a : $\quad 2\,(n^2+n'^2+n+n')+1 =$

$$\left\{\begin{array}{lcl} n^2+n'^2+1+2\,(n+n')+2nn' &=& (n+n'+1)^2 \\ n^2+n'^2 \qquad\qquad\qquad\qquad -2nn &=& (n-n')^2\,. \end{array}\right.$$

185.

Si un nombre pair est la somme de deux carrés entiers, sa moitié est aussi la somme de deux carrés entiers.

Soit N un nombre pair décomposable en une somme de deux carrés entiers en sorte que : $N = a^2 + b^2$ on aura :

$$\frac{N}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2}.$$

Ou $\dfrac{N}{2} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2.$

Or, a et b étant nécessairement tous deux pairs ou tous deux impairs, $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$ sont deux nombres entiers.

Donc, $\dfrac{N}{2}$ est la somme de deux carrés entiers.

186.

Si un nombre entier est la somme de deux carrés : 1° Sa moitié, 2° son $\dfrac{1}{2^m}$, 3° son $\dfrac{1}{5}$, 4° son $\dfrac{1}{5^m}$, sont aussi la somme de deux carrés.

Soit $N = a^2 + b^2$.

1°

On a (n° 185) : $\frac{N}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

2°

$$\frac{N}{2m} = \frac{a^2}{2m} + \frac{b^2}{2m} = \frac{a^2}{2m+1} + \frac{a^2}{2m+1} + \frac{b^2}{2m+1} + \frac{b^2}{2m+1} + \frac{ab}{2m+1} - \frac{ab}{2m+1}. \text{ Ou } \frac{N}{2m} = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2m+1}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2m+1}}\right)^2$$

3°

$$\frac{N}{5} = \frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{5} = \frac{4a^2}{25} + \frac{a^2}{25} + \frac{4b^2}{25} + \frac{b^2}{25} + \frac{4ab}{25} - \frac{4ab}{25}$$

$$\text{Ou } \frac{N}{5} = \left(\frac{2a+b}{5}\right)^2 + \left(\frac{2a-b}{5}\right)^2.$$

4°

$$\frac{N}{5m} = \frac{a^2}{5m} - \frac{b^2}{5m} = \frac{4a^2}{5m+1} + \frac{a^2}{5m+1} + \frac{4b^2}{5m+1} + \frac{b^2}{5m+1} + \frac{4ab}{5m+1} - \frac{4ab}{5m+1}. \text{ Ou } \frac{N}{5m} = \left(\frac{2a+b}{\sqrt{5m+1}}\right)^2 + \left(\frac{2b-a}{\sqrt{5m+1}}\right)^2$$

N. B. — On démontrerait semblablement que son $\frac{1}{10}$, son $\frac{1}{13}$, son $\frac{1}{17}$, etc, sont la somme de deux carrés.

187.

Si a et b sont des nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, la différence de leurs carrés ne peut être un carré, que si $a+b$ et $a-b$ sont eux-mêmes des carrés.

D'abord le produit de deux nombres premiers entre eux, ne peut être un carré que si chacun de ces nombres est lui-même un carré (nº 174).

Or, $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux :

Car s'ils avaient un facteur commun, leur somme $2a$ et leur différence $2b$ admettraient un diviseur commun autre que 2, ce qui impossible.

Donc leur produit $(a + b)(a - b)$ ou $a^2 - b^2$ ne peut être un carré, que si $a + b$ et $a - b$ sont chacun un carré.

188.

Soit 4 le premier terme de la suite des carrés des nombres entiers non multiples de 5. Si l'on ajoute 1 à chacun des deux premiers termes, qu'on retranche 1 des deux termes suivants, et ainsi de suite, de deux en deux termes, tous les nombres résultants sont divisibles par 5.

En effet, tous les entiers non multiples de 5 sont, par rapport à 5, de l'une des formes suivantes :

$5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 4$, leurs carrés sont donc de la forme :

$m5 + 1$, $m5 + 4$, $m5 + 9$, $m5 + 16$, ou :

$m5 + 1$, $m5 - 1$, $m5 - 1$, $m5 + 1$.

Or, 4, 9, 16, 36, étant les quatre premiers termes de la série, appartiennent respectivement aux formules suivantes :

$m5 - 1$, $m5 - 1$, $m5 + 1$, $m5 + 1$.

Et, par conséquent, les nombres de la série se présenteront dans cet ordre.

En effet, dans la suite des nombres entiers, 2 et 7, 3 et 8, 4 et 9, 6 et 11, diffèrent d'un multiple de 5.

Donc les quatre nombres suivants de la série seront de la forme : $(5n+2)^2$, $(5n+3)^2$, $(5n+1)^2$, $(5n+4)^2$, ou $m5-1$, $m5-1$, $m5+1$, $m5+1$.

On appliquera la même démonstration pour la série des quatre nombres suivants.

Or, si l'on ajoute 1 aux deux premiers termes et si l'on retranche 1 des deux termes suivants, il reste des multiples de 5.

189.

Tout carré impair divisé par 8 donne pour reste 1.

Un carré impair provient du carré d'un nombre impair. Donc tout carré impair est de la forme :

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Il faut donc démontrer que $4n^2 + 4n$, est divisible par 8. ou que $4n\,(n+1) = m.\,8$.

Ce qui est évident (n° 49).

Conséquence : tout carré impair diminué de 1 est divisible par 8.

190.

Le carré d'un nombre premier avec 3, augmenté de 2, est divisible par 3.

En effet, ce nombre est de la forme : $3n \pm 1$; son carré est donc de la forme : $9n^2 \pm 6n + 1$; expression qui, augmentée de 2, donne : $9n^2 \pm 6n + 3 = m.3$.

191.

La somme des carrés de deux nombres consécutifs diminuée de 1 est divisible par 4.

Soient n et $n + 1$ ces deux nombres.

La somme de leurs carrés est : $n^2 + n^2 + 2n + 1$ ou $2n^2 + 2n + 1$ qui diminuée de 1 donne $2n\,(n + 1)$ produit divisible par 4 (n° 49).

192.

La somme des carrés de deux nombres impairs diminuée de 2 est un multiple de 8.

Soient : $2n - 1$ et $2n' - 1$ ces deux nombres.

On a : $(2n - 1)^2 + (2n' - 1)^2 - 2 = 4\,[n\,(n - 1) + n'\,(n' - 1)]$.

Or, les deux parties entre parenthèses sont divisibles par 2 ; donc le produit est divisible par 8.

193.

La différence des carrés de deux nombres impairs est toujours divisible par 8.

1° $(2n - 1)^2 - (2n' - 1)^2 = 4\,(n - n')\,(n + n' - 1)$.

Si n et n' sont tous deux pairs ou tous deux impairs $n - n'$ est un multiple de 2 ; donc le théorème est démontré.

Si n est pair et n' impair $n + n' - 1$ est pair et le théorème est encore démontré.

194.

La somme ou la différence d'un nombre et de son carré est toujours divisible par 2.

En effet, soit n ce nombre.

On a : $n^2 \pm n = n(n \pm 1)$ et le produit de deux nombres consécutifs est divisible par 2 (nº 49).

195.

La différence entre un nombre et son cube est toujours divisible par 6.

Soit n ce nombre.

On a : $n^3 - n = (n - 1)\,n\,(n + 1)$ et le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6 (nº 50).

196.

La différence des cubes de deux nombres consécutifs diminuée de 1 est divisible par 6.

En effet, la différence des cubes des deux nombres consécutifs : $n + 1$ et n est : $(n + 1)^3 - n^3$ ou $3n^2 + 3n + 1$, résultat qui diminué de 1 donne $3n\,(n + 1)$.

197.

Le cube d'un nombre entier est la différence de deux carrés d'un, l'un est divisible par 9.

Soit : $a^3 = m^2 - n^2$; d'où $a^2 \times a = (m + n)(m - n)$.

Ou : $\begin{cases} m + n = a^2 \, . \\ m - n = a, \text{ et par suite (nº 15).} \end{cases}$

$m = \frac{a(a+1)}{2}$ et $n = \frac{a(a-1)}{1}$.

Or : $a - 1$, a, $a + 1$, sont trois nombres consécutifs donc l'un des trois est divisible par 3 (nº 50) et par suite m ou n est divisible par 3.

Donc m^2 ou n^2 est divisible par 9.

198.

Si un nombre est premier avec 3, son cube augmenté ou diminué de 1 est divisible par 9.

Ce nombre étant de la forme $3n \pm 1$.

Son cube est : $9n^3 \pm 27n^2 + 9n \pm 1 = m\,9 \pm 1$.

199.

Le cube de tout nombre impair > 1, augmenté ou diminué de 1 est divisible par 4.

Ce nombre est de l'une des formes suivantes : $4n + 1$, $4n - 1$, et les cubes de ces deux expressions sont de la forme $4m + 1$ ou $4m - 1$.

200.

Si un nombre est premier avec 7, son cube augmenté ou diminué de 1 est un multiple de 7.

Ce nombre est de l'une des formes suivantes : $7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$; son cube est de l'une des formes :

$7m \pm 1$. $7m \pm 8$, $7m \pm 27$ ou

$7m \pm 1$, $7m \pm 1$; $7m \mp 1$ ou enfin de la forme : $7k \pm 1$.

201.

Le carré d'un nombre premier avec 3, est de la forme $3m + 1$.

En effet un nombre premier avec 3, est de la forme $3n \pm 1$ et son carré est de la forme $9n^2 \pm 6n + 1 = 3m + 1$.

202.

Le carré d'un nombre non divisible par 3, le devient si on le diminue de 1.

Ce nombre est de la forme $3n \pm 1$; et son carré est de la forme $3m + 1$, expression qui diminuée de 1 donne $3m$, nombre divisible par 3.

203.

Tout carré non divisible par 5, le devient si on l'augmente ou si on le diminue de 1.

En effet, un nombre non divisible par 5, est de l'une des formes : $5n \pm 1$ ou $5n \pm 2$; les carrés de ces deux expressions sont :

$$25n^2 \pm 10n + 1 \text{ et } 25n^2 \pm 20n + 4.$$

La première expression diminuée de 1 est divisible par 5, et la seconde le devient lorsqu'on y ajoute 1.

204.

Tout carré non divisible par 5, ne peut, divisé par 5, donner pour reste que 1 ou 4, jamais 2 ni 3.

En effet, tout nombre non divisible par 5 est de l'une des formes $5n \pm 1$, $5n \pm 2$ son carré est donc de l'une des formes : $5n' + 1$, $5n' + 4$, qui divisées par 5 donnent pour reste 1 ou 4, mais jamais 2 ni 3.

205.

La somme des cubes de trois nombres consécutifs est divisible par 9.

Soient : $n + 1$, n, $n - 1$, ces trois nombres.

La somme de leurs cubes est :

$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ ou $3n^3 + 6n$ ou $3n\,(n^2 + 2)$.

Si n est un multiple de 3 le théorème est démontré.

Si n n'est pas un multiple de 3, n est de la forme $3m + 1$ (nº 201) et par suite $n^2 + 2 = m.\ 3$. Donc le théorème est encore vrai.

206.

Le cube d'un nombre premier avec 3 divisé par 9 donne pour reste 1 ou 8.

Tout nombre premier avec 3 est de la forme $3n \pm 1$; le cube de ce nombre est donc de la forme :

$27n^3 \pm 27n^2 + 9n \pm 1$, ou de la forme : $9m \pm 1$. Résultat qui, divisé par 9 donne 1 ou 8 pour reste.

207.

La quatrième puissance d'un nombre impair premier avec 5 est de la forme $80m + 1$.

Un nombre premier avec 5 est de l'une des formes : $5n \pm 1$, $5n \pm 2$.

Or ces formes doivent exprimer des nombres impairs.

Pour que $5n \pm 1$ soit impair, il faut que n soit pair; posons $n = 2m$, et $10m \pm 1$ sera l'expression d'un nombre impair premier avec 5.

Pour que $5n \pm 2$ soit impair, il faut que n soit impair. Posons $n = 2m + 1$, et $5(2m + 1) \pm 2 = 10m \mp 3$ sera l'expression d'un nombre impair premier avec 5.

Nous avons donc, pour la forme générale des nombres impairs premiers avec 5, ces deux expressions : $10m \pm 1$ et $10m \pm 3$.

Les carrés de ces deux expressions sont :

$100m^2 \pm 20m + 1 = 20m(m \pm 1) + 1$.

Et $100m^2 \pm 60m + 9 = 20m(5m \pm 3) + 9$.

Et les quatrièmes puissances, ou les carrés de ces carrés, seront :

$400m^2(m \pm 1)^2 + 40m(m \pm 1) + 1 = m80 + 1$.

$400m^2(5m \pm 3)^2 + 360m(5m \pm 3) + 81 = m80 + 1$, car si m était impair $5m \pm 3$ serait pair.

Donc un nombre impair, premier avec 5, élevé à la quatrième puissance, est de la forme $m80 + 1$.

208.

La différence des quatrièmes puissances de deux nombres impairs premiers avec 5 est un multiple de 80.

En effet, chacun de ces deux nombres est de la forme $80m + 1$ (nº 207), et par suite (nº 68) leur différence est un multiple de 80.

209.

Le carré d'un nombre premier plus grand que 3 est de la forme $24n + 1$.

En effet (nº 119), ce nombre est de la forme $6n \pm 1$; son carré est donc :

$36n^2 \pm 12n + 1$ ou $12n\,(3n \pm 1) + 1$.

Si n est pair, le théorème est démontré.

Si n est impair $3n \pm 1$ est pair, et le théorème est encore vrai.

Conséquence : Le carré d'un nombre premier, plus grand que 3, diminué d'une unité, est divisible par 24.

210.

Si a et b sont deux nombres entiers non divisibles par 3, $a^2 - b^2$ sera divisible par 3.

En effet : $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$.

Si a et b, divisés par 3, donnent le même reste, $a - b$, est divisible par 3 (nº 68).

Si a et b, divisés par 3, ne donnent pas le même reste, ces restes sont 2 et 1, et alors $a + b$ est divisible par 3.

Donc enfin $a^2 - b^2$ est divisible par 3.

Si a et b sont tous deux divisibles par 3, $a^2 - b^2$ est évidemment divisible par 3.

Conséquence : Si deux nombres entiers a et b ne sont pas divisibles par 3, leur somme $a + b$ ou leur différence $a - b$ est divisible par 3.

211.

Si deux nombres entiers a et b ne sont pas divisibles par 5, $a^4 - b^4$ sera divisible par 5.

Un nombre non divisible par 5 est, par rapport à 5, de l'une des formes suivantes :

$5n \pm 1$ ou $5n \pm 2$.

Son carré est donc de l'une des formes :

$5n + 1$ ou $5n + 4$.

Sa quatrième puissance est donc de la forme :

$5n + 1$.

Donc a^4 et b^4 sont de la forme $5n + 1$, et par suite $a^4 - b^4$ est divisible par 5 (nº 68).

212.

Si deux nombres a et b ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, $a^4 - b^4$ sera divisible par 30.

$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

$a^2 + b^2$ est divisible par 2, puisque a et b sont impairs.

$a^2 - b^2$ est divisible par 3 (nº 210).

$a^4 - b^4$ est divisible par 5 (nº 211).

Donc $a^4 - b^4$ est divisible par 2, 3 et 5 et, par suite, par 30.

213.

Quels que soient les nombres entiers a et b, le produit $ab\ (a^4 - b^4)$ est divisible par 30.

On peut faire plusieurs hypothèses :

1º a ou b admettent les facteurs 2, 3, 5.

Alors le théorème est évident;

2º a et b ne contiennent aucun des facteurs 2, 3, 5.

Alors le théorème est démontré (nº 212);

3º a contient le facteur 2; mais ni 3, ni 5, et b n'est pas divisible par 3.

Alors $a_4 - b_4$ est divisible par 3 (nº 210).

Si b est divisible par 5, le théorème est démontré.

Si b n'est pas divisible par 5, le théorème est encore démontré (nº 209);

4º a contient le facteur 3; mais ni 2, ni 5, et b n'est pas divisible par 2.

Alors $a_4 - b_4$ est divisible par 2, car a et b sont impairs.

Si b est divisible par 5, le théorème est démontré.

Si b ne contient pas 5, le théorème est encore démontré.

Il en résulte que $ab\ (a_4 - b_4)$ est toujours divisible par 30.

214.

Si la somme des carrés de deux nombres entiers est un carré, le produit de ces trois nombres est divisible par 60.

On sait que $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab$, donc si l'on remplace a par a^2, et b par b^2, on aura la formule suivante :

$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4\,a^2\,b^2$, qui donne l'expression générale de la somme de deux carrés égale à un carré.

Or le produit de ces trois nombres, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$ et $2ab$ est $2ab\,(a^4 - b^4)$ et ce produit est divisible par 60 (nº 213).

215.

Si l'on multiplie un carré entier par le nombre qui le précède et celui qui le suit, le produit est divisible par 60.

Soit n^2 ce carré. Il s'agit de prouver que le produit $n^2\,(n^2 + 1)(n^2 - 1)$ ou $n^2\,(n^4 - 1)$ ou $(n - 1)\,n^2\,(n + 1)\,(n^2 + 1)$ est divisible par $3 \times 4 \times 5$.

1º Ce produit est divisible par 2×3 ;

2º Si n est pair, n^2 est divisible par 4.

Si n est impair, $n + 1$ et $n - 1$ sont pairs, et l'un deux est divisible par 4, donc le produit $(n + 1)\,(n - 1)$ est divisible par 4 ;

3º Si n est divisible par 5, le produit est divisible par 5.

Si n n'est pas divisible par 5, $n^4 - 1$ l'est (nº 211).

Donc, enfin, le produit proposé est divisible par $3 \times 4 \times 5$ ou 60.

216.

$(n^2 - 1)\,n^2\,(n^2 + 1)\,(n^4 - 16)$ est un multiple de 600, si n est un nombre entier plus grand que 2.

Si n est premier avec 5, le théorème est évident en vertu des nos 213 et 211.

Si n n'est pas premier avec 5, n^2 est divisible par 25.

L'expression proposée peut s'écrire :

$n(n-1)(n+1)\,n(n^2+1)(n+2)(n-2)(n^2+4)$.

Or, $n(n-1)(n+1)$ est divisible par 3.

Si n est pair, n^2, $n+2$, $n-2$, n^2+4, sont divisibles par 2, et par suite le produit proposé est un multiple de 8.

Si n est impair $(n-1)(n+1)(n^2+1)$ sont divisibles par 2. Donc le produit proposé est encore un multiple de 8.

Donc enfin le produit proposé est divisible par 25, par 3, et par 8 et par suite par $25 \times 3 \times 8$ ou par 600.

217.

a et *b* étant deux nombres entiers non divisibles par 3 ou tous deux divisibles par 3, $a^6 - b^6$ est divisible par 9.

1° Un nombre non divisible par 3, et par rapport à 9 de l'une des formes suivantes :

$9n \pm 1$, $9n \pm 2$, $9n \pm 5$.

Son carré est donc de l'une des formes :

$9n+1$, $9n+4$, $9n+7$.

Sa quatrième puissance est de l'une des formes correspondantes :

$9n+1$, $9n+7$, $9n+4$.

Et par suite sa sixième puissance, c'est-à-dire le produit de sa quatrième, par sa deuxième puissance est de la forme $9n+1$.

Donc a^6 et b^6 sont de la forme $9n+1$ et par suite $a^6 - b^6$ est un multiple de 9.

2° Si a et b sont tous deux divisibles par 3, ils sont de la forme, : $a = 3n$, $b = 3n'$ et par suite :

$a^6 - b^6 = (3n)^6 - (3n')^6 = 3^6\ n^6 - 3^6\ n'^6 = 3^6\ (n^6 - n'^6)$.

Et par suite $a^6 - b^6$ est divisible par 9.

218.

Si P est un nombre premier avec 6, $P^2 - 1$ est divisible par 24.

En effet, $P^2 - 1$ est divisible par 3 (n° 210).

Reste à prouver que $P^2 - 1 = (P + 1)\ (P - 1)$ est divisible par 8. Or, P étant impair par hypothèse, $P - 1$ et $P + 1$ sont deux nombres pairs consécutifs donc (n° 47), l'un d'eux est divisible par 4, et leur produit l'est par 8.

Donc enfin $P^2 - 1$ est divisible par 3, et par 8 et par suite par 24.

219.

Si P représente un nombre premier avec 2 et 3, l'expression $4P^2 + 1$ est une somme de trois carrés.

Nous savons que dans ce cas P est de la forme $6n \pm 1$, et $4P^2 + 1$ devient :

$$4\ (6n \pm 1)^2 + 1 = 144n^2 \pm 48n + 5.$$
$$= (8n \pm 2)^2 + (8n \pm 1)^2 + (4n)^2 .$$

220.

Le cube d'un nombre premier plus grand que 3, augmenté ou diminué de 1, sera toujours divisible par 18.

Tout nombre premier plus grand que 3, est de la forme $6n \pm 1$; or, le cube de $(6n \pm 1)$ est : $216n^3 \pm 108n^2 + 18n \pm 1$ ou : $m\,18 \pm 1$.

221.

La somme des carrés de deux nombres entiers ne peut être divisible par 7 que si ces nombres sont eux-mêmes divisibles par 7.

Tout nombre non divisible par 7, est par rapport à 7 de l'une des formes suivantes :

$7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$.

Son carré est donc de l'une des formes :

$7n' + 1$, $7n' + 4$, $7n' + 2$.

Et parmi ces formes on n'en trouve pas deux dont la somme soit divisible par 7.

222.

Si un nombre divisé par 9 donne pour reste 7 ou 2, son carré diminué de 13 est divisible par 9.

Soit N ce nombre. N est par hypothèse de l'une des deux formes, $9k + 2$ ou $9k + 7$.

D'où : $N^2 = (9k + 2)^2 = m.\,9 + 4$.

Ou : $N^2 = (9k + 7)^2 = m.\,9 + 4$.

Donc : $N^2 - 13 = m.\,9 + 4 - 13 = m'.9$.

223.

Si le carré d'un nombre entier diminué de 13 est divisible par 9, ce nombre divisé par 9 donne pour reste 7 ou 2.

Soit N^2 le carré. Nous avons par hypothèse :

$N^2 - 13 = m.\,9$ ou $N^2 - 4 = m.\,9$.

Or, N est par rapport à 9 de l'une des formes :

$9n,\ 9n+1,\ 9n+2,\ 9n+3,\ 9n+4,\ 9n+5,\ 9n+6,\ 9n+7,\ 9n+8.$

Et son carré N^2 est de l'une des formes :

$9n+0,\ 9n+1,\ 9n+4,\ 9n+7.$

Or, pour que $N^2 - 4$ soit divisible par 9, il faut que N^2 soit de la forme : $9n+4$ et par suite N doit être de l'une des deux formes : $9n+2$ ou $9n+7$. Donc N divisé par 9, donne pour reste 2 ou 7.

224.

Aucun carré entier n'est de la forme $12n+5$.

Tout nombre entier est par rapport à 12 de l'une des formes :

$12n,\ 12n \pm 1,\ 12n \pm 2,\ 12n \pm 3,\ 12n \pm 4,\ 12n \pm 5,\ 12n \pm 6.$

Le carré de ce nombre est donc par rapport à 12 de l'une des formes : $12n$, $12n+1$, $12n+4$, $12n+9$, parmi lesquelles on n'en trouve aucune de la forme $12n+5$.

225.

Trouver les restes que donnent tous les carrés des nombres entiers lorsqu'on les divise par le même nombre entier.

Soit 5 ce nombre.

Tout nombre est, par rapport à 5, de l'une des formes suivantes :

$5m$, $5m + 1$, $5m + 2$, $5m + 3$, $5m + 4$, et son carré est de l'une des formes :

$5m$, $5m + 1$, $5m + 4$.

Donc si l'on divise par 5 un nombre entier carré parfait, les restes que l'on peut obtenir sont : 0, 1, ou 4.

Conséquence : Les expressions : $5m + 2$ et $5m + 3$ ne peuvent jamais être des carrés parfaits, quel que soit le nombre entier m.

226.

Les carrés égaux à la somme de deux autres sont tous donnés par la formule $\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 + (xy)^2$, x et y désignant des nombres entiers quelconques.

Soit $a^2 = b^2 + c^2$ (1).

Supposons d'abord ces trois nombres premiers entre eux ; l'un d'eux doit être pair.

Supposons c impair ; $c^2 = a^2 - b^2$.

Donc (nº 187), on aura : $\begin{cases} x^2 = a + b. \\ y^2 = a - b. \end{cases}$

D'où : $a = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $b = \frac{x^2 - y^2}{2}$ et $c = xy$.

Donc (1) devient : $\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)^2 + (xy)^2$.

Supposons maintenant que a, b, c, aient des diviseurs communs, et soit m leur P. G. C. D., nous aurons : $a = m\alpha$, $b = m\beta$, $c = m\gamma$, ou $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (2). Or α, β et γ sont nombres premiers entre eux, donc on pourra trouver deux nombres entiers x et y tels que l'on ait :

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2}{2},\ \beta = \frac{x^2 - y^2}{2},\ \gamma = x\,y.$$

D'où : $a = m\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$, $b = m\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)$, $c = mxy$.

a, b, c ne seront pas alors (du moins si m n'est pas un carré parfait) compris dans la formule (1), mais ils le seront dans la formule :

$$\left[m\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)\right]^2 = \left[m\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)\right]^2 + (m\,x\,y)^2.$$

Qui se déduit de (1), en multipliant tous les termes par m^2.

227.

Si un carré entier a^2 est égal à la somme de deux autres $b^2 + c^2$, l'un des trois nombres a, b, c est divisible par 5.

D'après le théorème précédent, si $a^2 = b^2 + c^2$ nous avons les relations :

$2a = m\,(x^2 + y^2)$, $2b = m\,(x^2 - y^2)$, $c = mxy$;

D'où $4abc = m^3\,(x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2)\,xy$. Mais (n° 213) le produit $xy\,(x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2)$ est divisible par 30 et par suite par 5 ; donc $a \times b \times c$ et par suite l'un des trois nombres a, b ou c est divisible par 5.

Autre démonstration.

Aucun nombre carré parfait n'est de la forme $5n \pm 2$ (n° 225).

Cela posé, soit $a^2 = b^2 + c^2$ (1).

1° Si a^2 est de la forme $5n+1$ et b^2 de la forme $5n'+1$, (1) devient $5n+1=5n'+1+c^2$ donc : $c^2=m.\,5$.

2° Si a^2 est de la forme $5n+1$ et b^2 de la forme $5n'-1$, (1) devient : $5n+1=5n'-1+c^2$ d'où $c^2=m.\,5+2$; ce qui est impossible.

3° Si a^2 est de la forme $5n-1$ et b^2 de la forme $5n'+1$, (1) devient : $5n-1=5n'+1+c^2$ d'où $c^2=m.\,5-2$; ce qui est impossible.

4° Si a^2 et b^2 sont tous deux de la forme $5n-1$, (1) devient : $5n-1=5n'-1+c^2$, d'où $c^2=m.\,5$.

Donc l'un des trois nombres a, b, c, est divisible par 5.

228.

Si a est un nombre premier, il n'existe que le carré de $\frac{a-1}{2}$ qui, lui étant ajouté, donne pour somme un carré parfait.

Supposons que l'on ait : $a+b^2=c^2$ (b et c étant des nombres entiers).

On en tire : $a=c^2-b^2$ ou $a=(c+b)(c-b)$.

c et b étant des nombres entiers, $c+b$ et $c-b$ sont aussi des nombres entiers.

Or, a ne peut être premier que si : $c-b=1$.

D'où : $c+b=a$, et $b=\frac{a-1}{2}$.

Donc enfin : $a+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$

229.

Si P est premier avec A et que l'on divise les P premières puissances : $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{P-1}$, par P,

1° Il y aura deux restes égaux ;

2° Ces deux restes égaux seront égaux à l'unité ;

3° Si A^m est la plus petite puissance de A, autre que A^0, qui divisée par P donne pour reste 1, tous les restes précédents seront différents ;

4° A partir de la plus petite puissance, autre que A^0 qui donne 1 pour reste, les restes se reproduiront périodiquement.

1°

En effet, les restes de cette division sont au nombre de P et chacun est plus petit que P ; donc deux restes au moins sont égaux.

2°

Soient A^m et $A^{m'}$ les nombres de la série qui donnent ces restes égaux, nous aurons :

$A^m = P \times q + r$ et $A^{m'} = P \times q' + r$, d'où :

$A^{m'} - A^m = P\,(q' - q)$ ou $A^m\,(A^{m'-m} - 1) = P\,(q' - q)$.

Donc P, étant premier avec A, doit diviser $A^{m'-m} - 1$; or $A^{m'-m}$ est plus petit que A^P, donc avant d'arriver à A^P, on trouvera au moins, une puissance de A autre que A^0, qui divisée par P donne 1 pour reste ; et comme A^0 divisé par P donne pour reste 1, il y a deux restes égaux à 1.

3°

Si deux puissances de A, $A^{m'}$ et $A^{m''}$ moindres que A^m pouvaient donner le même reste r, $A^{m'}\,(A^{m''-m'} - 1)$ divisé par P donnerait 1 pour reste. Or, $A^{m''-m'}$ est plus petit que A^m ; donc A^m ne serait pas la plus petite puissance de A qui divisée par P donne 1 pour reste.

4°

Soit : $A^m = k\,P + A^o$ (k étant un nombre entier).

Nous aurons :

$$A^{m+1} = A\ kP + A$$

$$A^{m+2} = A^2\,kP + A^2$$

Donc A^m, A^{m+1}, A^{m+2}, ... divisés par P donnent les mêmes restes que A^0, A^1, A^2, ... divisés par P.

Maintenant : $A^{2m} = A^m\,kP + A^m$.

$$A^{2m+1} = A^{m+1}\,kP + A^{m+1}.$$

$$A^{2m+2} = A^{m+2}\,kP + A^{m+2}.$$

Donc A^{2m}, A^{2m+1}, A^{2m+2}, ... divisés par P donnent les mêmes restes que A^m, A^{m+1}, A^{m+2} et par suite que, A^0, A^1 A^2, ... divisés par P.

De même pour A^{3m}, A^{4m}, ..., A^{km}.

Donc enfin les restes se reproduisent périodiquement.

N. B. Lorsque P n'est pas premier avec A, le théorème n'est plus vrai.

En effet, supposons que l'on ait : $A^k = P\,q + \alpha$, si A et P ont un facteur commun, ce facteur devra diviser α et par suite α ne pourrait être égal à 1.

230.

Si A^{P-1} est la moindre puissance de A autre que A^o dont la division par P ramène le reste 1, P est premier absolu.

En effet, les restes qui précèdent la division de A^{P-1} par P étant tous inégaux (n° 229) comprennent les nombres : 1, 2, 3, ..., (P — 1).

Or si P n'était pas premier absolu et que α fut l'un de ses diviseurs, α se trouverait parmi les nombres : 1, 2, 3, ..., (P — 1) et l'on aurait : $A^k = Pq + \alpha$.

Or α divisant P devrait diviser A, et alors A et P auraient un facteur commun, et (nº 229. *N. B.*) il ne serait même pas possible de trouver au-dessus de A^0 une puissance de A qui donnât le reste 1.

231.

Un nombre qui a n diviseurs premiers absolus admet 2^n diviseurs.

Soit : $N = \overline{a \times b \times c \times \ldots \times p}^{\,n}$ (a, b, c, ..., p étant les n diviseurs premiers absolus de N).

Le nombre des diviseurs de N est :

$$\overline{(1+1)(1+1)(1+1) \times \ldots \times (1+1)}^{\,n} \text{ ou } 2^n.$$

232.

On peut décomposer un nombre en un produit de deux facteurs premiers entre eux : de $2^{n-1} - 1$ manières différentes, n étant le nombre des facteurs premiers distincts qui divisent le nombre proposé.

Soient a, b, c des nombres premiers, $N = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$ et $N' = a.\, b.\, c.$

N et N' peuvent se décomposer d'autant de manières l'un que l'autre, en deux facteurs premiers entre eux, car toute décomposition relative à N donne une décomposition correspondante relative à N′ en réduisant tous les exposants à l'unité.

Il suffit donc de considérer $N' = abc$.

Or, ce nombre ayant n facteurs premiers absolus, admet 2^n diviseurs (nº 231), et peut se décomposer en un produit de deux facteurs de $\frac{2^n}{2}$ ou de 2^{n-1} manières différentes; car à chaque diviseur d correspond le diviseur $\frac{N'}{d}$; chacune de ces décompositions se fait à l'aide de deux facteurs premiers entre eux, excepté lorsque $d = 1$; donc $2^{n-1} - 1$ est le nombre cherché.

233.

1° Un nombre carré parfait admet un nombre impair de diviseurs;

2° Un nombre non carré parfait admet un nombre pair de diviseurs.

1° N étant carré parfait, on a : $N = a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma}$ (a, b, c, étant facteurs premiers de N.)

Le nombre de ses diviseurs est :

$(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\gamma + 1)$, nombre évidemment impair.

2° N n'étant pas carré parfait, on a : $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ et l'un des trois exposants α, β, γ est nécessairement impair, donc le nombre des diviseurs $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ est nécessairement pair.

234.

Tout nombre qui est un carré et un cube parfaits est une sixième puissance parfaite.

Soit : $N = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$ (a, b, c étant les facteurs premiers de N).

N étant un carré parfait, a^{α}, b^{β}, c^{γ} sont des carrés parfaits, donc α, β et γ sont divisibles par 2.

N étant un cube parfait, a^{α}, b^{β}, c^{γ} sont des cubes parfaits, donc, α, β, γ sont divisibles par 3.

Donc α, β, γ sont des multiples de 6.

Donc $N = a^{6m}\, b^{6n}\, c^{6p}$.

Donc N est une sixième puissante parfaite.

235.

Tout nombre qui est une m^{me}, une n^{me}, une p^{me} puissance parfaite est une : $(m \times n \times p)^{me}$ puissance parfaite si m, n, p .... sont des nombres premiers entre eux deux à deux.

Soit $N = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\beta}$ (a, b, c étant les facteurs premiers de N).

N étant une m^{me} puissance parfaite, $a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$ sont des m^{mes} puissances parfaites, donc α, β, γ sont divisibles par m.

De même N étant une n^{me} et une p^{me} puissances parfaites, α, β, γ sont divisibles par n et par p.

Or. m, n et p étant des nombres premiers entre eux deux à deux; α, β et γ sont divisibles par $m \times n \times p$.

Donc $N = a^{m \times n \times p} . b^{m \times n \times p} . c^{m \times n \times p}$.

Donc N est une $(m \times n \times p)^{me}$ puissance parfaite.

N. B. Si m, n, p n'étaient pas premiers entre eux deux à deux, soit M leur moindre multiple. N serait une M^{me} puissance exacte.

236.

Soit d un nombre premier absolu ne divisant pas B. Si B^{2n} est la plus petite puissance de B qui, divisée par d, donne 1 pour reste, $B^n + 1$ sera divisible par d.

L'hypothèse nous donne $B^{2n} - 1 = m \times d$.

Ou $(B^n + 1)(B^n - 1) = m.\ d$.

Or, par hypothèse, d ne divise pas $B^n - 1$, donc d divise $B^n + 1$.

N. B. Si d n'est pas premier absolu, le théorème peut être en défaut.

En effet $11^2 - 1$ est divisible par 8 et $11^2 + 1$ ne l'est pas.

237.

a, b, c, d étant quatre nombres quelconques $(ac + bd)^2$ est plus petit que : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

Dans quel cas l'égalité de ces deux quantités est-elle possible ?

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} a^2c^2 + b^2d^2 + 2\,acbd \\ + a^2d^2 + b^2c^2 - 2\,acbd. \end{array} \right.$$

D'où :

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ (1), et par suite : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) > (ac + bd)^2$.

De l'égalité (1) on déduit que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ est égal à $(ac + bd)^2$ dans l'hypothèse de $ad = bc$.

238.

La somme des n premiers nombres impairs est égal au carré de n.

En effet, nous avons identiquement (nº 178) :

$$
\begin{array}{rl}
1). & 1 = 1. \\
2). & 3 = 2^2 - 1. \\
3). & 5 = 3^2 - 2^2. \\
4). & 7 = 4^2 - 3^2. \\
5). & 9 = 5^2 - 4^2. \\
6). & 11 = 6^2 - 5^2. \\
 & \ldots\ldots \\
n-1). & 2n - 3 = (n-1)^2 - (n-2)^2. \\
n). & 2n - 1 = n^2 - (n-1)^2.
\end{array}
$$

Ajoutant membre à membre ces égalités et réduisant, il vient :

$$\underset{(1)}{1} + \underset{(2)}{3} + \underset{(3)}{5} + \underset{(4)}{7} + \ldots\ldots + \underset{(n)}{(2n-1)} = n^2.$$

239.

Étant donné un carré impair, trouver un second carré qui, ajouté au premier donne pour somme un carré.

La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 (nº 238).

Si donc à un nombre impair, carré parfait, pris dans la suite des nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ... on ajoute le carré du nombre des termes qui précède, on obtient pour somme un carré.

Ainsi : $9 + 4^2 = 5^2$; de même $25 + 12^2 = 13^2$, $49 + 24^2 = 25^2$, etc. . . . .

240.

Si k est un nombre entier et si $3^K + 1$ est un multiple de 10, démontrer que $3^{K+4} + 1$ et $3^{2+4K} + 1$ sont aussi des multiples de 10.

1°

$3^{K+4} = 3^K \times 3^4 = (m.10 - 1) \times 3^4 = m.10 - 8 = m.10 - 1$.

Donc : $3^{K+4} + 1 = m10 - 1 + 1 = m.10$.

2°

Nous avons : $3^K + 1 = m.10$.

En faisant dans cette expression k successivement égal à : 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... n.

On trouve que les seules valeurs : 2, 6, 10, ..., $2 + 4$ K, donnent pour $3^k + 1$ un multiple de 10.

Donc $3^{2+4K} + 1 = m.10$.

241.

Toute puissance $2P + 1$ d'un nombre entier n est la somme de n^P nombres impairs consécutifs.

Il s'agit donc de prouver qu'il existe toujours un nombre entier K tel que l'on ait :

$(2K + 1) + (2K + 3) + . . . (2K + 2n^P - 1) = n^{2P+1}$

ou : $2n^p K + (1 + 3 + 5 + \ldots + 2n^p - 1) = n^{2p+1}$

ou $2n^p K + \frac{2.n^p.n^p}{2} = n^{2p+1}$,

ou $2K + n^p = n^{p+1}$,

ou enfin : $K = \frac{n^{p+1} - n^p}{2}$.

Pour que K soit entier, il faut que $n^p(n - 1)$ soit divisible par 2. Ce qui est évident (n° 49).

242.

Toute puissance entière n^α d'un nombre entier est égal à la somme de n^β nombres impairs consécutifs.

Il s'agit de prouver qu'il existe toujours un nombre entier impair tel que l'on ait :

$$n^\alpha = K + (K + 2) + (K + 4) + \ldots + \left(K + 2(n^\beta - 1)\right)$$

D'où $n^\alpha = (K + n^\beta - 1)\, n^\beta$,

Ou $K = n^{\alpha - \beta} - n^\beta + 1$.

Or, $n^{\alpha - \beta} - n^\beta$ est un nombre pair, donc K est entier et impair.

Conséquences :

1° Soit α un nombre pair et $\beta = \frac{\alpha}{2}$; on a :

$K = n^{\frac{\alpha}{2}} - n^{\frac{\alpha}{2}} + 1$, ou $K = 1$, d'où :

Toute puissance $n^{2\alpha}$ d'un nombre entier est la somme des n^α premiers nombres impairs;

2° Si $\beta = 1$, on a : $K = n^{\alpha - 1} - n + 1$, d'où :

Toute puissance n^α d'un nombre est la somme de n nombres impairs consécutifs.

243.

Le produit des nombres entiers depuis une limite quelconque n jusqu'au nombre $2n - 2$ inférieur de deux unités ou double de n, est égal au produit des nombres impairs depuis 1 jusqu'à $2n - 3$ par la $(n - 1)^{me}$ puissance de 2.

Soit P ce produit :

$P = n(n+1) + (n+2) \times \ldots. \times (2n-2)$.

Multiplions et divisons par : $2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)$, il vient :

$$P = \frac{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n \times (n+1) \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-2)}{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)}$$

$$\text{ou : } P = \frac{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots. (2n-3) \times (2n-2)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots. \times (2n-2)}.$$

Supprimons les facteurs $2, 4, 6, \ldots (2n-2)$, communs aux deux termes, il vient :

$P = 2^{n-1} \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)$.

244.

Le produit $2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 \times \ldots (4n-6)$ est divisible par $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times n$.

Le produit: $P = 2 \times 6 \times 10 \times 14 \times 18 \times \ldots \times (2n-6)$ peut s'écrire: $P = 2^{n-1} \times 1.3.5.7.9 \ldots \times (2n-3)$.

Multipliant et divisant par $2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2)$,

$$\text{il vient : } P = \frac{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n-2)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n-2)}$$

$$\text{Ou } P = \frac{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)\, n\, (2n-3)\, (2n-2)}{2^{n-1} \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1)}$$

Ou $P = n(n+1) \times (n+2) \times \ldots \times (2n-3) \times (2n-2)$.

Donc P est égal au produit de $n - 1$ nombres consécutifs. Or $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ divise $(n-1)P$ et $(2n-1)P$ (nº 53), donc si $1 \times 2 \times 3 \ldots . \times n$ ne divise pas le produit P, il faut qu'un facteur premier de $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$ divise $n - 1$ et $2n - 1$ et par suite leur différence n. Ce qui est impossible, car tout nombre qui divise n et $n - 1$ doit diviser 1.

Donc enfin, P est divisible par $1 \times 2 \times 3 \times \ldots . \times n$.

245.

Trouver la somme des n premiers termes de la suite : 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... dans laquelle la différence de deux termes consécutifs va toujours en augmentant d'une unité.

Cette suite peut s'écrire :

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \ldots . + (1+2+3+4+\ldots . + n),$$

Ou :

$$\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \frac{3 \times 4}{2} + \frac{4 \times 5}{2} + \ldots . + \frac{n(n+1)}{2},$$

Ou :

$$\frac{1(1+1) + 2(1+2) + 3(1+3) + 4(1+4) + \ldots + n(1+n)}{2}$$

Ou :

$$\frac{(1+2+3+4+\ldots+n) + (1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2)}{2}$$

Ou :

$$\frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

D'où : $\dfrac{3n(n+1) + n(n+1)(2n+1)}{12}$ ou : $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$, et ce nombre est entier, car $n\ (n+1)(n+2)$ est divisible par 6 (nº 50).

246.

Trouver la somme des carrés des n premiers nombres entiers.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } 1^3 &= 1^3 \\
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1 \\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 + 3\times 2 + 1 \\
4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3\times 3^2 + 3\times 3 + 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^3 &= \ldots\ldots = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

Additionnant membre à membre ces égalités et réduisant, on a :

$$(n+1)^3 = 3\,[1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2] + 3\,[1+2+3+\ldots+n] + (n+1).$$

Posant : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_2$.

Il vient : $(n+1)^3 = 3S_2 + \dfrac{3n\,(n+1)}{2} + n + 1.$

D'où : $2\,(n+1)^3 = 6S_2 + 3n\,(n+1) + 2\,(n+1).$

Ou : $6S_2 = (n+1)\,[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2].$

$6S_2 = (n+1)\,(2n^2+n)$ ou $S_2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$

S_2 est un nombre entier, car $n\ (n+1)\ (2n+1)$ est divisible par 6 (nº 123).

247.

Un nombre N est premier, lorsque n'étant pas carré parfait, il n'est divisible par aucun des nombres premiers plus petits que sa racine carrée.

Si N était divisible par un facteur premier plus grand que la partie entière de sa racine carrée, le quotient obtenu serait moindre que cette racine, et par suite N admettrait un facteur premier plus petit que $\sqrt{N}$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

248.

Quelles sont les fractions de la forme $\frac{a}{n}$ qui sont égales à leur racine carrée prise à $\frac{1}{n}$ près.

Cette fraction doit être comprise entre :

$\left(\frac{a}{n}\right)^2$ et $\left(\frac{a+1}{n}\right)^2$ si l'on veut une valeur approchée par défaut et entre :

$\left(\frac{a}{n}\right)^2$ et $\left(\frac{a-1}{n}\right)^2$ si l'on veut une valeur approchée par excès.

1°

Examinons le premier cas.

On a : (1) $\frac{a}{n} > \left(\frac{a}{n}\right)^2$ et $\frac{a}{n} < \left(\frac{a+1}{n}\right)^2$ (2).

L'inégalité (1) exige que l'on ait : $a < n$.

L'inégalité (2) donne : $an < a^2 + 2a + 1$.

Posons $n = a + k$ et cette dernière relation devient :

$a(a+k) < a^2 + 2a + 1$, ou : $k < 2 + \frac{1}{a}$.

D'où : $n - a < 2 + \frac{1}{a}$.

La seconde inégalité exige donc que $n - a$ soit égal à 1 ou à 2.

Donc : 1° $n - a = 1$, d'où : $a = n - 1$.

2° $n - a = 2$, d'où : $a = n - 2$.

Et les deux fractions qui répondent à la question sont : $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n-2}{n}$.

2°

Examinons la seconde hypothèse.

On a : (1) $\frac{a}{n} < \left(\frac{a}{n}\right)^2$ et (2) $\frac{a}{n} > \left(\frac{a-1}{n}\right)^2$.

L'inégalité (1) exige que l'on ait $a > n$.

L'inégalité (2) nous donne en posant $n = a - k$ et par un calcul identique à celui ci-dessus :

$$a - n < 2 - \frac{1}{a}.$$

Cette inégalité exige que $a - n = 1$.

D'où : $a = n + 1$.

Donc la fraction $\frac{n+1}{n}$ répond à la question.

En résumé, les fractions $\frac{n-1}{n}$ et $\frac{n-2}{n}$ plus petites que l'unité et la fraction $\frac{n+1}{n}$ plus grande que l'unité répondent à la question.

249.

La moyenne arithmétique de deux nombres a et b est plus grande que leur moyenne géométrique.

Il s'agit de prouver que l'on a :

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Posons : $a = b + d$.

$$\frac{a+b}{2} \text{ devient } \frac{a+b+d}{2} \text{ ou } b + \frac{d}{2}.$$

Donc : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = b^2 + b\,d + \frac{d^2}{4}$.

$\sqrt{a \times b}$ devient : $\sqrt{b\,(b+d)}$.

Donc : $(\sqrt{a \times b})^2 = b^2 + b\,d$.

Donc : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ est plus grand que $(\sqrt{a \times b})^2$ est par suite $\frac{a+b}{2}$ est plus grand que $\sqrt{a \times b}$.

250.

La racine carrée, la racine cubique, la racine n^{me} d'un nombre entier non carré parfait, ne peut être un nombre fractionnaire.

En effet, supposons que l'on puisse avoir : $\sqrt[n]{A} = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right.$ est une fraction supposée irréductible$\left.\right)$; on aurait $A = \frac{a^n}{b^n}$.

Or, a étant premier avec b, $\frac{a^n}{b^n}$ est irréductible et ne peut être égal à un nombre entier.

La racine ne peut être une fraction décimale exacte, périodique simple, ou périodique mixte; car en cherchant la génératrice de cette fraction on aurait : $A = \frac{a^n}{b^n}$ ce qui est impossible.

251.

Si deux nombres entiers A et B ont le même nombre de chiffres et qu'ils aient plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, on aura :

1° $\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{1}{2}$. 2° $\frac{A+B}{2} - \sqrt{AB} < \frac{1}{8}$.

1°

Le nombre des chiffres de la différence A — B étant, par hypothèse, moindre que la moitié du nombre des chiffres de B, on a : $A - B < \sqrt{B}$.

Ou : $(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) < \sqrt{B}$, d'où :

$\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$, ou (puisque l'on a supposé $A > B$) à plus forte raison $\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{B}}$ ou enfin $\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{1}{2}$.

2°

En élevant : $\sqrt{A} - \sqrt{B} < \frac{1}{2}$ au carré.

Il vient : $A + B - 2\sqrt{AB} < \frac{1}{4}$.

D'où : $\frac{A+B}{2} - \sqrt{AB} < \frac{1}{8}$.

252.

Si deux nombres entiers A et B ont le même nombre de chiffres et s'ils ont plus de la moitié des chiffres à gauche en commun, on aura :

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} < \frac{1}{3}.$$

Soient a et $a + \frac{1}{3}$, deux nombres d'un même nombre de chiffres, la différence de leurs cubes est :

$$\left(a+\frac{1}{3}\right)^3 - a^3 = a^2 + \frac{a}{3} + \frac{1}{27}.$$

Si a, a n chiffres a^2 et par suite $a^2 + \frac{a}{3} + \frac{1}{27}$ en aura au moins $2n - 1$ et a^3 au plus $3n$. (nº 23.)

Donc le rapport du nombre des chiffres de $a^2 + \frac{a}{3} + \frac{1}{27}$ au nombre des chiffres de a^3 doit être au moins égal à $\frac{2n-1}{3n}$.

Or, $\frac{2n-1}{3n}$ ou : $\frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ est évidemment plus grand que $\frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right)$ et par suite plus grand que $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{2}$.

Ainsi le nombre des chiffres de la différence :
$\left(a+\frac{1}{3}\right)^3 - a^3$ ne peut être inférieur à la moitié du nombre des chiffres du cube de a.

Donc si A et B ont plus de la moitié de leurs chiffres à gauche en commun, leur différence sera moindre que la différence entre les cubes de $\sqrt[3]{B}$ et de $\sqrt[3]{B} + \frac{1}{3}$, donc enfin on a : $\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} < \frac{1}{3}$.

253.

Si, en extrayant la racine carrée d'un nombre entier N, le reste ne surpasse pas la racine trouvée, cette racine est approchée à une $\frac{1}{2}$ unité près.

Soient a la racine trouvée et r le reste.

Nous avons : $N = a^2 + r$.

Or : $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$.

Remplaçons dans le second membre de cette égalité a par r et dans le résultat obtenu $a^2 + r$ par N, il vient évidemment : $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 > a^2 + r + \frac{1}{4}$.

Ou : $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 > N + \frac{1}{4}$ et à plus forte raison $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 > N$

ou $a + \frac{1}{2} > \sqrt{N}$.

Donc : $\sqrt{N}$ est plus grand que a et plus petit que $a + \frac{1}{2}$,

donc la racine de N est comprise entre a et $a + \frac{1}{2}$.

254.

Soit a la racine carrée, à une unité près, d'un nombre entier N. Soit R le reste de l'opération.

Prouver 1° que l'on a :

$a + \frac{R}{2a} > \sqrt{N}$ et 2° que $\left(a + \frac{R}{2a}\right)^2$ surpasse, au plus d'une unité le nombre N.

Nous avons : $N = a^2 + R$.

1°

$$\left(a + \frac{R}{2a}\right)^2 = a^2 + R + \frac{R^2}{4a^2} = N + \frac{R^2}{4a^2}$$

Donc : $\left(a + \frac{R}{2a}\right)^2$ est plus grand que N, et par suite on a : $\left(a + \frac{R}{2a}\right) > \sqrt{N}$.

2°

La plus grande valeur possible de R est $2a$.

Donc : $\left(a + \frac{R}{2a}\right)^2$ a pour valeur maximum $\left(a + \frac{2a}{2a}\right)^2$, ou $(a + 1)^2$, ou $a^2 + 2a + 1$ et comme $N = a^2 + R$, nous avons dans la même hypothèse : $N = a^2 + 2a$.

Donc : $\left(a + \frac{R}{2a}\right) - N$ égale au plus $(a^2 + 2a + 1) - (a^2 + 2a)$ ou 1.

Donc enfin $\left(a + \frac{R}{2a}\right)^2$ surpasse au plus de 1 le nombre N.

255.

Existe-t-il une proportion telle qu'en ajoutant un même nombre à ses quatre termes on forme une proportion nouvelle?

Soit $a : b = c : d$ (1) une proposition dont la raison est q et supposons que K soit un nombre tel que l'on ait :

$a + K : b + K = c + K : d + K$,

Nous avons : $(a + K) \times (d + K) = (b + K) \times (c + K)$,

Ou $ad + dK + aK + K^2 = bc + cK + bK + K^2$,

Ou $dK + aK = cK + bK$,

Ou $a + d = b + c$ (2)

Or $a = bq$ et $c = dq$; donc (2) devient :

$bq + d = b + dq$, ou $bq - b = dq - d$,

Ou $b(q - 1) = d(q - 1)$.

Il faut donc que l'on ait : ou bien $q = 1$, ou bien $b = d$.

Si : $q = 1$ la proportion (1) devient $a : a = c : c$.

Si : $b = d$ la proportion (1) donne $a = c$ et devient : $a : b = a : b$.

Donc la propriété en question n'appartient qu'à une proportion identique.

256.

Le plus grand des quatre termes d'une proportion ajouté au plus petit donne une somme plus grande que les deux autres termes.

Soit $a : b = c : d$ une proportion dont a est le plus grand terme; d sera le plus petit.

De la proportion $a : b = c : d$ on déduit : $a - b : c - d = a : c$; or a est plus grand que c; donc $a - b$ est plus grand que $c - d$, et $a - b > c - d$ entraîne : $a + d > b + c$.

257.

Démontrer que la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entraîne la relation $\frac{a\,b}{c\,d} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2$.

De la proportion : $a : b = c : d$ on déduit :

1°). $a + b : b = c + d : d$,

2°). $a + b : a = c + d : c$,

et en multipliant ces deux proportions terme à terme, on obtient :

$(a + b)^2 : ab = (c + d)^2 : cd$.

Ou : $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a\,b}{c\,d}$.

258.

Si sur la droite AB on prend deux points B′ et A′ tels que l'on ait : $\frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{B'A'}}{\mathrm{B'A}}$, on aura :

$$\frac{1}{A'B'} + \frac{1}{AB} = \frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'}.$$

On a par hypothèse :

$AB + A'B' = AA' + BB'$ (1), et (n° 39) l'on sait que :

$AB \times A'B' + A'B \times B'A = AA' \times BB'$ (2).

Mais la proportion donnée entraînant l'égalité : $BA' \times AB' = BA \times B'A'$; l'égalité (2) devient $2AB \times B'A' = AA' \times BB'$ (3).

Divisant (1) par (3) il vient :

$$\frac{AB}{2AB \times B'A'} + \frac{A'B'}{2AB \times A'B'} = \frac{AA'}{AA' \times BB'} + \frac{BB'}{AA' \times BB'}$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{2A'B'} + \frac{1}{2AB} = \frac{1}{BB'} + \frac{1}{AA'}$$

$$\text{ou : } \frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{2}{AA'} + \frac{2}{BB'}.$$

259.

On prend le milieu O d'une droite AB et l'on marque sur cette droite un point X tel que l'on ait : $\frac{AX}{BX} = \frac{BX}{OX}$. Prouver que : $BX = \frac{AB}{3}$.

La proportion : $AX : BX = BX : OX$, donne succesivement :

$$AX + BX : BX = BX + OX : OX$$
$$AB : BX = OB : OX$$
$$BX : OX = AB : OB$$
$$BX : OX = 2 : 1$$
$$BX : BX + OX = 2 : 3$$
$$BX : OB = 2 : 3; \quad \text{d'où : } BX = \frac{2}{3} OB;$$
$$\text{ou : } BX = \frac{AB}{3}.$$

260.

Sur la droite AB on marque un point O situé au $\frac{n-1}{n}$ de AB et un deuxième point X tel que l'on ait : $\frac{\text{AX}}{\text{BX}} = \frac{\text{BX}}{\text{OX}}$. Prouver que : $\text{BX} = \frac{\text{AB}}{n+1}$. $\left(\text{BO} = \frac{\text{AB}}{n}\right)$.

De la proportion AX : BX = BX : OX, on déduit : AX + BX : BX + OX = BX : OX, ou AB : OB = BX : OX. Or, par hypothèse,

AB : OB = n : 1 ; donc :

BX : OX = n : 1 ; d'où :

BX : BO = n : $n + 1$; ou : $\text{BX} = \frac{n}{n+1} \times \text{BO}$.

Or, $\text{BO} = \frac{\text{AB}}{n}$; donc $\text{BX} = \frac{n}{n+1} \times \frac{\text{AB}}{n}$; d'où :

$$\text{BX} = \frac{\text{AB}}{n+1}.$$

261.

Si l'on a quatre nombres a, b, c, d, tels que : 1° $b = \frac{a+c}{2}$ et 2° $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$, ces quatre nombres seront en proportion.

$b = \frac{a+c}{2}$ peut s'écrire : $b : a + c = 1 : 2$.

De même : $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$ peut s'écrire :

$\frac{1}{c} : \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = 1 : 2$; ou : $b : a + c = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$:

Ou : $b\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) = (a + c)\frac{1}{c}$:

D'où : $1 + \frac{b}{d} = \frac{a}{c} + 1$; ou : $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$.

Donc enfin : $a : b = c : d$.

262.

Soit la proportion $a : b = c : d$ et admettons que $b = \frac{a+c}{2}$; je dis que l'on aura : $\frac{1}{c} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$.

$b = \frac{a+c}{2}$, donne $a + c : b = 2 : 1$.

Divisant cette proportion terme à terme par la proportion : $a : b = c : d$. Nous aurons : $\frac{a+c}{a} : 1 = \frac{2}{c} : \frac{1}{d}$.

Ou : $\frac{2}{c} = \frac{1}{d}\left(\frac{a+c}{a}\right)$.

D'où : $\frac{2}{c} = \frac{a+c}{ad}$ ou : $\frac{2}{c} = \frac{1}{d} + \frac{c}{ad}$.

Or : $ad = bc$; donc : $\frac{2}{c} = \frac{1}{d} + \frac{c}{bc}$.

Ou : $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{b}\right)$.

263.

Dans quel cas, en ajoutant deux proportions terme à terme, obtient-on une nouvelle proportion ?

Soient $a : b = c : d$ et $a' : b' = c' : d'$ deux proportions, ajoutons les terme à terme nous obtenons :

$a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, $d + d'$ et pour que ces quatre sommes soient en proportion, il faut que l'on ait :

$(a + a')(d + d') = (b + b')(c + c')$, ou :

$ad + a'd + ad' + a'd' = bc + b'c + c'b + b'c'$, ou $a'd + ad' = b'c + c'b$ (1).

Soient : q et q' les raisons de ces deux proportions ; nous aurons :

$a = bq$; $c = dq$; $a' = b'q'$; $c' = d'q'$ et la relation (1) devient :

$bqd' + db'q' = bd'q' + dqb'$,

Ou $q(bd' - db') = q'(bd' - db')$.

Il faut donc que l'on ait ou bien $q = q'$ ou bien $bd' = db'$.

Or, $bd' = db'$ donne $\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'}$, ou $q = q'$.

Il faut donc que les raisons des deux proportions soient égales.

264.

Pour qu'une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on augmente ou diminue ses deux termes d'un nombre différent, il faut que ces deux nombres soient entre eux dans le même rapport que les deux termes de la fraction proposée.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction, ajoutant x à son numérateur et y à son dénominateur, il vient : $\frac{a+x}{b+y}$.

Nous devons avoir : $\frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+y}$; d'où $ab + ay = ab + bx$, ou $ay = bx$; d'où $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

On traitera de la même manière : $\frac{a-x}{b-y}$.

Conséquence : En ajoutant ou en soustrayant deux fractions terme à terme, la fraction résultante sera équivalente à ces deux fractions, si l'une d'elles a pour termes des équimultiples des deux termes de l'autre.

265.

Etant données les fractions égales :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

et m, m', m'', ... étant des quantités quelconques, on aura :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots} = \frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots}{mb+m'b'+m''b''+\ldots}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}} = \sqrt{\frac{m^2a^2+m'^2a'^2+m''^2a''^2+\ldots}{m^2b^2+m'^2b'^2+m''^2b''^2+\ldots}}$$

Pour le démontrer posons :

$$k = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

D'où :

(1) $a = kb,\ a' = kb',\ a'' = kb'', \ldots$

(2) $ma = mkb,\ m'a' = m'kb',\ a''m'' = m''kb'' \ldots$

(3) $a^2 = k^2\, b^2\ ,\ a'^2 = k^2\, b'^2\ ,\ a''^2 = k^2\, b''^2$.

(4) $m^2\, a^2 = m^2\, k^2\, b^2\ ,\ m'^2\, a'^2 = m'^2\, k^2\, b'^2\ ,\ a''^2\, m''^2 = m''^2\, k^2\, b''^2$.

Ajoutant respectivement membre à membre les égalités (1) (2) (3) (4), on obtient :

$$(a + a' + a'' + \ldots) = (b + b' + b'' + \ldots)\, k.$$

$$(ma + m'a' + m''a'' + \ldots) = (mb + m'b' + m''b'' + \ldots)\, k$$

$$(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots) = (b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots)\, k^2$$

$$(m^2\, a^2 + m'^2\, a'^2 + m''^2\, a''^2 + \ldots)$$

$$= (m^2\, b^2 + m'^2\, b'^2 + m''^2\, b''^2 + \ldots)\, k^2 .$$

On en tire :

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = \frac{ma + m'a' + m''a'' + \ldots}{mb + m'b' + m''b'' + \ldots}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}} = \sqrt{\frac{m^2a^2 + m'^2a'^2 + m''^2a''^2 + \ldots}{m^2b^2 + m'^2b'^2 + m''^2b''^2 + \ldots}}$$

$$= k = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}.$$

ce qu'il fallait démontrer.

266.

On donne une suite de nombres ; si chacun d'eux est la demi-somme de ceux qui le comprennent, ces nombres forment une progression par différence.

Soient : $a, b, c, d, \ldots\ldots, m, n, p, q$ ces nombres.

Admettons que l'on ait :

$b = \frac{a + c}{2}$, $c = \frac{b + d}{2}$, ..., $n = \frac{m + p}{2}$, $p = \frac{n + q}{2}$.

On en déduit :

$2b = a + c$, $2c = b + d$, ..., $2n = m + p$, $2p = n + q$.

Ou :

$a - b = b - c$, $b - c = c - d$, ..., $m - n = n - p$, $n - p = p - q$.

D'où :

$a - b = b - c = c - d = \ldots\ldots = m - n - p = p - q$,

ou $\div\, a.\ b.\ c.\ d.\ \ldots.\ m.\ n.\ p.\ q.$

267.

On donne une suite de nombres ; si chacun d'eux est moyen proportionnel entre ceux qui le comprennent, ces nombres forment une progression par quotient.

Soient : a, b, c, d, ..., m, n, p, q, ces nombres.

Admettons que l'on ait :

$$b^2 = ac, \ c^2 = bd, \ \ldots., \ n^2 = mp, \ p^2 = nq.$$

On en déduit :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \ \frac{b}{c} = \frac{c}{d}, \ \ldots, \ \frac{m}{n} = \frac{n}{p}, \ \frac{n}{p} = \frac{p}{q};$$

D'où :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots., = \frac{m}{n} = \frac{n}{p} = \frac{p}{q}.$$

Ou : $\div\!\div a : b : c : d : \ldots. : m : n : p : q.$

268.

Quelles sont les progressions par différence dans lesquelles la somme de deux termes quelconques fait partie de la progression ?

Soient a le premier terme et r la raison d'une progression par différence.

$a + mr$ et $a + nr$ seront deux termes de cette progression.

Pour que la somme de ces deux termes : $2a + (m + n)r$ puisse faire partie de cette progression, on doit avoir : $2a + (m + n)r = a + pr$. ($a + pr$ étant un terme de cette progression.)

D'où : $a = pr - (m + n)r$; ou :

$a = r\,(p - m - n)$.

Il faut donc que le premier terme de cette progression soit un multiple de la raison.

269.

Quelles sont les progressions par quotient dans lesquelles le produit de deux termes fait partie de la progression?

Soient a le premier terme et q la raison de cette progression.

aq^m et aq^n seront deux termes de cette progression.

Pour que leur produit, a^2q^{m+n} puisse faire partie de cette progression, on doit avoir : $a^2q^{m+n} = aq^p$ (aq^p étant un terme de cette progression).

D'où : $aq^{m+n} = q^p$ ou $a = \dfrac{q^p}{q^{m+n}}$, ou $a = q^{p-m-n}$.

Il faut donc que le premier terme de cette progression soit une puissance de la raison.

270.

Dans une progression géométrique dont le nombre des termes est impair, la somme des carrés des termes est égale à la somme des termes multipliée par l'excès de la somme des termes de rang impair sur la somme des termes de rang pair.

Soit : $a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^{2n-1} : aq^{2n}$ une progression géométrique de $2n + 1$ termes.

La somme des termes de rang impair est :

$$a + aq^2 + aq^4 + \ldots. + aq^{2n} \text{ ou } a \times \frac{q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1}.$$

La somme des termes de rang pair est :

$$aq + aq^3 + aq^5 + \ldots. + aq^{2n-1} \text{ ou } a \times \frac{q^{2n+1} - 1}{q^2 - 1}.$$

Donc la différence de ces deux sommes est :

$$D = a \left[\frac{q^{2n+2} - 1 - q^{2n+1} + 1}{q^2 - 1}\right].$$

Ou $D = a \times \dfrac{q^{2n+1} + 1}{q + 1}$ (1)

La somme des termes de la progression est :

$$S = a \times \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} \text{ (2).}$$

Multipliant (1) par (2), il vient : $D \times S = a^2 \left[\dfrac{q^{4n+2} - 1}{q^2 - 1}\right]$ (3)

Les carrés des termes de la progression sont — $a^2 : a^2 q^2 :$ $a^2 q^6 : \ldots : a^2 q^{4n-2}$ et leur somme est :

$$S' = \frac{a^2 \times (q^{4n+2} - 1)}{q^2 - 1} \text{ (4).}$$

Or, (3) = (4).

Donc enfin $S' = S \times D$.

271.

Dans une progression par différence à termes entiers, si n est un nombre premier avec la raison, en divisant n termes consécutifs par n on obtiendra pour restes tous les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, ..., $n - 1$, pris dans un certain ordre.

Soient : a, $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$, ..., $a + (n - 1)r$. les termes de la progression au nombre de n. En divisant ces termes par n on obtient n restes tous plus petits que n; il suffit donc de démontrer que deux restes quelconques ne peuvent être égaux.

Supposons que $a + br$ et $a + cr$ divisés par n puissent donner le même reste R. (b et c sont deux nombres entiers différents, plus petits que n). Nous aurons :

$a + br = nq + R$ et $a + cr = nq' + R$, d'où $r\ (c - b) = n\ (q' - q)$. Donc n doit diviser $r \times (c - b)$ et comme il est premier avec r, il doit diviser $c - b$, ce qui est absurde puisque b et c sont tous deux plus petits que n.

Donc enfin, tous les restes au nombre de n sont différents et sont, par suite, les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, ..., $(n - 1)$, pris dans un certain ordre.

272.

Si dans une progression arithmétique, 3 termes consécutifs a, b, c sont nombres premiers absolus, la raison est divisible par 6, à moins que le premier terme ne soit 1, 2 ou 3.

Soit r la raison. Il s'agit de prouver que r est divisible par 2 et par 3.

On a : $b = a + r$, $c = a + 2r$ d'où $b - c = r$.

Or b et c étant des nombres premiers sont impairs, et par suite r est divisible par 2.

De plus, ni a, ni b, ni c n'étant divisibles par 3, deux de ces nombres, divisés par 3, donnent le même reste. Supposons que ce soient a et b leur différence, $b - a = r$ doit donc être divisible par 3.

Donc r est divisible par 2×3.

273.

Si dans une progression arithmétique, 5 termes consécutifs, a, b, c, d, f, sont premiers absolus, la raison est divisible par 30, à moins que le premier terme ne soit 1, 2, 3 ou 5.

Soit r la raison. Il faut prouver que r est divisible par 2, 3 et 5.

D'après le théorème précédent, r est divisible par 2×3.

De plus, aucun des cinq nombres, a, b, c, d, f n'étant divisible par 5, deux d'entre eux, divisés par 5, donneront le même reste.

Supposons que ce soient b et d; leur différence $d - b = 2r$, sera divisible par 5 et par suite r est divisible par 5.

Donc enfin, r est divisible par $2 \times 3 \times 5$.

274.

Si dans une progression arithmétique, 7 termes consécutifs, a, b, c, d, f, g, h, sont premiers absolus, la raison est divisible par 210, à moins que le premier terme ne soit 1, 2, 3, 5 ou 7.

Soit r la raison. Il s'agit de prouver que r est divisible par 2, 3, 5 et 7.

D'après le théorème précédent, r est divisible par $2 \times 3 \times 5$.

De plus, aucun des sept nombres, a, b, c, d, f, g, h n'étant divisible par 7, deux d'entre eux, divisés par 7, donneront le même reste.

Soient c et h; leur différence $h - c = 3r$ est divisible par 7, et par suite r est divisible par 7.

Donc enfin, r est divisible par $2 \times 3 \times 5 \times 7$.

275.

Si dans une progression arithmétique, n termes consécutifs sont des nombres premiers absolus (n étant lui-même un nombre premier absolu), la raison de cette progression est divisible par le produit de tous les nombres premiers absolus : $1 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times \ldots \times n$, non supérieurs à n, à moins que le premier terme ne soit un des nombres premiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

Soit r la raison. Prouvons que si la propriété est vraie lorsque la progression a m termes (m étant premier absolu), elle sera encore vraie lorsque la progression aura n termes (n étant le nombre prmier absolu, immédiatement supérieur à m).

En effet, par hypothèse, la raison de la progression qui a m termes est divisible par le produit $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \ldots . \times m$. La raison de la progression qui a n termes (n étant plus grand que m) est à plus forte raison divisible par $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times .. \times m$; je dis que cette raison r est de plus divisible par n.

En effet, aucun des n termes en question n'étant divisible par n, deux d'entre eux, divisés par n, donneront le même reste.

Soient b et k ces deux nombres, plus petits que n.

Leur différence $k - b = pr$ sera divisible par n. Or, p est nécessairement plus petit que n, puisqu'il exprime la différence des rangs qu'occupent dans la progression les termes b et k, tous deux plus petits que n, et comme n est premier absolu, n divise r.

Donc enfin r est divisible par le produit : $1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times \ldots \times n$.

276.

La somme des cubes des n premiers nombres est égal au carré de la somme des n premiers nombres.

On sait que : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Donc :

$$[1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)]^2 - [1 + 2 + 3 + \ldots + n]^2$$
$$= [2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + 2n + (n + 1)] \times [n + 1].$$
$$= 2\,[1 + 2 + 3 + \ldots + n]\,(n + 1) + (n + 1)^2 .$$
$$= \frac{2n\,(n + 1)}{2} \times (n + 1) + (n + 1)^2$$
$$= n\,(n + 1)^2 + (n + 1)^2 = (n + 1)^3 .$$

Donc :

$$(n+1)^3 = [1+2+3+\ldots+(n+1)]^2 - [1+2+3+\ldots+n]^2 .$$

Si dans cette relation nous faisons n sucessivement égal à : 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$, il vient :

$$1^3 = 1^2 .$$
$$2^3 = (1 + 2)^2 - 1^2 .$$
$$3^3 = (1 + 2 + 3)^2 - (1 + 2)^2 .$$
$$4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1 + 2 + 3)^2 .$$

. . . .

$$(n - 1)^3 = [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1)]^2 - [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 2)]^2 .$$
$$n^3 = [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots n]^2 - [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1)]^2 .$$

Ajoutant membre à membre, il vient :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$$
$$= (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2 = \left[\frac{n\,(n + 1)}{2}\right]^2.$$

277.

On ajoute terme à terme deux progressions géométriques de raisons différentes. Démontrez que chaque terme se déduit des deux précédents suivant une loi constante.

Soient :

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots : aq^{n-1} : aq^n : aq^{n+1}$$
$$\div b : br : br^2 : br^3 : \ldots : br^{n-1} : br^n : br^{n+1}$$

ces deux progressions, en les ajoutant terme à terme, on trouve :

$$a + b,\ aq + br,\ aq^2 + br^2,\ \ldots,\ aq^{n-1} + br^{n-1},$$
$$aq^n + br^n,\ ab^{n+1}\ br^{n+1}$$

posons

$$M = aq^{n-1} + br^{n-1} \ (1)$$
$$N = aq^n + br^n \ (2)$$
$$P = aq^{n+1} + br^{n+1} \ (3)$$

Multipliant (2) successivement par q et par r et ajoutant, il vient :

$$N(q + r) = aq^{n+1} + br^{n+1} + arq^n + bqr^n, \text{ ou}$$
$$N(q + r) = (aq^{n+1} + br^{n+1}) + qr\,[aq^{n-1} + br^{n-1}] \text{ ou :}$$
$$N(q + r) = P + qr \times M; \text{ d'où enfin :}$$
$$P = N(q + r) - M \times qr.$$

On obtiendra donc le troisième terme en multipliant le second par la somme des raisons des deux progressions et en retranchant de ce produit le produit du premier par le produit des raisons des deux progressions.

En général, on obtiendra le n^{me} terme en multipliant le $(n - 1)^{me}$ par la somme des raisons des deux progressions, et en retranchant de ce produit le produit du $(n - 2)^{me}$ par le produit des raisons des deux progressions.

278.

Déterminer la somme des produits obtenus en multipliant terme à terme une progression géométrique et une progression arithmétique.

Soient : $\div\!\div$ A : B : C : D : ... : I : K : L.

$\div$ $a.\ b.\ c.\ d.\ ...\ i.\ k.\ l.$

ces deux progressions et z la somme des produits.

On a : $z = a\text{A} + b\text{B} + c\text{C} + d\text{D} + ... + i\text{I} + k\text{K} + l\text{L}$ (1), ou, en exprimant chaque terme de la progression géométrique en fonction du premier terme A et de la raison q.

$$z = a\text{A} + b\text{A}q + c\text{A}q^2 + d\text{A}q^3 + ... + k\text{A}q^{n-2} + l\text{A}q^{n-1} \quad (2).$$

Multipliant (2) par q et soustrayant de (1) il vient :

$$z(1-q) = a\text{A} + (b-a)\,\text{A}q + (c-b)\,\text{A}q^2 + ... + (l-k)\,\text{A}q^{n-1} - l\text{A}q^n \quad (3).$$

Or : $b - a = r,\ c - b = r,\ ...,\ l - k = r.$

Donc (3) devient :

$$z(1-q) = a\text{A} - l\text{A}q^n + r\text{A}q\,[1 + q + q^2 + ... + q^{n-2}].$$

Ou : $z(1-q) = \text{A}\,[a - lq^n] + r\text{A}q\left[\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right].$

D'où : $z = \text{A}\left[\frac{lq^n - a}{q-1} - rq\,\frac{(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}\right].$

279.

Dans quelles progressions par différence existe-t-il un rapport, indépendant du nombre n des termes employés, entre la somme des n premiers termes et la somme des n suivants ?

Soient a le 1er terme, r la raison, S la somme des n 1ers termes, S' la somme des n termes suivants, nous aurons :

$$S = a + (a + r) + (a + 2r) + \dots + [a + (n - 1)r] = \frac{2a + (n-1)r}{2} \times n.$$

$$S' = (a + nr) + [a + (n + 1)r] + \dots + [a + (2n - 1)r] = \frac{2a + (3n-1)r}{2} \times n.$$

D'où : $\frac{S}{S'} = \frac{2a + (n - 1)r}{2a + (3n - 1)r}$ et ce rapport doit être indépendant de n.

Soit q la valeur de ce rapport.

On a : $\frac{2a + rn - r}{2a + 3nr - r} = q$.

D'où : $2a + rn - r = 2aq + 3nrq - rq$.

Ou : $2a(1 - q) - r(1 - q) + rn(1 - 3q) = 0$.

Ou : $(1 - q)(2a - r) + rn(1 - 3q) = 0$.

Il faut donc que l'on ait en même temps :

$$(1 - q)(2a - r) = 0 \text{ et } rn(1 - 3q) = 0.$$

D'où : 1° $r = o$ et par suite $q = 1$.

2° $r = 2a$ et par suite $q = \frac{1}{3}$.

Le 1° est évident.

Du 2° on conclut que la raison de la progression doit être double du premier terme, et l'on aura $S' = 3S$.

280.

Dans une progression géométrique de six termes, la différence des termes extrêmes est plus grande que cinq fois la différence des termes du milieu.

Soit : $\div\!\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$ cette progression. Il s'agit de prouver que l'on a :

$$aq^5 - a > 5\,[aq^3 - aq^2] \text{ ou}$$
$$a\,(q^5 - 1) > 5\,aq^2\,(q-1) \text{ ou } q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 > 5\,q^2.$$

Or (n° 249), on a :

$$\frac{q^4+1}{2} > \sqrt{q^4}, \text{ d'où : } q^4 + 1 > 2\,q^2$$
$$\frac{q^3+q}{2} > \sqrt{q^4}; \text{ d'où : } q^3 + q > 2\,q^2$$
$$\text{et } q^2 = q^2.$$

Ajoutant, il vient : $q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 > 5\,q^2$.

281.

Trouver la somme des doubles produits des n premiers nombres entiers 2 à 2.

Soit S cette somme. On a :

$$\begin{aligned}(1+2+3+4+\ldots+n)^2 = {} & 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2\\ & +2(1\times 2)+2(1\times 3)+\ldots+2(1\times n)\\ & +2(2\times 3)+2(2\times 4)+\ldots+2(2\times n)\\ & +\ldots\\ & +2\times(n-1)\,n.\end{aligned}$$

Donc :

$$(1+2+3+4\ldots+n)^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+\mathrm{S}\ (1)$$

Or : $(1+2+3+4+\ldots+n)^2 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$ (n° 276)

et $1^2+2^2+3^2+4^2+n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ (n° 246)

donc (1) devient : $\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + \mathrm{S}$; d'où :

$$\mathrm{S} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n\,(n+1)\,2n+1)}{6} = \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{12}$$

d'où enfin : $\mathrm{S} = \frac{(n-1)\,(n+1)\,(3n+2)}{12}$.

N. B. $(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2)$ est toujours divisible par 12. En effet $(n-1)\,n\,(n+1)$ est divisible par 6 (T. 49). Si n est impair $(n-1)$ et $(n+1)$ sont pairs et par suite le produit $(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2)$ est divisible par 12 (nº 51).

Si n est pair $3n+2$ est divisible par 2 et le produit proposé est encore divisible par 12.

282.

Si l'on prend la suite des nombres impairs : 1, 3, 5, 7, ... et qu'on la sépare en groupes, dont le 1er ait un terme, le 2e deux termes, le 3e trois termes, etc. Démontrer que la somme des termes d'un même groupe est un cube.

Soient 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc. ces nombres :

Nous aurons :

$$(1)\quad 1 = 1^3.$$
$$(2)\quad 3+5 = 2^3.$$
$$(3)\quad 7+9+11 = 3^3, \text{ etc.}$$

Le 1er terme du nme groupe aura avant lui, $1+2+3+\ldots+(n-1)$ ou $\dfrac{n(n-1)}{2}$ nombres impairs.

Ce premier terme sera donc : $2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ ou $n^2 - n + 1$.

Les autres termes du même groupe seront :

$n^2 - n + 3$, $n^2 - n + 5$, ... et le nme sera $n^2 - n + (2n-1)$.

Donc la somme des termes du n^{me} groupe est :

$$n^2 - n + 1 + n^2 - n + 3 + n^2 - n + 5 + \ldots + n^2 - n + (m-1)$$

$$\text{ou : } \underset{(1)}{\underline{n(n-1)+1}} + \underset{(2)}{\underline{n(n-1)+3}}$$

$$+ \underset{(3)}{\underline{n(n-1)+5}} + \ldots + \underset{(n)}{\underline{n(n-1)+(2n-1)}}.$$

Ou : $n^2(n-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$.

Ou : $n^2(n-1) + n^2$, ou enfin n^3.

283.

Les nombres a et b étant supposés premiers entre eux, si l'on multiplie par b les termes de la progression arithmétique.

(1)$\div$ 1, 2, 3, 4, ..., $(a - 1)$.

et que l'on divise par a les $(a - 1)$ produits :

(2)$\div$ b. $2b$. $3b$. $4b$. ... $(a - 1)b$.

On obtiendra pour restes les $(a - 1)$ termes de la progression (1) dans un certain ordre.

D'abord aucun terme de la progression (2) divisé par a ne donne o pour reste. En effet, soit mb l'un de ces termes. Si a divisait exactement mb, comme a est premier avec b, il faudrait que a divise m ce qui est impossible, car m est plus petit que a.

De plus, deux termes de la progression (2) ne peuvent donner des restes égaux.

En effet, si deux termes mb et nb divisés par a donnaient le même reste, leur différence $b(n - m)$ qui est un terme de la progression (2) divisée par a donnerait o pour reste, ce qui est impossible.

Donc les restes obtenus sont tous différents, ils sont tous plus petits que a, au nombre de $a - 1$, et aucun d'eux n'est nul, donc ces restes sont dans un certain ordre : 1, 2, 3, 4, ..., $(a - 1)$.

284.

a et p étant deux nombres premiers entre eux et n désignant le nombre de nombres premiers avec a et plus petits que p, démontrer que le quotient $\frac{a^n - 1}{p}$ est entier.

En effet, les produits :

$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots,\ ma,\ \ldots,\ (p-1)a,$ (1)

divisés par p, donnent pour reste :

$1, 2, 3, \ldots, m, \ldots (p-1)$. (2) tous premiers avec p (nº 283).

Le produit des nombres (1) est :

$M = a^n \times 1 \times 2 \times 3 \ldots \times m \times \ldots \times (p-1)$, et celui des nombres (2) est :

$M' = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times m \times \ldots \times (p-1)$.

Donc les produits M et M′ divisés par p doivent donner le même reste.

Donc leur différence :

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times m \times \ldots \times (p-1) \times (a^n - 1)$ est divisible par p (T. 66), et comme p est premier avec $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times m \times \ldots \times (p-1)$, p doit diviser $a^n - 1$.

285.

Les nombres a et b étant supposés premiers entre eux et c étant un nombre entier quelconque, si l'on divise par a les termes de la progression arithmétique,

$$(1) \div c.\ c+b.\ c+2b.\ \ldots\ c+(a-b)$$

on obtiendra pour restes, abstraction faite de l'ordre, les nombres :

$$(2) \quad 0, 1, 2, 3, \ldots, (a-1).$$

Soient $c + m'b$ et $c + (m + m')b$ deux termes de la suite (1), leur différence mb ne peut être divisible par a, puisque ce nombre est premier avec b et plus grand que m;

donc deux termes de la suite (1) ne peuvent donner le même reste.

D'ailleurs les a nombres de la suite (1) fournissent des restes inférieurs au diviseur a; donc ces restes sont nécessairement les termes de la suite (2).

Conséquence : I. Il y a dans la suite (1) autant de nombre premiers avec a que dans la suite (2). En effet, les nombres (2) ne diffèrent respectivement des nombres (1) que par des multiples de a.

II. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux, c un nombre quelconque, on peut toujours trouver un nombre α tel que $c + \alpha b$ soit divisible par a.

286.

Si a est un nombre entier quelconque non divisible par le nombre premier absolu P, prouver que $a^{P-1} - 1$ est divisible par P.

a étant premier avec P, si l'on divise par P les $P - 1$ nombres :

(1) $a, 2a, 3a, \ldots, (P-1)a$

on obtiendra, abstraction faite de l'ordre, les nombres :

(2) $1, 2, 3, \ldots, (P-1)$ (n° 283).

Donc les nombres (1) ne diffèrent des nombres (2) que par des multiples de P.

Donc le produit des premiers ne peut différer du produit des seconds que par un multiple de P.

Donc la différence :

$[1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (P-1)]\, a^{P-1} - 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (P-1)$, ou $1 \times 2 \times 3 \times \ldots (P-1)\, [a^{P-1} - 1)]$ est divisible par P.

Or $1 \times 2 \times 3 \times \ldots. \times (P - 1)$, n'est pas divisible par P qui est un nombre premier absolu, donc p divise $a^{P-1} - 1$.

287.

Si P est un nombre premier absolu, démontrer que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (P - 1) + 1$ est divisible par P.

Nous savons que si a désigne un des nombres : 1, 2, 3, ..., $(P - 1)$, (1) et que si l'on divise par P [P étant premier avec a] les produits : a, $2a$, $3a$, ..., $(P - 1)a$ (2), on obtient pour reste $P - 1$ nombres qui forment la série (1). Donc parmi les produits de la série (2), il y en a un et un seul qui, divisé par P, donne 1 pour reste ; soit ma ce produit, en sorte que $ma - 1$ est divisible par P.

[S'il arrivait que $m = a$, $a^2 - 1$ sera divisible par P ; donc $a + 1$ ou $a - 1$ doit être divisible par P ; ce qui ne peut avoir lieu que pour autant que a soit 1 ou égal à $P - 1$, puisque a est inférieur à P.]

Il résulte de là que les nombres de la suite (1), abstraction faite du premier terme et du dernier, peuvent être associés deux à deux, de manière que le produit de deux *associés* soit égal à l'unité, augmentée d'un multiple de P. Par conséquent : le produit, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (P - 2)$, est lui-même égal à un multiple de P augmenté de 1 à $KP + 1$ par exemple, et en multipliant $KP + 1$ par $P - 1$ on voit que le produit total $1 \times 2 \times 3 \ldots \times (P - 2) \times (P - 1)$ $= (KP + 1)(P - 1) = K'P - 1$ est égal à un multiple de P diminué de 1. Donc, enfin, $K'P - 1 + 1$ ou $K'P$ est divisible par P.

N. B. Si P n'était pas premier absolu, le théorème ne serait plus vrai. En effet, admettons que $P = m . \alpha$.

Le produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (P - 1)$ sera divisible par α, donc la somme $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (P - 1) + 1$ n'admettra pas le facteur α et ne sera pas divisible par P.

Conséquence : Pour reconnaître si P est nombre premier, ajoutez 1 au produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (P - 1)$, et si la somme obtenue est divisible par P, P est premier.

288.

Pour faire passer un nombre de la base B dans la base B^m, il suffit de partager le nombre en tranches de m chiffres à partir de la droite et d'exprimer chaque tranche en chiffres de la nouvelle base.

Soit à passer dans la base B^3 le nombre $N = a + Bb + B^2c + B^3d + B^4e + B^5f + B^6h + B^7i + B^8k + \ldots.$ écrit dans la base B.

Ce nombre peut s'écrire :

$(a + Bb + B^2c) + B^3(d + Be + B_2f) + B^6(h + Bi + B^2k) + \ldots.$ et relativement à la base B^3 les parties $a + Bb + B^2c$, $d + Be + B^2f$, $h + Bi + B^2k$, représenteront le chiffre des unités, celui des dizaines et celui des centaines. En effet, chacune de ces parties est respectivement plus petite que B^3, B^6, B^9 et en l'exprimant au moyen des chiffres de la base B^3, on aura le nombre cherché.

Ainsi le nombre 32121 écrit dans la base 4, s'écrira : 3 (21) (21) ou 399 dans la base 4^2, et (32) (121) ou (14) (25) dans la base 4^3. [(14) et (15) désignant des chiffres dans la base 4^3].

289.

Dans un système de numération de base B, la dif-

férence entre un nombre de trois chiffres et ce nombre renversé est divisible par $B + 1$ et par $B - 1$.

Soit : $a + bB + cB^2$ ce nombre. Le nombre renversé est : $aB^2 + bB + c$. La différence de ces deux nombres est :

$aB^2 + bB + c - cB^2 - bB - a$, ou $a(B^2 - 1) - c(B^2 - 1)$, ou enfin $(B^2 - 1)(a - c)$, ce qui démontre le théorème, car $(B^2 - 1)(a - c) = (B + 1)(B - 1)(a - c)$.

290.

Dans tout système de numération, le double du nombre qui précède la base et le carré de ce nombre s'écrivent avec les mêmes chiffres pris en ordre inverse.

Soit B la base du système.

On a : 1° $2(B - 1) = 2B - 2 = B + (B - 2)$.

Or B étant la base, le chiffre des dizaines de ce nombre est 1 et le chiffre des unités est $B - 2$;

2° $(B - 1)^2 = B^2 - 2B + 1 = B(B - 2) + 1$.

Or B étant la base : $B - 2$ est le chiffre des dizaines de ce nombre et 1 est le chiffre des unités.

291.

B étant la base d'un système de numération, les produits de $B - 1$ par deux nombres entiers dont la somme est $B + 1$ s'écrivent avec les mêmes chiffres pris en ordre inverse.

Soient : m et $B + 1 - m$ ces deux nombres.

On a : 1° $(B - 1) \times m = Bm - m$

$$= Bm - B + B - m$$

$$= B(m - 1) + (B - m)$$

Or B étant la base, $m - 1$ est le chiffre des dizaines et $B - m$ est le chiffre des unités de ce nombre;

2° $(B - 1)(B + 1 - m) = B^2 + B - mB - B - 1 + m$

$$= B(B - m) + (m - 1)$$

Or B étant la base, $m - 1$ est le chiffre des unités et $B - m$ le chiffre des dizaines de ce nombre.

292.

Dans un système de numération de base B, les nombres $B - 1$ et $B + 1$ jouissent de propriétés analogues aux nombres 9 et 11 dans le système décimal.

Soit $N = a + bB + cB^2 + dB^3 + \ldots$ un nombre écrit dans la base B et dont les chiffres sont : a, b, c, d, ...

1°

Ce nombre peut s'écrire :

$$N = a + b + c + d +$$
$$+ (B - 1)b + (B^2 - 1)c + (B^3 - 1) + \ldots$$

Or tous les nombres de la seconde ligne sont divisibles par $B - 1$. Donc le nombre N est égal à un multiple de $B - 1$, augmenté de la somme des chiffres du nombre; donc, etc.

2°

Ce nombre peut s'écrire :

$$N = a - b + c - d + \ldots$$
$$+ (B + 1)b + (B^2 - 1)c + (B^3 + 1)d + \ldots$$

Or tous les nombres de la seconde ligne sont divisibles par $B + 1$. Donc le nombre N est égal à un multiple de $B + 1$ augmenté de la somme des chiffres de rang impair, et diminué de la somme des chiffres de rang pair; donc, etc.

293.

d étant un diviseur de $B^m - 1$, chercher le caractère de divisibilité par *d*, d'un nombre écrit dans la base B.

Soit $N = a + bB^m + cB^{2m} + dB^{3m}$ un nombre écrit dans la base B, et admettons que a, b, c, d représentent les tranches de m chiffres, prises de droite à gauche, et en valeur absolue, la dernière tranche à gauche pouvant avoir moins de m chiffres.

Ce nombre peut s'écrire :

$$\begin{aligned} N = a + b \qquad\qquad & + c \qquad\qquad\qquad + d \\ + b\,(B^m - 1) & + c\,(B^{2m} - 1) + d\,(B^{3m} - 1). \end{aligned}$$

La seconde partie du nombre N est évidemment divisible par $B^m - 1$; si donc la première partie l'est, le nombre lui-même le sera.

Or la première $a + b + c + d$ représente la somme des tranches de m chiffres, prises de droite à gauche. Donc si la somme de ces tranches, prises en valeur absolue, est divisible par $B^m - 1$, le nombre N sera divisible par $B^m - 1$ et par suite par *d* diviseur de $B^m - 1$.

294.

d étant un diviseur de $B^m + 1$, chercher le caractère de divisibilité par d, d'un nombre écrit dans la base B.

En admettant les hypothèses du théorème précédent, on obtient :

$$N = a - b \qquad + c \qquad - d$$
$$+ b(B^m + 1) + c(B^{2m} - 1) + d\,(B^{3m} + 1)$$

La seconde partie de N est divisible par $B^m + 1$. Si donc la première partie l'est, le nombre lui-même le sera.

Or, la première partie $a - b + c - d$ représente la somme des tranches de rang impair, moins la somme des tranches de rang pair de m chiffres, prises de droite à gauche.

Donc si cette différence est divisible par $B^m + 1$, le nombre N sera divisible par $B^m + 1$ et par suite par d diviseur de $B^m + 1$.

295.

Chercher le caractère de divisibilité par un diviseur quelconque d, d'un nombre écrit dans la base B.

La marche est analogue à celle qui a été suivie au n° 77.

296.

Un nombre écrit dans la base B est divisible par $m\text{B} + 1$, lorsque la partie des dizaines moins m fois le chiffre des unités simples est divisible par $m\text{B} + 1$.

Soit $N = d\,B^3 + c\,B^2 + b\,B + a$ un nombre écrit dans la base B.

Ce nombre peut s'écrire :

$N = B\,(d\,B^2 + c\,B + b) + a + m\,Ba - m\,B\,a.$

Ou $N = B\,(d\,B^2 + c\,B + b - ma) + a\,(m\,B + 1).$

Or, mB + 1 divise $a\,(m\text{B} + 1)$, donc s'il divise B $(d\text{B}^2 + c\text{B} + b - ma)$ il divisera N. Or, mB + 1 est premier avec B (n° 111), donc mB + 1 doit diviser $d\text{B}^2 + c\text{B} + b - ma$.

Donc enfin, si mB + 1 divise $d\text{B}^2 + c\text{B} + b - ma$, il divisera N.

N. B. Dans la base 10 ; $21 = 2 \times 10 + 1$. Donc un nombre est divisible par 3, 7 ou 21 lorsque la partie des dizaines moins deux fois le chiffre des unités est nulle ou divisible par 3, 7 ou 21.

297.

Un nombre écrit dans la base B est divisible par mB — 1, lorsque la partie des dizaines plus m fois le chiffre des unités simples est divisible par mB — 1.

La démonstration est identiquement la même que celle du théorème précédent.

On trouve : $N = B\,(d\text{B}^2 + c\text{B} + b + ma) - (m\text{B} - 1).$

N. B. Dans la base 10 ; $19 = 2 \times 10 - 1$.

Donc un nombre est divisible par 19 lorsque la partie des dizaines plus deux fois le chiffre de ses unités est divisible par 19.

298.

Dans tout système de numération à base B, si D est un nombre premier et si de plus D est premier avec B,

$\frac{1}{D}$ réduite en décimale donne une période divisible par B — 1.

En effet, posons : $B - 1 = \alpha$ et soit :

$$\frac{1}{D} = 0, abc \ldots fabc \ldots f,$$

$$\text{Ou : } \frac{1}{D} = \frac{abc \ldots f}{\alpha\alpha\alpha \ldots \alpha},$$

$$\text{D'où : } 1 = \frac{abc \ldots f \times D}{\alpha\alpha\alpha \ldots \alpha};$$

Donc, il faut que $abc \ldots f$ soit divisible par α.

Conséquence : soit N un nombre entier premier avec D et avec B — 1 la période de $\frac{N}{D}$ est divisible par B — 1.

299.

Un nombre écrit dans la base 12 est terminé par un zéro. Ce nombre peut-il être carré parfait et à quelle condition ?

Soient : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b les chiffres du système duodécimal.

Le carré d'un nombre de la base 12 est terminé par l'un des chiffres :

1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, 1 (nº 26).

Donc un nombre terminé par un 0 peut être carré parfait.

Ce carré provient d'un nombre de la forme : $12n + 6$.

Le carré de $12n + 6$ est $144n^2 + 144n + 36$ ou $100n^2 + 100n + 30$ dans la base 12.

Donc pour qu'un nombre terminé par un 0 et écrit dans le système duodécimal puisse être carré parfait, il faut que le chiffre des dizaines soit 3.

300.

Soient $B^m - 1$ un nombre écrit dans la base B et *abcdef* un nombre N de *m* chiffres écrit dans la même base (si N avait moins de *m* chiffres, il faudrait écrire un ou plusieurs zéros à sa gauche pour obtenir *m* chiffres). Soient N′ le nombre obtenu en enlevant le premier chiffre à gauche de N pour le transporter à sa droite, N″ le nombre obtenu en enlevant de même le premier chiffre à gauche de N′ pour l'écrire à sa droite, etc. Démontrer que tout diviseur commun des nombres $B^m - 1$ et N est diviseur des nombres N′, N″, ...

Par exemple : 7 qui divise 999 999 et 247 947, divise aussi les cinq nombres : 479 472, 794 724, 947 247, 472 479, 724 794.

Admettons que le nombre *a b c d e f* et le nombre $B^m - 1$ aient le facteur *d* commun. Faisons passer *a* à la première place ; le nombre *b c d e f a* = N′ ainsi obtenu égale évidemment :

$abcdef \times B + a - a B^m$, d'où $N' = N \times B - a(B^m - 1)$.

Or, *d* divise N et $B^m - 1$, par hypothèse, donc il divise N′.

TABLE DES MATIÈRES.

A.d.

Ad.