

Haborski
GEORJA
Krzywóych

1

A.K.
Nr. 13

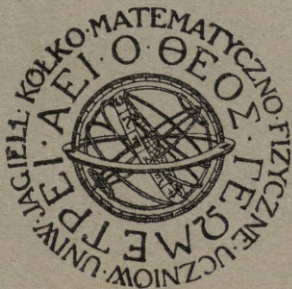


BIBLIOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr. 3
POD REDAKCJĄ
PROF. DRA WITOLDA WILKOSZA

DR. A. HOBORSKI
PROFESOR AKADEMJI GÓRNICZEJ

TEORJA KRZYWYCH

CZEŚĆ I.



KRAKÓW 1933
www.rcin.org.pl

opis nr 48184

BIBLIOTEKAZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr. 3
POD REDAKCJĄ
PROF. DRA WITOLDA WILKOSZA

DR. A. HOBORSKI
PROFESOR AKADEMJI GÓRNICZEJ

TEORJA KRZYWYCH

CZEŚĆ I.



KRAKÓW 1933

NAKLADEM KÓŁKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO U. U. J.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA I WOLFFA
Warszawa — Kraków — Lublin — Łódź — Poznań — Wilno — Zakopane

Archiwum 4 pierwszej redakcji: zaczątkiem pisać
d. 18 lipca 1932, 4 drugiej redakcji: zakoń-
czyłem d. 2 lutego 1933 o godz. 10³⁰ przed
południem; recenzję (3cia redakcja) zakończyłem
d. 24 września 1933 o godz. 8 rano.

opis m 48184



8.511

CZCIONKAMI DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE

PRZEDMOWA.

Pełny tytuł niniejszego podręcznika jest następujący: *Geometria różniczkowa: Teoria krzywych rzeczywistych i regularnych w R_2 i R_3* . Stąd zrozumiałe, że podręcznik wyklucza krzywe zespolone, że zajmuje się krzywymi przedstawionymi rzeczywistym parametrem i że *nie* zakłada, iż krzywe są analityczne. Założenie analityczności krzywych jest bowiem dopiero wtedy koniecznym, gdy zmienna niezależna przyjmuje wartości zespolone; tymczasem przypadek ten z góry wykluczyłem, bo nawet funkcje, w poniższych rozumowaniach zachodzące, są stałe rzeczywiste (poza jednym wyjątkiem w IV § 6).

Niniejszy podręcznik, obejmujący — jak z powyższego widoczne — pewne działy klasycznej geometrii różniczkowej krzywych, powstał z wykładów, które od kilku lat wygłaszam w Uniwersytecie Jagiellońskim. Pierwsze z tego zakresu wykłady zostały opublikowane w r. 1924, jako skrypt litografowany, wydany przez Kółko mat.-fizyczne U. U. J., a zredagowany przez p. Dr. St. Gołąba. Była to — jak się zdaje — pierwsza próba ścisłego i poprawnego ujęcia podstawowych rozważań geometrii różniczkowej krzywych, rozważań, zwykle podawanych, bez należytych założeń. Na co po raz pierwszy zwrócił uwagę geometrów E. Study w r. 1909.

Niniejszy podręcznik odbiega od owego skryptu pod kilku względami. Kiedy bowiem skrypt posługiwał się wyłącznie metodą analityczną, to w niniejszym podręczniku dowodzę twierdzeń metodą wektorjalną lub cynematyczną (rzadko czysto analityczną); nadto od samego początku (t. j. od IIgo rozdziału) przy t. zw. rozważaniach

IV

granicznych używam rozwinięcia Peany.¹ Również i co do zakresu treści niniejszy podręcznik nie pokrywa się z cytowanym skryptom.

Ze względów praktycznych treść podręcznika została rozbita na dwie części: kiedy część pierwsza zawiera podstawy teoretyczne i kilka przykładów, to część druga podaje znaczną ilość różnorodnych zagadnień geometrycznych, jako zastosowanie ogólnych metod: analitycznej, wektorjalnej i cynematycznej.

Ponieważ szczegółowy układ treści jest widoczny ze spisu rzeczy, więc ograniczam się do zaznaczenia, że w rozdziale pierwszym (wstępnym) streszczam zasady teorii wektorów, zostawiając na uboczu pełny jej wykład, odpowiadający dzisiejszym wymaganiom; podobnie nie wykładam cynematyki mimo, iż niejedno pojęcie i twierdzenie z teorii ruchu jest niezbędne.

W rozdziałach II i III przedstawiam klasyczną teorię krzywych przestrzeni euklidesowej R_3 ; odstępuję temsamem od powszechnego zwyczaju rozpoczynania wykładu od teorii krzywych płaskich, o których mówię przygodnie i kilkakrotnie, ale zawsze tak, by się nie powtarzać i czytelnika nie nużyć. O ile to było dopuszczalne, piszę niektóre wywody w stylu „telegraficznym“!

* * *

Korekta należy do obowiązków bardzo przykrych i dość mozolnych; ilość przeoczonych błędów staje się tylko wtedy drobną, gdy autor w pracy korektorskiej nie polega tylko na sobie samym. Otóż miło mi, jak najserdeczniej, podziękować P. Dr. Fr. Leji, Profesorowi Politechniki Warszawskiej za rewizję gotowych arkuszy; wyniki tej rewizji wyzyskałem w Spisie błędów, na który zwracam uwagę czytelnika. Przy drugiej korekcie każdego

¹ O rozwinięciu Peany dowiedziałem się od nieodżałowanej pamięci prof. J. Sleszyńskiego. Zob. A. Hoborski: Wyzsza Matematyka. Cz. II (1923), str. 589.

W tym celu należy przede wszystkim...

W tym celu należy przede wszystkim...

W tym celu należy przede wszystkim...

W tym celu należy przede wszystkim...

W tym celu należy przede wszystkim...

... w tym celu ...

... w tym celu ...

... w tym celu ...

... w tym celu ...

... w tym celu ...

... w tym celu ...

arkusza był mi wielce pomocnym p. Dr. St. Gołb. Docent U. J., którego za to na tym miejscu gorąco wystąpiam podziękowaniem. P. M. Kłosewiczowi, Studentowi hutnictwa A. G. szczególnie dziękuję za pięknie i starannie wykonane rysunki.

Z dwóch tomów w podręcznik pierwszy wydał Kółko mat. Hycerus U. U. J., którym dziękuję, jako wydawcy; drugi tomik wydał stałm składem.

Wymy podziękowanie za starannie druk i uwzględnienie niektórych szczegółów natury typograficznej należą się z jednej strony Drukarni Narodowej (za druk Części I) i Drukarni Hutniczej (za druk Części II). Kłopoty z kolorem wykonania bardzo życzliwie wykręślił Pan Fotochemia.

Przebrzegłem stale zasady: *non multa sed multum*. Zasada ta jednak nie wyklucza podania liczących sobie nawet podziałów, pojęć i twierdzeń; zastosowanie było bowiem starczy do pogłębienia zrozumienia owych pojęć i twierdzeń, a ich wielość ma okazać wykład i uzyć się go może „dobyć”.

Przy wyborze materiału podległowałem się wielu podopiecznym autorów zagranicznych: oto spis dzieł, z których korzystałem.

- 1) Encyklopedie der math. Wissenschaften; v. B. Neumann, Neudamm, Leipzig, Bd. III 1, Heft 1; v. G. Schubert, Neudamm, Neudamm, Bd. III 1, Heft 2/3.
- 2) J. Steiner, Lectures de geometria differentielle, Vol. I.
- 3) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I (1921).
- 4) K. Ciesar, Vorlesungen über natürliche Geometrie (1901).
- 5) S. Darboux, Leçons sur la géométrie générale des surfaces, Paris.

arkusza był mi wielce pomocnym p. Dr. St. Gołąb, Docent U. U. J., któremu za to na tem miejscu gorące wyrażam podziękowanie. P. M. Kłosowiczowi, Studentowi hutnictwa A. G. serdecznie dziękuję za pięknie i starannie wykonane rysunki.

Z dwóch tomików podręcznika pierwszy wydaje Kółko mat.-fizyczne U. U. J., któremu dziękuję, jako wydawcy; drugi tomik wychodzi moim nakładem.

Wyrazy podziękowania za staranny druk i uwzględnienie moich życzeń natury typograficznej należą się z mej strony Drukarni Narodowej (za druk Części I) i Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego (za druk Części II). Klisze do rysunków wykonała bardzo starannie krakowska firma: Fotochemia.

* * *

Przestrzegałem stale zasady: *non multa sed multum*. Zasada ta jednak nie wyklucza podania licznych zastosowań podstawowych pojęć i twierdzeń; zastosowania będą bowiem służyły do pogłębienia zrozumienia owych pojęć i twierdzeń, a ich wielość ma ożywić wykład i uczynić go mniej „suchym“.

Przy wyborze materiału posługiwałem się wielu podręcznikami autorów zagranicznych; oto spis dzieł, z których korzystałem:

- 1) Enzyklopädie der mat. Wissenschaften: a) *H. Mangoldt*. Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Kurven u. Flächen. Bd. III 3, Heft 1; b) *G. Scheffers*. Besondere transzendente Kurven. III 3, Heft 2/3.
- 2) *L. Bianchi*: Lezioni di geometria differenziale. Vol. I.
- 3) *W. Blaschke*: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd. I. (1921).
- 4) *E. Césaro*: Vorlesungen über natürliche Geometrie. (1901).
- 5) *G. Darboux*: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Première partie 1887.

- 6 *G. Demartres*: Cours de géométrie infinitésimale (1913).
- 7) *L. P. Eisenhart*: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces.
- 8) *G. Scheffers*: Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. (1921).
- 9) *C. F. Weatherburn*: Differential geometry of three dimensions. Vol. I.

* * *

Niniejszy podręcznik przeznaczony jest w pierwszym rzędzie dla Studentów Uniwersyteckich; nie wymaga wielkiego przygotowania, bo tylko znajomości *podstaw geometrii analitycznej i analizy*.¹

Podręcznik spełni swe zadanie, jeżeli choć trochę zwiększy zainteresowanie dla Geometrii różniczkowej.

A. Hoborski.

Niskołyży—Medynia—Pawełcze

18. VII. 1932 — 30. IX. 1933.

¹ Znak I 30 lub IV 45 itd. oznacza wzór 30-ty z rozdz. I lub wzór 75-ty z rozdz. IV. Znak (20) lub (87) oznacza wzór 20-ty lub 87-ty rozdziału, w którym się cytat znajduje.

SPIS RZECZY

CZEŚĆ I.

Rozdział I. Wstęp.

	Str.
§ 1. Przedmiot badań. Założenia o krzywej . . .	1
§ 2. Ruch euklidesowy	3
§ 3. Charakterystyka teorii krzywych	17
§ 4. Wektorjalne równanie krzywej	19
§ 5. Algebraiczne działania na wektorach	20
§ 6. Własności iloczynów skalarnych i wektorjalnych	37
§ 7. Z analizy wektorów	39
§ 8. Pojęcie wektora w R_3	48
§ 9. Prędkość ruchu	50
§ 10. Ruch śrubowy	55
§ 11. Nieruchome elementy	61

Rozdział II. Elementy pierwszego rzędu.

§ 1. Punkty wielokrotne krzywej C	67
§ 2. Styczna do krzywej C	69
§ 3. Łuk krzywej C	75
§ 4. Płaszczyzna normalna	81
§ 5. Położenie punktów krzywej C względem stycznej i płaszczyzny normalnej	83
§ 6. Krzywe dane nie parametrycznie	92
§ 7. Wyróżnienie układu ruchomego	94

Rozdział III. Elementy drugiego i trzeciego rzędu.

§ 1. Plan dalszych rozważań	96
§ 2. Krzywe płaskie	98
§ 3. Płaszczyzna ściśle styczna	101
§ 4. Trójścian i trójkramię, związane z krzywą	107
§ 5. Prosta biegunowa	108
§ 6. Normalna główna, jako oś	114
§ 7. Binormalna (jako oś)	118
§ 8. Łuk, jako parametr	121
§ 9. Linje proste w R_3	124
§ 10. Pierwsza krzywizna krzywej	126

	Str.
§ 11. Wzory Freneta	132
§ 12. Druga krzywizna	137
§ 13. Jeszcze o krzywych płaskich	144
§ 14. Ostateczne wyróżnienie układu ruchomego	150
§ 15. Dwa ruchome układy	156

Rozdział IV. Dalsze zagadnienia.

§ 1. Rozważania graniczne	159
§ 2. Przykłady	168

CZĘŚĆ II.

§ 3. <i>Szczególne kategorie krzywych</i>	1
a) Krzywe płaskie	1
b) Krzywe sferyczne	21
c) Linje śrubowe	25
d) Krzywe Bertranda	29
e) Przekształcenie Combescure (krzywe sta- lej pierwszej lub drugiej krzywizny)	42
f) Krzywe spodkowe	51
g) Ruletki	68
h) Krzywe analityczne	79
§ 4. <i>Odwzorowanie krzywej</i>	81
a) Przekształcenie krzywej na krzywą spod- kową	81
b) Przekształcenie przez promienie od- wrotne	82
c) Odwzorowanie kuliste przy pomocy stycznych	91
d) Odwzorowanie kuliste przy pomocy nor- malnych głównych	96
e) Odwzorowanie kuliste przy pomocy bi- normalnych	102
f) Przekształcenie przez biegunowe koła	106
§ 5. Jednoparametrowa rodzina płaszczyzn	108
§ 6. Naturalne równania krzywych	120
§ 7. Niezmienniki różniczkowe krzywych	145
§ 8. Dalsze zagadnienia	157
Spis omyłek druku	189

Wydział I

Wstęp

Przedmiotem badań. Zakładają o krzywej...
...wzajemnie prostopadłych, mierzalowa R_2 , odnie-
...w osiach osi ortogonalnych (x, y, z) .
...funkcje $x(t), y(t), z(t)$
...funkcji jednej zmiennej, co-
...funkcji $f(x, y, z)$ tych
...funkcji jedno z następujących

...ciąg w przedziale
... $a < b$.
...funkcja ciągła po-
... $[a, b]$ czyli w $[a, b]$ na-
... B, C, \dots lub
...funkcja będzie m-

...przez R_2 w przedziale
... $t \in [a, b]$
...krzywej, która jest funkcją
...powierzchni, której
...dwie części, które wykluczają
...przekrój powierzchni krzy-
...w przedziale $[a, b]$
...funkcji $f(x, y, z)$ w
...funkcji $f(x, y, z)$ w przed-

1.1	Wstęp	10
1.2	Opis ogólny	15
1.3	Opis szczegółowy	20
1.4	Opis techniczny	25
1.5	Opis eksploatacyjny	30
1.6	Opis bezpieczeństwa	35
1.7	Opis środowiska	40
1.8	Opis zgodności	45
1.9	Opis załączników	50
1.10	Opis dodatkowych informacji	55
1.11	Opis zmian	60
1.12	Opis innych dokumentów	65
1.13	Opis symboliki	70
1.14	Opis skróconych nazw	75
1.15	Opis skrótów	80
1.16	Opis literatury	85
1.17	Opis norm	90
1.18	Opis przepisów	95
1.19	Opis wytycznych	100
1.20	Opis innych dokumentów	105
1.21	Opis dodatkowych informacji	110
1.22	Opis zmian	115
1.23	Opis innych dokumentów	120
1.24	Opis dodatkowych informacji	125
1.25	Opis zmian	130
1.26	Opis innych dokumentów	135
1.27	Opis dodatkowych informacji	140
1.28	Opis zmian	145
1.29	Opis innych dokumentów	150
1.30	Opis dodatkowych informacji	155
1.31	Opis zmian	160
1.32	Opis innych dokumentów	165
1.33	Opis dodatkowych informacji	170
1.34	Opis zmian	175
1.35	Opis innych dokumentów	180
1.36	Opis dodatkowych informacji	185
1.37	Opis zmian	190
1.38	Opis innych dokumentów	195
1.39	Opis dodatkowych informacji	200
1.40	Opis zmian	205
1.41	Opis innych dokumentów	210
1.42	Opis dodatkowych informacji	215
1.43	Opis zmian	220
1.44	Opis innych dokumentów	225
1.45	Opis dodatkowych informacji	230
1.46	Opis zmian	235
1.47	Opis innych dokumentów	240
1.48	Opis dodatkowych informacji	245
1.49	Opis zmian	250
1.50	Opis innych dokumentów	255
1.51	Opis dodatkowych informacji	260
1.52	Opis zmian	265
1.53	Opis innych dokumentów	270
1.54	Opis dodatkowych informacji	275
1.55	Opis zmian	280
1.56	Opis innych dokumentów	285
1.57	Opis dodatkowych informacji	290
1.58	Opis zmian	295
1.59	Opis innych dokumentów	300
1.60	Opis dodatkowych informacji	305
1.61	Opis zmian	310
1.62	Opis innych dokumentów	315
1.63	Opis dodatkowych informacji	320
1.64	Opis zmian	325
1.65	Opis innych dokumentów	330
1.66	Opis dodatkowych informacji	335
1.67	Opis zmian	340
1.68	Opis innych dokumentów	345
1.69	Opis dodatkowych informacji	350
1.70	Opis zmian	355
1.71	Opis innych dokumentów	360
1.72	Opis dodatkowych informacji	365
1.73	Opis zmian	370
1.74	Opis innych dokumentów	375
1.75	Opis dodatkowych informacji	380
1.76	Opis zmian	385
1.77	Opis innych dokumentów	390
1.78	Opis dodatkowych informacji	395
1.79	Opis zmian	400
1.80	Opis innych dokumentów	405
1.81	Opis dodatkowych informacji	410
1.82	Opis zmian	415
1.83	Opis innych dokumentów	420
1.84	Opis dodatkowych informacji	425
1.85	Opis zmian	430
1.86	Opis innych dokumentów	435
1.87	Opis dodatkowych informacji	440
1.88	Opis zmian	445
1.89	Opis innych dokumentów	450
1.90	Opis dodatkowych informacji	455
1.91	Opis zmian	460
1.92	Opis innych dokumentów	465
1.93	Opis dodatkowych informacji	470
1.94	Opis zmian	475
1.95	Opis innych dokumentów	480
1.96	Opis dodatkowych informacji	485
1.97	Opis zmian	490
1.98	Opis innych dokumentów	495
1.99	Opis dodatkowych informacji	500
1.100	Opis zmian	505

Rozdział I.

Wstęp.

§ 1. Przedmiot badań. Założenia o krzywej.

Trójwymiarową przestrzeń euklidesową R_3 odniesmy do układu trzech osi ortogonalnych (x, y, z) . Założmy dalej, że dane są *trzy funkcje* $x(t), y(t), z(t)$ *rzeczywiste, jednowartościowe jednej zmiennej rzeczywistej* t (t. zw. parametru). O funkcjach tych przyjmujemy w przyszłości jedno z następujących założeń:

- ($Z, 0$) funkcje $x(t), y(t), z(t)$ są ciągłe w przedziale zamkniętym $[a, b]$, gdzie $a < b$,
- (Z, n) funkcje $x(t), y(t), z(t)$ posiadają ciągłe pochodne rzędu n -go w $[a, b]$ czyli w $[a, b]$ należą do klasy $C^{(n)}$; przytem $n = 1, 2, 3, \dots$ jest liczbą naturalną, której wielkość będzie zależała od rozważań.

Zbiór punktów x, y, z przestrzeni R_3 o własności:

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

nazywamy *rzeczywistą krzywą*, którą dla krótkości oznaczymy przez C . Oprócz powyższych założeń wprowadzimy jeszcze dwa dalsze, które wykluczają, by punkt uważać za szczególny przypadek krzywej; założenia te podamy w rozdz. II i III.

Z ogółu założeń wywnioskujemy t. zw. *własności krzywych* C . Otóż własności krzywej C można na ogół podzielić na dwa zasadnicze zbiory:

(a) zbiór własności, *zależnych* od położenia krzywej względem rozważanego układu odniesienia (np. krzywa przechodzi lub nie przechodzi przez początek układu, przecina lub nie przecina osi x , jest styczna lub nie jest styczną do osi x , jest styczną lub nie jest styczną do płaszczyzny (x, y) itd.);

(b) zbiór własności, *niezależnych* od położenia krzywej względem rozważanego układu, a więc także *niezależnych* od rozważanego układu odniesienia.

Otóż geometria różniczkowa krzywych zajmuje się zbiorem (b) własności krzywych, które uzyskuje przy użyciu analizy matematycznej. Wyprowadzimy stąd wniosek zasadniczego znaczenia po pewnym przygotowaniu w § 2. Obecnie jeszcze omówimy określenie krzywej C . Jej równania (1) nazywają się parametrycznymi równaniami. Krzywa może być bowiem określona i w inny sposób, a mianowicie może być dana jako przecięcie dwóch powierzchni, wskutek czego dla przekroju krzywej są spełnione dwa równania $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. Każde z tych równań z osobna (przy dość prostych założeniach) daje powierzchnię; w szczególnym przypadku powierzchnie te mogą być walcami: $y = f(x)$, wzgl. $z = g(x)$, o tworzących równoległych do osi z , wzgl. y . Ostatnia postać równań krzywej jest typu (1), dość bowiem położyć $x = t$, aby otrzymać równanie $x = t$, $y = f(t)$, $z = g(t)$ właśnie kształtu (1). Inny szczególny przypadek otrzymamy, gdy uda się (co *nie* zawsze jest możliwe) krzywą przedstawić, jako przekrój walca $F(x, y) = 0$ [o tworzących równoległych do osi z i o kierownicy na płaszczyźnie xy] i płaszczyzny $z = 0$; krzywa taka

jest płaską. Zamiast $F(x, y) = 0$ możemy niekiedy przyjąć równanie walca w postaci *rozwiązanej*: $y = f(x)$; wtedy krzywa płaska ma równania $y = f(x)$, $z = 0$, co znów przez przyjęcie $x = t$ przyjmuje postać: $x = t$, $y = f(t)$, $z = 0$, oczywiście kształtu (1).

Wreszcie zauważmy, że niekiedy wygodniej jest oznaczać współrzędne punktu przez x_1, x_2, x_3 , zamiast przez x, y, z ; przy takich oznaczeniach równania (1) przyjmą postać

$$(1 \text{ bis}) \quad x_i = x_i(t) \quad (a \leq t \leq b), \quad i = 1, 2, 3.$$

w założeniach $(Z, 0)$, (Z, n) należy wtedy $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ zastąpić przez $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$).

§ 2. Ruch euklidesowy. Przestrzeń R_3 odniesmy do dwóch układów prostokątnych osi; współrzędne dowolnego punktu M względem pierwszego układu oznaczmy przez x_i , względem drugiego układu przez x_i^* ($i = 1, 2, 3$). Wiadomo, że jest

$$(2) \quad x_i^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k + a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3),$$

gdzie a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$) są liczbami stałymi t. zn. niezależnymi od x_i ani od x_i^* , a zależnymi jedynie od wzajemnego położenia obu układów odniesienia. Wiadomo, że te współczynniki spełniają związek

$$(3_{1,2}) \quad \sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{ij} = \delta_{kj}, \quad \sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{ji} = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3),$$

przyczem δ_{kj} oznacza liczbę 1, gdy $k = j$, a liczbę 0, gdy $k \neq j$.

Ponadto wiadomo, że kwadrat wyznacznika

$$(4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

równa się jedności. Jeżeli założymy, że oba układy są prawoskrętne, to z dwóch możliwości $\Delta = \pm 1$ zachodzi równość:

$$(5) \quad \Delta = +1.$$

Owóż stale będziemy zakładali, że zachodzi (5).

Związki (2) będziemy w dalszym ciągu rozpatrywać w inny sposób. Kiedy powyżej x_i, x_i^* uważaliśmy za współrzędne *jednego* punktu M względem *dwóch* układów odniesienia, to obecnie założymy, że w R_3 przyjęto tylko *jeden* trójortogonalny układ odniesienia i wobec tego x_i, x_i^* uważać należy za współrzędne *dwóch* punktów M i M^* . Równań (2) nie będziemy więc obecnie uważali za równania określające *zmiianę układu odniesienia*, ale za wzory *przekształcenia*¹ punktu $M(x_i)$ na punkt $M^*(x_i^*)$. Wzory (2) rozbijemy na dwie części:

$$(6) \quad x_i' = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k; \quad (7) \quad x_i^* = x_i' + a_{i4} \quad (i=1, 2, 3).$$

Tw. Eulera. Przekształcenia (6), jeżeli są spełnione (3) i (5), określają t. zw. obrót naokoło osi, przechodzącej przez początek układu odniesienia, albo spoczynek wszystkich punktów R_3 .

Aby to wykazać, znajdziemy punkty ξ_i , które mimo przekształcenia (2) nie zmieniają położenia

¹ Nie rozchodzi się w tym § o to, czy a_{ik} są liczbami („Skok euklidesowy“), czy funkcjami ciągłymi n. p. czasu.

czyli porostają nieruchomo, a) do punktu 0 wla-
 skami

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Tymczasem (5) widoczne, że początek układu (0, 0, 0) jest punktem nieruchomym. Rozważmy wy-
 mierzalnik:

$$W = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{vmatrix}$$

Z latwością czytelnik wykaza, że jest $W \neq 0$,
 gdy porostają punkty, że ze związków (5) i (6) wy-
 stępują związki:

$$(7) \quad \begin{cases} a_{12}x_2 = a_{13}x_3 - a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 = a_{23}x_3 - a_{22}x_2 \end{cases}$$

można słowy: każdy element wyznacznika (4) jest
 równy natomiast do niego w 2 smowów) alge-
 brycznym!

Skoro jest $W \neq 0$, więc układ (6) ma też roz-
 wiązańe różne od zerowego. Aby wszystkie roz-
 wiązańa wyznaczyć, odróżniamy trzy wypadki. Po-

¹ Wartość (10) odwołania się następująco: Pierwszy
 wierz w 2 smowów) przez a_{12} , drugi przez a_{13} , trzeci
 przez a_{11} i otrzymamy wyznacznik w pierwiastku wierzni, na
 który (5) otrzymamy się po jakimś czasie a_{11} , a po dru-
 gim na inny (5) otrzymamy się wyznacznik, który łatwo
 otrzymać (10)

Je $W \neq 0$, można tak wyrazić: mierzony W przez
 $\Delta x(4)$ Kolumna i i-ty wiersz

$$W \cdot \Delta = (-1)^3 \cdot W \text{ czyli } W = -W.$$

(Z pracy magist. p. Juszczyka Wacława. 24/5/1936)

Tworząc różnice

$$A_i = \sum a_{ik} A_k \quad (\text{wzór (13) str. 6)} \quad i=1,2$$

$$A_i = \sum a_{ki} A_k \quad (\text{wzór (14)})$$

otrzymamy

$$\frac{A_1}{a_{23} - a_{32}} = \frac{A_2}{a_{31} - a_{13}} = \frac{A_3}{a_{12} - a_{21}} = \frac{-1}{2 \sin \alpha}$$

3.3.44

por. str. 12.

czyli pozostają nieruchome; są to punkty o własności

$$(8) \quad \xi_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{czyli}$$

$$(9) \quad \begin{cases} (a_{11} - 1)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - 1)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - 1)\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Z układu (9) widoczne, że początek układu ($\xi_i = 0$) jest punktem nieruchomym. Rozważmy wyznacznik:

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} - 1, & a_{12} & , & a_{13} \\ a_{21} & , & a_{22} - 1, & a_{23} \\ a_{31} & , & a_{32} & , & a_{33} - 1 \end{vmatrix}.$$

Z łatwością czytelnik wykaże, że jest $W = 0$, gdy poprzód wykaże, że ze związków (3) i (5) wynikają związki:

$$(10) \quad \begin{cases} a_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}, & a_{12} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}, \\ & a_{13} = a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} \text{ itd.} \end{cases}$$

innemi słowy: każdy element wyznacznika (4) jest równy należącemu do niego w Δ minorowi algebraicznemu¹.

Skoro jest $W = 0$, więc układ (9) ma też rozwiązanie różne od zerowego. Aby wszystkie rozwiązania wyznaczyć, odróżnimy trzy wypadki. Po-

¹ Wzory (10) udowadnia się następująco: Pierwszy wiersz w Δ mnożymy przez a_{11} , drugi przez a_{21} , trzeci przez a_{31} i iloczyny sumujemy w pierwszym wierszu; na mocy (5) otrzymuje się po jednej stronie a_{11} , a po drugiej na mocy (3) otrzymuje się wyznacznik, który łatwo obliczyć itd.

nieważ $W = 0$, więc W , uważane jako macierz, jest rzędu niższego, niż 3, a więc albo rzędu 0^{go} , albo rzędu 1^{go} , albo rzędu 2^{go} . Gdy macierz W jest rzędu 0^{go} , to jest

$$(11) \quad \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, & a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = \\ & = a_{23} = a_{32} = 0 \end{cases}$$

Y W i wtedy widocznie wzory (6) dają $x_i' = x_i$ czyli wszystkie punkty przestrzeni R_3 są nieruchome, zgodnie z twierdzeniem. Niech teraz W będzie rzędu 1^{go} ; wtedy wszystkie wyznaczniki rzędu 2^{go} w W są zerem, co na mocy (3₁) i (10) z łatwością daje znów związki (11) czyli nie może być rzędu 1^{go} . Wreszcie założmy, że macierz W jest rzędu 2^{go} , wtedy istnieje wyznacznik rzędu 2^{go} różny od zera; biorąc odpowiednio dwa z równań (9), będziemy mogli je rozwiązać na dwie z niewiadomych ξ_i i wyrazić je linjowo przez trzecią, która jest temsamem dowolną; a więc wszystkie punkty nieruchome leżą na prostej, którą oznaczmy przez p ; prosta ta przechodzi przez początek układu, wobec czego równanie prostej p w postaci parametrycznej (jako symetrycznej) można przyjąć tak:

$$(12) \quad \xi_i = A_i \cdot \tau \quad (i = 1, 2, 3),$$

gdzie τ oznacza parametr zmienny wzdłuż prostej p , a nie wszystkie A_i są zerami. Stąd i z (8) otrzymujemy, że współczynniki A_i spełniają związki

$$(13) \quad A_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} A_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Związki te mnożymy przez a_{ij} i sumujemy co do (i) ; korzystając z (3₁), otrzymujemy:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^3 a_{ij} A_i = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} a_{ij} A_k = \sum_{k=1}^3 \delta_{kj} A_k = A_j \quad (j=1, 2, 3).$$

Wykażemy teraz, że przekształcenia (6) są obrotem punktu (x_i) na około osi p . W tym celu najpierw bez szkody dla ogólności przez łatwą zmianę parametru τ możemy doprowadzić do tego, że jest

$$(15) \quad \sum_{i=1}^3 A_i^2 = 1.$$

Następnie wprowadzimy układ X_1, X_2, X_3 trój-ortogonalny i prawoskrętny tak, iż za oś X_3 przyjmiemy oś p o dostawach A_1, A_2, A_3 , spełniających (15), nadto początek obu układów ma być wspólny.

Dostawy osi wyznacza tabelka

$$(16) \quad \begin{array}{c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline x_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ x_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ x_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{13} = A_1, \quad A_{23} = A_2, \quad A_{33} = A_3 \\ (A_{i3} = A_i, \quad i = 1, 2, 3) \\ \sum_{i=1}^3 A_{ik} A_{ij} = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3). \end{array}$$

Przeto jest

$$(17) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 A_{ik} X_k, \quad x_i' = \sum_{k=1}^3 A_{ik} X_k',$$

wobec czego z (6) otrzymujemy

$$(18) \quad x_i' = \sum_{k=1}^3 A_{ik} X_k' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = \sum_{j,l} a_{ij} A_{jl} X_l = \sum_{l=1}^3 B_{il} X_l \\ = \sum_{j=1}^3 A_{ij} X_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

gdzie przez B_{il} oznaczyliśmy

$$(19) \quad B_{il} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{jl}.$$

Na mocy (13) i (16) mamy dla $l=3$:

$$(20) \quad B_{i3} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{j3} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_j = A_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wykażemy teraz, że jest $X_3' = X_3$ czyli ruch (6) nie zmienia trzeciej współrzędnej X_3 punktu, a więc punkt pozostaje w tej samej płaszczyźnie prostopadłej do trzeciej (ale nowej) osi układu odniesienia. W tym celu mnożymy (18) przez $A_i = A_{i3}$ i sumujemy co do (i) , skąd z powodu trójortogonalności układu X_i i z powodu (14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} A_{ik} A_{i3} X_k' &= \sum_k \delta_{k3} X_k' = X_3' = \sum_{i,j,l} A_{i3} a_{ij} A_{jl} X_l = \\ &= \sum_{i,j,l} A_i a_{ij} A_{jl} X_l = \sum_{j,l} A_j A_{jl} X_l = \sum_{j,l} A_{j3} A_{jl} X_l = \\ &= \sum_{l=1}^3 \delta_{3l} X_l = X_3, \end{aligned}$$

a więc jest rzeczywiście

$$(21) \quad X_3' = X_3.$$

Stąd i na mocy (20) wzory (18) redukują się do układu

$$(22) \quad \sum_{k=1}^2 A_{ik} X_k' = \sum_{l=1}^2 B_{il} X_l \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pomnożmy (22) przez A_{ij} (gdzie $j = 1$ lub 2) i zesumujmy co do i od 1 do 3; otrzymamy

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ k=1,2}} A_{ij} A_{ik} X_k' &= \sum_{k=1}^2 \delta_{jk} X_k' = X_j' = \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ l=1,2}} A_{ij} B_{il} X_l = \\ &= \sum_{l=1}^2 C_{jl} X_l, \end{aligned} \quad (j = 1, 2)$$

gdzie położyliśmy:

$$(23) \quad C_{jl} = \sum_{i=1}^3 A_{ij} B_{il} \quad (j, l = 1, 2).$$

Do str 12. Wzrosty u Uwagi otrzymuje się tak:

jest $x'_i = \sum_k A_{ik} x'_k$; $x'_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha$, $x'_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$,

$x'_3 = x_3$; $x_j = \sum_k A_{kj} x_k$. Tedy

$$x'_i = (A_{i1} \cos \alpha + A_{i2} \sin \alpha) x_1 + (A_{i2} \cos \alpha - A_{i1} \sin \alpha) x_2 + A_{i3} x_3 = (A_{i1} \cos \alpha + A_{i2} \sin \alpha) \sum_k A_{k1} x_k + (A_{i2} \cos \alpha - A_{i1} \sin \alpha) \sum_k A_{k2} x_k + A_{i3} (A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3) = \sum_k a_{ik} x_k.$$

Stąd

$$a_{ik} = (A_{i1} \cos \alpha + A_{i2} \sin \alpha) A_{k1} + (A_{i2} \cos \alpha - A_{i1} \sin \alpha) A_{k2} + A_{i3} A_{k3} = \cos \alpha \cdot (A_{i1} A_{k1} + A_{i2} A_{k2}) + (A_{i2} A_{k1} - A_{i1} A_{k2}) \sin \alpha + A_{i3} A_{k3},$$

a więc

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cos \alpha + A_{i3} A_{k3} (1 - \cos \alpha) + (A_{i2} A_{k1} - A_{i1} A_{k2}) \sin \alpha$$

Inaczej tak: między \vec{A} będącymi wektorami o składowych (A_1, A_2, A_3) , między \vec{e}_i będącymi wektorami ze str. 21, to

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cos \alpha + (\vec{A} \times \vec{e}_i) \cdot (\vec{A} \times \vec{e}_k) (1 - \cos \alpha) - |\vec{A}, \vec{e}_i, \vec{e}_k| \sin \alpha.$$

[Faint, illegible handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

[Faint, illegible handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

[Faint, illegible handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]

Otrzymaliśmy więc

$$(34) \quad X_j = \sum_{i=1}^2 C_{ij} X_i \quad (j=1, 2).$$

Wykażemy, że (34) określa obrót na około osi X_1 , a więc na około osi y . W tym celu podnieśmy² do kwadratu (18), korzystając z (8) i (16) i sumując względem i , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 A_{ij} X_i \cdot A_{ij} X_j &= \sum_{i=1}^2 \delta_{ij} X_i \cdot X_j = \sum_{i=1}^2 (X_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^2 a_{ij} A_{ij} X_i \cdot a_{ik} A_{ik} X_k = \sum_{i=1}^2 \delta_{ij} A_{ij} X_i \cdot A_{ij} X_i = \\ &= \sum_{i=1}^2 A_{ij} X_i \cdot A_{ij} X_i = \sum_{i=1}^2 \delta_{ij} X_i \cdot X_i = \sum_{i=1}^2 (X_i)^2. \end{aligned}$$

Jest więc

$$\sum_{i=1}^2 (X_i')^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i)^2,$$

co wobec (21) daje

$$(35) \quad \sum_{i=1}^2 (X_i')^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i)^2.$$

Wstawiając tu po lewej wzory (24) [znów mnożąc przez siebie, zamiast podnosząc do kwadratu!], otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 C_{ij} X_i \cdot C_{ij} X_j = \sum_{i=1}^2 (X_i)^2;$$

co wobec (35) jest tożsamością co do X_1, X_2 , więc otrzymujemy stąd:

² Zamiast (17) podnieść do kwadratu możemy je po prostu mnożyć, mnożąc je (pożyczył) wielokrotnie samych siebie.

Otrzymaliśmy więc

$$(24) \quad X_j' = \sum_{l=1}^2 C_{jl} X_l \quad (j=1, 2).$$

Wykażemy, że (24) określa obrót na około osi X_3 , a więc na około osi p . W tym celu podnieśmy¹ do kwadratu (18); korzystając z (3₁) i (16) i sumując względem i , otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,k,j}^{1,2,3} A_{ik} X_k' A_{ij} X_j' = \sum_{j,k} \delta_{kj} X_k' X_j' = \sum_{k=1}^3 (X_k')^2 = \\ & = \sum_{i,j,l,m,q}^{1,2,3} a_{ij} A_{jl} X_l a_{im} A_{mq} X_q = \sum_{j,l,m,q} \delta_{jm} A_{jl} X_l A_{mq} X_q = \\ & = \sum_{j,l,q} A_{jl} X_l A_{jq} X_q = \sum_{l,q} \delta_{lq} X_l X_q = \sum_{l=1}^3 (X_l)^2. \end{aligned}$$

Jest więc

$$\sum_{k=1}^3 (X_k')^2 = \sum_{k=1}^3 (X_k)^2,$$

co wobec (21) daje

$$(25) \quad \sum_{k=1}^2 (X_k')^2 = \sum_{k=1}^2 (X_k)^2.$$

Wstawiając tu po lewej wzory (24) [znów mnożąc przez siebie, zamiast podnosząc do kwadratu!], otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{l,q}^{1,2} C_{kl} X_l C_{kq} X_q \equiv \sum_{k=1}^2 (X_k)^2;$$

równość ta jest identycznością co do X_1, X_2 , więc otrzymujemy stąd:

¹ Zamiast (18) podnieść do kwadratu mnożymy je przez siebie, zmieniając (pozorny) wskaźnik sumacyjny.

$$(26_{1,2,3}) \quad C_{11}^2 + C_{21}^2 = 1, \quad C_{12}^2 + C_{22}^2 = 1, \\ C_{11} C_{12} + C_{21} C_{22} = 0.$$

Na mocy (26_{1,2}) istnieją liczby α, β takie, że jest:

$$(27) \quad \begin{cases} C_{11} = \cos \alpha, & C_{21} = \sin \alpha, & C_{12} = \sin \beta, \\ & C_{22} = \cos \beta, \end{cases}$$

a wtedy (26₃) daje: $\sin(\alpha + \beta) = 0$, a więc istnieje liczba cała n taka, że jest $\alpha + \beta = n\pi$.

Wobec tego (27) przyjmują postać:

$$(28) \quad \begin{cases} C_{11} = \cos \alpha, & C_{12} = (-1)^{n+1} \sin \alpha, & C_{21} = \sin \alpha, \\ & C_{22} = (-1)^n \cos \alpha, \end{cases}$$

gdyż jest $\cos n\pi = (-1)^n$ dla n całkowitych. Aby więc wyznaczyć, czy n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą [gdyż — jak widać z (28) — tylko o to chodzi], obliczmy iloczyn dwóch wyznaczników (mnożąc je wierszami), z których każdy = 1; korzystając z (19) i (20), mamy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & A_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

a więc jest

$$(29) \quad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & A_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Znów pomnożymy dwa wyznaczniki, z których każdy = 1, a mianowicie obliczymy iloczyn wyznaczników, mnożąc je kolumnami:

$$w = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & A_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Otóż przy obliczaniu iloczynu korzystamy z (23) oraz (16); ponadto (14) i (19) dają

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 B_{ij} A_{i3} &= \sum_{i,k} a_{ik} A_{kj} A_{i3} = \sum_{i,k} a_{ik} A_{kj} A_i = \\ &= \sum_k A_k A_{kj} = \sum_k A_{k3} A_{kj} = 0, \text{ gdy } j = 1, 2; \end{aligned}$$

a więc:

$$w = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}.$$

Otrzymaliśmy więc, że

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = +1,$$

czyli na mocy (28):

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha, & (-1)^{n+1} \sin \alpha \\ \sin \alpha, & (-1)^n \cos \alpha \end{vmatrix} = +1,$$

co natychmiast daje, że n jest liczbą parzystą, wobec czego (28) przechodzą we wzory:

$$(30) \begin{cases} C_{11} = \cos \alpha, & C_{12} = -\sin \alpha, & C_{21} = \sin \alpha, \\ & C_{22} = \cos \alpha, \end{cases}$$

a to wykazuje, że (24) jest obrotem naokoło osi X_3 (czyli p) o kąt α .

Uwaga. Nietrudno wykazać, że jest:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha + A_1^2(1 - \cos \alpha), \\ a_{12} &= A_1 A_2(1 - \cos \alpha) - A_3 \sin \alpha, \\ a_{13} &= A_1 A_3(1 - \cos \alpha) + A_2 \sin \alpha, \\ a_{21} &= A_1 A_2(1 - \cos \alpha) + A_3 \sin \alpha, \\ a_{22} &= \cos \alpha + A_2^2(1 - \cos \alpha), \\ a_{23} &= A_2 A_3(1 - \cos \alpha) - A_1 \sin \alpha, \\ a_{31} &= A_1 A_3(1 - \cos \alpha) - A_2 \sin \alpha, \\ a_{32} &= A_2 A_3(1 - \cos \alpha) + A_1 \sin \alpha, \\ a_{33} &= \cos \alpha + A_3^2(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Współczynniki te wyrażają się przez cztery wielkości A_1 , A_2 , A_3 i α , ale istnieje związek (15), więc dowolnych jest tylko 3.

Udowodniliśmy powyżej, że (6) określa obrót, który zależy — jak widać — od 9 współczynników a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$); ale te zależą od trzech dowolnych wielkości, zresztą wykazuje się to zwykle, posługując się t. zw. kątami Eulera, których jest trzy i które są zupełnie dowolne.

Przekształcenia (7) noszą nazwę przeniesień równoległych czyli translacji. Współczynniki a_{i4} ($i = 1, 2, 3$) są zupełnie dowolne.

Każde przekształcenie (2) składa się więc z obrotu naokoło osi, przechodzącej przez początek układu i z translacji, a zależy w całości od 12 współczynników, z których nie wszystkie są dowolne. Obrót zależy bowiem od trzech niezależnych stałych, a translacja od 3 dalszych, więc przekształcenie (2) zależy od 6 stałych dowolnych.

Weźmy więc zbiór (Z) wszystkich przekształceń (2) t. zn. wszelkich możliwych wartości na a_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$), spełniających (3₁) i (5).

Do str. 12: Uwaga. Innowzory na $a_{11} \dots a_{33}$ są: a) wzory nie
wymiarne porządkujące się przez $a_{11} a_{22} a_{33}$, t. zw. Monge'a
zob. Lacroix t. I p. 533; b) wymierne:

$$a_{11} = \frac{1 + \frac{m^2 n^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, a_{12} = \frac{\frac{mn}{2} - p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$a_{13} = \frac{\frac{pm}{2} + n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, a_{21} = \frac{\frac{mn}{2} + p}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, a_{22} = \frac{1 + \frac{n^2 - m^2 - p^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$a_{23} = \frac{\frac{np}{2} - m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, a_{31} = \frac{\frac{mp}{2} - n}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}, a_{32} = \frac{\frac{pn}{2} + m}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}},$$

$$a_{33} = \frac{1 + \frac{p^2 - m^2 - n^2}{4}}{1 + \frac{m^2 + n^2 + p^2}{4}}. \text{ Wzory te podał O. Rodrigues}$$

z Journal de Liouville t. 5 (1840) na str. 405.

Wzory te mał już Euler.

Zob. także Encykl. Teubnera t. III 1 Heft 4, str. 766.

Wzory tu przedstawione są w
Encyklopedji (7) z Encyklopedji.

poza analogicznymi w
 $\mu = A_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \nu = A_3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, otrzymuje

Wzory wymierne wzory

$$a_{11} = \frac{1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}, a_{12} = \frac{2(\nu + \lambda\mu)}{1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}, a_{21} = \frac{2(\nu - \lambda\mu)}{1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

(są to wzory Encyklopedji - wzory Rodrigues - Eulera z uwzględnieniem)
Inny sposób naleziono najłatwiej" zob. Schönflies Rendiconto
del Circolo mat. di Palermo t. 29 (1910) fase. III str. 329. the

Wzory są

$$a_{11} = D^2 + A^2 - B^2 - C^2; a_{12} = 2(AB - CD); a_{13} = 2(AC + BD)$$

$$a_{21} = 2(AB + CD); a_{22} = D^2 + B^2 - A^2 - C^2; a_{23} = 2(BC - AD)$$

$$a_{31} = 2(AC - BD); a_{32} = 2(BC + AD); a_{33} = D^2 + C^2 - A^2 - B^2$$

Wzory Schönflies podaje zwarcie geom. parametrów ABCD:
 $A = \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, B = \cos \beta \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, C = \cos \gamma \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, D = \cos \frac{\omega}{2}$
gł. (αβγ) są, dodat. osi obrótu (α mnie A, A_2, A_3), ω (α mnie α)
łat obrótu. Parametry Schönflies nie są wygodne, bo
 $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$.

A mnie uwzględniam - mierzonymi w nary i Schoflies??

Wzory ze str. 12 znalezem sam! Najdziej - jak
obecnie stwierdzam + książec Gibbs - Wilson Vector
Analysis str. 339.

2/7 1935. J.K.

Zbiór ten ma następującą własność: punkt (x_i) przekształćmy na punkt x_i^* wzorami (2), przy czym są spełnione (3₁) i (5); następnie punkt x_i^* przekształćmy na punkt x_i^{**} przy pomocy przekształceń:

$$(31) \quad x_i^{**} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} x_j^* + b_{i4} \quad (i = 1, 2, 3),$$

przyczem jest

$$(32) \quad \sum_{i=1}^3 b_{ij} b_{il} = \delta_{jl}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = +1 \quad (j, l = 1, 2, 3);$$

współczynniki b_{i4} ($i = 1, 2, 3$) są dowolnymi stałymi. Z (2) i (31) otrzymamy przekształcenie, które wprost punkt x_i przekształca w x_i^{**} , a mianowicie:

$$(33) \quad \begin{cases} x_i^{**} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k + a_{j4} \right) + b_{i4} = \\ = \sum_{k=1}^3 c_{ik} x_k + c_{i4}, \quad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

gdzie położyliśmy

$$(34) \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} a_{jk}, \quad c_{i4} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} a_{j4} + b_{i4} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Twierdzimy, że przekształcenie (33) należy też do zbioru Z . W tym celu trzeba wykazać, że jest:

$$(35) \quad \sum_{i=1}^3 c_{ik} c_{im} = \delta_{km}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

Otóż jest:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 c_{ik} c_{im} &= \sum_{i,j,l} b_{ij} a_{jk} b_{il} a_{lm} = \sum_{j,l} \delta_{jl} a_{jk} a_{lm} = \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{jk} a_{jm} = \delta_{km}, \end{aligned}$$

nadto łatwo stwierdzić, że jest przy mnożeniu wierszami:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

skąd już wynika (35₂) na mocy (5) i (32₂).

Wobec tej własności zbiór Z nazywamy grupą przekształceń i dokładniej: *grupą ruchów euklidesowych*. Nietrudno wykazać czytelnik, że same obroty t. j. przekształcenia (6) tworzą grupę (obrotów), która jest podgrupą grupy ruchów euklidesowych. Podobnie translacje (7) tworzą też podgrupę ruchów euklidesowych.

Na zakończenie powyższych rozważań wykazemy pewną własność ruchów euklidesowych, z której skorzystamy w rozdz. III i IV.

W punkcie $M(x_i)$ niech będą dane trzy osie (t_1, t_2, t_3) trójortogonalne, tworzące zatem trójramię (T) ; niech oś t_j ($j = 1, 2, 3$) ma dostawy kierunkowe $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \beta_{j3}$ i niech (T) tworzy układ prawy osi, gdy t_1 jest pierwszą osią, t_2 drugą, a t_3 trzecią, a więc niech będzie:

$$(36) \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = +1.$$

W punkcie $M'(x_i')$ bierzemy trójkąt T' o osiach t_1', t_2', t_3' , tworzących znów układ prawy i potrójnie ortogonalny; niech β_{ji}' ($i = 1, 2, 3$) oznaczają dostawy kierunkowe osi t_j' ($j = 1, 2, 3$) i niech będzie:

$$(37) \quad \left| \begin{array}{c} \beta_{ji}' \\ i, j = 1, 2, 3 \end{array} \right| = + 1.$$

Wykażemy, że istnieje jednoznacznie określony ruch euklidesowy,¹ który przenosi T' tak, iż nakryje się z T , przyczem t_j' nakryje się z t_j .

Zauważmy najpierw, że szukany ruch euklidesowy ma przenieść M' w M , a więc ma być:

$$(38) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k' + a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Te trzy równania zawierają 12 niewiadomych $a_{11} \dots a_{34}$, które jeszcze mają spełniać (3) i (5); potrzebne więc będą dalsze równania, które otrzymamy z warunków twierdzenia. Aby oś t_j' nakryła się z osią t_j , widocznie potrzeba jeszcze i wystarczy (ponieważ już punkt M' przeszedł w M), by punkt P_j' o współrzędnych $(x_i' + \beta_{ji}')$ ($i = 1, 2, 3$) — (leżący na t_j') przeszedł w punkt P_j o współrzędnych $(x_i + \beta_{ji})$ ($i = 1, 2, 3$); ma więc być:

$$x_i + \beta_{ji} = \sum_k a_{ik} (x_k' + \beta_{jk}') + a_{i4} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

co wobec (38) (przez odjęcie) daje:

$$(39) \quad \beta_{ji} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \beta_{jk}' \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

¹ Właściwie „skok euklidesowy“, bo a_{ik} są liczbami. (Nazwę „skok“ zawdzięcza autor p. Ważewskiemu).

Wykażemy, że (38) i (39) wyznaczają jednoznacznie $a_{11} \dots a_{34}$ i nadto tak, że spełniają (3) i (5).

Ponieważ T' jest ramieniem trójortogonalnem, więc $\sum_{j=1}^3 \beta_{jk}' \beta_{jl}' = \delta_{kl}$; z tego związku zaraz skorzystamy; pomnóżmy bowiem (39) przez β_{jl}' i zsumujmy co do j ; otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^3 \beta_{ji} \beta_{jl}' = \sum_{j,k}^3 a_{ik} \beta_{jk}' \beta_{jl}' = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \delta_{kl} = a_{il}.$$

Wyznaczyliśmy więc 9 współczynników:

$$(40) \quad a_{il} = \sum_{j=1}^3 \beta_{ji} \beta_{jl}' \quad (i, l = 1, 2, 3);$$

pozostałe współczynniki a_{14}, a_{24}, a_{34} wyznaczymy już z łatwością i jednoznacznie z (38). Mamy więc jeszcze tylko wykazać, że współczynniki (40) spełniają (3₁) i (5), [bo (3₂) jest konsekwencją¹ wzorów (3₁)]. Otóż jest

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{il} &= \sum_{i,j,m} \beta_{ji} \beta_{jk}' \beta_{mi} \beta_{ml}' = \sum_{j,m} \delta_{jm} \beta_{jk}' \beta_{ml}' \\ &= \sum_{j=1}^3 \beta_{jk}' \beta_{jl}' = \delta_{kl}, \end{aligned}$$

a więc (3₁) są spełnione. Nadto łatwo na mocy (40) widać, że wyznacznik

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{33} \end{array} \right| = \left| \beta_{ji} \right| \cdot \left| \beta_{il}' \right| = +1.$$

¹ Związki (3₁) i (5) nie są od siebie niezależne w przypadku rzeczywistych współczynników $a_{11} \dots a_{33}$. Zob. A. Hoborski: Remarque relative aux transformations linéaires orthogonales. Rocznik Pol. Tow. Mat. Tom I (1922).

Też można to wyrażenie odwołać do

§ 3. Charakterystyka teorii krzywych. Niech będzie dana krzywa C o równaniach (1), wszystkie punkty tej krzywej podlegają określonej ruchowi euklidesowemu, wskazał czego krzywa C przejdzie w krzywą C' o równaniach

$$x_i' = x_i'(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(t) + a_{i0}(t) \quad (i=1, 2, 3).$$

Ponieważ w nie-konieczności wiele sposobów można obrać współczynniki $a_{ij} \dots a_{i0}$, więc też krzywych C' będzie nieskończenie wiele.

Jak w § 1 podaliśmy, będziemy się zajmowali własnościami krzywej C , które są niezależne od jej położenia w R_3 , czyli własnościami, które są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych. Szukaj więc niezależny własności krzywej C , niezmienniczych dla grupy ruchów euklidesowych.

Na ten jednak nie wyczerpuje się ogólna charakterystyka teorii krzywych. Zauważmy bowiem, że w równaniach (1) krzywej C zachodzi parametr t , który możemy zastąpić przez inny. Podobały bowiem

$$(1) \quad x_i = x_i(t) \quad (i=1, 2, 3)$$

są związane, że

$$(X, 0) \text{ funkcja } \alpha(t) \text{ jest ciągła w przedziale } [a, b], \text{ gdzie } a \leq t \leq b \text{ jest } \alpha(t) \in K, \text{ gdy jest } a \leq t \leq b.$$

¹ Teoria krzywych grupy przemieszczeń to znacznie czytelniej w książce: J. K. B. (1931) Teoria krzywych i skończonych grup przemieszczeń, Warszawa, Państwowa Komisja Matemat. U. B. I. Krasów (1931) Warszawa.

Wykazy, to (38) i (39) wyznaczają jednorodność
 a_1, \dots, a_3 i nadto tak, że spełniają (3) i (5).

Ponieważ T^* jest transformacją trójortogonalną,
 więc $\sum_{i=1}^3 a_i^2 = \sum_{i=1}^3 b_i^2$ i odw. z tego związku oraz z (38)
 otrzymamy; pomnożmy bowiem (38) przez b_1 i z-
 sumujmy do b_1 otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i - \sum_{i=1}^3 a_i b_i = 0$$

Wynaczmy więc 3 współczynniki:

$$a_i = \sum_{j=1}^3 b_j \beta_{ij} \quad (\beta_{ij}, i=1, 2, 3);$$

ponieważ współczynniki a_1, a_2, a_3 wyznaczają
 try i transformację jednorodną z (38). Mając więc
 pewną liczbę wyznaczyć współczynniki (40) spo-
 sobimy (3) i (5) (do (5) jest konieczność) wy-
 znaczyć β_{ij} . Otóż jest

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b_j \beta_{ij} b_i = \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} b_i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} b_j^2 = 0,$$

z (3) są spełnione. Nadto łatwo da się pociągnąć (40)
 dalej, to wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

* Związek (5) i (3) nie są od siebie niezależne w przy-
 padku transformacji ortogonalnej a_1, \dots, a_3 . Zob.
 A. Haber, *Transformacje ortogonalne i transformacje line-
 arne ortogonalne*, Warszawa, Państw. Zakł. Nauk, Tom 1 (1953).

Temsamem twierdzenie udowodnione.¹

§ 3. Charakterystyka teorii krzywych. Niech będzie dana krzywa C o równaniach (1); wszystkie punkty tej krzywej poddajmy określonemu ruchowi euklidesowemu, wskutek czego krzywa C przejdzie w krzywą C^* o równaniach

$$x_i^* = x_i^*(t) = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k(t) + a_{i4} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ponieważ w nieskończenie wiele sposobów można obrać współczynniki $a_{11} \dots a_{34}$, więc też krzywych C^* będzie nieskończenie wiele.

Jak w § 1 podaliśmy, będziemy się zajmowali własnościami krzywej C , które są niezależnymi od jej położenia w R_3 czyli własnościami, które są *niezmiennikami* grupy ruchów euklidesowych. *Szukać więc będziemy własności krzywej C , niezmienniczych dla grupy ruchów euklidesowych.*

Na tem jednak nie wyczerpuje się ogólna charakterystyka teorii krzywych. Zauważmy bowiem, że w równaniach (1) krzywej C zachodzi parametr t , który możemy zastąpić przez inny. Położmy bowiem

$$(41) \quad t = \varphi(t')$$

i załóżmy, że

$(Z', 0)$ funkcja $\varphi(t')$ jest ciągłą w przedziale $[a', b']$, gdzie $a' < b'$ i że jest $a \leq \varphi(t') \leq b$, gdy jest $a' \leq t' \leq b'$;

¹ Teorię ciągłych grup przekształceń znajdzie czytelnik w książce: A. Hoborski: Teoria ciągłych i skończonych grup przekształceń Liego. Nakładem Kółka Matem. U. U. J. Kraków 1930. Kurs litografowany.

(Z', n) funkcja $\varphi(t')$ należy do klasy $C^{(n)}$ w przedziale $[a', b']$, przyczem n oznacza liczbę naturalną; nadto jest $a \leq \varphi(t') \leq b$, gdy jest $a' \leq t' \leq b'$.

Wtedy, kładąc:

$$(42) \quad \begin{cases} x = x(\varphi(t')), & y = y(\varphi(t')), & z = z(\varphi(t')) \\ & (a' \leq t' \leq b'), \end{cases}$$

otrzymamy albo wszystkie punkty krzywej C albo pewien jej „łuk“ [zależec to będzie od tego, czy funkcja $\varphi(t')$ przyjmuje w przedziale $[a', b']$ wszystkie wartości z przedziału $[a, b]$, czy też tak nie jest]. Równania (42) różnią się od równań (1), funkcje $x(\varphi(t)), \dots$ są na ogół różne od funkcji $x(t), \dots$; *tasama* więc krzywa może być przedstawiona różnymi trójkami równań, zależnymi od *wyboru* parametru. Oczywiście chodzić nam będzie o własności krzywej, *niezależne od wyboru parametru*, przy pomocy którego krzywa jest przedstawiona.

A więc *będziemy się zajmowali własnościami krzywej C , które są niezmiennicze względem przekształceń grupy ruchów euklidesowych* (t. zn. szczególnej postaci przekształceń współrzędnych x, y, z) *oraz względem przekształceń parametru* (własności samych przekształceń parametru podamy poniżej w II § 2).

Własności krzywej będą przeważnie polegały na tem, że *przy założeniach, o których będzie mowa w rozdz. II i III, z każdym punktem krzywej zwiążemy pewne punkty, proste, osie, wektory i płaszczyzny*, (t. zw. elementy krzywej) *oraz funkcje, które wyróżnimy niezmienniczo z nieskończonych zbiorów punktów prostych, osi, wektorów, płaszczyzn i funkcyj.*

Nie możemy na tem miejscu bliżej tej sprawy wyjaśnić, zrozumie ją bowiem czytelnik dopiero w toku czytania, podanych w książce rozumowań.¹

Uwaga. Niech A, B oznaczają dwa dowolne punkty w R_3 ; na mocy przekształcenia (2) punkty przejdą w A^*, B^* . Nietrudno stwierdzić, że jest $AB = A^*B^*$ czyli odległość dwóch punktów jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych. Podobnie można wyszukać niezmienniki 3, 4, 5, ... punktów. Niektórymi z nich zajmiemy się szczególnie, przyczem nadamy im postać wektorjalną.

§ 4. Wektorjalne równanie krzywej. W R_3 , odniesionej do potrójnie ortogonalnego układu x, y, z o początku O , niech będzie dana krzywa C o równaniu (1); parametr t wyznacza t. zw. punkt bieżący M na C . Punkt ten dany jest przez swoje współrzędne $x(t), y(t), z(t)$, ale może być także wyznaczony przez wektor \mathbf{OM} , którego² kierunek i długość zależą od M , a więc od t . Jeżeli wektor o początku w O , wyznaczający położenie punktu w R_3 oznaczymy przez \mathbf{r} , to krzywą C zamiast równaniami (1) możemy określić jednym równaniem wektorjalnem:

$$(43) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b, a < b),$$

gdzie więc $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$. Składowe wektora $\mathbf{r}(t)$ w kierunku osi x, y, z czyli rzuty wektora tego na osie są wektorami, mierzącymi się liczbami $x(t), y(t), z(t)$. W tem rozumieniu wzór (43) zastępuje wzory (1).

¹ Powyżej podana charakterystyka odpowiada genialnej idei F. Kleina, przedstawionej po raz pierwszy w jego pracy, znanej pod nazwą Erlanger Programm z r. 1872, przedrukowanej w Math. Annalen t. 43 (1893).

² Wektory będziemy stale oznaczali tłustym drukiem.

Nietrudno stąd wywnioskować, że metoda wektorjalna pozwala rachunki uprościć, o czym przekonamy się poniżej.

Gdy miary składowych $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, jako funkcje parametru t spełniają założenia $(Z, 0)$ lub (Z, n) z § 1, to mówić będziemy, że wektor $r(t)$ spełnia $(Z, 0)$ lub (Z, n) .

§ 5. Algebraiczne działania na wektorach.

Algebra wektorów określa kilka działań na wektorach, które pokrótce poniżej podajemy. Wygodnym jest rozważać wektor zerowy, który oznaczymy znakiem $\mathbf{0}$. Ponieważ wektor według teorii elementarnej jest parą uporządkowaną punktów, więc $\mathbf{0}$ będzie parą punktów identycznych, a więc \mathbf{AA} lub $\mathbf{00}$,... [Zwykle objaśnia się definicję wektora zerowego nieściśle powiedzeniem, że punkt uważamy za wektor zerowy.] Dla uproszczenia dowodów wprowadzamy układ trójortogonalny x_i ($i = 1, 2, 3$). Miary składowych wektora \mathbf{u} oznaczymy przez u_1, u_2, u_3 , dla wektora \mathbf{v} przez v_1, v_2, v_3 itd. Zrazu wykonywać będziemy działania na wektorach, mających wspólny początek.

1) Sumą dwóch wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} nazywamy wektor określony geometrycznie w sposób następujący: niech będzie $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{v} = \mathbf{AC}$, niech S oznacza środek odcinka (właściwego lub niewłaściwego) BC ; obierzmy punkt D tak, by odcinek AD miał środek w punkcie S ; otóż wektor \mathbf{AD} nazwiemy sumą wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} i oznaczymy symbolem $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Arytmetycznie określa się sumę wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} jako wektor, którego składowe mają miary $u_i + v_i$ ($i = 1, 2, 3$). Nietrudno czytelnik wykaże, że obie definicje są równoważne. Można także sumę $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

składa w sposób następujący: wektor v przesuwa się równolegle (translacja), by jego punkt początkowy padł na B , przez co otrzymuje się wektor BB' i jego tamana $AB'D'$, która „zamyka” wektory AB i właśnie ten wektor jest sumą $u + v$. Oczywiście określenie obejmuje przypadek, kiedy u, v nie mają wspólnego punktu początkowego, oraz pozwala określić sumę trzech i więcej wektorów. W przypadku, gdy mamy dwa wektory o wspólnym początku i leżące na różnych prostych, sumę wektorów wyznacza się konstrukcją równoległoboku. Suma dwóch wektorów ma własność przemienności t. zn.

$$u + v = v + u$$

oraz własność łączności t. zn.:

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

3) By określić różnicę $u - v$, oznaczmy przez $-v$ wektor o miarach składowych $-v_1, -v_2, -v_3$. Otóż przez $u - v$ rozumieć będziemy wektor:

$$u - v = u + (-v);$$

wektor ten spełnia równanie $v + x = u$.

3) Przez iloczyn składowy a i wektora u , który to iloczyn oznaczmy przez au , rozumiećmy wektor, którego składowe mają miary au_1, au_2, au_3 . Stąd wynika *twierdzenie*: jeżeli a ($i = 1, 2, 3$) oznacza wektor jednostkowy (t. zn. długości 1), leżący na osi z_i (trójortogonalnego) układu odniesienia i zgodnie skierowany z osią z_i , to jest:

² Wektor e_1 ma początek w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$, a koniec w punkcie $(1, 0, 0)$; podobnie e_2 jest wektorem o początku w punkcie $(0, 0, 0)$, a końcem w punkcie $(0, 1, 0)$ i t. d.

Nietrudno stać wywnioskować, że metoda wektorjalna pozwala rachunki uprościć, o czem przekonamy się poniżej.

Gdy miary składowych $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, jako funkcje parametru t spełniają założenia $(Z, 0)$ lub (Z, π) z § 1, to również będziemy, że wektor $\vec{r}(t)$ spełnia $(Z, 0)$ lub (Z, π) .

§ 5. Algebraiczne działania na wektorach. Algebra wektorów określa kilka działań na wektorach, które pokrótce poniżej podajemy. Wygodnym jest rozważać wektor zerowy, który oznaczymy symbolem $\vec{0}$. Ponieważ wektor według teorii elementarnej jest parą uporządkowaną punktów, więc $\vec{0}$ będzie parą punktów identycznych, a więc AA lub 00 . [Zwykle objaśnia się definicję wektora zerowego nieścisłym powiedzeniem, że punkt uważamy za wektor zerowy.] Dla uproszczenia dowodów wprowadzamy układ trójortogonalny $X, (i = 1, 2, 3)$ miary składowych wektora u oznaczony przez u_1, u_2, u_3 , dla wektora v przez v_1, v_2, v_3 itd. Zrazu wykonywać będziemy działania na wektorach, mających wspólny początek.

1) Sumą dwóch wektorów u, v nazywamy wektor określony geometrycznie w sposób następujący: niech będzie $u = \vec{AB}$, $v = \vec{AC}$, niech S oznacza koniec odcinka (wewnętrznego lub niewewnętrznego) BC ; otrzymamy punkt D tak, by odcinek AD miał koniec w punkcie S ; ów wektor AD nazwiemy sumą wektorów u, v i oznaczmy symbolem $u + v$. Geometrycznie chwala się sumę wektorów u, v jako przekątne, którego składowe mają miary $u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3$. Nietrudno otrzymać wykazać, że ów wektor AD jest równy sumie wektorów $u + v$.

określić w sposób następujący: wektor v przenosi się równolegle (translacją!), by jego punkt początkowy padł na B , przez co otrzymuje się wektor BD i linię łamaną ABD , którą „zamykamy“ wektorem AD i właśnie ten wektor jest sumą $u + v$. Ostatnie określenie obejmuje przypadek, kiedy u, v nie mają wspólnego punktu początkowego, oraz pozwala określić sumę trzech i więcej wektorów. W przypadku, gdy mamy dwa wektory o wspólnym początku i leżące na różnych prostych, sumę wektorów wyznacza się konstrukcją równoległoboku. Suma dwóch wektorów ma własność przemienności t. zn.:

$$u + v = v + u$$

oraz własność łączności t. zn.:

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

2) By określić różnicę $u - v$, oznaczymy przez $-v$ wektor o miarach składowych $-v_1, -v_2, -v_3$. Otóż przez $u - v$ rozumieć będziemy wektor:

$$u - v = u + (-v);$$

wektor ten spełnia równanie $v + x = u$.

3) Przez iloczyn skalara a i wektora u , który to iloczyn oznaczymy przez au , rozumiemy wektor, którego składowe mają miary au_1, au_2, au_3 . Stąd wynika twierdzenie: jeżeli e_i ($i = 1, 2, 3$) oznacza wektor jednostkowy (t. zn. długości 1), leżący na osi x_i (trójortogonalnego) układu odniesienia i zgodnie skierowany¹ z osią x_i , to jest:

¹ Wektor e_1 ma początek w punkcie o współrzędnych $(0, 0, 0)$, a koniec w punkcie $(1, 0, 0)$; podobnie e_2 jest wektorem o początku w punkcie $(0, 0, 0)$, a końcu w punkcie $(0, 1, 0)$ i t. d.

$$(43 \text{ bis}) \quad \mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i.$$

Wzór ten nosi nazwę „rozkładu wektora \mathbf{u} na trzy składowe.¹ Każdy wektor możemy rozłożyć na trzy składowe w kierunkach osi x_i . Można udowodnić ogólniejsze twierdzenie, o którym będzie mowa w przykładzie \mathbf{b} (str. 31).

4) Dla wyjaśnienia pojęcia *iloczynu wektorjalnego* dwóch wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} przypomnimy czytelnikowi t. zw. *prawą śrubę*, która ma tę własność, że zakręcana w prawo, postępuje naprzód, a zakręcana w lewo, się cofa. Przy pomocy prawej śruby określimy wektor \mathbf{w} zwany *iloczynem wektorjalnym* (albo *zewnątrznym*) dwóch wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} o wspólnym początku, niezerowych i leżących na dwóch różnych prostych. Oznaczmy przez φ kąt, zawarty między tymi wektorami, o własności $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Wektor \mathbf{w} ma leżeć na prostej, która jest prostopadłą do płaszczyzny π , przesuniętej przez \mathbf{u} , \mathbf{v} i przechodzi przez wspólny początek wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} . Kierunek wektora \mathbf{w} o wspólnym początku z \mathbf{u} , \mathbf{v} ma być kierunkiem postępu prawej śruby, która zakręca wektor \mathbf{u} na \mathbf{v} po kącie φ . Długość wektora \mathbf{w} ma równać się polu równoległoboku zbudowanego na \mathbf{u} i \mathbf{v} . Definicję powyższą objaśnia² rys. 1 na końcu książki. Jeżeli u , v oznaczają długości wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} , to pole zacieniowane

¹ Składowa w kierunku osi x_i jest wektorem $u_i \mathbf{e}_i$, liczba u_i mierzy tę składową na osi x_i ; bardzo często (bez obawy o nieporozumienie) liczbę u_i zowią składową wektora wzdłuż x_i .

² Wektor \mathbf{u} w piśmie (*nie* w druku!) oznacza się symbolem \vec{u} .

na rysunku wynosi $uv \sin \varphi$. Wektor w oznaczmy znakiem

$$(44) \quad w = u \wedge v.$$

Widocznem jest też:

$$(45) \quad v \wedge u = -(u \wedge v) = (-u) \wedge v = u \wedge (-v),$$

wobec czego nie będzie nieporozumienia, gdy (45) przepiszemy w postaci:

$$(45 \text{ bis}) \quad v \wedge u = -u \wedge v.$$

Iloczyn wektorjalny nie ma więc własności komutatywnej (przemienności). Zarazem z powyższego widoczne, że przy podanych założeniach co do u, v jest ich iloczyn wektorjalny niezerowym wektorem. Dołączmyt eraz definicję, obejmującą pozostałe przypadki co do u i v , mianowicie jest:

$$u \wedge v = 0,$$

gdy $u = 0$ lub $v = 0$ lub gdy kąt między u i v równa się zeru lub 180° . W szczególności dla każdego wektora a jest $a \wedge a = 0$.

Tw. *Jeżeli u_i, v_i są miarami składowych dla u, v w układzie prawoskrętnym i trójortogonalnym osi odniesienia, to w tymże układzie w , określone wzorem (44), ma miary składowych w_1, w_2, w_3 , dane przez związki*

$$(46) \quad \begin{cases} w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, & w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \\ w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1. \end{cases}$$

Podamy plan i szkic dowodu. A) Wykazuje się najpierw, że (46) są słuszne przy specjalnym układzie odniesienia. B) Następnie wykazuje się *tw. pomocnicze*: jeżeli wzory (46) są słuszne przy jakimś

prawoskrętnym, trójortogonalnym układzie odniesienia, to one są słuszne przy każdym prawoskrętnym trójortogonalnym układzie odniesienia.

Ad A). Wzory (46) są widocznie słuszne, gdy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ lub gdy kąt między \mathbf{u} i \mathbf{v} jest 0° lub 180° ; w ostatnim bowiem przypadku u_i są proporcjonalne do v_i . Pozostaje nam więc przypadek, któremu odpowiada rysunek powyżej wspomniany. Wtedy początek układu odniesienia przyjmiemy w wspólnym początku wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} ; za oś x_1 obieramy prostą wektora \mathbf{u} i tak, by było $u_1 > 0$; tedy $u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$. Oś x_2 obieramy w płaszczyźnie wektorów \mathbf{u} , \mathbf{v} , prostopadle do x_1 ale tak skierowaną, że $v_2 > 0$, więc $v_2 = v \sin \varphi$, $v_3 = 0$. Oś x_3 obieramy prostopadle do x_1 , x_2 i tak, by osie w porządku x_1 , x_2 , x_3 dały układ prawoskrętny. Teraz już z łatwością stwierdzamy, że związki (46) są słuszne.

Ad B). Oprócz układu odniesienia x_i , dla którego przyjmujemy słuszność związków (46), weźmy inny układ prawoskrętny, trójortogonalny x_i^* ; wiadomo, że między współrzędnymi x_i i x_i^* tego samego punktu zachodzą związki (2), nadto są słuszne wzory (3) i (5).

Tw. pomocn. *Jeżeli wektor \mathbf{u} ma w układzie x_i miary składowych u_1, u_2, u_3 , to w układzie x_i^* ma miary składowych u_1^*, u_2^*, u_3^* takie, że jest*

$$(47) \quad u_i^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik} u_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wystarczy napisać wzory (2) dla punktu początkowego (x_i) i końcowego ($x_i + u_i$) wektora \mathbf{u} i potem wzory te odpowiednio odjąć, by otrzymać

prawokrotnym, trójortogonalnym układzie odniesienia, to one są słuszne przy każdym prawokrotnym trójortogonalnym układzie odniesienia.

Ad A). Wzory (46) są widocznie słuszne, gdy $u = 0$ lub $v = 0$ lub gdy kąt między u i v jest 0° lub 180° ; w ostatnim bowiem przypadku u są proporcjonalne do v . Pozostaje nam więc przypadek, którego odpowiada rysunek powyżej wspomniany. Wtedy początek układu odniesienia przyjmujemy w wspólnym początku wektorów u, v ; za oś x_1 wybieramy prosta wektora u i tak, by było $u_1 > 0$; tedy $u_2 = u, u_3 = 0$. Oś x_2 wybieramy w płaszczyźnie wektorów u, v , prostopadła do x_1 , nie tak skierowaną, że $v_2 > 0$, więc $v_3 = 0, u_3 = 0$. Oś x_3 wybieramy prostopadła do x_1, x_2 i tak, by oś w porządku x_1, x_2, x_3 dala układ prawokrotny. Teraz już z łatwością stwierdzamy, że związki (46) są słuszne.

Ad B). Spróbujmy znaleźć związki (46) wektory w układzie prawokrotnym, trójortogonalnym x_1^* ; wiadomo, że między współrzędnymi x_1 i x_1^* tego samego punktu zachodzą związki (2), należy są znaleźć wzory (3) i (5).

Tę pomocną jest i wektor u ma w układzie x_1 składowych u_1, u_2, u_3 , to w układzie x_1^* ma składowe u_1^*, u_2^*, u_3^* takie, że jest

$$(47) \quad u^2 = \sum_{i=1}^3 u_i^2 \quad (i=1, 2, 3).$$

Wyznaczą napisz wzory (2) dla punktu początkowego (4) i końcowego $(x, +u)$ wektora u i potem wzory te odpowiednio odjąć, by otrzymać

(47). Wzory (47) wykazują — co widoczne a priori — że transformacja układu nie daje zmian układuowych, a tylko obrót układu. Biorąc teraz dwa układy α, α' powyżej podane, mamy oprócz (47) także:

$$u_i^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k, \quad u_i'^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik}' w_k \quad (i=1, 2, 3).$$

Korzystając ze wzorów (10), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_1^* u_2'^* - u_2^* u_1'^* &= \sum_{ij} a_{1i} a_{2j}' w_j - \sum_{ij} a_{2i} a_{1j}' w_j = \\ &= \sum_{ij} a_{1i} a_{2j}' w_j - \sum_{ij} a_{2i} a_{1j}' w_j = \sum_{ij} a_{1i} a_{2j}' (w_j - w_j) = \\ &= (a_{11} a_{22}' - a_{21} a_{11}') (w_1 - w_1) + (a_{12} a_{23}' - a_{22} a_{13}') \\ &+ (a_{13} a_{21}' - a_{23} a_{12}') (w_2 - w_2) + (a_{21} a_{12}' - a_{11} a_{22}') (w_1 - w_1) = \\ &= a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + a_{13} w_3 = w_1^2. \end{aligned}$$

Podobnie wykaże się resztę wzorów (46).

Zauważalny jeszcze, że prawa strony związków (46) są to wyznaczniki stopnia 2^{go} macierzy:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Ważnym tu ułatwieniem zapamiętania wzorów (46)

leżących wektorjalny ma własność rozdzielności z sumą i różnicą t, zn. jest

$$(48) \quad \begin{cases} (a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c \\ a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c \end{cases}$$

Drugi z tych wzorów wynika z pierwszego przy pomocy (45 bis), a dowód pierwszego wyniku przy pomocy (46) — wykazuje się bowiem, że obie strony są wektorami o tych samych składach. Ale i na odwrót z (45) można otrzymać (46): wystarczy na mocy (43 bis) i (45) pisać

(47). Wzory (47) wykazują — co widoczne a priori — że translacja układu nie daje zmiany składowych, a tylko obrót układu. Biorąc teraz dwa układy x_i, x_i^* powyżej podane, mamy oprócz (47) także:

$$v_i^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik} v_k, \quad w_i^* = \sum_{k=1}^3 a_{ik} w_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Korzystając ze wzorów (10), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_2^* v_3^* - u_3^* v_2^* &= \sum_{kj} a_{2k} u_k a_{3j} v_j - \sum_{kj} a_{3k} u_k a_{2j} v_j = \\ &= \sum_{kj} a_{2k} a_{3j} u_k v_j - \sum_{kj} a_{2k} a_{3j} u_j v_k = \sum_{kj} a_{2k} a_{3j} (u_k v_j - u_j v_k) = \\ &= (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) (u_2 v_3 - u_3 v_2) + (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) \\ & (u_3 v_1 - u_1 v_3) + (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) (u_1 v_2 - u_2 v_1) = \\ &= a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + a_{13} w_3 = w_1^*. \end{aligned}$$

Podobnie wykaże się resztę wzorów (46).

Zauważmy jeszcze, że prawe strony związków (46) są to wyznaczniki stopnia 2^{go} macierzy:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix};$$

szczegół ten ułatwia zapamiętanie wzorów (46).

Iloczyn wektorjalny ma własność rozdzielności z sumą i różnicą t. zn. jest

$$(48) \quad \begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}. \end{cases}$$

Drugi z tych wzorów wynika z pierwszego przy pomocy (45 bis), a dowód pierwszego wynika przy pomocy (46) — wykazuje się bowiem, że obie strony są wektorami o tych samych składowych. Ale i na odwrót z (48) można otrzymać (46); rzeczywiście na mocy (43 bis) i (48) jest:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \wedge \sum_{k=1}^3 v_k \mathbf{e}_k = \sum_{i,k} u_i v_k (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k).$$

Ale jest

$$(49) \quad \begin{cases} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

więc

$$(50) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{e}_2 + \\ + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e}_3, \end{cases}$$

a to jest równoważne z (46).

5) Iloczyn skalarny (czyli wewnętrzny) dwóch wektorów \mathbf{u}, \mathbf{v} (będący skalar, a nie wektorem), określa się w sposób następujący: niech u, v oznaczają długości tych wektorów i niech φ oznacza kąt między tymi wektorami — zakładamy bowiem na razie, że żaden z wektorów \mathbf{u}, \mathbf{v} *nie* jest zerowym. Wiadomo, że wprowadzić φ nie jest jednoznacznie określone, ale $\cos \varphi$ *jest* jednoznacznie określone. Otóż przez iloczyn skalarny, który oznaczmy znakiem $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, rozumiemy skalar (a więc liczbę):

$$(51) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = uv \cos \varphi.$$

W przypadku, kiedy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, przyjmujemy:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Wobec tego z łatwością widać, że, jeżeli jest $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, to jest albo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ albo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ albo gdy $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Iloczyn skalarny ma własność kommutatywną t. zn.:

$$(52) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u};$$

o własności łączności (assocjatywnej) oczywiście nie może być mowy. Z powyższego widoczne, że $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = u^2$ czyli jest kwadratem długości wektora \mathbf{u} .

Tw. C. *Jeżeli u_i, v_i oznaczają miary składowych dla \mathbf{u}, \mathbf{v} w trójortogonalnym układzie odniesienia x_i , to jest*

$$(53) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i.$$

Podamy tu tylko plan dowodu: C') najpierw wykazuje się, że *istnieje trójortogonalny układ odniesienia, w którym (53) jest widocznie słuszne*, następnie udowadnia się:

Tw. D. *Suma $\sum_{i=1}^3 u_i v_i$ jest niezmiennikiem przy przekształceniach układu potrójnie ortogonalnego na dowolny potrójnie ortogonalny układ*

Dowód przeprowadzi czytelnik z łatwością na mocy (47). Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że w tw. D nie muszą być oba układy prawosłownymi. Zauważmy dalej, że z C' i D wynika słuszność wzoru (53). Ponieważ wzory (2), (3) i (5) możemy uważać za wzory na ruch euklidesowy, więc dowód tw. D jest po łatwych zmianach zarazem dowodem na:

Tw. *Jeżeli wektory \mathbf{u}, \mathbf{v} o składowych u_i, v_i przejdą przez ruch euklidesowy w wektory $\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*$ o składowych u_i^*, v_i^* , to jest*

$$(53 \text{ bis}) \quad \sum_i u_i v_i = \sum_i u_i^* v_i^*$$

czyli:

Tw. E. *Jeżeli u_i, v_i są miarami składowych wektorów \mathbf{u}, \mathbf{v} w układzie potrójnie ortogonalnym, to*

$\sum_{i=1}^3 u_i v_i$ jest niezmiennikiem dwóch wektorów dla grupy ruchów euklidesowych.

Tw. E nie zakłada, że wektory \mathbf{u} i \mathbf{v} są różne; przyjmując więc, że wektory te są identyczne, otrzymujemy jako szczególny przypadek:

Tw. F. Jeżeli u_i są miarami składowych wektora \mathbf{u} w układzie potrójnie ortogonalnym, to $\sum_{i=1}^3 (u_i)^2$ jest niezmiennikiem jednego wektora dla grupy ruchów euklidesowych, (odpowiadającym odległości 2 punktów, która jest — jak wiadomo — niezmiennikiem).

Oba tw. mają proste znaczenie geometryczne, które pozwala zgóry tw. przewidzieć, tak bowiem kąty, jak i długości są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych. Z tw. E i F będziemy korzystali w rozdz. III.

Iloczyn skalarny ma własność dystrybutywną (rozdzielności) w stosunku do dodawania (a więc i odejmowania) t. zn.:

$$(54) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

Udowadnia się (54) na mocy (53). Ale i z (54) można wywnioskować (53); jest bowiem

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_{k=1}^3 v_k \mathbf{e}_k \right) = \sum_{i,k} u_i v_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k),$$

ale jest

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i = 1, \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k)$$

czyli

$$(55) \quad \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k, \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

wskazek czego jest $a \times v = \sum_{i=1}^3 a_i \delta_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_i v_k$,
 a. b. d. n.

Działania na wektorach, których określenia powyżej podaliśmy, oraz wnioski stąd wynikające, które podamy w § 6, należą do t. zw. algebry wektorów, w § 7 przejdziemy do t. zw. analizy wektorów (t. j. do zastosowania rachunku różniczkowego i całkowego do teorii wektorów). Obecnie podamy kilka przykładów.

a) Niech wektor niezerowy a ma początek w punkcie z ($i=1, 2, 3$), i wyznaczonym przez wektor v (t. zn. składowe wektora v w kierunku osi układu mają miary v_1, v_2, v_3). Twierdzimy, że prosta, na której leży a , ma równanie:

$$(56) \quad H = r - z + \sigma a,$$

przy czym H oznacza wektor, wychodzący z początku układu i) wyznaczający położenie punktu prostej; σ jest parametrem zmieniającym wartość prostej. Z łatwością czytelnik sprawdzi poprawność tego twierdzenia.

b) Niech z punktu M wychodzą dwa wektory u, v takie, że $u \wedge v$ jest wektorem, a więc macierz minor składowych:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

jest rzędu 2^{go}. Napiętnujemy równanie wektorowe płaszczyzny π przez M , na której leżą u, v . Jeżeli punkt M i dowolny wektor v punkt P tej płaszczyzny są wyznaczone przez wektory H i r , wychodzące z początku układu, oznaczając, że wektor $H = r$ leży

$\Sigma u, v$, jest niezmiennikiem dwóch wektorów dla grupy ruchów euklidesowych.

Tw. *H* nie zakłada, że wektory u i v są różne; przyjmując więc, że wektory te są identyczne, otrzymujemy jako szczególny przypadek:

Tw. *F*. Jeżeli u są wektorami składowymi wektora u w układzie potrójnie ortogonalnym, to $\Sigma (u_i)^2$ jest niezmiennikiem jednego wektora dla grupy ruchów euklidesowych, (odpowiadającym odległości 2 punktow, która jest — jak wiadomo — niezmiennikiem)

Oba tw. mają proste znaczenie geometryczne, które pozwala zgóry tw. przewidzieć, tak bowiem kąty, jak i długości są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych. Z tw. *E* i *F* będziemy korzystali w rozdz. III.

Dozrywn skalarnej dla własność dystrybucyjną (przez zmianę) w stosunku do dodawania (a więc i odejmowania) t. zn.

$$(34) \quad (u + v) \times w = u \times w + v \times w.$$

Dozwadnia się (34) na mocy (53). Ale i z (54) można wywnioskować (53); jest bowiem

$$u \times v = \sum_{i=1}^3 u_i e_i \times \sum_{j=1}^3 v_j e_j = \sum_{i,j=1}^3 u_i v_j (e_i \times e_j),$$

$$u \times e_i = 1, e_i \times e_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k)$$

$$(55) \quad e_i \times e_k = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3); \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

wskutek czego jest $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i,k} u_i v_k \delta_{ik} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$,

c. b. d. u.

Działania na wektorach, których określenia powyżej podaliśmy, oraz wnioski stąd wynikające, które podamy w § 6, należą do t. zw. algebry wektorów, w § 7 przejdziemy do t. zw. analizy wektorów (t. j. do zastosowania rachunku różniczkowego i całkowego do teorii wektorów). Obecnie podamy kilka przykładów.

a) Niech wektor niezerowy \mathbf{a} ma początek w punkcie x_i ($i=1, 2, 3$), wyznaczonym przez wektor \mathbf{r} (t. zn. składowe wektora \mathbf{r} w kierunku osi układu mają miary x_1, x_2, x_3). Twierdzimy, że prosta, na której leży \mathbf{a} , ma równanie:

$$(56) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \sigma \mathbf{a},$$

przyczem \mathbf{R} oznacza wektor, (wychodzący z początku układu i) wyznaczający bieżący punkt prostej; σ jest parametrem zmiennym wzdłuż prostej. Z łatwością czytelnik stwierdzi słuszność tego twierdzenia.

b) Niech z punktu M wychodzą dwa wektory \mathbf{u}, \mathbf{v} takie, że $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ jest niezerowym wektorem, a więc macierz miar składowych:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

jest rzędu 2^{go}. Napiszemy równanie wektorjalne płaszczyzny π przez M , na której leżą \mathbf{u}, \mathbf{v} . Jeżeli punkt M i dowolny (bieżący) punkt P tej płaszczyzny są wyznaczone przez wektory \mathbf{R} i \mathbf{r} , wychodzące z początku układu odniesienia, to wektor $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ leży

na tej płaszczyźnie, nadto wektor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ z określenia jest prostopadły do płaszczyzny π , a więc prostopadły do wektora $\mathbf{R} - \mathbf{r}$, wobec czego jest:

$$(57) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = 0;$$

jest to szukane równanie płaszczyzny π . Równaniu temu można nadać inną t. zw. wyznacznikową postać. W tym celu rozważmy wyznacznik

$$(58) \quad w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Jeżeli a_i, b_i, c_i uważać będziemy za miary składowych wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ w kierunku osi x_i układu trójortogonalnego i prawoskrętnego, to w możemy uważać za wyznacznik zależny od trzech wektorów.

W Rozdz. III, § 3 wykazemy, że wyznacznik ten jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych (a więc także nie zależy od wyboru trójortogonalnego i prawoskrętnego układu odniesienia w R_3), wobec tego wolno wyznacznik w oznaczyć znakiem

$$w = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$$

bez bliższego oznaczenia układu, w którym wyznaczono a_i, b_i, c_i . Rozwińmy w według pierwszego wiersza, a otrzymamy:

$$w = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1),$$

co na mocy (50) i (52) da się przepisać w postaci:

$$(59) \quad w = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}).$$

Stąd wynika, że równanie (57) przyjmie postać wyznacznikową:

$$(60) \quad |\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v}| = 0;$$

warunek ten wyraża, że trzy wektory $\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ są współpłaszczyznowe (komplanarne).

Uwaga. Wyznacznik w pozwala wypowiedzieć następujące tw.: jeżeli $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ oznaczają trzy wektory, dla których jest $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| \neq 0$, to każdy wektor \mathbf{u} daje się przedstawić jednoznacznie jako suma:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c},$$

gdzie λ, μ, ν oznaczają skalary. Przedstawienie to nazywamy rozkładem wektora \mathbf{u} w kierunku wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Szczególny przypadek tego tw. poznaliśmy powyżej; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ były to wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (zob. str. 22).

c) *Plückerowskie współrzędne prostej.* Z równania (56) prostej otrzymujemy:

$$(61) \quad \mathbf{R} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{a},$$

bo jest $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$. A więc $\mathbf{R} \wedge \mathbf{a}$ jest stałym wektorem wzdłuż prostej; oznaczmy:

$$(62) \quad \mathbf{b} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{a},$$

wektor \mathbf{b} jest dla rozważanej prostej jednoznacznie określony (nie zależy od wyboru punktu wyznaczonego przez \mathbf{r} na prostej). Liczby a_1, a_2, a_3 (t. zn. miary składowych wektora \mathbf{a}), b_1, b_2, b_3 (miary składowych wektora \mathbf{b}) noszą nazwę współrzędnych *Plückerowskich* prostej (56), a wektory \mathbf{a}, \mathbf{b} nazwiemy *wektorami Plückera* dla rozważanej prostej. Jest tych współrzędnych sześć, kiedy prosta w przestrzeni zależy od 4 stałych. Jeden związek między współ-

rzędniemi Plückera otrzymujemy bezpośrednio z (62), a mianowicie:

$$(63) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0.$$

Drugi związek otrzymujemy z następującej uwagi: tę samą prostą wyznaczają \mathbf{r} i \mathbf{a} , oraz \mathbf{r} i $\lambda \mathbf{a}$, gdzie λ jest dowolną liczbą $\neq 0$; obierzmy tak λ , aby wektor $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}$ spełniał warunek $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1 = 1$ czyli by \mathbf{a}_1 był jednostkowym¹ wektorem; wtedy na λ otrzymamy warunek:

$$\lambda^2 \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 1 \quad \text{czyli} \quad \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{a}}}.$$

I zamiast pisać \mathbf{a}_1 piszemy \mathbf{a} czyli z góry zakładamy, że jest

$$(64) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 1.$$

Na 6 Plückerowskich współrzędnych prostej (56) mamy więc dwa związki kwadratowe (63) i (64). (Zob. § 6, 1).

d) Wzory (2) na ruch euklidesowy przepiszemy w postaci wektorjalnej. Niech wektor \mathbf{a}_i ($i=1, 2, 3$) ma składowe o miarach a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} , niech wektor \mathbf{a}_4 ma składowe o miarach a_{14}, a_{24}, a_{34} ; niech wektory \mathbf{r}, \mathbf{r}^* mają składowe o miarach $x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*$, wtedy, wprowadzając, jak powyżej, wektory \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$), możemy (2) przepisać w postaci:

$$(65) \quad \mathbf{r}^* = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}) \mathbf{e}_i + \mathbf{a}_4.$$

Ze wzoru tego skorzystamy później.

¹ Jest bowiem $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_1$ kwadratem długości wektora \mathbf{a}_1 .

Do str. 31 w. 9 = 207u. Niejednoznacznie, bo \vec{a} mi
 jest jednoznacznie, onez przeciwko określony.
 Jednoznaczności odnosi się do \vec{b} po przyjęciu \vec{a} .

Gdy \vec{u} dowolny wektor, to wektor

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{u} \times \vec{e}_i) (\vec{u} \wedge \vec{e}_i) = \vec{0}$$

\vec{u}, \vec{e}_i tworzą
 trój ortogonalny
 układ

jest wektorem zerowym!! bo jest

$$u_1 (u_2 \vec{e}_3 + u_3 \vec{e}_2) + u_2 (u_1 \vec{e}_3 - u_3 \vec{e}_1) + u_3 (-u_1 \vec{e}_2 + u_2 \vec{e}_1) = \vec{0}$$

Dowód wektorowej tożsamości, bo

$$\sum_{i=1}^3 (\vec{u} \times \vec{e}_i) (\vec{u} \wedge \vec{e}_i) = \vec{u} \wedge \left(\sum_{i=1}^3 (\vec{u} \times \vec{e}_i) \vec{e}_i \right) = \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

(Mija urega) d. 30/V 1934.

Inny dowód za pomocą sum dwójekowyd:

$$\sum \vec{u} \wedge \vec{e}_i \vec{e}_i \cdot \vec{u} = \vec{u} \wedge \sum \vec{e}_i \vec{e}_i \times \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{I} \times \vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

24/II 1936.

Str. 34 ról. 68 inacej rozciągają H. Beck,
 Koordynatogeom. str 134 kas. 12, ale wydosła
 a R_3 do R_4 (!). To może być 4 krawędziach

Wzory (3) i (5) przechodzą teraz we wzory:

$$(65 \text{ bis}) \quad \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad |\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = +1 \\ (i = 1, 2, 3).$$

Uwaga. Wzór (65) można zastąpić innym, ale „mniej wektorjalnym“.

Oznaczmy przez \mathbf{b}_i wektor, którego składowe mają miary: a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} ($i = 1, 2, 3$); wtedy wzory (2) przejdą na wzór

$$(65 \text{ ter}) \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{b}_1 x_1 + \mathbf{b}_2 x_2 + (\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) x_3 + \mathbf{a}_4,$$

przytem jest

$$(65 \text{ quat}) \quad \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_1 = 1, \quad \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_2 = 1, \quad \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = 0.$$

e) Załóżmy, że ciało sztywne obraca się naokoło osi, przechodzącej przez początek układu x_1, x_2, x_3 (trójortogonalnego i prawego). Niech p_1, p_2, p_3 oznaczają miary składowych wektora \mathbf{w} prędkości kątowej, o którym założymy, że nie jest zerowym; liczby p_i ($i = 1, 2, 3$) są proporcjonalne do dostaw kierunkowych osi obrotu (na której leży \mathbf{w}). Według cynematyki dowolny punkt x_i ($i = 1, 2, 3$) ciała ma prędkość linjową \mathbf{v} , spełniającą związek:

$$(66) \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r},$$

przyczem \mathbf{r} ma składowe o miarach x_1, x_2, x_3 .

Zwykle zamiast x_1, x_2, x_3 używa się oznaczeń x, y, z , zamiast p_i oznaczeń p, q, r ; miary składowych wektora \mathbf{v} oznacza się wtedy przez v_x, v_y, v_z ; wobec tego (66) daje

$$(67) \quad v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx.$$

Rozważmy szczególnie przypadek obrotu, a mianowicie obrót naokoło osi z ; wtedy $p = q = 0$ (bo \mathbf{w} leży na osi z) i wzory (67) dają:

$$v_x = -r y, \quad v_y = r x, \quad v_z = 0.$$

Np. punkt $(1, 0, 0)$, leżący na osi x , ma wektor \mathbf{v} prędkości linjowej, którego składowe mają miary $(0, r, 0)$, (co jest zresztą geometrycznie zrozumiałe). Punkt $(0, 1, 0)$, leżący na osi y , ma wektor prędkości linjowej o składowych z miarami $(-r, 0, 0)$, co również jest intuicyjnie widocznym.

f) Niech \mathbf{u}, \mathbf{v} oznaczają dwa dane wektory, p, q dwa dane skalary; znajdziemy wszystkie wektory \mathbf{x} przestrzeni R_3 , spełniające układ dwóch równań:

$$(68) \quad \mathbf{x} \times \mathbf{u} = p; \quad \mathbf{x} \times \mathbf{v} = q.$$

Analitycznie biorąc, jest to układ 2 równań linjowych na 3 niewiadome x_1, x_2, x_3 t. j. na miary składowych wektora \mathbf{x} . Przeprowadzimy dyskusję wektorjalnie. Odróżnimy dwa przypadki: albo jest $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ albo jest $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

W pierwszym przypadku albo jest $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ albo co najmniej jeden z wektorów \mathbf{u}, \mathbf{v} nie jest zerowym. Gdy $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0}$, to (68) daje $p = q = 0$ i wtedy każdy wektor \mathbf{x} spełnia (68), a że dowolny wektor można rozłożyć na składowe według wzoru:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

(gdzie \mathbf{e}_i określono na str. 21), więc x_1, x_2, x_3 można dowolnie obrać czyli rozwiązania układu

(68) zawierają trzy dowolne parametry (x_i). Gdy $p \neq 0$ lub $q \neq 0$, to (68) nie mają rozwiązania.

Gdy $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ lub $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to możemy przyjąć, że właśnie $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. A że jest $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$, więc istnieje skalar λ taki, że jest $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$ i wtedy (68) daje $\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{x} \times \lambda \mathbf{u} = \lambda p$, a więc $q = \lambda p$. Równania (68) są od siebie zależne i równoważne jednemu: $\mathbf{x} \times \mathbf{u} = p$; kładąc $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, mamy $\sum x_i (\mathbf{e}_i \times \mathbf{u}) = p$, co daje jeden związek linjowy na 3 liczby x_i . A więc wektor \mathbf{x} zależy od 2 dowolnych z trzech x_i . Gdy zaś jest $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, $q \neq \lambda p$, to (68) nie ma rozwiązania.

Niech wreszcie $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, to $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; wektor \mathbf{x} można wyrazić przez \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, bo wyznacznik $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \neq 0$, gdyż jest kwadratem długości wektora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Jest więc

$$(69) \quad \mathbf{x} = a \mathbf{u} + b \mathbf{v} + \sigma (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}),$$

gdzie a, b, σ są szukanymi skalarami, na które mamy 2 warunki:

$$(70) \quad \begin{cases} p = \mathbf{x} \times \mathbf{u} = a \mathbf{u} \times \mathbf{u} + b \mathbf{v} \times \mathbf{u}, \\ q = \mathbf{x} \times \mathbf{v} = a \mathbf{u} \times \mathbf{v} + b \mathbf{v} \times \mathbf{v}, \end{cases}$$

bo $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = 0$, $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0$. Z (70) jednoznacznie określi się a, b , bo na mocy (77) jest $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{u}) (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2 \neq 0$. Skalar σ jest dowolnym, a więc (69) daje zbiór rozwiązań zależnych od jednej stałej σ . Mamy tedy: *warunek $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ jest koniecznym i wystarczającym, by (68) miały rozwiązania zależne tylko od jednego parametru.*

g) Z punktu O niech wychodzą dwa dane wektory \mathbf{a} i \mathbf{b} , przyczem zakładamy, że jest $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Wyszukajmy wszystkie wektory \mathbf{r} , wychodzące z O

i spełniające równanie wektorjalne (w układzie Kartezjusza jest to układ 3 równań):

$$(70 \text{ bis}) \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{b}.$$

Rozważymy co do \mathbf{b} dwa przypadki: albo jest $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ albo jest $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Gdy jest $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, to (70 bis) redukuje się do równania $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{0}$, więc jest $\mathbf{r} = \sigma \mathbf{a}$, gdzie σ jest dowolną liczbą; końce wektorów \mathbf{r} leżą tedy na prostej właśnie o równaniu $\mathbf{r} = \sigma \mathbf{a}$; jest to prosta przez O , na której leży dany wektor \mathbf{a} .

Gdy jest $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, to jest albo $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ albo tak nie jest. Gdy \mathbf{b} nie jest prostopadłe do \mathbf{a} , to widoczne z określenia iloczynu wektorjalnego, że równanie (70 bis) nie posiada rozwiązania.

Gdy jest $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, to równanie (70 bis) ma rozwiązanie, jak wykażemy. Załóżmy chwilowo, że równanie to ma rozwiązanie szczególne \mathbf{r}_0 , czyli $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}$; stąd i z (70 bis) otrzymujemy $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$, co daje $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \sigma \mathbf{a}$, gdzie σ oznacza dowolną liczbę; a więc jest $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sigma \mathbf{a}$; równanie to daje ogół rozwiązań, zależnych od dowolnego parametru σ ; końce wektorów \mathbf{r} leżą na prostej właśnie o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sigma \mathbf{a}$, przyczem σ jest parametrem zmiennym wzdłuż prostej; prosta ta przechodzi przez punkt końcowy wektora \mathbf{r}_0 i jest \parallel do wektora \mathbf{a} .

Trzeba jeszcze wykazać istnienie szczególnego rozwiązania \mathbf{r}_0 ; jako takie weźmiemy wektor prostopadły do \mathbf{a} i \mathbf{b} , innymi słowy położymy

$$\mathbf{r}_0 = \mu \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}),$$

gdzie μ oznacza liczbę, którą mamy wyznaczyć. Otóż na mocy wzoru (73) z § 6 mamy:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}_0 = \mu [\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})] = \mu \{ \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \};$$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
 $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$
 $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$

Z tej własności skorzystamy, by (zob. § 5, przy-
 kład c) równanie prostej (56) wyrazić przy pomocy
 iloczynów dwóch równań prostych. Odnosząc do prostej
 (56) (57) i (71) mamy:

$$\begin{aligned}
 b \wedge a &= (r \wedge a) \wedge a = a \wedge (r \wedge a) = a \wedge (a \wedge r) = a \wedge a \\
 &= a \wedge r = a \wedge (a \wedge b) = a \wedge a \wedge b = a \wedge b
 \end{aligned}$$

Z tej własności skorzystamy, by (zob. § 5, przy-
 kład c) równanie prostej (56) wyrazić przy pomocy
 iloczynów dwóch równań prostych. Odnosząc do prostej
 (56) (57) i (71) mamy:

$$(71) \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c)$$

Z tej własności skorzystamy, by (zob. § 5, przy-
 kład c) równanie prostej (56) wyrazić przy pomocy
 iloczynów dwóch równań prostych. Odnosząc do prostej
 (56) (57) i (71) mamy:

$$\begin{aligned}
 b \wedge a &= (r \wedge a) \wedge a = a \wedge (r \wedge a) = a \wedge (a \wedge r) = a \wedge a \\
 &= a \wedge r = a \wedge (a \wedge b) = a \wedge a \wedge b = a \wedge b
 \end{aligned}$$

Z tej własności skorzystamy, by (zob. § 5, przy-
 kład c) równanie prostej (56) wyrazić przy pomocy
 iloczynów dwóch równań prostych. Odnosząc do prostej
 (56) (57) i (71) mamy:

Wektor (to też) równoległy, gdy wektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ jest
 iestuponym, gdy więc $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Wtedy (to też) inaczej
 naley rozróżnić. Z (to też) mamy:

$$(\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{0} \times \vec{a}, \text{ a więc } \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}}$$

Enowu się wyrażają, że

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \sigma \vec{a}$$

gdzie \vec{r}_0 oznacza wektor przesłania, na które
 - jak się łatwo przekonasz, można przyjąć (jeżeli $\vec{a} \times \vec{e}_3 \neq \vec{0}$)

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{\vec{a} \times \vec{e}_3} \cdot \vec{h}$$

gdzie \vec{h} oznacza wektor oskadowy $(-\vec{b} \times \vec{e}_2, \vec{b} \times \vec{e}_1, 0)$.
 (zob. mapę, która jest kul. Bawergera) 11/11 1934

ale $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, więc $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, wobec tego (70 bis) daje
 $\mu \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b}$,
 skąd wynika, że być winno:

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{a} \times \mathbf{a}},$$

a więc ogół rozwiązań równania (70 bis) zawarty jest we wzorze:

$$(70 \text{ ter}) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{a} \times \mathbf{a}} (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) + \sigma \mathbf{a}.$$

§ 6. Własności iloczynów skalarnych i wektorjalnych. Kilka własności obu poznanych iloczynów poznaliśmy poprzednio. Obecnie zestawiamy dalsze własności, z których bardzo często będziemy korzystali. Dowody tych własności polegają w przeważnej części na tem, że się wykazuje na mocy (50) lub (53), iż obie strony równości, wyrażającej omawianą własność, przedstawiają tesame wektory lub skalary.

1) Jest:

$$(71) \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Z tej własności skorzystamy, by (zob. § 5, przykład c) równanie prostej (56) wyrazić przy pomocy Plückerowskich współrzędnych prostej. Otóż na mocy (62), (64) i (71) mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} &= (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) - \mathbf{r} (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{a} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) - \mathbf{r}, \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) - \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

i wprowadzając to w (56), otrzymujemy równanie prostej:

(72) $\mathbf{R} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \{\sigma + (\mathbf{r} \times \mathbf{a})\} \mathbf{a} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \sigma_1 \mathbf{a}$,
 przyczem σ_1 oznacza (nowy) parametr zmienny
 wzdłuż prostej. Równanie (72) jest wyrażone przy
 pomocy wektorów Plückerowskich. W trójortogonal-
 nym i prawoskrętnym układzie Kartezjusza otrzy-
 muje się stąd:

$$(72 \text{ bis}) \quad \begin{cases} X_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 + \sigma_1 a_1; \\ X_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 + \sigma_1 a_2; \\ X_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 + \sigma_1 a_3. \end{cases}$$

Są to znane z geometrii analitycznej parametryczne
 równania prostej, posługujące się współrzędnymi Plü-
 ckera $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, które spełniają dwa związki:

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1.$$

2) Jest

$$(73) \quad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{e}) - \mathbf{e} (\mathbf{a} \times \mathbf{b});$$

wynika to z (71) i (45 bis): $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}) = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}$ itd.

Wzory (71) i (73) wykazują, że iloczyn wekto-
 rjalny nie posiada własności łączności.

3) Wzory (58) i (46) dają:

$$(74) \quad \begin{cases} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}| = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \wedge \mathbf{e}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{e} = \\ = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{b}. \end{cases}$$

Dla zastosowania rozważmy iloczyn $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$; niech
 \mathbf{e}_i oznacza, jak wyżej, wektor jednostkowy, leżący na
 osi x_i i z nią zgodnie skierowany; miarą składowej
 iloczynu $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ w kierunku osi x_i będzie $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{e}_i$,
 co na mocy (74) przyjmie postać $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i|$. Mamy więc

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}_i| \cdot \mathbf{e}_i,$$

co zastępuje wzór (50).

$$(75) = \left| \begin{array}{cc} \vec{a} \times \vec{c} & \vec{a} \times \vec{d} \\ \vec{b} \times \vec{c} & \vec{b} \times \vec{d} \end{array} \right|$$

4) Jest

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - \\ - (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{array} \right.$$

Wzór ten wynika przez wyliczenie obu stron, które są skalarami, albo przy pomocy (71) i (74); jest bowiem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= |\mathbf{d}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{c}| = \mathbf{d} \times [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}] = \\ &= \mathbf{d} \times [\mathbf{b}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})], \end{aligned}$$

a to daje wprost (75). Z dowodu tego uzyskaliśmy nowy wzór:

$$(76) \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = [(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}] \times \mathbf{d}.$$

Rozważmy szczególny przypadek wzoru (75), gdy $\mathbf{e} = \mathbf{a}$, $\mathbf{d} = \mathbf{b}$; wtedy (75) daje znaną z algebry identyczność Lagrange'a:

$$(77) \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2.$$

Lewa strona daje kwadrat długości wektora $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

5) Na mocy (73) i (71) jest:

$$(77a) \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{c} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}| - \mathbf{d} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = \\ = \mathbf{b} |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}| - \mathbf{a} |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}|. \end{array} \right.$$

Z powyższych własności często będziemy korzystali.

§ 7. Z analizy wektorów. Określmy teraz wektory, które otrzymuje się z danego wektora lub skalaru przez różniczkowanie. W § 5 i 6 rozpatrywaliśmy jeden, dwa lub trzy wektory i skalary, a więc skończoną ilość wektorów i skalarów (liczebnych), obecnie będziemy mieli do czynienia z nieskończonym zbiorem skalarów i wektorów przez to, że skalary i wektory będą funkcjami współrzędnych lub parametrów (pomocniczych).

a) Weźmy pod uwagę krzywą C o równaniu (43).

Spostrzegamy, że punkt bieżący M krzywej jest określony przez wektor $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(t)$, przy czym O oznacza początek układu odniesienia; ponieważ t zmienia się od a do b , więc temsamem uzyskaliśmy (naogół nieskończony) zbiór wektorów i nadto o tej szczególnej własności, że wszystkie wektory tego zbioru mają wspólny początek.

Pochodną tych wektorów i jej geometrycznym znaczeniem będziemy się zajmowali później (Rozdz. II § 2). Obecnie zajmiemy się zbiorem wektorów, które nie muszą mieć wspólnego początku.

Niech będzie dany wzdłuż C wektor \mathbf{u} :

$$(78) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Wartość t z przedziału $[a, b]$ wyznacza punkt M na C , który przyjmiemy za początek wektora $\mathbf{u}(t)$; punkt końcowy tego wektora będzie wyznaczony przez wektor $\mathbf{r}(t) + \mathbf{u}(t)$. Temsamem otrzymaliśmy wzdłuż C t. zw. pole wektorjalne (dokładniej: jednoparametrową rodzinę wektorów); składowe wektora (78) niech mają miary $u_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$); o nich założymy, że, jako funkcje parametru t , należą do klasy C^1 w $[a, b]$. Z wektora (78) utworzymy nowy wektor, który nazwiemy geometryczną pochodną wektora $\mathbf{u}(t)$ i oznaczymy znakiem:

$$(78 \text{ bis}) \quad \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt};$$

składowe tego wektora mają mieć miary¹ równe pochodnym:

$$(79) \quad \frac{du_i(t)}{dt} \quad (i = 1, 2, 3).$$

¹ Oczywiście przy założeniu, że osie układu odniesienia są nieruchome (kierunek osi *nie* zależy od t).

Spostrzegamy, że punkt biegnący M krzywej jest określony przez wektor $\overline{OM} = r(t)$, przy czym O oznacza początek układu odliczenia; ponieważ r zmienia się od a do b , więc jednocześnie uzyskujemy (może nie-skuteczny) zbiór wektorów i nadto o tej szczególnej własności, że wszystkie wektory tego zbioru mają wspólny początek.

Pochodną tych wektorów i jej geometryczną interpretacją będziemy się zajmowali później (Rozdz. II § 2). Obecnie zajmiemy się zbiorem wektorów, które nie muszą mieć wspólnego początku.

Niech będzie dany wzdłuż C wektor u :

$$(78) \quad u = u(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

Wartość t z przedziału $[a, b]$ wyznacza punkt M na C , który przyjmijmy za początek wektora $u(t)$; punkt końcowy tego wektora będzie wyznaczony przez wektor $r'(t) + u(t)$. Tymczasem otrzymaliśmy wzdłuż C i, t.j. pole wektorialne (dokładniej: jedynoparametrową rodzinę wektorów); składowe wektora (78) musi mieć zbiory $u_i(t)$ ($i=1, 2, 3$); o nich założymy, że, jako funkcje parametru t , należą do klasy C^1 w $[a, b]$. Z wektora (78) utworzymy nowy wektor, który nazwiemy geometryczną pochodną wektora $u(t)$ i oznaczymy znakiem:

$$(78a) \quad \frac{d}{dt} u(t)$$

składowe tego wektora mają taką samą wartość równą pochodnym:

$$(78b) \quad \frac{d}{dt} u_i(t) \quad (i=1, 2, 3)$$

Ważnym przy założeniu, że owe ciała odliczenia są od siebie niezależne (kierunek od nich zależy od t).

Wektor (78bis) można też określić na drodze geometrycznej. Opiórz wektora $u(t)$ weźmij wektor $u(t+h)$, gdzie $h \neq 0$ (ale takie, że takto $a \leq t+h \leq b$); wektor ten ma początek w punkcie $P(t+h)$ krzywej C ; przemieńmy go równoległa tak, by jego początek padł w $M(t)$; po przemieszczeniu otrzymamy wektor, który znów oznaczmy przez $u(t+h)$; otrzymamy różnicę $u(t+h) - u(t)$ i wektor (— jak się mówi — „ h razy krótszy“):

$$(89) \quad \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

Gdy $h \rightarrow 0$, to wektor (89) na mocy założenia dąży do wektora określonej długości i kierunku lub do wektora zerowego; ten graniczny wektor — jak się otrzymuje z rozważania składanych — jest właśnie wektorem (78bis). Oznaczmy go v i długość wektora (78); jest oczywiście

$$v = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2(t)}$$

Jeżeli wektor (78) nie jest zerowym, to z różniczkowania (78bis) wynika następująca zależność:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2(t)} = \\ &= \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^n v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{v} \left(u(t) \times \frac{du(t)}{dt} \right) \end{aligned}$$

Jeżeli w szczególności $v = \text{const}$, to lewa strona (90), a więc nawias prawej strony jest zerem, co wyraża $u \cdot \frac{du}{dt} = 0$; jeżeli wektor (78) ma stałą długość, to jest to wektor (78bis), to wektor

Wektor (78 bis) można też określić na drodze geometrycznej. Oprócz wektora $\mathbf{u}(t)$ weźmy wektor $\mathbf{u}(t+h)$, gdzie $h \neq 0$ (ale takie, że także $a \leq t+h \leq b$); wektor ten ma początek w punkcie $P(t+h)$ krzywej C ; *przenieśmy* go równolegle tak, by jego początek padł w $M(t)$; po przeniesieniu otrzymamy wektor, który znów oznaczymy przez $\mathbf{u}(t+h)$; utwórzmy różnicę $\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)$ i wektor (— jak się mówi — „ h razy krótszy“):

$$(80) \quad \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}$$

Gdy $h \rightarrow 0$, to wektor (80)' na mocy założenia dąży do wektora określonej długości i kierunku lub do wektora zerowego; ten graniczny wektor — jak się otrzymuje z rozważania składowych — jest właśnie wektorem (78 bis). Oznaczmy przez u długość wektora (78); jest oczywiście

$$u = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2(t)};$$

jeżeli wektor (78) nie jest zerowym, to z istnienia pochodnej (78 bis) wynika istnienie pochodnej:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2(t)} = \\ &= \frac{1}{u} \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{u} \left(\mathbf{u}(t) \times \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \right). \end{aligned}$$

Jeżeli w szczególności $u = \text{Const}$, to lewa strona $= 0$, a więc nawias prawej strony jest zerem, co wykazuje *tw.:* jeżeli wektor (78) ma stałą długość niezerową i jeżeli istnieje wektor (78 bis), to wektor

(78 bis) jest albo zerowym albo prostopadłym do wektora (78). Twierdzenie to wykażemy jeszcze nieco później na drodze wektorjalnej. Najbardziej interesującym jest przypadek szczególny, kiedy wektor (78) jest stale jednostkowym czyli $u \equiv 1$; ten przypadek będzie często poniżej zachodził.

Wykażemy, że wektor (78 bis) nie zależy od wyboru (potrójnie ortogonalnego) układu odniesienia. Rzeczywiście oprócz układu x_i weźmy układ x_i^* , który z układem x_i związany jest związkami (2), (3) i (5). Wektor u ma składowe o miarach u_i w układzie x_i i składowe o miarach u_i^* w układzie x_i^* , przyczem te miary łączą związki (47); utwórzmy wektor (78 bis) w układzie x_i i w układzie x_i^* ; w układzie x_i wektor (78 bis) ma składowe o miarach (79), w układzie x_i^* składowe o miarach

$$\frac{du_i^*}{dt} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ponadto wektor (78 bis) ma na mocy (47) w układzie x_i^* składowe o miarach

$$v_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{du_k}{dt} \quad (i = 1, 2, 3),$$

a stąd i z (47) wynika, że jest

$$v_k = \frac{du_k^*}{dt}.$$

A więc wektor (78 bis) ma składowe w układzie x_i^* niezależnie od tego, czy te składowe obliczymy dla układu x_i^* wprost na mocy definicji wektora (78 bis), czy też obliczymy składowe wektora (78 bis) najpierw dla układu x_i , a potem te składowe rzutujemy na osie x_i^* .

Uwaga. Dla pochodnych geometrycznych są ważne klasyczne prawa różniczkowania t. zn. można wykazać, że gdy skalar $a(t)$ i wektory $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ są różniczkowalne, to jest:

$$\frac{d(a\mathbf{u})}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{u} + a\frac{d\mathbf{u}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Dowodzi się tych wzorów przez niezależne wyliczenie obu stron i t. d.

b) Niech będzie dana funkcja $f(x_1, x_2, x_3)$, która w pewnej dziedzinie D należy do klasy C^1 . W każdym punkcie wewnętrznym dziedziny D określimy wektor, którego składowe mają mieć miary

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3);$$

wektor ten zwiemy *gradientem skalara* f i oznaczać¹ go będziemy **grad** f ; mamy więc w myśl dotychczasowych oznaczeń (zob. str. 21).

$$(81) \quad \text{grad } f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Wektor ten określa w D pole wektorjalne.

Wykażemy, że *wektor* (81) *nie zależy od wyboru układu odniesienia*. W tym celu oprócz układu x_i

¹ Niektórzy autorzy oznaczają go znakiem ∇f (czytaj: nabla f).

weźmy układ x_i^* , związany z układem x_i związkami (2), (3) i (5). Nietrudno się przekonać, że z (2) otrzymuje się

$$(82) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} (x_k^* - a_{k4}) \quad (i = 1, 2, 3),$$

wskutek tego skalar f przekształci się w sposób następujący:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, x_3) = f \left[\sum_{k=1}^3 a_{k1} (x_k^* - a_{k4}), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^3 a_{k2} (x_k^* - a_{k4}), \sum_{k=1}^3 a_{k3} (x_k^* - a_{k4}) \right], \end{array} \right.$$

prawą stronę oznaczymy przez $F(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$; ona jest wewnątrz D widocznie różniczkuwalna, nadto **grad** F ma w nowym układzie składowe o miarach:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^*} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ale na mocy (83) jest:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^*} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{ki} \quad (k = 1, 2, 3);$$

wzory te są postaci (47), co wykazuje, że wektor **grad** f nie zależy od wyboru układu odniesienia.

c) Załóżmy, że w dziedzinie D określony jest wektor $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, którego składowe mają miary $u_i(x_1, x_2, x_3)$, należące do C^1 wewnątrz D . Przy pomocy tego wektora utworzymy dla wnętrza D skalar, zwany **divergencją** (rozbieżnością) wektora \mathbf{u} , przez związek:

$$(83 \text{ bis}) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Naszkicujemy dowód na to, że $\operatorname{div} u$ nie zależy od wyboru trójortogonalnego układu odniesienia. Powołując się na wzory (3), (47) i (52), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_{ij} = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Rozważmy szczególny przypadek, kiedy dany jest skalar $f(x_1, x_2, x_3)$, który wewnątrz D należy do C^1 i kiedy jest $u = \operatorname{grad} f$. Wtedy

$$(54) \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \Delta_3 f,$$

gdzie przez $\Delta_3 f$ oznaczamy 1. rz. Laplasjan funkcji f t. zn.:

$$(55) \quad \Delta_3 f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

4) Z wektora u należącego do wewnątrz dziedziny D do klasy C^1 , wytworzymy nowy wektor, zwany rotorem (lub ² curl'em) wektora u i który też oznaczmy przez:

$$(56) \quad \operatorname{rot} u \quad \text{lub} \quad \operatorname{curl} u,$$

będzie to wektor, którego składowe mają miary:

$$(57) \quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Łatwo wykazać, że $\operatorname{rot} u$ nie zależy od wyboru prawoskrętnego trójortogonalnego układu odniesienia.

¹ t. zn. miary składowe $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, według (3).
² wymawia się: kurl.

wólny układ x_i^* , związany z układem x_i związkami (2), (3) i (5). Nie trudno się przekonać, że z (2) otrzymuje się

$$(82) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} (x_k^* - a_{k1}) \quad (i = 1, 2, 3),$$

wskutek tego skalar f przekształcił się w sposób następujący:

$$(83) \quad \left[f(x_1, x_2, x_3) = f \left[\sum_{k=1}^3 a_{k1} (x_k^* - a_{k1}), \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{k=1}^3 a_{k2} (x_k^* - a_{k1}), \sum_{k=1}^3 a_{k3} (x_k^* - a_{k1}) \right] \right]$$

prawą stronę oznaczymy przez $F(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$; ona jest wewnątrz D widocznie różniczkowalna, nadto gradient F ma w nowym układzie składowe o miarach:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^*} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ale na mocy (83) jest:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^*} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} a_{ki} \quad (k = 1, 2, 3);$$

wzory te są postaci (47), co wykazuje, że wektor $\text{grad} f$ nie zależy od wyboru układu odniesienia.

Ustalmy, że w dziedzinie D określony jest wektor $u(x_1, x_2, x_3)$, którego składowe mają miary $u_i(x_1, x_2, x_3)$, należące do C^1 wewnątrz D . Przy pomocy tego wektora utworzymy dla wnętrza D skalar, zwany dywergencją (rozbieżnością) wektora u , przez związek:

$$(83 bis) \quad \text{div } u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Naszkieujemy dowód na to, że $\operatorname{div} \mathbf{u}$ *nie zależy od wyboru trójortogonalnego układu odniesienia*. Powołując się na wzory (3), (47) i (82), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} &= \sum_{i,k,j} a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^*} = \sum_{i,k,j} a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} a_{ij} = \\ &= \sum_{k,j} \delta_{kj} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Rozważmy szczególny przypadek, kiedy dany jest skalar $f(x_1, x_2, x_3)$, który wewnątrz D należy do C^2 i kiedy jest $\mathbf{u} = \operatorname{grad} f$. Wtedy

$$(84) \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \Delta_2 f,$$

gdzie przez $\Delta_2 f$ oznaczyliśmy t. zw. laplasjan funkcji f t. zn.:

$$(85) \quad \Delta_2 f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

d) Z wektora \mathbf{u} , należącego¹ wewnątrz dziedziny D do klasy C^1 , wytworzymy nowy wektor, zwany rotorem (lub² curl'em) wektora \mathbf{u} i który też oznaczymy przez:

$$(86) \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} \text{ lub } \operatorname{curl} \mathbf{u},$$

będzie to wektor, którego składowe mają miary:

$$(87) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Łatwo wykazać, że $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ *nie zależy od wyboru prawoskrętnego trójortogonalnego układu odniesienia*.

¹ t. zn. miary składowych u_1, u_2, u_3 należą do C^1 .

² wymawia się: kerl.

nia. Podamy tylko szkic dowodu, opierającego się o wzory (47) i (82); jest bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k^*} - \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i^*} &= \sum_{j,l} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_k^*} - a_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_i^*} \right) = \\ &= \sum_{j,l} (a_{ij} a_{kl} - a_{kj} a_{il}) \frac{\partial u_j}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

do czego stosujemy (10) kolejno dla par wartości $(i=3, k=2)$, $(i=1, k=3)$, $(i=2, k=1)$. Rozważmy szczególny przypadek, kiedy skalar $f(x_1, x_2, x_3)$ należy wewnątrz D do C^2 i kiedy zarazem $\mathbf{u} = \text{grad } f$; wtedy jest

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \equiv 0;$$

podobnie czytelnik stwierdzi, że i dalsze dwie miary składowych (87) znikają identycznie wewnątrz D . Wobec tego:

$$(88) \quad \text{rot}(\text{grad } f) = \mathbf{0}.$$

Ale i odwrotnie: jeżeli \mathbf{u} należy wewnątrz dziedzi-
ny (D) do klasy C^2 i jeżeli wewnątrz (D) jest

$$(89) \quad \text{rot } \mathbf{u} \equiv \mathbf{0},$$

to istnieje skalar $f(x_1, x_2, x_3)$, który wewnątrz (D)
należy do C^1 i zarazem taki, że jest wewnątrz (D):

$$(90) \quad \mathbf{u} = \text{grad } f.$$

Z (89) wynika bowiem, że wewnątrz D jest:

$$(91)_{1,2,3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \equiv 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \equiv 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Z (91₁) otrzymujemy:

$$u_3 = \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_2 + \varphi(x_1, x_3),$$

gdzie φ jest na razie dowolną funkcją, która wewnątrz D należy do C^1 ; nadto punkt x_i^0 został obrany wewnątrz D . Stąd na mocy (91₂) wynika, że jest:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \\ &= \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

a to na mocy (91₃) daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\int_{x_2^0}^{x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_3} [u_1(x_1, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2^0, x_3)] + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_1(x_1, x_2^0, x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

i to daje oczywiście, że wewnątrz D jest

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1(x_1, x_2^0, x_3)}{\partial x_3},$$

więc:

$$\varphi = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{\partial u_1(x_1, x_2^0, x_3)}{\partial x_3} dx_1 + \psi(x_3),$$



przyczem ψ należy wewnątrz D do C^1 , a więc istnieje funkcja $\chi(x_3)$, która wewnątrz D należy do C^2 i taka, że jest

$$\psi(x_3) = \frac{d\chi}{dx_3}.$$

Przeto jest

$$u_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\int_{x_2^0}^{x_2} u_2 dx_2 + \int_{x_1^0}^{x_1} u_1(x_1, x_2^0, x_3) dx_1 + \chi(x_3) \right).$$

Wykonywując różniczkowanie po prawej, otrzymujemy na mocy (91_{1,2}) natychmiast, że jest

$$\chi = \int_{x_3^0}^{x_3} u_3(x_1^0, x_2^0, x_3) dx_3 + c,$$

gdzie c oznacza stałą. Kładąc

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1^0}^{x_1} u_1(x_1, x_2^0, x_3) dx_1 + \\ + \int_{x_2^0}^{x_2} u_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} u_3(x_1^0, x_2^0, x_3) dx_3 + c,$$

łatwo stwierdzimy, że zachodzi (90).

§ 8. Pojęcie wektora w R_3 . Obecnie podamy ogólną (i abstrakcyjną) definicję wektora w R_3 (t. zw. wektora swobodnego, przez co rozumiemy wektor o dowolnym początku). Zauważyliśmy w § 2, że wzory (2), (3) i (5) można dwojako pojmować. Otóż uważać je będziemy za przekształcenia trójortogonalnego prawego układu na takiż układ. I te przekształcenia tworzą grupę, czego tu dowodzić

nie są liniowe, do całkowania będzie wystarczył z re-
punktem str. 13-14.

Ważny tutaj jest uwagę oddać na prawy i po-
trojnie ortogonalne w R_3 i trzy wektory u_1, u_2, u_3 . Od
układu x , przechodzimy do układu x'' za pomocą prze-
kształceń (2), (3) i (4). Temu układowi przydzielamy
liczby u_i'' ($i=1, 2, 3$) przy pomocy wzorów (47).
Tężeż, że w ten sposób możemy przedstawić i so-
bicie ortogonalnemu układowi w R_3 przydzielili-
my jednorodnie dowolnym trójki liczb u_i
($i=1, 2, 3$). By to wykazać, przechodzimy od układu
 x'' do prawego i pomocniczego układu x' i
 x''' przy pomocy wzorów (31) i (33). Wtedy liczby
 x''_i przejdą w liczby

$$(32) \quad u_i'' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j'' \quad (i=1, 2, 3)$$

Ale od układu x' możemy bezpośrednio przejść
do układu x''' przy pomocy wzorów (33), (34) i (35);
wzrostek tego w, przejdą na liczby

$$u_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j' \quad (i=1, 2, 3)$$

Mamy wykazać, że jest
 $u_i' = u_i''$ ($i=1, 2, 3$)

Wykazywamy (34), (41) i (42) że
$$u_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 a_{kj} u_k'' \right) = \sum_{k=1}^3 a_{ik} u_k'' = \sum_{k=1}^3 a_{ik} u_k''$$

($i=1, 2, 3$)

to było do udowodnienia
Dla uporządkowania liczb liczb u_i ($i=1, 2, 3$)
możemy skorzystać z tego, że w układzie x''
wektory są ortogonalne.

przecież ψ należy wewnątrz D , do C^1 , a więc istnieje funkcja $\chi(x_2)$, która wewnątrz D należy do C^1 i taka, że jest

$$\psi(x_2) = \frac{d\chi}{dx_2}$$

Przeto jest

$$u_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\int_{x_2}^{\alpha} u_1 dx_1 + \int_{x_2}^{\beta} u_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \chi(x_2) \right)$$

Wykonywując różniczkowanie po prawej, otrzymujemy na mocy (91_{1,2}) natychmiast, że jest

$$\chi = \int_{x_2}^{\alpha} u_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 + c,$$

gdzie c oznacza stałą. Kładąc

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_2}^{\alpha} u_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 +$$

$$+ \int_{x_2}^{\beta} u_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_2}^{\gamma} u_3(x_1, x_2, x_3) dx_1 + c,$$

łatwo stwierdzić, że zachodzi (90).

§ 8. Pojęcie wektora w R_n . Obecnie podamy ogólną (i abstrakcyjną) definicję wektora w R_n (t. zw. wektora swobodnego, przez co rozumimy wektor w dowolnym porządku). Zauważymy w § 2, że wzory (7), (8) i (9) można dwójako pomnożyć. Otóż wektor α będziemy oznaczać przez dwójako pomnożony wektor α i będzie on takim samym wektorem jak α i to samo dotyczy wektora β i γ .

nie będziemy, bo rachunek będzie identyczny z rachunkiem str. 13 i 14.

Weźmy teraz pod uwagę układ x_i prawy i potrójnie ortogonalny w R_3 i trzy liczby u_1, u_2, u_3 . Od układu x_i przejdźmy do układu x_i^* zapomocą przekształceń (2), (3) i (5). Temu układowi przydzielmy liczby u_i^* ($i = 1, 2, 3$) przy pomocy wzorów (47). *Twierdzimy, że w ten sposób każdemu prawemu i potrójnie ortogonalnemu układowi w R_3 przydzieliliśmy jednoznacznie uporządkowaną trójkę liczb u_i ($i = 1, 2, 3$).* By to wykazać, przejdziemy od układu x_i^* do prawego i potrójnie ortogonalnego układu x_i^{**} przy pomocy wzorów (31) i (32). Wtedy liczby u_i^* przejdą w liczby:

$$(92) \quad u_i^{**} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} u_k^* \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ale od układu x_i możemy bezpośrednio przejść do układu x_i^{**} przy pomocy wzorów (33), (34) i (35); wskutek tego u_i przejdą na liczby

$$u_i' = \sum_{k=1}^3 c_{ik} u_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

Mamy wykazać, że jest

$$u_i' = u_i^{**} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Rzeczywiście (34), (47) i (92) dają:

$$u_i^{**} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \left(\sum_{j=1}^3 a_{kj} u_j \right) = \sum_{k,j} b_{ik} a_{kj} u_j = \sum_{j=1}^3 c_{ij} u_j, \\ (i = 1, 2, 3),$$

a to było do udowodnienia.

Otóż uporządkowaną trójkę liczb u_i ($i = 1, 2, 3$) nazywamy wektorem; liczby u_i miarami jego składowych w układzie x_i , przyczem te miary w każdym

układzie mają określone wartości tak, jak powyżej podano. Ze wzorów (47) wynika, że jest

$$\sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^{*2}},$$

co wykazuje, że lewa strona tej równości jest niezmiennikiem przy przekształceniach układu; niezmiennik ten nosi nazwę długości wektora \mathbf{u} i jest równy:

$$\sqrt{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}.$$

Uwaga. Uważając wzory (2) za wzory zmiany układu odniesienia (a więc punktowi x_i przydzielając nowe współrzędne), rozpatrywaliśmy wzory (47), jako przedstawiające w nowym układzie odniesienia wektor, dany przez liczby (u_i) w układzie x_i . Ale można wzory (2) rozważać, jako przekształcenie punktu x_i na punkt x_i^* , wtedy wzory (47) uważamy, jako wzory, które z wektora (u_i) wyprowadzają nowy wektor (u_i^*), powstały z pierwszego przez ruch (skok) euklidesowy (2).

§ 9. Prędkość ruchu. Rozważmy dwa układy osi prawe i trójortogonalne: nieruchomy układ (stały) $O^*x_i^*$, oraz ruchomy Ox_i ($i=1, 2, 3$). Dowolny punkt P niech ma współrzędne x_i, x_i^* ; między nimi istnieją związki (2), (3) i (5), nadto współczynniki a_{il} ($i=1, 2, 3, l=1, 2, 3, 4$) niech będą funkcjami czasu t ; o funkcjach tych założymy, że należą do klasy C^1 (na razie) w przedziale czasu $[a, b]$, gdzie $a < b$. Punkt P wobec układu ruchomego może mieć t. zw. własny ruch t. zn. jego współrzędne x_i nie muszą być stałe, będą na ogół funkcjami czasu, o których założymy, że należą też do C^1 w $[a, b]$. Wobec tych

założeń współrzędne x_i^* mają na mocy (2) również ciągłe pierwsze pochodne w $[a, b]$. I jest:

$$(93) \quad \frac{dx_i^*}{dt} = \sum_k \left(\frac{da_{ik}}{dt} x_k + a_{ik} \frac{dx_k}{dt} \right) + \frac{da_{i4}}{dt} \quad (i=1, 2, 3).$$

Są to miary rzutów wektora prędkości punktu $P(x_i, x_i^*)$ na osie układu *nieruchomego*. Posługując się tabelką:

$$(94) \quad \begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{array} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right. \end{array},$$

w znany sposób obliczymy miary v_1, v_2, v_3 rzutów wektora prędkości punktu P na osie *ruchomego* układu; otóż jest na mocy (93)

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{dx_i^*}{dt} = \sum_{i,k} \left(a_{ij} \frac{da_{ik}}{dt} x_k + a_{ij} a_{ik} \frac{dx_k}{dt} \right) + \\ + \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{da_{i4}}{dt} \quad (j=1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Położmy dla skrócenia:

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \sum_{i=1}^3 a_{i3} \frac{da_{i2}}{dt}, \quad p_2 = \sum_{i=1}^3 a_{i1} \frac{da_{i3}}{dt}, \\ p_3 = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \frac{da_{i1}}{dt}. \end{array} \right.$$

Stąd i na mocy (3) otrzymujemy:

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i a_{i2} \frac{da_{i3}}{dt} = -p_1, \quad \sum_{i=1}^3 a_{i3} \frac{da_{i1}}{dt} = -p_2, \\ \sum_{i=1}^3 a_{i1} \frac{da_{i2}}{dt} = -p_3, \quad \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{da_{ij}}{dt} = 0 \quad (j=1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Kładąc w (95) kolejno $j = 1, 2, 3$ i korzystając ze wzorów (3), (96) i (97), uzyskujemy wzory:

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{dx_1}{dt} + p_2 x_3 - p_3 x_2 + \xi_1; \\ v_2 = \frac{dx_2}{dt} + p_3 x_1 - p_1 x_3 + \xi_2; \\ v_3 = \frac{dx_3}{dt} + p_1 x_2 - p_2 x_1 + \xi_3, \end{array} \right.$$

gdzie położyliśmy

$$(99) \quad \xi_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{da_{i4}}{dt} \quad (j=1, 2, 3).$$

Wzory (98) dają miary składowych wektora prędkości punktu P w kierunkach osi układu *ruchomego*. Jak widać — prędkość ta jest sumą geometryczną dwóch prędkości: jednej t.zw. własnej (o miarach składowych): $(dx_i : dt)$ i drugiej t.zw. prędkości unoszenia, zależnej więc od ruchu układu; ta ostatnia jest znów sumą geometryczną dwóch prędkości: jednej zależnej od translacji układu (miarąmi rzutów tej prędkości na osie ruchomego układu są ξ_1, ξ_2, ξ_3) i drugiej zależnej od obrotowego ruchu układu ruchomego naokoło osi obrotu (przechodzącej przez początek układu ruchomego). Prędkość linjowa ruchu obrotowego ma składowe o miarach: $p_2 x_3 - p_3 x_2, p_3 x_1 - p_1 x_3, p_1 x_2 - p_2 x_1$; — jak wiadomo z § 5 — wektor ten jest równy $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}$, gdzie \mathbf{w} jest wektorem prędkości kątowej obrotu (o miarach składowych p_1, p_2, p_3 w kierunku osi x_i), a $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$.

Oś (chwilowa) obrotu ma tę własność, że jej punkty mają prędkość (linjową) ruchu obrotowego

równą zero, a więc dla punktów w osi obrotu ma być $w \wedge r = 0$; jeżeli założymy, że jest $w \neq 0$, to rząd dla osi obrotu otrzymamy równanie:

$$(100) \quad r = c w,$$

gdzie c jest parametrem zmiennym wzdłuż osi obrotu; (100) jest więc równaniem chwilowej osi (9) obrotu.

Wzory (98) można uzyskać przy pomocy metody wektorowej. O, O^* oznaczają początek układu ruchomego i nieruchomego; niech P oznacza dowolny punkt w R_3 . Niech $r = OP$, $r^* = O^*P$; więc $r^* = r + O^*O$ or $r = r^* - a_3$, gdzie a_3, a_3^* oznaczają jednostkowy wektor wzdłuż osi obrotu; e_3^* jest jednostkowy wektor od osi x_3^* . Wartość r wyraży się wówczas wzdłuż osi ruchomego układu, gdzie $r = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$.

Jeżeli przy rozkładzie wektora od nieruchomego układu

$$r = \sum_{i=1}^3 b_i e_i^*, \quad \text{stąd } r \times e_3^* = \sum_{i=1}^2 b_i (e_i^* \times e_3^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^2 b_i \delta_{3i} = b_2 e_1^* - b_1 e_2^*, \quad \text{tedy } b_1 = r \times e_3^* \cdot e_2^* = \sum_{i=1}^2 x_i (e_i \times e_3^*) \cdot e_2^*;$$

podobnie otrzymuje się $a_2 = \sum_{i=1}^2 a_{3i} e_i$, jest więc

$$r^* = \sum_{i=1}^2 x_i (e_i \times e_3^*) e_i^* + \sum_{i=1}^2 a_{3i} e_i^*.$$

(Wektory e_i^* są niezależne od czasu). Wykażemy teraz, że jest

$$\sum_{i=1}^2 (e_i \times e_3^*) (e_i \times e_3^*) = \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Można to wykazać z powołaniem się na (3); bo $a_{3i} = e_i \times e_3^*$, ale można to również wykazać bezpośrednio. Jest bowiem $a_i = \sum_{j=1}^2 (e_j \times e_3^*) e_j^*$; stąd

Kładąc w (95) kolejno $i = 1, 2, 3$ i korzystając ze wzorów (8), (96) i (97), otrzymujemy wzory:

$$(98) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} + p_1 x_2 - p_2 x_3 + \xi_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} + p_2 x_3 - p_3 x_1 + \xi_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} + p_3 x_1 - p_1 x_2 + \xi_3 \end{cases}$$

gdzie położyliśmy

$$(99) \quad \xi_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \frac{da_k}{dt} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Wzory (98) dają miary składających wektorew prędkości punktu P w kierunkach osi układu ruchomego. Jak wiadzieć — prędkość ta jest sumą geometryczną dwóch prędkości: jednej (zw. własnej) o mierze (mierze składowych): (dx_i/dt) i drugiej (zw. prędkości umieszczenia, zależnej więc od ruchu układu); ta ostatnia jest znów sumą geometryczną dwóch prędkości: jednej zależnej od translacji układu (miarami rytmów tej prędkości na osie ruchomego układu są ξ_1, ξ_2, ξ_3) i drugiej zależnej od obrotowego ruchu układu ruchomego (niektóre osi obrotu — (przechodzącej przez punkt O układu ruchomego). Prędkość Bujowa ruchu obrotowego ma składniki o miarach: $p_1 x_2 - p_2 x_3, p_2 x_3 - p_3 x_1, p_3 x_1 - p_1 x_2$; — jak wiadomo $x \neq \dot{x}$ — wektor ten jest równy $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}$, gdzie \mathbf{w} jest wektorem prędkości kątowej obrotu (o miarach składowych p_1, p_2, p_3 w kierunku osi x, y, z) a $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$.

Osie układu obrotu są zwrócone do tej samej miary (miary) ruchu obrotowego

równą zeru, a więc dla punktów osi obrotu ma być $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r} = 0$; jeżeli założymy, że jest $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, to stąd dla osi obrotu otrzymamy równanie:

$$(100) \quad \mathbf{r} = \sigma \mathbf{w},$$

gdzie σ jest parametrem zmiennym wzdłuż osi obrotu; (100) jest więc równaniem chwilowej osi (l) obrotu.

Wzory (98) można uzyskać przy pomocy metody wektorjalnej. \mathbf{O} i \mathbf{O}^* oznaczają początek układu ruchomego i nieruchomego; niech P oznacza dowolny punkt w R_3 . Niech $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$, $\mathbf{r}^* = \mathbf{O}^*P$; więc $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{O}^*\mathbf{O} = \mathbf{r} + \mathbf{a}_4$; niech \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_k^* oznaczają jednostkowy wektor na osi x_i , wzgl. jednostkowy wektor na osi x_k^* . Wektor \mathbf{r} rozłożmy na składowe wzdłuż osi ruchomego układu; będzie tedy $\mathbf{r} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$,

a przy rozkładzie wzdłuż osi nieruchomego układu

$$\mathbf{r} = \sum_k b_k \mathbf{e}_k^*, \quad \text{stąd } \mathbf{r} \times \mathbf{e}_j^* = \sum_k b_k (\mathbf{e}_k^* \times \mathbf{e}_j^*) = \\ = \sum_k b_k \delta_{kj} = b_j, \quad \text{tedy } b_j = \mathbf{r} \times \mathbf{e}_j^* = \sum_i x_i (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j^*);$$

podobnie otrzymuje się $\mathbf{a}_4 = \sum_k a_{k4} \mathbf{e}_k$, jest więc

$$\mathbf{r}^* = \sum_{ik} x_i (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_k^* + \sum_k a_{k4} \mathbf{e}_k^*.$$

(Wektory \mathbf{e}_k^* są niezależne od czasu). Wykażemy teraz, że jest

$$\sum_{k=1}^3 (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Można to wykazać z powołaniem się na (3), bo $a_{ki} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*$, ale można to również wykazać bezpośrednio. Jest bowiem $\mathbf{e}_i = \sum_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_k^*$; stąd

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_{il} &= \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_l = \sum_{kj} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_j^*) (\mathbf{e}_k^* \times \mathbf{e}_{*j}) = \\ &= \sum_{kj} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_j^*) \delta_{kj} = \\ &= \sum_k (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_k^*), \quad \text{c. b. d. u.} \end{aligned} \right.$$

Z powyższego mamy

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \sum_{ik} \frac{dx_i}{dt} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) \mathbf{e}_k^* + \sum_{ik} x_i \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) \mathbf{e}_k^* + \\ + \sum_k \frac{da_{k4}}{dt} \cdot \mathbf{e}_k^*.$$

Wzór ten określa wektor prędkości punktu P ; wektor ten rzutujemy teraz na oś x_j (ruchomego układu); miara tego rzutu będzie następująca:

$$v_j = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \times \mathbf{e}_j = \sum_{ik} \frac{dx_i}{dt} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k^*) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*) + \\ + \sum_{ik} x_i \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*) + \sum_k \frac{da_{k4}}{dt} (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*) = \\ = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \delta_{ij} + \sum_i x_i p_{ij} + \zeta_j = \\ = \frac{dx_j}{dt} + \sum_i x_i p_{ij} + \zeta_j,$$

gdzie położyliśmy

$$(102) \quad p_{ij} = \sum_k \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*).$$

Wzór (101) różniczkowany daje: $p_{ij} + p_{ji} = 0$, więc $p_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Nadto widać na mocy (96), że jest

$$(103) \quad p_{23} = p_1, \quad p_{31} = p_2, \quad p_{12} = p_3;$$

temsamem uzyskaliśmy wzory (98).

§ 10. Ruch śrubowy. Zajmiemy się obecnie samym ruchem unoszenia; w tym celu założmy, że punkt x_i niema ruchu własnego, wobec czego wzory (98) redukują się do wzorów:

$$(104) \begin{cases} v_1 = \xi_1 + p_2 x_3 - p_3 x_2, & v_2 = \xi_2 + p_3 x_1 - p_1 x_3, \\ v_3 = \xi_3 + p_1 x_2 - p_2 x_1; \end{cases}$$

są to miary składowych prędkości \mathbf{v} unoszenia w kierunku osi układu ruchomego, a więc:

$$(105) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r},$$

przyczem \mathbf{u} oznacza stały (t. zn. niezależny od x_i) wektor prędkości translacji. W każdym punkcie $P(x_i)$ wyznacza (105) wektor \mathbf{v} ; (105) wyznacza więc w R_3 pole wektorjalne, będące sumą dwóch pól: pola jednorodnego t. zn. utworzonego przez stały wektor (prędkości translacji) \mathbf{u} i pola niejednorodnego (pochodzącego od obrotu naokoło chwilowej osi (l) (100) obrotu). Naogół wektor \mathbf{u} ma kierunek różny od kierunku wektora \mathbf{w} . Wykażemy, że pole wektora \mathbf{v} można uważać za sumę dwóch innych pól: pola jednorodnego \mathbf{u}' i pola niejednorodnego $\mathbf{w}' \wedge \mathbf{r}'$ (pochodzącego od obrotu naokoło innej osi chwilowej (l') z prędkością kątową \mathbf{w}' , nadto \mathbf{r}' oznacza wektor od punktu na (l') do P); przytem \mathbf{u}' ma mieć kierunek osi (l'), na której leży \mathbf{w} . Ruch więc z prędkością \mathbf{v} można uważać za wypadkowy z obrotu naokoło (l') i translacji w kierunku (l') — ruch jest tedy *ruchem śrubowym* o osi (l'). Jeżeli to wykażemy, to pole wektorów prędkości \mathbf{v} można uważać za pole prędkości pewnego ruchu śrubowego. To wysłowimy teraz w postaci twierdzenia. Zauważmy jeszcze, że \mathbf{u}' jako wektor współkierun-

kowy z \mathbf{w}' można przedstawić w postaci $\mathbf{u}' = \lambda \mathbf{w}'$, gdzie λ oznacza skalar liczbowy.

Tw.¹ Jeżeli w każdym punkcie $P(x_i)$ przestrzeni R_3 dany jest wektor \mathbf{u} według (105), przyczem wektory \mathbf{u} i \mathbf{w} są stałe, a wektor \mathbf{w} jest różny od $\mathbf{0}$, nadto \mathbf{r} oznacza wektor, którego punktem początkowym jest punkt osi l (na niej leży \mathbf{w}), a punktem końcowym jest punkt P , to istnieje jednoznacznie określona oś (l'), równoległa do l i liczba λ (niezależna od punktu P) tak, iż jest:

$$(106) \quad \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}' + \lambda \mathbf{w},$$

przyczem \mathbf{r}' oznacza wektor o początku w M' na l' , a końcu w P .

Dowód. Najpierw wykażemy, że w (105) początek wektora \mathbf{r} może być dowolnie przyjęty na (l); rzeczywiście weźmy punkt M na l , wyznaczony przez wektor \mathbf{r}^* ; ponieważ M leży na osi (l), której równanie podaje wzór (100), więc istnieje stała σ^* taka, że $\mathbf{r}^* = \sigma^* \mathbf{w}$ i mamy: $\mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP}$, a stąd $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{OP} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{OM} + \mathbf{MP}) = \mathbf{w} \wedge (\sigma^* \mathbf{w} + \mathbf{MP}) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{MP}$, bo $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ i temsamem przygotowawcza część wykazana. To samo odnosi się do (106); dla wektora \mathbf{r}' można obracać dowolnie punkt początkowy na (l').

Wykażmy z kolei jednoznaczność przedstawienia (106) t. zn.: jeżeli dla pewnych dwóch osi l i l' jest:

$$(107) \quad \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{w}' \wedge \mathbf{r}' + \lambda' \mathbf{w}',$$

to (l') jest identyczne z (l), $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, $\lambda' = \lambda$.

¹ Autor niniejszego podręcznika zaprojektował prosty model, który pozwala znaleźć oś (l') twierdzenia, gdy dane (l), \mathbf{u} i \mathbf{w} .

kowy $\lambda w'$ można przedstawić w postaci $u' = \lambda w'$, gdzie λ oznacza skalar liczbowy.

Tw. 1. Jeżeli w każdym punkcie $X(\alpha)$ przestrzeni N_3 dany jest wektor u według (105), przyciem wektora u i w są stałe, a wektor w jest różny od 0, wtedy r oznacza wektor, którego punktem początkowym jest punkt osi l (na niej leży w), a punktem końcowym jest punkt P , to istnieje jednoznacznie określona osi (l) , równoległa do l i liczba λ (niezależna od punktu P) tak, iż jest:

$$(106) \quad u + w \wedge r = w \wedge r' + \lambda w,$$

przeciem r' oznacza wektor o początku w M na l , a końcem w P .

Dowód. Najpierw wykazemy, że w (105) początek wektora r może być dowolnie przyjęty na l ; rzeczywiście weźmy punkt M na l , wyznaczony przez wektor r'' ; ponieważ M leży na osi (l) , której równanie podaje wzór (100), więc istnieje stała c' taka, że $r'' = c'w$ i mamy: $OP = OM + MP$, a więc $w \wedge r = w \wedge OP = w \wedge (OM + MP) = w \wedge (c'w + MP) = w \wedge MP$, bo $w \wedge w = 0$ i temsamem przygotowawcza część wykazana. To samo odnosi się do (106); dla wektora r' można obrać dowolnie punkt początkowy na l .

Wykazywać z kolei jednoznaczność przedstawienia (106) t. zn.: jeżeli nie pewnych dwóch osi (l) jest:

$$(107) \quad w' \wedge r' + \lambda w = w \wedge r' + \lambda' w,$$

to (l') jest identyczne z (l) , $w' = w$, $\lambda' = \lambda$.

1) Autor niniejszego podręcznika zaprzeciwił próby wyznaczenia, który pozwala znaleźć osi (l) , telordżac, gdy $w = 0$, $u \neq 0$.

Pomnożmy (107) skalarnie przez w ; otrzymamy po łatwej przeróbce:

$$(\lambda w - \lambda' w') \times w = |w, w', r|.$$

To zachodzi dla każdego punktu P ; ale lewa strona nie zależy od położenia punktu P , więc i prawa od P nie zależy, zatem prawa ma stałą wartość dla wszelkich punktów P ; jednak widoczne, że, gdy P leży na (r) , to $r' = 0$ i prawa strona jest zerem; więc jest w całej przestrzeni:

$$(108) \quad |w, w', r| = 0.$$

Twierdzimy, że stąd wynika, iż jest $w \wedge w' = 0$. Załóżmy bowiem, że jest $w \wedge w' \neq 0$; ale (108) daje

$$(109) \quad (w \wedge w') \times r' = 0;$$

teraz natrafimy na sprzeczność, biorąc punkt L lic. by kierunek $M'P$, (M' leży na (r)) był prostopadły do w i w' ; dla takich P istnieją więc liczby σ takie, że $r' = \sigma(w \wedge w')$, a wtedy (109) daje $\sigma = 0$ dla każdego P w podanyim kierunku. Jest więc $r \wedge w' = 0$, co wobec założenia $w \neq 0$ wykazuje istnienie liczby μ takiej, że $w = \mu w'$ czyli $(r) // l$ lub (r) schodzi się z l . Wobec tego (107) przyjmuje postać:

$$(110) \quad w \wedge r + \lambda w = \mu w \wedge r' + \lambda' \mu w,$$

a mnożąc to skalarnie przez w , otrzymamy: $(\lambda + \lambda' \mu)(w \times w) = 0$, skąd widzimy, że jest $\lambda = -\lambda' \mu$, nie $w \neq 0$; a wtedy (110) daje

$$(111) \quad w \wedge (r - \mu r') = 0.$$

Jeżeliby było $(r) // l$, to można by obrać P' tak, iż (111) nie jest spełniona, bo dość obrać P' na (r) . A więc (r) schodzi się z l .

Obecnie wykazemy, że równości (106) można

Pomnóżmy (107) skalarnie przez \mathbf{w} ; otrzymamy po łatwej przeróbce:

$$(\lambda \mathbf{w} - \lambda' \mathbf{w}') \times \mathbf{w} = |\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{r}'|.$$

To zachodzi dla każdego punktu P ; ale lewa strona nie zależy od położenia punktu P , więc i prawa od P nie zależy, zatem prawa ma stałą wartość dla wszelkich punktów P ; jednak widoczne, że, gdy P leży na (l') , to $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ i prawa strona jest zerem; więc jest w całej przestrzeni:

$$(108) \quad |\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{r}'| = 0.$$

Twierdzimy, że stąd wynika, iż jest $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = \mathbf{0}$. Załóżmy bowiem, że jest $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' \neq \mathbf{0}$; ale (108) daje

$$(109) \quad (\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}') \times \mathbf{r}' = 0;$$

zaraz natrafimy na sprzeczność, biorąc punkt P tak, by kierunek $M'P$, (M' leży na l') był prostopadły do \mathbf{w} i \mathbf{w}' ; dla takich P istnieją więc liczby σ takie, że $\mathbf{r}' = \sigma (\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}')$, a wtedy (109) daje $\sigma = 0$ dla każdego P w podanym kierunku. Jest więc $\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}' = \mathbf{0}$, co wobec założenia $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ wykazuje istnienie liczby μ takiej, że $\mathbf{w}' = \mu \mathbf{w}$ czyli $l' // l$ lub l' schodzi się z l . Wobec tego (107) przyjmie postać:

$$(110) \quad \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} + \lambda \mathbf{w} = \mu \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}' + \lambda' \mu \mathbf{w},$$

a mnożąc to skalarnie przez \mathbf{w} , otrzymamy: $(\lambda - \lambda' \mu) (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) = 0$, skąd widać, że jest $\lambda = \lambda' \mu$, bo $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$; a wtedy (110) daje

$$(111) \quad \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r} - \mu \mathbf{r}') = \mathbf{0}.$$

Jeżeliby było $l' // l$, to możnaby obrać P tak, iż (111) nie jest spełnione, bo dość obrać P na l' . A więc l' schodzi się z (l) .

Obecnie wykażemy, że równości (106) można

uczynić zadość. W tym celu przetnijmy l płaszczyzną $\pi \perp l$; niech M będzie punktem przecięcia. Wektor \mathbf{u} rozłożmy na dwie składowe: \mathbf{u}' równoległe do (l) , \mathbf{u}'' w płaszczyźnie π ; znajźmy na π punkt P_o taki, że $\mathbf{u}'' + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_o = \mathbf{0}$, [będzie to punkt przecięcia (l') z π]. Mnożąc tę równość wektorjalnie przez \mathbf{w} , otrzymamy na mocy (71): $\mathbf{u}'' \wedge \mathbf{w} + \mathbf{r}_o (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - \mathbf{w} (\mathbf{r}_o \times \mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Ale $\mathbf{r}_o = \mathbf{M}P_o \perp \mathbf{w}$, więc $\mathbf{r}_o \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$; wobec tego jest

$$(112) \quad \mathbf{r}_o = \frac{1}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}} (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}''),$$

i taki punkt P_o istnieje i tylko jeden. Przez ten punkt P_o prowadźmy $l' \parallel l$; nadto przyjmujemy $\lambda \mathbf{w} = \mathbf{u}'$, a stąd $\lambda (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u}' \times \mathbf{w}$, a to pozwala wyznaczyć λ . Wykażmy, że w ten sposób jest (106) spełnione. Rzeczywiście mamy:

$$(113) \quad \begin{cases} \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}' + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{P}_o \mathbf{P} + \mathbf{u}' = \\ = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{M}\mathbf{P} - \mathbf{M}\mathbf{P}_o) + \mathbf{u}' = \\ = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) + \mathbf{u}' = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} - \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_o + \mathbf{u}'. \end{cases}$$

Ale na mocy (73) jest

$$(114) \quad \begin{cases} \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_o = \frac{1}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}} [\mathbf{w} \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}'')] = \\ = \frac{1}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}} [\mathbf{w} (\mathbf{w} \times \mathbf{u}'') - \mathbf{u}'' (\mathbf{w} \times \mathbf{w})]. \end{cases}$$

Ale $\mathbf{u}'' \perp \mathbf{w}$, więc $\mathbf{w} \times \mathbf{u}'' = \mathbf{0}$, zatem (114) redukuje się do

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}_o = -\mathbf{u}''$$

i wtedy (113) przechodzi na związek:

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}' + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{u}'' + \mathbf{u}' = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{u},$$

c. b. d. u.

Uwaga. Gdy $\mathbf{u}'' = 0$, to dany ruch jest już śrubowym i wtedy (l') schodzi się z (l); zagadnienie staje się wtedy banalnym. —

Ze wzoru (106) otrzymamy λ , mnożąc skalar-
nie (106) przez \mathbf{w} ; uzyskujemy widocznie

$$(115) \quad \lambda = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}.$$

[Przy tej wartości na λ daje $\lambda \mathbf{w}$ składową wektora \mathbf{u} w kierunku l tak, iż $\mathbf{u} - \lambda \mathbf{w}$ daje składową wektora \mathbf{u} w kierunku prostopadłym do l .] Równanie osi (l') otrzymamy, kładąc $\mathbf{r}' = \sigma \mathbf{w}$ w (106), wskutek czego $\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}' = \mathbf{0}$, a więc:

$$(116) \quad \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r} = \lambda \mathbf{w},$$

gdzie λ ma wartość (115). Równanie to umiemy rozwiązać (zob. § 5, wzór 70 ter), a mianowicie jest:

$$(117) \quad \mathbf{r} = \frac{1}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) + \sigma \mathbf{w};$$

jest to równanie chwilowej osi obrotu śrubowego ruchu unoszenia. Otrzymaliśmy więc ostatecznie

$$(118) \quad \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}'.$$

Jest to przedstawienie pola wektora \mathbf{v} w postaci wektora prędkości ruchu śrubowego.

Ruch ten może się redukować do „czystego“ obrotu t. zn. bez translacji, gdy $\lambda = 0$ czyli na mocy (115), gdy:

$$(118 \text{ bis}) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = 0,$$

co daje, że wektor \mathbf{u} (o miarach składowych ξ_i) jest zerowym wektorem lub niezerowym i wtedy prostopadłym do osi obrotu.

Uwaga. Zwykła metoda t. j. analityczna, której się używa przy wykładzie zagadnienia o ruchu śrubowym, opiera się na następującej uwadze. Założmy, że już ruch śrubowy został znaleziony; każdy więc punkt ma dwie prędkości, prędkość translacji u' w kierunku osi l' obrotu i prędkość, pochodzącą z obrotu naokoło l' , a więc prostopadłą do u' ; te dwie prędkości mają wypadkową, będącą przekątnią pewnego prostokąta, którego jeden bok $= u'$, tedy wektor wypadkowej prędkości ma długość większą od długości wektora u' naogół, gdyż właśnie dla punktów osi l' jest prędkość, pochodząca z obrotu, równą zeru, wobec czego punkty osi obrotu l' scharakteryzowane są tem, że długość wektora wypadkowej prędkości (a więc też kwadrat tej długości) jest *minimum*. Ta właśnie uwaga pozwala znaleźć i oś l' i translację. Otóż kwadrat długości wektora v wynosi według (104):

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 = (\xi_1 + p_2 x_3 - p_3 x_2)^2 +$$

$$+ (\xi_2 + p_3 x_1 - p_1 x_3)^2 + (\xi_3 + p_1 x_2 - p_2 x_1)^2;$$

oś l' obrotu to punkty (x_i) o własności:

$$\frac{\partial (v^2)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

co się wyrazi w ten sposób, że macierz

$$(119) \quad \begin{vmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{vmatrix}$$

jest rzędu 1^{go}, a więc jest

$$(120) \quad \begin{cases} \xi_1 + p_2 x_3 - p_3 x_2 = \lambda p_1, & \xi_2 + p_3 x_1 - p_1 x_3 = \lambda p_2, \\ \xi_3 + p_1 x_2 - p_2 x_1 = \lambda p_3; \end{cases}$$

są to równania osi L , jeżeli jest:

$$(121) \quad \lambda = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i^2}$$

prosta L ma widoczną dostawę kierunkową proporcjonalną do p_i . Oznaczmy przez x_i^0 współrzędne dowolnie obranego punktu M^0 na L , to z ostatnich wzorów otrzymamy:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda p_1 - p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0, & \xi_2 &= \lambda p_2 - p_2 x_1^0 + p_1 x_2^0, \\ & & \xi_3 &= \lambda p_3 - p_1 x_3^0 + p_2 x_1^0 \end{aligned}$$

i wskutek tego jest

$$(122) \quad v_1 = \lambda p_1 + p_2(x_3 - x_3^0) - p_3(x_2 - x_2^0), \dots$$

co odpowiada wzorowi (118). Czysty obrót (bez translacji równoległej do osi obrotu) będzie, gdy $\lambda = 0$ czyli gdy

$$(123) \quad \sum_{i=1}^3 p_i \xi_i = 0.$$

Czytelnik z łatwością poruszy na powyższym dwie wielkie zalety metody wektorjalnej: zwięzłość i przejrzystość geometryczną.

§ 11. Nieruchome elementy. Powróćmy do pełny — wzorów (98) i założmy, że punkt $P(a)$ jest nieruchomy. Ponieważ układ ruchomy zmienia swe położenie, więc współrzędne x_j punktu P zmieniają się; prędkość ruchu dla P jest oczywiście zerem; więc $v_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$); ale i odwrotnie, gdy $v_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), to prędkość punktu P jest zerem i przeto punkt P jest nieruchomym. Widać więc, że na mocy wzorów (98), wykazaliśmy tw.

Uwaga. Zwyczajna metoda [1] analityczna, której się używa przy wykładzie zagadnienia o ruchu śrubowym, opiera się na następującej uwadze. Zastanymy, że już ruch śrubowy został znaleziony; każdy więc punkt ma dwie prędkości, prędkość translacji u' w kierunku osi l' obrotu i prędkość, pochodzącą z obrotu wokół l' , a więc prostopadłą do u' ; te dwie prędkości mają wypadkową, będącą przekątną pewnego prostokąta, którego jeden bok $= u'$, tedy wektor wypadkowej prędkości ma długość większą od długości wektora u' ośógół, gdyż wiąznię dla punktów osi l' jest prędkość, pochodząca z obrotu, równą zero, wobec czego punkty osi obrotu l' charakteryzowane są tem, że długość wektora wypadkowej prędkości (a więc też kwadrat tej długości) jest *minimum*. Ta właśnie uwaga pozwala znaleźć l' i translację. Otóż kwadrat długości wektora v wynosi według (104):

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 = (\xi_1 + p_1 x_1 - p_2 x_2)^2 + (\xi_2 + p_2 x_1 - p_1 x_2)^2 + (\xi_3 + p_3 x_1 - p_3 x_2)^2$$

co l' obrotu to punkty (22) a własności:

$$\frac{\partial (v^2)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

co się wyrazi w ten sposób, że macierz

$$(118) \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_1 & p_3 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

jest rzędu 1^o, a więc jest

$$(119) \quad \begin{vmatrix} p_1 + p_2 & -p_2 & p_3 \\ -p_2 & p_1 + p_2 & p_3 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0$$

są to równania osi l' , jeżeli jest:

$$(121) \quad \lambda = \frac{\sum_i \xi_i p_i}{\sum_i p_i^2};$$

prosta l' ma widocznie dostawy kierunkowe proporcjonalne do p_i . Oznaczmy przez x_i^0 współrzędne dowolnie obranego punktu M' na l' , to z ostatnich wzorów otrzymamy:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda p_1 - p_2 x_3^0 + p_3 x_2^0, & \xi_2 &= \lambda p_2 - p_3 x_1^0 + p_1 x_3^0, \\ \xi_3 &= \lambda p_3 - p_1 x_2^0 + p_2 x_1^0 \end{aligned}$$

i wskutek tego jest

$$(122) \quad v_1 = \lambda p_1 + p_2(x_3 - x_3^0) - p_3(x_2 - x_2^0), \dots,$$

co odpowiada wzorowi (118). Czysty obrót (bez translacji równoległej do osi obrotu) będzie, gdy $\lambda = 0$ czyli gdy

$$(123) \quad \sum_{i=1}^3 p_i \xi_i = 0.$$

Czytelnik z łatwością pozna na powyższem dwie wielkie zalety metody wektorjalnej: zwięzłość i przejrzystość geometryczną.

§ 11. Nieruchome elementy. Powróćmy do pełnych wzorów (98) i załóżmy, że punkt $P(x_i)$ jest nieruchomy. Ponieważ układ ruchomy zmienia swe położenie, więc współrzędne x_i punktu P zmieniają się; prędkość ruchu dla P jest oczywiście zerem; więc $v_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$); ale i naodwrot, gdy $v_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), to prędkość punktu P jest zerem i przeto punkt P jest nieruchomym. Widoczne stąd, że na mocy wzorów (98), wykazaliśmy tw.:

przy poprzednio podanych założeniach o ruchu układu ruchomego warunek konieczny i wystarczający, by punkt $P(x_i)$ był nieruchomym, polega na równościach:

$$(124) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + p_2 x_3 - p_3 x_2 + \xi_1 = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} + p_3 x_1 - p_1 x_3 + \xi_2 = 0, \\ \frac{dx_3}{dt} + p_1 x_2 - p_2 x_1 + \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Jeżeli ruch układu jest znanym t. j. jeżeli dane są (p_i, ξ_i) ($i = 1, 2, 3$), jako funkcje czasu, to (124) daje układ równań różniczkowych liniowych rzędu 1^{go}. W przypadkach regularności układ całek tych równań zależeć będzie od 3 stałych np. od wartości x_1^0, x_2^0, x_3^0 współrzędnych w chwili $t = 0$. Z warunków (124) będziemy nieraz korzystali w postaci specjalnej, zwanej *warunkami Césaro*.

Niech z kolei będzie dany wektor \mathbf{w} , którego składowe w kierunku osi x_i ruchomego układu mają miary w_i , należące do klasy C^1 , jako funkcje czasu w przedziale $[a, b]$ ($a < b$). Jest więc

$$(125) \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{e}_i.$$

Stąd:

$$(126) \quad \left\{ \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i + w_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right). \right.$$

Wektor, przedstawiony przez drugą sumę strony prawej, rozłożymy na składowe w kierunku osi x_i układu ruchomego. Możemy napisać

$$(127) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_j \right) \mathbf{e}_j. \end{array} \right.$$

Współczynniki tej sumy wyrazimy przez p_{ij} określone wzorem (102). W tym celu pomnożmy skalarnie następujące wektory, rozłożone w kierunku osi x_i^* układu nieruchomego przez siebie:

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) \mathbf{e}_k^*; \quad \mathbf{e}_j = \sum_l (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l^*) \mathbf{e}_l^*;$$

będzie:

$$(128) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_j = \sum_{kl} \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l^*) (\mathbf{e}_k^* \times \mathbf{e}_l^*) = \\ = \sum_{kl} \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l^*) \delta_{kl} = \\ = \sum_k \left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \times \mathbf{e}_k^* \right) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k^*) = p_{ij}. \end{array} \right.$$

Wobec tego (127) daje:

$$(129) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \sum_j p_{ij} \mathbf{e}_j. \end{array} \right.$$

Wzór (126) daje tedy:

$$(130) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i + \sum_{i,j} w_j p_{ji} \mathbf{e}_i. \end{array} \right.$$

Zastosujmy tu wzory (103), oraz równości $p_{ii}=0$; nietrudno zauważyć, że (130) przyjmie postać:

$$(131) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \sum_i \frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i + \mathbf{w}^* \wedge \mathbf{w}, \end{array} \right.$$

przyczem \mathbf{w}^* oznacza wektor prędkości kątowej obrotu ruchu unoszenia.

Załóżmy teraz, że wektor w ma stałą długość i stały kierunek w przestrzeni R_3 t. j. w stosunku do nieruchomego układu, tedy lewa strona w (130) jest wektorem zerowym, wskutek czego otrzymujemy:

$$(132) \left\{ \frac{dw_i}{dt} + \sum_j w_j p_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \right.$$

czyli:

$$(133) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_1}{dt} + p_2 w_3 - p_3 w_2 = 0, \\ \frac{dw_2}{dt} + p_3 w_1 - p_1 w_3 = 0, \\ \frac{dw_3}{dt} + p_1 w_2 - p_2 w_1 = 0. \end{array} \right.$$

Są to równania różniczkowe, linjowe i jednorodne na miary w_i składowych wzdłuż osi układu ruchomego dla wektora w o stałym kierunku i stałej długości. Stałość długości wektora w wynika zresztą z (133) bezpośrednio, bo mnożąc (133) odpowiednio przez w_1, w_2, w_3 i sumując, otrzymujemy:

$$\sum_i w_i \frac{dw_i}{dt} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_i w_i^2 \right) = 0, \text{ co daje}$$

$$\sum_i w_i^2 = \text{Const.}$$

Wzory (133) otrzymuje się zwykle na innej drodze. Wektor w , jako swobodny, przenosimy do początku układu ruchomego, jako punktu początkowego, punkt końcowy wektora ma wtedy współrzędne $x_i = w_i$ w układzie ruchomym. Według (98) prędkość v_i początku wektora (a więc punktu $x_i = 0$,

3, 3) jest $v_i = v_{0i}$; prędkość punktu końca wektora ($r = r_i$, $i = 1, 2, 3$) ma składowe

$$P_2 v_2 = P_2 v_{20} + \frac{d v_2}{dt} + P_3 v_3 = P_1 v_1 + \frac{d v_1}{dt} + P_1 v_1 + \frac{d v_1}{dt} + P_1 v_2 = P_1 v_2 + \frac{d v_2}{dt} + P_1 v_3 = P_1 v_3 + \frac{d v_3}{dt} + P_1 v_4 = P_1 v_4 + \frac{d v_4}{dt} + \dots$$

wektor w nie zmienia kierunku ani długości, składowe prędkości obu końców wektora są odpowiednio równe, a stąd otrzymuje się nast. (133).

Warunki (133) pozwolą nam wykazać t.j.: jeżeli mamy poprzednie założenia o ruchu, jeżeli prędkość kątowna w^* ma stały kierunek względem osi x w kierunku osi ruchomego układu, należy do C^* w $[a, b]$ i jeżeli os chwilkowa grubowego przesłania ma stały kierunek względem nieruchomego układu odniesienia, to zachowuje ten stały kierunek względem układu nieruchomego (czyli przesłania R_2).

Uwaga 14. Os chwilkowa grubowego ruchu wzdłuż osi x jest równoległa do osi chwilkowej przesłania R_2 wektora w^* , którego składowe mają stary kierunek w układzie ruchomym, wskutek czego os przesłania R_2 dostawia:

$$\frac{P_i}{\sqrt{P_i^2}} = \frac{P_i}{P_i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

W tym celu w warunkach składowych jednostkowego

przesłania R_2 w układzie nieruchomym

Załóżmy teraz, że wektor w ma stałą długość i stały kierunek w przestrzeni N_3 (t. j. w stosunku do nieruchomego układu, tedy lewa strona w (130) jest wektorem zerowym, wskutek czego otrzymujemy:

$$(132) \quad \left\{ \frac{dw_i}{dt} + \sum_j w_j p_{ij} = 0 \quad (i=1, 2, 3), \right.$$

czyli:

$$(133) \quad \begin{cases} \frac{dw_1}{dt} + p_2 w_2 - p_3 w_3 = 0, \\ \frac{dw_2}{dt} + p_3 w_1 - p_1 w_3 = 0, \\ \frac{dw_3}{dt} + p_1 w_2 - p_2 w_1 = 0. \end{cases}$$

Są to równania różniczkowe, liniowe i jednorodne na miary w , składających właśnie on układu ruchu tego dla wektora w o stałym kierunku i stałej długości. Stałość długości wektora w wynika zresztą z (133) bezpośrednio, bo mnożąc (133) odpowiednio przez w_1, w_2, w_3 i sumując, otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \sum w_i^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} \left(\sum w_i^2 \right) = 0, \quad \text{co daje}$$

$$\sum w_i^2 = \text{Const.}$$

Wzrosty (133) otrzymuje się zwykle na innej drodze. Wektor w , jako swobodny, przemieszczy do punktu układu nieruchomego, jako punktu początkowego, punkt końcowy wektora nie wtedy współrzędne $x_i = w_i$ w układzie nieruchomym. Według (98) pochodną w punkcie wektora (s w punkcie $a_i = 0$,

$i = 1, 2, 3$) jest $v_i = \dot{\zeta}_i$; prędkość punktu końcowego wektora ($x_i = w_i$, $i = 1, 2, 3$) ma składowe

$$\frac{dw_1}{dt} + p_2 w_3 - p_3 w_2 + \dot{\zeta}_1, \quad \frac{dw_2}{dt} + p_3 w_1 - p_1 w_3 + \dot{\zeta}_2, \\ \frac{dw_3}{dt} + p_1 w_2 - p_2 w_1 + \dot{\zeta}_3.$$

Otóż wektor \mathbf{w} nie zmieni kierunku ani długości, gdy składowe prędkości obu końców wektora są sobie odpowiednio równe, a stąd otrzymuje się natychmiast (133).

Wzory (133) pozwolą nam wykazać t.w.: jeżeli zachowamy poprzednie założenia o ruchu, jeżeli wektor prędkości kątowej \mathbf{w}^* ma miary składowych p_1, p_2, p_3 w kierunku osi ruchomego układu, należące do C^1 w $[a, b]$ i jeżeli oś chwilowa śrubowego ruchu unoszenia ma stały kierunek względem ruchomego układu odniesienia, to zachowuje też stały kierunek względem układu nieruchomego (czyli w przestrzeni R_3).

Dowód. Oś chwilowa śrubowego ruchu unoszenia jest równoległą do osi chwilowej obrotu, a więc do wektora \mathbf{w}^* , którego składowe mają miary p_1, p_2, p_3 w układzie ruchomym, wskutek czego oś obrotu ma dostawy:

$$\frac{p_i}{\sqrt{\sum_k p_k^2}}; \quad (i = 1, 2, 3),$$

a więc równe miarom składowych jednostkowego

wektora $\frac{\mathbf{w}^*}{\sqrt{\mathbf{w}^* \times \mathbf{w}^*}}$ w układzie ruchomym.

Z założenia te dostawy są stałe, a więc, kładąc

$$(134) \left\{ \begin{array}{l} w_i = \frac{p_i}{\sqrt{\sum_k p_k^2}} \quad (i = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

mamy $w_i = \text{Const.}$ Weźmy wektor \mathbf{w} o miarach składowych (134) w układzie ruchomym i obliczmy dla niego pochodną geometryczną według wzoru (131). Ponieważ jest $w_i = \text{Const.}$, nadto:

$$(135) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^*}{\sqrt{\mathbf{w}^* \times \mathbf{w}^*}}, \quad \text{więc } \mathbf{w}^* \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad \text{przeto jest:} \\ \frac{d\mathbf{w}}{dt} = 0. \end{array} \right.$$

wektor \mathbf{w} jest więc stałym w R_3 , c. b. d. u.

Zwykle podawany dowód tego twierdzenia ma postać następującą (dość instruktywną). Przyjmujemy układ ruchomy tak, iż oś chwilowa schodzi się z osią x_3 , więc dostawy osi obrotu są $(0, 0, 1)$ względem układu ruchomego, przeto *stałe*. Oś obrotu ma więc równanie $x_1 = 0, x_2 = 0$ (x_3 dowolne), ale ona ma równanie (120), więc $p_1 = p_2 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0$, a że $\mathbf{w}^* \neq \mathbf{0}$ z założenia, więc $p_3 \neq 0$. Wzory (98) przyjmą więc postać:

$$(136) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{dx_1}{dt} - p_3 x_2, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} + p_3 x_1, \\ v_3 = \frac{dx_3}{dt} + \xi_3. \end{array} \right.$$

Weźmy wektor jednostkowy \mathbf{AB} , stałe równoległy do osi obrotu, a więc do osi x_3 , przyczem punkt A ma być nieruchomym w R_3 . Wykażemy, że i B jest nieruchome w R_3 . Rzeczywiście, niech A

ma współrzędne (x_1, x_2, x_3) , to B ma współrzędne $(x_1, x_2, x_3 + 1)$. Punkt A ma składowe prędkości (136) i te z założenia są zerem, bo A jest punktem nieruchomym, a więc

$$(137) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - p_3 x_2 &= \frac{dx_2}{dt} + p_3 x_1 = \frac{dx_3}{dt} + \zeta_3 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dla punktu B prędkość ma według (136) te same składowe v_1 i v_2 , a więc równe zeru według (137), składowa trzecia v_3 wynosi:

$$v_3 = \frac{d(x_3 + 1)}{dt} + \zeta_3 = \frac{dx_3}{dt} + \zeta_3$$

jest więc też równa zeru. Czyli punkt B jest też nieruchomym, co dowodzi, że oś obrotu ma stały kierunek w R_3 .

Rozdział II.

Elementy pierwszego rzędu.

§ 1. Punkty wielokrotne krzywej C . Rozważmy krzywą C z I § 1 (a więc rzeczywistą i przedstawioną przy pomocy rzeczywistego parametru), spełniającą $(Z, 1)$ w $[a, b]$, nadto taką, że:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &\text{Założenie } (Z^*, 1): \text{ macierz } \left| \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right| \\ &\text{lub macierz } \left| \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right| \text{ jest rzędu} \\ &1^{\text{go}} \text{ w } [a, b]. \end{aligned} \right.$$

Posługując się wektorjalnym równaniem krzywej:

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

możemy $(Z^*, 1)$ wyrazić w sposób następujący: wektor:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0} \\ \text{w } [a, b]. \end{array} \right.$$

Wykażemy pewne własności krzywej C , z których później skorzystamy.

Niech będzie t_0 liczbą o własności $a \leq t_0 \leq b$; liczbę t_0 nazywamy „punktem“ pojedynczym (jednokrotnym) krzywej C w $[a, b]$, jeżeli równania

$$(4) \quad x_i(t) = x_i(t_0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

nie posiadają w $[a, b]$ rozwiązania na t różnego od t_0 . W przeciwnym razie punkt t_0 nazywamy wielokrotnym w $[a, b]$, a nawet nieskończenie wielokrotnym, w $[a, b]$, gdy równania (4) mają nieskończenie wiele różnych rozwiązań w $[a, b]$.

Tw. 1. *Jeżeli C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ i jeżeli $a \leq t_0 \leq b$, to można znaleźć taki przedział $[a', b']$, że punkt $M_0(t_0)$ jest pojedynczym w $[a', b']$; przytem ma być:*

$$(5) \quad a \leq a' < t_0 < b' \leq b, \quad \text{gdy } a < t_0 < b;$$

$$(6) \quad a' = t_0 < b' \leq b, \quad \text{gdy } a = t_0;$$

$$(7) \quad a \leq a' < t_0 = b', \quad \text{gdy } b = t_0.$$

Dowód. Załóżmy, że jest $a < t_0 < b$ i że tw. nie jest słuszne; wtedy istnieje ściśle monotoniczny ciąg t_v o granicy t_0 i taki, że jest (4) spełnione dla $t = t_v$. Kładąc $\varphi_i(t) = x_i(t) - x_i(t_0)$, mamy $\varphi_i(t_v) = 0$, $\varphi_i(t_{v+1}) = 0$, skąd na mocy tw. Rollego wynika, że istnieją trzy ciągi liczb t_v', t_v'', t_v''' takie, że:

$$\varphi_1'(t_v') = 0, \quad \varphi_2'(t_v'') = 0, \quad \varphi_3'(t_v''') = 0,$$

od w granicy daje:

$$\gamma'(t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t_0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

a to jest sprzeczne z $(Z^*, 1)$. Podobny jest dowód, gdy $a = t_0$ lub $b = t_0$.

Tw. 1 można nadać następującą postać:

Tw. 2. Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$, to dla każdego punktu $M_0(t_0)$ krzywej C można znaleźć łuk, zawierający M_0 i taki, że się daje jedno-jednoznacznie odzwierciedlać na odcinek prostej, a więc jest łukiem Jordana.

Zarazem z powyższego dowodu widoczne, że przy założeniach $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ nie może żaden punkt krzywej C być nieskończenie wielokrotnym.

§ 2. Styczna do krzywej C . Założmy, że C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ i weźmy na niej punkt $M_0(t_0)$; na mocy tw. 1 z § 1 istnieje przedział $[a', b']$ na t taki, że $a' < b'$, $a' < t_0 < b'$ i taki, że gdy $a' < t < b'$, $t \neq t_0$, to punkty M_0 , $M(t)$ są różne od siebie i przeto wyznaczają prostą t zw. styczną. Nadamy jej kierunek następujący: gdy $t = t_0 + h < t_0$ czyli $h < 0$, to styczna ma mieć kierunek od M_0 do M ; gdy zaś $h > 0$ (czyli $t > t_0$), to styczna ma mieć kierunek od M_0 do M ; gdy więc $h < 0$, to styczna ma kierunek zgodny z kierunkiem wektora $\overline{MM_0}$, gdy zaś $h > 0$, to zgodny z kierunkiem wektora \overline{MM} . Zamiast tych wektorów wyznaczmy wektory jednostkowe (t. zn. o długości $r = 1$) i zgodnie skierowane z takimi, których ślad będzie następująca: miary składowych tegoż wektora jednostkowego w kierunku osi układu odniesienia będą identyczne z dostawanymi przez składowe stycznej skier-

możemy $(Z^*, 1)$ wyrazić w sposób następujący:
wektor:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} \neq 0 & \text{w } [a, b]. \end{cases}$$

Wykażemy pewne własności krzywej C , z których później skorzystamy.

Niech będzie t_0 liczbą a własności $a < t_0 < b$; liczbę t_0 nazywamy „punktem” pojedynczym (jednokrotnym) krzywej C w $[a, b]$, jeżeli równania

$$(4) \quad x_i(t) = x_i(t_0) \quad (i = 1, 2, 3)$$

nie posiadają w $[a, b]$ rozwiązań na t różnego od t_0 . W przeciętnym razie punkt t_0 nazywamy wielokrotnym w $[a, b]$, a nawet nieskończenie wielokrotnym, w $[a, b]$, gdy równania (4) mają nieskończenie wiele różnych rozwiązań w $[a, b]$.

Tw. 1. Jeżeli C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ i jeżeli: $a < t_0 < b$, to można znaleźć taki przedział $[a', b']$, że punkt t_0 jest pojedynczym w $[a', b']$; przytem ma być:

$$(5) \quad a < a' < t_0 < b' < b, \quad \text{gdy } a < b < b;$$

$$(6) \quad a' = t_0 < b' < b, \quad \text{gdy } a = t_0;$$

$$(7) \quad a < a' < t_0 = b', \quad \text{gdy } b = t_0.$$

Dowód. Załóżmy, że jest $a < t_0 < b$ i że tw. nie jest słuszne; wtedy istnieje ściśle monotoniczny ciąg t_n o granicy t_0 i taki, że jest (4) spełnione dla $t = t_n$. Kładąc $x_i(t) = x_i(t) - x_i(t_n)$, mamy $x_i(t_n) = 0$, $x_i(t_{n+1}) = 0$, skąd na mocy tw. Bollego wynika, że istnieje trzy ciągi liczb t_n', t_n'', t_n''' takie, że:

$$x_1'(t_n') = 0, \quad x_2''(t_n'') = 0, \quad x_3'''(t_n''') = 0.$$

co w granicy daje:

$$\varphi_i'(t_0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{dx_i}{dt} \right)_{t_0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

a to jest sprzeczne z $(Z^*, 1)$. Podobnym jest dowód, gdy $a = t_0$ lub $b = t_0$.

Tw. 1 można nadać następującą postać:

Tw. 2. *Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$, to dla każdego punktu $M_0(t_0)$ krzywej C można znaleźć łuk, zawierający M_0 i taki, że się daje jedno-jednoznacznie odwzorować na odcinek prostej, a więc jest łukiem Jordana.*

Zarazem z powyższego dowodu widoczne, że przy założeniach $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ nie może żaden punkt krzywej C być nieskończenie wielokrotnym.

§ 2. Styczna do krzywej C . Załóżmy, że C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ i weźmy na niej punkt $M_0(t_0)$; na mocy tw. 1 z § 1 istnieje przedział $[a', b']$ na t taki, że $a' < b'$, $a' \leq t_0 \leq b'$ i taki, że gdy $a' \leq t \leq b'$, $t \neq t_0$, to punkty $M_0, M(t)$ są różne od siebie i przeto wyznaczają prostą t. zw. *sieczną*. Nadamy jej kierunek następujący: gdy $t = t_0 + h < t_0$ czyli $h < 0$, to sieczna ma mieć kierunek od M do M_0 , gdy zaś $h > 0$ (czyli $t > t_0$), to sieczna ma mieć kierunek od M_0 do M ; gdy więc $h < 0$, to sieczna ma kierunek zgodny z kierunkiem wektora $\overline{MM_0}$, gdy zaś $h > 0$, to zgodny z kierunkiem wektora $\overline{M_0M}$. Zamiast tych wektorów wyznaczymy wektory *jednostkowe* (t. zn. o długości = 1) i zgodnie skierowane z tamtymi, korzyść stąd będzie następująca: miary składowych tegoż wektora jednostkowego w kierunku osi układu odniesienia będą identyczne z dostawami kierunkowemi siecznej skie-

rowanej. Aby uzyskać wektor jednostkowy, trzeba wektor $\mathbf{M}\mathbf{M}_o$ ($h < 0$) lub $\mathbf{M}_o\mathbf{M}$ ($h > 0$) podzielić przez jego długość. W tym celu, oznaczmy przez \mathbf{r}_o , \mathbf{r} wektory wyznaczające punkty M_o , M w myśl wzoru I 43; wtedy jest $\mathbf{M}\mathbf{M}_o = \mathbf{r}_o - \mathbf{r}$, $\mathbf{M}_o\mathbf{M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_o$, długość tych wektorów jest równa $\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)}$. Wobec tego jednostkowy wektor będzie

$$(8_{1,2}) \quad \begin{cases} \frac{\mathbf{r}_o - \mathbf{r}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)}} (h < 0); \\ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)}} (h > 0); \end{cases}$$

wyrażenia te przekształcimy, dzieląc licznik i mianownik tych wyrażeń przez h ; ale w (8₁), ponieważ $h < 0$, dzielimy mianownik przez $h = -\sqrt{h^2}$, bo $\sqrt{h^2} = |h|$; w (8₂), ponieważ $h > 0$, dzielimy przez $h = \sqrt{h^2}$. Tak (8₁), jak i (8₂) w ten sposób przekształcone dają ten sam wynik na *jednostkowy wektor współkierunkowy z sieczną skierowaną*:

$$(9) \quad \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m} \times \mathbf{m}}}, \quad \text{gdzie } \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_o}{h}.$$

Rzuty wektora (9) na osie układu mają miary równe dostawom kierunkowym siecznej skierowanej (jak powyżej). Z założeń (Z, 1) i (Z*, 1) wynika, że wektor (9) ma granicę, gdy $h \rightarrow 0$ i granicą jego jest wektor:

$$(10) \quad \frac{\mathbf{p}_o}{\sqrt{\mathbf{p}_o \times \mathbf{p}_o}}, \quad \text{gdzie } \mathbf{p}_o = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t_o};$$

wektor \mathbf{p}_o jest geometryczną pochodną wektora \mathbf{r} w punkcie t_o ; wektor (10) jest znów jednostko-

wym. Weźmy prostą przez M_o , na której leży wektor (10) i skierujmy ją jak wektor (10); tę oś nazywamy *styczną do C w M_o , skierowaną w kierunku wzrostu parametru t* (ostatnia część nazwy będzie poniżej (II § 5) wyjaśniona). To, co uzyskaliśmy obecnie w punkcie t_o , możemy uzyskać w dowolnym punkcie t przedziału $[a, b]$, a więc utworzyć wektor (10), który dla dowolnego punktu M krzywej C oznaczmy przez \mathbf{t} bez obawy o dwuznaczność; jest więc:

$$(11) \quad \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}} \cdot \mathbf{p} \quad \left(\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

Miary składowych tego wektora w kierunku osi x_1, x_2, x_3 są:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_i = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}} \cdot \frac{dx_i}{dt}, \quad \left(\mathbf{p} \times \mathbf{p} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{dx_k}{dt} \right)^2 \right), \\ i = 1, 2, 3; \end{array} \right.$$

jeżeli przez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oznaczmy dostawy kierunkowe stycznej, skierowanej w kierunku wzrostu parametru t , to jest $\alpha_i = t_i$; dostawy te oznaczać będziemy także przez α, β, γ , wtedy:

$$(13) \quad \alpha = \alpha_1 = t_1, \quad \beta = \alpha_2 = t_2, \quad \gamma = \alpha_3 = t_3,$$

gdy osie układu są x, y, z ; wtedy jest również:

$$(14) \quad \mathbf{p} \times \mathbf{p} = S \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2,$$

przyczem S oznacza poniekąd „znak sumowy“, gdyż oznacza, że x zastąpić należy przez y , potem przez z tak, iż jest:

$$(15) \quad S \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Z określenia dostaw wynika, że jest

$$(16) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1,$$

czyli

$$(17) \quad \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 1.$$

Wektor \mathbf{t} nazwiemy jednostkowym wektorem stycznym; jego początek leży w punkcie styczności z krzywą C t. j. w punkcie $M(t)$. Uzyskaliśmy więc tw.: jeżeli C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$, to w każdym punkcie M istnieje jednostkowy wektor styczny do C , leżący na stycznej do C w punkcie M i zgodnie skierowany ze styczną. Ze wzorów (12) i (13) otrzymujemy:

$$(18) \quad dx_i = \alpha_i \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt \quad (i = 1, 2, 3),$$

co wykazuje, że dx_i jest proporcjonalne do α_i , a więc punkt $(x_i + dx_i)$ leży na stycznej do krzywej; liczby dx_i są miarami składowych wektora $d\mathbf{r}$, który leży na stycznej; mamy bowiem z (11):

$$(19) \quad d\mathbf{r} = \mathbf{t} \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt,$$

co zastępuje trzy wzory (18).

W powyższy sposób z pomiędzy nieskończenie wielu osi przez M_0 uzyskaliśmy jedną — wyróżnioną t. j. styczną; podobnie z pomiędzy nieskończenie wielu wektorów jednostkowych o początku w M_0 zdołaliśmy jeden wyróżnić t. j. wektor \mathbf{t}_0 (t. zn. wektor \mathbf{t} w M_0). Wykażemy, że wyróżnienie to jest niezmiennicze wobec grupy ruchów euklidesowych. W tym celu krzywą C poddajmy dowolnemu ruchowi euklidesowemu; otrzymamy krzywą C^* z krzywej C ; punkt M_0 przejdzie w M_0^* na C^* ; będzie

Z określenia dostaw wynika, że jest

$$(16) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1,$$

czyli

$$(17) \quad 1 \times 1 = 1.$$

Wektor 1 nazwiemy jednostkowym wektorem stycznym; jego początek leży w punkcie styczności z krzywą C , t. j. w punkcie $M(t)$. Uzyskaliśmy więc tw.: jeżeli C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$, to w każdym punkcie M istnieje jednostkowy wektor styczny do C , leżący na stycznej do C w punkcie M i zgodnie skierowany ze styczną. Ze wzorów (12) i (13) otrzymujemy:

$$(18) \quad dx_i = \alpha_i \sqrt{p \times p} dt \quad (i = 1, 2, 3),$$

co wykazuje, że dx_i jest proporcjonalne do α_i , a więc punkt $(x_i + dx_i)$ leży na stycznej do krzywej. Bezpośrednio są miarami składowych wektora dx , który leży na stycznej; odzw. dowiemy z (11):

$$(19) \quad dt = 1 \sqrt{p \times p} ds,$$

co zastępuje leży wzory (18).

W powyższy sposób z pomiędzy nieskończenie wielu osi przez M , uzyskaliśmy jedną — wyróżnioną t. j. styczną; podobnie z pomiędzy nieskończenie wielo wektorów jednostkowych o początku w M , zdołaliśmy jedną wyróżnić t. j. wektor 1 , t. zn. wektor $1 \in M$. Wykażemy, że wyróżnienie to jest niezmienne wobec grupy ruchów euklidesowych. W tym celu krzywą C poddamy dowolnemu ruchowi względnie do osi; otrzymamy krzywą C^* z krzywą C w punkcie M przejdzie w M^* na C^* ; będzie

on należał do wartości t_0 na parametr (gdymy parametra teraz nie przekształcamy!). Równanie krzywej C^* będzie dane przez równanie I 65, gdzie $r = r(t)$ jest równaniem krzywej C . Wektor t_0 , należący do M_0 , przez ruch przejdzie w wektor t^* , określony wzorami analogicznymi do wzorów I 47; napiszemy je w postaci wektorjalnej:

$$(20) \quad t^* = \sum_{i=1}^3 (a_i \times t_0) e_i.$$

Wykażemy najpierw, że założenia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ są spełnione dla C^* . Ze $(Z, 1)$ jest spełnione dla C , to widoczne z postaci liniowej przekształcenia I 65 o współczynnikach, niezależnych od parametru t . Nadio z I 65 wynika:

$$(21) \quad \frac{dr^*}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(a_i \times \frac{dr}{dt} \right) e_i.$$

Aby wykazać, że C^* spełnia też $(Z^*, 1)$ obliczymy kwadrat długości wektora (21). W tym celu zauważmy, że jest:

$$(22) \quad \begin{aligned} \left| \frac{dr^*}{dt} \times \frac{dr^*}{dt} \right|^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \left(a_i \times \frac{dr}{dt} \right) \left(a_j \times \frac{dr}{dt} \right) (e_i \times e_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(a_i \times \frac{dr}{dt} \right) \left(a_j \times \frac{dr}{dt} \right) \delta_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(a_i \times \frac{dr}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

Alle wektory a_i ($i=1, 2, 3$) są fakcie I (str. 31), że można napisać:

$$\frac{dr}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dr}{dt} \cdot a_i \right) a_i.$$

on należał do wartości t_0 na parametr (gdyż parametru teraz nie przekształcamy!). Równanie krzywej C^* będzie dane przez równanie I 65, gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ jest równaniem krzywej C . Wektor \mathbf{t}_0 , należący do M_0 , przez ruch przejdzie w wektor \mathbf{t}_0^* , określony wzorami analogicznymi do wzorów I 47; napiszemy je w postaci wektorjalnej:

$$(20) \quad \mathbf{t}_0^* = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{t}_0) \mathbf{e}_i.$$

Wykażemy najpierw, że założenia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ są spełnione dla C^* . Że $(Z, 1)$ jest spełnione dla C^* , to widoczne z postaci linijowej przekształcenia I 65 o współczynnikach, niezależnych od parametru t . Nadto z I 65 wynika:

$$(21) \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{a}_i \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{e}_i.$$

Aby wykazać, że C^* spełnia też $(Z^*, 1)$ obliczymy kwadrat długości wektora (21). W tym celu zauważmy, że jest

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} &= \sum_{r,k} \left(\mathbf{a}_r \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \left(\mathbf{a}_k \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{ik} \left(\mathbf{a}_i \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \left(\mathbf{a}_k \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \delta_{ik} = \\ &= \sum_k \left(\mathbf{a}_k \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Ale wektory \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$) są takie (str. 31), że można napisać:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_i \right) \mathbf{a}_i,$$

więc stąd

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \sum_{ik} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_i \right) \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_k \right) (\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k) = \\ &= \sum_{ik} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_i \right) \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_k \right) \delta_{ik} = \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{a}_i \right)^2, \end{aligned}$$

a stąd i z (22) wynika, że

$$(23) \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

a ponieważ prawa strona, jako kwadrat długości wektora $d\mathbf{r} : dt$ jest z założenia $\neq 0$, więc tw. udowodnione. Wobec tego stosując powyższe tw. o jednostkowym wektorze stycznym do C^* w M_o^* , mamy na mocy (11), (21) i (23):

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}^* \times \mathbf{p}^*}} \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{a}_i \times \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{t}) \mathbf{e}_i, \end{aligned} \right.$$

gdzie położyliśmy

$$(25) \quad \mathbf{p}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$$

i korzystaliśmy z tego, że (23) wyraża, iż $\mathbf{p}^* \times \mathbf{p}^* = \mathbf{p} \times \mathbf{p}$. Wzory (20) i (24) dają natychmiast, że

$$(26) \quad \mathbf{t}_o^* = \mathbf{t}_o.$$

A więc jednostkowy wektor styczny w M_o do C^* można uważać za wektor powstały z wektora \mathbf{t}_o przez ten ruch euklidesowy, który z C dał C^* .

Wyróżniliśmy więc w sposób niezmienniczy względem grupy ruchów euklidesowych jednostko-

wy wektor styczny i styczną skierowaną dla każdego punktu krzywej, spełniającej $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$.

Podajmy wreszcie równanie stycznej do krzywej w punkcie M ; w postaci wektorjalnej będzie ono brzmiało w następujący sposób:

$$(27) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \sigma \mathbf{t},$$

gdzie \mathbf{R} oznacza wektor, wyznaczający bieżący punkt na stycznej, σ oznacza parametr zmienny wzdłuż stycznej; z (27) wynika postać analityczna równania stycznej:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i = x_i + \sigma \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{lub} \left\{ \begin{array}{l} X = x + \sigma \alpha, \quad Y = y + \sigma \beta, \\ Z = z + \sigma \gamma. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Postać (27) łatwo otrzymać; niech bowiem P oznacza punkt bieżący na stycznej, to wektor \mathbf{MP} , leżąc na stycznej wyrazi się przez \mathbf{t} t. zn. istnieje będzie skalar σ taki, że $\mathbf{MP} = \sigma \mathbf{t}$; jeżeli O oznacza punkt początkowy wektorów, wyznaczających położenie punktów w R_3 , to $\mathbf{R} = \mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP}$, co daje (27).

§ 3. Łuk¹ krzywej C . W I § 3 wskazaliśmy na to, że można w dość dowolny sposób zmieniać parametr t . Obecnie chodzić nam będzie o to, by jeden z parametrów *wyróżnić* i oczywiście *w sposób niezmienniczy*.

O krzywej C założymy, że spełnia w $[a, b]$ założenia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$, wskutek tego jest $\mathbf{p} \times \mathbf{p} > 0$, gdzie \mathbf{p} określono, jak w (11), nadto ten iloczyn

¹ Przyjmujemy, że czytelnik zapoznał się z elementarnymi zagadnieniami o łuku krzywej. Zob. A. Hoborski: Wyższa Matematyka. Cz. I (1928).

skalarny jest funkcją ciągłą w $[a, b]$. Biorąc $a \leq t_0 \leq b$ i dowolnie obierając stałą s_0 , określimy funkcję s parametru t przez równość:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}} dt = \\ &= s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt. \end{aligned} \right.$$

Funkcję s , widocznie należącą do C^1 w $[a, b]$, przyczem jest

$$(30) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

nazwiemy łukiem krzywej C , liczonym w kierunku wzrostu parametru t z wartością początkową s_0 w punkcie $M_0(t_0)$; gdy nie będzie obawy o nieporozumienie, nazywać ją będziemy krótko łukiem. Ponieważ pochodna łuku względem t na mocy (30) jest dodatnią w $[a, b]$, więc s jest funkcją rosnącą w $[a, b]$ i mianowicie rośnie od wartości s_a do s_b , gdzie jest

$$(31) \quad s_a = s_0 + \int_{t_0}^a \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt, \quad s_b = s_0 + \int_{t_0}^b \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt.$$

Wobec tego można związek (29) odwrócić, a więc t uważać za funkcję łuku s :

$$(32) \quad t = \psi(s),$$

przyczem $\psi(s)$ należy do C^1 w przedziale $[s_a, s_b]$, nadto jest

$$(33) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{P \times P}} > 0$$

jest $a \leq \psi(s) \leq b$, gdy $s_0 \leq s \leq s_1$. Stąd wynika, że równanie wektorjalne I 43 krzywej C możemy przepisać pod postacią:

$$(34) \quad r = r(\psi(s)) = \mathbf{r}(s).$$

Wyróżniliśmy temsamem jeden z parametrów dla krzywej C ; wykazemy, że to wyróżnienie jest niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych. Przyjmując oznaczenia poprzedniego paragrafu, możemy według powyższego określić dla C^* łuk, liczony w kierunku wzrostu parametru t z wartością początkową s_0 w punkcie $M_{s_0}^*$; będzie nim funkcja

$$s^* = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{P^* \times P^*} dt,$$

co na mocy (23) i (29) daje:

$$s^* = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{P \times P} dt = s,$$

a więc punktowi $M^*(t)$ przypisać trzeba wartość s^* równą wartości s , którą przypisaliśmy poprzednio punktowi $M(t)$, przyczem właśnie punkt $M(t)$ przeszedł w punkt $M^*(t)$ przez rozważany ruch. Temsamem wykazaliśmy niezmienniczość łuku¹ względem grupy ruchów euklidesowych.²

¹ Łuk r jest s , zw. niezmiennikiem całkowym grupy ruchów euklidesowych dla krzywej.

² Ten parametr niezmienniczy zdefiniował Fréchet, zob. Journal de Liouville, 1923, str. 281-287.

skalarnej jest funkcją ciągłą w $[a, b]$. Biorąc $a \leq t_0 \leq b$ i dowolnie obierając stałą s_0 , określamy funkcję s parametru t przez równość:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{dx}{dt} \times \frac{dy}{dt}} dt = \\ &= s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{p \times p} dt. \end{aligned} \right.$$

Funkcję s , widocznie należącą do C^1 w $[a, b]$, przytem jest

$$(30) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{p \times p} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

nazwiemy łukiem krzywej C , liczonym w kierunku wzrostu parametru t z wartością początkową s_0 w punkcie $M_0(t_0)$; gdy nie będzie obawy o nieporozumienie, nazywać ją będziemy krótko łukiem. Ponieważ pochodna łuku względem t na mocy (30) jest dodatnią w $[a, b]$, więc s jest funkcją rosnącą w $[a, b]$ i mianowicie rośnie od wartości s_0 do s_b , gdzie jest

$$(31) \quad s_a = s_0 + \int_{t_0}^{t_a} \sqrt{p \times p} dt, \quad s_b = s_0 + \int_{t_0}^{t_b} \sqrt{p \times p} dt.$$

Wobec tego można związek (29) odwrócić, a więc t wyznaczyć za funkcję łuku s :

$$(32) \quad t = \psi(s).$$

Jeżeli $\psi(s)$ należy do C^1 w przedziale (s_0, s_b) , to jest

$$(33) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}} > 0$$

i jest $a \leq \psi(s) \leq b$, gdy $s_a \leq s \leq s_b$. Stąd wynika, że równanie wektorjalne I 43 krzywej C możemy przepisać pod postacią:

$$(34) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\psi(s)) = \bar{\mathbf{r}}(s).$$

Wyróżniliśmy temsamem jeden z parametrów dla krzywej C ; wykażemy, że to wyróżnienie jest niezmiennicze względem grupy ruchów euklidesowych. Przyjmując oznaczenia poprzedniego paragrafu, możemy według powyższego określić dla C^* łuk, liczony w kierunku wzrostu parametru t z wartością początkową s_0 w punkcie M_0^* ; będzie nim funkcja:

$$s^* = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{p}^* \times \mathbf{p}^*} dt,$$

co na mocy (23) i (29) daje:

$$s^* = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt = s,$$

a więc punktowi $M^*(t)$ przypisać trzeba wartość s^* równą wartości s , którą przypisaliśmy poprzednio punktowi $M(t)$, przyczem właśnie punkt $M(t)$ przeszedł w punkt $M^*(t)$ przez rozważany ruch. Temsamem wykazaliśmy niezmienniczość łuku¹ względem grupy ruchów euklidesowych.²

¹ Łuk s jest t. zw. niezmiennikiem całkowym grupy ruchów euklidesowych dla krzywej.

² Inny parametr niezmienniczy zdefiniował Fréchet, zob. Journal Liouville'a, 1925, str. 281 - 297.

Uwaga. Z określenia łuku s wynika, że $ds = \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt$, skąd otrzymujemy

$$ds^2 = d\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = S dx^2,$$

jeżeli wprowadzimy wektor $d\mathbf{r}$ o składowych z miarami dx_i , wzgl. dx, dy, dz . Wykazaliśmy, że dla C^* jest

$$ds^{*2} = ds^2,$$

czyli ruch euklidesowy nie zmienia kwadratowej formy różniczkowej $S dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Oczywiście powstaje zagadnienie znalezienia wszystkich przekształceń punktów przestrzeni R_3 :

$$x^* = \varphi(x, y, z), \quad y^* = \psi(x, y, z), \quad z^* = \chi(x, y, z),$$

dla których jest

$$ds^{*2} = S dx^{*2} = S dx^2 = ds^2,$$

dla których więc forma $S dx^2$ jest niezmiennikiem. Ze względu na znaczenie kwadratu ds^2 nazwano takie przekształcenia przekształceniami kongruencji (przystawania). Jeżeli założymy, że funkcje φ, ψ, χ należą do klasy C^2 , to wykazuje się, że są linjowymi funkcjami zmiennych x, y, z i że jest:

$$x^* = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14},$$

$$y^* = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24},$$

$$z^* = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34},$$

przyczem zachodzą związki I 3; a więc otrzymujemy, biorąc x_i ($i = 1, 2, 3$) zamiast x, y, z , wzory I 2 z tą jednak różnicą, że wyznacznik I 4:

$$\Delta = \pm 1. —$$

Uwidocznimy teraz korzyść, jaka wynika z wpro-

wadzenia łuku, jako parametru. Otóż mamy na mocy (11) i (33)

$$(35) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}}} = \mathbf{t},$$

co dla układu osi ortogonalnych x_i , wzgl. x, y, z daje:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{ds} = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ lub} \\ \frac{dx}{ds} = \alpha, \frac{dy}{ds} = \beta, \frac{dz}{ds} = \gamma, \end{array} \right.$$

a stąd

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = 1 \text{ czyli } S \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 1 \\ \text{czyli } \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1. \end{array} \right.$$

Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$, to posiada określony łuk s , taki, iż są spełnione wzory (37).

Zbadajmy jeszcze, czy łuk krzywej zależy od parametru, przy pomocy którego krzywa jest przedstawiona. W tym celu, nawiązując do I § 3, przekształcimy parametr t na t^* :

$$(38) \quad t = \varphi(t^*).$$

Ponieważ wymagać będziemy, by krzywa C spełniała odnośnie do t^* założenia analogiczne do $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$, więc przekształcenie (38) będzie musiało spełniać pewne warunki, a mianowicie: 1) funkcja $\varphi(t^*)$ ma należeć do klasy C^1 w przedziale $[a^*, b^*]$; 2) gdy $a^* \leq t^* \leq b^*$, to ma być $a \leq \varphi(t^*) \leq b$;

3) pochodna ma w $[a^*, b^*]$ spełniać nierówność:

$$(39) \quad \frac{d\varphi}{dt^*} \neq 0.$$

A ponieważ ta pochodna jest ciągłą, więc w $[a^*, b^*]$ jest stałego znaku; połóżmy:

$$(40) \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{d\varphi}{dt^*} \right) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Wprowadźmy nowy wektor:

$$(41) \quad \mathbf{p}^* = \frac{d\mathbf{r}}{dt^*} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt^*} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\varphi}{dt^*},$$

więc łuk

$$s^* = s_0^* + \int_{t_0^*}^{t^*} \sqrt{\mathbf{p}^* \times \mathbf{p}^*} dt^* = s_0^* + \\ + \varepsilon \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{p} \times \mathbf{p}} dt = s_0^* + \varepsilon (s - s_0),$$

jeżeli $t_0 = \varphi(t_0^*)$. Mamy więc

$$(42) \quad s^* = \varepsilon s + (s_0^* - \varepsilon s_0) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Jeżeli więc s jest łukiem krzywej C , to zbiór wszystkich funkcji, które są łukami krzywej C , składa się z funkcji kształtu $\varepsilon s + \text{Const}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a stała jest dowolną. Że każda z tych funkcji jest łukiem, to widoczne stąd, że możemy przyjąć następujące przekształcenie parametru: $t = \varepsilon t^*$ ($\varepsilon = \pm 1$), gdyż ono spełnia powyżej podane warunki; wtedy otrzymamy (42), co temsamem twierdzenie wykazuje. Widzimy tedy, że wprowadzenie łuk nie jest nie-

zależnym przy zmianach parametru, ale zmienia się w sposób określony i prosty.

Zauważmy dalej, że na mocy (37) jest

$$(43) \quad \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \cdot \varepsilon \right)^2 = 1.$$

Stąd zarazem wynika, że jednostkowy wektor styczny i styczna mogą zmieniać kierunek przy zmianie parametru; mamy bowiem

$$(43 \text{ bis}) \quad t^* = \frac{dr}{ds^*} = \frac{dr}{ds} \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot t \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Wykażemy odwrotne tw.: jeżeli krzywa przedstawiona jest parametrycznie przy pomocy parametru σ : $r = r(\sigma)$ i jeżeli $r(\sigma)$ spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w przedziale $[\sigma_1, \sigma_2]$ (t. zn. miary składowych wektora $r(\sigma)$, jako funkcje parametru σ spełniają $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w przedziale $[\sigma_1, \sigma_2]$) i jeżeli w $[\sigma_1, \sigma_2]$ jest

$$(44) \quad \frac{dr}{d\sigma} \times \frac{dr}{d\sigma} = 1,$$

to σ jest łukiem krzywej. Na mocy założenia istnieje łuk s i jest $s = \chi(\sigma)$, przy czym funkcja $\chi(\sigma)$ ma pochodną w $[\sigma_1, \sigma_2]$ dodatnią. Z (37₁) i (44) wynika, że jest

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dr}{d\sigma} \times \frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \times \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \\ &= \left(\frac{dr}{ds} \times \frac{dr}{ds} \right) \cdot \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2, \end{aligned}$$

stąd wynika, $ds = \pm d\sigma$ i $s = \pm \sigma + c$, c. b. d. u.

§ 4. Płaszczyzna normalna. Oprócz stycznej jednostkowego wektora stycznego i łuku, wprowadzamy

3) pochodna ma w (t^*, t^*) spełniać nierówność:

$$(39) \quad \frac{dy}{dt^*} \neq 0.$$

A ponieważ ta pochodna jest ciągłą, więc w $[a^*, b^*]$ jest stałego znaku; położmy:

$$(40) \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{dy}{dt^*} \right) = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

wprowadźmy nowy wektor:

$$(41) \quad p^* = \frac{dx}{dt^*} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt^*} = P \frac{dt}{dt^*},$$

wtedy tak

$$\begin{aligned} s^* &= s_0 + \int_{t_0}^{t^*} \sqrt{p^* \times p^*} dt^* = s_0 + \\ &+ \varepsilon \int_{t_0}^{t^*} \sqrt{p \times p} dt = s_0 + \varepsilon (t^* - t_0), \end{aligned}$$

jeśli $t_0 = \tau(t_0)$. Mamy więc

$$(42) \quad s^* = \varepsilon t^* + (s_0 - \varepsilon t_0) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Jeżeli więc s jest funkcją krzywej C , to zbiór wszystkich funkcji, które są łukami krzywej C , składa się z funkcji kształtu $s = \varepsilon t + \text{Const}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a Const jest dowolna. Ze każdej z tych funkcji możemy wybrać parametr $t = e^s$ ($\varepsilon = \pm 1$), gdyż ona spełni powyżej podane warunki: wtedy otrzymamy (42), co oznacza, że parametryzacja wykonywana względem t jest

zmiennym przy zmianach parametru, ale zmienia się w sposób określony i prosty.

Zauważmy dalej, że na mocy (37) jest

$$(43) \quad \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{ds^*} \right)^2 = \sum_i \left(\frac{dx_i}{ds} \cdot \varepsilon \right)^2 = 1.$$

Stąd zarazem wynika, że jednostkowy wektor styczny i styczna mogą zmieniać kierunek przy zmianie parametru; mamy bowiem

$$(43 \text{ bis}) \quad \mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \mathbf{t} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Wykażemy odwrotne tw.: jeżeli krzywa przedstawiona jest parametrycznie przy pomocy parametru σ : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma)$ i jeżeli $\mathbf{r}(\sigma)$ spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w przedziale $[\sigma_1, \sigma_2]$ (t. zn. miary składowych wektora $\mathbf{r}(\sigma)$, jako funkcje parametru σ spełniają $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w przedziale $[\sigma_1, \sigma_2]$) i jeżeli w $[\sigma_1, \sigma_2]$ jest

$$(44) \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = 1,$$

to σ jest łukiem krzywej. Na mocy założenia istnieje łuk s i jest $s = \chi(\sigma)$, przyczem funkcja $\chi(\sigma)$ ma pochodną w $[\sigma_1, \sigma_2]$ dodatnią. Z (37₃) i (44) wynika, że jest

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) \cdot \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2, \end{aligned}$$

a stąd wynika: $ds = \pm d\sigma$ i $s = \pm \sigma + s_0$, c. b. d. u.

§ 4. Płaszczyzna normalna. Oprócz stycznej, jednostkowego wektora stycznego i łuku, wprowa-

dzimy jeszcze jeden element rzędu 1^{go} (t. zn. zależny od pochodnych rzędu pierwszego), a mianowicie płaszczyznę normalną.

Płaszczyznę normalną krzywej C , spełniającej $(Z, 1)$ i $(Z^, 1)$ w punkcie M nazywamy płaszczyznę przez M i prostopadłą do stycznej w M do C . Znajdziemy jej równanie. Niech P oznacza dowolny punkt tej płaszczyzny, niech $\mathbf{OP} = \mathbf{R}$ wyznacza położenie punktu P ; niech $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ wyznacza punkt M krzywej C ; wtedy wektor $\mathbf{MP} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ leży na płaszczyźnie, a więc (o ile jest $\neq \mathbf{0}$) jest prostopadłym do wektora \mathbf{t} , stycznego w M do C , a więc jest:*

$$(45) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{t} = 0;$$

punkt M widocznie spełnia to równanie, które przeto jest równaniem płaszczyzny normalnej. W układzie Kartezjusza przyjmie to równanie postać:

$$(46) \quad \sum_{i=1}^3 (X_i - x_i) \sigma_i = 0 \text{ lub } \sum_{i=1}^3 (X_i - x_i) \frac{dx_i}{ds} = 0,$$

a że jest

$$(47) \quad \sigma_i = \frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{dx_i}{dt},$$

więc (46) przepisać można w postaci:

$$(48) \quad \sum_i (X_i - x_i) \frac{dx_i}{dt} = 0 \text{ lub } \sum_i (X_i - x_i) dx_i = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że płaszczyzna normalna została określona niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych. Niech bowiem krzywa C przejdzie w krzywą C^* przez ruch, M w M^* ; wektor \mathbf{t} — jak już wiemy z § 2 — przejdzie w wek-

tor t^* , styczny do C^* w M^* , płaszczyzna π normalna do C w M , prostopadła do t , przejdzie w płaszczyznę π^* , prostopadłą do t^* i przechodzić będzie przez M^* , bo ruchy euklidesowe zachowują kąty; przeto π^* jest płaszczyzną normalną do C^* w M^* , a o to właśnie chodziło. Wyróżniliśmy więc w sposób niezmienniczy względem grupy ruchów euklidesowych płaszczyznę, przechodzącą przez punkt krzywej.

§ 5. Położenie punktów krzywej C względem stycznej i płaszczyzny normalnej. *a)* Jak wiemy z II § 1 żaden punkt krzywej C , spełniającej $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ nie może być nieskończenie wielokrotnym. Jeżeli więc $a \leq t_0 \leq b$, to równanie [a właściwie układ 3 równań!]:

$$(49) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \quad (\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0))$$

ma skończoną ilość rozwiązań na t w przedziale $[a, b]$; niech $t_1 \neq t_0$ będzie rozwiązaniem dla (49), a więc $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_0$, ale takim, że między t_0 i t_1 nie ma rozwiązania równania (49). Określmy funkcję (będącą skalarem): $F(t) = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)$; będzie to kwadrat długości cięciwy, łączącej punkty krzywej $M_0(t_0)$, $M(t)$. Mamy $F(t_0) = 0$, nadto $F(t_1) = 0$. Ponieważ $F(t)$ należy do C^1 w $[a, b]$, więc na mocy tw. Rolle'go istnieje liczba t_2 , zawarta między t_0 i t_1 taka, że jest:

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} F'(t_2) = (\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}'(t_2) = 0 \\ \mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \end{cases}$$

Związek ten ma prostą interpretację. Jeżeli M_2, p_2 oznaczają punkt $M(t_2)$ i styczną w M_2 do C , to

(50) wyraża, że istnieje na C punkt M_2 taki, iż jest $M_o M_2 \perp p_2$. Tę własność wyrazimy jeszcze w inny sposób: rozważmy płaszczyznę π_2 normalną do C w M_2 ; jej równanie ma postać!

$$(51) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}(t_2)) \times \mathbf{r}'(t_2) = \mathbf{0}$$

i kładąc $\mathbf{R} = \mathbf{r}_o$, przekonywamy się na mocy (50), że (51) jest spełnione, a więc punkt M_o leży na płaszczyźnie normalnej punktu M_2 .

b) W punkcie M_o weźmy styczną p_o do C ; p_o ma równanie:

$$(52) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{r}_o' \quad \left(\mathbf{r}_o' = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t_o} \right).$$

Założmy, że krzywa C ma punkt $M(t_3)$, różny od $M_o(t_o)$, wspólny z p_o i wyciągnijmy stąd wniosek. Założenie nasze wyraża, że równanie (układ 3 równań!):

$$(53) \quad \mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{r}_o'$$

ma rozwiązanie na skalar σ . Wprowadzamy dalsze założenie, że krzywa C spełnia $(Z, 2)$ w $[a, b]$, wobec tego możemy użyć rozwinięcia Peany (aż do wyrazów rzędu 2^{go}), a więc (53) przyjmie postać

$$\mathbf{r}_o + (t_3 - t_o) \mathbf{r}_o' + \frac{(t_3 - t_o)^2}{2} [\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}] = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{r}_o',$$

czyli

$$(54) \quad 2(t_3 - t_o - \sigma) \mathbf{r}_o' + (t_3 - t_o)^2 (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

przyczem wektor \mathbf{a} ma własność następującą: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $t_3 \rightarrow t_o$. Warunek (54) wyraża prosty związek między trzema wektorami \mathbf{r}_o' , \mathbf{r}_o'' , \mathbf{a} . Mnożąc (54)

wektorjalnie przez r_1' , (ponieważ jest $r_1' \wedge r_1'' = 0$) otrzymujemy

$$(55) \quad (t_2 - t_1)^2 [r_1' \wedge (r_1'' + a)] = 0, \text{ czyli} \\ r_1' \wedge (r_1'' + a) = 0,$$

bo z założenia jest $t_2 \neq t_1$. Związek (55) pozwoli nam udowodnić twierdzenie, z którego skorzystamy w rozdz. III. W tym celu wprowadzimy założenie:

$$(Z^*, 2) \text{ macierz } \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} \text{ czyli}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_2}{dt^2} & \frac{d^2x_3}{dt^2} \end{vmatrix}$$

jest w $[a, b]$ rzędu 2^{go} czyli wektorjalnie:

$$(Z^*, 2) \quad \frac{dr}{dt} \wedge \frac{d^2r}{dt^2} \neq 0 \text{ w } [a, b].$$

Zauważamy, że gdy krzywa C spełnia $(Z^*, 2)$, to także spełnia $(Z^*, 1)$ czyli $(Z^*, 1)$ wynika z $(Z^*, 2)$.

Tę. Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, jeżeli $a < t_0 < b$ i p_0 oznacza styczną do C w punkcie $M_0(t_0)$, to istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że każdy punkt $M(t)$ krzywej o własności: $a < t < b$, $t - t_0 < \delta_0$ i $t \neq t_0$, nie leży na p_0 .

Dla dowodu niewprost założymy, że mimo przyjętych założeń liczba δ_0 o podanej własności nie istnieje dlatego, że w dowolnej bliskości punktu t_0 istnieje punkt krzywej, leżący na p_0 , czyli istnieje nieskoń-

(50) wyraża, że istnieje na C punkt M_0 taki, iż jest $M_0 \in M_0 \cap p_0$. To własność wyrażamy jeszcze w inny sposób: rozważmy płaszczyznę π_0 normalną do C w M_0 ; jej równanie ma postać

$$(51) \quad (R - r(t_0)) \times r'(t_0) = 0$$

Stąd $R = r_0$, przekonujemy się na mocy (50), że (51) jest spełnione, a więc punkt M_0 leży na płaszczyźnie normalnej punktu M_0 .

b) W punkcie M_0 weźmy styczną p_0 do C ; p_0 ma równanie:

$$(52) \quad R = r_0 + \sigma r'_0 \quad \left(r'_0 = \left(\frac{dr}{dt} \right)_{t_0} \right)$$

Zakładamy, że krzywa C ma punkt $M(t_2)$, różny od $M(t_0)$, wspólny z p_0 , i wyciągamy stąd wniosek. Zapiszmy nasze wyraża, że równanie (układ 2 równań):

$$(53) \quad r(t_2) = r_0 + \sigma r'_0$$

ma rozwiązanie na skalar σ . Wprowadzamy dalsze założenia, że krzywa C spełnia (Z, 2) w $[a, b]$, wobec tego możemy użyć rozwinięcia Peana (aż do wyrazów rzędu 2^o), a więc (53) przyjmie postać

$$r_0 + (t_2 - t_0) r'_0 + \frac{(t_2 - t_0)^2}{2} (r''_0 + a) = r_0 + \sigma r'_0$$

$$(54) \quad (t_2 - t_0 - \sigma) r'_0 + \frac{(t_2 - t_0)^2}{2} (r''_0 + a) = 0$$

przy czym wektor a ma własność następującą: $a \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow t_0$. Wobec (54) wyraża prosty związek między krzywą wektorami r_0 , r'_0 , a . Możemy (54)

wektorjalnie przez \mathbf{r}_0' , (ponieważ jest $\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0' = \mathbf{0}$) otrzymujemy

$$(55) \quad (t_3 - t_0)^2 [\mathbf{r}_0' \wedge (\mathbf{r}_0'' + \mathbf{a})] = \mathbf{0} \quad \text{czyli} \\ \mathbf{r}_0' \wedge (\mathbf{r}_0'' + \mathbf{a}) = \mathbf{0},$$

bo z założenia jest $t_3 \neq t_0$. Związek (55) pozwoli nam udowodnić twierdzenie, z którego skorzystamy w rozdz. III. W tym celu wprowadzimy założenie:

$$(Z^*, 2) \text{ macierz } \left| \begin{array}{ccc} \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right| \quad \text{czyli}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2x_3}{dt^2} \end{array} \right|$$

jest w $[a, b]$ rzędu 2^{go} czyli wektorjalnie:

$$(Z^*, 2) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \neq \mathbf{0} \quad \text{w } [a, b].$$

Zauważmy, że gdy krzywa C spełnia $(Z^*, 2)$, to także spełnia $(Z^*, 1)$ czyli $(Z^*, 1)$ wynika z $(Z^*, 2)$.

Tw. Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, jeżeli $a \leq t_0 \leq b$ i p_0 oznacza styczną do C w punkcie $M_0(t_0)$, to istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że żaden punkt $M(t)$ krzywej o własności: $a \leq t \leq b$, $t_0 - \delta_0 \leq t \leq t_0 + \delta_0$, $t \neq t_0$ nie leży na p_0 .

Dla dowodu niewprost załóżmy, że mimo przyjętych założeń liczba δ_0 o podanej własności nie istnieje dlatego, że w dowolnej bliskości punktu t_0 istnieje punkt krzywej, leżący na p_0 , czyli istnieje nieskoń-

czony ciąg liczb t_v w $[a, b]$, różnych od t_0 i takich, że $t_v \rightarrow t_0$, gdy $v \rightarrow \infty$, nadto takich, że każdy punkt $M_v(t_v)$ leży na p_0 ; na mocy powyższego istnieje wektor $\mathbf{a}(t)$ o własności $\mathbf{a}(t_v) \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $v \rightarrow \infty$ i (zob. (55)):

$$\mathbf{r}'_0 \wedge [\mathbf{r}''_0 + \mathbf{a}(t_v)] = \mathbf{0},$$

co w granicy daje $\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 = \mathbf{0}$, a to jest sprzeczne z założeniem $(Z^*, 2)$. Temsamem tw. udowodnione.

c) Nasuwa się pytanie, czy prosta p_0 (powyżej rozważana) [niekoniecznie oś] może być styczną do C jeszcze w innym punkcie t krzywej C . Otóż wykażemy tw.: *jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to na żadnej prostej nie może leżeć nieskończenie wiele punktów styczności tej prostej z krzywą C .*

Tw. to wynika z ogólniejszego tw.: *jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to na żadnej prostej nie leży nieskończony zbiór punktów $M(t)$ krzywej C .*

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieje prosta p o równaniu $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \sigma \mathbf{b}$ (gdzie $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) taka, że krzywa C ma z p nieskończenie wiele punktów wspólnych; punkty te na mocy założenia o C tworzą ograniczony zbiór punktów, który przeto musi mieć przynajmniej jeden punkt skupienia; ten punkt skupienia z powodu ciągłości $\mathbf{r}(t)$ należy do C i oznaczyć go przeto możemy przez $M_0(t_0)$; ze zbioru punktów wspólnych krzywej i prostej p można wybrać ściśle monotoniczny ciąg liczb t_v o własności $t_v \rightarrow t_0$, gdy $v \rightarrow \infty$. Punkty $M_v(t_v)$ i punkt $M_0(t_0)$ leżą na prostej p , a więc istnieją liczby σ_v, σ_0 takie, że jest:

$$\mathbf{r}(t_v) = \mathbf{a} + \sigma_v \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{a} + \sigma_0 \mathbf{b};$$

stąd wynika, że jest

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = (\sigma_v - \sigma_0) \mathbf{b},$$

a rozwinięcie Peany aż do wyrazów rzędu 2^{go} daje po podzieleniu przez $t_v - t_0 \neq 0$:

$$(55 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}'_0 + \frac{t_v - t_0}{2} [\mathbf{r}''_0 + \mathbf{c}_v] = \\ = \frac{\sigma_v - \sigma_0}{t_v - t_0} \cdot \mathbf{b} = l_v \cdot \mathbf{b}; \left(l_v = \frac{\sigma_v - \sigma_0}{t_v - t_0} \right), \end{array} \right.$$

przyczem $\mathbf{c}_v \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $v \rightarrow \infty$. Ponieważ lewa strona w (55 bis) ma granicę, gdy $v \rightarrow \infty$, to ją także posiada prawa strona, a że $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, więc istnieje liczba l_0 taka, że jest w granicy dla $v \rightarrow \infty$: $\mathbf{r}'_0 = l_0 \cdot \mathbf{b}$, a to wstawione w (55 bis) i po podzieleniu przez $t_v - t_0$ daje:

$$\mathbf{r}''_0 + \mathbf{c}_v = 2 \frac{l_v - l_0}{t_v - t_0} \cdot \mathbf{b};$$

ponieważ lewa strona ma granicę ($= \mathbf{r}''_0$) dla $v \rightarrow \infty$, więc prawa strona ma granicę; a ponieważ jest $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, więc istnieje liczba m_0 taka, że jest (w granicy dla $v \rightarrow \infty$): $\mathbf{r}''_0 = m_0 \mathbf{b}$. Wobec tego jest

$$\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 = l_0 \mathbf{b} \wedge m_0 \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

a to jest sprzeczne z założeniem ($Z^*, 2$).

Wobec tych twierdzeń na każdej stycznej może leżeć tylko skończona ilość punktów styczności z krzywą. Styczną, która ma z krzywą więcej niż jeden punkt styczności, nazwijmy¹ styczną (A). Nasuwa się zagadnienie, czy zbiór stycznych (A)

¹ Nie nazywamy jej wielokrotną, gdyż termin ten co innego znaczy.

może być nieskończonym. Zagadnienie to zostało rozwiązane¹ dla krzywych, spełniających $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$.

Odnosnie do stycznych zrobimy jeszcze uwagę następującą: wiemy, że dla krzywej, spełniającej $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ nie może nieskończenie wiele stycznych schodzić się z jedną prostą; można jednak udowodnić dalsze tw.: *jeżeli krzywa, spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to nie posiada nieskończenie wielu stycznych do siebie równoległych.*

Dowód (niewprost) szkicujemy. Załóżmy, że istnieje ciąg $t_v \rightarrow t_o$ o własności $r'(t_v) = \mu_v r_o'$, stąd $r'(t_v) - r_o' = (\mu_v - 1) r_o'$, a więc $(t_v - t_o) [r_o'' + a_v] = (\mu_v - 1) r_o'$, skąd już łatwo wykazać, że być musi $r_o' \wedge r_o'' = \mathbf{0}$ wbrew $(Z^*, 2)$.

d) Zbadajmy teraz, czy krzywa ma prócz $M_o(t_o)$ punkty wspólne z płaszczyzną normalną π_o do C , a należącą do M_o . Odpowiedź na to pytanie daje następujące tw.: *jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$, to dla każdej liczby t_o o własności $a \leq t_o \leq b$ istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że żaden punkt $M(t)$ o własności $a \leq t \leq b$, $t_o - \delta_1 \leq t \leq t_o + \delta_1$, $t \neq t_o$ nie leży na płaszczyźnie π_o normalnej do C w $M_o(t_o)$.*

Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje ciąg t_n ściśle monotoniczny i taki, że jest $t_n \rightarrow t_o$, gdy $n \rightarrow \infty$ i że punkty $M(t_n)$ leżą na π_o , a więc $r(t_n)$ spełniają równanie pł. π_o ; równanie $(\mathbf{R} - r_o) \times r_o' = \mathbf{0}$ będzie przeto spełnione dla $\mathbf{R} = r(t_n)$ czyli będzie:

$$(\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = \mathbf{0}.$$

¹ Zob. S. Gołąb: Über ausgezeichnete Tangenten einer regulären Kurve. Math. Zeitschrift t. 30 (1929) str. 754—760.

może być nieskończonym. Zagadnienie to zostało rozwiązane dla krzywych spełniających $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w [a, 3].

Odnosząc do stycznych zrobimy jeszcze uwagi następującą: wiemy, że dla krzywej, spełniającej $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ nie może nieskończenie wiele stycznych schodzić się z jedną prostą; można jednak udowodnić dalsze tw.: jeżeli krzywa, spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to nie posiada nieskończenie wielu stycznych do siebie równoległych.

Dowód (niewprost) szkicujemy. Załóżmy, że istnieje ciąg $t_n \rightarrow t_0$ o własności $r'(t_n) = p, r'_0$, stąd $r'(t_n) - r'_0 = (p, -1)r'_0$, a więc $(t_n - t_0)(r''_0 + a_n) = (p, -1)r'_0$, skąd już łatwo wykazać, że być musi $a_n \wedge t_n = 0$ wbrew $(Z^*, 2)$.

2) Zbadajmy teraz, czy krzywa ma prócz $M_0(t_0)$ punkty wspólne z płaszczyzną normalną π do C i przechodzącą do M_0 . Odpowiedź na to pytanie daje następujące tw.: jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$, to dla każdej liczby t_0 o własności $a < t_0 < b$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że żaden punkt $M(t)$ należący do C z $a < t < b, t_0 - \delta < t < t_0 + \delta, t \neq t_0$ nie leży na płaszczyźnie π normalnej do C w $M_0(t_0)$.

Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje ciąg t_n takich elementów t i taki, że jest $t_n \rightarrow t_0$, gdy $t_n \neq t_0$, że punkty $M(t_n)$ leżą na π , a więc $r(t_n) - r(t_0) = r'(t_0)(t_n - t_0) + \rho_n$, gdzie $(\rho_n - \rho'_n) \wedge r'_0 = 0$ i gdzie prosta przechodząca do $B = r(t_n)$ oraz będzie:

$$(r(t_n) - r_0) \wedge r'_0 = 0.$$

Stosując tu rozwinięcie Peany aż do wyrazów rzędu 1^{go}, otrzymujemy po podzieleniu przez $l_n - l_0 \neq 0$:

$$(r'_n + a_n) \times r_0 = 0,$$

przy czym $a_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$; przechodząc do granicy dla $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy stąd: $r'_0 \times r_0 = 0$, co oznacza, że wektor r'_0 ma długość zerową, a to jest sprzeczne z założeniem $(Z^0, 1)$.

Tw. Przy założeniach i oznaczeniach poprzedniego tw. i dodatkowym założeniu $a < l_0 < b$ można liczbę $\delta_1 > 0$ poprzedniego tw. tak skrócić, że punkty $M(t)$ o własności $a \leq t < b$, $l_0 < t < l_0 + \delta_1$ leżą po przeciwnej stronie płaszczyzny π_0 , niż punkty $M(t)$ o własności $a \leq t < b$, $l_0 < t < l_0 + \delta_1$.

Rzeczywiście, wstawiając rozwinięcie Peany $r(t) = r_0 + (t - l_0)[r'_0 + a]$ za R w lewą stronę równania $(R - r_0) \times r'_0 = 0$ płaszc. π_0 otrzymamy:

$$(r(t) - r_0) \times r'_0 = (t - l_0)[r'_0 \times r'_0 + a \times r'_0].$$

Znak tego wyrażenia przy dostatecznie małym δ_1 z powodu $a \rightarrow 0$ (gdy $l \rightarrow l_0$) zależy od znaku czynnika $(t - l_0)$. Temsamem tw. udowodnione.

Uwaga 1. W przypadkach, kiedy $l_0 = a$ lub $l_0 = b$, a pominiętych w ostatnim twierdzeniu, odpowiedni łuk krzywej leży cały po jednej stronie płaszczyzny π_0 , co łatwo wynika z poprzedniego wywodu.

Uwaga 2. Odwzorujmy łuk krzywej od $M(l_0 - \delta_1)$ do $M(l_0 + \delta_1)$ na styczną w sposób następujący: równanie stycznej przyjmijmy w postaci $R = r_0 + s r'_0$, a równanie krzywej: $R = r_0 + c(t - l_0)$ i te punkty stycznej i krzywej uważajmy za sobie odpowiadające, które na stycznej i krzywej odpowiadają tej samej

Stosując tu rozwinięcie Peany aż do wyrazów rzędu 1^{go}, otrzymujemy po podzieleniu przez $t_n - t_0 \neq 0$:

$$(\mathbf{r}'_0 + \mathbf{a}_n) \times \mathbf{r}'_0 = 0,$$

przyczem $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $n \rightarrow \infty$; przechodząc do granicy dla $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy stąd: $\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}'_0 = 0$, co orzeka, że wektor \mathbf{r}'_0 ma długość zerową, a to jest sprzeczne z założeniem (Z^* , 1).

Tw. Przy założeniach i oznaczeniach poprzedniego tw. i dodatkowym założeniu $a < t_0 < b$ można liczbę $\delta_1 > 0$ poprzedniego tw. tak skrepować, że punkty $M(t)$ o własności $a \leq t \leq b$, $t_0 - \delta_1 \leq t < t_0$ leżą po przeciwnej stronie płaszczyzny π_0 , niż punkty $M(t)$ o własności $a \leq t \leq b$, $t_0 < t \leq t_0 + \delta_1$.

Rzeczywiście, wstawiając rozwinięcie Peany $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)[\mathbf{r}'_0 + \mathbf{a}]$ za \mathbf{R} w lewą stronę równania $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}'_0 = 0$ płaszczyzn. π_0 , otrzymamy:

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{r}'_0 = (t - t_0)[\mathbf{r}'_0 \times \mathbf{r}'_0 + \mathbf{a} \times \mathbf{r}'_0].$$

Znak tego wyrażenia przy dostatecznie małym δ_1 z powodu $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$ (gdy $t \rightarrow t_0$) zależy od znaku czynnika $(t - t_0)$. Temsamem tw. udowodnione.

Uwaga 1. W przypadkach, kiedy $t_0 = a$ lub $t_0 = b$, a pominiętych w ostatnim twierdzeniu, odpowiedni łuk krzywej leży cały po jednej stronie płaszczyzny π_0 , co łatwo wynika z poprzedniego wywodu.

Uwaga 2. Odwzorujmy łuk krzywej od $M(t_0 - \delta_1)$ do $M(t_0 + \delta_1)$ na styczną w sposób następujący: równanie stycznej przyjmijmy w postaci $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \sigma \mathbf{r}'_0$, a równanie krzywej: $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0(t_0 + \sigma)$ i te punkty stycznej i krzywej uważajmy za sobie odpowiadające, które na stycznej i krzywej odpowiadają tej samej

wartości na σ ; punkty stycznej i krzywej, sobie odpowiadające, a dość bliskie M_0 , leżą po tej samej stronie pł. π_0 , nadto, gdy σ wzrasta, to punkt na stycznej porusza się w kierunku, przyjętego w II § 2, skierowania stycznej i tem się tłumaczy nazwa: styczna skierowana w kierunku wzrostu parametru t .

e) **Tw.** Jeżeli krzywa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$ i jeżeli istnieje płaszczyna π , na której leży nieskończenie wiele punktów krzywej, to istnieje w $[a, b]$ liczba t_0 taka, iż wyznacznik:

$$(56) \quad |\mathbf{r}'(t_0), \mathbf{r}''(t_0), \mathbf{r}'''(t_0)| = 0.$$

Dowód. Na mocy założenia twierdzenia można wybrać ciąg ściśle monotoniczny t_n (mający więc granicę $t_n \rightarrow t_0$, gdy $n \rightarrow \infty$) i taki, że punkty $M_n(t_n)$ leżą na π . Niech π ma równanie $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{u}_0 = 0$, gdzie $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$. Mamy więc $(\mathbf{r}(t_n) - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{u}_0 = 0$, a stąd przez trzykrotne stosowanie tw. Rolle'go otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t_n) \times \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{r}''(t_n) \times \mathbf{u}_0 = 0, \\ \mathbf{r}'''(t_n) \times \mathbf{u}_0 = 0, \end{aligned}$$

co dla $n \rightarrow \infty$ daje:

$$(57_{1,2,3}) \quad \mathbf{r}'_0 \times \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{r}''_0 \times \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{r}'''_0 \times \mathbf{u}_0 = 0.$$

Na mocy $(Z^*, 2)$ jest $\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0 \neq \mathbf{0}$, więc z $(57_{1,2})$ wynika, że istnieje liczba μ_0 taka, iż jest $\mathbf{u}_0 = = \mu_0 (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0)$, przyczem jest $\mu_0 \neq 0$, bo jest $\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0}$, (zob. I § 5 f); wstawiając w (57_3) znaną wartość na \mathbf{u}_0 i uwzględniając nierówność $\mu_0 \neq 0$, otrzymujemy natychmiast (56) . Wynik ten będzie miał prostą interpretację w rozdz. III, mianowicie (56)

wyraża, że w punkcie t_0 krzywa ma torsję (czyli krzywiznę drugą) równą zeru.

Uwaga. Z dowodu widoczne, że można otrzymać także związek:

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{u}_0 = 0 \text{ czyli } (\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{r}'_0 \wedge \mathbf{r}''_0) = 0,$$

co w myśl wywodów Rozdz. III znaczy, że płaszczyzna π jest płaszczyzną ściśle styczną krzywej w $M_0(t_0)$.

f) Pozostaje nam do wykazania, że założenie $(Z^*, 2)$ jest niezmiennicze względem grupy ruchów euklidesowych. W tym celu krzywą C o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, spełniającą $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ poddajmy ruchowi euklidesowemu, wskutek tego otrzymamy krzywą C^* o równaniu (zob. wzór I 65):

$$\mathbf{r}^* = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}) \mathbf{e}_i + \mathbf{a}_4.$$

Stąd przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$\mathbf{r}'^* \wedge \mathbf{r}''^* = \sum_{i,k} (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_k \times \mathbf{r}'') (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k).$$

Ale $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ itd., więc

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^* \wedge \mathbf{r}''^* = & [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_1 + \\ & + [(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_2 + \\ & + [(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}') (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

co na mocy wzoru I 75 przepisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^* \wedge \mathbf{r}''^* = & [(\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_1 + \\ & + [(\mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_2 + [(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_3; \end{aligned}$$

ponieważ wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ tworzą prawoskrętny i trójortogonalny układ wektorów jednostkowych,

więc jest $\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1$ i t. d. i zatem jest:

$$(58) \quad \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}^{*''} = \sum_i [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')] \mathbf{e}_i.$$

Założmy chwilowo, że lewa strona ostatniej równości jest zerowym wektorem; z powodu niezależności linijowej wektorów \mathbf{e}_i wynika stąd, że jest

$$(59_{1,2,3}) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') = 0, & \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') = 0, \\ \mathbf{a}_3 \times (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') = 0. \end{cases}$$

Ponieważ z założenia jest $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$, więc (zob. I § 5 f) równości (59_{1,2}) wykazują, że istnieje skalar λ taki, iż jest

$$\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' = \lambda (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = \lambda \mathbf{a}_3 \quad (\lambda \neq 0),$$

a to wraz z (59₃) daje $\lambda (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_3) = 0$ czyli $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_3 = 0$, co jest sprzeczne z określeniem wektora \mathbf{a}_3 , jako *jednostkowego*. Temsamem wykazaliśmy, że jest $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}^{*''} \neq \mathbf{0}$, c. b. d. u.

§ 6. Krzywe dane nie parametrycznie. Jak wiadomo z I § 1, krzywa może być dana przez dwa równania $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. O funkcjach F i G założymy, że należą do klasy C^1 w pewnym trójwymiarowym obszarze D i że w D macierz

$$(60) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

jest rzędu 2^{go} czyli że w D wektor $\mathbf{grad} F \wedge \mathbf{grad} G \neq \mathbf{0}$ (zob. I § 7). Różniczkując równania $F = 0$, $G = 0$, otrzymujemy

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \text{ czyli} \\ (\text{grad } F) \times a = 0; (\text{grad } G) \times a = 0, \end{cases}$$

gdzie przez a oznaczyliśmy wektor o miarach składowych dx, dy, dz . Z (61) na mocy 1 § 5/ otrzymujemy $a = \lambda (\text{grad } F \wedge \text{grad } G)$; czynnik λ wyznaczmy stąd, że — jak widoczne — jest $a \times a = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, a więc

$$ds^2 = \lambda^2 (\text{grad } F \wedge \text{grad } G) \times (\text{grad } F \wedge \text{grad } G),$$

co krótko przepisujemy pod postacią $ds^2 = \lambda^2 A$, skąd wynika, że jest

$$\lambda = \frac{\epsilon ds}{\sqrt{A}} \quad (\epsilon = \pm 1).$$

Wobec tego na wektor jednostkowy styczny I otrzymamy:

$$(62) \quad t = \frac{\epsilon}{ds} = \frac{\epsilon}{\sqrt{A}} \text{grad } F \wedge \text{grad } G, \quad (\epsilon = \pm 1),$$

czynnik ϵ wskazuje na to, że możemy dowolnie obrócić kierunek obiegu na krzywej, która jest dana jako przecięcie dwóch powierzchni.

Ze wzoru (62) już łatwo wynika równanie płaszczyzny normalnej. Rozważmy jeszcze przypadek elementarny, mianowicie przypadek krzywej płaskiej, danej przez równania $F(x, y) = 0, z = 0$. Gdy funkcja F należy do klasy C^2 w pewnej płaszczyźnie dziedzinie D , to w D ma wektor $\text{grad } F$ składowe o miarach $(F'_x, F'_y, 0)$; w tym przypadku jest $G \equiv z$, więc $\text{grad } G$ ma składowe o miarach $(0, 0, 1)$ wskutek tego wektor t ma na mocy (62) składowe o miarach

więc jest $a_1 \wedge a_2 = a_3$ i d. i zatem jest:

$$(58) \quad r' \wedge r'' = \sum_{i=1}^3 [a_i \times (r' \wedge r'')] a_i.$$

Zauważmy chwilowo, że lewa strona ostatniej równości jest zerowym wektorem; z powodu niezależności liniowej wektorów a_i wynika stąd, że jest

$$(59_{1,2}) \quad \begin{cases} a_1 \times (r' \wedge r'') = 0, & a_2 \times (r' \wedge r'') = 0, \\ a_3 \times (r' \wedge r'') = 0. \end{cases}$$

Ponieważ z założenia jest $r' \wedge r'' \neq 0$, więc (zob. I § 27) równości (59_{1,2}) wykazują, że istnieje skalar λ taki, iż jest

$$r' \wedge r'' = \lambda (a_1 \wedge a_2) = \lambda a_3, \quad (\lambda \neq 0).$$

a to wraz z (59₂) daje $\lambda (a_2 \times a_3) = 0$ czyli $a_2 \times a_3 = 0$, co jest sprzeczne z określeniem wektora a_3 , jako *jednostkihotępa*. Temżsamem wykazaliśmy, że jest $r' \wedge r'' \neq 0$, c. b. d. n.

§ 6. Krzywe dane nie parametrycznie. Jak wiadomo z I § 1, krzywa może być dana przez dwa równania $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$. O funkcjach F i G założymy, że należą do klasy C^1 w pewnym n -wymiarowym obszarze D i że w D macierz

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

jest różna od zera, czyli że w D wektor $\text{grad } F \wedge \text{grad } G \neq 0$ (zob. I § 7). Wskazującą równania

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \text{ czyli} \\ (\mathbf{grad} F) \times \mathbf{a} = 0; (\mathbf{grad} G) \times \mathbf{a} = 0, \end{cases}$$

gdzie przez \mathbf{a} oznaczyliśmy wektor o miarach składowych dx, dy, dz . Z (61) na mocy I § 5 *f* otrzymujemy $\mathbf{a} = \lambda (\mathbf{grad} F \wedge \mathbf{grad} G)$; czynnik λ wyznaczymy stąd, że — jak widoczne — jest $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, a więc

$$ds^2 = \lambda^2 (\mathbf{grad} F \wedge \mathbf{grad} G) \times (\mathbf{grad} F \wedge \mathbf{grad} G),$$

co krótko przepiszemy pod postacią $ds^2 = \lambda^2 \cdot A$, skąd wynika, że jest

$$\lambda = \frac{\varepsilon ds}{\sqrt{A}} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Wobec tego na wektor jednostkowy styczny \mathbf{t} otrzymamy:

$$(62) \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{a}}{ds} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} \mathbf{grad} F \wedge \mathbf{grad} G \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

czynnik ε wskazuje na to, że możemy dowolnie obrać kierunek obiegu na krzywej, która jest dana, jako przecięcie dwóch powierzchni.

Ze wzoru (62) już łatwo wynika równanie płaszczyzny normalnej. Rozważmy jeszcze przypadek elementarny, mianowicie przypadek krzywej płaskiej, danej przez równania $F(x, y) = 0, z = 0$. Gdy funkcja F należy do klasy C^1 w pewnej płaskiej dziedzinie D , to w D ma wektor $\mathbf{grad} F$ składowe o miarach $(F'_x, F'_y, 0)$; w tym przypadku jest $G \equiv z$, więc $\mathbf{grad} G$ ma składowe o miarach $(0, 0, 1)$ wskutek tego wektor \mathbf{t} ma na mocy (62) składowe o miarach

$$(63) \quad \left(\frac{\varepsilon F_y'}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}, \frac{-\varepsilon F_x'}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}, 0 \right).$$

Gdy $F(x, y) \equiv y - f(x)$, a więc krzywa na płaszczyźnie (x, y) jest dana w postaci „rozwiązanej“ na y , bo w postaci $y = f(x)$, to dla t otrzymamy składowe o miarach:

$$(64) \quad \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + f'^2}}, \frac{\varepsilon f'}{\sqrt{1 + f'^2}}, 0 \right) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Jeżeli dołączymy warunek, by styczna była „skierowana w kierunku wzrostu odciętej x^* “, to należy przyjąć $\varepsilon = +1$.

§ 7. Wyróżnienie układu ruchomego. Nawiązujemy do I § 9. Krzywa C dana jest w układzie nieruchomym x^*_i przez równania:

$$(65) \quad x^*_i = x^*_i(s) \quad (i = 1, 2, 3),$$

przyczem mają być spełnione $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$; wobec tego krzywa posiada łuk; przyjmiemy, że łuk s posłużył nam do przedstawienia krzywej w (65). Załóżmy, że początek układu ruchomego x_i porusza się po C , przeto we wzorach I § 9 położyć należy: $a_{i4} = x^*_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$). Ponadto przyjmiemy, że ruch początku po C odbywa się ze stałą prędkością (stałą co do wielkości, ale niekoniecznie kierunku), a więc jest $ds : dt = c$, gdzie c oznacza stałą; stąd otrzymujemy $s = ct + c_1$, gdzie c_1 oznacza też stałą. W czasie od t do $t+1$ początek O układu ruchomego przebędzie widocznie łuk $c(t+1) + c_1 - (ct + c_1) = c$; otóż jednostkę czasu tak dobierzemy, by ten łuk przebyty wynosił 1; wtedy będzie $c = 1$ i otrzymamy:

$$(66) \quad \frac{ds}{dt} = 1 \quad \text{czyli} \quad ds = dt.$$

[Przez tę umowę „pozbywamy“ się niejako czasu (t. j. pojęcia *nie* geometrycznego), zastępując czas łukiem (a więc pojęciem geometrycznym).]

Do tego dołączmy jeszcze warunek, by oś ruchoma x_1 była w O zgodna ze styczną, skierowaną w kierunku wzrostu parametru s (łuku i czasu); stąd wynika, że

$$(67) \quad a_{i1} = \frac{dx_i^*}{ds} \quad (i = 1, 2, 3),$$

bo a_{i1} oznacza dostawę kąta, który oś x_1 tworzy z osią x_i^* ; oś x_1 jest styczną, nadto $dx_i^* : ds$ daje dostawy kierunkowe stycznej (II § 3 wzory 36). Ponieważ jest $a_{i4} = x_i^*(s)$, więc stąd i z (67) wynika, że jest:

$$(68) \quad \frac{da_{i4}}{ds} = \frac{dx_i^*}{ds} = a_{i1} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Wobec tego wzór I 99 daje:

$$(69) \quad \xi_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} \frac{da_{i4}}{ds} = \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{i1} = \delta_{j1} \quad (j = 1, 2, 3),$$

a więc jest

$$(70) \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

co było intuicyjnie widoczne. Początek O porusza się bowiem na mocy (66) z prędkością 1, a wektor prędkości — jak wiadomo — leży na stycznej do toru punktu O t. j. na stycznej do C , a więc na osi x_1 ; rzuty tego wektora prędkości na osie układu ruchomego muszą więc być $(1, 0, 0)$, jak podaliśmy w (70).

Mając w R_3 daną krzywą C , mogliśmy wyróżnić położenie układu ruchomego przez wyznaczenie toru dla początku układu i wyróżnienie położenia osi x_1 ; osie x_2 i x_3 nie zostały jeszcze wyróżnione (uczynimy to w rozdz. III); ale dotychczasowe wyróżnienie układu ruchomego zezwala na uproszczenie wzorów I 98; na ich miejsce otrzymujemy teraz wzory:

$$(71) \quad \begin{cases} v_1 = \frac{dx_1}{ds} + p_2 x_3 - p_3 x_2 + 1, \\ v_2 = \frac{dx_2}{ds} + p_3 x_1 - p_1 x_3, v_3 = \frac{dx_3}{ds} + p_1 x_2 - p_2 x_1; \\ (ds = dt). \end{cases}$$

Zarazem widoczne, że płaszczyzna normalna do krzywej ma równanie $x_1 = 0$.

Rozdział III.

Elementy drugiego i trzeciego rzędu.

§ 1. Plan dalszych rozważań. Dla krzywej C (przy spełnieniu pewnych warunków) wyróżniliśmy przez każdy jej punkt M_0 oś p_0 , mianowicie styczną i płaszczyznę π_0 normalną. Każdą oś lub prostą przez M_0 prostopadłą do p_0 , a więc leżącą na π_0 , nazwijmy osią lub prostą normalną do C w M_0 . Proste te tworzą pęk o środku M_0 i podstawie π_0 . Tych prostych jest nieskończenie wiele, żadna z nich dotąd nie została wyróżniona niezmienniczo. Załóżmy, że w sposób, który poznamy w dalszym ciągu, udało się nam wyróżnić niezmienniczo jedną normalną, to oczywiście prosta do niej i do p_0 pro-

stopadła byłaby też wyróżniona niezmiernie —
 —zami słowy: nie jedną, ale dwie osie (lub proste)
 normalne pozwolą ów sposób od razu wyodrębnić nie-
 —ściennie; oznaczmy je przez p_1 i p_2 . W całości
 —zamielibyśmy w M , trzy osie (lub proste) — p_1 , p_2 , p_3 ,
 —z których każde dwie są do siebie prostopadłe, a więc
 —zamielibyśmy w M , trójkąt ortogonalny. Równa-
 —zamiennie mieć będziemy wyróżnione trzy płaszczyzny
 —zami M ; jedna, przechodząca przez p_1 i p_2 , pro-
 —zamiadła do p_3 , to znana nam płaszczyzna normal-
 —zami π_3 , druga przez p_1 i p_3 — oznaczmy ją przez π_1 ,
 —zami trzecia π_2 przez p_2 i p_3 ; płaszczyzny π_1 , π_2 , π_3
 —zamiortyć będą w M , trójkąt ortogonalny.

Do podobnego wyniku można dojść drogą po-
 —zami odwrótną. Rozważmy pak wszystkich pla-
 —zami szczytn o osi p_1 ; każdą płaszczyznę tego paku roz-
 —zami płaszczyznę styczną do C w M . Zaden z nich
 —zami jest na mocy rozważań Roritz II wyznaczoną
 —zami zaden jest prostopadłą do π_1 . Założony, że w spo-
 —zami, który poniżej podamy, uda nam się wyróżnić
 —zami ściennie jedną z płaszczyzn stycznych do C
 —zami M . — oznaczmy ją przez π_1 — oczywiście rów-
 —zami ściennie wyróżnimy jeszcze jedną płaszczyznę π_2 ,
 —zami zopadną do π_1 i π_1 . Ponadto obie te płaszczyzny
 —zami π_1 , przechodzące się z π_1 , pozwalają wyróżnić
 —zami normalne p_1 , p_2 . Wynik mamy analogiczny
 —zami poprzedniego. A więc oprócz osi p_1 będzie-
 —zami mieć dwie proste p_2 , p_3 . Jak wyodrębnić na-
 —zami kierunek? Oczywiście wystarczą na jednej
 —zami p_2 np. na p_2 wyróżnić kierunek, do kierunku

—zami Jak rys. 2 na końcu książki; niektóre szczegóły
 —zami mogą być dla czytelnika jeszcze nieznane.

Mając w B_3 daną krzywą C , mogliśmy wyróżnić położenie układu ruchomego przez wyznaczenie toru dla początku układu i wyróżnienie położenia osi x_1 ; osie x_0 i x_2 nie zostały jeszcze wyróżnione (uczynimy to w rozdz. III); nie dotychczasowe wyróżnienie układu ruchomego zezwala na uproszczenie wzorów I 88; na ich miejsce otrzymujemy teraz wzory:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{ds} + p_1 x_0 - p_2 x_2 + 1, \\ v_2 &= \frac{dx_2}{ds} + p_1 x_1 - p_2 x_2, \quad v_3 = \frac{dx_3}{ds} + p_1 x_1 - p_2 x_2; \\ &(ds = dl). \end{aligned} \right.$$

Zatem widzimy, że płaszczyzna normalna do krzywej ma równanie $x_1 = 0$.

Rozdział III.

Elementy drugiego i trzeciego rzędu.

§ 1. Plan dalszych rozważań. Dla krzywej C (przy spełnieniu pewnych warunków) wyróżnimy przez każdy jej punkt M_0 os p_0 , mianowicie styczną i płaszczyznę π_0 normalną. Każda os lub prosta przez M_0 prostopadła do p_0 , a więc leżąca na π_0 , nazwiemy osią lub prostą normalną do C w M_0 . Można to tworzyć pęk o środku M_0 i podstawie π_0 . Tę prostą jest nieskończoność wiele, żadna z nich jednak nie została wyróżniona niezmienniczo. Zaplanujmy, że w sposób, który poznamy w dalszym ciągu, uda się osi niezmienniczo jedną normalną, w szczególności prostą do niej i do p_0 pro-

stopadła byłyby też wyróżniona niezmienniczo — innymi słowy: nie jedna, ale dwie osie (lub proste) normalne pozwoli ów sposób odrazu wyróżnić niezmienniczo; oznaczmy je przez p_o' i p_o'' . W całości mielibyśmy w M_o trzy osie (lub proste): p_o, p_o', p_o'' , z których każde dwie są do siebie prostopadłe, a więc mielibyśmy w M_o trójramię ortogonalne. Równocześnie mieć będziemy wyróżnione trzy płaszczyzny przez M_o ; jedna, przechodząca przez p_o' i p_o'' , prostopadła do p_o , to znana nam płaszczyzna normalna π_o , druga przez p_o i p_o'' — oznaczmy ją przez π_o' , a trzecia π_o'' przez p_o i p_o' ; płaszczyzny π_o, π_o', π_o'' tworzyć będą w M_o trójścian ortogonalny.¹

Do podobnego wyniku można dojść drogą poniekąd odwrotną. Rozważmy pęk wszystkich płaszczyzn o osi p_o ; każdą płaszczyznę tego pęku nazywamy płaszczyzną styczną do C w M_o . Żadna z nich nie jest na mocy rozważań Rozdz. II wyróżnioną (każda jest prostopadłą do π_o). Załóżmy, że w sposób, który poniżej podamy, uda nam się wyróżnić niezmienniczo jedną z płaszczyzn stycznych do C w M_o — oznaczmy ją przez π_o' — oczywiście równocześnie wyróżnimy jeszcze jedną płaszczyznę π_o'' , prostopadłą do π_o i π_o' . Ponadto obie te płaszczyzny π_o', π_o'' , przecinając się z π_o , pozwalają wyróżnić dwie normalne p_o', p_o'' . Wynik mamy analogiczny do poprzedniego. A więc oprócz osi p_o będziemy mieli dwie proste p_o', p_o'' . Jak wyróżnić na nich kierunek? Oczywiście wystarcza na jednej z nich np. na p_o'' wyróżnić kierunek, bo kierunek

¹ Zob. rys. 2. na końcu książki; niektóre szczegóły rysunku będą dla czytelnika jeszcze niezrozumiałe.

trzeciej będzie jednoznacznie określony, gdy np. zażądamy, by osie p_o , p_o'' i p_o' (w porządku podanym) tworzyły prawy układ osi. Ale jak wyróżnić kierunek na p_o'' ? Otóż będzie to możliwe, gdy zdołamy na p_o'' wyróżnić niezmienniczo punkt — oznaczmy go przez K_o — różny od M_o ; możemy bowiem wtedy prostej p_o'' nadać kierunek od M_o do K_o . W powyższych słowach przedstawiliśmy plan najbliższych rozważań i zagadnień wyszukania płaszczyzn wyróżnionych π_o' , π_o'' , oraz osi p_o' , p_o'' .

§ 2. Krzywe płaskie. Zajmiemy się przypadkiem, w którym jedna część zagadnień podanych w § 1 rozwiązuje się bez trudności. Założmy, że dana krzywa C spełnia $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$; wobec tego C posiada łuk s , który przyjmiemy, jako parametr. Jest więc $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ równaniem krzywej. Nadto założymy, że krzywa C jest płaską, t. zn., że wszystkie jej punkty leżą na jednej płaszczyźnie π o równaniu $\mathbf{R} \times \mathbf{u}_o = a_o$, gdzie $\mathbf{u}_o \neq \mathbf{0}$, a a_o jest skalarzem. Stąd wynika, że jest identycznie

$$(1) \quad \mathbf{r}(s) \times \mathbf{u}_o \equiv a_o.$$

Wykażemy, że *własność krzywej, że jest płaską, jest niezmienniczą względem grupy ruchów euklidesowych*. Poddajmy bowiem krzywą C ruchowi euklidesowemu, wskutek czego otrzymamy krzywą C^* o równaniu I 65. Mnożąc to równanie skalarnie przez \mathbf{e}_k , otrzymujemy:

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathbf{r}^* - \mathbf{a}_k) \times \mathbf{e}_k = \sum_i (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) = \\ = \sum_i (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}) \delta_{ik} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{r}. \end{cases}$$

Ta równość pozwoli nam rozłożyć wektor \mathbf{r} na skła-

dowe w kierunku ortogonalnego trójkątnej jednostkowych wektorów \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 b_i \cdot \mathbf{a}_i,$$

skąd wyliczymy miary b_k tych składowych; mnożąc skalarnie przez \mathbf{a}_j , mamy na mocy I 65 bis:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a}_j = \sum_k b_k \cdot (\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_j) = \sum_k b_k \cdot \delta_{kj} = b_j;$$

stąd i z (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad \mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 [(\mathbf{r}^* - \mathbf{a}_4) \times \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{a}_k,$$

co wraz z (1) daje:

$$a_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{u}_0 = \sum_{k=1}^3 [(\mathbf{r}^* - \mathbf{a}_4) \times \mathbf{e}_k] \cdot (\mathbf{a}_k \times \mathbf{u}_0)$$

czyli

$$(4) \quad \mathbf{r}^* \times \mathbf{u}_0^* \equiv a_0^*,$$

gdzie położyliśmy:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0^* = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{a}_k \times \mathbf{u}_0) \mathbf{e}_k, \\ a_0^* = a_0 + \sum_{k=1}^3 (\mathbf{a}_4 \times \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{a}_k \times \mathbf{u}_0). \end{array} \right.$$

Otóż (4) będzie kształtu (1) (a_0 jest skalar, \mathbf{u}_0^* wektorem, oba niezależne od C), gdy tylko wykażemy, że jest $\mathbf{u}_0^* \neq \mathbf{0}$. Załóżmy więc — dla dowodu niewprost — że jest $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{0}$, tedy (5₁) wskutek niezależności \mathbf{e}_k daje $\mathbf{a}_k \times \mathbf{u}_0 = 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Pierwsze dwa z tych równań dają $\mathbf{u}_0 = \mu (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)$ [zob. I § 5f], gdzie $\mu \neq 0$, a trzecie z nich daje $\mu (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 = 0$ czyli $|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = 0$ (bo $\mu \neq 0$),

ale to jest sprzeczne z I 65 bis. Jest zatem $\mathbf{u}_o^* \neq \mathbf{0}$, a więc krzywa C^* leży na płaszczyźnie o równaniu $\mathbf{R} \times \mathbf{u}_o^* = \mathbf{a}_o^*$, a ta płaszczyzna widocznie powstała z π przez wyżej podany ruch. Temsamem tw. wykazaliśmy.

Z równania (1) przez różniczkowanie co do s otrzymujemy na mocy wzoru II 35: $\mathbf{t} \times \mathbf{u}_o = 0$, co wykazuje, że styczne do C leżą na π , a więc π jest w każdym punkcie krzywej C płaszczyzną styczną, jest to zatem płaszczyzna styczna *wyróżniona niezmienniczo* względem grupy ruchów euklidesowych. W dowolnym więc punkcie M_o krzywej C , mamy już dwie płaszczyzny: normalną π_o i płaszczyznę styczną $\pi_o' \equiv \pi$, wobec tego umiemy wyróżnić jeszcze jedną płaszczyznę π_o'' przez M_o , mianowicie prostopadłą do π_o i π . Te trzy płaszczyzny, tworzące w M_o trójścian ortogonalny, przecinają się w trzech prostych: p_o (styczna, a więc oś) i dwie proste p_o', p_o'' (jeszcze nieskierowane). Znajdziemy równania płaszczyzn π_o, π_o', π_o'' i prostych p_o, p_o', p_o'' . Przyjmiemy dla prostoty, że parametrem krzywej jest t , niekoniecznie będący łukiem. Wobec tego styczna w M_o ma równanie:

$$(6) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{r}_o' \quad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right).$$

Stąd płaszczyzna normalna π_o ma równanie:

$$(7) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = 0.$$

Równanie płaszczyzny $\pi_o' \equiv \pi$ podamy nie w postaci $\mathbf{R} \times \mathbf{u}_o = \mathbf{a}_o$, ale nieco przekształconej. Punkt M_o leży na niej, więc $\mathbf{r}_o \times \mathbf{u}_o = \mathbf{a}_o$, przeto jest:

$$(8) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{u}_o = 0$$

π' to przyjmiećmy, jako równanie płaszczyzny π' , do π_0 prostopadłą jest prosta p_0 , a więc dostawmy kierunkowe prostej π' są proporcjonalne do miar składowych wektora u_0 . Przeto równanie prostej $p_0 \perp \pi'$ jest postaci

$$(8) \quad R = r_0 + \alpha_1 u_0.$$

Z (8) i (9) otrzymujemy równanie prostej p_0 , prostopadłej do p_0 i p_0 , a więc:

$$(10) \quad R = r_0 + \alpha_2 (r_0' \wedge u_0).$$

Wreszcie równanie płaszczyzny π' , prostopadłej do p_0 , otrzymamy stąd w postaci:

$$(11) \quad (R - r_0) \times (r_0' \wedge u_0) = 0.$$

Do zagadnień o krzywych płaskich powrócimy kilkakrotnie (w III § 18 i w IV § 20). Obecnie stosujemy powyżej otrzymany wynik: założenia (Z, 1) i (Z*, 1) w przypadku krzywej płaskiej pozwalają w każdym punkcie krzywej wyróżnić (niezmiennie względem grupy ruchów euklidesowych) jedną osiową i dwie proste, oraz trzy płaszczyzny.

§ 3. Płaszczyzna ściśle styczna. Jeżeli o krzywej nie założymy, że jest płaska, to dla wyróżnienia dwóch prostych normalnych i dwóch płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny normalnej, musimy wyróżnić wynik, otrzymany w Rozdz. II przy zwężeniu ogólności krzywej, a więc przy przyjęciu bardziej kępujących założeń, niż to było w Rozdz. II. Jeżeli mają być te „bardziej kępujące” założenia, wskazują rozważania II § 5 b).

O krzywej C przyjmujemy więc, że spełnia (Z, 2) i (Z*, 2) w $[a, b]$, wobec czego spełnione są założenia (Z, 1) i (Z*, 1) w $[a, b]$. Krzywa C będzie zatem

ale to jest sprzeczne z (65) his. Jest zatem $u^2 \neq 0$, a więc krzywa C^* leży na płaszczyźnie o równaniu $R \times u^2 = u^2$, a ta płaszczyzna widocznie powstała z π przez wyżej podany ruch. Teżsamym tw. wykazaliśmy.

Z równania (1) przez różniczkowanie co do s otrzymujemy na mocy wzoru II 35: $1 \times u_s = 0$, co wykazuje, że styczne do C leżą na π , a więc π jest w każdym punkcie krzywej C płaszczyzną styczną, jest to zatem płaszczyzna styczna wyróżniona niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych. W dowolnym więc punkcie M , krzywej C , mamy już dwie płaszczyzny: normalną π , i płaszczyznę styczną $\pi_s \equiv \pi$, wobec tego umiemy wyróżnić jeszcze jedną płaszczyznę π_s' przez M , mianowicie prostopadłą do π , i π . Te trzy płaszczyzny, tworzące w M , trójceias ortogonalny, przecinają się w trzech prostych: p , (styczna, a więc os) i dwie proste p_s, p_s' (jeszcze nieskierowane). Znajdziemy równania płaszczyzn π, π_s', π_s' i prostych p, p_s, p_s' . Przyjmijemy dla prostoty, że parametrem krzywej jest t , niekoniecznie będący łukiem. Wobec tego styczna w M , ma równanie:

$$(2) \quad R = r_s + \sigma r_s' \quad \left(r_s' = \frac{dr_s}{dt} \right).$$

Stąd płaszczyzna normalna π , ma równanie:

$$(3) \quad (R - r_s) \times r_s' = 0.$$

Równanie płaszczyzny $\pi_s' \equiv \pi$ podamy nie w postaci $R \times u_s = u_s$, ale nieco przekształconej. Punkt M leży na niej, więc $r_s \times u_s = 0$, przeto jest:

$$(4) \quad (R - r_s) \times u_s = 0.$$

i to przyjmujemy, jako równanie płaszczyzny π_o' ; do π_o' prostopadłą jest prosta p_o' , a więc dostawy kierunkowe prostej p_o' są proporcjonalne do miar składowych wektora \mathbf{u}_o . Przeto równanie prostej $p_o' \perp \pi_o'$ jest postaci

$$(9) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma_1 \mathbf{u}_o.$$

Z (6) i (9) otrzymujemy równanie prostej p_o'' , prostopadłej do p_o i p_o' , a więc:

$$(10) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma_2 (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{u}_o).$$

Wreszcie równanie płaszczyzny π_o'' , prostopadłej do p_o'' , otrzymamy stąd w postaci:

$$(11) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{u}_o) = 0.$$

Do zagadnień o krzywych płaskich powrócimy kilkakrotnie (w III § 13 i w IV § 3 a). Obecnie streszczamy powyżej otrzymany wynik: *założenia* (Z, 1) i (Z*, 1) w przypadku krzywej płaskiej pozwoliły w każdym punkcie krzywej wyróżnić (niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych) jedną oś (styczną) i dwie proste, oraz trzy płaszczyzny.

§ 3. Płaszczyzna ściśle styczna. Jeżeli o krzywej nie założymy, że jest płaską, to dla wyróżnienia dwóch prostych normalnych i dwóch płaszczyzn, prostopadłych do płaszczyzny normalnej, musimy wyzyskać wynik, otrzymany w Rozdz. II przy ew. zwężeniu ogólności krzywej, a więc przy przyjęciu bardziej krępujących założeń, niż to było w Rozdz. II. Jakie mają być te „bardziej krępujące“ założenia, wskazują rozważania II § 5 b).

O krzywej C przyjmujemy więc, że spełnia (Z, 2) i (Z*, 2) w $[a, b]$, wobec czego spełnione są założenia (Z, 1) i (Z*, 1) w $[a, b]$; krzywa C będzie zatem

posiadała w każdym punkcie $M_o(t_o)$, gdzie $a \leq t_o \leq b$, określoną styczną p_o , której kierunek wyznacza jednostkowy wektor styczny t_o lub niejednostkowy naogół, ale z t_o współkierunkowy wektor r_o' , gdzie r' jest określone wzorem (6). Wskutek założeń ($Z, 2$) i ($Z^*, 2$) istnieje będzie na mocy tw. z § II 5b (str. 85) liczba $\delta_o > 0$ taka, iż żaden punkt $M(t)$ o własności $a \leq t \leq b$, $t_o - \delta_o \leq t \leq t_o + \delta_o$, $t \neq t_o$, nie leży na p_o ; stąd zaś wynika, że punkt $M(t)$ i oś p_o określają płaszczyznę, którą oznaczymy przez π . By znaleźć jej wektorjalne równanie, oznaczymy przez R wektor, określający bieżący punkt na π , przez r_o wektor określający punkt M_o ; wektory: r_o' (leżący na stycznej) i $r - r_o = M_o M$ są na mocy cytowanego twierdzenia różne od siebie, gdy jest $a \leq t \leq b$, $t_o - \delta_o \leq t \leq t_o + \delta_o$, $t \neq t_o$; one wyznaczają płaszczyznę, na której leżeć będzie też trzeci wektor $R - r_o$; a więc trzy wektory: $R - r_o$, r_o' , $r - r_o$ są współpłaszczyznowe, skąd wynika, że wyznacznik:

$$(12) \quad |R - r_o, r_o', r - r_o| = 0;$$

nie trudno zauważyć, że (12) jest właśnie szukaniem równaniem płaszczyzny π . Korzystając z rozwinięcia Peany (aż do wyrazów rzędu 2^{go}):

$$(12 \text{ bis}) \quad r = r_o + (t_o - t)r_o' + \frac{(t - t_o)^2}{2} [r_o'' + a],$$

możemy (12) przepisać w postaci: $|R - r_o, r_o', (t - t_o)r_o' + (t - t_o)^2 \cdot \frac{1}{2} (r_o'' + a)| = 0$; ale mnożąc drugi wiersz wyznacznika przez $(t - t_o)$ i odejmując od trzeciego wiersza, otrzymamy równanie, któremu z powodu $t - t_o \neq 0$ możemy nadać postać:

$$(13) \quad |R - r_o, r_o', r_o'' + a| = 0,$$

gdzie — jak wiadomo z teorii rozwinięcia Peany — jest $\mathbf{a} \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow t_0$. Że równanie (13) jest równaniem płaszczyzny, wynika stąd, iż na mocy (Z^* , 2) wektor $\mathbf{r}'_o \wedge \mathbf{r}''_o \neq \mathbf{0}$, a więc także $\mathbf{r}_o \wedge (\mathbf{r}''_o + \mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, gdy $t - t_0$ jest dość bliskie zera. Oprócz płaszczyzny π weźmy płaszczyznę π'_o o równaniu:

$$(14) \quad |\mathbf{R} - \mathbf{r}_o, \mathbf{r}'_o, \mathbf{r}''_o| = 0;$$

wykażemy, że płaszczyzna ta jest granicznym położeniem pł. π , gdy $t \rightarrow t_0$. Ponieważ obie płaszczyzny przechodzą przez p_o , więc dość wykazać, że sinus kąta θ , między nimi zawartego, dąży do zera, gdy $t \rightarrow t_0$; ale kąt θ między temi płaszczyznami równa się kątowi między wektorami

$$\mathbf{r}'_o \wedge \mathbf{r}''_o; \mathbf{r}'_o \wedge (\mathbf{r}''_o + \mathbf{a}),$$

z których pierwszy jest prostopadły do π'_o , drugi do π . Ponieważ oba te wektory są nie zerowe, więc $\sin \theta$ jest proporcjonalne do iloczynu wektorowego tych wektorów, a iloczyn ten obliczymy przy pomocy wzoru I 77 a:

$$(15) \quad \begin{cases} (\mathbf{r}'_o \wedge \mathbf{r}''_o) \wedge [\mathbf{r}'_o \wedge (\mathbf{r}''_o + \mathbf{a})] = \\ = \mathbf{r}'_o \cdot |\mathbf{r}'_o, \mathbf{r}''_o, \mathbf{r}''_o + \mathbf{a}|, \end{cases}$$

gdyż $|\mathbf{r}'_o, \mathbf{r}''_o, \mathbf{r}'_o| = 0$. Iloczyn (15) widocznie dąży do $\mathbf{0}$, gdy $t \rightarrow t_0$, a więc też $\sin \theta \rightarrow 0$ i temsamem tw. udowodnione.

W powyższy sposób zdołaliśmy wyróżnić płaszczyznę styczną (14), której równanie w układzie Kartezjusza ma postać:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} X - x_o, & Y - y_o, & Z - z_o \\ x'_o, & y'_o, & z'_o \\ x''_o, & y''_o, & z''_o \end{vmatrix} = 0.$$

Płaszczyzna ta nazywa się *płaszczyzną ściśle styczną* krzywej C w M_o . Jak widać z równania, płaszczyzna ta przechodzi przez punkt M_o , gdyż wartości $\mathbf{R} = \mathbf{r}_o$ czyli $X = x_o$, $Y = y_o$, $Z = z_o$ spełniają (14), wzgl. (16). Płaszczyzna ta przechodzi przez styczną p_o , bo (14) wzgl. (16) jest spełnione, gdy położymy $\mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{r}_o'$ wzgl. $X = x_o + \sigma x_o'$, $Y = y_o + \sigma y_o'$, $Z = z_o + \sigma z_o'$ przy dowolnem σ .

Płaszczyzna ściśle styczna, jak widoczne z (14) czy (16) zależy od pochodnych rzędu 1^{go} i 2^{go} , jest więc *elementem krzywej rzędu 2^{go}* .

Wykażemy, że *płaszczyzna ściśle styczna jest niezależną od położenia krzywej w przestrzeni R_3 ,* znaczy to, że, jeżeli przez ruch euklidesowy C przejdzie w C^* , M_o w M_o^* , płaszczyzna ściśle styczna π_o' do C w M_o przejdzie w płaszczyznę $\pi_o^{*'}$, to ta ostatnia jest płaszczyzną ściśle styczną do C^* w M_o^* ; oczywiście zakładamy, że C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$, wtedy — jak wiemy ze str. 91 — krzywa C^* spełnia też $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$.

Krzywa C o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ przejdzie przez ruch w krzywą C^* o równaniu I 65, punkt M_o dany przez wektor \mathbf{r}_o przejdzie w punkt M_o^* na C^* , określony przez \mathbf{r}_o^* . Utwórzmy równanie płaszczyzny ściśle stycznej do C^* w M_o^* . Otóż na mocy I 65 i II 58 jest dla dowolnego punktu \mathbf{R}^* tej płaszczyzny:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{R}^* - \mathbf{r}_o^*) \times (\mathbf{r}_o^{*' } \wedge \mathbf{r}_o^{*''}) = \\ & = \left\{ \sum_i [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o)] \mathbf{e}_i \right\} \times \sum_k [\mathbf{a}_k \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \mathbf{e}_k = \\ & = \sum_{i,k} [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o)] \cdot [\mathbf{a}_k \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \cdot \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k. \end{aligned} \right.$$

Ale $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, a według I 65 bis jest także $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k = \delta_{ik}$, więc

Płaszczyzna ta nazywa się *płaszczyzną ściśle styczną* krzywej C w M_3 . Jak widać z równania, płaszczyzna ta przechodzi przez punkt M_0 , gdyż wartości $X = x_0$, sayli: $Y = y_0$, $Z = z_0$ spełniają (14), wzgl. (16). Płaszczyzna ta przechodzi przez styczną π_0 , bo (14) wzgl. (16) jest spełnione, gdy położymy $X = x_0 + \sigma x_0'$ wzgl. $Y = y_0 + \sigma y_0'$, $Z = z_0 + \sigma z_0'$ przy dowolnym σ .

Płaszczyzna ściśle styczna, jak widoczna z (14) czy (16) zależy od pochodnych rzędu 1^{st} i 2^{st} , jest więc *elementem krzywej rzędu 2^{st}* .

Wykażemy, że *płaszczyzna ściśle styczna jest niezależną od położenia krzywej w przestrzeni R_3* , znaczy to, że jeżeli przez ruch euklidesowy C przejdzie w C^* , M_0 w M_0^* , płaszczyzna ściśle styczna π_0 do C w M_0 przejdzie w płaszczyznę π_0^* , to ta ostatnia jest płaszczyzną ściśle styczną do C^* w M_0^* oczywiście kładziemy, że C spełnia $(Z, 2) + (Z^*, 2)$, wtedy — jak wiemy ze str. 91 — krzywa C^* spełnia też $(Z, 2) + (Z^*, 2)$.

Krzywa C o równaniu $r = r(t)$ przejdzie przez ruch w krzywą C^* o równaniu 1 65, punkt M_0 dany przez wektor r_0 przejdzie w punkt M_0^* na C^* , określony przez r_0^* . Utwórzmy równanie płaszczyzny ściśle stycznej do C^* w M_0^* . Otóż na mocy 1 65 i 1 58 jest dla dowolnego punktu R^* tej płaszczyzny:

$$(17) \quad \begin{cases} (R^* - r_0^*) \times (r_0^* \wedge r_0^{*''}) = 0 \\ = \left[\sum a_i \times (R - r_0) \right] \times \sum [a_i \times (r_0' \wedge r_0^{*''})] e_i = \\ = \sum [a_i \times (R - r_0)] \cdot [a_i \times (r_0' \wedge r_0^{*''})] \cdot n_0 \times e_0 \end{cases}$$

Ale $a_i \times e_0 = \delta_{ij}$, a według 1 58 bis jest także $a_i \times a_j = \delta_{ij}$, więc

$$(17\text{bis}) \quad \begin{cases} (R^* - r_0^*) \times (r_1^* \wedge r_2^*) = \\ = \sum_i [a_i \times (R - r_0)] \cdot [a_i \times (r_1^* \wedge r_2^*)] a_i \times a_i = \\ = \left\{ \sum_i [a_i \times (R - r_0)] a_i \right\} \times \\ \times \sum_i [a_i \times (r_1^* \wedge r_2^*)] a_i = (R - r_0) \times (r_1^* \wedge r_2^*). \end{cases}$$

Ze ostatnia część równości jest słuszną, wynika w sposób następujący: wektory a_i tworzą układ trzech niezależnych (bo trójortogonalnych) wektorów, więc wektory $R - r_0$, $r_1^* \wedge r_2^*$ można rozłożyć na składowo w kierunku wektorów a_i , stąd mamy właśnie

$$R - r_0 = \sum_i [a_i \times (R - r_0)] \cdot a_i$$

$$r_1^* \wedge r_2^* = \sum_i [a_i \times (r_1^* \wedge r_2^*)] a_i$$

Ze wzoru (17) otrzymujemy: jeżeli punkt określony przez R leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do C w M_0 , czyli gdy na mocy (14) zachodzi $(R - r_0) \times (r_1^* \wedge r_2^*) = 0$, to jest dla końca wekt. R^* , powstałego przez ruch z końca wekt. R także:

$$(R^* - r_0^*) \times (r_1^* \wedge r_2^*) = 0$$

czyli punkt, dany przez R^* , leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do C^* w M_0^* , a o to właśnie chodziło. Wzór (17) można przepisać w postaci

$$(18) \quad |R^* - r_0^*, r_1^*, r_2^*| = |R - r_0, r_1^*, r_2^*|.$$

Równość ta jest szczególnym przypadkiem ogólnej równości: jeżeli wektory u, v, w przejdą przez ruch euklidesowy to wektory u^*, v^*, w^* , to jest:

$$(19) \quad |u, v, w| = |u^*, v^*, w^*|$$

$$(17 \text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{R}^* - \mathbf{r}_o^*) \times (\mathbf{r}_o^{*'} \wedge \mathbf{r}_o^{*''}) = \\ & = \sum_{ik} [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o)] \cdot [\mathbf{a}_k \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k = \\ & = \left\{ \sum_i [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o)] \mathbf{a}_i \right\} \times \\ & \times \sum_k [\mathbf{a}_k \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \mathbf{a}_k = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''). \end{aligned} \right.$$

Że ostatnia część równości jest słuszną, wynika w sposób następujący: wektory \mathbf{a}_i tworzą układ trzech niezależnych (bo trójortogonalnych) wektorów, więc wektory $\mathbf{R} - \mathbf{r}_o$, $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''$ można rozłożyć na składowe w kierunku wektorów \mathbf{a}_i ; otrzymamy właśnie

$$\begin{aligned} \mathbf{R} - \mathbf{r}_o &= \sum_i [\mathbf{a}_i \times (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o)] \cdot \mathbf{a}_i, \\ \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' &= \sum_k [\mathbf{a}_k \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

Ze wzoru (17) otrzymujemy: jeżeli punkt określony przez \mathbf{R} leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do C w M_o czyli gdy na mocy (14) zachodzi $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = 0$, to jest dla końca wekt. \mathbf{R}^* , powstałego przez ruch z końca wekt. \mathbf{R} także:

$$(\mathbf{R}^* - \mathbf{r}_o^*) \times (\mathbf{r}_o^{*'} \wedge \mathbf{r}_o^{*''}) = 0$$

czyli punkt, dany przez \mathbf{R}^* , leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do C^* w M_o^* , a o to właśnie chodziło. Wzór (17) można przepisać w postaci

$$(18) \quad |\mathbf{R}^* - \mathbf{r}_o^*, \mathbf{r}_o^{*'}, \mathbf{r}_o^{*''}| = |\mathbf{R} - \mathbf{r}_o, \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o''|.$$

Równość ta jest szczególnym przypadkiem ogólnej równości: jeżeli wektory \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} przejdą przez ruch euklidesowy w wektory \mathbf{u}^* , \mathbf{v}^* , \mathbf{w}^* , to jest:

$$(19) \quad |\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}| = |\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*|.$$

Dowód tego twierdzenia jest zupełnie podobny do dowodu równości (17) i dlatego go pomijamy. Możemy (19) tak wysłowić: *wyznacznik trzech wektorów jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych*. Temsamem poznaliśmy trzeci „algebraiczny” niezmiennik grupy ruchów euklidesowych; poprzednio poznaliśmy niezmiennik jednego wektora (był nim kwadrat długości wektora) i niezmiennik dwóch wektorów (był nim iloczyn skalarny tych wektorów).

Zarazem znaleźliśmy niezmiennik trzech wektorów przy zmianie układu trójortogonalnego prawoskrętnego na inny układ trójortogonalny i prawoskrętny. Aby więc wartość wyznacznika trzech wektorów obliczyć, wystarczy obrać jakiś jeden układ potrójnie ortogonalny prawoskrętny i obliczyć miary składowych owych danych trzech wektorów w tym układzie.

Założmy teraz, że krzywa C jest płaską (III § 2) i że leży na płaszczyźnie π . Z określenia płaszczyzny ściśle stycznej wynika, że jest nią w każdym punkcie płaszczyzna π . A więc: *jeżeli krzywa C , spełniająca $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ jest płaską i leży cała na płaszczyźnie π , to π jest płaszczyzną ściśle styczną do C w każdym jej punkcie*.

Udowodnimy to jeszcze w inny sposób. Równanie płaszczyzny π napiszemy w postaci $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{u}_o = 0$, gdzie $\mathbf{u}_o \neq \mathbf{0}$ jest wektorem stałym; skoro cała krzywa leży na π , więc jest $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{u}_o \equiv 0$, skąd przez różniczkowanie otrzymujemy $\mathbf{r}' \times \mathbf{u}_o \equiv 0$, $\mathbf{r}'' \times \mathbf{u}_o \equiv 0$, co zachodzi w całym $[a, b]$, a więc w M_o , tedy jest $\mathbf{r}_o' \times \mathbf{u}_o = 0$, $\mathbf{r}_o'' \times \mathbf{u}_o = 0$; stąd na mocy $(Z^*, 2)$ i I § 5f wynika, że istnieje liczba $\mu \neq 0$ taka, że jest $\mathbf{u}_o = \mu (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')$, a to wykazuje,

że π jest płaszczyzną ściśle styczną do C w każdym jej punkcie M_o .

§ 4 Trójścian i trójramię, związane z krzywą.

W myśl planu, podanego w III § 1, wyróżnimy jeszcze jedną płaszczyznę π_o'' przez to, że jest styczną i prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej, a przez to będzie również prostopadłą do płaszczyzny normalnej π_o .

Aby podać równanie płaszczyzny π_o'' , zauważmy, że równanie (14) płaszczyzny π_o' , przepisane pod postacią $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = 0$, wykazuje, iż wektor $\mathbf{u}_o = \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''$ jest prostopadłym do π_o' ; jeżeli ten wektor wychodzić będzie z M_o , to π_o'' będzie przechodzić przez \mathbf{u}_o i przez wektor \mathbf{r}_o' , leżący na stycznej do C w M_o ; wobec tego równanie płaszczyzny π_o'' będzie miało postać wyznacznika:

$$(20) \quad |\mathbf{R} - \mathbf{r}_o, \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''| = 0.$$

Płaszczyzny π_o [III 7], π_o' [III 14] i π_o'' [III 20] tworzą trójścian ortogonalny w M_o i związany z krzywą. Płaszczyzna π_o'' nazywa się *płaszczyzną prostującą krzywej C w M_o* (zob. rys. 2). Ona jest niezmienniczą względem grupy ruchów euklidesowych, gdyż ruchy euklidesowe zachowują kąty; wiadomo bowiem, że π_o i π_o' są niezmiennicze, a π_o'' tworzy z nimi kąty proste, które pozostają prostymi przy ruchu, więc π_o'' przejdzie w płaszczyznę $\pi_o^{*''}$, prostopadłą do π_o^* i $\pi_o^{*'}$, a więc przejdzie w płaszczyznę prostującą krzywej C^* w M_o^* .

Ściany (płaszczyzny) przecinają się wzdłuż jednej osi p_o (styczna) i dwóch prostych p_o' , p_o'' . Równanie stycznej podaje III 6 (str. 100). Prosta p_o'' prostopadłą do π_o'' , więc prostą przecięcia ścian

π_o i π_o' , podaje na mocy (20) równanie

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma_1 [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')],$$

co wskutek I 73 przyjmie postać

$$(21) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma_1 [\mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'') - \mathbf{r}_o'' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o')];$$

prosta ta zowie się *prostą normalną główną* krzywej C w M_o . Drugą normalną wyróżnioną jest prosta p_o' , prostopadła do π_o' , która wskutek (14) ma równanie:

$$(22) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma_2 (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'');$$

jest to prosta przecięcia płaszczyzn π_o i π_o'' ; prosta ta zowie się *prostą binormalną* krzywej C w M_o .

Wyzyskaliśmy elementy pierwszego rzędu, jakimi są styczne, do utworzenia elementu 2^{go} rzędu, jakim jest płaszczyzna ściśle styczna; w ten sposób wyróżniliśmy w każdym punkcie M krzywej dwie płaszczyzny styczne i dwie proste normalne; tym normalnym nie nadaliśmy dotąd kierunku; jak wiemy z § 1, wystarcza wyróżnić na jednej z nich kierunek; w tym celu na tej jednej wyróżnimy punkt różny od t. zw. spodka normalnego t. j. punktu M_o . By móc taki drugi punkt wyróżnić, wyzyskamy w następnym paragrafie płaszczyzny normalne, które są również elementami pierwszego rzędu.

§ 5. Prosta biegunowa. O krzywej C zakładamy w dalszym ciągu, że spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$; wskutek tego również jest w $[a, b]$ spełnione $(Z, 1)$ i $(Z^* 1)$; w każdym tedy punkcie $M_o(t_o)$, gdzie $a \leq t_o \leq b$, ma C płaszczyznę normalną π_o o równaniu $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = 0$; płaszczyzny te — zależne od t_o — tworzą (jak mówimy zwykle) *jednoparametrową rodzinę płaszczyzn normalnych*.

Wskutek założeń $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ o krzywej C , będzie miała ta rodzina pewną własność, którą wnet znajdziemy i która pozwoli nam na prostej p_0'' t. j. na prostej normalnej głównej wyznaczyć punkt różny od M_0 . Mianowicie plan najbliższego rozmowienia będzie następujący: płaszczyzna normalna π w punkcie $M(t)$, dość bliskim punktowi M_0 , ale różnym od M_0 — jak wykazemy — przetnie płaszczyznę π_0 wzdłuż prostej, którą oznaczymy przez l ; własność ta będzie właśnie wynikać z $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$, ponadto okaże się, że prosta l ma położenie graniczne l_0 , gdy $t \rightarrow t_0$; ta prosta l_0 — zwana prostą bliźniową krzywej C , należącą do M_0 , jest oczywiście na π_0 , ale nie przechodzi przez M_0 i jest z p_0'' przecina p_0'' w punkcie — oznaczmy go przez K_0 — różnym od M_0 . Ten punkt K_0 będzie właśnie ów szukanym punktem na p_0'' , który nam pozwoli wyróżnić na p_0'' kierunek.

Przystąpimy obecnie do szczegółowego przedstawienia dopieroco podanych konstrukcyj geometrycznych. Otóż płaszczyzna π_0 (normalna w M_0) i płaszczyzna π (normalna w $M(t)$) mają równania:

$$(23) \quad (R - r_0) \times r'_0 = 0 \quad (R - r) \times r' = 0.$$

Mamy wykazać, gdy $t \neq t_0$ i dość blisko t_0 , to równania (23) mają rozwiązania na R , wyznaczające punkty prostej (właśnie prostej l).

Wstawiając w (23) rozwinięcia Taylora aż do wyrazów 1^o rzędu: $r = r_0 + (t - t_0)(r'_0 + a)$, $r' = r'_0 + (t - t_0)(r''_0 + b)$, (gdzie $a = \dot{r}$, $b = \dot{r}'$, gdy $t \rightarrow t_0$), otrzymamy

$$(R - r) \times r' = [R - r_0 - (t - t_0)(r'_0 + a)] \times \\ \times [r'_0 + (t - t_0)(r''_0 + b)] =$$

π_1 i π_2 , podaje nam tezę (20) równanie

$$R = r_0 + \sigma_1 [r_0' \wedge (r_0' \times r_0'')],$$

co wskutek 179 przyjmuje postać

$$(21) \quad R = r_0 + \sigma_1 [r_0' (r_0' \times r_0'') - r_0'' (r_0' \times r_0')];$$

prosta ta zowie się *prostą normalną główną* krzywej C w M_3 . Drugą normalną wyróżzoną jest prosta p_0' , prostopadła do π_0' , która wskutek (14) ma równanie:

$$(22) \quad R = r_0 + \sigma_2 (r_0' \wedge r_0'');$$

jest to prosta przecięcia płaszczyzn π_0 i π_0'' ; prosta ta zowie się *prostą binormalną* krzywej C w M_3 .

Wyzyaskaliśmy elementy pierwszego rzędu, jakimi są styczne, do utworzenia elementu 2^{go} rzędu, jakim jest płaszczyzna ściśle styczna; w ten sposób wyróżniliśmy w każdym punkcie M krzywej dwie płaszczyzny styczne i dwie proste normalne; tym normalnymi nie nadaliśmy dotąd kierunku; jak wiemy z § 1, wystarczy wyróżnić na jednej z nich kierunek; w tym celu na tej jednej wyróżnimy punkt różny od t , zw. spodkiem normalnego t. j. punktu M . By móc taki drugi punkt wyróżnić, wyzyaskamy w następnym paragrafie płaszczyzny normalne, które są również elementami pierwszego rzędu.

§ 5. Prosta biegunowa. O krzywej C zakładamy w dalszym ciągu, że spełnia (Z, 2) i (Z*, 2) w [a, b]; wskutek tego również jest w [a, b] spełnione (Z, 1) i (Z*, 1); w każdym tedy punkcie $M(t)$, gdzie $a < t < b$, ma C płaszczyznę normalną π_t o równaniu $(R - r_t) \times r_t' = 0$; płaszczyzny te — zależnie od t — tworzą (jak mówimy zwykle) *jednoparametrową rodzinę płaszczyzn normalnych*.

Wskutek założeń $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ o krzywej C , będzie miała ta rodzina pewną własność, którą wnet znajdziemy i która pozwoli nam na prostej p_o'' t.j. na prostej normalnej głównej wyróżnić punkt różny od M_o . Mianowicie plan najbliższego rozumowania będzie następujący: płaszczyzna normalna π w punkcie $M(t)$, dość bliskim punktowi M_o , ale różnym od M_o — jak wykażemy — przetnie płaszczyznę π_o wzdłuż prostej, którą oznaczymy przez l ; własność ta będzie właśnie wynikać z $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$, ponadto okaże się, że prosta l ma położenie graniczne l_o , gdy $t \rightarrow t_o$; ta prosta l_o — zwana *prostą biegunową* krzywej C , należącą do M_o , leży oczywiście na π_o , ale nie przechodzi przez M_o i jest $\perp p_o''$, przecina p_o'' w punkcie — oznaczymy go przez K_o — różnym od M_o . Ten punkt K_o będzie właśnie owym szukanym punktem na p_o'' , który nam pozwoli wyróżnić na p_o'' kierunek.

Przystąpimy obecnie do szczegółowego przedstawienia dopiero podanych konstrukcyj geometrycznych. Otóż płaszczyzna π_o (normalna w M_o) i płaszczyzna π (normalna w $M(t)$) mają równania:

$$(23) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = 0 \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{r}' = 0.$$

Mamy wykazać, gdy $t \neq t_o$ i dość bliskie t_o , to równania (23) mają rozwiązania na \mathbf{R} , wyznaczające punkty prostej (właśnie prostej l).

Wstawiając w (23₂) rozwinięcia Peany aż do wyrazów 1^{go} rzędu: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + (t - t_o)[\mathbf{r}_o' + \mathbf{a}]$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_o' + (t - t_o)[\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}]$, (gdzie $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $t \rightarrow t_o$), otrzymamy

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{r}' = [\mathbf{R} - \mathbf{r}_o - (t - t_o)(\mathbf{r}_o' + \mathbf{a})] \times \\ \times [\mathbf{r}_o' + (t - t_o)(\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})] =$$

$$= (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' + (t - t_o) [(\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}) - (\mathbf{r}_o' + \mathbf{a}) \times \mathbf{r}_o' - (t - t_o) (\mathbf{r}_o' + \mathbf{a}) \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})].$$

Uwzględniając (23₁) i nierówność $t \neq t_o$, otrzymujemy, że układ (23) jest równoważny układowi równań:

$$(24) \quad \begin{cases} (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = 0, \\ (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}) = \mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o' + c, \end{cases}$$

gdzie $c = \mathbf{a} \times \mathbf{r}_o' + (t - t_o) (\mathbf{r}_o' + \mathbf{a}) \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow t_o$. Układ (24) jest typu I 68. Ponieważ $\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}) = \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' + \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' \neq \mathbf{0}$, więc, gdy t dość bliskie t_o , to równania (24) mają rozwiązanie. Jak wiadomo z dyskusji układu I 68, trzeba najpierw znaleźć jedno szczególne rozwiązanie układu (24). Otóż nasuwa się rozwiązanie szczególne postaci:

$$(25) \quad \mathbf{R} - \mathbf{r}_o = \mu \mathbf{r}_o' + \nu \mathbf{r}_o'',$$

przyczem μ, ν są na razie nieznanymi skalarami (funkcjami parametru t). By wyznaczyć μ, ν , wstawiamy (25) najpierw w (24₁); otrzymamy: $\mu (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') + \nu (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'') = 0$, ale $\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o' \neq 0$, więc:

$$\mu = -\frac{\nu}{\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'} (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o''),$$

wobec czego (25) przyjmie postać

$$(26) \quad \begin{cases} \mathbf{R} - \mathbf{r}_o = \frac{\nu}{\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'} [\mathbf{r}_o'' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')] = \\ = \lambda [\mathbf{r}_o'' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')], \end{cases}$$

gdzie położyliśmy $\lambda = \nu : (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o')$. By wyznaczyć λ , wstawiamy (26) w (24₂) i otrzymujemy warunek:

$$(27) \quad \begin{cases} \lambda [(\mathbf{r}_o'' \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})) (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \\ - (\mathbf{r}_o' \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})) \cdot (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')] = \mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o' + \mathbf{c}, \end{cases}$$

z którego wyznaczymy λ , bo — jak zaraz wykazemy — współczynnik przy λ jest różnym od zera. Otóż na mocy wzoru I 75 jest ten współczynnik równy

$$(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})] \rightarrow (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''),$$

co, jako kwadrat długości wektora niezerowego, nie jest zerem; a więc (z powodu ciągłości) istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że powyższy współczynnik przy λ jest $\neq 0$, gdy $0 < |t - t_o| < \delta_1$. Wzór (27) pozwoli nam wyznaczyć λ . Znając szczególne rozwiązanie układu (24) znajdziemy ogólne rozwiązanie układu równań jednorodnych:

$$(28) \quad \mathbf{x} \times \mathbf{r}_o' = 0, \quad \mathbf{x} \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b}) = 0,$$

co ma rozwiązań nieskończenie wiele, a wszystkie są postaci: $\sigma \cdot [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})]$, gdzie σ oznacza dowolną liczbę. Wobec tego wszystkie rozwiązania układu (24) są postaci:

$$(29) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \lambda \cdot [\mathbf{r}_o'' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')] + \\ + \sigma [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})], \end{cases}$$

przyczem λ oznacza wielkość, spełniającą (27), a σ oznacza dowolną liczbę; wektor $\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{b})$ jest $\neq \mathbf{0}$, gdy t jest dość bliskie t_o ; stąd wynika, że (29) jest równaniem prostej, właśnie prostej l . Przecho-
dząc do granicy ($t \rightarrow t_o$), otrzymujemy prostą l_o o równaniu

$$(30) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \lambda_o [\mathbf{r}_o'' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \\ - \mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')] + \sigma (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''), \end{cases}$$

gdzie $\lambda_o = \lim \lambda$ spełnia związek

$$(31) \quad \lambda_o \cdot (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = \mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o''.$$

Że prosta l_o jest granicznym położeniem prostej l , wynika z następującej uwagi: uważamy te punkty na l i l_o za odpowiadające, które w (29) i (30) należą do tego samego σ ; dla tych punktów różnica prawych stron (29) i (30) widocznie dąży do $\mathbf{0}$, gdy $l \rightarrow l_o$, a to właśnie wykazuje, że l_o jest granicznym¹ położeniem prostej l . Prosta l_o — zwana biegunową krzywej C dla punktu M_o — nie przechodzi przez M_o . Rzeczywiście założmy dla dowodu niewprost, że l_o przechodzi przez M_o , a więc w (30) połączmy $\mathbf{R} = \mathbf{r}_o$; wtedy otrzymamy:

$$\lambda_o [\mathbf{r}_o'' \cdot (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o' \cdot (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')] + \sigma(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = \mathbf{0},$$

czyli na mocy wzoru I 73:

$$(32) \quad \lambda_o [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')] + \sigma(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = \mathbf{0},$$

co należy uważać za warunek na σ .

Mnożąc to skalarnie przez \mathbf{r}_o'' , otrzymujemy:

$$(33) \quad \lambda_o [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')] \times \mathbf{r}_o'' = \mathbf{0},$$

bo współczynnik przy σ jest zerem, gdyż $(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times \mathbf{r}_o'' = |\mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o'', \mathbf{r}_o''| = 0$. (Zob. I 74). Ale (33) prowadzi do sprzeczności; $\lambda_o \neq 0$, więc (33) daje:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')] \times \mathbf{r}_o'' &= |\mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o''| = \\ &= (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o') \times (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o') = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

co być nie może, gdyż założenie (Z^* , 2) orzeka, że wektor $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' \neq \mathbf{0}$. Tw. temsamem udowodnione.

¹ Dawniejsze podręczniki geometrii różniczkowej wyrażały powyższy fakt w ten sposób, że uważały l_o za prostą przecięcia płaszczyzny normalnej π_o z płaszczyzną normalną „nieskończenie bliską“.

Z równań (22) i (30) wynika, że proste: binormalna i biegunowa są do siebie równoległe, a więc prosta biegunowa jest prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej i zarazem leży na π_0 , zatem trafia płaszczyznę ściśle styczną w punkcie — oznaczmy go przez K_0 — leżącym na p_0 (t. j. na prostej normalnej głównej). Wektor M, K_0 leży na p_0 . Znajdźmy wektor R , wyznaczający K_0 . Ośrodek punktu K_0 leży na prostej (30) i na płaszczyźnie ściśle stycznej (14), a więc dla K_0 znaleźliśmy σ z równości:

$$(34) \quad |\lambda_0(r_0' \wedge (r_0'' \wedge r_0''')) + \sigma(r_0' \wedge r_0'')|, r_0', r_0'' = 0,$$

czyli

$$[\lambda_0(r_0' \wedge (r_0'' \wedge r_0''')) + \sigma(r_0' \wedge r_0'')] \times (r_0' \wedge r_0'') = 0.$$

Albo $[(r_0' \wedge (r_0'' \wedge r_0'''))] \times (r_0' \wedge r_0'') = |r_0', r_0'' \wedge r_0''', r_0' \wedge r_0''| = 0$, więc (34) daje $\sigma[(r_0' \wedge r_0'') \times (r_0' \wedge r_0'')] = 0$, a że kłammera zawiera + jak wiemy — kwadrat długości wektora różnego od wektora zerowego, więc jest $\sigma = 0$. Punkt K_0 wyznaczony jest więc przez wektor

$$(35) \quad \begin{cases} R = r_0 + \lambda_0[r_0' \wedge (r_0'' \wedge r_0''')] = \\ = r_0 + \lambda_0[r_0''(r_0' \times r_0''') - r_0'(r_0'' \times r_0''')] \end{cases}$$

stąd otrzymujemy, że

$$(36) \quad \begin{cases} M, K_0 = R - r_0 = \lambda_0[r_0' \wedge (r_0'' \wedge r_0''')] = \\ = \lambda_0[r_0''(r_0' \times r_0''') - r_0'(r_0'' \times r_0''')] \end{cases}$$

Przejdźmy do ortogonalnego układu Kartezjusza x, y, z . Wzory (35) dają współrzędne X, Y, Z punktu K_0 :

$$(37) \quad \begin{cases} X = x_0 + \lambda_0[x_0'' S x_0''' - x_0' S x_0'' x_0'''] \\ Y = y_0 + \lambda_0[y_0'' S x_0''' - y_0' S x_0'' x_0'''] \\ Z = z_0 + \lambda_0[z_0'' S x_0''' - z_0' S x_0'' x_0'''] \end{cases}$$

gdzie $\lambda_0 = \lim \lambda$, spełnia związek

$$(31) \quad \lambda_0 \cdot (r_1' \wedge r_2') \times (r_3' \wedge r_4') = r_1' \times r_2'$$

Ze prosta l_0 jest granicznym położeniem prostej l , wynika z następującej uwagi: uważamy te punkty na l i l_0 , na odpowiadające, które w (29) i (30) należą do tego samego σ ; dla tych punktów różnica prawych stron (29) i (30) widocznie dąży do 0, gdy $l \rightarrow l_0$, a to właśnie wykazuje, że l_0 jest granicznym¹ położeniem prostej l . Prosta l_0 — zwana biegunową krzywej C dla punktu M_0 — nie przechodzi przez M_0 . Rzeczywiście załóżmy dla dowodu niawprost, że l_0 przechodzi przez M_0 , a więc w (30) położymy $R = r_3$; wtedy otrzymamy:

$$\lambda_0 [r_3' \cdot (r_1' \times r_2') - r_3' \cdot (r_3' \times r_4')] + \sigma(r_3' \wedge r_4') = 0,$$

czyli na mocy wzoru 173:

$$(32) \quad \lambda_0 [r_3' \wedge (r_1' \wedge r_2')] + \sigma(r_3' \wedge r_4') = 0,$$

co należy uważać za warunek na σ .

Mnożąc to skalarnie przez r_3' , otrzymujemy

$$(33) \quad \lambda_0 [r_3' \wedge (r_1' \wedge r_2')] \times r_3' = 0,$$

bo współczynnik przy σ jest zerem, gdyż $(r_3' \wedge r_4') \times r_3' = r_3', r_4', r_3' = 0$. (Zob. I 74). Ale (33) prowadzi do sprzeczności; $\lambda_0 \neq 0$, więc (33) daje:

$$\begin{aligned} [r_3' \wedge (r_1' \wedge r_2')] \times r_3' &= |r_3', r_1' \wedge r_2', r_3'| = \\ &= (r_3' \wedge r_1') \times (r_2' \wedge r_3') = 0, \end{aligned}$$

co być nie może, gdyż założenie ($Z^0, 2$) orzeka, że wektor $r_3' \wedge r_1' \neq 0$. Tw. tymczasem udowodnione.

¹ Dawniej podrozdziałki geometrii różniczkowej wyrażały powyższy fakt w ten sposób, że uważały l_0 za prostą przecięcia płaszczyzny normalnej π_0 z płaszczyzną normalną „biegunową” π_0^* .

Z równań (22) i (30) wynika, że proste: binormalna i biegunowa są do siebie równoległe, a więc prosta biegunowa jest prostopadłą do płaszczyzny ściśle stycznej i zarazem leży na π_o , zatem trafia płaszczyznę ściśle styczną w punkcie — oznaczmy go przez K_o — leżącym na p_o'' t. j. na prostej normalnej głównej. Wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ leży na p_o'' . Znajdźmy wektor \mathbf{R} , wyznaczający K_o . Otóż punkt K_o leży na prostej (30) i na płaszczyźnie ściśle stycznej (14), a więc dla K_o znajdziemy σ z równości:

$$(34) \quad |\lambda_o(\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')) + \sigma(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''), \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o''| = 0,$$

czyli

$$[\lambda_o(\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')) + \sigma(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = 0.$$

Ale $[(\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o'))] \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') = |\mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''| = 0$, więc (34) daje $\sigma[(\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')] = 0$,

a że klamra zawiera — jak wiemy — kwadrat długości wektora różnego od wektora zerowego, więc jest $\sigma = 0$. Punkt K_o wyznaczony jest więc przez wektor

$$(35) \quad \begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \lambda_o[\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')] = \\ = \mathbf{r}_o + \lambda_o[\mathbf{r}_o''(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o'(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')], \end{cases}$$

stąd otrzymujemy, że

$$(36) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_o \mathbf{K}_o = \mathbf{R} - \mathbf{r}_o = \lambda_o[\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')] = \\ = \lambda_o[\mathbf{r}_o'' \cdot (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - \mathbf{r}_o'(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')]. \end{cases}$$

Przejdźmy do ortogonalnego układu Kartezjusza x, y, z . Wzory (35) dają współrzędne X, Y, Z punktu K_o :

$$(37) \quad \begin{cases} X = x_o + \lambda_o[x_o'' Sx_o'^2 - x_o' Sx_o'x_o''], \\ Y = y_o + \lambda_o[y_o'' Sx_o'^2 - y_o' Sx_o'x_o''], \\ Z = z_o + \lambda_o[z_o'' Sx_o'^2 - z_o' Sx_o'x_o''], \end{cases}$$

przyczem λ_o wyznaczyć należy z równości:

$$(38) \quad \lambda_o \cdot [Sx_o'^2 \cdot Sx_o''^2 - (Sx_o'x_o'')^2] = Sx_o'^2.$$

Uwaga. Płaszczyzny normalne wzdłuż C tworzą — jak powyżej podano — jednoparametrową rodzinę płaszczyzn. Ogólną teorię takich rodzin pozna czytelnik w Rozdz. IV § 5.

§ 6. Normalna główna, jako oś. Na prostej normalnej głównej p_o'' leży wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$, który wyzyskamy dla nadania kierunku prostej p_o'' . W tym celu określimy wektor jednostkowy \mathbf{n}_o , współkierunkowy z $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$. Aby ten wektor określić, obliczmy długość $M_o K_o$ wektora $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$. Otóż jest kwadrat długości tego wektora na mocy (36):

$$\begin{aligned} (M_o K_o)^2 &= \mathbf{M}_o \mathbf{K}_o \times \mathbf{M}_o \mathbf{K}_o = \\ &= \lambda_o^2 [(\mathbf{r}_o'' \times \mathbf{r}_o'')(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')^2] \cdot (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'), \end{aligned}$$

skąd — ponieważ według (31) jest $\lambda_o > 0$ — otrzymujemy:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} M_o K_o &= \lambda_o \sqrt{(\mathbf{r}_o'' \times \mathbf{r}_o'')(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')^2} \cdot \sqrt{\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'} \\ &= \frac{(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o')^{3/2}}{\sqrt{(\mathbf{r}_o'' \times \mathbf{r}_o'')(\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o') - (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'')^2}}. \end{aligned} \right.$$

Dla skrócenia wprowadzamy następujące oznaczenia na iloczyny skalarne:

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{11} &= \mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o', & I_{12} &= \mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'' = \mathbf{r}_o'' \times \mathbf{r}_o' = I_{21}, \\ & & I_{22} &= \mathbf{r}_o'' \times \mathbf{r}_o''. \end{aligned} \right.$$

Wektor jednostkowy \mathbf{n}_o , współkierunkowy z $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$, otrzymamy, „dzieląc“ wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ przez jego długość $M_o K_o$, a więc na mocy (36) i (39) będzie:

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{n}_o &= \frac{1}{M_o K_o} \cdot \mathbf{M}_o \mathbf{K}_o = \frac{\mathbf{r}_o'' \cdot I_{11} - \mathbf{r}_o' I_{12}}{\sqrt{I_{11}(I_{11} I_{22} - I_{12}^2)}} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')}{\sqrt{I_{11}(I_{11} I_{22} - I_{12}^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli teraz prostej normalnej głównej p_o'' nadamy kierunek wektora \mathbf{n}_o , to otrzymamy oś, zwaną *osią normalną główną* albo krótko *normalną główną* krzywej C w M_o ; dostawy tej osi oznaczamy przez α_o^* , β_o^* , γ_o^* ; jak wiadomo, będą one równe miarom składowych wektora \mathbf{n}_o w kierunku osi x, y, z . A więc będzie:

$$(42) \left\{ \begin{aligned} \alpha_o^* &= \frac{x_o'' S x_o'^2 - x_o' S x_o' x_o''}{\sqrt{S x_o'^2 [S x_o'^2 \cdot S x_o''^2 - (S x_o' x_o'')^2]}}, \\ \beta_o^* &= \frac{y_o'' S x_o'^2 - y_o' S x_o' x_o''}{\sqrt{S x_o'^2 [S x_o'^2 \cdot S x_o''^2 - (S x_o' x_o'')^2]}}, \\ \gamma_o^* &= \frac{z_o'' S x_o'^2 - z_o' S x_o' x_o''}{\sqrt{S x_o'^2 [S x_o'^2 S x_o''^2 - (S x_o' x_o'')^2]}}. \end{aligned} \right.$$

Wektorjalne równanie normalnej głównej jest oczywiście:

$$(43) \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{n}_o,$$

a w ortogonalnym układzie Kartezjusza:

$$(44) \quad X = x_o + \sigma \alpha_o^*, \quad Y = y_o + \sigma \beta_o^*, \quad Z = z_o + \sigma \gamma_o^*,$$

przyczem σ oznacza parametr zmienny wzdłuż normalnej głównej.

Wykażemy, że *normalna główna określona jest niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych*. Dla dowodu wystarczy wykazać, że wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ jest niezmienniczo określony względem grupy

ruchów euklidesowych. Krzywa C przez ruch euklidesowy przejdzie w krzywą C^* o równaniu: $\mathbf{r}^* = \mathbf{a}_4 + \sum_i (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}) \mathbf{e}_i$; wzór ten określa przekształcenie punktów krzywej. Wzór I 47 określa przekształcenie wektora \mathbf{u} w wektor \mathbf{u}^* przez ruch euklidesowy; w postaci wektorjalnej daje się to przekształcenie ująć w sposób następujący:

$$(45) \quad \mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_i.$$

Z tego wynika, że wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ przekształci się na mocy (36) w wektor

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{M}_o \mathbf{K}_o) \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_o [(r_o' \times r_o')] \\ \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times r_o'') \mathbf{e}_i - (r_o' \times r_o'') \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times r_o') \mathbf{e}_i. \end{array} \right.$$

Ale z równania krzywej C^* otrzymuje się

$$(47) \quad r_o^{*'} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times r_o') \mathbf{e}_i, \quad r_o^{*''} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times r_o'') \cdot \mathbf{e}_i,$$

co wykazuje, że wektory r_o' , r_o'' przekształcają się w myśl (45) w $r_o^{*'}$, $r_o^{*''}$. Stąd i z tw. E i F ze str. 27 i 28 wynika, że jest

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_o' \times r_o' = r_o^{*'} \times r_o^{*'}, \quad r_o' \times r_o'' = r_o^{*'} \times r_o^{*''}, \\ r_o'' \times r_o'' = r_o^{*''} \times r_o^{*''}; \end{array} \right.$$

wobec tego jest $\lambda_o^* = \lambda_o$, nadto (46), (47) i (48) dają:

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^* = \lambda_o^* [(r_o^{*'} \times r_o^{*'}) r_o^{*''} - \\ - (r_o^{*'} \times r_o^{*''}) r_o^{*'}] = \mathbf{M}_o^* \mathbf{K}_o^*, \end{array} \right.$$

a więc przez ruch wektor M, K , przechodzi w wektor M_0^*, K_0^* , utworzony dla C^* tak, jak utworzyliśmy M, K dla C . A to właśnie było do udowodnienia. Zarazem wykazaliśmy że wektor jednostkowy normalny główny n_0 jest określony niezmiennie względem grupy ruchów euklidesowych.

Wykażemy, że wektor n_0 nie zależy od wyboru (dopuszczalnych) parametrów, przy pomocy których krzywa jest przedstawiona. Niech t i t^* będą dwoma parametrami (zob. II § 2), przy czym $t = \varphi(t^*)$, nadto $t_0 = \varphi(t_0^*)$; funkcja φ niech należy do C^2 w przedziale $[\alpha^*, \beta^*]$, a $\varphi'(t^*) \neq 0$ w $[\alpha^*, \beta^*]$. Jest więc $r(t) = r^*(t^*)$ dla punktów krzywej. Skąd wynika przez różniczkowanie (przy czym symbole są to domaczą): $r_t^* = r_{t^*}^* \varphi_t'$, $r_{tt}^* = r_{t^*t^*}^* \varphi_t'^2 + r_{t^*t}^* \varphi_{tt}'$, co daje, że $r_t^* \wedge r_{tt}^* = (r_{t^*}^* \wedge r_{t^*t^*}^*) \varphi_t'^2$, a więc założenia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ są spełnione w $[\alpha^*, \beta^*]$ dla parametru t^* . Nadto $r_t^* \wedge (r_{tt}^* \wedge r_{tt}^*) = \varphi_t'^3 [r_{t^*}^* \wedge (r_{t^*t^*}^* \wedge r_{t^*t^*}^*)]$, $I_{tt}^* = r_t^* \times r_t^* = \varphi_t'^2 I_{t^*t^*}$, $I_{ttt}^* = r_{tt}^* \times r_t^* = \varphi_t'^3 I_{t^*t^*t^*} + \varphi_{ttt}' \varphi_t'$, $I_{ttt}^* = \varphi_t'^4 I_{t^*t^*t^*} + 2\varphi_{ttt}' \varphi_t'^2 I_{t^*t^*} + \varphi_{ttt}'^2 I_{t^*}^2$; $I_{tt}^* I_{tt}^* - I_{ttt}^* = \varphi_t'^6 [I_{t^*t^*} I_{t^*t^*} - I_{t^*t^*t^*}^2]$; wobec tego jest

$$n_0^* = \frac{r_t^* \wedge (r_{tt}^* \wedge r_{tt}^*)}{\sqrt{I_{tt}^* (I_{tt}^* I_{tt}^* - I_{ttt}^*^2)}} = n_{0^*}$$

co właśnie było do udowodnienia.

Zajmijmy się wreszcie długością wektora M, K ; długość tę oznaczymy przez ρ ; ponieważ M, K nie zależy od położenia krzywej w R_3 , więc w szczególności długość tego wektora jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych. Z łatwością czytelnik stwierdzi, że ρ nie zależy też od przedstawienia parametrycznego, jeżeli się ograniczymy do dopuszczalnych przedstawień paramet-

ruchoń euklidesowych. Krzywa C przez ruch euklidesowy przejdzie w krzywą C^* o równaniu: $r^* = a_i + \sum_{j=1}^3 (a_j \times r) e_j$; wzór ten określa przekształcenie punktów krzywej. Wzór 1.47 określa przekształcenie wektora u w wektor u^* przez ruch euklidesowy; w postaci wektorjalnej daje się to przekształcenie ująć w sposób następujący:

$$(45) \quad u^* = \sum_{j=1}^3 (a_j \times u) \cdot e_j.$$

Z tego wynika, że wektor M, K , przekształci się na mocy (38) w wektor

$$(46) \quad \begin{cases} u^* = \sum_{j=1}^3 (a_j \times M, K) \cdot e_j = \lambda_{ij} [(r_i' \times r_i'')] \\ \sum_{j=1}^3 (a_j \times r_i'') e_j - (r_i' \times r_i'') \sum_{j=1}^3 (a_j \times r_i') e_j \end{cases}$$

Ale z równania krzywej C^* otrzymuje się

$$(47) \quad r_i' = \sum_{j=1}^3 (a_j \times r_i') e_j, \quad r_i'' = \sum_{j=1}^3 (a_j \times r_i'') e_j.$$

co wykazuje, że wektory r_i', r_i'' przekształcają się w myśl (45) w $r_i^{*'}, r_i^{*''}$. Stąd i z tw. E i F ze str. 27 i 28 wynika, że jest

$$(48) \quad \begin{cases} r_i' \times r_i'' = r_i^{*'} \times r_i^{*''}, & r_i' \times r_i'' = r_i^{*'} \times r_i^{*''}, \\ r_i'' \times r_i'' = r_i^{*''} \times r_i^{*''}; \end{cases}$$

wolec tego jest $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}$, nadto (46), (47) i (48) dają:

$$(49) \quad \begin{cases} u^* = \lambda_{ij} [(r_i^{*'} \times r_i^{*''}) r_i^{*''} - \\ - (r_i'' \times r_i^{*''}) r_i^{*'}] = M^{*'} K^{*''} \end{cases}$$

a więc przez ruch wektor $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ przechodzi w wektor $\mathbf{M}_o^* \mathbf{K}_o^*$, utworzony dla C^* tak, jak utworzyliśmy $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ dla C . A to właśnie było do udowodnienia. Zarazem wykazaliśmy że *wektor jednostkowy normalny główny \mathbf{n}_o jest określony niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych.*

Wykażemy, że *wektor \mathbf{n}_o nie zależy od wyboru (dopuszczalnych) parametrów, przy pomocy których krzywa jest przedstawiona.* Niech t i t^* będą dwoma parametrami (zob. II § 3), przyczem $t = \varphi(t^*)$, nadto $t_o = \varphi(t_o^*)$; funkcja φ niech należy do C^2 w przedziale $[a^*, b^*]$, a $\varphi'(t^*) \neq 0$ w $[a^*, b^*]$. Jest więc $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}^*(t^*)$ dla punktów krzywej. Skąd wynika przez różniczkowanie (przyczem symbole same się tłómaczą): $\mathbf{r}_o^{*'} = \mathbf{r}_o' \varphi_o'$, $\mathbf{r}_o^{*''} = \mathbf{r}_o'' \varphi_o'^2 + \mathbf{r}_o' \varphi_o''$, co daje, że $\mathbf{r}_o^{*'} \wedge \mathbf{r}_o^{*''} = (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \varphi_o'^3$, a więc założenia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ są spełnione w $[a^*, b^*]$ dla parametru t^* . Nadto $\mathbf{r}_o^{*'} \wedge (\mathbf{r}_o^{*''} \wedge \mathbf{r}_o^{*'}) = \varphi_o'^4 [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' \wedge \mathbf{r}_o')]$, $I_{11}^* = \mathbf{r}_o^{*'} \times \mathbf{r}_o^{*'} = \varphi_o'^2 \cdot I_{11}$, $I_{12}^* = \varphi_o'^3 I_{12} + \varphi_o' \varphi_o'' I_{11}$, $I_{22}^* = \varphi_o'^4 I_{22} + 2\varphi_o'^2 \varphi_o'' I_{12} + \varphi_o''^2 I_{11}$; $I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2} = \varphi_o'^6 [I_{11} I_{22} - I_{12}^2]$; wobec tego jest

$$\mathbf{n}_o^* = \frac{\mathbf{r}_o^{*'} \wedge (\mathbf{r}_o^{*''} \wedge \mathbf{r}_o^{*'})}{\sqrt{I_{11}^* (I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2})}} = \mathbf{n}_o,$$

co właśnie było do udowodnienia.

Zajmijmy się wreszcie długością wektora $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$; długość tę oznaczymy przez ρ_o ; ponieważ $\mathbf{M}_o \mathbf{K}_o$ nie zależy od położenia krzywej w R_3 , więc w szczególności długość tego wektora jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych. Z łatwością czytelnik stwierdzi, że ρ_o nie zależy też od przedstawienia parametrycznego, jeżeli się ograniczymy do dopuszczalnych przekształceń parame-

tru, dopiero co omówionych.¹ Zauważmy, że według (39) jest:

$$(50) \quad \rho_o = \frac{I_{11}^{3/2}}{\sqrt{I_{11} I_{22} - I_{12}^2}};$$

liczba ρ_o zowie się promieniem (pierwszej) krzywizny krzywej C w M_o , punkt K_o zowie się środkiem (pierwszej) krzywizny krzywej C w M_o , a:

$$(51) \quad \frac{1}{\rho_o} =: k_o$$

zowie się (pierwszą) krzywizną krzywej C w M_o . Widocznie jest $k_o > 0$ i nie zależy od położenia krzywej w R_3 ani od przedstawienia parametrycznego (w powyższem znaczeniu). Krzywizna k_o i wektor \mathbf{n}_o zależą od pierwszych i drugich pochodnych, są więc elementami 2^{go} rzędu, związanymi z krzywą, spełniającą $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$.

§ 7. Binormalna (jako oś). W punkcie M_o krzywej C , spełniającej $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$, uzyskaliśmy dwie osie: styczną i normalną główną, albo (mówiąc wektorjalnie) skonstruowaliśmy dwa jednostkowe wektory: styczny \mathbf{t}_o i normalny główny \mathbf{n}_o . Jak wiadomo z III § 1, możemy stąd bezpośrednio określić trzecią oś, wzgl. trzeci jednostkowy wektor. Ponieważ wyznaczenie osi prowadzi do wyznaczenia jej dostaw kierunkowych, a te są miarami składowych jednostkowego wektora, leżącego na osi i z nią

¹ Przekształcenie parametru t na inny parametr t^* ma więc spełniać następujące warunki. Niech będzie $t = \varphi(t^*)$, to φ ma należeć do klasy C^2 w $[a^*, b^*]$, nadto pochodna $\varphi'(t^*) \neq 0$ w $[a^*, b^*]$; $a \leq \varphi(t^*) \leq b$, gdy $a^* \leq t^* \leq b^*$. Mniej kępującymi były warunki na dopuszczalne przekształcenia w II § 3.

współkierunkowego, więc ostatecznie chodzi o utworzenie trzeciego jednostkowego wektora w M_o . Ten trzeci wektor ma spełniać następujące warunki: 1) ma być jednostkowym, 2) ma być prostopadłym do t_o i n_o (a więc ma być także normalnym jak n_o) i 3) wreszcie ma być tak skierowanym, żeby wektory w porządku: t_o , n_o i trzeci tworzyły układ prawoskrętny wektorów. Szukany wektor nosi nazwę *jednostkowego wektora binormalnego* do C w M_o i oznaczmy go przez b_o ; on jest jednoznacznie określony.

Powyższy warunek (2) daje nam bezpośrednio: $b_o = \mu (t_o \wedge n_o)$, iloczyn wektorjalny $t_o \wedge n_o$ jest bowiem z określenia prostopadły do t_o i n_o ; współczynnik μ co do swej bezwzględnej wartości ma być tak dobrany, żeby b_o czyniło zadość warunkowi (1), o znaku zaś liczby μ decydować będzie warunek (3). Aby wektor b_o był jednostkowy, to potrzeba i wystarczy, by było $b_o \times b_o = 1$, co na mocy wzoru I 75 daje

$$(52) \quad \begin{cases} 1 = \mu^2 (t_o \wedge n_o) \times (t_o \wedge n_o) = \\ = \mu^2 [(t_o \times t_o) \cdot (n_o \times n_o) - (t_o \times n_o)^2]; \end{cases}$$

ale jest

$$(53) \quad t_o \times t_o = 1, \quad n_o \times n_o = 1, \quad t_o \times n_o = 0,$$

bo t_o , n_o są jednostkowe i do siebie prostopadłe. A więc (52) daje $\mu^2 = 1$, skąd wynika $\mu = \pm 1$. Który ze znaków ma zachodzić decyduje trzeci warunek, który wyraża się wyznacznikiem:

$$(54) \quad |t_o, n_o, b_o| = +1.$$

Otóż na mocy I 74 mamy: $|t_o, n_o, b_o| = (t_o \wedge n_o) \times b_o = = (1:\mu) b_o \times b_o = 1:\mu = 1$, a stąd wynika: $\mu = +1$.

Jest więc

$$(55) \quad b_o = t_o \wedge n_o,$$

co zresztą było do przewidzenia. Że w ten sposób określiliśmy \mathbf{b}_o niezmiennie względem grupy ruchów euklidesowych, wynika z uwagi następującej: w II § 2 i III § 6 wykazaliśmy niezmienniczość wektorów \mathbf{t}_o , \mathbf{n}_o , ponadto wiadomo, że kąt jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych, nadto z III § 3 wiadomo, że wyznacznik trzech wektorów, w szczególności wyznacznik $|\mathbf{t}_o, \mathbf{n}_o, \mathbf{b}_o|$ jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych.

Na mocy II 11 i III 40, 41, oraz I 73 otrzymujemy:

$$(56) \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{t}_o \wedge \mathbf{n}_o = \frac{\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o''}{\sqrt{I_{11} I_{22} - I_{12}^2}}.$$

Wzory (55) i (56) napiszemy w układzie ortogonalnym x, y, z ; oznaczając przez $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}$ dostawy kierunkowe binormalnej, uzyskujemy:

$$(57) \quad \begin{cases} \alpha^{**} = \beta \gamma^* - \beta^* \gamma, & \beta^{**} = \gamma \alpha^* - \gamma^* \alpha, \\ \gamma^{**} = \alpha \beta^* - \alpha^* \beta; \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} \alpha^{**} = \frac{y' z'' - y'' z'}{\sqrt{Sx'^2 Sx''^2 - (Sx' x'')^2}}, \\ \beta^{**} = \frac{z' x'' - z'' x'}{\sqrt{Sx'^2 Sx''^2 - (Sx' x'')^2}}, \\ \gamma^{**} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\sqrt{Sx'^2 Sx''^2 - (Sx' x'')^2}}. \end{cases}$$

We wzorach 57, 58 opuściliśmy znak o u dołu.

Równaniu płaszczyzny ściśle stycznej (III 14) możemy obecnie nadać postać

$$(59) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{b}_o = 0.$$

Uwaga 1. Wektory jednostkowe: styczny \mathbf{t} , nor-

co zresztą było do przewidzenia. Że w ten sposób określiliśmy h , niezmienniczo względem grupy ruchów euklidesowych, wynika z uwagi następującej: w II § 2 i III § 6 wykazaliśmy niezmienniczość wektorów t , n , ponadto wiadomo, że h jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych, nadto z III § 3 wiadomo, że wyznacznik trzech wektorów, w szczególności wyznacznik $\{t, n, h\}$ jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych.

Na mocy II 11 i III 40, 41, oraz 173 otrzymujemy:

$$(56) \quad h = t \wedge n = \frac{t' \wedge n'}{\sqrt{t'_1 t'_2 - t'_3}}$$

Wzory (55) i (56) napiszemy w układzie ortogonalnym x, y, z ; oznaczając przez $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}$ dostawy kierunkowe binormalnej, uzyskujemy:

$$(57) \quad \begin{cases} \alpha^{**} = \beta \gamma' - \beta' \gamma, & \beta^{**} = \gamma c' - \gamma' c, \\ \gamma^{**} = \alpha \beta' - \alpha' \beta; \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} \alpha^{**} = \frac{\sqrt{x'' - y'' z'}}{\sqrt{\delta x'^2 \delta z'^2 - (\delta x' x')^2}}, \\ \beta^{**} = \frac{x' x'' - x'' x'}{\sqrt{\delta x'^2 \delta z'^2 - (\delta x' x')^2}}, \\ \gamma^{**} = \frac{x' y' - x'' y}{\sqrt{\delta x'^2 \delta z'^2 - (\delta x' x')^2}}. \end{cases}$$

Wz wzorach 57, 58 opuściliśmy znak „u dołu”.

Równaniu płaszczyzny stycznej (III 14) możemy obecnie nadać postać:

$$(59) \quad (H + \tau) \times h = 0.$$

Przykład 7. Wektory jednostkowe: styczny t , nor-

malny główny u i biermalny h , należące do dowolnego punktu M krzywej C , spełniają związki:

$$(60_{1-2}) \quad \begin{cases} t \times t = 1, & u \times u = 1, & h \times h = 1, \\ t \times u = 0, & t \times h = 0, & u \times h = 0. \end{cases}$$

Uwaga 2. Płaszczyzna ściśle styczna π , i prosta biegunowa l dla punktu M , krzywej C zostały określone przez rozważania graniczne i niezależnie od siebie. Można postąpić inaczej, a mianowicie: określić l przez podane wyżej rozważania graniczne, a następnie π , zdefiniować, jako płaszczyznę przez M , i prostopadłą do l . Jak z poprzednich rozważań wynika, to określenie płaszczyzny ściśle stycznej jest równoważne poprzedniemu z III § 3.

§ 8. Łuk jako parametr. Wzory powyżej podane upraszczają się, gdy łuk s krzywej jest parametrem, przy pomocy którego krzywa C została przedstawiona, a więc $r = r(s)$. Wykażemy, że jeżeli łuk s krzywej C , przedstawiona przy pomocy parametru t , co-dnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ (lub $[s_1, s_2]$) przy przedstawieniu s pomocną łuku s . Rzeczywiście jest:

$$(61) \quad \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{dr}{dt} \times \frac{dr}{dt}} = q > 0 \text{ w } [a, b]$$

więc istnieje drugi pochodna

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \times \frac{dt}{ds} \\ \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{dr}{dt} \times \frac{dr}{dt}} \end{cases}$$

przez które

malny główny \mathbf{n} i binormalny \mathbf{b} , należące do dowolnego punktu M krzywej C , spełniają związki:

$$(60_{1-6}) \quad \begin{cases} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 1, & \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1, & \mathbf{b} \times \mathbf{b} = 1, \\ \mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0, & \mathbf{t} \times \mathbf{b} = 0, & \mathbf{n} \times \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

Uwaga 2. Płaszczyzna ściśle styczna π_o' i prosta biegunowa l_o dla punktu M_o krzywej C zostały określone przez rozważania graniczne i niezależnie od siebie. Można postąpić inaczej, a mianowicie: określić l_o przez podane wyżej rozważania graniczne, a następnie π_o' zdefiniować, jako płaszczyznę przez M_o i prostopadłą do l_o . Jak z poprzednich rozważań wynika, to określenie płaszczyzny ściśle stycznej jest równoważne poprzedniemu z III § 3.

§ 8. Łuk jako parametr. Wzory powyżej podane upraszczają się, gdy łuk s krzywej jest parametrem, przy pomocy którego krzywa C została przedstawiona, a więc $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Wykażemy, że jeżeli krzywa C , przedstawiona przy pomocy parametru t , spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_a, s_b]$ (lub $[s_b, s_a]$) przy przedstawieniu za pomocą łuku s . Rzeczywiście jest:

$$(61) \quad \frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \neq 0 \text{ w } [a, b],$$

więc istnieje druga pochodna

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}}}, \end{array} \right.$$

przeto istnieją $\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ i jest:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} : \frac{ds}{dt} \right) \wedge \\ \wedge \left[\left(\frac{ds}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \right) : \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \right] = \\ = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) : \left(\frac{ds}{dt} \right)^3, \end{array} \right.$$

a więc jest ten iloczyn $\neq \mathbf{0}$. Założenie więc, że C , przedstawione przy pomocy łuku, spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_a, s_b]$ (lub $[s_b, s_a]$), nie narzuca na C nowych więzów. Zwykle krzywa jest przedstawiona przy pomocy parametru t , który nie jest łukiem. Przedstawienie przy pomocy łuku jest na ogół niewykonalne: wymaga bowiem wykonania kwadratur dla znalezienia łuku, a potem rugowania parametru t , (odwrócenia funkcji $s = \varphi(t)$); obie czynności nie są na ogół „praktycznie” wykonalne.

Wiadomo, że dla krzywej C , o której założymy, że spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 1)$, istnieje łuk s i że zachodzi związek II 37₃, z którego przez różniczkowanie wynika związek

$$(64) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \quad \text{czyli} \quad S \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Tw. Jeżeli dla pochodnych \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' zachodzą związki:

$$(64 \text{ bis}) \quad \mathbf{r}' \neq \mathbf{0}, \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}, \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = 0,$$

to jest $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$. Tw. to odnosi się już do jednego punktu krzywej, już do przedziału; parametr, względem którego oblicza się pochodne, jest dowolny; w szczególności, gdy zachodzą założenia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 1)$, to istnieje łuk i jest $d\mathbf{r} : ds \neq \mathbf{0}$

i zachodzi (64). Dla dowodu niewprost załóżmy, że $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$, tedy istnieje skalar $\lambda \neq 0$ taki, że $\mathbf{r}'' = \lambda \mathbf{r}'$, więc $0 = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \lambda (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')$, ale $\lambda \neq 0$, więc $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ wbrew założeniu. Tw. zatem udowodnione.

Wobec tego o krzywej C założymy, że w $[s_1, s_2]$ spełnia (Z, 2), oraz związki

$$(65) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \neq \mathbf{0}.$$

Stąd już wynika (64) i (Z*, 2) w $[s_1, s_2]$. Wobec tego (41), (50), (51), (56) i (64) dają

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \\ \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right), \\ k = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}, \end{array} \right.$$

a że zachodzi także II 35, więc wektor \mathbf{t} ma pochodną pierwszą względem łuku w $[s_1, s_2]$ i jest

$$(67) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k \mathbf{n}.$$

Wzór ten jest t. zw. pierwszym wzorem Freneta — dalsze dwa poznamy poniżej. Napišemy jeszcze (66) i (67) w ortogonalnym układzie Kartezjusza, dołączając wzory na dostawy kierunkowe stycznej, ale z każdej trójki wzorów podajemy pierwszy, dalsze

dwa otrzymuje się przez przestawienie cykliczne liter x, y, z . Jest więc

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{dx}{ds}, \dots; \quad \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}} \frac{d^2x}{ds^2}, \dots; \\ \alpha^{**} = \frac{1}{\sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}} \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right); \end{array} \right.$$

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{ds} = k\alpha^*, \quad \frac{d\beta}{ds} = k\beta^*, \quad \frac{d\gamma}{ds} = k\gamma^*; \\ k = \frac{1}{\rho} = \sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{Sx'^2 Sx''^2 - (Sx'x'')^2}{(Sx')^3}}. \end{array} \right.$$

W ostatnim wzorze x', \dots, x'', \dots oznaczają pochodne względem parametru t .

§ 9. Linje proste w R_3 . W § 6 wykazaliśmy, że krzywa, spełniająca $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ posiada w każdym punkcie dodatnią krzywiznę pierwszą, która jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych i dopuszczalnych przekształceń parametru.

Obecnie zajmiemy się krzywymi w R_3 , które spełniają $(Z, 2)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ i są zarazem takimi, że

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \equiv 0 \text{ czyli macierz } \begin{vmatrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \end{vmatrix} \\ \text{jest w } [a, b] \text{ stałe rzędu } 1^{\text{go}}. \end{array} \right.$$

(Rzędu 0^{go} być nie może wobec $(Z^*, 1)$); jest więc w $[a, b]$:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'z'' - y''z' \equiv 0, \quad z'x'' - x'z'' \equiv 0, \\ x'y'' - z''y' \equiv 0. \end{array} \right.$$

Dla scałkowania równania (70), pomnożmy wektor r' przez wektor $r' \wedge r''$. Na mocy 1.73 i III.70 mamy:

$$(72) \quad 0 = r' \wedge (r' \wedge r'') = r' \cdot (r' \times r'') - r'' \cdot (r' \times r').$$

Dla scałkowania tego równania, wprowadzamy łuk s , który istnieje, [bo szukamy krzywych, spełniających $(Z^a, 1)$]; jest

$$s'^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = r' \times r', \text{ więc } s' s'' = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} = r' \times r''$$

przeto (72) po uproszczeniu daje:

$$r' s'' - r'' s' = 0 \text{ czyli } \frac{r'}{s} = \frac{dr}{ds} = a,$$

gdzie a oznacza stały (co do kierunku i wielkości, ale swobodny t. zn. o dowolnym porządku) wektor; mamy tedy $t = a$, co daje $a \times a = 1$; ponadto szukając, otrzymujemy

$$(73) \quad r = as + b,$$

gdzie b jest wektorem stałym, a że $a \neq 0$, s zmienne więc (73) jest równaniem prostej. Udowodnimy zatem tw.: jeżeli krzywa spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^a, 1)$ w $[a, b]$ i jeżeli macierz (70₂) jest stale typu I^a , to krzywa jest prostą przestrzeni H_a .

Z (73) wynika, że jest

$$(74) \quad \frac{d^2r}{ds^2} = 0.$$

Kresząc (74) wynika bezpośrednio na mocy 1.8 i § 8; skoro bowiem jest

$$\frac{dr}{ds} \times \frac{dr}{ds} = 1, \quad \frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} = 0.$$

dwa otrzymuje się przez przedstawienie cykliczne liter x, y, z . Jest więc

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds}, \dots, \alpha^v = \frac{1}{\sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}} \frac{d^2x}{ds^2}, \dots; \\ \alpha^{uv} &= \frac{1}{\sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2}} \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right); \end{aligned} \right.$$

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= k\alpha^s, \frac{d\beta}{ds} = k\beta^s, \frac{d\gamma}{ds} = k\gamma^s; \\ k &= \frac{1}{\rho} = \sqrt{S \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{8x'^2 8z'^2 - (8x'x')^2}{(8x'^2)^2}} \end{aligned} \right.$$

W ostatnim wzorze x', \dots, x'', \dots oznaczają pochodne względem parametru t .

§ 9. Linie proste w R_3 . W § 6 wykazaliśmy, że krzywa, spełniająca $(Z, 2)$ i $(Z^s, 2)$ posiada w każdym punkcie dodatnią krzywiznę pierwszą, która jest niezmiennikiem różniczkowym grupy rachów euklidesowych i dopuszczalnych przekształceń parametru.

Obecnie zajmujemy się krzywymi w R_3 , które spełniają $(Z, 2)$ i $(Z^s, 1)$ w $[a, b]$; są zarazem takimi, że

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} r \wedge r' &\equiv 0 \text{ czyli macierz } \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \\ &\text{jest w } [a, b] \text{ stałe rzędu } 1^{st}. \end{aligned} \right.$$

(Rzędu 0^{st} być nie może wobec $(Z^s, 1)$); jest więc w $[a, b]$:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} y'z'' - y''z' &\equiv 0, \quad z'x'' - z''x' \equiv 0, \\ x'y'' - x''y' &\equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Dla scałkowania równania (70₁), pomnóżmy wektor \mathbf{r}' przez wektor $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}''$. Na mocy I 73 i III 70 mamy:

$$(72) \quad \mathbf{0} = \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') = \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') - \mathbf{r}'' (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}').$$

Dla scałkowania tego równania, wprowadźmy łuk s , który istnieje, [bo szukamy krzywych, spełniających $(Z^*, 1)$]; jest

$$s'^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}', \text{ więc } s' s'' = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'',$$

przeto (72) po uproszczeniu daje:

$$\mathbf{r}' s'' - \mathbf{r}'' s' = 0 \text{ czyli } \frac{\mathbf{r}'}{s'} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{a},$$

gdzie \mathbf{a} oznacza stały (co do kierunku i wielkości, ale swobodny t. zn. o dowolnym początku) wektor; mamy tedy $\mathbf{t} = \mathbf{a}$, co daje $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 1$; ponadto całkując, otrzymujemy

$$(73) \quad \mathbf{r} = \mathbf{a} s + \mathbf{b},$$

gdzie \mathbf{b} jest wektorem stałym, a że $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, s zmienne więc (73) jest równaniem prostej. Udowodniliśmy zatem tw.: *jeżeli krzywa spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ i jeżeli macierz (70₂) jest stale rzędu 1^{go}, to krzywa jest prostą przestrzeni R_3 .*

Z (73) wynika, że jest

$$(74) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0.$$

Zresztą (74) wynika bezpośrednio na mocy tw. z § 8; skoro bowiem jest

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 1, \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0,$$

więc stąd i z (70) wynika (74), które scałkowane daje (73), poczem łatwo wynika, że $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 1$.

Stąd i z (66) wynika, że prosta nie posiada ani normalnej głównej ani binormalnej, ponadto jest $k = 0$ (promień ρ nie istnieje), jeżeli k określimy wzorem (66₃).

§ 10. Pierwsza krzywizna krzywej. Pierwsza krzywizna k (zob. III 69) jest zerem dla prostej, wobec tego intuicyjnie można krzywiznę k uważać za „miarę odstępstwa krzywej od prostej“. Wykażemy też, że krzywizna pierwsza dla krzywej płaskiej jest jej krzywizną w znaczeniu elementarnem.¹ W najprostszym przypadku krzywa płaska jest dana przez równanie $y = f(x)$ (i $z = 0$); założymy, że $f(x)$ ma 2^{ga} pochodną ciągłą w x_0 i $f''(x_0) \neq 0$; wtedy krzywizna w znaczeniu elementarnem istnieje i jest równa:

$$k_o^* = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}$$

Krzywą tę przedstawimy teraz parametrycznie, kładąc $x = t$, wtedy $y = f(t)$, ponadto jest $z = 0$. Macierz pierwszych i drugich pochodnych dla $x_0 = t_0$

$$\begin{vmatrix} 1, f'(t_0), 0 \\ 0, f''(t_0), 0 \end{vmatrix}$$

jest rzędu 2^{go}. A więc na mocy III 50 i 51 jest krzywizna pierwsza: $k_o = k_o^*$. Ten sam wynik otrzymamy, gdy przyjmiamo, że krzywa płaska jest dana parametrycznie; gdy więc $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$ i macierz

¹ Zob. A. Hoborski: Wyższa Matematyka (1928). Cz. I. Str. 369 i nast.

$$(75) \quad \left| \begin{array}{c} x', y', 0 \\ x'', y'', 0 \end{array} \right| = \left\| \begin{array}{c} x', y' \\ x'', y'' \end{array} \right\|$$

jest rzędu 2^{go}, co daje, że:

$$(76) \quad x' y'' - x'' y' \neq 0 \text{ w } [a, b],$$

to otrzymamy:

$$(77) \quad k = \frac{|x' y'' - x'' y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Udowodnimy tw.: jeżeli krzywa C spełnia (Z, 2) i (Z*, 2) w $[a, b]$, to rzut krzywej C na płaszczyznę ściśle styczną punktu $M_0(t_0)$ ma (jako krzywa płaska) krzywiznę w punkcie $M_0(t_0)$ równą pierwszej krzywiznie krzywej C w $M_0(t_0)$.

Płaszczyzna ściśle styczna π_0' do C w $M_0(t_0)$ ma równanie (59). Prosta, rzutująca punkt \mathbf{r} krzywej C na π_0' ma więc równanie $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \sigma \mathbf{b}_0$ i przebija π_0' w punkcie $\sigma \mathbf{o}$ własności $(\mathbf{r} + \sigma \mathbf{b}_0 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{b}_0 = 0$, co daje $\sigma = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \times \mathbf{b}_0$, bo jest $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{b}_0 = 1$. Rzut P punktu M na π_0' określa się z równości $\mathbf{R} = \mathbf{r} - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{b}_0] \cdot \mathbf{b}_0$. Stąd otrzymujemy wektor

$$(78) \quad \mathbf{M}_0 \mathbf{P} = \mathbf{R} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{b}_0] \cdot \mathbf{b}_0;$$

wektor ten leży na π_0' , na której leżą styczna (\mathbf{t}_0) i normalna główna (\mathbf{n}_0); na π_0' przyjmiemy układ Kartezjusza x, y , biorąc M_0 za początek układu, oś x wzdłuż \mathbf{t}_0 , oś y wzdłuż \mathbf{n}_0 ; współrzędne x, y punktu P (rzutu) są widocznie:

$$(79) \quad x = \mathbf{M}_0 \mathbf{P} \times \mathbf{t}_0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{t}_0, \quad y = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}_0,$$

bo $\mathbf{b}_0 \times \mathbf{t}_0 = \mathbf{b}_0 \times \mathbf{n}_0 = 0$. Zbadajmy macierz (75) w punkcie $M_0(t_0)$. Otóż ponieważ krzywizna pierwsza nie zależy od parametru, możemy przyjąć, że krzywa C jest przedstawiona przez swój łuk s , który

nie będzie łukiem dla rzutu, ale parametrem. Zbadajmy teraz macierz (75) w $M_o(s_o)$ dla rzutu. Otóż mamy:

$$(80) \quad \left\{ \frac{dx}{ds} = \frac{dr}{ds} \times \mathbf{t}_o = \mathbf{t} \times \mathbf{t}_o, \frac{dy}{ds} = \frac{dr}{ds} \times \mathbf{n}_o = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_o. \right.$$

Aby obliczyć drugie pochodne, posłużymy się pierwszym wzorem Freneta (67). Jest więc:

$$(81) \quad \left\{ \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{t}_o = k(\mathbf{n} \times \mathbf{t}_o), \frac{d^2y}{ds^2} = k(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_o). \right.$$

Wzory (80) i (81) dla $s = s_o$ dadzą

$$\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s_o} = k_o,$$

bo $\mathbf{t}_o \times \mathbf{t}_o = 1$, $\mathbf{n}_o \times \mathbf{n}_o = 1$, $\mathbf{t}_o \times \mathbf{n}_o = 0$. Nadto

$$\left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right]_{s_o} = 1,$$

więc wzór (77) daje na krzywiznę rzutu w $M_o(s_o)$ wartość k_o i temsamem tw. udowodnione.

Uwaga. Przejście do współrzędnych x, y nie było konieczne; można było operować wektorem $\mathbf{M}_o \mathbf{P}$ na płaszczyźnie π_o' .

Poznamy teraz interpretację geometryczną promienia krzywizny ρ_o krzywej C dla M_o .

Jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$ i jeżeli $a \leq t_o \leq b$, to według II § 5 b) istnieje liczba $\delta_o > 0$, taka, że żaden punkt $M(t)$ krzywej C nie leży na stycznej p_o do C w M_o , gdy jest $a \leq t \leq b$, $0 < |t - t_o| < \delta_o$; a więc wtedy $M(t)$ i p_o określają płaszczyznę π (której granicznym położeniem jest płaszczyzna π_o' ściśle styczna do C w M_o); istnieje zatem koło Q , przechodzące przez $M(t)$, $M_o(t_o)$ i styczne

dla ρ . Aby znaleźć równanie kuli Σ (którego grawitacyjne położenie jest $r \rightarrow r_0$ za chwili określonej), uważamy Σ za kolo wielkie odpowiednio dobranej kuli Z . Kula Z ma następujące własności: a) jej środek (wyznaczony przez wektor R_0) leży na r ; b) Z przechodzi przez $M_0(t_0)$; c) Z przechodzi przez $M(t)$; Σ p. jest styczna do Z . Okazuje się, że przy naszych założeniach co do C i f własności a — d określają kolo Z jednoznacznie. Jeżeli przez ρ oznaczymy promień kuli Z , to kula Z widocznie zależy od współrzędnych środka kuli (trzy liczby; tutaj składowych wektora R_0) i od ρ , także od estowech wielkości, na które mamy też cztery warunki a, b, c, d.

Ad a. Równanie płaszczyzny π zależącej w III § 7 jest to wzór (II 13); stąd wynika, że warunek a) ma związek:

$$\begin{cases} |R_0 - r_0, r_0', r_0'' + u| = 0 \text{ czyli} \\ (R_0 - r_0) \times [r_0' \wedge (r_0'' + u)] = 0. \end{cases}$$

Ad b i c. Równanie wektorowe kuli jest następujące: $(R - R_0) \times (R - R_0) = -\rho^2$. Stąd warunki b) i c) dają:

$$\begin{cases} (r_0 - R_0) \times (r_0 - R_0) = -\rho^2, \\ (r - R_0) \times (r - R_0) = -\rho^2. \end{cases}$$

Ważny układ równowazny układem (80), jeżeli do (83) włączymy równanie, będące wynikiem odstawiania obu równań (84); otóż otrzymamy 2. układ:

$$2R_0 \times (r - r_0) = r \times r - r_0 \times r_0.$$

Ważne zauważyć, że to równanie wynika, iż kula Σ leży na płaszczyźnie symetrycznej od

nie będzie takim dla rzutu, ale parametrem. Zbadajmy teraz macierz (75) w $M_0(s_0)$ dla rzutu. Otrzymamy:

$$(80) \quad \left\{ \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds} \times t_0 = t \times t_0, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dr}{ds} \times n_0 = t \times n_0 \right.$$

Aby obliczyć drugie pochodne, posłużymy się pierwszym wzorem Freneta (57). Jest więc:

$$(81) \quad \left\{ \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dt}{ds} \times t_0 = k(a \times t_0), \quad \frac{d^2y}{ds^2} = k(n \times n_0) \right.$$

Wzory (80) i (81) dla $s = s_0$ dadzą

$$\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \right)_{s_0} = k_0,$$

bo $t_0 \times t_0 = 1$, $n_0 \times n_0 = 1$, $t_0 \times n_0 = 0$. Nadto

$$\left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right]_{s_0} = 1,$$

więc wzór (87) daje na krzywiznę rzutu w $M_0(s_0)$ wartość k_0 i ten samemu tw. udowodnione.

Uwaga. Przejście do współrzędnych x, y nie było konieczne; można było operować wektorem M, P na płaszczyźnie n_0 .

Poznamy teraz interpretację geometryczną promienia krzywizny ρ_0 krzywej C dla M_0 .

Jeżeli krzywa C spełnia (Z, z) i (Z^*, z) w $[a, b]$ i jeżeli $a \leq l < b$, to według II § 5 b) istnieje liczba $k_0 > 0$, taka, że żaden punkt $M(l)$ krzywej C nie leży na stycznej p do C w M_0 , gdy jest $a < l < b$, $l \leq l_0 < b$, a więc wtedy $M(l)$ i p określają płaszczyznę π (której granicznym położeniem jest płaszczyzna n_0 ściśle styczna do C w M_0); istnieje zatem kąt φ przechodzący przez $M(l)$, $M_0(l_0)$ i stycznie

do p_o . Aby znaleźć równanie koła Q (którego graniczne położenie dla $t \rightarrow t_o$ za chwilę określimy), uważamy Q za koło wielkie odpowiednio dobranej kuli Σ . Kula Σ ma następujące własności: *a*) jej środek (wyznaczony przez wektor \mathbf{R}_1) leży na π ; *b*) Σ przechodzi przez $M_o(t_o)$; *c*) Σ przechodzi przez $M(t)$; *d*) p_o jest styczną do Σ . Okaże się, że przy naszych założeniach co do C i t własności *a* — *d* określają kulę Σ jednoznacznie. Jeżeli przez ρ oznaczymy promień kuli Σ , to kula Σ widocznie zależy od współrzędnych środka kuli (trzy liczby: miary składowych wektora \mathbf{R}_1) i od ρ , razem od czterech wielkości, na które mamy też cztery warunki *a, b, c, d*.

Ad a. Równanie płaszczyzny π znaleźliśmy w III § 3 i daje je wzór III 13; stąd wynika, że warunek (*a*) daje związek:

$$(82_{1,2}) \quad \begin{cases} |\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_o, \mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}| = 0 \text{ czyli} \\ (\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_o) \times [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a})] = 0. \end{cases}$$

Ad b i c. Równanie wektorjalne kuli jest następujące $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) = \rho^2$. Stąd warunki *b*) i *c*) dają:

$$(83) \quad \begin{cases} (\mathbf{r}_o - \mathbf{R}_1) \times (\mathbf{r}_o - \mathbf{R}_1) = \rho^2, \\ (\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) \times (\mathbf{r} - \mathbf{R}_1) = \rho^2. \end{cases}$$

Otrzymamy układ równoważny układowi (83), jeżeli oprócz (83₁) weźmiemy równanie, będące wynikiem odejmowania obu równań (83); otóż otrzymamy przez odjęcie:

$$(84) \quad 2 \mathbf{R}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = \mathbf{r} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o.$$

Nie trudno zauważyć, że to równanie wyraża, iż środek kuli Σ leży na płaszczyźnie symetralnej odcinka M_oM .

Ad d. Skoro p_o ma być styczną do kuli Σ , to wektor \mathbf{r}_o' , leżący na p_o , ma być prostopadłym do „wektora-promienia“: $\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_o$, a więc

$$(85) \quad (\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{r}_o' = 0.$$

Otrzymaliśmy tedy na \mathbf{R}_1 i ρ równania: (82₂), (83₁), (84) i (85). Wykażemy, że pozwolą nam określić jednoznacznie \mathbf{R}_1 i ρ . Otóż na mocy I § 5 *f* otrzymujemy z (82₂) i (85), że (zob. wzór I 73):

$$(86) \quad \begin{cases} \mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_o = \sigma [\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o' \wedge (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}))] = \\ = \sigma [\mathbf{r}_o' (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o'' + \mathbf{r}_o' \times \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}) (\mathbf{r}_o' \times \mathbf{r}_o')] \\ = \sigma [\mathbf{r}_o' (I_{12} + \mathbf{r}_o' \times \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}) I_{11}], \end{cases}$$

przyczem uwzględniliśmy oznaczenia wzorów III 40. Mamy do wyznaczenia dwa niewiadome skalary σ i ρ i na nie dwa równania (dotąd nieuwzględnione): (83₁) i (84). Naprzód przekształcimy (84), rozwijając $\mathbf{r} - \mathbf{r}_o$, $\mathbf{r} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o$ według rozwinięcia Peany aż do wyrazów stopnia drugiego; otóż posługując się wzorem III 12 bis i wzorem:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o + 2(t - t_o) (\mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o') + (t - t_o)^2 [I_{11} + \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o'' + b],$$

otrzymujemy (84) w postaci:

$$\begin{aligned} 2(t - t_o) \cdot \mathbf{R}_1 \times \mathbf{r}_o' + (t - t_o)^2 \mathbf{R}_1 \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}) = \\ = 2(t - t_o) (\mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o') + (t - t_o)^2 [I_{11} + \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o'' + b], \end{aligned}$$

co na mocy (85) i po uproszczeniu przez $(t - t_o)^2 \neq 0$ daje

$$(87) \quad \mathbf{R}_1 \times (\mathbf{r}_o'' + \mathbf{a}) = I_{11} + \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}_o'' + b.$$

Wstawiając \mathbf{R}_1 z (86) w (87), otrzymujemy na σ warunek:

$$(88) \quad \sigma [I_{12}^2 - I_{11} I_{22} + c] = I_{11} + b_1,$$

gdzie $c \rightarrow 0$, $b_1 \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow t_0$, bo $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, $b \rightarrow 0$. Określwszy z (88) skalar σ (co uczynić można!), wyznaczmy już łatwo ρ z równania (83₁):

$$(89) \quad \rho = |\sigma| \sqrt{I_{11}(I_{11}I_{22} - I_{12}^2) + \Phi},$$

bo $\rho > 0$, gdyż jest promieniem kuli. Przechodząc obecnie do granicy, otrzymujemy:

$$\sigma \rightarrow \frac{I_{11}}{I_{12}^2 - I_{11}I_{22}}, \quad \mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{M}_0 \mathbf{K}_0, \quad \rho \rightarrow \rho_0,$$

gdzie $\mathbf{M}_0 \mathbf{K}_0$ i ρ_0 mają to samo znaczenie, co w III 36 i III 50. Ponieważ π ma płaszczyznę ściśle styczną π_0' , jako graniczne położenie, więc koło Q ma jako granicę, koło Q_0 , leżące na π_0' o środku w K_0 i promieniu $\rho_0 = M_0 K_0$; koło to zowie się *kołem krzywiznowym* krzywej C w punkcie $M_0(t_0)$. Zarazem uzyskaliśmy widoczne twierdzenie: *jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$, to w każdym punkcie M krzywej C istnieje koło krzywiznowe, którego środek leży na normalnej głównej punktu M , ponadto prosta biegunowa punktu M przecina płaszczyznę ściśle styczną punktu M w środku krzywizny (czyli środku koła krzywiznowego) punktu M .*

Podamy jeszcze inną interpretację pierwszej krzywizny dla krzywej C . Z punktu $M_0(s_0)$ poprowadźmy dwa wektory styczne jednostkowe: \mathbf{t}_0 (należący do $M_0(s_0)$) i \mathbf{t} (należący do $M(s)$). Jest więc $\mathbf{t} \times \mathbf{t}_0 = \cos \varphi$, gdzie φ oznacza kąt między tymi wektorami; stąd na mocy I 77

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} |\sin \varphi| &= \sqrt{1 - (\mathbf{t} \times \mathbf{t}_0)^2} = \\ &= \sqrt{\mathbf{t} \times \mathbf{t} \cdot (\mathbf{t}_0 \times \mathbf{t}_0) - (\mathbf{t} \times \mathbf{t}_0)^2} \\ &= \sqrt{(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_0) \times (\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_0)}. \end{aligned} \right.$$

Przyjmując łuk s jako parametr, rozwiniemy $\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_o$ według Peany do wyrazów 1^{go} stopnia, posługując się przytem pierwszym wzorem Freneta (III 67)

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{t}_o &= [\mathbf{t}_o + (s - s_o)(k_o \mathbf{n}_o + \mathbf{a})] \wedge \mathbf{t}_o = \\ &= (s - s_o) [-k_o \mathbf{b}_o + \mathbf{a} \wedge \mathbf{t}_o], \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $t \rightarrow t_o$; nadto korzystaliśmy ze związku $\mathbf{t}_o \wedge \mathbf{n}_o = \mathbf{b}_o$. A więc:

$$(91) \quad |\sin \varphi| = |s - s_o| \sqrt{k_o^2 + c},$$

gdzie $c \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow t_o$. Stąd wynika, że:

$$(91 \text{ bis}) \quad \left| \frac{\sin \varphi}{s - s_o} \right| = \sqrt{k_o^2 + c} \rightarrow k_o,$$

gdy $t \rightarrow t_o$. Temsamem uzyskaliśmy wynik analogiczny do wyniku znanego z elementarnej teorii krzywizny krzywych płaskich o równaniu $y = f(x)$.

§ 11. Wzory Freneta. Powyżej (III 67, str. 123) poznaliśmy pierwszy wzór Freneta (w postaci wektorjalnej) i zarazem stąd wynikającą pierwszą grupę (III 69) wzorów Freneta (dla ortogonalnego układu Kartezjusza). Wzór ten jeszcze raz wyprowadzimy, przez co wyjaśni się jego rola i to niezależnie od aparatu geometrycznych rozważań.

Zakładamy, że krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$; wtedy istnieje dla niej łuk s i w każdym punkcie wektor jednostkowy \mathbf{t} , styczny do C . Jest więc $\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 1$; na mocy $(Z, 2)$ wektor ten ma pochodną ciągłą względem łuku i jest

$$(92) \quad \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0,$$

a że na mocy $(Z^*, 2)$ jest $d\mathbf{t}:ds \neq \mathbf{0}$, więc z (92) wynika, że wektor ten jest prostopadłym do \mathbf{t} ; nie

jest jednak długość jednostkowym; oznaczając więc przez k jego długość ($k > 0$), określamy wektor jednostkowy i współkierunkowy z wektorem ($dt:ds$):

$$(93) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{dt}{ds}$$

Skąd się natychmiast otrzymuje pierwszy wzór Freneta III 67. Widoczne więc znaczenie pierwszego wzoru Freneta: jeżeli całą uwagę skupimy na wektorach, związanych z punktem krzywej, a pominiemy takie utwory, jak prosta osci i płaszczyzna, to po określeniu wektora stycznego do krzywej (rozdz. II) wzór (93) w takiej geometrii służy do określenia wektora \mathbf{n} i pierwszej krzywizny k . Współczynnik k (> 0) ma więc być takim, żeby było $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$ czyli

$$\frac{1}{k} \frac{dt}{ds} \times \frac{1}{k} \frac{dt}{ds} = 1;$$

$$(94) \quad k = \sqrt{\frac{dt}{ds} \times \frac{dt}{ds}}$$

Według (93) skalarne przez \mathbf{n} otrzymujemy:

$$(95) \quad k = \frac{dt}{ds} \cdot \mathbf{n}$$

Mając wektory jednostkowe \mathbf{l} , \mathbf{n} (od siebie niezależne, bo do siebie prostopadłe), określamy z kolei trzeci wektor jednostkowy \mathbf{t} , zw. binormalny, blagoc $\mathbf{l} \times \mathbf{n} = \mathbf{t}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = \mathbf{l}$. W ten sposób w każdym punkcie M (s) krzywej istnieją trzy wektory \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{t} , od siebie niezależne; wskutek tego każdy wektor \mathbf{u} wyprowadzony z M (s) wyrazi się linijowo i jednoznacznie przez \mathbf{l} , \mathbf{n} , \mathbf{t} , \mathbf{t} m. otrzymana się

$$(96) \quad \mathbf{u} = A\mathbf{l} + B\mathbf{n} + C\mathbf{t}$$

Przyjmując tak s jako parametr, rozwiniemy $t \wedge L$ według Potamy do wyrazów 1^o stopnia, posługując się przytem pierwszym wzorem Freneta (III 67)

$$t \wedge L = [t_0 + (s - s_0)(L_0 n_0 + a)] \wedge t_0 = \\ = (s - s_0) [-L_0 b_0 + a \wedge t_0],$$

gdzie $a > 0$, gdy $t = t_0$; nadto korzystaliśmy ze związku $t_0 \wedge n_0 = h_0$. A więc:

$$(91) \quad |\sin \varphi| = |s - s_0| \sqrt{L_0^2 + c},$$

gdzie $c > 0$, gdy $t = t_0$. Stąd wynika, że:

$$(91) \text{ b) } \left| \frac{\sin \varphi}{s - s_0} \right| = \sqrt{L_0^2 + c} = L_0,$$

gdy $t = t_0$. Temsamem uzyskaliśmy wynik analogiczny do wyniku znanego z elementarnej teorii krzywiny krzywych płaskich o równaniu $y = f(x)$.

§ 13. Wzory Freneta. Powyżej (III 67, str. 123) poznaliśmy pierwszy wzór Freneta (w postaci wektorialnej) i zarazem stąd wynikającą pierwszą grupę (III 69) wzorów Freneta (dla ortogonalnego układu Kartezjusza). Wzór ten jeszcze raz wyprowadzimy, przez co wyjaśni się jego rola i to niezależnie od aparatu geometrycznych rozważań.

Zechcemy, że krzywa C spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $(n, 0)$; wtedy istnieje dla niej łuk s i w każdym punkcie wektor jednostkowy t , styczny do C . Jest więc $t \times t = 1$; na płaszczyźnie $(Z, 2)$ wektor ten ma pochodną singlej względem łuku i jest

$$(92) \quad t \times \frac{dt}{ds} = 0,$$

z ta na płaszczyźnie $(Z^*, 2)$ jest $dt:ds \neq 0$; więc z (92) wynika, że wektor ten jest prostopadłym do t ; nie

jest jednak naogół jednostkowym; oznaczając więc przez k jego długość ($k > 0$), określamy wektor jednostkowy i współkierunkowy z wektorem ($d\mathbf{t}:ds$):

$$(93) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{d\mathbf{t}}{ds},$$

skąd się natychmiast otrzymuje pierwszy wzór Freneta III 67. Widoczne więc znaczenie pierwszego wzoru Freneta: jeżeli całą uwagę skupimy na wektorach, związanych z punktem krzywej, a pominiemy takie utwory, jak proste osie i płaszczyzny, to po określeniu wektora stycznego do krzywej (rozd. II) wzór (93) w takiej geometrii służy do określenia wektora \mathbf{n} i pierwszej krzywizny k . Współczynnik $k (> 0)$ ma więc być takim, żeby było $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$ czyli

$$(94) \quad \frac{1}{k} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \frac{1}{k} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 1;$$

$$k = \sqrt{\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}}$$

Mnożąc (93) skalarnie przez \mathbf{n} , otrzymujemy:

$$(95) \quad k = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n}.$$

Mając wektory jednostkowe \mathbf{t} , \mathbf{n} (od siebie niezależne, bo do siebie prostopadłe), określamy z kolei trzeci wektor jednostkowy \mathbf{b} zw. binormalny, kładąc $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$. W ten sposób w każdym punkcie $M(s)$ krzywej istnieją trzy wektory \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , od siebie niezależne; wskutek tego każdy wektor \mathbf{u} , wychodzący z $M(s)$ wyrazi się linjowo i jednorodnie przez \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} t. zn. otrzyma się

$$(96) \quad \mathbf{u} = A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b},$$

gdzie A, B, C są miarami rzutów (składowych) wektora \mathbf{u} na kierunki wektorów $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Mamy bowiem na mocy III 60:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{t} = A(\mathbf{t} \times \mathbf{t}) + B(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + C(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = A.$$

Podobnie jest $B = \mathbf{u} \times \mathbf{n}, C = \mathbf{u} \times \mathbf{b}$. (A, B, C są to skalary).

Zauważmy, że wektor \mathbf{t} otrzymuje się przez różniczkowanie wektora $\mathbf{r}(s)$, określającego punkty krzywej, wobec tego \mathbf{n} zależy od drugiej pochodnej, podobnie się rzecz ma z wektorem \mathbf{b} i niezmiennikiem różniczkowym k . Aby więc obliczyć pochodną ($d\mathbf{n}:ds$); jesteśmy zmuszeni przyjąć, że krzywa spełnia (Z, 3) w $[a, b]$. Przyjmując to, możemy obliczyć pochodną geometryczną ($d\mathbf{n}:ds$); ale pochodna geometryczna wektora jest znów wektorem, który oczywiście należy do punktu $M(s)$, więc wyrazi się przez wektory $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, należące do $M(s)$. Możemy więc w myśl wzoru (96) napisać:

$$(97) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = A\mathbf{t} + B\mathbf{n} + C\mathbf{b},$$

przyczem jest (jak wyżej)

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}, B = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}, C = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}. \end{array} \right.$$

Otóż jest $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$, skąd wynika na mocy (95):

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0; \quad \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} = -k;$$

przeto jest $A = -k$. Podobnie mamy $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$, skąd przez różniczkowanie wynika:

$$2 \cdot \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0 \quad \text{czyli} \quad \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0,$$

przeto jest $B=0$ czyli wyrazu $(B\mathbf{n})$ w (97) „niema“. Prawa strona wzoru (97) zawiera więc 2 wyrazy, zamiast C napiszemy $-\tilde{\tau}$; mamy¹ więc

$$(99) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} - \tilde{\tau}\mathbf{b},$$

gdzie jest według (98):

$$(100) \quad \tilde{\tau} = -\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Współczynnik $\tilde{\tau}$ nosi nazwę *drugiej krzywizny krzywej* albo *skręcenia* (czyli torsji); pochodzenie nazwy wyjaśni następny paragraf.

Wzór (99) zowie się *drugim wzorem Freneta*, który w ortogonalnym układzie Kartezjusza daje drugą grupę wzorów Freneta ($\tilde{\tau}$, jak widoczne ze (100), jest skalarem):

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha^*}{ds} = -k\alpha - \tilde{\tau}\alpha^{**}, \quad \frac{d\beta^*}{ds} = -k\beta - \tilde{\tau}\beta^{**}, \\ \frac{d\gamma^*}{ds} = -k\gamma - \tilde{\tau}\gamma^{**}. \end{array} \right.$$

Drugi wzór Freneta określa skręcenie $\tilde{\tau}$ (gdyż wek-

¹ Gdybyśmy położyli

$$(100 \text{ bis}) \quad \tilde{\tau} = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

to mielibyśmy

$$(99 \text{ bis}) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \tilde{\tau}\mathbf{b},$$

oraz:

$$(102 \text{ bis}) \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tilde{\tau}\mathbf{n}.$$

Niektórzy autorzy przyjmują wzory 99bis i 102bis, inni 99 i 102.

tor \mathbf{b} jest już nam znany). Podamy teraz trzeci wzór Freneta. Otóż $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, więc stąd i z III 67, III 99 mamy:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{ds} = k\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} + \\ &+ \mathbf{t} \wedge (-k\mathbf{t} - \tilde{c}\mathbf{b}) = -\tilde{c}\mathbf{t} \wedge \mathbf{b} = \tilde{c}\mathbf{n}, \end{aligned}$$

czyli

$$(102) \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tilde{c}\mathbf{n}.$$

Jest to t.zw. *trzeci wzór Freneta* w postaci wektorjalnej.

W ortogonalnym układzie Kartezjusza otrzymamy stąd *trzecią grupę wzorów Freneta*:

$$(103) \quad \frac{d\alpha^{**}}{ds} = \tilde{c}\alpha^*, \quad \frac{d\beta^{**}}{ds} = \tilde{c}\beta^*, \quad \frac{d\gamma^{**}}{ds} = \tilde{c}\gamma^*.$$

Do wzorów Freneta dołączymy wzór, wzgl. grupę:

$$(104) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}; \quad \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma,$$

które nie mają osobnej nazwy, ale do wzorów Freneta należą i pojęciowo i kształtem — dlatego (104) nazwiemy *0^{ty}m wzorem Freneta*, wzgl. *0^{ta} grupą wzorów Freneta*.

W związku z powyższem wypowiadamy następujące *tw.:* jeżeli krzywa C spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ i jeżeli s jest łukiem krzywej, a $\mathbf{r}(s)$ wektorem wyznaczającym bieżący punkt krzywej, to istnieją w $[s_1, s_2]$ dwa niezmienniki różniczkowe k i \tilde{c} grupy ruchów euklidesowych i przekształceń dopuszczalnych parametru i nadto k należy do C^1 w $[s_1, s_2]$, $k > 0$ w $[s_1, s_2]$; zarazem istnieją trzy wektory $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ o własnościach III 60, III 104, III 67, III 99 i III 102.

Wzory Lancreta. Wprowadzamy wektor

$$\vec{m} = k\vec{b} - \gamma\vec{t}$$

on leży na linii prostej. Wzory Freneta możemy
pomyśleć przy pomocy \vec{m} łatwo wyrazić. Ustosunkujemy wektory
wektorialnie po kolei:

$$\vec{m} \wedge \vec{t} = (k\vec{b} - \gamma\vec{t}) \wedge \vec{t} = k\vec{n}$$

$$\vec{m} \wedge \vec{n} = (k\vec{b} - \gamma\vec{t}) \wedge \vec{n} = -k\vec{t} - \gamma\vec{b}$$

$$\vec{m} \wedge \vec{b} = (k\vec{b} - \gamma\vec{t}) \wedge \vec{b} = \gamma\vec{n}$$

Nobce te wzory Freneta przyjmują postać

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{m} \wedge \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{m} \wedge \vec{n}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{m} \wedge \vec{b}.$$

albo pisząc $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3$ zamiast $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$

mamy

$$\frac{d\vec{t}_i}{ds} = \vec{m} \wedge \vec{t}_i \quad (i=1,2,3)$$

to wzory Lancreta.

12/5 1935.

Wzrosty i składowe. $\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}x$

III 99 many:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}x$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}y$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}z$$

Jest to układ równań różniczkowych liniowych z stałymi współczynnikami. W ortogonalnym układzie współrzędnych otrzymamy układ trzech grup wzorów Freneta:

$$(103) \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}x, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}y, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{1}{R^2}z$$

Do wzorów (103) dodajemy wzór, wzgl. grup:

$$(104) \quad \frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dy}{ds} = y, \quad \frac{dz}{ds} = z$$

które nie mają osobnej nazwy, ale do wzorów Freneta należą i pojęciowo i kształtem — dlatego (104) nazwiemy O^{III} wzorem Freneta, wzgl. O^{III} grup wzorów Freneta.

W związku z powyższym wypowiadamy następująco tw.: Jeżeli krzywa U spłania $(Z, 3)$ i $(Z^2, 2)$ w $[s_1, s_2]$ i jeżeli s jest tutejszym punktem krzywej, to istnieje w $[s_1, s_2]$ dwa niezmienniki różniczkowe k i τ grupy ruchów sześcioramiennych i przekształceń dwuparametrowych C^2 w $[s_1, s_2]$, C^2 w $[s_1, s_2]$; zarazem istnieje trzy wektory l, n, b o własnościach III 99, III 100, III 101, III 99 i III 102.

Analogicznie twierdzenie wypowie krytelek, postępując się współrzędnymi Kartezjusza x, y, z punktu biegnącego krzywej.

Dolęzmy jeszcze uwagę: przy założeniach $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[s_1, s_2]$ otrzymuje się 0^{ta} rzęd (0^{ta} grupa wzorów) Freneta; przy założeniach $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ otrzymuje się dalej płaszczyznę osci (pierwszą grupę wzorów) Freneta; wreszcie przy założeniach $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ otrzymuje się nadal drugą i trzecią osci (drugą i trzecią grupę wzorów) Freneta.

Dowod, że skręcenie τ jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych i przekształceń parametru, znajdziemy krytelek poniżej § 12.

§ 12. Druga krzywizna. O krzywej C założymy, że spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ wobec tego krzywizna pierwsza k , będąca elementem 2^{go} rzędu, ma pochodną ciągłą względem łuku; obliczmy pierwsze trzy pochodne wektora $r(s)$, wychodzącego z biegnącego punktu krzywej C . Jest:

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{ds} = k, \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \frac{dk}{ds} = \tau n, \\ \frac{d^3r}{ds^3} = \frac{dk}{ds} \cdot n - k(k^2 + \tau^2)n. \end{array} \right.$$

Obliczmy wyznacznik trzech wektorów:

$$\begin{vmatrix} r & \frac{dr}{ds} & \frac{d^2r}{ds^2} \\ \frac{dr}{ds} & \frac{d^2r}{ds^2} & \frac{d^3r}{ds^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, \tau n & -k^2r + \frac{dk}{ds} \cdot n & -k^3r - \tau^2 n \end{vmatrix}$$

Mnożąc pierwszy wiersz przez k^2 i dodając do drugiego wiersza, usuniemy k^2r z trzeciego wiersza; podobnie mnożąc przez odpowiednią τ drugą kolumnę i dodając do trzeciej kolumny, usuniemy $\tau^2 n$ z trzeciego wiersza i tak, że otrzymamy

Analogiczne twierdzenie wypowie czytelnik, posługując się współrzędnymi Kartezjusza x, y, z punktu bieżącego krzywej.

Dołączmy jeszcze uwagę: przy założeniach $(Z, 1)$ i $(Z^*, 1)$ w $[s_1, s_2]$ otrzymuje się 0^{ty} wzór (0^{ta} grupę wzorów) Freneta; przy założeniach $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ otrzymuje się dalej pierwszy wzór (pierwszą grupę wzorów) Freneta; wreszcie przy założeniach $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ otrzymuje się nadto drugi i trzeci wzór (drugą i trzecią grupę wzorów) Freneta.

Dowód, że skręcenie τ jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych i przekształceń parametru, znajdzie czytelnik poniżej (§ 12).

§ 12. Druga krzywizna. O krzywej C założymy, że spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$, wobec tego krzywizna pierwsza k , będąca elementem 2^{go} rzędu, ma pochodną ciągłą względem łuku; obliczmy pierwsze trzy pochodne wektora $\mathbf{r}(s)$, wyznaczającego bieżący punktu krzywej C . Jest:

$$(105) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}; \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds} \cdot \mathbf{n} - k(k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}). \end{array} \right.$$

Obliczmy wyznacznik trzech wektorów:

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right| = \left| \mathbf{t}, k\mathbf{n}, -k^2\mathbf{t} + \frac{dk}{ds} \cdot \mathbf{n} - k\tau\mathbf{b} \right|.$$

Mnożąc pierwszy wiersz przez k^2 i dodając do trzeciego wiersza, usuniemy \mathbf{t} z trzeciego wiersza; podobnie mnożąc przez odpowiedni czynnik drugi wiersz i dodając iloczyn do trzeciego wiersza, usuniemy z trzeciego wiersza \mathbf{n} tak, iż otrzymamy

$$(106) \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right| = -k^2 \mathcal{C} |\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}| = -k^2 \mathcal{C},$$

bo $|\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}| = +1$. Ze (106) otrzymamy więc:

$$(107) \quad \mathcal{C} = -\frac{1}{k^2} \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right|,$$

skąd widoczne, że \mathcal{C} jest *elementem 3^{go} rzędu*, bo zależy od pochodnych trzeciego rzędu.

Aby wykazać, że \mathcal{C} jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych, dość wykazać, że wyznacznik, po prawej stronie wzoru 107 zachodzący, jest niezmiennikiem różniczkowym grupy ruchów euklidesowych, bo jest nim — jak wiemy — krzywizna pierwsza k . Otóż krzywa C przechodzi przez ruch euklidesowy w krzywą C^* o równaniu:

$$(108) \quad \mathbf{r}^*(s) = \mathbf{a}_4 + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{r}(s)) \mathbf{e}_i,$$

skąd otrzymujemy

$$(109) \quad \frac{d^k \mathbf{r}^*}{ds^k} = \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{a}_i \times \frac{d^k \mathbf{r}}{ds^k} \right) \mathbf{e}_i \quad (k = 1, 2, 3),$$

co wykazuje, że wektor $\frac{d^k \mathbf{r}}{ds^k}$ przez ruch euklidesowy przejdzie w wektor $\frac{d^k \mathbf{r}^*}{ds^k}$, a stąd na mocy tw. ze str. 105 (wzór III 19) wynika, że jest

$$(110) \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}^*}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}^*}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}^*}{ds^3} \right|,$$

co było do udowodnienia.

Jak wiadomo z II § 3, łuk krzywej nie jest jednoznacznie określony; jeżeli \mathfrak{s} oznacza jeden łuk krzy-

wej, to wszystkie łuki krzywej obejmuje wzór $s^* = \varepsilon s + s_0$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a s_0 jest dowolną stałą. Wykażemy, że \tilde{c} od wyboru łuku nie zależy. Rzeczywiście mamy:

$$(111) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \varepsilon, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^{*2}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot \varepsilon^2 = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^{*3}} = \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \cdot \varepsilon \end{array} \right.$$

i wobec tego jest:

$$(112) \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds^*}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^{*2}}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^{*3}} \right|.$$

Ponadto

$$(113) \quad k = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}} = \sqrt{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^{*2}} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^{*2}}},$$

skąd już widoczne, że \tilde{c} nie zależy od wyboru łuku.

Założmy, że krzywa C jest przedstawiona przy pomocy parametru t i spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w przedziale $[a, b]$ na t ; stąd wynika, że spełnia też $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$, a więc istnieje łuk s , który wobec $(Z, 3)$ należy do klasy C^3 w $[a, b]$. Jest więc

$$(114) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot s'; \quad \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \cdot s'^2 + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot s''; \\ \mathbf{r}''' = \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \cdot s'^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} s' s'' + \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot s''', \end{array} \right.$$

stąd na mocy znanych własności wyznaczników jest

$$(115) \quad |\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''| = s'^6 \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right|.$$

Na mocy III 50 i 51 jest:

$$(116) \quad k^2 = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')(\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')^3} \quad (k > 0).$$

Ze wzorów 107, 115 i 116 wynika, że jest:

$$(117) \quad \tilde{c} = -\frac{1}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}')(\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'') - (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2} |\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''|,$$

gdyż jest na mocy (114₁) i III 65

$$(118) \quad \mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot s'^2 = s'^2,$$

wobec czego przez s'^6 obustronnie się skraca odnośna równość. Jeżeli R_3 odniesiemy do ortogonalnego układu Kartezjusza, to (117) daje:

$$(119) \quad \tilde{c} = -\frac{1}{Sx'^2 \cdot Sx''^2 - (Sx'x'')^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Uzyskaliśmy twierdzenie: *dla każdego przedstawienia parametrycznego, dla którego krzywa C spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$, wyraża się jej skręcenie wzorem (117), wzgl. (119).*

Wykażemy teraz, że skręcenie \tilde{c} jest niezmiennie przy dopuszczalnych przekształceniach parametru. Oczywiście wpieryw określimy¹ pojęcie dopuszczalnych przekształceń parametru. Załóżmy, że krzywa C jest przedstawiona przy pomocy parametru t , który pozostaje w $[a, b]$ i że spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ gdy jest $a \leq t \leq b$. W miejsce t wprowadzimy parametr

¹ Poprzednio (II § 3, III § 6) rozważaliśmy też „dopuszczalne przekształcenia“ parametru; oczywiście określenia są dostosowane do wymagań, stawianych przez zagadnienia, którymi się zajmujemy.

Jeżeli przy pomocy przekształcenia $t = \varphi(t^*)$, niech φ należy do C^2 , gdy $a^* \leq t^* \leq b^*$, nadto niech będzie $a \leq \varphi(t^*) \leq b$, gdy jest $a^* \leq t^* \leq b^*$; wówczas niech będzie pochodna

$$(120) \quad \frac{d\varphi(t^*)}{dt^*} \neq 0, \quad (a^* \leq t^* \leq b^*).$$

Właśnie przekształcenia t na t^* , spełniające powyższe warunki, nazwiemy obecnie dopuszczalnymi. Z powodu (120) i ciągłości pochodnej funkcja φ jest ściśle monotoniczną w $[a^*, b^*]$, wobec czego jest odwracalna i niech będzie $t^* = \psi(t)$, przy czym ψ na podstawie (120) jest w przedziale $[a, b]$, gdzie jest $a \leq t \leq b$, funkcją $\psi(t)$ należącą do C^2 w $[a, b]$. Wobec wadzącej t^* za t , otrzymamy $r(t) = r(\varphi(t^*)) = r^*(t^*)$ i jest

$$(121) \quad \begin{cases} r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt^*} \cdot t^{*'}; & r'' = \frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} t^{*''} + \frac{dr^*}{dt^*} t^{*'} \\ r^{*'} = \frac{dr^*}{dt^*} \cdot t^{*'}; & r^{*''} = \frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} t^{*''} + \frac{dr^*}{dt^*} t^{*'} \end{cases}$$

Stąd mamy (zob. III § 6):

$$(122) \quad r' \wedge r'' = \left(\frac{dr^*}{dt^*} \wedge \frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} \right) t^{*''}.$$

Ponieważ według założenia zachodzi $(Z^*, 2)$ i $(Z^*, 3)$, $r' \wedge r'' \neq 0$ w $[a, b]$, przeto także w $[a^*, b^*]$ z (122) wynika:

$$(123) \quad \frac{dr^*}{dt^*} \wedge \frac{d^2 r^*}{dt^{*2}} \neq 0 \quad \text{w } [a^*, b^*].$$

Innymi słowy: krzywa C spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 3)$ w $[a^*, b^*]$, gdy ją przedstawimy przy pomocy t^* .

Na mocy III 50 i 51 jest:

$$(116) \quad k^2 = \frac{(r' \times r')(r'' \times r'') - (r' \times r'')^2}{(r' \times r')^2} \quad (k > 0).$$

Ze wzorów 107, 115 i 116 wynika, że jest:

$$(117) \quad \varepsilon = \frac{1}{(r' \times r')(r'' \times r'') - (r' \times r'')^2} \cdot \langle r', r'', r''' \rangle,$$

gdzie jest na mocy (114) i III 65

$$(118) \quad r' \times r'' = \frac{dr}{ds} \times \frac{dr}{ds} \cdot s'^2 = s'^2,$$

wobec czego przez s'^4 obustronnie się skraca od-
mnożna równość. Jeżeli R_3 odniesiemy do ortogonal-
nego układu Kartezjusza, to (117) daje:

$$(119) \quad \varepsilon = \frac{1}{\delta x'^2 \delta x''^2 - (\delta x' x'')^2} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Użytkując twierdzenie: dla każdego przedstawie-
nia parametrycznego, dla którego krzywa C spełnia
(Z, 3) i (Z^o, 2), wyraża się jej skręcenie wzorem
(117), wzgl. (119).

Wykażemy teraz, że skręcenie ε jest niezmiennie
przy dopuszczalnych przekształceniach parametru.
Oczywiście wplew określmy¹ pojęcie dopuszczal-
nych przekształceń parametru. Założmy, że krzywa
 C jest przedstawiona przy pomocy parametru l , który
pozostaje w $[a, b]$ i że spełnia (Z, 3) i (Z^o, 2) gdy
jest $a < l < b$. W miejsce l wprowadzimy parametr

¹ Poprzednio (II § 3, III § 6) rozważaliśmy też „dopuszczalne przekształcenia” parametru; oczywiście obracając się do dostosowania do wymagań stawianych przez za-
gadanie, które się zmieniały.

t^* przy pomocy przekształcenia: $t = \varphi(t^*)$; niech φ należy do C^3 , gdy $a^* \leq t^* \leq b^*$, nadto niech będzie $a \leq \varphi(t^*) \leq b$, gdy jest $a^* \leq t^* \leq b^*$; wreszcie niech będzie pochodna

$$(120) \quad \frac{d\varphi(t^*)}{dt^*} \neq 0, \quad (a^* \leq t^* \leq b^*).$$

Właśnie przekształcenia t na t^* , spełniające powyższe warunki, nazwiemy obecnie dopuszczalnymi. Z powodu (120) i ciągłości pochodnej funkcja φ jest ściśle monotoniczną w $[a^*, b^*]$, wobec czego jest odwracalną i niech będzie $t^* = \psi(t)$, przyczem t ma pozostawać w przedziale $[a_1, b_1]$, gdzie jest $a \leq a_1 < b_1 \leq b$; funkcja $\psi(t)$ należąc będzie do C^3 w $[a_1, b_1]$. Wprowadzając t^* za t , otrzymamy $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}[\varphi(t^*)] = \mathbf{r}^*(t^*)$ i jest

$$(121) \quad \begin{cases} \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \cdot t'^*; & \mathbf{r}'' = \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^{*2}} t'^{*2} + \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \cdot t''^*; \\ \mathbf{r}''' = \frac{d^3\mathbf{r}^*}{dt^{*3}} \cdot t'^{*3} + 3 \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^{*2}} t'^* t''^* + \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \cdot t'''^*. \end{cases}$$

Stąd mamy (zob. III § 6):

$$(122) \quad \mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' = \left(\frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^{*2}} \right) t'^{*3}.$$

Ponieważ według założenia zachodzi $(Z^*, 2)$ t. zn. $\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'' \neq \mathbf{0}$ w $[a, b]$, przeto także w $[a_1, b_1]$, więc z (122) wynika:

$$(123) \quad \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}^*}{dt^{*2}} \neq \mathbf{0} \quad \text{w } [a^*, b^*].$$

Innymi słowy: krzywa C spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a^*, b^*]$, gdy ją przedstawimy przy pomocy t^* ,

wobec czego otrzymamy wzór, na \bar{c}^* (skręcenie krzywej, przedstawionej przez l^*), zastępując w (117) r przez r^* , a l przez l^* , poczem przy uwzględnieniu (121) z łatwością wynika, że $\bar{c}^* = \bar{c}$, co znaczy, że \bar{c} jest rzeczywiście niezmiennikiem różniczkowym dopuszczalnych przekształceń parametru.

Podamy teraz interpretację geometryczną skręcenia \bar{c} . W tym celu rozważmy najpierw krzywą płaską, spełniającą $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$; jak wiadomo z III § 3, płaszczyzną ściśle styczną w każdym punkcie krzywej płaskiej jest jedna i ta sama płaszczyzna π , na której leży krzywa, wskutek czego osie binormalne wzdłuż krzywej tworzą zbiór prostych do siebie równoległych. Ten fakt nasuwa rozważania następujące. Niech C będzie krzywą niepłaską i niech $r = r(s)$ będzie jej równaniem, przy czym s jest łukiem krzywej; niech C spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ na s . Niech s_0 należy do $[s_1, s_2]$; utwórzmy kąt φ między wektorem binormalnym b_0 w $M_0(s_0)$ a wektorem b w $M(s)$. Oczywiście jest $\cos \varphi = b \times b_0$, stąd na mocy I 77 jest

$$(124) \quad \begin{cases} |\sin \varphi| = \sqrt{1 - (b \times b_0)^2} = \\ = \sqrt{(b \times b)(b_0 \times b_0) - (b \times b_0)^2} = \sqrt{(b \wedge b_0) \times (b \wedge b_0)}. \end{cases}$$

Rozwińmy według Peany aż do wyrazów 1^{go} rzędu wektor b , korzystając dla pochodnej ze wzoru III 102: $b = b_0 + (s - s_0)[\bar{c}_0 n_0 + a]$, gdzie $a \rightarrow 0$, gdy $s \rightarrow s_0$; \bar{c}_0, n_0 oznaczają skręcenie, wzg. wektor normalny główny w M_0 . Stąd wynika $b \wedge b_0 = (s - s_0)[\bar{c}_0(n_0 \wedge b_0) + a \wedge b_0] = (s - s_0)[\bar{c}_0 t_0 + a \wedge b_0]$; (124) daje więc:

$$(125) \quad |\sin \varphi| = |s - s_0| \sqrt{\bar{c}_0^2 + c},$$

gdzie $c \rightarrow 0$, gdy $s \rightarrow s_0$; wobec tego jest:

$$(126) \quad \left| \frac{\sin \varphi}{s - s_0} \right| = \sqrt{\tau_0^2 + c} \rightarrow |\tau_0|, \quad (s \rightarrow s_0);$$

ta własność torsji τ jest też powodem, że — mówiąc intuicyjnie — uważamy skręcenie za „miarę odchylenia krzywej od krzywej płaskiej“, dla której oczywiście jest $\tau \equiv 0$, gdyż jest $\sin \varphi \equiv 0$ dla krzywej płaskiej.

Uwaga. Wiadomo z rozdz. I, że iloczyn skalarny 2 wektorów jest niezmiennikiem grupy ruchów euklidesowych. Otóż — jak widzieliśmy — wektorami wyróżnionymi dla krzywej C o równaniu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, spełniającej $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$, są pochodne geometryczne:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Przy ich pomocy tworzymy iloczyny skalarne

$$(\alpha) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (\beta) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}; \quad (\gamma) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

Iloczyn (α) jest $\equiv 1$, gdy s jest łukiem; wskutek tego (β) jest $\equiv 0$ dla każdej krzywej C ; oba więc iloczyny (α) i (β) mają liczebne wartości, wspólne dla wszystkich krzywych C . Dopiero iloczyn (γ) , widocznie $= k^2$ jest niezmiennikiem interesującym. Dalszy niezmiennik otrzymamy, biorąc pod uwagę iloczyny skalarne:

$$(\delta) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}, \quad (\epsilon) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}.$$

Zauważmy jednak, że, ponieważ $(\beta) = 0$, więc przez

różniczkowanie względem s otrzymujemy z (β):

$$(\delta) + (\gamma) = 0 \text{ czyli } (\delta) = -k^2.$$

Podobnie z (γ) otrzymujemy:

$$2(\varepsilon) = 2k \cdot \frac{dk}{ds} \text{ czyli } (\varepsilon) = k \frac{dk}{ds}.$$

A więc iloczyn (δ) nie daje nic nowego, a iloczyn (ε) wyraża się przez krzywiznę pierwszą i jej pochodną.

Przejdźmy teraz do niezmiennika 3 wektorów; jest nim wyznacznik trzech wektorów, a więc wypadnie utworzyć wyznacznik:

$$w = \begin{vmatrix} d\mathbf{r} & d^2\mathbf{r} & d^3\mathbf{r} \\ ds & ds^2 & ds^3 \end{vmatrix}.$$

Nietrudno zauważyć, że jest

$$w = -\tau k^2.$$

Ponieważ wiemy, że iloczyny skalarne 2 wektorów i wyznacznik trzech wektorów są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych, więc powyższe rozważania można uważać za dowód, że krzywizny k i τ są niezmiennikami grupy ruchów euklidesowych. Do tych rozważań powrócimy jeszcze w IV § 7.

§ 13. Jeszcze o krzywych płaskich. Niech krzywa C leży na płaszczyźnie π i niech spełnia $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$. Dla uproszczenia wzorów przyjmijmy szczególny ortogonalny i prawoskrętny układ Kartezjusza: osie x, y w π , a oś z prostopadłe do π . W każdym punkcie krzywej C istnieją wektory $\mathbf{t}^*, \mathbf{n}^*, \mathbf{b}^*$ i krzywizna pierwsza $k^* > 0$ (dotąd oznaczane przez $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ i k). Wektory $\mathbf{t}^*, \mathbf{n}^*$ leżą w π , jak osie x, y . Te dwa układy można skoordynować w pewien szczególny sposób: w każdym punkcie krzywej przyjmijmy jednostkowe wek-

5w. Gdy $|\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''| = 0$, $\vec{r}' \wedge \vec{r}'' \neq 0$, to krzywa nie jest prosta a jest płaska.

Dow. Klade $\vec{m} = \vec{r}' \wedge \vec{r}''$. Istnieje lokalnie stały wektor \vec{e}_i stały (np. jednostkowy) taki, że $\vec{m} \times \vec{e}_i \neq 0$. Wtedy otóż jest $\vec{m} \times \vec{r}' = 0$, $\vec{m} \times \vec{r}'' = 0$, $\vec{m} \times \vec{r}''' = 0$. stad $\vec{m}' \times \vec{r}' + \vec{m} \times \vec{r}'' = 0$, wiec $\vec{m}' \times \vec{r}' = 0$, $\vec{m}' \times \vec{r}'' + \vec{m} \times \vec{r}''' = 0$, tedy $\vec{m}' \times \vec{r}'' = 0$, a wiec $\vec{m}' = \sigma(\vec{r}' \wedge \vec{r}'') = \sigma \vec{m}$. Tedy

$$(1) \quad \vec{m}' \times \vec{e}_i = \sigma \vec{m} \times \vec{e}_i$$

Wektor kierunek ortogonalny do \vec{e}_i i jednostkowy wektor \vec{e}_j . Tedy też $\vec{m}' \times \vec{e}_j = \sigma \vec{m} \times \vec{e}_j$

Klade $\frac{\vec{m}' \times \vec{e}_j}{\vec{m} \times \vec{e}_j} = A$ czyli $\vec{m}' \times \vec{e}_j = A \vec{m} \times \vec{e}_j$

Rozwiązując mamy:

$$\vec{m}' \times \vec{e}_j = A' \vec{m} \times \vec{e}_i + A \vec{m}' \times \vec{e}_i \text{ czyli}$$

$$\sigma A \vec{m} \times \vec{e}_i = A' \vec{m} \times \vec{e}_i + A \sigma \vec{m} \times \vec{e}_i, \text{ stad}$$

$$A' = 0 \text{ czyli } A = \text{const}$$

A wiec dla kierunku \vec{e}_j, \vec{e}_k prostopadłych do \vec{e}_i mamy

$$\vec{m}' \times \vec{e}_j = A \vec{m} \times \vec{e}_i, \quad \vec{m}' \times \vec{e}_k = B \vec{m} \times \vec{e}_i$$

A, B, stałe, wiec dla brzojost. i jednostk. wektor

$$\vec{m}' = \vec{e}_i \cdot \vec{m}' \times \vec{e}_i + \vec{e}_j \cdot \vec{m}' \times \vec{e}_j + \vec{e}_k \cdot \vec{m}' \times \vec{e}_k = \vec{m}' \times \vec{e}_i [\vec{e}_i + A \vec{e}_j + B \vec{e}_k]$$

$$\text{czyli } \vec{m}' = \rho \vec{\phi}$$

$$\text{gdzie } \rho = \vec{m}' \times \vec{e}_i \neq 0, \quad \vec{\phi} = \vec{e}_i + A \vec{e}_j + B \vec{e}_k = \text{const} \neq 0$$

ale $\vec{m}' \times \vec{r}' = 0$, a co daje $\vec{\phi} \times \vec{r}' = 0$ czyli $\vec{\phi} \times \vec{r}' = \text{const}$

c. b. d. u.

tory \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , a mianowicie ma być $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}^*$, wektor \mathbf{n} ma być tak obrany, by układ \mathbf{t} , \mathbf{n} był w π (a więc przez ruch w π) nakładalny na osie x , y ; tedy jest albo $\mathbf{n} = \mathbf{n}^*$ albo $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^*$ czyli jest $\mathbf{n} = \varepsilon \mathbf{n}^*$ (gdzie $\varepsilon = \pm 1$); stąd wynika, że, gdy \mathbf{b} jest równoległe do osi z i zgodnie z nią skierowane, to układ wektorów \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} jest prawoskrętny. Na prostej wektora \mathbf{n} punktu M leży środek krzywizny \mathbf{K} ; wektor \mathbf{MK} ma na \mathbf{n}^* miarę dodatnią ($1:k^*$), na \mathbf{n} miarę ($1:\varepsilon k^*$) czyli ($1:k$), gdy położymy $k = \varepsilon k^*$. Nie trudno zauważyć, że wzory Freneta (0-ty i 1-szy) pozostają bez zmiany; mamy bowiem:

$$(127) \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}^* = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} = k^* \mathbf{n}^* = \varepsilon k \cdot \varepsilon \mathbf{n} = k \mathbf{n}.$$

Wektory \mathbf{t} , \mathbf{n} , leżąc w płaszczyźnie x, y , mają miary składowych w kierunku osi x, y, z następujące: $(\alpha, \beta, 0)$ i $(\alpha^*, \beta^*, 0)$, wektor \mathbf{b} zaś ma miary składowych $(0, 0, 1)$. Z prawoskrętności i ortogonalności wektorów otrzymuje się:

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = |\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}| = \begin{vmatrix} \alpha, \beta, 0 \\ \alpha^*, \beta^*, 0 \\ 0, 0, 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, \beta \\ \alpha^*, \beta^* \end{vmatrix} = \\ = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta, \end{array} \right.$$

nadto prostopadłość wektorów \mathbf{t} i \mathbf{n} daje $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$ czyli

$$(129) \quad \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 0.$$

Ponieważ jest $\mathbf{t} \times \mathbf{t} = \alpha^2 + \beta^2 = 1$, więc (128) i (129) możemy rozwiązać na α^* , β^* ; otrzymamy z łatwością:

$$(130) \quad \alpha^* = -\beta; \quad \alpha = \beta.$$

Stąd widoczne, że dla krzywej płaskiej jest normalna główna elementem pierwszego rzędu, istnieje więc na mocy $(Z, 2)$ pochodna $d\mathbf{n}:ds$ i właśnie na mocy (130) i (127_2) otrzymujemy:

$$\frac{d\alpha^*}{ds} = -\frac{d\beta}{ds} = -k\beta^* = -k\alpha,$$

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = k\alpha^* = -k\beta,$$

czyli jest:

$$(131) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t}.$$

Jest to drugi wzór Freneta, który uzyskaliśmy przy założeniach $(Z, 2)$ i $(Z^*, 2)$ w $[a, b]$. Wzór (131) łatwo uzyskać na drodze wektorjalnej. Skoro bowiem \mathbf{n} leży stale w π , więc też pochodna $d\mathbf{n}:ds$ będzie wektorem na π , na której wektory wyrażą się przez \mathbf{t} i \mathbf{n} , a więc:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = A\mathbf{t} + B\mathbf{n},$$

skąd otrzymuje się:

$$A = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \quad B = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \times \mathbf{n}.$$

Ale $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$ i (127_2) dają:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0, \quad k\mathbf{n} \times \mathbf{n} + A = 0, \quad A = -k$$

$$\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} = 0, \quad B = 0,$$

temsamem otrzymaliśmy (131). Wreszcie zauważmy, że \mathbf{b} jest stałym wektorem wzdłuż C (t. zn. ma

stały kierunek i stałą wielkość), wobec tego jest:

$$(132) \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{0},$$

co jest trzecim wzorem Freneta dla krzywych płaskich. Jeżeli teraz założymy, że *krzywa płaska spełnia* (Z, 3) i (Z*, 2) w $[a, b]$, to wzory (102) i (132) dają:

$$(133) \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{0} \text{ w } [a, b].$$

Tw. to można uzyskać bezpośrednio; niech bowiem krzywa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ leży na płaszczyźnie π o równaniu $\mathbf{R} \times \mathbf{u}_o = a_o$, gdzie \mathbf{R} wyznacza bieżący punkt płaszczyzny, $\mathbf{u}_o \neq \mathbf{0}$ jest stałym wektorem, a_o jest stałą. Skoro krzywa leży na π , to jest $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}_o \equiv a_o$, a stąd przez różniczkowanie otrzymuje się:

$$(134) \quad \begin{cases} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}_o = 0, & \mathbf{r}''(t) \times \mathbf{u}_o = 0, \\ \mathbf{r}'''(t) \times \mathbf{u}_o = 0. \end{cases}$$

Na mocy (Z*, 2) wynika według I § 5f, że na mocy (134_{1,2}) jest $\mathbf{u}_o = \sigma(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'')$, gdzie $\sigma \neq 0$ (bo $\mathbf{u}_o \neq \mathbf{0}$); wreszcie (134₃) daje $(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}''' = 0$, czyli $|\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''| = 0$, a stąd wynika (133).

Udowodnimy odwrotne tw.: *jeżeli krzywa C spełnia* (Z, 3) i (Z*, 2) w $[a, b]$ i związek (133), to C jest krzywą płaską. Rzeczywiście z (133) wynika na mocy (102), że zachodzi (132), a to scałkowane daje, że \mathbf{b} jest stałym wektorem jednostkowym (a więc $\neq \mathbf{0}$), który oznaczymy przez \mathbf{b}_o . Jest więc $\mathbf{b} = \mathbf{b}_o$, a więc:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{b}_o = \mathbf{t} \times \mathbf{b}_o = \mathbf{0},$$

co przez całkowanie daje $\mathbf{r} \times \mathbf{b}_o = c_o$, gdzie c_o oznacza stałą; a więc krzywa leży na płaszczyźnie $\mathbf{R} \times \mathbf{b}_o = c_o$ czyli jest płaską.

Zauważmy jeszcze, że kiedy krzywizna pierwsza k z określenia swego dla krzywych niepłaskich była dodatnią, to skręcenie \bar{c} może być dodatnie, ujemne lub zerem.

Zbadajmy, jakie wynikną wnioski dla krzywej, dla której w punkcie M_o jest $\bar{c}_o > 0$ lub $\bar{c}_o < 0$. Ponieważ \bar{c} nie zależy od parametru, więc przyjmiemy łuk s jako parametr, przyczem łuk dobierzemy w ten sposób, by w M_o było $s = 0$; ponieważ \bar{c} nie zależy od położenia krzywej w R_3 , więc poddamy krzywą ruchowi euklidesowemu tak, by punkt M_o przeszedł w początek układu, wektory \mathbf{t}_o , \mathbf{n}_o , \mathbf{b}_o punktu M_o padły odpowiednio na osie x , y , z i były zgodnie z osiami skierowane. Że taki ruch (skok) istnieje i jest jednoznacznie określony, wykazaliśmy w I § 2 (str. 15). Wobec tego wektory \mathbf{t}_o , \mathbf{n}_o , \mathbf{b}_o mają składowe w kierunku osi x , y , z o miarach, uwidocznionych w następującej tabelce

$$(135) \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} & \mathbf{t}_o & \mathbf{n}_o & \mathbf{b}_o \\ \hline x & 1 & 0 & 0 \\ \hline y & 0 & 1 & 0 \\ \hline z & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Rozwińmy wektor $\mathbf{r}(s)$ według Peany aż do wyrazów 3^{go} stopnia; posługując się wzorami III 105, otrzymujemy (jest $\mathbf{r}_o = \mathbf{0}$):

$$(136) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = s \mathbf{t}_o + \frac{s^2}{2} k_o \mathbf{n}_o + \\ + \frac{s^3}{3!} \left[-k_o^2 \mathbf{t}_o + \frac{dk}{ds_o} \cdot \mathbf{n}_o - k_o \bar{c}_o \mathbf{b}_o + \mathbf{c} \right], \end{array} \right.$$

gdzie $dk : ds_o$ oznacza wartość pochodnej $dk : ds$

dla $s=0$ i $\sigma=0$, gdy $s \neq 0$. Stąd i z tabeli (135) otrzymujemy:

$$(137) \quad \begin{cases} x = s(1 + c_1), & y = \frac{s^2}{2!} (k_1 + c_2), \\ z = \frac{s^3}{3!} (-k_2 c_3 + c_3). \end{cases}$$

przy czym c_1, c_2, c_3 oznaczają miary składowych wektora φ w kierunku osi x, y, z , znane pozozytwnie:

$$(138) \quad \begin{cases} c_1' = \frac{s^2}{6} (-k_2^2 + c_3) = 0, \\ c_2' = \frac{s}{3} \left(\frac{dk}{ds} + c_2 \right) = 0, \text{ gdy } s = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $k_2 > 0, c_3 \neq 0$, więc istnieje $s > 0$ takie, że $1 + c_1'$ jest dodatnia, $(k_1 + c_2)$ jest też dodatnia, $(-k_2 c_3 + c_3)$ tego samego znaku co $(-k_2 c_3)$, gdy $s < 3$. Krzywa (137) będzie miała więc kształt nie wiele różny od kształtu krzywej:

$$(139) \quad x = s, \quad y = \frac{s^2}{2!} k_1, \quad z = -\frac{s^3}{3!} k_2 c_3.$$

Dla tej krzywej łatwo wyznaczyć kolebna jej części na płaszczyźnie xy (pl. ściśle stykającą w $A(1, 0, 0)$ normalną) i xz (pl. przecinającą). Rzuty te pokazują rys. 3, 4 i 5 a, b na końcu książki. Rys. 3 dla krzywej:

$$(140) \quad x = s, \quad y = \frac{s^2}{2!} k_1, \quad z = 0 \quad \left(y = \frac{s^2}{2} k_1 \right)$$

gdy s przechodzi od wartości ujemnych przez zero do wartości dodatnich, to x i y podobną zmianę znaku i wartości, ale z jest stale dodatnia, jeżeli c_3 też jest dodatnia.

Zauważmy jeszcze, że kiedy krzywizna pierwsza k z określenia swego dla krzywych nieplanckich była dodatnią, to skręcenie ϵ może być dodatnie, ujemne lub zerem.

Zbadajmy, jakie wynikią wnioski dla krzywej, dla której w punkcie M_0 jest $\epsilon_0 > 0$ lub $\epsilon_0 < 0$. Ponieważ ϵ nie zależy od parametru, więc przyjmiemy tak s jako parametr, przy czem łuk dobraćzemy w ten sposób, by w M_0 było $s = 0$; ponieważ ϵ nie zależy od położenia krzywej w R_3 , więc poddamy krzywą ruchowi euklidesowemu tak, by punkt M_0 przeszedł w początek układu, wektory t_0, n_0, h_0 punktu M_0 padły odpowiednio na osie x, y, z i były zgodne z osiami skierowane. Ze taki ruch (skok) istnieje i jest jednoznacznie określony, wykazaliśmy w I § 2 (str. 15). Wobec tego wektory t, n, h mają składowe w kierunku osi x, y, z o miarach, wyrażonych w następującej tabelce

$$(135) \quad \begin{array}{c|ccc} & t & n & h \\ \hline x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Rozwińmy wektor $r(s)$ według Freny aż do wyrazów 3^{go} stopnia; posługując się wzorami III 105, otrzymujemy (jest $r_0 = 0$):

$$(136) \quad \left[\begin{array}{l} r = r(s) = s t_0 + \frac{s^2}{2} k_0 n_0 + \\ + \frac{s^3}{6} \left[-k_0^2 t_0 + \frac{d k_0}{d s} n_0 - k_0 \epsilon_0 h_0 \right] + c \end{array} \right]$$

gdzie $d k_0 / d s$ oznacza wartość pochodnej $d k / d s$

dla $s=0$ i $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $s \rightarrow 0$. Stąd i z tabelki (135) otrzymujemy:

$$(137) \quad \begin{cases} x = s(1 + c_1'), & y = \frac{s^2}{2!}(k_o + c_2'), \\ z = \frac{s^3}{3!}(-k_o \bar{c}_o + c_3), \end{cases}$$

przyczem c_1, c_2, c_3 oznaczają miary składowych wektora \mathbf{e} w kierunku osi x, y, z , nadto położyliśmy:

$$(138) \quad \begin{cases} c_1' = \frac{s^2}{6}(-k_o^2 + c_1) \rightarrow 0, \\ c_2' = \frac{s}{3}\left(\frac{dk}{ds_o} + c_2\right) \rightarrow 0, \text{ gdy } s \rightarrow 0. \end{cases}$$

Ponieważ $k_o > 0$, $\bar{c}_o \neq 0$, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $1 + c_1'$ jest dodatnie, $(k_o + c_2')$ jest też dodatnie, $(-k_o \bar{c}_o + c_3)$ tego samego znaku co $(-k_o \bar{c}_o)$, gdy $|s| \leq \delta$. Krzywa (137) będzie miała więc kształt nie wiele różny od kształtu krzywej:

$$(139) \quad x = s, \quad y = \frac{s^2}{2!} k_o, \quad z = -\frac{s^3}{3!} k_o \bar{c}_o.$$

Dla tej krzywej łatwo wyznaczyć kolejno jej rzuty na płaszczyzny xy (pł. ściśle styczną w M_o), yz (pł. normalną) i xz (pł. prostującą). Rzuty te podają rys. 3, 4 i 5 *a, b* na końcu książki. Rys. 3 daje krzywą:

$$(140) \quad x = s, \quad y = \frac{s^2}{2!} k_o, \quad z = 0 \quad \left(y = \frac{x^2}{2} k_o \right).$$

gdy s przechodzi od wartości ujemnych przez zero do wartości dodatnich, to x ma podobną zmianę znaku i wartości, ale y jest stale dodatnie, zresztą rzut ten jest parabolą.

Wyobraźmy sobie obserwatora, który stoi na płaszczyźnie xy , kierunek od stóp do głów ma być zgodny z kierunkiem osi z i niech patrzy w kierunku osi y na krzywą (niech stopy spoczywają na ujemnej pół osi y i dość daleko od początku układu); obserwator ten zobaczy krzywą w postaci jej rzutu na płaszczyznę xz (rys. 5 *a*, *b*):

$$(140) \quad x = s, \quad y = 0, \quad z = -\frac{s^3}{6} k_o \bar{c}_o.$$

Gdy $\bar{c}_o > 0$, zobaczy obserwator krzywą rys. 5 *a*, gdy zaś $\bar{c}_o < 0$, krzywą rys. 5 *b*; strzałki na rys. oznaczają kierunek poruszającego się po krzywej punktu, gdy s wzrasta od wartości ujemnych przez zero do wartości dodatnich. Krzywa C , której rzut na pł. xz (prostującą) przedstawia rys. 5 *a*, zowie się lewoskrętną w otoczeniu punktu M_o ($\bar{c}_o > 0$); krzywa C , której rzut na pł. xz (prostującą) przedstawia rys. 5 *b*, zowie się prawoskrętną w otoczeniu punktu M_o ($\bar{c}_o < 0$). *Gdy więc $\bar{c}_o > 0$, to krzywa jest w otoczeniu punktu M_o lewoskrętną, gdy zaś $\bar{c}_o < 0$, to jest prawoskrętną.*

§ 14. Ostateczne wyróżnienie układu ruchomego. Nawiazujemy do II § 7 i zachowujemy oznaczenia tam przyjęte. Z pomiędzy układów ruchomych x_1, x_2, x_3 wyróżniliśmy w stosunku do krzywej C ten, którego początek porusza się po krzywej C z prędkością 1 i którego oś x_1 schodzi się ze styczną skierowaną krzywej w początku układu. Osie x_2, x_3 nie zostały w II § 7 wyróżnione, czynimy to obecnie, możemy bowiem nadać im położenie wyróżnione. Zakładając, że C spełnia ($Z, 3$) i ($Z^*, 2$) w $[a, b]$, przyjmiemy normalną główną za

oś x_2 , a binormalną za oś x_3 w punkcie krzywej, w którym znajduje się początek układu ruchomego. Wobec tego dostawy kierunkowe osi układu ruchomego względem osi nieruchomych będą następujące:

$$(142) \left\{ \begin{array}{c} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{array} \right| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha & \alpha^* & \alpha^{**} \\ \beta & \beta^* & \beta^{**} \\ \gamma & \gamma^* & \gamma^{**} \end{array}$$

Istnieć więc będą pochodne ciągle rzędu 1^{go} dla funkcji a_{ik} względem łuku.

Wobec tego wzory I 96 na mocy wzorów Freneta (III § 11) dają

$$(143) \left\{ \begin{array}{l} p_1 = S\alpha^{**} \frac{d\alpha^*}{ds} = S\alpha^{**} (-k\alpha - \tau\alpha^{**}) = -\tau, \\ p_2 = S\alpha \frac{d\alpha^{**}}{ds} = S\alpha \cdot \tau\alpha^* = 0, \\ p_3 = S\alpha^* \frac{d\alpha}{ds} = S\alpha^* \cdot k\alpha^* = k, \end{array} \right.$$

jeżeli odpowiednio określimy znak sumowy S . Podkreślimy wynik: *jeżeli trójkąt ruchome wzduż C ma styczną, normalną główną i binormalną krzywej C (w danym porządku!) za osie x_1, x_2, x_3 , to składowa prędkości kątowej ruchu trójkąta $p_2 = 0$. Z tego skorzystamy w IV § 3 d. Wzorem (143) można też nadać postać wektorjalną:*

$$(144) p_1 = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}, p_2 = \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{b}}{ds}, p_3 = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}.$$

Na mocy (143) wzory II 71 dają:

$$(145) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{dx_1}{ds} - kx_2 + 1, \\ v_2 = \frac{dx_2}{ds} + kx_1 + \bar{c}x_3, \quad v_3 = \frac{dx_3}{ds} - \bar{c}x_2. \end{array} \right.$$

Wzory I 120 dają równanie chwilowej osi śrubowego ruchu unoszenia:

$$(146) \left\{ \begin{array}{l} 1 - kx_2 = -\lambda \bar{c}, \quad kx_1 + \bar{c}x_3 = 0, \\ -\bar{c}x_2 = \lambda k, \quad \lambda = -\frac{\bar{c}}{k^2 + \bar{c}^2}, \end{array} \right.$$

albo w postaci rozwiązanej:

$$(147) \quad x_1 = -\sigma \bar{c}, \quad x_2 = \frac{k}{k^2 + \bar{c}^2}, \quad x_3 = \sigma k,$$

co wskazuje na to, że oś ta leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny prostującej. Z prostą, równoległą do niej, a leżącą w płaszczyźnie prostującej, zwaną linią prostującą, zapozna się czytelnik w rozdz. IV. Zauważmy, że ruch śrubowy unoszenia będzie się wzdłuż C t. zn. dla każdego punktu krzywej C redukował do czystego obrotu (t. j. bez translacji w kierunku osi ruchu śrubowego), gdy (zob. I 106) będzie $\lambda \equiv 0$, co zachodzić będzie, gdy jest $\bar{c} \equiv 0$ czyli gdy krzywa jest płaską, co zresztą intuicyjnie jest zrozumiałe.

Punkt x_1, x_2, x_3 , którego prędkości podaje (145) opisuje w R_3 krzywą C_1 , której łuk s_1 obliczymy. Otóż wektor prędkości punktu x_i ma długość równą

$\sqrt{\sum_i v_i^2}$ ale długość wektora prędkości równa się $|ds_1:dt| = |ds_1:ds|$, gdzie właśnie s_1 oznacza łuk toru opisanego przez punkt ruchomy x_i . Przyjmu-

$$(145) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{ds} - \lambda x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{ds} + \lambda x_1 + \varepsilon x_3, \quad \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{ds} - \varepsilon x_2 \end{cases}$$

Wzory (145) dają równanie chwilowej osi śrubowego ruchu unoszenia:

$$(146) \quad \begin{cases} 1 - \lambda x_2 = -\lambda \varepsilon, \quad \lambda x_1 + \varepsilon x_3 = 0, \\ -\varepsilon x_2 = \lambda \varepsilon, \quad \lambda = -\frac{\varepsilon}{\lambda^2 + \varepsilon^2} \end{cases}$$

albo w postaci rozwiązanej:

$$(147) \quad x_1 = -\sigma \varepsilon, \quad x_2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \varepsilon^2}, \quad x_3 = \sigma \lambda$$

co wskazuje na to, że osź ta leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny prostującej. Z prostą równoległą do niej, a leżąca w płaszczyźnie prostującej, zwaną linią prostującą, zapozna się czytelnik w rozdz. IV. Zauważmy, że ruch śrubowy unoszenia będzie się wzdłuż C t. zn. dla każdego punktu krzywej C redukował do czystego obrotu (λ bez translacji w kierunku osi ruchu śrubowego), gdy (zob. § 106) będzie $\lambda \neq 0$, co zachodzi będzie, gdy jest $\varepsilon \neq 0$, czyli gdy krzywa jest płaska, co znaczy istotycznie jest zwrócić uwagę:

Punkty x_1, x_2, x_3 którego prędkości podaje (145) opisuje w R_3 krzywą C_p krótki łuk s , chłozymy. Czas wektor prędkości punktu x_1 ma długość równą $\sqrt{\dot{x}_1^2}$, zaś długość wektora prędkości równa się εds , $dl = ds \varepsilon$, gdzie wielk. ε oznacza tutaj wartość opisanego przez punkt ruchomy x_1 . Przyjmijmy

$\text{Mxoi (155) str. 155.}$ Do wzoru tego ($\frac{dp}{ds} = -w_i$) dojdziemy
 i wtedy, że zadamy tylko tyle, by przerwymy:

$$(*) \quad \sum x_i w_i = p$$

była jako całość mierzalną. Wzorem punkt
 x_i tej przerwamy, dla czego jest:

$$v_1 = \frac{dx_1}{ds} + 1 - kx_2, \quad v_2 = \frac{dx_2}{ds} + kx_1 + \sqrt{k}x_3, \quad v_3 = \frac{dx_3}{ds} - kx_2$$

Punkt ten podczas ruchu trójścianowa pozostał
 w płaszczyźnie (*), więc ten punkt leży na tej
 płaszczyźnie, leży więc na niej styczna do strefy,
 a na tej stycznej leży wektor wypadkowej
 prędkości. Mamy więc

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

czyli

$$\frac{dx_1}{ds} w_1 + w_1 - kx_2 w_1 + \frac{dx_2}{ds} w_2 + kx_1 w_2 + \sqrt{k}x_3 w_2 +$$

$$+ \frac{dx_3}{ds} w_3 - \sqrt{k}x_2 w_3 = 0$$

Na mocy tego związku i wzorów (152) otrzymujemy
 wzór (155).

Mój waga. 15/6 1935.

jąc, że s_1 rośnie ze wzrostem łuku s , otrzymamy:

$$(148) \quad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\sum_i v_i^2}.$$

Rozważmy z kolei nieruchome elementy. Punkt x_i nieruchomy w R_3 będzie miał ruch pozorny wobec układu ruchomego. Kładąc w (145) składowe $v_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), otrzymujemy warunki na punkt nieruchomy:

$$(149) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{ds} - kx_2 + 1 = 0, & \frac{dx_2}{ds} + kx_1 + \bar{c}x_3 = 0, \\ \frac{dx_3}{ds} - \bar{c}x_2 = 0; \end{cases}$$

są to t. zw. *równania¹ Césaro dla nieruchomego punktu w R_3* .

Warunki na stałość wektora (co do długości i kierunku) wyprowadziliśmy w ogólnym przypadku w I § 11. Rachunek ten powtórzymy teraz z łatwością wskutek wyróżnienia układu ruchomego. Wzory I (125), (126) i teraz napisać należy. Wzór I (125) podaje rozkład wektora \mathbf{w} w kierunku osi układu ruchomego; ale $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$, więc na mocy III § 11 mamy:

$$(150) \quad \left\{ \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = k\mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -(k\mathbf{e}_1 + \bar{c}\mathbf{e}_3), \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \bar{c}\mathbf{e}_2, \right.$$

co zresztą jest zgodne z I 129, 103 i III 143. Wobec tego otrzymamy:

¹ Warunki te odpowiadają t. zw. różniczkowym warunkom identyczności w uogólnionej geometrii naturalnej. Zob. Kowalewski: Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen (1931).

$$(151) \left\{ \frac{d\mathbf{w}}{ds} = \sum_{i=1}^3 \frac{dw_i}{ds} \mathbf{e}_i - kw_2 \mathbf{e}_1 + (kw_1 + \tau w_3) \mathbf{e}_2 - \tau w_2 \mathbf{e}_3. \right.$$

Stąd wynika, że wektor niezmienny co do długości i kierunku spełnia warunki:

$$(152) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_1}{ds} - kw_2 = 0, \quad \frac{dw_2}{ds} + kw_1 + \tau w_3 = 0, \\ \frac{dw_3}{ds} - \tau w_2 = 0. \end{array} \right.$$

Są to równania I 133 przy uwzględnieniu III 143. Stąd już łatwo podać warunki, by prosta lub płaszczyzna były nieruchome. Według I 72 równaniu prostej można nadać postać:

$$(153) \left\{ \begin{array}{l} X_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 + \sigma a_1, \quad X_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 + \sigma a_2, \\ X_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 + \sigma a_3, \end{array} \right.$$

gdzie \mathbf{a} jest jednostkowym wektorem, leżącym na prostej, nadto \mathbf{a} , \mathbf{b} dają Plückerowskie współrzędne prostej, tedy $b_1 = x_2^{\circ} a_3 - x_3^{\circ} a_2$, $b_2 = x_3^{\circ} a_1 - x_1^{\circ} a_3$, $b_3 = x_1^{\circ} a_2 - x_2^{\circ} a_1$, przyczem x_i° oznacza punkt na prostej dowolnie obrany. Otóż (149) i (152) dadzą warunki nieruchomości punktu x_i° i wektora \mathbf{a} ; po łatwym rachunku otrzymuje się:

$$(154) \left\{ \begin{array}{l} \frac{db_1}{ds} = \frac{dx_2^{\circ}}{ds} a_3 + x_2^{\circ} \frac{da_3}{ds} - \frac{dx_3^{\circ}}{ds} a_2 - x_3^{\circ} \frac{da_2}{ds} = kb_2, \\ \frac{db_2}{ds} = a_3 - kb_1 + \tau b_3, \quad \frac{db_3}{ds} = \tau b_2 - a_2. \end{array} \right.$$

Wreszcie podajmy warunki, by płaszczyzna była nieruchomą. Równanie płaszczyzny napiszemy w postaci $\sum_i X_i w_i = p$, gdzie \mathbf{w} oznacza stały wektor

niezerowy, nadto skalar $p = \sum_i x_i^o w_i$, przyczem x_i^o daje punkt na płaszczyźnie, dowolnie obrany. Płaszczyzna będzie nieruchomą (a więc będzie miała ruch pozorny względem układu nieruchomego), gdy wektor \mathbf{w} będzie nieruchomym czyli gdy będą spełnione wzory (152), ponadto x_i^o ma być punktem nieruchomym; wobec tego otrzymamy:

$$(155) \quad \frac{dp}{ds} = \sum_i \left(\frac{dx_i^o}{ds} w_i + x_i^o \frac{dw_i}{ds} \right) = -w_1.$$

Uwaga. Dla elementów nieruchomych istnieją ciągłe pochodne we wzorach (149), (152), (154), (155), gdyż krzywa spełnia warunki $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$. Jeżeli bowiem punkt nieruchomy ma współrzędne x_i względem układu ruchomego, a x_i^* względem układu nieruchomego, to jest:

$$(156) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} (x_k^* - a_{k4}) \quad (i = 1, 2, 3),$$

przyczem a_{14}, a_{24}, a_{34} są to współrzędne początku układu ruchomego, a więc punktu krzywej w układzie nieruchomym, a_{ki} ($i, k = 1, 2, 3$) daje tabelka (142); a_{i4} mają ciągłe pochodne rzędu 3^{go} , a pozostałe a_{ik} mają pochodne ciągłe rzędu 1^{go} (według wzorów Freneta), x_i^* są stałe, więc x_i mają pochodne rzędu 1^{go} ciągłe. Podobny dowód przeprowadzi czytelnik dla \mathbf{w} , \mathbf{b} i p .

Wzory obecnego paragrafu (zwłaszcza wzory 145) pozwalają rozwiązać zagadnienie następujące: *dana krzywa C , spełniająca $(Z, 3)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ na tük s ; znaleźć własności (geometryczne) ruchu trójkramienia $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, ruchomego wzdłuż C .* Oczy-

wiście wzory obecnego paragrafu wraz z wzorami Freneta pozwalają niekiedy rozwiązać zagadnienie odwrotne, bardziej interesujące: z *pewnych (geometrycznych) własności ruchu trójrarmienia wyznaczyć krzywą C* . Zagadnieniami takimi zajmować się będziemy w rozdz. IV.

Uwaga. Współrzędne x_i punktu P względem ruchomego układu zależą od położenia początku M układu na C i od orientacji trójrarmienia \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , a więc zależą od tego, co często w geometrycznych rozważaniach zowie się „elementem” krzywej rzędu 2^{go} (punkt wraz z trójrarmieniem), należącym do punktu M . Można więc uważać x_i za współrzędne punktu P względem pewnego „elementu” krzywej (elementu rzędu 2^{go}, przyczem podkreślamy, że termin dopieroco został użyty w innem znaczeniu, niż w niniejszej książce). Nietrudno zauważyć, że jest

$$x_1 = \mathbf{MP} \times \mathbf{t}, \quad x_2 = \mathbf{MP} \times \mathbf{n}, \quad x_3 = \mathbf{MP} \times \mathbf{b}.$$

Jeżeli więc krzywą C i punkt P poddamy temu samemu ruchowi euklidesowemu, to się x_1, x_2, x_3 nie zmieniają. Widzimy zatem, że x_i są trzema niezmiennikami punktu P i elementu rzędu 2^{go}, wybranego na krzywej C .

§ 15. Dwa ruchome układy. Ze względu na ciąg dalszy (IV § 3 *d*) oprócz dotychczasowego trójrarmienia T (x_1, x_2, x_3), którego początek M posuwa się po krzywej C , weźmiemy złączone z niem trójramię $'T$ (rys. 6 *a, b*) o początku $'M$, leżącym na x_2 ; nadto niech nowa oś $'x_2$ leży na dawnej x_2 , może być zgodnie z x_2 skierowana (rys. 6 *a*) lub niezgodnie (rys. 6 *b*). Niech oś $'x_1$ tworzy z osią x_1 kąt $\omega = (\widehat{x_1 x_1})$, liczony w kierunku obrotów na płą-

szereźnic (x_1, x_2) . [a więc od x_2 ku x_1 po krzywej przeciwnie]. Ten kąt wprost może być zaliczony od początku punktu M na C , a więc może być funkcją tylko x krzywej C , oczywiście z ciągłą pochodną względem x . Łatwo stwierdzić używając równości, że jest to prawdziwy wniosek z pierwszej:

$$(\widehat{x_1, x_2}) = \omega; (\widehat{x_2, x_1}) = \omega + 2\pi \frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$(157) \quad (\widehat{x_1, x_2}) = \omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$(\widehat{x_2, x_1}) = \omega + 2\pi \left[n + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \right]$$

gdzie $n = +1$, gdy x_2 i x_1 są zgodnie skierowane, a $n = -1$, gdy x_2 i x_1 są niezgodnie skierowane. Otrzymamy:

$$(158) \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \cos \omega - e x_2 \sin \omega, & x_2 = e x_1 + x_2 \\ x_2 = x_1 \sin \omega + e x_1 \cos \omega, \end{cases}$$

gdzie e oznacza miarę wektora $\vec{M} \vec{M}$ na x_2 czyli $\vec{M} \vec{M} = e e_2$.

Ponieważ współrzędne punktu P względem układu nieruchomego są $x_i^* = a_0 + \sum a_n x_n$, więc wstawiając tu (158) otrzymamy: $x_i^* = e a_0 + \sum a_n' x_n$,

gdzie jest:

$$(159) \quad \begin{cases} a_0' = e a_0, & a_1' = a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega, \\ a_2' = e a_2, & a_3' = a_3 \cos \omega - a_2 \sin \omega, \\ & (i=1, 2, 3). \end{cases}$$

Zamiast e można wprowadzić kąt α . Wektor e_2 jest jedynkowy, zatem $e = \cos \alpha$.

wielkie wzory obecnego paragrafu wraz z wzorami Freneta pozwalają niekiedy rozwiązać zagadnienie odwrotne, bardziej interesujące: z *wzanych (geometrycznych) własności ruchu trójramiennia wyznaczyć krzywą C* . Zagadnieniami takimi zajmować się będziemy w rozdz. IV.

Uwaga. Współrzędne w punktu P względem ruchomego układu zależą od położenia początku M układu na C i od orientacji trójramiennia i, n, b , a więc zależą od tego, co często w geometrycznych rozważaniach zowie się „elementem” krzywej rzędu 2^{go} (punkt wraz z trójramieniem), należącym do punktu M . Można więc uważać x_i za współrzędne punktu P względem pewnego „elementu” krzywej (elementu rzędu 2^{go} , przetoż podkreślamy, że termin dopieroco został użyty w innym znaczeniu, niż w niniejszej książce). Nie trudno zauważyć, że jest

$$x_1 = MP \times i, \quad x_2 = MP \times n, \quad x_3 = MP \times b.$$

Jeżeli więc krzywą C i punkt P poddamy temu samemu ruchowi euklidesowemu, to się x_1, x_2, x_3 nie zmieniają. Widzimy zatem, że x_i są trzema niezmiennikami punktu P i elementu rzędu 2^{go} , wybranego na krzywej C .

§ 15. Dwa ruchome układy. Ze względu na ciąg dalszy (IV § 3 d) oprócz dotychczasowego trójramiennia $T(x_1, x_2, x_3)$, którego początek M porusza się po krzywej C , ważniemi sążnionemi z nim trójramię T' (rys. 6 a, b) o początku M' , leżącym na x_1 ; osie tego trójramiennia x'_1 leży na dawnej x_2 , może być zgodna z x_3 skierowana (rys. 6 a) lub przeciwnie (rys. 6 b). Niech o'_1 tworzy z osią x_1 kąt α (rys. 6 a) i niech o'_2 tworzy z osiami x_1 i x_2 kąty β i γ (rys. 6 b).

szczyźnie (x_1, x_3) [a więc od x_3 ku x_1 po kącie prostym]. Ten kąt ω może być zależnym od położenia punktu M na C , a więc może być funkcją łuku s krzywej C , oczywiście z ciągłą pochodną względem s . Łatwo stwierdzi czytelnik równości, będące prostym wnioskiem z pierwszej:

$$(157) \left\{ \begin{array}{l} (\widehat{x_1, x_1}) = \omega; (\widehat{x_3, x_1}) = \omega + \varepsilon \frac{\pi}{2} + 2n\pi; \\ (\widehat{x_1, x_3}) = \omega - \frac{\pi}{2} + 2n'\pi, \\ (\widehat{x_3, x_3}) = \omega + 2n''\pi + \varepsilon \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \end{array} \right.$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy x_2 i $'x_2$ są zgodnie skierowane, a $\varepsilon = -1$, gdy x_2 i $'x_2$ są niezgodnie skierowane. Otrzymamy¹:

$$(158) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 'x_1 \cos \omega - \varepsilon 'x_3 \sin \omega, \quad x_2 = \varepsilon 'x_2 + u, \\ x_3 = 'x_1 \sin \omega + \varepsilon 'x_3 \cos \omega, \end{array} \right.$$

gdzie u oznacza miarę wektora $\mathbf{M}'\mathbf{M}$ na x_2 czyli² $\mathbf{M}'\mathbf{M} = u\mathbf{e}_2$.

Ponieważ współrzędne punktu P względem układu nieruchomego są $x_i^* = a_{i4} + \sum_k a_{ik} x_k$, więc wsta-

wiając tu (158) otrzymamy: $x_i^* = 'a_{i4} + \sum_k 'a_{ik} 'x_k$,

gdzie jest:

$$(159) \left\{ \begin{array}{l} 'a_{i4} = a_{i4} + u a_{i2}, \quad 'a_{i1} = a_{i1} \cos \omega + a_{i3} \sin \omega, \\ 'a_{i2} = \varepsilon a_{i2}, \quad 'a_{i3} = \varepsilon (a_{i3} \cos \omega - a_{i1} \sin \omega), \\ (i = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

¹ Zamiast ω można wprowadzić kąt $\varepsilon\omega$.

² Wektor \mathbf{e}_2 jest jednostkowym, leżącym na osi x_2 .

Założmy, że u zależy od M i jako funkcja łuku s krzywej C ma ciągłą pochodną w $[s_1, s_2]$. Wprowadźmy wielkości $'p_i$ ($i = 1, 2, 3$), obliczone analogicznie do I 96, oraz $'\xi_j$ analogicznie do I 99. Z łatwością stwierdzamy, że jest na mocy (159) i I 3:

$$(160) \quad \left\{ \begin{array}{l} 'p_1 = \sum_i 'a_{i3} \frac{d'a_{i2}}{dt} = \sum_i \varepsilon (a_{i3} \cos \omega - a_{i1} \sin \omega) \cdot \\ \quad \cdot \varepsilon \frac{da_{i2}}{dt} = p_1 \cos \omega + p_3 \sin \omega, \\ 'p_2 = \varepsilon \left(p_2 - \frac{d\omega}{ds} \right), \quad 'p_3 = \varepsilon (p_3 \cos \omega - p_1 \sin \omega), \\ '\xi_1 = \xi_1 \cos \omega + \xi_3 \sin \omega - u p_3 \cos \omega + u p_1 \sin \omega, \\ \quad '\xi_2 = \varepsilon \left(\xi_2 + \frac{du}{ds} \right), \\ '\xi_3 = \varepsilon [(u p_3 - \xi_1) \sin \omega + (u p_1 + \xi_3) \cos \omega]. \end{array} \right.$$

We wzorach tych, które wyprowadziliśmy w przypadku ogólnym, połączmy $p_1 = -\tau$, $p_2 = 0$, $p_3 = k$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \xi_3 = 0$, a otrzymamy:

$$(161) \quad \left\{ \begin{array}{l} 'p_1 = k \sin \omega - \tau \cos \omega; \quad 'p_2 = -\varepsilon \frac{d\omega}{ds}, \\ 'p_3 = \varepsilon (k \cos \omega + \tau \sin \omega), \\ \xi_1 = (1 - uk) \cos \omega - u \tau \sin \omega, \\ '\xi_2 = \varepsilon \frac{du}{ds}, \quad '\xi_3 = \varepsilon [(uk - 1) \sin \omega - u \tau \cos \omega]. \end{array} \right.$$

Jeżeli np. $\omega = \text{Const}$ lub $u = \text{Const}$, to wzory te w dalszym ciągu się upraszczają, zresztą zob. IV § 3 d.

Rozdział IV.

Dalsze zagadnienia.

§ 1. Rozważania graniczne. W II § 2, III § 3, § 5, § 10 i § 12 podaliśmy kilka przykładów t. zw. rozważań granicznych, obecnie podamy dalsze:

a) *Płaszczyzna styczna.* Na krzywej C , spełniającej $(Z, 3)$ i $(Z^*, 1)$ w $[a, b]$ obierzmy punkt $M_0(t_0)$ i przezeń płaszczyznę styczną π , (t. zn. płaszczyznę przez styczną punktu M_0), a więc o równaniu:

$$(1) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{u} = 0,$$

gdzie \mathbf{u} oznacza wektor $\neq \mathbf{0}$, taki, że jest

$$(2) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{r}_0' = 0 \dots \left(\mathbf{r}_0' = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_{t_0} \right).$$

Obliczmy odległość δ punktu $M(t)$ krzywej C od π . Jest, jak wiadomo z geometrii analitycznej:

$$(3) \quad \delta = \frac{|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{u}|}{\sqrt{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}}.$$

Rozwijając \mathbf{r} według Peany aż do wyrazów 3^{go} stopnia, otrzymujemy na mocy (2)

$$(4) \quad \delta = \frac{\left| \frac{(t-t_0)^2}{2!} \mathbf{r}_0'' \times \mathbf{u} + \frac{(t-t_0)^3}{3!} (\mathbf{r}_0''' \times \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{u}) \right|}{\sqrt{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}},$$

gdzie $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, gdy $t \rightarrow t_0$. Widocznie należy odróżnić dwa przypadki: albo jest $\mathbf{r}_0'' \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ albo jest

$$(5) \quad \mathbf{r}_0'' \times \mathbf{u} = 0.$$

W pierwszym przypadku δ jest nieskończenie małą rzędu 2^{go} względem $(t - t_0)$. W drugim zaś przypadku mamy:

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{(t-t_0)^3} = \frac{1}{3!} \frac{|\mathbf{r}_o''' \times \mathbf{u}|}{\sqrt{\mathbf{u} \times \mathbf{u}}},$$

a więc δ jest nieskończenie małą rzędu conajmniej 3^{go} .

Aby taką płaszczyznę π znaleźć, trzeba znaleźć \mathbf{u} z równań (2) i (5). W myśl I § 5 *f* odróżnimy dwa przypadki: albo te równania są od siebie zależne albo niezależne. Pierwszy przypadek zachodzi, gdy $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' = \mathbf{0}$, wtedy $(Z^*, 2)$ nie jest spełnione, punkt M_o zowie się osobliwym (krzywej lub jej przedstawienia parametrycznego). [Przypadek ten zachodzi, gdy albo (5) jest identycznie co do \mathbf{u} spełnione, a więc $\mathbf{r}_o'' = \mathbf{0}$, albo gdy (5) jest następstwem równania (2)].

Drugi przypadek t.j. przypadek niezależności równań (2) i (5) zachodzi, gdy jest $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' \neq \mathbf{0}$, co jest zgodne z $(Z^*, 2)$; stosując I § 5 *f* otrzymujemy $\mathbf{u} = \sigma (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'')$, gdzie skalar $\sigma \neq 0$, bo ma być $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Przy tej wartości na \mathbf{u} płaszczyzna π jest płaszczyzną ściśle styczną. Temsamem znaleźliśmy pewną własność płaszczyzny ściśle stycznej, którą czytelnik z łatwością wysłowi.

b) Płaszczyznę ściśle styczną można określić inaczej, niż w III § 3. Najpierw udowodnimy tw. pomocnicze: przy założeniach $(Z, 2)$ i $(Z^, 2)$ w $[a, b]$, istnieje dla każdego t_o z $[a, b]$ liczba $\delta_o > 0$ taka, że żadne trzy różne punkty t_1, t_2, t_3 z przedziałów $[a, b]$, $[t_o - \delta_o, t_o + \delta_o]$ nie leżą na jednej prostej.*

Dla dowodu niewprost założymy istnienie nieskończonego ciągu trójek liczb t_1^v, t_2^v, t_3^v , które to trójki dla każdego $v = 1, 2, \dots$ dają trzy punkty $M_1^v(t_1^v), M_2^v(t_2^v), M_3^v(t_3^v)$ krzywej, leżące na jednej prostej l_v , zależnej od v . Możemy założyć, że jest

$t_1^v < t_2^v < t_3^v$; nadto ma być $t_1^v \rightarrow t_0$, $t_3^v \rightarrow t_0$, gdy $v \rightarrow \infty$.

Niech: $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2^v + \sigma (\mathbf{r}_2^v - \mathbf{r}_1^v)$ będzie równaniem prostej przez $M_1^v M_2^v$; z założenia istnieć będzie liczba σ , taka, że jest:

$$(7) \quad \mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}_2^v = \sigma_v (\mathbf{r}_2^v - \mathbf{r}_1^v) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

skąd wynika, że

$$(8) \quad (\mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}_2^v) \wedge (\mathbf{r}_2^v - \mathbf{r}_1^v) = \mathbf{0} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Wprowadźmy wektor:

$$(9) \quad \mathbf{u}^v(t) = (\mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}(t)) \wedge (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_1^v).$$

Stąd i z (8) wynika, że jest

$$(10) \quad \mathbf{u}^v(t_1^v) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^v(t_2^v) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}^v(t_3^v) = \mathbf{0}.$$

Obliczmy jeszcze pochodne:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{v'}(t) = -\mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1^v) + (\mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}) \wedge \mathbf{r}' = \\ = (\mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}_1^v) \wedge \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{u}^{v''}(t) = (\mathbf{r}_3^v - \mathbf{r}_1^v) \wedge \mathbf{r}''(t). \end{cases}$$

Oznaczmy przez u_1^v, u_2^v, u_3^v miary składowych wektora \mathbf{u}^v w kierunku osi x, y, z ; na mocy (10) mamy:

$$u_1^v(t_1^v) = 0, \quad u_1^v(t_2^v) = 0, \quad u_1^v(t_3^v) = 0,$$

skąd na mocy tw. Rolle'go wynika, że istnieją liczby τ_1^v, σ_1^v o własności

$$(12) \quad \begin{cases} t_1^v < \tau_1^v < t_2^v < \sigma_1^v < t_3^v, \quad u_1^{v'}(\tau_1^v) = 0, \\ u_1^{v''}(\sigma_1^v) = 0. \end{cases}$$

Z (12) wynika jeszcze, że istnieje liczba π_1^v o własności:

$$\tau_1^v < \pi_1^v < \sigma_1^v, \quad u_1^{v''}(\pi_1^v) = 0,$$

przez drugą pochodną $u_1^{v''}$ należy obliczyć z (11); jest więc

$$(13) \quad \begin{vmatrix} y_3^v - y_1^v, z_3^v - z_1^v \\ y''(\pi_1^v), z''(\pi_1^v) \end{vmatrix} = 0;$$

pierwszy wiersz przekształcamy na mocy rozwinięcia Peany aż do wyrazów 1^{go} rzędu, poczem wyznacznik upraszczamy przez $t_3^v - t_1^v > 0$; otrzymujemy:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} y'(t_1^v) + \eta, z'(t_1^v) + \zeta \\ y''(\pi_1^v), z''(\pi_1^v) \end{vmatrix} = 0 \quad (v=1, 2, \dots).$$

Gdy $v \rightarrow \infty$, to $t_3^v - t_1^v \rightarrow 0$, więc $\eta \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$; wobec czego (14) daje

$$(15) \quad \begin{vmatrix} y_o', z_o' \\ y_o'', z_o'' \end{vmatrix} = 0,$$

gdyż także $\pi_1^v \rightarrow t_o$. Podobną drogą otrzymamy:

$$(16) \quad \begin{vmatrix} z_o', x_o' \\ z_o'', x_o'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_o', y_o' \\ x_o'', y_o'' \end{vmatrix} = 0;$$

(15) i (16) dają więc $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' = \mathbf{0}$ wbrew (Z^* , 2). Tę samą tw. udowodnione.

Obecnie podamy określenie płaszczyzny ściśle stycznej do C w M_o , odmienne, niż w III § 3, mianowicie definiujemy ją jako płaszczyznę, która jest graniczną płaszczyzny π , przechodzącej przez wspomniane punkty M_1, M_2, M_3 krzywej, gdy $M_i \rightarrow M_o$ ($i = 1, 2, 3$).

Wobec tw. pomocniczego płaszczyzna π będzie określona, gdy M_i są dość bliskie M_o . Równanie płaszczyzny π będzie miało postać:

$$(17) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)] = 0,$$

tw. pomocnicze bowiem orzeka, że jest $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge \wedge (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \neq \mathbf{0}$. Weźmy określony (zresztą dowolny) punkt płaszczyzny π , wyznaczony przez \mathbf{R} , spełniającej więc (17) i utwórzmy skalar:

$$(18) \quad F(t) = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_2)].$$

Widoczne, że jest $F(t_1) = 0$, $F(t_2) = 0$, a na mocy (17) także $F(t_3) = 0$. Możemy znów przyjąć, że jest $t_1 < t_2 < t_3$. Na mocy tw. Rolle'go istnieć będą liczby τ, σ, ρ o własnościach:

$$t_1 < \tau < t_2 < \sigma < t_3; \quad F'(\tau) = 0, \quad F'(\sigma) = 0, \\ \tau < \rho < \sigma, \quad F''(\rho) = 0.$$

Ale jest:

$$F'(t) = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1) \wedge \mathbf{r}'], \\ F''(t) = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge \mathbf{r}''].$$

Dla każdego więc punktu płaszczyzny π , wyznaczonego przez \mathbf{R} , istnieje liczba ρ taka, że jest

$$(19) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \wedge \mathbf{r}''(\rho)] = 0.$$

Rozwijając według Peany \mathbf{r}_2 aż do wyrazów rzędu 1^{go} i skracając przez $t_2 - t_1 \neq 0$, otrzymujemy zamiast (19):

$$(20) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}_1) \times [(\mathbf{r}_1' + \mathbf{a}) \wedge \mathbf{r}''(\rho)] = 0,$$

przyczem $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, $\rho \rightarrow t_0$, gdy $t_1 \rightarrow t_0$ i $t_3 \rightarrow t_0$. Obok (20) weźmy płaszczyznę π_0 o równaniu:

$$(21) \quad (\mathbf{R}^* - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0'') = 0;$$

(jest to płaszczyzna ściśle styczna według III § 3); wykażemy, że jest granicznym położeniem płaszczyzny π . Jeżeli przez \mathbf{e}_i oznaczymy wektor jednostkowy, leżący na osi x_i i z nią zgodnie skierowany, to $(\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0'') \times \mathbf{e}_i$ jest miarą składowej wektora $\mathbf{r}_0' \wedge \mathbf{r}_0''$

wzdłuż osi x_i . Ponieważ jest $\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'' \neq \mathbf{0}$, więc istnieje wskaźnik (co najmniej jeden) i , dla którego jest

$$(22) \quad (\mathbf{r}_o' \wedge \mathbf{r}_o'') \times \mathbf{e}_i = |\mathbf{r}_o', \mathbf{r}_o'', \mathbf{e}_i| \neq 0,$$

pozostałe dwie poza i z liczb 1, 2, 3 oznaczmy przez j, l . Z powodu ciągłości i (22) istnieje $\delta > 0$ takie, że jest:

$$(23) \quad [(\mathbf{r}_1' + \mathbf{a}) \wedge \mathbf{r}''(\rho)] \times \mathbf{e}_i \neq 0,$$

gdy $|t_1 - t_o| \leq \delta$, $|t_3 - t_o| \leq \delta$. Wobec (22) i (23) można (20) rozwiązać na X_i , a (21) na X_i^* ; będzie:

$$(24) \quad \begin{cases} X_i = \lambda X_j + \mu X_l + \nu; \\ X_i^* = \lambda_o X_j^* + \mu_o X_l^* + \nu_o, \end{cases}$$

przyczem — jak łatwo widzieć — jest $\lambda \rightarrow \lambda_o$, $\mu \rightarrow \mu_o$, $\nu \rightarrow \nu_o$, gdy $t_1 \rightarrow t_o$, $t_3 \rightarrow t_o$. Otóż weźmy na π punkt P o współrzędnych X_i, X_j, X_l , a na π_o punkt P^* o współrzędnych $X_j^* = X_j, X_l^* = X_l$, a X_i^* ma być takie, jakie wypada z (24₂). Nie zmieniając X_j, X_l , otrzymamy; $X_i \rightarrow X_i^*$, gdy $t_1 \rightarrow t_o, t_3 \rightarrow t_o$. Ale i odwrotnie nietrudno czytelnik wykaże, że każdy punkt płaszczyzny π_o jest granicznym położeniem odpowiedniego punktu na π . Tę samą tw. udowodnione.

Przy określeniu płaszczyzny ściśle stycznej, podanem w III § 3, obecne rozważania orzekają pewną własność płaszczyzny ściśle stycznej.

c) Wyznamy rząd odległości punktu krzywej od stycznej. Niech krzywa C spełnia (Z, 2) i (Z*, 2) w $[s_1, s_2]$ na łuk s . Styczna p_o w $M_o(s_o)$ ma równanie $\mathbf{R} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{t}_o$; by znaleźć odległość δ punktu $M(s)$ na C od stycznej w M_o , przeprowadźmy płaszczyznę π przez M , prostopadłą do p_o ; jej równanie będzie $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \mathbf{t}_o = 0$; punkt P przecięcia prostej p_o i płaszczyzny π oznaczmy, gdy znaj-

dzienny σ , z równości $(r_1 + \sigma L_1 - r_2) \times L_2 = 0$; stąd otrzymujemy się $\sigma = (r_2 - r_1) \times L_2$. Odległość δ jest długością wektora $MP = r_2 + \sigma L_2 - r_1 = \sigma L_2 - (r_1 - r_2)$, więc na mocy 1.77

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \{ \sigma L_2 - (r_1 - r_2) \} \times \{ \sigma L_2 - (r_1 - r_2) \} = \\ &= \sigma^2 - 2\sigma^2 + (r_1 - r_2) \times (r_2 - r_1) = \\ &= [(r_1 - r_2) \times (r_2 - r_1)] \cdot [L_2 \times L_2] - [(r_1 - r_2) \times L_2]^2 = \\ &= [(r_1 - r_2) \wedge L_2] \times [(r_2 - r_1) \wedge L_2]. \end{aligned}$$

Wynik ten można było wprost napisać, bo $MP = MM_0 \cdot \sin \varphi$, gdzie φ oznacza kąt między p i wektorem MM_0 . Rozwijając r według Peana'a aż do wyrazów rzędu 2^{go} mamy na mocy III 67 i 101:

$$(23) \quad r - r_0 = (s - s_0)t_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2!} [k_2 u_2 + c],$$

wskutek czego jest:

$$\begin{aligned} (r - r_0) \wedge L_2 &= \frac{(s - s_0)^2}{2!} [-L_2 k_2 + u_2 \wedge c], \\ \delta &= \frac{(s - s_0)^2}{2} [k_2 + c]. \end{aligned}$$

przeżyciem $c \rightarrow 0$, gdy $s \rightarrow s_0$. Stąd wynika, że

$$(24) \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\delta}{(s - s_0)^2} = \frac{1}{2} k_2 > 0,$$

a więc δ jest nieskończenie małą rzędu 2^{go} względem $(s - s_0)$.

d) *Kula ściśle styczna.* Weźmy pod uwagę zbiór \mathcal{Z} kul przechodzących przez punkt $M_0(z_0)$ krzywej C , leżących w płaszczyźnie $(Z, 4)$ i $(Z^*, 2)$ w (s_0, s_0) na linii σ i stycznych do C w M_0 (co znaczy, że kule będą styczne do stycznej p krzywej C w M_0). Stąd wynika, że środki kul zbioru \mathcal{Z} leżą na prostej

wadził oś α . Ponieważ jest $r_1' \wedge r_2' \neq 0$, więc istnieje wskaźnik (co najmniej jeden) i , dla którego jest

$$(22) \quad (r_1' \wedge r_2') \times e_i = |r_1', r_2', e_i| \neq 0,$$

pozostałe dwie poza i z liczb 1, 2, 3 oznaczymy przez j, k . Z powodu ciągłości i (22) istnieje $\delta > 0$ takie, że jest:

$$(23) \quad [(r_1' + a) \wedge r_2'(\rho)] \times e_i \neq 0,$$

gdy $|t_1 - t_0| < \delta$, $|t_2 - t_0| < \delta$. Wobec (22) i (23) można (20) rozwiązać na X_0 a (21) na X_0^* ; będzie:

$$(24) \quad \begin{cases} X_0 = \lambda X_j + \mu X_k + v; \\ X_0^* = \lambda_0 X_j^* + \mu_0 X_k^* + v_0. \end{cases}$$

przy czym — jak łatwo widzieć — jest $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $\mu \rightarrow \mu_0$, $v \rightarrow v_0$, gdy $t_1 \rightarrow t_0$, $t_2 \rightarrow t_0$. Otóż weźmy na π punkt P o współrzędnych X_0, X_j, X_k , a na π_0 punkt P^0 o współrzędnych X_0^*, X_j^*, X_k^* , a X_0^* ma być takim, jakim wypada z (24). Nie zmieniając X_j, X_k otrzymamy: $X_0 \rightarrow X_0^*$, gdy $t_1 \rightarrow t_0$, $t_2 \rightarrow t_0$. Ale i odwrotnie niestrudno czytelnik wykaże, że każdy punkt płaszczyzny π_0 jest granicznym położeniem odpowiedniego punktu na π . Temsamem (w udowodnieniu

Przy określeniu płaszczyzny ściśle stycznej, podanem w III § 3, obecne rozważania orzekają pewną własność płaszczyzny ściśle stycznej.

e) Wyznamy rząd odległości punktu krzywej od stycznej. Niech krzywa C spełnia (Z, Σ) i (N^*, Σ) w $\{s_1, s_2\}$ na łuk α . Styczna p_0 w $M_0(s_0)$ ma równanie $R = r_0 + \alpha L$; by znaleźć odległość δ punktu $K(x)$ na C od stycznej w M_0 , przeprowadzamy płaszczyznę α przez M , prostopadłą do p_0 ; jej równanie będzie $(R - r) \times L = 0$; punkt P przecięcia prostej α z krzywą C znajdziemy, gdy znaj-

dziemy σ z równości $(\mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{t}_o - \mathbf{r}) \times \mathbf{t}_o = 0$; otóż otrzymuje się $\sigma = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{t}_o$. Odległość δ jest długością wektora $\mathbf{MP} = \mathbf{r}_o + \sigma \mathbf{t}_o - \mathbf{r} = \sigma \mathbf{t}_o - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$, więc na mocy I 77

$$\begin{aligned} \delta^2 &= [\sigma \mathbf{t}_o - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)] \times [\sigma \mathbf{t}_o - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)] = \\ &= \sigma^2 - 2\sigma^2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = \\ &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)] \cdot [\mathbf{t}_o \times \mathbf{t}_o] - [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{t}_o]^2 = \\ &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_o] \times [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_o]. \end{aligned}$$

Wynik ten można było wprost napisać, bo $MP = MM_o \cdot \sin \varphi$, gdzie φ oznacza kąt między p_o i wektorem MM_o . Rozwijając \mathbf{r} według Peany aż do wyrazów rzędu 2^{go} mamy na mocy III 67 i 104:

$$(25) \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_o = (s - s_o) \mathbf{t}_o + \frac{(s - s_o)^2}{2!} [k_o \mathbf{n}_o + \mathbf{a}],$$

wskutek czego jest:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \wedge \mathbf{t}_o &= \frac{(s - s_o)^2}{2!} [-k_o \mathbf{b}_o + \mathbf{a} \wedge \mathbf{t}_o], \\ \delta &= \frac{(s - s_o)^2}{2} [k_o + c], \end{aligned}$$

przyczem $c \rightarrow 0$, gdy $s \rightarrow s_o$. Stąd wynika, że:

$$(26) \quad \lim_{s \rightarrow s_o} \frac{\delta}{(s - s_o)^2} = \frac{1}{2} k_o > 0,$$

a więc δ jest nieskończenie małą rzędu 2^{go} względem $(s - s_o)$.

d) *Kula ściśle styczna.* Weźmy pod uwagę zbiór (Z) kul, przechodzących przez punkt $M_o(s_o)$ krzywej C , [spełniającej $(Z, 4)$ i $(Z^*, 2)$ w $[s_1, s_2]$ na łuk s] i stycznych do C w M_o , [co znaczy, że kule będą styczne do stycznej p_o krzywej C w M_o]. Stąd wynika, że środki kul zbioru Z leżą na płaszczy-

źnie π_o normalnej do C w M_o . Posługując się metodą wektorjalną, spostrzegamy, że środek kuli ze zbioru Z wyznaczony będzie przez wektor:

$$(27) \quad \mathbf{a}_o = \mathbf{r}_o + u_o \mathbf{n}_o + v_o \mathbf{b}_o.$$

Liczby u_o, v_o wyznaczają położenie środka kuli na π_o . Obierając dowolnie u_o, v_o , otrzymamy wszystkie kule zbioru Z . Jeżeli \mathbf{R} wyznacza bieżący punkt kuli, to równanie kuli będzie:

$$(28) \quad (\mathbf{R} - \mathbf{a}_o) \times (\mathbf{R} - \mathbf{a}_o) = \rho_o^2, \quad (\rho_o = \sqrt{u_o^2 + v_o^2}),$$

przyczem ρ_o jest promieniem kuli. Obliczmy odległość δ punktu $M(s)$ krzywej C od kuli (28). Jeżeli środek rozważanej kuli oznaczymy przez A_o , to jest

$$\delta = |MA_o - \rho_o| = |MA_o - M_o A_o|,$$

ale długości $MA_o, M_o A_o$ dają się łatwo wyrazić, jest bowiem $\mathbf{M} \mathbf{A}_o = \mathbf{a}_o - \mathbf{r}$, $\mathbf{M}_o \mathbf{A}_o = \mathbf{a}_o - \mathbf{r}_o$, więc

$$MA_o = \sqrt{(\mathbf{a}_o - \mathbf{r}) \times (\mathbf{a}_o - \mathbf{r})},$$

$$M_o A_o = \sqrt{(\mathbf{a}_o - \mathbf{r}_o) \times (\mathbf{a}_o - \mathbf{r}_o)} = \rho_o;$$

stąd łatwo obliczymy δ ; w tym celu okreśmy funkcję:

$$(29) \quad F(s) = (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) - (\mathbf{r}_o - \mathbf{a}_o) \times (\mathbf{r}_o - \mathbf{a}_o).$$

Ponieważ $F(s_o) = 0$, więc

$$(30) \quad \delta = \frac{|F(s) - F(s_o)|}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) + \rho_o^2}}.$$

Dla rozwinięcia $F(s)$ obliczmy, posługując się wzorami Freneta, pochodną $\frac{dF}{ds} = 2\mathbf{t} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o)$;

$$\left(\frac{dF}{ds}\right)_{s_o} = 2\mathbf{t}_o \times (\mathbf{r}_o - \mathbf{a}_o) = 2\mathbf{t}_o \times (-u_o \mathbf{n}_o - v_o \mathbf{b}_o) = 0;$$

$$\frac{d^2 F}{ds^2} = 2k \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) + 2\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 2k \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) + 2;$$

$$\left(\frac{d^2 F}{ds^2}\right)_{s_o} = 2k_o \mathbf{n}_o \times (-u_o \mathbf{n}_o - v_o \mathbf{b}_o) + 2 = -2k_o u_o + 2.$$

Jeżeli obierzemy odtąd środek kuli A_o na prostej biegunowej punktu M_o czyli:

$$(31) \quad u_o = \frac{1}{k_o},$$

to jest też druga pochodna funkcji F w s_o równa zeru. Obliczmy więc dalszą pochodną:

$$\frac{d^3 F}{ds^3} = 2 \frac{dk}{ds} \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) - 2k(k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) \times$$

$$\times (\mathbf{r} - \mathbf{a}_o) + 2k \mathbf{n} \times \mathbf{t},$$

$$\left(\frac{d^3 F}{ds^3}\right)_{s_o} = -2 \frac{dk}{ds_o} \cdot \frac{1}{k_o} + 2k_o v_o \tau_o.$$

Założmy, że jest $\tau_o \neq 0$, wtedy można obrać v_o :

$$(32) \quad v_o = \frac{1}{\tau_o k_o^2} \frac{dk}{ds_o} = -\frac{1}{\tau_o} \cdot \frac{d}{ds_o} \left(\frac{1}{k}\right)$$

tak, iż także trzecia pochodna w s_o będzie zerem. Rozwinięcie Peany funkcji $F(s)$ przy wartościach (31) i (32) rozpocznie się zatem od wyrazu 4^{go} rzędu. Jest więc wtedy:

$$(33) \quad \frac{\delta}{(s - s_o)^4} \rightarrow \frac{1}{4!} \frac{1}{2\rho_o} \left| \frac{d^4 F(s)}{ds_o^4} \right| \quad (\text{gdzy } s \rightarrow s_o),$$

gdzie

$$(34) \quad \rho_o = \sqrt{u_o^2 + v_o^2} = \sqrt{\frac{1}{k_o^2} + \frac{1}{\tau_o^2} \left(\frac{d}{ds_o} \left(\frac{1}{k}\right)\right)^2}.$$

Kulę, dla której u_o, v_o, ρ_o wyznaczają (31), (32) i (34), nazywa się *kulą ściśle styczną* do C w M_o .

Liczbę ρ_0 zowie się *promieniem krzywizny kulistej* (sferycznej) krzywej C w M_0 , ($1 : \rho_0$) zowie się *krzywizną kulistą* krzywej C w M_0 ; środek A_0 kuli ściśle stycznej zowie się *środkiem krzywizny kulistej* krzywej C w M_0 (lub należący do M_0). Wzór (33) wykazuje, że δ jest nieskończenie małą rzędu co najmniej 4^{go} względem $(s - s_0)$.

Dodajmy, że, jeżeli C spełnia $(Z, 4)$, $(Z^*, 2)$ i nierówność $\tau \neq 0$ w $[a, b]$, to C posiada w każdym punkcie kulę ściśle styczną.¹

Do zagadnienia tego powrócimy poniżej (IV § 3 b). Zapiszmy jeszcze, że kula ściśle styczna ma środek, wyznaczony przez wektor:

$$(35) \quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{k_0} \mathbf{n}_0 - \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} \right) \right)_{s_0} \cdot \mathbf{b}_0.$$

§ 2. Przykłady. a) Damy przykład na to, że dopuszczalna zmiana parametru może zmniejszyć rozważany łuk na krzywej (zob. I § 3). W tym celu weźmy pod uwagę odcinek osi x :

$$(36) \quad x = \sqrt{4 - t^2}, \quad y = z = 0;$$

na t wolno nadawać wartości, spełniające związek $-2 \leq t \leq 2$ i wtedy punkt x, y, z opisuje odcinek (36) dwukrotnie; gdy chodzi o ciągłość pochodnych, to trzeba założyć, że $-2 < t < 2$; wprowadźmy nowy parametr t^* przez podstawienie $t = \cos t^*$. Na t^* wolno nadawać wartości z otwartego przedziału $(0, \pi)$; przez to punkt o współrzędnych $x = \sqrt{4 - \cos^2 t^*}$, $y = z = 0$ przebiega otwarty odcinek na osi x , się-

¹ Znaczenie nazwy elementów „ściśle stycznych“ (płaszczyzna, kula) nie może być wyjaśnione na tem miejscu, bo ono wymaga wykładu teorii styczności.

Liczbę ρ_c zowie się promieniem krzywizny kulistej (sferycznej) krzywej C w M_3 ; $(1:\rho_c)$ zowie się krzywizną kulistą krzywej C w M_3 ; środek A_c kuli ściśle stycznej zowie się środkiem krzywizny kulistej krzywej C w M_3 (lub należący do M_3). Wzór (33) wykazuje, że δ jest nieskończenie małą rzędu co najmniej 2^{go} względem $(s-s_0)$.

Dodajmy, że jeżeli C spełnia $(Z, 1)$, $(Z^*, 2)$ i nierówność $C \neq 0$ w $[a, b]$, to C posiada w każdym punkcie kula ściśle styczną.¹

Do zagadnienia tego powrócimy poniżej (IV § 3 b). Zapiszmy jeszcze, że kula ściśle styczna ma środek, wyznaczony przez wektor:

$$(35) \quad a_c = r_c + \frac{1}{\rho_c} n_c - \frac{1}{\rho_c} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho_c} \right) \right)_{a_c} \cdot h_c$$

§ 2. Przykłady. a) Damy przykład na to, że dopuszczalna zmiana parametru może zmniejszyć rozważany łuk na krzywej (zob. I § 3). W tym celu weźmy pod uwagę odcinek osi x :

$$(36) \quad x = \sqrt{4-t^2}, \quad y = z = 0;$$

na t wolno nadawać wartości, spełniające zwięźle $-2 < t < 2$ i wtedy punkt x, y, z opisuje odcinek (36) dwukrotnie; gdy chodzi o ciągłość pochodnych, to trzeba założyć, że $-2 < t < 2$; wprowadźmy nowy parametr φ^* przez podstawienie $t = \cos \varphi^*$. Na φ^* wolno nadawać wartości z otwartego przedziału $(0, \pi)$; przez to punkt o współrzędnych $x = \sqrt{4 - \cos^2 \varphi^*}$, $y = z = 0$ przebiega otwarty odcinek na osi x , się

¹ Zastrzeżenie nazwy elementów „ściśle stycznych” (płytkość, kula) nie może być wyrażone na ten sposób, bo one wymagają wyjątku teorii styczności.

zajęty od $x = \sqrt{5}$ do $x = 2$. Odcinek $(\sqrt{5}, 2)$ jest częścią odcinka $[0, 2]$, czy też $(0, 2)$.

b) *Zamknięta linia śrubowa* jest to krzywa, której równania przy odpowiednim wyborze ortogonalnego układu Kartezjusza, oraz zmiennej t można przyjąć pod postacią

$$(37) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct,$$

gdzie a, c oznaczają stałe, przy czym $a > 0, c \neq 0$; stała a zowie się *parametrem* linii śrubowej, $2\pi a$ zowie się *krótkim* linii śrubowej (zmieniając bowiem t od 0 do 2π , widzimy, że z zmienia się o $2\pi c$). Na t wolno przyjąć dowolny przedział $[a, b]$. Z (37) mamy

$$(38) \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

a więc punkty linii (37) leżą na walcu kołowym (obrotowym) (38). Krzywa (37) powstaje, gdy na walcu kołowym (38) nawiniemy kąt ostry φ w ten sposób, że jedno ramię kąta nawija się wzdłuż kołowego przekroju walca z płaszczyzną (xy) ; wierzchołek kąta ma paść na punkt $(a, 0, 0)$; wtedy drugie ramię kąta nawija się na walcu wzdłuż linii (37). Między a, c, φ istnieje prosty związek: $c = \pm a \operatorname{tg} \varphi$. Obliczmy pochodne:

$$x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = c;$$

$$x'' = -a \cos t, \quad y'' = -a \sin t, \quad z'' = 0;$$

$$x''' = a \sin t, \quad y''' = a \cos t, \quad z''' = 0.$$

Krzywa (37) spełnia (2, a), gdzie a oznacza dowolną liczbę naturalną, spełnia też (2', 3), co jest

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t \\ -a \cos t & -a \sin t \end{vmatrix} = a^2 > 0.$$

gający od $x = \sqrt{3}$ do $x = 2$. Odcinek $(\sqrt{3}, 2)$ jest częścią odcinka $[0, 2]$, czy też $(0, 2)$.

b) *Zwyczajna linia śrubowa* jest to krzywa, której równania przy odpowiednim wyborze ortogonalnego układu Kartezjusza, oraz zmiennej t można przyjąć pod postacią

$$(37) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct,$$

gdzie a, c oznaczają stałe, przy czym $a > 0$, $c \neq 0$; stała a zowie się *parametrem* linii śrubowej, $|2\pi c|$ zowie się *krokiem* linii śrubowej (zmieniając bowiem t od 0 do 2π , widzimy, że z zmienia się o $2\pi c$). Na t wolno przyjąć dowolny przedział $[a_0, b_0]$. Z (37) mamy

$$(38) \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

a więc punkty linii (37) leżą na walcu kołowym (obrotowym) (38). Krzywa (37) powstaje, gdy na walcu kołowym (38) nawiniemy kąt ostry φ w ten sposób, że jedno ramię kąta nawija się wzdłuż kołowego przekroju walca z płaszczyzną (xy) ; wierzchołek kąta ma paść na punkt $(a, 0, 0)$; wtedy drugie ramię kąta nawija się na walcu wzdłuż linii (37). Między a, c, φ istnieje prosty związek: $c = \pm a \operatorname{tg} \varphi$. Obliczmy pochodne:

$$x' = -a \sin t, \quad y' = a \cos t, \quad z' = c,$$

$$x'' = -a \cos t, \quad y'' = -a \sin t, \quad z'' = 0;$$

$$x''' = a \sin t, \quad y''' = -a \cos t, \quad z''' = 0.$$

Krzywa (37) spełnia (Z, n) , gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną, spełnia też $(Z^*, 2)$, bo jest

$$\left| \begin{array}{cc} x' & y' \\ x'' & y'' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} -a \sin t & a \cos t \\ -a \cos t & -a \sin t \end{array} \right| = a^2 > 0.$$

Krzywa ma określony łuk:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = t\sqrt{a^2 + c^2} + s_0',$$

gdzie s_0' oznacza stałą. Dostawy stycznej będą więc następujące

$$(39) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-a \sin t dt}{dt \sqrt{a^2 + c^2}} = -\frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \\ \beta = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \end{cases}$$

Styczna ta tworzy więc z osią z stały kąt, a więc jest też nachylona pod stałym kątem do płaszczyzny (x, y) — jak to zresztą wynika z nawijania kąta na walec (38). Obliczmy dostawy normalnej głównej według III 42

$$(40) \quad \alpha^* = -\cos t, \quad \beta^* = -\sin t, \quad \gamma^* = 0.$$

A więc *normalna główna jest stałe prostopadłą do osi z czyli równoległą do płaszczyzny (x, y)* . Równania normalnej głównej w punkcie t są następujące:

$$(41) \quad x = (a - \sigma) \cos t, \quad y = (a - \sigma) \sin t, \quad z = ct,$$

przyczem t jest stałe, a σ zmienia się wzdłuż normalnej. Kładąc $\sigma = a$ otrzymujemy $x = 0, y = 0, z = ct$ czyli punkt osi z ; a więc *normalna główna trafia oś z* . Dostawy binormalnej są:

$$(42) \quad \begin{cases} \alpha^{**} = \beta \gamma^* - \beta^* \gamma = \frac{c \sin t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \\ \beta^{**} = -\frac{c \cos t}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \gamma^{**} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \end{cases}$$

A więc *binormalne tworzą stały kąt z osią z*. Styczna linii śrubowej, jak i binormalna są styczne do walca (38). Obliczmy teraz obie krzywizny linii śrubowej: pierwszą według (III 69₄), drugą według III 119:

$$(43) \quad k = \frac{a}{a^2 + c^2}, \quad \tau = -\frac{c}{a^2 + c^2}.$$

Widzimy więc, że znak stałej c decyduje o znaku liczby τ , a więc o stałej lewo lub prawoskrętności linii śrubowej. *Obie krzywizny linii śrubowej są stałe* (i obie różne od zera); stosunek obu krzywizn ($\tau:k$) jest przeto stały (co zresztą na razie jest wynikiem banalnym). Z (34) wynika, że *krzywizna sferyczna linii śrubowej równa się jej pierwszej krzywiznie*.

Udowodnimy (częściowo odwrotne) twierdzenie: *jeżeli krzywa C spełnia (Z, 3) i (Z*, 2) w $[a, b]$ i jeżeli ma stałą pierwszą krzywiznę (> 0) i drugą krzywiznę stałą i $\neq 0$, to jest zwyczajną linią śrubową*. Dla dowodu weźmy 2^{gi} wzór Freneta

$$(44) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} - \tau\mathbf{b};$$

ponieważ z założenia k i τ są stałe, więc istnieje pochodna prawej strony, a więc także i lewej strony; na mocy 1^{go} i 3^{go} wzoru Freneta jest:

$$\frac{d^2\mathbf{n}}{ds^2} = -k\frac{d\mathbf{t}}{ds} - \tau\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -(k^2 + \tau^2)\mathbf{n},$$

czyli

$$(45) \quad \frac{d^2\mathbf{n}}{ds^2} + m^2\mathbf{n} = 0 \quad (m = \sqrt{k^2 + \tau^2} > 0);$$

jest to równanie różniczkowe o stałym współczyn-

niku $m > 0$. Otóż wiadomo,¹ że istnieją dwa stałe wektory \mathbf{A} , \mathbf{B} [stałe t. zn. o stałym kierunku i stałej długości, ale swobodne t. zn. o dowolnym (na razie) początku] takie, że jest

$$(46) \quad \mathbf{n} = \mathbf{A} \cos(ms) + \mathbf{B} \sin(ms)$$

ogólną całką równania (45). Ale jest $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$, a to daje:

$$(47) \quad \begin{cases} (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cos^2(sm) + 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \sin(sm) \cdot \\ \cdot \cos(ms) + (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) \sin^2(ms) \equiv 1 \end{cases}$$

identycznie co do s . Udowodnimy *tw. pomocnicze*: jeżeli przy stałych λ, μ, ν zachodzi identyczność:

$$(48) \quad \lambda \cos^2 \varphi + 2\mu \sin \varphi \cos \varphi + \nu \sin^2 \varphi \equiv 1$$

w przedziale (φ_1, φ_2) na φ , gdzie $\varphi_1 < \varphi_2$, to jest $\lambda = \nu = 1, \mu = 0$. Rzeczywiście, zastępując prawą stronę przez $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$ otrzymujemy identyczność $(\lambda - 1) \cos^2 \varphi + 2\mu \sin \varphi \cos \varphi + (\nu - 1) \sin^2 \varphi \equiv 0$, skąd już łatwo wynika $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 1$. Wobec tego *tw. pomocniczego* (47) daje:

$$(49) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = 1, \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 1, \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0.$$

Znalazłszy \mathbf{n} , całkujemy pierwsze równanie Freneta:

$$(50) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k[\mathbf{A} \cos(ms) + \mathbf{B} \sin(ms)],$$

by znaleźć \mathbf{t} . Istnieje tedy stały wektor \mathbf{C} taki, że jest:

$$(51) \quad \mathbf{t} = \mathbf{A} \frac{k \sin(ms)}{m} - \mathbf{B} \frac{k \cos(ms)}{m} + \mathbf{C}.$$

¹ Zob. A. Hoborski: Wyższa Matematyka. Cz II, str. 745. Jeżeli czytelnikowi powyższe rozumowanie wektorjalne sprawia trudność, niech czytelnik przejdzie do dostaw $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$.

Pobawiat jest $t \times t = 1$, więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (A \times A)t^2 \frac{\sin^2(mt)}{m^2} - 2(B \times A)t^2 \frac{\sin(mt)\cos(mt)}{m} \\ + (B \times B)t^2 \frac{\cos^2(mt)}{m^2} + 2(A \times C)t \frac{\sin(mt)}{m} \\ - 2(B \times C)t \frac{\cos(mt)}{m} + (C \times C) = 1, \end{aligned}$$

co na mocy (49) redukuje się do tożsamości:

$$(52) \quad \begin{cases} 2(A \times C)t \frac{\sin(mt)}{m} - 2(B \times C)t \frac{\cos(mt)}{m} \\ + C \times C + \frac{t^2}{m^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Ale łatwo udowodnić, że, pomimoż: jeżeli λ, μ, ν są stałymi $\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi + \nu = 0$

w przedziale (φ_1, φ_2) , gdzie $\varphi_1 < \varphi_2$, to jest tożsamością.

Stąd (52) daje warunki na C:

$$(53) \quad \begin{cases} A \times C = 0, B \times C = 0, C \times C = 0. \end{cases}$$

Stąd na podstawie I § 5/ otrzymamy: $C = \sigma(A \times B)$, przy czym na σ mamy na podstawie I § 7/ otrzymać: $\sigma^2(A \wedge B) \times (A \wedge B) = \sigma^2(A \times A)(B \times B) = (A \times A)(B \times B)$, warunek:

$$\sigma^2 = \frac{C^2}{m^2} \quad \text{czyli} \quad \sigma = \frac{C}{m} \quad (C = \pm m \sigma).$$

Warunki (53) zastępują przez:

$$(54) \quad C = \frac{C}{m}(A \wedge B) \quad m = \pm C.$$

niku $m > 0$. Otóż wiadomo,¹ że istnieją dwa stałe wektory A, B [stałe t. zn. o stałym kierunku i stałej długości; ale dowolne t. zn. o dowolnym (tu razin) początku] takie, że jest

$$(46) \quad n = A \cos(ms) + B \sin(ms)$$

ogólną całką równania (45). Ale jest $n \times n = 1$, a to daje:

$$(47) \quad \begin{cases} (A \times A) \cos^2(ms) + 2(A \times B) \sin(ms) \cos(ms) + \\ + (B \times B) \sin^2(ms) \equiv 1 \end{cases}$$

identycznie co do s . Udowodnimy tw. pomocnicze: jeżeli przy stałych λ, μ, ν zachodzi tożsamość:

$$(48) \quad \lambda \cos^2 \varphi + 2\mu \sin \varphi \cos \varphi + \nu \sin^2 \varphi \equiv 1$$

w przedziale (φ_1, φ_2) na φ , gdzie $\varphi_1 < \varphi_2$, to jest $\lambda = \nu = 1, \mu = 0$. Rzeczywiście, zastępując prawą stronę przez $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$ otrzymujemy tożsamość $(\lambda - 1) \cos^2 \varphi + 2\mu \sin \varphi \cos \varphi + (\nu - 1) \sin^2 \varphi \equiv 0$, skąd już łatwo wynika $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 1$. Wobec tego tw. pomocniczego (47) daje:

$$(49) \quad A \times A = 1, B \times B = 1, A \times B = 0.$$

Znalazszy n , całkujemy pierwsze równanie Freneta:

$$(50) \quad \frac{dt}{ds} = t[A \cos(ms) + B \sin(ms)]$$

dy zależność t istnieje tedy stały wektor C taki, że jest:

$$(51) \quad t = A \frac{k \sin(ms)}{m} - B \frac{k \cos(ms)}{m} + C$$

¹ Zob. A. Bohorski: Wyższa Matematyka, Cz II, str. 745. Jeżeli czytelnikowi powyższe rozumowanie wektorjalne sprawi trudność, niech czytelnik przejdzie do dowodów λ, μ, ν .

Ponieważ jest $\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 1$, więc otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) k^2 \cdot \frac{\sin^2(ms)}{m^2} - 2(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) k^2 \frac{\sin(ms) \cos(ms)}{m^2} + \\
 & + (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) k^2 \frac{\cos^2(ms)}{m^2} + 2(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) k \cdot \frac{\sin(ms)}{m} - \\
 & - 2(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) k \frac{\cos(ms)}{m} + (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \equiv 1,
 \end{aligned}$$

co na mocy (49) redukuje się do identityczności:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) k \cdot \frac{\sin(ms)}{m} - 2(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) k \frac{\cos(ms)}{m} + \\ & + \mathbf{C} \times \mathbf{C} + \frac{k^2}{m^2} - 1 \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Ale łatwo udowodnić *tw. pomocnicze*: jeżeli przy stałych λ, μ, ν zachodzi identityczność

$$\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi + \nu \equiv 0$$

w przedziale (φ_1, φ_2) , gdzie $\varphi_1 < \varphi_2$, to jest $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Stąd (52) daje warunki na \mathbf{C} :

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{A} \times \mathbf{C} = 0, \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0, \mathbf{C} \times \mathbf{C} = 1 - \frac{k^2}{m^2} = \frac{\tilde{c}^2}{m^2} \end{aligned} \right.$$

Stąd na podstawie I § 5f otrzymujemy: $\mathbf{C} = \sigma(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, przyczem na σ mamy na podstawie I 77, ponieważ $\sigma^2(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \sigma^2[(\mathbf{A} \times \mathbf{A})(\mathbf{B} \times \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2]$, warunek:

$$\sigma^2 = \frac{\tilde{c}^2}{m^2} \quad \text{czyli} \quad \sigma = \frac{\varepsilon \tilde{c}}{m} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Warunki (53) zastępuje jeden:

$$(54) \quad \mathbf{C} = \frac{\varepsilon \tilde{c}}{m} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Zadecydujemy, czy $\varepsilon = +1$, czy też $\varepsilon = -1$. Otóż mając \mathbf{t} i \mathbf{n} , określimy \mathbf{b} , przy pomocy wzoru I 71:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} &= \left(\mathbf{A} \frac{k \sin(ms)}{m} - \mathbf{B} \frac{k \cos(ms)}{m} + \mathbf{C} \right) \wedge \\ & \quad \left(\mathbf{A} \cos(ms) + \mathbf{B} \sin(ms) \right) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \frac{k}{m} + \\ & \quad + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) \cos(ms) + (\mathbf{C} \wedge \mathbf{B}) \sin(ms) = \\ & = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \frac{k}{m} + \frac{\varepsilon \tau}{m} \mathbf{B} \cos(ms) - \frac{\varepsilon \tau}{m} \mathbf{A} \sin(ms). \end{aligned}$$

Stąd trzeci wzór Freneta daje:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\varepsilon \tau \mathbf{B} \sin(ms) - \varepsilon \tau \mathbf{A} \cos(ms) = \tau \mathbf{n} = \\ & = \tau [\mathbf{A} \cos(ms) + \mathbf{B} \sin(ms)], \end{aligned}$$

a to daje $\varepsilon = -1$. Wobec tego mamy:

$$(55) \quad \mathbf{t} = \mathbf{A} \frac{k \sin(ms)}{m} - \mathbf{B} \frac{k \cos(ms)}{m} - \frac{\tau}{m} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}),$$

przyczem stałe wektory \mathbf{A} , \mathbf{B} spełniają (49). Aby wreszcie wyznaczyć krzywą, całkujemy 0^{ty} wzór Freneta:

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \text{ co daje } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A} \frac{k \cos(ms)}{m^2} - \\ - \mathbf{B} \frac{k \sin(ms)}{m^2} - \frac{\tau}{m} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) s, \end{cases}$$

gdzie \mathbf{r}_0 oznacza stały wektor. Weźmy teraz pod uwagę krzywą, którą otrzymamy z (56) przez szczególny wybór wektorów \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{r}_0 . Otóż miary składowych w kierunku osi x, y, z podaje tabelka:

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right. \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Widoczne, że (49) jest wtedy spełnione i dla powyższych wektorów \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{r}_0 otrzymamy równanie krzywej:

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{k}{m^2} \cos(ms), \quad Y = \frac{k}{m^2} \sin(ms), \\ Z = -\frac{\tau}{m} \cdot s. \end{array} \right.$$

Jest to krzywa (37), dla której

$$(59) \quad a = \frac{k}{m^2}, \quad c = -\frac{\tau}{m^2}, \quad l = m s', \quad m = \sqrt{k^2 + \tau^2}.$$

Jest to więc zwyczajna linja śrubowa i, jak wykazują wzory (43), o krzywiznach k i τ .

Można łatwo wykazać, iż odpowiedni wybór układu współrzędnych daje z (56) równania (58). Dość bowiem obrać następujący układ osi (x, y, z) : początek układu w punkcie, wyznaczonym przez \mathbf{r}_0 , wskutek tego będzie $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, oś x obierzmy równolegle do \mathbf{A} i nadajmy jej kierunek przeciwny, niż \mathbf{A} ; wskutek tego miary składowych wektora \mathbf{A} będą $(-1, 0, 0)$; oś y obierzmy równolegle do \mathbf{B} i przeciwnie skierujmy, niż \mathbf{B} , wreszcie oś z obierzmy prostopadłe do osi x i y i tak, by osie x, y, z tworzyły układ prawoskrętny.

Nadto zauważmy, że (56) i (58) dają:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}X - \mathbf{B}Y + (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})Z,$$

co na mocy I 65 ter wykazuje, iż krzywa (56) po-

wstaje z (58) przez ruch euklidesowy; dość bowiem przyjąć $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{A}$, $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{B}$, by otrzymać też I 65 quat. Wykazaliśmy więc tw. w zupełności,¹ oraz udowodniliśmy, że dwie zwyczajne linie śrubowe, mające tęsamą pierwszą i tęsamą drugą krzywiznę, są na siebie *nakładalne*.

Udowodnimy z kolei tw.: *miejsce geometryczne środków pierwszej krzywizny zwyczajnej linii śrubowej jest również zwyczajną linią śrubową o tym samym kroku, ale o innym parametrze.*

Rzeczywiście równaniem tego miejsca geom. jest równanie:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{1}{k} \mathbf{n},$$

co w układzie Kartezjusza daje na mocy wzorów 37, 40 i 43:

$$(60) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{c^2}{a} \cos t = \frac{c^2}{a} \cos(t + \pi), \\ y_1 = -\frac{c^2}{a} \sin t = \frac{c^2}{a} \sin(t + \pi), \quad z_1 + c\pi = c(t + \pi). \end{cases}$$

Znajdźmy miejsce geometryczne punktów przecięcia stycznych do krzywej (37) z płaszczyzną x, y . Otóż styczną określają równania:

$$(61) \quad \begin{cases} x = a(\cos t - \sigma \sin t), \\ y = a(\sin t + \sigma \cos t), \quad z = c(t + \sigma), \end{cases}$$

przyczem σ oznacza parametr zmienny wzdłuż stycznej. Dla punktów płaszczyzny x, y jest $z = 0$ czyli $\sigma = -t$, wskutek czego otrzymujemy:

$$(61 \text{ bis}) \quad x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad z = 0.$$

¹ Prawdopodobnie dowód, w powyższy sposób przedstawiony, nie był dotąd ogłoszony.

Jest to krzywa, którą poznamy w IV § 3 a, jako rozwijającą koła, będącego tu kierownicą walca (38).

Na zakończenie zauważmy, że krzywa (37) przecina tworzące walca (38) pod stałym kątem (ostrym).

c) Zajmijmy się krzywą:

$$(62) \quad x = ae^{pt} \cos t, \quad y = ae^{pt} \sin t, \quad z = e^{pt},$$

przyczem a, p oznaczają stałe $\neq 0$. Niech czytelnik porówna (62) z (37) i stwierdzi pewną modyfikację, której następstwa będą interesujące. Z (62) otrzymujemy:

$$(63) \quad x^2 + y^2 = a^2 z^2,$$

co jest równaniem stożka kołowego, którego środek (wierzchołek) leży w początku układu i którego osią jest oś z . A więc *krzywa (62) leży na stożku (63)*. Poprowadźmy teraz przez każdy punkt krzywej (62) prostą prostopadłą do płaszczyzny (x, y) ; proste te utworzą walec, którego są tworzącymi; kierownicą tego walca jest krzywa, będąca rzutem krzywej (62) na płaszczyznę (x, y) . By scharakteryzować ten rzut, wprowadźmy na pł. (x, y) , układ biegunowy (ρ, φ) , będzie więc:

$$(64) \quad \rho \cos \varphi = ae^{pt} \cos t, \quad \rho \sin \varphi = ae^{pt} \sin t.$$

Biorąc punkty krzywej (64), dla których jest $\cos t \neq 0$, mamy z (64) przez dzielenie $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} t$, co pozwala nam przyjąć $\varphi = t$. Gdy $\cos t = 0$, to otrzymujemy $\rho \cos \varphi = 0$, $\rho \sin \varphi \neq 0$, a więc $\cos \varphi = 0$, co jest zgodne ze związkim $\varphi = t$. Wobec tego (64) daje:

$$(65) \quad \rho = ae^{pt} = ae^{p\varphi};$$

równanie to określa *spiralną logarytmiczną*.¹ A więc *krzywa (62) leży na walcu, której kierownicą jest*

¹ Zob. poniżej przykład pod e).

spiralna logarytmiczna płaszczyzny (x, y) ; tworzące walca są równoległe do osi z . Wskutek tego krzywa (62) jest przecięciem tego walca ze stożkiem (63).

Obliczmy pochodne pierwsze dla (62):

$$(66) \quad \begin{cases} x' = a e^{pt} (p \cos t - \sin t), \\ y' = a e^{pt} (p \sin t + \cos t), \quad z' = p e^{pt}. \end{cases}$$

Stąd wynika suma:

$$(67) \quad Sx'^2 = e^{2pt} [a^2(p^2 + 1) + p^2] > 0,$$

a więc spełnione jest założenie $(Z^*, 1)$; krzywa (62) ma więc określoną styczną, której dostawę kierunkową wzgl. osi z obliczymy:

$$\gamma = \frac{z'}{\sqrt{Sx'^2}} = \frac{p}{\sqrt{a^2(p^2 + 1) + p^2}},$$

dostawa ta jest stała, a więc *styczne do (62) tworzą stały kąt z osią (z)* .

Obliczmy drugie pochodne i sumy:

$$(68) \quad \begin{cases} Sx'x'' = e^{2pt} [a^2 p (p^2 + 1) + p^3], \\ Sx''^2 = e^{2pt} [a^2 (p^2 + 1)^2 + p^4]; \end{cases}$$

stad i z (67) otrzymujemy

$$(69) \quad \begin{cases} Sx'^2 \cdot Sx''^2 - (Sx'x'')^2 = \\ = e^{4pt} a^2 (p^2 + 1) [a^2 (p^2 + 1) + p^2] > 0, \end{cases}$$

a więc krzywa (62) spełnia $(Z^*, 2)$, ma zatem określone krzywizny k i τ . Szczegółowy rachunek daje według III 69 i III 119:

$$(70) \quad \begin{cases} k = \frac{|a|(p^2 + 1)}{a^2(p^2 + 1) + p^2} e^{-pt}, \\ \tau = -\frac{p}{a^2(p^2 + 1) + p^2} e^{-pt}. \end{cases}$$

Stąd widoczne, że $\tilde{c} \neq 0$ i wprawdzie k , \tilde{c} zmieniają się od punktu do punktu krzywej, ale w ten sposób, że jest

$$(71) \quad \frac{\tilde{c}}{k} = \text{Const},$$

co dla zwyczajnej linii śrubowej również zachodzi.

Wykażmy jeszcze, że *krzywa (62) przecina pod stałym kątem tworzące stożka (63)*. (Zob. IV § 8, zag. 23).

Jeżeli u , v , w oznaczają dostawy tworzącej stożka (63), to jest

$$(72) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

nadto równania tworzącej są:

$$(73) \quad x = \sigma u, \quad y = \sigma v, \quad z = \sigma w.$$

Wyrachujemy u , v , w . Tworząca leży na stożku, więc (63) daje $u^2 + v^2 = a^2 w^2$, stąd i z (72) otrzymujemy:

$$w = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad u^2 + v^2 = \frac{a^2}{1+a^2},$$

a więc istnieje¹ kąt λ taki, że jest

$$u = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \cos \lambda, \quad v = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \sin \lambda.$$

Równania (73) tworzącej będą więc następujące

$$(74) \quad \begin{cases} x = \frac{a\sigma}{\sqrt{1+a^2}} \cos \lambda, & y = \frac{a\sigma}{\sqrt{1+a^2}} \sin \lambda, \\ z = \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{1+a^2}}, & (\varepsilon = \pm 1). \end{cases}$$

Wzdłuż tworzącej jest σ zmienne, λ zaś stałe.

¹ Zob. A. Hoborski: Wyższa Matematyka. Cz. I. (1928), str. 424.

Twierdzymy, że zbiór tworzących (74), dla których jest $\varepsilon = -1$, mieści się w zbiorze tworzących, dla których jest $\varepsilon = +1$. Rzeczywiście, gdy $\varepsilon = -1$, to kładziemy $\sigma = -\sigma_1$, $\lambda = \lambda_1 + \pi$, a otrzymamy

$$x = \frac{a\sigma_1}{\sqrt{1+a^2}} \cos \lambda_1, \quad y = \frac{a\sigma_1}{\sqrt{1+a^2}} \sin \lambda_1, \quad z = \frac{\sigma_1}{\sqrt{1+a^2}},$$

co jest tworzącą (74), dla której jest $\varepsilon = +1$. Przyjmujemy więc $\varepsilon = +1$ w (74) i temsamem otrzymamy wszystkie tworzące stożka (63). Znajdźmy tworzącą, która przechodzi przez punkt t krzywej (62) i zarazem wyszukajmy punkt σ na tej tworzącej. Znaczy to, że mamy na σ i λ rozwiązać równania:

$$\frac{a\sigma}{\sqrt{1+a^2}} \cos \lambda = a e^{pt} \cos t,$$

$$\frac{a\sigma}{\sqrt{1+a^2}} \sin \lambda = a e^{pt} \sin t, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1+a^2}} = e^{pt},$$

co nam daje $\sigma = e^{pt} \sqrt{1+a^2}$, $\cos \lambda = \cos t$, $\sin \lambda = \sin t$; wobec czego możemy przyjąć $\lambda = t$. Obliczmy teraz dostawę kąta φ , pod jakim tworząca przecina krzywą; będzie:

$$\cos \varphi = (\alpha u + \beta v + \gamma w)_{\lambda=t} = \frac{p \sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2(p^2+1)+p^2}} = \text{Const.}$$

I ta własność wskazuje drogę, na której wyznaczyliśmy krzywą (62) dla przykładu.

Krzywa (62) ma kilka własności wspólnych ze zwyczajną linią śrubową: 1) istnieje stały kierunek (mianowicie kierunek osi z), z którym styczna tworzy stały kąt; 2) druga krzywizna jest $\neq 0$; 3) sto-

sunek obu krzywizn jest stały. Oczywiście powstaje zagadnienie zależności wzajemnej tych własności — zagadnieniem tem zajmiemy się w następnym paragrafie. Krzywa (62) zowie się *linją śrubową walcowo-stożkową*.

d) Damy teraz przykład krzywej, która spełnia $(Z, 3)$ i $(Z^*, 1)$, a nie spełnia $(Z^*, 2)$ w pewnym punkcie. Niech będzie dana krzywa, jako przecięcie dwóch walców:

$$(75) \quad (W_1) \ y = \frac{1}{3} x^3, \quad (W_2) \ z = \frac{1}{4} x^4.$$

Kładąc $x = t$, otrzymamy dla tej krzywej

$$x = t, \quad y = \frac{1}{3} t^3, \quad z = \frac{1}{4} t^4;$$

stąd: $x' = 1, y' = t^2, z' = t^3, x'' = 0, y'' = 2t, z'' = 3t^2$. Stąd widoczne, że $(Z, 3)$ i $(Z^*, 1)$ są spełnione, a $(Z^*, 2)$ nie jest spełnione dla $t = 0$, a jest spełnione dla $t \neq 0$. Weźmy w szczególności punkt M_1 , należący do wartości $t = 1$; punkt ten jest regularnym. Położmy jednak $x = 1 + t^3$ wtedy (75) dają

$$y = \frac{1}{3} (1 + t^3)^3, \quad z = \frac{1}{4} (1 + t^3)^4;$$

dla $t^* = 0$ otrzymamy punkt M_1 , ale ani $(Z^*, 1)$ ani tem mniej $(Z^*, 2)$ nie będą spełnione dla $t^* = 0$. Punkt $t^* = 0$ nazwiemy więc osobliwym, ale tylko dla użytego przedstawienia parametrycznego, gdyż jest punktem regularnym krzywej przy parametrze t . Nie trudno też stwierdzić, że przekształcenie $t = 1 + t^3$ jest w naszym przypadku według poprzednio podanej terminologii „niedopuszczalnym” przekształceniem parametru t na t^* .

Walec W_1 ma na płaszczyźnie x, y kierownicę $y = \frac{1}{3}x^3$, której punkt $x=0$ jest *punktem przegięcia*; założenie ($Z^* 2$) nie jest spełnione dla $x=0$, jak widać z powyższego, jednak ($Z^* 1$) jest spełnione, oś x jest styczną w punkcie przegięcia.

e) Rozważmy krzywą płaską, która przecina pod stałym kątem pęk prostych. Jeżeli środek pęku leży w nieskończoności, to proste pęku są do siebie równoległe, a wtedy krzywa, która te proste przecina pod stałym kątem α_0 (o własności $\alpha_0 \neq m\pi$, gdzie m całkowite) jest linią prostą. Jeżeli środek pęku jest w skończoności, przyjmijmy go za początek układu (x, y) . Niech więc szukana krzywa przecina prostą pęku w punkcie (x, y) , różnym od początku układu, pod stałym kątem α_0 ; ponieważ dostawy prostej pęku, skierowanej od początku układu do punktu x, y są $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a dostawy stycznej do krzywej są $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$, więc ma być:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dy}{ds} = \cos \alpha_0 \quad \text{czyli}$$

$$x dx + y dy = \cos \alpha_0 \cdot \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

[Pierwsze z tych równań przepisujemy w postaci wektorjalnej

$$(76) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{t} = \sqrt{\mathbf{r} \times \mathbf{r}} \cos \alpha_0,$$

co można było z góry napisać. Powrócimy do tego równania w IV § 3a.]

Dla scałkowania drugiego z równań wprowa-

dzamy układ biegunowy: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,
wtedy po łatwej przeróbce otrzymamy:

$$(76 \text{ bis}) \quad d\rho \cdot \sin \alpha_o = \varepsilon \cos \alpha_o \cdot \rho d\varphi \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Założyliśmy powyżej, że jest $\sin \alpha_o \neq 0$. Jeżeli jest $\cos \alpha_o = 0$ (np. α_o jest kątem prostym), to (76 bis) daje $d\rho = 0$ czyli $\rho = \text{const}$, a więc szukana krzywa jest *kołem*. Załóżmy, że $\cos \alpha_o \neq 0$, wtedy (76 bis) daje:

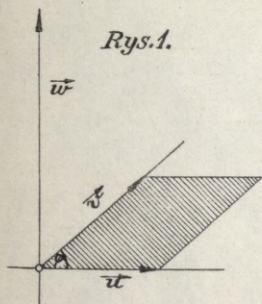
$$(77) \quad \rho = a e^{b\varphi},$$

gdzie a oznacza stałą całkowania ($\neq 0$), $b = \varepsilon \operatorname{ctg} \alpha_o \neq 0$. Krzywa (77) jest wtedy t. zw. *spiralną logarytmiczną*, o której już była mowa w ustępie *e)* (str. 177).

f) Rozważmy krzywą Γ :

$$(77 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2c \int_0^\lambda \sin(\lambda\sqrt{3}) \cos \lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \lambda} d\lambda, \\ y = 2c \int_0^\lambda \cos(\lambda\sqrt{3}) \cos \lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \lambda} d\lambda, \\ z = 2c \int_0^\lambda \sin \lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \lambda} d\lambda, \end{array} \right.$$

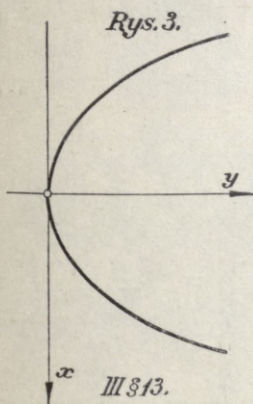
gdzie c oznacza stałą dodatnią. Łatwym rachunkiem przekona się czytelnik, że pierwsza krzywizna tej krzywej jest $= c$, a więc jest stałą. O krzywych tej własności będzie mowa w IV § 3 *e*.



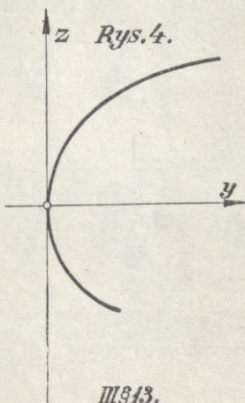
IS5,4/.



III §7.

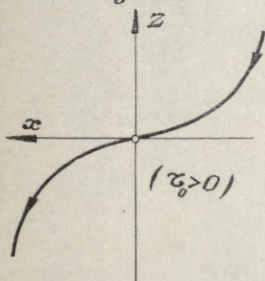


III §13.



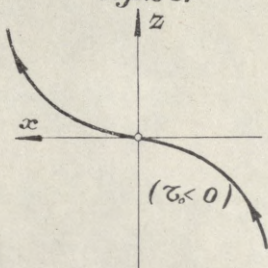
III §13.

Rys. 5a.



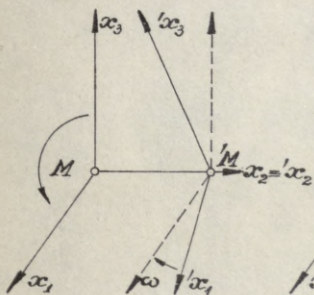
III §13.

Rys. 5b.



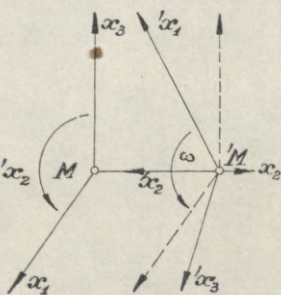
III §13.

Rys. 6a.

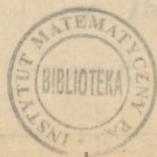
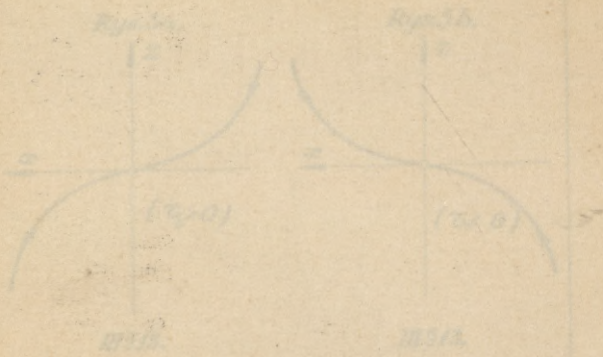


III §15.

Rys. 6b.



III §15.



WYDAWNICTWA BIBLIOTECZKI
KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J.

	Zł.
Nr. 1. Prof. dr. Wilkosz: Arytmetyka liczb całkowitych, 1932	4·00
Nr. 2. — Teoria mnogości punkt. 1933	3·00
Nr. 3. Prof. dr. Hoborski: Geometria różniczkowa, Teoria krzywych cz. I. 1933	4·50
Nr. 4. — cz. II. 1933	—

Kółko Mat.-Fiz. U. U. J. posiada na składzie:

Prof. dr. Sleszyński: Teoria dowodu tom I. Nakładem Kółka 1925	6·60
— tom II. Nakładem Kółka 1929	9·00
— Teoria wyznaczników. Nakł. Kółka 1926	4·70
Prof. dr. Hoborski: Zbiór zadań z wyż- szej matematyki cz. I. Nakł. Kółka 1928	13·00
— Geometria różniczkowa, Teoria po- wierzchni (litogr.) Nakł. Kółka 1928	10·50
— Teoria ciągłych i skończonych grup przekształceń Lie'go (litogr.) Nakładem Kółka 1930	9·00
— Wyższa matematyka cz. I. Nakładem autora 1928	9·90
— cz. II. Nakładem autora 1923	5·00
Prof. dr. Rosenblatt: Geometria anali- tyczna na płaszczyźnie, Nakładem Pol- skiej Akademji Umiejętności 1926	6·00
— Geometria analityczna trzywymiarowa, Nakładem Kółka 1931	15·00
Prof. dr. Hoborski: Nowa teoria liczb niewymiernych, Nakładem księgarni J. Czernecki w Krakowie	1·34
Prof. dr. Zaremba: Mechanika teore- tyczna (Litogr.), Nakładem Kółka 1926	4·20
— Teoria całek wielokrotnych (Litogr.), Nakładem Kółka 1923	4·35

Członkowie Kółka Mat.-Fiz. U. U. J. mają znaczne zniżki.

