WORPITZKY

ELEMENTE

der Mathematik

3-4

274

Elemente der Mathematik

für

gelehrte Schulen und zum Selbststudium

von

Dr. Worpitzky,

Oberlehrer am Friedrichs-Werderschen Gymnasium und Docent an der Königl. Kriegsacademie.

Drittes Heft.

Planimetrie.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1874.

Wichstein

Vorwort.

Die günstige Aufnahme, welche die beiden vor mehr als zwei Jahren erschienenen Hefte arithmetischen und algebraischen Inhalts meiner „Elemente der Mathematik" bei competenten Beurtheilern gefunden haben, so wie directe Aufforderungen haben mich veranlaßt, jetzt zwei Hefte folgen zu lassen, welche zunächst die Grundlagen der gesammten Geometrie und in ihrem weiteren Verlauf denjenigen Theil der Planimetrie darstellen, welcher für die höheren Lehranstalten Interesse besitzt. Es fehlt von den gewöhnlichen Schulpensen mithin noch die Stereometrie; ich hoffe aber, diese Lücke in kurzer Zeit auszufüllen.

Schon in dem Vorwort zu den ersten Heften habe ich auseinandergesetzt, weshalb ich auch auf der untersten Stufe des mathematischen Unterrichts solche Lehrbücher für verderblich halte, welche in der Anordnung und Behandlung des Stoffs die wissenschaftliche Strenge der Rücksicht opfern, daß alle abgedruckten Einzelheiten der muthmaßlichen Altersstufe der Schüler angepaßt seien. Nach meiner Ansicht nehmlich kommt es weniger darauf an, die Kenntnis möglichst vieler mathematischer Thatsachen zu verbreiten — einer bloßen Berufskenntnis, welche die Mehrzahl der in ihrem Fach hervorragendsten Menschen sehr wohl entbehren kann — als darauf, das Vermögen schärfster Folgerichtigkeit im Denken durch die Übung an mathematischen Objecten heranzubilden. Dies läßt sich jedoch nur erzielen durch die Vorführung eines consequenten Systems und, falls das letztere Lücken haben sollte, durch die unumwundenste Aufdeckung dieser Lücken nach bestem Wissen. — Ob man aus pädagogischen Rücksichten beim ersten Unterricht einzelne Bindeglieder des Systems nur kurz berühren wird, um ihre Existenz anzuzeigen, ihre Discussion aber einer späteren

Stufe vorzubehalten (z. B. die Beweise der §§. 33, 73—76), das betrifft eine ganz andere Frage; wenn man nur nicht unterläßt, diese Absicht gebührend hervorzuheben. Es ist ja auch nicht allein die Ausbildung des Intellects, welche dem mathematischen Unterricht seine erziehliche Bedeutung sichert, sondern eben so wohl die Gewöhnung an diejenige Gewissenhaftigkeit, welche davor zurückschreckt, eine ernsthafte Begründung durch einige Phrasen zu ersetzen, oder die Aufmerksamkeit durch das Verschweigen kritischer Punkte irrezuführen, nachdem man sich durch den Schein von Zuverlässigkeit Vertrauen erworben hat.

Die hier charakterisirten erziehlichen Wirkungen des mathematischen Unterrichts, welche im Interesse einer wahren Cultur gar nicht genug betont werden können, sind indessen mehr oder minder beeinträchtigt worden, seitdem man bemerkt hat, daß die Euklidischen Axiome keinen ausreichenden Unterbau der geometrischen Wissenschaft bilden, und deshalb aufhören mußte, sie für einen solchen auszugeben. Da die Zeit dieser Erkenntnis außerdem in diejenige der großartigen neueren Entdeckungen auf theilweise unbetretenen Gebieten hineinfiel, welche noch täglich anreizende Ausbeute liefern, so ist es nicht zu verwundern, daß die Ordnung der alten Angelegenheiten nur gelegentliche Aufmerksamkeit fand und desto schneller wieder fallen gelassen wurde, je schwieriger die Aufgabe zu sein schien.

Die Literatur der bisher angestrengten Bemühungen, um unserer Wissenschaft die Berechtigung zu ihrem sprüchwörtlich gewordenen Ruf ungeschmälert wiederherzustellen, ist ziemlich vollständig aufgeführt in Baltzers Elementen der Mathematik, weshalb ich mir Notizen über sie wohl ersparen kann. Dagegen glaube ich, die Anmerkung machen zu müssen, daß ein befriedigendes Resultat, eben weil die Fundamente mangelhaft waren, nicht ohne Änderung an diesen zu erreichen sein dürfte.

Meinen Versuch, auf die so eben angedeutete Weise zum Ziele zu gelangen, übergebe ich hiermit in der Form eines Lehrbuchs der Öffentlichkeit, nachdem ich zu Ende vorigen Jahres die Grundzüge in dem „Archiv für Mathematik" beleuchtet und auch Zustimmung solcher Art gefunden habe, daß ich einen wesentlichen Einspruch nicht zu befürchten brauche.

Die Abweichungen von dem hergebrachten Wege erscheinen, zumal da die eine von ihnen sogleich anfangs in den Überschriften der Capitel hervortritt, auf den ersten Anblick größer, als sie sich bei näherer Betrachtung herausstellen werden.

Diese augenfälligste Neuerung bezieht sich auf die Einführung der Ebene, welcher ich zu ihrem bisher schon halb und halb anerkannten Recht verholfen habe, demonstrirt zu werden. Man wird finden, daß die vorbereitenden Sätze auch sonst in den Elementen bewiesen sind, so wie daß deren Beweis (höchstens mit einer Ausnahme in §. 31) nicht umständlicher geworden ist; und vielleicht wird man für das Aufgeben des gewohnten Verfahrens sehr gerne den Gewinn eintauschen, daß man die Anschauung des Schülers bei der Betrachtung der allereinfachsten Gebilde nicht sofort in die Ebene hineinzuzwängen braucht, aus der es der Erfahrung gemäß sehr schwer ist sie wieder zu befreien. — Benutzt man, so lange von der Ebene noch nicht die Rede ist, bei der Demonstration Stäbe, anstatt der Striche auf der Tafel (durch welche die Figuren sich freilich bequemer darstellen lassen), so gewöhnt sich die Anschauung an die Beziehungen zum ganzen Raum und der Schüler wird zugleich vor dem leider allzuweit verbreiteten Irrthum bewahrt, als sei das begrifflich einfacher, was man einem Andern unter den obwaltenden Bedingungen der physischen Natur mit dem geringsten Aufwand äußerlich vorbereiteter Mittel zeigen kann. (Ich würde hinzufügen „mit dem geringsten Aufwand an Geldmitteln", wenn der Preis weniger Stäbe und Klemmschrauben für irgend eine Unterrichtsanstalt in Betracht käme.)

Um aber mit den erwähnten einfachen Mitteln das Pseudoaxiom über die Ebene zu eliminiren, habe ich das Secirmesser an den Winkelbegriff setzen und die Entwickelungsstufen bloßlegen müssen, welche er im Verlaufe der gesteigerten Anforderungen der geometrischen Betrachtungen durchmacht. Schon die vielen vergeblichen Versuche, den Winkel von vorn herein stichhaltig für alle Zwecke zu definiren, dürften darauf hinweisen, daß man sich ihm gegenüber nicht kühl genug zu verhalten gewohnt ist. — Ich kenne indessen auch jetzt schon viele urtheilsfähige Männer, welche mir in Betreff dieser Angelegenheit zustimmen und das wohlverstandene Interesse der Schüler gewahrt sehen, wenn diesen ein Einblick in die Werkstatt des Geistes gewährt wird, wie er sich in den Wissenschaften die zusammengesetzten Begriffe nach Zweckmäßigkeitsrücksichten bilde.

Hinsichtlich der Entschiedenheit, mit welcher ich die Bewegung sogleich anfangs in die geometrischen Betrachtungen einführe, brauche ich mich wohl kaum zu vertheidigen, da Niemand mehr so harmlos ist, irgend einen Satz ohne diese Vorstellung beweisen zu wollen. Ob aber die Axiome, welche ich über sie aufgestellt habe, das, worauf es ankommt, schon in der angemessensten Weise aussprechen, darüber wird erst dann die Entscheidung getroffen werden können, nachdem die Erwägung dieser Frage in weiteren Kreisen ventilirt sein wird, als es bis jetzt möglich war.

Zu einer ähnlichen Arbeit lade ich ein über den Größenbegriff. Man wird sehen, daß er hier in §. 17 ein wenig anders und, wie ich hoffe, schärfer definirt ist, als in dem Lehrbuch der Arithmetik, wo die Bedingung, daß na durch Vergrößerung von n größer als jede beliebige mit a gleichartige Größe gemacht werden könne, nicht klar hervortritt. Das zwölfte, dreizehnte und vierzehnte Axiom bitte ich in besondere Obacht zu nehmen; man kann das letzte von ihnen vielleicht etwas handlicher machen. — Daß der Größenbegriff für sich, und sein Auftreten in der Geometrie eine eingehende Beachtung erheische, wird, seitdem man eine „Geometrie der Lage" als eine besondere Wissenschaft anstrebt, nur noch von Wenigen geleugnet; und es läßt sich nicht entscheiden, wie viele von diesen in der That wissenschaftliche Interessen zu vertreten meinen, wenn sie sich der Abgrenzung so „einfacher" Begriffe entgegenstellen. Denn es giebt — um nur die gutmüthigste Art von Gegnern zu bezeichnen — Leute, denen Neuerungen allein deshalb verhaßt sind, weil sie die Störung des Besitzes unbequem empfinden.

Schließlich drängt es mich, hier denjenigen Herren meinen Dank auszusprechen, welche sich für mein Unternehmen lebhaft interessirt und mich durch den Beitritt zu meiner Auffassung in der Überzeugung gestärkt haben, daß ich im Wesentlichen nicht fehlgegangen bin, namentlich den Herren DDr. August, Schumann und Netto, von denen der Letztere mich auch bei der Correctur unterstützt, zur Aufstellung des Axioms VI veranlaßt hat und außerdem der Urheber eines Theils des beigebrachten Beweises für die Existenz des antitropen Ähnlichkeitspunktes ist.

Berlin, im Juni 1874.

Der Verfasser.

Einleitung.

Capitel I.

Allgemeine Eigenschaften der Figuren.

A. Die Raumgebilde als Örter.

§. 1.

Axiom[1] I.

Dinge[2] in unbeschränkter Mannichfaltigkeit erfüllen (decken, nehmen ein) völlig bestimmte und in der Vorstellung vollständig erfaßbare Theile des Raums.[3] Die Raumtheile können sowohl für sich allein, als in Beziehung zum übrigen Raum, als auch in Beziehung zu dem ausfüllenden Dinge aufgefaßt werden, und zwar ohne durch diesen Wechsel der Gesichtspunkte eine Veränderung zu erfahren.

Definition.[4]

Jeder völlig bestimmte und vollständig in der Vorstellung erfaßbare Raumtheil heißt ein **Körper**.

§. 2.

Axiom II.

Jeder Raumtheil ist unbeschränkt theilbar.

Jeder Raumtheil wird durch ein vollständig bestimmtes Raumgebilde gegen den übrigen Raum abgegrenzt.

---

1) ἀξίωμα, Urtheil. — Axiom oder auch Grundsatz heißt ein solches Urtheil, von dessen Gültigkeit man sich nur durch Prüfung seiner Vorstellungen überzeugen kann.

2) D. i.: Gegenstände der Vorstellung.

3) Der Raum ist die Abstraction von den beobachteten einzelnen Körpern auf einen Körper, welcher die durch die Sinne gegebenen Körper sämmtlich als Theile enthält.

4) definitio, Bestimmung. — Eine Definition spricht eine Bestimmung aus, welche durch Übereinkommen — nicht nach Nothwendigkeit — und zwar meistens der kürzeren Verständigung wegen getroffen wird.

1*

Definition.

Jede Grenze zwischen einem Raumtheil und dem übrigen Raum heißt eine **Fläche**.

§. 3.

Axiom III.

Jede Fläche ist unbeschränkt theilbar.

Jeder Flächentheil wird durch ein vollständig bestimmtes Raumgebilde gegen den übrigen Theil der Fläche abgegrenzt.

Definition.

Jede Grenze zwischen einem Flächentheil und dem übrigen Theil der Fläche heißt eine **Linie**.[1])

§. 4.

Axiom IV.

Jede Linie ist unbeschränkt theilbar.

Je zwei benachbarte Linientheile werden durch ein vollständig bestimmtes Raumgebilde gegen einander abgegrenzt.

Definition.

Jede Grenze zwischen zwei benachbarten Linientheilen heißt ein **Punkt**.

§. 5.

Axiom V.

Kein Punkt ist in solcher Weise theilbar, daß die Theile sich unter einander und vom Ganzen unterscheiden.

§. 6.

Axiom VI.

Außer den Raumtheilen, Flächen, Linien und Punkten giebt es keine räumlichen Gebilde.

---

1) Was man beim Zeichnen eine Linie und einen Punkt nennt, das sind in mathematischem Sinne Körper, welche sich vom Zeichenstift abgelöst und an das Papier geheftet haben (Striche und Klexe). Man verwendet sie jedoch mit Nutzen, um die Vorstellung durch die Anschauung zu unterstützen.

Definitionen.

I. Jede der Betrachtung unterworfene Zusammenstellung von Raumtheilen, Flächen, Linien, Punkten heißt eine **Figur.** [1]

II. Unter dem **Ort** einer Figur versteht man deren Beziehung zum ganzen Raum.

III. Um Figuren als Theile einer Figur zu bezeichnen, sagt man, sie seien **neben einander; an einander gelegen** heißen Figuren, welche einen Punkt gemein haben.

IV. Theilbare Figuren heißen **ausgedehnt.**

V. Behält man sich vor, die Ausdehnung durch das Hinzufügen neuer Theile beliebig wachsen zu lassen, so nennt man die Figuren **unbegrenzt.**

VI. Diejenige Wissenschaft, welche die Untersuchung der räumlichen Eigenschaften der Figuren zum Gegenstande hat, heißt **Geometrie.** [2]

§. 7.

Scholie. [3]

Die sechs voranstehenden Axiome verfolgen vornehmlich den Zweck, die vier Gattungen der eigenartigen geometrischen Gebilde, nehmlich Körper, Fläche, Linie und Punkt, so zu charakterisiren, daß ihre Beziehungen zu einander und zum Raum angezeigt sind.

Jene Gebilde sind sämmtlich im Raume enthalten, jedoch mit Ausnahme der Körper keine Theile desselben: die Punkte sind nicht Theile von Linien, die Linien nicht Theile von Flächen, die Flächen nicht Theile von Körpern, sondern eben Grenzen zwischen den Theilen. Mithin läßt sich durch die Summation [4] von Punkten keine Linie, von Linien keine Fläche, von Flächen kein Körper erzeugen, durch die Summation von Körpern aber ein beliebig ausgedehnter Raumtheil.

Eine wesentliche Förderung erlangt unsere Erkenntnis der Raum=

---

1) figura, Gestalt.

2) Von γῆ, Erde, und μετρεῖν, messen. — Das älteste uns ziemlich vollständig erhaltene Lehrbuch der Geometrie hat den um 300 v. Chr. zu Alexandria geborenen Euklides zum Verfasser.

3) Scholie (σχόλιον) heißt in der Mathematik ein Abschnitt, welcher zur Förderung der Uebersicht oder des Verständnisses eingeschaltet ist, ohne ein nothwendiges Glied der Entwickelung zu bilden.

4) Herstellung eines Ganzen aus seinen Theilen.

gebilde weiter dadurch, daß wir dieselben nach Axiom I nicht nur als Örter des Raums, sondern auch als den im Raum enthaltenen Dingen anhaftend auffassen und, worüber die nächsten Axiome handeln, mit diesen bewegen (d. i. ihren Ort ändern lassen) dürfen.

§. 8.

Axiom VII.

Man kann jede Figur (mit dem Dinge, welchem sie anhaftet) **starr bewegen: keine Bewegung verursacht an sich eine Veränderung ihrer Eigenschaften;**[1] **und zwar werden bei der Bewegung in ununterbrochenem Zusammenhang („stetig") dazwischen liegende Örter durchlaufen.**

Definition.

Figuren, welche durch starre Bewegung zur Deckung eines einzigen Orts gebracht werden können, heißen **congruent.**[2] — In Formeln schreibt man für dieses Wort das Zeichen $\cong$.

Zusätze.[3]

I. Der Ort im Raume ist keine Eigenschaft einer Figur.

II. Jede Figur ist sich selbst congruent; d. h. sie kann mit ihrem ursprünglichen Ort wieder zur Deckung gebracht werden, nachdem sie aus ihm verschoben ist.

III. Figuren, welche irgend einer Figur congruent sind, sind unter sich congruent.

IV. Was von einer Figur gilt, gilt auch von jeder congruenten Figur: mit alleiniger Ausnahme der Ortsbestimmungen.

V. Jeder bewegte Punkt beschreibt eine Linie, jede nicht in sich selbst gleitende Linie eine Fläche, jede nicht in sich selbst gleitende Fläche einen Raumtheil. — (Ax. VI u. VII.)

Scholie.

In Betreff des Zus. V ist die Bemerkung wichtig, daß man sich nicht jede Linie als durch Bewegung eines Punktes und nicht jede Fläche

1) Beziehungen ihrer Bestandtheile zu einander.

2) Von congruere, übereinstimmen.

3) Ein „Zusatz" enthält eine Erkenntnis, welche aus dem Vorhergehenden durch augenfällige Schlüsse gewonnen wird.

als durch Bewegung einer Linie (auch wenn man die letztere fortwährend verbiegt) beschrieben vorstellen kann. In den Elementen der Geometrie werden solche Linien und Flächen allerdings nicht behandelt.

§. 9.

Axiom VIII.

Jede Figur läßt sich starr so bewegen, daß ein beliebig ausgewählter Punkt derselben mit einem vorherbestimmten Raumpunkt, und ein zweiter beliebig ausgewählter Figurenpunkt mit einem nicht mehr willkürlichen Punkt einer vorherbestimmten, von jenem Raumpunkt ausgehenden und den Raum durchsetzenden Linie desselben zur Deckung gelangt.

Zusatz.

Sämmtliche Punkte sind congruent.

§. 10.

Definitionen.

I. Eine Linie, welche durch jeden ihrer Punkte in zwei völlig getrennte Theile getheilt wird, heißt **ungeschlossen.**[1])

II. Eine Linie, in welcher jeder Punkt nur zwei Theile von einander trennt, heißt **unverzweigt.**[1])

§. 11.

Axiom IX.

Hält man zwei beliebige Punkte einer Figur im Raume fest, so läßt sich dieselbe noch starr bewegen; es bleibt aber eine durch jene Punkte hindurchgehende, von den Eigenschaften der Figur unabhängige, ungeschlossene und unverzweigte Linie in Ruhe.

Definitionen.

I. Diejenige Bewegung, bei welcher ein Punkt seinen Ort nicht ändert, heißt **Drehung.**

II. Diejenige Linie, welche bei der Drehung einer Figur um zwei feste Punkte in Ruhe bleibt, die Drehungsaxe, heißt eine **grade Linie** oder schlechthin eine **Grade.**

---

1) Z. B. werden die Zifern 1, 3, 7 mit einem ungeschlossenen und unverzweigten Strich geschrieben, 0 mit einem geschlossenen, 4 mit einem verzweigten, 8 mit einem geschlossenen und zugleich verzweigten Strich.

III. Jeder zwischen zwei bestimmten Punkten liegende Theil einer Graden heißt eine **Strecke**.

IV. Jeder Theil einer Graden, welcher nur einen bestimmten Endpunkt hat, heißt ein **Strahl**, eine **Halbgrade** oder **Richtung**; das letztere namentlich, wenn man sich vorstellt, daß die Ausdehnung der Graden am andern Ende zunimmt.

V. Die beiden Richtungen, in welche eine Grade durch einen Punkt getheilt wird, heißen **entgegengesetzt**.

VI. Haben zwei grade Linien einen Punkt gemein, in welchem sie nicht endigen, so sagt man: sie **schneiden sich** in diesem Punkt.

Zusätze.

I. Durch je zwei Punkte giebt es **eine** Grade.

II. Durch je zwei Punkte giebt es **nur eine** Grade. — M. a. W.: Je zwei Grade, welche zwei Punkte gemein haben, decken sich vollständig (in der Ausdehnung, in welcher beide vorhanden sind).

— Denn denkt man die beiden Figuren, durch deren Drehung die Graden einzeln bestimmt sind, zu einer Figur vereinigt und dreht die letztere, so entsteht nach Ax. IX sowohl die eine Grade, als auch die andere, und beide Graden bilden eine einzige Grade, da die Eigenschaften der Figur keinen Einfluß auf die Gestalt der entstehenden Graden haben. Mithin müssen die beiden zuerst gedachten Graden sich decken, da sie sonst eine geschlossene oder verzweigte Linie bilden würden, was nach Ax. IX ebenfalls nicht geschieht.

III. Man kann jede Grade so hinlegen, daß sie mit einer festen Graden einen vorherbestimmten Punkt und eine vorherbestimmte Richtung gemein erhält.

— Ax. VIII und Zus. II.

IV. Jede Grade ist unbegrenzt (kann nach beiden Seiten hin beliebig verlängert werden).

— Zus. I u. II nebst §. 6 Def. V.

§. 12.

Postulat[1]) I.

Durch zwei beliebig gegebene Punkte eine Grade zu ziehen (sich vorzustellen).

1) Ein Postulat (von postulare, fordern) enthält eine Aufgabe, von welcher angenommen wird, daß sie Jeder ausführen kann. Die später gestellten Aufgaben

§. 13.

Axiom X. (Gesetz der Einläufigkeit.[1])

Dreht man eine starre Figur um eine feste unbegrenzte Grade in der Weise, daß ein Figurenpunkt eine wachsende Linie beschreibt, so kann man die Drehung so weit fortsetzen, daß dieser Punkt wieder in seine Anfangslage gelangt, nachdem die Drehungsaxe der Figur von derjenigen Strecke, welche ihn mit einem (außerhalb der Drehungsaxe liegenden) **festen Raumpunkt verbindet, ein einziges Mal,**[2] **von einer Verlängerung jener Strecke aber höchstens einmal geschnitten ist.**

Hält man in einer starren Figur drei Punkte fest, welche nicht in einer Graden liegen, so ist sie unbeweglich.

Zusatz.

Zwei Grade haben entweder **keinen**[3] Punkt, oder **einen** Punkt, oder **alle** Punkte gemein.

§. 14.

Definitionen.

I. Jede aus graden Theilen bestehende Linie heißt **gebrochen**.

II. Jede Linie, welche keine graden Theile besitzt, heißt **krumm**.

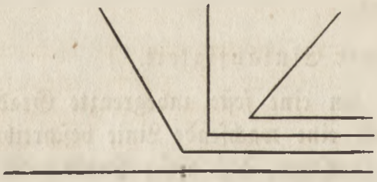
---

werden als gelöst angesehen, sobald sie auf Postulate zurückgeführt sind. — Die gebräuchlichsten Mittel, um die Vorstellung von Linien durch äußerliche Anschauung zu unterstützen, bestehen in der Aufstellung von Stäben, Ausspannung von Fäden und Zeichnung von Strichen auf geeigneten Flächen. Vergl. die Anm. zu §. 3 u. 4.

1) Hierfür ist auch der Ausdruck „Monodromie" (μόνος, einzig, und δρόμος, Lauf) gebräuchlich.

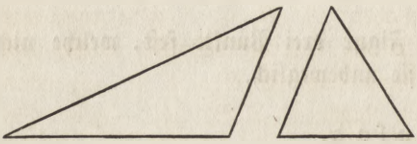
2) D. i. bei einer einzigen Lage der Figur.

3) Daß es grade Linien giebt, welche keinen Punkt gemein haben, wird erst durch das Axiom X ausgesprochen; die übrigen Theile des Zusatzes sind schon früher begründet.



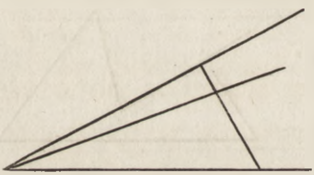
III. Jede aus zwei graden Theilen bestehende Linie heißt ein **Winkel**; die beiden graden Theile heißen die **Schenkel**, und deren gemeinsamer Endpunkt der **Scheitel** des Winkels.

IV. Jede geschlossene, dreimal gebrochene (aus drei graden Theilen bestehende) Linie heißt ein **Dreieck**; die drei graden Theile heißen die **Seiten**, deren gemeinsame Endpunkte die Ecken und die von zwei Seiten gebildeten Winkel die **Winkel** des Dreiecks oder die **Dreieckswinkel**. — Unter den **Stücken** eines Dreiecks versteht man die Seiten **und** die Winkel desselben.



V. Zwei Winkel, welche, abgesehen von der Länge ihrer Schenkel, congruent sind, heißen **gleich**.

VI. Kann ein Winkel in eine solche Lage gebracht werden, daß er mit einem zweiten den Scheitel und den einen Schenkel gemein erhält, während der andere sich mit einer Strecke schneidet, welche zwei Punkte der Schenkel des zweiten Winkels verbindet, so heißt der erste Winkel **kleiner** als der zweite.



Zusätze.

I. Jeder **Winkel** ist durch seinen Scheitel und je einen zweiten Punkt der beiden Schenkel völlig bestimmt.

II. Jedes **Dreieck** ist durch seine drei Ecken völlig bestimmt.

§. 15.

Axiom XI.

Es giebt kein Dreieck, in welchem jeder Winkel kleiner wäre, als ein beliebig klein gegebener Winkel.

Scholie.

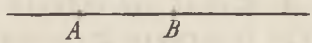
Die Grundeigenschaften der Figuren, insofern man sie bloß als Örter auffaßt, sind durch die bisher aufgezählten elf Axiome erschöpft. (Unser 11. Axiom vertritt das gleichnumerirte Euklidische, vor welchem es u. A. die größere Evidenz und auch den Vorzug voraus hat, daß man keiner langen Entwickelungen zu seinem Verständnis bedarf.)

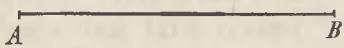
§. 16.

Bezeichnung geometrischer Gebilde.

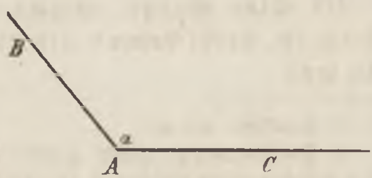
Die einzelnen *Punkte* bezeichnet man in der Geometrie mit *einzelnen* großen lateinischen Buchstaben: A, B, C, ..., denen man, wenn man Beziehungen der Punkte auf einander auffällig machen will, sowohl rechts oben Accente anhängen kann (z. B.: A' — gesprochen: „A Strich"), als auch rechts unten Nummern (z. B.: A_1 — gesprochen: „A Eins").

Jede grade Linie wird bezeichnet durch Nennung zweier Punkte, durch welche sie hindurchgeht. Man sagt z. B.: „*die Grade* AB" als Abkürzung für: „die Grade, in welcher die Punkte A und B liegen." (Nach §. 11, Z. II ist die Grade hierdurch unzweideutig bestimmt.) Hiervon ist begrifflich unterschieden: „*die Strecke* AB", als derjenige Theil der unbegrenzten Graden AB, welcher zwischen den Punkten A und B liegt (§. 11, D. III.); so wie: „*die Richtung* AB", als diejenige Richtung der unbegrenzten Graden AB, von welcher A der einzige bestimmte Endpunkt ist (§. 11, D. IV). Außerdem benennt man *Strecken* auch mit kleinen lateinischen Buchstaben.

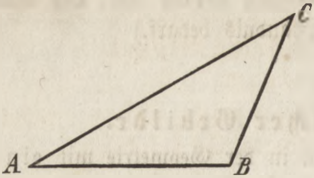




Winkel benennt man durch Zusammensetzung der Namen von drei Punkten, welche zur Bestimmung der Schenkel hinreichen; und zwar nennt man den Scheitel in der Mitte, voran und hinterher je einen zweiten Punkt der einzelnen Schenkel, schreibt ferner meistens die Nachbildung eines Winkels davor. Z. B. heißt $\angle BAC$ so viel wie: „derjenige Winkel, dessen Scheitel in A liegt und dessen einzelne Schenkel außerdem durch die Punkte B und C gehen." (Vergl. §. 14, Z. I.)



Ferner bezeichnet man Winkel auch durch einzelne kleine Buchstaben des griechischen Alphabets: α, β, γ, . . . oder endlich, wenn dadurch kein Irrthum hervorgerufen werden kann, durch den Namen des Scheitelpunkts allein mit vorgesetztem Winkelzeichen, z. B.: $\angle A$.



Den Namen eines Dreiecks setzt man aus den Namen seiner Ecken zusammen und schreibt meistens die Nachbildung eines Dreiecks davor. Z. B. heißt $\triangle ABC$ so viel wie: „dasjenige Dreieck, dessen Ecken in den Punkten A, B und C liegen.“ (Vergl. §. 14, Z. II.)

B. Die Raumgebilde als Größen.

§. 17.

Definitionen.

I. Damit ein Ganzes eine **Größe** genannt werde, muß es den folgenden Bedingungen genügen:

1) muß es unbeschränkt theilbar sein;
2) muß es ein Merkmal, das „**Quantum**“,[1]) besitzen, welches durch keine Abänderung der Folge der Theile geändert wird und eine solche Eintheilung zuläßt, daß es auch dann noch ungeändert bleibt, wenn man einen beliebigen Theil an Stelle eines andern wiederholt;
3) muß sein Quantum als Theil des Quantums eines Ganzen erscheinen, welches durch eine bestimmte („endliche“) Anzahl von Wiederholungen eines beliebigen Theils des ersteren entsteht.

II. Größen, welche man ohne Änderung des Quantums für einander setzen darf, heißen **gleich groß** oder schlechthin **gleich**.[2])

III. Eine Größe, welche einem Theile einer zweiten gleich ist, heißt **kleiner**[2]) als diese; die letztere aber **größer**[2]) als jene.

1) quantum, wie viel.

2) Die Benennungen „gleich“, „größer“, „kleiner“ bedeuten nach dem Obigen bei Größen etwas Anderes als bei Winkeln (§. 14), da die Winkel kein Quantum besitzen. Später (§. 39) wird den letzteren indessen auf künstliche Weise ein Quantum geschaffen werden, so daß sich dann jene Benennungen rechtfertigen lassen.

IV. Zwei Größen heißen **gleichartig** oder **von gleicher Qualität**,[1]) wenn sie je einen gleichen Theil besitzen.

V. Diejenige Eigenschaft, durch welche sich gleiche incongruente Raumgrößen unterscheiden, heißt ihre **Gestalt**.

Zusätze.

I. Der Punkt und der Raum sind keine Größen.

— Denn beide genügen nicht der Bedingung I. 3.

II. Körper, Flächenstücke und Linienstücke haben, falls sie überhaupt Größen sind, verschiedene Qualitäten.

— Denn keines von diesen Gebilden ist gleich einem Theil der andern. (Vergl. §. 7.)

III. Alle congruenten Raumgrößen sind gleich. — (Vergl. Axiom VII.)

IV. Je zwei Raumgrößen, welche irgendwelche congruenten Theile haben, sind gleichartig.

§. 18.

Axiom XII.

Jedes endlich bestimmte Raumgebilde von solcher Beschaffenheit, daß einer seiner Theile in stetiger Deckung mit einem andern verschoben werden kann, ist eine Größe.

Zusätze.

I. Alle Körper sind gleichartige Größen.

II. Alle Strecken sind gleichartige Größen.

III. Congruente Strecken sind gleich.

IV. Gleiche Strecken sind congruent nach jeder von ihren beiden Richtungen.

— Denn gelangten sie, in welcher Richtung man auch die eine auf die andere legen mag, nicht zur vollen Deckung, so würde die eine nur einem Theil der andern congruent und deshalb nach §. 17, Z. III und D. III kleiner als die zweite sein, was der Voraussetzung widerspricht.

V. Jede Strecke ist mit sich selbst nach umgekehrter Richtung congruent und gleich.

Definitionen.

I. Das Quantum eines Körpers heißt **Volumen**.[2])

II. Das Quantum einer Strecke heißt **Länge**.

---

1) qualitas, Beschaffenheit.

2) volumen, eigentlich: die Schriftrolle, der Band. — Vergl. die Anm. zu §. 1 der Arithmetik.

Scholie.

Das Axiom XII erschöpft nicht alle Fälle, in welchen wir den Raumgebilden die Größeneigenschaft zuerkennen (z. B. bei Ellipsenbögen), und reicht auch in den Elementen der Geometrie nicht überall aus, um die Gleichartigkeit verschieden gestalteter Raumgrößen festzustellen, wo wir unserer Anschauung gemäß eine solche zugestehen (z. B. Strecke und Kreisbogen). In diesen Fällen nimmt man eine oder mehrere veränderliche Figuren zu Hülfe und bedient sich der noch folgenden Axiome.

§. 19.

Definitionen.

I. Die zwischen zwei Punkten liegende Strecke heißt die **Entfernung** oder der **Abstand** beider Punkte von einander.

II. Eine unveränderliche Figur heißt die **Grenzgestalt** einer veränderlichen, wenn die Veränderung der letzteren so vor sich geht, daß die Entfernung eines jeden Punktes der einen Figur von einem Punkte der andern Figur unendlich klein, d. h. kleiner als eine beliebig gegebene unveränderliche Strecke wird.

Axiom XIII.

Ein Raumgebilde ist einer Raumgröße gleichartig, wenn beide als Grenzgestalten gleicher (veränderlicher) Raumgrößen aufgefaßt werden können.

Axiom XIV.

Das Quantum einer jeden Raumgröße ist der Grenzwerth des Quantums einer sich ihr als der Grenzgestalt nähernden gleichartigen Raumgröße, wenn die letztere zum Zweck der Annäherung an jene durch keine andere ersetzt werden kann, welche einen kleineren Grenzwerth liefert.

Scholie.

Zur Erläuterung dieser beiden letzten Axiome mag folgende Bemerkung nützlich sein. Jede krumme Linie, welche eine Länge hat, läßt sich als Grenzgestalt einer gebrochenen Linie auffassen, deren Ecken sämmtlich in der fraglichen krummen Linie liegen; und der Grenzwerth der Summe der einzelnen graden Theile, welcher sich durch keinen kleineren Grenzwerth ersetzen läßt, ist die Länge der krummen Linie. Größere Grenzwerthe lassen sich aber in unbeschränkter Anzahl beibringen, da die krumme Linie auch dann noch die Grenzgestalt bleibt, wenn man u. A. jeden Theil der gedachten gebrochenen Linie durch die Summe der beiden andern Seiten darübergestellter ähnlicher Dreiecke ersetzt: es hängt dann einzig und allein von der (beliebig wählbaren) Gestalt der ähnlichen Dreiecke ab, um wie viel größer der Grenzwerth ausfallen soll.

Bei den Flächen greift eine ähnliche Erwägung Platz.

§. 20.

Lemmata[1] aus der Arithmetik.

Da die Arithmetik diejenige Wissenschaft ist, welche die Eigenschaften aller Größen ohne Unterschied ihrer Qualität erforscht, so gelten ihre Lehren im Besondern für alle Raumgrößen und dürfen in der Geometrie als bekannt vorausgesetzt werden. Anfänglich reicht man mit einer geringen Anzahl von ihnen aus. Eine hervorragende Rolle spielen folgende:

I. Ist eine Größe mehreren gleich, so sind diese unter sich gleich.

II. Ist eine Größe $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als eine zweite, und diese einer dritten gleich, so ist die erste $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als die dritte.

III. Ist eine Größe $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als eine zweite, und diese $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als eine dritte, so ist die erste $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right\}$ als die dritte.

IV. Gleiches mit Gleichem summirt giebt Gleiches (wie man auch die Folge der Theile ändern mag).

V. Gleiches mit Ungleichem summirt giebt Ungleiches in demselben Sinne.

VI. Summirt man Ungleiches mit Ungleichem, so geben die kleineren Theile das kleinere Ganze.

VII. Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

VIII. Gleiches von Ungleichem subtrahirt giebt Ungleiches in demselben Sinne.

IX. Ungleiches von Gleichem subtrahirt giebt Ungleiches im entgegengesetzten Sinne.

---

1) Ein Lemma (λῆμμα, von λαμβάνειν, entnehmen) spricht eine aus einer andern Disciplin entnommene Erkenntnis aus.

X. Subtrahirt man Ungleiches von Ungleichem, so erhält man dort das Kleinere, wo das Größere vom Kleineren subtrahirt ist.

XI. Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches.

XII. Producte sind ungleich in demselben Sinne, wie ihre entsprechenden Factoren.

XIII. Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches.

XIV. Ungleiches durch Gleiches dividirt giebt Ungleiches in demselben Sinne.

XV. Gleiches durch Ungleiches dividirt giebt Ungleiches im entgegengesetzten Sinne.

C. Die Fundamentalcongruenzen.

§. 21.

Definition.

Jeder Winkel, dessen Schenkel die beiden entgegengesetzten Richtungen einer Graden sind, heißt ein **gestreckter Winkel** oder schlechthin ein **Gestreckter**.

Als Zeichen für einen gestreckten Winkel wird in Formeln ein etwas deformirtes G, nehmlich G, benutzt werden.

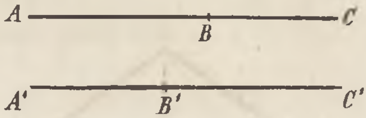
Lehrsatz.[1])

Alle gestreckten Winkel sind gleich und bleiben es auch nach Verwechselung ihrer Schenkel.

---

1) Ein „Lehrsatz“ enthält ein Urtheil, dessen Richtigkeit aus andern, schon als richtig erkannten Urtheilen durch bloße Zergliederung und Zusammensetzung der Begriffe (logische Schlußfolgerung) abgeleitet werden kann.

Jeder Lehrsatz besteht aus zwei Theilen: 1) der „Voraussetzung“, welche die nothwendigen und ausreichenden Merkmale des Dinges angiebt, von welchem die Rede ist, und 2) der „Behauptung“, welche das fragliche Urtheil über jenes Ding ausspricht. — Der größeren Deutlichkeit wegen, so wie zum Zwecke der Übung des Schülers, scharf logisch zu unterscheiden, pflegt man die Voraussetzung und die Behauptung des Lehrsatzes, von einander gesondert, hinter diesem noch einmal auszusprechen und auf eine, nur als Beispiel anzusehende, besondere Figur zu beziehen. Auf die Behauptung folgt der „Beweis“, d. i. die Vorführung der Schlußfolgerungen, durch welche die Geltung des Lehrsatzes abgeleitet wird. Der Beweis heißt ein



Vrs. Es sind zwei gestreckte Winkel ABC und $A'B'C'$ gegeben.

Beh. Es ist $\angle ABC = \angle A'B'C'$, d. h.: man kann den $\angle A'B'C'$ so hinlegen, daß sich B' mit B, eine beliebige unter den beiden Richtungen $B'C'$ und $B'A'$ mit der Richtung BC und zugleich die andere mit der Richtung BA deckt.

Bew. Nach §. 11, Z. III kann man die Figur $A'B'C'$ so hinlegen, daß B' in B und eine beliebige unter den beiden Richtungen $B'C'$ und $B'A'$ in die Richtung BC fällt. Dann decken sich aber nach §. 11, Z. II beide Figuren ganz, weil sie nach der obigen Def. einzeln grade Linien sind.

§. 22.

Lehrsatz.[1])

Jeder beliebige starre Winkel läßt sich so hinlegen, daß jeder von seinen Schenkeln den ursprünglichen Ort des andern deckt.

Vrs. Es ist ein beliebiger $\angle BAC$ gegeben.

Beh. Man kann den $\angle BAC$ so hinlegen, daß AB an den ursprünglichen Ort von AC, und zugleich AC an den ursprünglichen Ort von AB fällt.

Bew. Ist $\angle BAC$ ein gestreckter, so gilt der Satz nach §. 21. Ist er aber kein gestreckter, so gelingt der Bew. auf folgende Weise:

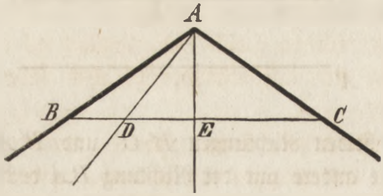
Man verlege auf den Schenkeln die beiden durch B und C bezeichneten Punkte an solche Stellen, daß $AB = AC$ wird, ziehe die Strecke BC und durch einen verschiebbaren Punkt D der letzteren die Grade AD.

Ferner drehe man den Winkel DAB um den Strahl AD als feste Axe, bis der Punkt B und somit der Strahl AB wieder in die Anfangs-

---

„directer" (directus, grade, ohne Umschweif), wenn man zeigt, wie das zu erhärtende Urtheil aus den bereits als richtig erkannten zusammengesetzt ist; ein „indirecter" heißt er dann, wenn man nachweist, daß die Behauptung einerseits einen von sämmtlichen ohne nähere Untersuchung denkbaren Fälle ausspricht und andrerseits unter diesen den einzigen Fall angiebt, welcher keinen Widerspruch in sich selbst enthält.

1) Dieser Satz, welcher für die meisten später folgenden Sätze von entscheidender Wichtigkeit ist, wurde bisher weder bewiesen, noch ausdrücklich als Axiom aufgestellt, was dann doch hätte geschehen müssen. — Von Anfängern wird man den Beweis seiner relativ größeren Schwierigkeit wegen nur ausnahmsweise verlangen. — Sätze ähnlicher Art werden im Folgenden mit einem Stern versehen werden.



lage gelangt (Ax. X u. §. 11, Z. II). Dabei beschreibt der Strahl AB eine Fläche (§. 8, Z. V); und diese theilt den Raum in zwei völlig gegen einander abgegrenzte Fächer[1], welche sich dadurch unterscheiden, daß das eine Fach den Strahl AD enthält, während das andere Fach keinen Punkt desselben besitzt.

Da nun dasjenige Fach, welches den Strahl AD enthält, beim Verschieben des Punktes D nach B hin in den Strahl AB zusammenschrumpft und deshalb, so lange die Strecke BD hinreichend klein ist, den Strahl AC ausschließt, während derselbe Strahl AC beim Verschieben des Punktes D nach C hin mit der Drehungsaxe AD zusammenfällt, so muß es eine Lage AE der Drehungsaxe geben, bei welcher AC in die Begrenzungsfläche des fraglichen Raumfachs fällt.

Dreht man nun die ganze Figur um AE, so gelangt AB hierbei u. A. einmal in die ursprüngliche Lage von AC, mithin zugleich der Punkt B an den ursprünglichen Ort von C, weil $AB = AC$ ist (§. 18, Z. IV). Dann deckt sich die Strecke EB mit dem ursprünglichen Ort von EC (§. 11, Z. II), so daß $EB = EC$ hervorgeht (§. 18, Z. III) und nicht nur EC in die ursprüngliche Richtung von EB fällt (§. 11, Z. II), sondern auch der Punkt C an den ursprünglichen Ort von B gelangt (§. 18, Z. IV). Nachdem man sich hiervon überzeugt hat, erkennt man, daß nun auch AC den ursprünglichen Ort von AB einnimmt (§. 11, Z. II), so daß hinsichtlich unserer Behauptung nichts mehr zu beweisen übrig bleibt.

Zusatz.

Sind zwei Winkel bei einer Beziehung ihrer Schenkelpaare auf einander gleich, so sind sie es auch bei der umgekehrten.

---

1) Im Grunde stellt man sich hierbei den Raum als einen beliebig begrenzten Körper vor, welcher durch die fragliche Fläche in zwei Theile getheilt wird, bei welchem wir aber den Uebergang aus einem Theil in den andern durch die äußere beliebig gewählte Begrenzung hindurch nicht gestatten. Es kömmt also nur darauf an, ob die innere Abgrenzung der beiden Theile vollständig ist.

Scholie.

Hätten die Sätze dieses §. keine oder nur eine bedingte Geltung, so müßte man bei der Angabe, daß zwei Winkel gleich sind, zugleich zu erkennen geben, wie die Schenkelpaare sich auf einander beziehen sollen. Das ist jetzt nicht nöthig.

Die obige Figur enthält als Bestandtheile solche Gebilde, welche in anderen Figuren häufig wiederkehren. Es verlohnt sich deshalb, denselben Namen zu geben und ihre Eigenschaften ein für allemal festzustellen.

§. 23.

Definitionen.

I. Je zwei Winkel, welche einen gemeinsamen Schenkel haben, während ihre zweiten Schenkel einen Gestreckten bilden, heißen **Nebenwinkel** von einander.[1])

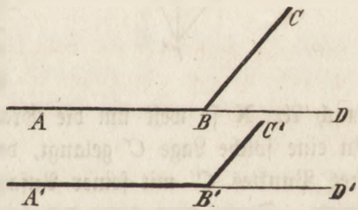
II. Je zwei Winkel, welche sich so hinlegen lassen, daß sie ein Paar Nebenwinkel bilden, heißen **Supplemente**[2]) von einander.

Lehrsatz.

Die Nebenwinkel gleicher Winkel sind gleich.

Vrs. $\angle ABC$ ist ein Nebenwinkel von $\angle CBD$, und $\angle A'B'C'$ ist ein Nebenwinkel von $\angle C'B'D'$; ferner ist $\angle CBD = \angle C'B'D'$.

Beh. Es ist $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



Bew. Wegen der Gleichheit der Winkel CBD und $C'B'D'$ kann man das eine Nebenwinkelpaar so auf das andere legen, daß B' in B, ferner $B'D'$ in BD und $B'C'$ in BC fällt (§. 14, V und §. 22). Dann ist nach §. 11, Z. II auch $B'A'$ in BA gefallen, so daß sich jetzt der $\angle A'B'C'$ mit dem $\angle ABC$ deckt, w. z. b. w.

Zusatz.

Supplemente von gleichen Winkeln sind gleich.

---

1) Z. B. die Winkel ADB und ADC der vorigen Figur.

2) Von supplēre, anfüllen, vollmachen.

§. 24.

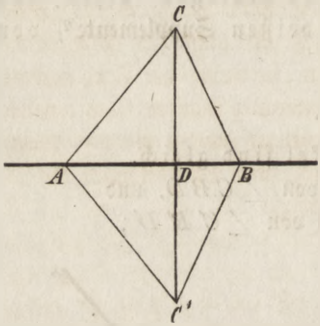
Definitionen.

I. Jeder Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein **rechter Winkel** oder schlechthin ein **Rechter.**[1] — Als Zeichen für einen rechten Winkel wird in Formeln ein etwas deformirtes R, nehmlich $\mathcal{R}$, benutzt werden.

II. Zwei Grade, welche einen rechten Winkel bilden, heißen **senkrecht** zu einander. Der Scheitel des rechten Winkels heißt der **Fußpunkt** der Senkrechten. — Als Zeichen für das Wort „senkrecht" wird in Formeln die Figur $\perp$ gebraucht werden.

Lehrsatz.

Von jedem Punkte außerhalb einer unbegrenzten Graden läßt sich auf dieselbe eine Senkrechte fällen.



Vrs. Es ist eine unbegrenzte Grade AB und außerhalb derselben ein Punkt C gegeben.

Beh. Durch den Punkt C läßt sich eine Grade ziehen, welche auf AB senkrecht steht.

Bew. Denkt man den Punkt C mit der Graden AB zu einer starren Figur verbunden (was in der nebenstehenden Zeichnung durch Verbindung des Punktes C mit A und B mittelst Linien veranschaulicht ist), so kann man die Figur nach Ax. X so weit um die Grade AB herumdrehen, bis der Punkt C in eine solche Lage C' gelangt, daß AB von der graden Verbindungslinie des Punktes C' mit seiner Anfangslage C in einem Punkte D geschnitten wird. Dreht man dann den so bestimmten Winkel ADC' so weit um AB herum, bis C' wieder in die Anfangslage C gelangt (Ax. X), so deckt sich der $\angle ADC'$ mit seinem Nebenwinkel ADC. Mithin ist dieser nach der Definition ein Rechter, oder, was dasselbe heißt, $CD \perp AB$.

§. 25.

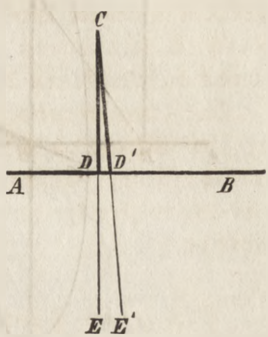
Lehrsatz.

Von jedem einzelnen Punkte außerhalb einer unbegrenzten Graden läßt sich auf dieselbe **nur eine** Senkrechte

1) Z. B. der Winkel AEB der Figur §. 22.

fällen. — M. a. W.: Alle Graden, welche auf einer einzigen Graden senkrecht stehen und durch einen Punkt außerhalb derselben hindurchgehen, decken sich.

Vrs. Vom Punkte C aus seien auf die Grade AB nach einander zwei Senkrechte gefällt, deren Fußpunkte D und D' genannt sind.



Beh. D und D' sind zwei Namen eines einzigen Punktes; m. a. W.: CD' ist dieselbe Grade, wie CD.

Bew. Dreht man die starre Figur $ADCD'B$ um die Grade AB, so muß der Punkt C, weil die rechten Winkel ADC und $AD'C$ ihren Nebenwinkeln ADE und $AD'E'$ gleich sind (§. 24, D. I u. II), im Verlauf einer Umdrehung sowohl in einen Punkt E der Verlängerung von AD, als auch in einen Punkt E' der Verlängerung von AD' gelangen. Fiele nun nicht der Punkt E' mit E, also (§. 11, Z. II) nicht die ganze Grade CE' mit der ganzen Graden CE zusammen, so würde die Drehungsaxe AB von der graden Verbindungslinie des bewegten Punktes C mit seiner Anfangslage während einer Umdrehung zweimal geschnitten werden (nehmlich in der Lage EC und in der Lage $E'C$), und dies ist nach Ax. X unmöglich. Folglich ist die Behauptung richtig.

Zusatz.

Es giebt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln. — Zwei grade Linien, welche auf einer dritten in verschiedenen Punkten senkrecht stehen, haben keinen Punkt gemein.

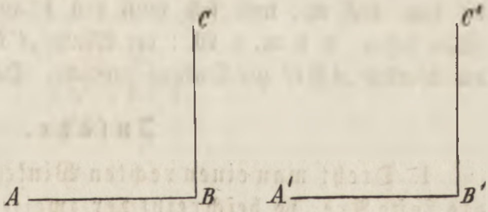
§. 26.

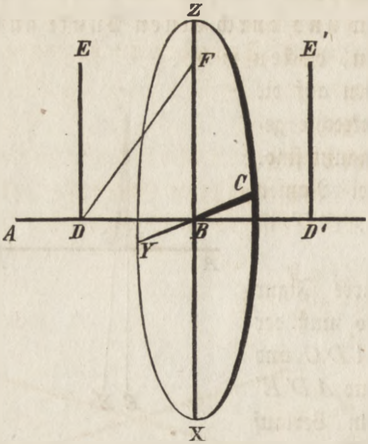
Lehrsatz.

Alle rechten Winkel sind gleich.

Vrs. Die beiden Winkel ABC und $A'B'C'$ sind rechte.

Beh. Es ist $\angle ABC = \angle A'B'C'$.





Bew. Dreht man den rechten Winkel ABC um den Schenkel BA als feste Axe ganz herum, so beschreibt der andere Schenkel BC eine Fläche $CXYZC$, welche zwei Theile des Raums völlig gegen einander abgrenzt.

Legt man dann den zweiten rechten Winkel $A'B'C'$ so hin, daß sein Scheitel B' in einen Punkt D von BA und der Schenkel $B'A'$ in in die Richtung von DA fällt, so kann sein zweiter Schenkel nicht einen Punkt F mit jener Fläche gemein haben, weil sonst der nach §. 25 unmögliche Erfolg einträte, daß vom Punkte F nach der Graden AB zwei verschiedene Senkrechte FD und FB führten. Mithin befindet sich der zweite Schenkel $B'C'$ in einer Lage DE, welche keinen Punkt mit der Fläche gemein hat.

Legt man ferner den rechten Winkel $A'B'C'$ so hin, daß sein Scheitel B' in einen Punkt D' der Verlängerung von AB über B hinaus und sein Schenkel $B'A'$ in die Richtung $D'A$ fällt, so muß der Schenkel $B'C'$ aus ähnlichen Gründen, wie oben, ebenfalls eine solche Lage $D'E'$ haben, welche keinen Punkt mit der Fläche gemein besitzt.

Beide Lagen DE und $D'E'$ des Schenkels $B'C'$ befinden sich aber in zwei Raumtheilen, welche durch die Fläche $CXYZC$ völlig gegen einander abgegrenzt sind, so daß der Winkel $A'B'C'$ nicht von der Lage ADE in die Lage $AD'E'$ übergeführt werden kann, ohne daß die Grenzfläche durchschritten wird (Ax. VII). Sei demnach F der Punkt der Grenzfläche, in welchen C' bei der längs AB vor sich gehenden Verschiebung des Schenkels $A'B'$ einmal gelangt, so nimmt $B'C'$ in demselben Moment die Lage BF an, weil sich sonst von F aus zwei Senkrechte auf AB fällen ließen; d. h. m. a. W.: der Winkel $A'B'C'$ ist mit der Lage ABF des Winkels ABC zur Deckung gebracht. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zusätze.

I. Dreht man einen rechten Winkel um den einen Schenkel als feste Axe, so beschreibt der zweite eine Fläche, in welcher jede durch den Scheitelpunkt gehende Senkrechte zum festen Schenkel ganz liegt.

II. Je zwei rechte Winkel sind Supplemente von einander.

§. 27.

Definition.

Die beiden Nebenwinkel eines einzigen Winkels heißen **Scheitelwinkel** von einander.

Lehrsatz.

Je zwei Scheitelwinkel sind gleich.

Vrs. Die Winkel BAC und DAE sind Scheitelwinkel.

Beh. Es ist $\angle BAC = \angle DAE$.

Bew. Die Beh. trifft zu nach §. 23, weil $\angle BAC$ und $\angle DAE$ nach der Definition Nebenwinkel von gleichen Winkeln sind, welche sich an der Stelle CAD decken.

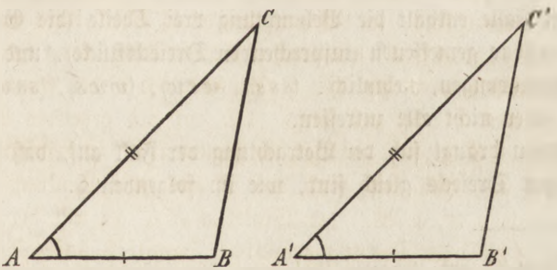
Zusatz.

Schneiden sich zwei Grade so, daß sie einen rechten Winkel bilden, so sind auch die übrigen von ihnen gebildeten Winkel rechte.

§. 28.

Lehrsatz. (Seiten-Winkel-Seiten-Satz[1]).

Dreiecke sind congruent, wenn sie in **zwei Seiten und** in **dem Winkel derselben** übereinstimmen.



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$; 2) $AC = A'C'$; 3) $\angle A = \angle A'$.

1) Wir beziehen uns auf diesen Congruenzsatz durch die Bezeichnung: (*sws*).

Beh. Es ist: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bew. Man lege das $\triangle ABC$ so auf das $\triangle A'B'C'$, daß die Ecke A in A', die Seite AB längs der Seite $A'B'$ und die Seite AC längs der Seite $A'C'$ fällt; was angeht, weil nach der Vrs. 3) $\angle A = \angle A'$ ist (§. 22). Dadurch gelangt B nach B', und C nach C', weil nach der Vrs. 1) $AB = A'B'$, und nach der Vrs. 2) $AC = A'C'$ ist (§. 18, Z. IV). Dann deckt sich endlich die dritte Seite BC mit $B'C'$, weil sie Grade sind, welche zwei gemeinsame Punkte B' und C' besitzen (§. 11, Z. II).

Zusatz.

Stimmen Dreiecke in zwei Seiten und in deren Winkel überein, so sind die einander entsprechenden[1] Dreiecksstücke sämmtlich paarweise gleich.

— In obiger Figur ist nehmlich $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = C'$, weil sie auf die beschriebene Weise zur Deckung gebracht sind (§. 18, Z. III und §. 14, V).

Scholie.

Die Congruenzsätze über Dreiecke sind deshalb außerordentlich wichtig, weil sie es ermöglichen, die Gleichheit von Strecken und Winkeln zu ermitteln, ohne sie unmittelbar zu messen, und weil die Betrachtung der complicirteren Figuren sich, wie wir später sehen werden, auf die Betrachtung von Dreiecken zurückführen läßt.

Die noch folgenden Sätze über Dreiecksconguenzen sind sämmtlich Umkehrungen des obigen, d. h. sie gehen aus ihm durch Vertauschung eines Theils der Voraussetzung mit einem Theil der Behauptung hervor. — In unserem Falle enthält die Behauptung drei Theile (die Gleichheit der nicht unmittelbar gemessenen entsprechenden Dreiecksstücke), und es giebt 5 mögliche Umkehrungen, nehmlich: (sss), (wsw), (wws), (ssw), (www), von denen aber nicht alle zutreffen.

Außerdem drängt sich der Betrachtung der Fall auf, daß zwei Stücke eines einzigen Dreiecks gleich sind, wie im folgenden §.

---

1) Entsprechend oder homolog (ὁμόλογος, übereinstimmend) nennt man solche Stücke verschiedener Figuren, welche in diesen Figuren nach gleicher Aufsuchungsmethode beim Ausgehen von gegebenen Stellen aus gefunden werden. — Oben können als Ausgangsstellen etwa die Punkte A, A' und die Strahlen AB, $A'B'$ dienen.

§. 29.

Definitionen.

I. Jedes Dreieck, welches **zwei** gleiche Seiten besitzt, heißt **gleichschenklig**; die gleichen Seiten heißen die **Schenkel**, deren gemeinsame Ecke die **Spitze**, die dritte Seite die **Basis**,[1]) und die anliegenden[2]) Winkel der letzteren die **Basiswinkel**.

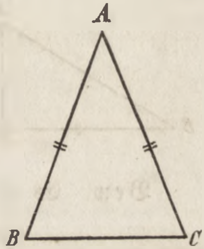
II. Jedes Dreieck, welches **drei** gleiche Seiten besitzt, heißt **gleichseitig**.

Lehrsatz.

In jedem einzelnen **gleichschenkligen** Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Vrs. Im $\triangle ABC$ ist $AB = AC$.

Beh. Es ist: $\angle ACB = \angle ABC$.



Bew. Nach §. 22 läßt sich das $\triangle ABC$ so hinlegen, daß A wieder an seinen ursprünglichen Ort, zugleich aber AB in die ursprüngliche Richtung von AC, und AC in die ursprüngliche Richtung von AB fällt. Nachdem diese Umlegung ausgeführt ist, haben ferner auch die Punkte B und C ihren Ort gewechselt, weil nach der Vrs. $AB = AC$ ist, so daß die Strecke BC ihren ursprünglichen Ort in umgekehrter Lage deckt (§. 11, Z. II). Demnach ist $\angle B = \angle C$, weil sie zur Deckung gebracht sind (§. 14, V).

Zusätze.

I. In jedem einzelnen **gleichseitigen** Dreieck sind sämmtliche drei Winkel gleich.

— Denn es ist über jeder Seite gleichschenklig.

II. In jedem einzelnen Dreieck und auch in congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.[3])

— Wegen der soeben bewiesenen Gültigkeit dieses Satzes für das einzelne Dreieck ist man nehmlich auch bei congruenten Dreiecken nicht

---

1) βάσις, Fuß.

2) Winkel und Linie werden als einander anliegende Figuren bezeichnet, wenn die Linie ein Schenkel des Winkels ist.

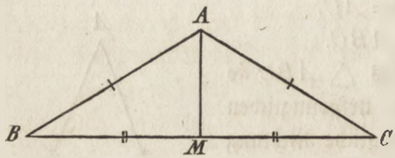
3) Gegenüberliegende Seiten und Winkel eines Dreiecks, Gegenseite eines Winkels und Gegenwinkel einer Seite heißen solche, bei denen die Seite kein Schenkel des Winkels ist.

nur dann gegen die Möglichkeit eines Irrthums gesichert, wenn die fraglichen Stücke sich in Folge der Voraussetzung entsprechen, sondern auch dann, wenn man zwei gleiche Seiten des einen der congruenten Dreiecke mit einander verwechselt.

§. 30.

Lehrsatz.

Diejenige Grade, welche die **Spitze** eines gleichschenkligen Dreiecks **mit der Mitte der Basis verbindet**, steht auf der letzteren senkrecht und bildet mit den beiden andern Seiten gleiche Winkel.



Vrs. Im $\triangle ABC$ ist 1) $AB = AC$, 2) halbirt AM die Basis BC in M.

Beh. Es ist: 1) $AM \perp BC$ und 2) $\angle MAB = \angle MAC$.

Bew. Es ist

$$\triangle ABM \cong \triangle ACM; \;. \;. \;. \;(sws)$$

denn man hat: $AB = AC$ (Vrs. 1), $BM = CM$ (Vrs. 2), $\angle B = \angle C$ (§. 29). Aus dieser Congruenz folgt nach §. 29, Z.:

$$\angle AMB = \angle AMC,\; AM \perp BC \;.\;.\;.\;.\;. \text{§. 24, D. II}$$

und $\quad \angle MAB = \angle MAC.$

Zusätze.

I. **Fällt man von der Spitze** eines gleichschenkligen Dreiecks **auf die Basis eine Senkrechte**, so halbirt diese die Basis und bildet mit den andern Seiten gleiche Winkel.

— Denn sonst müßte es zwei verschiedene Senkrechten von A auf BC geben, was gegen §. 25 stritte.

II. **Liegt eine Dreiecksecke senkrecht über der Mitte ihrer Gegenseite**, so ist das Dreieck über der letzteren gleichschenklig und die Senkrechte bildet mit den andern Seiten gleiche Winkel.

— Denn es ist

$$\triangle AMB \cong \triangle AMC \;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(sws),$$

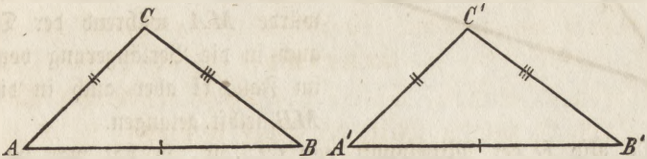
weil $MB = MC$, $MA = MA$ und $\angle AMB = \angle AMC$ als rechte.

Anm. Diese Zusätze sind Umkehrungen vom Hauptsatz. (Vergl. die Scholie zu §. 28.)

§. 31.

Lehrsatz. (Drei-Seiten-Satz.[1])

Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $BC = B'C'$.



Beh. Es ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

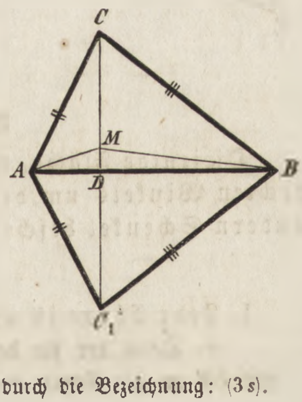
Bew. Man lege das $\triangle A'B'C'$ mit der Ecke A' in A, mit der Seite $A'B'$ in die Richtung AB und drehe es so weit herum, bis AB von der Strecke CC' geschnitten wird (Ax. X). Der Schnittpunkt heiße D, und C' nehme bei dieser Lage des $\triangle A'B'C'$ den Ort C_1 ein. Da nach Vrs. 1) $AB = A'B'$ ist, so ist B' nach B gelangt, und man hat, weil jetzt das $\triangle A'B'C'$ an der Stelle ABC_1 liegt, nach Vrs. 2) und 3) in der Figur $ACBC_1$ die Gleichungen:

$$AC = AC_1, \; BC = BC_1.$$

Der Punkt D, in welchem AB von der Strecke CC_1 geschnitten wird, kann, je nach der Beschaffenheit der beiden Dreiecke: I. zwischen A und B, oder II. in einer Verlängerung von AB, oder III. in einem Endpunkt dieser Seite liegen.

Fall I und II. (Im Falle II seien die Namen der Dreiecksecken so gewählt, daß D ein Punkt der Verlängerung von BA über A hinaus ist.)

I.



Von der Mitte M der Strecke CC_1 aus ziehe man die Graden MA, MB. Dann ist in den gleichschenkligen Dreiecken CAC_1 und CBC_1 nach §. 30, L.:

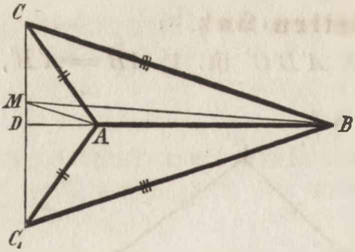
$$MA \perp CC_1, \; MB \perp CC_1.$$

Dies zeigt in Verbindung mit dem Axiom X an, daß M kein andrer Punkt als der Punkt D sein kann. Denn wenn M und D verschiedene Punkte wären, so würde die grade Verbindungslinie der Punkte A und B sich mit der Graden CC_1, wenn man das $\triangle CAC_1$ um diese Linie dreht, nicht nur

---

[1] Wir beziehen uns auf diesen Congruenzsatz durch die Bezeichnung: (3 s).

II.



in D, sondern auch noch in M schneiden, und zwar beim Falle I beide Male zwischen A und B, beim Falle II beide Male in der Verlängerung. Im Falle I nehmlich würde MA während der Drehung auch in die Verlängerung von BM, im Falle II aber auch in die Linie MB selbst gelangen.

Da also D der Mittelpunkt von CC_1 ist, so hat man im gleichschenkligen $\triangle\, CBC_1$ nach §. 30, L. ferner:

$$\angle DBC = \angle DBC_1,$$

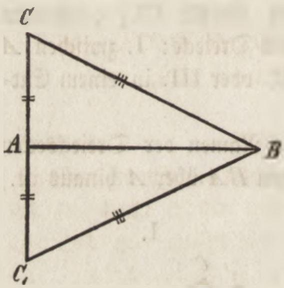
d. i.: $\angle ABC = \angle ABC_1 = \angle A'B'C'$;

so daß

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \;\; . \; . \; (sws)$$

hervorgeht, weil außer der soeben bewiesenen Gleichheit der Winkel bei A und A' aus der Voraussetzung die Gleichheit der anliegenden Seiten bekannt ist.

III.



Fall III: Trifft die grade Verbindungslinie der Punkte C und C_1 sich mit AB in einem Endpunkt dieser Seite, so heiße derselbe A. Dann ist im gleichschenkligen $\triangle\, CBC_1$ nach der Vrs. 2) unmittelbar:
$\angle ABC = \angle ABC_1$ . . . . . §. 30, L.,
also:
$\triangle ABC \cong \triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$ ... (sws).

§. 32.

Definition.

Diejenige Fläche, welche bei der Drehung irgend eines rechten Winkels um den einen Schenkel als feste Axe vom andern Schenkel beschrieben wird, heißt eine **Ebene**.

Zusätze.

I. Jede Ebene ist unbegrenzt.

— Denn der sie beschreibende Schenkel ist unbegrenzt, d. h. er geht bis an die Grenze des vorgestellten Raumtheils.

II. Jede Ebene ist ungeschlossen.

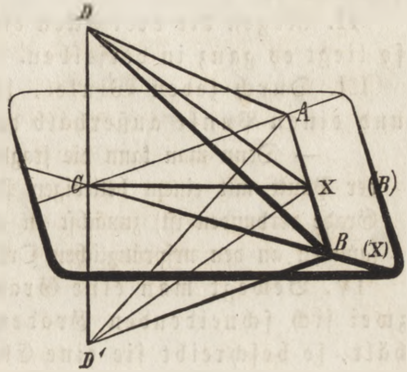
— Denn sonst wäre sie nicht unbegrenzt.

§. 33.

Lehrsatz.*

Jede Grade, welche mit einer Ebene **zwei** Punkte gemein hat, liegt **ganz** in derselben.

Vrs. Eine Grade und eine Ebene haben die beiden Punkte A und B gemein.



Beh. Jeder beliebige Punkt X der Graden AB liegt in der Ebene.

Bew. Man ziehe von A, B und X aus die drei Graden AC, BC und XC nach dem Scheitel C des rechten Winkels, durch dessen Drehung die Ebene entstanden ist, trage auf dem andern Schenkel des letzteren und auf seiner Verlängerung zwei gleiche Strecken CD und CD' ab und verbinde schließlich alle aufgezählten Punkte durch grade Linien.

Dann ist

$$CA \perp DD', \; CB \perp DD',$$

weil derjenige Schenkel des rechten Winkels, welcher die Ebene beschrieb, mit CA und mit CB zwei Punkte gemein hatte, als er durch A, beziehungsweise durch B ging. Da außerdem C die Mitte von DD' ist, so folgt: $DA = D'A$, ... im $\triangle DAD'$ n. §. 30, Z. II,

$DB = D'B'$ . . . . . . im $\triangle DBD'$ n. §. 30, Z. II.

Ferner ist: $AB = AB$, mithin:

$\triangle DAB \cong \triangle D'AB$, ... (3 s)

$\angle DAB = \angle D'AB$, als entsprechende Stücke congruenter Dreiecke.

Das Letztere giebt mit $DA = D'A$ und $AX = A'X$ zusammen:

$\triangle DAX \cong \triangle D'AX$, ... ($sws$)

$DX = D'X$, als entsprechende Stücke congruenter Dreiecke.

Und hieraus in Verbindung mit $DC = D'C$, $CX = C'X$ folgt:

$\triangle DCX \cong \triangle D'CX$, ... (3 s)

$\angle DCX = \angle D'CX$, als entsprechende Stücke congruenter Figuren.

$\angle DCX = \mathcal{R}$ . . . . §. 24, D. I.

Da nach §. 26 alle rechten Winkel gleich sind, so muß mithin der um DC gedrehte rechte Winkel bei der Beschreibung der Ebene auch in die Lage DCX gelangt sein, so daß X ein Punkt der Ebene ist, w. b. w.

Zusätze.

I. Liegen der Scheitel eines Winkels und je ein zweiter Punkt seiner Schenkel in einer Ebene, so liegt er ganz in der Ebene.

II. Liegen die drei Ecken eines Dreiecks in einer Ebene, so liegt es ganz in derselben.

III. Durch jeden Winkel, jedes Dreieck, je eine Grade und einen Punkt außerhalb derselben giebt es eine Ebene. — Denn man kann die fragliche Figur (im letzten Falle, nachdem der Punkt mit einem beliebigen Punkt der Graden durch eine zweite Grade verbunden ist) zunächst in eine Ebene und dann mit dieser zusammen an den ursprünglichen Ort zurücklegen.

IV. Bewegt man eine Grade in der Weise, daß sie mit zwei sich schneidenden Graden je einen Punkt gemein behält, so beschreibt sie eine Ebene, und zwar stets dieselbe Ebene, wie die Bewegung im Übrigen auch vor sich gehen mag. — Denn die bewegliche Grade behält mit derjenigen Ebene, welche sich nach Zus. III durch die beiden festen Graden legen läßt, stets zwei Punkte gemein, bleibt also nach dem obigen Lehrsatz ganz in dieser Ebene.

V. Je zwei Ebenen, welche die Ecken eines Dreiecks gemein haben, decken sich vollständig (so weit beide vorhanden sind). — Jede Ebene läßt sich in sich selbst und in jeder andern nach Willkür verschieben.

VI. Jede unbegrenzte Ebene wird von jeder in ihr liegenden unbegrenzten Graden in zwei völlig von einander getrennte Theile getheilt.

— Denn erstens kann man zwei Punkte des Randes einer unbegrenzten, d. h. nach §. 6, D. V: einer beliebig begrenzten und beliebig zu vergrößernden Ebene durch eine Grade verbinden (L.) und dadurch die Ebene in zwei Theile theilen, von denen jeder durch die Grade und durch eine beliebig gewählte Linie vollständig begrenzt ist. Zweitens kann man die zu untersuchende Ebene so in die erste hineinlegen, daß die in ihr liegende Grade mit derjenigen, welche die erstere zerschneidet, einen Theil gemein erhält (Z. V), und schließlich überall bis zum Rande der ersteren ausdehnen. Hierdurch ist die Behauptung erhärtet.

§. 33.

Postulat II.

Durch drei beliebige Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, eine Ebene zu legen.

§. 34.

Definitionen.

I. Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich auf die Betrachtung solcher Figuren beschränkt, die sich ganz in eine Ebene legen lassen, heißt **Planimetrie.**[1])

II. Derjenige Theil der Geometrie, welcher sich **nicht** auf die Betrachtung solcher Figuren beschränkt, die sich ganz in eine Ebene legen lassen, heißt **Stereometrie.**[2])

---

1) planus, eben, und μετρεῖν, messen.
2) στερεός, fest, und μετρεῖν, messen.

Planimetrie.

Capitel II.

Die Grundeigenschaften der Figuren in der Ebene, hauptsächlich der gradlinigen Figuren.

A. Untersuchung der Eigenschaften derselben.

§. 35.

Lehrsatz.

In jeder Ebene giebt es eine geschlossene[1] Linie, deren Punkte sämmtlich einen beliebig gewählten gleichen Abstand von einem beliebig bestimmten Punkt derselben Ebene haben.

— Denn bei der in der Definition (§. 32) angegebenen Erzeugung der Ebene beschreibt jeder einzelne Punkt des bewegten Schenkels eine solche geschlossene Linie (Ax. X und §. 8, Zus. V), indem seine Entfernung vom Scheitel des rotirenden rechten Winkels constant[2]) bleibt. Und man kann die Ebene nach §. 33, Zus. V so in sich verschieben, daß ein beliebiger Punkt der Ebene an die Stelle jenes Scheitels gelangt.

Definitionen.

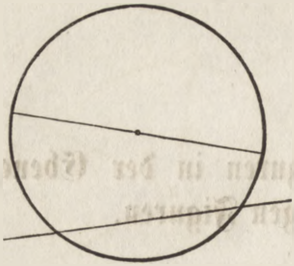
I. Jede in einer Ebene liegende Linie, welche alle Punkte enthält, die von einem Punkte derselben Ebene gleich weit entfernt sind, heißt ein **Kreis**, jeder Theil von ihr ein **Kreisbogen** oder schlechthin ein **Bogen**. — Derjenige Punkt der Ebene, von welchem alle Punkte des Kreises oder des Kreisbogens gleich weit entfernt sind, heißt das

1) Eine geschlossene Linie ist eine solche, welche durch einen einzigen Punkt nicht in zwei völlig getrennte Theile getheilt wird. (Vergl. §. 10.)

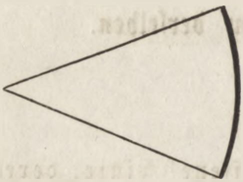
2) constans, unverändert.

Centrum[1]) desselben, jede Strecke zwischen dem Centrum und einem Punkte des Kreises ein **Radius**[2]) oder **Halbmesser.**

II. Derjenige vom Kreise begrenzte Theil der Ebene, in welchem das Centrum liegt, heißt **Kreisscheibe** oder **Kreisfeld.**



III. Jede Grade, welche mit einem Kreise zwei Punkte gemein hat, heißt eine **Secante**[3]) desselben, die Strecke zwischen den beiden Kreispunkten **Sehne**, jede Sehne, welche durch das Centrum geht, ein **Durchmesser.**



IV. Jede Figur, welche aus einem Kreisbogen und den Radien seiner beiden Endpunkte besteht, heißt ein **Kreisausschnitt** oder **Sector.**[3])

V. Jeder von zwei Radien gebildete Winkel heißt ein **Centriwinkel.**

Zusätze.

I. Jeder Kreis ist eine geschlossene Linie. — Jeder vom Centrum ausgehende Strahl wird vom Kreise getroffen.

II. Alle Durchmesser eines Kreises sind gleich, und zwar gleich dem Doppelten eines Radius.

III. Je zwei Radien eines Kreises bilden mit demselben **zwei** Kreisausschnitte.

IV. Congruente Kreise oder Kreisbogen haben gleiche Radien.

§. 36.

Postulat III.

Um einen bestimmten Punkt einer Ebene in dieser mit einem bestimmten Radius einen Kreis zu ziehen.

---

1) centrum, κέντρον, Stachel. — Das Centrum heißt auch Mittelpunkt der Kreisscheibe, und der Kreis als Begrenzung der letzteren Peripherie (περιφέρεια, von περιφέρειν, herumtragen).

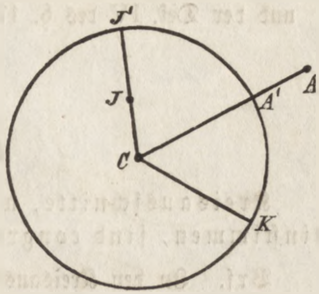
2) radius, Radspeiche.

3) Von secare, schneiden, zerschneiden.

§. 37.

Lehrsatz I.

Jeder Punkt **innerhalb** eines Kreisfeldes hat einen **kleineren**, jeder Punkt **außerhalb** aber einen **größeren** Abstand vom Centrum, als die Länge eines Radius beträgt.



Vrs. K sei ein Punkt des Kreises um das Centrum C, J ein Punkt innerhalb, A ein Punkt außerhalb des Kreisfeldes.

Beh. $CJ < CK < CA$.

Bew. Nach der Vrs. muß man an die Grenze des Kreisfeldes gelangen, wenn man CJ verlängert, und wenn man CA verkürzt. Die so erhaltenen Radien CJ' und CA' sind aber nach der D. mit CK gleich. Daher trifft die Beh. zu nach §. 20, II.

Lehrsatz II.

Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Kreiscentrum **kleiner** als ein Radius ist, liegt **innerhalb** des Kreisfeldes; und jeder Punkt, dessen Entfernung vom Centrum **größer** als ein Radius ist, liegt **außerhalb** des Kreisfeldes.

Vrs. CK ist ein Radius des Kreises um C, und ferner ist

$$CJ < CK < CK.$$

Beh. J liegt innerhalb, A aber außerhalb des Kreisfeldes.

Bew. Geht man von dem innerhalb des Kreisfeldes liegenden Punkt C auf der Graden CJ nach J, so kann man dabei die Grenze des Kreisfeldes nicht überschreiten, weil zu diesem Zweck die Entfernung von C dem Radius CK gleich werden muß; verlängert man aber den Strahl CA über A hinaus, so kann man die Begrenzung des Kreisfeldes, weil schon $CA > CK$ ist, nicht wieder treffen, was doch der Fall sein müßte, wenn A im Kreisfelde liegen sollte.

Zusätze.

I. Alle Kreise von gleichen Radien sind congruent; und zwar decken sie sich stets vollständig, sobald die Centren zusammenfallen.[1])

---

1) In der Planimetrie wird es als selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Figuren in eine einzige Ebene gelegt sind.

II. Man kann jeden Kreisbogen in Deckung mit einem Bogen desselben Kreises verschieben.

III. Alle Kreisbogen congruenter Kreise sind gleichartige Größen.

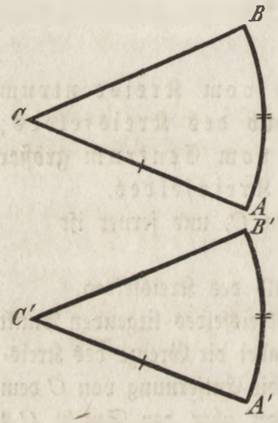
— Denn es werden nach Z. II die Bedingungen des Ax. XII und der Def. IV des §. 17 erfüllt.

§. 38.

Lehrsatz.

Kreisausschnitte, welche in den **Radien und Bogen** übereinstimmen, sind congruent.

Vrs. In den Kreisausschnitten ACB und $A'C'B'$ ist:



1) Rad. CA = Rad. $C'A'$,
2) Bog. AB = Bog. $A'B'$.

Beh. Es ist: $ACB \cong A'C'B'$.

Bew. Man lege den Kreisausschnitt ABC so auf $A'B'C'$, daß C nach C', CA längs $C'A'$ und AB längs $A'B'$ fällt, was nach Vrs. 1) und §. 37, Z. I angeht. Dadurch fällt B nach B', weil sonst im Widerspruch zu Vrs. 2) einer der Bogen AB, $A'B'$ einem Theile des andern congruent und gleich wäre, das letztere, da sie Größen sind (§. 37, Z. III). Dann ist aber schließlich der Radius CB in die Lage $C'B'$ gefallen, da er mit dieser die beiden Punkte C und B gemein erhalten hat.

Zusatz.

In jedem einzelnen Kreise, so wie in congruenten Kreisen, stehen auf gleichen Bogen gleiche Centriwinkel.[1])

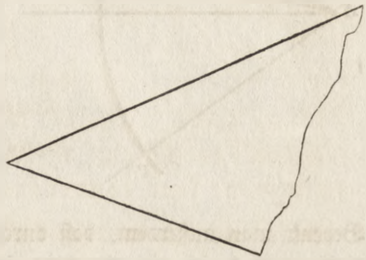
1) Man gebraucht in gleicher Bedeutung die Ausdrücke: „Ein Winkel steht auf einem Bogen.“ „Ein Bogen endigt in den Schenkeln, oder: liegt zwischen den Schenkeln eines Winkels.“

§. 39.

Einführung des Größenbegriffs in den Winkel.

Definitionen.

I. Jedes durch einen Winkel begrenzte Stück einer übrigens unbegrenzten Ebene heißt ein **Winkelfeld** oder auch schlechthin ein **Winkel**. — Ein Winkelfeld darf die Ebene theilweise oder ganz, einfach oder mehrfach bedecken und wird namentlich auch in letzterer Beziehung als von andern verschieden angesehen.



Giebt man nicht auf irgend eine Weise das Gegentheil an, so meint man unter den zur Auswahl stehenden Winkelfeldern stets das kleinste.

II. Winkelfelder, welche, abgesehen von der nicht durch die Schenkel gebildeten Begrenzung, congruent sind, heißen **gleich**.

III. Winkelfelder **summiren** heißt, sie in einer Ebene so an einander legen, daß Scheitel in Scheitel und Schenkel in Schenkel fällt. Das dann von den beiden äußersten Schenkeln begrenzte Winkelfeld, welches die summirten Winkelfelder als Theile enthält, heißt die **Summe** der letzteren.

Zusatz.

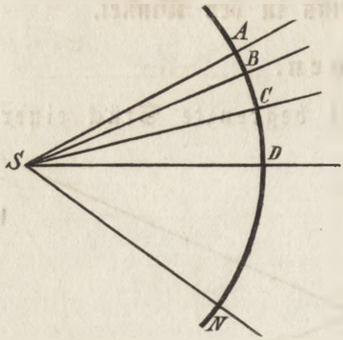
Die von gleichen Winkeln bestimmten Winkelfelder sind paarweise gleich.

§. 40.

Lehrsatz.*

Alle Winkelfelder lassen sich (bei unverbrüchlicher Beobachtung des Begriffs der Winkelfelder und desjenigen der Summation derselben) als gleichartige Größen behandeln.

Bew. Summirt man Winkelfelder in der in §. 39, III vorgeschriebenen Weise und zieht um den gemeinsamen Scheitel S derselben einen Kreis, so wird derselbe von den Schenkeln in Punkten $A, B, C, D, \ldots\ldots, N$ geschnitten, und das Winkelfeld ASN, in welchem der Bogen ($ABCD \ldots N$) liegt, ist die Summe. Aus §. 37, Z. III aber ist bekannt, daß dieser Bogen eine Größe ist, so daß man nach §. 17, D. I, 2. seine Theile beliebig vertauschen darf, ohne sein Quantum, und somit auch ohne die Lage seiner Endpunkte zu ändern, da wieder ein Kreisbogen von gleichem Radius hervorgeht.



Bedenkt man außerdem, daß durch die Veränderung der Folge der Bogentheile nach §. 38 die einzelnen summirten Winkelfelder nur eine andere Folge erhalten haben, so ist bewiesen, daß die Winkelsumme durch Veränderung der Folge der Theile nicht geändert wird.

Da ferner die Bedeutung der Eintheilung durch den Gegensatz zur Summation bestimmt ist, so geschieht die Theilung eines Winkels (Winkelfeldes) einzig und allein durch grade Linien, welche vom Scheitel aus innerhalb des Winkelfeldes gezogen werden. Diese theilen den Bogen AD in analoger Weise. Und man sieht endlich hieraus, daß die Größeneigenschaften (§. 17, D. I) des Winkelfeldes durch diejenigen des Bogens sämmtlich entschieden sind.

Hiermit sind die Winkelfelder in die Reihe der Größen als vollberechtigt eingefügt.

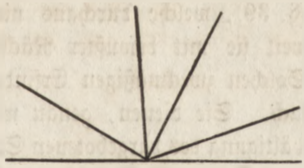
Anm. Daß der hieraus nach §. 17 entspringende Begriff des kleineren Winkelfeldes dem in §. 14, V definirten des kleineren Winkels correspondirt, bedarf keiner näheren Ausführung.

Auch geht aus dem Obigen klar hervor, daß man häufig das Wort „Winkel" für das längere „Winkelfeld" gebrauchen kann, ohne dadurch einen Irrthum herbeizuführen.

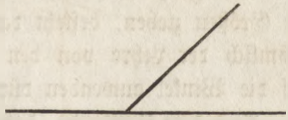
Zusätze.

I. Der Qualität nach sind die Winkelfelder von allen sonstigen Raumgrößen verschieden.

— Denn sie sind keine Theile von Körpern oder Flächenstücken oder Linienstücken.

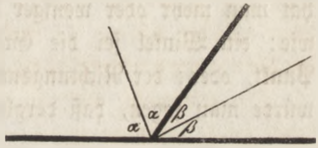


II. Die Summe aller Winkel auf einer Seite einer Graden beträgt einen Gestreckten.



III. Die Summe je zweier Nebenwinkel, sowie die Summe je zweier Supplemente,[1] beträgt einen Gestreckten.

IV. Jeder Gestreckte beträgt zwei Rechte: $G = 2 \llcorner$.



V. Die Halbierungslinien je zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

— Denn benennt man mit α die beiden Hälften des einen Nebenwinkels, mit β diejenigen des andern, so ist nach III und IV

$$2\alpha + 2\beta = 2 \llcorner,$$

mithin

$$\alpha + \beta = \llcorner.$$

VI. Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum beträgt $2\,G = 4 \llcorner$.

Scholie.

Nach den Ausführungen dieses §. ist der Winkel auf künstliche Weise zu einer Größe gemacht worden, d. i. durch ganz willkürliche Festsetzungen

1) Vergl. §. 23.

(§. 39), welche durchaus nicht etwa aufhören Erfindungen zu sein, weil sie mit bewußter Rücksicht auf die Zweckmäßigkeit eingeführt sind. Solchen zweckmäßigen Erfindungen begegnet man in der Mathematik vielfach. Sie dienen, genau wie in der Technik, dazu, die Mittel zur Bewältigung des dargebotenen Stoffs zu vereinfachen und wirksamer zu machen.

Der große Vortheil, welchen wir aus der Einfügung der Winkel unter die Größen ziehen, besteht darin, daß wir jetzt alle Sätze der Arithmetik, nehmlich der Lehre von den gemeinsamen Eigenschaften aller Größen, auf die Winkel anwenden dürfen.

Aus dem Umstande, daß die Qualität der Winkelgröße noch zu keiner anderen bekannten Größenqualität in Beziehung gesetzt ist, leitet man später, wie hier vorweg bemerkt werden mag, in der Ähnlichkeitslehre die Berechtigung ab, die Winkelgröße als eine bloße arithmetische Zahl zu definiren, welche auf unzweifelhafte Weise den zu einem Centriwinkel gehörenden Bogen aus dem Radius bestimmt, und umgekehrt. Diese Zahl hat man mehr oder weniger bewußt im Sinne bei solchen Redewendungen wie: ein Winkel sei die Größe der Drehung eines Strahls um einen Punkt, oder: der Richtungsunterschied zweier Strahlen u. s. w. Correcter würde man sagen, daß dergleichen durch Winkel bestimmt werde.

§. 41.

Definitionen.

I. Ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt **spitz**; ein Winkel, welcher größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, heißt **stumpf**.

II. Alle Winkel, welche kleiner als ein gestreckter sind, heißen **hohl** oder **concav**,[1] alle größeren Winkel aber **überstumpf** oder **convex**.[2]

Zusätze.

I. Jeder spitze Winkel hat einen stumpfen Nebenwinkel, und jeder stumpfe einen spitzen. (§. 40, Z. III und IV.)

II. Haben zwei spitze oder zwei stumpfe Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein, so bilden die beiden anderen Schenkel keinen gestreckten.

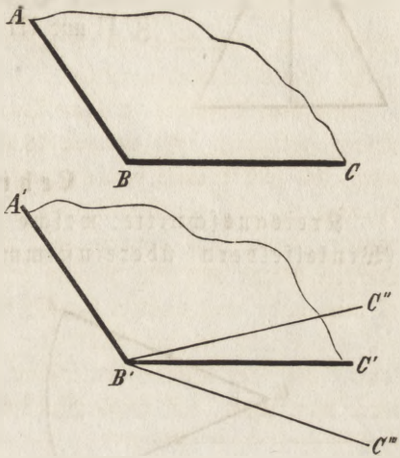
---

1) concävus, hohl.
2) convexus, gewölbt.

§. 42.

Lehrsatz.

Legt man zwei gleiche Winkelfelder so auf einander, daß sie den Scheitel und den einen Schenkel gemein erhalten, so decken sich die anderen Schenkel ebenfalls.



Vrs. Die beiden Winkelfelder ABC und $A'B'C'$ sind gleich.

Beh. Legt man das Feld ABC so auf das Feld $A'B'C'$, daß B in B', BA in $B'A'$ fällt, so fällt BC in $B'C'$.

Bew. Wäre die Behauptung falsch, so müßte BC entweder in eine Linie $B'C''$ innerhalb des Feldes $A'B'C'$ oder in eine Linie $B'C'''$ außerhalb desselben fallen, weil die Winkelfelder Theile von Ebenen sind, welche zur Deckung gebracht wurden. Da ferner die Winkelfelder Größen sind (§. 40), so würde aber im ersten Falle $\angle ABC < \angle A'B'C'$, im zweiten Falle dagegen $\angle ABC > \angle A'B'C'$ sein (§. 17, D. III). Mithin kann nur die Beh. zutreffen.

Zusätze.

I. In der Ebene kann man auf einer Graden in einem Punkte **nur** eine Senkrechte errichten.

— Denn die zu construirenden rechten Winkel sind nach §. 26 gleich.

II. Jeder Winkel hat eine einzige Halbierungslinie.

III. **Errichtet** man **auf der Basis** eines gleichschenkligen Dreiecks **in ihrem Mittelpunkt eine Senkrechte**, so geht diese durch die Spitze und halbiert den Winkel an derselben.

— Denn diese Senkrechte fällt nach Z. I mit derjenigen zusammen, welche nach §. 30, L. erhalten wird, wenn man die Mitte der Basis mit der Spitze gradlinig verbindet.

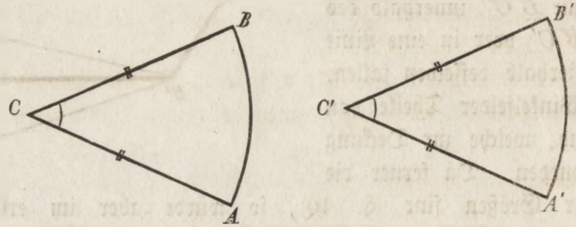
IV. Die **Halbierungslinie des Winkels an der Spitze** eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert die Basis und steht auf ihr senkrecht.

Bew. entweder durch Congruenz der beiden kleineren Dreiecke (*sws*) oder durch Verbindung von Z. II und III.

§. 43.

Lehrsatz.

Kreisausschnitte, welche in den **Radien und Centriwinkeln** (Winkelfeldern) übereinstimmen, sind congruent.[1])



Vrs. In den Kreisausschnitten ACB und $A'C'B'$ ist
1) Rad. $CA =$ Rad. $C'A'$, 2) $\angle C = \angle C'$.

Beh. Es ist $ACB \cong A'C'B'$.

Bew. durch Aufeinanderlegen mit Benutzung von §. 37, Z. I u. §. 42, L.

Zusätze.

I. In jedem einzelnen Kreise, sowie in congruenten Kreisen, stehen gleiche Centriwinkel auf gleichen Bogen.

II. Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Theile, und diese sind bei jeder Lage des Durchmessers gleich groß.
— Denn die Centriwinkel sind als gestreckte gleich.

Definition.

Jeder von einem Durchmesser abgeschnittene Kreisbogen heißt ein **Halbkreis**.

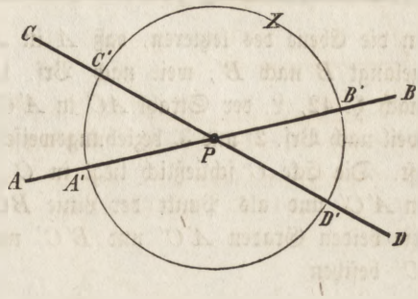
1) Man muß hierbei darauf achten, daß die Winkelfelder gleich sein sollen, weil jeder Centriwinkel mit dem Kreise zwei Kreisausschnitte bildet.

§. 44.

Lehrsatz.

Wird eine Grade von einer zweiten geschnitten, so liegen die beiden Theile der einen auf verschiedenen Seiten der andern, d. h.: in verschiedenen Theilen der durch die letztere zerschnittenen Ebene.[1])

Vrs. Die beiden Graden AB und CD haben einen einzigen Punkt P gemein.



Beh. PC und PD liegen in verschiedenen Theilen der durch AB zerschnittenen Ebene.

Bew. Man ziehe um das Centrum P einen Kreis und nenne dessen Durchschnittspunkte mit den Strahlen PA, PB, PC, PD beziehungsweise A', B', C', D'. Ferner benenne man zur bequemeren Angabe der Kreisbogen einen beliebigen Punkt des Kreisbogens $C'B'$ mit X.

Da nun

$$C'XB' < A'C'XB', \quad \ldots \quad §. 17, D. III,$$

und

$$A'C'XB' = C'XB'D' \quad \ldots \quad §. 43, Z. II$$

ist, so folgt:

$$C'XB' < C'XB'D', \quad \ldots \quad §. 20, II,$$

d. h.: man muß die Linie AB (bei B') überschreiten, um (auf dem Kreise) von C' nach D' zu gelangen.

§. 45.

Lehrsatz. (Winkel-Seiten-Winkel-Satz.)[2])

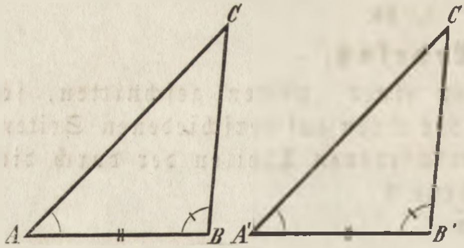
Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.[3])

---

1) Die beiden Graden können nicht eine solche Lage gegen einander haben, wie der dicke und der dünne Strich in der hier nebenstehenden Zeichnung.

2) Wir beziehen uns auf diesen Satz durch die Bezeichnung: (wsw).

3) Mit diesem Lehrs. werden die im vorigen Abschnitt begonnenen Dreiecksbetrachtungen wieder aufgenommen. Es ist wichtig, sich davon zu überzeugen, daß



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $\angle A = \angle A'$, 3) $\angle B = \angle B'$.

Beh. Es ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bew. Man lege das $\triangle ABC$ so auf das $\triangle A'B'C'$ in die Ebene des letzteren, daß A in A' und AB längs $A'B'$ fällt, so gelangt B nach B', weil nach Vrs. 1) $AB = A'B'$ ist. Dann liegt nach §. 42, L. der Strahl AC in $A'C'$, und der Strahl BC in $B'C'$, weil nach Vrs. 2) und 3) beziehungsweise $\angle A = \angle A'$ und $\angle B = \angle B'$ ist. Die Ecke C schließlich liegt in C', weil sie als Punkt der Linie AC in $A'C'$ und als Punkt der Linie BC in $B'C'$ liegen muß, und weil die beiden Graden $A'C'$ und $B'C'$ nur den einen gemeinsamen Punkt C' besitzen.

Zusatz.

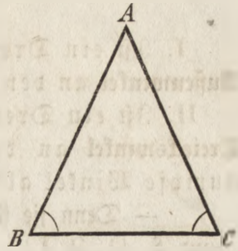
Alle zweimal gebrochenen Linien sind congruent, wenn sie in einer Ebene liegen und ferner in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

§. 46.

Lehrsatz.

Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist das Dreieck über dem gemeinsamen Schenkel derselben gleichschenklig.

auch bei obigem Satze ohne Kenntnis der Eigenschaften der Ebene und speciell des Satzes §. 42 nicht zum Ziele zu gelangen ist. Vorher nehmlich ließe es sich schwer von der Hand weisen, daß die Seiten AC und BC eines um AB rotirenden Dreiecks ABC zwei sich in zwei oder mehr Linien schneidende Flächen beschreiben möchten, obgleich AC und BC sich nur in einem Punkt schneiden. Dann wäre aber obiger Satz (*wsw*) nicht erwiesen.



Vrs. Im $\triangle ABC$ ist $\angle B = \angle C$.

Beh. Es ist $AC = AB$.

Bew. Nimmt man zur Vrs. hinzu, daß BC sich auch in umgekehrter Richtung gleich ist (§. 18, Z. V), so folgt auf analoge Weise, wie im vorigen §., eine solche Congruenz des $\triangle ABC$ mit seinem ursprünglichen Ort, bei welcher nur die Ecken B und C ihren Platz vertauscht haben. Deshalb ist $AC = AB$, weil sie zur Deckung eines einzigen Orts gebracht sind.

Zusatz.

In jedem einzelnen Dreieck, sowie in congruenten Dreiecken, liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

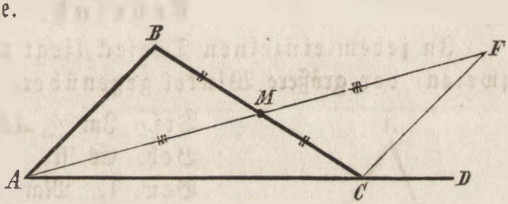
§. 47.

Definition.

Jeder Nebenwinkel eines Dreieckswinkels heißt ein **Außenwinkel** des Dreiecks.

Lehrsatz.

Jeder Dreieckswinkel ist kleiner als ein Außenwinkel an einer anderen Ecke.



Vrs. $\angle BCD$ ist ein Außenwinkel des Dreiecks ABC.

Beh. Es ist $\angle ABC < \angle BCD$.

Bew. Man ziehe durch die Mitte M von BC eine Strecke $AMF = 2\,AM$ und außerdem die Grade CF.

Dann ist $\triangle ABM \cong \triangle FCM$, ... (*sws*)

weil $MB = MC$, $MA = MF$ und $\angle BMA = \angle CMF$ (§. 27) ist.

Hieraus folgt:

$\angle ABM = \angle FCM$, ... (§. 29, Z. II)

mithin: $\angle ABC < \angle BCD$, ... (§. 17, D. III)

weil $\angle FCM$ ein Theil des Winkels BCD ist. — Daß der Punkt F (und daher der Strahl CF) in der That im Felde des Winkels BCD liegt, ist nehmlich deshalb klar, weil der Strahl AF, welcher bei M in dieses Feld eintritt, schon die beiden Punkte A und M mit je einer der begrenzenden Graden AD und CM gemein hat, so daß er sie nicht noch einmal schneiden, mithin aus dem Winkelfelde BCD nicht wieder austreten kann.

Zusätze.

I. Ist ein Dreieckswinkel recht oder stumpf, so sind die **Außenwinkel** an den andern Ecken **stumpf**.

II. Ist ein Dreieckswinkel recht oder stumpf, so sind die **Dreieckswinkel** an den anderen Ecken **spitz**; der rechte oder stumpfe Winkel also der größte des Dreiecks.

— Denn sie sind die Nebenwinkel von stumpfen Winkeln. (Z. I und §. 41, Z. I.)

III. In jedem **gleichschenkligen** Dreieck sind die Basiswinkel spitz.

— Denn da sie nach §. 29, L. gleich sind, so können sie nach Z. I weder recht noch stumpf sein.

IV. In jedem **gleichseitigen** Dreieck sind die Winkel spitz.

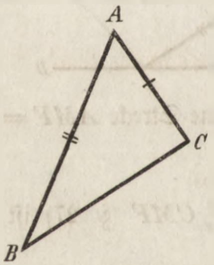
Definition.

Jedes Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinklig**, jedes Dreieck mit einem stumpfen Winkel **stumpfwinklig**, jedes Dreieck mit lauter spitzen Winkeln **spitzwinklig**.

§. 48.

Lehrsatz.

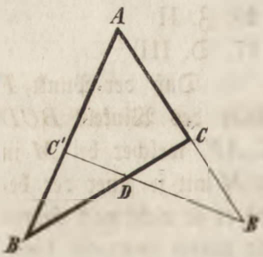
In jedem einzelnen Dreieck liegt der **größeren** Seite (von zweien) der **größere** Winkel gegenüber.



Vrs. Im $\triangle ABC$ ist $AB > AC$.

Beh. Es ist $\angle C > \angle B$.

Bew. I. Man lege das $\triangle ABC$, nachdem man es von seiner Stelle entfernt, so hin, daß der $\angle A$ seinen ursprünglichen Ort mit verwechselten Schenkeln deckt (§. 22). Dadurch gelangt nach der Vrs. C in einen Punkt C' der Seite AB, und B in einen Punkt B' der Verlängerung von AC; BC und $B'C'$ aber schneiden sich in einem Punkt D.



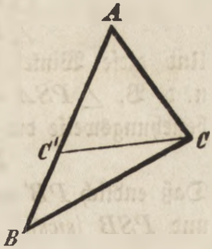
Nach §. 47 ergiebt aber das $\triangle DCB'$:

$$\angle ACD > \angle CB'D,$$

d. i.:

$$\angle ACB > \angle ABC.$$

Bew. II. Auf AB schneide man eine Strecke $AC' = AC$ ab, was nach der V. angeht, und ziehe die Grade CC'. Dann ist:



$\angle ACB > \angle ACC'$, ... §. 17, D. III,

$\angle ACC' = \angle AC'C$, ... §. 29,

und beim $\triangle C'BC$ schließlich:

$\angle AC'C > \angle C'BC$, [§. 47.

Daher:

$\angle ACB > \angle C'BC$, . . . §. 20, II u. III.

Zusatz.

In jedem Dreieck liegt der **größten** Seite der **größte** Winkel gegenüber.

Lehrsatz II.

In jedem einzelnen Dreieck liegt dem **größeren** Winkel (von zweien) die **größere** Seite gegenüber.

Bew. indirect mit Berufung auf L. I und §. 29.

Zusatz.

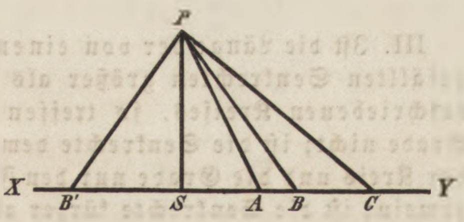
In jedem einzelnen Dreieck liegt dem **größten** Winkel die **größte** Seite gegenüber.

§. 49.

Lehrsatz I.

Unter allen Strecken, welche von einem Punkte aus nach den Punkten einer Graden gezogen werden können, ist die Senkrechte die kürzeste; und die anderen sind desto länger, je weiter ihre Fußpunkte von demjenigen der Senkrechten entfernt liegen, sei es auf einer oder auf verschiedenen Seiten der Senkrechten.

Vrs. Es ist $PS \perp XY$. In einer Richtung der Graden XY folgen auf S die Punkte A, B, C, . . ., welche mit P durch die Graden PA, PB, PC, . . . verbunden sind; in der anderen Richtung liegt ein Punkt B' so, daß $SB' = SB$ ist, und es ist die Grade PB' gezogen.



Beh. Es ist $PS < PA < PB = PB' < PC < \ldots.$

Bew. Nach dem Satze vom Außenwinkel (§. 47) ist beim

$$\triangle PSA, \quad \triangle PAB, \quad \triangle PBC, \ldots:$$
$$\angle PSA < \angle PAB < \angle PBC < \ldots$$

Und diese Winkel sind in den betreffenden Dreiecken die größten, weil n. d. V. $\angle PSA = \mathcal{R}$ ist (§. 47, Z. II), mithin sind ihre Gegenseiten beziehungsweise die größten (§. 48, Z.), also:

$$PS < PA < PB < PC < \ldots$$

Daß endlich $PB' = PB$ ist, folgt aus der Congruenz der Dreiecke PSB' und PSB (*sws*).

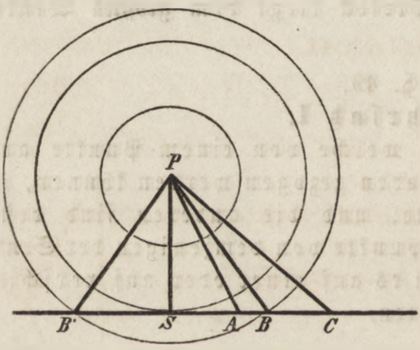
Lehrsatz II.

Zieht man von einem Punkte aus verschieden lange Strecken nach einer Graden hin, so liegen die Fußpunkte der kürzeren demjenigen der Senkrechten näher als die Fußpunkte der längeren. — Denn das Gegentheil widerspräche dem Lehrs. I.

Zusätze.

I. Im gleichschenkligen Dreieck sind die gleichen Seiten länger als die Entfernung irgend eines Punktes der Basis von der Spitze. — Oben: $\triangle BPB'$.

II. Jede Kreissehne liegt ganz innerhalb des Kreisfeldes, alle übrigen Theile der Secante aber außerhalb desselben. — Ein Kreis und eine Grade haben höchstens zwei Punkte gemein. — Der Kreis ist eine krumme Linie.



— Vergl. §. 37 und §. 14, D. II. — Hätte der Kreis grade Theile, so besäße er eben mehr als zwei Punkte einer Graden.

III. Ist die Länge der von einem Punkt auf eine Grade gefällten Senkrechten größer als ein Radius des um ihn beschriebenen Kreises, so treffen sich der Kreis und die Grade nicht; ist die Senkrechte dem Radius gleich, so haben der Kreis und die Grade nur den Fußpunkt der Senkrechten gemein; ist die Senkrechte kürzer als der Radius, so schneiden sich der Kreis und die Grade in zwei Punkten, welche auf verschiedenen Seiten des Fußpunktes der Senkrechten liegen. — Vergl. §. 37, L. II.

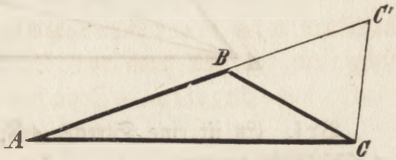
Definition.

Die Länge der von einem Punkte aus nach einer Graden hin gezogenen Senkrechten heißt der **Abstand** oder die **Entfernung des Punktes von der Graden.**

§. 50.

Lehrsatz I.

Die **Summe** zweier Seiten eines Dreiecks ist stets **größer** als die dritte.



Vrs. Es ist ein beliebiges $\triangle ABC$ gegeben.

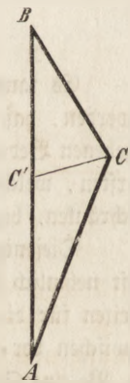
Beh. Es ist $AB + BC > AC$.

Bew. Man verlängere AB um eine Strecke $BC' = BC$ und ziehe die Grade CC'. Dann ist

im $\triangle BCC'$: $\angle BCC' = \angle BC'C$; . . §. 29,
also: $\angle ACC' > \angle AC'C$; . . §. 17, D. III,
endlich im $\triangle AC'C$: $AC' > AC$; . . §. 48,
d. i. n. d. Constr.[1]): $AB + BC > AC$.

Lehrsatz II.

Die **Differenz** zweier Seiten eines Dreiecks ist stets **kleiner** als die dritte.



Vrs. Im $\triangle ABC$ ist $AB > BC$.

Beh. Es ist $AB - BC < AC$.

Bew. I. Nach L. I ist: $AB < AC + BC$,
folglich nach §. 20, VIII: $AB - BC < AC$.

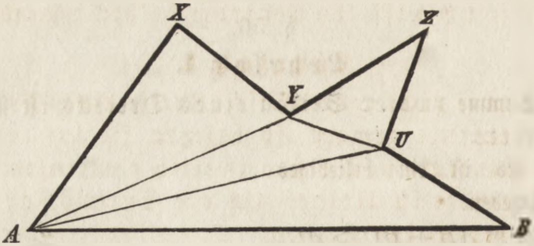
Bew. II. Man trage auf AB eine Strecke $BC' = BC$ ab, was nach der Vrs. angeht, und ziehe die Grade CC'. Dann ist

im $\triangle BCC'$: $\angle BC'C < \mathcal{R}$, . . . §. 47, Z. III,
also im $\triangle AC'C$: $\angle AC'C > \mathcal{R} > \angle ACC'$, §. 41,
[Z. I u. §. 47, Z. II,
mithin im $\triangle AC'C$: $AC > AC'$, . . . §. 48,
d. i. nach der Constr.: $AC > AB - BC$.

1) Solche Punkte, Linien und Flächen, welche zur Herstellung des Zusammenhangs zwischen dem Gegebenen und Gesuchten dienen, heißen Hülfs-Punkte, -Linien, -Flächen. Ihre Beschreibung heißt Construction (constructio, Zusammenfügung); und auf diese beziehen wir uns oben durch die abgekürzten Worte: „nach der Construction“.

Lehrsatz III.

Die Strecke zwischen zwei Punkten ist kleiner als jede gebrochene Verbindungslinie derselben.



Vrs. Es ist eine Strecke AB, und außerdem eine gebrochene Linie $AXYZUB$ gegeben.

Beh. Es ist $AB < AX + XY + YZ + ZU + UB$.

Bew. Zieht man Hülfsstrecken AY, YU, AU in der Weise, daß eine Folge von Dreiecken AXY, YZU, AYU, AUB entsteht, so ist nach L. I:

$AB < AU + UB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \triangle AUB,$

$\quad < AY + YU + UB \ldots\ldots\ldots\ldots \triangle AYU,$

$\quad < AX + XY + YZ + ZU + UB \ldots \triangle AXY$ und $\triangle YZU$.

Scholie.

Es kann, wovon später ausführlich gesprochen werden wird, verlangt werden, daß man ein Dreieck herstelle (construire), welches gewissen gegebenen Bedingungen genügt. Die beiden Sätze I u. II dieses §. sind die ersten, welche die Willkür bei der Aufstellung solcher Bedingungen einschränken, begrenzen, determiniren (determinare).

Diejenige „Determination", auf welche wir hier geführt sind, ist nehmlich die, daß nach willkürlicher Wahl der Länge zweier Dreiecksseiten für die dritte höchstens solche Längen gefordert werden dürfen, welche zwischen der Summe und der Differenz der beiden ersteren liegen. Soll z. B. eine Seite 7^m, eine zweite 9^m lang sein, so muß die dritte durchaus weniger als $(9 + 7) = 16^m$ und mehr als $(9 - 7) = 2^m$ betragen.

Es fragt sich aber noch, ob alle Dreiecke existiren, welche dieser Bedingung genügen.

Diese Frage wird im folgenden §. erledigt.

§. 51.

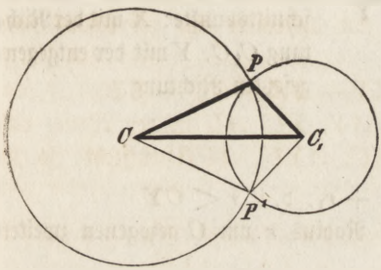
Definitionen.

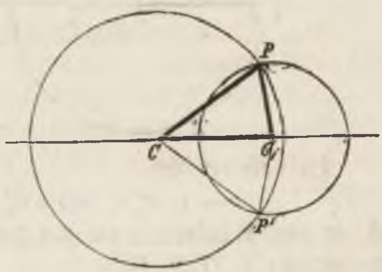
I. Diejenige Grade, welche die Centren zweier Kreise mit einander verbindet, heißt die **Centrale** der beiden Kreise.

II. Kreise um dasselbe Centrum heißen **concentrisch**[1]).

Lehrsatz I.

Haben zwei nicht concentrische Kreise einen Punkt außerhalb der Centrale gemein, so besitzen sie auf der anderen Seite der Centrale noch einen zweiten gemeinsamen Punkt; und die Centrale ist kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien.





— Denn die nach dem gemeinsamen Punkt P gezogenen Radien bilden mit der Centrale CC_1 ein $\triangle\ CPC_1$, so daß die Sätze des §. 50 in Anwendung kommen; und mit diesem Dreieck ist auf der anderen Seite der Centrale ein $\triangle\ CP'C_1$ congruent, da sich das erstere so weit um CC_1 herumdrehen läßt, bis P wieder in einen Punkt P' der Ebene fällt.

Zusatz.

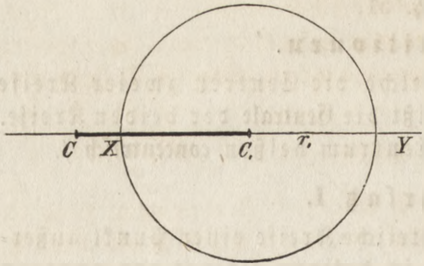
Die gemeinsame Sehne zweier Kreise steht auf der Centrale senkrecht. — Vergl. §. 31.

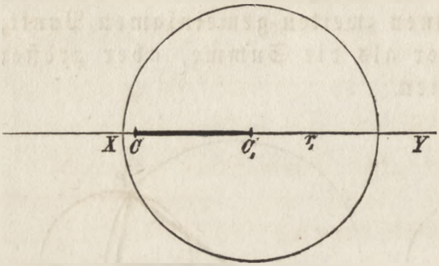
Lehrsatz III. *

Ist die Centrale zweier nicht concentrischen Kreise kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien, so haben die beiden Kreise auf jeder Seite der Centrale einen Punkt gemein.

---

1) con, cum, mit, und centrum.





Vrs. Zwischen der Centrale $CC_1 = c$ und den Radien r, r_1 zweier Kreise ist die Relation gegeben:

$$r - r_1 < c < r + r_1.$$

Beh. Die beiden Kreise haben auf jeder Seite der Graden CC_1 einen Punkt gemein.

Bew. Man denke zunächst bloß den Kreis mit dem kleineren Radius r_1 um C_1 gezogen und beachte seine Durchschnittspunkte: X mit der Richtung C_1C, Y mit der entgegengesetzten Richtung.

Da nach der Vrs.

$$r - r_1 < c, \text{ also } r < c + r_1, \text{ d. i. } r < CY$$

ist, so liegt Y außerhalb des mit dem Radius r um C gezogenen zweiten Kreisfeldes (§. 37, L. II).

Der Punkt X aber liegt innerhalb desselben.

In dem Falle nehmlich, in welchem $c > r_1$ ist, hat man nach der Vrs.:

$$r + r_1 > c, \text{ also } r > c - r_1, \text{ d. i. } r > CX.$$

In dem Falle ferner, in welchem $c = r_1$ ist, liegt X im Centrum C.

In dem Falle endlich, in welchem $c < r_1$ ist, liegt C zwischen X und C_1, so daß

$$CX < r_1 < r$$

ist.

Also in jedem dieser drei möglichen Fälle begrenzt der Kreis um C ein Flächenstück, welches einen dem Punkte X benachbarten Theil des Kreises um C_1 enthält, einen dem Punkte Y benachbarten Theil desselben aber nicht enthält. Mithin müssen die beiden von X nach Y führenden Kreisbogen durch den Kreis um C hindurchgehen; w. z. b. w.

Zusatz.

Aus je drei Strecken, von denen die eine kleiner als die Summe und zugleich größer als die Differenz der beiden anderen ist, läßt sich ein Dreieck zusammensetzen.

— Denn die Kreise, welche um die Endpunkte der einen Strecke mit den anderen Strecken als Radien gezogen werden, schneiden sich nach L. II; und der Schnittpunkt ist die dritte Ecke des Dreiecks.

Scholie.

Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe oder gleich der Differenz ihrer Radien, so treten Beziehungen der Kreise zu einander ein, deren Betrachtung uns hier zu weit führen würde. Das Nähere über sie findet sich in Cap. IV, welches sich hauptsächlich mit den Kreisen beschäftigt.

§. 52.[1]

Definitionen.

I. Jede geschlossene viermal gebrochene Linie heißt ein **Viereck.**

II. Jedes Viereck mit zwei sich schneidenden Seiten heißt **überschlagen.**[2]

III. Als Felder der Vieréckswinkel rechnet man in unüberschlagenen Vierecken diejenigen, welche das Vierecksfeld, d. h. das vom Viereck begrenzte Stück der Ebene, bedecken.

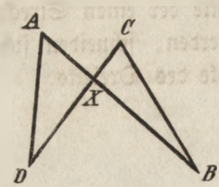
Lehrsatz I.

In jedem überschlagenen Viereck ist die Summe der sich schneidenden Seiten größer als die Summe der beiden anderen.

---

1) Dieser §. dient hauptsächlich dem zweiten Beweise des Lehrs. I in §. 54, bietet aber auch sonst in mancher Hinsicht Interesse.

2) Ein überschlagenes Viereck ist verzweigt (§. 10), jedoch wird sein Verzweigungspunkt nicht als Ecke gerechnet. Wollte man den Verzweigungspunkt — in der Figur des Textes X — als Ecke ansehen, so würde ein Fünfeck von besonderer Gestalt hervorgehen.



Vrs. Im überschlagenen Viereck $ABCD$ schneiden sich die beiden Seiten AB und CD.

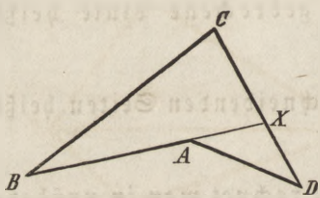
Beh. Es ist $AB + CD > AD + BC$.

Bew. Der Durchschnittspunkt von AB und CD werde mit X bezeichnet. Dann ist

1) im $\triangle AXD$: $XA + XD > AD$, . . . §. 50, I,
2) im $\triangle BXC$: $XB + XC > BC$; . . . §. 50, I.
Daher: $(XA + XB) + (XC + XD) > AD + BC$ §. 20, VI,
d. i. nach der Vrs.: $AB + CD > AD + BC$.

Lehrsatz II.

Hat ein unüberschlagenes Viereck einen überstumpfen Winkel, so geben die Schenkel des letzteren eine kleinere Summe als die beiden anderen Seiten.



Vrs. Das unüberschlagene Viereck $ABCD$ hat bei A einen überstumpfen Winkel.

Beh. Es ist $AB + AD < CB + CD$.

Bew. Man verlängere den einen Schenkel BA des überstumpfen Winkels bei A über diesen Punkt hinaus, bis die Seite CD in einem Punkte X getroffen wird. Dann ist

1) im $\triangle ADX$: $AD < DX + AX$ . . . . §. 50, I,
2) im $\triangle CBX$: $AB + AX < CB + CX$ . . . . §. 50, I.
Daher: $AB + AD + AX < CB + (CX + DX) + AX$ [§. 20, VI.
Mithin: $AB + AD < CB + CD$ . . . §. 20, VIII.

§. 53.

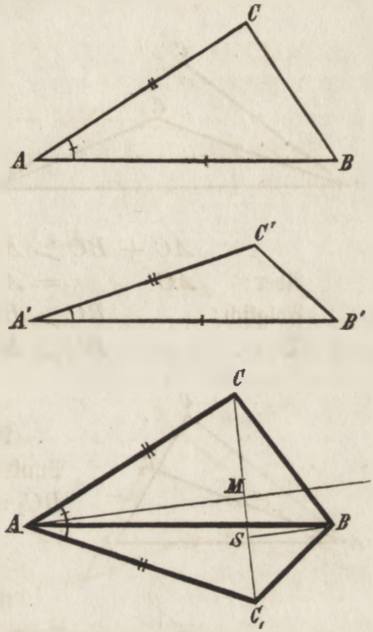
Scholie.

Der §. 47 und die bis jetzt aus ihm gezogenen Folgerungen finden, wie sich in den nächsten §§. zeigen wird, auch eine nützliche Verwendung für die Vergleichung zweier Dreiecke, nachdem man dieselben durch Aneinanderlegen zu einer zusammenhängenden Figur verbunden hat.

§. 54.

Lehrsatz I.

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, so sind die **dritten Seiten** in demselben Sinne **ungleich, wie ihre Gegenwinkel.**



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $\angle A > \angle A'$.

Beh. Es ist $BC > B'C'$.

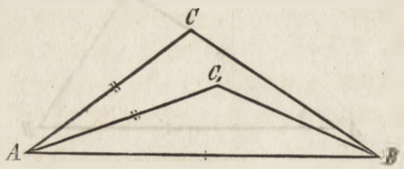
Bew. I. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so an das $\triangle ABC$, daß A' in A und $A'B'$ in die Richtung von AB fällt. Dadurch gelangt B' nach B (Vrs. 1), C' aber in einen solchen Punkt C_1, daß, wenn man die Grade CC_1 zieht, das $\triangle\ CAC_1$ über CC_1 gleichschenklig wird (Vrs. 2). Denkt man sich nun die ganze Ebene durch die Halbierungslinie des Winkels CAC_1 zerschnitten, so liegen die Punkte B und C_1 in einer einzigen Halbebene (Vrs. 3), und CC_1 wird in einem Punkte M senkrecht halbiert (§. 42, Z. IV), weshalb der Fußpunkt S der von B auf CC_1 gefällten Senkrechten BS näher an C_1 als an C liegt (§. 25, Z.). Folglich ist nach §. 49, L. I:

$$BC > BC_1, \text{ d. i.: } BC > B'C'.$$

Anm. Ist $\angle A + \angle A' = 2R$, so fällt in der Figur M mit A zusammen, ist dagegen $\angle A + \angle A' > 2R$, so liegt CC_1 außerhalb des Viereckfeldes CAC_1B. Daß der Punkt B in CC_1 oder zwischen dieser Linie und dem Punkte A liege, kann man, wenn man es will, vermeiden, indem man nicht den kürzeren Schenkel des Winkels bei A mit AB benennt (§. 49, Z. I).

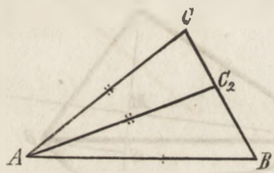
Trotz aller möglichen Verschiedenheiten der Figur tritt übrigens nirgends ein Anlaß ein, den Beweis abzuändern; verschiedene Fälle sind also nicht zu betrachten, wie beim Bew. II. Auch bleibt der Beweis wörtlich derselbe, wenn man das $\triangle\ A'B'C'$ auf, anstatt an $\triangle\ ABC$ legt.

Bew. II. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf das $\triangle ABC$, daß A' in A und $A'B'$ längs AB fällt. Dadurch gelangt B' nach B (Vrs. 1) und $A'C'$ in das Winkelfeld BAC (Vrs. 3); es hängt aber von der Gestalt der beiden Dreiecke ab, ob C' noch in das Feld des $\triangle ABC$, oder außerhalb desselben, oder in die Seite BC fällt.

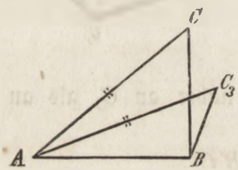


1ster Fall: Die Ecke C' falle in einen Punkt C_1 des Dreiecksfeldes ABC. Dann ist $ACBC_1$ ein unüberschlagenes Viereck mit einem überstumpfen Winkel bei C_1; mithin:

$$AC + BC > AC_1 + BC_1 \quad \ldots \text{ §. 52, II.}$$
Aber: $AC = AC_1$ .... Vrs. 2.
Folglich: $BC > BC_1$ .... §. 20, VIII.
D. i.: $BC > B'C'$.



2ter Fall: Die Ecke C' falle in einen Punkt C_2 der Seite BC. Dann ist $BC > BC_2$ nach §. 17, D. III, mithin $BC > B'C'$.

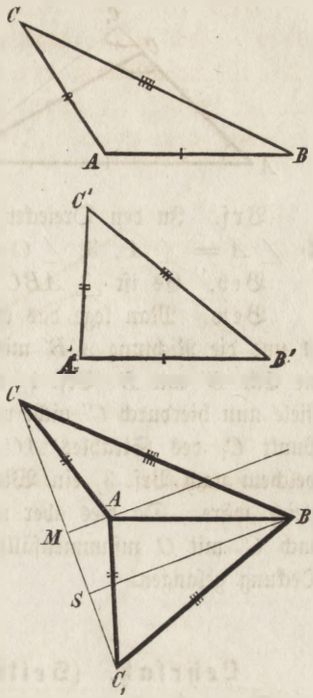


3ter Fall: Die Ecke C' falle in einen Punkt C_3 außerhalb des Dreiecksfeldes ABC. Dann ist $ACBC_3$ ein überschlagenes Viereck, in welchem sich die Seiten BC und AC_3 schneiden; mithin:

$$AC_3 + BC > AC + BC_3 \quad \ldots \text{ §. 52, I.}$$
Aber: $AC_3 = AC$ .... Vrs. 2.
Folglich: $BC > BC_3$ .... §. 20, VIII.
D. i.: $BC > B'C'$.

Lehrsatz II.

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, so sind die **Gegenwinkel der dritten Seiten** in demselben Sinne **ungleich, wie** diese dritten **Seiten.**



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $BC > B'C'$.

Beh. Es ist $\angle A > \angle A'$.

Bew. I. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so an (oder auch auf) das $\triangle ABC$, daß A' in A und $A'B'$ längs AB fällt. Dadurch gelangt B' nach B (Vrs. 1) und C' in irgend einen Punkt C_1. Man ziehe ferner die Grade CC_1 und fälle von A und von B aus auf diese die Senkrechten AM und BS.

Von den beiden Punkten M und S liegt der letztere näher an C_1 als an C, weil $BC_1 < BC$ ist (Vrs. 3, und §. 49, L. II), M aber nimmt, weil $\triangle CAC_1$ über CC_1 gleichschenklig ist, die Mitte zwischen C_1 und C ein (§. 30, Z. I); mithin liegt, da die beiden Senkrechten MA und SB zu CC_1 sich nicht schneiden können (§. 25, Z.), der Punkt B auf derselben Seite der Graden MA, wie der Punkt C_1, m. a. W.: die Grade AM liegt (mit der einen oder der anderen Richtung) im Felde des Winkels BAC. Da sie außerdem den $\angle CAC_1$ halbiert (ebenfalls nach §. 30, Z. I), so ergiebt sich:

$$\angle BAC > \angle BAC_1, \text{ d. i.: } \angle BAC > \angle B'A'C'.$$

— Vergl. die Anm. zum Bew. I des vorhergehenden Satzes.

Bew. II: indirect mit Berufung auf L. I und §. 28.

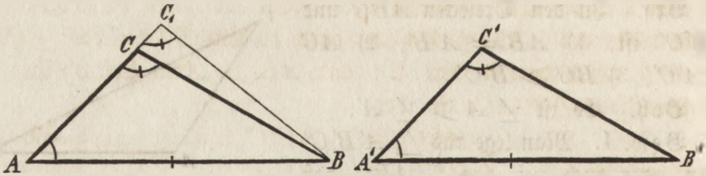
§. 55.

Lehrsatz. (Winkel-Winkel-Seiten-Satz.[1])

Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

---

1) Wir beziehen uns auf diesen Satz durch die Bezeichnung: (*wws*).



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $\angle A = \angle A'$, 3) $\angle C = \angle C'$.

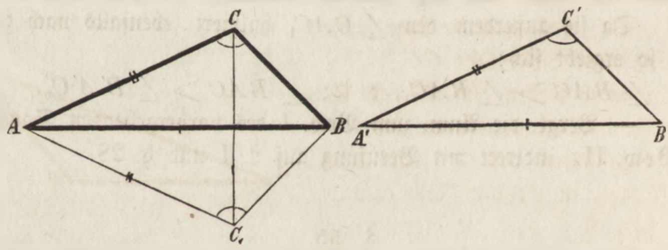
Beh. Es ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bew. Man lege das eine Dreieck so auf das andere, daß A' mit A und die Richtung $A'B'$ mit AB zusammenfällt. Dann deckt sich auch die Ecke B' mit B (Vrs. 1) und die Richtung $A'C'$ mit AC (Vrs. 2). Fiele nun hierdurch C' nicht mit C zusammen, sondern mit einem anderen Punkt C_1 des Strahles AC, so entstände dadurch ein $\triangle BCC_1$, in welchem nach Vrs. 3) ein Winkel dem Außenwinkel an einer anderen Ecke gleich wäre. Da dies aber nach §. 47 nicht möglich ist, so folgt, daß auch C' mit C zusammenfällt, die beiden Dreiecke mithin zur völligen Deckung gelangen.

§. 56.

Lehrsatz. (Seiten-Seiten-Winkel-Satz.[1])

Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem **Gegenwinkel** der **größeren** von diesen übereinstimmen.



Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $AB > AC$, 4) $\angle C = \angle C'$.

Beh. Es ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bew. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so an das $\triangle ABC$, daß A' in A und $A'B'$ längs AB fällt. Dadurch gelangt B' nach B (Vrs. 1).

1) Wir beziehen uns auf diesen Satz durch die Bezeichnung: (Ssw), wo durch das große S die größere Seite angedeutet wird.

Der neue Ort der Ecke C' heiße C_1. Zieht man nun die Grade CC_1, so geht diese nach §. 49, Z. I nicht durch die Ecke B, weil das $\triangle\, CAC_1$ über CC_1 gleichschenklig (Vrs. 2), und $AB > AC$ (Vrs. 3) ist. Im gleichschenkligen $\triangle\, CAC_1$ ist aber

$\angle\, ACC_1 = \angle\, AC_1C$; . . . . . . §. 29,

und ferner ist: $\angle\, ACB = \angle\, AC_1B$ . . . . . . Vrs. 4.)

Folglich ist: $\angle\, BCC_1 = \angle\, BC_1C$ . . . . . . §. 20, VII,

mithin im $\triangle\, CBC_1$: $BC = BC_1$ . . . . . . §. 46,

d. i.: $BC = B'C'$;

und deshalb: $\triangle\, ABC \cong \triangle\, A'B'C'$ . . . . . . (3*s*).

§. 57.

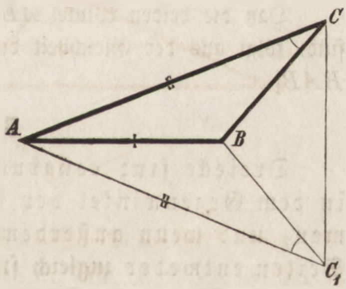
Lehrsatz.[1])

Stimmen Dreiecke in zwei Seiten und in dem Gegenwinkel der kleineren von diesen überein, so sind entweder die Dreiecke congruent, oder die Gegenwinkel der größeren Seiten sind Supplemente von einander.

Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist: 1) $AB = A'B'$, 2) $AC = A'C'$, 3) $AB < AC$, 4) $\angle\, ACB = \angle\, A'C'B'$.

Beh. Entweder ist $\triangle\, ABC \cong \triangle\, A'B'C'$, wodurch $\angle\, ABC = \angle\, A'B'C'$ hervorgeht; oder es ist $\angle\, ABC + \angle\, A'B'C' = \mathsf{G}$.

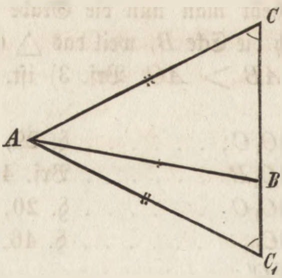
Bew. I. Man lege, was nach Vrs. 1) angeht, das $\triangle\, A'B'C'$ so an das $\triangle\, ABC$, daß es in die Lage ABC_1 fällt, und ziehe die Grade CC_1.



Da man wegen Vrs. 3) den Satz §. 49, Z. I nicht verwenden kann, so kann es geschehen, daß CC_1 dann nicht durch B geht, in welchem Falle entweder die im vorigen §. oder die hierneben gezeichnete Figur entsteht; und wenn dies geschieht, so folgt durch dieselben Betrachtungen, wie im vorigen §., die Congruenz des Dreiecks ABC mit ABC_1 oder $A'B'C'$.

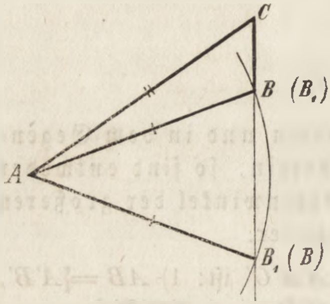
---

1) Wir beziehen uns auf diesen Satz durch die Bezeichnung: (*ssw*).



Die Grade CC_1 kann aber auch durch B gehen; und dann braucht offenbar nicht $BC = BC_1$ zu sein, wie im so eben besprochenen Fall. Man ersieht jedoch, daß die beiden Winkel ABC und ABC_1, d. i. die beiden Winkel ABC und $A'B'C'$ Supplemente von einander sind.

Bew. II. Legt man das $\triangle\ A'B'C'$ so auf das $\triangle\ ABC$, daß A' in A, C' in C und $C'B'$ in die Richtung CB fällt — dies geht nach Vrs. 2) und 4) an — so ist der neue Ort des Punktes B' nicht durch den Abstand von C, sondern nach Vrs. 1) durch den Abstand von A bestimmt, und zwar als ein Schnittpunkt der Graden BC und des um A mit dem Radius AB gezogenen Kreises. (Vergl. §. 35, D. I.) Der fragliche Kreis hat aber, wenn nicht zufällig $\angle\ ABC$ ein rechter ist, mit BC noch einen zweiten Punkt B_1 gemein (§. 49, Z. III), und dieser liegt wegen der Vrs. 3), daß $AB < AC$ sei, von C aus nach derselben Richtung wie B; weshalb die beiden Dreiecke ACB und ACB_1 der Voraussetzung genügen.



Daß die beiden Winkel ABC und AB_1C Supplemente von einander sind, folgt aus der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BAB_1.

Zusatz.[1]

Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und in dem Gegenwinkel der kleineren von diesen übereinstimmen, und wenn außerdem die Gegenwinkel der größeren Seiten entweder **zugleich spitz** oder **zugleich stumpf** sind.

— Denn dann können die letzteren nicht Supplemente von einander sein.

---

1) Wir beziehen uns auf diesen Satz durch die Bezeichnung: (*sSw*), wo das große *S* wieder, wie in §. 57, die größere Seite andeuten soll.

Scholie.

Soll man ein Dreieck construiren, in welchem zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen von diesen eine verlangte Größe haben, so ist dies nicht immer möglich. Denn seien Seite AC und $\angle C$ von der verlangten Größe, so darf man nach §. 49, Z. III die Gegenseite des $\angle C$ nicht kürzer fordern, als der Abstand des Punktes A vom zweiten Schenkel des Winkels bei C lang ist.

Von den Umkehrungen des ersten Satzes über Dreieckscongruenzen (sws) bleibt jetzt noch die eine übrig, welche die Übereinstimmung in den drei Winkeln voraussetzt: (www) oder ($3w$). Diese Voraussetzung enthält aber, wie sich in Cap. III herausstellen wird, einen Pleonasmus, da der dritte Dreieckswinkel durch die beiden anderen schon völlig bestimmt ist, und andererseits durchaus kein Merkmal für die absolute Länge der Seiten, sondern nur für den Quotienten derselben, wovon in Cap. VI ausführlich die Rede sein wird.

Bevor wir aber zur Besprechung der offen gebliebenen Frage übergehen, werden wir noch einige nutzbare Sätze über das rechtwinklige Dreieck aufführen und dann in einem besonderen Abschnitt eine praktische Seite der Planimetrie ins Auge fassen, nehmlich die Auflösung von Constructionsaufgaben, welche sich durch die vorhergehenden theoretischen Lehren unter Voraussetzung der in den Postulaten geforderten Leistungen bewältigen lassen.

§. 58.

Definition.

Im rechtwinkligen Dreieck heißt die Gegenseite des rechten Winkels **Hypotenuse,**[1]) die anliegenden Seiten aber heißen **Katheten.**[2])

Lehrsatz.

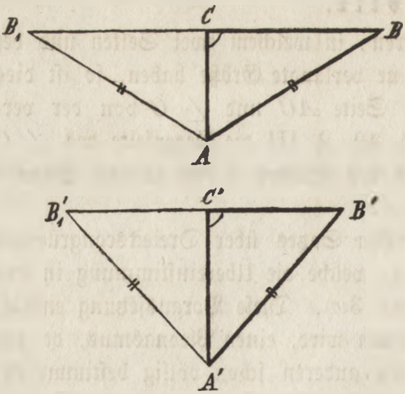
Stimmen rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, so liegen in ihnen dem größeren Winkel die größere Seite, und umgekehrt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.[3])

---

1) Von ὑποτείνω, ich überspanne.

2) Von καθίημι, ich lege heran.

3) Die beiden hier zusammengezogenen Sätze werden in der folgenden Vrs. und Beh. durch A und B unterschieden.



Vrs. A. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist:

1) $\angle C = \angle C' = R$,
2) $AB = A'B'$,
3) $\angle A > \angle A'$.

Beh. A. Es ist $BC > B'C'$.

Vrs. B. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist:

1) $\angle C = \angle C' = R$,
2) $AB = A'B'$,
3) $BC > B'C'$.

Beh. B. Es ist $\angle A > \angle A'$.

Bew. beider Sätze durch Verdoppelung der Dreiecke über die Katheten AC und $A'C'$, um dann den Satz §. 54, I, beziehungsweise den Satz §. 54, II auf die so entstandenen Dreiecke BAB_1 und $B'A'B_1'$ anzuwenden.

§. 59.

Aus dem vorigen §. in Verbindung mit §. 29, Z. II, §. 46, Z., §. 48, §. 53 und §. 54 folgt als gemeinschaftlicher

Zusatz.

Gleiche Seiten liegen gleichen Winkeln gegenüber, gleiche Winkel gleichen Seiten; die größere Seite dem größeren Winkel, und der größere Winkel der größeren Seite:

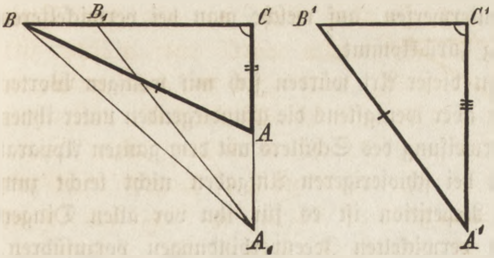
1) in jedem einzelnen Dreieck;
2) in congruenten Dreiecken;
3) in rechtwinkligen Dreiecken mit gleicher Hypotenuse;
4) gilt dasselbe in solchen Dreiecken, welche in zwei Seiten übereinstimmen, für die dritten Seiten und deren Gegenwinkel.

— In allen anderen Fällen ist der analoge Schluß nicht gestattet.

§. 60.

Lehrsatz.

Stimmen rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, aber nicht in der einen Kathete, so sind die zweiten Katheten im entgegengesetzten Sinne ungleich.



Vrf. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist:

1) $\angle C = \angle C' = R$,
2) $AB = A'B'$,
3) $AC < A'C'$.

Beh. Es ist $BC > B'C'$.

Bew. Schneidet man auf dem Strahl CA eine Strecke $CA_1 = C'A'$ ab, so fällt A_1 über A hinaus (Vrf. 3). Daher ist $BA_1 > BA$ (§. 49, L. I); denn es steht $BC \perp CA$ (Vrf. 1). Also liegt, weil $A_1C \perp BC$ steht, nach §. 49, L. II auf dem Strahle CB der Punkt B_1, welcher $A_1B_1 = AB$ ergiebt, zwischen B und C. Da nun $\triangle A_1B_1C \cong \triangle A'B'C'$ geworden ist (Ssw), so folgt: $BC > B'C'$.

B. Constructionsaufgaben.

§. 61.

Scholie.

Eine Constructionsaufgabe auflösen heißt, eine vorgestellte und mit verlangten Eigenschaften ausgestattete Figur durch wiederholte Ausführung von Postulaten nach und nach entstehen lassen (die Figur als eine Wiederholungsvariation der Postulate darstellen).

Wie man beim Beweise der Lehrsätze berechtigt ist, sich nicht nur auf die Axiome selbst, sondern auch auf die durch ihre Verbindung erlangten Resultate, nehmlich auf die schon bewiesenen Lehrsätze, zu berufen: ebenso ist man bei der Behandlung von Constructionsaufgaben berechtigt, sich nicht nur auf die Ausführbarkeit der Postulate selbst, sondern auch auf die Ausführbarkeit der etwa schon hergestellten Verbindungen der Postulate, nehmlich der bereits gelösten Aufgaben, zu berufen.

Bei der Auswahl der in Betrachtung gezogenen Lehrsätze war der Gesichtspunkt maßgebend, daß die Eigenschaften solcher Figuren erforscht werden sollten, welche sich in verwickelteren Figuren häufig als Bestandtheile vorfinden. In ähnlicher Weise werden wir diejenigen Constructionsaufgaben der Behandlung unterwerfen, auf welche man bei verwickelteren Constructionsaufgaben häufig zurückkommt.

Die einfachsten Aufgaben dieser Art würden sich mit wenigen Worten erledigen lassen; wir werden aber wenigstens die grundlegenden unter ihnen zum Zwecke rechtzeitiger Unterweisung des Schülers mit dem ganzen Apparat behandeln, ohne welchen er bei schwierigeren Aufgaben nicht leicht zum Ziele gelangt. — Bei der Repetition ist es für ihn vor allen Dingen nützlich, sich die noch wenig verwickelten Ideenverbindungen vorzuführen, durch welche der Weg zur Auflösung gefunden ist.

Da wir es in der Planimetrie nur mit Figuren in einer gegebenen Ebene zu thun haben, so gelangt hier das Postulat II nicht zur Verwendung, sondern einzig und allein das erste und das dritte, nehmlich:

I. Durch zwei gegebene Punkte eine (unbegrenzte) Grade zu ziehen.

III. Um einen gegebenen Punkt einen Kreis von gegebenem Radius zu ziehen.

Die Bestimmung eines einzelnen Punktes wird durch Ausführung keines Postulats direct erreicht.

Man muß mithin, um einen Punkt zu bestimmen, entweder zwei anderweitig bestimmte Grade oder Kreise oder eine solche Grade **nebst** einem solchen Kreise ermitteln, in denen der gesuchte Punkt liegt.

Die Mittel, um eine an die geometrische Figur erinnernde Zeichnung zu entwerfen, sind:

1) zur Veranschaulichung der Ebene die Oberfläche des Papiers, der Wandtafel und dergl.,
2) zur Veranschaulichung der Graden der mit Hülfe eines Lineals gezogene Strich,
3) zur Veranschaulichung des Kreises der mit Hülfe eines Zirkels gezogene Strich.

§. 62.

Definition.

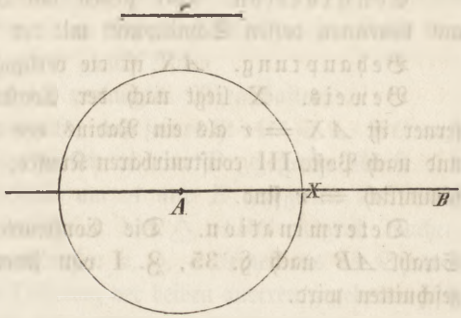
Jede Linie oder Fläche, deren Punkte sämmtlich einer einzigen für einen Punkt aufgestellten Bedingung genügen, heißt der **geometrische Ort** dieses Punktes.

Z. B. ist das Kreisfeld der geometrische Ort eines Punktes, dessen Abstand vom Centrum die Länge des Radius nicht erreicht.

§. 63.

Aufgabe.[1])

Auf einer gegebenen Graden von einem gegebenen Punkte aus nach einer gegebenen Richtung eine gegebene Strecke abzutragen.



Voraussetzung. Es ist eine Strecke r und eine unbegrenzte Grade AB gegeben.

Forderung. Auf der Richtung AB soll von A aus eine Strecke abgetragen werden, welche $= r$ ist.

Analysis. Nehmen wir an, AX sei die ver-

1) Jede Aufgabe besteht aus der Voraussetzung, welche die gegebenen Dinge aufzählt, und der Forderung, welche angiebt, was mit denselben gemacht werden soll. — Man pflegt zur Förderung des genauen Verständnisses, nachdem die Aufgabe im Allgemeinen ausgesprochen ist, diese beiden Theile noch einmal von einander gesondert unter Beziehung auf einen als Beispiel dienenden besonderen Fall aufzuführen.

Die eigentliche Behandlung der Aufgabe beginnt mit der Analysis (ἀνάλυσις, Auflösung) — worunter wir die zur Auflösung führende Überlegung verstehen. — Man stellt sich in ihr die Aufgabe als bereits gelöst vor (etwa, wie der Baumeister ein erst zu bauendes Gebäude) und verändert nöthigenfalls die Figur durch hinzugefügte Hülfspunkte, Hülfslinien u. s. w. (die Baugerüste) so lange, bis die Möglichkeit des Aufbaus der ganzen Figur durch Ausführung an einander gereihter Postulate (des Baumaterials) nach bekannten Lehrsätzen einleuchtet. Natürlich darf man hierbei Aufgaben, welche schon gelöst sind, wie Postulate verwenden.

Dann folgt die Construction, d. i. die Beschreibung, wie die Postulate und die bereits gelösten Aufgaben nach und nach unter Benutzung der einzelnen Theile der Voraussetzung angewandt werden (der Aufbau des Gebäudes mit den nöthigen Gerüsten); hierauf die Behauptung, welche ausspricht, was wir als das gewünschte Resultat (als Bau nach Abnahme der Gerüste) angesehen wissen wollen; und der Beweis von der Richtigkeit dieser Behauptung, welcher sich eben so sehr auf die Thatsachen der Construction als der Voraussetzung zu stützen hat (Besichtigung und Abnahme des Baues). Den Beschluß macht die Determination, d. i. die Untersuchung, ob und welche Einschränkungen für die Ausführbarkeit der Construction vorhanden sind.

Giebt es solche Einschränkungen nicht, so pflegt man übrigens wohl die Determination wegzulassen. Desgleichen unterdrückt man in der Darstellung — nicht aber beim Auflösungsversuch — die Analysis, wenn ihre Ideenverbindungen durch Construction und Beweis klar zu Tage treten; oder endlich auch: man giebt nur die Analysis und läßt Construction sammt Beweis fort, wenn die Analysis hinreichend ausgeführt ist, um über die einfachste Art der Construction keinen Zweifel übrig zu lassen.

langte Strecke, so wird ihr gesuchter Endpunkt X durch zwei Bedingungen bestimmt: 1) daß er in der Richtung AB liege, und 2) daß er von A die Entfernung r habe, eine Anforderung, welcher alle Punkte des Kreises mit dem Radius r um das Centrum A genügen. Der Punkt X liegt also dort, wo dieser Kreis und die Richtung AB sich schneiden.

Construction. Wir ziehen um A einen Kreis vom Radius r und benennen dessen Schnittpunkt mit der Richtung AB durch X.

Behauptung. AX ist die verlangte Strecke.

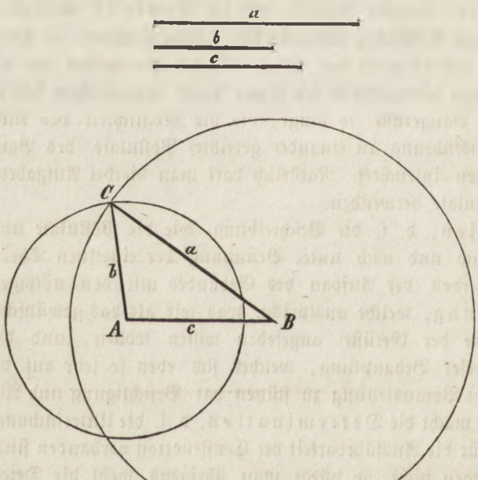
Beweis. X liegt nach der Constr. in der Richtung AB, und ferner ist $AX = r$ als ein Radius des um das Centrum A gezogenen und nach Post. III construirbaren Kreises, dessen Radien nach der Constr. sämmtlich $= r$ sind.

Determination. Die Construction ist stets möglich, da der Strahl AB nach §. 35, Z. I von jedem Kreise um das Centrum A geschnitten wird.

§. 64.

Aufgabe.

Ein Dreieck zu construiren, dessen Seiten gegebenen Strecken gleich sind.



Vrs. Es sind drei Strecken a, b und c gegeben.

Ford. Ein Dreieck zu construiren, dessen Seiten den Strecken a, b und c beziehungsweise gleich sind.

Anal. Nehmen wir an, es solle ein $\triangle ABC$ die Seite $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ besitzen, so ist zunächst die eine Seite $AB = c$ ohne Weiteres construirbar.

Dann handelt es sich noch um die Bestimmung der dritten Ecke C. Wäre für dieselbe nur die Bedingung vorhanden, daß $AC = b$ sein soll, so würde jeder Punkt des mit dem Radius b um das Centrum A gezogenen

Kreises derselben genügen. Ebenso ist aber auch der mit dem Radius a um B gezogene Kreis ein geometrischer Ort des Punktes C. Da wir jetzt zwei Linien kennen, in denen C liegt, nehmlich die beiden erwähnten Kreise, so ist auch der Punkt C construirbar.

Constr. Auf einer beliebigen Graden mache man eine Strecke $AB = c$ und schlage um A einen Kreis mit dem Radius b, um B einen Kreis mit dem Radius a. Den einen Schnittpunkt C dieser Kreise verbinde man mit A und mit B durch grade Linien.

Beh. Das $\triangle ABC$ hat die verlangten Eigenschaften.

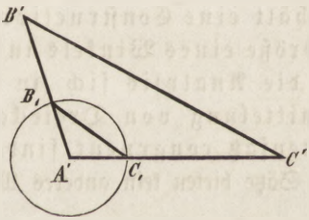
Bew. Es ist $AB = c$ gemacht, und ferner ist $AC = b$, $BC = a$ als Radien der in diesen Abständen um A und B gezogenen Kreise.

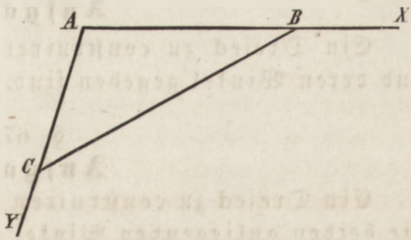
Determ. Damit die beiden um A und B gezogenen Kreise sich schneiden und dadurch die Construction des $\triangle ABC$ möglich machen, muß nach §. 50 die größte der Strecken a, b, c kleiner als die Summe, die kleinste aber größer als die Differenz der beiden anderen gegebenen sein. Sonst enthält die Forderung ein unausführbares Verlangen.

§. 65.

Aufgabe.

Von dem gegebenen Ausgangspunkt eines Strahles aus einen zweiten Strahl zu ziehen, welcher auf einer gegebenen Seite des ersteren mit ihm einen gegebenen Winkel bildet.





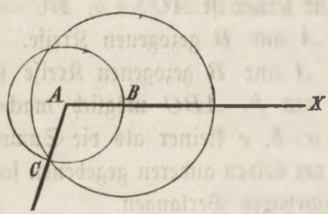
Vrs. Es sind ein vom Punkte A ausgehender Strahl AX und ein $\angle B'A'C'$ gegeben.

Ford. Von A aus einen zweiten Strahl zu ziehen, welcher mit AX auf einer vorherbestimmten Seite dieser Graden einen dem $\angle B'A'C'$ gleichen Winkel bildet.

Anal. Nehmen wir an, AY sei der verlangte Strahl, so entstehen zwei congruente Dreiecke, wenn man auf AX und AY die Strecken $AB = A'B'$ und $AC = A'C'$ macht und schließlich die Graden BC und $B'C'$ zieht (sws). Das $\triangle ABC$ aber läßt sich, da man die Seiten des $\triangle A'B'C'$ kennt, nach Anweisung des vorigen §. construiren.

Wenn man eine möglichst einfache Construction anstrebt, so kann man sich noch die Bemerkung zu Nutzen machen, daß nach §. 63 zwei Kreise dazu gehören, um auf den Schenkeln des Winkels A' von diesem Scheitel aus ungleiche Strecken $A'B'$ und $A'C'$ abzuschneiden, während ein Kreis ausreicht, falls man diese beiden Strecken gleich groß nimmt.

Constr. Man schlage um A' und um A mit beliebigen aber gleichen Radien je einen Kreis, von denen der erstere die Schenkel des Winkels $B'A'C'$ in B_1 und C_1, der zweite aber AX in B schneide. Dann ziehe man die Strecke B_1C_1 und schlage mit dieser um B einen Kreis, welcher den um A gezogenen Kreis auf der in der Aufgabe genannten Seite der Graden AX im Punkte C schneidet, und ziehe schließlich den Strahl AC.



Beh. Der $\angle BAC$ ist der verlangte.

Bew. Zieht man die Grade BC, so ist $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$ ($3s$), mithin $\angle BAC = \angle B_1A'C_1$ (§. 59).

Determ. Die Aufgabe ist stets lösbar.

Scholie.

Enthält eine Constructionsaufgabe eine Anforderung an die Größe eines Winkels in der zu construirenden Figur, so muß die Analysis sich (in letztem Betracht) immer auf die Ermittelung von Dreiecken richten, welche nach dem Dreiseitensatz congruent sind. — Denn die bisher bekannt gewordenen Sätze bieten kein anderes Mittel zu dem fraglichen Zweck.

§. 66.

Aufgabe.

Ein Dreieck zu construiren, für welches zwei Seiten und deren Winkel gegeben sind.

§. 67.

Aufgabe.

Ein Dreieck zu construiren, für welches eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

— Die Construction geschieht durch zweimalige Ausführung der Aufgabe §. 65. — Wie lautet die Determination? Kann man schon angeben, wann ein Dreieck entstehen muß, oder nur, wann sicher keins entsteht?

§. 68.

Aufgabe.

Ein Dreieck zu construiren, für welches zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen von diesen gegeben sind.

— Zur Analysis und Determination vergleiche man §. 57.

Scholie.

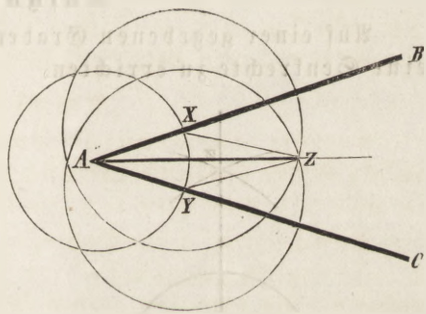
Hiermit sind die den Congruenzsätzen entsprechenden Dreiecksaufgaben erschöpft bis auf die dem Winkel-Winkel-Seiten-Satz entsprechende, welche sich erst in Cap. III lösen läßt.

§. 69.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Vrs. Es ist ein $\angle BAC$ gegeben.



Ford. Eine Grade zu ziehen, welche den $\angle BAC$ halbiert.

Anal. Man stelle sich vor, AZ sei die Halbierungslinie, so daß $\angle ZAB = \angle ZAC$ ist. Um congruente Dreiecke zu erhalten (§. 65, Scholie), welche die Seite AZ gemeinsam und die letztgenannten Winkel als entsprechende besitzen, fehlen dann auf AB und AC je eine Ecke. Wir nehmen dieselben in X und in Y an. Nun kann aber nur dann $\triangle ZAX \cong \triangle ZAY$ werden, wenn $AX = AY$ gemacht ist, da diese Seiten eine gleiche Lage zu den gleichen Winkeln haben. Mithin müssen X und Y auf einem Kreise um A liegen, und einen solchen können wir ziehen (Post. III). Dann ist aber auch der Punkt Z construirbar, weil XZ und YZ als Radien congruenter Kreise um X und Y aufgefaßt werden können und es auf die absolute Länge der fraglichen Radien $XZ = XY$ nicht ankommt.

Constr. Man ziehe um das Centrum A einen Kreis und um die Punkte X und Y, in welchen die Schenkel AB und AC von ihm geschnitten werden, congruente Kreise mit Radien, welche den halben Abstand der Punkte X und Y von einander übertreffen. Der eine gemeinsame Punkt der letzteren heiße Z. Schließlich ziehe man die Grade AZ.

Beh. AZ ist die Halbierungslinie des $\angle BAC$.

Bew. Zieht man die Graden XZ und YZ, so ist

$$\triangle AXZ \cong \triangle AYZ; \ldots\ldots (3s)$$

denn es ist 1) $AZ = AZ$, 2) $AX = AY$ als Radien eines Kreises (§. 35, D. I), 3) $XZ = YZ$ als Radien congruenter Kreise (§. 35, Z. IV). Hieraus folgt:

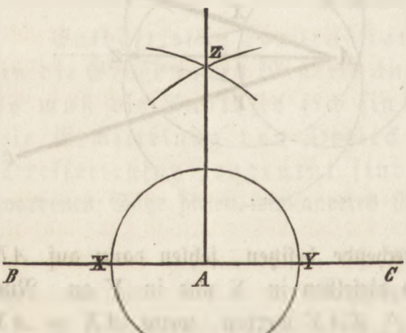
$$\angle ZAX = \angle ZAY \ldots\ldots §. 59.$$

Determ. Die Construction ist stets ausführbar; denn jeder um das Centrum A beschriebene Kreis schneidet die Schenkel AB und AC (§. 35, Z. I), und die beiden um X und um Y beschriebenen Kreise schneiden sich ebenfalls, weil nach der Constr. die Summe ihrer Radien größer, deren Differenz aber kleiner als die Centrale XY ist (§. 51, L. II).

§. 70.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen Graden in einem gegebenen Punkt eine Senkrechte zu errichten.



Vrs. In einer Graden BC ist ein Punkt A gegeben.

Ford. Durch den Punkt A eine Grade zu ziehen, welche auf BC senkrecht steht.

Anal. Die Aufgabe ist ein besonderer Fall der vorhergehenden, da ein gestreckter Winkel BAC halbiert werden soll.

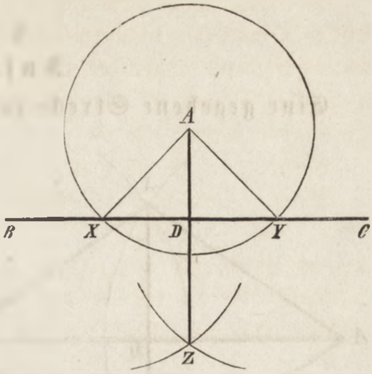
§. 71.

Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Grade eine Senkrechte zu fällen.

Vrſ. Außerhalb einer Graden BC iſt ein Punkt A gegeben.

Ford. Durch den Punkt A eine Grade zu ziehen, welche auf BC ſenkrecht ſteht.



Anal. Wenn AD auf BC ſenkrecht ſtehen ſoll, ſo heißt dies, es ſolle $\angle ADB = \angle ADC$ ſein. Dieſe gleichen Winkel können, wie in der Scholie zu §. 65 bemerkt iſt, nur durch Conſtruction congruenter Dreiecke erhalten werden. Wir nehmen deshalb zu beiden Seiten des Punktes D auf BC die gleichen Strecken DX und DY an und ziehen die Graden AX und AY. Dadurch findet ſich $AX = AY$, $\angle DAX = \angle DAY$ nach (3s) und §. 59.

Da es auf die Länge der gleichen Strecken AX und AY nicht weiter ankommt, ſo kann man ſich geeignete Punkte X und Y durch das Poſt. III verſchaffen, und es bleibt dann nur noch die Halbierung des $\angle XAY$ nach §. 69 auszuführen.

Conſtr. Man ziehe mit einem Radius, welcher länger als die Entfernung des Punktes A von einem beliebig gewählten Punkte der Graden BC iſt, um A einen Kreis, welcher ſich mit BC in X und Y ſchneide, und ferner um X und Y congruente Kreiſe mit einem Radius, welcher größer als die Hälfte von XY iſt. Schließlich ziehe man durch A und den einen Schnittpunkt Z dieſer beiden Kreiſe eine Grade, welche ſich mit BC in D treffe.

Beh. Es ſteht $AD \perp BC$.

Bew. Da der Radius des um A gezogenen Kreiſes nach der Conſtr. den Abſtand dieſes Punktes von der Graden BC übertrifft, ſo ſchneidet er ſich mit derſelben nach §. 49, Z. III in der That in zwei Punkten, wie es die Conſtr. annimmt, und es iſt $AX = AY$ als Radien dieſes Kreiſes. Durch die weitere Conſtr. iſt nach §. 69 der Winkel an der Spitze des gleichſchenkligen $\triangle XAY$ halbiert, ſo daß AD nach §. 42, Z. IV auf BC ſenkrecht ſteht.

Determ. Die Aufgabe iſt ſtets lösbar.

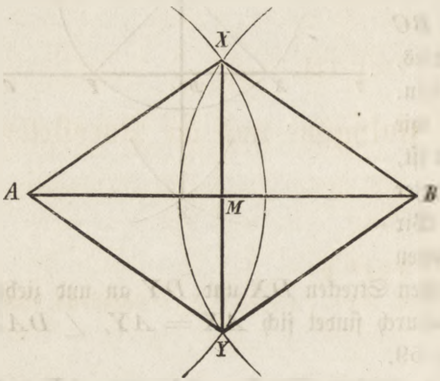
Scholie.

Die drei letzten Aufgaben ſind im Weſentlichen durch dieſelbe Conſtruction gelöſt.

§. 72.

Aufgabe.

Eine gegebene Strecke zu halbieren.



Vrs. Es ist eine Strecke AB gegeben.

Ford. Den Mittelpunkt der Strecke AB zu construiren.

Anal. Nach §. 61 kann man den Mittelpunkt M der Strecke AB nur dadurch erhalten, daß man eine zweite Linie bestimmt, in welcher er gleichfalls liegen muß. Soll dies eine Grade sein, so kann man einen zweiten Punkt X derselben willkürlich wählen. Nimmt man ihn, was wegen der Einfachheit seiner Bestimmung nahe liegt, in gleichen Entfernungen von A und B an, so erhält man ein über AB gleichschenkliges $\triangle AXB$, und dann wird XM die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze (§. 30, L.). Hierdurch ist die Aufgabe auf §. 69 zurückgeführt.

Constr. Man ziehe um A und B congruente Kreise, deren Radien größer als die Hälfte von AB sind, und verbinde die beiden Schnittpunkte X und Y derselben durch eine Grade, welche sich mit AB in einem Punkt M schneide.

Beh. Es ist $MA = MB$.

Bew. Es ist $\triangle AXY \cong \triangle BXY$ . . . ($3s$), weil $XY = XY$ und $AX = BX$, $AY = BY$ als Radien congruenter Kreise. Mithin ist $\angle AXY = \angle BXY$ (§. 59), so daß XM den Winkel AXB an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks AXB halbiert und deshalb auch die Grundlinie AB in gleiche Theile theilt (§. 42, Z. IV).

Determ. Die Constr. führt stets zum Resultat (§. 49, Z. III).

Capitel III.

Die Winkelsummen der Polygone und die Parallelen.

---

§. 73.*

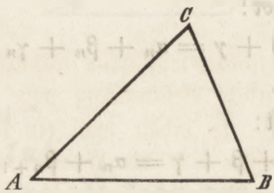
Lehrsatz.

Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt **höchstens einen Gestreckten.**

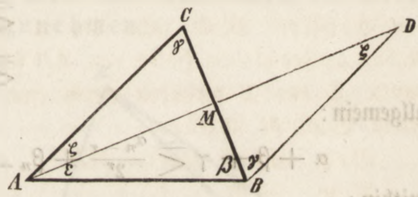
Vrs. Es ist irgend ein $\triangle\, ABC$ gegeben.

Beh. Es ist

$\angle A + \angle B + \angle C \leqq$ G.



Bew. Zieht man durch den Mittelpunkt M der Seite BC eine Grade $AD = 2 \cdot AM$ und hierauf die Grade BD, so hat das $\triangle\, ABD$ eine eben so große Winkelsumme, wie das gegebene $\triangle\, ABC$. — Denn da $MA = MD$, $MB = MC$, und $\angle AMC = \angle BMD$ ist, so folgt:



$$\triangle\, AMC \cong \triangle\, BMD \quad . \; . \; . \; (sws)$$

und deshalb:

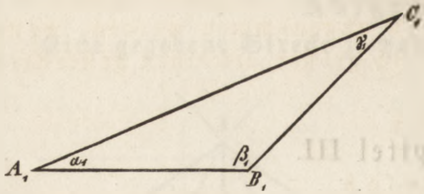
$$\angle MAC = \angle MDB,\; \angle MCA = \angle MBD;$$

— was der Übersicht wegen in der Figur durch gleiche griechische Buchstaben ε, ζ, β, γ für gleiche Winkel angedeutet ist — und hieraus wird ersichtlich, daß die Winkelsumme eines jeden der Dreiecke ABC und ABD sich durch

$$\varepsilon + \zeta + \beta + \gamma$$

ausdrücken läßt.

Das $\triangle\, ABD$ lösen wir aus der vorigen Figur heraus und bezeichnen es in der Weise mit $A_1B_1C_1$, daß B_1 an die Stelle von B, A_1 aber an die Stelle des Namens derjenigen Ecke A oder D tritt, an welcher nicht der größere unter den Winkeln ε und ζ liegt, und bezeichnen schließlich die Winkel mit denjenigen griechischen Buchstaben, welche den Namen der Ecken entsprechen.



Dann ist nach dem Obigen:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \quad \beta + \gamma = \beta_1, \quad \alpha_1 \leqq \frac{\alpha}{2}$$

Wiederholt man die beschriebenen Constructionen und Schlüsse an dem gewonnenen $\triangle\, A_1B_1C_1$ und bezeichnet die neuen entsprechenden Stücke durch Erhöhung der Indices, so geht nach n-maliger Wiederholung hervor:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n, \quad \beta_n + \gamma_n = \beta_{n+1}, \quad \alpha_n \leqq \frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

für jedes n.

Also ist:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma = \alpha_n + \beta_{n+1} &\leqq \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \beta_{n+1}\\ &\leqq \frac{\alpha_{n-2}}{2^2} + \beta_{n+1}\\ &\leqq \frac{\alpha_{n-3}}{2^3} + \beta_{n+1},\end{aligned}$$

allgemein:

$$\alpha + \beta + \gamma \leqq \frac{\alpha_{n-r}}{2^r} + \beta_{n+1};$$

mithin:

$$\alpha + \beta + \gamma \leqq \frac{\alpha}{2^n} + \beta_{n+1}.$$

Nun nehme man die Zahl n als unendlich groß an, d. h. man lasse sie fortwährend wachsen, und betrachte den Grenzwerth, welchem sich die rechte Seite der letzten Relation etwa nähert. β_{n+1} wächst mit wachsendem n wegen der Gleichung $\beta_{n+1} = \beta_n + \gamma_n$ und nähert sich auch einem Grenzwerth, weil dieser Winkel als Dreieckswinkel einen Gestreckten nicht erreicht: die rechte Seite wird also vergrößert, wenn man G für β_{n+1} substituirt. Demnach geht mit Sicherheit zunächst

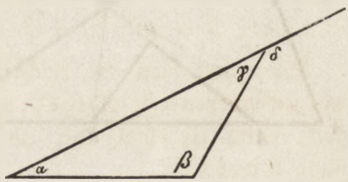
$$\alpha + \beta + \gamma < \frac{\alpha}{2^n} + \mathsf{G}$$

hervor; und dies heißt, weil 2^n zugleich mit n unendlich groß, $\frac{n}{2^n}$ aber unendlich klein ist, in Worten Folgendes: „Die Winkelsumme des Dreiecks ABC würde zu groß angenommen werden, wenn man sie für auch noch so wenig größer als einen gestreckten Winkel halten wollte.“

Damit ist der Lehrsatz bewiesen.

Zusatz.

Die Summe zweier Dreieckswinkel ist nicht größer als ein Außenwinkel an der dritten Ecke.



Denn sei δ ein Nebenwinkel von γ, so ist

$$\gamma = \mathsf{G} - \delta, \text{ n. §. 39, Z. III,}$$
$$\alpha + \beta + \gamma \overset{=}{<} \mathsf{G}; \ldots \text{ n. d. L.}$$

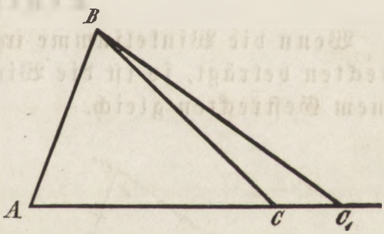
mithin d. Subtr. der oberen Gl.:

$$\alpha + \beta \overset{=}{<} \delta \ \ldots \text{ n. §. 20, VIII.}$$

§. 74.*

Lehrsatz.

Die Winkelsumme eines Dreiecks kann durch die Verlängerung einer Seite nicht zunehmen.



Vrs. Nach einem Punkte C_1 in der Verlängerung der Seite AC des $\triangle ABC$ führt eine Grade BC_1.

Beh. Es ist

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \overset{=}{>} \angle C_1AB + \angle ABC_1 + \angle BC_1A.$$

Bew. Beim $\triangle BCC_1$ ist nach §. 73, Z.:

$$\angle BCA \overset{=}{>} \angle CBC_1 + \angle BC_1A.$$

Addirt man hierzu die identische Gleichung

$$\angle CAB + \angle ABC = \angle C_1AB + \angle ABC,$$

so folgt nach §. 20, V:

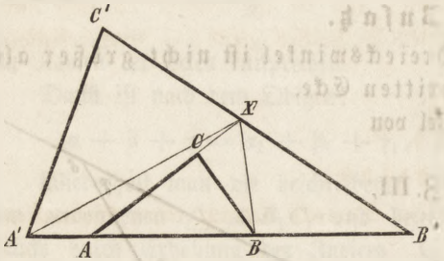
$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \overset{=}{>} \angle C_1AB + (\angle ABC + \angle CBC_1) + \angle BC_1A,$$

was behauptet wurde.

Zusatz.

Die Winkelsumme eines Dreiecks, dessen Feld sich ganz in das Feld eines zweiten Dreiecks hineinlegen läßt, kann nicht kleiner als die Winkelsumme des letzteren sein.

— Dies folgt nehmlich durch wiederholte Anwendung des obigen Lehrsatzes ohne Weiteres. Denn verschiebt man, um eine unnöthige Anzahl von Hülfslinien zu vermeiden, das $\triangle ABC$, dessen Feld ganz innerhalb des Feldes vom $\triangle A'B'C'$ liege, so weit, bis die eine Seite AB des ersteren in eine Seite $A'B'$ des zweiten fällt, verlängert dann AC, bis eine zweite Seite $B'C'$ in einem Punkte X getroffen wird, und zieht die Graden $A'X$ und BX, so hat man nach dem obigen Lehrsatz die Scala:



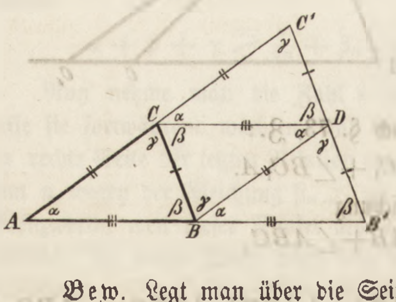
$$(ABC) \overline{\overline{>}} (ABX) \overline{\overline{>}} (AB'X) \overline{\overline{>}} (A'B'X) \overline{\overline{>}} (A'B'C'),$$

wo die Winkelsumme eines Dreiecks durch Einklammerung des Dreiecksnamens bezeichnet sein soll.

§. 75.*

Lehrsatz.

Wenn die Winkelsumme irgend eines Dreiecks einen Gestreckten beträgt, so ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks einem Gestreckten gleich.



Vrs. Im $\triangle ABC$, dessen Winkel durch die den Namen der Ecken entsprechenden griechischen Buchstaben α, β, γ bezeichnet werden, ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \mathsf{G}.$$

Beh. Die Winkelsumme eines jeden andern Dreiecks beträgt einen Gestreckten.

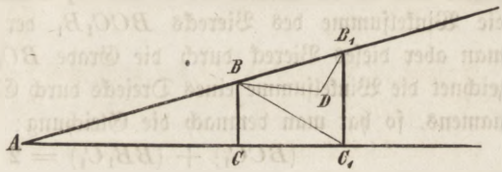
Bew. Legt man über die Seite BC hinaus an das $\triangle ABC$ drei andere Dreiecke, welche ihm congruent sind, so heran, daß bei B und auch bei C je drei Winkel α, β, γ zusammenstoßen, so entsteht als Conſtructionsreſultat, weil $\alpha + \beta + \gamma = G$ vorausgeſetzt iſt, ein neues $\triangle\, AB'C'$, deſſen Winkelſumme ebenfalls einen Geſtreckten beträgt.

Durch Wiederholung dieſes Verfahrens mit dem $\triangle\, AB'C'$ und den daraus entſtehenden läßt ſich aber ein Dreiecksfeld mit der Winkelſumme G und von ſolcher Ausdehnung abſtecken, daß ein anderes beliebig gegebenes Dreiecksfeld ganz in daſſelbe hineingelegt werden kann. Mithin beträgt die Winkelſumme des letztgenannten Dreiecks nach §. 74 nicht weniger als einen Geſtreckten, und da ſie nach §. 73 auch nicht mehr betragen kann, ſo iſt ſie einem Geſtreckten gleich, — was behauptet wurde.

§. 76.

Lehrſatz.*

Die Winkelſumme eines jeden Dreiecks beträgt einen Geſtreckten.



Bew. Fällt man von den Punkten B und B_1 des einen Schenkels eines beliebig klein gewählten Winkels A auf den andern Schenkel die Senkrechten BC und B_1C_1, ſo iſt nach §. 74:

$$\angle A + \angle C + \angle ABC \geqq \angle A + \angle C_1 + \angle AB_1C_1$$

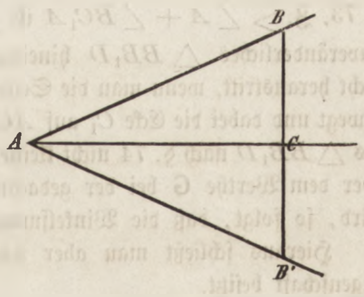
und nach der Vrſ.:

$$\angle A + \angle C = \angle A + \angle C_1$$

mithin iſt nach §. 20, VIII:

$$\angle ABC \geqq \angle AB_1C_1.$$

Aus dieſer Scala erſieht man, daß im rechtwinkligen $\triangle\, ABC$ der Winkel bei B nicht wächſt, wenn man die Hypotenuſe über B hinaus verlängert, daß er aber möglicher Weiſe ſtets abnimmt oder auch unverändert bleibt, das Letztere vielleicht, nachdem die Abnahme bis zu einem gewiſſen Werthe fortgeſchritten iſt.



Der Grenzwerth des abnehmenden Winkels ABC kann aber nicht Null ſein. Denn ſonſt würde dadurch, daß man das $\triangle ABC$ jenseits der Kathete AC noch einmal an sich heranlegt, ein gleichschenkliges $\triangle ABB'$ mit der Spitze A entstehen, in welchem durch die Vergrößerung von AB alle drei Winkel beliebig klein werden, — und das widerspricht dem Axiom XI.

Mithin giebt es jedenfalls eine von Null verschiedene untere Grenze für die Größe des $\angle ABC$, welcher man dadurch beliebig nahe kommen kann, daß man die Entfernung AB beliebig vergrößert; oder m. a. W.: Setzt man $\angle ABC = \angle AB_1C_1 + \delta$, so kann man AB so groß annehmen, daß δ entweder $= 0$ ist oder diesem Werthe beliebig nahe kommt, während $\angle AB_1C_1$ nicht unter einen gewissen Werth herabsteigt.

Da man nun die letzte Gleichung auch in der Form

$$\mathsf{G} - \angle B_1BC = \angle BB_1C_1 + \delta$$

schreiben kann, woraus die Gleichung

$$\angle BB_1C_1 + \angle B_1BC = \mathsf{G} - \delta$$

folgt, und da die Winkel bei C und C_1 rechte sind, so ergiebt sich für die Winkelsumme des Vierecks BCC_1B_1 der Werth $2\,\mathsf{G} - \delta$. Zerlegt man aber dieses Viereck durch die Grade BC_1 in zwei Dreiecke und bezeichnet die Winkelsumme eines Dreiecks durch Einklammerung des Dreiecksnamens, so hat man demnach die Gleichung:

$$(BCC_1) + (BB_1C_1) = 2\,\mathsf{G} - \delta.$$

Ferner ist nach §. 73:

$$(BCC_1) \overline{\overline{<}}\, \mathsf{G};$$

also:

$$(BB_1C_1) \overline{\overline{>}}\, \mathsf{G} - \delta;$$

weshalb die Winkelsumme des $\triangle BB_1C_1$ durch Vergrößerung der Strecke AB bei jeder beliebig gewählten Länge der Seite BB_1 dem Werthe G beliebig nahe gebracht werden kann.

Nimmt man als ein weiteres Erwägungsmoment hinzu, daß nicht nur der $\angle BB_1C_1$, sondern auch der $\angle B_1BC_1$ unter eine gewisse Grenze nicht herabsinken kann — der letztere, weil er als Außenwinkel des $\triangle ABC_1$ nach §. 73, 3. $\overline{\overline{>}}\, \angle A + \angle BC_1A$ ist — so kann man in das $\triangle BB_1C_1$ ein unveränderliches $\triangle BB_1D$ hineinzeichnen, welches aus dem Felde jenes nicht heraustritt, wenn man die Seite BB_1 auf dem Strahl AB von A fortbewegt und dabei die Ecke C_1 auf AC gleiten läßt; und da die Winkelsumme des $\triangle BB_1D$ nach §. 74 nicht kleiner ist als diejenige des $\triangle BB_1C_1$, diese aber dem Werthe G bei der gedachten Verschiebung beliebig nahe gebracht wird, so folgt, daß die Winkelsumme des $\triangle BB_1D$ den Werth G hat.

Hieraus schließt man aber nach §. 75, daß jedes Dreieck dieselbe Eigenschaft besitzt.

Zusatz.

Die Summe zweier Dreieckswinkel ist gleich einem Außenwinkel an der dritten Ecke.

— Denn sowohl jene Summe als auch der fragliche Außenwinkel sind Supplemente des dritten Dreieckswinkels.

§. 77.

Definitionen.

I. Jede geschlossene gebrochene Linie heißt ein **Polygon**[1]) oder **Vieleck**, und, falls man durch n die Anzahl der Ecken zählt, ein **n=Eck.**

II. Unter den **inneren Winkeln** oder schlechthin den **Winkeln** eines unverzweigten[2]) Polygons versteht man diejenigen von zwei Nachbarseiten begrenzten und zwei Gestreckte nicht erreichenden Winkel, deren Felder in der Nähe der Ecken auf dem **Polygonsfelde**, d. i. auf dem durch das Polygon eingeschlossenen Theil der Ebene liegen; unter den **äußeren Winkeln** aber diejenigen, deren Felder die entgegengesetzte Lage haben.

III. Ein **Polygon**, welches keine convexen inneren Winkel besitzt, heißt **convex**.

IV. Unter den **Außenwinkeln**[3]) eines **convexen** Polygons versteht man die **Nebenwinkel** seiner inneren Winkel.

V. Jede Grade, welche zwei Ecken eines Polygons mit einander verbindet, ohne eine Seite desselben zu sein, heißt eine **Diagonale**[4]) des Polygons.

---

1) πολύς, viel, und γωνία, Winkel.

2) Vergl. §. 10 und §. 52.

3) Nicht zu verwechseln mit den äußeren Winkeln.

4) Von διά, durch, und γωνία.

— Da man von jeder der n Ecken eines Polygons nach den $(n-1)$ anderen hin $(n-1)$ Grade ziehen kann, so ist $n\,(n-1)$ die Anzahl der zwischen den n Ecken vorhandenen Richtungen, also, weil hiermit jede Grade nach zwei Richtungen gezählt ist, die Anzahl der Graden $= \frac{n\,(n-1)}{2}$. Unter diesen befinden sich noch n Seiten. Also ist die Anzahl der Diagonalen eines n=Ecks

$$= \frac{n\,(n-1)}{2} - n = \frac{n\,(n-3)}{2}.$$

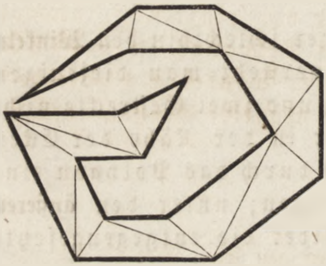
Zusatz.

Die Anzahl der Seiten eines jeden Polygons stimmt mit der Anzahl seiner Ecken überein.

§. 78.

Lehrsatz.

Die Winkelsumme eines jeden **unverzweigten** n-Ecks ist **nur** von der **Anzahl** der Ecken abhängig, und zwar beträgt die Summe der **inneren** Winkel stets $(n-2)$ G, die Summe der **äußeren** Winkel aber $(n+2)$ G.



Bew. Da das Feld eines jeden unverzweigten Polygons sich durch Diagonalen, welche innerhalb des Polygonsfeldes liegen, in solche Dreiecke zerschneiden läßt, deren Winkel entweder mit den inneren Polygonswinkeln übereinstimmen oder als Theile die letzteren zusammensetzen, so ist die Winkelsumme des Polygons gleich der Summe der Winkelsummen der fraglichen Dreiecke.

Die besprochene Zerschneidung des Polygonsfeldes liefert aber

bei einem 4-Eck 2 Dreiecke,
" " 5- " 3 "
" " 6- " 4 "
u. s. w.
bei einem n-Eck $(n-2)$ Dreiecke.

Mithin ist nach §. 76 die Summe der inneren Winkel $s = (n-2)$ G.

Bezeichnet man ferner durch s' die Summe der äußeren Winkel, so ist offenkundig:

$$s' + s = n \cdot 2\,\mathrm{G},$$

mithin nach Subtraction der vorher bewiesenen Gleichung:

$$s' = (n+2)\,\mathrm{G}.$$

Zusatz I.

Die halbe Summe aller Außenwinkel eines **beliebigen unverzweigten und convexen** Polygons, d. i. je eines Außenwinkels von den beiden an einer Ecke liegenden, beträgt 2 G und ist somit für alle solche Polygone gleich groß.

Denn bezeichnet man mit s die Summe der inneren Polygonswinkel und mit s_1 die Summe, deren Summanden je ein Außenwinkel an einer Ecke sind, so ist

$$s + s_1 = n\,G;$$

denn an jeder von den n-Ecken beträgt die Summe aus dem Polygonswinkel und dem einen Außenwinkel einen Gestreckten.

Nun ist aber nach dem voranstehenden Lehrsatz

$$s = (n-2)\,G,$$

also nach §. 20, VII:

$$s_1 = 2\,G.$$

Zusatz II.

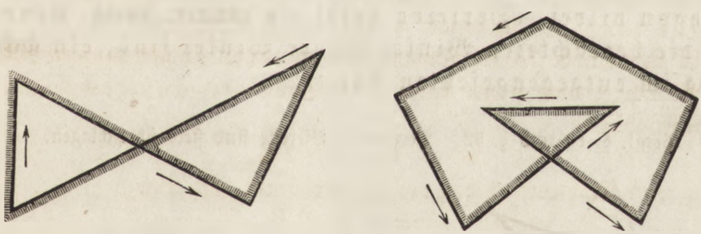
Die Summe der Supplemente der einzelnen inneren Winkel eines **beliebigen unverzweigten** Polygons ist $= + 2\,G$, wenn man die Supplemente concaver Winkel als positive, diejenigen convexer Winkel aber als negative Größen auffaßt.

§. 79.*

Scholie.

Die im vorigen §. entwickelten merkwürdigen Sätze über die Summen der Polygonswinkel haben das Gemeinsame, daß die Felder der summirten Winkel sämmtlich zur Linken oder sämmtlich zur Rechten eines Punktes liegen, welcher die gebrochene Linie stetig durchläuft.

Nach demselben Gesichtspunkt kann man auch bei solchen verzweigten Polygonen, deren Verzweigungspunkte nicht in den Ecken liegen, eine



Folge ganz bestimmter Winkel auswählen, und diese geben, wie sich zeigen wird, ebenfalls unabhängig von der Länge der Seiten als Summe eine bestimmte Anzahl von Gestreckten.

Zur unzweideutigen Charakterisirung der ausgewählten Winkel würde aber die Benennung als äußere oder innere Winkel nicht mehr zutreffen, wie die beigefügten Zeichnungen zeigen, in denen die linke Seite eines nach der Richtung der Pfeile laufenden Punktes durch Schraffirung der anliegenden Fläche angedeutet ist; denn der bewegte Punkte hat begrenzte Flächentheile bald zur Linken, bald zur Rechten, oder auch auf beiden Seiten.

Definitionen.

I. Ein verzweigtes Polygon, welches in den Verzweigungspunkten keine Ecken hat, heißt **überschlagen.**[1] — Verzweigungspunkte, welche nicht als Ecken angesehen werden, heißen **Doppelpunkte.**

II. Unter den **Winkeln eines überschlagenen Polygons** versteht man diejenigen, zwei Gestreckte nicht übersteigenden Winkel je zweier Nachbarseiten, deren Felder für einen das Polygon in vorherbestimmter Richtung durchlaufenden Punkt sämmtlich zur Rechten oder sämmtlich zur Linken liegen.

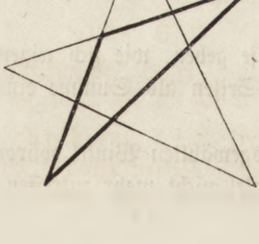
III. Die **Doppelpunkte** werden in zwei Classen eingetheilt:

1) ein **wesentlicher** Doppelpunkt ist ein solcher, bis zu welchem man einen von ihm ausgehenden Theil des überschlagenen Polygons zurück verfolgt;
2) ein **unwesentlicher** Doppelpunkt aber ein solcher, welcher nach der Zerlegung des Polygons durch wesentliche Doppelpunkte etwa noch übrig bleibt.[2]

IV. Unter einem **Zweige** eines Polygons versteht man einen solchen Theil desselben, welcher durch einen einzigen wesentlichen Doppelpunkt aus dem ganzen Polygon ausgeschieden werden kann und für sich ein unverzweigtes Polygon bildet. Derselbe heißt ein **innerer Zweig**, wenn in ihm die betrachteten Winkel innere Winkel sind; ein **äußerer Zweig** im entgegengesetzten Falle.

---

1) Vergl. §. 10 und §. 52. Verzweigte Vierecke sind stets überschlagen.

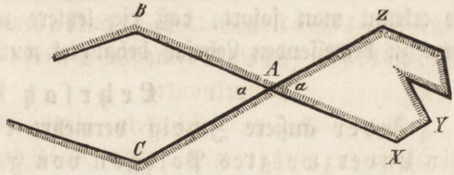


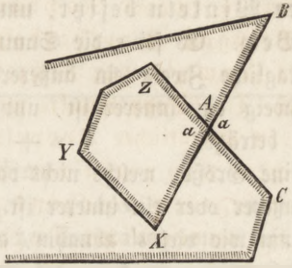
2) Z. B. besitzt das sogenannte Pythagoreische Fünfeck einen einzigen wesentlichen und vier unwesentliche Doppelpunkte.

§. 80.*

Lehrsatz I.

Jeder **innere Zweig vermindert** die Winkelsumme, welche ein unverzweigtes Polygon von gleicher Seitenzahl an den **inneren** Winkeln besitzt, **um zwei Gestreckte.**





Bew. Es sei s die Winkelsumme, welche das nach Abnahme des Zweiges $AXY\ldots ZA$ übrig bleibende Polygon $\ldots BAC \ldots$ besitzt, und n die Anzahl der den inneren Zweig für sich allein ausmachenden Seiten. Die Winkelsummen der Polygone bezeichnen wir durch Einklammerung des bezüglichen Polygonsnamens.

Dann ist:

$(\ldots BAC \ldots) = s$ . . . . u. d. Vrſ.

$(AXY \ldots ZA) = (n-2)\,\mathsf{G}$ . . . . . §. 78, L.

Mithin würde

$$(\ldots BAXY \ldots ZAC \ldots) = s + (n-2)\,\mathsf{G}$$

sein, wenn in dem Gesammtpolygon $\ldots BAXY \ldots ZAC \ldots$ die Winkel bei A gerechnet würden. Diese Winkel fallen aber in der Berechnung der Winkelsumme des Gesammtpolygons aus, weil A ein Doppelpunkt ist, und der Ausfall beträgt $2\,\mathsf{G}$, weil — wie man aus den beigefügten Zeichnungen der möglichen Fälle sofort ersieht — der Winkel α des hinzukommenden Zweiges die Ergänzung des entsprechenden Winkels des anderen Polygonstheiles zu $2\,\mathsf{G}$ bildet. Also ist

$$(\ldots BAXY \ldots ZAC \ldots) = s + (n-2)\,\mathsf{G} - 2\,\mathsf{G}.$$

Andrerseits hat das Polygon $\ldots BAC \ldots$ durch Hinzufügung des Zweiges $AXY \ldots ZA$ nicht die Anzahl n der Seiten desselben, sondern nur $(n-2)$ Seiten mehr bekommen, weil BAX und CAZ je eine einzige Grade bilden, und diese Vermehrung der Seiten um die Anzahl $(n-2)$ würde bei einem unüberschlagenen Polygon nach §. 78 eine

Vermehrung der Winkelsumme um $(n-2)$ G zur Folge haben, so daß bei einem solchen die Winkelsumme

$$= s + (n-2)\,\mathrm{G}$$

betrüge.

Vergleicht man dieses Resultat mit der so eben ermittelten wirklichen Winkelsumme $s + (n-2)\,\mathrm{G} - 2\,\mathrm{G}$,
so erkennt man sofort, daß die letztere um 2 G kleiner ist; — wie in dem zu beweisenden Lehrsatz behauptet wurde.

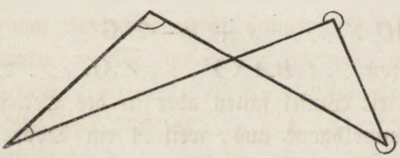
Lehrsatz II.

Jeder **äußere** Zweig **vermehrt** die Winkelsumme, welche ein unverzweigtes Polygon von gleicher Seitenzahl an den **inneren** Winkeln besitzt, **um zwei Gestreckte.**

Bew. Es sei s die Summe derjenigen Polygonswinkel, für welche der fragliche Zweig ein äußerer, s' die Summe derjenigen, für welche der Zweig ein innerer ist, und n die Anzahl der Ecken des Polygons. Dann beträgt $s + s' = n \cdot 2\,\mathrm{G}$,
also eine Größe, welche nicht davon abhängt, ob der hinzugefügte Zweig ein äußerer oder ein innerer ist. Demnach muß s um so viel gewachsen sein, um wie viel s' abnahm, als der Zweig hinzugefügt wurde, so daß die Behauptung in Folge des Lehrsatzes I zutrifft.

Zusätze.

I. Die Winkelsumme eines überschlagenen Vierecks beträgt vier Gestreckte.



— Denn die innere Winkelsumme 2 G eines unverzweigten Vierecks (§. 78) nimmt, weil die Verzweigung eine äußere ist, um 2 G zu.

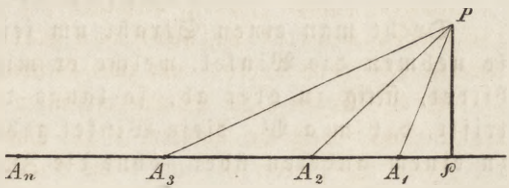
II. Die Winkelsumme des sogenannten Pythagoreischen Fünfecks (welches durch die hierneben stehende Zeichnung definirt sein mag) beträgt einen Gestreckten.

— Denn die innere Winkelsumme 3 G eines unverzweigten Fünfecks (§. 79) muß, weil nur ein wesentlicher Doppelpunkt mit einem inneren Zweige vorhanden ist, um 2 G vermindert werden.

§. 81.

Lehrsatz I.

Zieht man von einem Punkte aus grade Linien nach verschiedenen Punkten einer Graden, so sind die spitzen Winkel an den Fußpunkten desto kleiner, je weiter die letzteren von dem Fußpunkte der Senkrechten entfernt liegen, und können durch Vergrößerung dieser Strecke kleiner als ein beliebig klein angenommener Winkel gemacht werden.



Vrs. Vom Punkte P aus führt nach einer Graden die Senkrechte PS und außerdem die Graden PA_1, PA_2, PA_3, ..., deren Fußpunkte von S aus in der Folge A_1, A_2, A_3, ... gelegen sind.

Beh. Es ist $\angle PA_1S > \angle PA_2S > PA_3S > \ldots$, und es läßt sich ein Punkt A_n der Richtung SA_1 in solcher Entfernung von S bestimmen, daß der $\angle PA_nS$ kleiner als ein beliebig klein gegebener Winkel ist.

Bew. Schon nach dem Satz vom Außenwinkel (§. 47) ist bei den Dreiecken PA_1A_2, PA_2A_3, ...:

$$\angle PA_1S > \angle PA_2S > \angle PA_3S > \ldots.$$

Hieraus allein aber läßt sich noch nicht ableiten, daß die abnehmenden Winkel bei unendlich wachsender Entfernung ihres Scheitels von S sich dem Grenzwerthe Null nähern, sondern zu diesem Schluß gelangt man durch den Zus. §. 76.[1])

Wählt man nehmlich die Punkte A_2, A_3, ... so, daß die Dreiecke PA_1A_2, PA_2A_3, ... über den Seiten PA_2, PA_3, ... gleichschenklig sind, so folgt:

$$\angle PA_1S = \angle PA_2A_1 + \angle A_2PA_1 = 2 \cdot \angle PA_2S, \ldots \text{ §. 76 Z. u. §. 29,}$$
$$\angle PA_2S = \angle PA_3A_2 + \angle A_3PA_2 = 2 \cdot \angle PA_3S, \ldots \quad " \quad " \quad "$$

u. s. w.;

weshalb

$$\angle PA_1S = 2 \cdot \angle PA_2S = 2^2 \cdot \angle PA_3S = \ldots$$
$$= 2^{n-1} \cdot \angle PA_nS$$

---

1) Eigentlich genügt schon der Satz §. 73, welcher das Axiom XI noch nicht voraussetzt.

wird, wenn man die oben vorgeschriebene Bestimmung neuer Punkte A bis zum n^{ten} Punkte A_n fortsetzt.

Da demnach

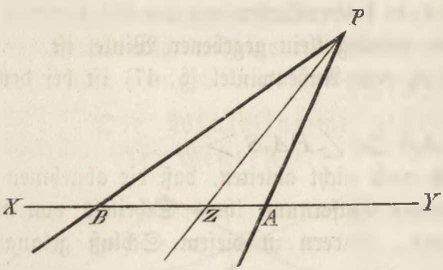
$$\angle PA_nS = \frac{\angle PA_1S}{2^{n-1}}$$

ist, und der Nenner dieses Bruchs bei unendlich wachsendem n unendlich wächst,[1] so nimmt der Werth des Bruchs unendlich ab, d. h.: $\angle PA_nS$ wird bei unendlicher Vergrößerung der Strecke SA_n kleiner als ein beliebig klein gegebener Winkel. (Vergl. Arithmetik §. 38.)

Lehrsatz II.

Dreht man einen Strahl um seinen festen Endpunkt, so nehmen die Winkel, welche er mit einer festen Graden bildet, **stetig** zu oder ab, so lange der Strahl die Grade trifft, d. h m. a. W.: diese Winkel gehen von keinem Werthe zu einem anderen über, ohne die Zwischenwerthe **sämmtlich** besessen zu haben.

Vrs. Ein vom Punkte P ausgehender Strahl ist aus derjenigen Lage, bei welcher er sich mit der festen Graden XY in A schnitt, um den Punkt P so weit gedreht worden, daß der Schnittpunkt mit XY sich bis zum Punkte B verschoben hat.



Beh. Kein zwischen den Werthen der Winkel PAY und PBY liegender Winkelwerth ist hierbei übersprungen worden.

Bew. Nach §. 76, 3. ist:

$$\angle APB + \angle PBY = \angle PAY,$$
$$\angle PBY = \angle PAY - \angle APB.$$

Wollte man nun annehmen, bei der Drehung des Strahls aus der Lage PA in die Lage PB, durch welche nach der aufgestellten Gleichung der Winkel der beiden Graden um die Größe des Winkels APB verringert wird, sei ein Winkel von der Größe ($\angle PAY - \delta$) übersprungen worden, so kann man sich sofort vom Gegentheil überzeugen. Denn trägt man den Winkel δ in P an PA nach der Seite des Punktes B hin an, so

1) Seine auf einander folgenden Werthe sind: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ...

fällt dessen zweiter Schenkel in das Feld des $\angle APB$, weil nach der gemachten Annahme $\delta < \angle APB$ ist, und schneidet deshalb die Strecke AB in irgend einem Punkte Z. Dann ist aber (wieder n. §. 76, Z.):

$$\angle PZY = \angle PAY - \delta,$$

wodurch eben die Annahme widerlegt ist.

Zusätze.

I. Durch jeden Punkt läßt sich eine Grade ziehen, welche mit einer vorherbestimmten Richtung einer gegebenen Graden einen beliebig gewählten spitzen Winkel bildet.

II. Verlängert man den einen Schenkel irgend eines noch so kleinen Winkels, so nimmt der Abstand seines Endpunktes vom andern Schenkel nach und nach jede beliebige Länge an.

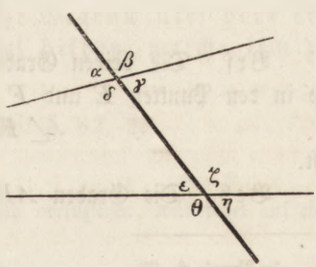
— Denn man kann durch einen Punkt, welcher von einer Graden beliebig weit entfernt ist, nach Zus. I eine zweite Grade ziehen, welche mit der ersteren den verlangten Winkel bildet, und dann die so erhaltene Figur mit der gegebenen zur Deckung bringen.

§. 82.
Definitionen.

Werden zwei grade Linien von einer dritten geschnitten, so heißen an den verschiedenen Scheitelpunkten diejenigen Winkel

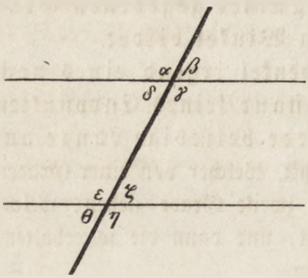
1) **Wechselwinkel**, welche auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden und auf entgegengesetzten Seiten der geschnittenen Linien liegen;
2) **gleichliegende** Winkel oder **Gegenwinkel**, welche auf einer Seite der schneidenden und entsprechenden Seiten der geschnittenen Linien liegen;
3) **entgegengesetzte** Winkel, welche auf einer Seite der schneidenden und entgegengesetzten Seiten der geschnittenen Linien liegen.

Beispielsweise ist in der nebenstehenden Zeichnung α der Wechselwinkel von η, der gleichliegende Winkel von ε, der entgegengesetzte Winkel von θ; δ der Wechselwinkel von ζ, der gleichliegende Winkel von θ, der entgegengesetzte Winkel von ε, u. s. w.



Lehrsatz.

Sind bei zwei Graden, welche von einer dritten geschnitten werden, **zwei** Wechselwinkel gleich, so sind die übrigen Wechselwinkel paarweise gleich, die gleichliegenden Winkel paarweise gleich, die entgegengesetzten Winkel endlich paarweise Supplemente[1]) von einander. — Auch gilt jede Umkehrung dieses Satzes.



Vrs. Bei zwei Graden, welche von einer dritten geschnitten werden, liegen um den einen Schnittpunkt herum die Winkel α, β, γ, δ, und um den andern Schnittpunkt herum in entsprechender Lage die Winkel ε, ζ, η, θ. Ferner weiß man, daß $\alpha = \eta$ ist.

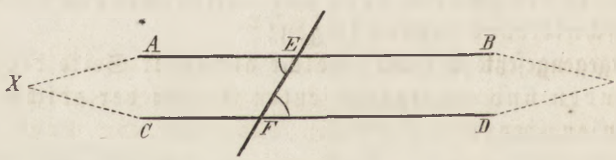
Beh. Es ist $\beta = \theta$, $\gamma = \varepsilon$, $\delta = \zeta$; $\alpha = \varepsilon$, $\beta = \zeta$, $\gamma = \eta$, $\delta = \theta$; $\alpha + \theta = G$, $\beta + \eta = G$, $\gamma + \zeta = G$, $\delta + \varepsilon = G$.

Beweis durch §. 23, §. 27, §. 39 Z. III. — Die Beweise der Umkehrungen geschehen durch dieselben Mittel.

§. 83.

Lehrsatz.

Bilden zwei grade Linien mit einer dritten zwischen sich ein Paar gleiche Wechselwinkel, so haben sie keinen Punkt gemein.



Vrs. Die beiden Graden AB und CD werden von einer dritten so in den Punkten E und F geschnitten, daß

$$\angle FEA = \angle EFD$$

ist.

Beh. Die Graden AB und CD haben keinen Punkt gemein.

---

1) Vergl. §. 23.

Bew. I. Da gleiche Winkel gleiche Nebenwinkel haben (§. 23), so ist auch

$$\angle EFC = FEB,$$

und deshalb nach §. 45, Z.:

$$AEFC \cong DFEB.$$

Läge mithin in der Richtung EA ein Schnittpunkt der beiden Graden AB und CD, so müßte auch in der Richtung EB ein Schnittpunkt derselben liegen, d. i.: die beiden sich nicht ganz deckenden Graden AB und CD müßten zwei Punkte gemein haben, was dem Zus. II des §. 11 widerspricht.

Bew. II. Träfen sich die beiden Graden AB und CD auf irgend einer Seite der Graden EF, z. B. in einem Punkte X der Richtung EA, so würde ein $\triangle XEF$ entstehen, dessen Winkel XEF dem Außenwinkel EFD gleich wäre; was nach §. 76, Z. oder §. 47, L. der Möglichkeit des $\triangle FEX$ widerspricht. [1])

Definition.

Zwei grade Linien heißen **parallel**[2]), wenn sie

1) in einer Ebene liegen, und
2) sich nicht treffen, wie weit man sie auch verlängern mag. — Das Zeichen für das Wort „parallel" in Formeln ist $\ddagger$.

Zusätze.

I. Durch jeden Punkt **giebt** es eine Parallele zu einer Graden; und zwar sind zwei grade Linien parallel, wenn sie mit irgend einer dritten entweder ein Paar gleiche Wechselwinkel oder ein Paar gleiche Gegenwinkel oder ein Paar solche entgegengesetzte Winkel bilden, welche sich zu einem Gestreckten ergänzen.

— Verbindung des letzten Satzes mit §. 82, L.

---

1) Der Beweis I ist dem Beweise II deshalb vorzuziehen, weil jener auf einfacheren Grundlagen beruht.

2) Neben einander, von παρά und ἀλλήλων.

II. Stehen zwei grade Linien (einer Ebene) auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.

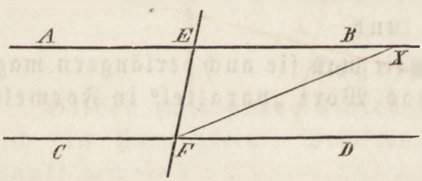
Scholie.

Hiernach entsteht die Frage, ob es durch einen Punkt mehr als eine Parallele zu einer Graden giebt, oder — was dasselbe ist — ob aus der Parallelität zweier Graden die Gleichheit der Wechselwinkel u. s. w. bei einer beliebigen schneidenden Linie gefolgert werden darf, ferner die Frage nach sonstigen Eigenschaften von Figuren, in denen Parallele vorkommen.

§. 84.

Lehrsatz.

Bei parallelen Graden sind stets, wenn sie von einer dritten Graden geschnitten werden, die Wechselwinkel paarweise gleich, die Gegenwinkel paarweise gleich, und die entgegengesetzten Winkel paarweise Supplemente.



Vrs. Die beiden Graden AB und CD, welche von einer dritten in E und F geschnitten werden, sind parallel.

Beh. Es ist
$\angle FEA = \angle EFD$,
$\angle FEA + \angle EFC = \mathsf{G}$,
u. s. w.

Bew. Nimmt man in der Richtung EB irgendwo einen Punkt X an und zieht die Grade FX, so ist nach §. 76, Z. beim $\triangle FEX$:

$$\angle FEA = \angle EFX + \angle EXF$$

mithin, weil FX im Felde des $\angle EFD$ liegt:

$$\angle FEA < \angle EFD + \angle EXF.$$

Da der $\angle EXF$ durch Verlängerung der Strecke EX beliebig klein gemacht werden kann (§. 81, L. I), so heißt dies in Worten: Fügt man zum $\angle EFD$ einen beliebig kleinen Winkel hinzu, so ist die Summe größer als $\angle FEA$; oder: $\angle FEA$ ist nicht größer als $\angle EFD$.

Nun waren aber die Winkel FEA und EFD beliebig gewählte innere Wechselwinkel.

Also ist bewiesen, daß **kein** zwischen AB und CD liegender Winkel größer ist als sein Wechselwinkel.

Mithin muß $\angle FEA = \angle EFD$ sein.

— Die übrigen Theile der Behauptung folgen hiernach durch Anwendung von §. 82, L. sofort.

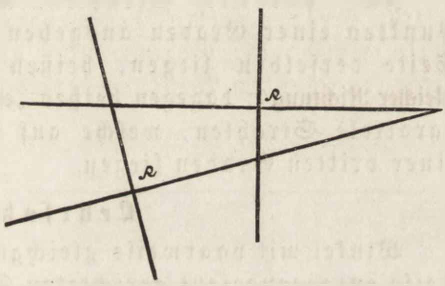
Zusätze.

I. Durch jeden einzelnen Punkt giebt es **nur eine** Parallele zu einer Graden.

II. Wird die eine von zwei Parallelen durch eine Grade geschnitten, so wird es auch die andere.

III. Steht eine von zwei Parallelen auf einer Graden senkrecht, so thut es auch die andere.

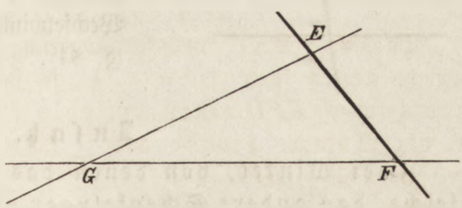
IV. Stehen zwei Grade einzeln auf den Schenkeln eines concaven oder convexen Winkels senkrecht, so schneiden sie sich.



— Denn wären sie parallel, so ständen nach III. beide auf jedem Schenkel des Winkels senkrecht, so daß die beiden Schenkel Senkrechte von einem Punkt (dem Scheitel) auf eine Grade wären, was nach §. 25 nicht angeht.

V. Zwei Grade, bei denen die entgegengesetzten Winkel **nicht** Supplemente sind, schneiden sich auf derjenigen Seite der schneidenden Linie, auf welcher die Summe der zwischen ihnen liegenden entgegengesetzten Winkel einen Gestreckten nicht erreicht.

VI. Werden zwei unbegrenzte Graden von einer dritten so geschnitten, daß ungleiche Wechselwinkel entstehen, so bilden sie mit dieser ein Dreieck,



von welchem der größere Wechselwinkel ein Außenwinkel ist.

VII. Verschiebt man den Durchschnittspunkt zweier Graden, von denen die eine fest liegt, die andere aber um einen festen Punkt drehbar ist, ins Unendliche, so giebt die Parallele durch den Drehungspunkt zur festen Graden die Grenzlage an, welcher sich die andere in der Nähe des Drehungspunktes unaufhörlich und bis zu jedem beliebigen Grade nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

VIII. Zwei Grade sind parallel, wenn sie einer dritten parallel sind.

— Denn schnitte die erste von ihnen die zweite, so müßte sie nach Z. II die dritte, welche mit derselben parallel ist, ebenfalls schneiden, was nach der Voraussetzung nicht geschieht.

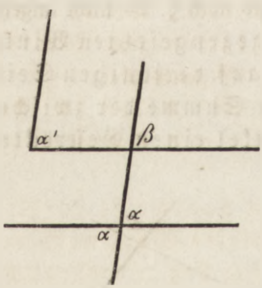
§. 85.

Definition.

Zwei parallele Strahlen, welche von verschiedenen Punkten einer Graden ausgehen und auf einer einzigen Seite derselben liegen, heißen **„gleichgerichtet“** oder **„von gleicher Richtung“**; dagegen heißen **„entgegengesetzt gerichtet“** solche parallele Strahlen, welche auf entgegengesetzten Seiten einer dritten Graden liegen.

Lehrsatz.

Winkel mit paarweise gleichgerichteten oder mit paarweise entgegengesetzt gerichteten Schenkeln sind gleich.



Denn verlängert man ein Paar nicht parallele Schenkel, bis sie sich schneiden, so bilden sie an der Schnittstelle einen Winkel (β), welcher den beiden gegebenen Winkeln (α und α') als Gegenwinkel oder Wechselwinkel bei Parallelen gleich ist (§. 84).

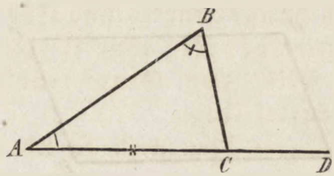
Zusatz.

Zwei Winkel, von denen das eine Schenkelpaar eine gleiche, das andere Schenkelpaar aber eine entgegengesetzte Richtung hat, sind Supplemente von einander.

§. 86.

Aufgaben.

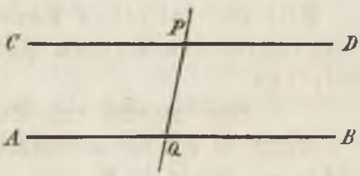
I. Ein Dreieck zu zeichnen, für welches eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind.



Anal. Hat das $\triangle$ *ABC* die Seite *AC* und die Winkel bei *A* und bei *B* von verlangter Größe, so ist nach §. 76, Z. auch der Außenwinkel *BCD* von bekannter Größe, nehmlich $= \angle A + \angle B$. Daher sind die Richtungen *AB* und *CB* construirbar (§. 65), nachdem *AC* von richtiger Länge gezeichnet ist.

Determ. Es muß $\angle A + \angle B < \mathrm{G}$ gegeben sein.

II. Durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Graden zu ziehen.



Anal. Ist die durch *P* gehende Grade $CD \mathbin{\#} AB$, so bilden diese nach §. 84 mit einer dritten Graden *PQ* gleiche Wechselwinkel, so daß die Construction mit Hülfe von §. 65 möglich ist.

§. 87.

Definitionen.

I. Im Viereck heißen diejenigen Seiten, welche keine Ecke gemein haben, **Gegenseiten**, und diejenigen Winkel, welche keinen Schenkel gemein haben, **Gegenwinkel**; — diejenigen Seiten, welche eine Ecke gemein haben, heißen **Nachbarseiten**, diejenigen Winkel, welche einen Schenkel gemein haben, **Nachbarwinkel**.

II. Jedes Viereck, dessen Gegenseiten paarweise parallel sind, heißt ein **Parallelogramm**.[1] — Für dieses Wort wird vor einer Benennung mit Buchstaben das Zeichen $\#$ gebraucht.

Zusatz.

Jedes Parallelogramm ist ein unverzweigtes Viereck.

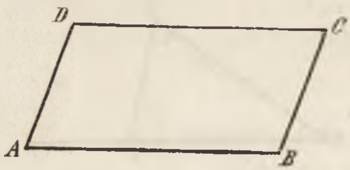
---

1) παραλληλόγραμμον; γράφω, ich beschreibe.

§. 88.

Lehrsatz I.

In jedem Parallelogramm sind die Nachbarwinkel paarweise Supplemente von einander.



Vrs. Das ▱ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beh. Es ist $\angle A + \angle B = \mathsf{G}$.

Bew. Da n. d. Vrs. $AD \mathrel{\not\parallel} BC$ ist, so trifft die Beh. zu n. §. 84.

Anm. Da $\angle A$ und $\angle B$ zwei beliebig gewählte Nachbarwinkel sind, so ist durch das Vorhergehende der Beweis für alle Paare von Nachbarwinkeln geführt.

Zusatz.

Alle Winkel eines Parallelogramms sind concav. Die Diagonalen eines jeden Parallelogramms liegen im Felde desselben.

— Läge nehmlich eine Diagonale nicht im Parallelogrammsfelde, so würde sie mit den anstoßenden Seiten ein Dreieck bilden, in welchem schon ein Winkel $> \mathsf{G}$ wäre, und das ist nicht möglich.

Lehrsatz II.[1])

Ist ein Viereckswinkel das Supplement seiner beiden Nachbarwinkel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Vrs. Im Viereck $ABCD$ ist:

1) $\angle A + \angle B = \mathsf{G}$, 2) $\angle A + \angle D = \mathsf{G}$.

Beh. Das Viereck ist ein Parallelogramm.

Bew. Es ist: $AD \mathrel{\not\parallel} BC$, . . . Vrs. 1) u. §. 83, Z. I,
$AB \mathrel{\not\parallel} DC$ . . . Vrs. 2) u. §. 83, Z. I.

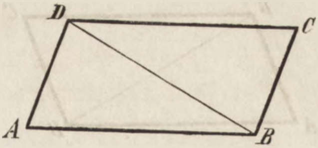
§. 89.

Lehrsatz.

Jede Diagonale zerlegt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

---

1) Umkehrung von Lehrsatz I.



Vrs. Es ist ein $\#\ ABCD$ mit der Diagonale BD gegeben.

Beh. Es ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

Bew. In den beiden Dreiecken ABD und CBD ist:

$$BD = DB;$$

und nach §. 84, indem BD als die Schneidende angesehen wird:

$\angle ABD = \angle CDB$ bei den Parallelen AB und CD,
$\angle ADB = \angle CBD$ „ „ „ AD „ CB.

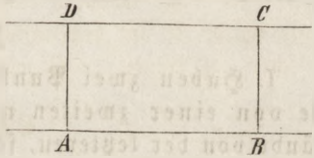
Mithin ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ . . . . (*wsw*).

Zusätze.

I. In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten paarweise gleich, und ebenso die Gegenwinkel paarweise gleich. — Parallele Strecken zwischen Parallelen sind gleich.

— Denn die fraglichen Stücke liegen in den congruenten Dreiecken gleichen Stücken gegenüber (§. 59).

II. Je zwei parallele Graden haben überall einen gleichen Abstand von einander.



— Denn ist $AB \mathrel{+\!\!\!\!\;\!\!+} CD$ und $AD \perp CD$, $BC \perp CD$, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm (§. 83, Z. II).

Definition.

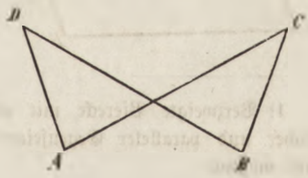
Der Abstand eines Punktes einer Graden von einer parallelen Graden heißt der **Abstand der beiden Parallelen** von einander.

§. 90.[1]

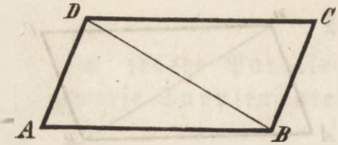
Lehrsatz I.

Sind **die Gegenseiten** eines unverzweigten[2]) Vierecks **paarweise gleich**, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

1) Dieser §. enthält die Umkehrungen der im vorigen §. bewiesenen Sätze.



2) Verzweigte Vierecke mit gleichen Gegenseiten sind sehr wohl möglich. Vergl. §. 86, Z.



Vrs. Im $\square$ $ABCD$ ist:
1) $AB = DC$,
2) $AD = BC$.

Beh. Das $\square$ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Bew. Zieht man die Diagonale BD, so ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ... ($3s$). Mithin ist:
$\angle ABD = \angle CDB$ ... §. 59, also: $AB \# DC$ ... §. 83, Z. I,
und $\angle ADB = \angle CBD$ ... §. 59, also: $AD \# BC$ ... §. 83, Z. I.

Lehrsatz II.

Sind in einem unverzweigten[1]) Viereck **ein Paar** Gegenseiten **gleich und parallel**, so ist es ein Parallelogramm.

Vrs. Im $\square$ $ABCD$ ist: 1) $AB = DC$, 2) $AB \# DC$.

Beh. Das $\square$ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Bew. Zieht man die Diagonale BD, so ist $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ ... (sws); denn es ist: 1) $BD = DB$, 2) $BA = DC$ ... (Vrs. 1.), 3) $\angle ABD = \angle CDB$ ... (Vrs. 2.) u. §. 83, Z. I). Hieraus folgt: $\angle ADB = \angle CBD$ ... §. 59, also: $AD \# BC$ ... §. 83, Z. I.

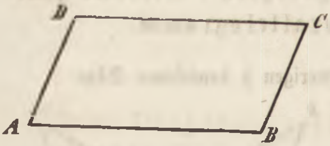
Zusätze.

I. Haben zwei Punkte einer Graden, zwischen denen sie von einer zweiten nicht geschnitten wird, gleiche Abstände von der letzteren, so sind die beiden Graden parallel.

II. Der geometrische Ort aller Punkte, welche auf einer Seite einer Graden liegen und von dieser gleiche Abstände haben, ist eine parallel zu ihr liegende Grade.

Lehrsatz III.

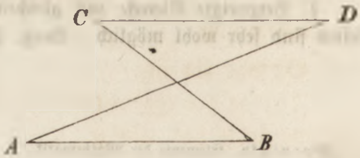
Sind die **Gegenwinkel** eines Vierecks **paarweise** gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



Vrs. Im $\square$ $ABCD$ ist:
1) $\angle A = \angle C$,
2) $\angle B = \angle D$.

Beh. Das $\square$ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

1) Verzweigte Vierecke mit einem Paar gleicher und paralleler Gegenseiten sind sehr wohl möglich:



Bew. Da nach §. 78

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2\,G$$

ist, so folgt n. d. Vrs.:

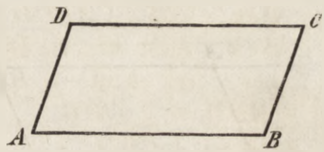
$$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 2\,G,$$
$$\angle A + \angle B = G,$$

und ebenso: $\angle A + \angle D = G$ ... Vrs. 2).

Mithin trifft die Beh. zu nach §. 88, L. II.

Lehrsatz IV.

Sind in einem Viereck **zwei Gegenseiten parallel und zwei Gegenwinkel gleich**, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



Vrs. Im ⏢ $ABCD$ ist:
1) $AB \# DC$,
2) $\angle A = \angle C$.

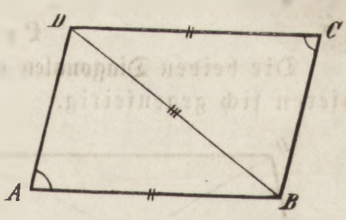
Beh. Das ⏢ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Bew. Wegen der Vrs. 1) ist: $\angle A + \angle D = G$; ... §. 83, Z. I,
mithin nach der Vrs. 2) auch: $\angle C + \angle D = G$.

Folglich ist die Beh. richtig nach §. 88, L. II.

Lehrsatz V.

Sind in einem Viereck **zwei Gegenseiten gleich, zwei Gegenwinkel gleich**, und die **Diagonale**, welche diesen gegenüberliegt, **nicht kleiner** als die ersteren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.



Vrs. Im ⏢ $ABCD$ ist:
1) $AB = CD$,
2) $\angle A = \angle C$,
3) $BD \geqq AB$.

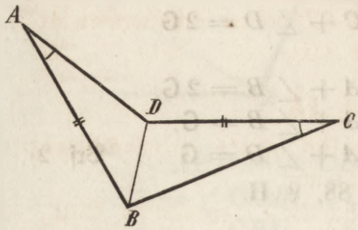
Beh. Das ⏢ $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Bew. Es ist

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB \quad ... \quad (Ssw).$$

Hieraus folgt das Übrige.

Scholie.

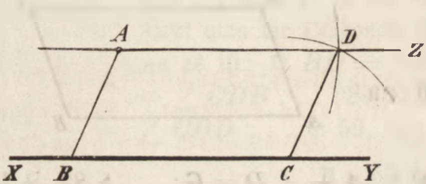


Wäre $BD < AB$, so könnte das $\square$ $ABCD$ u. A. auch die hierneben gezeichnete Gestalt haben.

§. 91.

Aufgaben.

I. Durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Graden zu ziehen.



Anal. Ist $AZ \# XY$, so giebt es zwischen ihnen ein $\#$ $ABCD$; und ein solches entsteht nach §. 89, L. I, wenn $AD = BC$, $CD = AB$ gemacht wird, was durch Kreise mit dem Radius BC um A und dem Radius AB um C zu Stande gebracht werden kann.

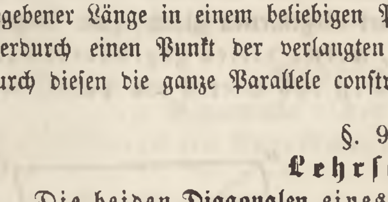
II. Zu einer gegebenen Graden eine Parallele in einem gegebenen Abstande von ihr zu ziehen.

Anal. Da man auf der gegebenen Graden eine Senkrechte von gegebener Länge in einem beliebigen Punkte errichten kann, so kann man hierdurch einen Punkt der verlangten Parallele finden und dann nach I durch diesen die ganze Parallele construiren.

§. 92.

Lehrsatz I.

Die beiden **Diagonalen** eines jeden Parallelogramms halbieren sich gegenseitig.



Vrs. Die beiden Diagonalen des $\#$ $ABCD$ schneiden sich im Punkte M.

Beh. Es ist:

1) $MA = MC$,
2) $MB = MD$.

Bew. Es ist $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ . . . (*wsw*), weil
$AB = CD$ . . . . §. 89, Z. I,
$\angle MAB = \angle MCD$ an den Parall. AB u. CD bei der Schneidenden AC §. 84,
$\angle MBA = \angle MDC$ „ „ „ AB u. CD „ „ „ BD „

Lehrsatz II.

Halbieren sich die Diagonalen eines Vierecks gegenseitig, so ist es ein Parallelogramm.

Vrs. Im $\square ABCD$ schneiden sich die Diagonalen in M so, daß 1) $MA = MC$, 2) $MB = MD$ ist.

Beh. Es ist $AB \mathrel{\#} DC$, $AD \mathrel{\#} BC$.

Bew. Da $\angle AMB = \angle CMD$ (als Scheitelwinkel), so ist $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ . . . (*sws*). Hieraus folgt die Gleichheit der Seiten AB und CD, sowie der Wechselwinkel an diesen, weshalb nach §. 90, L. II $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Lehrsatz III.

Ist ein Punkt auf einer durch ihn hindurchgehenden Graden gleich weit von zwei Parallelen entfernt, so ist er es auch auf jeder anderen Graden, welche durch ihn hindurchgeht.

Vrs. Es ist 1) $AB \mathrel{\#} DC$; und die Graden AC und BD treffen sich in M so, daß 2) $MA = MC$ ist.

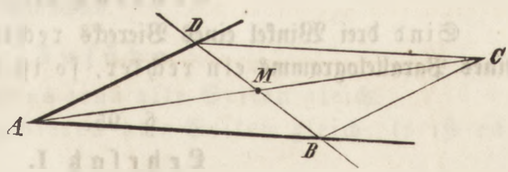
Beh. Es ist: $MB = MD$.

Bew. Es ist: $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ . . . (*wsw*).

§. 93.

Aufgaben.

I. Es ist ein concaver Winkel und im Felde desselben ein Punkt gegeben. Durch diesen soll eine Grade so gezogen werden, daß ihre Schnittpunkte mit den Schenkeln gleich weit von ihm entfernt sind.



Anal. Ist $\angle BAD$ der gegebene Winkel, M der gegebene Punkt, und BD die verlangte Grade, so läßt sich das $\triangle ABD$ durch Verdoppelung der Graden AM bis C zu einem $\#\, ABCD$ vervollständigen (§. 91, L. II).

Hat man erst die Ecke C, so läßt sich $CD \# AB$ ziehen, z. B. nach §. 90, wodurch man außer M einen zweiten Punkt D der gesuchten Graden DB erhält.

II. Von einem Punkt außerhalb eines concaven Winkelfeldes eine Grade so zu ziehen, daß er und die Durchschnitte mit den beiden Schenkeln gleiche Strecken auf derselben bestimmen.

Anal. Ist $\angle CAD$ der gegebene Winkel, B der gegebene Punkt und BMD die verlangte Grade, so hat man dafür zu sorgen, daß $ABCD$ ein Parallelogramm wird.

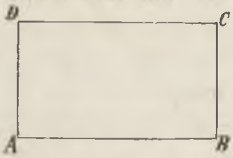
§. 94.

Definition.

Jedes Parallelogramm, in welchem zwei Nachbar**winkel** gleich sind, heißt ein **Rechteck**.

Lehrsatz I.

In jedem Rechteck sind alle Winkel rechte.



Vrs. Im $\# ABCD$ ist $\angle A = \angle B$.

Beh. Es ist $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \mathcal{R}$.

Bew. Da das $\square$ $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so ist

$$\angle A + \angle B = \mathsf{G} = 2\mathcal{R} \text{ . . . . §. 87, L. 1 u. §. 39, Z. IV.}$$

Mithin ist wegen der Vrs., daß $\angle A = \angle B$ sei:

$$2 \cdot \angle A = 2\mathcal{R}, \ \angle A = B = \mathcal{R};$$

folglich auch:

$$\angle C = D = \mathcal{R} \text{ . . . §. 88, Z. 1.}$$

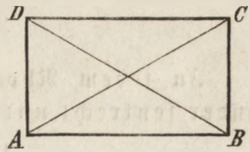
Lehrsatz II.

Sind **drei Winkel eines Vierecks** rechte, oder ist **ein Winkel eines Parallelogramms** ein rechter, so ist dasselbe ein Rechteck.

§. 95.

Lehrsatz I.

In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich.



Vrs. Es ist ein Rechteck *ABCD* mit seinen Diagonalen gegeben.

Beh. Es ist: $AC = BD$.

Bew. Es ist:

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$ . . . . (*sws*).

Lehrsatz II.

Sind die Diagonalen eines Parallelogramms gleich, so ist es ein Rechteck.

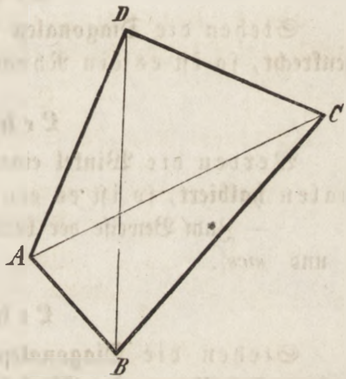
Vrs. Es ist ein # *ABCD* mit seinen Diagonalen gegeben, in welchem $AC = BD$ ist.

Beh. Es ist $\angle ABC = \angle BAD$.

Bew. Es ist $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ . . . (3*s*), und deshalb die Behauptung zutreffend.

Scholie.

Ein Viereck, welches gleiche Diagonalen besitzt, braucht deshalb noch kein Rechteck zu sein; — z. B. hat das hierneben gezeichnete Viereck gleiche Diagonalen. Es müssen noch die beiden Bestimmungen hinzukommen, welche schon zur Kennzeichnung eines allgemeinen Parallelogramms erforderlich sind.



§. 96.

Definition.

Jedes Parallelogramm, in welchem zwei **Nachbarseiten** gleich sind, heißt ein **Rhombus**. [1])

Zusätze.

I. In jedem Rhombus sind alle Seiten gleich.

II. Sind in einem Viereck alle Seiten gleich, so ist es ein Rhombus.

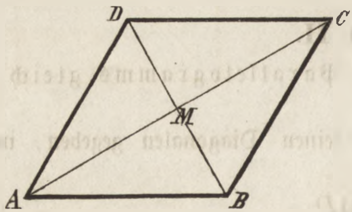
---

1) ῥόμβος.

§. 97.

Lehrsatz I.

In jedem Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und halbieren die Rhombuswinkel.



Vrs. Im Rhombus $ABCD$ schneiden sich die Diagonalen in M.

Beh. Es ist $AC \perp BD$, und außerdem

$$\angle CAB = \angle CAD,$$
$$\angle BDA = \angle BDC,$$
$$\angle ACD = \angle ACB,$$
$$\angle DBC = \angle DBA.$$

Bew. Es ist: $\triangle MAB \cong \triangle MAD \cong \triangle MCD \cong \triangle MCB$ $(3s)$, und deshalb die Behauptung zutreffend.

Lehrsatz II.

Stehen die **Diagonalen eines Parallelogramms** auf einander **senkrecht**, so ist es ein Rhombus.

Lehrsatz III.

Werden die **Winkel eines Parallelogramms** von den Diagonalen **halbiert**, so ist es ein Rhombus.

— Zum Beweise der beiden letzten Sätze gelangt man durch §. 91 und (sws).

Lehrsatz IV.

Stehen die **Diagonalen eines Vierecks** auf einander **senkrecht und halbieren die Winkel** desselben, so ist das Viereck ein Rhombus.

— Bew. durch (wsw).

§. 98.

Definition.

Jedes Parallelogramm, in welchem zwei Nachbarwinkel und auch zwei Nachbarseiten gleich sind, heißt ein **Quadrat.** [1])

1) quadratum.

Zusatz.

In jedem Quadrat sind alle Seiten gleich, alle Winkel rechte; die Diagonalen sind gleich, stehen auf einander senkrecht und halbieren die Quadratswinkel. — Die Quadrate besitzen alle Eigenschaften der Rechtecke und der Rhomben.

§. 99.

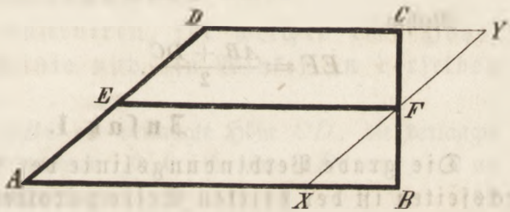
Definition.

Jedes Viereck, in welchem zwei Seiten parallel sind, heißt ein **Trapez**.[1]) — Die beiden als parallel vorausgesetzten Gegenseiten heißen die **Grundlinien**, die beiden anderen aber die **Schenkel** des Trapezes.

Lehrsatz I.

Die Grade zwischen den Mitten der Schenkel eines Trapezes ist den Grundlinien parallel und der halben Summe der letzteren gleich.

Vrs. Das $\square$ $ABCD$ ist ein Trapez, in welchem 1) $AB \mp CD$ ist, und ferner eine Grade EF die Schenkel AD und BC in E und F so trifft, daß 2) $EA = ED$, 3) $FB = FC$ ist.



Beh. Es ist: 1) $EF \mp AB \mp CD$, 2) $EF = \frac{AB + CD}{2}$.

Bew. Man ziehe zu AD durch F eine Parallele, welche die Grade AB in X und die Grade DC in Y schneide. Dann ist:

$\triangle BFX \cong \triangle CFY$, ... ($sws$)

weil: 1) $FB = FC$ . . . . Vrs. 3),

2) $\angle BFX = \angle CFY$ . . . . §. 27,

3) $\angle FBX = \angle FCY$ . . . . Vrs. 1) u. §. 84.

1) Das Trapez (τραπέζιον, von τράπεζα oder τετράπεζα, Vierfuß, Tischplatte) enthält eine Bedingung weniger, als das Parallelogramm, da die Parallelität nur von zwei Gegenseiten verlangt wird: das Trapez ist die allgemeinere Gestalt.

Aus der bewiesenen Congruenz folgt:

$$\text{I. } FX = FY,$$

$$\text{II. } BX = CY.$$

Nun ist aber ferner wegen der Parallelität der Gegenseitenpaare $AXYD$ ein Parallelogramm, weshalb

$$\text{III. } AD = XY$$

hervorgeht.

Aus III folgt in Verbindung mit Vrs. 2) und I:

$$2 \cdot AE = 2 \cdot XF, \quad AE = XF,$$

so daß, weil in der Constr. $AE \mp XF$ gemacht war, das Viereck $AXFE$ ein Parallelogramm (§. 89, L. II) und deshalb

$$\text{IV. } EF = AX, \text{ so wie } EF \mp AX, \ EF \mp AB$$

ist. — In ähnlicher Weise kann man ableiten, daß $DYFE$ ein Parallelogramm, und daß deshalb

$$\text{V. } EF = DY, \text{ so wie } EF \mp DY, \ EF \mp DC$$

ist.

Summirt man endlich die Gleichungen IV und V, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2 \cdot EF &= AX + DY \\ &= (AB - BX) + (DC + CY) \\ &= AB + DC - BX + CY \\ &= AB + DC \text{ . . . . II.} \end{aligned}$$

Mithin:

$$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Zusatz I.

Die grade Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten ist der dritten Seite parallel und der Hälfte derselben gleich.

— Denn läßt man die Seite DC des Trapezes $ABCD$ in einen Punkt zusammenschrumpfen, so geht es in ein Dreieck über.

Lehrsatz II.

Zieht man durch den Mittelpunkt des einen Schenkels eines Trapezes eine Parallele zu den Grundlinien, so halbiert dieselbe den andern Schenkel und ist der halben Summe der Grundlinien gleich.

— Denn da es durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Graden giebt (§. 84, Z. I), so fällt sie mit derjenigen zusammen, welche nach L. I durch Verbindung der Mitten der Schenkel erhalten wird.

Zusatz II.

Zieht man zu einer Dreiecksseite durch die Mitte einer zweiten eine Parallele, so halbiert diese auch die dritte Seite, und ihr Abschnitt zwischen den beiden Schnittpunkten ist halb so groß, wie die zuerst genannte Seite.

§. 100.

Definition.

Unter einer **Höhe eines Dreiecks** versteht man die von einer Ecke aus auf die Gegenseite gefällte Senkrechte, unter einer **Höhe eines Parallelogramms** den Abstand zweier parallelen Gegenseiten von einander, unter der **Höhe eines Trapezes** den Abstand der parallelen Gegenseiten von einander.[1]

Grundlinie heißt eine solche Seite, auf welcher eine Höhe gedacht wird.

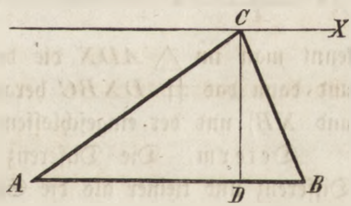
Zusatz.

Jede **Dreiecksseite** kann als Grundlinie mit einer besonderen Höhe gedacht werden, die **Parallelogrammseiten** paarweise, von den **Trapezseiten** nur die parallelen.

Aufgaben.

I. Ein **Dreieck** zu construiren, für welches eine Höhe, die zugehörige Grundlinie und ein Winkel an derselben gegeben sind.

Anal. Hat das $\triangle ABC$ die verlangte Höhe CD, die verlangte Grundlinie AB und den verlangten $\angle A$, so sind AB und $\angle A$ an einander hängende, sofort construirbare Stücke, durch welche man zugleich den zweiten Schenkel des $\angle A$ als einen Ort des Punktes C gewinnt. Einen zweiten Ort des Punktes C liefert die Bestimmung, daß C einen gegebenen Abstand von AB haben soll, und dieser Ort ist nach §. 90 II, Z. II eine Parallele CX zu AB, welche nach §. 91, II in dem gegebenen Abstand construirt werden kann. — Nach Auffindung des Punktes C ist keine Schwierigkeit mehr vorhanden.

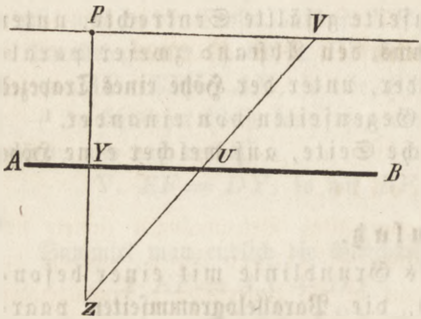


1) Bei einem Viereck von beliebiger Gestalt läßt sich von einer Höhe nicht sprechen.

II. Ein **Parallelogramm** zu construiren, für welches eine Höhe, die zugehörige Grundlinie und ein Winkel gegeben sind. — Analysis analog derjenigen zu I.

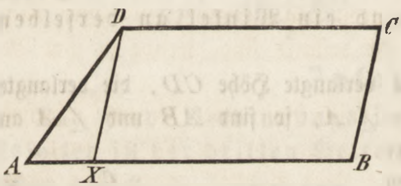
III. Ein **Trapez** zu construiren, für welches die Höhe, die Grundlinien und ein Winkel gegeben sind.

IV. Durch einen gegebenen Punkt die **Parallele** zu einer gegebenen Graden zu ziehen.



Anal. Ist $PV \mp AB$ gezogen, so kann man zu dieser Figur zwei sonst beliebig gezogene Graden PZ und ZV hinzufügen, nur daß PZ von AB in einem Punkt Y halbiert werde. Dann wird aber in einem Punkt U auch ZV von AB halbiert (§. 99, Z. II). — Hiernach läßt sich die Parallele ohne Winkelabtragung construiren.

V. Ein **Trapez** zu construiren, für welches die Seiten gegeben sind.



Anal. Zieht man, wenn AB und CD die Grundlinien sind, durch D eine Parallele zum Schenkel BC, so wird $BCDX$ ein Parallelogramm. Da in diesem $DX = CB$ und $BX = CD$ ist, so kennt man im $\triangle ADX$ die drei Seiten, kann es deshalb construiren und dann das $\#$ $DXBC$ heransetzen, von welchem zwei Seiten (XD und XB) und der eingeschlossene Winkel (DXB) gefunden sind.

Determ. Die Differenz der Grundlinien muß größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Schenkel gegeben sein.

Capitel IV.

Die Grundeigenschaften des Kreises.

---

§. 101.

Scholie.

Der Hauptzweck der bisher angestellten Betrachtungen richtete sich auf die Ermittelung der Eigenschaften der graden Linien, weshalb die Kreislinien nur in dem Maße mit in die Untersuchung hineingezogen wurden, in welchem man sie ohne Verletzung der Strenge als Mittel für jenen Zweck nicht entbehren kann.

In diesem Capitel tritt das umgekehrte Verhältnis ein.

Vom Kreise ist bisher gehandelt worden in:

§. 35, wo die Existenz des Kreises nebst seinen Grundeigenschaften nachgewiesen und einige Begriffe definirt sind, welche zu ihm Beziehung haben;

§. 36, wo das Postulat über die Construction eines Kreises aufgestellt ist, von welchem man das Centrum und den Radius kennt;

§. 37, wo Kennzeichen für die Lage eines Punktes gegen einen Kreis, dergleichen für die Congruenz von Kreisen gefunden und die Kreisbogen congruenter Kreise als gleichartige Größen erkannt werden;

§. 38 nud §. 43, wo von der Congruenz der Kreisausschnitte und von der Wechselbeziehung gleicher Centriwinkel und Kreisbogen zu einander gehandelt wird;

§. 49, wo von den Schnittbedingungen einer Graden mit einem Kreise die Rede ist; und in

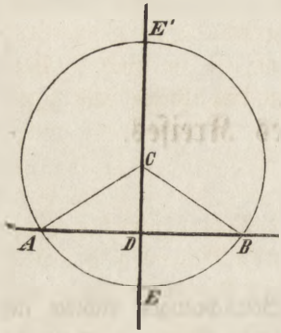
§. 51, wo die Bedingungen für den zweipunktigen Schnitt zweier Kreise aufgestellt werden.

An diese Lehren schließen sich die folgenden an.

§. 102.

Lehrsatz I.

Die durch das Kreiscentrum gehende Senkrechte zu einer Secante halbiert das Sehnenstück der letzteren und jeden der durch sie abgeschnittenen Kreisbogen.



Vrs. Durch das Centrum C eines Kreises geht zu einer Secante AB eine Senkrechte, welche dieselbe in D und den Kreis in E und E' schneidet.

Beh. Es ist:

1) $DA = DB$,
2) $EA = EB$,
3) $E'A = E'B$.

Bew. Zieht man die Radien[1] CA und CB, so ist das $\triangle\ ACB$ über der Basis AB gleichschenklig, und daher

$$DA = DB,\ \angle DCA = \angle DCB \ \ldots\ \text{§. 30, Z. I.}$$

Aus der so eben bewiesenen Gleichheit der Centriwinkel, $\angle ECA = \angle ECB$, und der sich hieraus ergebenden Gleichheit ihrer Nebenwinkel, $\angle E'CA = \angle E'CB$, folgt aber

$$EA = EB,\ E'A = E'B \ \ldots\ \text{§. 43, Z. I.}$$

Lehrsatz II.

Die im Mittelpunkt einer Sehne auf ihr errichtete Senkrechte geht durch das Kreiscentrum und halbiert die abgeschnittenen Kreisbogen.

Bew., wie oben, nur daß §. 42, Z. III anstatt §. 30, Z. I zur Anwendung kommt.

Lehrsatz III.

Derjenige Durchmesser, welcher durch den Mittelpunkt einer Sehne hindurchgeht, steht auf der letzteren senkrecht und halbiert die abgeschnittenen Kreisbogen.

---

1) Da der Kreis durch die Gleichheit der Radien definirt ist, so muß jede Beweisführung über seine Eigenschaften auf diese Gleichheit im letzten Grunde zurückgreifen. Das Ziehen der Radien nach wichtigen Punkten ist daher das erste Geschäft fast jedes Beweises. Hierauf kommen dann meistens die Sätze über das gleichschenklige Dreieck zur Anwendung.

Bew., wie zu L. I, nur daß §. 30, L. anstatt §. 30, Z. I zur Anwendung kommt.

Lehrsatz IV.

Derjenige Durchmesser, welcher durch den Mittelpunkt eines Bogens hindurchgeht, halbiert die denselben abschneidende Sehne senkrecht und geht durch den Mittelpunkt des zweiten abgeschnittenen Bogens.

— Denn wenn $EA = EB$ gegeben ist, so ist auch $\angle ECA = \angle ECB$ . . . (§. 38, Z.). Hieraus folgt das Übrige nach §. 42, Z. IV und nach L. I.

Lehrsatz V.

Diejenige Grade, welche durch die Mittelpunkte einer Sehne und des einen der abgeschnittenen Bogen geht, steht auf der Sehne senkrecht, geht durch das Kreiscentrum und halbiert den andern Bogen.

— Denn fällt man von C auf AB eine Senkrechte, so geht diese durch D und E, unterscheidet sich also nicht von der gegebenen Graden DE, da sie mit ihr zwei Punkte, D und E, gemein hat; mithin geht sie auch durch E'.

Lehrsatz VI.

Diejenige Sehne, welche die beiden von einer zweiten Sehne abgeschnittenen Bogen halbiert, ist ein Durchmesser, halbiert die andere Sehne und steht auf ihr senkrecht.

— Denn zieht man durch den Halbierungspunkt E des Bogens AEB den Durchmesser, so hat dieser mit der gegebenen Sehne EE' außer E nach L. IV auch den Punkt E' gemein, weshalb er mit ihr zusammenfällt.

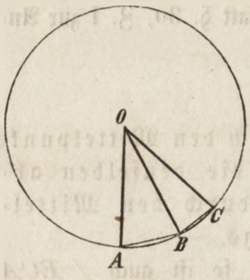
§. 103.

Lehrsatz I. [1]

Ein Kreis und eine Grade haben höchstens zwei Punkte mit einander gemein. — Jeder Kreis ist eine krumme Linie.

---

1) Dieser Lehrsatz wurde in §. 49 (Z. II) schon einmal auf andere Weise bewiesen. Er ist hier hauptsächlich deshalb wiederholt, um ihn dem in §. 104 folgenden Lehrsatz I auf sichtbare Weise gegenüberzustellen.



Vrs. A, B und C sind drei verschiedene Punkte eines Kreises um O.

Beh. Die drei Punkte A, B, C liegen nicht in einer einzigen Graden.

Bew. Zieht man die Sehnen AB, BC und die Radien OA, OB, OC, so ist, weil die Dreiecke AOB und BOC über AB und BC gleichschenklig sind:

$$\angle OBA < R, \ \angle OBC < R, \ldots \text{ §. 47, Z. III,}$$

mithin:

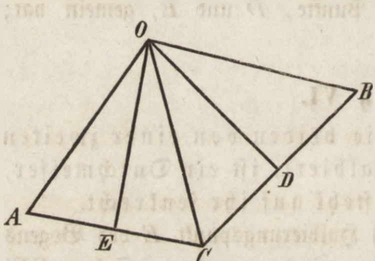
$$\angle ABC < 2R; \ \ldots\ldots\ldots \text{ §. 20, VI,}$$

so daß die Linie ABC keine grade sein kann.

§. 104.

Lehrsatz I.

Durch je drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, läßt sich ein Kreis legen.



Vrs. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben, welche nicht in einer einzigen Graden liegen.

Beh. Durch die drei Punkte A, B, C läßt sich ein Kreis legen.

Bew. Zieht man die Graden CA und CB, so bilden sie nach der Vrs. einen $\angle ACB$, welcher weder null noch gestreckt ist. Errichtet man dann auf BC in ihrer Mitte D, und auf AC in ihrer Mitte E je eine Senkrechte, so schneiden sich diese nach §. 84, Z. IV in einem Punkte O; und nach §. 30, Z. II ist, wenn man noch die Graden OA, OB, OC zieht, in den Dreiecken AOC und BOC:

$$OA = OC, \ OB = OC.$$

Mithin geht der um O mit dem Radius OA gezogene Kreis auch durch B und C.

Zusatz.

Durch je drei Punkte läßt sich entweder eine Grade oder ein Kreis legen.

Lehrsatz II.

Durch drei Punkte, welche nicht in einer Graden liegen, läßt sich **nur ein** Kreis legen. — Alle Kreise, welche drei Punkte gemein haben, decken sich vollständig.

Vrs. Es haben mehrere Kreise die drei Punkte A, B, C gemein.

Beh. Diese Kreise decken sich vollständig.

Bew. Da AC und BC gemeinschaftliche Sehnen dieser Kreise sind, so liegen ihre Centren nach §. 102, L. II sämmtlich in derjenigen Graden, welche auf AC in ihrem Mittelpunkte E senkrecht steht, und auch sämmtlich in derjenigen Graden, welche auf BC in ihrem Mittelpunkte D senkrecht steht. Nun haben aber zwei verschiedene Graden nie mehr als einen Punkt gemein: folglich liegen die Kreiscentren sämmtlich in einem einzigen Punkte O. Dann haben die Kreise ferner, weil sie sämmtlich durch A gehen, gleiche Radien $= OA$. Folglich decken sie sich vollständig. (§. 37, Z. I.)

Zusätze.

I. Je zwei verschiedene Kreise können höchstens zwei Punkte gemein haben.

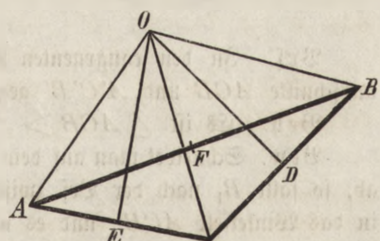
II. Die drei Graden, welche einzeln auf den Seiten eines Dreiecks in deren Mitten senkrecht stehen, schneiden sich in einem einzigen Punkt, welcher von den Ecken gleich weit entfernt ist.

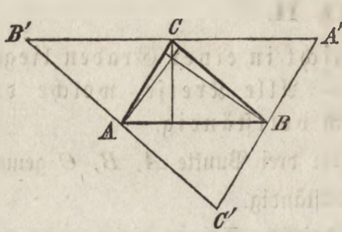
— Denn die drei Seiten sind die Sehnen eines einzigen Kreises. [1])

III. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

---

1) Der Beweis läßt sich auch ohne Einmischung des Kreises auf einfache Weise führen. Denn zieht man durch die Mitten D und E die Graden $DO \perp BC$, $EO \perp AC$, so ist, wie beim Beweise von L. I: $OA = OC = OB$. Daher ist $\triangle AOB$ über AB gleichschenklig, so daß die auf AB in ihrer Mitte F errichtete Senkrechte ebenfalls durch O hindurchgeht (§. 42, Z. III).





— Denn zieht man durch die Ecken des $\triangle ABC$ die Parallelen zu den Seiten, so entsteht ein neues $\triangle A'B'C'$, dessen Seiten in A, B und C halbiert sind und auf denen die Höhen des ersteren in A, B und C senkrecht stehen, weil sie senkrecht zu ihren Parallelen sind.

Aufgaben.

I. Einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte hindurchgeht.

— Analysis und Determination sind in den obigen Sätzen enthalten.

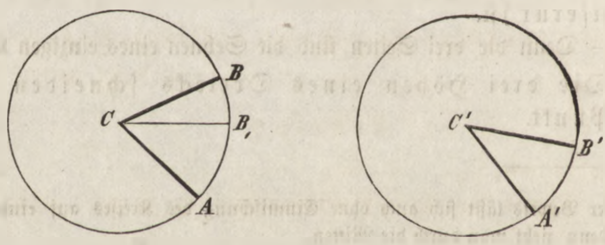
II. Das Centrum eines gegebenen Kreises zu finden.

III. Einen gegebenen Kreisbogen zu einem ganzen Kreise zu vervollständigen.

§. 105.

Lehrsatz I.

In congruenten Kreisen steht der größere Centriwinkel auf dem größeren Bogen.



Vrs. In den congruenten Kreisen um C und C' sind die Kreisausschnitte ACB und $A'C'B'$ gegeben, bei welchen $AB > A'B'$ ist.

Beh. Es ist $\angle ACB > \angle A'C'B'$.

Bew. Schneidet man auf dem Bogen AB einen Bogen $AB_1 = A'B'$ ab, so fällt B_1 nach der Vrs. zwischen A und B, also der Radius CB_1 in das Winkelfeld ACB, und es wird $\angle ACB_1 = \angle A'C'B'$ (§. 38), mithin $\angle ACB > \angle A'C'B'$ (§. 17, D. III).

Lehrsatz II.

In congruenten Kreisen liegt der größere Bogen im Felde des größeren Centriwinkels.

Vrs. In den congruenten Kreisen um C und C' sind die Kreisausschnitte ACB und $A'C'B'$ gegeben, in welchen $\angle ACB > \angle A'C'B'$ ist.

Beh. Von den Bogen dieser Kreisausschnitte ist $AB > A'B'$.

Bew. Im Felde des Centriwinkels ACB kann man nach der Vrs. einen Radius CB_1 so ziehen, daß $\angle ACB_1 = \angle A'C'B'$ wird. Da dann der Bogen $AB_1 = A'B'$ wird (§. 43), so ist $AB > A'B'$.

Zusatz.

In jedem einzelnen Kreise steht der größere Centriwinkel auf dem größeren Bogen, und umgekehrt. — In jedem Kreise nehmen die Bogen und die Centriwinkel über ihnen zugleich zu und ab.

— Denn legt man die oben betrachteten congruenten Kreise mit den Centren zusammen, so bilden sie, wie man sie auch um diese drehen mag, einen einzigen Kreis (§. 37, Z. I).

§. 106.

Definition.

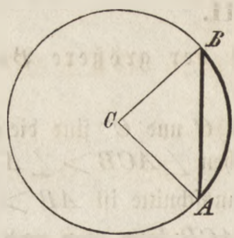
Jede Figur, welche von einer Sehne und einem dieselbe überspannenden Kreisbogen gebildet wird, heißt ein **Kreisabschnitt.**

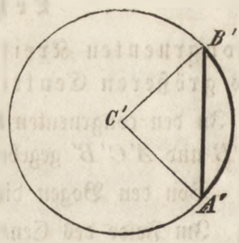
Lehrsatz.

In Kreisabschnitten congruenter Kreise sind die Sehnen und die Bogen in übereinstimmendem Sinne gleich und ungleich, wenn die Felder der Kreisabschnitte die Centren nicht in sich enthalten.

Bew.[1]) In den congruenten Kreisen um C und C' seien ABA und $A'B'A'$ Kreisabschnitte, deren Felder die Centren C und C' nicht in sich

1) Da in dem Lehrsatz vier von einander verschiedene Sätze zusammengezogen sind, so hat man vier verschiedene Voraussetzungen mit vier verschiedenen Behauptungen.





enthalten. Zieht man die Radien CA, CB, $C'A'$, $C'B'$, so entstehen wegen der Gleichheit derselben zwei Dreiecke ACB und $A'C'B'$, welche in den von C und C' ausgehenden Seitenpaaren übereinstimmen, und deren Winkel bei C und C' Centriwinkel auf den Bogen AB und $A'B'$ der gegebenen Kreisabschnitte sind.[1])

Nun sind aber nach §. 106 diese Centriwinkel mit diesen Bogen in übereinstimmendem Sinne ungleich oder auch gleich, und nach §. 59 4) sind sie es gleichfalls mit den Seiten AB und $A'B'$ der Dreiecke ACB und $A'B'C'$. Daher gilt unser Satz.

Zusatz.

In jedem Kreise nehmen Sehne und Bogen eines Kreisausschnitts, in dessen Felde das Centrum **nicht** liegt, zugleich zu und ab.

§. 107.

Lehrsatz I.

In jedem Kreise sind alle Sehnen, welche einen gleichen Abstand vom Centrum haben, gleich.

Vrs. In einem Kreise hat man zwei Sehnen AB und $A'B'$ in den Abständen CD und CD' vom Centrum C, und es ist $CD = CD'$.

Beh. Es ist $AB = A'B'$.

Bew. Zieht man die Radien CA und CA', so ist $\triangle CAD \cong \triangle CA'D' \ldots (Ssw)$; mithin:

1) Läge C zwischen Sehne und Bogen, so würde der auf diesem stehende Centriwinkel nicht Winkel der fraglichen Dreiecke sein.

$AD = A'D'$,

$2 \cdot AD = 2 \cdot A'D'$, $AB = A'B'$ . . . §. 20, XI u. §. 102, L. I.

Lehrsatz II.

In jedem Kreise haben alle gleichen Sehnen gleiche Abstände vom Centrum.

Vrs. In einem Kreise hat man zwei Sehnen AB und $A'B'$ in den Abständen CD und CD' vom Centrum C, und es ist $AB = A'B'$.

Beh. Es ist $CD = C'D'$.

Bew. Nach der Vrs. und §. 20, XIII ist:

$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}A'B'$, $AD = A'D'$ . . . . §. 102, L. I.

Zieht man noch die Radien CA und CA', so ist mithin:

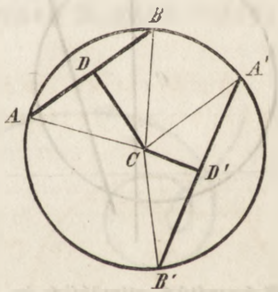
$\triangle CAD \cong \triangle CA'D'$, ... (*Ssw*)

also: $CD = CD'$.

§. 108.

Lehrsatz I.

Diejenigen Sehnen eines Kreises, welche keine Durchmesser sind, sind kleiner als ein solcher, und zwar desto kleiner, je weiter sie vom Centrum entfernt liegen.



Vrs. Die Sehnen AB und $A'B'$ eines Kreises um das Centrum C haben von diesem die Abstände CD und CD', von welchen $CD > CD'$ ist.

Beh. Bezeichnet man durch d die Länge des Kreisdurchmessers, so ist

$AB < A'B' < d$.

Bew. Zieht man die Radien CA, CB, CA', CB', so folgt aus den Dreiecken ACB und $A'CB'$ zunächst ohne Weiteres:

$AB < CA + CB = d$, $A'B' < CA' + CB' = d$ . . §. 50, L. I u. §. 35, Z. II.

Ferner sind in den bei D und D' rechtwinkligen Dreiecken CAD und $CA'D'$ die Hypotenusen gleich (als Radien: $CA = CA'$), während Kathete $CD > CD'$ ist (n. d. Vrs.). Also ist:

$AD < A'D'$, ... §. 60,

$2 \cdot AD < 2 \cdot A'D'$ . . . . §. 20, XII.

Mithin: $AB < A'B'$ . . . . §. 102, L. I.

Lehrsatz II.

In einem Kreise liegt jede kleinere Sehne weiter vom Centrum entfernt als die größere; und jede Sehne, welche einem Durchmesser gleich ist, ist selbst ein Durchmesser.

Vrs. Die Sehnen AB und $A'B'$ eines Kreises um das Centrum C haben von diesem die Abstände CD und CD'; und es ist $AB < A'B'$.

Beh. Es ist $CD > CD'$; ferner muß $CD' = 0$ sein, wenn $A'B' = d$ sein soll, und d die Länge eines Durchmessers bedeutet.

Bew. Aus der Vrs. folgt: $\frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}A'B'$, d. i. nach §. 102, L. I: $AD < A'D'$. Zieht man nun die Radien CA und CA', so ergiebt sich demnach aus den rechtwinkligen Dreiecken CAD und $CA'D'$, daß $CD > CD'$ ist (§. 60).

Zieht man noch den Radius CB', so ersieht man aus §. 50, L. I, daß $A'CB'$ kein Dreieck sein kann, wenn $A'B' = d = CA' + CB'$ sein soll, sondern dann $CD' = 0$ sein muß.

§. 109.

Scholie.

Nach dem Lehrsatz I des vorigen §. wird das Sehnenstück einer Secante, w nn man sie vom Kreiscentrum entfernt, immer kleiner, m. a. W.: ihre Schnittpunkte mit dem festliegenden Kreise rücken immer näher an einander. Sobald der Abstand der Graden vom Centrum dem Radius gleich wird, hat sie nach §. 49, Z. III mit dem Kreise nur noch einen Punkt gemein, nehmlich den Endpunkt des Radius, welcher zugleich auf ihr senkrecht steht.

Man kann fragen, ob dies vielleicht eine Grenzlage ist, in welche eine bewegliche Secante auch bloß dadurch gebracht wird, daß man ihr Sehnenstück allmählich in jenen einzigen Punkt zusammenschrumpfen läßt. Oder genauer gesprochen: Werden die Entfernungen bestimmter Punkte dieser Graden von einer beweglichen Secante vielleicht bloß dadurch unendlich klein,[1]) daß man das Sehnenstück der letzteren bei dem in Rede stehenden Kreispunkt unendlich klein nimmt?

Die Beantwortung dieser Frage ist für die Erkennung der Eigen-

1) d. h. kleiner als eine beliebig klein gegebene unveränderliche Strecke. Vergl. Arithmetik §. 34.

schaften des Kreises von weittragender Bedeutung. Sie fällt, wie die analoge Frage bei vielen andern Curven[1] (krummen Linien), bejahend aus (§. 111). — Es giebt aber auch sowohl solche krumme Linien, bei welchen die Secante durch einen Curvenpunkt beim Zusammenschrumpfen ihres Sehnenstücks verschiedenen Grenzlagen genähert werden kann, als auch solche, bei welchen eine Grenzlage überhaupt nicht existirt.

§. 110.

Definitionen.

I. Bewegt sich eine Grade so, daß die Entfernungen zweier bestimmten Punkte einer festen Graden von ihr schließlich kleiner werden und dann kleiner bleiben als eine beliebig klein gewählte, unveränderliche Strecke, so heißt die feste Grade die **Grenzlage** der bewegten.

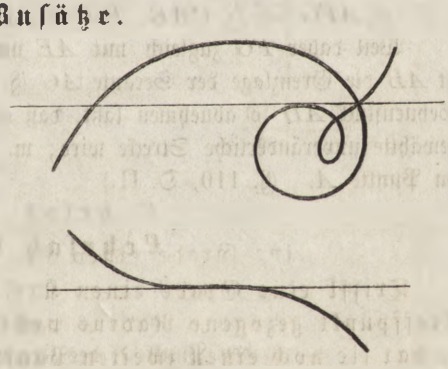
II. Unter der **Tangente**[2] oder der **Berührenden** einer Linie in einem Punkt der letzteren versteht man die Grenzlage einer um ihn drehbaren Secante, deren Sehnenstück allmählich kleiner gemacht wird als eine beliebig klein gewählte, unveränderliche Strecke.

III. Der Punkt, in welchen die Secante zusammenschrumpft, heißt der **Berührungspunkt**.

IV. Beim Kreise heißt der Radius, welcher nach dem Berührungspunkte führt, **Berührungsradius**.

V. Zwei Winkel, deren Summe einen Rechten beträgt, heißen **Complemente**[3] von einander.

Zusätze.



I. Jede Grade ist in jedem Punkt ihre eigene Tangente.

II. Eine Tangente einer krummen Linie kann zugleich Secante sein, auch im Berührungspunkt durch die krumme Linie hindurchgehen.

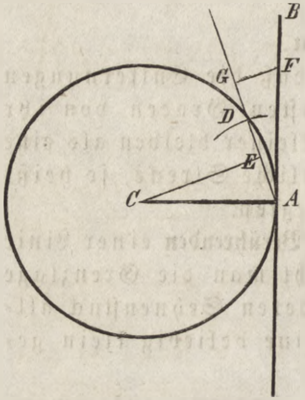
III. **Complemente** gleicher Winkel sind gleich.

1) curvus, krumm. 2) tangere, berühren.
3) complēre, anfüllen, vollmachen. — Vergl. §. 23.

§. 111.

Lehrsatz I.

Der Kreis hat in jedem Punkte eine Tangente; und zwar ist es diejenige Grade, welche in dem fraglichen Punkte auf dem Radius senkrecht steht.



Vrs. Es ist ein Kreis um C, und in einem beliebigen Punkte A desselben auf dem Radius CA die Senkrechte AB gegeben.

Beh. AB ist eine Tangente des Kreises im Punkte A.

Bew. Zieht man um A einen Kreis mit beliebig kleinem Radius, so wird der Kreis um C in zwei Punkten geschnitten (§. 51, L. II), und der Strahl AD, welcher durch den einen Schnittpunkt D hindurchgeht, wird eine Secante, deren Sehnenstück AD beliebig klein ist. Fällt man dann $CE \perp AD$, so wird $AE = \frac{1}{2} AD$ (§. 102, L. I), mithin ebenfalls beliebig klein. Endlich mache man auf AB die Strecke $AF = AC$ und fälle $FG \perp AD$.

Nun ist $\angle FAG = \angle ACE$, weil sie beide Complemente des $\angle CAE$ sind, ferner $\angle AGF = \angle CEA$ als Rechte, und $AF = CA$ nach der Constr.; mithin:

$\triangle AFG \cong \triangle CAE$, $FG = AE$ . . . (*wws*) und §. 59.

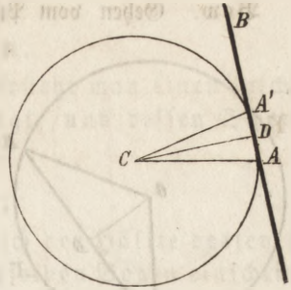
Weil daher FG zugleich mit AE und AD beliebig klein wird, so ist AB die Grenzlage der Secante AG (§. 110, D. I), wenn man deren Sehnenstück AD so abnehmen läßt, daß es kleiner als eine beliebig klein gewählte unveränderliche Strecke wird; m. a. W.: AB ist eine Tangente im Punkte A. (§. 110, D. II.)

Lehrsatz II.

Trifft eine Grade einen Kreis so, daß der nach dem Treffpunkt gezogene Radius nicht auf ihr senkrecht steht, so hat sie noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein.

Vrs. Durch den Punkt A des Kreises um C geht eine Grade AB, welche nicht auf dem Radius CA senkrecht steht.

Beh. AB hat mit dem Kreise noch einen zweiten Punkt gemein.



Bew. Da CA nach der Vrs. nicht senkrecht auf AB steht, so giebt es eine von CA verschiedene Senkrechte CD zu AB (§. 24, L.). Verdoppelt man ferner die Strecke AD über D hinaus und zieht nach dem hierdurch gewonnenen Punkt A' die Grade CA', so ist

$\triangle CDA' \cong \triangle CDA$ . . . (sws), mithin: $CA' = CA$, d. h.: A' ist ein zweiter Schnittpunkt des Kreises mit AB.

Zusätze.

I. Der Kreis hat in jedem Punkt **nur** eine Tangente, (nehmlich diejenige, welche auf dem Berührungsradius senkrecht steht).

— Denn da jede andere durch den Punkt des Kreises hindurchgehende Grade den Kreis noch einmal schneidet, ein dritter Schnittpunkt aber überhaupt nicht möglich ist (§. 49, Z. II), so können bei einer solchen Graden nicht zwei Schnittpunkte in einen einzigen zusammengefallen sein.

II. Jede Kreistangente liegt ganz außerhalb des Kreisfeldes.

— Vergl. §. 49, Z. II.

§. 112.

Definition.

Unter einem **Abschnittswinkel** versteht man einen solchen, dessen Scheitel in der Kreislinie liegt, und von dessen Schenkeln der eine eine Sehne, der andere aber eine Tangente derselben ist.

Der Abschnittswinkel **steht auf dem Bogen, schließt einen Bogen ein,** welcher in seinem Felde zwischen seinen Schenkeln liegt,[1]) von dem einen Schenkel bis zum andern reicht.

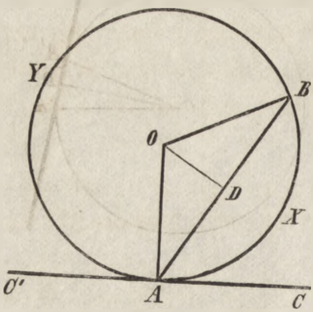
Lehrsatz.

Jeder Abschnittswinkel ist gleich der Hälfte desjenigen Centriwinkels, welcher mit ihm denselben Bogen einschließt.

---

1) Vergl. die Anmerkung zu §. 38.

Bew. Gehen vom Punke A des Kreises um O eine Sehne AB und eine Tangente AC so aus, daß der Abschnittswinkel BAC spitz ist, so ist der Centriwinkel AOB, welcher mit dem Abschnittswinkel BAC denselben Bogen AXB einschließt, concav und Dreieckswinkel im gleichschenkligen $\triangle\ AOB$. Fällt man nun $OD \perp AB$, so ist $\angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOB$ ... (§. 30, Z. I). Nun ist aber im $\triangle\ AOD$, weil $\angle D = \varkappa$ ist, der $\angle AOD$ Complement vom $\angle OAD$ (§. 76); und ferner ist der $\angle BAC$ Complement vom $\angle OAD$ (§. 111, Z. I). Mithin ist:



$$\angle BAC = \angle AOD = \tfrac{1}{2} \angle AOB \quad \ldots . \text{ §. 110, Z. III.}$$

Hiermit ist der Satz für einen spitzen Abschnittswinkel bewiesen.

Der stumpfe Abschnittswinkel BAC', welcher Nebenwinkel des spitzen BAC ist, steht auf dem Bogen AYB, und auf demselben Bogen steht der convexe Centriwinkel AOB. Bezeichnen wir diesen convexen Centriwinkel mit y, während der concave x heiße, so ist

$$x + y = 2\,\mathsf{G},$$

während

$$\angle BAC + \angle BAC' = \mathsf{G}, \quad 2 \cdot \angle BAC + 2 \cdot \angle BAC' = 2\,\mathsf{G}$$

ist. Mithin muß wegen der soeben bewiesenen Gleichung

$$x = 2 \cdot \angle BAC$$

der convexe Centriwinkel $\qquad y = 2 \cdot \angle BAC'$

sein.

Wäre schließlich $\angle BAC = \varkappa$, also die Sehne AB ein Durchmesser, so ginge

$$\angle AOB = \mathsf{G} = 2\varkappa$$

hervor, so daß unser Satz auch in diesem bisher noch nicht erledigten Fall richtig bleibt.

Zusatz.

Jeder Abschnittswinkel ist gleich der Hälfte des Centriwinkels auf einem congruenten Bogen.

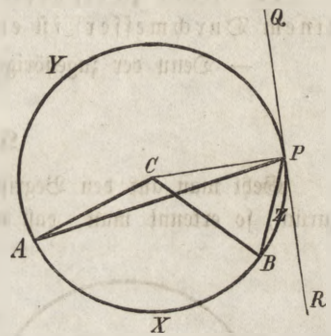
§. 113.

Definition.

Unter einem Peripheriewinkel[1]) versteht man einen solchen, dessen Scheitel auf dem Kreise liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind.

Lehrsatz.

Jeder Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte desjenigen Centriwinkels, welcher mit ihm denselben Bogen einschließt.



Vrs. Im Kreise um C ist $\angle APB$ irgend ein Peripheriewinkel, und $\angle ACB$ der Centriwinkel auf demselben Bogen AXB.

Beh. Es ist

$$\angle APB = \tfrac{1}{2} \angle ACB.$$

Bew. Man ziehe den Radius CP und lege durch P die Tangente QPR an den Kreis. — Der Punkt Q ist so gewählt, daß der Bogen AYP, auf welchem der Abschnittswinkel APQ steht, sich mit dem Bogen $AXBZP$ zu einem ganzen Kreise ergänzt.

Diejenigen Centriwinkel, welche auf den Bogen AXB, AYP, BZP stehen, wollen wir beziehungsweise durch x, y, z bezeichnen. Dann ist:

$\angle QPA + \angle APB + \angle BPR = \mathsf{G}$ . . . . §. 39, Z. II,

$= \frac{1}{2}(y + x + z)$ . . §. 39, Z. VI,

$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$,

und ferner:

$\angle QPA + \angle BPR = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$; . §. 112, L.,

mithin:

$\angle APB = \frac{1}{2}x$ . . . §. 20, VII.

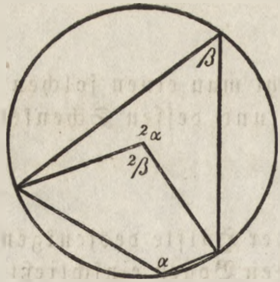
Zusätze.

I. Al e Peripheriewinkel auf demselben oder auf congruenten Bogen sind gleich.

II. Abschnittswinkel und Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind gleich.

---

1) περιφέρεια, die Kreislinie.



III. Im unüberschlagenen Sehnenviereck sind die Gegenwinkel paarweise Supplemente von einander. — In ihm sind die Summen der Gegenwinkel gleich.

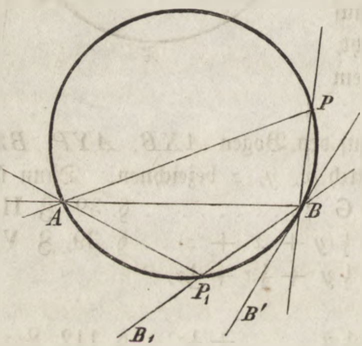
— Denn die zugehörigen Centriwinkel ergänzen sich paarweise zu zwei Gestreckten.

IV. Jeder Peripheriewinkel auf einem Halbkreis (über einem Durchmesser) ist ein Rechter.

— Denn der zugehörige Centriwinkel ist ein Gestreckter.

Scholie.

Geht man auf den Begriff der Tangente und des Abschnittswinkels zurück, so erkennt man, daß die Zusätze I und II durchaus nichts Verschiedenes aussagen; denn der Abschnittswinkel ABB' ist eben sowohl ein Peripheriewinkel, wie der $\angle APB$, nur daß das Sehnenstück des einen Schenkels in einen Punkt zusammenschrumpft, und somit die Secante PB zur Tangente BB' geworden ist. — Es findet im Moment dieses Vorganges keine Veränderung in der Größe des Winkels statt, weil die Secante PB sich nach §. 111 bei der Annäherung von P an B allmählich der Tangente BB' anschmiegt.



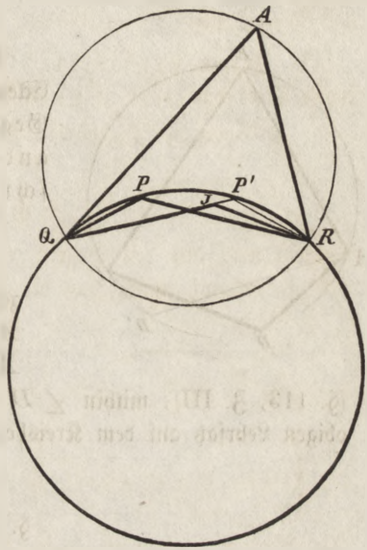
Auch nach dem Durchgange des auf dem Kreise verschobenen Punktes P durch den Punkt B hat sich der Winkel, welcher von den Richtungen PA und PB gebildet wird, nicht geändert. Denn dieser ursprünglich APB genannte Winkel ist dadurch in eine Lage AP_1B_1 gelangt, bei welcher der Schenkel P_1B_1 in einem Punkte B jenseits des Scheitelpunktes gleitet; und es ist $\angle AP_1B_1 = \angle APB$, weil beide Supplemente des Winkels AP_1B sind: der eine nach Zus. III, der andere nach §. 39, Z. III.

§. 114.

Lehrsatz.

Steht ein Winkel, welcher kein Peripheriewinkel ist, mit einem solchen auf demselben Bogen, so ist er größer oder kleiner als jener, je nachdem sein Scheitel innerhalb oder außerhalb des Kreisfeldes liegt.

Vrs. Auf einem Kreisbogen QR stehen drei Winkel QPR, QJR und QAR, deren Scheitel P in der Kreislinie, J innerhalb und A außerhalb des Kreisfeldes liegen.



Beh. Es ist

$$\angle QJR > \angle QPR > \angle QAR.$$

Bew. Man verlängere die Grade QJ über J hinaus, bis der Kreis in einem Punkte P' geschnitten wird, und ziehe die Sehne $P'R$. Dann ist:

$$\angle QJR > \angle QP'R = \angle QPR$$

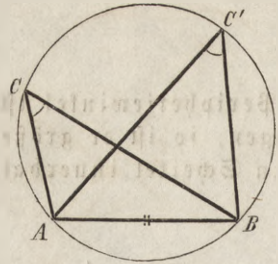
§. 47 u. §. 113, Z. I.

Legt man ferner durch die drei Punkte Q, R, A einen Kreis — was angeht, weil sie nicht in einer Graden liegen — so fällt P in das Feld des letzteren, weil dieses den ganzen Bogen QR in sich enthält. Mithin folgt durch Anwendung des soeben Bewiesenen auf den Hülfskreis:

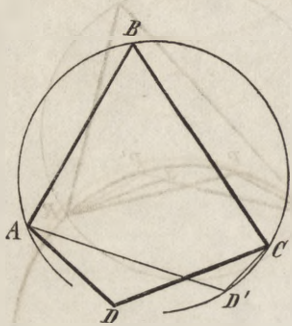
$$\angle QPR > \angle QAR.$$

Zusätze.

I. Bewegt man einen unveränderlichen Winkel in der Weise, daß jeder von seinen Schenkeln in einem festen Punkte geführt wird; so beschreibt der Scheitel einen Kreis. — Denn nach dem soeben bewiesenen Satz wird der Winkel größer oder kleiner, sobald sein Scheitel aus der Kreisbahn heraustritt.



II. Der geometrische Ort der dritten Ecken aller Dreiecke, welche eine Seite gemein und deren Gegenwinkel gleich groß haben, ist der Bogen eines Kreisabschnitts, zu welchem jene Seite als Sehne gehört.



III. Um jedes Viereck (durch die Ecken jedes Vierecks), in welchem zwei Gegenwinkel Supplemente von einander sind, läßt sich ein Kreis beschreiben.

— Denn legt man, wenn

$$\angle B + \angle D = \mathsf{G}$$

gegeben ist, einen Kreis durch drei Ecken A, B, C und construirt ein Sehnenviereck $ABCD'$, so ist auch $\angle B + \angle D' = \mathsf{G}$ (§. 113, Z. III), mithin $\angle D = \angle D'$. Daher liegt D nach dem obigen Lehrsatz auf dem Kreisbogen ADC.

§. 115.*

Lehrsatz.

Schneiden sich zwei Kreise, von denen der eine sein Centrum auf dem andern hat, so ist die Entfernung eines jeden Punktes des letzteren von dem einen Schnittpunkt so groß, wie das zwischen beiden Kreisen liegende Stück der Graden, welche von ihm aus durch den zweiten Schnittpunkt gezogen ist.

Vrs. Die beiden Kreise um C und um O, von denen der erstere sein Centrum C auf dem zweiten hat, schneiden sich in A und B. Von A aus ist eine Grade gezogen, welche sich mit dem Kreise um O in P und mit dem Kreise um C in Q schneidet, und schließlich die Strecke PB.

Beh. Es ist $PQ = PB$.

Bew. Es sind — vorausgesetzt, daß nicht zwei von den Punkten A, P, Q zusammenfallen — drei Fälle möglich:

I. P liegt zwischen A und Q. Man ziehe CA, CB, BQ. Dann ist im Kreise um O:

$\angle ACB = \angle APB$, . . §. 113, Z. I,

und im Kreise um C:

$\angle ACB = 2 \cdot \angle AQB$; §. 113, L.

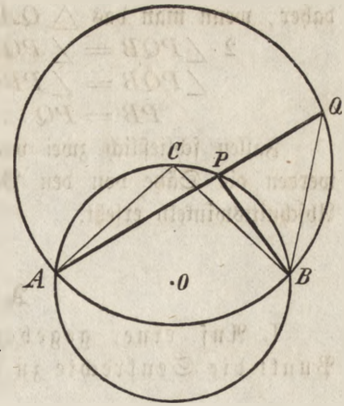
mithin:

$\angle APB = 2 \cdot \angle AQB$,

und schließlich beim $\triangle PQB$ nach §. 76, Z.:

$\angle PBQ = \angle APB - \angle AQB = \angle AQB$,

$PQ = PB$ . . . §. 59.



II. Q liegt zwischen A und P. Man ziehe CA, CB, BQ. Dann ist im Kreise um O:

$\angle ACB + \angle APB = \mathsf{G}$, §. 113, Z. III

und im Kreise um C, wenn man unter $\angle ACB$ denselben concaven Winkel, wie vorher, versteht:

$2\mathsf{G} - \angle ACB = 2 \cdot \angle AQB$; §. 113, L.

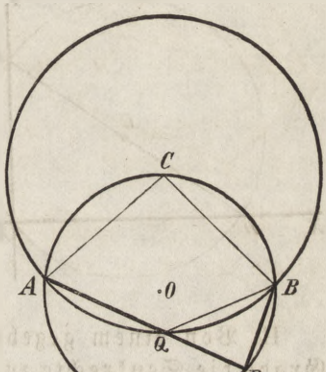
mithin durch Summation:

$2\mathsf{G} + \angle APB = \mathsf{G} + 2 \cdot \angle AQB$,

$\mathsf{G} - \angle AQB = \angle AQB - \angle APB$,

$\angle PQB = \angle PBQ$ . . . §. 76, Z.

$PB = PQ$ . . . . . . §. 59.



III. A liegt zwischen P und Q. Man ziehe CA, CB, BQ. Dann ist im Kreise um O, indem man unter $\angle ACB$ den concaven Winkel versteht:

$\angle ACB + \angle APB = \mathsf{G}$, §. 113, Z. III

und im Kreise um C:

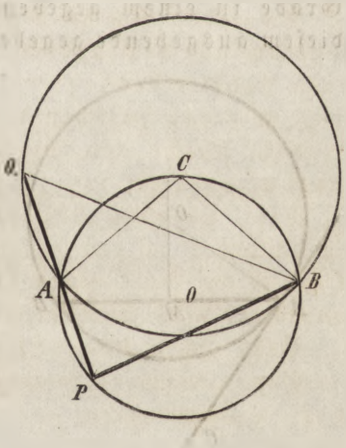
$\angle ACB = 2 \cdot \angle AQB$ . . §. 113, L.

also durch Substitution des letzteren Werthes:

$2 \cdot \angle AQB + \angle APB = \mathsf{G}$,

also:

$2 \cdot \angle AQB = \mathsf{G} - \angle APB$,



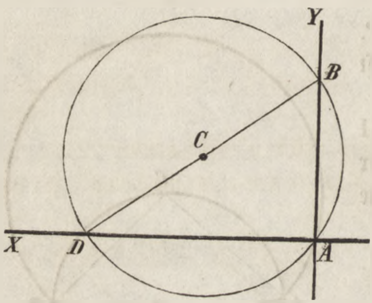
daher, wenn man das $\triangle QAB$ ins Auge faßt:

$$2 \cdot \angle PQB = \angle PQB + \angle PBQ \ldots \text{§. 76,}$$
$$\angle PQB = \angle PBQ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{§. 20, VII,}$$
$$PB = PQ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{§. 59.}$$

Fallen schließlich zwei von den Punkten A, P, Q zusammen, so werden die Sätze von den Peripheriewinkeln durch diejenigen von den Abschnittswinkeln ersetzt.

§. 116.
Aufgaben.

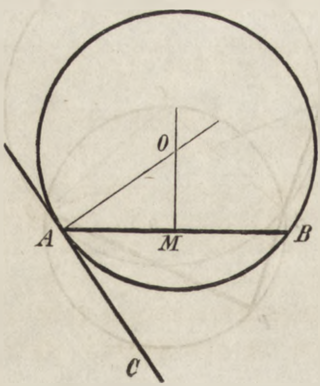
I. Auf einer gegebenen Graden in einem gegebenen Punkt die Senkrechte zu errichten.



Anal. Steht $AY \perp AX$, so muß der rechte $\angle XAY$ durch Hinzufügung irgend eines durch A hindurchgehenden Kreises ein Peripheriewinkel auf einem Halbkreise werden (§. 113, Z. IV u. §. 114, Z. I), wenn man das Centrum C nur nicht in AX oder AY annimmt. Der Schnittpunkt D des Kreises mit AX bestimmt den Durchmesser DCB, auf welchem der rechte Peripheriewinkel DAB steht.

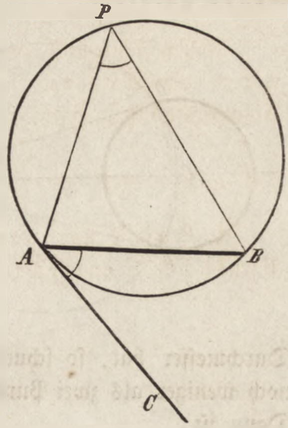
II. Von einem gegebenen Punkt aus auf eine gegebene Grade die Senkrechte zu fällen.

III. Einen Kreis zu construiren, welcher eine gegebene Grade in einem gegebenen Punkt berührt und eine von diesem ausgehende gegebene Strecke zur Sehne hat.



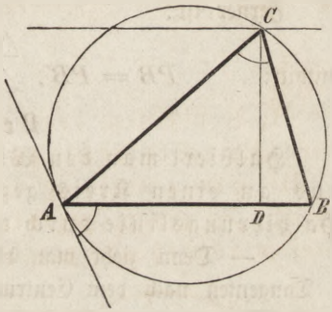
Anal. Ist AC die Tangente und AB die Sehne des gesuchten Kreises, so liegt das Centrum O einerseits senkrecht über dem Punkte A von AC (§. 111, Z. I), andrerseits senkrecht über der Mitte M von AB (§. 102, L. II). Da die beiden Senkrechten construirbar sind, so kann man mithin das Centrum O und den Radius OA finden.

IV. Einen Kreis zu zeichnen, welcher über einer gegebenen Sehne einen gegebenen Peripheriewinkel faßt.



Anal. Ist AB die gegebene Sehne und $\angle APB$ der gegebene Peripheriewinkel, so ist der Abschnittswinkel BAC dem letzteren gleich (§. 113, Z. II). Da man nun die Grade AC unter dem verlangten Winkel an AB heranlegen kann (§. 65), so kommt die Aufgabe auf die vorige zurück.

V. Ein Dreieck zu construiren, für welches ein Winkel, dessen Gegenseite und die auf der letzteren stehende Höhe gegeben sind.



Anal. Nach II ist über der gegebenen Seite AB als Sehne der Kreis construirbar, welcher den verlangten Winkel ACB als Peripheriewinkel faßt, so daß dieser eine Ort des Punktes C gefunden werden kann. Andrerseits ist die im Abstande CD von AB liegende Parallele zu AB ebenfalls construirbar. Mithin ist die Ecke C als Durchschnitt zweier construirbarer Linien bestimmt.

VI. *Ein Dreieck zu construiren, für welches eine Seite, deren Gegenwinkel und die $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der beiden anderen Seiten gegeben ist.

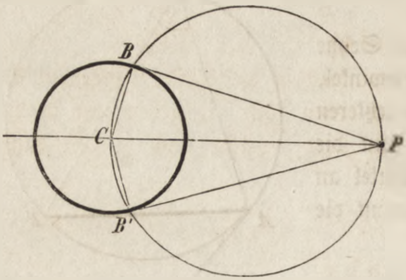
— Analysis durch Bezugnahme auf Aufg. III und §. 115.

§. 117.

Lehrsatz I.

Von jedem Punkt außerhalb eines Kreises und seines Kreisfeldes giebt es zwei Tangenten an den Kreis. Ihre

Längen bis zu den Berührungspunkten sind gleich, und ihr Winkel wird durch die nach dem Centrum führende Grade halbiert.



Vrs. Es ist ein Kreis um das Centrum C, und außerhalb des Kreises und des Kreisfeldes ein Punkt P gegeben.

Beh. Von P aus lassen sich an den Kreis zwei gleich lange Tangenten legen, deren Winkel durch die Grade PC halbiert wird.

Bew. Construirt man denjenigen Kreis, welcher PC zum Durchmesser hat, so schneidet derselbe den Kreis um C in weder mehr noch weniger als zwei Punkten B und B' (§. 51, L. II u. §. 104, Z. I). Dann ist:

$$\angle PBC = \angle PB'C = R, \ldots \text{§. 113, Z. IV},$$

und deshalb sind die Graden PB und PB', weil CB und CB' Radien des Kreises um C sind, Tangenten des letzteren (§. 111, L. I).

Ferner ist:

$$\triangle PCB \cong \triangle PCB'; \ldots (Ssw),$$

mithin: $PB = PB'$, $\angle CPB \cong \angle CPB'$.

Lehrsatz II.

Halbiert man den Winkel der beiden von einem Punkte aus an einen Kreis gezogenen Tangenten, so geht die Halbierungslinie durch das Centrum.

— Denn zieht man die Grade PC vom Ausgangspunkte der Tangenten nach dem Centrum, so halbiert diese den Tangentenwinkel BAB'; und eine zweite Halbierungslinie desselben Winkels giebt es nicht.

Lehrsatz III.

Zieht man von einem Punkte außerhalb des Kreises und des Kreisfeldes nach dem Kreise eine Grade, welche einer Tangente von ihm aus an den Kreis gleich ist, so ist dieselbe eine Tangente des Kreises.

— Denn ist PB eine Tangente, und $PB' = PB$, so ist nach der ersten Annahme $\angle PBC = R$, und nach der zweiten $\triangle PB'C \cong \angle PBC \ldots (3s)$; mithin ist auch $\angle PB'C = R$, also PB' eine Tangente (§. 111, L. I).

Lehrsatz IV.

Die Halbierungslinie eines concaven Winkels ist der geometrische Ort der Centren aller Kreise, welche die Schenkel desselben zu Tangenten haben.

Scholie.

Verschiebt man den Punkt P, von welchem die beiden Tangenten an den Kreis um C ausgehen, bis er auf diesen fällt, so gehen jene in die beiden Richtungen der einen Tangente über, welche nach §. 111 dann nur vorhanden ist.

§. 118.

Aufgabe.

Von einem Punkte außerhalb eines Kreises und seines Feldes die beiden Tangenten an denselben zu ziehen.

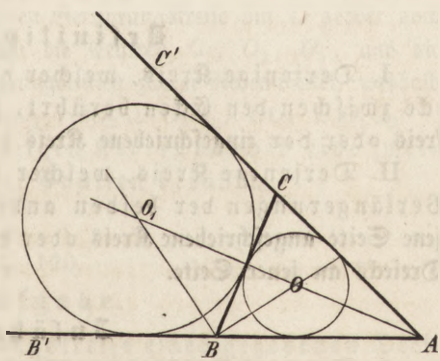
— Analysis durch §. 117.

§. 119.

Lehrsatz.

Es giebt einen einzigen Kreis, welcher alle drei Seiten eines Dreiecks zwischen den Ecken berührt, und außerdem drei Kreise, von denen jeder eine Seite zwischen den Ecken und die beiden andern in ihren Verlängerungen berührt.

Vrs. Es ist ein $\triangle ABC$ nebst den Verlängerungen BB' und CC' irgend zweier Seiten AB und AC gegeben.



Beh. Es giebt einen einzigen Kreis, welcher die drei Seiten des Dreiecks ABC zwischen den Ecken berührt, und einen einzigen Kreis, welcher die Seite BC zwischen den Ecken und außerdem die Verlängerungen BB' und CC' der andern Seiten berührt.

Bew. Nach §. 117, L. IV liegt das Centrum jedes Kreises, welcher die Strahlen AB und AC berührt, auf der Halbierungslinie des $\angle BAC$, und das Centrum jedes Kreises, welcher die Strahlen BA und BC berührt, auf der Halbierungslinie des $\angle ABC$. Die beiden genannten Halbierungslinien schneiden sich in einem Punkte O des Dreiecksfeldes, weil dieses der einzige den beiden halbierten Winkelfeldern BAC und ABC gemeinsame Theil der Ebene ist, und zwar als Grade nur in einem Punkt. Daher ist O das Centrum, und zwar das einzig mögliche Centrum eines Kreises, welcher die drei Seiten AB, AC, BC zugleich berührt.

Zieht man ferner außer der schon vorhandenen Halbierungslinie AO des $\angle B'AC'$, auf welcher das Centrum jedes die Strahlen AB' und AC' berührenden Kreises liegt, noch die Halbierungslinie des $\angle B'BC$, so liegt auf dieser nach §. 117, L. IV das Centrum jedes Kreises, welcher die Strahlen BB' und BC berührt. Mithin liegt das Centrum eines Kreises, welcher CC', BC und BB' berührt, dort, wo die beiden Halbierungslinien sich schneiden. Da die letzteren Grade sind, so giebt es höchstens einen Schnittpunkt, also höchstens einen Kreis; und einen Schnittpunkt O_1 giebt es, weil

$$\angle CAB + \angle CBA < G \ \ldots \text{ im } \triangle ABC$$
$$\tfrac{1}{2}\angle CAB + \tfrac{1}{2}\angle CBA < \mathcal{R},$$
d. i.: $\angle OAB + \angle OBA < \mathcal{R}$,
also: $\angle AOB = 2\mathcal{R} - (\angle OAB + \angle OBA) > \mathcal{R} \ \ldots$ (§. 76)
ist, so daß AO nicht ebenfalls auf BO senkrecht steht, wie die Halbierungslinie des $\angle B'BC$ (§. 39, Z. V). Außerdem liegt O_1 im Felde der Figur $B'BCC'$, weil unter den Wechselwinkeln O_1BO und BOA der letztere der größere ist (§. 84, Z. VI).

Definitionen.

I. Derjenige Kreis, welcher die drei Seiten eines Dreiecks zwischen den Ecken berührt, heißt der **innere Berührungskreis** oder der **eingeschriebene Kreis** des Dreiecks.

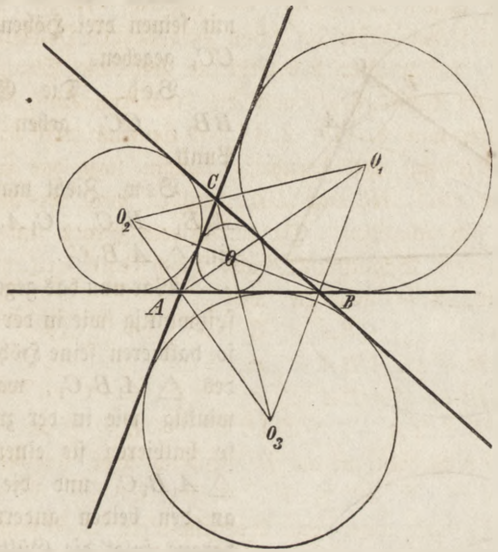
II. Derjenige Kreis, welcher eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden andern berührt, heißt der **an jene Seite angeschriebene Kreis** oder der **äußere Berührungskreis des Dreiecks an jener Seite**.

Zusätze.

I. Die drei Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dessen Abstände von den Seiten gleich sind.

II. Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und der Außenwinkel an den beiden andern Ecken schneiden sich in einem Punkt, dessen Abstände von den drei Seiten gleich sind.

III. Jedes Dreieck hat einen inneren und drei äußere Berührungskreise; die Centralen der verschiedenen Kreispaare stehen auf einander senkrecht.



— Denn außer dem inneren Berührungskreise um O gehört noch zu jeder Seite ein äußerer um die Centren O_1, O_2, O_3; und die Centralen sind paarweise Halbierungslinien zweier Nebenwinkel, weshalb nach §. 39, Z. V: $OO_1 \perp O_2O_3$, $OO_2 \perp O_3O_1$, $OO_3 \perp O_1O_2$.

IV. Es giebt einen einzigen Kreis, welcher eine zweimal gebrochene Linie in drei Punkten berührt.

§. 120.

Aufgabe.

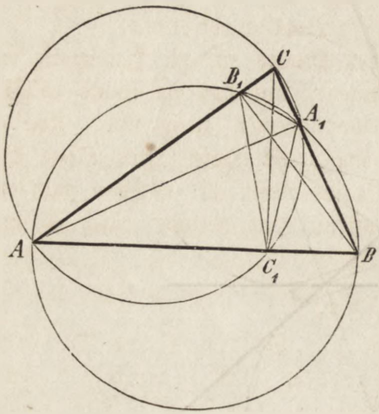
Die einzelnen Berührungskreise eines gegebenen Dreiecks zu construiren.

Anal. Durch §. 119 findet sich die Lage jedes Centrums. Der Radius ist nach §. 111 der Senkrechten vom Centrum auf eine Dreiecksseite gleich.

§. 121.*

Lehrsatz.

Die drei Höhen eines jeden Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

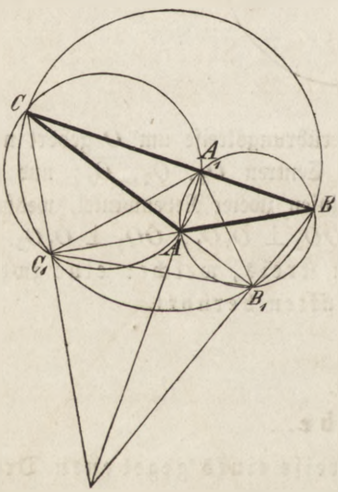


Vrs. Es ist ein $\triangle ABC$ mit seinen drei Höhen AA_1, BB_1, CC_1 gegeben.

Beh. Die Graden AA_1, BB_1, CC_1 gehen durch einen Punkt.

Bew. Zieht man die Graden A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, so entsteht ein $\triangle A_1B_1C_1$.

War nun das gegebene $\triangle ABC$ spitzwinklig (wie in der ersten Figur), so halbieren seine Höhen die Winkel des $\triangle A_1B_1C_1$, war es stumpfwinklig (wie in der zweiten Figur), so halbieren sie einen Winkel des $\triangle A_1B_1C_1$ und die Außenwinkel an den beiden andern Ecken, und daraus folgt die Gültigkeit der Behauptung nach §.119, Z. I oder Z. II.



Um jedoch zu beweisen, daß in der ersten Figur die Winkel des $\triangle A_1B_1C_1$ von den Höhen des $\triangle ABC$ in der That halbiert werden, beachte man zunächst, daß die Kreise mit den Durchmessern AB und AC beziehungsweise durch A_1, B_1 und durch A_1, C_1 gehen, weil die Winkel an den Fußpunkten A_1, B_1, C_1 der Höhen Rechte sind. Dann ist im erstgenannten Kreise als Peripheriewinkel auf dem Bogen AB_1:

$$\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1,$$

und im zweitgenannten Kreise als Peripheriewinkel auf dem Bogen AC_1:

$$\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1.$$

Nun ist aber

$$\angle ABB_1 = \angle ACC_1,$$

weil diese Winkel beziehungsweise im

$$\triangle ABB_1 \text{ und im } \triangle ACC_1$$

Complemente des den letzteren gemeinsamen $\angle BAC$ sind. Mithin ist:

$$\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1;$$

d. h. der beliebig gewählte $\angle B_1A_1C_1$ des $\triangle B_1A_1C_1$ wird durch die zugehörige Höhe des $\triangle BAC$ halbiert.

In der zweiten Figur ist der Beweis für die Halbierung des $\angle B_1A_1C_1$ dem obigen ganz gleichlautend, nur daß die Winkel ABB_1 und ACC_1 als Complemente von Scheitelwinkeln gleich sind. Und es ändert sich der Beweis dafür, daß eine zweite Höhe, etwa BB_1, den Außenwinkel des $\triangle A_1B_1C_1$ halbiert, nur wenig ab, nachdem man den Kreis über dem Durchmesser BC construirt hat, welcher durch B_1 und C_1 geht.

Zusätze.

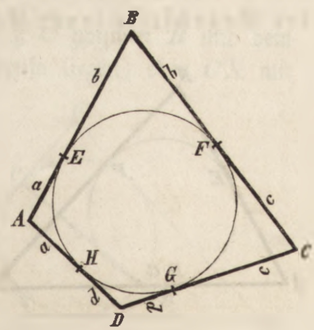
I. Die drei Kreise, welche die Seiten eines Dreiecks zu Durchmessern haben, schneiden sich paarweise zum zweiten Male in den Dreiecksseiten oder in den Verlängerungen derselben, nehmlich in den Fußpunkten der Dreieckshöhen.

II. Die Ecken eines Dreiecks sind Centren von Berührungskreisen des Fußpunktendreiecks der Höhen.

§. 122.

Lehrsatz I.

In jedem einem Kreise umschriebenen Tangentenviereck sind die Summen der Gegenseiten paarweise gleich.



Vrs. Das $\square\, ABCD$ enthält in seinem Felde einen Kreis, welcher die Graden AB, BC, CD, DA beziehungsweise in E, F, G, H berührt.

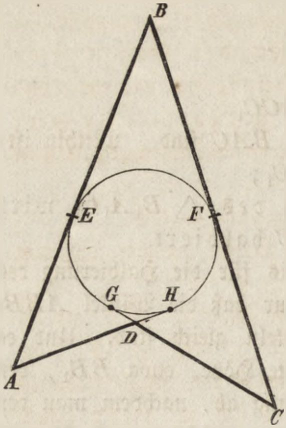
Beh. Es ist

$$AB + CD = AD + CB.$$

Bew. Nach §. 117, L. I ist:

$$AE = AH,\ BE = BF,\ CF = CG,\ DG = DH.$$

Ist nun das $\square\, ABCD$ convex, wie in



der ersten Figur, so hat man daher:

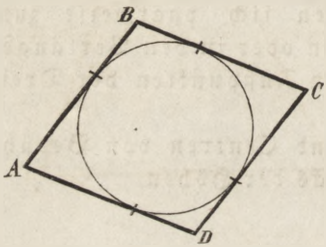
$$\begin{aligned} AB + CD &= AE + BE + CG + DG \\ &= AH + BF + CF + DH \\ &= (AH + DH) + (CF + BF) \\ &= \quad AD \quad + \quad CB. \end{aligned}$$

Besitzt aber das $\square\, ABCD$ bei D einen convexen Winkel, wie in der zweiten Figur, so ist:

$$\begin{aligned} AB + CD &= AE + BE + CG - DG \\ &= AH + BF + CF - DH \\ &= (AH - DH) + (CF + BF) \\ &= \quad AD \quad + \quad CB. \end{aligned}$$

Zusätze.

I. Sind die Gegenseiten eines Tangentenvierecks parallel, so ist es ein Rhombus.



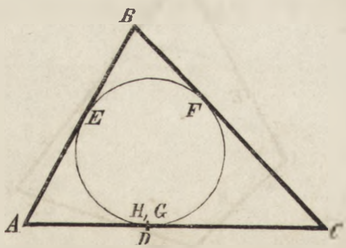
— Denn dann ist nach §. 88, Z. I:

$$AB = CD, \quad AD = CB;$$

folglich nach dem Obigen:

$$2 \cdot AB = 2 \cdot AD, \quad AB = AD.$$

II. Auf jeder Dreiecksseite ist die Strecke zwischen einer Ecke und dem Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises gleich der Differenz aus dem halben Dreiecksumfang und der Gegenseite jener Ecke.



— Denn das Dreieck läßt sich ansehen als ein Viereck, in welchem ein Winkel = G ist. Denkt man sich beispielsweise die drei Punkte D, G, H des obigen Vierecks in einen Berührungspunkt zusammengeschoben, so ist der halbe Dreiecksumfang:

$$s = AD + BC = AB + CD$$

also: $AD = s - BC$, $CD = s - AB$.

Lehrsatz II.

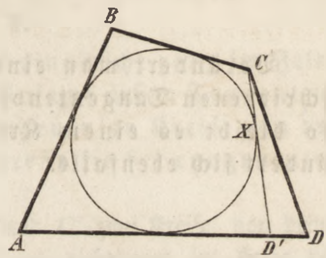
Sind in einem Viereck die Summen der Gegenseiten paarweise gleich, so giebt es im Vierecksfelde einen einzigen Kreis, welcher alle vier Seiten berührt (alle vier Seiten selbst, oder zwei Seiten und die Verlängerungen der beiden andern).

Vrs. Im $\square\, ABCD$ ist: $AB + CD = AD + CB$.

Beh. Im Felde des Vierecks liegt ein Kreis, welcher die vier Graden AB, BC, CD, DA berührt.

Bew. Construirt man den Kreis, welcher die zweimal (in A und B) gebrochene Linie $DABC$ in drei Punkten berührt (§. 119, Z. IV), und zieht von C aus die zweite Tangente CX an diesen Kreis, so ist zweierlei denkbar: erstens, daß die Graden AD und CX sich in irgend einem Punkte D' schneiden; zweitens, daß sie parallel sind.

Setzen wir den Fall, es geschehe das Erstere in der Weise, daß D' in der Richtung AD liegt — was u. A. voraussetzt, daß die Seite BC von dem Kreise zwischen B und C berührt wird — so folgt nach L. I:



$$AB + CD' = AD' + CB,$$

und dies giebt in Verbindung mit der gegebenen Gleichung

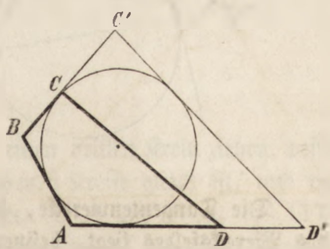
$$AB + CD = AD + CB$$

durch Subtraction nach §. 20, VII:

$$abs \cdot (CD - CD') = abs \cdot (AD - AD')$$
$$= DD';$$

was nach §. 50, L. II nur angeht, wenn CDD' kein Dreieck ist, sondern die Grade CD' mit CD zusammenfällt. — Dann trifft aber die Behauptung zu.

Alle übrigen denkbaren Fälle, nehmlich daß C zwischen B und dem Berührungspunkt der Graden BC mit dem Kreise liegen, oder CX mit AD parallel sein möchte, fassen wir zusammen. Es werde BC über C hinaus so weit bis zu einem Punkte C' verlängert, daß die zweite von C' aus an den Kreis gezogene Tangente sich mit der Richtung AD in einem Punkte D' schneidet, welcher weiter von A absteht, als der Punkt D.



Dann ist nach Lehrsatz I:

$$AB + C'D' = AD' + C'B$$

und nach der Vrs.:

$$AB + CD = AD + CB,$$

folglich durch Subtraction nach §. 20, VII:

$$\begin{aligned} C'D' - CD &= (AD' - AD) + (C'B - CB) \\ &= \quad DD' \quad + \quad CC', \end{aligned}$$

oder:
$$C'D' = C'C + CD + DD'.$$

Dies ist aber nicht möglich; denn es ist nach §. 50, L. III:

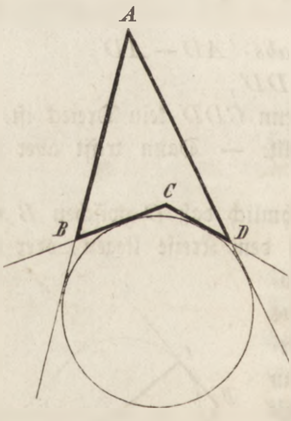
$$C'D' < C'C + CD + DD'.$$

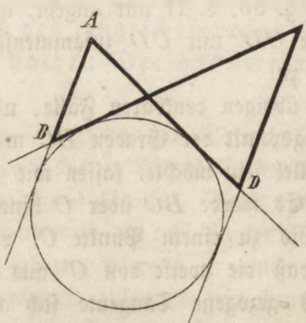
Mithin gestattet die Voraussetzung nicht eine solche Lage des Punktes C, bei welcher von einem Punkte C der Verlängerung der Seite BC eine Tangente an den Kreis gezogen werden könnte, welche die Verlängerung von AD über D hinaus (in D') trifft. Also ist CD (wenn die Figur von vorneherein richtig gezeichnet wird) selbst Tangente des Kreises.

Zusatz.

Verändert man einen Winkel eines einem Kreise umschriebenen Tangentenvierecks, ohne die Seiten zu ändern, so bleibt es einem Kreise umschrieben; der Kreis aber ändert sich ebenfalls.

Scholie.





Die Tangentenvierecke, bei welchen der Berührungskreis außerhalb des Vierecksfeldes liegt, besitzen ganz analoge Eigenschaften, wie die oben besprochenen, nur daß für die Summe der Gegenseiten deren Differenz eintritt, mag das Viereck überschlagen sein oder nicht.

Macht man den einen Viereckswinkel zu einem Gestreckten, so gehen die analogen Sätze für Dreiecke hervor.

Hinsichtlich der Berührungen haben wir unsere Aufmerksamkeit bisher denjenigen Fällen gewidmet, in welchen ein Kreis mehrere Tangenten hat. Es folgen zunächst noch einige Sätze über die Berührung mehrerer Kreise mit einzelnen Graden und unter sich.

§. 123.

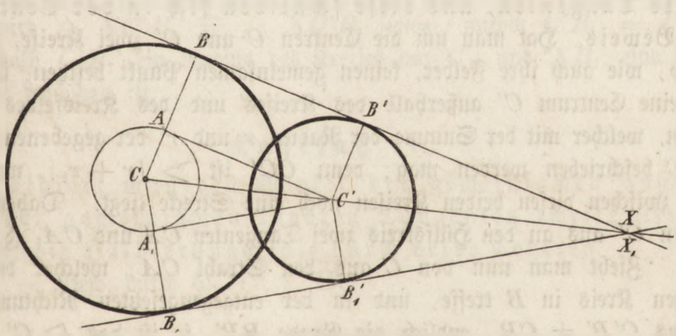
Definition.

Eine von zwei Kreisen berührte Grade heißt eine **gemeinsame äußere** oder **innere Tangente**, je nachdem die beiden Kreise auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Graden liegen.

Lehrsatz I.

Je zwei Kreise, von denen der eine nicht ganz im Felde des andern liegt, haben zwei gemeinsame **äußere** Tangenten; und diese schneiden sich bei incongruenten Kreisen in der Verlängerung der Centralen, während sie bei congruenten Kreisen derselben parallel sind.

Bew. Hat man um die Centren C und C' zwei Kreise, von denen der letztere den kleineren Radius besitzen und nicht ganz im Felde des



ersteren liegen mag, so kann man um C einen dritten Kreis ziehen, dessen Radius der Differenz der Radien der gegebenen Kreise gleich ist, und von C' aus an denselben die beiden Tangenten $C'A$ und $C'A_1$ (§. 117). Zieht man nun den Strahl CA, welcher den um C gegebenen Kreis in

B treffe, und in gleicher Richtung den Radius $C'B' \mp CB$, endlich die Grade BB', so ist das $\square\, C'ABB'$ ein Rechteck. Denn erstens ist $\angle BAC' = \mathcal{R}$, weil nach §. 111, Z. I $A_1A \perp C'A$ steht, nach der Constr. $AB = C'B'$ und $\mp C'B'$ ist. Daher steht $BB' \perp CB$ und $\perp C'B'$, ist mithin gemeinsame Tangente der beiden Kreise, und zwar eine äußere. Sie schneidet die Centrale in einem Punkte X der Verlängerung, weil sie mit AC' parallel ist (§. 84, Z. II).

Stellt man die analoge Betrachtung für die Figur an, welche auf der andern Seite der Centrale durch den Punkt A_1 vermittelt wird, so gelangt man zu einer zweiten äußeren Tangente B_1B_1'. Deren Durchschnittspunkt X_1 mit der Verlängerung der Centrale ist aber kein anderer als der Punkt X, weil

$$\triangle C'CA \cong \triangle C'CA_1, \quad \angle C'CA = \angle C'CA_1; \; . \; . \; . \; (Sws)$$

mithin:

$$\triangle CBX \cong \triangle CB_1X_1, \qquad CX = CX_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (wsw)$$

ist.

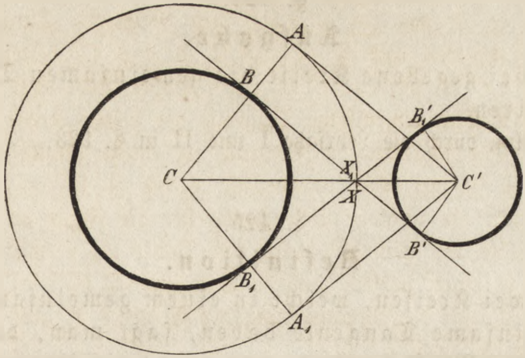
Stellt man sich endlich vor, daß die Differenz der Radien CB und $C'B'$ unendlich abnimmt, d. i. daß der Radius CA sich dem Grenzwerthe Null nähert, so fällt im Grenzfalle die Ecke A des Rechtecks $C'ABB'$ mit C zusammen, weshalb $BB' \mp CC'$ und $B_1B_1' \mp CC'$ wird.

Lehrsatz II.

Je zwei Kreise, welche ebenso, wie auch ihre Felder, keinen Punkt gemein haben, besitzen zwei gemeinsame innere Tangenten, und diese schneiden sich in der Centrale.

Beweis. Hat man um die Centren C und C' zwei Kreise, welche ebenso, wie auch ihre Felder, keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so liegt das eine Centrum C' außerhalb des Kreises und des Kreisfeldes eines dritten, welcher mit der Summe der Radien r und r' der gegebenen Kreise um C beschrieben werden mag; denn CC' ist $> (r + r_1)$, weil auf CC' zwischen diesen beiden Kreisen noch eine Strecke liegt. Daher giebt es von C' aus an den Hülfskreis zwei Tangenten CA und CA_1 (§. 117, L. I). Zieht man nun von C aus den Strahl CA, welcher den gegebenen Kreis in B treffe, und in der entgegengesetzten Richtung den Radius $C'B' \mp CB$, endlich die Grade BB', so ist das $\square\, C'ABB'$ ein Rechteck (aus denselben Gründen, wie in Lehrs. I) und deshalb BB' eine gemeinsame innere Tangente.

Sie schneidet sich mit der Centrale in einem Punkte X, während der Schnittpunkt der Centrale mit der durch Benutzung von A_1 gefundenen



innern Tangente X_1 heiße. Daß X_1 mit X identisch ist, folgt schließlich, wie in Lehrs. I, aus der Congruenz der Dreiecke CBX und CB_1X_1.

Lehrsatz III.

Zieht man durch den Schnittpunkt einer gemeinsamen Tangente zweier Kreise mit der Centrale oder deren Verlängerung an den einen dieser Kreise die zweite Tangente, so ist dieselbe auch Tangente des andern Kreises.

— Denn ist in einer der obigen Figuren BB' die eine gemeinsame Tangente, X deren Durchschnitt mit der Centrale oder mit deren Verlängerung, XB_1 die zweite Tangente an den Kreis um C, so ist $\angle CXB_1 = \angle CXB$ (§. 117). Fällt man dann $C'B_1' \perp XB_1$, so wird $\triangle XC'B_1' \cong \triangle XC'B_1$ (*wws*), mithin $C'B_1' = C'B'$, weshalb $C'B_1'$ ein Radius des Kreises um C', und XB_1' eine Tangente desselben ist.

Lehrsatz IV.

Halbiert man den Winkel der gemeinsamen äußeren oder der gemeinsamen inneren Tangenten zweier Kreise, so geht die Halbierungslinie durch beide Centren.

— Bew. durch §. 117, L. II.

Lehrsatz V.

Je zwei Kreise haben höchstens zwei äußere und zwei innere Tangenten gemein.

— Denn sonst hätten die beiden Kreise in Folge von Lehrs. IV mehr als eine Centrale.

§. 124.

Aufgabe.

Für zwei gegebene Kreise die gemeinsamen Tangenten zu construiren.

— Analys. durch die Lehrsätze I und II in §. 123.

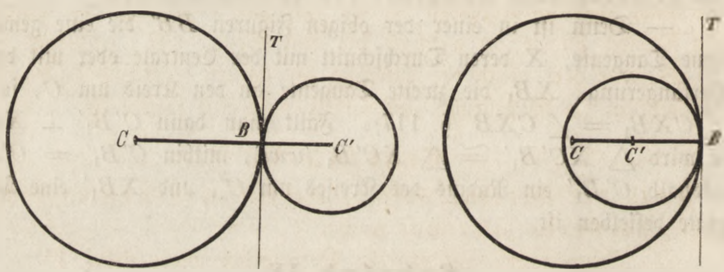
§. 125.

Definition.

Von zwei Kreisen, welche in einem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, sagt man, daß sie **einander in diesem Punkt berühren**, und nennt die Berührung eine **äußere** oder **innere**, je nachdem jene gemeinsame Tangente eine **innere** oder eine **äußere** ist.

Lehrsatz I.

Bei je zwei einander berührenden Kreisen liegen der Berührungspunkt und die beiden Centren in einer einzigen Graden.



— Denn im Berührungspunkt B stehen die Berührungsradien CB und $C'B$ beide auf der gemeinsamen Tangente senkrecht (§. 111) und bilden mithin eine einzige Grade.

Lehrsatz II.

Berühren sich zwei Kreise von **außen**, so ist die Centrale gleich der **Summe** der Radien; berühren sie sich von **innen**, so ist die Centrale gleich der **Differenz** der Radien.

— Dies folgt unmittelbar aus Lehrs. I.

Lehrsatz III.

Je zwei Kreise, deren Centrale gleich der Summe der Radien ist, berühren sich von außen; und je zwei Kreise, deren Centrale gleich der Differenz der Radien ist, berühren sich von innen.

— Ist nehmlich die Centrale CC' gleich der Summe der Radien, so giebt es auf ihr einen Punkt B von solcher Lage, daß CB und $C'B$ Radien sind; und die in B auf CC' errichtete Senkrechte BT ist nach §. 111 im Punkte B Tangente beider Kreise, weshalb diese sich in B berühren.

Ist aber die Centrale CC' gleich der Differenz der Radien, so hat sie in ihrer Verlängerung einen Punkt B von solcher Lage, daß CB und $C'B$ Radien sind, und die in B auf CC' errichtete Senkrechte BT ist wieder nach §. 111 im Punkte B Tangente beider Kreise, weshalb diese sich in B berühren.

Lehrsatz IV.

Je zwei verschiedene einander berührende Kreise haben außer dem Berührungspunkte keinen Punkt gemein.

— Denn hätten sie noch einen andern Punkt P gemein, so würden die nach ihm hinführenden Radien CP und $C'P$ mit der Centralen ein Dreieck bilden, in welchem die eine Seite (CC') entweder gleich der Summe oder gleich der Differenz der andern (CP und $C'P$) wäre, je nachdem die Berührung eine äußere oder eine innere ist.

Lehrsatz V.

Zwei verschiedene Kreise, welche zwei Punkte gemein haben, berühren einander nicht.

— Denn sonst entstände ein Widerspruch wider Lehrs. IV.

Lehrsatz VI.

Zwei Kreise decken sich vollständig, wenn sie sich berühren und außer dem Berührungspunkte noch einen Punkt gemein haben.

Scholie.

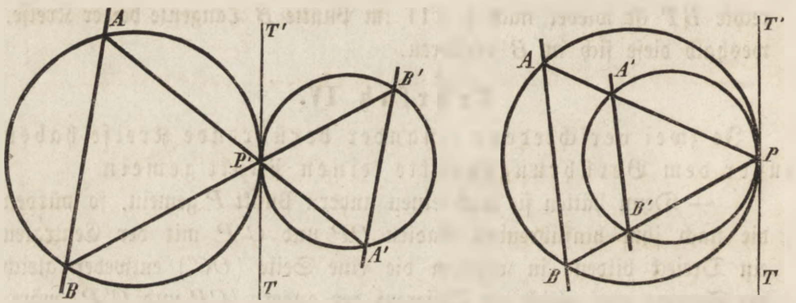
Man kann zu Kreisen, welche einander berühren, auch dadurch gelangen, daß man den einen von zwei sich schneidenden Kreisen in geeigneter Weise bewegt, um die gemeinsame Sehne in einen Punkt zusammenschrumpfen zu lassen, welcher dann der Berührungspunkt wird. (Vergl.

§. 110.) Dies zeigt an, daß auch hier ein Berührungspunkt stets gezählt werden muß, wie zwei Schnittpunkte: genau wie bei der Berührung zwischen Grade und Kreis, wo die Sätze über die Berührung aus denjenigen über den Schnitt durch das Zusammenschieben zweier Punkte in einen einzigen hervorgehen.

§. 126.

Lehrsatz.

Von je zwei Graden, welche durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehen, werden die letzteren so getroffen, daß die Verbindungssehne der Schnittpunkte in dem einen Kreise derjenigen im andern Kreise parallel ist.



Vrs. Durch den Berührungspunkt P zweier Kreise sind zwei Grade gegeben, welche die beiden Kreise beziehungsweise in A, A' und B, B' schneiden; ferner sind die Sehnen AB und $A'B'$ gezogen.

Beh. Es ist $AB \# A'B'$.

Bew. Zieht man durch P die gemeinsame Tangente TPT', so ist

$$\angle PAB = PA'B',$$

weil sie Peripheriewinkel auf den Bogen

PB und PB'

sind, auf welchen die beiden Kreise gleiche Abschnittswinkel haben. (§. 113, Z. II.)

Zusatz.

Jede durch den Berührungspunkt zweier Kreise hindurchgehende Grade trifft dieselben in solchen Punkten, in welchen sie parallele Tangenten haben.

— Denn dreht man die Grade BB' um den Punkt P, bis B

in A fällt, so haben sich die beiden parallelen Secanten AB und $A'B'$ in Tangenten verwandelt.

§. 127.*

Scholie.

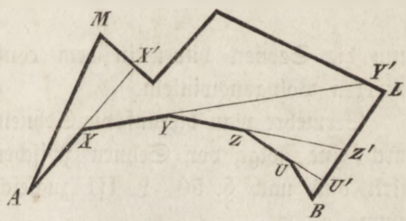
Schon früher (§. 37, Z. III) sind die Bogen congruenter Kreise als gleichartige Größen erkannt worden. Es blieb aber dahingestellt, ob die Bogen incongruenter Kreise ebenfalls gleichartig sind, und ob, wenn dies etwa der Fall sein sollte, die Qualität der Kreisbogen mit derjenigen der sonst betrachteten Linien, nehmlich der graden, übereinstimmt.

Um diese Frage zu entscheiden, beweisen wir zunächst den folgenden

Lehrsatz I.

Besitzt ein unverzweigtes Polygon eine Folge von convexen Winkeln, so ist die Summe der Schenkel derselben kleiner als die Summe der übrigen Polygonsseiten.

Vrs. Es ist ein Polygon $AXYZUBL \ldots\ldots MA$ gegeben, in welchem die Winkel bei X, Y, Z, U convex sind.



Beh. Es ist:

$$AX + XY + YZ + ZU + UB < AM + \ldots . + LB.$$

Bew. Nach der Voraussetzung treffen die Strahlen AX, XY, YZ, ZU den Zug $AM \ldots . LB$ in irgend welchen Punkten X', Y', Z', U'.

Bezeichnet man nun die Längen der Theile des Zuges $AM \ldots . LB$ zwischen A und X', X' und Y', u. s. w. durch (AX'), $(X'Y')$, u. s. w., so hat man nach §. 50, L. III:

$$\begin{aligned}
AX + XX' &< (AX'), \\
XY + YY' &< XX' + (X'Y'), \\
YZ + ZZ' &< YY' + (Y'Z'), \\
ZU + UU' &< ZZ' + (Z'U'), \\
UB &< UU' + (U'B).
\end{aligned}$$

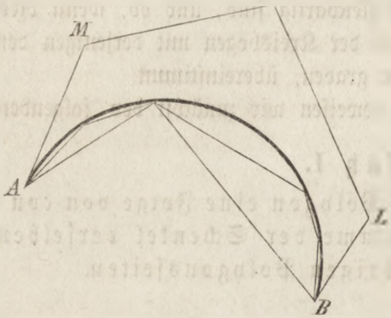
Summirt man diese Ungleichungen und subtrahirt dann von beiden Seiten die Summe

$$XX' + YY' + ZZ' + UU',$$

so geht hervor, was behauptet wurde.

Lehrsatz II.

Jeder Kreisbogen ist eine mit den Strecken gleichartige Größe. — M. a. W.: Die Kreisbogen haben Länge.



Bew. Schreibt man in einen gegebenen Kreisbogen AB von A nach B hin in der Weise eine Folge von Sehnen ein, daß jede neue Sehne im Endpunkte der vorhergehenden beginnt, und zieht außerhalb des Kreisfeldes von A nach B eine gebrochene Linie $AM \ldots LB$, so ist nach L. I die Sehnensumme

$$s < (AM \ldots LB);$$

denn die Sehnen bilden in dem construirten Polygon eine Folge von convexen Polygonswinkeln.

Vermehrt man hierauf die Sehnenzahl dadurch, daß man jede Sehne durch eine Folge von Sehnen zwischen ihren Endpunkten ersetzt, so bewirkt dies nach §. 50, L. III zugleich eine Vergrößerung der Sehnensumme s.

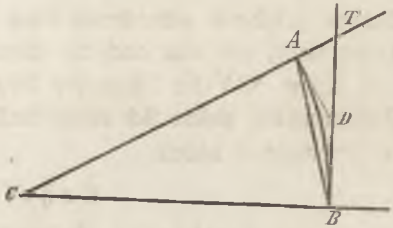
Obgleich nun jede Wiederholung dieses Verfahrens der Sehnensumme einen Zuwachs bringt, so kann diese doch nicht bis zu jeder beliebigen Länge gesteigert werden, weil sie nach dem Obigen kleiner als $(AM \ldots LB)$ bleibt. Die Sehnensumme nähert sich mithin einer Strecke von bestimmter Länge als ihrem Grenzwerthe, wenn man auf die vorgeschriebene Weise jede Sehne kleiner macht als eine beliebig klein gewählte Strecke.

Nimmt man hinzu, daß der Kreisbogen die Grenzgestalt der aus den Sehnen zwischen A und B bestehenden gebrochenen Linie ist, weil die Punkte der Sehnen und des Kreisbogens sich unendlich nähern, so ist der Kreisbogen nicht bloß eine Größe — was schon in §. 37 erkannt wurde — sondern eine mit einer Strecke gleichartige Größe, da er und die oben erwähnte Strecke von bestimmter Länge Grenzgestalten gleicher Linien sind (Axiom XIII).

Lehrsatz III.

Wird auf derjenigen Tangente, welche an einen Kreisbogen in einem seiner Endpunkte gelegt ist, eine Strecke von den Schenkeln des auf ihm stehenden Centriwinkels abgeschnitten, so ist diese länger als der Kreisbogen, der letztere aber länger als die zugehörige Sehne.

Vrs. Zwischen den Schenkeln des Centriwinkels BCA liegt die Sehne BA und der Theil BT der an den Bogen BA im Punkte B gelegten Tangente.



Beh. Es ist: Sehne
$AB <$ Bogen $AB < BT$.

Bew. Zunächst ist die Sehne AB nach §. 50, L. III kleiner als jede von A nach B führende gebrochene Linie, welche sich dem Bogen AB als ihrer Grenzgestalt nähern mag. Mithin ist auch derjenige Grenzwerth einer gebrochenen Linie, welcher die Länge des Bogens AB angiebt, größer als die Länge der Sehne AB (Axiom XIV).

Legt man ferner die Tangente an den Bogen AB im Punkte A und benennt durch D den Durchschnittspunkt derselben mit BT, so ist in dem bei A rechtwinkligen $\triangle\ DAT$:

$$DA < DT;$$

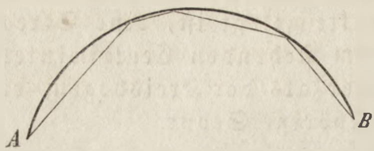
mithin: $$DA + DB < DT + DB = BT.$$

Zieht man ferner von A nach B zwischen der gebrochenen Linie ADB und dem Bogen AB eine andere gebrochene Linie, etwa eine Tangentenfolge, so nähert sich diese dem Kreisbogen AB in höherem Grade, als die gebrochene ADB, und ist nach L. I kürzer als ADB. Folglich ist auch die Länge des Bogens AB kleiner als diejenige von ADB, weil sie nach Axiom XIV nicht größer sein kann, als es irgend eine von A nach B führende gebrochene Linie ist, die sich dem Bogen AB als ihrer Grenzgestalt nähert.

Lehrsatz IV.

Die Länge eines Kreisbogens ist der Grenzwerth der Länge einer jeden **Sehnenfolge**, welche von dem einen Endpunkte des Bogens aus bis zum andern reicht, wenn man die Längen aller Theile dieser gebrochenen Linie unendlich abnehmen, d. h. kleiner werden läßt als eine beliebig klein gegebene Strecke.

Bew. Stellt man sich eine in den Kreisbogen AB eingeschriebene



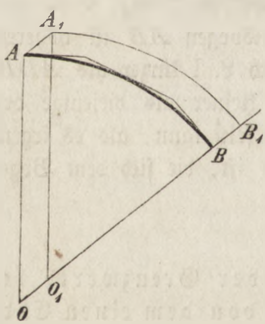
Sehnenfolge vor, so ist deren Länge stets kleiner als diejenige des Bogens AB; denn jede Sehne ist nach Lehrs. III kleiner als der überspannende Bogen. Da mithin die Gesammtlänge der von den Sehnen gebildeten gebrochenen Linie die Länge des Bogens nicht übersteigen kann, wie man auch die einzelnen Theile verkleinern mag, so ist nach Axiom XIV die Länge des Bogens der Grenzwerth der Länge jeder Sehnensumme, welche sich durch Verkleinerung der Theile dem Bogen als der Grenzgestalt nähert.

Lehrsatz V.

Jeder Kreisbogen ist länger als jede gebrochene Linie, welche innerhalb des Kreisfeldes dessen Endpunkte verbindet und dem Centrum lauter concave Winkel zuwendet. — Dies ist eine Folge von Lehrs. I und IV.

Lehrsatz VI.

Die Länge eines Kreisbogens ist der Grenzwerth der Länge einer jeden **Tangentenfolge**, welche von dem einen Endpunkte des Bogens aus bis zum andern reicht, wenn man die Längen aller Theile dieser gebrochenen Linie unendlich abnehmen läßt.



Bew. Stellt man sich um den Bogen AB, dessen Centrum O sei, eine Tangentenfolge von der Länge t vor und beschreibt um das in OB liegende Centrum O_1 einen die Tangentenfolge überspannenden und mit AB congruenten Bogen A_1B_1, wo B_1 einen Punkt in der Verlängerung von OB bedeute, so ist OO_1A_1A ein Parallelogramm, also $AA_1 = OO_1 = BB_1$. Hieraus geht, wenn wir den $\angle AOB$ zunächst als spitz, den $\angle OAA_1$ also als stumpf annehmen, in Verbindung mit L. I, IV und V hervor, daß

$$t < AA_1 + A_1B_1 + B_1B = 2 \cdot OO_1 + AB$$

ist, weil der mit AB vertauschbare Bogen A_1B_1 noch größer als jede in ihn eingeschriebene Sehnenfolge ist. Da nun diejenigen Punkte, in welchen sich je zwei benachbarte Tangententheile der von A bis B reichenden gebrochenen Linie treffen, dem Bogen AB bei unendlicher Verkleinerung der Tangententheile beliebig nahe rücken, so läßt sich hierbei die Strecke OO_1 beliebig verkleinern, ohne daß der Kreisbogen A_1B_1 von der gebrochenen Linie getroffen würde. Mithin sagt die so eben entwickelte Ungleichung $$t < 2 \cdot OO_1 + AB$$ aus, daß der Grenzwerth der Tangentensumme t als zu groß angenommen würde, wenn man behauptete, daß er größer als der Bogen AB sei.

Daher ist der Satz für solche Bogen AB bewiesen, über welchen ein spitzer Centriwinkel steht. Da man jedoch jeden größeren Bogen aus Bogen von dieser Beschaffenheit zusammensetzen kann, so gilt unser Satz allgemein.

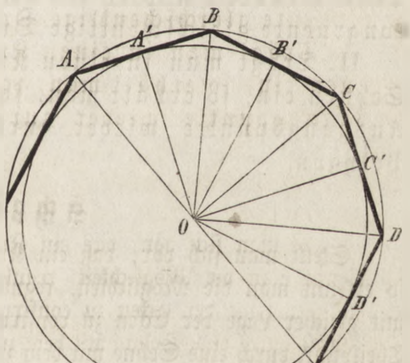
§. 128.
Definition.

Unter einem **regelmäßigen** oder **regulären**[1] **Polygon** versteht man ein solches, dessen Seiten sämmtlich gleich, und dessen Winkel ebenfalls sämmtlich gleich sind.

Lehrsatz.

Es giebt für jedes reguläre Polygon zwei concentrische Kreise, von denen derjenige mit dem größeren Radius durch alle Ecken geht, während derjenige mit dem kleineren Radius alle Seiten in ihren Mittelpunkten berührt.

Bew. Halbiert man die Winkel bei A und B in dem gegebenen regulären Polygon $ABCDE\ldots$, so schneiden sich nach §. 84, Z. V die Halbierungslinien in einem Punkte O, weil jeder von den halbierten Polygonswinkeln
$$= \frac{(n-2)\mathsf{G}}{n} = \mathsf{G} - \frac{2\mathsf{G}}{n} < \mathsf{G}$$
(§. 78)
die Hälfte eines jeden also $< \mathcal{R}$ ist.



1) regularis, regelmäßig. — Z. B. sind das gleichseitige Dreieck und das Quadrat reguläre Polygone.

Im $\triangle AOB$ ist wegen der Gleichheit der Winkel OAB und OBA Seite $OA = OB$ ... (§. 59).

Zieht man nun die Grade OC, so ist ferner:

$$\triangle BOC \cong \triangle AOB, \ldots (sws)$$

mithin:

$$OC = OB, \ \angle OCB = \angle OBA = \tfrac{1}{2} \angle ABC = \tfrac{1}{2} \angle BCD.$$

Auf analoge Weise folgt, wenn man jetzt die Grade OD zieht: $\triangle COD \cong \triangle BOC$, $OD = OC$, $\angle ODC = \angle OCB = \frac{1}{2} \angle CDE$; u. s. w.

Daher geht der Kreis, welcher um das Centrum O mit dem Radius OA gezogen werden kann, durch alle Ecken $A, B, C, D, \ldots$ des Polygons.

Fällt man endlich von O aus auf $AB, BC, CD, DE, \ldots$ die Senkrechten $OA', OB', OC', OD', \ldots$, so werden jene als Kreissehnen nach §. 101, L. I in den Punkten $A', B', C', D' \ldots$ halbiert, und die Senkrechten sind sämmtlich gleich, weil nach §. 107, L. II die gleichen Sehnen $AB, BC, CD, DE \ldots$ einen gleichen Abstand vom Centrum O haben. Mithin geht der um das Centrum O mit dem Radius OA' gezogene Kreis durch die Mitten $A', B', C', D', \ldots$ der Polygonsseiten und hat die letzteren in diesen Punkten zu Tangenten (§. 111, L. I).

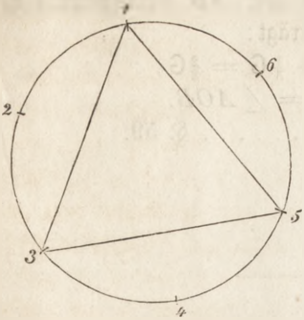
Zusätze.

I. Jedes reguläre Polygon wird durch die nach seinen Ecken gehenden Radien des umschriebenen Kreises in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

II. Trägt man in einen Kreis eine Folge von gleichen Sehnen ein, so erhält man, falls man auf diese Weise zum Ausgangspunkte wieder zurück gelangt, ein reguläres Polygon.

Scholie.

Stellt man sich vor, daß ein Kreis in n gleiche Bogen getheilt sei, so erkennt man die Möglichkeit, reguläre n-Ecke von verschiedener Gestalt mit gleicher Lage der Ecken zu construiren; denn man kann erstens jeden Theilpunkt durch eine Sehne mit dem zunächst folgenden verbinden, zweitens jeden Theilpunkt mit dem zweitfolgenden, u. s. w. Es fragt sich nur, ob bei jeder dieser Constructionsweisen auch jeder Theilpunkt einmal an die Reihe kommt, oder ob nicht vielleicht einige von ihnen ganz aus der Benutzung ausfallen, wie z. B. kein Sechseck, sondern nur ein Dreieck ent-



steht, wenn man bei sechs Theilpunkten immer einen überschlägt, während durch dasselbe Verfahren bei fünf Theilpunkten ein sogenanntes Pythagoreisches Fünfeck erhalten wird.

Man sieht hieraus, daß es von zahlentheoretischen Eigenschaften der Anzahl n der Ecken abhängt, wie viele verschiedene reguläre Polygone mit denselben Ecken construirt werden können, da schon die obigen Beispiele zeigen, daß u. A. die Zerlegbarkeit der Zahl n in Primfactoren [1]) eine Rolle spielt.

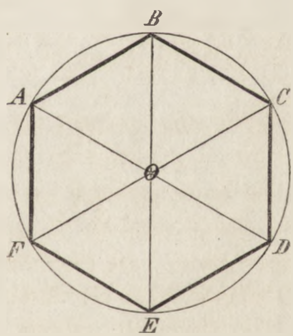
Wegen der geringeren Wichtigkeit dieser Materie für die Geometrie gehen wir hier nicht näher auf sie ein.

§. 129.

Lehrsatz.

Im regulären Sechseck sind die Seiten dem Radius des umschriebenen Kreises gleich.

Vrs. Es ist ein reguläres Sechseck $ABCDEF$ mit dem Centrum O des umschriebenen Kreises und den Radien OA, OB, OC, OD, OE, OF desselben gegeben.



Beh. Es ist: $AB = AO$.

Bew. Da die 6 Dreiecke um den Punkt O herum congruent sind (§. 128, Z. I), und die Summe der Winkel um O herum $= 2\,\mathsf{G}$ ist, so folgt:

$$\angle AOB = \frac{2\,\mathsf{G}}{6} = \tfrac{1}{3}\,\mathsf{G}.$$

1) Unter einer Primzahl versteht man eine solche ganze Zahl, welche keinen ganzen Factor außer ihr selbst und 1 besitzt, z. B.: 2, 3, 5, 7, 11.

Mithin ist im $\triangle AOB$, weil es über AB gleichschenklig ist, und seine Winkelsumme einen Gestreckten beträgt:

$$2 \cdot \angle ABO = \mathsf{G} - \tfrac{1}{3}\mathsf{G} = \tfrac{2}{3}\mathsf{G},$$
$$\angle ABO = \tfrac{1}{3}\mathsf{G} = \angle AOB,$$
$$AO = AB \;\ldots\ldots\; \S.\ 59.$$

Capitel V.

Gleichheit der Felder.

§. 130.

Lehrsatz.

Alle völlig begrenzten Ebenenstücke sind gleichartige Größen.

— Denn nach §. 32, Z. V kann man jeden Theil eines Ebenenstücks in Deckung mit einem andern Theil innerhalb des Ganzen beliebig verschieben, weshalb unser Satz nach Axiom XII richtig ist.

Definition.

Das Quantum eines völlig begrenzten Ebenenstücks (eines völlig begrenzten Feldes) heißt **Areal.**[1])

Scholie.

Bisher ist die Ebene bloß als Träger von Linienfiguren betrachtet worden, ohne Rücksicht darauf, daß die völlig begrenzten Felder gleichartige Quanten von eigenthümlichen Eigenschaften besitzen.

Indem wir uns jetzt die Betrachtung dieser Gattung von Größen, nehmlich der Areale, als Aufgabe setzen, werden wir uns namentlich darüber Rechenschaft geben müssen, welche Verwendung die über die Linienfiguren bereits erworbenen Erkenntnisse zur Vergleichung der Areale der von den Linien begrenzten Felder zulassen. Denn einerseits würde der Werth der anzustrebenden Resultate, wenn sie mit jenen außer Zusammenhang blieben, schon allein wegen dieses Umstandes bedeutend sinken — wie zusammenhangslose Einzelkenntnisse ja überhaupt von geringem Nutzen sind; und

1) area, Oberflächenausdehnung.

andrerseits läßt sich die Congruenz von Feldern, welche nach den grundlegenden Axiomen den Ausgangspunkt für die Vergleichung der Areale bildet, ohne Berücksichtigung der begrenzenden Linien nicht einmal feststellen.

Die uns zunächst zu Gebote stehenden Mittel, Areale als gleich zu erkennen, sind nehmlich einzig und allein folgende:

Gleich sind die Areale

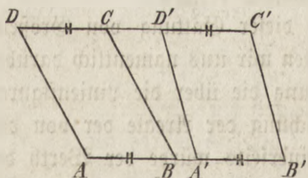
1) von congruenten Feldern (§. 17, Z. III);
2) von solchen Feldern, welche sich aus congruenten Feldern durch Addition und Subtraction gewinnen lassen (§. 20, IV und VII);
3) von solchen Feldern, welche aus andern bereits als gleich erkannten Feldern durch Vervielfältigen und Theilen mittelst gleicher Zahlen erhalten werden (§. 20, XI und XIII);
4) von solchen Feldern, welche sich als Grenzgestalten gleicher veränderlicher Felder auffassen lassen.

Das zuletzt aufgeführte Merkmal für die Gleichheit von Arealen, welches nur zum Zwecke der Vollständigkeit der Übersicht schon hier Platz gefunden hat, bedarf aber noch einer näheren Begründung, da der im Axiom XIV geforderte Nachweis noch nicht geführt ist, daß alle veränderlichen Felder bei einer einzigen gegebenen Grenzgestalt auch nur einen einzigen Grenzwerth des Areals haben. — Die Linien verhalten hierin sich bekanntlich anders. (Vergl. die Anm. zu §. 127.)

§. 131.

Lehrsatz I.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleiche Felder ein.



Bew. Da zwei parallele Graden überall denselben Abstand von einander haben, so kann man die beiden gleich hohen Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ so neben einander legen, daß die beiden Grundlinien AB und $A'B'$ in eine Grade $ABA'B'$, und deren Gegenseiten in die hierzu parallele Grade $DCD'C'$ fallen. Dann ist

$$\square AA'D'D \cong \square BB'C'C$$

wegen der Übereinstimmung in allen Stücken. Mithin ist, weil die Felder ebener Figuren mit diesen zugleich zur Deckung gelangen:

$$\square AA'D'D = \square BB'C'C.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der identischen

$$\square AB'C'D = \square AB'C'D,$$

so folgt:

$$\square A'B'C'D' = \square ABCD.$$

Zusätze.

I. Ein Dreiecksfeld ist gleich der Hälfte vom Felde eines Parallelogramms, welches mit ihm in Grundlinie und Höhe übereinstimmt. — §. 88, L.

II. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe schließen gleiche Felder ein.

III. Aus der Gleichheit von Parallelogramms-, beziehungsweise Dreiecksfeldern läßt sich nicht auf die Gleichheit der Umfänge schließen; und umgekehrt.

Lehrsatz II.

Von zwei Parallelogrammen oder Dreiecken, welche in der Grundlinie übereinstimmen, schließt dasjenige das kleinere Feld ein, welches die kleinere Höhe hat.

— Denn es ist nach L. I einem Theil des andern gleich.

Lehrsatz III.

Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleichem Areal haben gleiche Höhe.

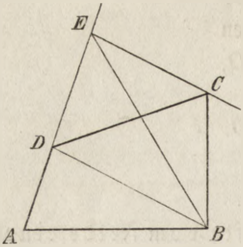
§. 132.

Aufgaben.

I. Ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen Parallelogramm im Areal und in einer Seite übereinstimmt und außerdem einen Winkel von gegebener Größe hat.

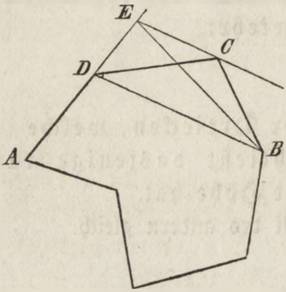
II. Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck im Areal und in einer Seite übereinstimmt und an dieser einen Winkel von gegebener Größe hat.

III. Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Viereck im Areal, in einer Seite und in einem Winkel an derselben übereinstimmt.



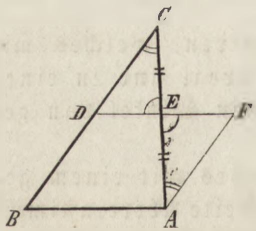
Anal. Stellt man sich vor, das Dreieck, welches mit dem Viereck $ABCD$ in der Seite AB, dem $\angle A$ und dem Areal übereinstimmt, sei auf dieses so herauf gelegt, daß die gleichen Seiten und Winkel sich decken, so muß die dritte Dreiecksecke E über die Ecke D in dem Strahl AD hinaus fallen, da das $\triangle ABD$ nur ein Theil vom $\square ABCD$ ist. Dann muß ferner $\triangle DBC = \triangle DBE$ sein, weshalb $CE \,\#\, BD$ ist (§. 131, L. III).

IV. Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen n-Eck im Areal, in einer Seite und in einem Winkel an derselben übereinstimmt.



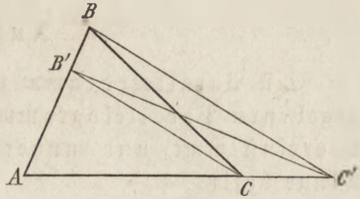
Anal. Schneidet man von dem n-Ecksfelde $(\ldots ADCB \ldots)$ durch eine Diagonale DB ein $\triangle DCB$ ab, so läßt sich das Feld des letzteren durch ein anderes DEB zwischen den Parallelen DB und EC ersetzen, dessen Seite DE in der Verlängerung von AD liegt. Dadurch ist das n-Ecksfeld $(\ldots ADCB \ldots)$ in das $(n-1)$-Ecksfeld $(\ldots AEB \ldots)$ verwandelt. Durch Wiederholung dieses Verfahrens an dem neuen Felde erhält man ein eben so großes $(n-2)$-Ecksfeld, u. s. f., bis schließlich ein Dreieck hervorgeht.

V. Ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck im Areal, in einer Seite und in einem Winkel an der letzteren übereinstimmt.



Anal. Sei ABC das gegebene Dreieck und $ABDF$ das verlangte Parallelogramm, so ist $\angle AEF = \angle CED$ als Scheitelwinkel, und $\angle EAF = \angle ECD$ als Wechselwinkel bei den Parallelen AF und CB. Mithin wird $\triangle AEF \cong \triangle CED$, wenn $EA = EC$ gemacht ist, und erlangt mit ihm dadurch gleiche Felder.

VI. Ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen Dreieck im Areal und in einem Winkel übereinstimmt und an dem letzteren eine Seite von gegebener Länge hat.



Anal. Ist $\triangle ABC$ das gegebene, $\triangle AB'C'$ das gesuchte, so müssen die Graden BC' und $B'C$ parallel sein, damit $\triangle B'CC' = \triangle B'CB$ hervorgehe (§. 131, L. III), was zum Zwecke der Gleichheit der Felder ABC und $AB'C'$ erforderlich ist.

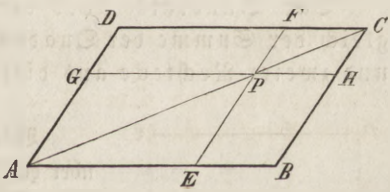
VII. Ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen Parallelogramm im Areal und in einem Winkel übereinstimmt und außerdem eine Seite von gegebener Länge besitzt.

Anal. Die Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, wenn man bedenkt, daß die Dreiecke, welche die Hälften von den Parallelogrammen sind, denselben Bedingungen genügen müssen.

§. 133.

Lehrsatz.

Zieht man durch einen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so haben die hierdurch auf verschiedenen Seiten der Diagonale entstandenen neuen Parallelogramme gleiche Felder.



Vrs. Mit den Seiten des Parallelogramms $ABCD$ sind durch den Punkt P der Diagonale AC Parallelen gezogen, von denen die eine AB in E, CD in F, die andere AD in G, BC in H schneidet.

Beh. Es ist $PEBH = PFDG$.

Bew. Nach §. 131, Z. I ist:

$$\triangle ACB = \triangle ACD,$$
$$\triangle APE = \triangle APG,$$
$$\triangle CPH = \triangle CPF.$$

Subtrahirt man die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so folgt das Behauptete.

§. 134.

Aufgabe.[1]

Ein Parallelogramm zu construiren, welches mit einem gegebenen Parallelogramm im Areal und in einem Winkel übereinstimmt und außerdem eine Seite von gegebener Länge besitzt.

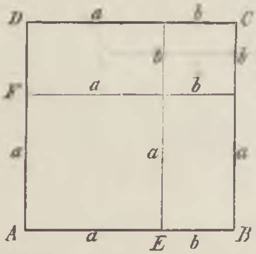
Anal. Ist in der Figur zum vor. §. $DGPF$ das gegebene, $PHBE$ das gesuchte Parallelogramm, PH im letzteren die Seite von gegebener Länge a, so sind beide Parallelogramme Theile des construirbaren Parallelogramms $ABCD$. Denn die Construction des letzteren gelingt u. A. dadurch, daß man GP und DF um die Strecken $a = PH = FC$ verlängert, die Graden CH und CP zieht, von denen die letztere sich mit DG in A schneidet, $HB = GA$ macht, AB zieht und FP bis zum Durchschnitt E mit AB verlängert.

— Dieselbe Figur giebt auch noch Anlaß zu einer andern Construction, da die Felder $AEFD$ und $ABHG$, welche sich in dem gemeinsamen Theil $AEPG$ überdecken, gleich sind.

§. 135.

Lehrsatz I.

Das Quadrat[2] über der Summe zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Strecken und zweier Rechtecke aus diesen.



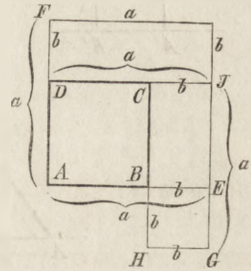
Bew. Das Feld des Quadrats $ABCD$ über der Seite $AB = a + b$ wird in die fraglichen Theile zerschnitten, wenn man von einer Ecke A aus auf den beiden anstoßenden Seiten die Strecken $AE = AF = a$ abträgt und dann durch E und F die Parallelen zu den Seiten zieht.

1) Vergl. §. 132, VI.

2) Der Bequemlichkeit des Ausdrucks wegen nennt man häufig, wie hier, nur die Linienfiguren, während man die von ihnen begrenzten Felder meint.

Lehrsatz II.

Das Quadrat über der Differenz zweier Strecken ist gleich der Differenz zwischen der Summe der Quadrate und dem Doppelten eines Rechtecks aus diesen Strecken.



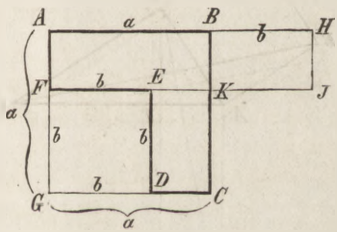
Bew. Ist $ABCD$ das Quadrat über der Seite $AB = a - b$, so construire man ein Quadrat mit den Seiten

$$ABE = ADF = a$$

und lege an dieses ein Quadrat $BEGH$ heran. Hierdurch hat man die Summe der Quadrate über a und b erhalten. Verlängert man dann die Seite DC bis zum Randpunkte J der Figur, so ist dieselbe in das Quadrat $ABCD$ und zwei Rechtecke aus den Seiten a und b zerschnitten. Nach Wegnahme der letzteren bleibt also das Quadrat $ABCD$ übrig.

Lehrsatz III.

Die Differenz der Quadrate über zwei Strecken ist gleich dem Rechteck aus der Differenz und der Summe der beiden Strecken.

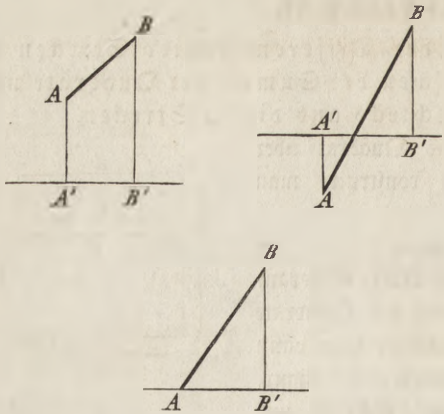


Bew. Es sei $ABCDEF$ die Differenz der Quadrate $ABCG$ und $FEDG$ über den Strecken a und b. Verlängert man die Seite AB über B hinaus um die Strecke $BH = b$ und construirt das Rechteck $AHJF$, welches offenbar die Seiten $AH = a + b$ und $AF = a - b$ hat, so ist der über das Feld $ABCDEF$ hinaus liegende Theil $BHJK$ desselben mit $EKCD$ congruent und gleich.

§. 136.

Definition.

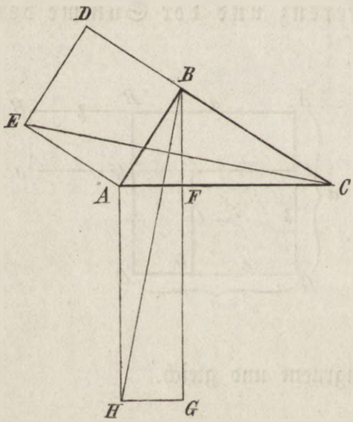
Fällt man die Senkrechten von den beiden Endpunkten einer Strecke auf eine Grade, so erhält man zwischen den Fußpunkten eine Strecke, welche die **Projection** der ersteren genannt wird.



Z. B. sind in den beiden ersten hierneben verzeichneten Figuren die Strecken $A'B'$ Projectionen der Strecken AB; in der dritten ist AB' die Projection von AB, weil A' mit A zusammenfällt.

Lehrsatz I.

Das Quadrat über einer Kathete irgend eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenusse und der auf ihr liegenden Projection der Kathete.



Vrs. Es ist gegeben ein bei B rechtwinkliges $\triangle ABC$, über der Kathete AB das Quadrat $ABDE$, $BF \perp AC$, endlich das Rechteck $AFGH$, in welchem $AH = AC$ ist.

Beh. Es ist

$$\square\, ABDE = \square\, AFGH.$$

Bew. Zieht man die Graden EC und BH, so ist

$\triangle EAC \cong \triangle BAH$ .... (swss), weil $AE = AB$, $AC = AH$, $\angle EAC = \angle BAC + R = \angle BAH$ ist. Ferner ist nach §. 131, Z. I:

$\square\, ABDE = 2 \cdot \triangle EAC$ ... über der Grundlinie EA zwischen $EA \parallel DC$,
$\square\, AFGH = 2 \cdot \triangle BAH$ ... „ „ „ AH „ $AH \parallel BG$.

Mithin ist:

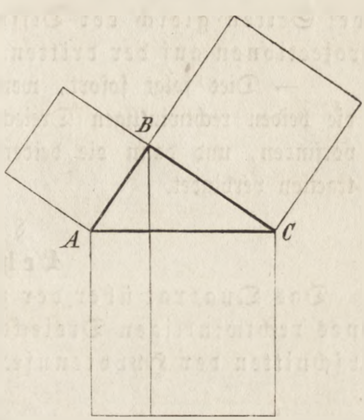
$$\square\, ABDE = \square\, AFGH.$$

Lehrsatz II.

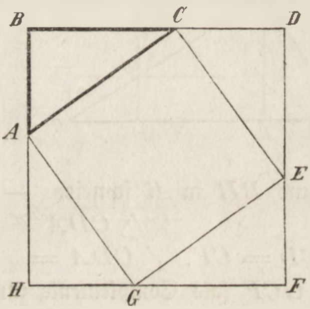
Der Pythagoreische[1] Lehrsatz.

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Katheten.

Bew. I. Fällt man vom Scheitel B des rechten Winkels im $\triangle\ ABC$ die Senkrechte auf die Hypotenuse und verlängert sie durch das Hypotenusenquadrat hindurch, so wird das letztere in zwei Rechtecke getheilt, welche nach L. I einzeln den Kathetenquadraten gleich sind.



Bew. II. Verlängert man die Kathete BC um $CD = BA$, die Kathete BA um $AH = BC$, construirt das Quadrat $DBHF$, macht auf HF die Strecke $HG = BA$ und auf FD die Strecke $FE = BA$, zieht endlich die Graden AG, GE, EC, so ist $\triangle\ ABC \cong \triangle\ CDE \cong \triangle\ EFG \cong \triangle\ GHA$ (sws); und $ACEG$ ist ein Quadrat, weil nach diesen Congruenzen



$$AC = CE = EG = GA,$$
$$\begin{aligned}\angle GAC &= 2\,\varkappa - (\angle HAG + \angle BAC)\\ &= 2\,\varkappa - (\angle BCA + \angle BAC)\\ &= 2\,\varkappa - \quad \varkappa \quad = \quad \varkappa\end{aligned}$$

ist.

Da nun die Summe der vier congruenten rechtwinkligen Dreiecke ABC, CDE, EFG, GHA gleich der Summe zweier Rechtecke aus den Strecken AB und BC ist, und dies nach §. 135, I den Überschuß des Quadrats $BDFH$ über die Summe der Quadrate aus den Seiten

1) Pythagoras lebte Ende des 6. Jahrhunderts vor Chr.

AB und BC beträgt, so ist diese Quadratsumme gleich dem Quadrat $ACEG$, welches nach Wegnahme jener vier rechtwinkligen Dreiecke vom ganzen Quadrat $BDFH$ übrig bleibt.

Zusatz.

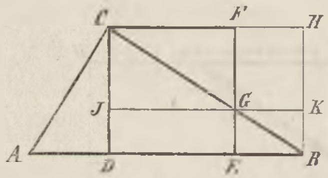
In jedem Dreieck ist die Differenz der Quadrate über zwei Seiten gleich der Differenz der Quadrate über ihren Projectionen auf der dritten.

— Dies folgt sofort, wenn man den Pythagoreischen Satz auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke anwendet, welche sich in der Figur vorfinden, und dann die beiden erhaltenen Gleichungen durch Subtraction verbindet.

§. 137.

Lehrsatz.

Das Quadrat über der zur Hypotenuse gezogenen Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse.



Bew. Es sei $CDEF$ das Quadrat über der Höhe CD des bei C rechtwinkligen $\triangle ABC$, G der Schnittpunkt der Graden EF und BC (oder ihrer Verlängerungen). Man construire das Rechteck $CDBH$ und ziehe durch G zu DB die Parallele, welche CD in J und BH in K schneide. — Dann ist:

$$\triangle CDA \cong \triangle CFG, \ldots \ (wsw)$$

weil $CD = CF$, $\angle CDA = \angle CFG$ (als Rechte), endlich $\angle ACD = \angle GCF$ (als Complemente zum $\angle DCG$) hervorgeht. Mithin ist:

$$DA = FG = CJ,$$

so daß das Rechteck $CHKJ$ eine Seite $CJ = DA$ und die Nachbarseite $CH = DB$ besitzt. Ferner ist das Areal

$$CHKJ = CFED,$$

weil der Überschuß über den gemeinsamen Theil $CFGJ$ nach §. 133

$$FHKG = JDGE$$

ist.

§. 138.

Aufgabe.

Ein Quadrat zu construiren, welches mit einem gegebenen Rechteck im Areal übereinstimmt.

Anal. Erstens giebt der Lehrs. I des §. 136 hierzu eine Anleitung, da es, wenn $AFGH$ das gegebene Rechteck ist, nur darauf ankommt, die Strecke $AFC = AH$ zu machen und über AC als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck ACB zu construiren, dessen Ecke B in der Graden GF liegt. Die Ecke B findet man aber als Schnittpunkt der Graden GF mit dem über AC construirten Halbkreise (§. 113, Z. IV).

Zweitens giebt der Lehrsatz §. 137 ebenfalls eine Anleitung zur Auflösung der Aufgabe. Denn trägt man auf einer Graden die mit den Nachbarseiten des gegebenen Rechtecks gleichen Strecken AD, DB an einander ab und bestimmt die dritte Ecke C des $\triangle ABC$ als den Durchschnittspunkt des Halbkreises über AB mit der in D auf AB errichteten Senkrechten, so ist DC eine Seite des gesuchten Quadrats.

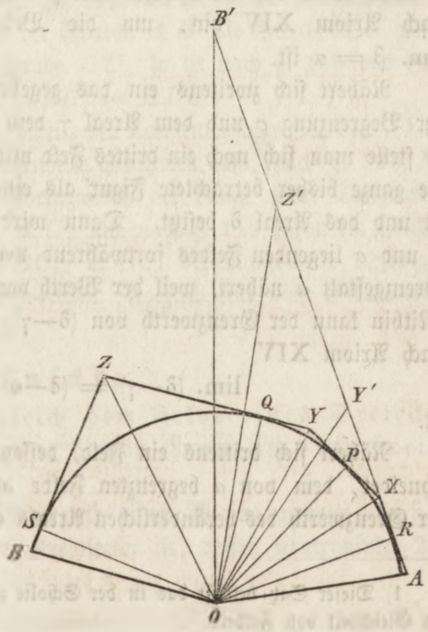
§. 139.

Lehrsatz.

Bilden zwei Seiten eines Polygons einen Centriwinkel eines Kreises, von welchem die andern Polygonsseiten Tangenten sind, so ist das Polygonsfeld gleich dem Felde eines Dreiecks, dessen Höhe gleich dem Radius, und dessen Grundlinie gleich der in Rede stehenden Tangentensumme des Kreises ist.

Vrs. Es ist ein Polygon $(OAXY \ldots ZB)$ gegeben, dessen Seiten AX, XY, ..., ZB Tangenten eines um O mit dem Radius r gezogenen Kreises sind.

Beh. Das Feld $(OAXY \ldots ZB)$ ist eben so groß, wie dasjenige eines Dreiecks, dessen Höhe $= r$, und dessen Grundlinie $= AX + XY + \ldots + ZB$ ist.



Bew. Macht man auf dem Strahl AX die Stücke $XY' = XY$, ..., $Z'B' = ZB$, zieht die Graden OX, OY, ..., OZ; OY', ..., OZ', OB' und die Berührungsradien OR,

$OP, \ldots, OS$ der Kreistangenten $AX, XY, \ldots, ZB$, so ist wegen der Übereinstimmung in Höhe und Grundlinie (§. 131, Z. II):

$$\triangle OAX = \triangle OAX,$$
$$\triangle OXY' = \triangle OXY,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\triangle OZ'B' = \triangle OZB;$$

mithin durch Summation nach §. 20, IV:

$$\triangle OAB' = (OAXY \ldots ZB).$$

§. 140.*

Lehrsatz.

Nähert sich ein veränderliches Feld einer Grenzgestalt, so nähert sich sein Areal einem einzigen Grenzwerth, wie die Veränderung des Feldes auch vor sich gehen mag; und dieser Grenzwerth giebt das Areal der Grenzgestalt an.[1]

Bew. Da jedes mit völliger Begrenzung a gegebene Feld nach §. 130 ein bestimmtes Areal α hat, wie es auch gestaltet sein mag, so ist es größer als jedes in ihm liegende von der geschlossenen Linie b begrenzte Feld mit dem Areal β. Nähert sich nun b der Grenzgestalt a, so kann daher der Grenzwerth von β nicht $> \alpha$ werden; und dies reicht nach Axiom XIV hin, um die Behauptung zu rechtfertigen, daß $\lim. \beta = \alpha$ ist.

Nähert sich zweitens ein das gegebene Feld einschließendes Feld mit der Begrenzung c und dem Areal γ dem ersteren als seiner Grenzgestalt, so stelle man sich noch ein drittes Feld mit der Begrenzung d vor, welches die ganze bisher betrachtete Figur als einen Theil enthält, unveränderlich ist und das Areal δ besitzt. Dann wird das Areal $(\delta - \gamma)$ des zwischen d und c liegenden Feldes fortwährend wachsen, wenn die Linie c sich der Grenzgestalt a nähert, weil der Werth von γ hierbei fortwährend abnimmt. Mithin kann der Grenzwerth von $(\delta - \gamma)$ nicht $> (\delta - \alpha)$ werden, so daß nach Axiom XIV

$$\lim. (\delta - \gamma) = (\delta - \alpha), \ \lim. \gamma = \alpha$$

ist.

Nähert sich drittens ein Feld, dessen Begrenzung die Linie a durchschneidet, dem von a begrenzten Felde als seiner Grenzgestalt, so kann der Grenzwerth des veränderlichen Areals ebenfalls nicht von α verschieden

---

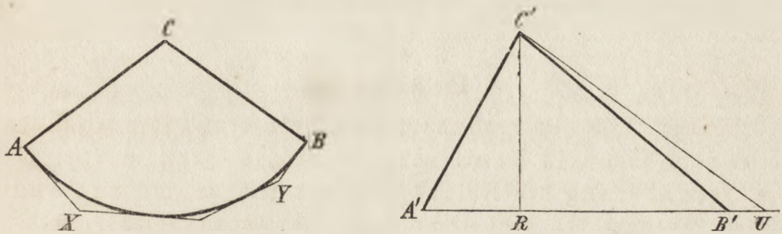
1) Dieser Satz betrifft das in der Scholie zu §. 130 aufgezählte Merkmal 4) für die Gleichheit von Feldern.

sein, weil man die Figur so zerschneiden kann, daß die vorher betrachteten Fälle eintreten.

§. 141.

Lehrsatz.

Das Feld eines jeden Kreissectors ist gleich demjenigen eines Dreiecks, dessen Höhe dem Radius, und dessen Grundlinie dem Bogen gleich ist.



Vrs. Es sind ein Kreissector ABC mit dem Centrum C und ein $\triangle A'B'C'$ gegeben, dessen Höhe $C'R = CA$, und dessen Grundlinie $A'B' = AB$ ist.

Beh. Es ist das Feld $ABC = \triangle A'B'C'$.

Bew. Legt man um den Bogen AB von A bis B eine Tangentenfolge $(AX \ldots YB)$, macht auf der Graden $A'B'$ die Strecke $A'U$ gleich der Länge derselben und zieht die Grade $C'U$, so ist nach §. 139 das Feld

$$(AX \ldots YBC) = A'UC'.$$

Nun ist aber, wenn man die Theile der Tangentenfolge $(AX \ldots YB)$ unter Vermehrung ihrer Anzahl unendlich abnehmen läßt, nach §. 127, VI die Länge des Bogens AB der Grenzwerth der Länge jener Tangentenfolge, mithin auch $A'B' = \lim. A'U$; und nach §. 140 haben die gleichen Areale der Felder $(AX \ldots YBC)$, $A'UC'$ beziehungsweise diejenigen von ABC und $A'B'C'$ zu Grenzwerthen. Folglich sind diese Grenzwerthe ebenfalls gleich. (Arithm. §. 35.)

Zusatz.

Jedes Kreisfeld ist gleich dem Felde eines Dreiecks, dessen Höhe dem Radius, und dessen Grundlinie der Kreislinie gleich ist.

— Denn denkt man sich irgend einen Radius gezogen, so sieht man, daß der ganze Kreis ein Kreissector ist, dessen Centriwinkel 2 G beträgt.

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Elemente der Mathematik

für

gelehrte Schulen und zum Selbststudium

von

Dr. Worpitzky,

Oberlehrer am Friedrichs-Werderschen Gymnasium und Docent an der Königl. Kriegsacademie.

Viertes Heft.

Planimetrie.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1874.

Lichtenstein

Capitel VI.

Vom Messen.

A. Quotienten von Längen und Arealen. — Ähnlichkeit.

§. 142.

Scholie.

Diejenigen arithmetischen Sätze, deren wir uns bisher bei der Untersuchung der Raumgrößen bedient haben, gehören sämmtlich der Addition, Subtraction, Multiplication und demjenigen Falle der Division an, welcher als „Theilen" bezeichnet wird, nehmlich demjenigen, in welchem der Multiplicand gesucht wird, wenn das Ganze und die Anzahl der Theile gegeben sind. (Arithm. §. 23.)

Das „Messen", nehmlich die Bestimmung des Multiplicators, d. i. der Anzahl der in einem gegebenen Ganzen enthaltenen Theile von gegebener Größe, ist noch nicht besprochen.

Daß hierbei häufig im eigentlichen Sinne von einer Anzahl von Theilen nicht die Rede sein kann, ist in dem betreffenden Abschnitt des Lehrbuchs der Arithmetik für alle Größen von irgend welcher Qualität entwickelt; und es sind dort diejenigen Erweiterungen des Zahlenbegriffs ausführlich besprochen, welche in der Erfindung der gebrochenen und der irrationalen Zahlen beruhen und einen unveränderlichen Algorismus [1]) mit dem Quotienten $\frac{a}{b}$ gestatten, mag derselbe eine Anzahl angeben oder nicht.

Über die Einzelheiten ist der betreffende Abschnitt der Arithmetik nachzusehen. Hier wollen wir nur Folgendes erwähnen:

---

1) Rechnen nach denselben formalen (äußerlichen) Gesetzen.

Versteht man unter a und b zwei **gleichartige Größen,** unter n und r **ganze Zahlen,** so bedeuten die Gleichungen

$$a = \frac{n}{r} \cdot b, \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{r}$$

soviel, wie die Gleichung:

$$a = \frac{nb}{r}, \text{ oder: } a = n \cdot \frac{b}{r}, \text{ oder: } \frac{a}{n} = \frac{b}{r}.$$

Solche Größen a und b, zwischen welchen eine Gleichung dieser Art besteht, heißen **commensurabel,** die Größe $\frac{a}{n}$ (oder die gleiche $\frac{b}{r}$) heißt der **gemeinschaftliche Theiler** oder das **gemeinschaftliche Maß** derselben, die Bruchform $\frac{a}{b}$ (oder die gleiche $\frac{n}{r}$) eine **rationale Zahl.**

Haben aber die beiden gleichartigen Größen a und b kein gemeinschaftliches Maß, so heißen sie **incommensurabel,** und die Bruchform $\frac{a}{b}$ eine **irrationale Zahl.** Dann lassen sich zwei Zahlen n und r stets so verändern, daß

$$a = \lim. \frac{n}{r} \cdot b$$

ist, und man darf diese Gleichung ohne Veränderung der formalen Rechengesetze auch in der Form

$$\frac{a}{b} = \lim. \frac{n}{r}$$

verwenden.

Es wird unsere nächste Sorge sein, zu zeigen, daß es incommensurable Raumgrößen giebt.

§. 143.

Lehrsatz I.

Versteht man unter a und b zwei gleichartige Größen, von denen $a > b$ ist, und unter n eine Anzahl von der Beschaffenheit, daß $a > nb$ hervorgeht, so ist das größte gemeinschaftliche Maß von a und b, falls es ein solches giebt, auch das größte gemeinschaftliche Maß von b und der Größe $c = (a - nb)$; und umgekehrt ist das größte gemeinschaftliche Maß von b und c auch das größte gemeinschaftliche Maß von a und b.

Bew. Jedes gemeinschaftliche Maß von a und b, d. i. jede Größe g von der Beschaffenheit, daß die Quotienten

$$\frac{a}{g} = \alpha \text{ und } \frac{b}{g} = \beta$$

ganze Zahlen sind, macht auch den Quotienten

$$\frac{c}{g} = \gamma$$

zu einer ganzen Zahl, wegen der aus der Voraussetzung folgenden Gleichung:

$$\frac{c}{g} = \frac{a}{g} - n \cdot \frac{b}{g}, \quad \gamma = \alpha - n\beta.$$

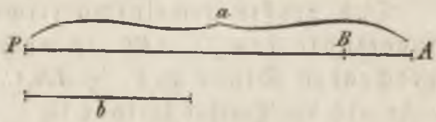
Hierdurch ist der erste Theil der Behauptung bewiesen. Ferner ist nach derselben Gleichung:

$$\frac{a}{g} = \frac{c}{g} + n \cdot \frac{b}{g}, \quad \alpha = \gamma + n\beta,$$

so daß umgekehrt (was den zweiten Theil der Behauptung bildet), α als eine ganze Zahl hervorgeht, wenn β und γ solche Zahlen sind.

Scholie.

Beispielsweise seien a und b zwei Strecken von solcher Beschaffenheit, daß auf $a = PA$ noch eine Strecke $BA = c$ übrig bleibt, nachdem man $PB = 2 \cdot b$ abgetragen hat ($n = 2$). Dann wird eine Strecke g,



welche in b genau 10 mal enthalten ist ($\frac{b}{g} = \beta = 10$), sich von P bis B genau $2 \cdot 10 = 20$ mal abtragen lassen, so daß sie in $c = BA$ noch eine ganze Anzahl mal (etwa $\gamma = 9$ mal) enthalten ist, wenn g in a eine ganze Anzahl ($\alpha = 29$) mal aufging.

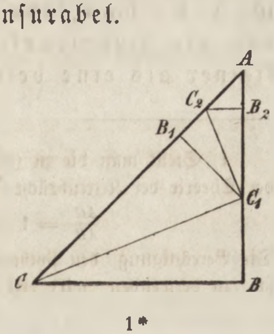
Lehrsatz II.

Kathete und Hypotenuse eines jeden gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks sind incommensurabel.

Vrs. Das rechtwinklige $\triangle ABC$ ist über (der Hypotenuse) AC gleichschenklig.

Beh. AB und AC sind incommensurabel.

Bew. Auf der Hypotenuse AC mache man $CB_1 = CB$, errichte in B_1 auf AC die Senkrechte, welche AB in C_1 schneiden mag, und ziehe die Grade CC_1. Dann ist:



$$\triangle C_1CB_1 \cong \triangle C_1CB, \ldots (Ssw)$$

mithin: $C_1B_1 = C_1B.$

Und da im $\triangle AB_1C_1$

$$\angle AC_1B_1 = 2\mathcal{R} - \angle AB_1C_1 - \angle C_1AB_1 = 2\mathcal{R} - \mathcal{R} - \tfrac{1}{2}\mathcal{R} = \tfrac{1}{2}\mathcal{R} = \angle C_1AB_1$$

ist, so ist dieses rechtwinklige $\triangle AB_1C_1$ ebenfalls gleichschenklig; also:

$$(1.) \quad AB_1 = B_1C_1 = C_1B.$$

Was die Länge seiner Hypotenuse AC_1 betrifft, so hat man einerseits:

$$AC_1 = AB - C_1B = (AC - AB_1) - C_1B,$$

und andrerseits:

$$AC_1 < AB_1 + B_1C_1;$$

was durch Summation unter Benutzung von Gl. (1.) zu dem Resultat

$$(2.) \quad 2 \cdot AC_1 < AC, \; AC_1 < \tfrac{1}{2}AC$$

führt.

Nimmt man noch hinzu, daß

$$(3.) \quad \begin{cases} AC - AB = AC - CB = AB_1 \\ AB - AB_1 = AB - C_1B = AC_1 \end{cases}$$

hervorgeht, so schließt man unter Benutzung des obigen Lehrs. I Folgendes:

Das größte gemeinschaftliche Maß von Kathete und Hypotenuse des $\triangle ABC$ ist auch ein solches für die entsprechenden Stücke des $\triangle AB_1C_1$, dessen Hypotenuse um mehr als die Hälfte kleiner ist.

Wiederholt man die beschriebene Construction am $\triangle AB_1C_1$, so erhält man ein $\triangle AB_2C_2$, welches zum $\triangle AB_1C_1$ in ähnlicher Beziehung steht, wie dieses zum $\triangle ABC$; u. s. f. [1]) Die Hypotenusen dieser Dreiecke nehmen nach dem Obigen in der Weise ab, daß

$$AC > 2 \cdot AC_1 > 2^2 \cdot AC_2 > 2^3 \cdot AC_3 > \ldots > 2^n \cdot AC_n,$$

also allgemein

$$AC_n < \frac{AC}{2^n}$$

ist; d. h.: man kann die Construction so oft wiederholen, daß die Hypotenuse AC_n des zuletzt erhaltenen Dreiecks kleiner als eine beliebig klein gegebene Strecke, also auch

---

1) Stellt man die zu (3.) analogen Formeln sämmtlich auf, so ergiebt sich aus der Theorie der Kettenbrüche:

$$\frac{AC}{AB} = 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots = \sqrt{2}.$$

Die Berechtigung, den Pythagoreischen Satz zur Erlangung dieses numerischen Resultats zu verwenden, wird erst in §. 155 erworben.

kleiner wird, als diejenige Strecke ist, welche etwa Jemand für das gemeinschaftliche Maß von AB und AC ausgeben möchte.

Dann kann dieses Maß aber nicht in AC_n aufgehen, wie es doch müßte.

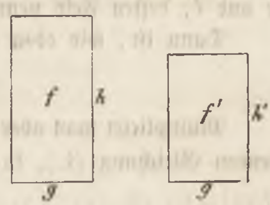
Mithin haben AB und AC kein gemeinschaftliches Maß; was zu beweisen war.

§. 144.

Lehrsatz.

Stimmen zwei Rechtecke in der Grundlinie überein, so ist der Quotient ihrer Felder gleich demjenigen ihrer Höhen; m. a. W.: so verhalten sich[1] ihre Felder wie ihre Höhen.

Vrs. Es sind zwei Rechtecke gegeben, das eine mit der Grundlinie g, der Höhe h und dem Felde f, das andere mit der Grundlinie g, der Höhe h' und dem Felde f'.



Beh. Es ist $\frac{f}{f'} = \frac{h}{h'}$.

Bew. Man muß beim Beweise die beiden folgenden möglichen Fälle unterscheiden:

I. Die Höhen h und h' seien commensurabel. Ihr gemeinschaftliches Maß sei die Strecke

$$a = \frac{h}{n} = \frac{h'}{n'},$$

so daß

$$h = na, \quad h' = n'a$$

ist.

Zieht man nun durch die Theilpunkte, welche durch Abtragung der Strecke a auf den Höhen h und h' erhalten werden, Parallelen zu den Grundlinien g, so zerfallen f und f' beziehungsweise in n und n' congruente Rechtecksfelder von der Größe φ. Mithin wird

$$f = n\varphi, \quad f' = n'\varphi;$$

und es ist:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n\varphi}{n'\varphi} = \frac{n}{n'} = \frac{na}{n'a} = \frac{h}{h'}.$$

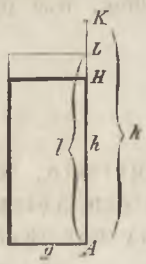
II. Die Höhen h und h' seien incommensurabel.

1) Über die Proportionen vergl. das Lehrb. d. Arithmetik §. 41 bis §. 45.

Jedenfalls giebt es eine Strecke k von der Beschaffenheit, daß

$$(1.)\qquad \frac{f}{f'} = \frac{k}{h'}$$

ist. Man kann daher die Frage nach der Gültigkeit der Behauptung so aussprechen, ob k von h verschieden sein kann oder nicht.



Nehmen wir an, h und k seien verschieden, so fällt der Endpunkt K der Strecke $AK = k$ nicht mit dem Endpunkte H der Höhe $AH = h$ zusammen, wenn man jene auf dieser abträgt. Theilt man dann die Höhe h' in so kleine gleiche Theile, daß dieselben kleiner als HK sind, und trägt sie von A aus auf AH ab, so fällt schließlich ein Theilpunkt in einen Punkt L zwischen H und K. Die Strecke AL, welche ihrer Entstehungsweise nach mit h' commensurabel ist, nennen wir l und construiren endlich ein Rechteck aus den Seiten g und l; dessen Feld nennen wir λ.

Dann ist, wie oben unter I bewiesen:

$$(2.)\qquad \frac{f'}{\lambda} = \frac{h'}{l}.$$

Multiplicirt man aber diese Gleichung (2.) mit der nicht zu beanstandenden Gleichung (1.), so folgt die Gleichung

$$\frac{f}{\lambda} = \frac{k}{l},$$

welche einen offenbaren Widerspruch enthält. Denn da L zwischen H und K liegt, so ist

$$f > \lambda,\ \frac{f}{\lambda} > 1,\ \text{wenn } k < l,\ \frac{k}{l} < 1 \text{ ist;}$$

und

$$f < \lambda,\ \frac{f}{\lambda} < 1,\ \text{wenn } k > l,\ \frac{k}{l} > 1 \text{ ist.}$$

Folglich kann k nicht von h verschieden sein.

Zusätze.

I. Die Felder der Parallelogramme von gleicher $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ verhalten sich, wie ihre $\left\{\begin{matrix}\text{Höhen.}\\ \text{Grundlinien.}\end{matrix}\right\}$

— Nach L. I u. §. 131, L. I.

II. Die Felder der Dreiecke von gleicher $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ verhalten sich, wie ihre $\left\{\begin{matrix}\text{Höhen.}\\ \text{Grundlinien.}\end{matrix}\right\}$

— Nach Zus. II u. §. 131, Z. I.

§. 145.

Lehrsatz.

Der Quotient der Felder beliebiger Parallelogramme ist gleich dem Producte aus dem Quotienten ihrer Grundlinien und dem Quotienten ihrer Höhen.

Vrs. f, g, h sind das Feld, die Grundlinie und die Höhe eines Parallelogramms, f', g', h' diejenigen eines zweiten.

Beh. Es ist: $\frac{f}{f'} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{h}{h'}$.

Bew. Die entsprechenden Stücke eines dritten Parallelogramms seien: φ, g', h; so daß es mit dem einen gegebenen Parallelogramm in der Höhe, mit dem andern in der Grundlinie übereinstimmt. Dann ist nach §. 144, Z. I:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{g}{g'},$$

$$\frac{\varphi}{f'} = \frac{h}{h'};$$

mithin durch Multiplication:

$$\frac{f}{f'} = \frac{g}{g'} \cdot \frac{h}{h'}.$$

Zusatz.

Der Quotient der Felder beliebiger Dreiecke ist gleich dem Producte aus dem Quotienten ihrer Grundlinien und dem Quotienten ihrer Höhen.

§. 146.

Definitionen.

I. Eine Größe, welche unter allen gleichartigen Größen zu dem Zweck ausgewählt ist, um dieselben mit ihr zu messen (dividiren), heißt die **Maßeinheit** oder schlechthin **Einheit**[1]) dieser Größen. — Unter der **Maßzahl** einer Größe versteht man den Quotienten, welchen sie beim Messen (Dividiren) durch die Einheit giebt. —

Bei arithmetischen Relationen erlaubt man sich, zu sagen: „**Größe** a“, anstatt: „**Maßzahl der Größe** a“. Hiernach

1) Man beachte genau den Unterschied zwischen der „Einheit“ und der „Eins“. Die „Einheit“ ist eine Größe, die „Eins“ eine Anzahl (ohne Qualität).

ist jeder Satz, welcher seinem unmittelbaren Wortlaute nach keinen Sinn giebt, zu interpretiren.[1])

II. Das Areal des Feldes eines Quadrats, dessen Seiten der (nach Willkür gewählten) Längeneinheit gleich sind, wird (nach allgemeinem Übereinkommen) als **Flächeneinheit**, oder genauer: als **Arealeinheit**, festgesetzt.

Zusätze.

I. Die Maßzahl des Feldes eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Producte der Maßzahlen seiner Grundlinie und seiner Höhe. — M. a. W.: Das Feld eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe: $f = gh$.

— Dieser Satz geht unmittelbar aus §. 145, L. hervor, wenn man dort das Parallelogramm, welches das Feld f', die Grundlinie g' und die Höhe h' hat, als ein Quadrat annimmt, dessen Seiten g' und h' beide der Längeneinheit gleich sind.

II. Die Maßzahl des Feldes eines jeden Dreiecks ist gleich dem halben Producte der Maßzahlen seiner Grundlinie und seiner Höhe. — M. a. W.: Jedes Dreiecksfeld ist gleich dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe: $f = \frac{1}{2}gh$.

— Folge von Zus. I und §. 131, Z. I.

III. Der Quotient je zweier Seiten eines einzelnen Dreiecks ist gleich dem reciproken Werth des Quotienten der Höhen, welche auf ihnen stehen. — M. a. W.: Je zwei Seiten eines einzelnen Dreiecks verhalten sich umgekehrt, wie die auf ihnen stehenden Höhen.

— Denn bezeichnet man zwei Dreiecksseiten mit a und b, die Höhen auf ihnen mit α und β, so ist nach Z. II das doppelte Dreiecksfeld $2f$ sowohl $= a\alpha$, als auch $= b\beta$, wodurch

$$a\alpha = b\beta,\ \frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}$$

hervorgeht.

Scholie.

Durch die Def. II ist eine Beziehung zwischen der Einheit der Längen und derjenigen der Areale hergestellt, welche auf bloßem Übereinkommen beruht.

---

1) Vergl. d. Lehrb. d. Arithmetik §. 45.

Es versteht sich von selbst, daß bei jedem ähnlichen Übereinkommen nur Zweckmäßigkeitsrücksichten — keine zwingenden Gründe — ins Gewicht gelegt werden können, da es an und für sich keine Größengattung etwas angeht, was man bei einer andern als Maßeinheit ansehen will. Beispielsweise sind es bloße Zweckmäßigkeitsrücksichten, daß man dasjenige Gewicht, welches ein Cubikcentimeter Wasser unter gewissen Umständen besitzt, als Gewichtseinheit (1 Gramm) festgesetzt hat; und genau eben so verhält es sich, wenn man für die Flächeneinheit das Areal eines Quadrats festsetzt, wie es in Def. II geschehen ist. Man hätte hierzu eben so gut das Areal eines Dreiecksfeldes oder eines Kreisfeldes wählen dürfen, dessen Bestimmungsstücke aus der Längeneinheit abgeleitet werden können, oder irgendwie anders verfahren, wenn man durch die Wahl der Längeneinheit auch diejenige des Areals schon bestimmt haben will. Mit demselben Recht hätte man aber auch jede ein- für allemal getroffene Verabredung hierüber unterlassen dürfen.

Die praktische Rücksicht, durch welche man sich hat leiten lassen, ist im Zus. I ausgesprochen.

Die Benennungen der Einheiten greifen auf die Def. II zurück: Man nennt die Flächeneinheit ein „Quadratmeter“, wenn als Längeneinheit ein Meter angenommen ist, ein „Quadratmillimeter“, wenn das Millimeter als Längeneinheit gilt; u. s. w.

Der Zus. I lehrt, daß

1 Quadratmeter $= 10 \cdot 10$ Quadratdecimetern,
1 Quadratdecimeter $= 10 \cdot 10$ Quadratcentimetern

ist, u. s. w., weil

1 Meter $= 10$ Decimetern,
1 Decimeter $= 10$ Centimetern

ist, u. s. w.; eben so, wie das Feld eines Parallelogramms, welches 7 Meter Grundlinie und 5 Meter Höhe besitzt, $7 \cdot 5$ Quadratmeter groß ist. Das Feld eines Dreiecks, dessen Grundlinie 9, und dessen Höhe 8 Meter beträgt, enthält nach Zus. II $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$ Quadratmeter Areal.

Die in der Arithmetik gebräuchliche Benennung „a Quadrat“ für „a^2“ stammt daher, daß nach Zus. II das Feld eines Quadrats, dessen Seiten je a Meter betragen, $= a^2$ Quadratmetern ist.

Aus dem Zus. III ersieht man, daß die Dreieckshöhe x auf einer Seite von 12 Meter Länge, wenn eine andere Seite 9 und die auf ihr stehende Höhe 20 Meter mißt, 15 Meter lang sein muß, weil

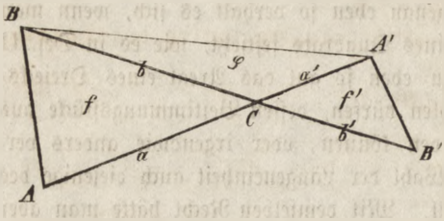
$$12 \cdot x = 9 \cdot 20, \quad x = \frac{9 \cdot 20}{12}$$

ist.

§. 147.

Lehrsatz.

Die Felder zweier Dreiecke, welche in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich, wie die Producte aus den Schenkeln[1]) dieser Winkel in den einzelnen Dreiecken.



Bew. Man lege die beiden Dreiecke so an einander, daß ihre als gleich gegebenen Winkel Scheitelwinkel bei C werden, benenne sie im Übrigen mit ABC und $A'B'C$, bezeichne $CA = a$, $CB = b$ und deren Verlängerungen beziehungsweise $CA' = a'$, $CB' = b'$, ziehe die Hülfsgrade $A'B$ und bezeichne das Feld von

$$\triangle CAB = f, \ \triangle CA'B' = f', \ CA'B = \varphi.$$

Dann ist nach §. 144, Z. II:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{a}{a'}, \ \frac{\varphi}{f'} = \frac{b}{b'},$$

das Erstere, weil man von B aus nur eine Senkrechte auf AA', das Zweite, weil man von A' aus nur eine Senkrechte auf BB' fällen kann.

Durch Multiplication dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{f}{f'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'},$$

wie behauptet wurde.

§. 148.

Definition.

Je zwei Dreiecke, welche in zwei Winkeln übereinstimmen, heißen **ähnlich**.[1]) — Das Zeichen für dieses Wort in Formeln ist: $\sim$.

Zusätze.

I. Je zwei ähnliche Dreiecke stimmen in allen Winkeln überein.

1) Hier tritt deutlich hervor, weshalb es eingeführt ist, von den Größen zu sprechen, als wenn sie Zahlen wären. (§. 146, D. I.) Will man nehmlich genau sprechen, so bedarf man einer bedeutend größeren Anzahl von Worten und wird vielleicht grade deshalb nicht so leicht verstanden.

2) Vergl. die Scholie zu §. 57.

II. Ist ein Dreieck mehreren ähnlich, so sind diese unter sich ähnlich.

III. Congruente Dreiecke sind ähnlich.

§. 149.

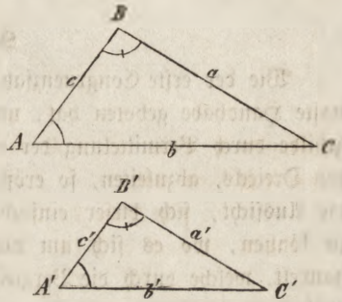
Lehrsatz.[1]

In ähnlichen Dreiecken sind die Quotienten der Gegenseiten gleicher Winkel gleich.

Vrs. In den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ ist:

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$.

Es wird $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$ bezeichnet.



Beh. Es ist: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Bew. Bezeichnet man die Felder der gegebenen Dreiecke mit f und f', so ist nach §. 147:

$$\frac{f}{f'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{c}{c'}, \text{ weil } \angle B = \angle B',$$

und:

$$\frac{f}{f'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}, \text{ weil } \angle A = \angle A' \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'},$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Zusätze.

I. Die Quotienten der gleichliegenden Seiten ähnlicher Dreiecke sind alle drei gleich:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

— Denn die dritten Winkel sind ebenfalls gleich groß.

1) Wir beziehen uns auf diesen „ersten Ähnlichkeitssatz“ durch die Bezeichnung: (2w).

II. Die Felder zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate gleichliegender Seiten:

$$\frac{f}{f'} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

— Denn, die Gleichung

$$\frac{f}{f'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{c}{c'}$$

geht in diejenige der Behauptung über, wenn man den Quotienten $\frac{c}{c'}$ durch den eben so großen $\frac{a}{a'}$ ersetzt.

Scholie.

Wie der erste Congruenzsatz mit seinen Umkehrungen bisher die wichtigste Handhabe geboten hat, um Eigenschaften der complicirteren Raumgebilde durch Vermittelung der einfachsten geschlossenen gebrochenen Linie, des Dreiecks, abzuleiten, so eröffnet der obige „erste Ähnlichkeitssatz“ ($2w$) die Aussicht, sich dieser einfachen Figur auch dort mit Erfolg bedienen zu können, wo es sich um diejenigen Eigenschaften der Raumgestalten handelt, welche durch die Vergleichung der Quotienten gleichartiger Raumgrößen ermittelt werden mögen.

Es ist deshalb — genau wie bei der Congruenz — eine Frage von hervorragender Wichtigkeit, ob und in welcher Weise dieser erste Ähnlichkeitssatz, verbunden mit seinen nächstliegenden Folgerungen (namentlich Zus. I), umgekehrt werden kann. — Hiermit werden wir uns im nächsten §. beschäftigen.

§. 150.

Die übrigen Ähnlichkeitssätze (Umkehrungen des ersten).

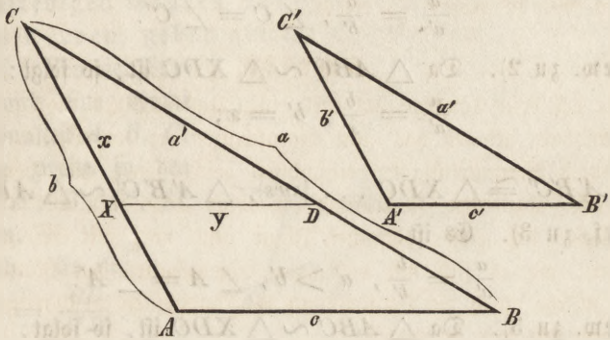
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen:

1) in den Verhältnissen (Quotienten) der drei Seitenpaare ($3s\sim$);
2) in dem Verhältnis zweier Seitenpaare und im eingeschlossenen Winkel ($sws\sim$);
3) in dem Verhältnis zweier Seitenpaare und in dem Gegenwinkel der größeren Seite des einzelnen Dreiecks ($Ssw\sim$);
4) in dem Verhältnis zweier Seitenpaare und in dem Gegenwinkel der kleineren Seite des einzelnen Dreiecks, falls die Gegenwinkel der größeren Seiten zugleich spitz oder zugleich stumpf sind ($sSw\sim$).

Wir führen den Beweis an zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$, in welchen die Seiten mit den Buchstaben a, b, c; a', b', c' bezeichnet werden sollen, wie sie den durch die Buchstaben A, B, C; A', B', C' benannten Ecken gegenüber liegen.

Bei allen vier Sätzen wird die Gleichheit der Verhältnisse von mindestens zwei Seitenpaaren vorausgesetzt; es sei stets:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$



Dann machen wir stets dieselbe Hülfsconstruction, daß wir auf CB die Strecke $CD = a'$ abtragen, durch D eine Parallele zu BA ziehen und deren Schnittpunkt mit CA durch X bezeichnen, endlich die Strecke $CX = x$ und die Strecke $DX = y$ setzen. Hierdurch wird

$$\triangle CDX \sim \triangle CBA, \; . \; . \; . \; . \; (2w)$$

weil $\angle CDX = \angle CBA$ und $\angle CXD = \angle CAB$ als Gegenwinkel bei den Parallelen DX und BA hervorgeht.

Dann bleibt uns nur noch übrig, zu beweisen, daß

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC$$

ist, um mit Hülfe von §. 148, Z. I und II zu schließen, es sei $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Der Beweis aber dafür, daß

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC$$

ist, beruht bei den einzelnen der vier Sätze auf verschiedenen Voraussetzungen.

Die einzelnen Voraussetzungen nebst den zugehörigen Beweisen sind folgende:

Vrs. zu 1). Es ist:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \text{ und } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Bew. zu 1). Da $\triangle ABC \sim \triangle XDC$ ist, so folgt:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x} \text{ und } \frac{a}{a'} = \frac{c}{y} \ \ldots \ \S.\ 149.$$

Mithin ist:

$$b' = x \quad \text{und} \quad c' = y; \ \ldots \text{ Arithm. } \S.\ 44,\ \mathrm{II},\ ^{1)}$$

daher:

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC, \ \ldots \ (3s)$$

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \quad \ldots \ \S.\ 148.$$

Vrs. zu 2). Es ist:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},\ \angle C = \angle C'.$$

Bew. zu 2). Da $\triangle ABC \sim \triangle XDC$ ist, so folgt:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x},\ b' = x;$$

mithin:

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC \ \ldots \ (sws),\ \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

Vrs. zu 3). Es ist:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},\ a' > b',\ \angle A = \angle A'.$$

Bew. zu 3). Da $\triangle ABC \sim \triangle XDC$ ist, so folgt:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x},\ b' = x;$$

mithin:

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC \ \ldots \ (Ssw),\ \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

Vrs. zu 4): Es ist:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},\ a' > b',\ \angle B = \angle B'$; $\left\{ \begin{array}{l} \angle A \text{ und } \angle A' \text{ sind beide} \\ \text{stumpf oder beide spitz.} \end{array} \right.$

Bew. zu 4). Da $\triangle ABC \sim \triangle XDC$ ist, so folgt:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{x},\ b' = x;$$

mithin:

$$\triangle A'B'C' \cong \triangle XDC \ \ldots \ (sSw),\ \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC.$$

---

1) Der hier benutzte Satz lautet: „Stimmen zwei Proportionen in drei gleichgestellten Gliedern überein, so sind auch die vierten Glieder gleich."

In unserm Falle ist $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (n. d. V.) und $\frac{a}{a'} = \frac{b}{x}$ (wie bewiesen); mithin:

$$\frac{b}{b'} = \frac{b}{x},\quad \frac{b'}{b} = \frac{x}{b},\quad b' = x.$$

— Das Analoge findet bei den zweiten Proportionen statt, wo $c' = y$ hervorgeht.

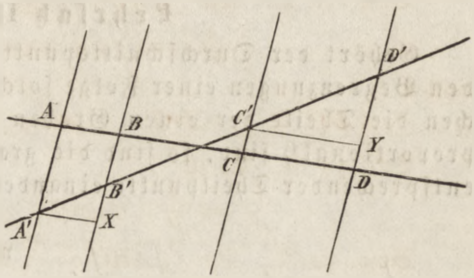
§. 151.

Definition.

Unter einer Schaar von Graden versteht man eine beliebige Anzahl grader Linien, welche in irgend welcher Beziehung zu einander stehen.

Lehrsatz I.

Die einander entsprechenden Abschnitte, welche auf zwei beliebigen Graden durch eine Schaar von Parallelen gebildet werden, geben gleiche Quotienten.



Vrs. Von vier Parallelen wird eine Grade in den Punkten A, B, C, D, eine zweite in den Punkten A', B', C', D' geschnitten.

Beh. Es ist:
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Bew. Zu AD ziehe man durch A' und C' Parallelen, welche beziehungsweise BB' in X und DD' in Y schneiden. Dann ist:
$$\triangle A'B'X \sim \triangle C'D'Y \; .\;.\;.\;. \; (2w);$$
mithin:
$$\frac{A'X}{A'B'} = \frac{C'Y}{C'D'}.$$
Ferner ist in den Parallelogrammen $ABXA'$ und $CDYC'$:
$$A'X = AB, \; C'Y = CD;$$
mithin:
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

Ist im Gegensatz zu unserer bisherigen Annahme $AD \mp A'D'$, so bleibt die letzte Gleichung bestehen, weil dann $AB = A'B'$ und $CD = C'D'$ ist (als Gegenseiten in Parallelogrammen).

Scholie.

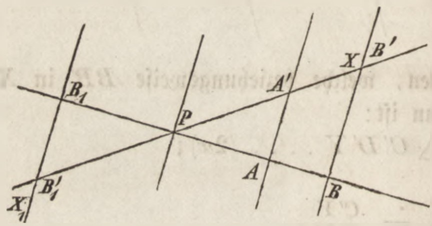
Verschiebt man in der obigen Figur die Parallelen in der Weise, daß sie ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben, so verändern die Quotienten der von ihnen auf den festen Graden AD und $A'D'$ abgeschnittenen Strecken, wie bewiesen ist, ihren Werth nicht, mag man die Parallelen im Übrigen verlegen, wohin man will. Selbstverständlich dürfen hierbei zwei Parallelen auf einander gelangen, ihre Folge vertauschen, u. s. w.

Geht eine von den Parallelen durch den Durchschnittspunkt von AD und $A'D'$, so kann man sie durch diesen Punkt allein vertreten lassen. Dann entstehen Sätze über die Theilung von zwei Dreiecksseiten durch eine Parallele zur dritten, welche aber nichts Neues enthalten, wenn man sich die von jener Ecke ersetzte Parallele hinzudenkt.

Allgemein umkehren läßt sich unser Satz nicht, sondern nur in dem Falle, welcher im nächsten Lehrsatz besprochen wird.

Lehrsatz II.

Gehört der Durchschnittspunkt zweier Graden mit zu den Begrenzungen einer Folge solcher Abschnitte, von welchen die Theile der einen Graden denjenigen der andern proportional[1]) sind, so sind die graden Verbindungslinien entsprechender Theilpunkte einander parallel.



Vrs. Auf zwei Graden, welche sich in P schneiden, ist:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'}.$$

Beh. Es ist $AA' \# BB'$.

Bew. Man ziehe durch P eine Parallele zu AA' und eine zweite durch B, welche AA' in X schneide. Dann ist:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PX} \; \ldots\ldots \text{L. I.}$$

Dies giebt durch Vergleichung mit der Voraussetzung:

$$PX = PB',$$

so daß BB' sich nicht von der Graden BX unterscheidet, welche mit AA' parallel ist.

Zusatz.

Dreht man die Grade PAB um den Punkt P, indem man den Punkt A auf einer Graden AA' gleiten und das Verhältnis $PA : AB$ unverändert läßt, so beschreibt der Punkt B eine Parallele zu AA'.

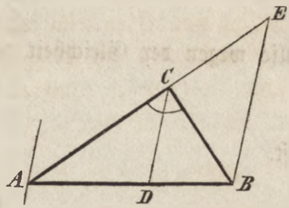
1) Vier Größen heißen proportional, wenn sie eine Proportion geben. (Arithm. §. 41.)

§. 152.

Lehrsatz I.

Die Halbierungslinie eines Dreieckswinkels theilt dessen Gegenseite so, daß ihre Abschnitte sich verhalten, wie die anstoßenden Dreiecksseiten.

Vrs. Im $\triangle ABC$ wird die Seite AB von der Halbierungslinie des $\angle ACB$ in D getroffen.



Beh. Es ist: $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$.

Bew. Man ziehe zur Graden CD durch die beiden andern Ecken A und B die Parallelen, von denen die durch B gezogene sich mit AC in einem Punkte E trifft. Dann ist:

$$(1) \quad \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CE} \; \ldots\ldots \; \text{§. 151, L. I.}$$

Ferner ist bei den Parallelen CD und EB:

$$\angle CEB = \angle ACD,$$
$$\angle CBE = \angle BCD;$$

folglich, weil $\angle ACD = \angle BCD$ ist, auch:

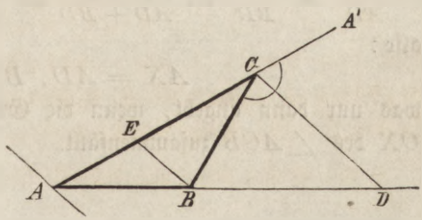
$$\angle CEB = \angle CBE,$$
$$CB = CE.$$

Setzt man aber in (1) CB für CE, was hiernach angeht, so geht die Gl. (1) in diejenige über, welche bewiesen werden sollte.

Lehrsatz II.

Wird die Verlängerung einer Dreiecksseite von der Halbierungslinie des Außenwinkels an der Gegenecke getroffen, so verhalten sich auf ihr die Abstände des Schnittpunktes von den Ecken, wie die anstoßenden Dreiecksseiten.

Vrs. Im $\triangle ABC$ wird die Verlängerung der Seite AB über B hinaus in D von der Halbierungslinie des Außenwinkels BCA' getroffen.



Beh. Es ist: $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$.

Bew. Durch die Ecken

A und B ziehe man die Parallelen zu CD; die durch B gezogene treffe sich mit AC in E. Dann ist:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CE}.$$

In dieser Proportion darf man aber CE durch CB ersetzen, weil bei den Parallelen CD und EB:

$$\angle CEB = \angle A'CD,$$
$$\angle CBE = \angle BCD,$$

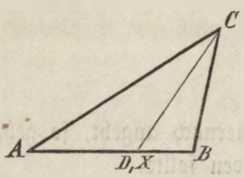
also wegen der Gleichheit der rechts genannten Winkel

$$\angle CEB = \angle CBE,$$
$$CB = CE$$

ist.

Lehrsatz III.

Ist auf einer Dreiecksseite ein Punkt von solcher Lage gegeben, daß seine Abstände von den beiden Ecken sich verhalten, wie die anstoßenden Dreiecksseiten, so halbiert seine Verbindungslinie mit der dritten Ecke den Dreieckswinkel an derselben.



Vrs. Auf der Seite AB des $\triangle ABC$ liegt ein Punkt D so, daß

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

ist.

Beh. Es ist $\angle DCA = \angle DCB$.

Bew. Halbiert man den $\angle ACB$ durch eine Grade CX, so ist:

$$\frac{AX}{AC} = \frac{BX}{BC} \quad \ldots\ldots \text{L. I.}$$

Dividirt man diese Gleichung durch die gegebene, so folgt:

$$\frac{AX}{AD} = \frac{BX}{BD}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{AX}{AD} = \frac{BX}{BD} = \frac{AX+BX}{AD+BD} = \frac{AB}{AB} = 1 \ldots \text{Arithm. §. 43,}$$

also:

$$AX = AD, \quad BX = BD,$$

was nur dann angeht, wenn die Grade CD mit der Halbierungslinie CX des $\angle ACB$ zusammenfällt.

Lehrsatz IV.

Ist auf der Verlängerung einer Dreiecksseite ein Punkt von solcher Lage gegeben, daß seine Abstände von den beiden Ecken sich verhalten, wie die anstoßenden Dreiecksseiten, so halbiert seine Verbindungslinie mit der dritten Ecke den Außenwinkel an derselben.

— Der Bew. ist ganz analog demjenigen zu L. III, nur daß die Gleichungen $AX = AD$, $BX = BD$ durch die folgende Schlußreihe erhalten werden:

$$\frac{AX}{AD} = \frac{BX}{BD} = \frac{AX - BX}{AD - BD} = \frac{AB}{AB} = 1.$$

Scholie.

Was den Lehrs. II angeht, so schneidet die Halbierungslinie des Außenwinkels bei C sich in dem Falle nicht mit der Graden AB, wenn $AC = BC$ ist; denn dann steht die Halbierungslinie des Dreieckswinkels bei C nicht nur auf ihr, sondern auch auf AB senkrecht, wie von früher her bekannt ist.

Die Nothwendigkeit der Ausnahme geht aber auch aus L. II selbst hervor, weil

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DB + AB}{DB} = 1 + \frac{AB}{DB}$$

nothwendig von 1 verschieden ist.

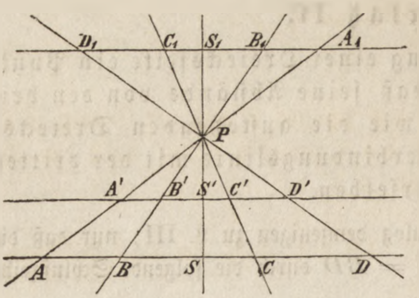
§. 153.

Definition.

Unter einem Büschel versteht man eine Schaar von solchen Graden, welche sämmtlich durch einen Punkt hindurchgehen; der letztere heißt der Scheitel des Büschels.

Lehrsatz I.

Die einander entsprechenden Abschnitte, welche auf zwei Parallelen durch ein Büschel gebildet werden, geben gleiche Quotienten; und zwar ist der Werth der letzteren gleich dem Quotienten der Abstände der Parallelen vom Scheitel des Büschels.



Vrs. P ist der Scheitel eines Büschels, von welchem zwei parallele Graden geschnitten werden, die eine in den Punkten: A, B, C, D, S, die andere in den entsprechenden Punkten: A', B', C', D', S'. Der Strahl PSS' steht auf den Parallelen senkrecht.

Beh. Es ist: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{PS}{PS'}$.

Bew. Es ist: $\triangle PAB \sim \triangle PA'B'$; . . . (2w)

daher:
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{PA}{PA'}.$$

Ferner ist: $\triangle PAS \sim \triangle PA'S'$, . . . (2w)

daher:
$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PS}{PS'}.$$

Mithin ist:
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{PS}{PS'}.$$

Da die Strecken AB und $A'B'$ zwischen zwei beliebig gewählten Graden des Büschels liegen, so gilt der Satz für je zwei entsprechende Abschnitte der Parallelen, also auch in der Form:
$$\frac{PS}{PS'} = \frac{CD}{CD'},$$
u. s. w.

Anm. Liegt der Punkt P zwischen den Parallelen AD und A_1D_1, so ändert sich in Behauptung und Beweis weiter Nichts, als daß man für die obige Figur die Accente an den Buchstaben durch untere Indices zu ersetzen hat.

Lehrsatz II.*

Werden zwei parallele Strecken (einzeln, oder beide) in denjenigen Graden verschoben, in denen sie liegen, so beschreibt der Schnittpunkt der graden Verbindungslinien ihrer Endpunkte, falls er sich ebenfalls bewegt, eine Parallele zu den gegebenen Parallelen.

Bew. Sind AB und $A'B'$ die gegebenen parallelen Strecken, so ist, wenn man die Zahl
$$\frac{AB}{A'B'} = n$$
bezeichnet, nach L. I:

$$n = \frac{PS}{PS'} = \frac{SS' + PS'}{PS'} = \frac{SS'}{PS'} + 1,$$

$$PS' = \frac{SS'}{n-1}.$$

Mithin ist der Abstand PS' des Punktes P von der Graden $A'B'$ völlig bestimmt durch den Werth des Quotienten n und durch den Abstand SS' der Parallelen AB und $A'B'$ von einander, ohne daß der Ort der Punkte A, B, A', B' weiter in Frage käme.

Ebenso verhält es sich, wenn AB und A_1B_1 die gegebenen parallelen Strecken sind; nur daß dann

$$n = \frac{PS}{PS_1} = \frac{SS_1 - PS_1}{PS_1} = \frac{SS_1}{PS_1} - 1,$$

$$PS_1 = \frac{SS_1}{n+1}$$

ist.

Lehrsatz III.

Werden zwei Parallelen von einer Schaar von Graden so geschnitten, daß je zwei[1]) einander entsprechende Abschnitte der Parallelen gleiche Quotienten geben, so bilden die Graden der Schaar stets ein Büschel oder eine Folge von Parallelen; das Letztere jedoch nur dann, wenn die fraglichen Abschnitte die Eins zum Quotienten haben und auf den beiden Parallelen in einerlei Richtung liegen.

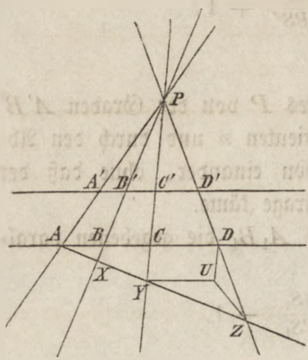
Bew. Die letzte Behauptung ist ohne Weiteres klar; die erste wird dadurch erhärtet, daß man vom Schnittpunkte zweier Strahlen eine Grade durch den nächsten Theilpunkt auf einer der gegebenen Parallelen zieht und die Identität seines Schnittpunktes auf der zweiten Parallelen mit dem gegebenen Theilpunkte derselben nachweist — ähnlich, wie in §. 153.

Lehrsatz IV.

Schneidet ein Büschel auf zwei graden Linien zwei entsprechende Paare proportionaler Abschnitte ab, so sind die beiden Graden parallel.

---

1) Wollte man in der Voraussetzung die Anforderung fallen lassen, daß je zwei entsprechende Abschnitte denselben Quotienten geben, so würde sich nur behaupten lassen, daß die Schnittpunkte derjenigen Graden der Schaar, welche auf den Parallelen proportionale und gleichgerichtete Theile abschneiden, gleiche Abstände von jenen haben.



Vrs. Von einem Büschel, welches seinen Scheitel in P hat, wird eine Grade in den Punkten A, B, C, D und eine zweite Grade in den entsprechenden Punkten A', B', C', D' so geschnitten, daß

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

ist.

Beh. Es ist $AD \mathrel{\#} A'D'$.

Bew. Giebt man zu, die Behauptung sei falsch, so kann man jedenfalls durch A oder durch D eine Parallele zu $A'D'$ ziehen, deren Schnittpunkte mit den mittleren Strahlen weiter von P entfernt liegen, als B und C. Es sei A der Name desjenigen unter den beiden fraglichen Punkten, bei dem dies geschieht. Dann schneidet sich die Parallele zu $A'D'$ mit PB, PC, PD in Punkten X, Y, Z so, daß

$$\frac{A'B'}{AX} = \frac{C'D'}{YZ} \quad \ldots \text{L. I}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit der gegebenen, so erhält man:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{CD}{YZ};$$

dies ist, nachdem man das $\#$ $YCDU$ construirt hat:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{YU}{YZ}.$$

Da dann ferner $\angle BAX = \angle UYZ$, als Gegenwinkel bei den Parallelen AD und YU, ist, so folgt:

$$\triangle BAX \sim \triangle UYZ, \quad \ldots \text{(sws} \sim\text{)}$$

$$\angle AXB = \angle YZU, \quad XB \mathrel{\#} ZU.$$

Das Letztere ist aber nicht möglich, weil der Punkt U im Winkelfelde XZP liegt, so daß sich die Graden ZU und XBP jedenfalls zwischen X und P schneiden.

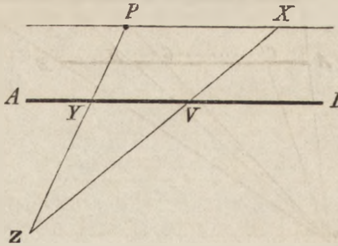
Mithin muß AD die durch A hindurchgehende Parallele zu $A'D'$ sein; was zu beweisen war.

§. 154.

Aufgaben.

I. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Graden eine Parallele zu ziehen.

Anal. Es sei AB die gegebene Grade, P der gegebene Punkt, PX die verlangte Parallele zu AB. Zieht man nun von P aus eine beliebig lange Grade PZ, welche sich mit AB in Y schneide, und die Grade ZX, welche sich mit AB in V schneide, so ist



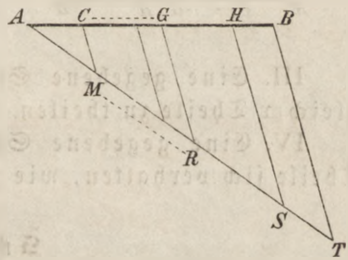
$$\frac{ZY}{YP} = \frac{ZV}{VX}; \ldots \text{§. } 151,$$

und umgekehrt geht $PX \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} AB$ hervor, wenn diese Gleichung erfüllt wird (§. 152).

Anm. Die in §. 99, IV gegebene Analysis behandelt einen besondern Fall der hier angezeigten Constructionsmethode, und zwar denjenigen, welchen man seiner großen Bequemlichkeit wegen meistens wählen wird.

II. Eine gegebene Strecke so einzutheilen, daß ihre Theile sich verhalten, wie beliebig gegebene Strecken.

Anal. I. Die Sätze §. 151 und §. 152 über eine Schaar von Parallelen geben eine Lösung an die Hand.



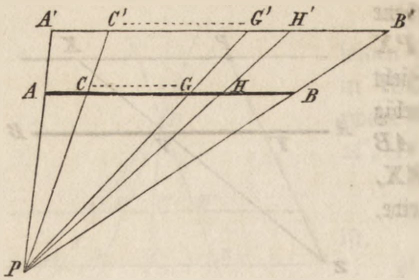
Es seien nehmlich $AC, \ldots, GH, HB$ die verlangten Theile der gegebenen Strecke AB, und auf einer zweiten von A ausgehenden Graden seien $AM, \ldots, RS, ST$ den gegebenen Strecken gleich, so daß

$$\frac{AC}{AM} = \ldots = \frac{GH}{RS} = \frac{HB}{ST}$$

ist. Dann hat man nach §. 152:

$$CM \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} \ldots \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} GR \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} HS \mathrel{+\!\!\!\!\!\parallel} BT.$$

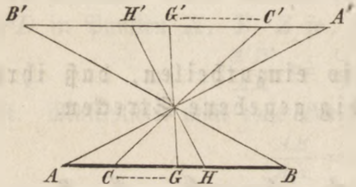
Und umgekehrt: nachdem die gegebenen Strecken, welchen die Theile von AB proportional sein sollen, auf einer beliebigen durch A gezogenen Graden in der Folge $AM, \ldots, RS, ST$ abgetragen sind, wird AB nach §. 151 durch diejenigen Parallelen zu BT, welche durch $M, \ldots, R, S$ gehen, proportional mit jenen getheilt.



Anal. II. Es seien AC, ..., GH, HB die verlangten Theile der gegebenen Strecke AB, und auf einer parallelen Graden seien $A'C'$, ..., $G'H'$, $H'B'$ diejenigen gegebenen Strecken, welchen jene proportional sind, also:

$$\frac{AC}{A'C'} = \ldots = \frac{GH}{G'H'} = \frac{HB}{H'B'}.$$

Dann schneiden sich die Graden AA', CC', ..., GG', HH', BB' nach §. 153, L. III in demselben Punkte P, falls sie nicht sämmtlich einander parallel ausfallen. Da das Letztere aber nur eintreten kann, wenn zufällig $AB = A'B'$ ist, und auch in diesem Falle dadurch vermieden wird, daß man die Strecken auf $A'B'$ in der umgekehrten Folge aufträgt, als in welcher die analogen Theile auf AB liegen sollen, so läßt sich stets ein Büschel schaffen, welches die Aufgabe löst. — Am zweckmäßigsten wird man daher den Scheitel desselben zwischen die Parallelen AB und $A'B'$ legen, wie es die hierneben stehende Figur zeigt



III. Eine gegebene Strecke in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

IV. Eine gegebene Strecke so zu theilen, daß ihre Theile sich verhalten, wie gegebene Zahlen.

Scholie.

Um sich beim Zeichnen die Eintheilung von Strecken in eine beliebige Anzahl gleicher Theile möglichst bequem zu machen, verfährt man mit Nutzen in der Weise, daß man sich von vornherein einen sogenannten „verjüngten Maßstab“ construirt, d. i. eine Figur, welche in ihrer einfachsten Gestalt aus einer Parallelenschaar und einem dieselbe schneidenden Büschel besteht. Hat man dafür gesorgt, daß auf der einen Parallelen lauter gleiche Abschnitte liegen, so gilt dies nach §. 153, L. I auch von jeder andern; und haben die Parallelen außerdem gleiche Entfernungen von einander, so sind nach §. 151 auch die Theile der einzelnen Strahlen des Büschels gleich.

§. 155.

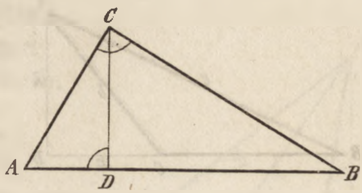
Definition.

Ist $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, ($a : x = x : b$, $x^2 = ab$), so heißt x die **mittlere Proportionale** zwischen a und b.

Lehrsatz I.

Jede Kathete eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection auf der Hypotenuse und der Hypotenuse.[1]

Vrs. In dem bei C rechtwinkligen $\triangle ABC$ ist $CD \perp AB$ gefällt.



Beh. Es ist:

$AD : AC = AC : AB$.

Bew. Es ist:

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$ . . . (2w),

weil $\angle ADC = \angle ACB$ ($= \mathcal{R}$)

und $\angle ACD = ABC$ (als Complemente des $\angle A$). Hieraus folgt die behauptete Proportion.

Zusatz. (Der Pythagoreische Satz in arithmetischer Form.)

Die Summe der Kathetenquadrate eines jeden rechtwinkligen Dreiecks ist dem Hypotenusenquadrat gleich.

Bew. Wie so eben bewiesen, ist:

$$AC^2 = AB \cdot AD,^{2)}$$
$$BC^2 = AB \cdot BD;$$

mithin:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Lehrsatz II.

Die auf der Hypotenuse stehende Höhe eines jeden rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.[3]

Vrs., wie zu Lehrs. I.

Beh. Es ist $AD : CD = CD : BD$.

Bew. Dies ist richtig, weil

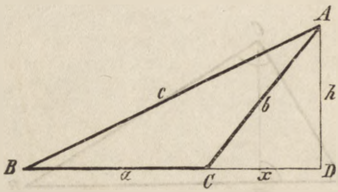
$$\triangle ADC \sim \triangle CDB \ . \ . \ . \ (2w).$$

1) Vergl. §. 136.
2) Vergl. §. 146, D. I.
3) Vergl. §. 137.

§. 156.

Der „erweiterte Pythagoreische Lehrsatz".

In jedem beliebigen Dreieck wird das Quadrat einer Seite erhalten, wenn man die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten um das doppelte Product aus einer von ihnen und ihrer Projection auf der zweiten vermehrt oder vermindert, je nachdem sie einen stumpfen oder einen spitzen Winkel einschließen.



Vrs. zu I. Das $\triangle ABC$ ist bei C stumpfwinklig. CD ist die Projection von CA auf CB. Die Maßzahlen der Strecken BC, CA, AB, CD, AD werden beziehungsweise durch a, b, c, x, h bezeichnet.

Beh. zu I. Es ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ax.$$

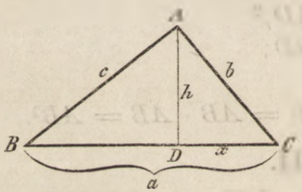
Bew. zu I. Im rechtwinkligen $\triangle ADB$ ist nach §. 155 II:

$$c^2 = (a + x)^2 + h^2,$$
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + h^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung aus dem rechtwinkligen $\triangle ADC$:

$$x^2 + h^2 = b^2,$$

so folgt die Gleichung: $c^2 = a^2 + 2ax + b^2$.



Vrs. zu II. Das $\triangle ABC$ ist bei C spitzwinklig. Alles Übrige bleibe, wie in der Vrs. zu I.

Beh. zu II. Es ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax.$$

Bew. zu II. Durch Anwendung derselben Sätze, wie in dem Beweise zu I, folgt:

$$c^2 = (a - x)^2 + h^2$$
$$= a^2 - 2ax + x^2 + h^2,$$
$$x^2 + h^2 = b^2,$$
$$c^2 = a^2 - 2ax + b^2.$$

Hierbei ist zu beachten, daß in dem Falle, in welchem D auf der Richtung CB über B hinaus fällt, zwar $c^2 = (x - a)^2 + h^2$ wird, daß dies aber für das Endresultat keinen Unterschied ausmacht, weil

$$(x - a)^2 = (a - x)^2$$

ist.

§. 157.

Definition.

Diejenige Grade, welche von einer Dreiecksecke zur Mitte der Gegenseite führt, heißt die **Mittellinie** dieser Seite.

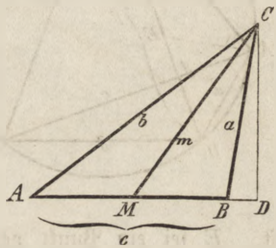
Lehrsatz.

Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist doppelt so groß als die Summe der Quadrate der halben dritten Seite und ihrer Mittellinie.

Vrs. Im $\triangle ABC$ ist CM die Mittellinie der Seite AB. Es werde bezeichnet $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CM = m$.

Beh. Es ist

$$a^2 + b^2 = 2\left\{ m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right\}.$$



Bew. Steht CM nicht senkrecht auf AB, so sei $MD = x$ die Projection der Mittellinie MC auf AB. Da dann das eine unter den Dreiecken CMA und CMB bei M einen stumpfen, das andere aber bei M einen spitzen Winkel hat, so ergiebt sich, indem wir das $\triangle AMC$ als stumpfwinklig annehmen, nach §. 156:

$$b^2 = m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x,$$

$$a^2 = m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x.$$

Hieraus geht durch Addition der Gleichungen hervor, was behauptet wurde.

Zusätze.

I. Ist um den Mittelpunkt einer Strecke mit beliebigem Radius ein Kreis gezogen, so hat die Summe der Quadrate der Abstände eines jeden seiner Punkte von den Endpunkten der Strecke denselben Werth.

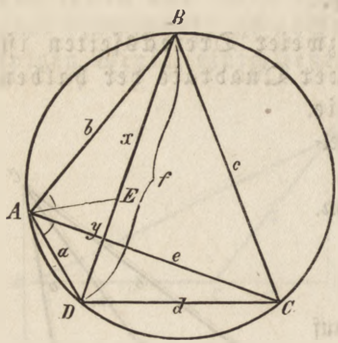
— Denn nach dem Obigen hängt $(a^2 + b^2)$ nicht von der Richtung der Strecke m ab, sondern bloß von der Größe der Strecken m und c.

II. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

§. 158.

Lehrsatz I. (Der Ptolemäische[1] Lehrsatz.)

Im unüberschlagenen Kreissehnenviereck ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte je zweier Gegenseiten.



Vrs. Es ist ein unüberschlagenes Kreissehnenviereck $ABCD$ mit seinen Diagonalen AC und BD gegeben. Wir nennen $DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $AC = e$, $BD = f$.

Beh. Es ist:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d.$$

Bew. Wir tragen in dem Vierecksfelde bei einer Ecke A an eine Seite AB einen Winkel BAE an, welcher dem von der andern Seite und der Diagonale gebildeten $\angle DAC$ gleich ist. E sei ein Punkt von BD; und es werde $BE = x$, $DE = y$ genannt.

Nun hat man:

$$\triangle BAE \sim \triangle CAD \ . \ . \ . \ (2w),$$

weil nicht nur $\angle BAE = \angle CAD$ nach der Constr., sondern auch $\angle ABE = \angle ACD$ als Peripheriewinkel auf AD; mithin:

$$\frac{x}{d} = \frac{b}{e}, \quad ex = bd.$$

Ferner hat man:

$$\triangle DAE \sim \triangle CAB \ . \ . \ . \ (2w),$$

weil 1) $\angle DAE = \angle CAB$ als Differenzen des $\angle DAB$ mit den gleichen Winkeln BAE und CAD, und 2) $\angle ADE = \angle ACB$ als Peripheriewinkel auf AB ist; mithin:

$$\frac{y}{c} = \frac{a}{e}, \quad ey = ac.$$

Summirt man aber die beiden Gleichungen

$$ex = bd,$$
$$ey = ac,$$

so folgt:

$$e(x + y) = ac + bd,$$
$$ef = ac + bd.$$

1) Ptolemäus lebte zu Alexandrien in der ersten Hälfte des zweiten Jahrhunderts n. Chr.

Zusatz.

Ist das Kreissehnenviereck ein Rechteck, so folgt:

$$f^2 = a^2 + b^2,$$

d. i. der Pythagoreische Satz vom rechtwinkligen Dreieck.

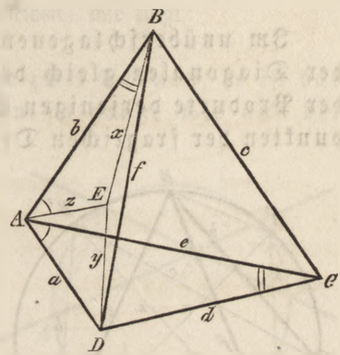
Lehrsatz II.

Ist in einem Viereck das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der Gegenseitenpaare, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Vrs. Beim Viereck $ABCD$, in welchem $DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $AC = e$, $BD = f$ gesetzt ist, besteht die Gleichung:

$$ef = ac + bd.$$

Beh. Um das Viereck läßt sich ein Kreis beschreiben.



Bew. Im Felde des Vierecks construire man ein $\triangle ABE$ so, daß

$$\angle BAE = \angle CAD,$$
$$\angle ABE = \angle ACD$$

ist. Dann ist:

$$\triangle BAE \sim \triangle CAD \ \ldots \ (2w),$$

mithin u. A., wenn man $AE = z$ bezeichnet:

$$\frac{b}{e} = \frac{z}{a}.$$

Aus dieser Proportion in Verbindung mit

$$\angle DAE = \angle DAB - \angle BAE = \angle DAB - \angle CAD = \angle CAB$$

folgt aber weiter:

$$\triangle DAE \sim \triangle CAB \ \ldots \ (sws \sim),$$

wenn man noch die Grade DE gezogen hat. Bezeichnet man diese mit y, so ergiebt sich aber ferner

aus $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ die Gleichung: $\frac{x}{d} = \frac{b}{e}$,

„ $\triangle DAE \sim \triangle CAB$ „ „ $\frac{y}{c} = \frac{a}{e}$;

d. i.:

$$ex = bd,$$
$$ey = ac,$$
$$e(x + y) = ac + bd.$$

Vergleicht man dies mit der gegebenen Gl.:

$$ef = ac + bd,$$

so folgt:

$$x + y = f,$$

was nur möglich ist, wenn E in BD liegt.

Da dann aber

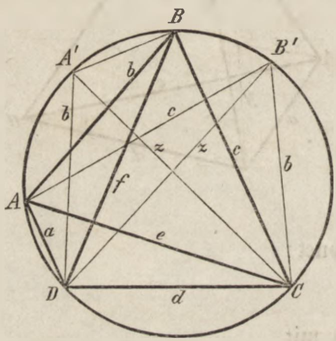
$$\angle ABD = \angle ABE = \angle ACD$$

ist, so geht der um das $\triangle ABD$ beschriebene Kreis auch durch den Punkt C (§. 114, Z. II).

§. 159.

Lehrsatz.

Im unüberschlagenen Sehnenviereck ist der Quotient der Diagonalen gleich dem Quotienten aus den Summen der Producte derjenigen Seitenpaare, welche von den Endpunkten der fraglichen Diagonalen ausgehen.



Vrs. Es ist ein unüberschlagenes Sehnenviereck $ABCD$ gegeben, in welchem $DA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $AC = e$, $BD = f$ bezeichnet ist.

Beh. Es ist: $\frac{e}{f} = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot d + c \cdot b}$.

Bew. Bestimmt man auf dem Bogen ABC einen Punkt B' so, daß der Theil $AB' = CB$, $CB' = AB$ wird, so ist:

$$\text{Sehne } AB' = BC = c,\; CB' = AB = b \;\ldots\; (\text{§. 106, L.})$$

Bezeichnet man ferner die Grade $DB' = z$, so ist im Viereck $AB'CD$:

$$e \cdot z = a \cdot b + c \cdot d \;\ldots\; (\text{§. 158, L. I}).$$

Construirt man ferner in analoger Weise ein Sehnenviereck $BCDA'$ so, daß

$$\text{Sehne } DA' = AB = b,\; BA' = DA = a$$

ist, so geht, weil Bogen $CDA' = DCB'$ geworden ist, hervor:

$$\text{Sehne } CA' = DB' = z;$$

und es folgt aus dem Viereck $A'BCD$:

$$f \cdot z = a \cdot d + c \cdot b \;\ldots\; (\text{§. 158, L. I}).$$

Aus den beiden erhaltenen Gleichungen ergiebt sich aber durch Division das, was behauptet ist.

§. 160.

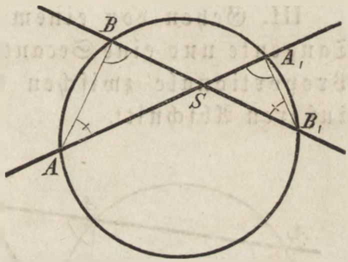
Lehrsatz.

Auf allen Graden eines Büschels ist das Product der Entfernungen[1] seines Scheitels von den beiden Durchschnittspunkten mit einem Kreise gleich groß.

Liegt der Scheitel des Büschels auf dem Kreise, so ist auf jedem Strahl des Büschels mindestens die eine Entfernung des Scheitels vom Kreise $= 0$; mithin sind in diesem Falle die fraglichen Producte sämmtlich gleich, weil sie sämmtlich $= 0$ sind.

Liegt aber der Scheitel des Büschels im Kreisfelde oder außerhalb desselben, so lassen sich diese Fälle unterscheiden, wie folgt:

I. Schneiden sich im Kreisfelde zwei Sehnen, so ist das Product der Theile auf der einen so groß, wie auf der andern.



Vrs. Zwei Sehnen AA_1 und BB_1 schneiden sich innerhalb des Kreisfeldes in S.

Beh. Es ist:
$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1.$$

Bew. Man ziehe die Sehnen AB und A_1B_1. Dann ist:

$\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$, . . . (2w)

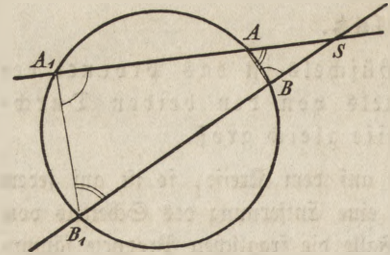
weil $\angle B = \angle A_1$ als Peripheriewinkel auf dem Bogen AB_1,
und $\angle A = \angle B_1$ „ „ „ „ „ BA_1 ist.

Mithin ist:
$$SA : SB_1 = SB : SA_1, \quad \ldots \text{§. } 149,$$
$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1.$$

II. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreisfeldes aus zwei Secanten an den Kreis, so ist das Product aus der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitt auf der einen so groß, wie auf der andern.

---

1) Vergl. §. 146, D. I. — Man kann hierfür auch sagen: das Feld des Rechtecks aus den Entfernungen u. s. w.



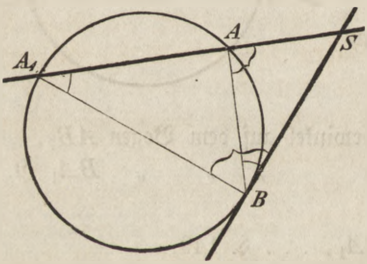
Vrs. An einen Kreis gehen vom Punkte S außerhalb des Kreisfeldes aus zwei Secanten SAA_1 und SBB_1.

Beh. Es ist:
$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1.$$

Bew. Man ziehe die Sehnen AB und A_1B_1. Dann ist:
$$\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1, \ldots (2w)$$
weil $\angle SBA = \angle SA_1B_1$, als Supplemente von $\angle ABB_1$ (§. 113, Z. III), und $\angle SAB = \angle SB_1A_1$, „ „ „ $\angle BAA_1$ (§. 113, Z. III).

Mithin ist:
$$SA : SB_1 = SB : SA_1, \ldots \text{§. } 149,$$
$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1.$$

III. Gehen von einem Punkte aus an einen Kreis eine Tangente und eine Secante, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitt.



Vrs. An einen Kreis gehen von S aus eine Secante SAA_1 und eine Tangente SB.

Beh. Es ist:
$$SA : SB = SB : SA_1,$$
$$SA \cdot SA_1 = SB^2.$$

Bew. Der Beweis ist unter Nr. II schon mitgeführt, weil die Tangente SB nichts Anderes ist, als eine Secante, welche ihrem äußeren Abschnitte gleichkommt. — Die Punkte B und B_1 sind zusammengefallen.

Will man aber hierauf nicht zurückgehen, so ziehe man die Sehnen AB und A_1B. Dann ist:
$$\triangle ASB \sim \triangle A_1SB, \ldots (2w)$$
weil $\angle SBA = \angle SA_1B \ldots$ (§. 113, Z. II), $\angle ASB = \angle BSA_1$ ist.

Da dann auch $\angle SAB = \angle SBA_1$ hervorgeht, so ist:
$$SA : SB = SB : SA_1 \ldots \text{§. } 149.$$

Zusatz.

Wird eine Kreissehne von einer anderen halbiert, so ist die Hälfte der ersteren die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der letzteren.

Definition.

Das Product der Entfernungen eines Punktes von den beiden Schnittpunkten einer durch ihn gelegten Graden mit einem Kreise heißt die **Potenz**[1]) jenes Punktes für diesen Kreis, oder auch des Kreises für den Punkt.

§. 161.

Lehrsatz.

Haben auf zwei sich schneidenden Graden je zwei Punkte eine solche Lage, daß das Product ihrer Abstände vom Schnittpunkt auf der einen Graden so groß ist, wie auf der andern, und daß der Schnittpunkt auf beiden Graden entweder die Punktpaare trennt, oder dies auf beiden nicht thut; so läßt sich durch die fraglichen vier Punkte ein Kreis legen.

— Denn legt man, wenn $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1$ gegeben ist[2]), durch A, B und A_1 einen Kreis, so schneidet dieser die Grade SB noch in einem Punkte X, für welchen nach §. 160 die Gleichung $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SX$ gilt. Daraus folgt: $SX = SB_1$, so daß B_1 und X die Namen eines einzigen Punktes sind, wenn, wie vorausgesetzt wird, SB_1 die zu fordernde Richtung hat.

Scholie.

Hat man auf mehr als zwei Graden eines Büschels je zwei Punkte, welche die in obigem Lehrsatz verlangten Bedingungen erfüllen, so kann man nicht behaupten, daß ein einziger Kreis durch die sämmtlichen Punkte hindurchgehe. Der Lehrsatz des §. 160 ist also nur in beschränkter Weise umkehrbar.

---

1) Dieser Name ist im Jahre 1826 von Steiner, einem bedeutenden Mathematiker Berlins, eingeführt. Die Unabhängigkeit der Potenz von der Lage der schneidenden Graden war schon den Alten bekannt.

2) Vergl. die Figuren zu §. 160.

Man überzeugt sich hiervon sogleich, wenn man in irgend einer Figur des §. 160 von S aus eine Grade zieht, welche sich mit der Sehne AB in einem Punkte X schneidet, und auf SX einen Punkt Y der Bedingung $SA \cdot SA_1 = SX \cdot SY$ gemäß bestimmt denkt. Dann läßt sich durch die Punkte A, X, B, B_1, Y, A_1 kein Kreis legen, weil die drei Punkte A, X, B in einer Graden liegen (§. 102). — Übrigens darf man hieraus nicht schließen wollen, daß in diesem Falle auch B_1, Y, A_1 in einer Graden liegen, da im Gegentheil die vier Punkte A, X, Y, A_1 nach obigem Lehrsatz auf einem Kreise liegen, und ebenso auch die vier Punkte B, X, Y, B_1.

§. 162.
Aufgaben.

I. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu construiren. — M. a. W.: Eine Strecke x zu finden, welche mit den drei gegebenen Strecken a, b, c zusammen die Gleichung

$$a : b = c : x$$

erfüllt.

Anal. Sowohl in §. 151, als auch in §. 153, ist die vierte unter den Strecken AB, BC, $A'B'$, $B'C'$ auf leichte Weise construirbar, wenn dreien von ihnen bestimmte Längen a, b, c gegeben sind. Ein Gleiches gilt von den in §. 160 betrachteten Strecken SA, SA_1, SB, SB_1.

Es ergiebt sich hieraus eine nicht unbeträchtliche Anzahl von verschiedenen Constructionsmethoden (theils bloß mittelst grader Linien, theils mittelst zweier Graden und eines Kreises), welche so sehr auf der Hand liegen, daß es eine überflüssige Mühe wäre, sie hier einzeln durchzusprechen. Man beachte aber Folgendes:

Hat man von dem Punkte S aus, in welchem zwei sonst beliebig gezogene Graden sich schneiden, auf diesen die Strecken $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ in der Weise abgeschnitten, daß dieselben nicht alle drei auf einer einzigen Graden liegen, so wird stets dann ein Kreis durch die drei Punkte A, B, C erforderlich, wenn B und C auf derselben Graden liegen, im umgekehrten Falle aber stets zwei Parallelen. (Vergl. die Figuren zu §. 151, §. 153, §. 160.)

Übrigens kann man sich die unbequeme Construction eines Kreises durch drei gegebene Punkte ersparen, wenn man zunächst einen Kreis mit hinreichend großem Radius zieht und dann die Graden als Sehnen- oder Secantentheile hinzufügt.

II. Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu construiren. — M. a. W.: Eine Strecke x zu construiren, welche mit den beiden Strecken a und b zusammen die Gleichung

$$a : x = x : b$$

erfüllt.

Anal. Die Construction wird ermöglicht:

1) durch §. 155, L. I, wo man x als Kathete AC eines rechtwinkligen $\triangle ACB$ erhält, in welchem die größere der Strecken a und b als Hypotenuse AB, die kleinere aber als Projection AD von x genommen ist;
2) durch §. 155, L. II, wo man x als Höhe AD eines rechtwinkligen $\triangle ACB$ erhält, in welchem DA und DB den Strecken a und b gleich gemacht sind;
3) durch §. 160, III, wo die Tangente $SB = x$ ist, wenn SA und SA_1 den Strecken a und b gleich gemacht sind;
4) durch §. 160, Z., wo x gleich der Hälfte der halbierten Sehne ist, wenn die Theile der andern Sehne den Strecken a und b gleich sind.

— 1) und 2) lassen sich als besondere Fälle von 3) und 4) auffassen.

III. Zwei Strecken zu zeichnen, welche sich verhalten, wie die Felder zweier gegebenen Quadrate.

Anal. In §. 155 ist nach Lehrs. I bei der dortigen Figur

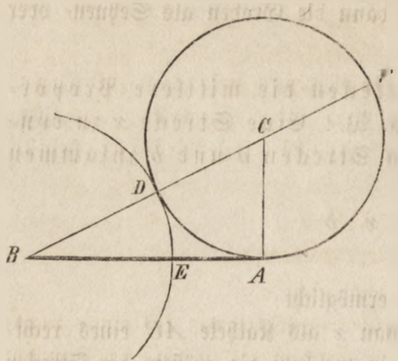
$$CA^2 : CB^2 = DA : DB.$$

IV. Zwei Strecken zu zeichnen, deren Quadrate sich verhalten, wie zwei gegebene Strecken.

— Anal., wie zu III.

V. Der „goldene Schnitt".

Eine gegebene Strecke so in zwei Theile zu theilen, daß der eine Theil die mittlere Proportionale zwischen dem andern Theil und der ganzen Strecke ist.



Constr. Soll die Strecke AB nach dem goldenen Schnitt getheilt werden, so errichte man auf ihr in dem einen Endpunkte A eine Senkrechte $AC = \frac{1}{2} AB$, schlage um C mit dem Radius CA einen Kreis, ziehe die Grade BC, welche sich mit dem letzteren zwischen B und C in D schneide, und schlage um B mit dem Radius BD einen zweiten Kreis, welcher sich mit AB in E schneide.

Beh. Es ist: $AE : BE = BE : BA$.

Bew. Benennt man durch F den zweiten Schnittpunkt der Graden BC mit dem Kreise, so ist nach §. 160, III:

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BA}{BD}.$$

Subtrahirt man 1 von beiden Seiten dieser Gleichung, so ergiebt sich:

$$\frac{BF-BA}{BA} = \frac{BA-BD}{BD},$$

d. i., weil $BA = DF$ ist:

$$\frac{BE}{BA} = \frac{AE}{BE},$$

eine Proportion, welche mit der Behauptung übereinstimmt.

Anm. Um die Construction bequem zu machen, ist der Kreis so construirt, daß sein Durchmesser $DF = AB$ ist, obgleich es nur darauf ankommt, daß der Kreis die Grade AB in A berührt und auf der von B ausgehenden Secante das Sehnenstück $= AB$ hat.

Derjenige Theil BE der Strecke AB, welcher die mittlere Proportionale zwischen AB und ihrem zweiten Theile AE ist, ist der größere.

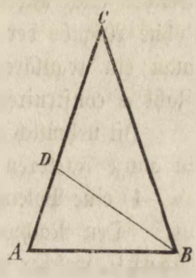
Bezeichnet man $AB = a$, $BE = x$, so ist

$$x^2 = a(a-x),$$
$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$
$$x = a \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

§. 163.

Lehrsatz.

Ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich dem größeren Theile der nach dem goldenen Schnitt getheilten gleichen Schenkel, ſo iſt der Winkel an der Spitze dem fünften Theil eines Geſtreckten gleich.



Vrſ. In dem über AB gleichſchenkligen $\triangle ABC$ iſt auf CA die Strecke $CD = AB$ und $CA : CD = CD : AD$.

Beh. Es iſt: $\angle ACB = \frac{1}{5}\mathsf{G}$.

Bew. Es iſt:

$$\triangle CAB \sim \triangle BAD, \ldots (sws\sim),$$

weil außerdem, daß ſie im $\angle A$ übereinſtimmen, nach der Vrſ.:

$$AC : AB = AB : AD$$

iſt. Hieraus folgt:

$$BA = BD = CD, \ \angle ABD = \angle ACB$$

und, wenn $\angle C = \gamma$ bezeichnet wird:

$$\angle ACB = \angle ABD = \angle CBD = \gamma, \ \angle CAB = \angle CBA = 2\gamma,$$

$$\angle ACB + \angle CBA + \angle CAB = 5\gamma = \mathsf{G},$$

$$\gamma = \tfrac{1}{5}\mathsf{G}.$$

Aufgaben.

I. In einen gegebenen Kreis ein reguläres **Zehneck** einzuzeichnen.

Anal. Da der Centriwinkel über jeder Seite des regulären Zehnecks $= \frac{1}{5}\mathsf{G}$ iſt, ſo iſt die Seite gleich dem größeren Abſchnitt des nach dem goldenen Schnitt getheilten Radius:

$$s = r \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

II. In einen gegebenen Kreis ein reguläres **Fünfeck** einzuzeichnen.

III. In einen gegebenen Kreis ein reguläres **Fünfzehneck** einzuzeichnen.

Anal. Iſt im Kreiſe um O die Sehne $AB = OA$, alſo gleich der Seite des eingeſchriebenen regulären Sechsecks, AC gleich der Seite des eingeſchriebenen regulären Zehnecks, ſo iſt:

$$\angle AOB = \tfrac{1}{3}\mathsf{G}, \ \angle AOC = \tfrac{1}{5}\mathsf{G},$$

alſo:

$$\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = \tfrac{2}{15}\mathsf{G},$$

weshalb die Sehne BC der Seite des eingeſchriebenen regulären Fünfzehnecks gleichkommt.

Scholie.

Wenn man in der elementaren Geometrie kein Postulat zulassen will, welches auch andere Linien, als die Grade und den Kreis, ohne Weiteres (ohne Angabe der Constructionsmethode) für construirbar erklärt, so kann man ein reguläres n-Eck nur unter gewissen Voraussetzungen über die Zahl n construiren.

Ist nehmlich n eine Primzahl, d. h. eine solche Zahl, welche sich nicht in ganze Factoren zerfällen läßt, so gelingt die Construction dann, wenn $(n-1)$ eine Potenz von 2 ist, also wenn $n = 3, 5, 17, 257, 65537, \ldots$ ist. (Den Nachweis der Möglichkeit dieser Constructionen verdanken wir Gauß[1]), welcher ihn im Jahre 1796 in seinen Disquisitiones arithmeticae geführt hat.) Ferner gelingt die Construction, wenn n ein Product aus einer von diesen Zahlen und einer Potenz von 2 ist, z. B. wenn $n = 6, 10, 12, \ldots$ ist, da man jeden Kreisbogen zwischen den Ecken eines schon construirten regulären Polygons durch wiederholte Halbierung von Centriwinkeln in 2, 4, 8, 16, . . . gleiche Theile theilen kann. Die ebenfalls construirbaren regulären Vierecke und Fünfzehnecke stehen außerhalb der obigen Reihen.

§. 164.

Erweiterung des Ähnlichkeitsbegriffs.

Lehrsatz.

Je zwei ähnliche Dreiecke lassen sich auf zweifache Weise in eine solche Lage bringen, daß sie auf den einzelnen Graden eines Büschels proportionale Stücke abschneiden.

— Legt man nehmlich zwei ähnliche Dreiecke so hin, wie in der Figur zu §. 153, L. I die Dreiecke PAC und $PA'C'$ oder PAC und PA_1C_1 liegen, so ist $AC \mathrel{+\!\!\!\!=} A'C'$ oder $AC \mathrel{+\!\!\!\!=} A_1C_1$; und es gilt nach §. 151 für den beliebig gezogenen Strahl PB des Büschels die Proportion

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PA}{PA'} \text{ oder } \frac{PB}{PB_1} = \frac{PA}{PA_1}.$$

Definitionen.

1. Man nennt je zwei Figuren ähnlich, welche sich in eine solche Lage zu einem Büschel bringen lassen, daß die auf

1) Geb. d. 30. April 1777 zu Braunschweig, gest. d. 23. Febr. 1855 zu Göttingen.

den einzelnen Graden des Büschels liegenden Abstände seines Scheitels von beiden Figuren gleich große Quotienten geben. — Der Werth dieser gleichen Quotienten heißt der **Ähnlichkeitsquotient** oder das **Ähnlichkeitsverhältnis** beider Figuren.

II. Liegen zwei ähnliche Figuren so, daß sie auf den Graden eines Büschels vom Scheitel desselben aus gemessene proportionale Stücke abschneiden, so nennt man ihre Lage **perspectivisch**. [1])

III. Je zwei Punkte ähnlicher Figuren, welche nach Einnahme einer perspectivischen Lage der letzteren das Ähnlichkeitsverhältnis bestimmen, heißen **entsprechende Punkte**. **Entsprechende Linien, Strecken, Winkel** u. s. w. heißen solche, welche von entsprechenden Punkten bestimmt werden.

IV. Der Scheitel eines Büschels, für welches zwei ähnliche Figuren perspectivische Lage haben, heißt ein **Ähnlichkeitspunkt** [2]) beider Figuren, und zwar ein **äußerer**, wenn in den einzelnen Strahlen die entsprechenden Punkte der Figuren auf einer und derselben Seite, ein **innerer**, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten des Ähnlichkeitspunktes liegen.

Zusatz.

Ähnliche Figuren, deren Ähnlichkeitsquotient $= 1$ ist, sind congruent.

Scholie.

Nach dieser Definition bleibt der Begriff der Ähnlichkeit nicht bloß auf Dreiecke beschränkt, sondern er wird durch dieselbe in der Weise ausgedehnt, daß man eine beliebige Anzahl von Figuren zeichnen kann, welche einer gegebenen Figur ähnlich sind, wie die letztere auch beschaffen sein mag.

Der Begriff der geometrischen Ähnlichkeit entspringt im letzten Grunde derjenigen Eigenthümlichkeit unseres Gesichtssinnes, daß wir beim Sehen mit einem Auge uns zwar der Richtungen genau bewußt werden, aus welchen die (gradlinigen) Lichtstrahlen zu uns gelangen, nicht aber der Entfernungen, welche sie durchlaufen haben. Sind also die Lichtbüschel,

---

1) Von perspicĕre, wo hineinsehen.

2) Dieser Name, oder vielmehr centrum similitudinis, ist zuerst von Euler in einer Abhandlung vom Jahre 1777 gebraucht.

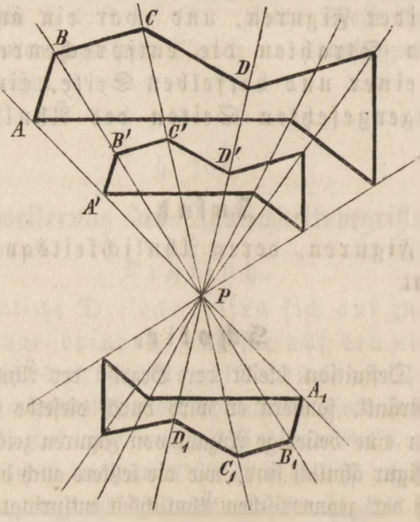
welche uns zwei verschiedene Figuren ins Auge senden, congruent, so empfangen wir denselben Eindruck. Und dieser Begriff wird auch im gemeinen Leben durch das Wort „Ähnlichkeit" ausgedrückt.

§. 165.

Lehrsatz.

Jede mit einem Polygon ähnliche Figur ist ein Polygon von gleicher Seitenzahl; die entsprechenden Winkel ähnlicher Polygone sind gleich, und die entsprechenden Seitenpaare geben gleiche Quotienten, welche mit dem Ähnlichkeitsquotienten übereinstimmen.

Vrs. Für den Ähnlichkeitspunkt P ist die Figur $(A'B'C'D' \ldots)$, beziehungsweise $(A_1B_1C_1D \ldots)$, dem Polygon $(ABCD \ldots)$ ähnlich.



Beh. Die Figur $(A'B'C'D' \ldots)$, beziehungsweise $(A_1B_1C_1D_1 \ldots)$, ist ein Polygon von gleicher Seitenzahl mit $(ABCD \ldots)$; und es ist in diesen Polygonen:

$$\angle A = \angle A' = \angle A_1, \ \angle B = \angle B' = \angle B_1, \ \ldots;$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \frac{PA}{PA'},$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots = \frac{PA}{PA_1}.$$

Bew. Denkt man sich um den Ähnlichkeitspunkt P eine Grade gedreht, so geht aus §. 151, Z. hervor, daß jeder Seite des Polygons ($ABCD\ldots$) in der ähnlichen Figur eine Grade entspricht, welche mit jener parallel ist. Mithin ist die mit dem Polygon ($ABCD\ldots$) ähnliche Figur ein Polygon von gleicher Seitenzahl und von gleichen Winkeln. Die Übereinstimmung der Quotienten entsprechender Seiten mit dem Ähnlickeitsquotienten, welche außerdem behauptet wird, ergiebt sich hierauf aus §. 153, L. I.

Zusätze.

I. Befinden sich zwei ähnliche Polygone in perspectivischer Lage, so sind die entsprechenden Seiten parallel, und zwar gleich gerichtet bei einem äußeren, entgegengesetzt gerichtet bei einem inneren Ähnlichkeitspunkt.

II. Hat man zu einem Polygon mittelst zweier gleichnamigen[1]) Ähnlichkeitspunkte je ein ähnliches Polygon construirt, so sind in den letzteren diejenigen Seiten parallel und gleichgerichtet, welche derselben Seite des ersteren entsprechen; sie schließen gleiche Winkel ein und geben gleiche Quotienten. — Sind beide Ähnlichkeitsquotienten gleich, so sind die construirten Polygone congruent.

III. In ähnlichen Figuren sind je zwei Strecken der einen und die entsprechenden Strecken[2]) der andern unter gleichen Winkeln gegen einander geneigt oder parallel und geben gleiche Quotienten von der Größe des Ähnlichkeitsquotienten. — Denn solche Strecken lassen sich stets ansehen als entsprechende Seiten ähnlicher Polygone.

IV. Zieht man durch zwei einander entsprechende Punkte ähnlicher Figuren je eine Grade, von denen die eine mit zwei Graden der einen Figur eben so große Winkel bildet, wie die andere mit den entsprechenden Graden der andern Figur, so entsprechen die neuen Graden einander ebenfalls[3]) (gehen ebenfalls durch entsprechende Punkte).

---

1) D. i.: mittelst zweier äußeren oder mittelst zweier inneren.

2) Z. B.: in ähnlichen Polygonen entsprechende Diagonalen, in krummlinigen Figuren entsprechende Sehnen, u. s. w.

3) Z. B. in ähnlichen Dreiecken die Höhen, Mittellinien, Halbierungslinien der Winkel

V.* Für je zwei endlich bestimmte ähnliche Figuren von bestimmter Lage giebt es höchstens einen äußeren und höchstens einen inneren Ähnlichkeitspunkt.

— Bei unveränderter Zuordnung der entsprechenden Punkte zu einander ist jedenfalls nur ein Ähnlichkeitspunkt möglich, da je zwei grade Verbindungslinien entsprechender Punkte sich nur in einem Punkte schneiden können. Es handelt sich also darum, ob bei endlich bestimmten Figuren zwei verschiedene Folgen der Zuordnung ebenso möglich sind, wie z. B. bei zwei unbegrenzten Parallelen. Gäbe es aber zwei gleichnamige Ähnlichkeitspunkte für zwei endlich bestimmte Figuren, so würde, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die grade Verbindungslinie je zweier Punkte, welche in der einen Figur einem einzigen Punkte der andern Figur entsprächen, keinen letzten Punkt mit der Figur gemein haben, was wegen ihrer endlichen Bestimmtheit nöthig ist. — Ein letzter Endpunkt für den einen Ähnlichkeitspunkt wäre es nehmlich nicht für den andern.

Aufgabe.

Ein Polygon zu construiren, welches einem gegebenen Polygon nach einem gegebenen Verhältnis ähnlich ist.

§. 166.

Lehrsatz.

Zwei Polygone sind ähnlich, wenn ihre Seiten der Reihe nach gleiche Winkel bilden und gleiche Quotienten geben (so weit diese Seiten und Winkel als nothwendige Bestimmungsstücke der Polygone betrachtet werden müssen). Man kann es durch Ortsveränderung des einen Polygons, während das andere seine Lage behält, dahin bringen, sowohl daß ein beliebig gewählter Punkt der Ebene der äußere, als auch daß er der innere Ähnlichkeitspunkt für beide Polygone wird.

Vrs. Es sind zwei Polygone $(ABCD\ldots)$ und $(A_2B_2C_2D_2\ldots$ gegeben, in welchen

$$\angle A = \angle A_2, \ \angle B = \angle B_2, \ \angle C = \angle C_2, \ \ldots.$$

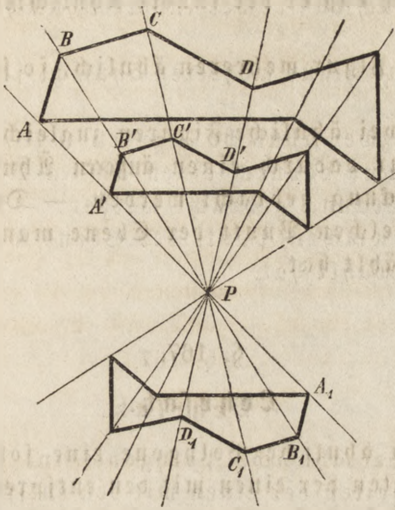
und

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{CD}{C_2D_2} = \ldots. = n$$

ist. Außerdem hat man irgendwo in der Ebene einen Punkt P.

Beh. Es ist $(ABCD\ldots) \sim (A_2B_2C_2D_2\ldots)$; und man kann das letztgenannte Polygon in eine solche Lage bringen, sowohl daß P der äußere, als auch daß P der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Polygone wird.

Bew. Zieht man durch die Punkte $A, B, C, D, \ldots$ ein Büschel, welches seinen Scheitel in P hat, und construirt für diesen als äußeren



und als inneren Ähnlichkeitspunkt die mit $(ABCD\ldots)$ ähnlichen Polygone $(A'B'C'D'\ldots)$ und $(A_1B_1C_1D_1\ldots)$ so, daß

$$n = \frac{PA}{PA'} = \frac{PA}{PA_1}$$

ist, so folgt nach §. 165, L.:

$$\angle A = \angle A' = \angle A_1,\ \angle B = \angle B' = \angle B_1,\ \angle C = \angle C' = \angle C_1, \ldots$$

$$n = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots.$$

$$= \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots.$$

Dies in Verbindung mit der Voraussetzung giebt:

$\angle A_2 = \angle A' = \angle A_1,\ \angle B_2 = \angle B' = \angle B_1,\ \angle C_2 = \angle C' = \angle C_1, \ldots,$
$A_2B_2 = A'B' = A_1B_1,\ B_2C_2 = B'C' = B_1C_1,\ C_2D_2 = C'D' = C_1D_1, \ldots;$
mithin:

$$(A_2B_2C_2D_2\ldots) \cong (A'B'C'D'\ldots) \cong (A_1B_1C_1D_1\ldots);$$

so daß der Punkt P der äußere oder der innere Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Polygone wird, je nachdem man das Polygon $(A_2B_2C_2D_2\ldots)$ in die Lage von $(A'B'C'D'\ldots)$ oder in die Lage von $(A_1B_1C_1D_1\ldots)$ bringt.

Zusätze.

I. Man kann je zwei ähnliche Figuren durch Ortsveränderung der einen von ihnen in eine solche Lage bringen, sowohl daß ein beliebig gewählter Punkt der Ebene der äußere, als auch daß er der innere Ähnlichkeitspunkt beider Figuren wird.

II. Ist eine Figur mehreren ähnlich, so sind diese unter sich ähnlich.

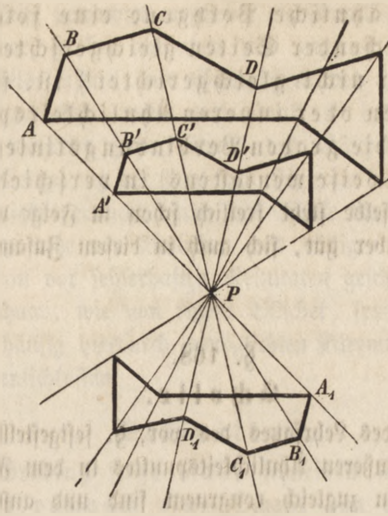
III. Sind zwei ähnliche Figuren zugleich congruent, so erhalten sie nur dadurch einen **äußeren** Ähnlichkeitspunkt, daß sie zur Deckung gebracht werden. — Dann ist es aber gleichgültig, welchen Punkt der Ebene man zum Ähnlichkeitspunkt gewählt hat.

§. 167.

Lehrsatz.

Haben zwei ähnliche Polygone eine solche Lage, daß zwei Nachbarseiten der einen mit den entsprechenden Seiten der andern beziehungsweise parallel sind, so giebt es für sie stets einen inneren Ähnlichkeitspunkt, falls die entsprechenden Seiten entgegengesetzte Richtung haben, einen äußeren Ähnlichkeitspunkt, falls dieselben gleiche Richtung haben und nicht gleich sind. Sind aber die entsprechenden Seiten gleichgerichtet und gleich, so bilden die Graden, welche je zwei entsprechende Punkte mit einander verbinden, eine Schaar von Parallelen.

Bew. Sind AB und A_1B_1 zwei einander entsprechende und entgegengesetzt gerichtete Seiten ähnlicher Polygone, so schneiden sich die Graden AA_1 und BB_1 in einem Punkte P, welcher zwischen A und A_1 und ebenso auch zwischen B und B_1 liegt. Construirt man nun für P als inneren Ähnlichkeitspunkt zum Polygon ($ABCD\ldots$) ein ähnliches ($A_1B_1C_1D_1\ldots$), so wird dieses mit dem zweiten der gegebenen ähnlichen Polygone congruent, weil es nach §. 166, Z. II mit ihm ähnlich ist, und weil ihr Ähnlichkeitsquotient wegen des nach der Constr. übereinstimmenden Besitzes der Seite A_1B_1 den Werth 1 hat (§. 164, Z.). Da schließlich sowohl B_1C_1, als auch die entsprechende Seite des zweiten gegebenen Polygons, der Voraussetzung gemäß von B_1 aus die entgegen-



gesetzte Richtung zu BC hat[1]), so decken diese Polygone sich vollständig; — und P ist der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Polygone.

Sind im andern Falle AB und $A'B'$ zwei einander entsprechende und gleich gerichtete Seiten ähnlicher Polygone, so schneiden sich die Graden AA' und BB' in einem Punkte P oder sind parallel.

Das Erstere geschieht, wenn die Seiten AB und $A'B'$ ungleich sind; und P ist der äußere Ähnlichkeitspunkt, wie man durch Schlüsse, die den so eben vorgeführten ganz analog sind, sofort erkennt.

Ist endlich $AB = A'B'$, so fallen die Graden AA', BB', CC', DD', ... unter einander parallel aus, weil sämmtliche entsprechende Seiten der gegebenen Polygone paarweise gleich und parallel sind, so daß die Vierecke $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, ... sich als Parallelogramme ausweisen (§. 89, L. II).

1) Wäre die Seite, welche in dem zweiten gegebenen Polygon der Seite BC entspricht, zu dieser nicht ebenfalls entgegengesetzt gerichtet (also im Allgemeinen auch nicht parallel), so würde jenes sich nicht mit $(A_1B_1C_1D_1 \ldots)$ decken, sondern diejenige Lage haben, in welche $(A_1B_1C_1D_1 \ldots)$ gelangt, wenn man es um die Seite A_1B_1 herumklappt. Dann wäre aber P auch nicht ein Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Polygone, da die Grade, welche B mit dem entsprechenden Punkte der andern Figur verbindet, nicht durch P hindurch ginge. — Vergl. hierzu §. 165, Z. I.

daß dieselben auf entsprechenden Seiten entsprechender Linien liegen, d. i.: in beiden Figuren zur Rechten oder in beiden Figuren zur Linken zweier Punkte, von denen die entsprechenden Theile derselben gleichzeitig beschrieben werden.

Im Gegensatz hierzu werden die entsprechenden Flächentheile auf entgegengesetzte Seiten entsprechender Linien gelangen, wenn man die eine von beiden Figuren sammt ihrem Büschel um dessen Scheitel im Raume herumdreht und dann umgekehrt in die Ebene legt. Dann haben auch die entsprechenden Strahlen der beiden Büschel eine umgekehrte Folge erhalten.

Definitionen.

I. **Zwei ähnliche Figuren**, in denen die entsprechenden Felder auf entsprechenden Seiten entsprechender Linien liegen, heißen **ähnlich gelegen** oder **isotrop**[1]) **ähnlich; antitrop**[2]) **ähnlich** heißen solche, in denen die entsprechenden Felder auf entgegengesetzten Seiten entsprechender Linien liegen.

II. Unter einem **schiefen Ähnlichkeitspunkt** versteht man den gemeinsamen Scheitel zweier congruenten Büschel, deren entsprechende Strahlen nach entsprechenden Punkten ähnlicher Figuren führen.

III. Der **Ähnlichkeitspunkt** heißt **isotrop** oder **antitrop**, je nachdem es die ähnlichen Figuren sind. — Von den **Büscheln** gilt das Analoge.

Zusatz.

Der äußere sowohl, als auch der innere Ähnlichkeitspunkt perspectivisch gelegener ähnlicher Figuren ist ein isotroper Ähnlichkeitspunkt.

— Denn hier wird sogar das eine Büschel von dem andern oder von dessen Verlängerung unmittelbar gedeckt.

§. 170*.

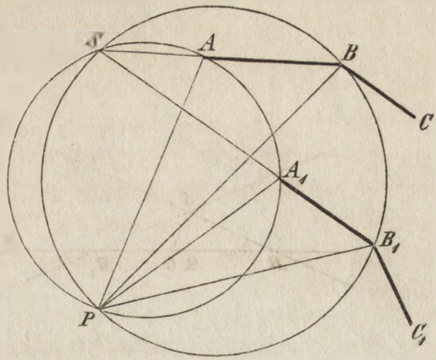
Lehrsatz.

Je zwei ähnliche Figuren haben bei jeder Lage einen (schiefen) Ähnlichkeitspunkt, entweder einen isotropen oder einen antitropen.

---

1) Auch: ähnlich von einerlei Sinn. — ἴσος, gleich, und τρέπω, ich wende, drehe.

2) Auch: ähnlich von entgegengesetztem Sinn. — ἀντί, entgegen.



Bew. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

I. Es seien A und B zwei Punkte einer Figur, A_1 und B_1 die beiden entsprechenden Punkte einer isotrop ähnlichen Figur.

Zieht man die Graden AB und A_1B_1, so schneiden sich diese im Allgemeinen in einem Punkte S; und wenn man ferner die Kreise SAA_1 und SBB_1 zieht, so schneiden diese sich im Allgemeinen noch in einem zweiten Punkte P.

Dies ist der gesuchte schiefe Ähnlichkeitspunkt. Denn erstens sind, wenn man noch die Graden PA, PB, PA_1, PB_1 gezogen hat, die Dreiecke PAB und PA_1B_1 isotrop ähnlich, weil $\angle PAS = \angle PA_1S$ und $\angle PBS = \angle PB_1S$ ist; und zweitens sind die Büschel, welche von P aus zu den Figuren $(ABC\ldots)$ und $(A_1B_1C_1\ldots)$ gehören, isotrop congruent, weil die entsprechenden Winkel bei P nach dem Seiten-Winkel-Seiten-Ähnlichkeitssatz gleich werden, nehmlich $\angle BPC = \angle B_1PC_1$, u. s. w.

Trifft es sich aber im Besondern, daß $AB \mathrel{+\!\!\!\!\!\!=} A_1B_1$ ist, so liegen die ähnlichen Figuren nach §. 168, L. perspectivisch, so daß P der Durchschnittspunkt der Graden AA_1 und BB_1 ist; d. h. in anderer Sprechweise: Rückt der Punkt S ins Unendliche, so degeneriren die Kreise SAA_1 und SBB_1 in grade Linien AA_1 und BB_1. Und ist $AA_1 \mathrel{+\!\!\!\!\!\!=} BB_1$, so fällt P mit S zusammen.

II. Es seien A und B zwei Punkte einer Figur, A_1 und B_1 die beiden entsprechenden Punkte einer antitrop ähnlichen Figur.

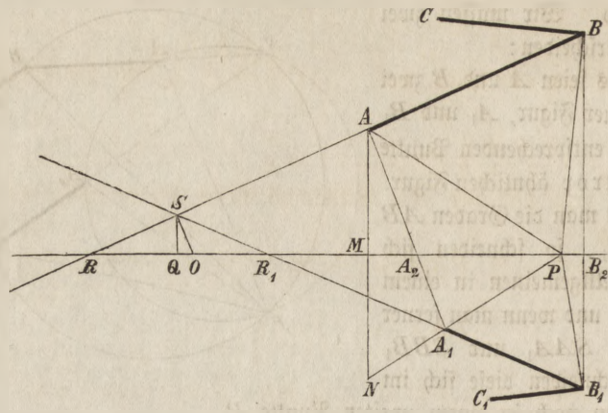
Man ziehe die Graden AA_1 und BB_1, theile dieselben in A_2 und B_2 so, daß

$$(1.) \quad \frac{A_2A}{A_2A_1} = \frac{B_2B}{B_2B_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$

ist, ziehe die Grade A_2B_2, fälle auf sie die Senkrechte AM und verdoppele diese über M hinaus bis N und ziehe endlich die Grade NA_1. Dieselbe schneidet sich mit A_2B_2 in einem Punkte P.

Dann ist P der verlangte Ähnlichkeitspunkt.

Um dies zu beweisen, ziehe man zunächst die Grade AP und mache die folgenden Schlüsse:



Es ist: $\triangle AMP \cong \triangle NMP$, . . . (*sws*)

$\angle A_2PA = \angle A_2PA_1$,

$\frac{PA}{PA_1} = \frac{A_2A}{A_2A_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ . . . §. 152, L. I und (1).

Ferner mögen sich die Graden AB und A_1B_1 in S, AB und A_2B_2 in R, A_1B_1 und A_2B_2 in R_1 schneiden. Die Parallelen durch S mit AA_1 und BB_1 treffen die Grade A_2B_2 in O und in Q. Dadurch wird nach dem Zwei-Winkel-Satz: $\triangle RAA_2 \sim \triangle RSO$, $\triangle RBB_2 \sim \triangle RSQ$, $\triangle R_1A_1A_2 \sim \triangle R_1SO$, $\triangle R_1B_1B_2 \sim \triangle R_1SQ$; und es entstehen die Gleichungen:

$$(2.)\quad RA \cdot SO = RS \cdot A_2A,$$
$$(3.)\quad RB \cdot SQ = RS \cdot B_2B,$$
$$(4.)\quad R_1A_1 \cdot SO = R_1S \cdot A_2A_1,$$
$$(5.)\quad R_1B_1 \cdot SQ = R_1S \cdot B_2B_1.$$

Dividirt man das Product der Gleichungen (2.) und (5.) durch dasjenige der Gleichungen (3.) und (4.), so ergiebt sich:

$$\frac{RA}{R_1A_1} \cdot \frac{R_1B_1}{RB} = \frac{A_2A}{A_2A_1} \cdot \frac{B_2B_1}{B_2B} = 1 \ \ldots\ (1.)$$

also:

$$(6.)\quad \frac{RA}{R_1A_1} = \frac{RB}{R_1B_1} = \frac{RB - RA}{R_1B_1 - R_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Dividirt man aber Gl. (2.) durch Gl. (4.), so folgt:

$$\frac{RA}{R_1A_1} = \frac{RS}{R_1S} \cdot \frac{A_2A}{A_2A_1} = \frac{RS}{R_1S} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} \ \ldots\ (1.).$$

Vergleicht man dies mit Gl. (6.), so folgt:

$$(7.)\quad RS = R_1S,$$

weshalb die Gegenwinkel dieser Seiten im $\triangle RSR_1$ gleich sind.

Mithin ist

$$(8.)\quad \angle ARP = \angle A_1R_1P;$$

und weil schon von früher her $\angle APR = \angle A_1PR_1$ bekannt ist:

$$\triangle PRA \sim \triangle PR_1A_1, \ldots (2w)$$

$$\frac{RP}{R_1P} = \frac{RA}{R_1A_1} = \frac{RB}{R_1B_1} \ldots (6).$$

Das erste und das letzte Verhältnis dieser Gleichung im Verein mit (8.) geben:

$$\triangle PRB \sim \triangle PR_1B_1, \ldots (sws \sim)$$

so daß

$$\angle PBA = \angle PB_1A_1,$$

und

$$\angle A_2PB = \angle A_2PB_1,$$

mithin auch

$$\angle APB = \angle A_2PB - \angle A_2PA = \angle A_2PB_1 - \angle A_2PA_1 = \angle A_1PB_1$$

ist.

Daher ergiebt sich, daß in antitroper Lage

$$\triangle APB \sim \triangle A_1PB_1$$

ist.

Endlich ergiebt sich die antitrope Congruenz der Büschel, welche von P aus nach entsprechenden Punkten $A, B, C, \ldots$ und $A_1, B_1, C_1, \ldots$ der ähnlichen Figuren führen, in derselben Weise, wie im Falle I.

Trifft es sich im Besonderen, daß $AB = A_1B_1$ ist, so liegt der Ähnlichkeitspunkt P auf der Graden A_2B_2 im Unendlichen (§. 168, D.), weil $NA_1 \nparallel A_2B_2$ wird wegen der Gleichung

$$\frac{MA}{MN} = \frac{A_2A}{A_2A_1} = 1.$$

Hierbei giebt es aber eine Ausnahme. Wenn nehmlich N mit A_1 zusammenfällt, so ist von der Graden NA_1 nur dieser eine Punkt bestimmt, weshalb der P auf A_2B_2 beliebig gewählt werden kann.

Zusatz.

Liegen in einer Ebene zwei congruente Figuren antitrop so, daß die gemeinsame Halbierungslinie der graden Verbindungslinien zweier entsprechenden Punktpaare auf einer von diesen senkrecht steht, so ist jeder Punkt der ersteren ein antitroper Ähnlichkeitspunkt der congruenten Figuren.

4*

Aufgabe.

Die gemeinsame Spitze zweier ähnlichen Dreiecke zu finden, deren Grundlinien der Lage und Größe nach gegeben sind.

— Zwei Auflösungen.

Scholie.

Die in dem Zusatz erwähnte Grade, deren Punkte sämmtlich antitrope Ähnlichkeitspunkte der congruenten Figuren sind, heißt die Symmetrieaxe der letzteren.

Auf den in den beiden letzten §§. besprochenen Gegenstand weiter einzugehen, würde hier zu weit führen. Bei Gelegenheit der harmonischen Büschel wird derselbe indessen noch einmal kurz berührt werden.

§. 171.

Lehrsatz I.

In je zwei ähnlichen Figuren verhalten sich die Summen entsprechender Strecken, wie irgend welche zwei entsprechende Strecken.

Vrs. Es sind

$a, b, c, d, \ldots, s$ Strecken, welche den Strecken

$a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, s_1$ einer ähnlichen Figur entsprechen.

Beh. Es ist:

$$\frac{a + b + c + d + \ldots}{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots} = \frac{s}{s_1}.$$

Bew. Nach §. 166, Z. III ist:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \ldots = \frac{s}{s_1}.$$

Daher trifft die Beh. zu nach dem §. 43 des arithm. Lehrbuchs.

Zusatz.

Die **Umfänge** ähnlicher Polygone verhalten sich, wie zwei entsprechende Seiten oder Diagonalen:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{s}{s_1}.$$

Lehrsatz II.

Die **Felder** ähnlicher Polygone verhalten sich, wie die Quadrate entsprechender Strecken (Seiten oder Diagonalen u. s. w.).

Vrs. f und f_1 seien die Felder, s und s_1 zwei entsprechende Strecken ähnlicher Polygone.

Beh. Es ist:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{s^2}{s_1^2}.$$

Bew. Zerlegt man die beiden ähnlichen Polygone durch entsprechende Strecken in lauter Dreiecke, so werden die Dreiecke des einen Polygons nach §. 165, Z. III den entsprechenden des andern Polygons ähnlich, weil sie in den Winkeln übereinstimmen, und das Verhältnis der Seiten ist dem Ähnlichkeitsverhältnis der Polygone gleich.

Sei dieses, durch irgend welche zwei entsprechende Strecken ausgedrückt $= \frac{s}{s_1}$.

Die Dreiecksfelder seien in dem einen Polygon:

$$\varphi,\ \psi,\ \chi,\ \omega,\ \ldots$$

und die entsprechenden des andern Polygons:

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1,\ \omega_1,\ \ldots$$

Dann ist nach §. 149, Z. II:

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\psi}{\psi_1} = \frac{\chi}{\chi_1} = \frac{\omega}{\omega_1} = \ldots = \frac{s^2}{s_1^2}.$$

Mithin ist nach §. 43 des arithmetischen Lehrbuchs auch:

$$\frac{\varphi + \psi + \chi + \omega + \ldots}{\varphi_1 + \psi_1 + \chi_1 + \omega_1 + \ldots} = \frac{s^2}{s_1^2},$$

d. i.:

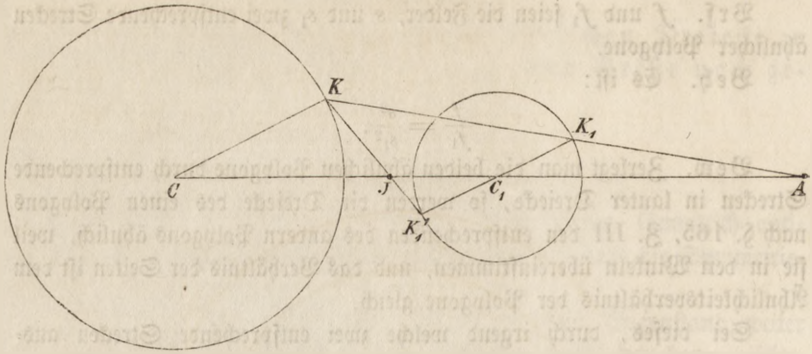
$$\frac{f}{f_1} = \frac{s^2}{s_1^2}.$$

§. 172.

Lehrsatz.

Je zwei Kreise sind ähnlich nach dem Verhältnis ihrer Radien. Sie haben bei jeder Lage einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt in der Centralen, und zwar dort, wo diese von derjenigen Graden geschnitten wird, welche durch die Endpunkte zweier gleich gerichteten, beziehungsweise zweier entgegengesetzt gerichteten Radien hindurch geht.

Bew. Stellt man sich die beiden Kreise in einer concentrischen Lage vor, so erkennt man sofort, daß sie nach dem Verhältnis der Radien ähnlich sind: Denn sie schneiden auf allen durch das gemeinsame Centrum gehenden Graden einzeln gleiche Strecken (die Radien) ab.



Bei zwei nicht concentrisch gelegten Kreisen um C und C_1 seien CK und C_1K_1 zwei gleich gerichtete, CK und C_1K_1' zwei entgegengesetzt gerichtete Radien von der Länge r und r_1; A und J seien die Schnittpunkte der Centralen CC_1 mit KK_1 und mit KK_1'.

Dann ist A der äußere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise; denn da

$$\triangle ACK \sim \triangle AC_1K_1 \quad . \; . \; . \; (2w)$$

und deshalb $\quad (1.) \quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{r}{r_1}, \quad (2.) \quad \frac{AK}{AK_1} = \frac{r}{r_1}$

ist, so hängt nach (1.) die Lage des Punktes A, und nach (2.) der Werth des Quotienten $AK : AK_1$ nicht von der Richtung, sondern nur von der Größe der Radien r und r_1 ab.

Ferner ist J der innere Ähnlichkeitspunkt, weil

$$\triangle JCK \sim \triangle JC_1K_1', \quad . \; . \; . \; (2w)$$

mithin $\quad \frac{JK}{JK_1'} = \frac{JC}{JC_1} = \frac{r}{r_1}$

ist, so daß dieses Verhältnis ebenfalls nicht von der besonderen Lage der Graden KJK_1' abhängt, außer daß dieselbe durch J hindurchgehe.

Zusätze.

I. Haben zwei Kreise gemeinschaftliche Tangenten, so schneiden sich die äußeren im äußeren Ähnlichkeitspunkt, die inneren Tangenten im inneren Ähnlichkeitspunkt.

II. Wenn zwei Kreise sich berühren, so ist der Berührungspunkt zugleich innerer oder äußerer Ähnlichkeitspunkt, je nachdem die Berührung von außen oder von innen geschieht.

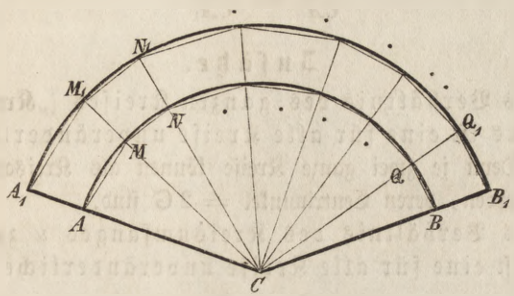
III. Das Centrum zweier concentrischen Kreise ist sowohl äußerer als innerer Ähnlichkeitspunkt.

IV. Je zwei Kreisausschnitte, welche in den Centriwinkeln übereinstimmen, sind ähnlich.

§. 173.

Lehrsatz.

In je zwei Kreisausschnitten, welche in den Centriwinkeln übereinstimmen, ist das Verhältnis des Bogens zum Radius gleich groß.



Vrs. Es sind zwei Kreisausschnitte ACB und A_1CB_1 gegeben, welche im Centriwinkel bei C übereinstimmen.

Beh. Es ist:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A_1B_1}{CA_1}.$$

Bew. Zieht man im Winkelfelde ABC von C aus beliebig viele grade Linien und verbindet die auf einander folgenden Durchschnittspunkte derselben mit den Kreisen durch Sehnen, so erhält man nach §. 166 zwei ähnliche Polygone ($CAMN \ldots QB$) und ($CA_1M_1N_1 \ldots Q_1B_1$). Daher ist, wenn man der Abkürzung wegen die Sehnensumme

$$AM + MN + \ldots + QB = AB - x,$$
$$A_1M_1 + M_1N_1 + \ldots + Q_1B_1 = A_1B_1 - x_1$$

setzt:

$$\frac{AB - x}{A_1B_1 - x_1} = \frac{CA}{CA_1} \ \ldots \text{§. 171, L. I.}$$

Man kann diese Gleichung in der Form

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A_1B_1}{CA_1} + \left(\frac{x}{CA} - \frac{x_1}{CA_1}\right)$$

schreiben und folgendermaßen weiter schließen:

Die Brüche $\frac{AB}{CA}$ und $\frac{A_1B_1}{CA_1}$ sind unveränderlich, wie viele Hülfslinien man auch im Felde des $\angle C$ von C aus ziehen mag; daher muß die Differenz

$$\frac{x}{CA} - \frac{x_1}{CA_1} = \delta$$

trotz der Veränderlichkeit von x und x_1 ebenfalls einen unveränderlichen Werth haben. Und dieser Werth δ kann sich nicht von Null unterscheiden, weil die Werthe von x und x_1 durch Vermehrung der von C aus gezogenen Hülfslinien nach §. 127, L. IV beliebig klein gemacht werden können. Mithin ist:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A_1B_1}{CA_1}.$$

Zusätze.

I. Das Verhältnis des ganzen Kreises („**Kreisumfangs**“) zum Radius ist eine für alle Kreise unveränderliche Zahl.

— Denn je zwei ganze Kreise können als Kreisausschnitte angesehen werden, deren Centriwinkel $= 2\,\mathsf{G}$ sind.

II. Das Verhältnis des Kreisumfanges u zum Durchmesser d ist eine für alle Kreise unveränderliche Zahl:

$$\frac{u}{d} = \frac{u_1}{d_1}.$$

§. 174.

Definition.

Die Maßzahl des Kreisumfanges, wenn der Durchmesser zur Längeneinheit genommen ist (d. h. die Zahl, welche angiebt, wie oft der Kreisdurchmesser im Umfange enthalten ist) wird durch π bezeichnet.

Zusatz.

Versteht man unter r den Radius, unter u den Umfang, unter f das Feld eines Kreises, so ist

$$u = 2\pi \cdot r,$$
$$f = \pi \cdot r^2.$$

— Die Formel für f erhält man nach §. 141 durch die Schlußfolge:

$$f = \tfrac{1}{2}ur = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

Scholie.

Die Zahl π ist irrational. Auf 24 Decimalstellen berechnet beträgt sie

$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\ \ldots$

Näherungswerthe in gemeinen Brüchen sind:

$$\frac{22}{7},\ \frac{355}{133},$$

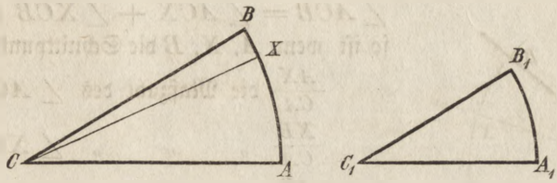
von denen der erste bereits von Archimedes (geb. zu Syracus um

287 v. Chr.) herrührt, der zweite aber zuerst von **Metius** (um 1600 n. Chr.) angegeben ist.

§. 175.

Lehrsatz.[1]

Stimmen zwei Kreisausschnitte im Verhältnis des Bogens zum Radius überein, so haben sie gleiche Centriwinkel.



Vrs. In den Kreisausschnitten ACB und $A_1C_1B_1$ ist

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A_1B_1}{C_1A_1}.$$

Beh. Es ist $\angle C = \angle C_1$.

Bew. Macht man den Centriwinkel $ACX = \angle A_1C_1B_1$, so ist:

$$\frac{AX}{CA} = \frac{A_1B_1}{C_1A_1} \ldots \text{§. 173, L.}$$

Dies ergiebt durch Vergleichung mit der Voraussetzung:

$$AB = AX,$$

woraus nach §. 38, Z. folgt, daß

$$\angle ACB = \angle ACX$$

ist, von denen der letztere $= \angle A_1C_1B_1$ gemacht wurde.

§. 176.

Weiterer Ausbau des Winkelbegriffs.

Definition.

Unter der **Größe**, dem **Quantum** oder der **Maßzahl eines Winkels** (oder auch schlechthin einem Winkel) versteht man die Maßzahl des durch den Radius gemessenen Kreisbogens, auf welchem jener Winkel als Centriwinkel steht.

— Sagt man also z. B., es sei in der vorigen Figur der $\angle ACB = \alpha$ oder $= 0{,}72$, so meint man damit, es sei $AB = \alpha \cdot CA$ oder $= 0{,}72 \cdot CA$.

1) Umkehrung von §. 173, L.

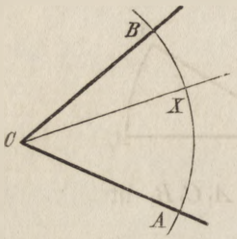
Zusätze.

I. Ein Winkel und seine Maßzahl sind gegenseitig völlig durch einander bestimmt.

— §. 173, L. und §. 175.

II. Die Maßzahl einer Winkelsumme ist gleich der Summe der Maßzahlen der einzelnen Winkel; und umgekehrt.

— Denn zieht man um den Scheitel C einer Winkelsumme $\angle ACB = \angle ACX + \angle XCB$ einen Kreis, so ist (wenn A, X, B die Schnittpunkte bedeuten):



$\frac{AX}{CA}$ die Maßzahl des $\angle ACX$,

$\frac{XB}{CA}$ " " " $\angle XCB$,

$\frac{AB}{CA}$ " " " $\angle ABC$.

Nach einem arithmetischen Satze aber ist identisch:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{AX + XB}{CA} = \frac{AX}{CA} + \frac{XB}{CA};$$

und umgekehrt. Auch ist jede Veränderung in der Folge der Theile gestattet, sowohl bei der Zahl, als beim Winkel (§. 40). — Durch Vermehrung der Anzahl der Summanden wird an der Schlußweise nichts geändert.

Scholie.

Es ist schon früher (in §. 40) darauf hingewiesen worden, daß man das Recht hat, dem Winkel ein von den Quanten der Raumgrößen (Volumen, Areal, Länge) verschiedenes Quantum beizulegen. Dies ist mit dem Obigen geschehen. Denn wir betrachten als das Quantum eines Winkels eine arithmetische Zahl, von welcher wir uns überzeugt haben, daß sie allen an ein Quantum zu stellenden Anforderungen (§. 17) genügt und mit dem Winkel wechselseitig auf einfache Weise verknüpft ist.

Demnach ist beispielsweise nach §. 174 das Quantum eines

gestreckten Winkels $= \pi = 3,141\,592\,653\,589\,7932\ldots$,

rechten " $= \frac{\pi}{2} = 1,570\,796\,326\,794\,8966\ldots$;

und eines Winkels von 1° (1 Grad) $= \frac{\pi}{180} = 0,017\,453\,292\,519\,9433\ldots$,

wenn man unter 1° den 90^{sten} Theil eines rechten Winkels versteht, wie es noch immer gebräuchlich ist, trotzdem sich bereits zu Ende vorigen und

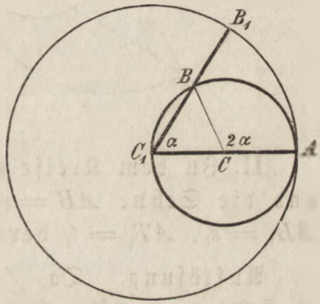
Anfang dieses Jahrhunderts die rationellere Eintheilung des rechten Winkels in 100 Grade ausgebreitet hatte.

Näherungswerthe von 1° sind die gemeinen Brüche $\frac{1}{57}$ und $\frac{3}{172}$, von denen der erstere um weniger als $\frac{1}{9804}$ zu groß, der zweite um weniger als $\frac{1}{68972}$ zu klein ist.

§. 177.

Lehrsatz.

Ist ein Durchmesser eines Kreises ein Radius eines zweiten Kreises, so liegen zwischen ihm und einem beliebigen andern Radius des zweiten Kreises auf beiden Kreisen gleiche Bogen.



Vrs. Mit dem Durchmesser C_1A des Kreises um C ist um C_1 ein zweiter Kreis und von C_1 aus eine Grade gezogen, welcher die beiden Kreise beziehungsweise in B und B_1 trifft.

Beh. Es ist: $AB = AB_1$.

Bew. Zieht man den Radius CB des Kreises um C und setzt $\angle AC_1B = \alpha$, so ist $\angle ACB = 2\alpha$ (§. 113). Hieraus folgt:

$$AB = 2\alpha \cdot CA = \alpha \cdot 2CA = \alpha \cdot C_1A = AB_1 \ \ldots \ §. 176.$$

§. 178.

Aufgaben.

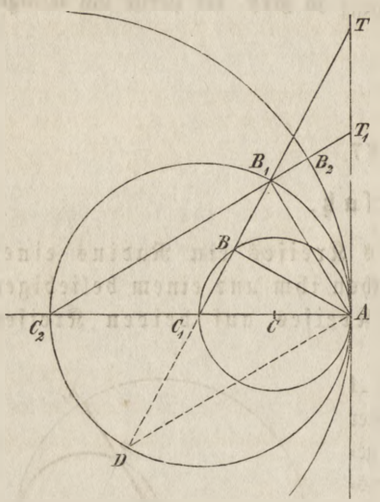
I. Einen beliebig gegebenen Kreisbogen durch Zeichnung allmählich zu strecken und die Größe des dabei begangenen Fehlers zu beurtheilen.

Anal. Man kann den fraglichen Zweck dadurch erreichen, daß man die in der Vrs. des vor. §. gemachte Construction von neuem auf den größeren Kreis anwendet und die Construction in analoger Weise beliebig oft wiederholt.

Denn man erhält dadurch, daß

$$\text{Bog. } AB = \text{Bog. } AB_1 = \text{Bog. } AB_2 = \ldots$$

ist, von denen sich jeder folgende enger an die Tangente anschmiegt, als der vorhergehende.



Zieht man noch die Sehnen AB, AB_1, ... und verlängert die Graden C_1B, C_2B_1, ..., bis sie die Tangente in T, T_1, ... schneiden, so nehmen die Sehnen in der Folge AB, AB_1, ... der Länge nach zu, die Tangenten aber in der Folge AT, AT_1, ... ab. Und die Glieder beider Reihen nähern sich der Länge des Bogens AB als ihrem Grenzwerth in der Weise, daß ihre Abweichung von der Bogenlänge die Werthe der Reihe

$$AT - AB,\ AT_1 - AB_1,\ \ldots$$

nicht erreicht (§. 127, L. III).

II. In dem Kreise um C ist der Durchmesser $AC_1 = d$ und die Sehne $AB = s$. Es sollen die Strecken $AT = t$, $AB_1 = s_1$, $AT_1 = t_1$ berechnet werden.

Auflösung. Da $\angle\, TAC_1 = \angle\, ABC_1 = \text{R}$ ist, so ist $\triangle\, TAC_1 \sim \triangle\, ABC_1$ (2w), mithin:

$$\frac{AT}{AB} = \frac{AC_1}{BC_1},\quad AT = \frac{AC_1 \cdot AB}{BC_1}$$

oder, weil $BC_1 = \sqrt{AC_1{}^2 - AB^2} = \sqrt{d^2 - s^2}$

ist:

$$(1.)\quad t = \frac{ds}{\sqrt{d^2 - s^2}}.$$

Um $AB_1 = s_1$ auf möglichst einfache Weise zu finden, ziehe man in dem Kreise um C_1 den Durchmesser $B_1D = 2d$ und die Sehne AD.

Dann ist im rechtwinkligen $\triangle\, B_1AD$

$$AB_1{}^2 = B_1D \cdot B_1B \ \ldots \text{§. 155, L. I.}$$

Da ferner

$$B_1B = B_1C_1 - BC_1 = d - \sqrt{d^2 - s^2}$$

ist, so hat man also in Folge der letzten Gleichung:

$$s_1^2 = 2d\cdot(d-\sqrt{d^2-s^2}) = \frac{2ds^2}{d+\sqrt{d^2-s^2}}$$

$$= \frac{2ds^2}{d+\frac{ds}{t}} \; .\;.\;.\;. \; (1.)$$

oder:

$$(2.) \quad s_1^2 = \frac{2s^2t}{s+t}.$$

Um endlich $AT_1 = t_1$ zu berechnen, beachte man, daß $\triangle AB_1T_1 \sim \triangle ABB_1$ ist $(2w)$, weil $\angle AB_1T_1 = \angle ABB_1 = \varkappa$ und $\angle AT_1B_1 = \angle AB_1B$ als Complemente zu $\angle AC_2T_1 = \angle ADB_1$. Folglich geht hervor:

$$\frac{AT_1}{AB_1} = \frac{AB_1}{AB},\; AT_1 = \frac{AB_1^2}{AB},$$

d. i.:

$$(3.) \quad t_1 = \frac{s_1^2}{s} = \frac{2st}{s+t} \; .\;.\;. \; (2.)$$

Übrigens gewinnen die Formeln (1.), (2.), (3.) an Einfachheit, wenn man für d, s, t ihre reciproken Werthe einführt. Dieselben mögen durch die entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden, so daß

$$(4.) \quad \delta = \frac{1}{d},\quad \sigma = \frac{1}{s},\quad \tau = \frac{1}{t}, \text{ u. s. w.}$$

bedeutet. Dann hat man in Folge der obigen Gleichungen:

$$(5.) \quad \tau = \sqrt{\sigma^2 - \delta^2},\; .\;.\;. \; (1.)$$

$$(6.) \quad \tau_1 = \frac{\sigma+\tau}{2},\; .\;.\;.\;. \; (3.)$$

$$(7.) \quad \sigma_1 = \sqrt{\sigma\cdot\frac{\sigma+\tau}{2}} = \sqrt{\sigma\tau_1}\; {}^{1)} \; .\;.\;. \; (2.) \text{ u. } (3.)$$

Anm. Setzt man die Rechnung nebst der Construction fort, wie es in Aufg. II. ausgeführt ist, so lauten die Rechnungsformeln für jede Nummer n, nachdem ein erstes τ berechnet ist:

$$(8.) \quad \tau_{n+1} = \frac{\sigma_n + \tau_n}{2},$$

$$(9.) \quad \sigma_{n+1} = \sqrt{\sigma_n \tau_{n+1}}.$$

Die τ und die σ nähern sich bei wachsendem n, wie aus der Analysis

---

1) Versteht man unter v und f die reciproken Maßzahlen der Felder des um- und des eingeschriebenen regulären n-Ecks, unter v_1 und f_1 diejenigen des $(2n)$-Ecks, so ergeben sich ähnliche Relationen, nehmlich:

$$v_1 = \frac{v+f_1}{2},\quad f_1 = \sqrt{vf}.$$

Es stehen hier die Indices anders, als oben.

der Aufg. II hervorgeht, demselben Grenzwerth, nehmlich dem reciproken Werthe der Maßzahl des Bogens AB; und zwar bleiben die σ stets zu groß, die τ stets zu klein, weil bei ihren reciproken Werthen, den s und den t, stets die umgekehrte Beziehung stattfindet.

Hat man die numerische Rechnung nach den obigen Formeln (8.) und (9.) so weit fortgesetzt, daß der Werth von

$$\frac{(\sigma_n - \tau_n)^2}{16\sigma_n}$$

in denjenigen Decimalstellen, welche man genau zu erhalten wünscht, nur Nullen enthält, so ist

$$\sigma_n - \tfrac{1}{3}(\sigma_n - \tau_n) = \tau_n + \tfrac{2}{3}(\sigma_n - \tau_n)$$

der Grenzwerth der σ und τ mit der verlangten Genauigkeit.

Substituirt man nehmlich aus (8.) in (9.) den Werth:

$$\tau_{n+1} = \frac{\sigma_n + \tau_n}{2} = \frac{2\sigma_n - (\sigma_n - \tau_n)}{2}$$
$$= \sigma_n \cdot \left(1 - \frac{\sigma_n - \tau_n}{2\sigma_n}\right),$$

so erhält man mit Anwendung des binomischen Satzes:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_n - \tau_n}{2\sigma_n}}$$
$$= \sigma_n \cdot \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_n - \tau_n}{2\sigma_n} - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\sigma_n - \tau_n}{2\sigma_n}\right)^2 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{\sigma_n - \tau_n}{2\sigma_n}\right)^3 - \ldots \right\}$$
$$= \sigma_n \quad - \tfrac{1}{4}(\sigma_n - \tau_n) - \tfrac{1}{16} \cdot \frac{(\sigma_n - \tau_n)^2}{\sigma_n} - \tfrac{1}{128} \cdot \frac{(\sigma_n - \tau_n)^3}{\sigma_n^2} - \ldots$$

Ist nun $(\sigma_n - \tau_n)$ bereits so klein, daß der dritte Summand der rechten Seite in den zu berechnenden Decimalstellen verschwindet, so gilt dies in noch höherem Maße von den folgenden; und man braucht bei der Rechnung für σ_{n+1} nur den Werth

$$(10.) \quad \sigma_{n+1} = \sigma_n - \tfrac{1}{4}(\sigma_n - \tau_n)$$

zu berücksichtigen. Subtrahirt man hiervon

$$\tau_{n+1} = \sigma_n - \tfrac{1}{2}(\sigma_n - \tau_n),$$

so erhält man die Gleichung:

$$\sigma_{n+1} - \tau_{n+1} = \tfrac{1}{4}(\sigma_n - \tau_n),$$

welche auch für alle größeren Werthe von n bestehen bleibt und demnach die Relation liefert:

$$(11.) \quad \sigma_{n+r} - \tau_{n+r} = \frac{\sigma_n - \tau_n}{4^r}.$$

Setzt man in Gl. (10.) für n nach und nach alle größeren Zahlen und summirt die so erhaltenen Gleichungen mit Rücksicht auf die Gl. (11.), so erhält man für den Grenzwerth σ_∞ von σ_n:

$$\sigma_\infty = \sigma_n - \frac{\sigma_n - \tau_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \sigma_n - \frac{1}{3}(\sigma_n - \tau_n).$$

Und verfährt man auf ähnliche Weise mit der aus (8.) folgenden Gleichung

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \frac{\sigma_n - \tau_n}{2},$$

so erhält man:

$$\tau_\infty = \tau_n + \frac{\sigma_n - \tau_n}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \tau_n + \frac{2}{3}(\sigma_n - \tau_n).$$

III. Die Zahl π auf 6 Decimalstellen genau vermittelst der Länge desjenigen Kreisbogens zu berechnen, welcher die Seite eines regulären Zehnecks in einem Kreise überspannt, dessen Durchmesser der Längeneinheit gleich ist.

Berechnung. Da der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser der Längeneinheit gleich ist, nach §. 174, Z. π Längeneinheiten beträgt, so beträgt der fragliche Bogen $\frac{\pi}{10}$ Längeneinheiten. Nun ist $d = 1$, also auch $\delta = \frac{1}{d} = 1$, und nach §. 162:

$$s = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sigma = \frac{4}{-1+\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5} = 3{,}236068.$$

Ferner ergiebt die Gl. II (5.):

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \delta^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{9{,}472136} = 3{,}077684.$$

Bei der weiteren Rechnung kommen abwechselnd die Formeln II (8.) u. (9.) in Betracht:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{\sigma + \tau}{2} &&= 3{,}156876 \\
\sigma_1 &= \sqrt{\sigma\tau_1} &&= 3{,}196227 \\
\sigma_1 + \tau_1 & &&= 6{,}353103 \\
\tau_2 &= \frac{\sigma_1 + \tau_1}{2} &&= 3{,}176552 \\
\sigma_2 &= \sqrt{\sigma_1\tau_2} &&= 3{,}186374 \\
\tau_3 &= \frac{\sigma_2 + \tau_2}{2} &&= 3{,}181463 \\
\sigma_3 &= \sqrt{\sigma_2\tau_3} &&= 3{,}183917 \\
\tau_4 &= \frac{\sigma_3 + \tau_3}{2} &&= 3{,}182690 \\
\sigma_4 &= \sqrt{\sigma_3\tau_4} &&= 3{,}183303.
\end{aligned}$$

Es ist bereits:

$$\sigma_3 - \tau_3 = 0{,}002455, \quad \frac{(\sigma_3 - \tau_3)^2}{16\,\sigma_3} = 0{,}000000118;$$

so daß nach der in II besprochenen Correctur auf 6 Decimalstellen genau:

$$\frac{10}{\pi} = \sigma_3 - \tfrac{1}{3}(\sigma_3 - \tau_3) = 3{,}183917 - 0{,}000818$$
$$= 3{,}183099;$$
$$\pi = \frac{10}{3{,}183099} = 3{,}141593$$

hervorgeht.

Die Werthe von σ_4 und τ_4 ergeben:

$$\sigma_4 - \tau_4 = 0{,}000613, \quad \frac{(\sigma_4 - \tau_4)^2}{16\sigma_4} = 0{,}00000000738;$$

so daß man mit ihnen 8 Decimalstellen genau erhalten könnte, wenn sie auf so viele Stellen berechnet wären.

Über eine viel wirksamere Methode zur Berechnung von π vergl. das Lehrb. d. Arithm. §. 84.

B. Transversalen. Harmonische Büschel. Polare. Potenzlinie.

§. 179.

Definitionen.

I. Unter einem n-Seit versteht man eine von n unbegrenzten Graden gebildete Figur. — Die unbegrenzten Graden heißen die Seiten, deren Schnittpunkte die Ecken des n-Seits.

II. Jede Grade, welche sich mit einem n-Seit schneidet, heißt eine **Transversale**[1]) desselben.

Scholie.

Da jede Grade, welche sich mit n Graden schneidet, im Allgemeinen n Schnittpunkte liefert, so ist die Anzahl der Ecken eines n-Seits im Allgemeinen

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \ldots \text{Arithm. §. 91 (5.).}$$

Es hat also das Dreiseit 3 Ecken, wie das Dreieck, das Vierseit 6, das Fünfseit 10 Ecken, u. s. w.

---

1) Von transversus, hindurch.

Die Anzahl der Diagonalen eines n-Seits, dessen Ecken sämmtlich von einander verschieden sind, beträgt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$, so daß ein solches Dreiseit 0, ein Vierseit 3, ein Fünfseit 15 Diagonalen hat, u. s. w.

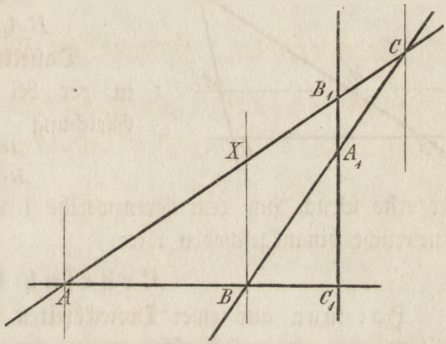
Von Dreiseitstransversalen haben wir schon einige Ecktransversalen kennen gelernt, d. h. solche, welche durch eine Ecke gehen, nehmlich die Höhen, die Mittellinien, die Halbierungslinien der Winkel und der Außenwinkel.

Es wird sich jetzt um die allgemeinen Eigenschaften der Transversalen handeln.

§. 180.

Lehrsatz I (des Menelaus[1]).

Die beiden Producte der drei auf verschiedenen Seiten eines Dreiseits liegenden Abstände der Ecken von den Schnittpunkten einer Transversale sind gleich.



Vrs. Die Seite BC eines Dreiseits ABC wird von einer Transversale in A_1, CA in B_1, AB in C_1 geschnitten.

Beh. Es ist

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1.$$

Bew. Parallel zur Transversale ziehe man durch die drei Ecken des Dreiseits grade Linien und bezeichne den Durchschnittspunkt der einen von ihnen, etwa der durch B gelegten, mit der Gegenseite AC durch X. Dann ist:

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{BC_1}{XB_1},$$

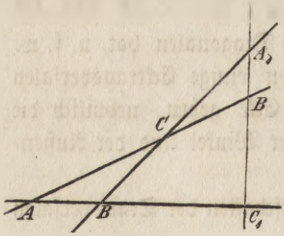
$$\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{XB_1}{BA_1} \quad \ldots \text{§. 151.}$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so fällt rechts die Größe XB_1 fort, und es geht hervor:

$$\frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BC_1}{BA_1};$$

1) Menelaus, aus Alexandria gebürtig, lebte zur Zeit Trajans (c. 100 n. Chr.) n Rom.

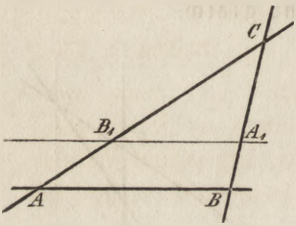
was sich nach Multiplication mit dem Product der Nenner nicht von der Beh. unterscheidet.



Anm. Die drei Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 können entweder auf zwei Dreiecksseiten und der Verlängerung der dritten oder auf den drei Verlängerungen liegen.

Zusatz.

Ist eine Transversale einer Dreiseitsseite parallel, so sind die beiden Producte der auf verschiedenen Seiten liegenden Abstände der Ecken von den beiden vorhandenen Schnittpunkten einander gleich.



— Denn es ist

$$\frac{BA_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{CB_1} \ldots \text{§. } 151.$$

$$BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1.$$

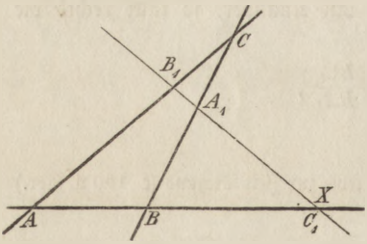
Dasselbe folgt aber auch daraus, daß in der bei drei Schnittpunkten geltenden Gleichung

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

der erste Bruch sich dem Grenzwerthe 1 nähert, wenn C_1 auf AB ins Unendliche hinausgeschoben wird.

Lehrsatz II.

Hat man auf zwei Dreiecksseiten und einer Verlängerung der dritten oder nur auf Verlängerungen der drei Seiten je einen Punkt von solcher Lage, daß die beiden Producte der drei auf verschiedenen Seiten liegenden Abstände von den Ecken gleich sind, so befinden sich die drei fraglichen Punkte in einer einzigen Graden.



Vrs. Beim $\triangle ABC$ liegt auf BC ein Punkt A_1, auf CA ein Punkt B_1 und auf der Verlängerung von AB über B hinaus ein Punkt C_1 so, daß

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$$

ist. Oder es liegen auch A_1 und B_1 auf Verlängerungen von BC und CA.

Beh. Die drei Punkte A_1, B_1, C_1 liegen auf einer Graden.

Bew. Man ziehe die Grade A_1B_1. Dieselbe muß sich mit der Graden AB in irgend einem Punkte X schneiden; denn wenn sie mit ihr parallel wäre, so würde

$$\frac{BA_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}, \ldots \text{§. 151.}$$

$$BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1$$

sein, was durch Division in die vorausgesetzte Gleichung

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$$

zu der unmöglichen Gleichung

$$AC_1 = BC_1$$

führte. (Unmöglich ist die letztere, weil C_1 in einer Verlängerung von AB gegeben ist.)

Da also ein Schnittpunkt X existirt, so ist:

$$AX \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BX \ \ldots \text{L. I.}$$

Dividirt man aber diese Gleichung durch die gegebene, so folgt:

$$\frac{AX}{AC_1} = \frac{BX}{BC_1} = \frac{AX - BX}{AC_1 - BC_1} = \frac{AB}{AB} = 1; \ \ldots \text{Arithm. §. 43,}$$

d. i.:
$$AX = AC_1, \ BX = BC_1;$$

was nur angeht, wenn C_1 identisch ist mit dem Punkte X der Graden A_1B_1.

Das Bedenken gegen die letzten Folgerungen, daß X und C_1 vielleicht auf verschiedenen Verlängerungen von AB liegen möchten, hebt sich dadurch, daß dann die Gleichung

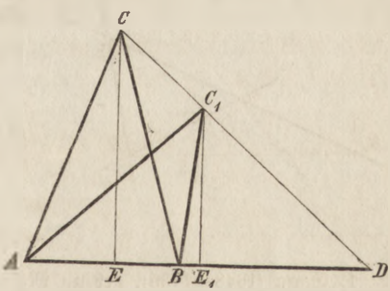
$$\frac{AX}{AC_1} = \frac{BX}{BC_1}$$

unmöglich wäre.

§. 181.

Lemma.

Das Verhältnis zweier Dreiecksfelder über einer Grundlinie ist gleich dem Verhältnis der auf der Verbindungslinie ihrer Spitzen gemessenen Abstände der Spitzen von der gemeinsamen Grundlinie.



Vrs. Die Grade CC_1, welche durch die Ecken C und C_1 der Dreiecke ABC und ABC_1 hindurchgeht, trifft die Grade AB in D.

Beh. Es ist:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC_1} = \frac{CD}{C_1D}.$$

Bew. Zieht man

$CE \perp AB$, $C_1E_1 \perp AB$, so ist $\triangle CDE \sim \triangle C_1DE_1$ (2w), folglich:

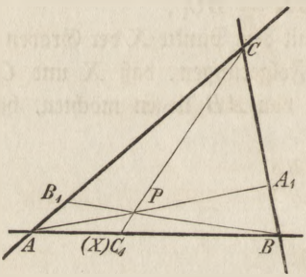
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC_1} = \frac{CE}{C_1E_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \quad \ldots \text{§. 144, Z. II u. §. 151.}$$

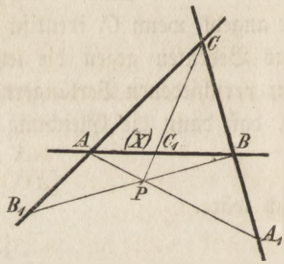
Anm. Liegen die beiden Dreiecke ABC und ABC_1 auf verschiedenen Seiten von AB, oder erleidet die Figur sonst eine andere Abänderung, so bleibt der Beweis stets wörtlich derselbe.

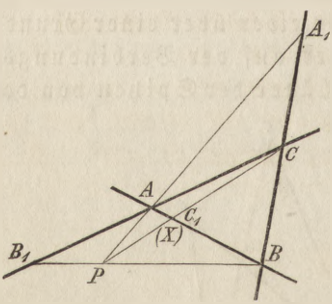
§. 182.

Lehrsatz I (des Ceva[1]).

Schneiden drei durch einen Punkt hindurch gehende Ecktransversalen eines Dreiseits sich mit den Gegenseiten, so sind die beiden Producte aus den je drei auf verschiedenen Seiten liegenden Abständen der Ecken von jenen Schnittpunkten einander gleich.







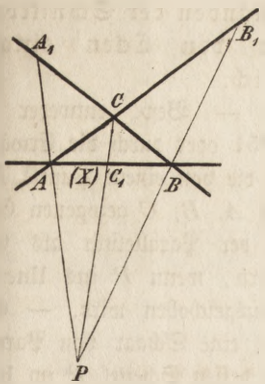
Vrs. Durch einen Punkt P gehen die drei Ecktransversalen AA_1, BB_1, CC_1 eines Dreiseits ABC, welche die Gegenseiten in den Punkten A_1, B_1, C_1 schneiden.

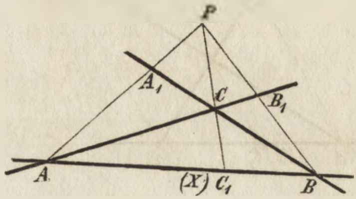
Beh. Es ist:

$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$.

Bew. I. Vergleicht man die

1) Ceva (1648—1736), geb. zu Mailand.





Felder je zweier Dreiecke, welche die Strecken PC, PB, PA zur gemeinsamen Grundlinie und ihre Spitzen in den Ecken des gegebenen Dreiseits haben, so folgt nach dem vor. §.:

$$\frac{\triangle PCA}{\triangle PCB} = \frac{AC_1}{BC_1},$$
$$\frac{\triangle PCB}{\triangle PBA} = \frac{CB_1}{AB_1},$$
$$\frac{\triangle PBA}{\triangle PCA} = \frac{BA_1}{CA_1}.$$

Durch Multiplication dieser drei Gleichungen folgt:

$$1 = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1},$$

und hieraus die behauptete Gleichung, wenn man noch mit dem Product der Nenner multiplicirt.

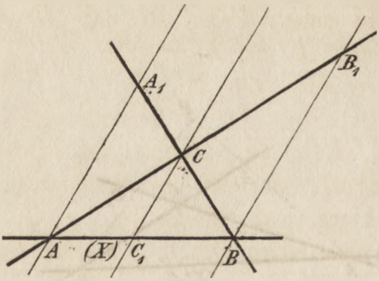
Bew. II. Beachtet man, daß das $\triangle CC_1B$ die Transversale APA_1 und das $\triangle CC_1A$ die Transversale BPB_1 hat, so ergeben sich durch Anwendung des Menelaischen Satzes die beiden Gleichungen:

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CP = C_1P \cdot CA_1 \cdot AB,$$
$$CB_1 \cdot AB \cdot C_1P = BC_1 \cdot AB_1 \cdot CP.$$

Multiplicirt man dieselben mit einander und dividirt dann beide Seiten der erhaltenen Gleichung mit dem Product $AB \cdot CP \cdot C_1P$, so geht das hervor, was behauptet ist.

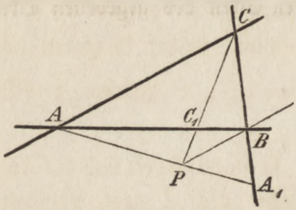
Zusätze.

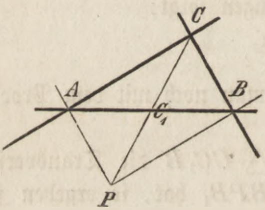
I. Schneiden drei parallele Ecktransversalen eines Dreiseits sich mit den Gegenseiten, so sind die beiden Producte aus den je drei auf verschiedenen Seiten liegenden



Abständen der Schnittpunkte von den Ecken einander gleich.

— Bew. entweder durch §. 151 oder durch die Erwägung, daß die von einem Punkte P aus nach A, B, C gezogenen Graden sich der Parallelität als Grenze nähern, wenn P ins Unendliche hinausgeschoben wird. — Es ist schon früher besprochen worden, daß man eine Schaar von Parallelen auch sonst als ein Büschel behandeln kann, dessen Scheitel P im Unendlichen liege.





II. Wenn ein Strahl eines Büschels von Ecktransversalen eines Dreiseits der Gegenseite parallel ist, so sind die Producte der Abstände der auf verschiedenen Seiten vorhandenen Schnittpunkte von den Ecken gleich.

— Ist nehmlich $PB \mp AC$, so hat man

$$AC_1 \cdot BA_1 = CA_1 \cdot BC_1 ;$$

und ist dann ferner noch

$$PA \mp BC, \text{ so folgt: } AC_1 = BC_1 .$$

Lehrsatz II.

Hat man **auf den drei Seiten** eines Dreiecks **oder auf einer Seite und auf Verlängerungen der beiden andern** je einen Punkt von solcher Lage, daß die beiden Producte aus je drei auf verschiedenen Seiten liegenden Abständen derselben von den Ecken gleich sind, so schneiden sich die drei durch jene Punkte hindurchgehenden Ecktransversalen in einem Punkt oder sind parallel. Das Letztere kann jedoch nur dann vorkommen, wenn von den gegebenen Punkten zwei auf Verlängerungen zweier Seiten über eine Ecke hinaus liegen.

Vrſ. Auf einer Seite AB eines $\triangle ABC$ iſt ein Punkt C_1 gegeben und außerdem auf den beiden andern Seiten BC und AC oder auf Verlängerungen beider je ein Punkt A_1 und B_1 ſo, daß

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$$

iſt.

Beh. Die drei Graden AA_1, BB_1, CC_1 ſchneiden ſich in einem Punkt, können aber, wenn A_1 und B_1 beide auf den Verlängerungen von BC und AC über C hinaus liegen, auch parallel ſein.

Bew. Zieht man zunächſt nur die beiden Graden AA_1 und BB_1, ſo ſchneiden ſich dieſelben in einem Punkte P oder ſind parallel. Dann ziehe man, je nachdem das Eine oder das Andere eintritt, die Grade PC oder durch C eine Parallele zu jenen und benenne den Durchſchnittspunkt derſelben mit AB durch X. (Vergl. die Figuren zum vorigen Satz.) Alsdann iſt:

$$AX \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BX, \quad \ldots \text{ L. I oder Z. I,}$$

was durch Diviſion mit der gegebenen Gleichung zu der folgenden führt:

$$\frac{AX}{AC_1} = \frac{BX}{BC_1} = \frac{AX + BX}{AC_1 + BC_1} = \frac{AB}{AB} = 1; \quad \ldots \text{ Arithm. §. 43.}$$

$$AX = AC_1, \; BX = BC_1.$$

Da demnach X mit C_1 zuſammenfällt, ſo unterſcheidet ſich die Transverſale CC_1 nicht von der Graden CX, welche durch P geht, beziehungsweiſe mit AA_1 und BB_1 parallel iſt.

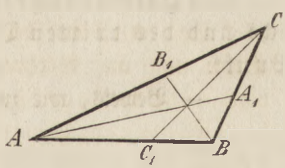
§. 183.

Anwendungen der Umkehrungen des Cevaſchen und des Menelaiſchen Satzes.

Lehrſatz I.

Die Halbierungslinien der drei Winkel eines Dreiecks ſchneiden ſich in einem Punkt.

Bew. Werden die Winkel des $\triangle ABC$ von den Graden AA_1, BB_1, CC_1 halbiert, ſo iſt nach §. 152, L. I:



$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC},$$

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC},$$

$$\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB};$$

folglich durch Multiplication:

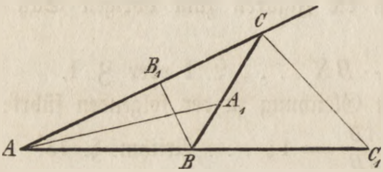
$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1,$$

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1;$$

weshalb die drei Transversalen AA_1, BB_1, CC_1 sich nach §. 182, L. II in einem Punkte schneiden.

Lehrsatz II.

Die drei Punkte, in denen die Seiten eines Dreiseits von den Halbierungslinien zweier Winkel und des Außenwinkels an der dritten Ecke geschnitten werden, liegen in einer Graden.



Bew. Sind A_1, B_1 im Dreiseit ABC die Punkte, in denen die Seiten BC und CA von den Halbierungslinien der Winkel bei A und B geschnitten werden, während AB in C_1 von der Halbierungslinie des Außenwinkels bei C geschnitten wird, so ist nach §. 152:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB};$$

also:

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1,$$

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1;$$

weshalb nach §. 180, L. II die drei Punkte A_1, B_1, C_1 in einer Graden liegen.

Lehrsatz III.

Die Halbierungslinien zweier Außenwinkel eines Dreiecks und des dritten Dreieckswinkels schneiden sich in einem Punkt.

— Beweis, wie zu L. I.

Lehrsatz IV.

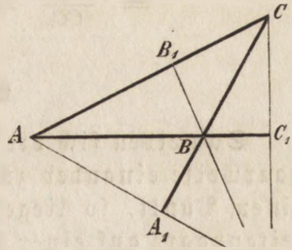
Die drei Durchschnittspunkte der Außenwinkel eines Dreiseits mit den Gegenseiten liegen in einer Graden.

— Beweis, wie zu L. II.

Lehrsatz V.

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Bew. Sind AA_1, BB_1, CC_1 die drei Höhen eines $\triangle ABC$, so ist wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln:



$\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B$, folglich: $\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$,

$\triangle BA_1A \sim \triangle BC_1C$, " $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{AB}{BC}$,

$\triangle CB_1B \sim \triangle CA_1A$, " $\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{BC}{AC}$.

Da das Product der rechten Seiten dieser Gleichungen $= 1$ ist, so folgt:

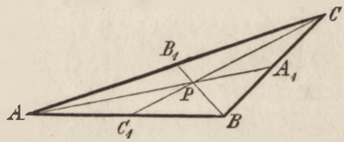
$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1.$$

Dies zeigt nach §. 182, L. II an, daß die drei Höhen durch einen einzigen Punkt gehen, weil je zwei von ihnen als Senkrechte zu den Schenkeln eines Winkels sich nothwendig schneiden.

Lehrsatz VI.

Die drei Mittellinien[1]) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt[2]); und zwar so, daß die einzelne Mittellinie das Dreifache ihres an der Seite liegenden Abschnitts beträgt.

Bew. Sind AA_1, BB_1, CC_1 die Mittellinien des $\triangle ABC$, so ist:



$$AC_1 = BC_1,$$
$$BA_1 = CA_1,$$
$$CB_1 = AB_1.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich zweierlei:

1) daß die drei Mittellinien sich in einem Punkt P schneiden, weil durch Multiplication die Gleichung

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$$

hervorgeht (§. 182, L. II);

2) daß

$$\triangle APB = \triangle BPC = \triangle CPA$$

ist, weil die Verbindungslinie der Spitzen je zweier von deren gemeinsamer Grundlinie halbiert wird. (§. 181.)

---

1) Vergl. §. 157.

2) Dieser Punkt heißt der „Schwerpunkt" des Dreiecks.

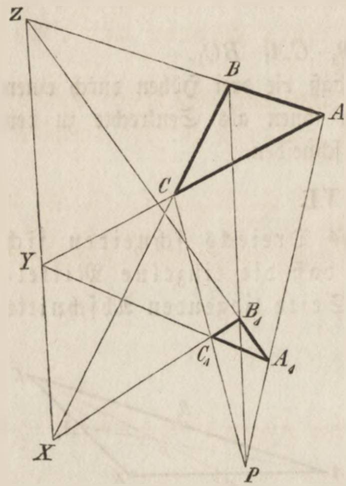
Mithin ist ferner:

$$\frac{1}{3} = \frac{\triangle APB}{\triangle ACB} = \frac{\triangle BPC}{\triangle BAC} = \frac{\triangle CPA}{\triangle CBA}$$

$$= \frac{PC_1}{CC_1} = \frac{PA_1}{AA_1} = \frac{PB_1}{BB_1} \ldots \text{§. } 181.$$

Lehrsatz VII.

Schneiden sich die drei graden Verbindungslinien der paarweise einander zugeordneten Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Graden; und umgekehrt.



Bew. Schneiden sich die Graden AA_1, BB_1, CC_1, welche durch die Ecken der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ bestimmt werden, in einem Punkte P, während sich BC mit B_1C_1 in X, CA mit C_1A_1 in Y, AB mit A_1B_1 in Z schneidet, so ist in Folge des Menelaischen Satzes:

$AZ \cdot BB_1 \cdot PA_1 = AA_1 \cdot PB_1 \cdot BZ$, ... Tr. ZB_1A_1 von $\triangle PAB$.
$BX \cdot CC_1 \cdot PB_1 = BB_1 \cdot PC_1 \cdot CX$, ... „ XB_1C_1 „ $\triangle PBC$.
$CY \cdot AA_1 \cdot PC_1 = CC_1 \cdot PA_1 \cdot AY$, ... „ YC_1A_1 „ $\triangle PCA$.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander und dividirt dann durch das Product der Factoren, welche beiden Seiten gemein sind, so erhält man:

$$AZ \cdot BX \cdot CY = AY \cdot CX \cdot BZ.$$

Es liegen also X, Y, Z in einer Graden (§. 180, L. II).

Daß auch die Umkehrung dieses Satzes Gültigkeit hat, d. h. daß die Graden AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt gehen, wenn X, Y, Z in einer Graden liegen, erkennt man auf folgende Weise:

Ginge die Grade PA, welche von dem Durchschnittspunkte P der Graden BB_1 und CC_1 nach A gezogen ist, nicht durch A_1, so müßte sie sich mit B_1A_1 in einem von A_1 verschiedenen Punkt schneiden, und die grade Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit C_1 würde demnach die Grade AC in einem von Y verschiedenen Punkt treffen, d. i. in einem Punkte, welcher nicht in der Graden XZ liegt. Das widerspricht aber dem so eben bewiesenen Satze.

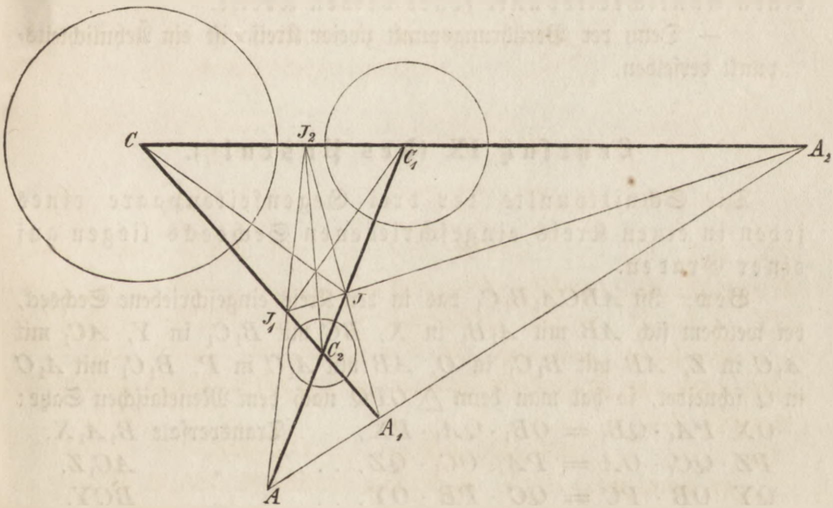
Anm. Der Punkt P heißt das Centrum, die Grade XYZ die Axe der Homologie für die homologischen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$.

Lehrsatz VIII.

Bei drei beliebig gegebenen Kreisen liegen die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte auf einer Graden und ebenso je zwei innere mit einem äußeren.

Die graden Verbindungslinien der Centren mit den inneren Ähnlichkeitspunkten der anderen Kreise schneiden sich in einem Punkt.

Bew. Man bezeichne die Radien der Kreise um C, C_1, C_2 mit r, r_1, r_2, die äußeren Ähnlichkeitspunkte mit A, die inneren mit J,



indem man diesen Buchstaben solche Indices anhängt, daß auf jeder Centralen jede Nummer vorkommt.

Dann ist, weil die Kreiscentren entsprechende Punkte der ähnlichen Kreise sind:

$$\frac{CA_2}{C_1A_2} = \frac{r}{r_1}, \quad \frac{C_1A}{C_2A} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{C_2A_1}{CA_1} = \frac{r_2}{r};$$

mithin:

$$CA_2 \cdot C_1A \cdot C_2A_1 = CA_1 \cdot C_2A \cdot C_1A_2.$$

Folglich liegen die drei Punkte A, A_1, A_2 auf einer Graden (§. 180, L. II).

Ersetzt man A_2 durch J_2, A_1 durch J_1, so findet man dasselbe Resultat für die drei Punkte A, J_1, J_2.

Ersetzt man endlich alle A durch die J, so erkennt man auf dieselbe Weise, daß CJ, C_1J_1, C_2J_2 sich in einem Punkte schneiden (§. 182, L. II).

— Dieser Punkt ist das Centrum, AA_1A_2 die Axe der Homologie für die Dreiecke CC_1C_2 und JJ_1J_2.

Anm. Die vier Graden, auf denen je drei Ähnlichkeitspunkte liegen, heißen die Ähnlichkeitsaxen der drei Kreise.

Zusatz.

Werden zwei Kreise von einem dritten berührt, so geht die grade Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt jener beiden Kreise.

— Denn der Berührungspunkt zweier Kreise ist ein Aehnlichkeitspunkt derselben.

Lehrsatz IX (des Pascal[1]).

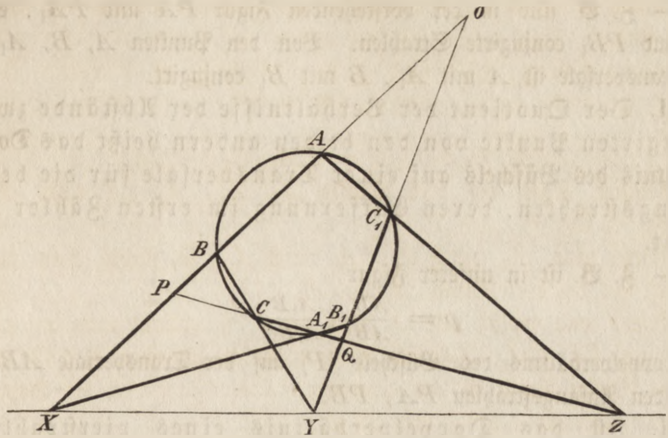
Die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare eines jeden in einen Kreis eingeschriebenen Sechsecks liegen auf einer Graden.

Bew. Ist $ABCA_1B_1C_1$ das in den Kreis eingeschriebene Sechseck, bei welchem sich AB mit A_1B_1 in X, BC mit B_1C_1 in Y, AC_1 mit A_1C in Z, AB mit B_1C_1 in O, AB mit A_1C in P, B_1C_1 mit A_1C in Q schneidet, so hat man beim $\triangle\, OPQ$ nach dem Menelaischen Satze:

$OX \cdot PA_1 \cdot QB_1 = OB_1 \cdot QA_1 \cdot PX$, ... Transversale B_1A_1X.
$PZ \cdot QC_1 \cdot OA = PA \cdot OC_1 \cdot QZ$, ... „ AC_1Z.
$QY \cdot OB \cdot PC = QC \cdot PB \cdot OY$; ... „ BCY.

---

1) 1623—1662, geb. zu Clermont.



Ferner ist nach §. 160:

$$OB_1 \cdot OC_1 = OB \cdot OA,$$
$$QA_1 \cdot QC = QB_1 \cdot QC_1,$$
$$PA \cdot PB = PA_1 \cdot PC.$$

Multiplicirt man diese sechs Gleichungen mit einander und dividirt dann auf beiden Seiten durch das Product der gemeinsamen Factoren, so erhält man:

$$OX \cdot PZ \cdot QY = OY \cdot QZ \cdot PX.$$

Hierdurch ist die Behauptung erwiesen (§. 180, L. II).

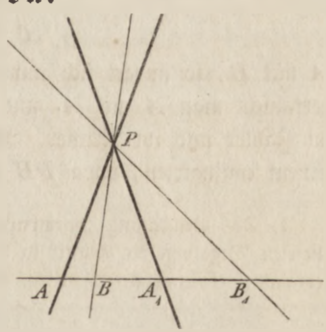
Zusatz.

Die Durchschnittspunkte der Seiten eines in einen Kreis eingeschriebenen Dreiecks mit den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken liegen in einer Graden.

§. 184.

Definitionen.

I. In einem Büschel, welches aus vier Graden besteht, nennt man je zwei nicht benachbarte Graden **conjugirt**[1]), die Durchschnittspunkte conjugirter Graden mit einer Transversalen **conjugirte Punkte** der letzteren.



1) conjugare, zusammenkoppeln.

— Z. B. sind in der vorstehenden Figur PA und PA_1, ebenso PB und PB_1 conjugirte Strahlen. Von den Punkten A, B, A_1, B_1 der Transversale ist A mit A_1, B mit B_1 conjugirt.

II. Der Quotient der Verhältnisse der Abstände zweier conjugirten Punkte von den beiden andern heißt das **Doppelverhältnis des Büschels** auf einer Transversale für die beiden Anfangsstrahlen, deren Entfernung im ersten Zähler vorkommt.

— Z. B. ist in unserer Figur

$$p = \frac{AB}{AB_1} : \frac{A_1B}{A_1B_1}$$

das Doppelverhältnis des Büschels (P) auf der Transversale AB_1 für die beiden Anfangsstrahlen PA, PB.

III. Ist das Doppelverhältnis eines vierstrahligen Büschels auf einer Transversale $= 1$, oder m. a. W.: sind die Verhältnisse der Abstände zweier conjugirten Punkte von den beiden andern gleich groß, so heißen die Punkte, so wie das Büschel und die gleichen Verhältnisse **harmonisch.**[1])

— Für harmonische Punkte A, B, A_1, B_1 ist also:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{A_1B}{A_1B_1}.$$

Zusätze.

I. Das Doppelverhältnis

$$p = \frac{AB}{AB_1} : \frac{A_1B}{A_1B_1} = \frac{AB \cdot A_1B_1}{AB_1 \cdot A_1B}$$

ändert sich nicht, wenn man die beiden Anfangsstrahlen unter sich oder beide zugleich mit den conjugirten Strahlen vertauscht; vertauscht man aber nur einen Strahl mit seinem conjugirten, so nimmt es den reciproken Werth an.

— Vertauscht man nehmlich in dem Ausdruck

$$p = \frac{AB \cdot A_1B_1}{AB_1 \cdot A_1B}$$

A mit B, so ändert sich nur die Folge der Factoren des Nenners, und vertauscht man A mit A_1 und zugleich B mit B_1, so geschieht dasselbe im Zähler und im Nenner. Vertauscht man aber nur einen Strahl mit seinem conjugirten, etwa PB mit PB_1, so geht p über in

1) Die Benennung „harmonisch" (von ἁρμονία) ist auf einem ziemlich complicirten Wege von der Akustik in die Geometrie gelangt. Brianchon hat sie zuerst gebraucht. (Lignes du 2. ordre. 1817.)

$$p' = \frac{AB_1 \cdot A_1B}{AB \cdot A_1B_1};$$

und es ist offenbar

$$p \cdot p' = 1.$$

II. Das Doppelverhältnis eines harmonischen Büschels ändert sich bei keiner Vertauschung der Anfangsstrahlen.

Für vier harmonische Punkte A, B, A_1, B_1 ist:

$$AB \,.\, A_1B_1 = AB_1 \cdot A_1B;$$

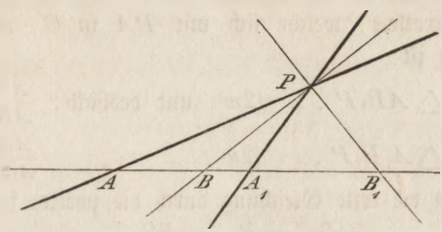
also in der Form von Proportionen:

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{A_1B}{A_1B_1},$$

$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{B_1A}{B_1A_1},$$

u. s. w.

III. Jede Transversale wird von zwei Graden und den Halbierungslinien ihrer Winkel harmonisch geschnitten.



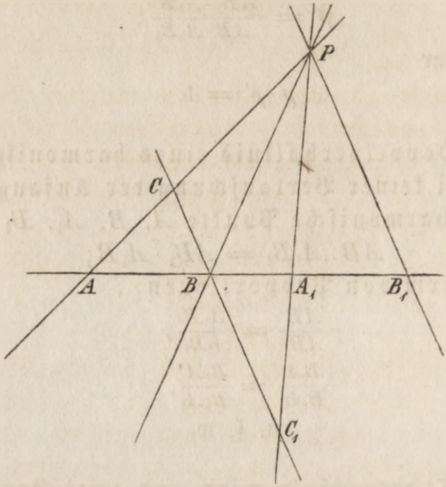
— Denn es ist, wenn P den Scheitel des Büschels bedeutet:

$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{B_1A}{B_1A_1} = \frac{PA}{PA_1}.$$

§. 185.

Lehrsatz (des Pappus).

Das Doppelverhältnis eines vierstrahligen Büschels ist unabhängig von der Lage der Transversale, nehmlich gleich dem Verhältnis, in welchem der Abschnitt zwischen den Anfangsstrahlen zu dem andern Abschnitt auf einer solchen Transversale steht, welche mit einem der conjugirten Strahlen parallel gezogen ist.



Bew. Zieht man zu dem Strahle PB_1 eines Büschels, welches von einer Transversale in den Punkten A, B, A_1, B_1 geschnitten wird, durch B eine Parallele, welche sich mit PA in C, mit PA_1 in C_1 schneiden mag, so ist:

$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1P \ \ldots \ (2w), \text{ und deshalb: } \frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{PB_1};$$

$$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle A_1B_1P \ \ldots \ (2w), \quad " \quad " \quad \frac{A_1B}{A_1B_1} = \frac{BC_1}{PB_1}.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so folgt:

$$\frac{AB}{AB_1} : \frac{A_1B}{A_1B_1} = \frac{BC}{BC_1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber erstens unabhängig von der Richtung, in welcher die Transversale AB durch B hindurchgeht, ändert sich also nicht, wenn man AB um B dreht; und zweitens behält sie nach §. 153 ihren Zahlenwerth, wenn man CBC_1 parallel mit sich selbst (und mit PB_1) so weit verschiebt, daß B in eine zweite beliebig gegebene Transversale gelangt.

Daher ist auch die linke Seite, welche das Doppelverhältnis enthält, unabhängig von der Lage der Transversale; w. z. b. w.

Anm. Dreht man die Transversale AB um B so, daß sie sich der mit PB_1 parallel gezogenen Graden CBC_1 als ihrer Grenzlage nähert, so nähert sich in dem Doppelverhältnis, wenn man es in der Form

$$\frac{BA}{BA_1} : \frac{B_1A}{B_1A_1}$$

geschrieben hat, der zweite Bruch dem Grenzwerthe 1, während der erste unmittelbar in $\frac{BC}{BC_1}$ übergeht. Betrachtet man also die Parallelität einer Transversale mit einem Strahl des Büschels als einen Grenzfall, was hier stets geschehen soll, so braucht man auf ihn beim Aussprechen der Sätze keine besondere Rücksicht zu nehmen.

Zusätze.

I. Wird eine Transversale von einem Büschel harmonisch geschnitten, so geschieht dasselbe mit jeder andern.

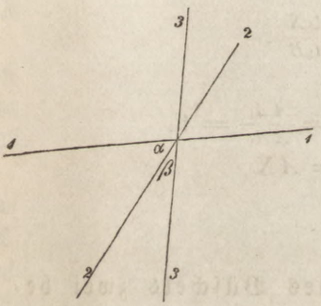
II. Jede Parallele zu einem Strahle eines harmonischen Büschels trägt zwischen den drei anderen Strahlen gleiche Abschnitte; und umgekehrt: trägt eine Parallele zu einem Strahl eines Büschels zwischen den drei anderen gleiche Abschnitte, so ist das Büschel harmonisch.

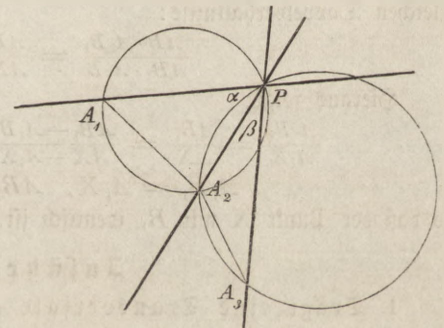
III. Zwei Büschel, welche durch dieselben vier Punkte einer Graden gehen, haben dasselbe Doppelverhältnis.

§. 186.*

Aufgabe.

Ein gegebenes Büschel aus drei Graden in eine solche Lage zu bringen, daß die letzteren einzeln durch einen für sie bestimmten Punkt gehen.





Anal. Sind A_1, A_2, A_3 drei beliebige Punkte mit der Bestimmung, daß der Strahl 1 durch A_1, 2 durch A_2, 3 durch A_3 gelegt werden soll, so wird die Lage P des Scheitels offenbar gefunden als der zweite Schnittpunkt zweier Kreise, welche über den Sehnen A_1A_2 und A_2A_3 auf einer Seite der gebrochenen Linie $A_1A_2A_3$ Peripheriewinkel α und β fassen, die dem Winkel der Strahlen 1 und 2, beziehungsweise 2 und 3, gleich sind.

Fällt der zweite Schnittpunkt P der beiden Kreise auf die andere Seite der gebrochenen Linie $A_1A_2A_3$, als auf welcher die Peripheriewinkel $= \alpha$ und $= \beta$ sind, so wird die Construction dadurch nicht beeinträchtigt, weil, wie aus der ersten Figur ersichtlich ist, die Supplemente von α und β denselben Zweck erfüllen, wie α und β selbst.

Determination. Es giebt zwei Auflösungen der Aufgabe, da man die Peripheriewinkel α und β auf der einen und eben sowohl auf der anderen Seite von $A_1A_2A_3$ beschaffen kann. Ist $A_1A_2A_3$ eine einzige Grade, so liegen die beiden möglichen Punkte P symmetrisch gegen dieselbe.

Lehrsatz.

Jedes Büschel, welches dasselbe Doppelverhältnis hat, wie ein anderes, läßt sich auf zweifache Weise zu ihm perspectivisch legen, d. h. in eine solche Lage bringen, daß es eine bestimmte Transversale des andern Büschels in denselben Punkten schneidet, wie dieses.

Bew. Wird das eine Büschel von einer Transversale in den Punkten A, B, A_1, B_1 geschnitten, so lege man das zweite Büschel so hin, daß diejenigen drei Nachbarstrahlen durch A, B, A_1 hindurchgehen, welche den hier schneidenden Strahlen des ersten Büschels entsprechen. Bedeutet dann X den vierten Schnittpunkt des zweiten Büschels, so sind die gleichen Doppelverhältnisse:

$$\frac{AB \cdot A_1B_1}{AB_1 \cdot A_1B} = \frac{AB \cdot A_1X}{AX \cdot A_1B}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{A_1B_1}{A_1X} = \frac{AB_1}{AX} = \frac{AB_1 - A_1B_1}{AX - A_1X} = \frac{AA_1}{AA_1} = 1,$$

$$A_1B_1 = A_1X, \quad AB_1 = AX,$$

so daß der Punkt X mit B_1 identisch ist.

Zusätze.

I. **Trägt eine Transversale eines Büschels zwei benachbarte Abschnitte, deren Verhältnis dem Doppelverhältnis des Büschels gleich ist, so ist die Transversale dem vierten Strahle parallel.**

II. **Trägt eine Transversale eines harmonischen Büschels zwei gleiche benachbarte Abschnitte, so ist sie dem vierten Strahle parallel.** [1]

---

1) Vergl. 184, Z. II.

Scholie.

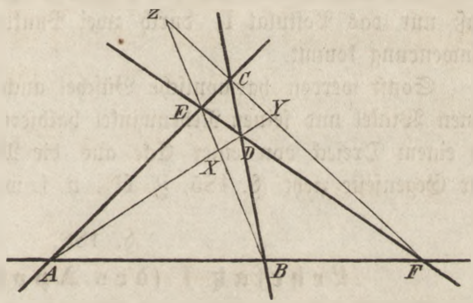
Die Büschel, welche gleiche Doppelverhältnisse haben und deshalb (nach dem letzten Lehrsatz) in perspectivische Lagen gebracht werden können, nennt man projectivisch, auch homographisch oder conform. Sie bilden ein wichtiges Betrachtungsmittel in der sogenannten „neueren Geometrie", deren Hauptschöpfer Steiner durch sein Werk „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander", Berlin 1832, geworden ist. Hier können wir uns jedoch nicht im Allgemeinen eingehender mit ihnen befassen, sondern müssen uns auf die Grundeigenschaften einer besonderen Art von ihnen, der harmonischen, beschränken.

§. 187.

Lehrsatz.

Jede Diagonale eines Vierseits wird durch die Ecken und die Schnittpunkte der andern Diagonalen harmonisch getheilt.

Vrs. Es ist ein Vierseit $ABCDEF$ gegeben, dessen Diagonalen AD, BE, CF sich in den Punkten X, Y, Z schneiden.



Beh. Jede Diagonale ist in den vier auf ihr benannten Punkten harmonisch getheilt.

Bew. Um den Beweis für eine beliebige Diagonale FC zu führen, wähle man unter den über ihr liegenden Dreiecken ein beliebiges, etwa $\triangle FCA$, aus und wende auf dasselbe den Cevaschen und den Menelaischen Satz an, für welche die Figur alle Linien bietet.

Es geben nehmlich die drei durch D gehenden Ecktransversalen des $\triangle FCA$ die Gleichung:

$$FY \cdot CE \cdot AB = CY \cdot FB \cdot AE; \quad \ldots \text{§. 182, L. I}$$

und da dasselbe $\triangle FCA$ auch von der Transversale ZEB geschnitten wird, so ist ferner:

$$FZ \cdot CE \cdot AB = CZ \cdot FB \cdot AE \quad \ldots \text{§. 180, L. I.}$$

Dividirt man aber die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man sofort:

$$\frac{FY}{FZ} = \frac{CY}{CZ}.$$

Aufgabe.

Zu drei gegebenen Punkten einer Graden den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Aufl. Der so eben bewiesene Satz giebt die Anleitung zu folgender Construction:

Man errichte über der Entfernung derjenigen Punkte F und C (der obigen Figur), welche conjugirt sein sollen, ein $\triangle FCA$, ziehe durch den dritten gegebenen Punkt Z eine Transversale ZEB, verbinde die Schnittpunkte E und B kreuzweise mit den Ecken F und C und ziehe durch den Durchschnittspunkt D derselben die Grade ADY.

Wie die Punkte F, C, Z auf einander folgen, ist bei dieser Construction völlig gleichgültig.

Scholie.

Diese Construction hat den großen Vorzug vor allen sonst möglichen, daß nur das Postulat I, durch zwei Punkte eine Grade zu ziehen, in Anwendung kommt.

Sonst werden harmonische Büschel auch dadurch erhalten, daß man einen Winkel und seinen Nebenwinkel halbiert (§. 184, Z. III), daß man in einem Dreieck von einer Ecke aus die Mittellinie und die Parallele zur Gegenseite zieht (§. 185, Z. II), u. s. w.

§. 188.

Lehrsatz I (des Apollonius[1]).

Der Kreis, welcher die Entfernung zweier conjugirten harmonischen Punkte zum Durchmesser hat, ist der geome-

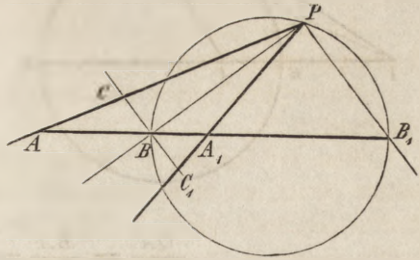
1) Apollonius aus Perga in Pamphylien (um 240 v. Chr. unter Ptolemäus Soter zu Alexandrien lehrend) publicirte diesen Satz in seinem Buche über „ebene Örter". — Apollonischer Kreis.

Von dem Hauptwerk des Apollonius „Acht Bücher über die Kegelschnitte" sind uns die vier ersten griechisch, die drei folgenden in der arabischen Übersetzung erhalten.

Apollonius, Euklides (geb. um 300 v. Chr. zu Alexandrien, ein Schüler Platos), Archimedes (geb. zu Syracus um 287 v. Chr.) und Diophantus (um 160 oder 360 n. Chr. zu Alexandrien, berühmt durch seine Entdeckungen in der Algebra, d. i. in der Lehre von der Auflösung der Gleichungen) werden häufig als die vier größten Mathematiker des Alterthums genannt.

metrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von den beiden andern conjugirten Punkten ein übereinstimmendes Verhältnis haben. Die beiden Nebenwinkel, welche die letzteren bilden, werden von den andern conjugirten Strahlen halbiert.

Vrs. A, B, A_1, B_1 sind harmonische Punkte; durch dieselben gehen die Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel P auf einem über BB_1 als Durchmesser gezogenen Kreise liegt.



Beh. Es ist:

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{BA}{BA_1}.$$

Bew. Zieht man durch B eine Parallele zu PB_1, welche PA in C und PA_1 in C_1 schneidet, so ist

$$BC = BC_1 \ldots \text{§. 185, Z. II.}$$

Ferner ist bei den Parallelen CC_1 und PB_1:

$$\angle CBP = \angle BPB_1 = \varkappa,$$

also: $\angle CBP = \angle C_1BP$;

mithin: $\triangle BPC \cong \triangle BPC_1, \ldots (sws)$

$$\angle BPC = \angle BPC_1;$$

und im $\triangle APA_1$:

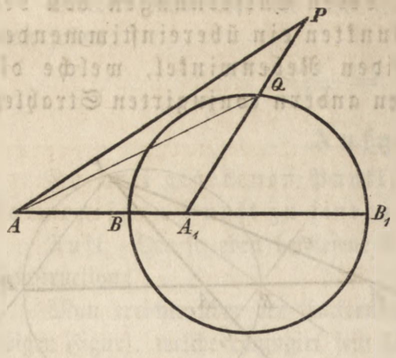
$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{BA}{BA_1} \ldots \text{§. 152, L. I.}$$

Zusatz.

Stehen zwei conjugirte Strahlen eines harmonischen Büschels auf einander senkrecht, so halbieren sie die Winkel der beiden andern.

Lehrsatz II.

Zieht man über der Entfernung zweier conjugirten harmonischen Punkte als Durchmesser einen Kreis und bildet das Verhältnis der Entfernungen der im Außen- und im Innenfelde liegenden anderen conjugirten Punkte von einem Punkte der Ebene, so ist dieses Verhältnis kleiner oder größer als das entsprechende harmonische, je nachdem jener Punkt außerhalb oder innerhalb des Kreisfeldes liegt.



Bew. Es seien A, B, A_1, B_1 die vier harmonischen Punkte; BB_1 sei Durchmesser eines Kreises, P ein Punkt der Ebene, von welchem die Graden PA und PA_1 ausgehen. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

I. Der Punkt P liegt außerhalb des Kreisfeldes.

Dann schneidet die Grade PA_1 den Kreis in einem Punkte Q und es ist nach Lehrs. I:

$$\frac{QA}{QA_1} = \frac{BA}{BA_1} = \frac{B_1A}{B_1A_1} > 1.$$

Da nun ein Bruch, welcher > 1 ist, abnimmt, wenn man Zähler und Nenner um gleich viel vergrößert[1]), so hat man:

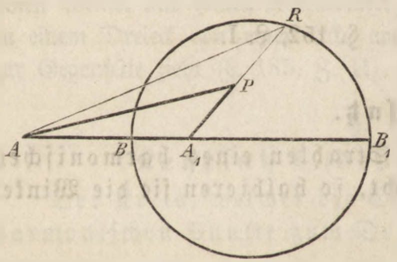
$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{QA}{QA_1} > \frac{QA + PQ}{QA_1 + PQ},$$

mithin, weil im $\triangle\, PQA$ die Ungleichung $QA + PQ > PA$ existirt:

$$\frac{BA}{BA_1} > \frac{PA}{PA_1};$$

was zu beweisen war.

II. Der Punkt P liegt innerhalb des Kreisfeldes.



Dann schneidet die Verlängerung von A_1P den Kreis in einem Punkte R; und es ist nach Lehrs. I:

$$\frac{RA}{RA_1} = \frac{BA}{BA_1} = \frac{B_1A}{B_1A_1} > 1;$$

mithin nach dem so eben citirten und unten bewiesenen arithmetischen Satze:

$$\frac{BA}{BA_1} = \frac{RA}{RA_1} < \frac{RA - RP}{RA_1 - RP}.$$

Nimmt man hinzu, daß $RA - RP < PA$ ist, so geht hieraus hervor:

$$\frac{BA}{BA_1} < \frac{PA}{PA_1};$$

was zu beweisen war.

1) Sind nehmlich a, b und x absolute Zahlen, so ergeben sich aus der Ungleichung $a > b$ die folgenden:

$$ab + ax > ab + bx,$$
$$a(b + x) > b(a + x),\quad \frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}.$$

Lehrsatz III.

Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ist der Kreis über der Entfernung der beiden andern unter sich conjugirten harmonischen Punkte, welche durch jenes Verhältnis bestimmt werden. — Ist das Abstandsverhältnis = 1, so degenerirt der Kreis in die senkrechte Halbierungsgrade des Abstands der gegebenen Punkte.

Beweis dieser Umkehrung von L. I indirect.

§. 189.*

Lehrsatz.

Bestimmt man auf der graden Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte ähnlicher Figuren die beiden andern nach dem Ähnlichkeitsverhältnis einander zugeordneten harmonischen Punkte und zieht über ihrer Entfernung als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch den Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren, — sei der letztere isotrop oder antitrop.

— Denn sind A und A_1 entsprechends Punkte ähnlicher Figuren und P der Ähnlichkeitspunkt, also $\frac{PA}{PA_1}$ das Ähnlichkeitsverhältnis, so kann P nach §. 188, L. III nirgendwo anders als auf dem Kreise liegen, welcher auf der Graden AA_1 einen Durchmesser BB_1 hat und dieselbe nach dem Verhältnis

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{BA}{BA_1} = \frac{B_1A}{B_1A_1}$$

schneidet.

Aufgabe.

Den isotropen oder antitropen schiefen Ähnlichkeitspunkt zweier ähnlichen Figuren zu finden, bei welchen die Zuordnung dreier Punktpaare bekannt ist.

Anal. Je zwei Punktpaare bestimmen nach dem letzten Lehrsatz einen Apollonischen Kreis, auf welchem der Ähnlichkeitspunkt liegen muß. Zwei solche Kreise haben aber zwei Schnittpunkte und reichen deshalb nicht aus, um einen Punkt zu bestimmen, sondern es kann die Auswahl zwischen beiden Punkten erst getroffen werden, nachdem man aus dem dritten gegebenen Punktpaare ersehen hat, ob die ähnlichen Figuren isotrop oder antitrop liegen.

Scholie.

Der Apollonische Kreis kann oft mit Vortheil bei Dreiecksaufgaben verwandt werden, wenn das Verhältnis zweier Seiten oder die Halbierungslinie eines Winkels gegeben ist.

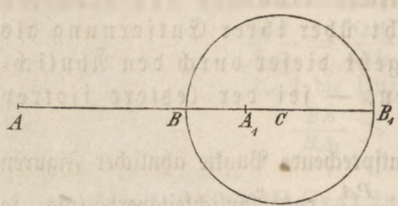
Besonders wichtig sind aber einige andere Eigenschaften, welche im Folgenden noch angedeutet werden sollen, nachdem die harmonische Proportion vorher in Bezug auf ihn zwei bemerkenswerthe Transformationen erfahren hat.

§. 190.

Lehrsatz I.

Bezeichnet man bei den harmonischen Punkten A, B, A_1, B_1 den Radius des Apollonischen Kreises über BB_1 durch r, die Strecken B_1A und B_1A_1 durch a und a_1, so ist:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{r}.$$



Bew. Es ist:

$$\frac{B_1A}{B_1A_1} = \frac{BA}{BA_1},$$

also:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a-2r}{2r-a_1} = \frac{2a-2r}{2r} = \frac{a-r}{r} \text{ . . . Arithm. §. 43.}$$

Dividirt man die erste und die letzte Seite dieser Gleichung durch a, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{r}.$$

Lehrsatz II.

Bezeichnet man bei den harmonischen Punkten A, B, A_1, B_1 durch C das Centrum und durch r den Radius des Apollonischen Kreises über BB_1, so ist:

$$CA \cdot CA_1 = r^2.$$

Bew. Es ist:

$$\frac{B_1A}{B_1A_1} = \frac{BA}{BA_1},$$

also:

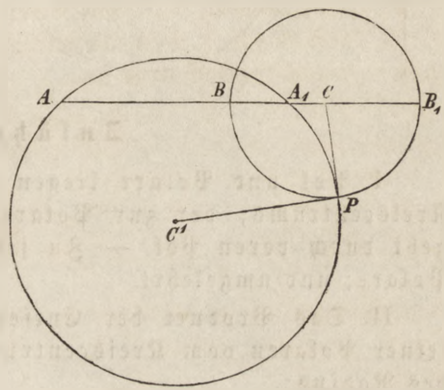
$$\frac{CA+r}{CA_1+r} = \frac{CA-r}{r-CA_1} = \frac{2\cdot CA}{2\cdot r} = \frac{2\cdot r}{2\cdot CA_1} \text{ . . . Arithm. §. 43.}$$

Aus der Gleichheit der beiden letzten Ausdrücke folgt:

$$CA \cdot CA_1 = r^2.$$

Zusätze.

I. Jeder Kreis, welcher durch zwei conjugirte harmonische Punkte geht, schneidet sich mit dem Apollonischen Kreise über den beiden andern rechtwinklig; d. h.: die Kreise schneiden sich so, daß in jedem Durchschnittspunkt die Tangenten der beiden Kreise rechtwinklig zu einander stehen (mit einem Radius des andern Kreises zusammenfallen).



— Denn zieht man in dem Apollonischen Kreise über BB_1 den Radius CP nach einem Punkte P, in welchem jener von einem durch die beiden andern conjugirten Punkte A und A_1 hindurchgehenden zweiten Kreise um C' geschnitten wird, so ist CP eine Tangente des letzteren, weil nach Lehrs. II

$$CP^2 = CA \cdot CA_1$$

ist. Mithin ist $\angle CPC' = R$, und $C'P$ Tangente des Kreises um C.

II. Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so wird jeder Durchmesser des einen Kreises in seinen Schnittpunkten mit beiden Kreisen harmonisch getheilt.

— Denn da CP Tangente und CA_1A Secante des andern Kreises ist, so folgt

$$CP^2 = CA \cdot CA_1,$$

weshalb die vier Punkte A, B, A_1, B_1 nach Lehrs. II harmonisch sind.

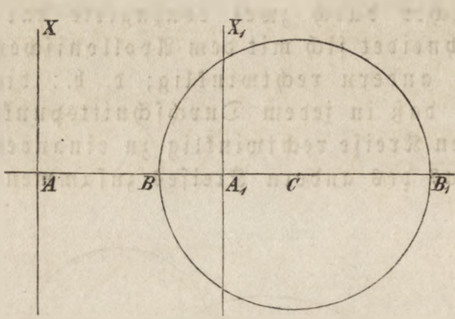
§. 191.

Definition.

Ein harmonischer Punkt und die durch den conjugirten Punkt gehende Senkrechte zur harmonisch getheilten Graden heißen **Pol**[1]) und **Polare von einander für den Kreis**, in

1) πόλος (von πέλομαι), die Axe.

welchem die beiden andern conjugirten Punkte Endpunkte eines Durchmessers sind. — Die beiden erstgenannten Punkte heißen **reciprok**[1] **zu einander für diesen Kreis.**



Z. B. heißt AX die Polare des Poles A_1, A_1X_1 die Polare des Poles A für den Kreis über BB_1 um C, wenn A, A_1, B, B_1 harmonische Punkte sind und die Graden AX und A_1X_1 auf AB senkrecht stehen. A und A_1 heißen reciproke Punkte für diesen Kreis.

Zusätze.

I. Pol und Polare liegen stets auf einer Seite des Kreiscentrums; der zur Polaren senkrechte Durchmesser geht durch deren Pol. — Zu jedem Pol gehört nur eine Polare; und umgekehrt.

II. Das Product der Entfernungen eines Pols und seiner Polaren vom Kreiscentrum ist gleich dem Quadrat des Radius:

$$CA \cdot CA_1 = r^2 \; . \; . \; . \; \text{§. 190, L. II.}$$

III. Der Pol einer Tangente ist der Berührungspunkt; und umgekehrt hat jeder Punkt des Kreises die durch ihn gezogene Tangente zur Polaren. — Die Polaren aller außerhalb des Kreisfeldes liegenden Pole sind Secanten des Kreises, die Polaren aller im Kreisfelde liegenden Pole gehen bei ihm vorbei. — Nähert sich der Pol dem Kreiscentrum, so rückt die Polare ins Unendliche hinaus; und umgekehrt.

IV. Jeder Kreis, welcher durch zwei reciproke Punkte eines Kreises hindurchgeht, schneidet sich mit demselben rechtwinklig.

— §. 190, Z. I.

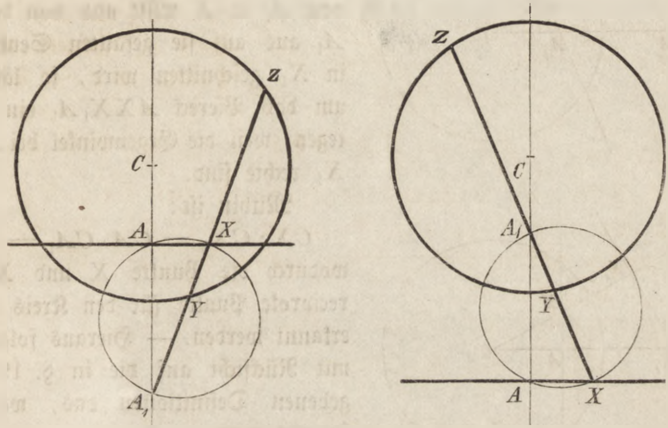
1) Wegen der in §. 190, L. II bewiesenen Eigenschaft

§. 192.

Lehrsatz.

Ein Kreis, ein Punkt und seine Polare für den Kreis theilen jede Grade, welche durch sie hindurchgeht, harmonisch.

Vrs. Für einen Kreis um C seien A und A_1 zwei reciproke Punkte. Durch A_1 ist eine Grade gelegt, welche vom Kreise in Y und Z, von der (durch A gehenden) Polaren des Poles A_1 in X geschnitten wird.



Beh. Die vier Punkte A_1, Y, X, Z sind harmonisch.

Bew. Zieht man über A_1X als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser durch den Punkt A, weil nach der Vrs. und nach §. 191, D. $\angle A_1AX = R$ ist. Die beiden Kreise schneiden sich aber rechtwinklig, weil A und A_1 als reciprok für den Kreis um C gegeben sind (§. 191, Z. IV). Folglich trifft die Beh. nach §. 190, Z. II zu.

Anm. Es gelten alle Umkehrungen dieses Satzes.

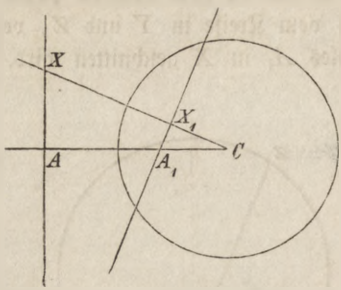
Scholie.

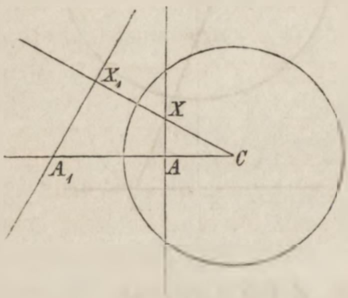
Wie der so eben bewiesene Satz zeigt, sind Pol und Polare geeignet, die ganze Schaar derjenigen Kreise zu ersetzen, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden und durch einen gegebenen Punkt hindurch gehen.

§. 193.

Lehrsatz.

Die Polaren sämmtlicher Punkte, welche auf einer Graden liegen, schneiden sich in dem Pol der letzteren; und umgekehrt liegen die Pole aller Graden, welche durch einen Punkt gehen, in der Polaren dieses Punktes.





Bew. Sind A und A_1 für den Kreis um C zwei reciproke Punkte, und geht außer der Graden CA von C eine zweite Grade aus, welche die Polare von A_1 in X trifft und von der von A_1 aus auf sie gefällten Senkrechten in X_1 geschnitten wird, so läßt sich um das Viereck AXX_1A_1 ein Kreis legen, weil die Gegenwinkel bei A und X_1 rechte sind.

Mithin ist:

$$CX \cdot CX_1 = CA \cdot CA_1 = r^2,$$

wodurch die Punkte X und X_1 als reciproke Punkte für den Kreis um C erkannt werden. — Hieraus folgt aber mit Rücksicht auf die in §. 191 gegebenen Definitionen das, was behauptet wird.

Zusätze.

I. Dreht man eine Grade um einen festen Punkt, so beschreibt ihr Pol eine Grade, nehmlich die Polare des Drehungspunktes; und beschreibt ein Punkt eine Grade, so dreht sich ihre Polare um einen festen Punkt, nehmlich den Pol jener Graden.

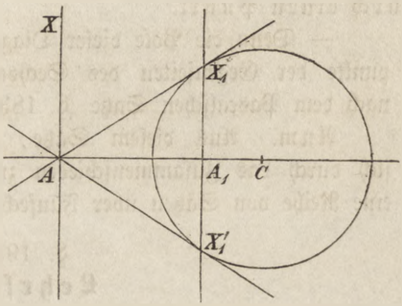
II. Beschreibt der eine von zwei reciproken Punkten eines Kreises eine Grade, welche nicht durch das Kreiscentrum geht, so beschreibt der andere einen durch dasselbe hindurchgehenden Kreis, in welchem der letztgenannte Punkt und der Pol jener Graden die entgegengesetzten Enden eines Durchmessers sind; und umgekehrt.

— Dies geschieht nehmlich deshalb, weil der $\angle CX_1A_1 = \mathcal{R}$ ist.

§. 194.

Lehrsatz.

Je zwei reciproke Punkte liegen so, daß der eine die „Berührungssehne“ der von dem andern ausgehenden Tangenten halbiert, d. i. diejenige Sehne, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten verbindet. — Die Polare des äußeren ist die Berührungssecante, die Polare des inneren Punktes ist die Halbierungslinie des Nebenwinkels des Winkels der Tangenten.



Bew. Gehen von dem Punkte A die beiden Tangenten AX_1 und AX_1' an den Kreis um C, so ist X_1 der Pol von AX_1, X_1' der Pol von AX_1' (§. 191, Z. III). Mithin ist A der Pol der Graden X_1X_1', weil die Polaren der Punkte X_1 und X_1' sich in A schneiden (§. 193). Der reciproke Punkt von A liegt in X_1X_1', weil die Polare eines Punktes durch seinen reciproken Punkt hindurchgeht (§. 191, D.), und außerdem liegt er in CA (ebenfalls nach §. 191, D.). Folglich ist A_1 der reciproke Punkt zu A. Endlich ist die Grade AX, welche den Nebenwinkel von $\angle X_1AX_1'$ halbiert, auf CA senkrecht und deshalb die Polare zu A_1.

Zusätze.

I. Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so ist ihre gemeinsame Secante die Polare des einen Kreiscentrums für den andern Kreis.

II. Alle gemeinschaftlichen Sehnen der einzelnen Kreise, welche durch dieselben zwei reciproken Punkte eines Kreises hindurchgehen, mit diesem Kreise schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der graden Verbindungslinie der reciproken Punkte liegt und mit dem Mittelpunkte des Abstandes der letzteren von einander reciprok ist.

III. Die Berührungssecanten je zweier Kreistangenten, welche von den einzelnen Punkten einer Graden ausgehen, schneiden sich in einem Punkte. Durch denselben Punkt gehen auch die Halbierungslinien der Nebenwinkel von den Winkeln solcher Tangentenpaare, deren Berührungssehnen von jener Graden halbiert werden.

IV. Je zwei Kreistangenten, deren Berührungspunkte auf den einzelnen Graden eines Büschels liegen, schneiden sich in Punkten einer einzigen Graden.

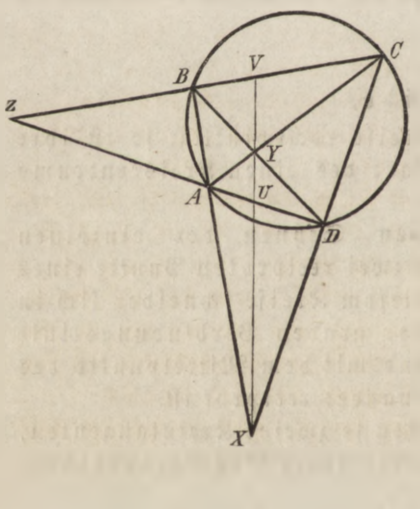
V.* (Der Brianchonsche Satz.) In jedem um einen Kreis beschriebenen Sechseck gehen diejenigen drei Diagonalen, welche die einander gegenüber liegenden Ecken verbinden, durch einen Punkt.

— Denn die Pole dieser Diagonalen, nehmlich die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Sechsecks der Berührungspunkte, liegen nach dem Pascalschen Satze (§. 183, IX) auf einer Graden.

Anm. Aus diesem Satze, wie aus dem Pascalschen, läßt sich durch das Zusammenschieben zweier Ecken in einen Punkt, leicht eine Reihe von Sätzen über Fünfecke, Vierecke und Dreiecke ableiten.

§. 195.
Lehrsatz.

Zieht man die sechs graden Linien, welche durch vier Punkte eines Kreises bestimmt werden, so liegen von den drei neuen Durchschnittspunkten je zwei auf der Polaren des dritten.



Bew. Liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise, und wird der Durchschnittspunkt von AB und CD durch X, der Durchschnittspunkt von AC und BD durch Y, der Durchschnittspunkt von AD und BC durch Z bezeichnet, so wird jede von den beiden Graden, welche sich in einem der Punkte X oder Y oder Z treffen, als Diagonale eines Vierseits harmonisch getheilt, wenn man noch die Grade durch die beiden andern Punkte zieht (§. 187).

Zieht man z. B. die Grade XY, welche sich mit AD in U und mit BC in V treffe, so sind Z, A, U, D und ebenso Z, B, V, C harmonische Punkte. Deshalb aber ist XY die Polare von Z (§. 192).

Zusätze.

Dreht man zwei grade Linien, welche sich mit einem Kreise schneiden, oder eine von ihnen, um ihren Durchschnittspunkt, so gleiten die beiden Durchschnittspunkte derjenigen Graden, welche die getroffenen Punkte des Kreises mit einander verbinden, auf einer festen Graden; und umgekehrt.

Aufgaben.

I. Die Polare eines gegebenen Punktes für einen gegebenen Kreis bloß durch Benutzung des Lineals (Postulat I) zu construiren.

II. Den Pol einer gegebenen Graden für einen gegebenen Kreis bloß durch Benutzung des Lineals zu construiren.

III. Von einem Punkte aus die Tangenten an einen Kreis bloß mit Hülfe des Lineals zu ziehen.

§. 196.

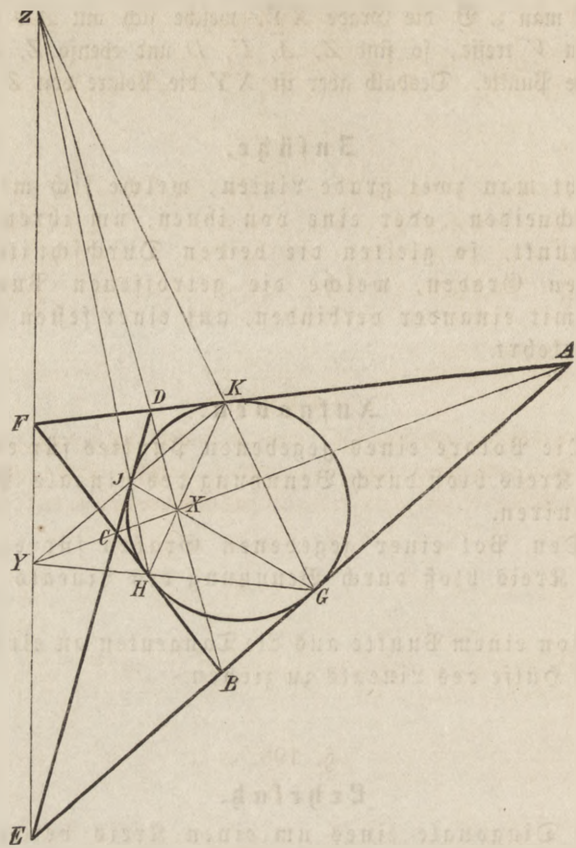
Lehrsatz.

Jede Diagonale eines um einen Kreis beschriebenen Vierseits ist die Polare des Durchschnittspunkts der beiden andern. — In den einzelnen Durchschnittspunkten der Diagonalen treffen sich außerdem je zwei grade Verbindungslinien der Berührungspunkte.

Bew. $ABCD$ sei ein um einen Kreis beschriebenes Viereck; AB und CD schneiden sich in E, AD und BC in F. G, H, J, K sind die Berührungspunkte der Seiten mit dem Kreise.

Man ziehe noch die Graden, welche durch je zwei von den Berührungspunkten G, H, J, K hindurchgehen und benenne mit X den Durchschnittspunkt von GJ und HK, mit Y den Durchschnittspunkt von GH und JK, mit Z den Durchschnittspunkt von GK und HJ.

Dann ist erstens AC die Polare von Z, weil die Polaren GK und HJ von A und C (§. 194) sich in Z schneiden (§. 193), und



zweitens auch XY die Polare von Z (nach §. 195); so daß die vier Punkte A, X, C, Y in einer Graden liegen, weil zu jedem Pol nur eine Polare gehört.

Ebenso liegen die vier Punkte B, X, D, Z in einer Graden, weil sowohl BD als auch XZ die Polare von Y ist; und endlich liegen ebenfalls die vier Punkte E, Y, F, Z in einer Graden, weil sowohl EF als auch YZ die Polare von X ist.

Da also X in AC und BD, Y in AC und EF, Z in BD und EF liegt, so sind X, Y, Z die Durchschnittspunkte der Diagonalen des um den Kreis beschriebenen Vierseits. — Die Eigenschaft, daß XY die Polare von Z, YZ die Polare von X, ZX die Polare von Y ist, stand schon oben fest.

Zusätze.

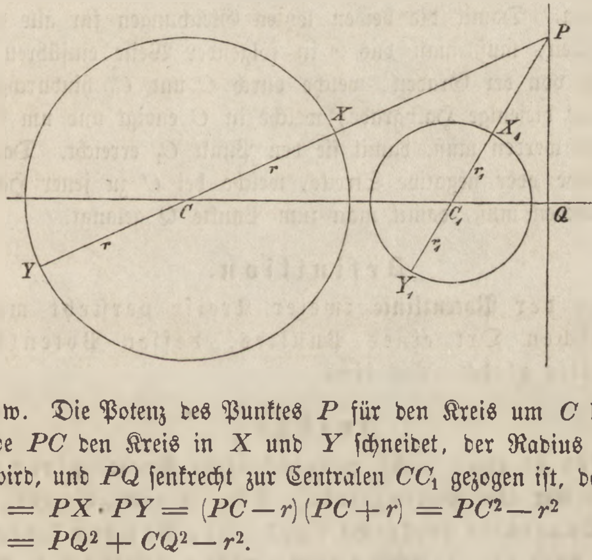
I. Beschreibt man um einen Kreis mehrere Vierseite so, daß jedes mit den andern den Durchschnittspunkt eines Diagonalenpaares gemein hat, so liegen die dritten Diagonalen in einer einzigen Graden.

II. Beschreibt man um einen Kreis mehrere Vierseite so, daß zwei Ecken des einen mit zwei Ecken jedes andern in einer Graden liegen, so schneiden sich die übrigen Diagonalen sämmtlich in einem und demselben Punkt.

§. 197.

Lehrsatz.

Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Potenzen[1] zweier festen Kreise einen gegebenen Werth hat, ist eine Senkrechte zur Centralen dieser Kreise.



Bew. Die Potenz des Punktes P für den Kreis um C hat, wenn die Grade PC den Kreis in X und Y schneidet, der Radius mit r bezeichnet wird, und PQ senkrecht zur Centralen CC_1 gezogen ist, den Werth:

$$= PX \cdot PY = (PC - r)(PC + r) = PC^2 - r^2$$
$$= PQ^2 + CQ^2 - r^2.$$

1) Nach §. 160 versteht man unter der Potenz das Product der beiden Abstände des Punktes von dem Kreise auf einer beliebigen Secante, also u. A. je nach den Umständen das Quadrat über der von ihm ausgehenden Tangente oder über der Hälfte der in ihm halbierten Sehne.

Bezeichnet man die analogen Stücke beim Kreise um C_1 dadurch, daß man den Buchstaben den Index 1 anhängt, so ist die Potenz des Punktes P für diesen Kreis

$$= PQ^2 + C_1Q^2 - r_1^2.$$

Die Differenz der beiden Potenzen ist mithin

$$d = CQ^2 - C_1Q^2 - r^2 + r_1^2.$$

Da dieser Ausdruck nicht von der Lage des Punktes P auf der Graden PQ abhängt, so ist erwiesen, daß die Differenz der Potenzen ihren Werth nicht ändert, wenn man P auf PQ verschiebt.

Verschiebt man aber den Fußpunkt Q auf der Centralen, so ändert d den Werth; denn wenn man der bequemeren Übersicht wegen $CQ = x$ und $CC_1 = c$ setzt, so ist

$$d = 2cx - c^2 - r^2 + r_1^2$$

ein Ausdruck, aus welchem sich x nicht entfernen läßt. Und umgekehrt giebt es für jedes d eine bestimmte Grade PQ, weil aus dieser Gleichung für jedes beliebige d ein ganz bestimmter Werth von x folgt, nehmlich:

$$x = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2 + d}{2c}.$$

Anm. Damit die beiden letzten Gleichungen für alle denkbaren Fälle gelten, muß man das x in folgender Weise einführen: Man denke sich von der Graden, welche durch C und C_1 hindurchgeht, zunächst nur diejenige Halbgrade, welche in C endigt und um $CC_1 = c$ verlängert werden muß, damit sie den Punkt C_1 erreicht. Dann sei x die positive oder negative Strecke, welche bei C zu jener Halbgraden addirt werden muß, damit man zum Punkte Q gelangt.

Definition.

Unter der **Potenzlinie** zweier Kreise versteht man den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Potenzen für beide Kreise gleich groß sind.

Zusätze.

I. Für je zwei nicht concentrische Kreise giebt es **eine**, aber auch **nur eine** Potenzlinie. Sie ist eine Grade, welche auf der Centralen senkrecht steht. Ihr Abstand ξ vom Centrum C, nach der Richtung zum andern Centrum C_1 hin als positiv gerechnet, wird durch die Formel

$$\xi = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{2c}$$

ausgedrückt.

— Ist nehmlich $c = 0$, so hat der Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung keine Bedeutung.

II. Die Potenzlinie liegt vom Centrum des größeren Kreises aus nach derselben Richtung, wie das Centrum des kleineren Kreises.

— Denn ξ wird für $r > r_1$ stets positiv.

III. Die Potenzlinie liegt in der Mitte zwischen je zwei Graden, deren Potenzendifferenz für die Kreise sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

— Denn nimmt x den Werth x' an, sobald d durch $(-d)$ ersetzt wird, so hat man nach dem Obigen:

$$x = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2 + d}{2c}, \quad x' = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2 - d}{2c};$$

also:

$$x + x' = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{c} = 2\xi,$$

d. i.:

$$x - \xi = \xi - x'.$$

IV. Die Potenzlinie liegt in der Mitte zwischen den Polaren der einzelnen Kreiscentra für den andern Kreis. — Die Potenzendifferenz der einen Polaren ist, absolut genommen, so groß, wie diejenige der andern, nehmlich $= \pm (r^2 + r_1^2 - c^2)$.

— Denn bezeichnet man durch x und x' die Entfernungen des Punktes C von den Polaren, so ist nach dem Begriff der letzteren:

$$cx' = r^2, \quad c(c - x) = r_1^2;$$

also:

$$x' + x = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{c} = 2\xi,$$

$$x' - \xi = \xi - x = \frac{r^2 + r_1^2 - c^2}{2c}.$$

Endlich ergeben sich durch Substitution dieser Werthe von x' und x in den Ausdruck für d die Werthe

$$r^2 + r_1^2 - c^2 \text{ und } -(r^2 + r_1^2 - c^2).$$

V. Die Potenzlinie liegt dem Centrum des kleineren Kreises näher als demjenigen des größeren Kreises.

— Denn wird der Abstand der Potenzlinie von C_1 in ähnlicher Weise durch ξ_1 bezeichnet, wie ξ den Abstand von C angiebt, so ist nach Z. I:

$$\xi = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{2c}, \quad \xi_1 = \frac{c^2 - r^2 + r_1^2}{2c};$$

Bezeichnet man die analogen Stücke beim Kreise um C_1 dadurch, daß man den Buchstaben den Index 1 anhängt, so ist die Potenz des Punktes P für diesen Kreis

$$= PQ^2 + C_1Q^2 - r_1{}^2.$$

Die Differenz der beiden Potenzen ist mithin

$$d = CQ^2 - C_1Q^2 - r^2 + r_1{}^2.$$

Da dieser Ausdruck nicht von der Lage des Punktes P auf der Graden PQ abhängt, so ist erwiesen, daß die Differenz der Potenzen ihren Werth nicht ändert, wenn man P auf PQ verschiebt.

Verschiebt man aber den Fußpunkt Q auf der Centralen, so ändert d den Werth; denn wenn man der bequemeren Übersicht wegen $CQ = x$ und $CC_1 = c$ setzt, so ist

$$d = 2cx - c^2 - r^2 + r_1{}^2$$

ein Ausdruck, aus welchem sich x nicht entfernen läßt. Und umgekehrt giebt es für jedes d eine bestimmte Grade PQ, weil aus dieser Gleichung für jedes beliebige d ein ganz bestimmter Werth von x folgt, nehmlich:

$$x = \frac{c^2 + r^2 - r_1{}^2 + d}{2c}.$$

Anm. Damit die beiden letzten Gleichungen für alle denkbaren Fälle gelten, muß man das x in folgender Weise einführen: Man denke sich von der Graden, welche durch C und C_1 hindurchgeht, zunächst nur diejenige Halbgrade, welche in C endigt und um $CC_1 = c$ verlängert werden muß, damit sie den Punkt C_1 erreicht. Dann sei x die positive oder negative Strecke, welche bei C zu jener Halbgraden addirt werden muß, damit man zum Punkte Q gelangt.

Definition.

Unter der **Potenzlinie** zweier Kreise versteht man den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Potenzen für beide Kreise gleich groß sind.

Zusätze.

I. Für je zwei nicht concentrische Kreise giebt es **eine**, aber auch **nur eine** Potenzlinie. Sie ist eine Grade, welche auf der Centralen senkrecht steht. Ihr Abstand ξ vom Centrum C, nach der Richtung zum andern Centrum C_1 hin als positiv gerechnet, wird durch die Formel

$$\xi = \frac{c^2 + r^2 - r_1{}^2}{2c}$$

ausgedrückt.

— Ist nehmlich $c = 0$, so hat der Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung keine Bedeutung.

II. Die Potenzlinie liegt vom Centrum des größeren Kreises aus nach derselben Richtung, wie das Centrum des kleineren Kreises.

— Denn ξ wird für $r > r_1$ stets positiv.

III. Die Potenzlinie liegt in der Mitte zwischen je zwei Graden, deren Potenzendifferenz für die Kreise sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

— Denn nimmt x den Werth x' an, sobald d durch $(-d)$ ersetzt wird, so hat man nach dem Obigen:

$$x = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2 + d}{2c}, \quad x' = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2 - d}{2c};$$

also:

$$x + x' = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{c} = 2\xi,$$

d. i.:

$$x - \xi = \xi - x'.$$

IV. Die Potenzlinie liegt in der Mitte zwischen den Polaren der einzelnen Kreiscentra für den andern Kreis. — Die Potenzendifferenz der einen Polaren ist, absolut genommen, so groß, wie diejenige der andern, nehmlich $= \pm (r^2 + r_1^2 - c^2)$.

— Denn bezeichnet man durch x und x' die Entfernungen des Punktes C von den Polaren, so ist nach dem Begriff der letzteren:

$$cx' = r^2, \quad c(c - x) = r_1^2;$$

also:

$$x' + x = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{c} = 2\xi,$$

$$x' - \xi = \xi - x = \frac{r^2 + r_1^2 - c^2}{2c}.$$

Endlich ergeben sich durch Substitution dieser Werthe von x' und x in den Ausdruck für d die Werthe

$$r^2 + r_1^2 - c^2 \text{ und } -(r^2 + r_1^2 - c^2).$$

V. Die Potenzlinie liegt dem Centrum des kleineren Kreises näher als demjenigen des größeren Kreises.

— Denn wird der Abstand der Potenzlinie von C_1 in ähnlicher Weise durch ξ_1 bezeichnet, wie ξ den Abstand von C angiebt, so ist nach Z. I:

$$\xi = \frac{c^2 + r^2 - r_1^2}{2c}, \quad \xi_1 = \frac{c^2 - r^2 + r_1^2}{2c};$$

$$\xi - \xi_1 = \frac{r^2 - r_1{}^2}{c} = \frac{(r - r_1)(r + r_1)}{c},$$

so daß die Differenzen $(\xi - \xi_1)$ und $(r - r_1)$ dasselbe Vorzeichen haben.

VI. Die Potenzlinie liegt dem größeren Kreise näher als dem kleineren.

— Wir setzen $r > r_1$ voraus.

Liegt nun die Potenzlinie zwischen C und C_1, so sind ihre Entfernungen von den Kreisen die absoluten Werthe von $(\xi - r)$ und $(\xi_1 - r_1)$. Es ist aber:

$$\xi - r = \frac{c^2 + r^2 - r_1{}^2}{2c} - r = \frac{(c-r)^2 - r_1{}^2}{2c} = \frac{(c - r - r_1)(c - r + r_1)}{2c};$$

mithin:

$$\frac{\xi - r}{\xi_1 - r_1} = \frac{c - r + r_1}{c + r - r_1} = \frac{c - (r - r_1)}{c + (r - r_1)},$$

was jedenfalls einen echten Bruch giebt.

Liegt die Potenzlinie über C_1 hinaus, so ist ihr Abstand von dem Kreise um C_1 der absolute Werth von

$$c + r_1 - \xi = c + r_1 - \frac{c^2 + r^2 - r_1{}^2}{2c} = \frac{(c + r_1)^2 - r^2}{2c} = \frac{(c + r + r_1)(c - r + r_1)}{2c},$$

und es folgt, daß der absolute Werth von

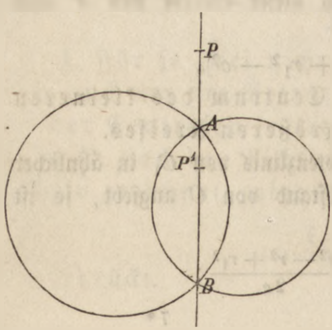
$$\frac{\xi - r}{c + r_1 - \xi} = \frac{c - r - r_1}{c + r + r_1}$$

das Verhältnis der Abstände der Potenzlinie von beiden Kreisen ist. Dieser Werth ist aber ebenfalls < 1.

§. 198.

Lehrsatz I.

Die Potenzlinie zweier Kreise, welche sich schneiden oder berühren, ist die gemeinsame Secante oder Tangente. Und umgekehrt: Hat die Potenzlinie mit dem einen Kreise einen Punkt gemein, so geht der andere Kreis durch denselben Punkt.

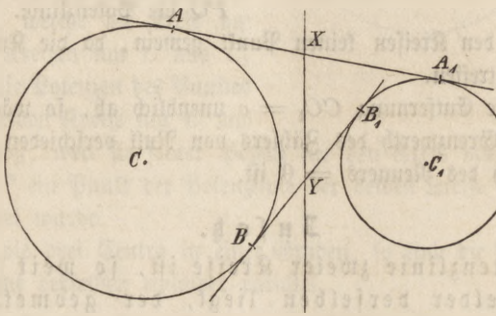


Bew. Haben die beiden Kreise die Punkte A und B gemein, so ist die Grade AB die Potenzlinie, weil jeder auf ihr liegende Punkt P für beide Kreise die Potenz $PA \cdot PB$ hat. Und umgekehrt muß der zweite Kreis durch jeden Punkt A gehen, in welchem sich die Potenzlinie mit dem ersten Kreise treffen mag; denn da die Potenz des Punktes A für den ersten Kreis $= 0$ ist, so muß sie auch für den zweiten Kreis $= 0$ sein.

Fallen die Punkte A und B zusammen, so geht AB in die Tangente über.

Lehrsatz II.

Die Potenzlinie zweier Kreise, deren Felder keinen gemeinsamen Punkt besitzen, liegt zwischen denselben.



Bew. Sind X und Y die Halbierungspunkte zweier gemeinsamen Tangenten AA_1 und BB_1, so geben X und Y zugleich zwei Punkte der Potenzlinie an, weil

$$XA^2 = XA_1{}^2, \quad YB^2 = YB_1{}^2$$

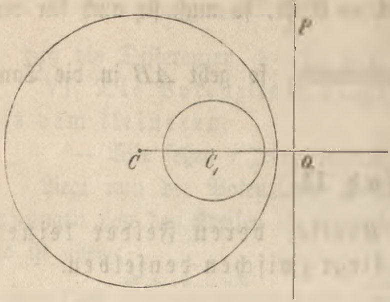
ist. Daß die Potenzlinie XY zwischen C und C_1 hindurchgeht, ist unmittelbar ersichtlich, und daß sie keinen der Kreise trifft, folgt aus L. I.

Lehrsatz III.

Die Potenzlinie zweier Kreise, von denen der eine ganz im Felde des andern liegt, befindet sich im Außengebiet auf der Seite des kleineren. Für concentrische Kreise giebt es jedoch keine Potenzlinie[1]). — Bleiben die Radien der Kreise unverändert, während man die Centren einander unendlich nähert, so rückt die Potenzlinie ins Unendliche hinaus.

---

1) Vergl. §. 197, Z. I.



Bew. Bedeutet r den Radius des größeren Kreises um C, r_1 den Radius des kleineren Kreises um C_1, c die Strecke CC_1 und ξ die auf der Richtung CC_1 liegende Strecke CQ, welche der Relation

$$\xi = \frac{c^2 + r^2 - r_1{}^2}{2c}$$

genügt, so ist nach dem vor. §. die auf CC_1 stehende Senkrechte PQ die Potenzlinie. Dieselbe hat nach L. I mit den Kreisen keinen Punkt gemein, da die Kreise sich nach der Vrs. nicht treffen.

Nimmt die Entfernung $CC_1 = c$ unendlich ab, so wächst ξ unendlich, weil der Grenzwerth des Zählers von Null verschieden ist, während der Grenzwerth des Nenners $= 0$ ist.

Zusatz.

Die Potenzlinie zweier Kreise ist, so weit sie außerhalb der Felder derselben liegt, der geometrische Ort eines Punktes, von welchem aus sich an die beiden gegebenen Kreise gleiche Tangenten legen, und um welchen mit diesen als Radien ein Kreis gezogen werden kann, welcher die ersteren rechtwinklig schneidet. Liegt jedoch ein Theil der Potenzlinie in den gegebenen Kreisfeldern, so halbieren sich in diesem gleiche Sehnen derselben; und seine Punkte lassen sich nicht als Centren von Kreisen verwenden, welche die gegebenen rechtwinklig schnitten.

— Jeder Kreis, welcher zwei andere rechtwinklig schneidet, hat sein Centrum außerhalb der Felder der letzteren.

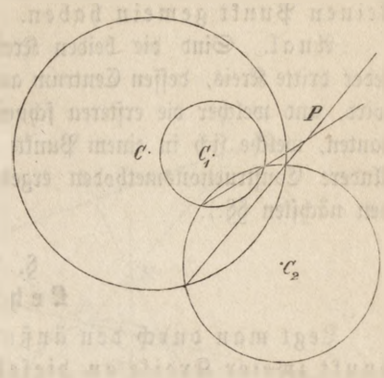
— Gäbe es einen die gegebenen Kreise rechtwinklig schneidenden Kreis, dessen Centrum nicht auf der Potenzlinie liegt, so müßten jene noch eine zweite Potenzlinie haben; was nicht der Fall ist (§. 197, Z. I).

§. 199.

Lehrsatz I.

Liegen die Centra dreier Kreise nicht in grader Linie, so treffen sich die drei Potenzlinien, welche sie zu je zweien besitzen, in einem Punkt (dem „Potenzpunkt" der drei Kreise).

Liegen dagegen die Centra in einer Graden, so sind die Potenzlinien parallel.



Bew. Liegen die drei Kreiscentra C, C_1, C_2 nicht in einer Graden, so schneiden sich die drei Potenzlinien gegenseitig, weil sie auf solchen Graden (den Centralen) senkrecht stehen, welche Winkel mit einander bilden. Versteht man nun unter P den Durchschnittspunkt der Potenzlinien, welche der Kreis um C_2 mit den Kreisen um C und C_1 hat, so sind die Potenzen des Punktes P für die beiden Kreise um C und C_1 gleich groß, weil sie seiner Potenz für den Kreis um C_2 gleich sind. Mithin ist P ein Punkt der Potenzlinie der beiden Kreise um C und C_1; was behauptet wurde.

Liegen die drei Centra in einer Graden, so sind die Potenzlinien als Senkrechte auf derselben einander parallel.

Zusätze.

I. Schneiden sich drei Kreise gegenseitig, so schneiden sich die Sehnen, welche sie paarweise gemein haben, in einem Punkte.

II. Berühren sich drei Kreise gegenseitig, so schneiden sich die Tangenten, welche sie paarweise an den einzelnen Berührungsstellen gemein haben, in einem Punkte.

III. Treffen sich die Potenzlinien dreier Kreise außerhalb der Kreisfelder, so läßt sich um ihren Schnittpunkt ein Kreis ziehen, welcher die drei ersteren rechtwinklig schneidet.

Lehrsatz II.

Zieht man durch einen Punkt der Potenzlinie zweier Kreise je eine Secante der letzteren, so läßt sich durch die vier erhaltenen Schnittpunkte ein Kreis legen.

— Denn zieht man an die Kreise um C und C_1 von einem Punkte P ihrer Potenzlinie die Secanten PAB und PA_1B_1, so ist $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1$, weshalb die Behauptung nach §. 161 zutrifft.

Aufgabe.

Die Potenzlinie zweier Kreise zu construiren, welche keinen Punkt gemein haben.

Anal. Sind die beiden Kreise um C und C_1 gegeben, so liefert jeder dritte Kreis, dessen Centrum außerhalb der Graden CC_1 angenommen wird, und welcher die ersteren schneidet, nach obigem Lehrsatz I zwei Secanten, welche sich in einem Punkte der gesuchten Potenzlinie schneiden. — Andere Constructionsmethoden ergeben sich aus §. 197 (und auch aus den nächsten §§.).

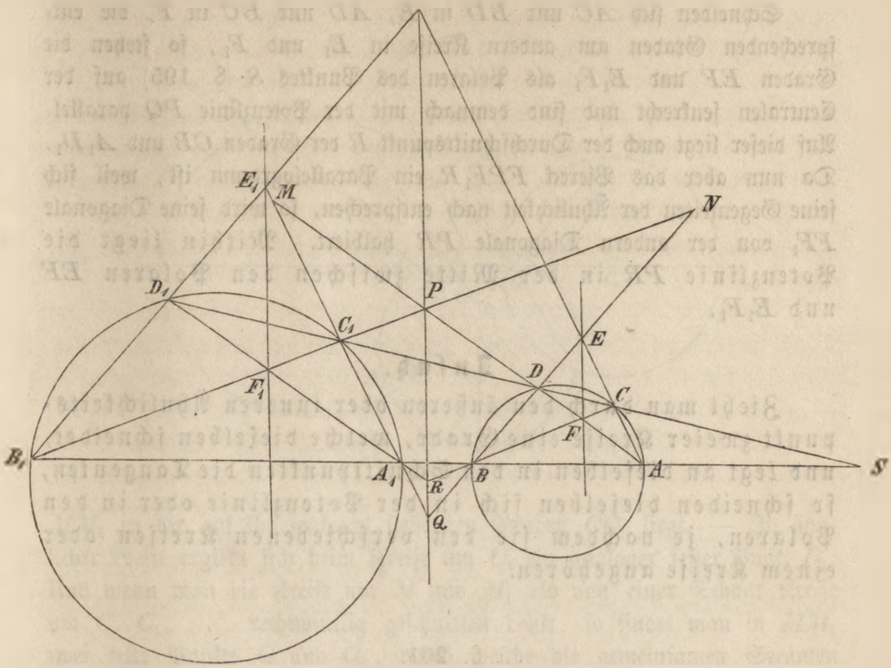
§. 200.

Lehrsatz.

Legt man durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise an dieselben zwei Secanten und zieht durch die Schnittpunkte der einzelnen Kreise grade Linien, so schneiden sich unter diesen diejenigen vier Paare, deren Bestimmungspunkte auf verschiedenen Kreisen liegen und unter sich keine der Ähnlichkeit nach entsprechenden enthalten, in Punkten der Potenzlinie. Je vier von diesen Graden, welche zwei Punkte der Potenzlinie bestimmen und nicht paarweise parallel sind, haben ihre übrigen vier Durchschnittspunkte auf einem Kreise. Die Potenzlinie liegt in der Mitte zwischen den Polaren des Ähnlichkeitspunktes für die gegebenen Kreise, nehmlich zwischen den Graden, von welchen je zwei Punkte als Durchschnittsstellen der an den einzelnen Kreisen construirten Graden bestimmt sind.

Bew. Von einem Ähnlichkeitspunkte S zweier Kreise aus sind zwei grade Linien $SABA_1B_1$ und $SCDC_1D_1$ gezogen. Die Benennung der Punkte ist so gewählt, daß die der Ähnlichkeit nach sich entsprechenden Punkte nur durch die Indices unterschieden werden. Schließlich sind durch je zwei so erhaltene Punkte der einzelnen Kreise grade Linien gelegt.

Wählen wir nach Willkür bei dem einen Kreise zwei fragliche Punkte A und D, so sind B_1 und C_1 diejenigen Punkte des zweiten Kreises, welche jenen der Ähnlichkeit nach nicht entsprechen. Deshalb sind die Graden AD und B_1C_1 nicht parallel. Wir behaupten, daß ihr Durchschnittspunkt P in der Potenzlinie liege, und beweisen es dadurch, daß $\triangle PAB_1 \sim \triangle PC_1D$ (2w) ist. Da nehmlich $AD \mathrel{+\!\!\!\!=} A_1D_1$ ist (als entsprechende Grade perspectivisch gelegener ähnlicher Kreise), so folgt



$$\angle\, PAB_1 = \angle\, D_1A_1B_1$$
$$= \angle\, D_1C_1B_1 \ \ldots \text{ (Peripheriew. auf einem Bogen)}$$
$$= \angle\, PC_1D;$$

und außerdem haben die Dreiecke den Winkel bei P gemeinsam. Mithin ist:

$$\frac{PA}{PC_1} = \frac{PB_1}{PD},\ PA \cdot PD = PB_1 \cdot PC_1;$$

so daß die Potenzen des Punktes P für beide Kreise gleich sind.

Aus ähnlichen Gründen ist der Durchschnittspunkt Q der Graden BD und A_1C_1 ein Punkt der Potenzlinie; und die vier Graden schneiden sich außer an den schon benannten vier Stellen noch in zwei Punkten, nehmlich AD und A_1C_1 in M, BD und B_1C_1 in N. Wir behaupten, daß sich durch N, D, C_1, M ein Kreis legen läßt, und sehen diese Behauptung dadurch bestätigt, daß

$$\angle\, NDM = \angle\, ADB$$
$$= \angle\, A_1D_1B_1 \ \ldots \text{ (entspr. Winkel ähnlicher Fig.)}$$
$$= \angle\, A_1C_1B_1 \ \ldots \text{ (Peripheriew.)}$$
$$= \angle\, NC_1M$$

ist.

Schneiden sich AC und BD in E, AD und BC in F, die entsprechenden Graden am andern Kreise in E_1 und F_1, so stehen die Graden EF und E_1F_1 als Polaren des Punktes S (§. 195) auf der Centralen senkrecht und sind demnach mit der Potenzlinie PQ parallel. Auf dieser liegt auch der Durchschnittspunkt R der Graden CB und A_1D_1. Da nun aber das Viereck FPF_1R ein Parallelogramm ist, weil sich seine Gegenseiten der Ähnlichkeit nach entsprechen, so wird seine Diagonale FF_1 von der andern Diagonale PR halbiert. Mithin liegt die Potenzlinie PR in der Mitte zwischen den Polaren EF und E_1F_1.

Zusatz.

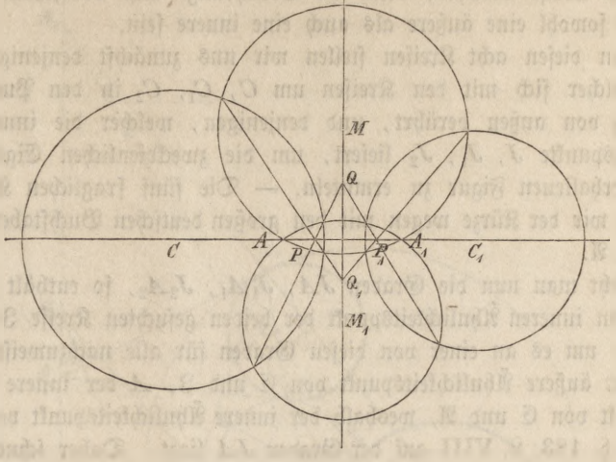
Zieht man durch den äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Grade, welche dieselben schneidet, und legt an dieselben in den Schnittpunkten die Tangenten, so schneiden dieselben sich in der Potenzlinie oder in den Polaren, je nachdem sie den verschiedenen Kreisen oder einem Kreise angehören.

§. 201.

Lehrsatz.

Werden zwei Kreise von einer Schaar von Kreisen rechtwinklig geschnitten, so gehen die Secanten, welche einer von ihnen mit den Kreisen der Schaar gemein hat, sämmtlich durch einen Punkt der Centralen jener beiden Kreise. Diese Centrale ist wiederum Potenzlinie der Kreisschaar. Alle Kreise, welche zwei einander nicht treffende Kreise rechtwinklig schneiden, gehen durch zwei feste Punkte der Centralen dieser beiden Kreise.

Bew. Werden zwei Kreise um C und C_1, welche sich nicht treffen, von zwei andern um M und M_1 rechtwinklig geschnitten, so ist MM_1 die Potenzlinie der ersteren, CC_1 die Potenzlinie der andern (§. 198, Z.). Da nun bei je zwei Kreisen, welche sich rechtwinklig schneiden, die gemeinsame Secante Polare des einen Centrums für den andern Kreis ist (§. 194, Z. I), und die Polaren der Punkte einer Graden sämmtlich durch den Pol dieser Graden gehen (§. 193), so schneiden sich die Secanten, welche der Kreis um C mit den Kreisen der Schaar M, M_1, ... gemein hat, sämmtlich in einem Punkte P, welcher als Pol der Graden



MM_1 in der auf ihr senkrecht stehenden Graden CC_1 liegt. — In ähnlicher Weise ergiebt sich beim Kreise um C_1 ein analoger fester Punkt P_1. Und wenn man die Kreise um M und M_1 als von einer Schaar Kreise um $C, C_1, \ldots$ rechtwinklig geschnitten denkt, so findet man in MM_1 zwei feste Punkte Q und Q_1, durch welche die gemeinsamen Secanten hindurchgehen.

Daß endlich die Kreise um $M, M_1, \ldots$ sämmtlich durch zwei feste Punkte A und A_1 der Graden CC_1 hindurchgehen, erhellt in folgender Weise: Die Kreise um $M, M_1, \ldots$ müssen die Grade CC_1 zweimal schneiden, weil die Punkte P und P_1 in ihren Feldern liegen. Daher schneiden sich die Kreise um $M, M_1, \ldots$ sämmtlich. Wir wissen ferner nach dem Obigen, daß CC_1 die Potenzlinie dieser sich schneidenden Kreise ist, und nach §. 198, L. I, daß die Potenzlinie von Kreisen, welche sich schneiden, durch deren Schnittpunkte hindurchgeht: Mithin schneiden sich alle Kreise um $M, M_1, \ldots$ in zwei Punkten A und A_1 der Graden CC_1.

§. 202.

Die Apollonische Aufgabe.

Diejenigen Kreise zu construiren, von welchen je drei gegebene Kreise berührt werden.

Anal. Sind drei ganz auseinander liegende Kreise um C, C_1 und C_2 gegeben, so kann man sich acht Kreise vorstellen, von denen jeder diese drei Kreise berührt; denn die Berührung kann bei jedem der drei letzteren sowohl eine äußere als auch eine innere sein.

Von diesen acht Kreisen stellen wir uns zunächst denjenigen Kreis vor, welcher sich mit den Kreisen um C, C_1, C_2 in den Punkten A, A_1, A_2 von außen berührt, und denjenigen, welcher die inneren Berührungspunkte J, J_1, J_2 liefert, um die zweckdienlichen Eigenschaften der so erhaltenen Figur zu ermitteln. — Die fünf fraglichen Kreise bezeichnen wir der Kürze wegen mit den großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$.

Zieht man nun die Graden JA, J_1A_1, J_2A_2, so enthält jede von ihnen den inneren Ähnlichkeitspunkt der beiden gesuchten Kreise $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$; denn — um es an einer von diesen Graden für alle nachzuweisen — so ist J der äußere Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$, A der innere Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$, weshalb der innere Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ nach §. 183, L. VIII auf der Graden JA liegt. Daher schneiden sich die Graden JA, J_1A_1, J_2A_2 in einem Punkt, welcher P heißen mag.

Von denselben Graden wird der Kreis $\mathfrak{A}$ noch einmal geschnitten, beziehungsweise in Q, Q_1, Q_2; und es ist wegen der so eben bewiesenen Eigenschaft des Punktes P für die Kreise $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$:

$$\frac{PJ}{PQ} = \frac{PJ_1}{PQ_1} = \frac{PJ_2}{PQ_2}.$$

Multiplicirt man aber diese Gleichung mit der folgenden:

$$PA \cdot PQ = PA_1 \cdot PQ_1 = PA_2 \cdot PQ_2,$$

so ergiebt sich:

$$PA \cdot PJ = PA_1 \cdot PJ_1 = PA_2 \cdot PJ_2,$$

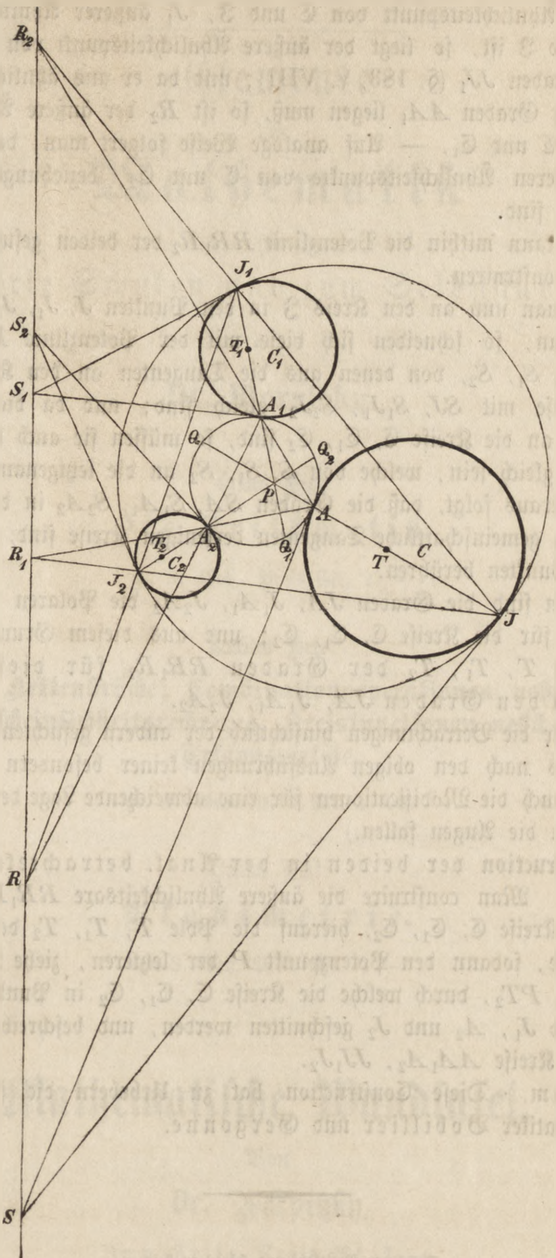
wodurch angezeigt wird, daß P der Potenzpunkt der drei Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ ist (§. 199), also ein Punkt, welchen man ohne Kenntnis der Kreise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ construiren kann.

Die Graden JJ_1 und AA_1 schneiden sich in einem Punkte R_2, J_1J_2 und A_1A_2 in R, J_2J und A_2A in R_1. Diese drei Punkte R, R_1, R_2 liegen in der Potenzlinie der beiden gesuchten Kreise $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$; denn — um wieder einen von ihnen als Vertreter von allen zu behandeln — so ersieht man aus der letzten Gleichung, daß sich durch die vier Punkte J, A, A_1, J_1 ein Kreis legen läßt, weshalb

$$R_2J \cdot R_2J_1 = R_2A \cdot R_2A_1$$

ist; und dies zeigt den Punkt R_2 als einen Punkt der Potenzlinie von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ an.

Dieselbe Grade RR_1R_2 ist aber auch die äußere Ähnlichkeitsaxe der drei gegebenen Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$. Denn da



R_2
J_1
S_2
T_1
C_1
S_1
A_1
Q
Q_2
P
A
R_1
T_2
A_2
C_2
Q_1
T
C
J_2
J
R
S

J äußerer Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{J}$, J_1 äußerer Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{J}$ ist, so liegt der äußere Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ auf der Graden JJ_1 (§. 183, L. VIII); und da er aus ähnlichen Gründen auf der Graden AA_1 liegen muß, so ist R_2 der äußere Ähnlichkeitspunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$. — Auf analoge Weise folgert man, daß R_1 und R die äußeren Ähnlichkeitspunkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_2$, beziehungsweise von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sind.

Man kann mithin die Potenzlinie RR_1R_2 der beiden gesuchten Kreise $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ construiren.

Legt man nun an den Kreis $\mathfrak{J}$ in den Punkten J, J_1, J_2 die Tangenten heran, so schneiden sich diese mit der Potenzlinie RR_1R_2 in Punkten S, S_1, S_2, von denen aus die Tangenten an den Kreis $\mathfrak{A}$ beziehungsweise mit SJ, S_1J_1, S_2J_2 gleich sind; und da diese zugleich Tangenten an die Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ sind, so müssen sie auch den zweiten Tangenten gleich sein, welche von S, S_1, S_2 an die letztgenannten Kreise gehen. Hieraus folgt, daß die Graden SA, S_1A_1, S_2A_2 in den Punkten A, A_1, A_2 gemeinschaftliche Tangenten derjenigen Kreise sind, welche sich in diesen Punkten berühren.

Mithin sind die Graden JA, J_1A_1, J_2A_2 die Polaren der Punkte S, S_1, S_2 für die Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$; und aus diesem Grunde liegen die Pole T, T_1, T_2 der Graden RR_1R_2 für diese selben Kreise in den Graden JA, J_1A_1, J_2A_2.

(Für die Betrachtungen hinsichtlich der andern gesuchten Kreispaare bedarf es nach den obigen Ausführungen keiner besondern Anleitung, so wie auch die Modificationen für eine abweichende Lage der gegebenen Kreise in die Augen fallen.)

Construction der beiden in der Anal. betrachteten Kreise $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$. Man construire die äußere Ähnlichkeitsaxe RR_1R_2 der drei gegebenen Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, hierauf die Pole T, T_1, T_2 derselben für diese Kreise, sodann den Potenzpunkt P der letzteren, ziehe die Graden PT, PT_1, PT_2, durch welche die Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ in Punkten A und J, A_1 und J_1, A_2 und J_2 geschnitten werden, und beschreibe schließlich die beiden Kreise AA_1A_2, JJ_1J_2.

Anm. Diese Construction hat zu Urhebern die französischen Mathematiker Bobillier und Gergonne.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

Elemente der Mathematik für gelehrte Schulen und zum Selbststudium.

Von

Dr. Worpitzky.

Erstes Heft:

Die Arithmetik.

gr. 8. Geh. Preis Mk. 2. —

Zweites Heft:

Algebra, Kettenbrüche, Combinationsoperationen nebst Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kreisfunctionen nebst Trigonometrie.

gr. 8. Geh. Preis Mk. 1. 60.

Drittes Heft:

Planimetrie.

gr. 8. Geh. Preis Mk. 3. —

Mathematische Wandtafel.

Von

Dr. Worpitzky.

Imp.-Folio. Preis Mk. 2. —

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik
für Gymnasien und Realschulen

von

Dr. H. Schumann.

1. Theil:

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

für Gymnasien und Realschulen.

2. verbesserte und vermehrte Auflage

bearbeitet von **R. Gantzer.**

gr. 8. Preis 2 Mk.

2. Theil:

Lehrbuch der Planimetrie

für Gymnasien und Realschulen.

2. verbesserte und vermehrte Auflage

bearbeitet von **R. Gantzer.**

gr. 8. Preis 2 Mk.

3. Theil:

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

für Gymnasien und Realschulen.

gr. 8. Preis 1 Mk.

4. Theil:

Lehrbuch der Stereometrie

für Gymnasien und Realschulen.

gr. 8. Preis 1 Mk.

5. Theil:

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene

für Gymnasien und Realschulen.

Preis 1 Mk.