Holzmüller, Elementar-Mathematik I.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik

von

Gustav Holzmüller.

Erster Teil.

Kat.

Methodisches Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Gewerbeschule (Realschule mit Fachklassen) zu Hagen i. W.,
Mitglied der Kais. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher.

Erster Teil,
nach Jahrgängen geordnet und bis zur Abschlußprüfung der
Vollanstalten reichend.

Mit 142 Figuren im Text.

Wickstecy

22/II 94

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1894.

Vorwort.

Das methodische Lehrbuch der Elementar-Mathematik, dessen ersten Teil ich hiermit erscheinen lasse, gründet sich auf eine mehr als dreiundzwanzigjährige Lehrerfahrung an verschiedenen Unterrichtsanstalten, zu denen mehrere Gymnasien, eine Königliche Provinzial-Gewerbeschule und eine Realschule mit Fachklassen gehören und auf eine fast zwanzigjährige direktoriale Thätigkeit.

Der Anlaß zur Bearbeitung des Werkes wurde durch die preußische Schulreform und die Lehrplanerlasse von 1892 gegeben. Auf meine Teilnahme an den Reformberatungen und auf frühere Veröffentlichungen brauche ich wohl nicht besonders hinzuweisen. Auch durch die Beteiligung an den Direktorenkonferenzen der Provinz Westfalen, an den Lehrplanberatungen für die mittleren Fachschulen, die im Jahre 1883 im Kultusministerium stattfanden, und an den Arbeiten der Schulkommission des Vereins der Deutschen Ingenieure hoffe ich einigen Einblick in das wirkliche Unterrichtsbedürfnis gewonnen zu haben.

Ich habe das Lehrbuch als ein *methodisches* bezeichnet. Maßgebend für die Anordnung waren also nicht wissenschaftlich-systematische, sondern nur *pädagogische* Gesichtspunkte, was durchaus den Forderungen der Schulreform entspricht. Die Elemente des *Euklid* beginnen mit der Definition des Punktes, der Geraden u. s. w., und eine ununterbrochene Kette von Schlußfolgerungen führt dort ohne Abschweifungen zum vorgesteckten Ziele hin. Mag diese Art der Darstellung noch so wissenschaftlich und systematisch sein, einen wirklich pädagogischen Wert hat sie nicht. Quartaner kann man nicht ohne Weiteres auf dem Wege der abstrakten Definition und der formalen Logik in die Welt der mathematischen Größen einführen, man muß vielmehr mit der Beschreibung körperlicher Modelle beginnen und erst nach gewonnener Klärung der Begriffe zur wissenschaftlicheren Behandlung übergehen. Im Übrigen handelt es sich bei dem mathematischen Lehrgebäude nicht um eine Kette, sondern um ein vielverzweigtes Netz von Wahrheiten. Der von Euklid eingeschlagene Weg ist nicht der einzige, sondern ein vereinzelter unter unzähligen anderen, zwischen denen es eben so zahlreiche Verbindungsglieder giebt, die bisweilen in wunderbar überraschender Weise von dem einen Gebiete in das andere hinüberführen.

Der Lehrstoff ist nicht nach wissenschaftlichen Kategorieen, sondern aus praktischen Gründen nach Klassen und Jahrgängen geordnet. Die Anpassung an das wirkliche Unterrichtsbedürfnis und der Anschluß an die Lehrplan-Vorschriften von 1892 sind dabei das allein Bestimmende gewesen.

Um jedoch die Brauchbarkeit des Buches nicht auf eine einzige Art von höheren Schulen zu beschränken, wurde in den Lehrgang der einzelnen Klassen Einiges aufgenommen, was auf dem Gymnasium ganz entbehrt, oder einer höheren Klasse, oder etwa dem Rechenunterrichte und gegebenenfalls dem Zeichenunterrichte zugewiesen werden könnte. Durch Einklammerung und Randbemerkungen wird an entsprechender Stelle jedesmal darauf aufmerksam gemacht.

Dadurch wird nicht nur manche Misdeutung beseitigt, die man den neuen Lehrplänen mit Unrecht entgegengebracht hat, sondern dem Lehrer zugleich einiger Spielraum zur individuellen Behandlungsweise gelassen, und dies entspricht durchaus der bei den Reformberatungen ausgesprochenen Absicht des Ministeriums, uns von der allzustarren Gebundenheit der Lehrpläne zu befreien. Wollen doch auch die vom Unterrichts-Ministerium veröffentlichten nur zeigen, wie etwa das bestimmt vorgeschriebene Ziel erreicht werden kann, ohne jedoch eine zwangsweise Befolgung bis in die kleinsten Einzelheiten zu verlangen. Schon die Kürze der Darstellung ist ein Beweis dafür, daß der individuellen Ausgestaltung hinreichender Spielraum gelassen werden soll.

Das Lehrbuch weicht im Sinne der preußischen Schulreform von den bisher gebrauchten in mancherlei Hinsicht derartig ab, daß zur Erörterung der maßgebenden Gesichtspunkte mehr Raum erforderlich ist, als ich für das Vorwort beanspruchen darf. Infolge dessen habe ich für die Lehrer der Mathematik ein besonderes Begleitwort geschrieben, welches den Herren Kollegen von der Verlags-Buchhandlung bereitwillig verabfolgt wird.

So bleibt denn nur noch zu bemerken, daß der erste Teil bis zur Abschlußprüfung der Vollanstalten und der gleichwertigen Entlassungsprüfung der höheren Schulen mit sechsjähriger Unterrichtsdauer reicht und durch Hereinziehung der Logarithmen und ihrer Anwendung auf Zinseszins-Rechnung, Trigonometrie und Stereometrie, außerdem aber durch Anleitung zum richtigen stereometrischen Zeichnen jene Abrundung der mathematischen Vorbildung zu geben sucht, die den jungen Leuten, die sofort ins praktische Leben übergehen oder zu höheren Fachschulen übersiedeln wollen, einige Bürgschaft dafür giebt, daß sie den dortigen Anforderungen gegenüber nicht allzu hilflos dastehen werden.

Hagen i. W., den 16. Dezember 1893.

Dr. **G. Holzmüller.**

Inhalts-Verzeichnis.

Erste Abteilung.

Geometrie.

A. Lehraufgabe der Quarta.

B. Planimetrische Lehraufgabe der Tertia b.

C. Planimetrische Lehraufgabe der Tertia a.

(Secunda der Realschulen.)

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

A. Lehraufgabe der Tertia b.

B. Lehraufgabe der Tertia a.

(Secunda der Realschulen.) (Zweiter Jahrgang.)

C. Lehraufgabe der Secunda b.

(Prima der Realschulen.) (Dritter Jahrgang.)

Dritte Abteilung.

Trigonometrie.

Lehraufgabe der Secunda b.

(Prima der Realschulen.) (Erster Jahrgang.)

Vierte Abteilung.

Stereometrie.

Lehraufgabe der Secunda b.

(Prima der Realschulen.) (Erster Jahrgang.)

Erste Abteilung.
Geometrie.

A. Lehraufgabe der Quarta.
(Erster Jahrgang.)

I. Einleitung.

Im praktischen Leben und in der Wissenschaft spielt das genaue Messen von Größen eine wichtige Rolle. Entfernungen mißt man z. B. in Metern, die Größe von Flächenräumen in Quadratmetern, den Inhalt von Körpern in Kubikmetern und die Zeitgrößen in Sekunden. Geschwindigkeiten bestimmt man z. B. durch die Anzahl der in einer Sekunde zurückgelegten Meter, Gewichte und Kräfte mißt man z. B. in Kilogrammen, die Wärme in Graden nach Celsius, und ebenso werden elektrische Spannungen, mechanische Arbeiten, die Leistungsfähigkeit der Maschinen u. s. w. in bestimmten Maßen oder Einheiten gemessen. Die gemessene Größe wird jedesmal durch die Anzahl der entsprechenden Einheiten dargestellt. Sieht man von den letzteren ab, so hat man die Zahl allein, die man naturgemäß als eine Zahlengröße bezeichnet.

Die Wissenschaft, die sich mit den meßbaren Größen und den Zahlen beschäftigt, wird Mathematik genannt. [Der geeignete deutsche Name würde Größenlehre oder Meßkunst sein.]

Man unterscheidet jedoch reine und angewandte Mathematik. Die reine Mathematik beschäftigt sich nur mit den grundlegenden Raum- und Zahlengrößen. In der angewandten Mathematik handelt es sich um das Nutzbarmachen der gewonnenen Ergebnisse für die Gebiete anderer Größen. Beispiele der angewandten Mathematik bieten die mathematische Physik, besonders die Mechanik, die Astronomie, die mathematische Geographie, die Nautik, die Landmeßkunst, das Markscheiden, die Baukunde, die Maschinenkunde u. s. w.

In Folgendem handelt es sich nur um die reine Mathematik. Die Raumlehre wird Geometrie, die Zahlenlehre Arithmetik genannt. Zunächst sollen die Anfangsgründe der Raumlehre behandelt werden.

II. Allgemeines über den Raumbegriff und die Raumlehre.

1) Sämtliche Körper, die wir sinnlich wahrnehmen, befinden sich im Weltraume. Dieser erstreckt sich nach allen Richtungen hin ins Unbegrenzte (Endlose, Unendliche). Wollte man versuchen, ihn als begrenzt zu denken, so würde aus dem Begriffe der Grenze folgen, daß es sich dabei doch nur um die Abgrenzung gegen einen anderen Raum handeln könnte, daß man also nur einen Teil des Gesamtraumes ins Auge gefaßt hatte. Den endlosen Raum sich vorzustellen, übersteigt die Fähigkeit des menschlichen Geistes. Man gelangt höchstens bis zu dem Begriffe eines immer größer und größer werdenden Raumes.

2) Vorstellbar sind nur vollständig begrenzte (endliche) Teile des Raumes. Jeder wirkliche Körper nimmt einen rings umschlossenen Teil des Raumes ein. Dabei kann man sich die Raumerfüllung als eine vollkommene denken, den Körper demnach als durchaus massiv annehmen. Dann grenzt die sichtbare Oberfläche des Körpers den Innen-Raum gegen den Außen-Raum ab. Die Oberfläche gehört sowohl dem Innen-Raume, als auch dem Außen-Raume an, sie besitzt keine Dicke, sie nimmt selbst keinen körperlichen Raum ein, sie ist nur die Grenze zweier Räume. Also: Der Raum ist teilbar, und zwar teilbar durch Flächen.

3) Flächen können ebenfalls unbegrenzt und begrenzt sein. Sind sie begrenzt, so sind die Grenzen Linien. Auch die Linien sind entweder begrenzt oder unbegrenzt. Im ersteren Falle heißen die Grenzen Punkte.

4) An jedem wirklichen Körper unterscheidet man Form und Stoff (Gestalt und materiellen Inhalt). Die Gestalt kann z. B. die des Würfels, der Kugel, der Pyramide sein, als Stoff kann man z. B. Eisen, Holz, Stein annehmen. Nur die Untersuchung der Gestalt gehört der Raumlehre an, die der stofflichen Verhältnisse

dagegen irgend einem Zweige der Naturwissenschaft, z. B. der Chemie, der Mineralogie, der Botanik. Die Raumlehre beschäftigt sich also nicht mit dem steinernen, eisernen oder hölzernen Würfel, nicht mit dem Wasser- oder Luftwürfel, sondern mit der Würfelgestalt an sich, ohne jede Bezugnahme auf den Stoff. Dieser nur gedachte (abstrakte) Würfel soll der mathematische Würfel heißen. Allgemein hat man in diesem Sinne streng zu scheiden zwischen mathematischen Körpern und wirklichen (physischen) Körpern.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Arten von Körpern ist ein sehr weitgehender. Betrachtet man z. B. die Teile eines noch so genau gearbeiteten Metallwürfels unter starker Vergrößerung, so zeigen sich vielfache Mängel und Ungenauigkeiten. Die Flächen sind nicht vollkommen eben, das Auge bemerkt sogar Vertiefungen, die darauf schließen lassen, daß im Innern des Körpers sich Hohlräume (Poren) befinden. Die Kanten, in denen die Flächen zusammenstoßen, sind nicht vollkommen geradlinig, sondern hier und dort schwankend in der Richtung, auch sind sie nicht vollkommen scharf, sondern in verschiedenem Grade abgerundet. Die Ecken endlich, in denen die Kanten zusammentreffen, sind nicht vollkommen spitz, sondern sie erscheinen als abgerundet oder abgebrochen. Auch darauf sei aufmerksam gemacht, daß der wirkliche Körper durch Erwärmung gleichmäßig oder ungleichmäßig ausgedehnt werden kann, wobei das letztere Gestaltveränderungen herbeiführt.

Von allen diesen Ungenauigkeiten und Eigentümlichkeiten ist bei dem mathematischen Körper ebenfalls abzusehen. Die Raumlehre beschäftigt sich nur mit dem unveränderlichen, vollkommen genauen Würfel, der absolut genauen Kugel u. s. w., also nur mit Idealgestalten, die in der Wirklichkeit nicht vorhanden sind und nur gedacht werden können. Die genauesten Modelle, die genauesten Zeichnungen mathematischer Gebilde sind doch nur ungenaue und rohe Veranschaulichungen jener Idealgestalten.

5) Diese Idealgestalten haben aber den großen Vorzug, daß man über sie mit untrüglicher Gewißheit und vollkommener Genauigkeit bestimmte Aussagen machen kann. Längen, Flächeninhalte, Körperinhalte u. s. w. lassen sich hier deshalb mit voller Genauigkeit angeben, weil von Schwankungen der geraden Linien, von Unebenheiten der Flächen, von unvollkommener Raumerfüllung und von sonstigen störenden Zufälligkeiten nirgends die Rede ist. Die entsprechenden Aussagen lassen sich bei wirklichen Körpern gar nicht oder doch nur mit einiger Annäherung machen.

In der That denkt sich jeder, der einen Metallwürfel oder einen Steinquader, den Inhalt eines Baumstammes oder eines cylindrischen Gefäßes berechnen will, an Stelle des wirklichen Körpers den entsprechenden mathematischen Körper, führt die Berechnung an diesem aus, worin eine außerordentliche Erleichterung liegt, und zieht die entsprechenden Schlüsse, z. B. unter Annahme gleichmäßiger Massenverteilung.

6) Vorläufig genüge in Bezug auf das, was die Raumlehre will, folgende Erklärung: Die Raumlehre oder Geometrie beschäftigt sich mit den gesetzmäßig gestalteten mathematischen Körpern und den an ihnen auftretenden Flächen, Linien und Punkten, mit den Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen dieser Gebilde, mit ihrer Berechnung und Konstruktion.

Die rein mathematische Konstruktion ist nach Obigem nur in der Vorstellung möglich, das Herstellen der Zeichnungen und Modelle ist also nur ein Veranschaulichen der ersteren, denn jede gezeichnete Linie z. B. hat eine gewisse Breite, wodurch sie erst sichtbar wird, diese Breite ist aber bei der mathematischen Linie nicht vorhanden.

Um eine Anzahl der vorher angewandten Benennungen eingehender zu erläutern, sollen zunächst vorbereitende Betrachtungen an bestimmten Modellen angestellt werden.

III. Erläuterung der wichtigsten geometrischen Begriffe an Modellen und Zeichnungen.

a) Würfel und Quadrat, Ebene und Gerade.

7) Der grundlegende Körper für die Einteilung des Raumes ist der schon aus dem Rechenunterricht bekannte Würfel. Sein Modell ist entweder ein körperliches (z. B. der massive Holzwürfel), oder ein Flächenmodell (aus Pappe oder Papier angefertigt), oder ein Linienmodell (z. B. Drahtgestell). Das Punktmodell versuche man sich im Geiste vorzustellen, indem man den Eckpunkten ihre Lage im Raume anweist.

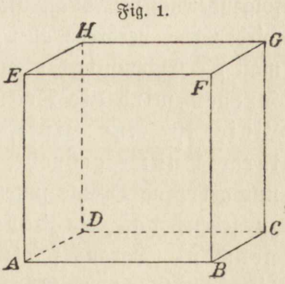
Das Modell soll zunächst in seinen einzelnen Teilen beschrieben werden, wobei die gegenseitigen Beziehungen der Teile zu besprechen sind. Später sollen die dabei angewandten geometrischen Begriffe geklärt und die etwa ausgesprochenen Behauptungen bewiesen werden.

8) Man zählt am Würfel 6 ebene Flächen, 12 geradlinige Kanten und 8 Eckpunkte. Die Würfelflächen sind Quadrate. Je zwei zusammenstoßende dieser Flächen stehen aufeinander senkrecht oder bilden einen rechten Winkel, während je zwei gegenüberliegende gleichlaufend (oder parallel) sind und überall denselben Abstand von einander haben. Die Würfelflächen sind sämtlich übereinstimmend (sind kongruent oder decken sich). Je zwei zusammenstoßende Kanten stehen aufeinander senkrecht, je vier von ihnen sind parallel, so daß man drei Gruppen paralleler Kanten, also drei Hauptrichtungen am Würfel hat. Da sämtliche Kanten gleich lang sind, so sagt man, der Würfel sei ebenso lang wie breit und hoch. Von jeder Würfelfläche und den Kanten der gegenüberliegenden Fläche sagt man ebenfalls, sie seien parallel, von jeder Kante aber, sie stehe senkrecht auf jeder der beiden Flächen, mit denen sie in den Eckpunkten zusammenstößt. In jeder Ecke des Würfels treffen drei Kanten und drei Flächen zusammen. Wegen der Übereinstimmung aller Flächen, ebenso aller Kanten, aller Winkelverhältnisse und aller Ecken nennt man den Würfel einen regelmäßigen Körper.

9) Die Eckpunkte sind als Durchschnittspunkte der verlängert gedachten Kanten aufzufassen, die Kanten als Durchschnittslinien der erweitert zu denkenden Flächen. Die Eckpunkte sind zugleich die Grenzpunkte der Kanten, die Kanten die Grenzlinien der Flächen, die Quadrate endlich die Grenzflächen des Körpers.

10) Die Punkte, Kanten, Flächen und der Würfelkörper selbst können in gewisse Bewegungsbeziehungen zu einander gesetzt werden, die den Körper sozusagen vor dem geistigen Auge entstehen lassen. In Fig. 1 ist der Würfel dargestellt. Denkt man sich den Punkt A geradlinig nach B bewegt, so entsteht die Gerade AB als Weg des Punktes A. Denkt man sich die Gerade AB unter Hingleiten der Endpunkte auf AD und BC in die Lage DC verschoben, so entsteht die Quadrat-Fläche $ABCD$ als Weg der Geraden AB. Denkt man sich diese Fläche bis in die Lage $EFGH$ hinaufbewegt, wobei ihre Ecken sich in den senkrechten Kanten zu bewegen haben, so entsteht der Würfel als Weg der Fläche $ABCD$.

Fig. 1.



Umgekehrt kann man sich vorstellen, die Höhe des Würfels nehme allmählich ab, um schließlich ganz zu verschwinden, dann bleibt nur noch die Fläche $ABCD$ übrig. Läßt man die Breite dieser Fläche bis zur Null abnehmen, so bleibt nur noch die Gerade AB. Nimmt die Länge derselben ebenfalls zur Null ab, so ist nur noch der Punkt A vorhanden.

So erkennt man, daß der Würfel-Körper drei Dimensionen oder Ausdehnungen hat, Länge, Breite und Höhe, daß jede Quadrat-Fläche nur zwei besitzt, Länge und Breite, daß der Kanten-Linie nur eine einzige zukommt, die Länge, während der Punkt gar keine Ausdehnung hat. Der Punkt ist also nur eine im Raume gedachte Stelle ohne jede Ausdehnung.

11) Um tiefer in das Wesen der geradlinigen Kanten einzudringen, betrachte man jetzt neben dem ersten Würfel noch einen zweiten von derselben Kantenlänge. Jede Kante des einen läßt sich mit jeder Kante des andern genau zur Deckung bringen, d. h. ohne daß Lücken zwischen beiden sichtbar werden. Diese Deckung kann auf zweierlei Art geschehen, erst in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung. Folglich: Gleichlange Gerade decken sich (sind kongruent) auf zweierlei Art. Man kann die Kanten an einander hinschieben, so daß die eine gewissermaßen die Verlängerung der andern giebt, wobei andere Stücke, wie vorher, genau aneinander lagern. Man schließt daraus: Teile einer Geraden können in der Geraden und ihrer Verlängerung verschoben werden, ohne seitlich aus dieser herauszutreten. Diese Eigenschaften teilt aber die Gerade mit einigen krummen Linien, die auch aus kongruenten Teilen bestehen.*) Den Hauptunterschied findet man folgendermaßen: Man stelle die volle Deckung der beiden Kanten wieder her, verdrehe aber den einen Würfel gegen den andern, indem man die Endpunkte der angelegten Kante fest hält. Auch bei diesem Drehen wird die Deckung nicht gestört. Folglich: Die gerade Linie ist eine Linie, die, unter Festhaltung von zweien ihrer Punkte gedreht, ihre Lage nicht ändert. Man braucht nur gebogene Drähte unter Festhaltung zweier „Punkte" zu drehen, um zu sehen, daß sie dabei unzählige verschiedene Lagen annehmen. Daraus folgt: Zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Jede krumme Linie zwischen zwei Punkten kann dagegen dort unendlich oft angebracht werden. Die Gesamtheit der Punkte außerhalb der beiden festgehaltenen Punkte,

*) Kreislinie und Schraubenlinie können ebenfalls in sich selbst bewegt werden.

die bei der Drehung ebenfalls ihre Lage nicht ändern würden, giebt die beiderseitige Fortsetzung der Geraden ins Endlose. [Die Transmissionswellen unserer Fabriken sind um so besser konstruiert und um so genauer geradlinig, je weniger ihre Drehungsbewegung durch seitliche Schwankungen sichtbar wird, je weniger sie „schlagen".] Nun ist aber erfahrungsmäßig auch der kürzeste Weg eines Punktes zwischen zwei Geraden nur in einer einzigen Art möglich, er muß also mit der Geraden übereinstimmen. Folglich: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Sie ist kürzer als jeder Umweg, d. h. als jede krumme Linie oder gebrochene Linie zwischen den beiden Punkten. So ist z. B. die längste Seite eines Dreiecks*) doch kürzer als die Summe der beiden andern. [Straff gespannte Fäden geben daher ziemlich genau gerade Linien. Anwendung auf das Abschnüren gerader Linien mittels gespannter Fäden beim Bauen, auf dem Zimmerplatze und auf dem Schnürboden der Schiffswerft.] Aus Obigem folgt zugleich: Zwei Gerade können sich nur in einem einzigen Punkte schneiden. Denn schnitten sie sich zweimal, so hätte man zwischen beiden Schnittpunkten zwei getrennte Gerade, was unmöglich ist. — Der Abstand zweier Punkte ist die gemessene Länge ihrer geraden Verbindungslinie. (Das Wort Verbindungslinie soll künftig stets eine Gerade bedeuten.)

12) Das Hülfsmittel zum Zeichnen gerader Linien ist das Lineal. [Prüfung der Brauchbarkeit durch Zeichnen einer Geraden, Umlegen des Lineals nnd Anpassen derselben Kante an die Gerade.] Die Hauptaufgabe ist: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Zum Abmessen der Länge benutzt man den Zirkel. Mit Lineal und Zirkel löst man ferner die Aufgabe: Eine gegebene Gerade um sich selbst zu verlängern (sie zu verdoppeln), sie zu verdreifachen, vervierfachen u. s. w. Durch Abtragen einer aufeinanderfolgenden Reihe gleich langer Stücke auf einer Geraden erhält man einen Maßstab, der ebenfalls zum Messen benutzt werden kann. [Maßstäbe zeigen z. B. Millimeter, Dezimeter und Meter an.] Mit Zirkel oder Maßstab weist man nach, daß die Kanten des Würfels gleich lang sind. Die Würfelflächen sind also zunächst Vierecke (Vierseite) mit gleich langen Seiten.

[Der Schüler übe sich schon jetzt im Ziehen gerader Linien mit Lineal und Reißfeder und stelle mit Hülfe des Zirkels z. B. Centimeter-Maßstäbe von 10 oder 20 cm Länge her.]

*) Geradlinig von drei Seiten begrenzte ebene Fläche.

13) Jetzt soll die Beschaffenheit der Würfelflächen genauer untersucht werden.

Legt man eine Kante des einen Würfels (oder die des Lineals) auf eine Fläche des andern Würfels, so erkennt man keine Lücke zwischen ihnen. Dieses genaue Aneinanderpassen bleibt erhalten, wie man auch die Kante auf der Fläche verschiebe oder auf ihr verdrehe. Demnach gehört die Würfelfläche zu der Art von Flächen, auf denen sich von jedem Punkte nach jedem andern eine Gerade ziehen läßt, die ganz in der Fläche bleibt. Solche Flächen nennt man ebene Flächen. Also: Eine Ebene ist eine Fläche, in der sich von jedem Punkte nach jedem andern Punkte eine Gerade ziehen läßt, die nirgends aus der Fläche heraustritt. Eine Fläche, auf der dies nicht überall möglich ist, heißt eine krumme Fläche. [Gieb Beispiele an.]

Gleitet demnach eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden, z. B. auf zwei zusammenstoßenden Würfelkanten hin, so kann ihr Weg nur diejenige Ebene sein, die zwischen den beiden Geraden möglich ist. Weil diese Ebene alle anderen zwischen den beiden Geraden möglichen Geraden ganz in sich aufnimmt, so ist zwischen beiden nur diese einzige Ebene möglich. Also: Durch zwei sich schneidende Gerade ist stets eine und nur eine Ebene bestimmt. Ragt die bewegte Gerade über die beiden sich schneidenden hinaus, so erhält man zugleich die Fortsetzung der Ebene, die sich ins Endlose erstrecken kann. Auch durch drei Punkte im Raume, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets **eine** Ebene möglich, denn von dem einen aus lassen sich nach den beiden andern Gerade ziehen.

Dasselbe gilt von einer Geraden und einem außerhalb derselben liegenden Punkte, denn durch diesen läßt sich eine Gerade legen, die die andere irgendwo schneidet.

Dagegen brauchen vier Punkte nicht immer in einer Ebene zu liegen, denn der vierte kann sich außerhalb der durch die drei andern bestimmten Ebene befinden. [Vierbeinige Tische und Stühle wackeln bisweilen, dreibeinige nie. Warum?]

Auch durch zwei Gerade läßt sich nicht immer eine Ebene legen, denn ihre Endpunkte können vier Punkte sein, die nicht zu derselben Ebene gehören. Diese Geraden schneiden sich dann nicht, wie weit man sie auch verlängere, denn sonst würde sich doch eine Ebene durch sie und die vier Punkte legen lassen. Sich kreuzende Gerade sind solche, durch die sich keine Ebene legen läßt. Man nennt sie auch windschiefe Gerade. [Suche windschiefe Gerade am Würfel, an den Wänden des Zimmers auf. Es giebt windschiefe Dächer,

d. h. nicht ebene Dächer, da bisweilen die (horizontale) Firste und die (horizontale) Grundlinie der Dachfläche des unregelmäßigen Grundrisses halber windschiefe Gerade sind. Ein aus windschiefen Geraden bestehendes Viereck heißt ein windschiefes Viereck.]

14) Stellt man den einen Würfel auf den andern, so berühren sich die entsprechenden beiden Flächen vollkommen, wie man sie auch aufeinander hinschiebe oder aufeinander verdrehe. Denkt man sich auf den einen Würfel statt des zweiten eine dünne Metallplatte aufgelegt, durch die eine ebene Fläche veranschaulicht werden soll, so läßt sich die genannte Deckung sowohl mit der einen, als auch mit der anderen Seite der Platte erzielen. Also: Legt man zwei Ebenen aufeinander, so kann man die eine auf der anderen und ihrer Verlängerung beliebig verschieben und verdrehen, ohne daß beide irgendwo auseinander treten, und das genaue Aneinanderpassen bleibt auch nach dem Umklappen der einen Ebene erhalten. Der Versuch mit krummen Flächen zeigt, daß ihr Zusammenpassen entweder durch Verschiebung allein, oder durch Drehung allein, oder durch beides zugleich aufgehoben wird, ebenso durch das Umklappen nebst Verschiebung und Drehung aufgehoben werden muß. (Beispiele.)

Damit ist erklärt, was es sagen soll, daß die gleichseitigen Vierecke des Würfels nicht windschiefe, sondern ebene Vierecke sind. Jetzt ist auch folgende Erklärung verständlich: Die Raumlehre zerfällt in die Lehre von den ebenen Gebilden, d. h. die **Planimetrie** und die Lehre von den nicht ebenen Gebilden, d. h. die **Stereometrie.** Die Planimetrie wird auch als Geometrie (im engeren Sinne) bezeichnet.

15) Jetzt soll untersucht werden, was es bedeutet, daß gewisse Würfelflächen oder Würfelkanten oder auch Flächen und Kanten aufeinander senkrecht stehen.

Ein ruhig an einem Faden hängendes Gewicht giebt diesem die Gestalt einer Geraden und eine Richtung, die man als die senkrechte bezeichnet. (Vergleiche das Lot der Maurer, von dem die Bezeichnung lotrecht kommt. Vom aufrecht stehenden Menschen kommt die Bezeichnung scheitelrecht oder vertikal, vom Perpendikel der Uhr die Bezeichnung perpendikulär.)

Die freie Oberfläche ruhig stehenden Wassers in einem größeren Gefäße darf, wie man mit dem Lineale prüfen kann, als eine Ebene betrachtet werden. Die Lage dieser Ebene wird als die wagerechte oder horizontale bezeichnet. In dieser Ebene lassen sich von jedem

Punkte aus beliebig viele Gerade ziehen, die man sämtlich als horizontale Gerade bezeichnet. [Vergl. die Wasserwage (Kanalwage) und andere Nivellier-Instrumente, mit denen geprüft wird, ob Gerade oder Ebenen horizontal sind. Anwendung beim Bauen, beim Verebnen (Planieren) größerer Plätze und beim Herstellen der wagerechten Schienenbahn (Eisenbahn-Planum).]

Ebenen und Gerade, die nicht horizontal sind, werden als schräge Ebenen, bezw. Gerade bezeichnet. [Kugeln rollen von hinreichend schiefen Ebenen herab, größere Wassermassen fließen auch bei dem geringsten Gefälle auf ihnen abwärts, wie man es an jedem Strome beobachten kann.]

16) Von jeder senkrechten Geraden sagt man, sie stehe senkrecht auf jeder wagerechten Ebene und auf jeder wagerechten Geraden, von der sie geschnitten wird. Steht also z. B. der Würfel auf der wagerechten Ebene des Tisches, und zeigt die Prüfung mit dem Lote, daß die Seitenkanten senkrechte Gerade sind, so ist zugleich gezeigt, daß diese erstens senkrecht auf den anstoßenden Grundkanten stehen, und daß sie zweitens auch senkrecht auf der Grundfläche des Würfels stehen. Dies gilt nun stets, welche Würfelfläche man auch als Grundfläche betrachte, und außerdem wird die gegenseitige Lage der Kanten, ebenso die Lage der Kanten zu den Flächen nicht geändert, wenn man dem Würfel eine beliebige schräge Stellung im Raume giebt. Folglich: a) Je drei in einer Ecke zusammenstoßende Würfelkanten stehen aufeinander senkrecht; b) jede Würfelkante steht senkrecht auf den beiden Würfelflächen, mit denen sie in den Eckpunkten zusammentrifft. Allgemein sagt man für ganz beliebige Lagen: Zwei sich schneidende Gerade stehen aufeinander senkrecht, wenn dadurch, daß man die eine in eine senkrechte Lage bringt, die andere in eine wagerechte Lage gezwungen wird.

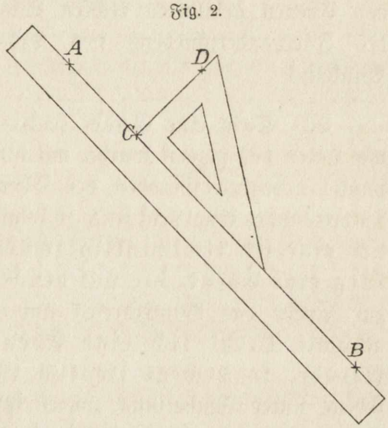
17) Von zwei sich schneidenden Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, sagt man auch, sie bilden einen rechten Winkel miteinander. Die beiden Geraden heißen dabei Schenkel des Winkels, der Schnittpunkt heißt der Scheitel desselben. [Der allgemeine Begriff des Winkels soll erst später erläutert werden.] An den aufeinander gelegten Flächen zweier Würfel erkennt man, daß rechte Winkel so zur Deckung gebracht werden können, daß ihre Schenkel aufeinanderfallen. Sind die Schenkellängen verschieden, so sagt man trotzdem ganz allgemein, die Winkel seien kongruent. Also:

Rechte Winkel sind kongruent.

Verlängert man die Schenkel eines rechten Winkels über den Scheitel hinaus, so entstehen im Ganzen vier um den Scheitelpunkt herum liegende Winkel, die wie die Probe zeigt, untereinander zur Deckung gebracht werden können, folglich sämtlich Rechte sind. Also: In der Ebene können um einen Punkt herum vier rechte Winkel aneinander gelegt werden. [Man lege vier Quadrate entsprechend aneinander oder stelle vier Würfel in derselben Weise zusammen.]

18) Auf Grund der Kongruenz rechter Winkel kann man als vorläufiges Hülfsmittel zum Zeichnen derselben eine Schablone verwenden, das allgemein gebrauchte Rechtwinkeldreieck (kürzer Winkeldreieck oder Winkelhaken genannt). In Fig. 2 ist gezeigt: a) wie man mit Hülfe des Lineals und des Winkeldreiecks auf einer Geraden AB im Punkte C eine Senkrechte (ein Lot) CD errichtet, b) wie man von einem Punkte D aus auf eine Gerade AB ein Lot fällt, c) wie man prüft, ob ein Winkel BCD ein Rechter ist.

Fig. 2.



[Die Brauchbarkeit des Winkeldreiecks prüft man, indem man mit seiner Hülfe einen rechten Winkel BCD zeichnet, BC über C hinaus verlängert und versucht, ob das Winkeldreieck genau in den Winkel DCA hineinpaßt.]

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck sollen von jetzt ab die den rechten Winkel einschließenden Seiten als Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite als Hypotenuse bezeichnet werden.

19) Im Anschluß an das unter 16) gesagte gilt für allgemeine (schräge) Lagen folgendes: Eine Gerade und eine Ebene stehen aufeinander senkrecht, wenn dadurch, daß man die Gerade in eine senkrechte Lage bringt, die Ebene in eine horizontale Lage gezwungen wird. Bringt man dagegen die Gerade in eine horizontale Lage, so wird die Ebene in eine Lage gezwungen, die man die senkrechte Lage nennt. Wo findet dies am Würfel statt, wenn man ihn auf die Ebene des Tisches stellt? — Prüfung mit dem Lote zeigt an den Seitenflächen dieses Würfels, daß man in einer

senkrechten Ebene unzählige senkrechte Gerade ziehen kann. Durch zwei senkrechte Gerade läßt sich stets eine senkrechte Ebene legen. Von der senkrechten Ebene sagt man, sie stehe senkrecht auf jeder wagerechten Ebene.* Allgemein gilt für beliebige schräge Lagen: Zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn dadurch, daß man der einen eine horizontale Lage giebt, die andere in eine senkrechte Lage gezwungen wird. Errichtet man auf der Schnittkante solcher Ebenen in einem Punkte Lote, die in den Ebenen liegen, so bilden diese einen rechten Winkel. Umgekehrt: Stehen diese Lote aufeinander senkrecht, so stehen auch die Ebenen aufeinander senkrecht und bilden einen rechten Winkel. [Zeige dies am Würfel und an den Wänden des Zimmers.] Die von Ebenen gebildeten rechten Winkel sind kongruent. [Möglichkeit des Ineinanderschiebens von Schachteln und Kasten mit rechten Winkeln.]

20) Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so bildet sie, wie unter 16) gezeigt wurde, mit allen durch ihren Fußpunkt (Schnittpunkt) gehenden Geraden der Ebene rechte Winkel. Da diese aber untereinander kongruent sind, so folgt: Die Drehung einer Geraden um eine sie rechtwinklig schneidende feste Gerade giebt als Weg eine Ebene, die auf der Geraden senkrecht steht. (Drehe zur Probe das Winkeldreieck um eine der Katheten.) Anders ausgedrückt: Dreht sich eine Ebene um eine zu ihr senkrechte Gerade, so bewegt sie sich in sich selbst. Dreht man eine Ebene unter Festhaltung zweier ihrer Punkte (vgl. die sich um die Angeln drehende Stubenthür), so bleibt die gerade Verbindungslinie dieser Punkte unverändert in ihrer Lage. Durch zwei Punkte lassen sich also unzählige Ebenen legen und sämtliche schneiden sich in der Verbindungslinie dieser Punkte. Folglich: Schneiden sich zwei Ebenen, so ist die Durchschnittslinie eine Gerade. Kennt man zwei Schnittpunkte der Ebenen, so kennt man auch die ganze Schnittlinie beider Ebenen.

[Am Würfel der Fig. 1 sind durch die Punkte B und F die senkrechten Ebenen $ABFE$, $BCGF$ und $FBDH$ gelegt. BF ist ihre gemeinschaftliche Schnittlinie. BF steht senkrecht auf BA, BD und BC. Man kann die Ebene $ABFE$ um BF in die Lage $BCGF$ drehen. Dabei bewegt sich AB in der Grundfläche $ABCD$. Zeige am Würfel rechte Winkel, die zwischen den Kanten, zwischen den Ebenen und zwischen Kanten und Ebenen vorkommen.]

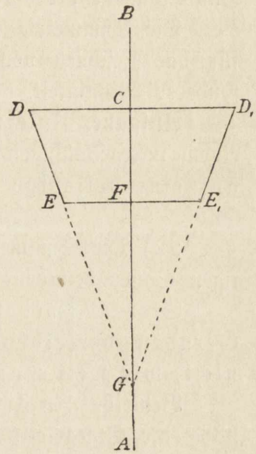
---

*) Man denke sich noch die Geraden BD und FH gezogen.

21) Jetzt soll untersucht werden, was es heißt, je vier Würfelkanten seien gleichlaufend oder parallel. Zu diesem Zwecke sei Einiges über den Begriff der Symmetrie vorausgeschickt.

Verlängert man das von einem Punkte D auf eine Gerade AB (Fig. 3) gefällte Lot DC über die Gerade hinaus um sich selbst, so daß $D_1C = DC$ ist, so nennt man den Punkt D_1 das Spiegelbild von D in Bezug auf die Gerade AB. In Fig. 3 ist auch von einem andern Punkte E das Spiegelbild E_1 gebildet. Damit ist zugleich das Spiegelbild D_1E_1 zu der Geraden DE gefunden. Klappt man den links von AB liegenden Teil der Figur um die Gerade AB auf den rechten Teil, so decken sich wegen der Kongruenz der rechten Winkel und der Gleichheit der Längen die Lote mit ihren Fortsetzungen (welche letzteren also Spiegelbilder der Lote sind), so daß die Endpunkte sich gleichfalls decken. Weil so D auf D_1 und E auf E_1 fällt, so decken sich auch die Geraden DE und D_1E_1. Das Spiegelbild eines ebenen Gebildes gegen eine Gerade derselben Ebene ist stets ein kongruentes Gebilde. [Die Deckung kann im allgemeinen nur durch Umklappen um die spiegelnde Gerade erreicht werden.] Diese besondere Lage kongruenter Gebilde gegen einander nennt man die symmetrische Lage. Die spiegelnde Gerade heißt die Symmetrieachse. In Fig. 3 sind z. B. die Vierecke $CDEF$ und CD_1E_1F kongruent und symmetrisch zu einander in Bezug auf die Symmetrieachse AB. Dasselbe gilt von den Dreiecken CDG und CD_1G. Folglich: Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Katheten des einen gleich denen des andern sind.

Fig. 3.



Die Punkte der Symmetrieachse entsprechen beim Umklappen sich selbst. Verbindet man zwei andersliegende entsprechende Punkte symmetrischer Gebilde durch eine Gerade, so steht diese senkrecht auf der Symmetrieachse und wird durch dieselbe halbiert.

[Jeder Punkt der Geraden AB in Fig. 3 ist gleichweit von D und D_1 entfernt, denn die entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke sind ebenso, wie DCG und D_1CG kongruent. Dreht man nun AB um die festgehaltene Gerade DD_1 so ist der Weg von AB eine Ebene. Dabei bleibt jeder Punkt der gedrehten Geraden gleich weit von D und D_1 entfernt. Also gilt folgende Erklärung der Ebene:

Die Ebene ist eine Fläche, bei der jeder Punkt gleichen Abstand von zwei gegebenen Raumpunkten hat. D ist symmetrisch gegen D_1 in Bezug auf die so entstandene Ebene. Es giebt also auch Symmetrie im Raume gegen eine Ebene. Dabei findet jedoch im allgemeinen keine Kongruenz statt. So kann z. B. die rechte Hand in symmetrische Lage gegen die linke gebracht werden, beide sind aber nicht kongruent, so daß z. B. der rechte Handschuh nicht auf die linke Hand paßt. Dagegen ist das Spiegelbild der rechten Hand kongruent der linken Hand.]

Die Symmetrie ist nicht nur für die Geometrie, sondern auch für das Zeichnen von Kunstformen und für die Architektur von besonderer Wichtigkeit.

Aufgabe. Zu einer beliebigen geradlinigen Figur (z. B. zu einem unregelmäßigen Fünfeck) die symmetrische Figur in Bezug auf eine beliebige Gerade derselben Ebene zu konstruieren.

22) Die Symmetrie läßt sich zum Beweise des folgenden wichtigen Satzes benutzen:

Stehen zwei Gerade einer Ebene auf einer dritten Geraden derselben Ebene senkrecht, so schneiden sie sich nicht, wie weit man sie auch beiderseits verlängere.

Beweis. In Figur 3 seien DC und EF Lote auf AB. Man bilde ihr Spiegelbild gegen AB, also die Fortsetzungen über AB hinaus und denke sich beide Gerade nach rechts und links ins Endlose verlängert. Der linke Teil der Zeichnung ist dem rechten Teile kongruent. Angenommen also, die beiden Lote schnitten sich auf der linken Seite, dann müßten sie sich in kongruenter Weise auch auf der rechten Seite schneiden. Dann aber hätte man zwei getrennte Gerade zwischen den beiden Schnittpunkten, was unmöglich ist. Also ist das Schneiden der beiden Lote überhaupt unmöglich. [Man halte zwei Stäbe senkrecht gegen den Spiegel oder lege einen Würfel an diesen an und untersuche die Spiegelbilder im besprochnen Sinne.]

Bezeichnet man nun Gerade einer Ebene, die sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängere, als parallel (d. h. gleichlaufend), so läßt sich der Satz auch folgendermaßen aussprechen:

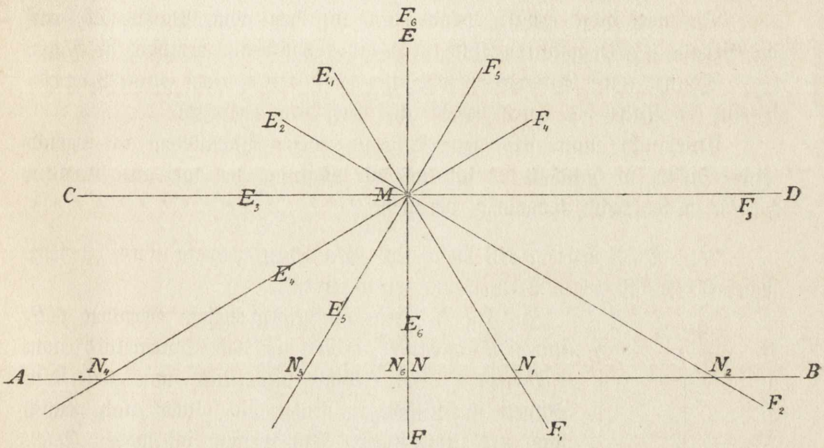
Stehen zwei Gerade einer Ebene auf einer dritten Geraden derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Bei dem in Fig. 1 dargestellten Würfel stehen EA und BF senkrecht auf der in ihrer Ebene liegenden Geraden AB, beide sind also parallel. Dasselbe gilt von BF und CG in Bezug auf BC, dasselbe von CG und DH in Bezug auf CD, ebenso von DH

und AE in Bezug auf AD. Es gilt aber auch von AE und CG in Bezug auf die in derselben Ebene liegende Gerade AC, ebenso von BF und DH in Bezug auf BD. Folglich: Je vier Kanten des Würfels sind parallel. Überhaupt erkennt man: Lote auf derselben Ebene sind stets parallel.

23) Das Wesen der parallelen Geraden klärt sich durch Fig. 4 genauer auf. Hier seien AB und CD unbegrenzte Gerade, beide senkrecht auf der unbegrenzten Geraden EF, also parallel. M und N seien die Schnittpunkte mit EF. Man erteile jetzt der Geraden EF in der

Fig. 4.



Zeichnungsebene eine Drehung um M, so weit, bis sie wieder mit der Anfangslage zusammenfällt, aber in entgegengesetzter Richtung. Nahm EF so die Lagen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3, E_4F_4, E_5F_5 an, so wanderte der Durchschnitt N über N_1 und N_2 nach rechts. Näherte sich EF der Lage E_3F_3, wo es mit CD zusammenfällt, so entzog sich der weit fortrückende Schnittpunkt allmählich der Beobachtung, und in der Lage CD selbst konnte er nicht mehr vorhanden sein. Dreht man EF über die Lage CD hinaus, so kommt der Schnittpunkt links aus großer Entfernung heranrückend wieder zum Vorschein und geht über N_4 und N_5 nach dem Ausgangspunkte N zurück.

Aus der Anschauung entnimmt man dabei Folgendes: EF hat in allen Lagen mit AB einen Schnittpunkt, nur in der parallelen Lage nicht. Je näher EF der parallelen Lage kommt, in um so größerer Entfernung liegt der Schnittpunkt. (Bei unendlicher Annäherung an die parallele Lage sagt man, der Schnittpunkt sei unendlich fern.) Das Passieren der parallelen Lage läßt den Schnittpunkt plötzlich einen unendlich großen Sprung von rechts nach links (oder umgekehrt) machen. Im Übrigen ist seine Bewegung bei stetiger Drehung eine stetige. Weil die Parallelen gegen das gemeinschaftliche Lot gleichweit gedreht sind (um 90^0), gelten sie als gleichgerichtet. Ist z. B. die eine horizontal, so ist es auch die andere, ist die eine vertikal, so ist es auch die andere.

Ferner entnimmt man aus der Anschauung dieses Drehungsverfahrens folgendes:

Durch einen Punkt (M) läßt sich zu einer Geraden (AB) nur eine einzige Parallele legen.

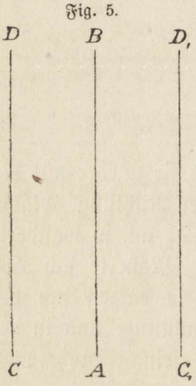
Da man diese erhält, wenn man auf dem vom Punkte (M) auf die Gerade (AB) gefällten Lote in M eine Senkrechte errichtet, so folgt:

Steht eine Gerade senkrecht auf einer von zwei Parallelen, so steht sie auch senkrecht auf der andern.

Untersucht man also den Abstand zweier Parallelen an irgend einer Stelle, so handelt es sich um die Messung der dort auf beiden zugleich senkrecht stehenden Geraden.

24) Das Spiegelbild einer Geraden gegen eine zu ihr Parallele ist eine Parallele zu beiden.

Fig. 5.



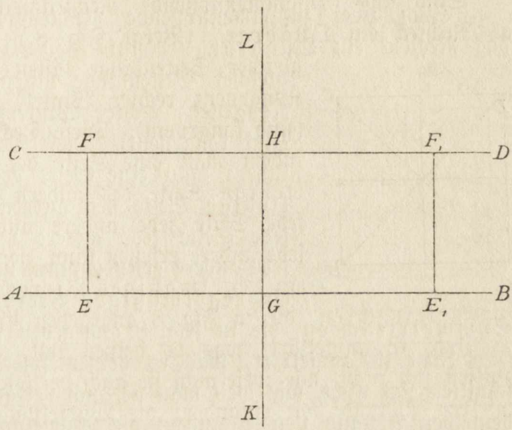
In Fig. 5 seien die unbegrenzten Geraden AB und CD parallel, C_1D_1 sei das Spiegelbild von CD gegen AB. Weil nun links von AB kein Schnitt stattfindet, so findet ein solcher auch rechts von AB nicht statt. Also treffen sich weder D_1C_1 und AB, noch D_1C_1 und DC.

(Der Beweis kann auch mit Hülfe eines gemeinschaftlichen Lotes geführt werden. Mit Hülfe des letzteren zeigt man auch, daß zwei Gerade, die zu einer dritten parallel sind, auch unter sich parallel sind.)

25) In Fig. 6 stehen AB und CD beide senkrecht auf KL, und FE stehe senkrecht auf den beiden Parallelen. E_1F_1 sei das Spiegelbild von EF in Bezug auf KL. Aus der Symmetrie folgt, daß $EF = E_1F_1$ ist, daß also die Parallelen bei F und F_1 denselben Abstand haben. Verschiebt man das spiegelnde Lot KL nach rechts oder links, so verschiebt sich auch E_1F_1, aber es bleibt stets gleich EF. Folglich ist der Abstand der Parallelen AB und CD überall gleich EF. Allgemein folgt: Parallele Gerade haben überall denselben Abstand.

26) Sind nun AB und CD zwei Gerade derselben Ebene, die zunächst nur an zwei Stellen denselben Abstand EF bezw. E_1F_1 in demselben Sinne (also nicht entgegengesetzt) haben, so läßt sich zeigen, daß sie überall denselben Abstand EF haben, also parallel sind. Denn die zu AB durch F gelegte Parallele kann das Lot E_1F_1 nach vorigem Satze nur in F_1 schneiden. Da nun zwischen F und F_1 nur eine einzige Gerade möglich ist, so fällt FF_1 ganz mit der Parallelen zusammen.

Fig. 6.



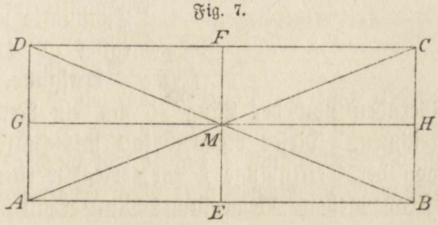
Also: Haben zwei Gerade einer Ebene an zwei Stellen gleiche Entfernung von einander, und zwar in demselben Sinne, so haben sie überall denselben Abstand, sie sind also parallel.

27) Denkt man sich eine Gerade CD um die in der Zeichnungsebene liegende Parallele AB gedreht, so entsteht die sogenannte Cylinderfläche. Diese enthält alle Punkte und alle Parallelen des Raumes, die von AB dieselbe Entfernung haben. AB heißt die Achse der Cylinderfläche oder auch des Cylinderkörpers. Da nun die Zeichnungsebene die Drehung stets mitgemacht hat, so war sie in jeder Lage zwischen beiden Parallelen vorhanden. Daraus folgt:

Durch zwei Parallele läßt sich stets eine Ebene legen. (Dadurch bestätigt sich die Bemerkung am Schluß von 19.) Folglich entsteht auch dann eine Ebene, wenn eine Gerade auf zwei Parallelen hingleitet.

28) Zeichnet man zwei Parallele und zwei ihrer Abstände, so entsteht ein Viereck mit lauter rechten Winkeln, das sogen. Rechteck. (Fig. 7, $ABCD$.) AC und BD sind die Diagonalen desselben. Je zwei gegenüberliegende Seiten sind Abstände der andern parallelen Seiten. Folglich:

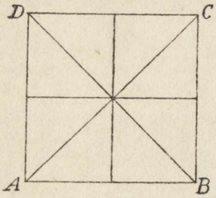
Fig. 7.



Die Gegenseiten des Rechtecks sind einander gleich. Ferner hat das Rechteck zwei Symmetrieachsen, so daß die Diagonalen gleich sind und sich gegenseitig halbieren. M ist der Mittelpunkt.

Sind zwei zusammenstoßende Rechtecksseiten gleich, so heißt das Rechteck ein Quadrat. (Vergl. Fig. 8.) Zwei Quadrate von gleicher Seitenlänge lassen sich (auf Grund der Kongruenz rechter Winkel) zur Deckung bringen (sind kongruent). Diese Deckung läßt sich erzielen, indem man eine Seite des einen auf eine beliebige Seite des andern legt. Weil demnach jede Seite jede andere und jede Ecke ebenfalls jede andere ersetzen kann, nennt man das Quadrat ein regelmäßiges Viereck. Dasselbe hat vier Symmetrieachsen, die in Fig. 8 angegeben sind.

Fig. 8.

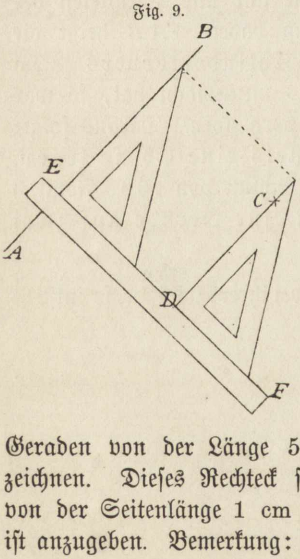


Jetzt ist aufgeklärt, was es heißen soll, gewisse Würfelkanten schnitten sich nicht, wie weit man sie auch verlängere, und hätten stets denselben Abstand von einander; die Würfelflächen aber seien regelmäßige Vierecke oder Quadrate.

29) **Aufgabe.** a) Mit Hülfe des Winkeldreiecks durch einen Punkt C zu einer Geraden AB eine Parallele zu ziehen.

In Fig. 9 ist gezeigt, wie man zunächst das Winkeldreieck mit der einen Kathete an AB anpaßt, sodann das Lineal an die andere Kathete anlegt und festhält. Das Dreieck wird jetzt am Lineale hin verschoben, bis es durch C geht, worauf die gesuchte Parallele CD gezogen werden kann. [CD und AB sind beide senkrecht auf EF.]

Fig. 9.



Aufgabe. b) Über einer beliebig liegenden Geraden AB ein Quadrat zu errichten.

Auflösung. Errichte in den Endpunkten auf AB Senkrechte und mache beide gleich AB. Die Verbindungslinie der neuen Endpunkte wird von selbst gleich und parallel zu AB.

Aufgabe. c) Über einer horizontalen Geraden von der Länge 5 cm ein Rechteck von der Höhe 3 cm zu zeichnen. Dieses Rechteck soll mit Hülfe des Maßstabs in Quadrate von der Seitenlänge 1 cm zerlegt werden. Die Anzahl der Quadrate ist anzugeben. Bemerkung: Man erhält $3 \cdot 5 = 15$ Quadratcentimeter und bezeichnet dies als den Inhalt des Rechtecks. [Daher sagt man in abgekürzter Redeweise: Der Inhalt eines Rechtecks ist Grundlinie mal Höhe.]

30) Zwei parallele, nur einseitig begrenzte Gerade AB und CD mögen auf AC senkrecht stehen. Jetzt drehe man das Gebilde um AC, so daß zwei auf AC senkrechte Ebenen entstehen. Weil die Parallelen überall denselben Abstand haben und sich nirgends schneiden, so haben auch die beiden Ebenen überall denselben Abstand und schneiden sich nirgends. Solche Ebenen nennt man parallele Ebenen. Folglich:

Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel. (Vergleiche parallele Zimmerwände und die sie verbindenden Kanten.)

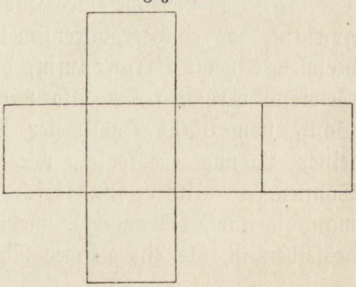
Jene Bedingung ist bei gegenüberliegenden Würfelflächen erfüllt, also sind dieselben parallel. — Von jeder Geraden in einer zu einer andern parallelen Ebene sagt man, sie sei zur letzteren parallel. [Zeige dies am Würfel.]

31) Zwei Würfel von derselben Kantenlänge sind kongruent, d. h. man kann sie sich in der Vorstellung so in einander geschoben denken, daß die Ecken des einen in die des andern, die Kanten des einen in die des andern, die Flächen des einen in die des andern fallen. Denn zunächst lassen sich zwei Quadrate auf einander decken. Wegen der Kongruenz der rechten Winkel (bei Kanten, und bei Flächen) fallen auch die seitlichen Flächen und Kanten zusammen u. s. w.

Dabei ist es gleichgültig, welche Flächen man zur Deckung bringt. Folglich: Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper.

32) **Aufgabe:** Das Flächennetz eines Würfels von gegebener Kantenlänge zu zeichnen und den Körper im Modell darzustellen.

Fig. 10.



In Figur 10 ist das Netz gezeichnet. Wo sich Quadrate berühren, ist nach dem Ausschneiden der Gesamtfigur jedesmal ein Knick zu machen. —

Damit sind sämtliche geometrischen Begriffe, die in der Beschreibung des Würfels vorkommen, erläutert und die ausgesprochenen Behauptungen bewiesen. Mit Rücksicht auf die Übungen im praktischen Rechnen sollen jedoch noch einige Bemerkungen angeschlossen werden.

33) Aus 4 Quadraten von gleicher Seitenlänge läßt sich ein Quadrat von doppelter Seitenlänge zusammenlegen (warum?), aus 9 Quadraten ein Quadrat von dreifacher Seitenlänge, aus 16 Quadraten ein solches von vierfacher Seitenlänge, u. s. w. Man nennt daher die Zahlen $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 4 = 16$ u. s. w. Quadratzahlen.*) [Der Schüler zeichne die entsprechenden Figuren.] Außerdem folgt: Verhalten sich die Seitenlängen verschiedener Quadrate wie $1 : 2 : 3 : 4$ u. s. w., so verhalten sich ihre Flächenräume wie die Quadratzahlen $1 : 4 : 9 : 16$ u. s. w.. Demnach verhalten sich Quadratmillimeter, Quadratcentimeter, Quadratdecimeter und Quadratmeter wie $1 : 10 \cdot 10 : 100 \cdot 100 : 1000 \cdot 1000$ oder wie $1 : 100 : 10\,000 : 1\,000\,000$.

Allgemein:

Die Inhalte zweier Quadrate verhalten sich, wie die Quadratzahlen ihrer Seitenlängen.

34) Aus 8 Würfeln von gleicher Kantenlänge läßt sich ein Würfel von doppelter Kantenlänge aufbauen (warum?), aus 27 ein solcher von dreifacher Kantenlänge, aus 64 ein solcher von vierfacher Kantenlänge u. s. w. Daher nennt man die Zahlen $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ u. s. w. Kubikzahlen (cubus = Würfel). Verhalten sich also die Kantenlängen von Würfeln wie $1 : 2 : 3 : 4$ u. s. w. so verhalten sich ihre Rauminhalte wie die Kubikzahlen $1 : 8 : 27 : 64$ u. s. w.

Daher verhalten sich Kubikmillimeter, Kubikcentimeter, Kubikdecimeter, Kubikmeter wie $1 : 10 \cdot 10 \cdot 10 : 100 \cdot 100 \cdot 100 : 1000 \cdot 1000 \cdot 1000$ oder wie $1 : 1000 : 1\,000\,000 : 1\,000\,000\,000$. Allgemein: Die Inhalte zweier Würfel verhalten sich, wie die Kubikzahlen ihrer Kantenlängen.

35) Das Gewicht eines Kubikmillimeters Wasser**) heißt Milligramm, das eines Kubikcentimeters heißt Gramm, das eines Kubikdecimeters heißt Kilogramm, das eines Kubikmeters Tonne. Diese Gewichte verhalten sich also wie die letztgenannten Zahlen. — Ein Schiff von 8000 Kubikmeter Wasserverdrängung z. B. wiegt mit seiner Ladung ebensoviel, wie das verdrängte Wasser, also 8000 Tonnen. — Unter spezifischem Gewicht eines Stoffes versteht man die Zahl, die angiebt, wieviel mal so schwer irgend eine Menge desselben ist, als ein gleicher Rauminhalt (Volumen) Wasser.

*) Die Arithmetik schreibt 1^2, 2^2, 3^2 u. s. w. statt $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, u. s. w; sie schreibt ferner 1^3, 2^3, 3^3, $\cdots$ statt $1 . 1 \cdot 1$, $2 \cdot 2 \cdot 2$, $3 \cdot 3 \cdot 3$, $\cdots$

**) Chemisch rein, im Zustande größter Dichtigkeit (bei 4^0 Celsius).

Aufgabe. Wieviel wiegt ein Eisenwürfel von 4 mm Kantenlänge, oder von 4 cm, oder von 4 dcm, oder von 4 m Kantenlänge, wenn das specifische Gewicht des Eisens 7,5 ist? (Auflösung 480 Milligramm, bezw. 480 g, 480 kg, 480 Tonnen.)

Aufgabe. Wieviel wiegt ein Kubikmeter Luft, wenn ihr specifisches Gewicht $\frac{1}{773}$ ist?*)

Auflösung. $\frac{1000}{773} = 1\frac{227}{773}$ kg.

Aufgabe. Wieviel Quadratkilometer faßt eine Quadratmeile, wenn 1 Meile gleich 7,5 Kilometer ist?

Auflösung. $7{,}5 \cdot 7{,}5 = 56{,}25$ Quadratkilometer.

Aufgabe. Wieviele Kubikkilometer faßt eine Kubikmeile?

36) Aus Würfeln gleicher Kantenlänge läßt sich ein Körper aufbauen, der von 6 Rechtecken begrenzt ist, der sogenannte Rechteckskörper. Liegen in den drei Hauptrichtungen z. B. 2, 3 und 5 Würfel an- bezw. übereinander, so handelt es sich um $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ Würfel. Deshalb sagt man abgekürzt, der Inhalt des Rechteckskörpers sei das Produkt aus drei aneinander stoßenden Kanten.

b) Kugel und Kreis, Bogen und Winkel.

37) Das schon besprochene Lot (Gewicht am Faden hängend) läßt sich um den Befestigungspunkt herum nach jeder Richtung in Pendelschwingungen versetzen, wobei der Abstand vom festen Punkte stets derselbe bleibt. Demnach giebt es auch in der Geometrie unzählige Punkte, die von einem gegebenen festen Punkte dieselbe Entfernung haben. Die Gesamtheit dieser Punkte heißt die Kugelfläche, der gegebene Punkt ihr Mittelpunkt (Centrum), der von der Fläche eingeschlossene Körper heißt die Kugel. (Das Kugelmodell ist zu benutzen, z. B. der Erdglobus.)

38) Die Kugelfläche ist eine krumme, überall in sich zurücklaufende Fläche, sie ist also nirgends von Kanten begrenzt und zeigt keine Eckpunkte. Jede vom Centrum zur Kugelfläche gehende Gerade heißt Radius der Kugel (Halbmesser), jede Gerade durch das Centrum, von Kugelfläche zu Kugelfläche gemessen, heißt Durchmesser. Letzterer ist das Doppelte des Radius. Alle Radien, ebenso

*) Gewöhnliche Zusammensetzung der atmosphärischen Luft, dabei 0° Celsius und 1 Atmosphäre Spannung (760 mm Barometerstand).

alle Durchmesser der Kugel sind einander gleich. Die Endpunkte des Durchmessers heißen Gegenpunkte (bei der Erdkugel Antipodenpunkte, Gegenfüßlerpunkte).

39) Kugeln von gleichem Radius sind kongruent. Bringt man sie nämlich in der Vorstellung mit den Mittelpunkten zusammen, so decken sich die Oberflächen vollständig genau, weil sonst ungleiche Radien vorhanden sein müßten. Dabei kann man die eine Kugel beliebig um das Centrum drehen, ohne daß die Deckung aufgehoben wird. Jeder Punkt der Oberfläche kann eben jeden andern ersetzen, d. h. die Kugel ist ein Körper von vollkommener Regelmäßigkeit.

40) Vom Centrum aus läßt sich nach jedem Punkte der Kugelfläche ein Radius ziehen. Jeder Radius hat eine bestimmte Richtung im Raume. Der Gesamtheit der Radien entspricht die Gesamtheit der vom Centrum aus möglichen Richtungen. Wie groß man dabei den Radius nimmt, das ist gleichgültig. Das Gesagte gilt von allen Kugeln desselben Centrums (koncentrische Kugeln). Hat man beliebig viele Kugeln desselben Centrums und zieht man einen durchgehenden Radius, so schneidet dieser sämtliche Kugeln. Von allen Schnittpunkten sagt man, sie liegen vom Centrum aus gerechnet in derselben Richtung. [Betrachtet man z. B. das scheinbare Himmelsgewölbe als Kugelfläche mit dem Auge als Centrum, so kann man sich vom Auge aus nach jedem Punkte der Fläche, z. B. auch nach jedem Sterne, einen Radius gezogen denken, wodurch alle vom Auge aus in das Weltall gehenden Richtungen zur Vorstellung gelangen.]

41) Legt man durch das Kugelcentrum eine Ebene, so schneiden sich Kugel und Ebene in einer ebenen, krummen, in sich zurücklaufenden Linie (Kurve), die überall von dem in der Ebene liegenden Centrum denselben Abstand hat. Diese Linie heißt Kreis (Kreislinie, Peripherie), die von ihm umschlossene Fläche heißt die Kreisfläche. Jede durch das Centrum gelegte Ebene giebt einen sogenannten Hauptschnitt der Kugel, und dieser muß, da der Radius gleich dem der Kugel ist, stets ein größter Kreis der Kugel sein. [Auf dem Erdglobus sind die Längenkreise oder Meridiane solche größten Kreise, ebenso der Äquator. Größere Kreise sind auf der Kugel unmöglich, da ihr Radius über die Kugel hinaus reichen würde.] Die Kugelfläche wird durch jeden Hauptschnitt in zwei Halbkugelflächen zerlegt, die Kugel selbst in zwei Halbkugeln. Die ersteren und ebenso die letzteren, sind nach den obigen Bemerkungen

über die möglichen Verdrehungen kongruent. Der Hauptschnitt ist eine Symmetrie-Ebene der Kugel.

42) Jede Gerade, die zwei Punkte der Kreislinie verbindet, heißt eine Sehne (Chorde) des Kreises. Geht sie durch das Kreiscentrum, so heißt sie Durchmesser des Kreises. Der Durchmesser besteht aus zwei gleichen Radien oder Halbmessern. Sämtliche Durchmesser, ebenso sämtliche Radien des Kreises sind einander gleich. Die Gesamtheit aller Radien, die sich vom Mittelpunkte des Kreises aus nach seiner Peripherie ziehen lassen, entspricht der Gesamtheit der vom Centrum aus in der Ebene möglichen Richtungen. Schneidet ein Radius beliebig viele koncentrische Kreise der Ebene, so sagt man von sämtlichen Schnittpunkten, sie lägen, vom Centrum aus gerechnet in derselben Richtung. Sind also von einer Geraden zwei Punkte, gegeben und ist einer als Ausgangspunkt betrachtet, so ist die Richtung der Geraden und ihrer gesamten Verlängerung bestimmt. Eine Gerade von gegebener Länge, deren Richtung eindeutig bestimmt ist, heißt Strecke. In der anderen Richtung genommen, heißt sie die entgegengesetzte Strecke. Ist die Richtung gleichgültig, so heißt die doppelt begrenzte Gerade einfach die Gerade AB oder CD, je nach der Bezeichnung ihrer Endpunkte.

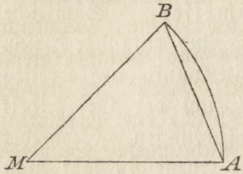
Die von einem Punkte aus ins Unendliche gehende, also nur einseitig begrenzte Gerade, heißt Strahl. Kreise von demselben Radius sind kongruent. Sie decken sich, sobald man sie mit den Mittelpunkten aufeinanderlegt. Dabei kann man die Kreise in der Ebene beliebig gegen einander verdrehen, ohne daß die Deckung aufgehoben wird. Die Kreislinie ist also eine vollkommen regelmäßige ebene Kurve, jeder ihrer Punkte kann jeden andern ersetzen. Die verlängerte Sehne heißt Sekante. Sie kann mit dem Kreise nur zwei Punkte gemein haben.

43) Kreislinie und Kreisfläche werden durch jeden Durchmesser in kongruente Halbkreislinien bezw. Halbkreisflächen geteilt. Folglich: Der Durchmesser ist eine Symmetrieachse des Kreises. Den Durchmesser kann man als die Grundlinie (Basis) des Halbkreises oder der Halbkreisfläche betrachten. Hält man die Endpunkte des Durchmessers fest, und dreht man den Halbkreis vollständig herum, so ist der Weg der Halbkreislinie die Kugelfläche, der Weg der Halbkreisfläche der Kugelkörper. Die einzelnen Punkte der Peripherie behalten dabei ihren Abstand von der Drehungsachse bei, legen also Kreise zurück, die sogenannten Parallelkreise. [Geht die Drehung nicht vollständig herum, so heißt die entstehende Fläche das Kugel-

zweieck, der entstehende Körper kann als Meridianausschnitt oder als körperliches Kugelzweieck bezeichnet werden.]

44) Hält man den einen Endpunkt einer begrenzten Geraden fest, und dreht man sie in der Ebene vollständig herum, so beschreibt der andere Endpunkt einen Kreis, die Gerade selbst eine Kreisfläche. Geht die Drehung nicht vollständig herum, so ist die entstehende krumme Linie ein Kreisbogen, die entstehende Fläche ein Kreisausschnitt (Kreis-Sektor). Vergl. Fig. 11. Der Sektor ist also eine von einem Kreisbogen und zwei zu ihm gehörigen Radien begrenzte ebene Fläche. Verbindet man die Endpunkte der beiden Radien, so erhält man die Sehne des Sektors bezw. des Bogens.

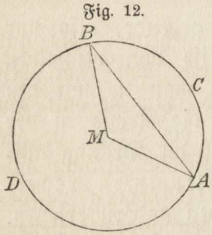
Fig. 11.



Aufgabe. Zeichne mit Zirkel und Reißfeder koncentrische Kreise mit den Radien 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. Centimeter und ziehe zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des größten Kreises mit Hülfe des Lineals und des Winkeldreiecks.

[**Bemerkung.** Jeder der Kreise wird dabei in kongruente Viertelkreise, jede Kreisfläche in kongruente Viertelkreisflächen zerlegt.]

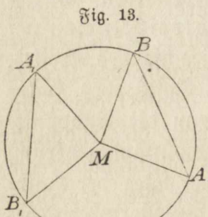
Fig. 12.



45) Zu einer Kreissehne können zwei Bogen gehören, die im allgemeinen verschieden sind. In Figur 12 gehören zur Sehne AB die Bogen ACB und BDA. Wird nichts Besonderes gesagt, so ist gewöhnlich der kleinere Bogen gemeint.

Ebenso gehören zu zwei Kreisradien zwei im allgemeinen verschiedene Sektoren. In Fig. 12 z. B. handelt es sich um die Sektoren $MACB$ und $MBDA$. Wird nichts besonderes gesagt, so ist in der Regel der kleinere von beiden gemeint. Die durch die Sehne abgeschnittenen Teile der Kreisfläche heißen Kreisabschnitte (Segmente).

Fig. 13.



46) Zwei Bogen eines Kreises heißen gleich, wenn sie sich zur Deckung bringen lassen. Dabei fallen die Kreismittelpunkte und die Endpunkte der Bogen aufeinander. Die Deckung ist in zweierlei Sinne möglich, direkt und nach geschehenem Umklappen des einen Bogens. Dabei decken sich auch die zugehörigen Sehnen, denn zwischen zwei Punkten ist nur eine einzige Gerade möglich. Aus demselben Grunde decken sich auch die zugehörigen Sektoren und

Segmente. Vergl. Fig. 13. Also: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen, kongruente Sektoren und kongruente Segmente. Entsprechend folgt aus der Deckung kongruenter Kreissektoren:

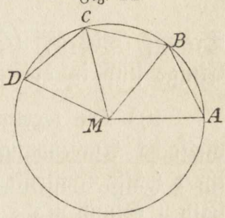
Zu kongruenten Sektoren gehören kongruente Bogen, gleiche Sehnen, kongruente Segmente und kongruente Dreiecke. Diese Dreiecke sind gleichschenklige, d. h. solche, in denen zwei Seiten gleiche Länge haben (die Radien). Ihre gleichen Seiten heißen Schenkel, die dritte heißt Grundlinie (Basis).

Spricht man bei Sehnen nur von den kleineren Bogen, Segmenten und Sektoren, (oder nur von den größeren), so folgt ebenso: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören kongruente Bogen, kongruente Segmente, kongruente Sektoren und kongruente Dreiecke. Aus letzterem folgt:

Gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Längen ihrer Schenkel übereinstimmen und auch die Grundlinien gleich lang sind.

47) **Aufgabe.** Gegeben sei ein Kreis und in ihm eine (nicht allzugroße) Sehne AB. Eine Reihe aufeinanderfolgender Sehnen von derselben Länge soll in den Kreis eingetragen werden. Darauf sollen sämtliche Endpunkte mit dem Centrum verbunden werden.

Fig. 14.



Auflösung. Man nehme AB (Fig. 14) in den Zirkel, schlage damit einen Bogen um B, der den Schnittpunkt C giebt, schlage ebenso einen Bogen um C, der den Schnittpunkt D giebt u. s. w. Die Vollendung der Zeichnung geschieht mit dem Lineal nach Art der Fig. 14.

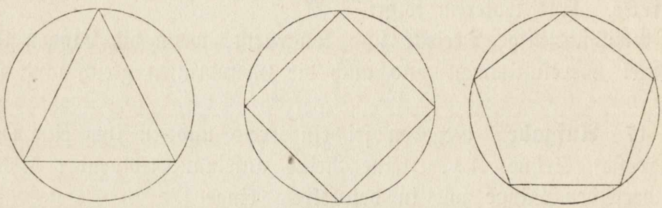
Bemerkungen: Die entstandenen Bogen, Segmente, Sektoren und Dreiecke sind kongruent. Tritt der Fall ein, daß die Reihe der Bogen nach einem Umgange schließt (daß also der Endpunkt des letzten Bogens auf A fällt), so ist der Kreis in eine Anzahl kongruenter Bogen eingeteilt, die Kreisfläche in eine Anzahl kongruenter Sektoren. Das von den Sehnen gebildete Vieleck heißt dann ein regelmäßiges Vieleck (reguläres Polygon). Hat man nämlich zwei übereinstimmende reguläre Polygone, so lassen sie sich nicht nur auf eine einzige Art zur Deckung bringen, sondern jede Seite des einen kann auf eine beliebige Seite des andern gelegt werden, so daß jede Seite bezw. Ecke durch jede andere ersetzt werden kann. Jeder Radius des Vielecks kann als Symmetrieachse betrachtet werden.

Regelmäßige Vielecke sind solche Vielecke, deren Eckpunkte sämtlich auf einem Kreise liegen, und deren Seiten gleich lang sind und nach einem Umgange schließen. Sie lassen sich stets in eine Anzahl kongruenter gleichschenkliger Dreiecke zerlegen, deren Spitzen im Mittelpunkte zusammenfallen.

Zahlreiche regelmäßige Vielecke lassen sich nur durch probeweises Abstecken von Punkten auf einem Kreise mit Hülfe derselben Zirkelöffnung konstruieren. Bei anderen sind genaue (exakte) Konstruktionen möglich, jedoch zieht die Praxis auch hier bisweilen das probeweise Abstecken vor.

Aufgabe. Versuche durch probeweises Abstecken folgende regelmäßigen Figuren in gegebene Kreise einzuzeichnen: Das regelmäßige

Fig. 15.



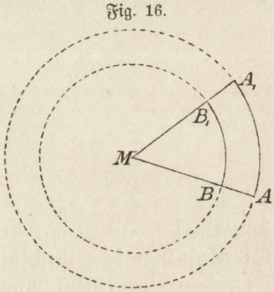
Dreieck, Viereck, (Quadrat), Fünfeck, Sechseck, Siebeneck u. s. w. Einige sind in vorstehenden Figuren dargestellt.

48) Die regelmäßige Kreisteilung findet im praktischen Leben vielfache Anwendung. Die Zahnräder der Maschinen werden mit ihrer Hülfe konstruiert. Der Rand des Zifferblattes jeder Uhr ist, der halben Stundenzahl des Tages entsprechend, in 12 gleiche Teile eingeteilt. In der Regel ist jeder dieser Teile wieder in 5 zerlegt, so daß man im Ganzen 60 hat, was der Minutenzahl der Stunde entspricht. Denkt man sich jeden dieser Teile wieder in 6 gleiche Teile zerlegt, so ergiebt sich die wichtige Einteilung des Kreises in 360 gleiche Teile, die z. B. bei dem Äquator der Erde zur Anwendung kommt. Der 360. Teil einer Kreislinie heißt ein Bogengrad. Der ganze Kreis zählt 360 Grade, geschrieben 360^0, der Halbkreis zählt 180^0 (vgl. den Transporteur des Reißzeugs), der Viertelkreis 90^0 u. s. w. [Jeder Meridian-Halbkreis des Erdglobus zerfällt in einen nördlichen und einen südlichen Teil, deren jeder in 90 Grade eingeteilt ist. Die Ortsbestimmung geschieht mit Hülfe der Meridiane und Parallelkreise, z. B. 80^0 östlicher Länge, 50^0 nördlicher Breite.] Für noch genauere Messungen hat man den Grad noch in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden

eingeteilt. [Den Horizont teilt man, z. B. von Norden ausgehend, in 4, bezw. 8, 16 u. s. w. gleiche Teile ein, was die Himmelsrichtungen giebt, vgl. die Windrose des Kompaß (Boussole) und den Horizontalkreis der Feldmeßinstrumente. Mit Hülfe der Himmelsrichtung und der Gradeinteilung der Zenithalkreise (die durch den höchsten Punkt der scheinbaren Himmelskugel gehen und Hauptschnitte derselben sind) kann man den augenblicklichen Ort eines Sternes am Himmelsgewölbe bestimmen. Ein solcher kann sich z. B. in der Richtung Nordost in Höhe 50^0 befinden.]

49) Fig. 16 stellt zwei koncentrische Kreise dar, in denen die Radien MA und MB um denselben Bruchteil der betreffenden Kreise (z. B. $\frac{1}{8}$) gedreht und in die Lage MA_1 bezw. MB_1 gelangt sind. Die Bogen AA_1 und BB_1 haben verschiedene Länge, ihre Gradzahl ist aber dieselbe (z. B. 45^0), denn es handelt sich eben um denselben Bruchteil jedes Kreises. Das M a ß der D r e h u n g oder der W i n k e l der beiden Radien ist demnach für den Radius des einen Kreises dasselbe, wie für den des andern, d. h. er i s t u n a b h ä n g i g v o n d e r L ä n g e d e s R a d i u s. Sieht man von dieser Länge ab, so spricht man, statt von Bogengraden, von W i n k e l g r a d e n und teilt die volle Umdrehung in 360 Winkelgrade, die halbe in 180 Winkelgrade ein, spricht also z. B. von einem Winkel von 45^0 ohne jede Bezugnahme auf die Länge der S c h e n k e l des Winkels. Den Winkel nennt man, indem man einen b e l i e b i g e n Punkt jedes S c h e n k e l s und den S c h e i t e l (Schnittpunkt) nennt, letzteren jedoch in die Mitte setzt. Das Zeichen für Winkel ist $\sphericalangle$. So ist z. B. in Fig. 13 nur e i n Winkel dargestellt, der als $\sphericalangle\ AMA_1$ oder als $\sphericalangle\ BMB_1$ oder AMB_1 oder BMA_1 bezeichnet werden kann, aber, wenn man von der Drehungsrichtung absieht, auch als A_1MA, B_1MA u. s. w. gelesen werden darf. Gleiche Winkel sind solche, die sich, abgesehen von der Länge der Schenkel, zur Deckung bringen lassen. Die Deckung kann auf zwei Arten geschehen, direkt und nach geschehenem Umklappen. Zu zwei Radien eines Kreises gehören stets zwei Winkel. In der Regel ist der kleinere von beiden gemeint.

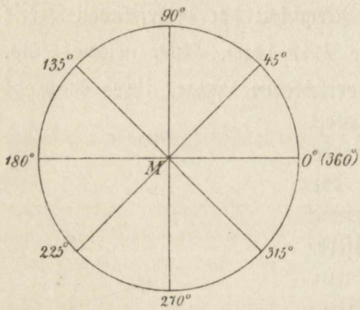
Fig. 16.



50) Bei einem Winkel unterscheidet man R e c h t s - und L i n k s - D r e h u n g. Die Rechtsdrehung entspricht dem Gange des Uhrzeigers, die Linksdrehung ist die entgegengesetzte. Häufig nimmt man die

nach rechts gehende Horizontale als die Anfangsrichtung an und betrachtet die Linksdrehung als die positive, die Rechtsdrehung als die negative Drehung. Dann entspricht jedem Winkel ein für allemal eine bestimmte Richtung. Von jedem Punkte können nach jeder Richtung hin Strahlen ausgehen. An jedem Strahle hat man die Richtung und die Lage des Ausgangspunktes zu unterscheiden; an jeder Strecke also sind zu unterscheiden a) Richtung, b) Lage des Ausgangspunktes, c) Länge derselben. Unterscheiden sich zwei Strecken einer Ebene nur bezüglich der Lage des Ausgangspunktes, stimmen sie also in der Richtung und der Länge überein, so nennt man die Strecken gleich. Strahlen von gleicher Richtung, die also gegen die horizontal nach rechts gehende Gerade gleichweit gedreht sind, nennt man gleichgerichtet, worüber später besonders zu sprechen ist. [Im gewöhnlichen Leben bedeuten Strecke und Länge dasselbe, in der Mathematik aber handelt es sich um ganz verschiedene Begriffe.] In Fig. 17 sind für diese Anschauung gleich lange Strecken von den Richtungen 0^0, 45^0, 90^0, 135^0, 180^0, 225^0, 270^0, 315^0 mit demselben Ausgangspunkte dargestellt. Denkt man sich ein Rechteck um eine seiner Seiten gedreht (vgl. die gedrehte Stubenthür), so spricht man ebenso wie hier von Drehungen, die von der Größe 0^0, 90^0, 270^0, 360^0 u. dergl. sein können. Die Größe des Winkels wird dann nach der Drehung der als Radien bewegten Seiten des Rechtecks gemessen. Also: Schneiden sich zwei Ebenen und errichtet man in einem Punkte der Schnittlinie Lote in beiden Ebenen, so gilt der Winkel zwischen den Loten als der von den Ebenen gebildete Winkel.

Fig. 17.



Einigen Winkeln hat man besondere Namen gegeben. Der Winkel von 0^0 heißt Nullwinkel, der von 90^0 ist der schon besprochene rechte Winkel, der von 180^0 heißt der flache oder gestreckte Winkel (seine Schenkel gehen nach entgegengesetzter Richtung), der von 360^0 heißt Vollwinkel. Winkel, die kleiner sind als 180^0, heißen hohle oder konkave Winkel, solche, die größer sind als 180^0, nennt man konvexe oder überstumpfe. (Nach Obigem (vgl. 49) ist, wenn nichts besonderes gesagt wird, stets der konkave Winkel gemeint). Winkel, die kleiner sind als 90^0, nennt man spitze Winkel, solche, die zwischen 90^0 und 180^0, liegen heißen stumpfe Winkel. Ergänzen sich zwei Winkel zu 90^0, so nennt man sie Komplementwinkel (z. B. 60^0 und 30^0), solche, die sich zu 180^0 ergänzen, heißen Supplementwinkel.

51) Jeder von zwei Radien eines Kreises gebildete Winkel heißt Centriwinkel. Da durch die Ecken des regelmäßigen Vielecks stets ein Kreis gelegt werden kann, dessen Centrum im Mittelpunkte des Vielecks liegt, so kann man auch bei dem regelmäßigen Vieleck den Winkel, der durch die Verbindungslinien des Mittelpunktes mit den Endpunkten einer Seite gebildet wird, als Centriwinkel bezeichnen. Der Centriwinkel des regelmäßigen Dreiecks ist dann $\frac{360}{3} = 120^0$, der des regelmäßigen Vierecks (Quadrates) $\frac{360}{4} = 90^0$, der des regelmäßigen Fünfecks $\frac{360}{5} = 72^0$, der des regelmäßigen Sechsecks $\frac{360}{6} = 60^0$ u. s. w. Die durch die Seiten und Radien des Vielecks gebildeten gleichschenkligen Dreiecke waren als kongruent nachgewiesen. Man schließt daraus: Gleichschenklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Schenkeln und dem Winkel an der Spitze (dem von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel) übereinstimmen. Nun konnten aber die entsprechenden Bogen und Sehnen auf zweierlei Art zur Deckung gebracht werden, direkt und umgeklappt, und da nur gleiche Winkel sich decken können, so folgt: Die Basis-Winkel des gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich, oder: Gleichen Seiten des Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber. Im gleichseitigen Dreiecke sind demnach alle Winkel einander gleich.

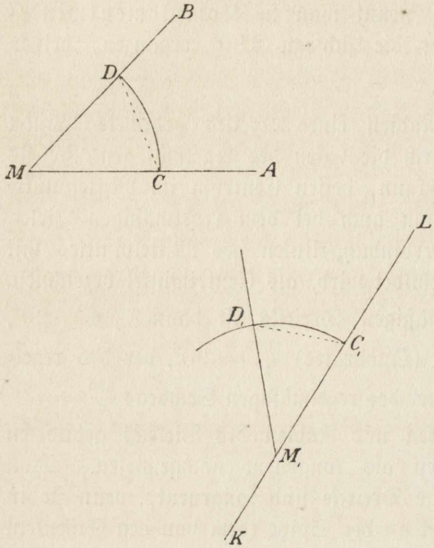
Jeder von zwei benachbarten Seiten des regelmäßigen Polygons eingeschlossene Winkel besteht aus zwei gleichen Basiswinkeln, folglich: Die Winkel eines regelmäßigen Polygons stimmen überein. (Vgl. Fig. 14.)

52) **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel AMB an eine gegebene Gerade KL in einem gegebenen Punkte M_1 nach einer der vier vorhandenen Möglichkeiten anzutragen. (Fig. 18 auf folgender Seite.)

Auflösung. Schlage um M mit beliebigem Radius MC einen Bogen CD von Schenkel zu Schenkel und mit demselben Radius einen solchen um M_1, der z. B. bei C_1 beginnt. Darauf nimm den Abstand CD in den Zirkel und schlage damit um C_1 einen Bogen, der in D_1 schneidet. M_1D_1 giebt dann den zweiten Schenkel des gesuchten Winkels.

(Sektoren mit gleichen Radien sind nämlich kongruent, wenn ihre Sehnen gleich lang sind).

Fig. 18.



Aufgabe. Bilde die Summe und die Differenz zweier gegebener Winkel.

[53) Vorläufige Bemerkung über den Kreisumfang. Legt man über die Wölbung einer Halbkreisscheibe einen dünnen Faden und zieht man ihn straff, ohne ihn gewaltsam auszudehnen, so erhält man ziemlich genau die Länge der halben Kreislinie. Ist der Radius der Scheibe von der Länge 100 mm, so findet man für den Halbkreis als Länge rund 314 mm, ist der Radius von der Länge 1000 mm, so findet man für den Halbkreis rund 3142 mm. Je genauer man mißt (oder, wie es später gelehrt wird, rechnet), um so genauer findet man, daß die Länge des Halbkreises das 3,14159 . . . fache des Radius ist. Diese Zahl bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π (lies pi). Folglich: Die Länge des Halbkreises ist das π-fache des Radius, also: Der Umfang des ganzen Kreises ist das 2π-fache des Radius, oder $u = 2r\pi$.

Aufgabe. Wie groß ist der Äquatorumfang der Erde, wenn der Radius zu 859 Meilen angenommen wird?

Aufgabe. Nimm an, die Erde bewege sich in einem Jahre einmal um die Sonne in einer Kreisbahn von 20 Millionen Meilen Radius. Wie groß ist der Weg für ein ganzes Jahr? Nimm das Jahr zu 365 Tagen an und berechne den Weg für einen Tag, eine Stunde, eine Minute, eine Sekunde. Nimm das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tag an, und führe dieselben Rechnungen aus.]

54) Von jetzt ab merke man folgende Bezeichnungen: $\triangle$ bedeutet Dreieck, $\cong$ bedeutet kongruent, $\parallel$ bedeutet parallel, $\#$ bedeutet gleich und parallel, $\perp$ bedeutet senkrecht, $>$ bedeutet größer, $<$ bedeutet kleiner.

Also: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ bedeutet: Dreieck ABC ist kongruent dem Dreieck $A_1B_1C_1$.

$AB \parallel CD$ bedeutet: AB ist parallel zu CD.

$AB \# CD$ bedeutet: AB ist gleich und parallel CD.

$AB \perp CD$ bedeutet: AB steht senkrecht auf CD.
$AB > CD$ „ AB ist größer als CD.
$AB < CD$ „ AB ist kleiner als CD.

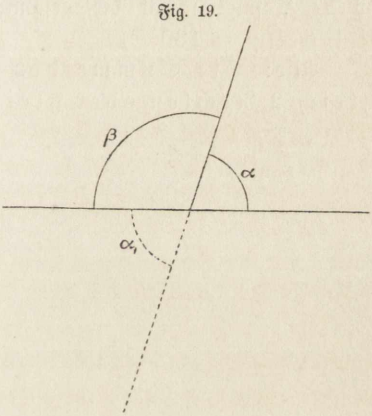
Punkte werden stets mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, Seitenlängen mit kleinen; Winkel werden in der Regel mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, z. B. α (lies Alpha), β (lies Bēta), γ (lies Gamma), δ (lies Delta), ε (Epsilon). Im Dreieck erhalten jeder Eckpunkt, der zugehörige Winkel und die gegenüberliegende Seite die entsprechenden Buchstaben der genannten Alphabete, so daß A, α und a, ebenso B, β und b zusammengehören.

IV. Übungen mit Winkeln und Dreiecken und Ableitung entsprechender Sätze und Konstruktionen.

55) Verlängere den einen Schenkel eines gegebenen Winkels α über den Scheitel hinaus. Wie groß wird der neu entstehende Winkel β? (Fig. 19.)

Da ein gestreckter Winkel entsteht, ist $\alpha + \beta = 180^0$, also wird $\beta = 180^0 - \alpha$. Ist z. B. $\alpha = 60^0$, so muß $\beta = 180^0 - 60^0 = 120^0$ sein.

Fig. 19.



Man nennt den so entstandenen Supplement-Winkel den **Nebenwinkel** von α.

Sind zwei Winkel gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel gleich, denn die Differenz $180^0 - \alpha$ kann nur einen einzigen Wert haben.*) Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht. (Warum?)

56) Verlängere beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus. Wie groß ist der von den beiden neuen Schenkeln gebildete Winkel α_1? (Fig. 19.)

---

*) An dieser Stelle kann der selbstverständliche Grundsatz: **Gleiches von Gleichem subtrahiert, giebt Gleiches**, an Beispielen verdeutlicht werden, ebenso die entsprechenden Grundsätze über Addition, Multiplikation und Division. Vgl. die Zusammenstellung am Schluß des Jahrgangs.

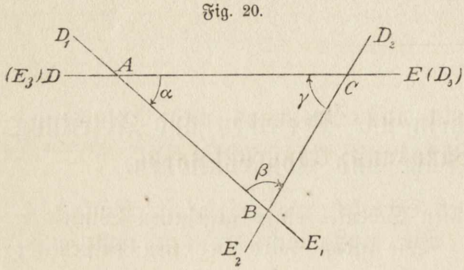
Beide Winkel sind die Nebenwinkel desselben Winkels β, jeder ist also gleich $180^0 - \beta$, beide stimmen demnach überein.

Man bezeichnet zwei solche Winkel α und α_1 als Scheitelwinkel. Also: Scheitelwinkel sind einander gleich.

57) Um wieviel Grade muß man eine Gerade DE mindestens drehen, um sie in die entgegengesetzte Lage zu bringen? Um 180^0. Wie groß muß demnach die Winkelsumme im Dreieck sein?

In Fig. 20 sei DE die Richtung der einen Dreiecksseite. Dreht man sie um den Punkt A bis in die Lage D_1E_1 der zweiten Dreiecksseite, so hat man ihr die Rechtsdrehung α gegeben. Dreht man sie jetzt um B bis in die Lage D_2E_2, so hat man ihr dazu noch die Rechtsdrehung β erteilt. Dreht man sie endlich um C bis in die Lage D_3E_3, so hat man ihr noch die Rechtsdrehung γ erteilt. Nun ist aber D_3E_3 die entgegengesetzte Lage zu DE, folglich hat die gesamte Drehung 180^0 betragen, d. h. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.*)

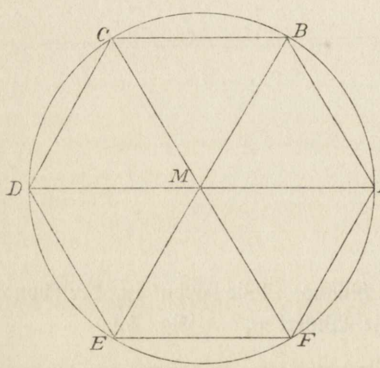
Fig. 20.



Also: Die Summe der Winkel jedes Dreiecks ist gleich 2 Rechten oder gleich 180^0.

Beispiel. Drehte man die Horizontale DE erst um $\alpha = 40^0$, sodann um $\beta = 80^0$, so betrug die Drehung bis jetzt 120^0 und es waren noch 60^0 nötig, um die entgegengesetzte Lage zu erzwingen.

Fig. 21.



58) **Folgerung:** Jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks beträgt 60^0, denn die Winkel sind einander gleich, ihre Summe aber ist 180^0.

Folgerung: Trägt man den Radius des Kreises 6mal hinter=

*) Die angegebenen Drehungen sind an der Zeichnung auf der Wandtafel mit einem Lineal praktisch vorzunehmen, damit der gleiche Drehungssinn dem Schüler zweifellos klar werde.

einander auf der Peripherie ab, so erhält man das regelmäßige Sechseck. (Fig. 21.)

Beweis. MAB ist ein gleichseitiges Dreieck, folglich ist $\sphericalangle AMB = 60^0 = \frac{360^0}{6}\cdot$ Das Dreieck läßt sich also 6mal um M herumlegen.

Folgerung. Zieht man in Fig. 21 die Geraden AC, CE und EA, so erhält man das dem Kreise einbeschriebene gleichseitige Dreieck, denn $\sphericalangle AMC = 120^0 = \frac{360^0}{3}\cdot$ Ebenso ist $\sphericalangle CME = \sphericalangle EMA = 60^0$.

59) **Aufgabe.** Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks sei γ, wie groß ist jeder Basiswinkel?

Auflösung. $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta = 180^0 - \gamma$; $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$, folglich $\sphericalangle 2\alpha = 180^0 - \gamma$, daher $\alpha = 90^0 - \frac{\gamma}{2}\cdot$

Beispiel: Es sei $\gamma = 30^0$, dann ist $\alpha = 90^0 - 15^0 = 75^0$, ebenso $\beta = 75^0$. Probe: $75^0 + 75^0 + 30^0 = 180^0$.

Aufgabe. Wie groß ist jeder Winkel des regelmäßigen Fünfecks?

Auflösung. Sein Centriwinkel beträgt $\frac{360}{5} = 72^0$. Folglich ist der Basiswinkel jedes der gleichschenkligen Dreiecke $90^0 - 36^0 = 54^0$. Jeder Fünfeckswinkel ist das Doppelte, also 108^0.

[**Aufgabe.** Wie groß ist der Winkel des regelmäßigen n-Ecks?

Auflösung. Sein Centriwinkel ist $\frac{360^0}{n}$, folglich jeder Basiswinkel $90^0 - \frac{180^0}{n}$, folglich der doppelt so große n-Eckswinkel $180^0 - \frac{360^0}{n}\cdot$]

60) Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein.

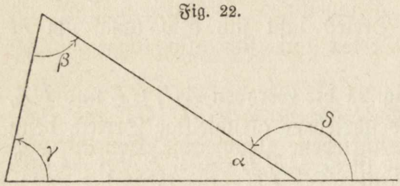
Beweis. In den beiden Dreiecken sei $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$ und $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta_1$; dann ist in dem einen Dreiecke $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, im andern $\gamma_1 = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$, also $\gamma = \gamma_1$.

Beispiel. Es sei $\alpha = \alpha_1 = 20^0$, $\beta = \beta_1 = 100^0$; es folgt $\gamma = \gamma_1 = 60^0$.

Bemerkungen: Die spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreiecke sind Complementwinkel. Ist z. B. der eine 30^0, so ist der andere 60^0. Sind die Katheten gleich, so ist jeder gleich 45^0, denn die Basiswinkel müssen gleich sein. Jedes Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten. (Warum?) Das Dreieck enthält nur konkave Winkel.

61) **Satz:** Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der an den beiden andern Ecken liegenden Dreieckswinkel.

Fig. 22.

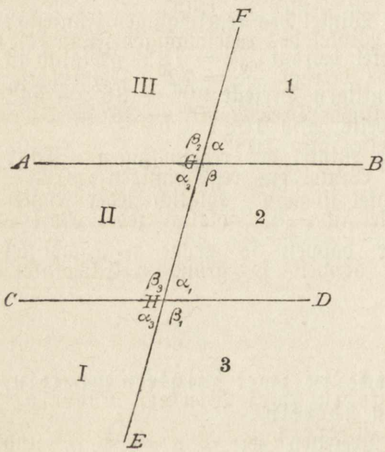


Unter Außenwinkel eines Dreiecks versteht man jeden Winkel, der durch Verlängerung einer Dreiecksseite entsteht, z. B. $\sphericalangle\, \delta$ in Fig. 22.

Hier ist $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, aber auch $\delta = 180^0 - \alpha$, folglich $\delta = \beta + \gamma$. [δ kann im Sinne der Betrachtung 57) als Summe der Einzeldrehungen γ und β aufgefaßt werden.]

62) **Erklärung.** Werden zwei parallele Gerade, z. B. AB und CD in Fig. 23 von einer dritten geschnitten, so nennt man die zwischen den Parallelen liegenden Winkel innere Winkel, die übrigen äußere. Innere sind α_1, β, α_2 und β_3, äußere sind α, β_1, α_3 und β_2. Man bezeichnet ferner α und α_1 als Gegenwinkel oder korrespondierende (sich entsprechende), ebenso β und β_1, α_2 und α_3, β_2 und β_3. Jedes Paar enthält einen innern und einen äußeren, die aber nicht Nebenwinkel sind, und die auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen. Ferner bezeichnet man α und α_3 als Wechselwinkel, ebenso β und β_3, α_1 und α_2, β_1 und β_2. Jedes Paar enthält zwei innere oder zwei äußere auf verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden. Endlich bezeichnet man α und β_1 als entgegengesetzte Winkel, ebenso β und α_1, β_2 und α_3, α_2 und β_3. Jedes Paar enthält zwei innere oder zwei äußere auf derselben Seite der schneidenden Geraden. Angenommen nun, zwei Gegenwinkel sind gleich, z. B. $\alpha = \alpha_1$, so müssen auch die Scheitelwinkel und Nebenwinkel dieser beiden gleich sein, d. h. alle Gegenwinkelpaare sind gleich, ebenso alle Wechselwinkelpaare, jedes Paar entgegengesetzter muß aber zwei Rechte betragen. (Die entsprechenden Umkehrungen bilde selbst.) In der That gilt folgender Satz:

Fig 23.



Werden zwei Parallele von einer dritten geschnitten, so sind je zwei Gegenwinkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, und je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zusammen zwei Rechte.

Beweis. EF hat in allen Teilen dieselbe Richtung. Nach Abschnitt 23) sind Parallele als gleichgerichtet zu betrachten, folglich ist der Richtungsunterschied α ebenso groß, wie der Richtungsunterschied α_1. Folglich ist auch $\alpha = \alpha_3$, und $\alpha + \beta_1 = 180^0$ u. s. w.

Bemerkung. Man kann auch AB um den Punkt G in die Lage FE drehen, dann um H in die Lage DC. Die gesamte Drehung ist $\beta + \alpha_1$, und da die Richtung von DC entgegengesetzt zu der von AB ist, so muß $\beta + \alpha_1 = 180^0$ sein.

63) **Umkehrung.** Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, und sind dabei zwei Gegenwinkel einander gleich (oder sind zwei Wechselwinkel gleich, oder sind zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte), so sind die beiden Geraden parallel.*)

Beweis. Angenommen, AB und CD (Fig. 23) schnitten sich in einem nach rechts im Endlichen liegenden Punkte X unter einem Winkel γ, so hätte man ein Dreieck mit einer Winkelsumme, die größer wäre, als zwei Rechte. Denn da schon $\alpha_1 + \beta = 2R$ ist, müßte $\alpha + \beta + \gamma > 2R$ sein. Dies ist aber beim Dreieck unmöglich. —

Oder: Angenommen AB wäre nicht parallel zu CD, so ließe sich durch G die Parallele GK ziehen. Diese würde mit EF den Winkel $\alpha = \alpha_1$ bilden, und so hätte man den Winkel α zweimal, ohne daß zwischen beiden α Deckung stattfände. Dies ist aber unmöglich.

Auch folgender Beweis werde geübt: Der rechte Teil der Figur 23) werde in der Ebene um 180^0 gedreht, dann läßt er sich genau auf den linken Teil decken, so daß der Flächenraum 1 auf I, 2 auf II und 3 auf III fällt. Angenommen nun, die Linien GA und HC des linken Teiles schnitten sich, so müßten sich in entsprechender Weise auch die des rechten Teils schneiden. Man hätte also zwischen den beiden Schnittpunkten zwei getrennte Gerade, was unmöglich ist.

64) Beweise folgende Übungssätze:

a) Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich; ebenso solche mit parallelen und eutgegengesetzt gerichteten Schenkeln; dagegen betragen Winkel mit parallelen Schenkeln, von

*) Es ist gerechtfertigt, auch dann von Gegenwinkeln u. s. w. zu sprechen, wenn Gerade, die angenähert parallel sind, von einer dritten geschnitten werden.

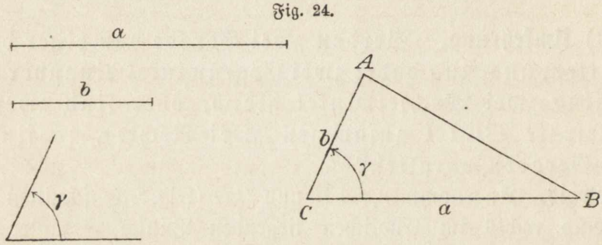
denen das eine Paar gleichgerichtet, das andere entgegengesetzt gerichtet ist, zusammen zwei Rechte. (Suche jedesmal die Figur zur Figur 23 zu vervollständigen.)

b) Fällt man von einem Punkte außerhalb eines Winkels und seines Scheitelwinkels Lote auf dessen Schenkel, so bilden diese einen gleich großen Winkel.

Fällt man sie von einem innerhalb des Winkels oder seines Scheitelwinkels liegenden Punkte aus, so entsteht sein Supplementwinkel. —

65) **Aufgabe:** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ.

Fig. 24.



Auflösung. Lege die Gerade a als BC (Fig. 24) beliebig hin, trage in C den Winkel γ an sie an, mache den neuen Schenkel CA gleich b und verbinde A mit B. Dreieck ABC ist das gesuchte, denn es enthält die gegebenen Stücke.*)

Bemerkungen: Die Aufgabe ist stets möglich, sobald γ ein konkaver Winkel ist. Sie ist aber nur auf eine einzige Art möglich. Konstruiert man nämlich zwei Lösungen ABC und $A_1B_1C_1$, so kann man B_1C_1 auf BC so decken (sei es direkt, oder nach geschehenem Umklappen), daß $\sphericalangle\,\gamma_1$ auf γ, folglich C_1A_1 auf CA fällt. Da A_1 auf A und B_1 auf B fällt, fällt A_1B_1 auf AB, $\sphericalangle\,\alpha_1$ deckt sich mit α, und ebenso $\sphericalangle\,\beta_1$ mit β. Aus der Gleichheit der drei gegebenen Stücke folgt also die der nicht gegebenen, und so gilt der Satz: Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel. (Erster Kongruenzsatz.)

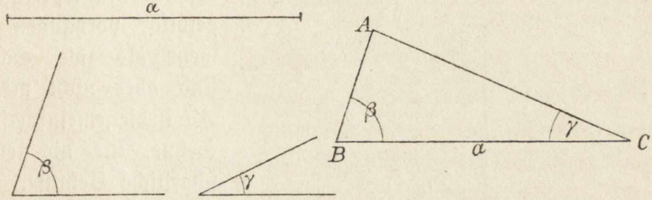
66) **Aufgabe:** Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln β und γ.

---

*) Die Beschreibung jeder Konstruktion müßte mit einem solchen Schlußsatze enden. In Zukunft soll er in der Regel weggelassen werden.

Auflösung. Lege a als BC beliebig hin (Fig. 25) und trage bei B den Winkel β, bei C den Winkel γ auf derselben Seite der Geraden an. Die entstehenden Schenkel sind bis zum Durchschnitt A zu verlängern.

Fig. 25.



Bemerkungen: Die Aufgabe ist stets möglich, sobald $\beta + \gamma < 180^0$ ist. Sie ist aber nur auf einzige Art möglich, denn konstruiert man zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, so decken sie sich. Man kann nämlich (direkt oder nach geschehenem Umklappen) B_1C_1 auf BC so legen, daß β_1 auf β und γ_1 auf γ fällt. Da nun die aufeinander fallenden freien Schenkel nur einen einzigen Schnittpunkt haben können, so muß A_1 auf A fallen, folglich ist $B_1A_1 = BA$, $C_1A_1 = CA$ und $\sphericalangle\, \alpha_1 = \alpha$. Stimmen also die gegebenen Stücke überein, so stimmen die Dreiecke in allen übrigen Stücken überein.

War nun gegeben a, α und β, also eine Seite, ein gegenüberliegender und ein anliegender Winkel, so war die Sache dieselbe, nur mußte man zunächst den zweiten anliegenden Winkel γ gemäß der Formel $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ konstruieren. Dann konnte die vorige Konstruktion angewandt werden.

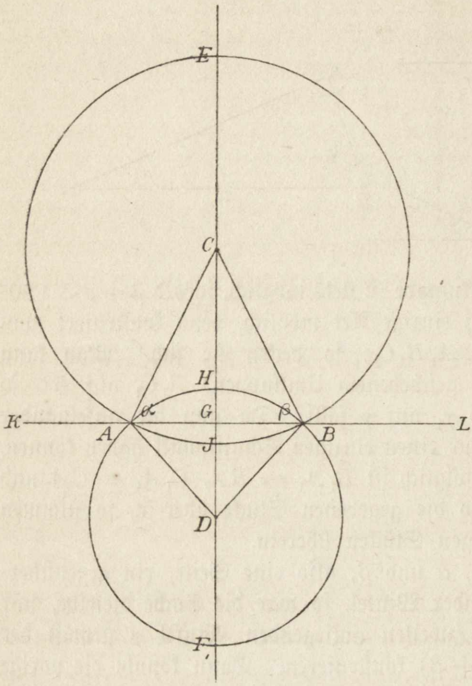
Da beide Aufgaben nur eine einzige Lösung ermöglichen, so folgt der Satz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und zwei gleichliegenden (homologen) Winkeln. (Zweiter Kongruenzsatz.)

Bemerkung. Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Lot, so zerfällt es in zwei Dreiecke, in denen eine Seite und zwei Winkel übereinstimmen. Diese Winkel sind aber nicht gleichliegende, daher sind die Dreiecke im allgemeinen nicht kongruent. Der Zusatz gleichliegend ist also im letzten Satze unentbehrlich.

67) Andere Kongruenzen und einige Lehrsätze und Konstruktionen lassen sich aus Figur 26 ableiten. In derselben sind zwei sich schneidende Kreise dargestellt. Ihre Mittelpunkte C und D sind durch eine Gerade verbunden, die sogenannte Centrale beider Kreise,

die noch bis zu den Kreispunkten E und F hin verlängert ist. Diese Centrale ist die Symmetrieachse beider Kreise. Ist also ein Durchschnittspunkt A vorhanden,

Fig. 26.



so muß noch ein zweiter Schnittpunkt B, sein Spiegelbild, vorhanden sein, mehr als zwei Schnitte sind aber nicht möglich. AB ist die gemeinschaftliche Sehne, KL die gemeinschaftliche Sekante. AB ist (nach Abschnitt 21) in G halbiert und steht senkrecht auf CD. CB ist das Spiegelbild von CA, BD das von AD. Winkel ACD ist das Spiegelbild von $\sphericalangle\, BCD$, so daß Winkel ACB halbiert ist. Ebenso ist $\sphericalangle\, ADC$ das Spiegelbild von BDC, folglich $\sphericalangle\, ADB$ halbiert. Winkel CBD ist Spiegelbild von CAD, also sind beide gleich. Dreieck CBD ist als Spiegelbild von Dreieck ACD diesem kongruent. Zähle noch andere kongruente Dreiecke und halbierte Bogen auf. Abgesehen von bereits bewiesenen Sätzen ergeben sich folgende:

68) a) Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so sind sie kongruent (stimmen also auch in den gleichliegenden Winkeln überein). Denn sie lassen sich stets wie ACD und BCD symmetrisch aneinandersetzen, so daß ein Teil der Fig. 26 entsteht. Folglich hat die Aufgabe: ein Dreieck aus den drei Seiten zu konstruieren, nur eine einzige Lösung. Diese findet man, indem man eine der gegebenen Seiten beliebig hinlegt und mit den beiden andern Seiten als Radien um die Endpunkte der ersteren Bogen schlägt. Verbindet man diese Endpunkte mit einem der Schnittpunkte dieser Bogen, so ist das Dreieck konstruiert. — Satz 68 ist der dritte Kongruenzsatz.

69) b) Stehen über derselben Geraden (AB) zwei gleichschenklige Dreiecke (ABC und ABD), und verbindet man die Spitzen derselben, so wird der Winkel an jeder Spitze halbiert, die Basis halbiert, und die Verbindungslinie steht senkrecht auf der Basis.

Die betreffende Figur ist nur ein Teil der bereits besprochenen Fig. 26. (Man kann die gleichschenkligen Dreiecke ABC und ADB auch auf derselben Seite der Geraden anbringen.) Daraus ergiebt sich die Lösung einiger Aufgaben:

70) **Aufgabe.** Eine gegebene Gerade AB zu halbieren. Aufl. Man schlage um die Endpunkte A und B Bogen mit derselben Zirkelöffnung und verbinde die Schnittpunkte. Weil die Verbindungslinie die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke über AB verbindet, ist AB halbiert. (Fig. 26.) Stets ist nur eine Lösung möglich.

71) **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte C aus auf eine gegebene Gerade KL ein Lot zu fällen.

Auflösung. Man schlage um C mit hinreichend großer Zirkelöffnung einen Bogen, der die Gerade KL in zwei Punkten A und B schneidet. Mit derselben Zirkelöffnung schlage man um A und B Bogen, die sich in D schneiden. CD ist das gesuchte Lot, denn man hat die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke derselben Basis verbunden. (Fig. 26.) Stets ist nur eine Lösung möglich.

72) **Aufgabe.** Auf einer Geraden KL in einem beliebigen Punkte G ein Lot zu errichten.

Auflösung. Man schlage von G aus auf der Geraden KL nach beiden Seiten gleiche Stücke GA und GB ab (ist G Endpunkt der Geraden, so muß vorher verlängert werden), schlage mit größerer Zirkelöffnung um A und B Bogen, die auf der einen Seite den Schnitt C geben. Die Gerade GC ist die gesuchte Senkrechte, denn die Figur ist nur ein Teil der Fig. 26. Stets ist nur eine Lösung möglich.

Soll zugleich halbiert und das Lot errichtet werden, so gilt Konstruktion 70.

73) **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Auflösung. Man schlage um den Scheitel C einen Bogen, der die Schenkel in A und B schneidet. Um A und B schlage man zwei Bogen mit derselben Zirkelöffnung, die sich in D schneiden. CD halbiert den Winkel, denn man hat die Spitzen gleichschenkliger Dreiecke von gemeinschaftlicher Basis verbunden. (Fig. 26.) Stets ist nur eine Lösung möglich.

74) c) Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Halbierungspunkte der Basis, so wird der Winkel an der Spitze halbiert, und die Verbindungslinie steht auf der Basis senkrecht.

d) Fällt man von der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis ein Lot, so wird die Basis und der Winkel an der Spitze halbiert.

e) Das im Halbierungspunkte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auf dieser errichtete Lot geht durch die Spitze desselben und halbiert den Winkel an der Spitze. Es geht überhaupt durch die Spitzen aller gleichseitigen Dreiecke, die sich über der Geraden errichten lassen.

f) Halbiert man den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, so steht die Halbierungslinie auf der Basis senkrecht und halbiert dieselbe.

g) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig. Halbiert man nämlich den dritten Winkel, so hat man kongruente Dreiecke (nach dem 2. Kongruenzsatze). Gleichen Winkeln des Dreiecks liegen also gleiche Seiten gegenüber.

Die Folgerungen c, d, e und f, lassen sich in den einen Gesichtspunkt zusammenfassen, daß das gleichschenklige Dreieck eine Symmetrieachse hat, die auf verschiedene Art konstruiert werden kann. — Demnach hat das regelmäßige Dreieck 3 Symmetrieachsen, das regelmäßige Viereck 4, das regelmäßige Fünfeck 5, das regelmäßige Sechseck 6, u. s. w.

75) Diese Sätze lassen noch andere Ausdrucksweisen zu, von denen nur zwei genannt werden mögen:

d*) Das vom Kreiscentrum auf die Sehne gefällte Lot halbiert die Sehne.

e*) Die im Halbierungspunkte der Sehne auf ihr errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises kann man also finden, indem man in den Halbierungspunkten zweier nicht parallelen Sehnen Senkrechte errichtet. Ihr Schnittpunkt ist das Centrum.

76) Aus 73) folgt, daß man man mit Zirkel und Lineal den Kreis in 2, 4, 8, 16, 32 u. s. w. gleiche Teile teilen kann; ebenso kann man, vom regelmäßigen Sechseck ausgehend (vgl. 58), ihn in 3, 6, 12, 24 u. s. w. gleiche Teile einteilen. Man kann demnach das regelmäßige 4-Eck, 8-Eck, 16-Eck, 32-Eck u. s. w. und ebenso das regelmäßige 3-, 6-, 12-, 24-Eck u. s. w. genau konstruieren.

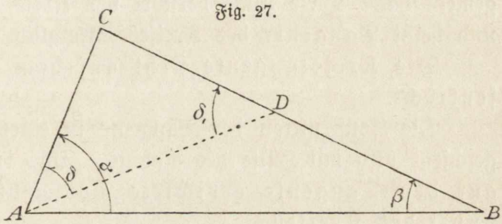
Bis jetzt sind daher der genauen Konstruktion folgende Winkel zugänglich: 360^0, 180^0, 90^0, 45^0, $22\frac{1}{2}^0$, $11\frac{1}{4}^0$ u. s. w. ferner: 120^0, 60^0, 30^0, 15^0, $7\frac{1}{2}^0$, $3\frac{3}{4}^0$ u. s. w.

In der Praxis werden zwei Arten von Winkeldreiecken gebraucht; das eine ist ein halbes Quadrat, d. h. ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Basiswinkeln 45^0 und 45^0, das andere ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit den Winkeln 60^0 und 30^0. Seine kleinere Kathete ist die Hälfte der Hypotenuse.

77) Der kleineren Dreieckseite liegt stets der kleinere Winkel, der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis. In Figur 27 sei $AC < BC$, so daß sich CA von C aus auf CB antragen läßt, was den Teilpunkt D und durch die Gerade AD das gleichschenklige Dreieck ADC giebt. In diesem ist $\sphericalangle \delta = \sphericalangle \delta_1$. Da aber $\delta_1 > \beta$ ist (als Außenwinkel des Dreiecks ABD), so ist auch $\delta > \beta$, und da δ nur ein Teil von α ist, so ist erst recht $\alpha > \beta$. Damit ist der Satz bewiesen.

Fig. 27.

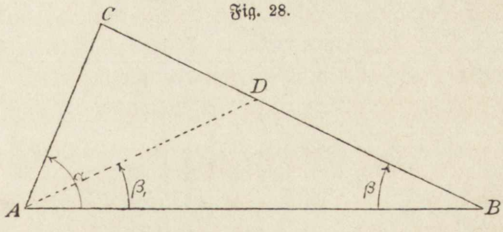


Bemerkung: Der kleineren Seite liegt stets ein spitzer Winkel gegenüber. (Warum?)

78) Dem größeren Dreieckswinkel liegt die größere Seite, dem kleineren die kleinere Seite gegenüber.

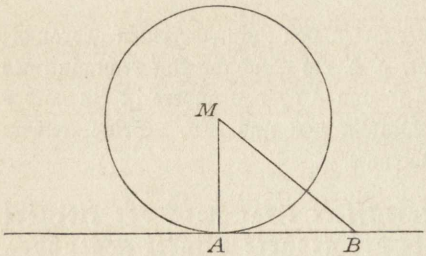
Beweis: In Figur 28 sei $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$, so daß sich β als β_1, bei A an AB so antragen läßt, daß der Schenkel AD innerhalb des Dreiecks liegt. Dabei ist $AC < AD + DC$ (denn AC ist der kürzeste Weg zwischen A und C). Für AD kann man aber, da $\beta = \beta_1$ ist, BD setzen, also ist auch $AC < BD + DC$, oder $AC < BC$, womit der Satz bewiesen ist. Der Beweis läßt sich auch indirekt mit Hülfe des vorigen Satzes geben.

Fig. 28.



79) **Folgerung:** Das Lot ist die kürzeste Linie von einem Punkte nach einer Geraden. Denn jede andere Gerade liegt in dem entstehenden Dreiecke dem durch das Lot gebildeten rechten Winkel gegenüber. So ist in Fig. 29 $MB > MA$. Folglich:

Fig. 29.



Errichtet man im Endpunkte eines Radius auf ihm eine Senkrechte, so liegen alle Punkte dieser beiderseits ins Endlose verlängerten Geraden außerhalb des Kreises, mit dem sie nur den Endpunkt des Radius gemein hat. Diese Linie berührt den Kreis, schneidet ihn aber nicht und heißt Tangente des Kreises. Folglich gilt der Satz:

Die Kreistangente steht auf dem zugehörigen Radius senkrecht.

Die Konstruktion der Tangente in einem gegebenen Kreispunkte geschieht also mit Hülfe des Radius. Das im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Lot geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

80) **Aufgabe:** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten a und b und dem der größeren a gegenüberliegenden Winkel α.

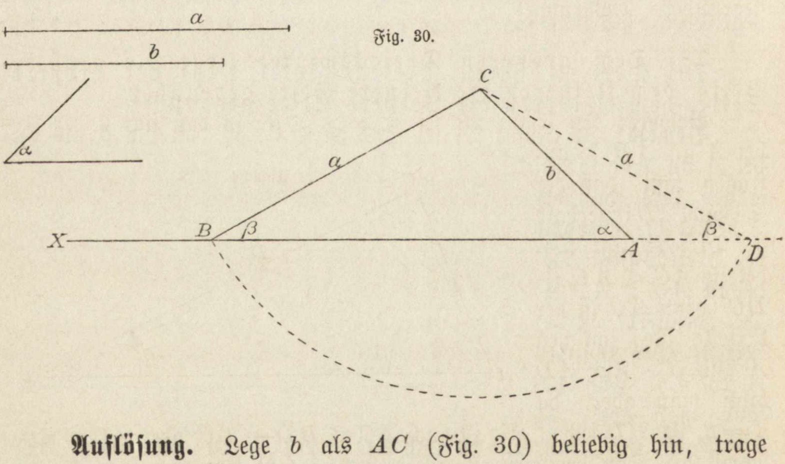


Fig. 30.

Auflösung. Lege b als AC (Fig. 30) beliebig hin, trage den gegebenen Winkel α in A an AC an und verlängere den neuen Schenkel AX beliebig weit. Darauf nimm a in den Zirkel und schlage damit um C einen Bogen, der AX in B schneidet. Die Verbindungslinie BC vollendet das gesuchte Dreieck.

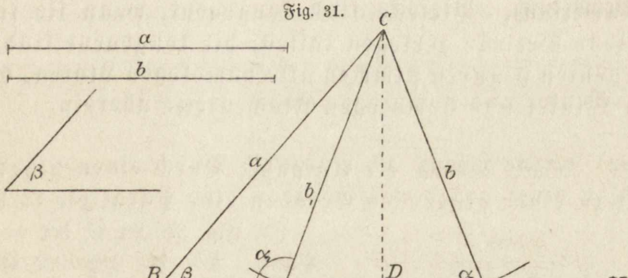
Bemerkung: Die Aufgabe ist stets möglich, wenn α konkav ist. Der um C geschlagene Bogen schneidet allerdings AX noch einmal, jedoch in der Verlängerung über A hinaus, denn da $a > b$ angenommen ist, fällt A innerhalb des mit a um C geschlagenen Kreises. Demnach ist nur eine einzige Lösung möglich. Dies ergiebt sich auch so: Hat man noch eine zweite Lösung $A_1B_1C_1$ durchgeführt, so läßt sich $\sphericalangle\, \alpha_1$ auf $\sphericalangle\, \alpha$ decken, und zwar so, daß die gleichen Seiten A_1C_1 und AC, also auch die Punkte C_1 und C auf einander fallen. Auch die unbestimmten Schenkel AX_1 und AX decken sich, ebenso ihre Verlängerungen über A hinaus. Da nun auch die beiden mit a um C geschlagenen Kreise sich decken, so decken sich auch die Schnittpunkte D_1 und D bezw. B_1 und B. Folglich fallen auch die Geraden C_1B_1 und CB aufeinander, die beiden Dreiecke also decken sich. — Daraus folgt der vierte Kongruenzsatz:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel.

[Der Beweis läßt sich auch führen, indem man die Dreiecke mit den größeren Seiten so aneinander legt, daß die gleichnamigen Endpunkte dieser Seiten aufeinander fallen. Dadurch entsteht eine Figur nach Art der Figur 26. An Figur 26 lassen sich die sämtlichen vier bis jetzt besprochenen Kongruenzsätze beweisen.]

81) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten a und b und dem der kleinern b gegenüberlegenden Winkel β.

Fig. 31.



Auflösung. Lege a als BC in Fig. 31 beliebig hin und trage an BC in B den Winkel β an, dessen freien Schenkel BX beliebig zu verlängern ist. Darauf nimm b in den Zirkel und schlage um C einen

Kreis. Ist nun b größer als der Abstand CD (von C nach AX) und, wie vorausgesetzt, kleiner als a, so schneidet der Kreis die Gerade BX zweimal, in A und A_1, und zwar, da B außerhalb des Kreises bleibt, auf derselben Seite von B. Es entstehen dann **zwei** Dreiecke, ABC und A_1BC, die die gegebenen Stücke enthalten.

Bemerkung. Damit die Aufgabe möglich sei, muß β, welches der kleineren Seite gegenüberliegt, ein spitzer Winkel sein, außerdem muß b größer sein, als der bei der Konstruktion auftretende Abstand CD. Ist $b < CD$, so ist die Aufgabe unlösbar. Ist $b > CD$, so giebt es zwei Lösungen, eine mit spitzem Winkel α, eine andere mit stumpfem Winkel α_1, und zwar sind α und α_1 Supplementwinkel. Sämtliche Lösungen, die man ausführt, sind entweder dem Dreiecke ABC oder dem Dreiecke A_1BC kongruent, was fast wörtlich ebenso, wie bei 80, durch Aufeinanderlegen bewiesen werden kann.

In Fig. 30 ist gezeigt, wie sich die beiden durch Konstruktion 81 gefundenen Dreiecke so aneinander legen lassen, daß ein gleichschenkliges Dreieck BDC entsteht, in dem sich die schräge Teillinie CA befindet.

Noch war der dritte Fall zu erwähnen, daß $b = CD$ ist. Dann giebt die Konstruktion nur das eine Dreieck BDC (Fig. 31), welches bei D einen rechten Winkel hat.

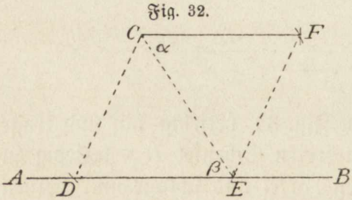
Nennt man zwei spitze Winkel gleichartig, ebenso zwei stumpfe, ebenso zwei rechte, so kann man als fünften Kongruenzsatz folgenden aussprechen:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel, und wenn außerdem der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichartig ist.

Bemerkung. Vielecke sind kongruent, wenn sie sich in homologe Dreiecke zerlegen lassen, die kongruent sind. In kongruenten Figuren stimmen alle homologen Linien, homologen Winkel und homologen Flächenteile überein.

82) Kürzere Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu legen.

Fig. 32.



In Fig. 32 sei C der gegebene Punkt, AB die gegebene Gerade. Nimm auf AB beliebig den Punkt D an, schlage mit Zirkelöffnung DC um D einen Kreis, der den Schnitt E auf AB giebt. Mit derselben Zirkelöffnung schlage um C und

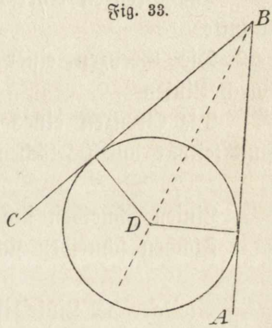
E Bogen, die sich in F schneiden. Die Gerade CF ist die gesuchte Parallele.

Beweis. Die gleichschenkligen Dreiecke CDE und CFE sind kongruent nach dem 3. Kongruenzsatze. Folglich sind die Wechselwinkel α und β einander gleich, folglich ist $CF \parallel AB$.

83) Fällt man von einem Punkte der Halbierungslinie eines Winkels auf dessen Schenkel Lote, so sind dieselben gleich lang und schneiden auf den Schenkeln gleiche Stücke ab.

Führe den Beweis mit Hülfe des zweiten Kongruenzsatzes, suche Umkehrungen des Satzes zu bilden und untersuche, was daraus für die von einem Punkte B an einen Kreis gezogenen Tangenten folgt. (Fig. 33.)

Fig. 33.



84) **Aufgabe.** Um einen Kreis ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Sechseck, Achteck u. s. w. zu zeichnen.

Auflösung. Führe die entsprechenden Kreisteilungen durch und errichte auf den teilenden Radien in ihren Endpunkten Lote.

V. Übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse, besonders der planimetrischen.

Die Mathematik ist die Lehre von den meßbaren Größen.

Die reine Mathematik ist die Lehre von den Raum- und Zahlengrößen.

Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgrößen.

Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlengrößen.

Der Punkt ist dasjenige geometrische Gebilde, welches keine Ausdehnung hat.

Die Linie ist dasjenige geometrische Gebilde, welches eine Ausdehnung, die Länge hat.

Die Fläche ist dasjenige geometrische Gebilde, welches zwei Ausdehnungen, Länge und Breite hat.

Der Körper ist dasjenige geometrische Gebilde, welches drei Ausdehnungen, Länge, Breite und Höhe hat.

Durch Bewegung des Punktes entsteht eine Linie.
Durch Bewegung einer Linie entsteht im allgemeinen eine Fläche.
Durch Bewegung einer Fläche entsteht im allgemeinen ein Körper.

Die Grenzen einer Linie sind Punkte. Linien sind teilbar durch Punkte.

Die Grenzen einer Fläche sind Linien. Flächen sind teilbar durch Linien.

Die Grenzen eines Körpers sind Flächen. Körper und Räume sind teilbar durch Flächen.

Linien schneiden sich in Punkten.
Flächen schneiden sich in Linien.

Die gerade Linie ist die Linie, die, unter Festhaltung zweier ihrer Punkte gedreht, ihre Lage nicht ändert. Sie ist zwischen zwei Punkten nur einmal möglich und zugleich der kürzeste Weg zwischen beiden. Der Abstand beider Punkte heißt die Länge der Geraden. Die Gerade kann beiderseits ins Endlose verlängert werden. Gleich lange Teile einer Geraden sind auf zweierlei Art kongruent. Die Gerade kann in ihrer Verlängerung verschoben werden, ohne aus dieser herauszutreten. Zwei Gerade können sich höchstens in einem Punkte schneiden.

Krumme Linien sind solche Linien, die nicht sämtliche Eigenschaften der Geraden besitzen.

Der Strahl ist die einseitig begrenzte Gerade. An ihm ist die Richtung und die Lage des Ausgangspunktes zu unterscheiden. Der begrenzte Strahl heißt Strecke, an ihr ist zu unterscheiden Richtung, Lage des Ausgangspunktes und Länge. Der Winkel ist das Maß der Drehung zweier Strahlen gegen einander. Die beiden Strahlen heißen Schenkel, ihr Ausgangspunkt heißt Scheitelpunkt des Winkels. Winkel, die sich decken, heißen gleiche Winkel. Die volle Umdrehung wird in 360 gleiche Teile eingeteilt. Jeder dieser Teile heißt ein Grad. Der gestreckte Winkel ist ein solcher von 180^0, der rechte Winkel ein solcher von 90^0. Winkel, die größer sind als 180^0, heißen konvexe Winkel; solche die kleiner sind als 180^0, heißen konkave Winkel. Winkel zwischen 0^0 und 90^0 heißen spitze Winkel. Winkel zwischen

90^0 und 180^0 heißen stumpfe Winkel. Supplementwinkel sind solche, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Komplementwinkel sind solche, die zusammen einen Rechten geben. Durch Verlängerung eines Winkelschenkels über den Scheitel hinaus entsteht ein Nebenwinkel des Winkels. Durch Verlängerung beider Winkelschenkel über den Scheitel hinaus entstehen zwei Neben- und ein Scheitelwinkel. Die Summe zweier Nebenwinkel giebt 180^0. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Die senkrechte Richtung ist diejenige, die durch einen mit einem Gewichte belasteten aufgehängten Faden angegeben wird. Jede mit dieser Richtung einen rechten Winkel bildende Gerade hat eine Richtung, die man als wagerecht bezeichnet. Von einem rechten Winkel sagt man, seine Schenkel stehen aufeinander senkrecht. Die von einem Punkte aus auf eine Gerade gefällte Senkrechte (das Lot) giebt den Abstand des Punktes von der Geraden an.

Die Ebene ist diejenige Fläche, in der sich von jedem Punkte nach jedem andern eine Gerade legen läßt, die nirgends aus der Fläche heraustritt. Sie entsteht, wenn eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden hingleitet, oder wenn eine Gerade sich um eine feste Gerade dreht, die sie unter einem rechten Winkel schneidet. Die Gesamtheit aller Punkte, deren jeder von zwei gegebenen Raumpunkten dieselbe Entfernung hat, ist eine Ebene. Eine ebene Fläche kann in ihrer Erweiterung beliebig verschoben und verdreht werden, ohne sie zu verlassen. Diese Deckung muß auch nach geschehenem Umklappen erhalten bleiben, wenn die Fläche eine Ebene sein soll.

Eine Ebene ist bestimmt durch zwei sich schneidende Gerade, oder durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, oder durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen.

Durch vier Punkte oder durch zwei Gerade läßt sich nicht immer eine Ebene legen. Zwei Gerade, durch die sich keine Ebene legen läßt, heißen sich kreuzende oder windschiefe Gerade.

Krumme Flächen sind solche, die nicht sämtliche Eigenschaften der Ebene besitzen.

Die Lehre von den in der Ebene liegenden Gebilden heißt Planimetrie (ebene Geometrie); die von den nicht in einer Ebene liegenden Gebilden heißt Stereometrie (Raumgeometrie).

Verlängert man das von einem Punkte aus auf eine Gerade gefällte Lot über die Gerade hinaus um sich selbst, so erhält man das Spiegelbild des Punktes und des Lotes in Bezug auf die Gerade. Das Spiegelbild eines ebenen geometrischen Gebildes gegen eine Gerade derselben Ebene läßt sich mit diesem zur Deckung bringen, und beide liegen symmetrisch zu einander. Die spiegelnde Gerade heißt Symmetrieachse. Geometrische Gebilde, die sich zur Deckung bringen lassen, heißen kongruent.

Stehen zwei Gerade einer Ebene auf einer dritten derselben Ebene senkrecht, so heißen sie parallel. Parallele Gerade schneiden sich nie, soweit man sie auch verlängert, sie behalten stets denselben Abstand von einander. Durch zwei parallele Gerade läßt sich stets eine Ebene legen. Durch einen Punkt läßt sich zu einer Geraden nur eine Parallele legen.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind je zwei Gegenwinkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich, und je zwei entgegengesetzte Winkel betragen zwei Rechte. Ist umgekehrt bei zwei solchen Winkeln das Angegebene der Fall, so sind die Geraden parallel. (Die Erklärung dieser Winkelnamen siehe im Texte.)

Eine ringsum von Geraden begrenzte ebene Fläche heißt ein Vieleck. Die Geraden heißen Seiten desselben, die Durchschnittspunkte zusammenstoßender Seiten heißen Ecken des Vielecks. Die von benachbarten Seiten gebildeten Winkel heißen Winkel des Vielecks. Verlängerung einer Seite giebt einen Außenwinkel des Vielecks. Die Verbindungslinie von zwei Eckpunkten, die nicht zu einer Seite gehören, heißt Diagonale des Vielecks. Das Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle seine Seiten und ebenso alle seine Winkel untereinander gleich sind. Die Centriwinkel des regelmäßigen Vielecks sind gleich. Dasselbe hat eben so viele Symmetrieachsen, wie Seiten. Sind alle Winkel eines Dreiecks spitze, so heißt es spitzwinklig, ist einer davon ein rechter, so heißt es rechtwinklig, ist einer davon ein stumpfer, so heißt es stumpfwinklig. Die Summe der Dreieckswinkel beträgt 180^0. Der Außenwinkel des Dreiecks ist gleich der Summe der Winkel an den andern Ecken. Sind zwei Dreieckswinkel gleich, so ist das Dreieck gleichschenklig (und umgekehrt). Das gleichschenklige Dreieck hat eine Symmetrieachse. Sind alle Dreieckswinkel gleich, so ist das Dreieck gleichseitig (und umgekehrt).

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte. Die Differenz zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen:

a) in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, oder

b) in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln, oder

c) in allen drei Seiten, oder

d) in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel, oder

e) in zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel, vorausgesetzt, daß der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichartig ist.

Der größeren Dreieckseite liegt der größere Dreieckswinkel gegenüber (und umgekehrt).

Der Kreis ist diejenige ebene in sich zurücklaufende Kurve, die überall von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte, denselben Abstand hat. Dieser konstante Abstand heißt Radius. Die Verbindungslinie zweier Kreispunkte heißt Sehne. Die verlängerte Sehne heißt Sekante. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser. Dieser ist Symmetrieachse des Kreises. Das im Endpunkte des Radius auf diesem errichtete Lot heißt Tangente. Der von zwei Radien begrenzte Kreisteil heißt Kreisausschnitt. Der durch die Sehne abgeschnittene Kreisteil heißt Kreisabschnitt. Ein Teil des Kreisumfangs heißt Kreisbogen. Der Bogengrad ist der 360. Teil des Kreisumfangs. Die Gerade und der Kreis schneiden sich höchstens in zwei Punkten. Zwei Kreise schneiden sich höchstens in zwei Punkten. Die Tangente berührt den Kreis nur in einem Punkte.

Jedes regelmäßige Vieleck hat einen umbeschriebenen und einen einbeschriebenen Kreis. Regelmäßige Vielecke gleicher Seitenzahl sind kongruent, wenn sie in der Seitenlänge oder im Radius des um- oder einbeschriebenen Kreises übereinstimmen.

Die Konstruktions-Postulate (Forderungen) waren: Zwei gegebene Punkte durch eine Gerade zu verbinden; um einen Punkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu schlagen.

Die grundlegenden Konstruktionen sind folgende:

1) Eine Strecke zu verdoppeln.

2) Eine Strecke zu halbieren.

3) Einen Winkel zu verdoppeln.

4) Einen Winkel zu halbieren.

5) Auf einer Geraden in einem gegebenen Punkte ein Lot zu errichten.

6) Von einem gegebenen Punkte auf eine Gerade ein Lot zu fällen.

7) Einen gegebenen Winkel an eine Gerade in einem gegebenen Punkte anzutragen.

8) Durch einen gegebenen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

Alle übrigen Konstruktionen werden aus diesen abgeleitet, besonders folgende:

9) Zu einem ebenen Gebilde das Spiegelbild in Bezug auf eine Gerade zu konstruieren.

10) Ein Dreieck aus drei zur Kongruenz genügenden Stücken zu konstruieren.

11) Regelmäßige Polygone von gewisser Seitenzahl zu konstruieren.

Gelegentlich sind an Beispielen die folgenden Grundsätze zu erläutern:

1) Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.

Ist $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$.

2) Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches.

Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so folgt $a + b = a_1 + b_1$.

3) Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches.

Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so folgt $a - a_1 = b - b_1$.

4) Gleiches mit Gleichem multipliziert giebt Gleiches.

Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so folgt $ab = a_1 b_1$.

5) Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches.

Ist $a = a_1$ und $b = b_1$, so folgt $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

B. Planimetrische Lehraufgabe der Tertia b.

(Zweiter Jahrgang.)

I. Von den Vierecken im allgemeinen.

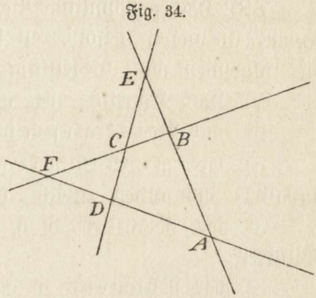
85) **Aufgabe.** In wieviel Punkten können sich höchstens vier Gerade schneiden?

Auflösung. Zwei Gerade schneiden sich höchstens in einem Punkte; eine dritte Gerade kann mit jeder der beiden ersten nur einen Schnittpunkt geben, drei Gerade schneiden sich also höchstens in $1 + 2 = 3$ Punkten. Eine vierte Gerade giebt mit jeder der drei ersten höchstens einen Schnittpunkt, folglich schneiden sich vier Gerade höchstens in $1 + 2 + 3 = 6$ Punkten.

Bemerkung. Versuche, um alle Möglichkeiten kennen zu lernen, vier Gerade zu zeichnen, die, soweit man sie auch verlängert, sich doch in keinem Punkte, oder nur in einem, oder nur in zwei, in drei, in vier, in fünf Punkten schneiden, endlich solche, die sich in sechs Punkten schneiden. (Welche dieser Aufgaben ist etwa unmöglich, welche etwa auf mehrere wesentlich verschiedene Arten lösbar?)

Der letztgenannte Fall ist in Fig. 34 dargestellt. Man nennt diese Zeichnung das vollständige Vierseit. Es giebt zu drei Arten von Vierecken Veranlassung, 1) $ABCD$, 2) $BEDF$, 3) $AECF$. Die erste dieser Flächen hat nur konkave Winkel, und die Seiten schneiden sich nur in den Eckpunkten, sonst nicht im Bereiche der Fläche. Das zweite Viereck hat außer den vier Ecken B, E, D, F noch einen Schnittpunkt C. Das dritte hat bei C einen konvexen Winkel. Wir beschäftigen uns eingehender nur mit Vierecken der ersten Art. Wird nichts Besonderes gesagt, so ist stets von einem solchen die Rede, und Entsprechendes soll auch von den Vielecken gelten.

Fig. 34.

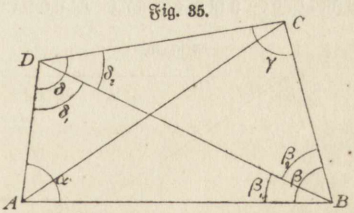


86) **Aufgabe.** Wie viele Verbindungslinien giebt es höchstens zwischen vier Punkten?

Auflösung. Zwischen zwei Punkten ist höchstens eine Verbindungslinie möglich. Ein dritter Punkt giebt höchstens zu zwei neuen Verbindungslinien Veranlassung, ein vierter höchstens zu drei neuen Verbindungen. Die höchste mögliche Zahl von Verbindungen ist also hier $1 + 2 + 3 = 6$. Also: Vier Punkte haben höchstens sechs gerade Verbindungslinien.

Bemerkung. Versuche, 4 Punkte zu zeichnen, die nur zu einer Geraden Veranlassung geben, oder nur zu vier Geraden, und solche, die zu 6 Geraden Veranlassung geben. Sind noch andere Fälle möglich? Fig. 35 stellt den Fall des gebräuchlichen Vierecks dar. AB, BC, CD und DA gelten als Seiten desselben, AC und BD als Diagonalen. [Wollte man AB,

Fig. 35.



BD, *DC* und *CA* als Seiten nehmen, so hätten *AD* und *BC* als Diagonalen zu gelten. Versuche auch für ein Viereck der dritten Art die Diagonalen zu finden.]

87) Die Summe der Winkel im Viereck beträgt vier Rechte.

Beweis. In Fig. 35 denke man sich *ABCD* durch die Diagonale *BD* in zwei Dreiecke zerlegt, dann ist in dem einen $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 2\,R$, im anderen $\gamma + \beta_2 + \delta_2 = 2\,R$. Die Summe dieser Winkel giebt die der vier Viereckswinkel.

88) Das gewöhnliche Viereck kann, abgesehen von der allgemeinsten Form, in vielen besonderen Formen auftreten, von denen jedoch nur die folgenden von Bedeutung sind:

a) Das Trapez, bei dem ein Seitenpaar parallel ist,

b) das Parallelogramm, bei dem zwei Seitenpaare parallel sind,

c) das gleichschenklige Trapez, bei dem ein Seitenpaar parallel, das andere gleich, aber nicht parallel ist.

d) das Rechteck, d. h. das Parallelogramm mit lauter rechten Winkeln,

e) der Rhombus, d. h. das gleichseitige Parallelogramm,

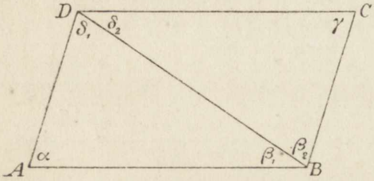
f) das Quadrat, d. h. das gleichseitige Rechteck.

Das Trapez und seine Spezialform kommen nur gelegentlich zur Sprache. Zunächst ist das Parallelogramm mit seinen Spezialformen zu behandeln.

II. Von den Parallelogrammen.

89) Die Gegenseiten und die Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich.

Fig. 36.



Beweis. Durch die Diagonale *BD* wird das Parallelogramm *ABCD* (Fig. 36) in zwei kongruente Dreiecke geteilt, denn beide Dreiecke stimmen überein in der Seite *BD*, in den Winkeln δ_1 und β_2 (die als Wechselwinkel bei Parallelen gleich sind) und in den Winkeln β_1 und δ_2 (aus demselben Grunde), also nach dem 2. Kongruenzsatze. Folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden

Seiten gleich, d. h. $AB = CD$ und $AD = CB$, ferner ist $\alpha = \gamma$, außerdem aber $\delta_1 + \delta_2 = \beta_2 + \beta_1$, d. h. $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

90) Sind in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Die Kongruenz der Dreiecke in Figur 36) folgt jetzt nach dem dritten Kongruenzsatze. Aus ihr folgt $\delta_1 = \beta_2$, so daß $AD \parallel BC$ ist; außerdem folgt $\delta_2 = \beta_1$, so daß auch $DC \parallel AB$ ist.

91) Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.

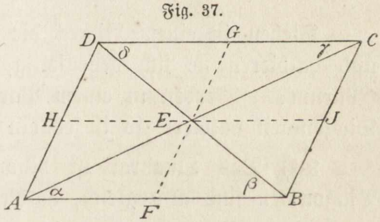
Beweis. Ist in Fig. 36 $AB \# DC$, so folgt aus dem Parallelismus, daß $\delta_2 = \beta_1$ ist. Die Dreiecke stimmen jetzt in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also kongruent nach dem ersten Kongruenzsatze. Folglich ist auch $\delta_1 = \beta_2$ und daher auch $AD \parallel BC$, also $ABCD$ ein Parallelogramm.

92) Die Diagonalen jedes Parallelogramms halbieren sich gegenseitig.

Beweis. In Figur 37 sind die Dreiecke ABE und CDE nach dem zweiten Kongruenzsatze kongruent, denn $DC = AB$, $\delta = \beta$ und $\gamma = \alpha$, folglich sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. $AE = EC$ und $DE = EB$.

Bemerkung. Jedes Parallelogramm hat zwei Mittellinien (FG und HJ), die zu den Seiten parallel sind und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen gehen. Sie zerlegen das Parallelogramm in vier kongruente Parallelogramme, denn sie lassen sich mit den Diagonalen so auf einander decken, daß kongruente Dreiecke (zweiter Kongruenzsatz) auf einander fallen. Die Mittellinien halbieren also die Seiten und sind ihnen bezüglich gleich.

Fig. 37.

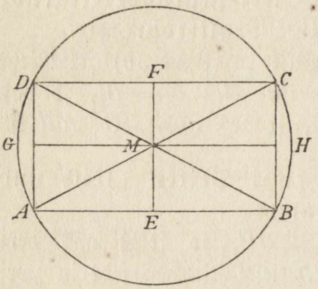


93) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Ist in Figur 37 $DE = BE$ und $AE = CE$, so sind die Dreiecke ABE und CDE, da auch die Scheitelwinkel übereinstimmen, kongruent (nach dem ersten Kongruenzsatze). Folglich ist $AB = CD$, und da auch die Wechselwinkel übereinstimmen: $AB \parallel DC$, also $ABCD$ ein Parallelogramm.

94) Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind sämtliche Winkel rechte (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rechteck. Im Rechtecke sind beide Diagonalen gleich. Sind in einem Parallelogramme die Diagonalen gleich groß, so ist es ein Rechteck. (Warum?) Durch die Ecken des Rechtecks läßt sich ein Kreis legen. Das Rechteck hat zwei Symmetrieachsen, die Mittellinien des Rechtecks. (Vgl. Fig. 38 und Abschnitt 28).

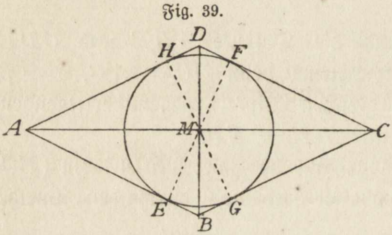
Fig. 38.



95) Sind in einem Parallelogramme zwei zusammenstoßende Seiten gleich, so sind alle Seiten gleich (warum?), das Parallelogramm ist also ein Rhombus.

Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. (Warum?) Beide sind Symmetrieachsen des Rhombus. Die Winkel des Rhombus sind durch die Diagonalen halbiert. (Warum?) Die vom Schnittpunkte der Diagonalen auf die Seiten des Rhombus gefällten Lote sind gleich lang, in den Rhombus läßt sich also ein Kreis beschreiben. (Beweise dies an Fig. 39).

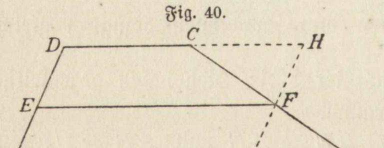
Fig. 39.



Stehen in einem Viereck die Diagonalen auf einander senkrecht, und halbieren sie sich gegenseitig, so ist das Viereck ein Rhombus. (Warum?) Werden in einem Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbiert, so ist es ein Rhombus.

96) Das Quadrat ist Rhombus und Rechteck zugleich, seine Diagonalen sind also gleich, halbieren sich gegenseitig und stehen auf einander senkrecht. Die Winkel des Quadrats werden durch die Diagonalen halbiert. In das Quadrat und um dasselbe läßt sich ein Kreis beschreiben. (Vgl. 29.)

Fig. 40.



97) Halbiert man in einem Trapez die nicht parallelen Seiten, und zieht man die Verbindungslinie der Halbierungspunkte, so ist diese zu dem anderen Seitenpaare parallel und gleich der halben Summe dieser Seiten.

Beweis. In Figur 40 sei $ABCD$ das Trapez, E und F seien die Halbierungspunkte der nicht parallelen Seiten AD und BC. Man lege durch F eine Parallele GH zu AD von der einen Parallelen bis zur Verlängerung der anderen, dann ist $\triangle FBG \cong \triangle FCH$ (zweiter Kongruenzsatz), also $GF = FH$ und somit EF Mittellinie des Parallelogramms $AGHD$. Daraus folgt $EF \# AG \# DH$. Ferner ist

$$EF = DC + CH,$$

und zugleich

$$EF = AB - GB,$$

folglich durch Addition der linken und rechten Seiten der Gleichungen: $2\,EF = AB + DC + (CH - GB)$, oder, da $CH - GB = 0$ ist, $2\,EF = AB + DC$

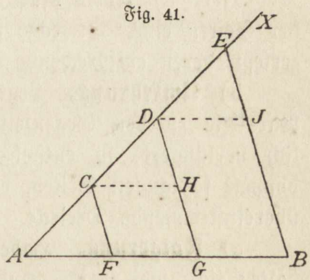
und
$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

Bemerkung. Man nennt daher EF das arithmetische Mittel zwischen AB und DC. Da $\triangle CHF \cong BGF$ ist, so hat das Parallelogramm $AGHD$ denselben Flächeninhalt, wie das Trapez $ABCD$. (Man braucht nur GBF an Stelle von HCF zu setzen, um die Verwandlung herbeizuführen.)

98) **Aufgabe.** Eine gerade Linie in drei gleiche Teile zu zerlegen.

Auflösung. In Fig. 41 sei AB die zu teilende Gerade. Man lege durch A eine beliebig gerichtete Gerade AX und schneide auf ihr die beliebige Strecke AC dreimal hintereinander ab, was die Punkte D und E giebt. Darauf ziehe man EB und dazu durch D und C die Parallelen DG und CF. Dann ist $AF = FG = GB$.

Fig. 41.



Beweis. $\triangle AFC \cong \triangle CHD \cong \triangle DJE$ (warum?), folglich $AF = CH = DJ$, folglich auch $AF = FG = GB$ (warum?).

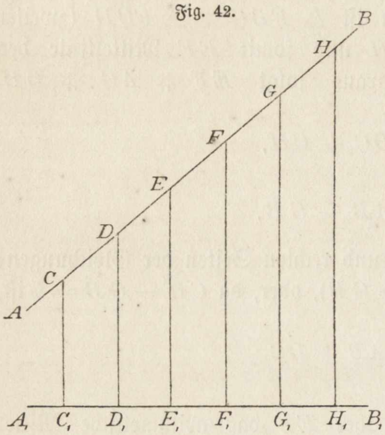
Entsprechend löst man die allgemeinere Aufgabe:

Eine gegebene Gerade in beliebig viele gleiche Teile zu zerlegen.

Aus der zugehörigen Zeichnung ergiebt sich der (für die darstellende Geometrie wichtige) Satz:

99) Ist eine Gerade in gleiche Teile geteilt, und legt man durch die Teilpunkte Parallele, so wird jede die Parallelen schneidende Gerade in gleiche Teile geteilt.

Fig. 42.



Schneidet die letztere die Parallelen rechtwinklig, wie in Fig. 42, so nennt man die Stücke C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 u. s. w. die Projektionen der Stücke CD, DE, EF u. s. w. auf die Gerade AB. Also: Man erhält die Projektion einer Strecke auf eine Gerade derselben Ebene, indem man von ihren Endpunkten aus Lote auf die Gerade fällt.

Aus Obigem folgt: Die Projektionen gleicher Stücke einer Geraden auf eine Gerade derselben Ebene sind einander gleich.

Dasselbe gilt von den Projektionen gleicher Stücke paralleler Geraden auf eine andere Gerade derselben Ebene.

100) **Aufgabe.** Ein Parallelogramm durch Parallele zu dem einen Seitenpaare in eine beliebige Anzahl gleicher Teile einzuteilen. (Auflösung leicht.)

101. a) **Übungssatz.** Verbindet man die Halbierungspunkte der Seiten eines Dreiecks, so wird dieses in vier kongruente Dreiecke zerlegt, deren entsprechende Seiten parallel liegen. (Vgl. 99.)

b) **Umkehrung.** Legt man durch die Ecken eines Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten, und werden die Parallelen hinlänglich verlängert, so entsteht ein Dreieck mit denselben Winkeln und doppelt so langen Seiten, die halbiert sind. [Die Figur enthält vier übereinstimmende Dreiecke.]

c) **Folgerung.** Haben zwei Dreiecke gleiche Winkel und verhalten sich zwei entsprechende Seiten der beiden Dreiecke wie 1 : 2, so verhalten sich auch die andern entsprechenden Seiten wie 1 : 2. (Vgl. Figur zu a.)

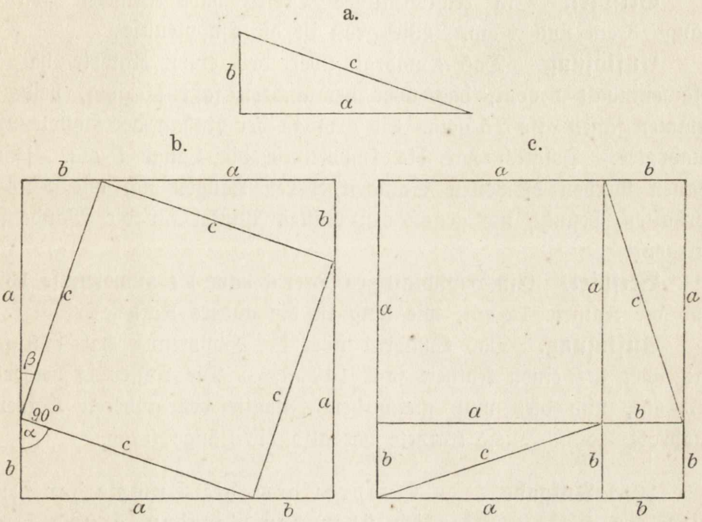
102) Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über

den beiden Katheten*). (Lehrsatz des Pythagoras oder Pythagoreischer Lehrsatz.)

Beweis. In Fig. 43a ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b, c dargestellt.

Fig. 43b stellt das Quadrat über der Seite $(a + b)$ dar. In dieses Quadrat ist das rechtwinklige Dreieck viermal so eingelegt, daß in der Mitte ein Rhombus mit der Seite c entsteht. In jeder

Fig. 43.



Ecke des Rhombus stoßen zwei Dreieckswinkel α und β zusammen, deren Summe 90^0 beträgt, so daß für den Rhombuswinkel 90^0 übrig bleiben. Demnach ist der Rhombus das Quadrat über der Hypotenuse c, und das Quadrat über c ist gleich dem Quadrate über $(a + b)$ vermindert um das Vierfache des gegebenen Dreiecks.

In Figur 43b ist von dem Quadrate über $(a + b)$ das gegebene Dreieck viermal in anderer Weise abgezogen, so nämlich, daß zwei Quadrate übrig bleiben, das über a und das über b.

In beiden Figuren ist also von demselben Quadrate je viermal dasselbe Dreieck abgezogen, folglich müssen die Restfiguren gleichen

*) Dieser Flächensatz wird hier eingeschaltet, um in der Kreislehre langatmige Erörterungen über die Abstände der Sehnen vom Kreismittelpunkte zu ersparen. Auch seine Wichtigkeit im allgemeinen läßt einen einfachen vorläufigen Beweis schon in der Untertertia als wünschenswert erscheinen.

Flächeninhalt haben, d. h. das Quadrat über c ist gleich der Summe der Quadrate über a und b. [In Anlehnung an die Arithmetik kann man sagen, die Maßzahlen a, b und c stehen in der Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$.]

Folgerung: Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Differenz zwischen dem Hypotenusenquadrate und dem anderen Kathetenquadrate. [In Fig. 43 ist $b^2 = c^2 - a^2$ und ebenso $a^2 = c^2 - b^2$.]

Beispiel. Ein rechtwinkliges Dreieck habe Katheten von der Länge 3 cm und 4 cm. Wie groß ist die Hypotenuse?

Auflösung. Das Quadrat über der einen Kathete hat den Flächeninhalt 9 qcm, das über der andern faßt 16 qcm, beide zusammen fassen also 25 qcm. So groß ist der Inhalt des Hypotenusenquadrates. Folglich hat die Hypotenuse die Länge 5 cm. [Beim Bauen werden bisweilen Stangen, deren Längen sich wie 3 : 4 : 5 verhalten, benutzt, um genau den rechten Winkel für die Wände festzulegen.]

Beispiel. Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse 13 cm und die Kathete 12 cm, wie lang ist die andere Kathete?

Auflösung. Das Quadrat über der Hypotenuse hat 169 qcm, das über der einen Kathete faßt 144 qcm. Die Differenz beider ist 25 qcm, und dies muß gleich dem Inhalte des anderen Kathetenquadrates sein. Diese Kathete hat also die Länge 5 cm.

103) **Aufgabe.** In Quadratform die Summe der Quadrate zu bilden, die sich über den Geraden a und b errichten lassen.

Auflösung. Man zeichne einen rechten Winkel mit den Schenkeln a und b und vollende das rechtwinklige Dreieck. Das Quadrat über der Hypotenuse ist das gesuchte.

Aufgabe. In Quadratform die Differenz der Quadrate zu bilden, die sich über den Geraden c und b errichten lassen. ($c > b$)

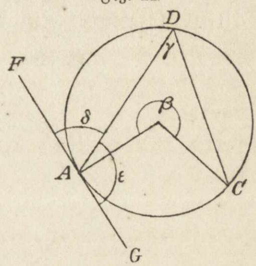
Auflösung. Man konstruiere ein Dreieck aus c und b und dem c gegenüberliegenden Winkel 90° (Vgl. Abschnitt 80). Das Quadrat über der gefundenen Kathete ist das gesuchte.

III. Vom Kreise.

104) a) Bekannt sind bereits folgende Begriffe: Kreis, Kreisfläche, Kreisumfang, Sehne, Sekante, Durchmesser, Halbmesser, Bogen, Centriwinkel, Sektor, Segment, Tangente, Kreisteilung, regelmäßiges Vieleck. Bekannt sind die Sätze über die Kongruenz von Bogen, Centriwinkeln, Segmenten und Sektoren gleicher Kreise und die Sätze über das vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällte Lot bezw. über die im Halbierungspunkte der Sehne auf ihr errichtete Senkrechte.

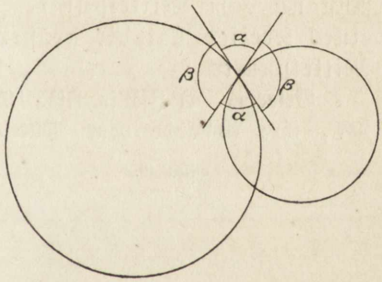
b) Weitere Erklärungen: Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Kreislinie und sind seine Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel ein Peripheriewinkel, vergl. ∢ γ in Fig. 44. Man sagt vom Peripheriewinkel γ, er stehe auf dem Bogen AC. Ebenso steht der zugehörige Centriwinkel auf dem Bogen AC, dagegen der konvexe Centriwinkel β auf dem Bogen ADC. — Liegt der Scheitel eines Winkels auf der Peripherie und sind seine Schenkel eine Sehne und eine Tangente, so heißt er ein Tangenten-Sehnen-Winkel, vergl. die Winkel δ und ε in Fig. 44.

Fig. 44.



Schneiden sich zwei Kreise, und zeichnet man in einem Schnittpunkte die beiden Tangenten, so erhält man den Winkel, unter dem sich die Kreise schneiden. (Gewöhnlich ist der Winkel α (Fig. 45) zwischen den nach innen gehenden Tangenten gemeint, nicht sein Nebenwinkel β.)

Fig. 45.



Liegen die Ecken eines Vielecks sämtlich auf einem Kreise, so sagt man, das Vieleck sei dem Kreise einbeschrieben, der Kreis sei dem Vieleck umbeschrieben oder er sei sein Um-Kreis (vergl. Fig. 46). Handelt es sich dabei um ein Viereck, so heißt es ein Sehnenviereck. Sind die Seiten eines Vielecks sämtlich Tangenten eines Kreises, so sagt man, das Vieleck sei dem Kreise umbeschrieben, der Kreis sei ihm einbeschrieben oder sein In-Kreis. Vergl. Fig. 47. Handelt

Fig. 46.

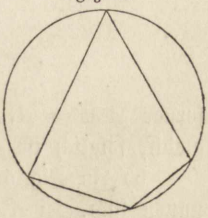
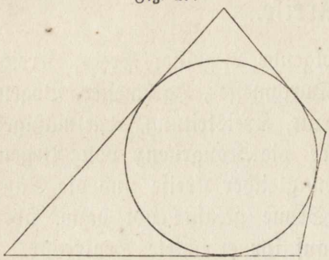


Fig. 47.



es sich dabei um ein Viereck, so heißt dieses ein Tangentenviereck.

Berühren die Seiten eines Vielecks einen Kreis teils unmittelbar, teils in ihren Verlängerungen oder sämtlich nur in den Verlängerungen, so sagt man, das Vieleck sei dem Kreise anbeschrieben, ebenso sei der Kreis dem Vielecke anbeschrieben oder sein An-Kreis. Vergl. z. B. die Vierecke $ABCD$ in Fig. 48a und 48b. (Zeichne ein Viereck, bei dem keine Seite direkt berührt.)

Fig. 48a.

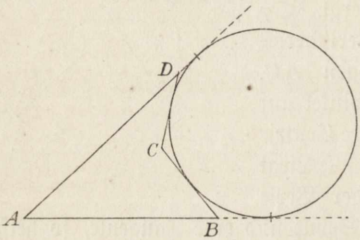
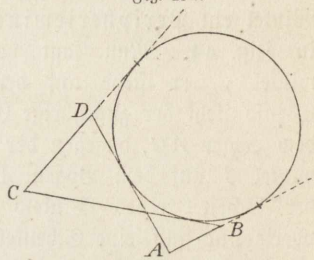


Fig. 48b.



105) **Satz:** Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte; von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Beweis. a) Ist in Fig. 49 $AB = A_1B_1$ und sind MC und MC_1 ihre Abstände vom Mittelpunkte, so ist auch $AC = A_1C_1$,

Fig. 49.

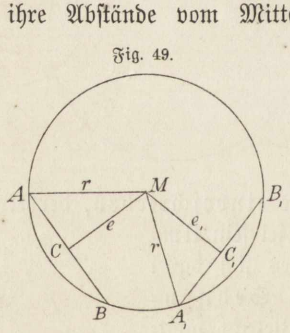
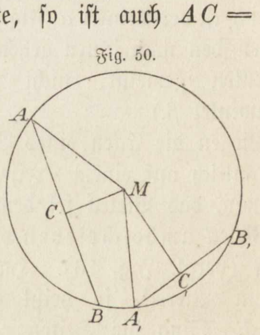


Fig. 50.



ferner $AM = A_1M$ und die rechten Winkel bei C und C_1 sind gleich, folglich ist $\triangle ACM \cong \triangle A_1C_1M$, folglich $MC = MC_1$.

b) In Fig. 50, in der die entsprechenden Bezeichnungen zu benutzen sind, sei $AB > A_1B_1$, also auch die Hälfte a größer als die

Hälfte a_1. Da nun nach Pythagoras $e^2 = r^2 - a^2$ und $e_1{}^2 = r^2 - a_1{}^2$ ist, so muß $e^2 < e_1{}^2$ sein, denn bei e^2 ist mehr von r^2 abgezogen als bei $e_1{}^2$. Ist aber das Quadrat über e kleiner als das über e_1, so ist auch $e < e_1$.

Bemerkung. Wie lauten die Umkehrungen dieser Sätze?

106) Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Centriwinkels.

Beweis. Erster Fall. Schenkel AM (Fig. 51a) liegt auf AB.

Fig. 51a.

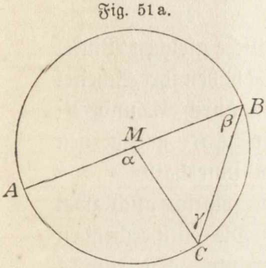


Fig. 51b.

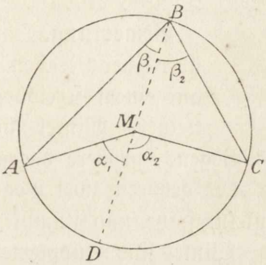
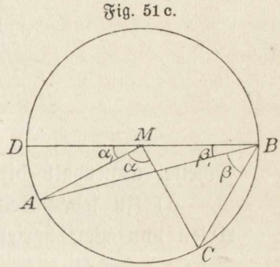


Fig. 51c.



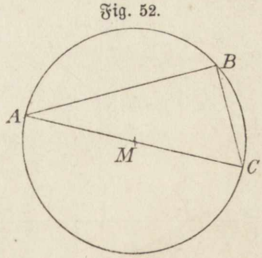
Dann ist $\alpha = \beta + \gamma$ (Außenwinkel), da aber $\beta = \gamma$ ist, so folgt $\alpha = 2\beta$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Zweiter Fall. M liegt zwischen AB und BC. (Fig. 51b.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha_1 = 2\beta_1$ (soeben bewiesen) und $\alpha_2 = 2\beta_2$, folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2)$, d. h. $\sphericalangle AMC = 2 \cdot (\sphericalangle ABC)$, also $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AMC$.

Dritter Fall. M liegt außerhalb ABC. (Fig. 51c.) Man ziehe den Durchmesser BD. Dann ist $\alpha + \alpha_1 = 2(\beta + \beta_1)$, aber $\alpha_1 = 2\beta_1$, folglich durch Subtraktion $\alpha = 2\beta$.

107) **Folgerungen.** a) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen gleicher Kreise sind einander gleich; gleiche Peripheriewinkel gleicher Kreise stehen auf gleichen Bogen. (Zu beweisen mit Hilfe der zugehörigen Centriwinkel.)

Fig. 52.

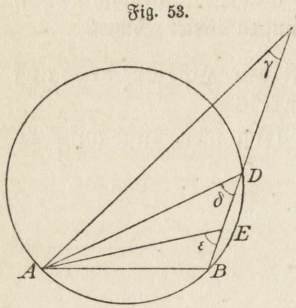


b) Jeder Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Beweis. Der zugehörige Centriwinkel (AMC in Fig. 52) ist gleich 2 Rechten, der Peripheriewinkel also die Hälfte. (Die Aufgabe, ein Quadrat zu konstruieren, welches gleich der Differenz zweier gegebenen ist, läßt jetzt welche andere Lösung zu?)

c) Jeder Winkel über einem Bogen, der seinen Scheitel außerhalb des Kreises hat, ist kleiner als jeder zum Bogen gehörige Peripheriewinkel; jeder Winkel über dem Bogen, der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, ist größer als jeder Peripheriewinkel über demselben Bogen.

Fig. 53.

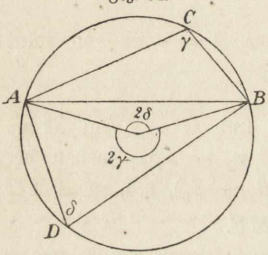


Beweis. In Fig. 53 ist $\delta > \gamma$, weil δ Außenwinkel des Dreiecks ADC ist. Ebenso ist $\varepsilon > \delta$ (als Außenwinkel des Dreiecks AED).

Bemerkung. Sämtliche gleichen Winkel über einer Geraden AB haben ihre Scheitel auf einem Kreisbogen durch A und B; kleinere Winkel über AB haben den Scheitel außerhalb dieses Bogens, größere dagegen innerhalb.

d) Zu jeder Sehne AB gehören zwei Bogen, folglich auch zwei Arten von Peripheriewinkeln, spitze und stumpfe. Die entsprechenden Winkel sind Supplementwinkel. In Fig. 54 z. B. ist die Summe des konkaven und des konvexen Centriwinkels gleich 4 Rechten, folglich ist $\gamma + \delta = 2\,\mathrm{R}$. Daraus ergiebt sich der Satz:

Fig. 54.

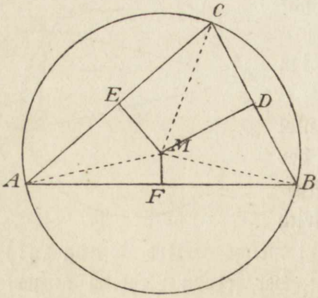


I n j e d e m S e h n e n v i e r e c k e i s t d i e S u m m e z w e i e r g e g e n ü b e r l i e g e n d e n W i n k e l g l e i c h z w e i R e c h t e n. Umkehrung: Ist in einem Vierecke die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten, so ist es ein Sehnenviereck. (Warum?)

108) **Aufgabe.** U m e i n g e g e b e n e s D r e i e c k ABC e i n e n K r e i s z u b e s c h r e i b e n.

Auflösung. Man errichte im Halbierungspunkte D auf BC ein Lot (Fig. 55), ebenso im Halbierungspunkte E auf AC. Der Schnittpunkt M dieser Lote ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Fig. 55.

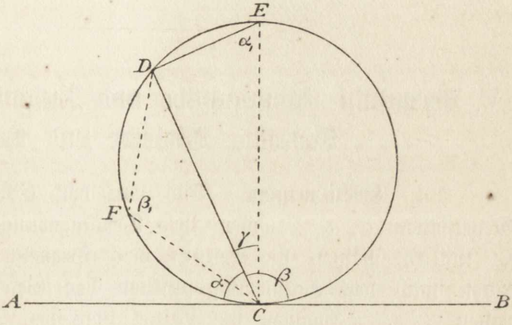


Beweis. $BM = MC$, denn $\triangle MDB \cong MDC$; $CM = AM$, denn $\triangle EMC \cong EMA$. Folglich $MA = MB = MC$.

Bemerkung. Fällt man von M ein Lot auf die dritte Seite AB, so wird diese ebenfalls halbiert. Folglich:

Die auf den Dreieckseiten in den Halbierungspunkten errichteten Lote schneiden sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des Um-Kreises. — Verbindet man diesen Punkt mit den Ecken des Dreiecks, so bilden die Verbindungslinien Winkel, die doppelt so groß sind, als die Dreieckswinkel. — Enthält das Dreieck nur spitze Winkel, so liegt der Mittelpunkt des Um-Kreises innerhalb des Dreiecks; enthält es einen stumpfen Winkel, so liegt er außerhalb; enthält es einen rechten Winkel, so liegt er auf der Hypotenuse und halbiert dieselbe. (Warum?) — Ist in einem Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel gleich zwei Rechten, so läßt sich ebenso die Aufgabe lösen, um dieses einen Kreis zu schlagen.

Fig. 56.

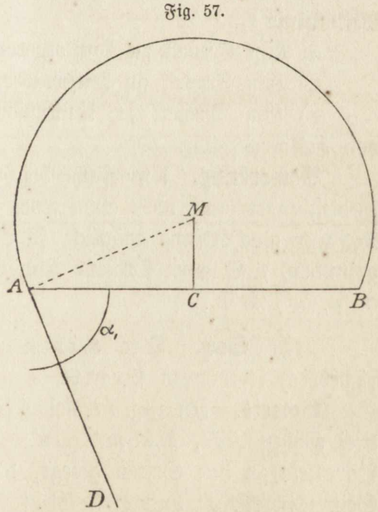


109) Jeder Tangentensehnenwinkel ist gleich jedem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt.

Beweis. In Fig. 56 sei AB die in C berührende Tangente, CD eine Sehne. Zieht man den Durchmesser CE und die Sehne ED, so ist $\alpha = 90^0 - \gamma$ (warum?) und ebenso $\alpha_1 = 90^0 - \gamma$ (warum?), folglich $\alpha = \alpha_1$. Nun ist aber jeder Peripheriewinkel über DC, der auf derselben Seite von DC liegt, gleich α_1, für den spitzen Winkel α also ist der Satz bewiesen.

Zeichnet man nun einen Peripheriewinkel DFC auf der andern Seite, so ist $\beta_1 = 180^0 - \alpha_1$ (Sehnenviereck), ebenso $\beta = 180^0 - \alpha$, folglich auch $\beta = \beta_1$. Der Satz gilt also auch vom stumpfen Winkel.

Fig. 57.



110) **Aufgabe.** Über einer Geraden AB einen Kreis-

bogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel über AB in sich faßt.

Auflösung. Ist AB die gegebene Gerade (Fig. 57) und α der gegebene Winkel, so trage man α als $\sphericalangle BAD$ an die Gerade AB an. In A errichte man ein Lot auf AD, ebenso im Halbierungspunkte C auf AB. Die Lote schneiden sich im Mittelpunkte des gesuchten Kreisbogens. (Warum?)

Bemerkung. Ist α ein rechter Winkel, so hat man über AB als Durchmesser einen Halbkreis zu schlagen.

IV. Vermischte Übungssätze und Aufgaben über Dreiecke, Vierecke, Vielecke und Kreise.

111) **Erklärungen.** Die von den Ecken A, B, C auf die Gegenseiten a, b, c (oder ihre Verlängerungen) gefällten Lote h_1, h_2 und h_3 heißen die Höhen des Dreiecks. Die von denselben Ecken nach den Halbierungspunkten der Gegenseiten gehenden Geraden t_1, t_2, t_3 heißen die Mittellinien des Dreiecks. Der Radius des Um-Kreises soll r heißen.

[112) **Aufgaben.** a) Ein Dreieck zu konstruieren aus Seite a, dem Winkel α und der Höhe h_1.

b) Ein Dreieck zu konstruieren aus Seite a, Winkel α und der Mittellinie t_1.

c) Ein Dreieck zu konstruieren aus r, a und h_1.

d) Ein Dreieck zu konstruieren aus r, a und t_1.

e) Ein Dreieck zu konstruieren aus a, h_2 und h_3. (Benutze den Halbkreis über a.)

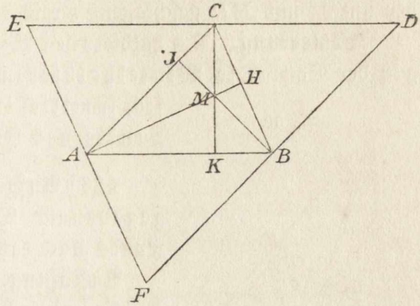
Bemerkung. Untersuche bei jeder dieser Aufgaben, unter welchen Bedingungen eine oder etwa zwei verschiedene Lösungen möglich sind. Ist nur eine Lösung möglich, so ist jedesmal ein neuer Kongruenzsatz gefunden, z. B. zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in a, α und h_1.]

113) **Satz.** Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich sämtlich in einem Punkte.

Beweis. In Fig. 58 sei ABC das gegebene Dreieck mit seinen drei Höhen AH, BI und CK. Durch die Ecken des Dreiecks sind Parallele zu den Seiten gelegt, die ein Dreieck DEF geben, dessen Seiten in A, B und C halbiert sind (vergl. 101). Weil nun AH,

BJ und CK Lote auf diesen Seiten in ihren Halbierungspunkten sind, so schneiden sie sich nach 108) in einem Punkte.

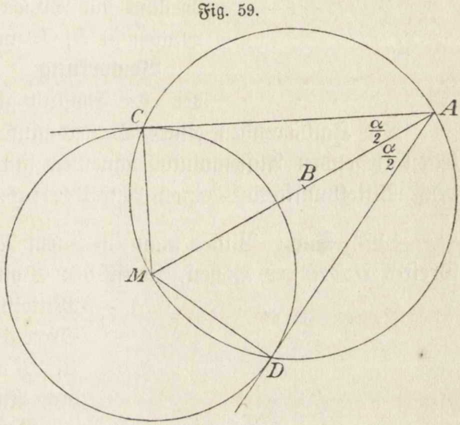
Fig. 58.



114) **Aufgabe.** Von einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkte aus an denselben Tangenten zu ziehen.

Auflösung. In Fig. 59 sei A der außerhalb des um M geschlagenen Kreises gegebene Punkt. Man verbinde A mit M, halbiere AM in B und schlage um B mit BM als Radius einen Kreis, der den gegebenen in C und D schneidet. Die Geraden AC und DC sind die gesuchten Tangenten. (MC ist nämlich Radius und $AC \perp MC$. Ebenso ist es bei D.)

Fig. 59.

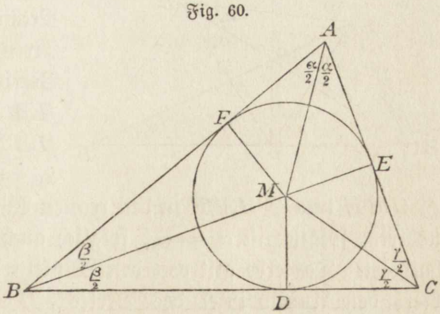


Bemerkung. Die beiden Tangenten sind einander gleich. Der Winkel zwischen ihnen ist halbiert (vergl. 83). Alle Kreise, die zwei sich schneidende Gerade berühren, haben ihre Mittelpunkte auf der Halbierungslinie des Winkels.

115) **Aufgabe.** In ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbiere die Winkel bei B und C (Fig. 60). Der Schnittpunkt M ist dann der gesuchte Mittelpunkt. Mit dem Abstande desselben von einer der Linien schlage man den Kreis. Dieser berührt sämtliche Geraden.

Fig. 60.

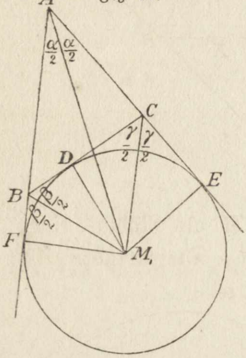


Beweis. MD, ME und MF seien die Lote von M

nach den Dreieckseiten, dann ist $\triangle FBM \cong \triangle BDM$, folglich $MD = MF$; $\triangle MDC \cong \triangle MEC$, folglich $MD = ME$. Demnach berührt der um M mit MD geschlagene Kreis die Dreieckseiten in D, E und F.

Bemerkung. MA halbiert den Winkel bei A. (Warum?) Folglich gilt der Satz: Die Winkelhalbierenden des Dreiecks schneiden sich sämtlich in **einem** Punkte, dem Mittelpunkte des In-Kreises.

Fig. 61.



116) **Aufgabe.** An die Seite BC eines gegebenen Dreiecks ABC einen An-Kreis des letzteren zu legen (Fig. 61).

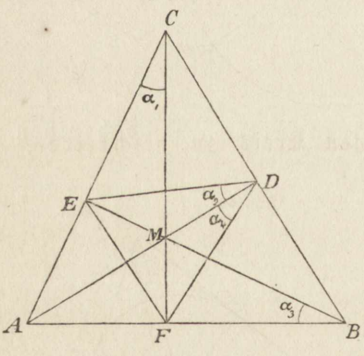
Auflösung. Halbiere die an der Seite BC liegenden Außenwinkel. Vom Schnittpunkte M_1 der Halbierungslinien fälle das Lot M_1D auf BC. Der mit diesem um M_1 geschlagene Kreis berührt die Dreieckseiten bezw. ihre Verlängerungen in D, E und F. (Beweis wie vorher.)

Bemerkung. M_1A halbiert den Winkel bei A. Folglich gilt der Satz:

Die Halbierenden eines Dreieckswinkels und der an den andern Ecken liegenden Außenwinkel schneiden sich sämtlich in einem Punkte, dem Mittelpunkte des einen An-Kreises.

117) **Satz.** Bildet man in einem Dreieck ABC das Fußpunkt-Dreieck DEF der Höhen, so ist der Schnittpunkt M der Höhen der Mittelpunkt des In-Kreises für das Dreieck DEF, während die Ecken A, B und C die Mittelpunkte der drei An-Kreise sind.

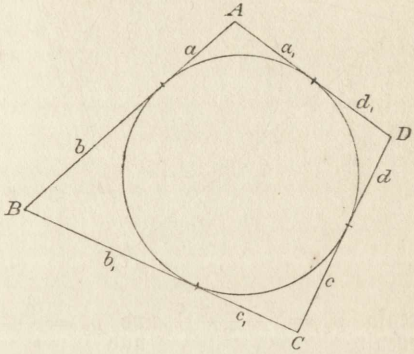
Fig. 62.



Beweis. $CEMD$ ist ein Sehnenviereck, denn die gegenüberliegenden Winkel D und E sind Rechte. Folglich sind für den Um-Kreis dieses Vierecks α_1 und α_2 als Peripheriewinkel über der Sehne EM einander gleich. Ebenso ist $DMFB$ ein Sehnenviereck und $\alpha_3 = \alpha_4$. Nun stimmen aber $\triangle CME$ und $\triangle BMF$ in den rechten Winkeln und den Scheitelwinkeln überein, folglich ist $\alpha_1 = \alpha_3$, folglich auch $\alpha_2 = \alpha_4$. Also ist $\sphericalangle EDF$ halbiert. Dasselbe gilt von den Winkeln bei E und F. BD aber halbiert den Außenwinkel des Dreiecks DEF bei D (warum?), ebenso halbieren die übrigen Seiten des Dreiecks ABC die Außenwinkel von DEF. Damit ist der Satz bewiesen. (Vgl. 115 u. 116.)

Bemerkung. Die Radien des In-Kreises und der An-Kreise sollen stets mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 bezeichnet werden, wobei die letzten drei den die Seiten a, b, c direkt berührenden Kreisen angehören.

Fig. 63.



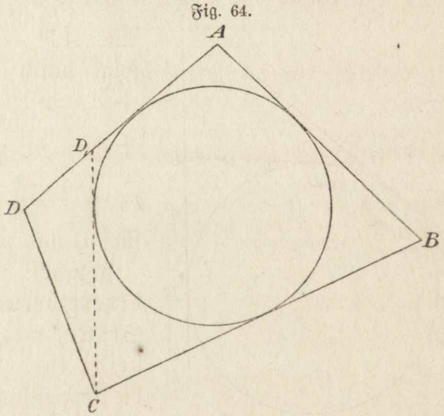
118) **Satz:** Die Summe zweier Gegenseiten eines Tangentenvierecks ist gleich der Summe der beiden andern Gegenseiten.

In Fig. 63 sind folgende Tangenten gleich: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, $d = d_1$, folglich ist $a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$, d. h. $AB + CD = BC + DA$.

Umkehrung: Ist bei einem Viereck die Summe des einen Gegenseitenpaars gleich der des andern, so ist es ein Tangentenviereck.

Beweis. Angenommen, $ABCD$ in Fig. 64 hätte in dem angegebenen Sinne gleiche Seitensummen und würde von dem gezeichneten Kreise nur an drei Seiten berührt, während DC abliegt, so könnte man die vierte Tangente CD_1 ziehen. Dann würde sein $AB + CD_1 = AD_1 + BC$, und nach der Voraussetzung $AB + CD = (AD_1 + D_1D) + BC$, folglich durch Subtraktion $CD - CD_1 = D_1D$ oder $CD = CD_1 + D_1D$ d. h. die Summe zweier Dreiecksseiten würde gleich der dritten sein. Dieser Widerspruch kann nur dadurch aufgehoben werden daß D auf D_1 fällt. — Entsprechend wird der Beweis geführt, wenn man annimmt, CD schnitte den Kreis.

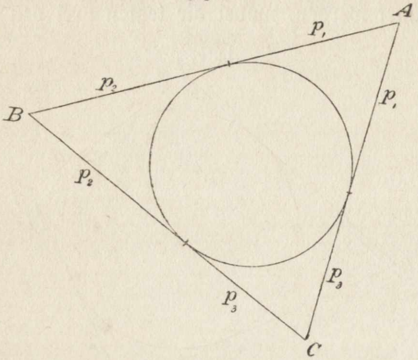
Fig. 64.



Bemerkung. Versuche die entsprechenden Sätze für die anbeschriebenen Vierecke auszusprechen.

119) **Aufgabe.** Ein Dreieck habe die Seiten a, b und c. Wie groß sind die Abschnitte p_1, p_2, p_3, die durch die Berührungspunkte des Inkreises entstehen.

Fig. 65.



Auflösung. In Fig. 65 ist

$$2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = a + b + c,$$

zugleich ist

$$2p_2 + 2p_3 = 2a,$$

folglich durch Subtraktion:

$$2p_1 = a + b + c - 2a = b + c - a,$$

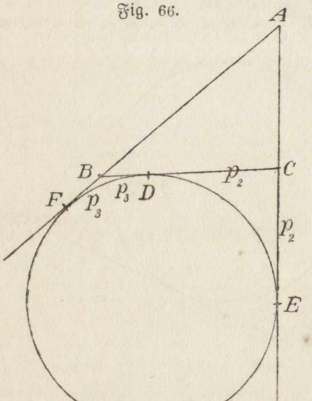
folglich $p_1 = \frac{-a + b + c}{2}$,

ebenso $p_2 = \frac{a - b + c}{2}$ und $p_3 = \frac{a + b - c}{2}$.

120) Dieselbe Aufgabe für den Ankreis mit Radius ϱ_1 zu lösen.

Auflösung. In Fig. 66 ist $AF = AB + BD$ und $AE = AC + CD$, folglich $AF + AE = a + b + c$, und, da $AF = AE$ ist, $AF = AE = \frac{a + b + c}{2}$.

Fig. 66.



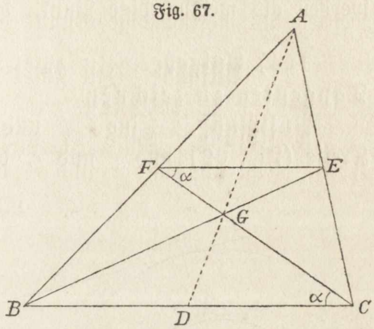
Aus $AF - p_3 = c$ und $p_2 + p_3 = a$ folgt durch Addition $AF + p_2 = a + c$, also $p_2 = a + c - AF = a + c - \frac{a + b + c}{2} = \frac{a - b + c}{2}$, ebenso $p_3 = \frac{a + b - c}{2}$, was mit den Formeln für p_2 und p_3 in 119) übereinstimmt.

Folglich: Der Ankreis teilt die direkt berührte Seite in dieselben Stücke, wie der Inkreis, nur sind beide in der Lage vertauscht. (Um die Übereinstimmung zu einer vollkommnen zu machen, ist ausnahmsweise bei B und C nicht p_2 bezw. p_3 sondern p_3 bezw. p_2 geschrieben. Die bewiesene Übereinstimmung ist eine Quelle wichtiger Sätze. Bei den letzteren setzt man $\frac{a + b + c}{2} = p$.)

[121) **Aufgaben:** a) Ein Dreieck zu konstruieren aus γ, ϱ und a,
b) 〃 〃 〃 〃 〃 γ, ϱ_1 〃 a,
c) 〃 〃 〃 〃 〃 γ, ϱ 〃 h_1,
d) 〃 〃 〃 〃 〃 γ, ϱ_3 〃 h_1.]

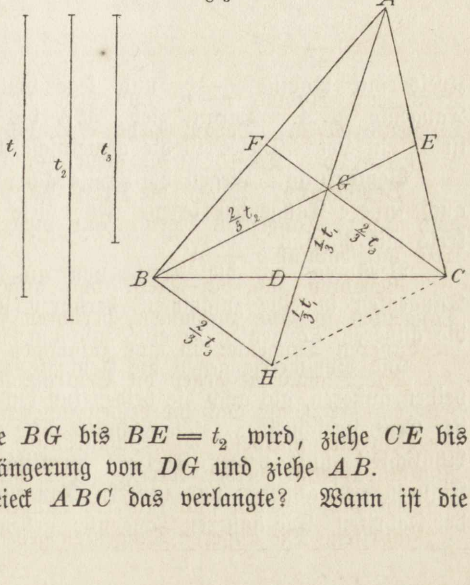
122) Die Mittellinien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte und von jeder ist der dritte Teil abgeschnitten.

Fig. 67.



Bemerkung. In Fig. 67 sind F und E Halbierungspunkte der Dreiecksseiten, folglich nach Abschnitt 101) $FE \parallel BC$. Demnach haben die Dreiecke FEG und BCG gleiche Winkel, und da $FE = \frac{1}{2} BC$ ist (nach 101), so folgt (ebenfalls nach 101) $FG = \frac{1}{2} GC$ und $EG = \frac{1}{2} GB$, oder $FG = \frac{1}{3} FC$ und $EG = \frac{1}{3} EB$. Da ebenso AD von EB den dritten Teil abschneiden muß, gehen alle Mittellinien durch G, und von jeder ist der dritte Teil abgeschnitten. [Aus Gründen der Mechanik heißt G der Schwerpunkt der Punkte A, B und C und der Dreiecksfläche ABC, nicht aber des Dreiecksumfangs. Bei gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecken fallen Mittellinien mit gewissen Höhen und Winkelhalbierenden zusammen.]

Fig. 68.



123) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Mittellinien t_1, t_2 und t_3 zu konstruiern.

Auflösung. Konstruiere aus den Seiten $\frac{2}{3} t_1$, $\frac{2}{3} t_2$ und $\frac{2}{3} t_3$ (Fig. 68) das Dreieck BGH, halbiere GH in D, ziehe BD und verdoppele es, was BC giebt, verlängere BG bis $BE = t_2$ wird, ziehe CE bis zum Schnitte A mit Verlängerung von DG und ziehe AB.

Warum ist das Dreieck ABC das verlangte? Wann ist die Konstruktion möglich?

[**Aufgaben.** Ein Dreieck zu konstruieren aus a, t_2 und t_3,
" " " " " a, t_1 " t_2,
" " " " " a, t_2 " h_1.

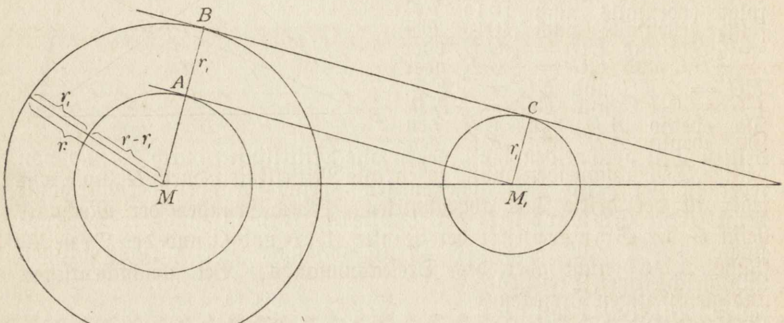
(Bemerkung zur letzten Aufgabe: A liegt auf einer Parallelen zu a im Abstande h_1, E auf einer Parallelen im halben Abstande.)

Bemerkung: Die Mittelpunkte der In-, Um- und An-Kreise, der Höhendurchschnitt und der Durchschnitt der Mittellinien des Dreiecks werden als merkwürdige Punkte desselben bezeichnet.]

124) **Aufgabe.** Zu zwei Kreisen die gemeinschaftlichen Tangenten zu zeichnen.

Auflösung. Sind M und M_1 die Mittelpunkte der beiden Kreise (Fig. 69) und r und r_1 die Radien, so schlage um M einen

Fig. 69.



Kreis mit Radius $r-r_1$ und lege von M_1 aus an diesen die Tangente M_1A. Darauf ziehe MA bis B und errichte auf AB in B ein Lot. Dieses ist die gemeinschaftliche Tangente. (Warum?)

Bemerkung. Liegen die Kreise ganz auseinander, so lassen sich auch innere Tangenten legen. Für diese benutze man einen Hülfskreis mit Radius $r + r_1$.

Berühren sich die Kreise von außen, so fallen die inneren Tangenten in eine zusammen, berühren sie sich innerlich, so fallen die äußeren Tangenten in eine zusammen.

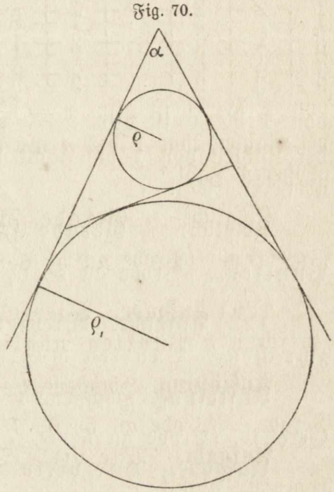
Die Symmetrie gegen die Centrale MM_1 zeigt, daß sowohl die beiden äußeren, als auch die beiden inneren Tangenten sich in Punkten der Centrale schneiden. Die Schnittpunkte heißen äußerer und innerer Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. Praktische Anwendung finden die Figuren der äußeren und inneren Tangenten bei den Riementrieben der Fabriken. Die äußeren Tangenten geben gleichlaufende, die inneren entgegengesetzt drehende Räder. Die Gesamtfigur findet Anwendung bei der Erläuterung des Kern- und Halbschattens der Erde bezw. des Mondes und bei der Erklärung der totalen und ringförmigen Sonnenfinsternisse. Später tritt die Figur noch mehrfach in bedeutungsvoller Weise auf.

[125) **Aufgaben.** a) Ein Dreieck zu konstruieren aus α, ϱ und ϱ_1;
b) " " " " " α, ϱ_1 " ϱ_2;
c) " " " " " α, ϱ " h_1;
d) " " " " " α, ϱ_2 " h_1.]

(Die Lösung von a) ergiebt sich aus Fig. 70.)

Bemerkung. Aus je drei von einander unabhängigen Stücken läßt sich stets ein Dreieck konstruieren. Diese Stücke können sein: Seiten a, b, c, Winkel α, β, γ, Höhen h_1, h_2, h_3, Mittellinien t_1, t_2, t_3, Winkelhalbierende s_1, s_2, s_3, Radien r, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, Winkel zwischen einzelnen der genannten Linien, Abschnitte derselben u. dgl. An Stelle eines Stückes kann die Eigenschaft der Gleichschenkligkeit treten, an Stelle zweier Stücke die Eigenschaft der Gleichseitigkeit. Es giebt auch leichtere Positionsaufgaben, z. B. ein gleichseitiges Dreieck von gegebener Seite so in ein anderes zu legen, daß die Ecken des ersteren auf die Seiten des andern fallen, oder so um das andere zu legen, daß die Seiten des einen durch die Ecken des andern gehen. Statt Dreieck mag bei dieser Aufgabe auch Quadrat oder regelmäßiges Vieleck gesagt werden. Hierher gehören auch die Aufgaben, Kreise von gegebenem Radius in vorgeschriebene Lagen zu bringen. Häufig ist von Nutzen der Begriff des geometrischen Ortes, d. h. der Gesamtheit der möglichen Lagen eines Punktes, wobei es sich hier um eine Gerade oder einen Kreis handelt. Nicht alle Aufgaben sind ohne Weiteres auf dem Standpunkte der Klasse lösbar, jedoch kann der Schüler zahlreiche lösbare Aufgaben selbst ausfindig machen. Aufgaben, die, wie Nr. 123, nur durch Kunstgriffe zu lösen sind, müssen vorläufig ausgeschlossen werden.

Fig. 70.



126) **Aufgaben.** Einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen, der

a) zwei gegebene Gerade berührt,
b) eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht,
c) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
d) zwei gegebene Kreise berührt.

[127) **Aufgabe.** Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei seiner Tangenten berührt.]

128) **Aufgabe.** In wieviel Punkten schneiden sich höchstens n Gerade?

Auflösung. Die Fortsetzung der Betrachtung 85) giebt für 5 Gerade $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Schnittpunkte, für n Gerade $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$ Punkte. Wie viele sind dies? Es sei z. B. $1 + 2 + 3 + \cdot\cdot + 7 + 8 = x$, wo x die Summe bedeutet, also auch $8 + 7 + 6 + \cdot\cdot + 2 + 1 = x$, oder durch Addition: $9 + 9 + 9 + \cdot\cdot + 9 + 9 = 2x$, oder $8 \cdot 9 = 2x$, die Summe von 1 bis 8 ist also $x = \frac{8 \cdot 9}{2}$. Allgemein findet man die Summe der Zahlen von 1 bis n als das halbe Produkt aus n und der nächst größeren Zahl.

Folglich: n Gerade schneiden sich höchstens in $\frac{(n-1)n}{2}$ Punkten. (Probe an 5, 6, 7 u. s. w. Geraden.)

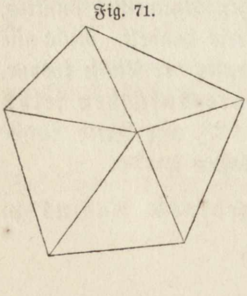
129) **Aufgabe.** Wieviel Verbindungslinien sind höchstens zwischen n Punkten möglich?

Auflösung. Höchstens $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$ Gerade. (Probe an 5, 6, 7 $\cdots$ Punkten).

Aufgabe. Wie viele Diagonalen hat höchstens das allgemeine n-Eck?

Auflösung. Die n Seiten sind von den $\frac{(n-1)n}{2}$ möglichen Verbindungslinien abzuziehen, also bleiben $\frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n}{2}\left[n - 1 - 2\right] = \frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen. (Probe am allgemeinen 4-Eck, 5-Eck, 6-Eck.)

Fig. 71.



130) **Aufgabe.** Wie groß ist die Winkelsumme des gewöhnlichen n-Ecks?

Auflösung. Das gewöhnliche n-Eck läßt sich mit Hülfe eines inneren Punktes in n

Dreiecke von der Winkelsumme $2n$ Rechte zerlegen (Fig. 71). Die Winkel um den inneren Punkt betragen zusammen 4 Rechte und sind abzuziehen. Dabei bleibt übrig die Winkelsumme $2n - 4$ Rechte oder $2(n - 2)$ Rechte. (Probe am gewöhnlichen 4-Eck, 5-Eck, 6-Eck u. s. w.)

C. Planimetrische Lehraufgabe der Tertia a.

(Secunda der Realschule).

(Dritter Jahrgang.)

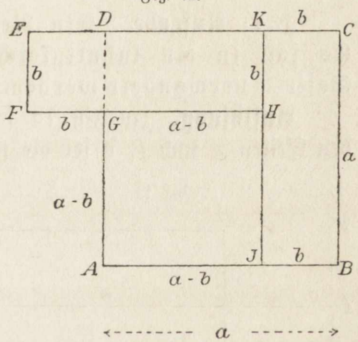
I. Von der Flächengleichheit ebener Gebilde.

131) **Satz:** Das Quadrat über der Summe zweier Seiten ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden.

Der Beweis ergiebt sich aus Fig. 43c, in der das Quadrat über $(a + b)$ in entsprechender Weise zerlegt ist. — [In arithmetischer Schreibweise lautet der Satz:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.]

Fig. 72.



132) Ebenso folgt aus Fig. 72 folgender Satz:

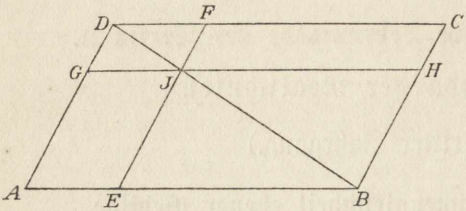
Das Quadrat über der Differenz zweier Seiten ist gleich der Summe der Quadrate über diesen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Seiten.

Beweis. Es sei $AB = a$, $IB = b$, also $AI = a - b$. Ist nun $ABCD$ das Quadrat über a und der Zusatz $DEFG$ das Quadrat über b, so braucht man nur $IK \parallel BC$ zu legen und FG bis H zu verlängern, um in $BCKI$ und $EFHK$ zwei Rechtecke zu erhalten, deren jedes die Seiten a und b hat. Zieht man diese Rechtecke von der Gesamtfigur ab, so bleibt das Quadrat $AIHG$ übrig, welches über $(a - b)$ errichtet ist. [In der Sprache der Arithmetik lautet der Satz $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.]

133) Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen zwei nicht von der Diagonale geschnittene Parallelogramme, die gleichen Flächeninhalt haben.

Beweis. In Fig. 73 sei $ABCD$ das Parallelogramm und I der Punkt der Diagonale, durch den EF und GH, die Parallelen zu den Seiten, gehen.

Fig. 73.

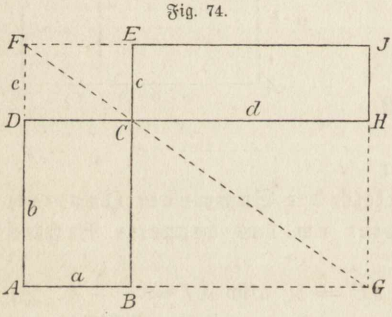


Nun ist Dreieck $ABD = \triangle BCD$. Von dem ersten ziehe man $\triangle BEI$, von dem andern das gleiche Dreieck BHI ab, sodann von dem ersteren noch $\triangle DGI$, vom andern das gleiche Dreieck DFI, dann müssen von jedem der großen Dreiecke flächengleiche Stücke übrig bleiben, so daß $AEIG = IHCF$ ist. [Man nennt die beiden Parallelogramme wohl auch Ergänzungsparallelogramme.].

134) **Aufgabe.** Ein Rechteck habe die Seiten a und b. Es soll in ein inhaltgleiches Rechteck mit der gegebenen Seite c verwandelt werden.

Auflösung. In Fig. 74 sei $ABCD$ das gegebene Rechteck mit den Seiten a und b, c sei die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks.

Fig. 74.



Man verlängere AD um $DF = c$ und ziehe FC bis zum Schnitte G mit der Verlängerung von AB, dann ist $BG = d$ die zweite Seite des gesuchten Rechtecks, welches als $CHIE$ gezeichnet ist. Der Beweis beruht darauf, daß $ABCD$ und $CHIE$ als Ergänzungsparallelogramme inhaltsgleich sind. [Arithmetisch geschrieben: es ist $ab = cd$.]

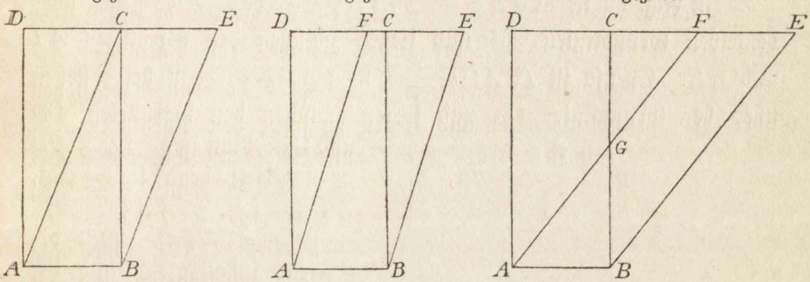
135) **Bemerkung.** Faßt man eine Seite eines Parallelogramms als Grundlinie auf, so versteht man unter Höhe des Parallelogramms den Abstand der Grundlinie von ihrer Gegenseite.

Satz. Jedes Parallelogramm ist inhaltsgleich mit einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Beweis. Die Grundlinie des Parallelogramms sei AB; über ihr zeichne man das Rechteck von derselben Höhe. Dann entsteht entweder eine Figur nach Art von Fig. 75, wo zwei Eckpunkte beider Vierecke in C zusammenfallen, oder eine Figur nach Art von 76, wo F zwischen D und C, liegt oder eine Figur nach Art von 77, wo FE außerhalb DC liegt.

In Fig. 75 ist $ABEC = \triangle ABC + \triangle BCE$, oder, da

Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77.



$\triangle BCE \cong \triangle ADC$ ist, $ABEC = \triangle ABC + \triangle ACD = ABCD$, womit der Satz für diesen Fall bewiesen ist.

In Fig. 76 ist ebenso $ABEF = ABCF + \triangle BCE = ABCF + ADF = ABCD$.

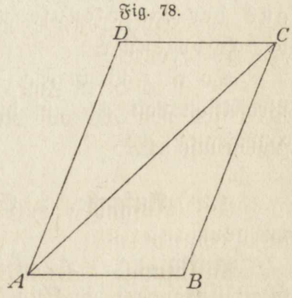
In Fig. 77 ist $ABEF = \triangle ABG + \triangle BCE - \triangle GCF = \triangle ABG + \triangle ADF - \triangle GCF = ABCD$.

[Ist g die Grundlinie und h die Höhe, so ist in der Sprache der Arithmetik $g \cdot h$ der Inhalt des Rechtecks. Folglich ist auch beim Parallelogramm $F = g \cdot h$.]

136) Folgerungen:

a) Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

Fig. 78.



Da, wie Fig. 78 zeigt, jedes Dreieck als Hälfte eines bestimmten Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe betrachtet werden kann, so folgt:

b) Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

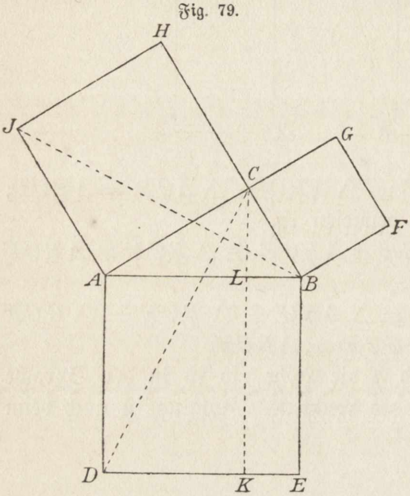
c) Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks oder Parallelogramms von derselben Grundlinie und derselben Höhe.

[Ist g die Grundlinie, h die Höhe des Dreiecks, so ist in der Sprache der Arithmetik der Inhalt des Dreiecks $F = \frac{1}{2} gh$.]

Flächengleiche Dreiecke und flächengleiche Parallelogramme über derselben Grundlinie liegen zwischen zwei parallelen Geraden.

137) Zweiter Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes. In Fig. 79 ist $\triangle JAB = \frac{1}{2} \square ACHJ$, denn beide stehen über denselben Grundlinien AJ und liegen zwischen den Parallelen AJ und BH. Ebenso ist $\triangle ACD = \frac{1}{2} \square ADKL$, denn beide stehen über der Grundlinie AD und liegen zwischen den Parallelen AD und CK. Nun ist aber $\triangle JAB \cong \triangle CAD$, denn $JA = CA$, $AB = AD$, $\sphericalangle JAB = 90^0 + \alpha = \sphericalangle CAD$. Weil die Dreiecke inhaltsgleich sind, ist nach Obigem auch $ACHJ = ADKL$. Ebenso wird auf der andern Seite gezeigt, daß $BCGF = KEBL$ ist. Folglich ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich der Summe der Rechtecke $ADKL$ und $EBKL$, d. h. gleich dem Hypotenusenquadrate.

Fig. 79.



Dabei ist noch folgender Satz gefunden:

Das Quadrat über einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

So ist z. B. in Fig. 79 $ACHJ = ALKD$, dabei ist AL die Projektion von AC auf die Hypotenuse AB, und AD ist gleich der Hypotenuse AB.

138) **Aufgabe.** a) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

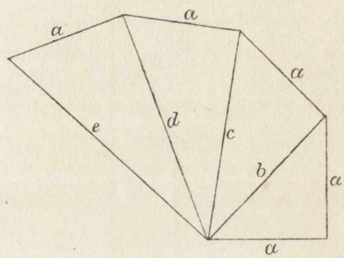
Auflösung. $ALKD$ in Fig. 79 sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kleinere Seite AL, bis $AB = AD$ wird. Über AB als Durchmesser zeichne man einen Halbkreis und verlängere KL bis zum Schnittpunkte C mit dem Halbkreise. Die Verbindungslinie CA ist dann die Seite des gesuchten Quadrates. (Der Beweis liegt in Nr. 137).)

Aufgabe b) Ein Quadrat in ein Rechteck von gegebener Seite zu verwandeln.

Aufgabe c) Ein Quadrat in ein anderes von doppelter, dreifacher, vierfacher, fünffacher u. s. w. Größe zu verwandeln.

Auflösung. Handelt es sich um a^2 in Fig. 80, so errichte man im Endpunkte von a das Lot a, dann giebt b die Grundlinie des doppelt so großen Quadrates. Setzt man an b das Lot a, so giebt c die Seite des dreifachen Quadrates u. s. w.

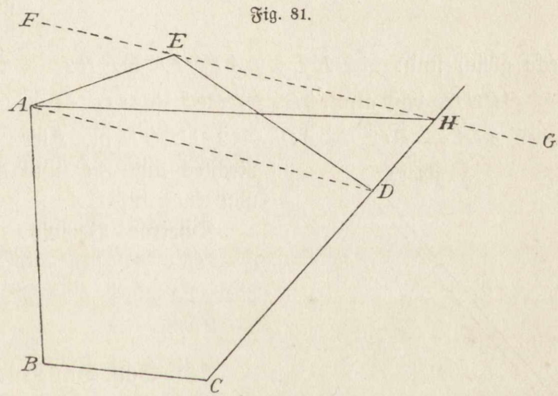
Fig. 80.



139) **Aufgabe.** Ein beliebiges Vieleck (z. B. ein Fünfeck) in ein Quadrat zu verwandeln.

Ist $ABCDE$ in Fig. 81 das gegebene Fünfeck, so schneide man durch eine Diagonale, z. B. AD, ein Dreieck ab und lege durch dessen freie Ecke E eine Parallele zu AD. Verlängert man jetzt CD bis zum Schnittpunkte H mit der Parallelen, und verbindet man H mit A, so ist Dreieck ADE durch ein gleich großes $\triangle ADH$ ersetzt, also das Fünfeck in das gleich große Viereck $ABCH$ verwandelt.

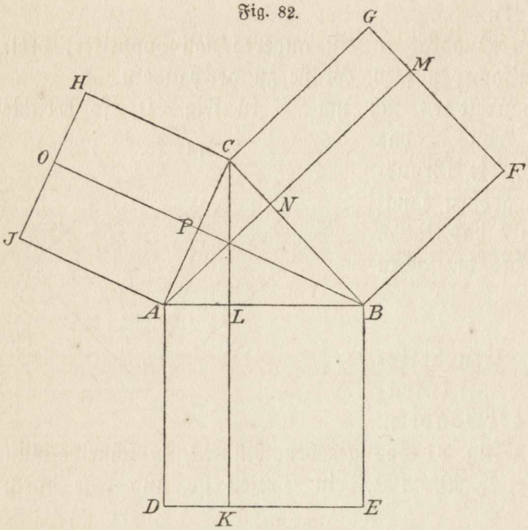
Fig. 81.



Wiederholt man diese Konstruktion am Viereck, so verwandelt man dieses in ein Dreieck. Man halbiere eine als Grundlinie betrachtete Seite dieses Dreiecks und errichte über dieser Hälfte ein Rechteck, welches mit dem Dreieck gleiche Höhe hat, also mit ihm inhaltsgleich ist. Dieses Rechteck ist schließlich in ein Quadrat zu verwandeln.

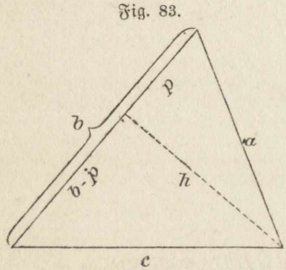
140) **Satz.** Das Quadrat über einer Dreieckseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe. (Verallgemeinerter Pythagoreischer Lehrsatz.)

Fig. 82.



Erster Beweis. Zeige an Figur 82 (wie bei dem gewöhnlichen Pythagoreischen Lehrsatze) daß folgende Rechtecke gleich sind: $ADKL = APOI$, $KEBL = FMNB$, $NMGC = CPOH$, daß also $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - (CPOH + NMGC)$, oder $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot CPOH$ ist. Hier ist aber $CPOH$ das Rechteck aus AC und der Projektion CP von CB auf CA.

Fig. 83.



Zweiter Beweis. In Fig. 86 ist $c^2 = (b-p)^2 + h^2 = b^2 - 2bp + p^2 + h^2$, oder, da $p^2 + h^2 = a^2$ ist, $c^2 = a^2 + b^2 - 2bp$.

141) **Satz.** Das Quadrat über einer Dreieckseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

Versuche den Beweis wie vorher auf zwei Arten zu führen und zu zeigen, daß jetzt $c^2 = a^2 + b^2 + 2bp$ wird.

Demnach ist in jedem Dreiecke

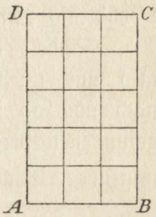
$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bp,$$

je nachdem der Seite c ein spitzer oder ein stumpfer Winkel gegenüberliegt.

II. Längen- und Flächenberechnungen an ebenen Gebilden.

142) Hat ein Rechteck Seiten, die sich verhalten wie zwei ganze Zahlen m und n, so läßt es sich in so viel Quadrate zerlegen, wie das Produkt der Zahlen angiebt, also in $m \cdot n$ Quadrate.

Fig. 84.



Beispiel: Ist $AB : BC = 3 : 5$, so handelt es sich um $3 \cdot 5 = 15$ Quadrate. Dies war schon früher gezeigt. Es fragt sich jedoch, ob die Einteilung in Quadrate stets möglich ist.

143) Verhalten sich die Rechtecksseiten wie zwei gebrochene Zahlen, so lassen sich diese gleichnamig machen, und die Zähler geben ein ganzzahliges Verhältnis. Das Produkt der neuen Zahlen giebt die Anzahl der Quadrate.

Beispiel: Ist $AB : BC = \frac{3}{5} : \frac{7}{6}$, so ist auch $AB : BC = \frac{18}{30} : \frac{35}{30} = 18 : 35$. Das Rechteck läßt sich also in $18 \cdot 35$ Quadrate einteilen. (Bisweilen ist noch ein Kürzen des Verhältnisses möglich.)

Sind die gebrochenen Zahlen geschlossene Dezimalbrüche, ist z. B. $AB : BC = 1{,}23 : 2{,}156$, so ist das ganzzahlige Verhältnis $1230 : 2156$. Es kann noch in $615 : 1078$ gekürzt werden. Die Zahl der Quadrate ist $615 \cdot 1078$.

144) Verhalten sich die Rechtecksseiten so, daß im Verhältnisse ein oder zwei endlose Dezimalbrüche vorkommen, so verwandelt man diese in gewöhnliche Brüche nnd verfährt wie vorher.

Beispiel: Das Verhältnis sei $2 : 5{,}23\,8154\,8154\,8154\ldots\ldots$ Man setze den Dezimalbruch gleich x, so daß

$$1\,000\,000\,x = 5\,238\,154{,}8154\,8154\ldots\ldots, \text{ und}$$
$$100\,x = 523{,}8154\,8154\ldots\ldots, \text{ also durch}$$

Subtraktion $999\,900\,x = 5\,237\,631{,}0000\,0000\ldots\ldots$, und demnach der Dezimalbruch $x = \frac{5\,237\,631}{999\,900}$ ist.*) Jetzt ist das Verhältnis

---

*) Merke folgende kurz gefaßte Regel: Schreibe die Zahl bis zum Schluß der ersten Periode, sodann die Zahl bis zum Schluß der Vorperiode, ziehe diese von der ersteren ab und dividiere den Rest durch eine Zahl, die so oft die Ziffer 9 hat, als die Periode Stellen zählt, und so oft die Ziffer 0, als die Vorperiode Stellen hat. Dieser Bruch ist der Wert des periodischen Dezimalbruchs in gewöhnlichen Zahlen.

$2 : \frac{5\,237\,631}{999\,900}$, oder $1\,999\,800 : 5\,237\,631$. Die Zahl der Quadrate ist demnach das Produkt der beiden letzten Zahlen.

In allen diesen Fällen war das Verhältnis in ein ganzzahliges zu verwandeln, und die Quadratteilung war theoretisch möglich. Solche Verhältnisse nennt man rationale Verhältnisse.

[145) Ist jedoch die eine von beiden Zahlen ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, so wird die Verwandlung in ein ganzzahliges Verhältnis unmöglich.

Handelt es sich z. B. um das Verhältnis $AB : BC = 1 : \pi$, also um $1 : 3{,}14\,159\,265\,358\,979 \ldots\ldots$, wo der Dezimalbruch nach noch so vielen Stellen keine Periode zeigt, so würde nach der gefundenen Regel, da die Periode gewissermaßen unendlich lang ist, folgender Bruch entstehen $x = \frac{314\,159\,265 \ldots.}{99\,999\,999 \ldots.}$, was dasselbe ist, wie $x = \frac{314\,159\,265 \ldots.}{100\,000\,000 \ldots.}$, wobei jedoch sowohl der Zähler, als auch der Nenner unendlich viele Stellen hat. In diesem Falle würde auch die Anzahl der Quadrate unendlich groß werden, die Seiten der Quadrate also unendlich klein. Ein solches, nicht mehr ganzzahlig darstellbares Verhältnis heißt ein irrationales Verhältnis. Die Seiten AB und BC haben dann kein gemeinschaftliches Maß von endlicher Größe und heißen daher incommensurabel. In solchen Fällen begnügt man sich mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen, je nach der Genauigkeit, die man wünscht. So kann man statt $1 : \pi$ sagen $100 : 314$, oder $1\,000\,000 : 3\,141\,593$, oder $1\,000\,000\,000 : 3\,141\,592\,654$ u. s. w. Je mehr Stellen man nimmt, mit um so größerer Genauigkeit hat man die Quadratteilung erzielt und in dem Produkte die Anzahl der Quadrate erhalten. Selbst bei Meter-Einheiten genügen schon 6 Stellen hinter dem Dezimalkomma, um den Fehler für die eine Seite kleiner als $\frac{1}{1000}$ Millimeter, also „mikroskopisch klein" zu machen.]

146) Nimmt man die Quadratseite als Einheit des Längenmaßes an, so giebt das Produkt der Maßzahlen beider Rechtecksseiten die Anzahl der Flächeneinheiten an, und abgekürzt sagt man (auch bei irrationalem Verhältnis):

Der Inhalt des Rechtecks ist Grundlinie mal Höhe, d. h $F = a \cdot h$.*)

*) Da zu jeder Fläche ein Quadrat gleichen Inhalts gehört, dessen Seite man f bezeichnen kann, dessen Inhalt also f^2 ist, so schreiben manche statt unserer Formel $f^2 = ah$ und deuten damit an, daß der Ausdruck zweidimensional ist. Ebenso bezeichnen sie den Körperinhalt I mit i^3, weil derselbe dreidimensional ist.

Für rationales Verhältnis ist dieser Satz mit voller Strenge, für irrationales Verhältnis mit beliebig großer Genauigkeit bewiesen.

147) So ergeben sich im Anschluß an das Frühere folgende Formeln:

a) Das Rechteck mit Grundlinie a und Höhe h hat die Fläche $F = ah$.

b) Das Quadrat mit Grundlinie a (und Höhe a) hat die Fläche $F = a^2$.

Umkehrung: Das Quadrat von Fläche F hat die Seite $a = \sqrt{F}$.

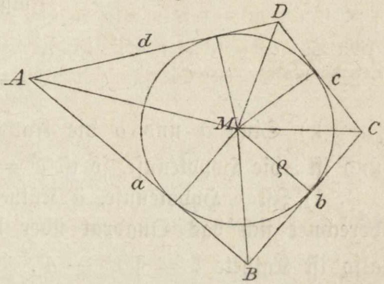
c) Das Parallelogramm mit Grundlinie a und Höhe h hat die Fläche $F = a \cdot h$.

d) Das Dreieck mit Grundlinie a und Höhe h hat die Fläche $F = \frac{ah}{2}$.

e) Das Trapez mit den Parallelseiten a und b und der Höhe h hat die Fläche $F = \frac{a+b}{2} \cdot h$ [denn es ist so groß wie ein Parallelogramm mit Grundlinie $\frac{a+b}{2}$ und Höhe h, vergl. 97].

f) Ist der Umfang eines Tangentenvielecks gleich u und der Radius des In-Kreises gleich ϱ, so ist die Fläche des Vielecks $F = \frac{u\varrho}{2}$.

Fig. 85.



[Beweis am Beispiele der Fig. 85.

$\triangle ABM = \frac{a\varrho}{2}$, $\triangle BCM = \frac{b\varrho}{2}$,

$\triangle CDM = \frac{c\varrho}{2}$, $\triangle DAM = \frac{d\varrho}{2}$,

folglich durch Addition:

Gesamtfläche $= \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} + \frac{d\varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a+b+c+d) = \frac{u\varrho}{2}$.]

Dies gilt insbesondere von regelmäßigen Vielecken, denen sich stets ein Kreis einbeschreiben läßt.

[g) Der Kreis mit Radius r hat die Fläche $F = r^2\pi$.

Beweis. Der Umfang des Kreises, den man als regelmäßiges Vieleck mit von unendlicher Seitenzahl und Radius $\varrho = r$ betrachten kann, ist nach 53) $u = 2r\pi$. Folglich ist $F = u\frac{r}{2} = 2r\pi\frac{r}{2} = r^2\pi$. Ist $r = 1$, so ist $F = \pi$. Also bedeutet π auch den Inhalt eines Kreises mit Radius 1.

h) Der Kreissektor vom Centriwinkel α^0 und dem Radius r hat die Fläche $F = r^2\pi\frac{\alpha}{360}$. Sein Bogen ist $s = 2r\pi\frac{\alpha}{360} = r\pi\frac{\alpha}{180}$.

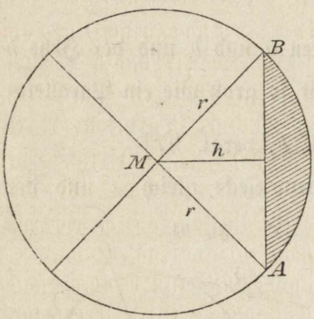
Beweis: Es verhält sich, wie aus Figur 86 zu ersehen ist, Sektorfläche: Kreisfläche $= \alpha^0 : 360^0 = \alpha : 360$, oder $F : r^2\pi = \alpha : 360$, also ist $F = r^2\pi\frac{\alpha}{360}$.

Ebenso verhält sich Bogen : Kreisumfang $= \alpha : 360$, oder $s : 2r\pi = \alpha : 360$, d. h. $s = 2r\pi\frac{\alpha}{360}$.

i) Segment = Sektor — Dreieck.

Beispiel: In Figur 86 handelt es sich um den zum Centriwinkel 90^0 gehörigen Sektor und das entsprechende Segment. Hier ist

Fig. 86.



$$\text{Sektor } ABM = r^2\pi \cdot \frac{90}{360} = \frac{r^2\pi}{4}.$$

Das Dreieck MAB würde allgemein aus Grundlinie AB und Höhe h zu berechnen sein, hier aber ist Grundlinie r und Höhe r bequemer und giebt $r \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{2}$. Folglich:

$$\text{Segment} = \text{Sektor} - \text{Dreieck}$$
$$= \frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = ?]$$

k) Sind a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und ist c die Hypotenuse, so ist $c^2 = a^2 + b^2$, folglich $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

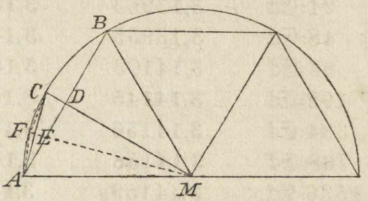
l) Ist c Hypotenuse, a Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, so berechnet sich das Quadrat über der Kathete b aus $b^2 = c^2 - a^2$, also ist Kathete $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

[148) **Aufgabe.** Die Zahl π mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.*)

*) Abschnitt 148 kann überschlagen werden, wenn das Ausziehen von Quadratwurzeln nicht vorher in der Arithmetik geübt war. Ist letzteres der Fall, so empfiehlt sich die Durchnahme der ganz elementaren, wenn auch umständlichen Berechnung, damit möglichst schnell Übungsmaterial für Berechnungen von praktischem Werte auf Grund der sicheren Kenntnis der Zahl π zur Verwendung gelangen kann. Die gegebene Tabelle soll natürlich nicht vollständig in den Unterrichtsstunden nachgerechnet werden. Kürzere Berechnungsarten giebt es, jedoch sind dieselben nicht für den angenommenen elementaren Standpunkt geeignet.

Auflösung. In Fig. 87 sei der Radius des Halbkreises gleich 1. Da sich der Radius dreimal als Sehne eintragen läßt, ist zunächst die Halbkreislinie größer als **3.** Man halbiere den Bogen AB in C. Dann ist $AD = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, folglich $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2}$ $= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich ist $CD = MC - MD$ $= 1 - \sqrt{\frac{3}{4}}$. Folglich

Fig. 87.



$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \left(1 + \tfrac{3}{4} - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\right)}$$
$$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Hier ist $\sqrt{3} = 1{,}732051$, $2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$, also $AC = \sqrt{0{,}267949} = 0{,}5176380$. Der halbe Umfang des regelmäßigen 12-Ecks ist das 6-fache davon, d. h. **3,105828.** Dies ist schon ein besserer Näherungswert für π als 3.

Jetzt halbiert man den Bogen AC in F, die Sehne AC in E. Dann ist

$$AE = \tfrac{1}{2} AC = 0{,}2588190,$$
$$EM = \sqrt{AM^2 - AE^2} = \sqrt{1 - AE^2},$$
$$FE = 1 - EM = 1 - \sqrt{1 - AE^2};$$

folglich

$$AF = \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{AE^2 + \left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{AE^2 + 1 + 1 - AE^2 - 2\sqrt{1 - AE^2}} = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - AE^2}\right)}.$$

Hier ist $$AE^2 = 0{,}06698728,$$

also $1 - AE^2 = 0{,}9330127$ und $AF = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{0{,}9330127}\right)}$, oder da $\sqrt{0{,}9330127} = 0{,}9659258$ ist, $AF = \sqrt{2 \cdot 0{,}0340742}$
$$= \sqrt{0{,}0681484} = 0{,}2610525.$$

Der halbe Umfang ist des 24-Ecks das 12-fache davon, oder **3,132630,** was ein dritter Annäherungswert für π ist.

So fortfahrend und dieselbe Rechnung für das umbeschriebene 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck u. s. w. durchführend, gelangt man auf folgende Tabelle für den halben Umfang dieser Vielecke:

	Einbeschrieben,	Umbeschrieben.	Folglich:
6=Eck	3,00000	3,46410	$3 < \pi < 3,4\ldots$
12=Eck	3,10583	3,21539	$3,1 < \pi < 3,2$
24=Eck	3,13263	3,15966	$3,13 < \pi < 3,15$
48=Eck	3,13935	3,14609	$3,139 < \pi < 3,146$
96=Eck	3,14103	3,14271	$3,1410 < \pi < 3,142$
192=Eck	3,14145	3,14187	$3,1414 < \pi < 3,1418$
384=Eck	3,14156	3,14166	$3,14156 < \pi < 3,14166$
768=Eck	3,14158	3,14161	$3,14158 < \pi < 3,14161$
1536=Eck	3,14159	3,14160	$3,14159 < \pi < 3,14160$

Archimedes, geb. 287 v. Chr. zu Syrakus, fand für π den zu großen Näherungswert $\frac{22}{7}$, den wir 3,1428 ··· schreiben würden. Ludolf van Ceulen, von Geburt ein Deutscher, berechnete π auf 35 Dezimalstellen. Lambert, ebenfalls ein Deutscher, bewies, daß π eine Irrationalzahl ist. In neuester Zeit bewies Lindemann, daß π zu den transcendenten Irrationalzahlen gehört, nicht zu den algebraischen, aus der Wurzelausziehung hervorgehenden, wie etwa $\sqrt{2}$.*) Damit ist zugleich nachgewiesen, daß weder der Umfang, noch der Inhalt eines Kreises von gegebenem Radius mit Zirkel und Lineal genau konstruiert werden kann. Annäherungskonstruktionen giebt es in größerer Zahl. Die Resultate von Lambert und Lindemann sind weit wichtiger als die Fortsetzung der auf bereits 700 Dezimalstellen durchgeführten Berechnung von π.]

149) Zu 147f) ist Folgendes zu bemerken:

Ist ϱ der Ankreis eines Tangentenvierecks, welches den Kreis mit c und d unmittelbar berührt, dagegen mit a und b vermittels der Verlängerungen, so ist die Fläche des Vierecks $F = \varrho \dfrac{a + b - c - d}{2}$.

Zum Beweise verbinde man die Ecken mit dem Kreiscentrum, addiere die so über a und b stehenden Dreiecke und ziehe die über c und d stehenden ab. Entsprechend lautet der Satz für anbeschriebene Vielecke von beliebiger Seitenzahl. Für das Dreieck erhält man im Ganzen folgende Formeln:

$$F = \varrho \frac{a + b + c}{2} = \varrho_1 \cdot \frac{-a + b + c}{2} = \varrho_2 \cdot \frac{a - b + c}{2} = \varrho_3 \frac{a + b - c}{2},$$

oder, in den Bezeichnungen von 119 und 120:

$$F = p \cdot \varrho = p_1 \varrho_1 = p_2 \varrho_2 = p_3 \varrho_3.$$

---

*) Diese historische Bemerkung wird hier nur gemacht, um ein für alle mal die Unmöglichkeit der genauen Konstruktion von π auszusprechen.

Aus dieser Beziehung folgen merkwürdige Sätze. Wie lautet der Vierecksatz bei anbeschriebenen Vierecken, die mit keiner Seite unmittelbar berühren?

150) Als Übungsstoff sei Folgendes angegeben: Wie groß ist der Inhalt des regelmäßigen 3-, 6-, 12-Ecks oder des regelmäßigen 4-, 8-, 16-Ecks u. s. w. je nachdem die Seite a, oder der Radius r, oder der Radius ϱ gegeben ist. Dadurch erhält man zugleich die zugehörigen Segmentflächen. Für die Übungen im praktischen Rechnen benutze man schon jetzt den Satz der Stereometrie, daß gerade Säulen bezw. Cylinder von beliebig gestalteter Grundfläche der Formel $I = Gh$ (d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe) gehorchen. Die Multiplikation des Inhalts mit dem spezifischen Gewichte der Masse giebt dann das Gewicht des Körpers. Die Grundflächen können Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze, regelmäßige Vielecke, Kreise, Sektoren und Segmente sein.

Beispiel. Wieviel wiegt die Schraubenwelle eines Kriegsdampfers auf das laufende Meter bei 0,5 m Durchmesser und dem spezifischen Gewichte 7,7 des Materials?

Auflösung. $r^2\pi \cdot l \cdot 7{,}7 = 0{,}25 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 7{,}7 = \frac{7{,}7\pi}{4}$ Tonnen $= ?$ kg.

Die Aufgaben können auch so gestellt werden, daß der Flächeninhalt gegeben ist, und daß Seiten, Radien u. s. w. berechnet werden sollen. Ebenso kann bei gegebenem Körperinhalte das Entsprechende berechnet werden.

Beispiel. Wie groß muß der Radius eines Kreises sein, wenn seine Fläche 1 qm sein soll?

Auflösung. Aus $r^2\pi = 1$ folgt $r^2 = \frac{1}{\pi}$ und $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

Beispiel. Ein cylindrisches Gefäß soll 1 cbm fassen und dabei sollen Durchmesser und Höhe übereinstimmen. Wie sind letztere zu nehmen?

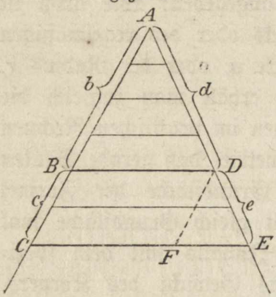
Auflösung. $I = G \cdot h = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$ soll gleich 1 sein. Es folgt $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

III. Von der Ähnlichkeit ebener Gebilde.

151) Werden die Schenkel eines Winkels (oder ihre Verlängerungen über den Scheitel hinaus) durch zwei Parallele geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte des einen wie die des andern.

Beweis. In Fig. 88 mögen die Teile AB und BC ein rationales Verhältnis haben. Man verwandle dasselbe (wie in Abschnitt 143 und 144) in ein ganzzahliges Verhältnis $m:n$. Jetzt denke man sich AB in m, BC in n gleiche Teile eingeteilt. Durch die Teilpunkte lege man Parallele zu den beiden gegebenen Parallelen BD und CE. Dadurch wird (nach 98) AD in m, DE in n gleiche Teile eingeteilt, und damit gezeigt, daß sich AD zu DE ebenfalls wie $m:n$ verhält. Die Teile von AD und DE sind nämlich von derselben Größe.

Fig. 88.



Ist das Verhältnis ein irrationales, wie z. B. $1:\pi$, so führt man den Nachweis mit beliebiger Genauigkeit, indem man statt des endlosen Bruches π den auf beliebig viele Stellen abgekürzten Dezimalbruch nimmt, wobei der Fehler verschwindend klein gemacht werden kann.

152) Ist das Verhältnis zweier Größen gleich dem Verhältnisse zweier andern, so sagt man, die Größen stehen in Proportion oder seien einander proportioniert. In Fig. 88 finden folgende Proportionen statt:

a) $AB:BC = AD:DE$ oder $b:c = d:e$,

b) $AB:AC = AD:AE$ oder $b:b+c = d:d+e$,

c) $AC:BC = AE:DE$ oder $b+c:c = d+e:e$.

Jede kann nach Art von 151 bewiesen werden.*) Man schließt daraus: Besteht die Proportion $b:c = d:e$, so besteht auch die Proportion d) $(b+c):(d+e) = b:d$. Setzt man $b+c = k$, und $d+e = l$, so lautet die Proportion c) $k:c = l:e$. Proportion a) lautet dann $(k-c):c = (l-d):e$ oder $(k-c):(l-d) = c:e$. Allgemein folgt:

Ist $m:n = m_1:n_1$, so ist auch $(m+n):(m_1+n_1) = m:m_1$, ferner ist auch $(m-n):(m_1-n_1) = m:m_1$, folglich auch $(m+n):(m-n) = (m_1+n_1):(m_1-n_1)$. (Mache die Probe, ob die Produkte der äußeren und inneren Glieder gleich sind, und versuche den Satz in Worten auszudrücken.)

Außerdem folgt aus Figur 88 folgender Satz.

*) Die Möglichkeit der verschiedenen Umstellungen jeder Proportion wird als bekannt vorausgesetzt. Im andern Falle ist zu zeigen, daß aus $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ folgt: $be = cd$, d. h. daß das Produkt der innern Glieder gleich dem der äußern ist. Alle Umstellungen haben so zu erfolgen, daß b und e beide innen, oder beide außen stehen.

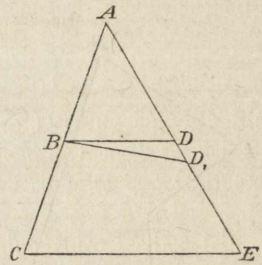
153) Werden die Schenkel eines Winkels (oder ihre Verlängerungen) von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelen (von Schenkel zu gemessen) wie die Abschnitte jedes Schenkels (vom Scheitel aus gemessen).

Zum Beweise ziehe man in Fig. 88 $DF \parallel AC$, dann ist nach vorigem Satze $CF : CE = AD : AE$, oder, da $CF = BD$ ist, $BD : CE = AD : AE$, also auch $BD : CE = AB : AC$.

154) Umkehrung: Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Geraden so geschnitten, daß die Abschnitte des einen Schenkels sich so verhalten, wie die des andern, so sind die Geraden parallel.

Beweis. In Figur 89 sei $AB : AC = AD : AE$. Angenommen BD wäre nicht parallel zu CE, so ließe sich eine Linie BD parallel zu CE ziehen. Dann würde $AB : AC = AD_1 : AE$ sein, d. h. die gleichnamigen Brüche $\frac{AD}{AE}$ und $\frac{AD_1}{AE}$ würden beide gleich $\frac{AB}{AC}$ sein, obwohl der Zähler AD_1 verschieden vom Zähler AD ist. Dies ist aber unmöglich, also ist die Annahme, BD sei nicht parallel zu CE, falsch.

Fig. 89.

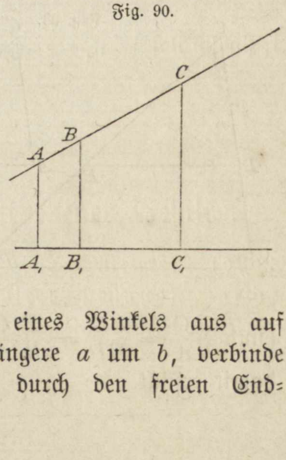


Bemerkung. Für jede Art von Parallelprojektion (schräge oder gerade) folgt aus 151):

Die Verhältnisse zweier Abschnitte einer Geraden sind gleich den Verhältnissen der entsprechenden Abschnitte auf der Projektion der Geraden, oder: Bei der Parallelprojektion gehen die Verhältnisse auf jeder Geraden ungeändert auf die Projektion über.

So ist zum Beispiel in Fig. 90: $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$. (Lege zum Beweise durch A_1 eine Parallele zu AC.) Dasselbe gilt von den Projektionen paralleler Geraden auf eine andere Gerade.

Fig. 90.



155) **Aufgabe.** Zu drei gegebenen Geraden a, b, c die vierte Proportionale x zu konstruieren.

Auflösung. Schneide vom Scheitel eines Winkels aus auf dessen Schenkeln a bezw. c ab und verlängere a um b, verbinde die Endpunkte von a und c und lege durch den freien End-

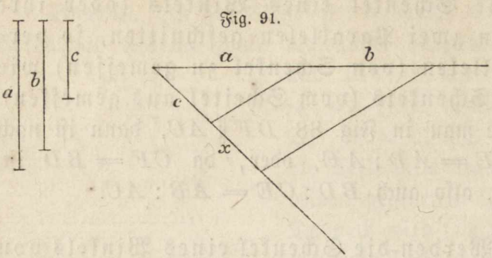


Fig. 91.

punkt von b eine Parallele zur Verbindungslinie. Diese schneidet das gesuchte Stück x ab. (Warum?)

156) Stimmen zwei Vielecke in allen Winkeln und in den Verhältnissen je zweier aufeinander folgenden Seiten überein, so sagt man, sie seien einander ähnlich ($\sim$).

Ist z. B. in Fig. 92 $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, u. s. w. und ist $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, $\frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1}$ u. s. w., so sind sie ähnlich, und das eine ist die gesetzmäßige Vergrößerung bezw. Verkleinerung des andern.

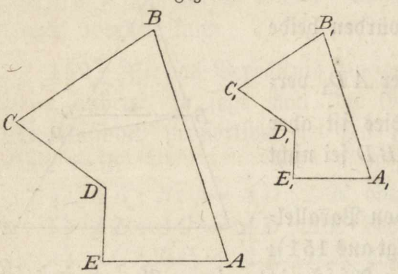


Fig. 92.

157) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Winkel und im Verhältnis der einschließenden Seiten. (Erster Ähnlichkeitssatz.)

Beweis. In Fig. 93 sei $\gamma = \gamma_1$ und $\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$. Man lege das kleinere Dreieck so auf das größere, daß γ_1 auf γ fällt und die entsprechenden Schenkel auf einander fallen. Dabei gelangt A_1B_1 in eine Lage DE. Da nun $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}$, so ist $DE \parallel AB$, folglich $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle CDE = \sphericalangle \alpha_1$ und $\sphericalangle \beta = \sphericalangle CED = \sphericalangle \beta_1$. Außerdem ist

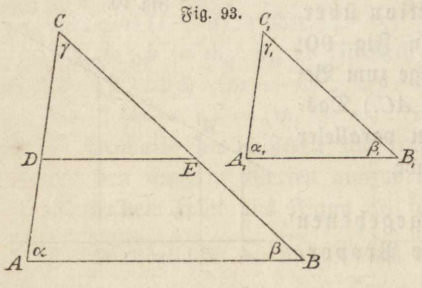


Fig. 93.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DE} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$$

$\left(\text{und } \frac{BC}{BA} = \frac{EC}{ED} = \frac{B_1C_1}{B_1A_1}\right)$. Die Forderungen der Ähnlichkeit sind damit erfüllt.

158) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. (Zweiter Ähnlichkeitssatz.).

Beweis. In Fig. 93 sei $\gamma = \gamma_1$ und $\alpha = \alpha_1$, so daß von selbst $\beta = \beta_1$ ist. Legt man das kleinere Dreieck so auf das größere, daß $\sphericalangle \gamma_1$ mit den entsprechenden Schenkeln auf γ fällt, so gelangt A_1B_1 in eine Lage DE, und da $\alpha_1 = \alpha$ ist, so wird $DE \parallel AB$. Folglich wird $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$, $\frac{BC}{CA} = \frac{EC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1}$ $\left(\text{und } \frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DE} = \frac{C_1A_1}{A_1B_1}\right)$. Den Forderungen der Ähnlichkeit ist also genügt.

159) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse des einen mit zwei Seitenverhältnissen des andern übereinstimmen. (Dritter Ähnlichkeitssatz.)

Beweis. In Fig. 93 sei $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ und $\frac{BC}{CA} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1}$. Multipliziert man die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen, so hebt sich links BC, rechts B_1C_1, und es bleibt stehen $\frac{AB}{CA} = \frac{A_1B_1}{C_1A_1}$. Dieses dritte Verhältnis ist also eine Folge der beiden andern. Man mache jetzt $CD = C_1A_1$ und $CE = C_1B_1$ und verbinde D mit E. Dann ist der gleichen Verhältnisse wegen $DE \parallel AB$ und $\triangle DEC$, wie in den früheren Fällen, ähnlich $\triangle ABC$. Folglich ist $\frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ und $DE = \frac{EC \cdot AB}{BC}$. Es war aber $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{AB}{BC}$, also ist $A_1B_1 = \frac{B_1C_1 \cdot AB}{BC}$ $= \frac{EC \cdot AB}{BC} = DE$. Folglich ist das Hülfsdreieck $CDE \cong A_1B_1C_1$ (3. Kongruenzsatz) und daher auch $A_1B_1C_1 \sim ABC$.

160) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Seitenverhältnis und in dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel. (Vierter Ähnlichkeitssatz.)

Beweis. In Fig. 93 sei $BC > CA$, $\frac{BC}{CA} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1}$ und $\sphericalangle \alpha = \alpha_1$.

Man mache $CD = C_1A_1$ und $CE = C_1B_1$, dann ist wegen der gleichen Verhältnisse $DE \parallel AB$ und $\triangle CDE \sim \triangle CAB$. Es ist also $\sphericalangle CDE = \alpha$, und da $\alpha = \alpha_1$ ist, auch $\sphericalangle CDE = \alpha_1$. Folglich ist $\triangle CDE \cong \triangle C_1A_1B_1$ (4. Kongruenzsatz) und daher auch $\triangle CAB \sim \triangle C_1A_1B_1$.

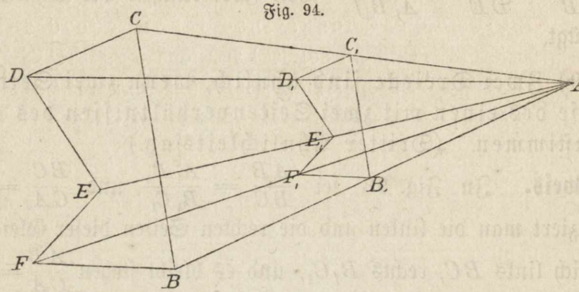
161) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in einem Seitenverhältnis und in dem der kleineren

Seite gegenüberliegenden Winkel, und wenn der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichartig ist (in beiden spitz, oder in beiden stumpf). (5. Ähnlichkeitssatz.)

Beweis wie vorher, nur wird die Kongruenz des Hilfsdreiecks mit dem kleineren der gegebenen Dreiecke nach dem fünften Kongruenzsatze bewiesen.

Bemerkung. Wird die letztgenannte Bedingung unterlassen, so treten die beim fünften Kongruenzsatze besprochenen beiden Möglichkeiten ein.

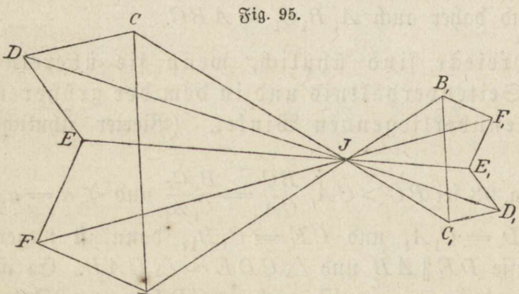
Fig. 94.



162) **Aufgabe.** Zu einem gegebenen Vieleck ein ähnliches in vorgeschriebenem Maßstabe zu zeichnen (z. B. Verkleinerung der Seiten auf $\frac{1}{2}$ der gegebenen.)

Auflösung. Verbinde die Eckpunkte des gegeben Vielecks $BCDEF$ in Fig. 94 mit einem beliebigen Punkte A. Darauf mache $AB_1 = \frac{1}{2} AB$, ziehe $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, $D_1E_1 \parallel DE$, $E_1F_1 \parallel EF$, und verbinde F_1 mit B_1, dann ist $B_1C_1D_1E_1F_1B_1$ das gesuchte Vieleck. (Warum?)

Fig. 95.



Bemerkung. Man nennt A den äußeren Ähnlichkeitspunkt der beiden ähnlichen und in ähnlicher Lage befindlichen Vielecke.

Für beide Vielecke ist noch eine zweite Lage möglich, wie aus der folgenden anderen Konstruktion hervorgeht.

Man verbinde sämtliche Ecken des gegebenen Vielecks $BCDEF$ (Fig. 95) mit einem beliebigen Punkte I, verlängere jede der Verbindungslinien über I hinaus, mache die Verlängerung $IB_1 = \frac{1}{2} BI$, ziehe $B_1C_1 \parallel CB$, $C_1D_1 \parallel DC$, $D_1E_1 \parallel ED$ und verbinde E_1 mit F_1, dann ist $B_1C_1D_1E_1F_1$ das gesuchte Vieleck (warum?), jedoch gegen das andere um 180^0 gedreht.

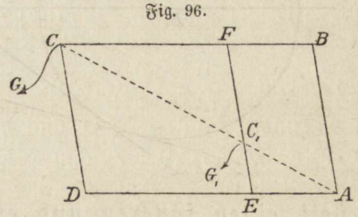
Man nennt I denn inneren Ähnlichkeitspunkt der ähnlichen und entgegengesetzt ähnlich liegenden Vielecke.

Ähnliche Vielecke lassen sich stets in ähnliche oder in entgegengesetzt ähnliche Lagen bringen. Eine solche Lage ist erreicht, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämtlich durch einen Punkt gehen. Beide Arten von ähnlichen Lagen faßt man zusammen unter dem Namen perspektivische Lage. Denkt man sich nämlich in Fig. 97 das Auge nach A versetzt, so liegt jeder Punkt des größeren Vielecks genau hinter dem entsprechenden des kleineren. Es handelt sich also um eine Projektion vom Centrum A aus, d. h. um eine Centralprojektion (im Gegensatz zur Parallelprojektion). In Fig. 95 geschieht das Projizieren dadurch, daß jeder Strahl rückwärts verlängert wird. Auch bei I handelt es sich um eine Centralprojektion.

163) Auf diesen Beziehungen beruht ein Teil der Lehre von der Centralperspektive, und auch sämtliche Verkleinerungs- und Vergrößerungsmechanismen, die unter dem Namen Storchschnabel in der Industrie und im Kunstgewerbe vielfache Anwendung finden, gründen sich auf die Lehre von der ähnlichen Lage ähnlicher Gebilde.

In Fig. 96 z. B. ist ein gelenkiges Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet und die gleichfalls eingelenkte Parallele EF so gelegt, daß $AE = \frac{1}{3} AD$ (und $BF = \frac{1}{3} BC$) ist. Bringt man nun den Zeichenstift in C_1 an, wobei $EC_1 = \frac{1}{3} EF$ sein soll, so liegt C_1 stets auf AC und es ist $AC_1 = \frac{1}{3} AC$, wie man auch das Parallelogramm in sich bewege. Wird nun A auf der Unterlage befestigt, und läßt man C einen vorgeschriebenen Weg zurücklegen, so bewegt sich der Stift C_1 auf ähnlichem und ähnlich liegendem Wege, d. h. er giebt die entsprechende Zeichnung in $\frac{1}{3}$ des Maßstabs. So erkennt man die Möglichkeit von Mechanismen, die gesetzmäßige Vergrößerung oder Verkleinerung bewerkstelligen sollen.

Fig. 96.



164) **In ähnlichen Gebilden sind homologe Linien unter einander proportional, und homologe Winkel gleich.**

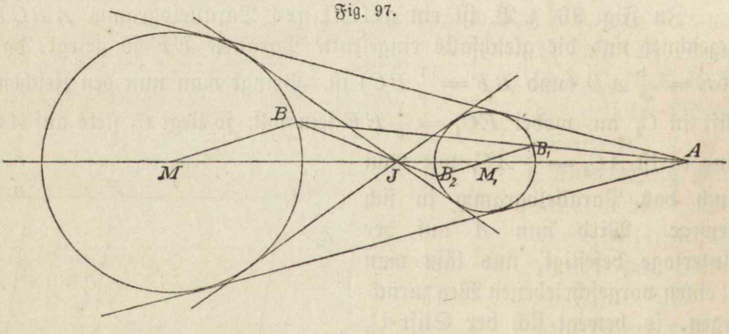
In ähnlichen Dreiecken z. B. verhalten sich homologe Höhen wie homologe Seiten, ebenso ist es mit homologen Mittellinien, Mittel-Senkrechten, Winkelhalbierenden, mit den Radien des Um-Kreises, des In-Kreises, der homologen An-Kreise. Sämtliche von homologen Linien dieser Arten gebildeten Winkel sind gleich. (Führe den Beweis an Beispielen.)

165) **In ähnlichen Gebilden sind homologe Flächenstücke proportional den Quadraten homologer Seiten.**

Wäre z. B. das eine Gebilde im 3. Teile des Maßstabs gezeichnet, und denkt man sich zwei homologe Flächenteile in Quadrate verwandelt, so hat das kleinere Quadrat Seiten von $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge des größeren Quadrates, die Inhalte verhalten sich also wie $1:9$. Ebenso ist bei $\frac{1}{n}$ Maßstab das Verhältnis homologer Flächenstücke $= \frac{1}{n^2}$. Zugleich ist damit gezeigt, daß homologe Flächenstücke ähnlicher Figuren unter einander proportional sind.

166) **Regelmäßige Vielecke derselben Seitenzahl sind einander ähnlich.** Folglich sind auch Kreise einander ähnlich. Kreise in derselben Ebene befinden sich stets in ähnlicher und zugleich in entgegengesetzt ähnlicher Lage. Folglich: **Zwei Kreise haben**

Fig. 97.

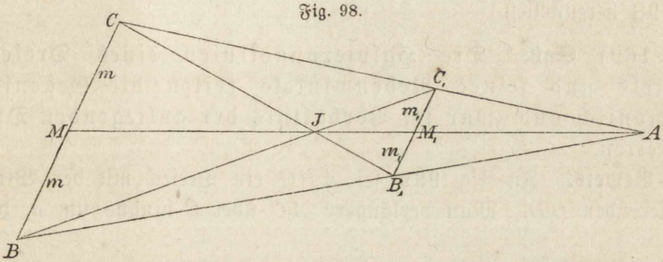


stets einen inneren und einen äußeren Ähnlichkeitspunkt. (Fig. 97.) Diese Punkte werden, wenn die Kreise auseinander liegen, durch die gemeinschaftlichen Tangenten bestimmt (vgl. 124). Für alle Lagen findet man A und I folgendermaßen. Zieht man parallele und gleichgerichtete Radien MB und M_1B_1, so schneidet BB_1 die Centrale im

Ähnlichkeitspunkte A. Zieht man dagegen die Radien MB und M_1B_2 entgegengesetzt parallel, so giebt BB_2 auf der Centrale den Punkt I.

167) Auch zwei parallele Gerade haben stets zwei Ähnlichkeitspunkte A und I, die durch Verbindung der gleichliegenden und der entgegengesetzt liegenden Punkte gefunden werden. (Vgl. Fig. 98.) A und I liegen auf der Verbindungslinie der Halbierungspunkte der Parallelen, denn die letzteren lassen sich als Durchmesser von Kreisen betrachten. (Vgl. Fig. 97.) Ist BC in lauter gleiche Teile geteilt, und verbindet

Fig. 98.



man die Teilpunkte mit A oder I, so wird auch B_1C_1 in gleiche Teile geteilt. Teilt man BC in beliebigem Verhältnis, so wird durch dieselben Verbindungslinien auch B_1C_1 (oder C_1B_1) in demselben Verhältnis geteilt. Folglich: **Bei der Centralprojektion einer Geraden auf eine parallele Gerade werden alle Teilungsverhältnisse der einen unverändert auf die andere übertragen.** (Wichtig für die Perspektive.)

168) **Aufgabe.** Eine Gerade MM_1 im gegebenen Verhältnisse $m : m_1$ zu teilen. (m soll zu M, m_1 zu M_1 gehören; m und m_1 mögen als Gerade von bestimmter Länge gegeben sein.)

Auflösung. a) Innere Teilung. Ist MM_1 (Fig. 98) die gegebene Gerade, so lege man die Linie m in M unter beliebiger Richtung an, die Linie m_1 in M_1 in entgegengesetzter Richtung, was die Geraden MC und M_1B_1 giebt. Die Gerade CB_1 teilt MM_1 im Verhältnis $m : m_1$. (Beweise durch ähnliche Dreiecke, daß $MI : M_1I = m : m_1$ ist.)

b) Äußere Teilung. Bilde wie vorher $MC = m$ und ziehe $M_1C_1 = m_1$ als gleichgerichtete Parallele. CC_1 giebt dann auf der Verlängerung von MM_1 den äußeren Teilpunkt A. (Beweise durch ähnliche Dreiecke, daß $MA : M_1A = m : m_1$ ist.)

Bemerkung. Aus $MI : M_1I = m : m_1$ und $MA : M_1A = m : m_1$ folgt: $MI : M_1I = MA : M_1A$. Beide Teilungen harmonieren mit einander. Diese Doppelteilung nennt man daher die harmonische Teilung einer gegebenen Geraden.*) M, M_1, I, A nennt man harmonische Punkte. M und M_1 sind zugeordnete Punkte, ebenso I und A. Schlägt man mit m und m_1 Kreise um M und M_1, so hat man die Zeichnung der Kreise mit ihren Ähnlichkeitspunkten. Die Mittelpunkte der Kreise und die Ähnlichkeitspunkte sind also harmonische Punkte.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten, von denen zwei zugeordnete sind, den vierten harmonischen zu finden. (Suche aus MM_1 und I, oder aus MM_1 und A den nötigen Teil von Fig. 98 herzustellen.)

169) **Satz.** Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch und zwar im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten.

Beweis. In Fig. 99a sei ABC ein Dreieck mit der Winkelhalbierenden CD. Man verlängere AC über C hinaus um a, dann

Fig. 99a.

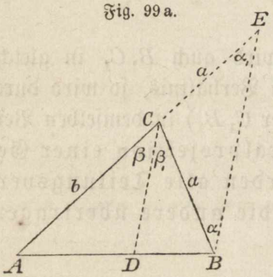
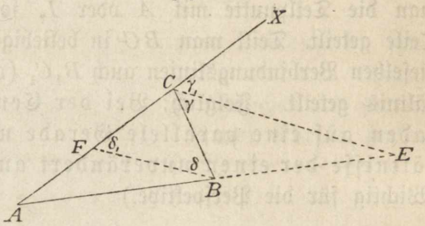


Fig. 99b.



wird BCE ein gleichschenkliges Dreieck, also $\sphericalangle\, \alpha = \alpha_1$. Nach dem Satze vom Außenwinkel ist $\beta + \beta_1 = \alpha + \alpha_1$, und demnach $\beta = \alpha_1$, folglich $CD \parallel EB$, und $AC : CE = AD : DB$, folglich auch $AC : BC = AD : BD$.

In Fig. 99b ist der Außenwinkel BCX des Dreiecks ABC halbiert, also $\gamma = \gamma_1$. Man mache $CF = BC$, so daß $\triangle\, BCF$ gleichschenklig ist und $\delta = \delta_1$ wird. Als Außenwinkel ist $\gamma + \gamma_1 = \delta + \delta_1$, folglich $\gamma_1 = \delta_1$, folglich $CE \parallel FB$, und $AC : FC = AE : BE$, also auch $AC : BC = AE : BE$.

Aus $AC : BC = AD : DB$ und $AC : BC = AE : BE$ folgt, wenn man für ein Dreieck das Ganze in einer Zeichnung vereinigt: $AD : DB = AE : BE$, und dies ist eine harmonische Teilung.

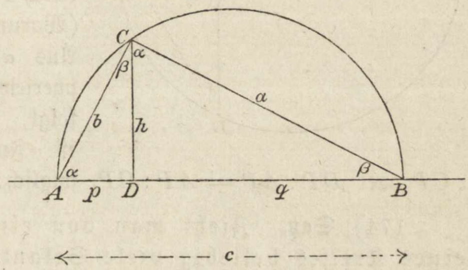
*) Die Araber bezeichneten übrigens diese Teilung aus anderen Gründen als eine harmonische.

Bemerkung. Aus dieser Proportion folgt $AD \cdot BE = DB \cdot AE$, was geometrisch leicht zu deuten ist.

170) Stimmen in einer Proportion die inneren Glieder überein, so heißt die Proportion eine stetige, und das Mittelglied heißt die mittlere Proportionale der beiden anderen. So ist z. B. $4 : 6 = 6 : 9$ eine richtige Proportion, also 6 die mittlere Proportionale zwischen 4 und 9. Allgemein: c ist mittlere Proportionale zwischen a und b, wenn $a : c = c : b$, oder wenn $ab = c^2$ ist.

171) **Satz.** Die zur Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse; jede Kathete ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte derselben.

Fig. 100.



Beweis. In Fig. 100 sei ABC das rechtwinklige Dreieck und CD die Höhe h auf der Hypotenuse, dann ist $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, denn sie stimmen im gemeinsamen Winkel α und im rechten Winkel überein; ferner ist $\triangle BCD \sim \triangle BAC$, denn sie stimmen im gemeinsamen Winkel β und im $\sphericalangle 90^0$ überein. Folglich ist auch $\triangle ACD \sim \triangle BCD$. Folglich ist a) $p : h = h : q$ und $h^2 = p \cdot q$. b) $q : a = a : c$, folglich $a^2 = q \cdot c$, c) $p : b = b : c$, folglich $b^2 = p \cdot c$.

Bemerkung. Aus $a^2 = qc$ und $b^2 = p \cdot c$ folgt durch Addition $a^2 + b^2 = pc + qc = c(p + q) = c \cdot c = c^2$, oder $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

Dies ist der dritte und einfachste Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes.

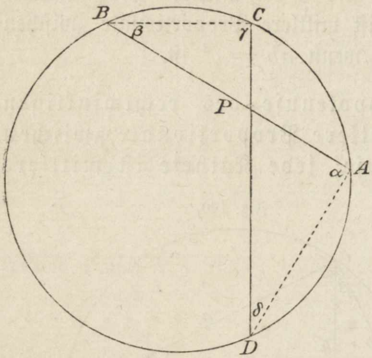
172) **Aufgabe.** Zu zwei Geraden p und q die mittlere Proportionale zu konstruieren (oder ein Rechteck mit den Seiten p und q in ein Quadrat zu verwandeln).

Auflösung. Mache $AB = p + q$, zeichne über AB als Durchmesser einen Kreis, errichte im Teilpunkte D (wo p und q zusammenstoßen) ein Lot bis zur Peripherie, so ist dasselbe die mittlere Proportionale. Zugleich ist $h^2 = p \cdot q$.

IV. Proportionen und Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreise.*)

173) **Satz.** Zieht man durch einen Punkt innerhalb des Kreises beliebig viele Sehnen, so ist das Produkt (Rechteck) aus den Abschnitten jeder Sehne gleich dem Quadrate über der Hälfte der kleinsten Sehne, die durch den Punkt gelegt werden kann.

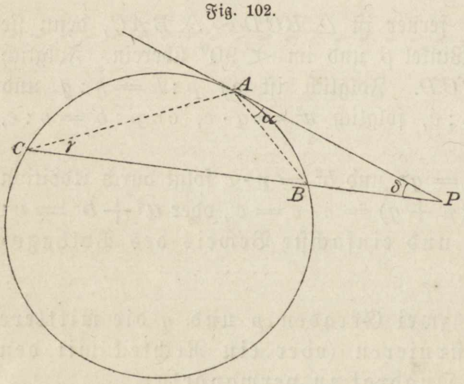
Fig. 101.



Beweis. AB in Fig. 101 ist die kleinste mögliche Sehne durch P, wenn sie senkrecht auf dem durch P gelegten Durchmesser steht. (Warum?) Dabei ist $AP = PB$. Aus $\alpha = \gamma$ und $\delta = \beta$ (Periepheriewinkel über gleichen Bogen) folgt, daß $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ ist. Folglich ist $DP : AP = BP : CP$ oder $DP : AP = AP : CP$, folglich: $DP \cdot CP = AP^2$.

174) **Satz.** Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises beliebig viele Sekanten, so ist das Produkt (Rechteck) aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitte gleich dem Quadrate der von dem Punkte aus an den Kreis gelegten Tangente.

Fig. 102.



Beweis. Verbindet man in Fig. 102 A mit B und C, so ist $\triangle PAB \sim \triangle PAC$, denn δ ist gemeinschaftlicher Winkel und $\alpha = \gamma$ nach dem Satze vom Tangenten-Sehnenwinkel. Folglich ist $BP : PA = PA : PC$ und $PB \cdot PC = PA^2$.

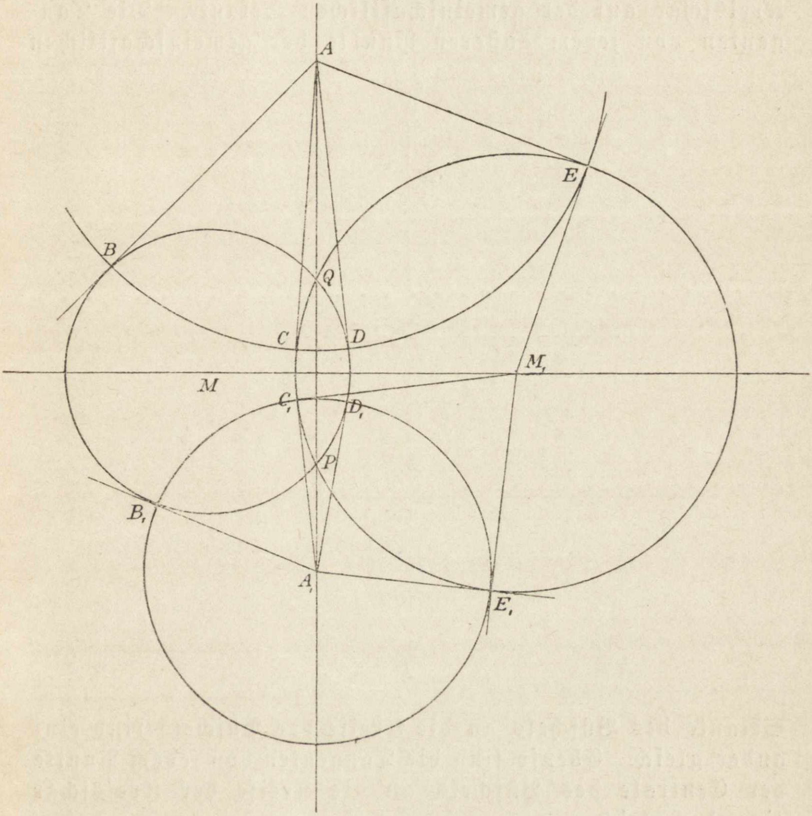
---

*) Auf dem Gymnasium können die Abschnitte IV und V ganz oder teilweise in die IIa verlegt werden. Dies ist jedoch nicht zu empfehlen, damit dort zu einer größeren Vertiefung in schwierigere Dinge die nötige Zeit frei bleibe. Man betrachte das Gegebene als Übungsstoff nutzbringender Art.

175) **Satz.** Gehen durch zwei Punkte beliebig viele Kreise, so sind die von jedem äußeren Punkte der gemeinschaftlichen Sekante aus an die Kreise gezogenen Tangenten einander gleich.

Beweis. In Fig. 103 gehen die Kreise M und M_1 durch P und Q. Vom Punkte A der Sekante PQ aus sind an die beiden

Fig. 103.

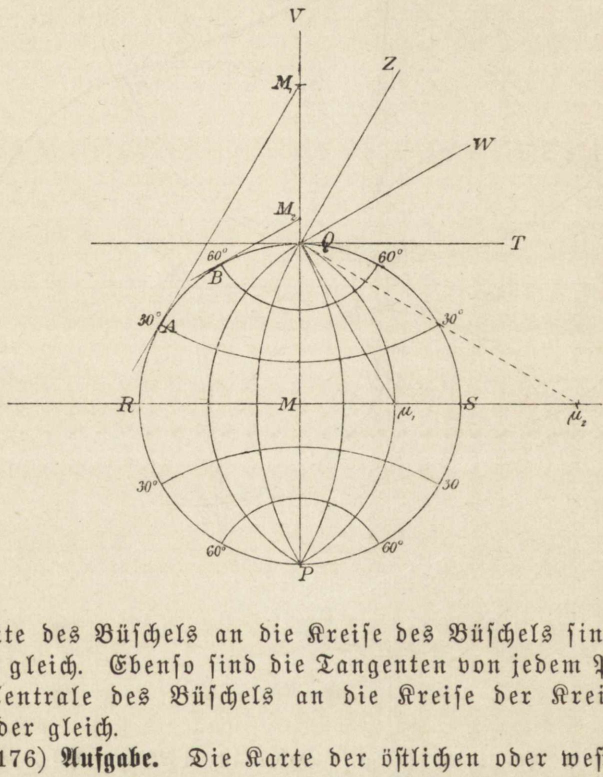


Kreise vier Tangenten gelegt. Dabei ist $AB^2 = AQ \cdot AP$, $AC^2 = AQ \cdot AP$, ebenso AD^2 und AE^2 jedes gleich $AQ \cdot AP$. Also sind alle Tangenten gleich. Dies gilt für beliebig viele Kreise durch P und Q.

Bemerkung. Der Kreis um A mit Radius AB schneidet das Kreisbüschel durch P und Q rechtwinklig, denn Radius M_1E steht senkrecht auf Tangente AE; ebenso ist es an den anderen Schnittstellen. Schlägt man also um einen andern Punkt A_1 der Sekante PQ noch einen anderen Kreis mit der entsprechenden Tangentenlänge als Radius, so schneidet auch dieser die durch P und Q gehenden Kreise rechtwinklig. Folglich sind die Tangenten M_1E, M_1C, M_1C_1 und M_1E_1 einander gleich. Folglich lautet der vervollständigte Satz:

Legt man durch zwei Punkte ein Kreisbüschel, so liegen die Mittelpunkte der das Büschel senkrecht schneidenden Kreisschar auf der gemeinschaftlichen Sekante. Die Tangenten von jedem äußeren Punkte der gemeinschaftlichen

Fig. 104.



Sekante des Büschels an die Kreise des Büschels sind einander gleich. Ebenso sind die Tangenten von jedem Punkte der Centrale des Büschels an die Kreise der Kreisschar einander gleich.

[176) **Aufgabe.** Die Karte der östlichen oder westlichen Halbkugel mit Meridianen und Parallelkreisen im Abstande von 15 zu 15⁰ genau zu zeichnen.

Auflösung. Schlage um M den Grenzkreis der Karte mit beliebigem Radius und ziehe die auf einander senkrechten Durchmesser PQ und RS, die beide zu verlängern sind. In Fig. 104 ist der Viertelkreis RQ in drei Bogen von je 30^0 geteilt, was die Punkte

A und B giebt. Die Tangenten in A und B geben die Mittelpunkte M_1 und M_2 für die Parallelkreise 30^0 und 60^0. Ebenso sind die Parallelkreise 15^0, 45^0, 75^0 zu konstruieren. — Durch Q lege man eine Tangente QT, so daß $\sphericalangle\, TQV = 90^0$ ist. Durch QW und QZ werde dieser Winkel in Winkel von je 30^0 eingeteilt. Das Lot auf QW in Q giebt den Mittelpunkt μ_1 des den Grenzkreis unter 30^0 schneidenden Meridiankreises. Das Lot auf QZ in Q giebt den Mittelpunkt μ_2 des unter 60^0 schneidenden Meridiankreises. Halbiert man die Winkel bei Q, so erhält man die Teilung von $\sphericalangle\, TQV$ in Winkel von 15^0. Die Lote auf den neuen Teillinien geben die Mittelpunkte für die andern Meridiane. Diese Konstruktion rührt von dem Astronomen Hipparch her, sie wird jedoch in der Regel nach Ptolemäus genannt.)

Bemerkung. Zeichnet man die Kreise vollständig und hebt man einen größeren Kreis der Kreisschar als Grenzkreis besonders hervor, so hat man in ihm eine Halbkugelkarte mit excentrisch liegendem Pol nach Art der Halbkugeln der größten und kleinsten Wassermasse, nur gelten natürlich die vorher angegebenen Gradbezeichnungen nicht mehr. Näheres siehe in § 30 der „Einführung in das stereometrische Zeichnen" des Verfassers, erschienen bei B. G. Teubner.]

177) **Aufgabe.** Eine Gerade AB so zu teilen, daß der größere Teil mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Teile ist. (Stetige Teilung oder goldener Schnitt.)*)

1. Auflösung. Errichte im Endpunkte B der gegebenen Geraden AB (Fig. 105) ein Lot $BM = \frac{1}{2} AB$, schlage mit BM um M einen Kreis und lege durch M die Sekante AE. Durch D lege eine Parallele zu EB, die in C_1 schneidet, dann ist C_1 der gesuchte Teilpunkt.

Beweis. $AD : AB = AB : AE$, aber $AB = DE$, folglich $AD : DE = DE : AE$, also ist AE stetig geteilt. Da nun $DC_1 \parallel EB$, so ist auch $AC_1 : C_1B = C_1B : AB$ (warum?).

2. Auflösung. Beginne wie vorher und mache $AC = AD$, dann ist $BC : AC = AC : AB$. (Die Teilung ist jetzt in entgegengesetzter Richtung ausgeführt.)

*) Die Lehrpläne verweisen den goldnen Schnitt in die IIa des Gymnasiums. Die erste der gegebenen Lösungen verlangt aber so zu sagen gar keine Rechnung. Sie ist so selbstverständlich, daß sie unbedenklich auf IIIa gelehrt werden kann, um die Oberklasse zu entlasten. — Die gebräuchliche Lösung ist der Übung halber in zwei Berechnungsarten beigefügt.

Beweis. Verlängere DM bis zum Punkte E der Peripherie, dann ist

$$AB^2 = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AC(AC + AB)$$
$$= AC^2 + AB \cdot AC,$$

folglich

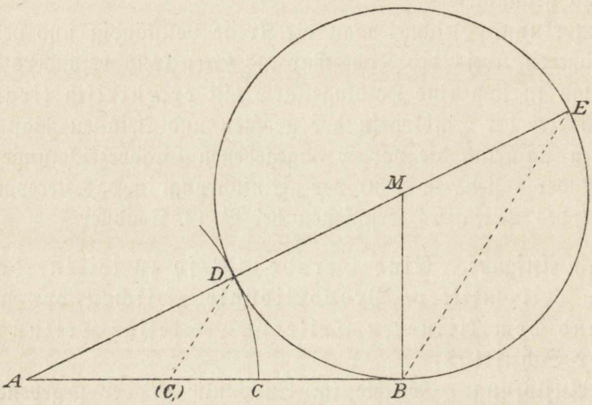
$$AC^2 = AB^2 - AB \cdot AC = AB(AB - AC) = AB \cdot BC.$$

Daraus folgt:

$$BC : CA = CA : BA.$$

[Anderer **Beweis:** $AE : AB = AB : AD$, folglich

Fig. 105.



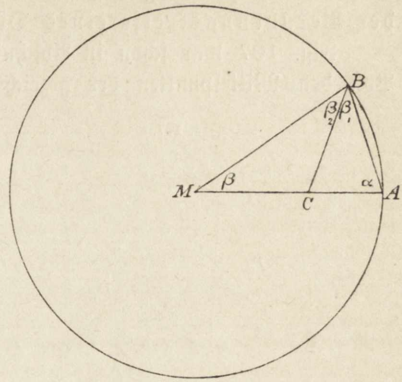
$AE - AB : AB - AD = AB : AD$ oder $AC : BC = AB : AC$, also auch $BC : AC = AC : AB$.]

178) **Aufgabe.** In einen Kreis ein regelmäßiges Zehneck einzuzeichnen.

Auflösung. Teile den Radius nach dem goldenen Schnitt, dann ist der größere Teil die Seite des regelmäßigen Zehnecks.

Beweis. Ist MA in C stetig geteilt und ist $AB = MC$ (Fig. 106) so ist $AC : CM = CM : AM$ oder $AC : AB = AB : AM$, außerdem ist $\sphericalangle\, \alpha$ den Dreiecken ABC und BAM gemein, folglich ist $\triangle\, ABC \sim \triangle\, BAM$ (1. Ähnlichkeitssatz), und da AMB gleichschenklig ist, so ist auch ABC gleichschenklig, folglich auch $MC = BC$. Daraus folgt $\sphericalangle\, \beta = \beta_2$. Aus der bewiesenen Ähnlichkeit der Dreiecke folgt $\beta = \beta_1$, also ist $\sphericalangle\, MBA = 2\beta$ und auch der andere Basiswinkel $\alpha = 2\beta$. So hat man im Dreiecke MAB fünf mal den Winkel β. Folglich ist $5\beta = 180^0$, also $\beta = 36^0 = \frac{360^0}{10}$. Demnach läßt sich AB zehn mal auf der Peripherie abtragen.

Fig. 106.



179) **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfeck in einen Kreis einzuzeichnen.

Auflösung. Man teile den Kreis, wie vorher, in 10 gleiche Teile ein und überschlage beim Ziehen der Sehnen jedesmal einen Punkt. Der Centriwinkel wird gleich 72^0, ist also der des regelmäßigen Fünfecks.

Bemerkung. Zwei sich schneidende Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks teilen sich gegenseitig nach dem goldnen Schnitt. (Folgt aus der Ähnlichkeit zweier gleichschenkligen Dreiecke.)

180) **Aufgabe.** Das regelmäßige Fünfzehneck zu konstruieren.

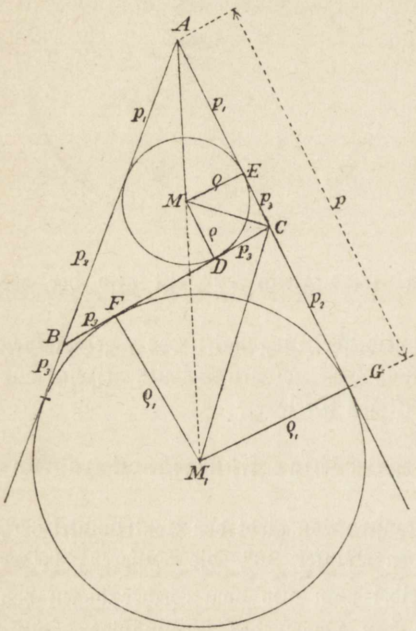
Auflösung. Die Sechseckskonstruktion giebt den Centriwinkel 60^0, die Zehnecksonstruktion giebt den Winkel 36^0, die Differenz beider Winkel ist $24^0 = \frac{360^0}{15}$. Schneidet man also vom Sechseckbogen den Zehneckbogen ab, so hat man den Bogen des regelmäßigen Fünfzehnecks.

Bemerkung. Man kaun jetzt folgende regelmäßigen Vielecke genau konstruieren: 5-Eck, 10-Eck, 20-Eck, 40-Eck u. s. w., 15-Eck, 30-Eck, 60-Eck u. s. w. Zu den genau zu konstruierenden Winkeln sind also noch gekommen: 72^0, 36^0, 18^0, 9^0, $4\frac{1}{2}^0$ u. s. w. 24^0, 12^0, 6^0, 3^0, $1\frac{1}{2}^0$, $\frac{3}{4}^0$ u. s. w. Vergl. Abschnitt 76. Eigentümlich muß es erscheinen, daß es unmöglich ist, den Winkel 1 Grad mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und daß man ihn trotzdem zur Grundlage der Gradteilung gemacht hat. Diese Einteilung ist eine durchaus künstliche und wird wohl in der Chronologie der alten Babylonier ihren Grund haben, die das Jahr zu 360 Tagen annahmen. Beiläufig sei bemerkt, daß es unmöglich ist, mit Zirkel und Lineal das regelmäßige 7-Eck, 11-Eck, 13-Eck, 19-Eck u. s. w. zu konstruieren, während die Konstruktion des 17-Ecks, 257-Ecks und ihrer Ableitungen möglich ist.]

181) Beziehungen zwischen den Seiten und den Radien der Berührungskreise eines Dreiecks.

Fig. 107 war schon in Abschnitt 119, 120 und 149 behandelt. Von den Mittelpunkten der gezeichneten Kreise sind auf die Seiten Lote gefällt. Da $BF = DC = p_3$ ist, so ist $CF = a - p_3 = p_2$. Nun ist

Fig. 107.



$$\triangle MCD \sim \triangle M_1CF$$

(warum?), folglich

$$p_3 : \varrho = \varrho_1 : p_2,$$

also

a) $\quad \varrho \cdot \varrho_1 = p_2 \cdot p_3.$

Ferner ist

$$\triangle AME \sim \triangle AM_1G,$$

folglich

$$p_1 : p = \varrho : \varrho_1,$$

oder

b) $\quad \dfrac{\varrho}{\varrho_1} = \dfrac{p_1}{p}.$

Multipliziert man die rechten und die linken Seiten der Gleichungen a) und b), so hebt sich ϱ_1 weg, und es bleibt stehen: $\varrho^2 = \dfrac{p_1\,p_2\,p_3}{p}$, oder, wenn man die Bedeutungen von p, p_1, p_2 und p_3 (vergl. Abschnitt 119 und 120) einführt:

$$\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}.$$

Durch Division erhält man aus den Gleichungen a) und b), da sich ϱ weghebt: $\varrho_1^{\,2} = \dfrac{p\,p_2 p_3}{p_1}$. Entsprechend findet man: $\varrho_2^{\,2} = \dfrac{p\,p_1 p_3}{p_2}$, $\varrho_3^{\,2} = \dfrac{p\,p_1 p_2}{p_3}$, so daß der Radius jedes Berührungskreises aus den Dreiecksseiten berechnet werden kann.

182) **Aufgabe:** Den Inhalt eines Dreiecks aus den Seiten a, b und c zu berechnen.

Auflösung.

$$F = \frac{u}{2}\varrho = p\sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \sqrt{p^2}\sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}} = \sqrt{p p_1 p_2 p_3},$$

also:

$$F = \sqrt{p p_1 p_2 p_3}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Dies ist die Heronische Formel für die Flächenberechnung des Dreiecks.

Da $\frac{ah_1}{2} = F$ ist, so ist $h_1 = \frac{2F}{a}$, ebenso $h_2 = \frac{2F}{b}$, $h_3 = \frac{2F}{c}$ ebenfalls leicht durch die Ausdrücke p, p_1, p_2, p_3 darzustellen. Die Höhen des Dreiecks lassen sich also aus den Seiten berechnen.

V. Geometrische Deutung und Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

183] In diesem Abschnitte sollen a, b und c stets Gerade von gegebener Länge bedeuten. Dann gelten folgende Beziehungen:

a) $x = a + b$ bedeutet die Summe, $x = a - b$ die Differenz der Geraden a und b in Bezug auf ihre Länge.

b) Ist n eine ganze oder gebrochene Zahl, so bedeutet $x = na$ eine Gerade, welche die n-fache Länge hat, wie a. Bei Irrationalzahlen ist im allgemeinen nur angenäherte Konstruktion möglich.

c) $x = a\sqrt{n}$ bedeutet die mittlere Proportionale zwischen a und na, denn aus $a : x = x : na$ folgt $x^2 = na^2$ oder $x = a\sqrt{n}$. Genaue Konstruktion ist stets möglich, wenn na konstruiert werden kann.

d) $x = \frac{ab}{c}$ bedeutet die vierte Proportionale zu c, a und b, denn aus $c : a = b : x$ folgt $x = \frac{ab}{c}$. Zugleich ist x die zweite Seite eines Rechtecks, dessen eine Seite $= c$ und dessen Inhalt $= ab$ ist.

e) $x = \frac{a^2}{b}$ bedeutet die vierte Proportionale in der Proportion $b : a = a : x$ und zugleich die zweite Seite eines Rechtecks, dessen erste Seite $= b$ und dessen Inhalt $= a^2$ ist.

f) $x = \sqrt{ab}$ ist die mittlere Proportionale zwischen a und b, denn aus $a : x = x : b$ folgt $x^2 = ab$ oder $x = \sqrt{ab}$.

g) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ bedeutet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b, denn in diesem ist $x^2 = a^2 + b^2$.

h) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ bedeutet die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen erste Kathete $= b$, dessen Hypotenuse $= a$ ist.

184) Diese Beziehungen können bisweilen dazu benutzt werden, einfache Konstruktionsmethoden aufzufinden, indem man die gesuchte Größe als Unbekannte einer Gleichung berechnet und den Ausdruck konstruiert.

Beispiel: Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche dreimal so groß ist, als die des Quadrates über einer gegebenen Geraden a.

Auflösung. Ist x die Seite des gleichseitigen Dreiecks, so ist dessen Höhe zu berechnen aus $h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2$, also $h = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, folglich ist der Inhalt $= \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$. Jetzt setze man $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = 3a^2$ also $x^2 = 12a^2\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $x = \sqrt{(4a)(a\sqrt{3})}$. Man konstruiere jetzt x als mittlere Proportionale zwischen $4a$ und $a\sqrt{3}$.

Bisweilen giebt uns diese Rechnungsmethode den eigentlichen Schlüssel zu einer mit Hülfe eines bloßen Kunstgriffs gelösten Konstruktion. Eine solche war die in Abschnitt 177 gegebene des goldenen Schnittes. Angenommen, sie wäre nicht bekannt, so hätte man folgendermaßen zu verfahren:

Die gegebene Linie sei a, der größere Teil, der gesucht wird, werde x genannt, der Rest also $a - x$. Die Aufgabe verlangt folgende Proportion:

$(a - x) : x = x : a$, oder $x^2 = a(a - x)$, oder $x^2 + ax = a^2$*), also

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Die positive Wurzel giebt $x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$. Die Wurzel wird konstruiert als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und $\frac{a}{2}$. Von dieser Hypotenuse ist $\frac{a}{2}$ abzuziehen, und so erhält man x. Die Auflösung stimmt genau mit der früheren überein. —

*) Diese Gleichung zweiten Grades gehört zu den durch die Lehrpläne in IIIa zugelassenen leichten Gleichungen.

(Die negative Lösung giebt die neben dieser inneren noch mögliche äußere Teilung, die jedoch nicht verlangt war.)

Bemerkung. Für x_1 kann man schreiben:

$$x_1 = \frac{a}{2}\sqrt{1+4} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}[\sqrt{5} - 1].$$

Das kleinere Stück ist $\frac{a}{2}[3 - \sqrt{5}]$.

Häufiger vorkommende Ausdrücke, die oft die Lösungen erleichtern, sind folgende:

$x = a\sqrt{2}$ ist die Diagonale des Quadrates mit Seite a.

$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist die Seite eines Quadrates mit Diagonale a.

$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit Seite a.

$x = 2a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist die Seite des gleichseitigen Dreiecks mit Höhe a.

$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks im Kreise mit Radius r.

[Ausdrücke wie $x = c \cdot \frac{a^2}{b^2}$ (aus $x : c = a^2 : b^2$) könnten Schwierigkeiten machen. Man schreibe $x = \frac{\left(\frac{ca}{b}\right)a}{b}$, konstruiere erst $y = \frac{ca}{b}$ nach obiger Methode und dann $x = \frac{y \cdot a}{b}$ auf dieselbe Art. Auf diese Weise findet man gerade Linien, die sich verhalten wie gegebene Quadrate.]

185) Vermischte Übungsaufgaben.

a) Wie groß ist die Seite des dem Kreise mit Radius r einbeschriebenen Fünfecks? (Berechne die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC in Fig. 106, und verdoppele dieselbe.) Wie groß ist der Radius des einbeschriebenen Kreises dieses Fünfecks, und wie groß ist der Inhalt des Fünfecks?

b) Ein regelmäßiges Fünfeck habe die Seite b, wie groß sind r, ϱ und F?

c) Beantworte die Fragen b) für das regelmäßige Dreieck, Sechseck, Achteck und Zehneck.

d) Ein Kreis habe den Radius r. Wie groß ist die Inhaltsdifferenz des um- und des einbeschriebenen Quadrates?

e) Diese Differenz sei gegeben. Wie groß ist der Radius des Kreises?

f) Die Aufgaben d) und e) für die Umfangsdifferenz der Quadrate zu lösen.

g) Einem Quadrate mit Seite a sind zwei Kreise um- bezw. einbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Flächen und wie groß die Umfangsdifferenz?

h) Eine dieser Differenzen sei gegeben. Die Quadratseite soll berechnet werden.

i) Die Aufgaben d) bis h) sollen für das regelmäßige Dreieck, Sechseck, Fünfeck, Zehneck aufgestellt und gelöst werden.

k) Einem gleichschenkligen Dreieck das auf der Basis stehende einbeschriebene Quadrat einzuzeichnen.

l) Dieselbe Aufgabe für einen Halbkreis zu lösen.

m) Die Aufgaben k) und l) dahin umzuändern, daß nicht ein Quadrat, sondern ein Rechteck von gegebenem Seiten-Verhältnis einbeschrieben werden soll.

Bemerkung: Die Andeutungen eines Lehrbuchs über die zu stellenden Aufgaben haben durchaus nicht den Zweck, eine der besseren Aufgabensammlungen zu ersetzen. Sie sollen nur zeigen, wie aus den gebräuchlichen und auf der Hand liegenden Aufgaben ganze Gruppen anderer abgeleitet werden können, die geeignet sind, von der Mannigfaltigkeit des Stoffes ein Bild zu geben und schon dadurch Interesse zu erwecken. Es empfiehlt sich, jede Aufgabe auf mehrere möglichst verschiedene Arten zu lösen und neben den rein konstruktiven auch berechnende Auflösungen zu versuchen, sobald Beides müglich ist.

Zweite Abteilung.

Arithmetik.

A. Lehraufgabe der Tertia b.

(Erster Jahrgang.)

I. Das Gebiet der absoluten ganzen Zahlen.

1) Um angeben zu können wie oft gleichartige Gegenstände vorhanden sind, erfand der Mensch die Zahl. Durch das Abzählen entstand die Zahlenreihe. Das Bedürfnis nach leichter Übersichtlichkeit veranlaßte die Zusammenstellung der Zahlen zu geordneten Gruppen. Wahrscheinlich war der Umstand, daß der Mensch 10 Finger hat, an denen er abzuzählen und zu rechnen begann, der Grund dafür, daß die Gruppierung zu je 10, das Dezimalsystem, die Alleinherrschaft eroberte. [Auch andere Systeme waren in Gebrauch und haben auch, wie das Duodezimalsystem, wissenschaftliche Bearbeitung gefunden.]

2) Dieses System erforderte also 10 Zeichen oder Ziffern. Dabei erschien es aber zweckmäßig, auch für das Nichtvorhandensein (kein mal vorhanden) ein Wort und ein entsprechendes Zeichen festzustellen, die Zahl Null oder 0, und so zählte man die erste Gruppe nicht von 1 bis 10, sondern von 0 bis 9. Dies wurden die einstelligen Zahlen. Von 10 bis 99 folgten die zweistelligen Zahlen, von 100 bis 999 die dreistelligen, u. s. w.

Setzte man nun fest, daß die vor die Zahl geschriebene Null die Zahl nicht ändert, so konnte man statt 7 auch 07 oder 007 schreiben, diese Zahl also als ein-, zwei-, dreistellig u. s. w. auffassen, und so ergab sich, daß man die Anzahl der zweistelligen Zahlen als 100, die der dreistelligen als 1000 u. s. w. betrachten durfte. [Diese

Einfachheit war z. B. bei der Schreibweise der römischen Zahlen nicht vorhanden, denn dort erschien XIII als vierstellig, XXI als dreistellig, C als einstellig u. s. w., so daß ein einfaches Rechenschema gar nicht möglich war.]

3) Jede Zahl der Zahlenreihe ist größer (>), als alle vorhergehenden und kleiner (<), als alle folgenden, und zwar ist sie um die Einheit 1 größer bezw. kleiner, als die beiden Nachbarzahlen.

Als Einheiten galten zunächst die gezählten gleichartigen Gegenstände. So spricht man z. B. von 10 Bäumen, obwohl unter diesen recht auffallende Verschiedenheiten bemerkt werden können. Besser stimmen schon die aus dem Bedürfnis genaueren Vergleichens und Messens hervorgegangenen Maßeinheiten überein. So können z. B. zwei Metermaßstäbe in ihrer Länge oder zwei Kilogrammstücke in ihrem Gewichte so genau übereinstimmen, daß man mit gewöhnlichen Hülfsmitteln keinen Unterschied zwischen ihnen wahrnimmt. Wohl aber werden feinere Meß- bezw. Wägungsmethoden Unterschiede nachweisen. Zeigt doch z. B. die Physik, daß sogar derselbe Meterstab bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Länge hat, und daß dasselbe Kilogrammstück an verschiedenen Orten und in verschiedenen Höhenlagen verschiedenes Gewicht zeigt. Dazu kommt auch noch die allmähliche Abnutzung.

Die angewandte Mathematik sieht von allen Unterschieden zufälliger Art ab und kennt nur genau übereinstimmende Maßeinheiten. Die reine Zahlentheorie aber beschäftigt sich nicht mit Maßeinheiten dieser oder jener Art, sondern nur mit ihrer Anzahl. (Benannte Zahlen, unbenannte Zahlen.) Wie die Zahl überhaupt nur etwas Gedachtes, nicht etwas wirklich Vorhandenes ist, so ist auch die absolute Einheit der Zahlenwelt, die Zahleneinheit, oder die unbenannte Zahl Eins nur etwas Gedachtes. Jede Zahl, z. B. $3 = 1 + 1 + 1$ bedeutet eine Mehrheit solcher untereinander absolut gleichen Zahleneinheiten. Erst durch das vollständige Entfernen aller Unterschiede der gezählten Einheiten entsteht die Möglichkeit, über die Idealwelt der Zahlen bestimmte Aussagen von untrüglicher Sicherheit zu machen.

4) Um gewisse Aussagen nicht nur für einzelne bestimmte Zahlen, sondern für jede beliebige Zahl aussprechen zu können, führt man als neue Zeichen Buchstaben ein, z. B. a, b, c u. s. w., die man als allgemeine Zahlen betrachtet, da jede spezielle Zahl für sie gesetzt werden kann. [Allgemein sind diese Zahlen auch in dem Sinne, als sie neben dem Dezimalsystem auch andere Systeme umfassen können.]

Vorläufig beschränken wir uns auf die absoluten Zahlen, die eine Mehrheit von Einheiten darstellen, also, ganze, nicht gebrochene Zahlen und, von 0 und 1 abgesehen, sämtlich größer als 1 sind. Man nennt dieses Zahlengebiet auch das der ganzen, positiven Zahlen.

5) Das Rechnen mit unbenannten Zahlen wird insoweit als bekannt vorausgesetzt, als es sich um die vier Grundrechnungsarten (4 Spezies) handelt, um das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren. Über jede dieser Rechnungsarten sollen allgemeine Bemerkungen gemacht und dabei soll das Rechnen mit bestimmten Zahlen auf das Rechnen mit allgemeinen Zahlen übertragen werden.

6) Unter Addieren versteht man die Kunst, anzugeben, wieviele Einheiten mehrere Zahlen zusammengenommen enthalten. Dadurch erhält man die Summe der einzelnen Zahlen. Die letzteren heißen Glieder der Summe oder Summanden (d. h. zusammenzuzählende Zahlen).

So ist z. B. $2 + 5 = 7$, und zugleich $5 + 2 = 7$. Allgemein also gilt:

$$a + b = b + a,$$

oder bei einer größeren Anzahl von Gliedern:

$$a + b + c \cdots = a + c + b + \cdots = b + c + a \cdots \text{u. s. w.}$$

In Worten: Eine Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder beliebig umstellt.

7) Ist die Anzahl der Glieder eine größere, so kann man zunächst einzelne Gruppen summieren und dann die Summe der Einzelsummen bilden. Deutet man die Gruppen durch Klammern an, so ist z. B.

$$5 + 2 + 9 + 1 = (5 + 2) + (9 + 1) = 7 + 10 = 17.$$

Allgemeiner z. B.

$$a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d + e) = (a + b + d) + (c + e) = \text{u. s. w.}$$

Die Gruppierung kann eine ganz beliebige sein. So ist z. B.

$$1521 + 342 + 13 + 2 = 1000 + (500 + 300) + (20 + 40 + 10) + 1 + 2 + 3 + 2 = 1000 + 800 + 70 + 8 = 1878.$$

Hier wurden also die Einer, die Zehner u. s. w. in je einer Gruppe vereinigt. So entstand das gebräuchliche Additionsschema, für unser Beispiel also

$$\begin{array}{r} 1521 \\ 342 \\ 13 \\ 2 \\ \hline 1878 \end{array}$$

[Bei der römischen Schreibweise der Zahlen würde ein so einfaches Schema nicht möglich sein.]

8) Unter Subtrahieren versteht man die Kunst, anzugeben, wieviele Einheiten übrig bleiben, wenn man von einer zunächst größeren Anzahl von Einheiten eine kleinere wegnimmt.

So ist z. B. $7 - 5 = 2$. Hier heißt 7 der Minuendus (die Zahl, die verkleinert werden soll), 5 der Subtrahendus (die Zahl die abgezogen werden soll), 2 heißt der Rest, oder die Differenz (der Unterschied) der beiden Zahlen. Minuend und Subtrahend dürfen nicht umgestellt werden, jedoch können Subtrahend und Differenz ihre Stellen vertauschen. So ist z. B. $7 - 5 = 2$ und zugleich $7 - 2 = 5$. Allgemein:

Aus $a - b = c$ folgt $a - c = b$.

9) Addiert man zur Differenz $(7 - 5)$ den Subtrahend 5, so erhält man die Anfangszahl 7. Also:

Differenz + Subtrahend = Minuend.

oder:

$$(a - b) + b = a,$$

ebenso:

$$(a + b) - b = a.$$

Also: Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich gegenseitig auf.

Aus jeder der Gleichungen

$$a + b = c, \; c - a = b, \; c - b = a$$

folgen die beiden andern.

10) Hat man von einer Zahl mehrere andere abzuziehen, so kann dies Schritt für Schritt geschehen, man kann aber auch die Summe der abzuziehenden Zahlen bilden und diese Summe von der erst genannten Zahl abziehen. So ist z. B.

$12 - 5 - 3 = 7 - 3 = 4$, aber auch $= 12 - (5 + 3) = 12 - 8 = 4$.

Folglich ist allgemein:

$$a - b - c = a - (b + c).$$

Umgekehrt ergiebt sich der Satz: Eine Summe wird von einer Zahl subtrahiert, indem man die einzelnen Glieder subtrahiert.

11) Da das Summieren gruppenweise geschehen kann, so ist auch gruppenweises Abziehen gestattet, z. B.

$$\begin{aligned}2978 - 1236 &= (2000 + 900 + 70 + 8) - (1000 + 200 + 30 + 6) \\ &= (2000 - 1000) + (900 - 200) + (70 - 30) + (8 - 6) \\ &= 1000 + 700 + 40 + 2 = 1742.\end{aligned}$$

Aus dieser Gruppierung der Einer, Zehner u. s. w. entspringt das bekannte Subtraktionsschema, bei unserem Beispiele also:

$$\begin{array}{r} 2978 \\ 1236 \\ \hline 1742. \end{array}$$

[Auch dieses Schema ist bei der römischen Schreibweise nicht möglich.]

Aus der Willkürlichkeit der Gruppierung folgt:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Also: Eine Differenz wird zu einer Zahl addiert, indem man den Minuendus addiert und den Subtrahendus subtrahiert. Z. B.

$$8 + (5 - 3) = (8 + 5) - 3 = 13 - 3 = 10.$$

12) Dagegen ist $8 - (5 - 3) = 8 - 2 = 6$ und zugleich $8 - (5 - 3) = (8 - 5) + 3 = 3 + 3 = 6$. Soll nämlich von 8 die Differenz $(5 - 3)$ abgezogen werden, und zieht man zunächst 5 ab, so hat man 3 zu viel abgezogen und muß, um das richtige Resultat zu erhalten, 3 addieren. Allgemein folgt:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Also: Eine Differenz wird subtrahiert, indem man den Minuendus subtrahiert und den Subtrahendus addiert.

13) Einen zweigliedrigen Ausdruck nennt man ein Binom, einen dreigliedrigen ein Trinom, einen mehrgliedrigen Ausdruck

überhaupt ein Polynom. Aus Obigem ergiebt sich für das Rechnen mit Polynomen Folgendes:

$$a + (b + c - d + e - f - g) = a + b + c - d + e - f - g,$$

dagegen:

$$a - (b + c - d + e - f - g) = a - b - c + d - e + f + g.$$

Demnach kann bei der zu addierenden Klammer das Klammerzeichen einfach weggelassen werden; will man dagegen die abzuziehende Klammer entfernen, so sind alle Aditionsglieder der Klammer zu subtrahieren, alle Subtraktionsglieder zu addieren. (Umkehrung der Vorzeichen.)

Dieses Entfernen des Klammerzeichens bezeichnet man als das Auflösen der Klammern.

14) Im Innern der Klammer können statt der Zahlen auch Klammern stehen. Dann giebt man, um Verwechselungen vorzubeugen, den Klammern verschiedene Gestalt, z. B. ( ) oder [ ] oder { }. Beim Auflösen kann man erst die äußeren oder erst die inneren Klammern entfernen. So ist z. B.

$$\begin{aligned} & a - \{b - [c + (d - e) - (f - g - h)] + i\} \\ = {} & a - \{b - [c + d - e - f + g + h] + i\} \\ = {} & a - \{b - c - d + e + f - g - h + i\} \\ = {} & a - b + c + d - e - f + g + h - i, \end{aligned}$$

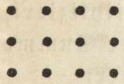
oder

$$\begin{aligned} = {} & a - b + [c + (d - e) - (f - g - h) - i] \\ = {} & a - b + c + (d - e) - (f - g - h) - i \\ = {} & a - b + c + d - e - f + g + h - i. \end{aligned}$$

15) Unter Multiplizieren versteht man die Kunst, die Summe mehrerer Summanden von gleicher Größe in einfacher Weise zu finden.

Handelt es sich z. B. um $7 + 7 + 7 + 7 = 28$, so schreibt man einfacher $7 \cdot 4 = 28$. Der mehrfach wiederholte Summand heißt der Multiplikand (die Zahl, welche vervielfältigt werden soll), die Anzahl der gleichen Summanden heißt der Multiplikator (die vervielfältigende Zahl). Das Resultat der Rechnung heißt Produkt, Multiplikand und Multiplikator heißen Faktoren des Produktes.

Dabei beobachtet man z. B., daß $4 \cdot 3 = 12$ und auch $3 \cdot 4 = 12$ ist.



In der That ist es gleichgültig, ob man die nebenstehenden zwölf Punkte als 3 Horizontalreihen zu je vier oder als vier Vertikalreihen zu je 3 betrachtet. Allgemein ist also

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

d. h. Multiplikator und Multiplikand können mit einander vertauscht werden, ohne daß das Produkt sich ändert. Auf die Stellung der ersteren soll daher nicht mehr geachtet werden. Während zwischen zwei mit einander zu multiplizierenden Zahlen gewöhnlicher Art ein Punkt als Zeichen der Multiplikation stehen muß, kann er bei Buchstaben entbehrt werden, so daß z. B. ab dasselbe bedeutet wie $a \cdot b$. — Es ist $a \cdot 1 = a$, der Faktor 1 kann also weggelassen werden. Ferner ist $a \cdot o = o$.

16) Sind mehrere Zahlen mit einander zu multiplizieren, so ist die Reihenfolge der Multiplikationen gleichgültig, auch kann man dabei Klammern anwenden oder vorhandene Klammern weglassen. So ist z. B.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = \text{u. s. w.}$$

Allgemein also:

$$abc = (ab)c = a(bc) = acb = bac = bca = cab = cba,$$

d. h. der Wert eines Produktes ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; ein Produkt wird mit einer Zahl multipliziert, indem man einen seiner Faktoren mit ihr multipliziert; man multipliziert mit einem Produkt, indem man mit seinen einzelnen Faktoren multipliziert.

17) Auch eine Summe kann als Faktor auftreten. Z. B. ist

$$3\,(7 + 2) = 3 \cdot 9 = 27,$$

zugleich aber $3\,(7 + 2) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 21 + 6 = 27.$

Allgemeiner ist

$$\begin{aligned}(a + b)\,3 &= (a + b) + (a + b) + (a + b)\\ &= (a + a + a) + (b + b + b) = 3a + 3b,\end{aligned}$$

ganz allgemein

$$(a + b)\,c = c\,(a + b) = ca + cb = ac + bc.$$

Folglich:

a) Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die einzelnen Glieder mit der Zahl multipliziert (und die entstandenen Produkte addiert).

b) Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert, indem man die Zahl mit den einzelnen Gliedern der Summe multipliziert (und die entstehenden Produkte addiert).

Aus $ac + bc = c\,(a + b)$ folgt noch:

c) Kommt in einer Summe von Produkten derselbe Faktor in jedem Gliede vor, so kann man ihn absondern; d. h. man befreit jedes Glied von dem Faktor und multipliziert mit diesem die Summe der bleibenden Zahlen. (Absondern des gemeinschaftlichen Faktors.)

Beispiel zu a)

$$\begin{aligned} 2312 \cdot 3 &= (2000 + 300 + 10 + 2)\,3 \\ &= 2000 \cdot 3 + 300 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 6000 + 900 + 30 + 6 = 6936. \end{aligned}$$

Darauf beruht das bekannte Multiplikationsschema:

$$\begin{array}{r} 2312 \\ 3 \\ \hline 6936 \end{array}$$

Beispiel zu c)

$$\begin{aligned} 17 \cdot 122 + 17 \cdot 340 + 17 \cdot 538 &= 17\,(122 + 340 + 538) \\ &= 17 \cdot 1000 = 17000. \end{aligned}$$

18) Aber auch beide Faktoren können Summen sein. Dann ist z. B.

$$(a + b)\,(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d = ac + bc + ad + bd,$$

oder auch

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

was dasselbe ist. — Ähnlich ist es mit mehrgliedrigen Summen; z. B.

$$\begin{aligned} 123 \cdot 21 &= (100 + 20 + 3)\,(20 + 1) \\ &= (100 + 20 + 3)\,20 + (100 + 20 + 3) \cdot 1 \\ &= (2000 + 400 + 60) + (100 + 20 + 3), \end{aligned}$$

oder, (wenn man die mit gleich viel Nullen behafteten Glieder addiert)

$$= 2000 + 500 + 80 + 3 = 2583.$$

Daher kommt das Multiplikationsschema für dieses Beispiel:

$$\begin{array}{r} 123 \\ 21 \\ \hline 123 \\ 246 \\ \hline 2583 \end{array}$$

19) Ist dagegen ein Faktor des Produktes eine Differenz, so wird z. B. folgendermaßen verfahren:

$$(a - b) \cdot 3 = (a - b) + (a - b) + (a - b)$$
$$= (a + a + a) - (b + b + b) = 3a - 3b.$$

Durch Umstellung folgt ebenso

$$3\,(a - b) = 3a - 3b.$$

Folglich:

a) Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Minuendus und den Subtrahendus für sich mit der Zahl multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht).

b) Eine Zahl wird mit einer Differenz multipliziert, indem man die Zahl erst mit dem Minuendus, dann mit dem Subtrahendus multipliziert (und vom ersteren Produkte das letztere abzieht). Z. B.

$(50 - 38)\,3 = 50 \cdot 3 - 38 \cdot 3 = 150 - 114 = 36$. Probe: $12 \cdot 3 = 36$.

20) Ist einer der Faktoren eine Summe, der andere eine Differenz, so ist nach dem Vorigen

$$(a + b)\,(c - d) = (a + b)\,c - (a + b)\,d$$
$$= ac + bc - (ad + bd) = ac + bc - ad - bd.$$

Probebeispiel: $(5 + 2)\,(7 - 3) = 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3$ $= 35 + 14 - 15 - 6 = 28$. In der That ist $7 \cdot 4 = 28$.

21) Sind beide Faktoren Differenzen, so wird

$$(a - b)\,(c - d) = (a - b)\,c - (a - b)\,d = ac - bc - (ad - bd)$$
$$= ac - bc - ad + bd.$$

Probebeispiel: $(5 - 2)\,(7 - 3) = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$ $= 35 - 14 - 15 + 6 = 12$. In der That ist $3 \cdot 4 = 12$.

22) Einige Spezialfälle:

$$(a + b)\,(a + b) = aa + ba + ab + bb = aa + 2ab + bb.$$

Abgekürzt schreibt man a^2 statt aa (a^2 lies: „a-Quadrat" oder „a hoch 2"). Dies giebt die Formel:

a) $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt aus beiden Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 131.)

Beispiel: $1004^2 = (1000 + 4)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 \cdot 4 + 4^2$
$= 1\,000\,000 + 8\,000 + 16 = 1\,008\,016.$

Ebenso ist

b) $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

in Worten: Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt beider Zahlen. (Vergl. Geometrie Abschnitt 132.)

Beispiel: $997^2 = (1000 - 3)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2$
$= 1\,000\,000 - 6000 + 9 = 994\,009.$

c) $$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Kurz ausgedrückt: Summe mal Differenz gleich der Differenz der Quadrate.

Beispiel: $1003 \cdot 997 = (1000 + 3)(1000 - 3) = 1000^2 - 3^2$
$= 1\,000\,000 - 9 = 999\,991.$

Beispiel: $8324^2 - 1676^2 = (8324 + 1676)(8324 - 1676)$
$= 10\,000 \cdot 6648 = 66\,480\,000.$

Beispiel:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab,$$

z. B. $1007^2 - 993^2 = (1000 + 7)^2 - (1000 - 7)^2$
$= 4 \cdot 1000 \cdot 7 = 28\,000.$

Beispiel:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + (a^2 - 2ab + b^2) = 2(a^2 + b^2),$$

z. B. $821^2 + 779^2 = (800 + 21)^2 + (800 - 21)^2 = 2(800^2 + 21^2)$
$= 2(640\,000 + 441) = 2 \cdot 640\,441 = 1\,280\,882.$

Nach a) wird

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2 (a + b)$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

($a^3 = aaa$, lies „a hoch 3", oder „a zur dritten".) Also:

d) $$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

z. B. $1004^3 = (1000 + 4)^3 = 1000^3 + 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 + 4^3$

$$\begin{array}{r} = 1\,000\,000\,000 \\ 12\,000\,000 \\ 48\,000 \\ 64 \\ \hline 1\,012\,048\,064 \end{array}$$

Ebenso ergiebt sich

e) $$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

z. B. $996^3 = (1000 - 4)^3 = 1000^3 - 3 \cdot 1000^2 \cdot 4 + 3 \cdot 1000 \cdot 4^2 - 4^3 = 1\,000\,000\,000 - 12\,000\,000 + 48\,000 - 64 = 998\,047\,936$. Beachte die abwechselnden Vorzeichen.

Beispiel: $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2(a^3 + 3ab^2) = 2(aa^2 + 3ab^2) = 2a(a^2 + 3b^2)$.

Beispiel: $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2(3a^2b + b^3) = 2b(3a^2 + b^2)$.

Bilde selbst Zahlenbeispiele zu den beiden letzteren Formeln, um die darin liegende Vereinfachung des Rechnens kennen zu lernen.

f) $$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de.$$

In Worten: das Quadrat einer Summe ist gleich der Summe der Einzelquadrate vermehrt um die Summe der möglichen doppelten Produkte.

Wichtig ist noch folgende andere Anordnung:

$$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2] + [2(a + b + c)d + d^2] + [2(a + b + c + d)e + e^2].$$

Auf dieser Schreibweise, die leicht in Worten auszudrücken ist, beruht das später zu lehrende Ausziehen der Quadratwurzel.

Aufgaben: Zeige, daß:

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc,$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc,$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a + b - c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - 6abc,$$

$$(a - b - c)^3 = a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 + 6abc,$$

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3,$$

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2),$$

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b) = a^5 - b^5,$$

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3,$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b) = a^4 - b^4,$$

$$(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) = a^5 + b^5.$$

Setze in einzelne dieser Formeln für die Buchstaben größere Zahlen ein, um auch hier die Erleichterung der Rechnungen kennen zu lernen. Man kann für jeden Buchstaben auch eine Klammer einsetzen, z. B. $(2\alpha + 3\beta)$ an Stelle von a u. s. w.

23) Unter Dividieren versteht man die Kunst, diejenige Zahl zu finden, die, mit einer gegebenen Zahl multipliziert, eine andere gegebene Zahl giebt.

Beispiel: Welche Zahl giebt mit 3 multipliziert die Zahl 6?

Auflösung. 2, denn $2 \cdot 3 = 6$, oder $\left(\frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 6$. Daher schreibt man $6 : 3 = 2$ oder $\frac{6}{3} = 2$ (lies: 6 durch 3 = 2).

Die gefundene Zahl 2 oder $\frac{6}{3}$ giebt an, wie oft 3 in 6 enthalten ist (wie oft 3 in 6 aufgeht). Aus $2 \cdot 3 = 6$ folgt $3 \cdot 2 = 6$, also ist auch $\frac{6}{2} = 3$, so daß 2 und 3 in Bezug auf ihre Stelle vertauscht werden können; 6 enthält die Zahl 2 dreimal als Teil in sich, dagegen die Zahl 3 nur zweimal.

Allgemein: Welche Zahl giebt, mit b multipliziert, die Zahl a?

Auflösung. Die Zahl $\left(\frac{a}{b}\right)$ oder $(a:b)$; denn $\left(\frac{a}{b}\right)b = a$. Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, daß a ein Vielfaches von b ist (daß b in a aufgeht). Setzt man $\frac{a}{b} = c$, so ist $c \cdot b = a$, zugleich aber auch $b \cdot c = a$, folglich auch $b = \frac{a}{c}$. Demnach können b und c in Bezug auf ihre Stelle vertauscht werden; b ist in a c mal, c in a b mal als Teil enthalten.

In $\frac{a}{b} = c$ nennt man a den Dividendus (die Zahl, die geteilt werden soll), b den Divisor (die teilende Zahl), c oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten der Zahlen a und b (die Zahl, welche angiebt, wie oft b in a enthalten ist).

Aus jeder der Gleichungen

$$\frac{a}{b} = c, \quad a = bc, \quad \frac{a}{c} = b$$

folgen die beiden andern. In Worten lauten sie:

Quotient*) = Dividend durch Divisor.
Dividend = Divisor mal Quotient,
Divisor = Dividend durch Quotient.

*) Das Wort Bruch für Quotient wird vorläufig vermieden, weil das Aufgehen vorausgesetzt war. Danach richten sich vorläufig auch die Zahlenbeispiele.

Divisor und Quotient können vertauscht werden, dagegen kann der Dividend nicht mit einer der andern Größen in eine Vertauschung eintreten.

Aus $a = a \cdot 1$ folgt $\frac{a}{a} = 1$, d. h. jede Zahl ist in sich selbst ein Mal enthalten. Außerdem folgt $\frac{a}{1} = a$, eine Zahl bleibt also bei der Division durch 1 ungeändert, der Divisor 1 darf also weggelassen werden.

Aus der obigen Erklärung $\left(\frac{a}{b}\right)b = a$ folgt: Wird eine Zahl durch eine zweite dividiert und dann mit derselben multipliziert (oder umgekehrt), so bleibt sie ungeändert: Also: Multiplikation und Division durch dieselbe Zahl heben sich gegenseitig auf. (Dies folgt auch daraus, daß $a\frac{b}{b} = a \cdot 1 = a$ ist.)

24) Es ist $\frac{8}{4} \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$, aber auch $\frac{24}{4} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$, folglich ist $\frac{8 \cdot 3}{4} = \frac{8}{4} \cdot 3$. Es ist also gleichgültig, ob man 8 erst mit 3 multipliziert und dann durch 4 dividiert, oder ob man es erst durch 4 dividiert und dann mit 3 multipliziert. Allgemein ist also

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = c\frac{a}{b}.$$

Dies läßt sich folgendermaßen deuten:

a) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Faktoren durch die Zahl dividiert (und den Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert).

b) Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Dividendus mit der Zahl multipliziert (und das Produkt durch den Divisor dividiert).

c) Eine Zahl wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man sie mit dem Dividendus multipliziert und durch den Divisor dividiert.

25) Man kann 30 erst durch 2 und dann noch durch 3 dividieren, also auch unmittelbar durch $2 \cdot 3 = 6$ teilen. Dabei ist

$$\frac{\left(\frac{30}{2}\right)}{3} = \frac{30}{2 \cdot 3} = \frac{\left(\frac{30}{3}\right)}{2} = 5.$$

Allgemeiner: Ist a erst durch b teilbar, und dann noch durch c, so ist

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}.$$

In Worten: a) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Divisor mit der Zahl multipliziert.

b) Eine Zahl wird durch ein Produkt dividiert, indem man sie erst durch den einen Faktor dividiert und dann den Quotienten durch den andern Faktor teilt. Die Reihenfolge der Divisionen ist dabei gleichgültig.

26) Aus 24b und 25c folgt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{bd} c = \frac{ac}{bd}.$$

Beispiel: $\frac{24}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{24 \cdot 6}{4 \cdot 3} = 12$. In Worten: Ein Quotient wird mit einem Quotienten multipliziert, indem man die beiden Dividenden und ebenso die beiden Divisoren mit einander multipliziert.

27) Specieller Fall: $\frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, folglich: a) Multipliziert man den Dividenden und den Quotienten mit derselben Zahl, so bleibt der Quotient ungeändert. (Erweitern des Quotienten.)

b) Läßt sich vom Divisor und vom Dividendus derselbe Faktor absondern, so kann dieser bei beiden gestrichen werden, ohne daß der Quotient sich ändert. (Kürzen des Quotienten.)

Beispiel: $\frac{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 5}$; $\frac{60}{30} = \frac{15 \cdot 4}{15 \cdot 2} = \frac{4}{2}$, oder $= \frac{30 \cdot 2}{30 \cdot 1} = \frac{2}{1}$, oder $\frac{10 \cdot 6}{10 \cdot 3} = \frac{6}{3}$ u. s. w.

28) Es ist $a \frac{bc}{bc} = \left(\frac{ac}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = a$. Nun folgt aus $k \cdot l = a$, daß $k = \frac{a}{l}$ ist, folglich ist auch

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}, \quad \text{oder: } \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a\frac{c}{b}.$$

In Worten: Man dividiert durch einen Quotienten, indem man ihn umkehrt und damit multipliciert, d. h. indem man mit dem Divisor multipliziert und durch den Dividenden dividiert. (Selbstverständlich ist $\frac{b}{c}$ in $a\ c$ mal so oft enthalten, wie b, welches $\frac{a}{b}$ mal darin aufgeht.)

Z. B. $\frac{18}{\left(\frac{6}{2}\right)} = \frac{18 \cdot 2}{6} = 3 \cdot 2 = 6$.

Folglich ist auch $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Beispiel: $\frac{\left(\frac{120}{12}\right)}{\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{120}{12} \cdot \frac{2}{10} = \frac{240}{120} = 2.$

29) Es ist $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) c = \frac{a}{c} c + \frac{b}{c} c = a + b$. Nun folgt aus $kc = (a + b) \quad k = \frac{a+b}{c}$, setzt man also für k die Klammer $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$, so folgt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Beispiel: $\frac{8}{4} + \frac{12}{4} = \frac{8+12}{4} = \frac{20}{4} = 5 = 2 + 3.$
In Worten: a) Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes einzelne Glied durch die Zahl dividiert.

b) Quotienten mit demselben Divisor werden addiert, indem man die Dividenden addiert (und die Summe durch den Divisor dividiert).

Beispiel: $\frac{69}{3}$ oder $\frac{60+9}{3} = \frac{60}{3} + \frac{9}{3} = 20 + 3$. Hierauf beruht das Divisionsschema

$$\begin{array}{l} 69 : 3 = 23 \\ \underline{6|} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

was sich ebenfalls auf zweierlei Art in Worten ausdrücken läßt.

31) Es ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Folglich gelten die beiden Formeln

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd},$$

in denen die oberen Zeichen (+) und die unteren Zeichen (—) zusammengehören. In Worten: Zwei Quotienten mit ungleichem Divisor werden addiert, indem man jeden von beiden mit dem Divisor des andern erweitert und dann die neuen Quotienten gleichen Divisors addiert. Dasselbe gilt vom Subtrahieren.

Beispiel: $\frac{8}{4} + \frac{12}{3} = \frac{8 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \frac{24 + 48}{12} = \frac{72}{12} = 6$, wie aus $2 + 4$ zu erwarten war.

32) Einige Übungsbeispiele:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a + b)}{a + b} = a + b.$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a - b)}{a - b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b.$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b} = a + b.$$

$$\frac{ac + bc + ad + bd}{c + d} = \frac{c(a + b) + d(a + b)}{c + d} = \frac{(a + b)(c + d)}{c + d} = a + b.$$

$$\frac{10ac + 15bc + 14ad + 21bd}{2a + 3b} = \frac{5c\,(2a + 3b) + 7d\,(2a + 3b)}{2a + 3b}$$

$$= \frac{(2a + 3b)(5c + 7d)}{2a + 3b} = 5c + 7d.$$

$$\frac{a^2bc^2}{abc} = ac.$$

Übe an einzelnen geeigneten Beispielen schon jetzt das Divisionsschema ein, z. B.

$$\begin{array}{l}
a^2 + 2ab + b^2 : a + b = a + b \\
\underline{a^2 + ab} \\
ab + b^2 \\
\underline{ab + b^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
ac + bc + ad + bd : c + d = a + b \\
\underline{ac + ad} \\
 bc + bd \\
 \underline{bc + bd}
\end{array}$$

II. Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen.

33) Bisher bezeichneten die Buchstaben a, b, c u. s. w. nur positive ganze Zahlen, d. h. solche, die sich durch Addition aus der Zahl 1 herstellen lassen. Infolge dessen wurde die Subtraktionsformel $a - b = c$

auf die Fälle beschränkt, wo $b < a$ ist; und die Divisionsformel $\frac{a}{b} = c$ auf die Fälle, wo a ein Vielfaches von b ist. Beide Beschränkungen engten die Wahl der Übungsbeispiele ein, und schon einfache Aufgaben des praktischen Lebens verlangen die Aufhebung dieser Schranken.

34) Jemand besitze 300 Mark und habe einen Geschäftsverlust von 400 Mark. Wie stellt sich sein Vermögen? Es ist $300 - 400 = (300 - 300) - 100 = 0 - 100$, also ergiebt sich ein Vermögen von $(0 - 100)$ Mark oder wie man kürzer schreibt, von -100 Mark (lies: „minus hundert Mark"). Es handelt sich also um 100 Mark Schulden, wenn man das negative Vermögen als Schuld bezeichnet.

In ähnlicher Weise giebt jede Differenz, deren Subtrahend größer ist, als der Minuend, eine Zahl, die sich als Differenz zwischen 0 und einer anderen herausstellt. So ist

$$5 - 6 = 0 - 1 = -1, \quad 8 - 10 = 0 - 2 = -2,$$
$$3 - 6 = 0 - 3 = -3, \quad 5 - 9 = 0 - 4 = -4.$$

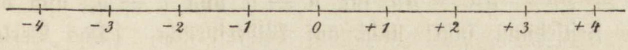
Man nennt jede Differenz, deren Minuend Null ist, eine **negative** Zahl, so daß die Reihe der negativen Zahlen lautet:

$$-1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -5 \text{ u. s. w.}$$

Im Gegensatz dazu nennt man die früher behandelten Zahlen positive und bezeichnet sie als $+1$, $+2$, $+3$, $+4$ u. s. w. Man nennt -5 die **entgegengesetzte Zahl** von $+5$, $-a$ die entgegengesetzte von $+a$.

35) Zur Veranschaulichung der positiven und negativen ganzen Zahlen kann man eine Reihe von Punkten auf gerader Linie markieren, die in gleichen Abständen von einem Punkte 0 aus nach rechts und links aufeinander folgen. Nach rechts mögen sich die positiven Zahlen befinden. Geht man von 5 aus, schrittweise nach links, so gelangt man über 4, 3, 2, 1 nach 0, der nächste Schritt führt nach -1, die folgenden nach -2, -3, -4 u. s. w. Schneidet man von 0 aus nach rechts $+3$ ab, dann vom Endpunkte aus -5 (d. h. 5 nach links), so gelangt man an die Stelle -2, und es ist wirklich $3 - 5 = -2$. In dieser Weise läßt sich an der geraden Linie jedes Addieren und Subtrahieren mit den Zahlen des erweiterten Zahlensystems prüfen.

Fig. 108.



36) Wie $8 - 13 = -5 = -(13 - 8)$ ist, so ist für $b > a$ allgemein $(a - b) = -(b - a)$.

Dies steht im Einklange mit dem Vertauschungsgesetze der Addition, denn $a - b = -b + a$, wobei letzteres mit $-(b - a)$ übereinstimmt. Aus dem Bestehenbleiben dieses Gesetzes folgt für positives c und die negative Größe $(-c)$ noch Folgendes.

$$a + (-c) = a + (0 - c) = (a + 0) - c = a - c,$$
$$a - (-c) = a - (0 - c) = (a - 0) + c = a + c.$$

d. h. Addition einer negativen Zahl bedeutet dasselbe, wie die Subtraktion der entsprechenden positiven; Subtraktion der negativen dasselbe, wie Addition der positiven. (Prüfe dies an den Punkten der gezeichneten Geraden und an dem Beispiele von Vermögen und Schulden.)

Auch alle Gruppierungsgesetze der Addition bleiben für das erweiterte Zahlengebiet bestehen (denn alles Addieren und Subtrahieren mit negativen Zahlen ist auf das Subtrahieren und Addieren positiver zurückgeführt).

37) Hat Jemand 3 mal (d. h. $(+3)$ mal den Geschäftsverlust 400 Mark, so verliert er 1200 Mark, oder er gewinnt, was dasselbe ist, -1200 Mark. Es ist also verstandesgemäß,

$(-400) \cdot 3 = -1200$, also auch $(-400)(+3) = -1200$

und allgemein

a) $$(-a) \cdot (+b) = -ab$$

zu setzen. Dies steht auch im Einklang mit der früheren Formel $(c - a)(d + b) = cd - ad + cb - ab$, denn setzt man hier $c = o$ und $d = o$, so erhält man $(o - a)(o + b) = o \cdot o - a \cdot o + o \cdot b - ab = -ab$. Also gilt das Gesetz: Ist der Multiplikand negativ und der Multiplikator positiv, so ist das Produkt negativ.

38) Wird nun verlangt, daß das Vertauschungsgesetz der Multiplikation bestehen bleibt, so muß man setzen $(+3) \cdot (-400) = -1200$ und allgemein:

b) $$(+b) \cdot (-a) = -ab.$$

[Praktisch deuten ließe sich das Multiplizieren von $(+3)$ mit (-400) etwa als ein 400 maliges Wegnehmen von $(+3)$, was ein Vermindern um 1200 bedeutet.] Setzt man dies fest, so ist man wieder im Einklange mit der Formel $(d + b)(c - a) = dc + bc - ad - ab$ für $d = o$ und $c = o$, und die genannte Festsetzung führt nicht auf Widersprüche. [Das Verlangen, bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes mit den früheren Festsetzungen nicht in Widerspruch zu geraten, ist allerdings berechtigt, aber an sich durchaus keine logische Notwendigkeit. Es handelt sich bei der Formel b) nicht um einen beweisbaren Satz, sondern um eine zweckmäßige Festsetzung.] Die Formel b) sagt lediglich, daß man unter Multiplikation mit einer negativen Zahl dasselbe verstehen will, wie bei der Multiplikation mit einer positiven, jedoch soll dabei das Produkt das entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie bei der letzteren Operation.

39) Hält man Letzteres fest, so muß aus a folgen:

c) $$(-a)(-b) = +ab.$$

Auch dies steht im Einklang mit der früheren Formel $(c-a)(d-b) = cd - ad - cb + ab$ für $c = o$ und $d = o$. [Praktisch ließe sich die Formel c) beispielsweise und zur Not deuten als ein wiederholtes Vermindern oder Wegnehmen von Schulden, was einer Vermehrung des Vermögens gleichkommt. Wer 3 mal seine Schulden um je 400 Mark vermindert, bessert sein Vermögen um + 1200 Mark. Das eigentliche Wesen der Multiplikation negativer Größen mit einander wird jedoch durch solche Deutungen nicht hinreichend getroffen, denn diese erläutern auch nur die in der Formel $(-1)(-b) = -(-b)$ liegende Festsetzung.]

40) So ergiebt sich für den erweiterten Multiplikationsbegriff folgende Vorzeichentabelle:

$+ \cdot + = +$ (plus mal plus = plus)
$- \cdot + = -$ (minus mal plus = minus)
$+ \cdot - = -$ (plus mal minus = minus)
$- \cdot - = +$ (minus mal minus = plus).

41) Hält man ferner bei der Erweiterung des Multiplikationsbegriffes fest, daß aus $a \cdot b = c$ folgen soll $a = \frac{c}{b}$, so gilt ebenso für die Division die Vorzeichentabelle:

$+ : + = +$ (plus durch plus = plus)
$- : + = -$ (minus durch plus = minus)
$+ : - = -$ (plus durch minus = minus)
$- : - = +$ (minus durch minus = plus).

Demnach ist $\frac{-a}{+b} = \frac{o-a}{+b} = -\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b} = \frac{+a}{o-b} = -\frac{a}{b}$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{o-a}{o-b} = +\frac{a}{b}.$$

Jetzt ist das Rechnen mit negativen Zahlen auf das Rechnen mit positiven zurückgeführt, ohne daß Widersprüche entstanden sind. Die früheren Formeln behalten also ihre Geltung auch dann, wenn negative Differenzen auftreten oder die Buchstabengrößen selbst negative Zahlen sind. Die Zeichen $+$ und $-$ werden von jetzt ab Vorzeichen genannt. Der Zahlenwert heißt, wenn man vom Vorzeichen absieht, der absolute Zahlenwert.

42) Wird irgend eine Einheit (sei es eine Münz-, Gewichts- oder Längeneinheit u. dergl.) in 4 gleiche Teile zerlegt, so nennt man jeden Teil $\frac{1}{4}$ der Einheit. Das 4-fache des Teiles giebt die ursprüngliche Einheit wieder, es ist also auch in der reinen Zahlenlehre $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Teilt man dagegen 3 Einheiten in 4 gleiche Teile, so bezeichnet man jeden Teil als ($\frac{3}{4}$ Einheit). Das 4-fache des Teils giebt die ursprünglichen 3 Einheiten wieder. Also ist auch in der reinen Zahlenlehre $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Da aber jetzt das 3-fache der vorigen Einheit geteilt wurde, so muß jeder Teil der neuen Teilung drei mal so groß sein, als jeder der vorigen Teilung, d. h. es ist $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$.

Allgemein: Ist b eine ganze Zahl, und soll die Zahleneinheit 1 in b gleiche Teile zerlegt werden, so bezeichnet man jeden Teil als $\frac{1}{b}$, und es ist $b\frac{1}{b} = 1$. Ist auch a eine ganze Zahl, und soll man diese in b gleiche Teile zerlegen, so bezeichnet man jeden Teil als $\frac{a}{b}$, und es ist $b \cdot \frac{a}{b} = a$ und $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Dabei darf b größer, kleiner oder gleich a sein, keine von beiden Zahlen braucht ein Vielfaches der andern zu sein, beide können positiv, beide negativ, beide können verschiedenen Vorzeichens sein.

Man bezeichnet $\frac{1}{b}$ als die umgekehrte Größe von b und b als die umgekehrte Größe von $\frac{1}{b}$.

43) Da nun $a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ist, so bedeutet die Multiplikation mit $\frac{1}{b}$ dasselbe, wie die Division durch b. Da ferner $b\frac{1}{b} = 1$, also $cb\frac{1}{b} = c$ ist, so folgt nach den früheren Formeln $bc = \frac{c}{\left(\frac{1}{b}\right)}$. Ist

aber $\frac{c}{\left(\frac{1}{b}\right)} = c \cdot b$, so ist die Division durch $\frac{1}{b}$ dasselbe, wie die Multiplikation mit b. Ebenso ist die Multiplikation mit $\frac{a}{b}$ dasselbe, wie die Multiplikation mit a und die Division durch b; die Division durch $\frac{a}{b}$ dasselbe, wie die Division durch a und die Multiplikation mit b.

Man nennt $\frac{a}{b}$ eine gebrochene Zahl oder einen Bruch, a seinen Zähler, b seinen Nenner. Das Multiplizieren und Dividieren durch Brüche läßt sich auf das Multiplizieren und Dividieren mit ganzen Zahlen zurückführen, also treten keine neuen Formeln auf. Der Bruch ist ein Quotient, nur ist jetzt die frühere Beschränkung weggefallen, daß a ein Vielfaches von b sein soll, auch dürfen negative Zahlen auftreten. Mit Brüchen wird also ebenso gerechnet, wie mit Quotienten, auch kann man sie, wie diese, erweitern und kürzen.

44) Dies gilt auch vom Addieren und Subtrahieren. Betrachtet man nämlich z. B. $\frac{1}{8}$ als eine neue Einheit, so ist $3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$, ebenso $2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$, so daß das Vertauschungsgesetz gilt; ebenso folgt aus $5 \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8}$, daß $5 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = 2 \cdot \frac{1}{8}$ ist. Allgemein: $a\frac{1}{b} + c\frac{1}{b} = (a + c)\frac{1}{b} = c\frac{1}{b} + a\frac{1}{b}$; aus $a\frac{1}{b} - c\frac{1}{b} = (a - c)\frac{1}{b}$ folgt, daß $a\frac{1}{b} - (a - c)\frac{1}{b} = c\frac{1}{b}$.

Haben die Brüche verschiedene Nenner, so muß man, um das Addieren zu ermöglichen, eine neue Einheit suchen, den umgekehrten Wert des Hauptnenners. Dies geschieht, wie bei den früheren Quotienten, mit Hülfe der geeigneten Erweiterung.

So ist z. B. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 + 3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$,

allgemein also $\quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{b} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{b + a}{ab}$.

Ebenso ist: $\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{7 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{14 + 15}{21} = \frac{29}{21}$,

und allgemein $\quad \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{b}{b}\frac{c}{a} + \frac{a}{a}\frac{d}{b} = \frac{bc + ad}{ab}$.

45) Haben die Nenner gemeinschaftliche Faktoren, so braucht man als gemeinschaftlichen Nenner (als Hauptnenner) für die Addition nicht das Produkt der Einzelnenner zu nehmen, sondern man kann Vereinfachungen einführen. Z. B.

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 6}=\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 6}=\frac{3+2}{2\cdot 3\cdot 6}=\frac{5}{36}.$$

Allgemein: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}=\frac{c}{c}\cdot\frac{1}{ab}+\frac{b}{b}\cdot\frac{1}{ac}=\frac{c+b}{abc}.$

oder: $$\frac{1}{a^2bc}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{ac^3}=\frac{c^2}{c^2}\frac{1}{a^2bc}+\frac{ac^2}{ac^2}\frac{1}{abc}+\frac{ab}{ab}\frac{1}{ac^3}$$
$$=\frac{c^2+ac^2+ab}{a^2bc^3}$$

Der Hauptnenner wird also gefunden, indem man jeden Nenner in seine Grundfaktoren (bei Zahlen die sogenannten Primfaktoren) zerlegt und jeden der letzteren so oft als Faktor hinschreibt, als er am häufigsten vorkommt. Das Produkt der Zahlen giebt dann den Hauptnenner. [Primzahlen sind solche ganze Zahlen, die nur durch 1 ohne Rest teilbar sind.]

Zahlenbeispiel: $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{8}.$

$$\begin{aligned}12&=2\cdot 2\cdot 3\\18&=2\cdot 3\cdot \underline{3}\\15&=3\cdot \underline{5}\\20&=2\cdot 2\cdot 5\\8&=\underline{2\cdot 2\cdot 2}\end{aligned}$$

Durch Unterstreichen ist angezeigt, wo der betreffende Primfaktor am häufigsten vorkommt.

Hauptnenner $= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 8\cdot 9\cdot 5 = 360.$

Summe der Brüche $=\frac{30}{12\cdot 30}+\frac{20}{18\cdot 20}+\frac{24}{15\cdot 24}+\frac{18}{18\cdot 20}+\frac{45}{8\cdot 45}=\frac{137}{360}.$

Ebenso ist es, wenn die Zähler andere Zahlen, als 1 sind.

46) **Beispiele:** $$\frac{c}{a+b}+\frac{d}{a-b}=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{a^2-b^2};$$

$$\frac{c}{a+b}+\frac{d}{a^2-b^2}=\frac{c}{a+b}+\frac{d}{(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{a-b}{a-b}\cdot\frac{c}{a+b}+\frac{d}{(a+b)(a-b)}=\frac{c(a-b)+d}{a^2-b^2};$$

$$\frac{c}{a^2+2ab+b^2}+\frac{d}{a^2-b^2}=\frac{c}{(a+b)(a+b)}+\frac{d}{(a+b)(a-b)}$$
$$=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{(a+b)(a^2-b^2)}=\frac{c(a-b)+d(a+b)}{a^3+a^2b-ab^2-b^3}.$$

Somit läßt sich das Addieren und Subtrahieren mit Brüchen genau so durchführen, wie bei den früheren Quotienten. Die Formeln des vorigen Kapitels gelten demnach auch für gebrochene, und, wie vorher gezeigt, auch für negative Zahlen.

[Stelle die für Quotienten gefundenen Rechnungsregeln für Brüche zusammen, und sage statt Dividend und Divisor jetzt Zähler bezw. Nenner.]

47) Divisionsübungen. Das Divisionsschema

$$\begin{array}{l}
2784 : 12 = 232 \\
\underline{24} \\
38 \\
\underline{36} \\
24 \\
\underline{24}
\end{array}$$

ist eigentlich aus folgendem durch ein Beispiel veranschaulichten hervorgegangen:

$$\begin{array}{l}
2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4 : (10 + 2) = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \\
\underline{2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2} \\
\qquad\quad 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 \\
\qquad\quad \underline{3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10} \\
\qquad\qquad\qquad 2 \cdot 10 + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2 \cdot 10 + 4}
\end{array}$$

Setzt man a statt 10, so erhält man als Beispiel für das allgemeine Schema:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{l}
2a^3 + 7a^2 + 8a + 4 : (a + 2) = 2a^2 + 3a + 2 \\
\underline{2a^3 + 4a^2} \\
\qquad 3a^2 + 8a \\
\qquad \underline{3a^2 + 6a} \\
\qquad\qquad 2a + 4 \\
\qquad\qquad \underline{2a + 4}
\end{array}$$

Führe dieselbe Aufgabe durch in der umgekehrten Anordnung

$$4 + 8a + 7a^2 + 2a^3 : (2 + a).$$

Wesentlich ist dabei die Reihenfolge der Glieder des Dividendus und des Divisors, indem a^3, a^2, a und das Glied ohne a auf einander folgen, genau so, wie vorher 10^3, 10^2, 10 u. s. w. Bei jeder Aufgabe muß also rechts und links zunächst gleichmäßig geordnet werden. So ist z. B.

b) $$\begin{array}{l} 8a^3 + 18a^2b + 19ab^2 + 15b^3 : (2a + 3b) = 4a^2 + 3ab + 5b^2. \\ \underline{8a^3 + 12a^2b} \\ \qquad 6a^2b + 19ab^2 \\ \qquad \underline{6a^2b + 9ab^2} \\ \qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3 \\ \qquad\qquad 10ab^2 + 15b^3 \end{array}$$

Sind Brüche dabei, so folgen z. B. auf einander a^2, a, Glied ohne a, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. z. B.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{9}a^4 - \frac{8}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} : \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2}{5b^2}\right) = \frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{5b^2} \\ \underline{\frac{2}{9}a^4 - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2}} \\ \qquad - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} \\ \qquad - \frac{4}{15}\frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{25b^4} \end{array}$$

Divisionen brauchen nicht immer aufzugehen. In den meisten Fällen bleibt ein Rest übrig. So ist z. B. $\frac{12}{7} = 1 + \frac{5}{7}$, d. h. die Division von 12 durch 7 läßt den Rest 5, der besonders durch 7 zu teilen ist, was neben der ganzen Zahl einen echten Bruch giebt.

Ähnlich bleibt in der Arithmetik häufig ein Restglied, z. B.

$$\begin{array}{l} 2a + 3b : (a + b) = 2 + \frac{b}{a + b} \\ \underline{2a + 2b} \\ \text{Rest: } b \end{array}$$

48) Bemerkung über die Primzahlen.

In Abschnitt 45 wurde von den Primfaktoren gesprochen, d. h. von den Primzahlen,*) in deren Produkt sich jede Zahl zerlegen läßt; z. B. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Man findet die Reihe der Primzahlen beliebig weit durch das sogenannte „Sieb des Eratosthenes". Schreibt man nämlich die Zahlenreihe hin, und streicht man von 2 ab jede zweite Zahl, so erhält man die Primzahlen bis zur Stelle $3 \cdot 3 = 9$. Streicht man darauf von 3 ab die dritten Zahlen, so erhält man die Primzahlen bis zu $5 \cdot 5 = 25$. Streichung der 5ten Zahlen giebt die Primzahlen bis $7 \cdot 7 = 49$ u. s. w. Also:

1, 2, 3, (4), 5, (6), 7, (8), (9), (10), 11, (12), 13, (14), (15), (16), 17, (18), 19, (20), (21), (22), 23, (24), (25), (26),

*) Dieser Abschnitt ist im Rechenunterrichte zu behandeln, wo solcher auf IIIb gegeben wird.

(27), (28), 29, (30), 31, (32), (33), (34), (35) (36), 37, (38), (39), (40), 41, (42), 43, (44), (45), (46), 47, (48), (49) u. s. w.

Die hier stehengebliebenen Zahlen sind die absoluten Primzahlen bis 47 (bezw. 49). —

Unter relativen Primzahlen versteht man solche, die, ohne absolute Primzahlen zu sein, keinen gemeinschaftlichen Teiler haben. So sind z. B. 12 und 35 relative Primzahlen, dagegen sind 12 und 15 keine solchen.

[48b) In jeder ganzen Quadratzahl ist jeder Primfaktor in gerader Anzahl vorhanden, z. B. $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$.

Ist der Quotient zweier ganzer Quadratzahlen eine ganze Zahl, so ist diese eine Quadratzahl.

Beispiel. $\frac{15^2}{3^2} = \frac{255}{9} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = 5 \cdot 5 = 25.$

Die beim Heben übrig bleibenden Primfaktoren müssen nämlich doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden sein.

Ist der Quotient zweier ganzer Quadratzahlen keine ganze Quadratzahl, so ist er nicht eine andere ganze Zahl, sondern das Quadrat eines Bruches.

Beispiel. $\frac{100}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$

Beim Heben bleibt nämlich nur noch ein Quotient relativer Primzahlen, deren jede doppelt oder in gerader Anzahl vorhanden ist. Hiervon wird später eine wichtige Anwendung gemacht.

III. Dezimalbrüche.*)

49) Es ist $\frac{271}{100} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$, oder in bekannter Schreibweise $= 2{,}71$.

Ein Bruch, dessen Nenner 10 oder 100 oder 1000 oder eine andere daraus durch Multiplikation mit 10 entstehende Zahl ist, läßt sich so ordnen, daß erst die Ganzen, dann die Zehntel, Hundertstel u. s. w. geschrieben werden. Man nennt ihn Dezimalbruch. Durch Ansetzen von Nullen hinter dem Komma wird er nicht geändert. (Die ganze

*) Dieses Kapitel, dessen schon in der Geometrie gedacht wurde, ist möglichst dem Rechenunterrichte zuzuweisen, das über die Irrationalzahl Gesagte muß aber in der Arithmetik zur Sprache kommen.

Zahl, bei der man hinter dem Komma eine Reihe von Nullen setzt, kann auch als Dezimalbruch aufgefaßt werden).

50) Eine Summe solcher Brüche giebt stets wieder einen Dezimalbruch.

Beispiel: $3 + \frac{4}{1000} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100}$

$$= 3 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{8}{1000} = 3{,}278.$$

Additionsschema: 5,98300 oder: 5,983

$$\begin{array}{r} 5{,}98300 \\ 2{,}72861 \\ \hline 8{,}71161 \end{array} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{array}{l} 5{,}983 \\ 2{,}72861 \\ \hline 8{,}71161 \end{array}$$

51) Eine Differenz von Dezimalbrüchen ist stets wieder ein Dezimalbruch.

Beispiel: $5{,}4631 - 2{,}132 = 5\frac{4631}{10\,000} - 2\frac{1320}{10\,000} = 3\frac{3311}{10\,000} = 3{,}3311.$

Subtraktionsschema:

$$\begin{array}{r} 5{,}4631 \\ 2{,}1320 \\ \hline 3{,}3311 \end{array} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{array}{l} 5{,}4631 \\ 2{,}132 \\ \hline 3{,}3311 \end{array}$$

52) Rückt man das Komma eines Dezimalbruchs um eine, zwei, drei Stellen u. s. w. nach rechts, so ist er mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliziert worden; z. B.

$$5296{,}21 = 5{,}29621 \cdot 1000.$$

Rückt man das Komma um 1, 2, 3 u. s. w. Stellen nach links, so ist der Bruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert worden, z. B.

$$31{,}9826 = 31982{,}6 : 1000.$$

53) Die Multiplikation der Dezimalbrüche geschieht wie die der ganzen Zahlen, nur werden zum Schluß von rechts her so viele Stellen durch das Komma abgeschnitten, als beide Brüche zusammen Dezimalstellen hatten. (Denn $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100\,000}$, die Anzahl der Nullen im Nenner des Produktes ist gleich der Anzahl der Nullen in beiden Faktoren zusammengenommen.)

Multiplikationsschema:

$$\begin{array}{r} 0{,}5388 \\ 22{,}3 \\ \hline 16164 \\ 10776 \\ 10776 \\ \hline 12{,}01524 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}231 \\ 0{,}012 \\ \hline 462 \\ 231 \\ \hline 0{,}002772 \end{array}$$

Reicht die Anzahl der Stellen zum Abschneiden nicht aus, so sind Nullen in hinreichender Zahl vorzusetzen.

54) Nicht aufgehende Division ganzer Zahlen durcheinander kann dezimal fortgesetzt werden. Dasselbe gilt von der Division eines Dezimalbruchs durch eine ganze Zahl.

Z. B. 107 : 4 = 26,75	10,7 : 4 = 2,675	1,07 : 4 = 0,2675.
8	8	0,
27	27	10
24	24	8
30	30	27
28	28	24
20	20	30
20	20	28
		20
		20

55) In derselben Weise wird jeder gewöhnliche Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt.

$\frac{3}{8}$ z. B. giebt 3 : 8 = 0,375.
0
30
24
60
56
40
40

56) Geht die Division jenseits des Kommas nach so häufiger Wiederholung, als verschiedene Reste möglich sind, nicht auf, so wiederholen sich die Reste periodisch. Der Dezimalbruch wird dann endlos und periodisch. (Die Periode kann aber schon früher beginnen.)

Beispiele: $\frac{5}{6}$ giebt 5 : 6 = 0,8333 ...
0
50
48
20
18

$$\tfrac{5}{7} \text{ giebt } 5:7 = 0{,}714285\ 714285\ \ldots.$$

Ebenso ist:

$$\tfrac{28733}{99900} = 0{,}28\,761\,761\ \ldots.$$

Der Dezimalbruch heißt rein periodisch, wenn unmittelbar hinter dem Komma die Periode beginnt. Beginnt sie später, so heißt er unrein periodisch. Die Stellen zwischen dem Komma und der Periode bilden die Vorperiode.

57) Einen rein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch, indem man die Periode als Zähler schreibt und als Nenner so oft die Ziffer 9 setzt, als die Periode Stellen hat.

Beispiel: $0{,}843\,843\,843\ \ldots = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}$.

Beweis: Den Wert des Bruches setze man gleich x, dann ist im Beispiele

$$\begin{aligned} 1000\,x &= 843{,}843\,843\ \ldots \\ x &= 0{,}843\,843\ \ldots \end{aligned}$$

durch Subtraktion $999\,x = 843{,}000\,000\ \ldots$

$$\text{d. h. } x = \frac{843}{999} = \frac{281}{333}.$$

58) Einen unrein periodischen Dezimalbruch verwandelt man in einen gewöhnlichen, indem man Vorperiode und Periode als eine Zahl hintereinander schreibt und die Vorperiode abzieht. Dies giebt den Zähler. Als Nenner schreibt man so oft 9, wie die Periode Ziffern zählt und schließt so oft Null an, wie die Vorperiode Ziffern hat.

Beispiel: $0{,}28\,463\,463\,463\ \ldots;$

$$x = \frac{\begin{array}{r} 28\,463 \\ 28 \\ \hline 28\,435 \end{array}}{99\,900} = \frac{5687}{19\,980}.$$

Beweis: Setzt man den Wert des Bruches $= x$, so ist im Beispiele

$$\begin{aligned} 100\,000\,x &= 28\,463{,}463\,463\ \ldots. \\ 100\,x &= 28{,}463\,463\ \ldots. \end{aligned}$$

durch Subtraktion $99\,900\,x = 28\,435{,}000\,000\ \ldots.$

$$\text{also } x = \frac{28\,435}{99\,900} = \frac{5687}{19\,980}.$$

[59) Hat der Dezimalbruch keine Periode, und ist er trotzdem unendlich lang, so läßt er sich nicht in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Denn wäre er aus einem gewöhnlichen Bruche entstanden, so müßte er periodisch sein, da die Reste sich schließlich doch wiederholen würden. Betrachtet man ihn als rein periodisch, jedoch mit unendlich langer Periode, so erhält der Zähler unendlich viele Stellen und der Nenner ebenso oft die Zahl 9. Statt dessen kann man ihn, wie es gewöhnlich geschieht, auch als gewöhnlichen Bruch schreiben, dessen Nenner 1 mit unendlich vielen Nullen ist. Einen solchen Bruch nennt man eine Irrationalzahl. Als eine solche ist z. B. $\pi = 3{,}14159265\ \ldots$ nachgewiesen worden (vergl. Geometrie), was nun als $\frac{314159265\ \ldots}{99999999\ \ldots}$ oder als $\frac{314159265\ \ldots}{100000000\ \ldots}$ aufzufassen ist, jedoch mit endlosem Zähler und Nenner. Die ganzen Zahlen, die gewöhnlichen Brüche, die endlichen Dezimalbrüche und die endlosen periodischen Brüche nennt man Rationalzahlen. Mit ihnen kann man absolut genau rechnen. Beim Rechnen mit Irrationalzahlen dagegen berücksichtigt man nur eine beliebige Anzahl von Stellen. Durch Einführung der Irrationalzahlen wird es erreicht, daß jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl entspricht und umgekehrt jeder Zahl ein Punkt der Geraden]

60) Die Division eines Dezimalbruchs durch einen Dezimalbruch geschieht, indem man in beiden Zahlen das Komma so lange nach rechts schiebt, bis der Divisor eine ganze Zahl wird.

Beispiel: $\frac{13{,}75}{0{,}125} = \frac{13\,750}{125} = 110.$

$\frac{1{,}51}{0{,}7} = \frac{15{,}1}{7}$, worauf die Division wie gewöhnlich erfolgt.

61) Schema der abgekürzten Multiplikation für 5-stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

125,21	125,21	
28,345	28,345	
25042	25042	
10017	10016	8
346	375	63
50	50	084
6	6	2605
3549,1	3549,0	7745

Alles rechts vom Strich stehende ist dabei überflüssige Rechnung.

62) Schema der abgekürzten Division für 5=stelliges Rechnen, erläutert durch Vergleich mit der gewöhnlichen Ausführung:

3549,1 : 125,21 = 28,345.

25042
10449
10017
432
376
56
50
6

3549,1 : 125,21 = 28,345 . . .

25042	
10449	0
10016	8
432	20
375	63
56	570
50	084
6	4860
6	2605
	. . . . .

B. Lehraufgabe der Tertia a.

(Secunda der Realschulen.)

(Zweiter Jahrgang.)

I. Proportionen.*)

63) Der Quotient $\frac{a}{b}$ wurde schon früher als das Verhältnis der Größe a zur Größe b bezeichnet. Sind zwei Verhältnisse einander gleich, so nennt man die entsprechende Gleichung eine Proportion. So sind z. B. die Quotienten $\frac{6}{3}$ und $\frac{8}{4}$ gleich, also ist $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ eine Proportion. Man schreibt dieselbe auch folgendermaßen:

$$6 : 3 = 8 : 4$$

(lies: es verhält sich 6 zu 3 wie 8 zu 4.) Hier heißen 6 und 4 die äußeren Glieder, 3 und 8 die inneren. Im Beispiele ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

*) Auf Schulen, die auf Tertia Rechenunterricht haben, kann auch dieses Kapitel dem Rechnen überwiesen werden. Einiges ist bereits in der Geometrie behandelt worden.

Allgemein sei

$$a : b = c : d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

eine richtige Proportion. Dann folgt aus der letzten Gleichung durch beiderseitige Multiplikation mit bd

$$\frac{a}{b}\, bd = \frac{c}{d}\, bd \quad \text{oder} \quad ad = bd.$$

Folglich: **Ist eine Proportion richtig, so ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren.** (Umkehrung?)

64) **Aufgabe:** Die drei ersten Glieder einer Proportion seien gegeben, das vierte soll berechnet werden.

Auflösung. Aus $a : b = c : x$ folgt $ax = bc$, also, wenn beiderseits durch a dividiert wird,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Beispiel: $$5 : 9 = 4 : x.$$

Auflösung: $$x = \frac{4 \cdot 9}{5} = \frac{36}{5} = \frac{72}{10} = 7{,}2.$$

65) **Aufgabe:** Stelle die Proportion $6 : 3 = 8 : 4$ auf alle möglichen Arten so um, daß sie richtig bleibt; z. B. $6 : 8 = 3 : 4$, wobei ebenfalls das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren ist.

66) Aus jeder Proportion lassen sich andere Proportionen ableiten. Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt nämlich $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ oder $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, oder durch Umstellung der Proportion:

a) $$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}, \text{ oder } (a+b) : (c+d) = b : d.$$

Ebenso ist $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ oder $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, oder durch Umstellung der Proportion

b) $$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}, \text{ oder } (a-b) : (c-d) = b : d.$$

Hieraus und aus a) folgt, da die rechten Seiten übereinstimmen:

$$(a+b) : (c+d) = (a-b) : (c-d),$$

oder auch

c) $$a + b : a - b = c + d : c - d.$$

So folgt z. B. aus $6 : 3 = 8 : 4$

$$(6 + 3) : (8 + 4) = 3 : 4 \quad \text{oder} \quad 9 : 12 = 3 : 4$$
$$(6 - 3) : (8 - 4) = 3 : 4 \quad \text{oder} \quad 3 : \ 4 = 3 : 4$$
$$(6 + 3) : (6 - 3) = (8 + 4) : (8 - 4) \quad \text{oder} \quad 9 : 3 = 12 : 4.$$

Also: Ist eine Proportion richtig, so verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes wie das zweite zum vierten (oder erste zum dritten). Dasselbe gilt von den entsprechenden Differenzen. Außerdem verhält sich die Summe der beiden ersten zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten zu ihrer Differenz.

Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$ folgt durch Multiplikation der rechten und linken Seiten:

$$\frac{a a_1}{b b_1} = \frac{c c_1}{d d_1}.$$

Also: Multipliziert man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen mit einander, so entsteht eine neue Proportion.

[67) Sind drei Verhältnisse einander gleich, z. B. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, und ist jeder Quotient $= n$, so ist $a = na_1$, $b = nb_1$, $c = nc_1$, folglich $a + b + c = na_1 + nb_1 + nc_1 = n\,(a_1 + b_1 + c_1)$, und $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = n = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Folglich: Aus $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ folgt $\frac{a + b + c}{a_1 + b_1 + c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. In Worten: Sind mehrere Brüche (Verhältnisse) einander gleich, so ist das Verhältnis der Summe der Zähler zur Summe der Nenner gleich jedem der gegebenen Verhältnisse.

So folgt z. B. aus $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ daß $\frac{2 + 4 + 10}{3 + 6 + 15} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ ist.]

Anwendungen der Proportionen bietet die Ähnlichkeitslehre der Geometrie. Dort spielt eine besondere Rolle die stetige Proportion $a : b = b : c$, aus welcher folgt $b^2 = ac$. Hier heißt b die mittlere Proportionale zwischen a und c. (Pythagor. Lehrsatz; Goldner Schnitt.)

II. Gleichungen vom ersten Grade.

68) In jeder Gleichung kann man gewisse Umstellungen machen, die ihre Richtigkeit fortbestehen lassen. Ist z. B. $a + b = c$, so folgt daraus, wie schon früher gezeigt wurde, durch Subtraktion von b auf beiden Seiten, $a = c - b$. Folglich:

Schafft man in einer Gleichung einen Summanden auf die andere Seite, und giebt man ihm das entgegengesetzte Vorzeichen, so bleibt die Gleichung richtig. (Dabei kann es vorkommen, daß sich Glieder wegheben.)

69) Ist ferner $a(b + c) = d$, so folgt daraus durch Division beider Seiten durch a:

$$b + c = \frac{d}{a}.$$

Ebenso folgt aus $a(b + c) = d + e$ $\quad b + c = \frac{d + e}{a}$.

Folglich: Macht man in einer Gleichung einen Faktor der ganzen einen Seite zum Divisor der ganzen andern Seite, so bleibt die Gleichung richtig.

Ebenso läßt sich jeder Divisor als Multiplikator auf die andere Seite schaffen. (Dabei kann es vorkommen, daß Faktoren sich aufheben.)

70) Es giebt Gleichungen, die für jeden Zahlenwert richtig sind. So ist z. B. für jeden beliebigen Wert von x und b

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2.$$

Eine solche Gleichung heißt eine identische Gleichung.

71) Andere Gleichungen giebt es, die nur für bestimmte Werte gelten. So ist z. B. die Gleichung $x + 5 = 10$ nur dann möglich, wenn $x = 5$ ist. Die Kunst, die Werte einer Größe x aufzufinden, für welche eine mit x behaftete und nicht identische Gleichung richtig ist, heißt das Auflösen der Gleichung. Gleichungen solcher Art heißen Bestimmungsgleichungen. Die zu bestimmende Größe nennt man die unbekannte Größe. Es wird sich zeigen, daß auch mehrere Unbekannte vorhanden sein dürfen, wobei jedoch zur Bestimmung der Unbekannten ebenso viele Gleichungen erforderlich sind.

72) Kommt die Unbekannte nur in der Form x in der Gleichung vor, so heißt die letztere eine Gleichung vom ersten Grade. Kommt

x auch in der Form x^2 vor, so ist die Gleichung vom zweiten Grade, kommt x auch in der Form x^3 vor, so ist die Gleichung vom dritten Grade.

73) Die Normalform der Bestimmungs-Gleichung ersten Grades ist $ax = b$, ihre Lösung ist $x = \frac{b}{a}\cdot$ Jede Gleichung ersten Grades läßt sich auf diese Form zurückführen. Man hat nur nötig, die Glieder mit x auf die linke Seite, die Glieder ohne x auf die rechte zu bringen.

Ist z. B. $\quad 2x - 3 = 5(2 - x) + 3(x - 4)$,

so löse man zunächst die Klammern, in denen x steht, auf und führe dann das oben Verlangte durch. Also:

$$2x - 3 = 10 - 5x + 3x - 12,$$
$$2x + 5x - 3x = 10 - 12 + 3,$$

oder
$$4x = 1, \text{ d. h. } x = \frac{1}{4}\cdot$$

Ob abgesehen von x wirkliche Zahlen, oder allgemeine durch Buchstaben dargestellte, oder ob beide Arten von Zahlen in der Gleichung stehen, ist gleichgültig. Die Buchstaben werden dabei dem Anfang des Alphabets entnommen; z. B.

$$2ax + 3x(a + b) + 5(ax - b) = 2c + dx$$
$$2ax + 3x(a + b) + 5ax - 5b = 2c + dx$$
$$2ax + 3x(a + b) + 5ax - dx = 5b + 2c$$
$$x(2a + 3a + 3b + 5a - d) = 5b + 2c,$$

oder
$$x(10a + 3b - d) = 5b + 2c$$
$$x = \frac{5b + 2c}{10a + 3b - d}.$$

74) Hebt sich die Unbekannte weg, so ist die Gleichung nur scheinbar eine Bestimmungsgleichung, sie ist also entweder eine identische oder eine falsche, mit einem Widerspruch behaftete Gleichung, z. B. $2(x + 3) = \frac{12 + 4x}{2}$ giebt $4x + 12 = 12 + 4x$ oder $12 = 12$, was selbstverständlich ist. Dagegen giebt

$$2(x + 3) = 7 + 2x, \quad 2x + 6 = 7 + 2x \quad \text{oder} \quad 6 = 7,$$

was falsch ist. Diese Gleichung ist also eine unmögliche.

Bezüglich der Übungsbeispiele wird auf die gebräuchlichen Aufgabensammlungen verwiesen.

75) Es seien zwei Gleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten x und y gegeben, die sich auf folgende Normal-Form bringen lassen:

$$ax + by = c \tag{1}$$

$$a_1 x + b_1 y = c_1, \tag{2}$$

dann sind verschiedene Fälle möglich. Erstens kann die zweite Gleichung die umgeformte erste sein (z. B. bei $a_1 = 2a$, $b_1 = 2b$, $c_1 = 2c$,) so daß sie gar nichts Neues giebt. Dann hat man zwei Unbekannte, aber nur eine Gleichung. Es giebt demnach unendlich viele Lösungen, denn jedem willkürlichen Werte von x entspricht ein bestimmter Wert von y.

Ein anderer Fall ist der, daß beide Unbekannte sich entfernen lassen und nur Richtiges oder Falsches übrig bleibt. Ist z. B. gegeben

$$4x + 6y = 12$$

$$2x + 3y = 7$$

so ergiebt Multiplikation beider Seiten der zweiten Gleichung mit 2 die Gleichung $4x + 6y = 14$. Diese Gleichung kann man durch Subtraktion mit der ersten vereinigen, was $12 = 14$ geben würde. Weil dies falsch ist, widersprechen sich beide Gleichungen.

Der dritte Fall ist der, in dem die Lösung durchführbar ist. Die Lösung kann dann auf verschiedene Arten geschehen.

75) a) Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode).

Aus Gleichung 1) folgt $x = \frac{c - by}{a}$. Dies, in die 2. Gleichung eingesetzt, giebt $a_1 \frac{c - by}{a} + b_1 y = c_1$. Daraus folgt $\frac{a_1 c - a_1 by}{a} + b_1 y = c_1$, oder, wenn man beiderseits mit a multipliziert, $a_1 c - a_1 by + ab_1 y = ac_1$, $y(ab_1 - a_1 b) = ac_1 - a_1 c$, also

$$y = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} \tag{3}$$

Dies, eingesetzt in die obige Hülfsgleichung $x = \frac{c - by}{a}$, giebt

$$x = \frac{c - b\,\frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b}}{a} = \frac{ab_1 c - a_1 bc - abc_1 + a_1 bc}{a(ab_1 - a_1 b)}$$ oder

$$x = \frac{b_1 c - bc_1}{ab_1 - a_1 b} \tag{4}$$

In 3) und 4) hat man die Auflösung beider Gleichungen.

Bei Zahlengleichungen rechnet man aus 3) erst y fertig aus und benutzt den einfachen Wert zur Berechnung von x. Z. B.

$$5x + 7y = 31$$
$$2x + 3y = 13$$

giebt $y = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} = \frac{5 \cdot 13 - 2 \cdot 31}{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7} = \frac{65 - 62}{15 - 14} = \frac{3}{1} = 3$. Dies, eingesetzt in $x = \frac{c - by}{a}$, giebt $x = \frac{31 - 7 \cdot 3}{5} = \frac{31 - 21}{5} = \frac{10}{5} = 2$.

Setzt man $x = 2$ und $y = 3$ in die gegebenen Gleichungen ein, so stimmt die Probe.

76) b) Kombinationsmethode (Gleichsetzungsmethode). Sind die gegebenen Gleichungen die früheren (Abschnitt 74), so berechne man aus beiden x. Dies giebt

$$x = \frac{c - by}{a} \text{ und } x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Da jetzt die linken Seiten der Gleichungen übereinstimmen, sind auch die rechten gleich, d. h.

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}.$$

Hieraus ergiebt sich für y derselbe Wert, wie vorher, und x wird entsprechend gefunden.

Das vorige Zahlenbeispiel erledigt sich folgendermaßen: Aus $x = \frac{31 - 7y}{5}$ und $x = \frac{13 - 3y}{2}$ folgt $\frac{31 - 7y}{5} = \frac{13 - 3y}{2}$. Hieraus folgt $y = 3$. Dies ist wie vorher in $x = \frac{31 - 7y}{5}$ einzusetzen und giebt $x = 2$.

77) c) Die Additions- bezw. Subtraktionsmethode.

Man multipliziere, um y zu entfernen, beide Seiten der ersten Gleichung mit b_1, beide der zweiten Gleichung mit b. Dies giebt

$$ab_1 x + bb_1 y = b_1 c$$
$$a_1 bx + bb_1 y = bc_1$$

Durch Subtraktion erhält man

$$x(ab_1 - a_1 b) = b_1 c - bc_1,$$

woraus für x derselbe Wert wie vorher folgt. Jetzt kann man den Wert von x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzen und so y

berechnen, oder man gewinnt y, indem man oben mit a_1, unten mit a multipliziert.

Im vorigen Zahlenbeispiele ist zur Entfernung von y die erste Gleichung mit dem Faktor 3, die zweite mit dem Faktor 7 zu erweitern. Aus den Gleichungen

$$15x + 21y = 93$$
$$14x + 21y = 91$$

folgt durch Subtraktion $x = 2$. Dies ist in eine der gegebenen Gleichungen einzusetzen und führt auf $y = 3$.

Verlangen es die Vorzeichen, so entfernt man die eine Unbekannte durch Addition, statt durch Subtraktion. —

Sind die Multiplikationen überflüssig, so führt diese Methode am schnellsten zum Ziele. Z. B. Aus

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$

folgt durch Addition $2x = a + b$, $x = \frac{a+b}{2}$, durch Subtraktion $2y = a - b$, $y = \frac{a-b}{2}$.

[78) Bei drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten x, y und z berechne man zunächst z aus der einen und setze den Wert in die beiden andern ein, so daß nur noch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bleiben, deren Behandlung die vorige ist. Neues bietet sich dabei nicht, und so kann auf die Übungsbücher verwiesen werden.]

III. Die rein quadratischen Gleichungen und das Ausziehen der Quadratwurzel.

79) Gleichungen, die x nur in der Form x^2 $\left(\text{oder } ax^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a}\right)$ enthalten, nicht aber in der Form x, nennt man rein quadratische Gleichungen. Würde außerdem die Form x in der Gleichung vorkommen, so würde sie eine gemischt quadratische heißen.

Manche Gleichungen sehen auf den ersten Blick wie Gleichungen ersten Grades aus, sind aber doch solche zweiten Grades, z. B.

a) $$x + \frac{1}{x} = a$$

giebt durch beiderseitige Multiplikation mit x

$$x^2 + 1 = ax \quad \text{oder} \quad x^2 - ax = -1,$$

was eine gemischt quadratische Gleichung ist. Diese Art von Gleichungen wird erst im folgenden Kapitel behandelt.

Andere sehen wie quadratische Gleichungen aus, sind aber in Wahrheit solche vom ersten Grade, da das Glied x^2 beim Umformen verschwindet, z. B.

b) $(x+a)^2-(x-b)^2=c^2$ giebt $x^2+2ax+a^2-x^2+2bx-b^2=c^2$

oder $2x(a+b) = b^2 + c^2 - a^2$, d. h. $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2(a+b)}$.

Andere endlich sehen wie gemischt quadratische Gleichungen aus, sind aber trotzdem rein quadratische, z. B.

c) $$a^2(x^2-1) - 2(x+1)^2 = \frac{1}{a^2}(1 - 4a^2x - x^2) \text{ giebt}$$

$a^2x^2-a^2-2x^2-4x-2=\frac{1}{a^2}-4x-\frac{x^2}{a^2}$, oder, da $-4x$ sich hebt:

$x^2\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right) = a^2+2+\frac{1}{a^2}$ oder $x^2\left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a+\frac{1}{a}\right)^2$,

oder $$x^2 = \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}.$$

Eine rein quadratische Gleichung läßt sich also stets auf die Form

$$x^2 = a$$

zurückführen.

80) Ist $x^2 = a$, so nennt man x die **Quadratwurzel** aus a, wofür man schreibt $x = \sqrt{a}$, so daß $x \cdot x = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ist.

So ist z. B. $x^2 = 49 = 7 \cdot 7 = x \cdot x$, also $x = \sqrt{49} = 7$. Zugleich ist aber $x^2 = 49 = (-7)(-7) = x \cdot x$,

also auch $$x = \sqrt{49} = -7,$$

folglich $$\sqrt{49} = \pm 7.$$

Ist allgemeiner $x^2 = a$, so hat x die beiden Werte $x = \pm\sqrt{a}$.

Demnach giebt es stets zwei entgegengesetzte Zahlen, die, mit sich selbst multipliziert, eine gegebene Zahl geben. Diese beiden heißen die Quadratwurzeln der letzteren. Das

Auffinden dieser Zahlen nennt man das **Ausziehen der Quadratwurzel**.

So ist $(+\sqrt{a})\cdot(+\sqrt{a}) = a$, und ebenso $(-\sqrt{a})\cdot(-\sqrt{a}) = a$,

oder $$(+\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a.$$

Zieht man also aus einer Zahl die Quadratwurzel aus, und erhebt man die letztere zum Quadrat, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Ist $x^2 = a^2$, so ist $x = \pm a$, denn aus letzterer Gleichung folgt $x^2 = (+a)(+a) = a^2$ und ebenso $(-a)(-a) = a^2$. Es ist also

$$\sqrt{a^2} = \pm a.$$

Erhebt man also eine Zahl zum Quadrat, und zieht man dann die Quadratwurzel aus, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, wieder die ursprüngliche Zahl.

Im Sinne der beiden letzten Sätze kann man sagen: **Das Quadrieren und das Ausziehen der Quadratwurzel heben sich gegenseitig auf, das eine ist die Umkehrung des andern.**

81) Ist $$x^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

so folgt $$x = \pm(a+b) = \pm\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}.$$

Ist $$x^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

so folgt $$x = \pm(a-b) = \pm\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}.$$

Auf die beiden möglichen Vorzeichen soll nur noch aufmerksam gemacht werden, wenn es nötig ist. Man merke also

a) $$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$

b) $$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b.$$

Ferner ist c) $$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

denn quadriert man beide Seiten, so folgt $ab = ab$, was selbstverständlich ist.

Ebenso ist d) $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

weil beiderseitige Quadrierung Übereinstimmendes giebt. Wie lauten c) und d) in Worten?

Folglich ist z. B.

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

ebenso $\sqrt{a^2(b+c)} = \sqrt{a^2}\sqrt{b+c} = a\sqrt{b+c}$

und $\sqrt{\frac{b+c}{a^2}} = \frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b+c}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{b+c}$.

Läßt sich also unter der Wurzel ein quadratischer Faktor vom ganzen Ausdrucke absondern, so kann man aus ihm die Wurzel besonders ausziehen.

Zahlenbeispiele:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sqrt{0{,}75} = \sqrt{0{,}25 \cdot 3} = 0{,}5\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{a^3 + 2a^2b + ab^2} = \sqrt{a(a^2 + 2ab + b^2)} = (a+b)\sqrt{a}\,.$$

Umgekehrt: Man kann einen Faktor der Wurzel unter die Wurzel setzen, indem man ihn quadriert. Z. B.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}\,; \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{8}\sqrt{8} = \sqrt{\tfrac{8}{64}} = \sqrt{\tfrac{1}{8}}\,.$$

Bemerkung. Man vermeide den naheliegenden Fehler $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ gleich $a \pm b$ zu setzen, der als solcher sofort einleuchtet, wenn man beiderseits quadriert.

82) In manchen Ausdrücken lassen sich die Wurzeln entfernen, so daß ihre Ausrechnung nicht nötig ist, z. B.

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b\,.$$

Es lassen sich auch Wurzeln aus dem Nenner in den Zähler schaffen, z. B.

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}\,,$$

eine unmittelbare Folge des vorigen Ausdrucks.

Andere häufige Umformungen sind:

$$(a+\sqrt{b})^2 = a^2 + b + 2a\sqrt{b},$$

$$(a-\sqrt{b})^2 = a^2 + b - 2a\sqrt{b},$$

folglich:

$$(a+\sqrt{b})^2 + (a-\sqrt{b})^2 = 2(a^2+b),$$

$$(a+\sqrt{b})^2 - (a-\sqrt{b})^2 = 4a\sqrt{b}.$$

$$\left[\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right]^2 = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a-c}{2}}$$
$$= a \pm \sqrt{a^2 - c^2},$$

folglich

$$+\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

Setzt man hier $a^2 - c^2 = b$, also $c = \sqrt{a^2 - b}$, so folgt:

$$+\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

83) Das Ausziehen der Quadratwurzel.

Es ist $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Daraus ergiebt sich folgendes Rechenschema:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b\text{*)} \\
\quad a^2 \\
\hline
\quad 2a|2ab \\
\quad\quad 2ab \\
\hline
\quad\quad\quad b^2 \\
\quad\quad\quad b^2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\text{z. B.}\quad
\begin{array}{rl}
& \sqrt{529} = 20 + 3 = 23 \\
a^2 = & 400 \\
\hline
2a = 40| & 129 \\
2ab = & 120 \\
\hline
& 9 \\
b^2 = & 9 \\
\hline
\end{array}$$

Ebenso war nach Nr. 22

$$(a + b + c)^2 = a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2],$$

also gilt folgendes Rechenschema:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2} = a + b + c \\
\quad a^2 \\
\hline
\quad 2a|2ab \\
\quad\quad 2ab \\
\hline
\quad\quad\quad b^2 \\
\quad\quad\quad b^2 \\
\hline
\quad 2(a+b)|2(a+b)c \\
\quad\quad\quad\quad 2(a+b)c \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad c^2 \\
\quad\quad\quad\quad\quad c^2 \\
\hline
\end{array}$$

*) $2a|2ab$ soll heißen $2a$ in $2ab$, also dasselbe wie $2ab : 2a$. Diese Umstellung ist hier aus Raumgründen zweckmäßig.

z. B.

$$
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{104976} = 300 + 20 + 4 \\
a^2 = & 90000 \\
2a = 600| & 14976 \\
2ab = & 12000 \\
 & 2976 \\
b^2 = & 400 \\
2(a+b) = 640| & 2576 \\
2(a+b)c & 2560 \\
 & 16 \\
c^2 = & 16
\end{array}
\qquad
\text{oder abgekürzt}\quad
\begin{array}{rr}
 & \sqrt{104976} = 324 \\
 & 9 \\
6| & 14 \\
 & 12 \\
 & 29 \\
 & 4 \\
64| & 257 \\
 & 256 \\
 & 16 \\
 & 16
\end{array}
$$

Man zieht also die erste Wurzel a aus, dividiert sodann das zweite Glied durch $2a$, was b giebt, worauf b^2 abgezogen wird. Jetzt steht rechts $a + b$, man dividiert durch $2(a + b)$, was c giebt, worauf c^2 abzuziehen ist. Abwechselnd wird also dividiert und das Quadrat der zuletzt gefundenen Zahl abgezogen.

84) Bilde ebenso die Wurzel aus den folgenden Ausdrücken und Zahlen.

$$\sqrt{a^2 + (2ab + b^2) + [2(a + b)c + c^2)] + [2(a + b + c)d + d^2]},$$

$$\sqrt{a^2 + (2ab + b^2) + [2(a+b)c + c^2] + [2(a+b+c)d + d^2] + [2(a+b+c+d)e + e^2]}.$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{5|49|90|25} = 2345 \\
 & 4 \\
4| & 1\,4 \\
 & 1\,2 \\
 & 29 \\
 & 9 \\
46| & 20\,9 \\
 & 18\,4 \\
 & 2\,50 \\
 & 16 \\
468| & 2\,34\,2 \\
 & 2\,34\,0 \\
 & 25 \\
 & 25
\end{array}
\qquad
\text{oder auch:}\quad
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{5|49|90|25} = 2345 \\
 & 4 \\
43| & 1\,49 \\
 & 1\,29 \\
464| & 20\,90 \\
 & 18\,56 \\
4685| & 2\,34\,25 \\
 & 2\,34\,25
\end{array}
$$

Regel: Teile die Zahl von rechts anfangend, in Gruppen zu zweien ein. Ist sie ein Dezimalbruch, so teile vom Komma aus nach rechts und links in Gruppen zu zweien ein. (Steht nämlich vorn 52, so weiß man zunächst nicht, ob man mit $\sqrt{5}$ oder $\sqrt{52}$ beginnen soll. Bei 526 liegt aber die erste Wurzel zwischen 20 und 30, dagegen bei 5263 zwischen 70 und 80. Das eine Mal hatte man die Gruppierung 5 25 und begann mit $\sqrt{5}$, das zweite Mal 52 63 und begann mit $\sqrt{52}$.) — Kann man gelegentlich das Quadrat nicht abziehen, so ist die letzte Rechnung mit dem um 1 niedrigeren Quotienten zu wiederholen, was bisweilen mehrfach geschehen muß. Dies geschieht z. B. im folgenden Beispiele bei der ersten Division durch 2.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{224{,}3896} = 14{,}979\cdots \\
 & \;\;1 \\
2 & 12 \\
 & \;\;8 \\ \hline
 & \;\;44 \\
 & \;\;16 \\ \hline
28 & 283 \\
 & 252 \\ \hline
 & \;\;318 \\
 & \;\;\;\;81 \\ \hline
298 & 2379 \\
 & 2086 \\ \hline
 & \;\;2936 \\
 & \;\;\;\;\;\;49 \\ \hline
2894 & 28870 \\
 & 26946 \\ \hline
 & \;\;19240 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;81 \\ \hline
 & \;\;\;\;\cdots
\end{array}$$

Geht die Rechnung nicht auf, so rechnet man unter Anhängung von Nullen weiter.

Schema für abgekürzte Ausziehung der Quadratwurzel bei sechsstelligem Rechnen:

$\sqrt{26{,}6821} = 5{,}16546$

	25
101	1 68
	1 01
1026	6721
	6156
103	565
	516
10	49
	40
1	9
	6

Probe:

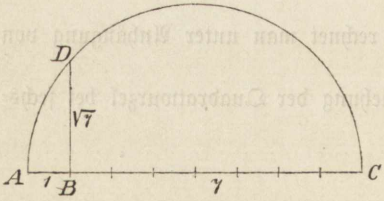
5,16546
5,16546
25 8273
5164
3099
258
20
3
26,6817

Die Ungenauigkeit am Schluß beruht auf den angewandten Abkürzungen. Sie ist als geringfügig zu betrachten.

[85) Die Quadratwurzel aus einer Primzahl ist stets ein endloser Dezimalbruch ohne Periode, d. h. eine Irrationalzahl.

Wäre z. B. $\sqrt{7}$ ein endlicher Dezimalbruch, oder ein endloser mit Periode, also ein rationaler Bruch, so ließe dieser sich als $\frac{m}{n}$ darstellen (vergl. 58), wo m und n ganze Zahlen sind, die man durch Kürzung zu relativen Primzahlen gemacht hat. Dann wäre $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, also $7 = \frac{m^2}{n^2}$. Dies ist aber nach Abschnitt 48b unmöglich, da $\frac{m^2}{n^2}$ keine ganze Zahl sein kann, folglich ist $\sqrt{7}$ irrational. Überhaupt ist die Quadratwurzel aus jeder ganzen Zahl, die nicht Quadratzahl ist, eine Irrationalzahl. Beim Ausziehen der Quadratwurzel aus ganzen Zahlen ist die Irrationalzahl nicht die Ausnahme, sondern die Regel, ihre Einführung ist also nicht etwas Willkürliches und Überflüssiges, sondern eine unbedingte Notwendigkeit. — Die durch Wurzelausziehung entstehenden Irrationalzahlen heißen algebraische Irrationalzahlen im Gegensatz zu den später auftretenden transcendenten.

Fig. 109.



Handelt es sich um Quadratwurzeln (oder um Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln) gewöhnlicher Zahlen, so kann man sie geometrisch darstellen, d. h. mit Zirkel und Lineal konstruieren, und zwar als mittlere Proportionale zwischen der Zahl und 1.

Ist z. B. in Fig. 109 $AB = 1$, $BC = 7$, so ist $BD = \sqrt{7}$, denn $1 : BD = BD : 7$, $BD^2 = 7$, also $BD = \sqrt{7}$. Vergl. Geometrie 171. Aus jeder Zahl also, die sich konstruieren läßt, kann man geometrisch die Quadratwurzel ausziehen, aus dieser Wurzel wiederum die Quadratwurzel, u. s. w.

IV. Grundform der gemischt quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten.*)

86) Zur Lösung gemischt quadratischer Gleichungen vereinigt man zunächst alle Glieder mit x^2, sodann alle Glieder mit x, zuletzt alle Glieder ohne x. Die so gewonnene Form $a_1 x^2 + b_1 x = c_1$ bringt man durch beiderseitige Division durch a_1 noch auf die Form $x^2 + \frac{b_1}{a_1} x = \frac{c_1}{a_1}$ oder auf die Normalform

1) $$x^2 + ax = b.$$

Man kann vorläufig den Kunstgriff anwenden, ax als ein doppeltes Produkt $2\frac{a}{2}x$ zu schreiben und dadurch, daß man rechts und links $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ addiert, die linke Seite in ein vollständiges Quadrat zu verwandeln,

also: $$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

wofür man schreiben kann

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Beiderseitige Ausziehung der Quadratwurzel giebt, da man die Vorzeichen der beiden Wurzeln auf zweierlei Art kombinieren kann,

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

also ist die Lösung

2) $$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}.$$

---

*) Dieser Abschnitt kann auf dem Gymnasium in der Secunda b durchgenommen werden. Die reiche Anwendbarkeit empfiehlt trotzdem die Besprechung in der Tertia a.

[Bezeichnet man $\frac{a}{2}$ als den halben Faktor (von x), so kann man kurz merken:

$x =$ — halber Faktor $\pm \sqrt{\text{halber Faktor zum Quadrat} + \text{rechte Seite}}$.]

Er giebt also zwei Lösungen,

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

und

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$$

Beispiel: $x^2 + x = 12$ giebt, da der Faktor von $x = 1$ ist,

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$, also

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3,\ x_2 = -\frac{8}{2} = -4.$$

Probe: $3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$, $(-4)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. Die beiden möglichen Lösungen (Wurzeln) sind also gefunden.

Beispiel:

$x^2 - 5x = -6$ giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$,

also $\quad x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Wiederhole an beiden Beispielen den allgemeinen Entwickelungsgang. Beachte auch, daß im ersten Beispiele die Summe der Lösungen $3 + (-4) = -1$, ihr Produkt $3 \cdot (-4) = -12$ ist, d. h. abgesehen vom Vorzeichen, den Faktor von x bezw. die rechte Seite giebt, während im zweiten Beispiele $3 + 2 = 5$, $3 \cdot 2 = 6$ ist. Auch bei der allgemeinen Lösung ist $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = -b$. — Eingehendere Besprechung der Gleichung zweiten Grades erfolgt später. Übungsmaterial bieten die Aufgabensammlungen.

V. Potenzen und Wurzeln mit ganzen positiven Exponenten.

87) Werden 2 Faktoren a mit einander multipliziert, so bezeichnet man das Produkt mit a^2, bei 3 Faktoren a schreibt man a^3, bei 4 Faktoren a^4 [lies: a hoch 4 (oder a zur vierten Potenz)] bei n Faktoren a^n, also

1) $$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots a = a^n.$$

Der Ausdruck a^n heißt die n^{te}-Potenz von a, die Zahl a heißt Grundzahl oder Basis derselben, n heißt der Potenz-Exponent.

88) Da $a^2 \cdot a^3 = (aa) \cdot (aaa) = aaaaa = a^5$ ist, so folgt $a^2 \cdot a^3 = a^5$. Allgemein folgt für ganzes m und n

2) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Da $\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2$ ist, so folgt $\frac{a^5}{a^3} = a^2 = a^{5-3}$. Allgemein ist

3) $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ wobei zunächst } m > n \text{ sein soll.}$$

(Aus 2) konnte man folgern: $a^m = \frac{a^{m+n}}{a^n}$, also $\frac{a^{m+n}}{a^n} = a^{(m+n)-n}$.)

Da $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6$ ist, also $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$, so folgt allgemein

4) $$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Aus 2), 3) und 4) folgen für ganzzahlige positive Exponenten folgende Regeln:

a) Potenzen derselben Grundzahl werden mit einander multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

b) Eine Potenz wird durch eine andere derselben Grundzahl dividiert, indem man den Exponenten der letzteren von dem der ersteren abzieht. (Dabei soll vorläufig der Exponent der ersteren Potenz größer als der der zweiten sein.)

c) Eine Potenz wird potenziert, indem man die beiden Exponenten mit einander multipliziert.

Bei a) und c) ist die Reihenfolge gleichgültig, also z. B.

$$a^m a^n a^q = a^{m+n+q} = a^{n+m+q} = a^{q+m+n} \text{ u. s. w.}$$

$$[(a^m)^n]^q = a^{mnq} = a^{qmn} = a^{nqm} \text{ u. s. w.}$$

89) Es ist $\frac{a^3}{a^5} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$, also $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}}$

Allgemeiner ist $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}},$$

sobald $n > m$ ist.

Wird also eine Potenz durch eine andere von derselben Grundzahl dividiert, deren Exponent größer ist, so dividiert man 1 durch die Potenz, deren Exponent die positive Differenz der beiden gegebenen Exponenten ist.

90) Ferner ist

$$(ab)^3 = (ab)\,(ab)\,(ab) = aaa\,bbb = a^3b^3,$$

allgemein 5) $$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Ähnlich ist $$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3},$$

allgemein 6) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Daraus entspringen die Regeln:

d) Ein Produkt wird potenziert, indem man die einzelnen Faktoren potenziert.

e) Ein Bruch wird potenziert, indem man den Zähler und den Nenner potenziert.

91) Der Ausdruck $x = \sqrt{a}$ gilt als Auflösung der Gleichung $x^2 = a$. Ebenso gilt $x = \sqrt[3]{a}$ (lies: dritte Wurzel aus a) als Auflösung der Gleichung $x^3 = a$. (Von der Möglichkeit, daß mehrere Wurzelwerte existieren können, soll hier abgesehen werden.) Allgemein:

1) $x = \sqrt[n]{a}$ ist die Auflösung der Gleichung $x^n = a$.

Hier heißt $\sqrt[n]{a}$ die n^{te} Wurzel aus a, n der Wurzel-Exponent, der zunächst eine ganze positive Zahl sein soll, die Zahl a heißt der Radikand (die Zahl, aus der die Wurzel ausgezogen werden soll).

Nach dieser Erklärung ist

2) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

92) Ist $x = \sqrt[n]{a}$, so folgt $x^n = a$, ist ferner $y = \sqrt[n]{b}$, so folgt $y^n = b$.

Durch Multiplikation ergiebt sich aus den neuen Gleichungen $x^n y^n = ab$, oder $(xy)^n = ab$, folglich $xy = \sqrt[n]{ab}$, oder

3) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, allgemeiner: $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\,\ldots = \sqrt[n]{abc\ldots}$

Durch Division dagegen hätte man gefunden $\frac{x^n}{y^n} = \frac{a}{b}$ oder $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}$, d. h. $\frac{x}{y} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, oder

4) $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Folglich gelten die Regeln:

a) Man multipliziert Wurzeln mit gleichen Exponenten, indem man die Radikanden multipliziert (und aus dem Produkte die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:

b) Die Wurzel wird aus einem Produkte ausgezogen, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht (und das Produkt der Einzelwurzeln bildet).

c) Eine Wurzel wird durch eine andere derselben Grundzahl dividiert, indem man den Radikanden der ersten durch den der zweiten dividiert (und aus dem Bruche die Wurzel auszieht). Und umgekehrt:

d) Ein Bruch wird radiziert, indem man Zähler und Nenner einzeln radiziert (und die erste der entstandenen Wurzeln durch die zweite dividiert).

93) Aus $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{a}\cdots = \sqrt[n]{a\cdot a\cdot a\cdots}$

folgt 5) $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ also:}$$

e) Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Radikanden potenziert (und aus der entstandenen Potenz die Wurzel auszieht); und umgekehrt:

f) Man zieht die Wurzel aus einer Potenz aus, indem man sie aus der Grundzahl auszieht (und die so entstandene Wurzel zur entsprechenden Potenz erhebt). Oder:

g) Hat man eine Zahl zu potenzieren und zugleich zu radizieren, so ist die Reihenfolge gleichgültig.

94) Ist $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$, so folgt $\sqrt[n]{a} = x^m$, folglich $a = (x^m)^n = x^{mn}$. Aus $x^{mn} = a$ folgt aber $x = \sqrt[mn]{a}$. Dies, in die Anfangsgleichung eingesetzt, giebt

6) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ und allgemeiner:}$$

6*) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}.$$

Also: h) Soll eine Zahl mehrfach nacheinander radiziert werden, so kann man sie mit dem Produkte der Exponenten radizieren. Umgekehrt:

i) Man radiziert eine Zahl durch ein Produkt, indem man mit den einzelnen Exponenten nacheinander radiziert.

95) Es war $\sqrt[n]{x^n} = x$. Setzt man a^p für x ein, so erhält man

$$\sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p \text{ oder } \sqrt[n]{a^{pn}} = a^p.$$

Zieht man beiderseits die q^{te} Wurzel aus, so ergiebt sich

7) $$\sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{a^p}.$$ Folglich:

k) Die Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multipliziert; dasselbe gilt, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl dividiert, vorausgesetzt, daß diese Division einen ganzzahligen Exponenten giebt.

Übungsbeispiele siehe in den Aufgabensammlungen.

16) Ausziehung der Kubikwurzel.*)

Es war $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Daraus ergiebt sich als Rechenschema:

$$\begin{array}{l|llll}
 & \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\
 & a^3 \\ \hline
3a^2 & 3a^2b \\
 & 3a^2b \\ \hline
 & \quad 3ab^2 \\
 & \quad 3ab^2 \\ \hline
 & \qquad b^3 \\
 & \qquad b^3 \\ \hline
\end{array}$$

Beispiel.

$$\begin{array}{r|r}
 & \sqrt[3]{12167} = 20 + 3 \\
 & 8000 \\ \hline
3 \cdot 20^2 = 1200 & 4167 \\
 & 3600 \\ \hline
 & 567 \\
3 \cdot 20 \cdot 3^2 = & 540 \\ \hline
 & 27 \\
3^3 = & 27 \\ \hline
\end{array}$$

Oder abgekürzt geschrieben:

$$\begin{array}{r|r}
 & \sqrt[3]{12|167} = 23 \\
 & 8 \\ \hline
3 \cdot 2^2 = 12 & 4\,1 \\
 & 3\,6 \\ \hline
 & 56 \\
3 \cdot 2 \cdot 3^2 = & 54 \\ \hline
 & 27 \\
3^3 = & 27 \\ \hline
\end{array}$$

*) Dieser Abschnitt kann auf dem Gymnasium ganz entbehrt werden, da man sich dort auf die logarithmische Berechnung beschränken darf.

Ferner war:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc,$$

was sich folgendermaßen ordnen läßt:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + (3a^2b + 3ab^2 + b^3) + [3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3].$$

Das entsprechende Rechenschema ergiebt sich aus folgendem Beispiele:

$$\begin{array}{lr}
 & \sqrt[3]{14348907} = 200 + 40 + 3 \\
a^3 = 200^3 = & 8000000 \\
3a^2 = 120000 & 6348907 \\
3a^2b = & 4800000 \\
 & 1548907 \\
3ab^2 = & 960000 \\
 & 588907 \\
b^3 = & 64000 \\
3(a+b)^2 = 172800 & 524907 \\
3(a+b)^2c = & 518400 \\
 & 6507 \\
3(a+b)c^2 = & 6480 \\
 & 27 \\
 & c^3 = 27
\end{array}$$

Abgekürzt:

$$\begin{array}{lr}
 & \sqrt[3]{14|348|907} = 243 \\
a^3 = 2^3 = & 8 \\
3a^2 = 12 & 63 \\
 & 48 \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 5\,824 \\
3(a+b)^2 = 1728 & 524\,9 \\
 & 07 \\
3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = & 524\,907
\end{array}$$

Hülfsrechnungen und Erläuterung:

$$\begin{aligned}
3a^2b &= 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48 \\
3ab^2 &= 3 \cdot 2 \cdot 16 = 96 \\
b^3 &= 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= 5824
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r}
3(a+b)^2 = 3\cdot 24^2 = 1728 \\
3(a+b)^2 c = 1728\cdot 3 = 5184 \\
3(a+b)c^2 = 3\cdot 24\cdot 9 = \quad 648 \\
c^3 = 3^3 = \qquad 27 \\
\hline
3(a+b)^2 c + 3(a+b)c^2 + c^3 = 524907
\end{array}
$$

Das Schema geht weiter:

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d+\ldots)^3 = a^3 &+ (3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\
&+ [3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3] \\
&+ [3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3] + \cdots\cdot
\end{aligned}
$$

Regel: Abgeteilt wird zu dreien von rechts ab, bei Dezimalbrüchen vom Komma ab nach rechts und links zu dreien.

Quadrat- und Kubikwurzeln werden aus geordneten algebraischen Ausdrücken ebenso wie aus Zahlen, ausgezogen. Z. B.

$$
\sqrt{a^2x^4 + 4abx^2 + 4b^4 + 6ac + \frac{12bc}{x^2} + \frac{9c^2}{x^4}} = ax^2 + 2b + \frac{3c}{x^2}
$$

$$
\begin{array}{llll}
a^2x^4 & & & \\
\hline
2ax^2 \mid & +4abx^2 & & \\
 & +4abx^2 & & \\
\hline
 & \quad 4b^4 & & \\
 & \quad 4b^4 & & \\
\hline
 & 2ax^2 + 4b \mid & 6ac + \frac{12bc}{x^2} & \\
 & & 6ac + \frac{12bc}{x^2} & \\
\hline
 & & & \frac{9c^2}{x^4} \\
 & & & \frac{9c^2}{x^4} \\
\hline
\end{array}
$$

[In ähnlicher Weise, wie bei den Quadratwurzeln, kann gezeigt werden, daß die Kubikwurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht Kubikzahlen sind, Irrationalzahlen sein müssen. So ist z. B. $\sqrt[3]{10}$, ebenso $\sqrt[3]{100}$ eine Irrationalzahl. Soll bei ganzem positiven n die dritte Wurzel aus 10^n eine ganze Zahl sein, so muß $\frac{n}{3}$ eine ganze Zahl sein. Entsprechendes gilt von den 4 , 5., n^{ten} Wurzeln.

Später wird gezeigt werden daß, wenn n eine ganze Zahl ist, im Ganzen n verschiedene n^{te} Wurzeln aus jeder Zahl existieren, die zu der hier berechneten einen Wurzel in einfacher Beziehung stehen. Dazu ist jedoch die Einführung einer neuen Art von Zahlen erforderlich.

Man kann die 4., 8., 16. Wurzel ausziehen, indem man aus der Quadratwurzel die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Quadratwurzel auszieht u. s. w. Die 6. Wurzel zieht man aus, indem man aus der 3. Wurzel die Quadratwurzel auszieht, die 9. Wurzel, indem man aus der Kubikwurzel die Kubikwurzel auszieht u. s. w.

Für die 5., 7., 11. Wurzel u. s. w. könnte man sich die Rechnungsschemata ebenfalls aufstellen, dieselben werden aber so umständlich, daß man andere, später zu behandelnde Methoden vorzieht.]

C. Lehraufgabe der Secunda b.

(Prima der Realschulen.)

(Dritter Jahrgang.)

I. Gleichungen zweiten Grades.

97) Als Normalform der schon behandelten Gleichung zweiten Grades diene jetzt die folgende:

1) $$x^2 - ax + b = o.$$

Man kann sie folgendermaßen umformen:

$$x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

oder $$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 = 0.$$

Nun läßt sich aber die Differenz zweier Quadrate in Summe mal Differenz der Grundzahlen zerlegen, also ist jetzt

$$\left[x - \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[x - \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] = 0.$$

Soll nun das Produkt zweier Größen gleich Null sein, so muß entweder der erste Faktor, oder der zweite gleich Null sein. Setzt man die einzelnen Klammern gleich Null, so hat man zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen sich die beiden Lösungen ergeben, nämlich

*) Dieses Kapitel kann auch an den Schluß der Lehraufgabe der Secunda gestellt werden, wenn der Unterrichtsbetrieb der Trigonometrie wegen eine frühere Einführung in die Lehre von den Logarithmen erfordert.

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}$$

98) An Stelle des früher angewandten Kunstgriffs ist also die Eigenschaft jedes Ausdrucks vom zweiten Grade getreten, sich jedesmal in zwei Faktoren ersten Grades verwandeln zu lassen, [eine Produktzerlegung, die in allgemeinerer Gestalt bei allen Gleichungen möglich ist, die x nur in Potenzen mit ganzen positiven Exponenten enthalten].

Addiert man die Werte der Lösungen (die sogenannten Wurzeln der Gleichung) so erhält man

$$3)\qquad x_1 + x_2 = a,$$

multipliziert man die Lösungswerte, so ergiebt sich

$$x_1 x_2 = \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \cdot \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b,$$

oder 4) $$x_1 x_2 = b.$$

Folglich gilt der Satz:

In der Gleichung

$$x^2 - ax + b = 0$$

ist der Coefficient von x gleich der Summe der Wurzeln, das Glied ohne x gleich dem Produkte derselben.

99) Dieser merkwürdige Satz ergiebt sich als selbstverständlich auf folgendem Wege:

Die Gleichung $(x - a)(x - b) = o$ ist offenbar erfüllt für die Werte $x_1 = a$ und $x_2 = b$, denn bei der Einsetzung eines solchen wird der betreffende Faktor gleich Null. Multipliziert man nun die linke Seite aus, so ergiebt sich:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

der Coefficient von x ist also wirklich die Summe der Wurzeln, das sogenannte absolute Glied (ohne x) gleich dem Produkte der Wurzeln.

100) Man kann also leicht Gleichungen aufstellen, die gegebene Wurzeln haben sollen. Sollen z. B. die Wurzeln einer Gleichung 3 und 8 sein, so lautet sie

$$x^2 - (3 + 8)x + 3 \cdot 8 = 0, \quad \text{oder} \quad x^2 - 11x + 24 = 0.$$

Sollen die Wurzeln -3 und $+8$ sein, so lautet die Gleichung
$x^2 - (-3+8)x + (-3)(+8) = 0$, oder $x^2 - 5x - 24 = 0$.
Die gewöhnliche Auflösungsart bestätigt die Richtigkeit.

[101) Bei der Lösung $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ kann nun der Fall eintreten, daß $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ist, so daß unter der Wurzel Negatives steht. Dann nennt man die Lösung der Gleichung eine imaginäre (oder unmögliche). Bisher nämlich sind uns nur Quadratwurzeln aus positiven Zahlen entgegengetreten. Wir wußten z. B., daß $\sqrt{49} = \pm 7$ war, dagegen kannten wir bisher keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, -49 gab, so daß $\sqrt{-49}$ vorläufig als etwas Unmögliches, als imaginär zu betrachten ist. Im Gegensatz dazu heißen die bisher behandelten Zahlen reelle Zahlen. Erst in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wagte man es, diese sogenannten unmöglichen Zahlen eingehender zu untersuchen, wobei sich bald zeigte, daß nur mit ihrer Hülfe eine gewisse Abrundung des mathematischen Lehrgebäudes und ein übersichtlicher Ausbau desselben ermöglicht wurde. Erst jetzt lernte man beweisen, daß jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln haben muß, erst jetzt wurde eine wissenschaftliche Kartographie möglich u. s. w. Man setzt z. B. $\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7\sqrt{-1}$ und bezeichnet die Größe $+\sqrt{-1}$ (als die imaginäre Einheit) mit i, so daß $\sqrt{-49} = \pm 7 \cdot i$ ist, allgemein $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{-1} = \pm a \cdot i$. Ferner ist $(\sqrt{-1})^2 = -1$, also $i^2 = -1$ u. s. w. Zahlen von der Form $a + bi$ werden komplexe Zahlen genannt. Wir gehen auf diesen Gegenstand noch nicht näher ein und erinnern nur an Folgendes:

Die Subtraktion zwang zur Einführung der negativen Zahlen.

Die Division zwang zur Einführung der gebrochenen Zahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der rationalen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwang zur Einführung der Irrationalzahlen.

Bis hierher reichte das Gebiet der reellen Zahlen.

Die Wurzelausziehung zwingt (z. B. gelegentlich der Gleichungen) auch zur Einführung der imaginären Zahlen. Diese, mit den reellen zusammengesetzt, geben das Gebiet der komplexen Zahlen. Zu ihrer geometrischen Darstellung ist auf der früher besprochenen Geraden, die durch die Rational- und Irrationalzahlen stetig erfüllt ist, kein Raum vorhanden. Auf einer höheren Stufe soll gezeigt werden, daß die komplexen Zahlen eine ganze Ebene stetig erfüllen. Diese geometrische Darstellungsweise ist für die Entwickelung der Mathematik von außerordentlicher Bedeutung geworden.]

102) Hat man eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

und eine zweite Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten von der Form

$$ax + by + c = 0,$$

so kann man y aus der zweiten berechnen, den Wert in die erste einsetzen und die so entstehende Gleichung 2. Grades auflösen, was zwei Werte für x giebt. Jeder von diesen, in die zweite Gleichung eingesetzt, ermöglicht die Berechnung der beiden zugehörigen Werte für y.

Auch xy ist als Ausdruck zweiten Grades zu betrachten.

Handelt es sich um zwei Gleichungen 2. Grades mit je zwei Unbekannten, so giebt die Entfernung (Elimination) von y im Allgemeinen eine Gleichung vom 4. Grade, nur in besonderen Fällen läßt sich die Gleichung auf den 2. Grad zurückführen.

Übungsmaterial findet sich in den Aufgabensammlungen.

II. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten.

103) Es ist $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, sobald $m > n$, und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, sobald $n > m$. Ist $m = n$, so ist $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m}$, also da $\frac{a^m}{a^m} = 1$ und $m - m = 0$ ist:

1) $$a^0 = 1.$$

Jede Zahl, zur 0. Potenz erhoben, ist also gleich 1.

Demnach ist $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a^1}$, also, wenn man die alte Schreibweise beibehält: $\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$, und ebenso findet man allgemein

2) $$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{ und } a^m = \frac{1}{a^{-m}} \cdot$$

Eine Potenz mit negativem Exponenten soll demgemäß von jetzt ab bedeuten den umgekehrten Wert von der entsprechenden Potenz mit positiven Exponenten.

Ist dies festgesetzt, so ergiebt sich

$$a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = a^{n-m} = a^{-m+n},$$

d. h. der Satz für die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl gilt auch für negative Exponenten.

Ebenso ist $\dfrac{a^{-m}}{a^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}.$

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß alle für positive ganze Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative Exponenten gelten, z. B.

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n},\ a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n},\ \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n},$$

$$a^{-m} b^{-m} = (ab)^{-m},\ \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m,\ (a^{-m})^n = a^{-mn},$$

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn},\ (a^{-m})^{-n} = a^{mn}.$$

104) In Abschnitt 95 wurde gezeigt, daß $\sqrt[n]{a^{np}} = a^p$ ist, also, wenn man $np = m$, folglich $p = \frac{m}{n}$ setzt,

1) $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Dort war angenommen, daß $\frac{m}{n}$ ganz war. Jetzt wird festgesetzt, daß auch dann wenn $\frac{m}{n}$ nicht ganz ist, $a^{\frac{m}{n}}$ die n^{te} Wurzel aus a^m bedeuten soll, so daß Gleichung 1) auch dann fortbesteht. So ist z. B. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$. Dann kann der Exponent auch negativ und gebrochen sein, z. B. ist

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \sqrt[3]{a^{-2}}.$$

Die frühere Gleichung (Abschnitt 95 Nr. 7) $\sqrt[qn]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$ läßt sich dann schreiben $a^{\frac{pn}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$, so daß der gebrochene Exponent erweitert oder gekürzt werden kann, ohne daß der Potenzwert sich ändert.

Auch der Satz über die Multiplikation von Potenzen gleicher Grundzahl bleibt bestehen, denn

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[uq]{a^{mq}a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Also gelten, wie früher, die Sätze:

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{p}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},$$
$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},$$
$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

u. s. w.,

so daß sämtliche für Potenzen mit ganzen positiven Exponenten bewiesenen Sätze auch für negative und gebrochene Exponenten unbeschränkte Geltung haben.

III. Die gemeinen oder Briggischen Logarithmen.

105) Aus $a = b^m$ folgt $b = a^{\frac{1}{m}}$. Es fragt sich, ob man aus der ersteren Gleichung nicht nur b, sondern statt dessen auch m berechnen kann. Wir beschränken uns vorläufig auf die Grundzahl 10 und setzen

Folgendes fest: Ist $10^\alpha = a$, so nennt man α den gemeinen*) oder Briggischen Logarithmus von a, geschrieben $\log a$; a heißt der Numerus zum Logarithmus α.

Also 1) aus $10^\alpha = a$ folgt $\alpha = \log a$.

In Worten: Der gemeine Logarithmus einer Zahl a ist der Exponent, mit dem man die Grundzahl 10 potenzieren muß, um jene Zahl zu erhalten.

106) So ist z. B.

$$
\begin{array}{lll}
10^0 = 1, & \text{folglich} & 0 = \log 1 \\
10^1 = 10, & \text{folglich} & 1 = \log 10 \\
10^2 = 100, & \text{folglich} & 2 = \log 100 \\
10^3 = 1000, & \text{folglich} & 3 = \log 1000 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Ebenso
$$
\begin{array}{lll}
10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1, & \text{folglich} & -1 = \log 0{,}1 \\
10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01, & \text{folglich} & -2 = \log 0{,}01 \\
10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001, & \text{folglich} & -3 = \log 0{,}001 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Die Logarithmen der Potenzen von 10 mit positiven ganzen und negativen ganzen Exponenten sind also leicht zu finden.

107) Man kann auch andere Logarithmen bezw. Numerus leicht bestimmen. Z. B. Es ist

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}1622\cdots, \text{ folglich ist } \tfrac{1}{2} = 0{,}5 = \log 3{,}1622\cdots$$

$$10^{\frac{3}{2}} = 10^{1+\frac{1}{2}} = 10 \cdot \sqrt{10} = 31{,}622\cdots,$$

folglich ist $\frac{3}{2} = 1{,}5 = \log 31{,}622\cdots$

$$10^{\frac{5}{2}} = 10^{2+\frac{1}{2}} = 100\sqrt{10} = 316{,}22\cdots,$$

folglich ist $\frac{5}{2} = 2{,}5 = \log 316{,}22\cdots$

---

*) Logarithmen mit anderen Grundzahlen werden später bekannt gegeben.

Ähnlich kann man für $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{2}{3}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{\frac{1}{6}}$, $10^{\frac{5}{6}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, $10^{\frac{3}{8}}$, $10^{\frac{5}{8}}$, $10^{\frac{7}{8}}$ u. s. w. und ihre 10=fachen, 100=fachen, 1000=fachen Werte und für die umgekehrten Werte aller dieser Zahlen die logarithmischen Folgerungen ziehen.

Schon so erkennt man die Möglichkeit, für ganze Reihen von Zahlen festzustellen, von welchen anderen Zahlen sie die Logarithmen sind, man erkennt die Möglichkeit logarithmischer Tabellen, der sogenannten Logarithmentafeln, obwohl diese auf anderem Wege berechnet worden sind. Schaltet man die neugefundenen Beziehungen an geeigneter Stelle in die Tabelle unter 106) ein, so erkennt man Folgendes:

Die Logarithmen	positiver	einstelliger	Zahlen	beginnen	mit	0,
„	„	„	zweistelliger	„	„	„ 1,
„	„	„	dreistelliger	„	„	„ 2,
„	„	„	vierstelliger	„	„	„ 3,
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
„	„	„	n=stelliger	„	„	„ $(n-1)$.

Die Logarithmen echter Brüche sind negativ, und zwar gilt Folgendes:

Liegt die Zahl zwisch.	0 u. 0,1,	so liegt der Logarithmus zwisch.	0 u. -1,
„ „ „	„ 0,1 u. 0,01,	„ „ „ „	„ -1 u. -2,
„ „ „	„ 0,01 u. 0,001	„ „ „ „	„ -2 u. -3,
	u. s. w.		

[108) Oben waren zu gewissen Logarithmen die Numerus berechnet; umgekehrt kann gefragt werden, wie man zu einem Numerus den Logarithmus findet. Die Möglichkeit dazu soll an einem Beispiele nachgewiesen werden.*)

Aufgabe. x aus der Gleichung $10^x = 2$ zu berechnen, d. h. den Logarithmus der Zahl 2 aufzufinden.

Auflösung. 2 liegt zwischen $10^0 = 1$ und $10^1 = 10$, also

$$10^0 < 10^x = 2 < 10^1, \quad \text{folglich ist} \quad 0 < x < 1$$

*) Auf dem Gymnasium wegzulassen.

daraus folgen die Gleichungen

$10^0 < 10^{2x} = 4 < 10^1$ folglich $0 < 2x < 1$ und $0 < x < \frac{1}{2}$

$10^1 < 10^{4x} = 16 < 10^2$ folglich $1 < 4x < 2$ und $\frac{1}{4} < x < \frac{2}{4}$

$10^2 < 10^{8x} = 256 < 10^3$ folglich $2 < 8x < 3$ und $\frac{2}{8} < x < \frac{3}{8}$

$10^4 < 10^{16x} = 65536 < 10^5$ folglich $4 < 16x < 5$ und $\frac{4}{16} < x < \frac{5}{16}$

So fortfahrend kann man x zwischen engere und engere Grenzen einschließen, diese in Dezimalbrüchen darstellen und aus Vergleichung der zusammengehörigen Werte erkennen, bis auf wie viele Stellen man den Wert von log 2 genau gefunden hat. Oben ist erst gezeigt, daß x zwischen 0,25 und 0,312 liegt, und es dauert ziemlich lange, bis man gezeigt hat, daß log 2 = 0,3010300 ist. (Man berechnet jetzt die Logarithmen auf besserem Wege weit schneller mit großer Genauigkeit.)

Sind m und n ganze Zahlen und ist $m > n$, so giebt $10^{\frac{m}{n}}$ nur dann eine ganze Zahl, und zwar eine Potenz von 10 mit ganzem Exponenten, wenn n in m ohne Rest aufgeht. Ist letzteres nicht der Fall, so ist $10^{\frac{m}{n}}$ eine Irrationalzahl (vgl. Abschnitt 85 und 96). Setzt man also $10^x = a$, und ist a eine ganze Zahl, aber keine Potenz von 10 mit ganzem positiven Exponenten, so muß x irrational sein, denn wäre es rational, so müßte rechts Irrationales stehen. Folglich sind die gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen, die nicht Potenzen von 10 mit ganzem positiven Exponenten sind, Irrationalzahlen. Die Bedeutung der Irrationalzahlen wird also durch die Einführung der Logarithmen ganz erheblich gesteigert. Sie bilden auch hier die Regel, die Rationalzahlen dagegen eine verschwindende Ausnahme.

In den meisten Logarithmentafeln befindet sich eine Anweisung zum Aufschlagen des zu einem Numerus gehörigen Logarithmus und des zu einem Logarithmus gehörigen Numerus.

Wir beschränken uns auf die Logarithmen **positiver** Zahlen. [Die Logarithmen von negativen Zahlen kommen in den oben abgeleiteten Tabellen nicht vor. Der Grund ergiebt sich sofort.]

109) **Die Grundformeln für das Rechnen mit Logarithmen.**

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Ist} & \alpha = \lg a, & \text{so folgt} & 10^\alpha = a \\ \text{ist} & \beta = \lg b, & \text{so folgt} & \underline{10^\beta = b} \end{array}\right\} \qquad 1)$$

also durch Multiplikation $10^\alpha \cdot 10^\beta = ab$ oder $10^{\alpha+\beta} = ab$; folglich ist $\alpha + \beta = \lg(ab)$ oder $\lg a + \lg b = \lg(ab)$. Also:

2) $$\lg(ab) = \lg a + \lg b.$$

d. h. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen*), $\lg(abc\,..) = \lg a + \lg b + \lg c + \ldots$

Dagegen hätte man durch Division aus den Gleichungen 1) erhalten $\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{a}{b}$, oder $10^{\alpha-\beta} = \frac{a}{b}$, d. h. $\alpha - \beta = \lg\frac{a}{b}$

oder $$\lg a - \lg b = \lg\frac{a}{b}.$$

Also 3) $$\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b,$$

d. h. Der Logarithmus eines Bruches ist der Logarithmus des Zählers vermindert um den des Nenners.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man links und rechts zur n^{ten} Potenz erhebt, $(10^\alpha)^n = a^n$, d. h. $10^{n\alpha} = a^n$, folglich $n\alpha = \lg a^n$ oder $n \lg a = \lg a^n$, also:

4) $$\lg(a^n) = n \lg a.$$

d. h. Der Logarithmus einer Potenz ist das Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

Ist $\alpha = \lg a$, so folgt $10^\alpha = a$, und, wenn man beiderseits die n^{te} Wurzel auszieht, $\sqrt[n]{10^\alpha} = \sqrt[n]{a}$, oder $10^{\frac{\alpha}{n}} = \sqrt[n]{a}$, also $\frac{\alpha}{n} = \lg\sqrt[n]{a}$ oder $\frac{1}{n}\lg a = \lg\sqrt[n]{a}$. Also

5) $$\lg\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\lg a,$$

d. h.: Der Logarithmus einer Wurzel ist der Quotient aus dem Logarithmus des Radikanden und dem Wurzelexponenten.

110) Diese Formeln führen in Verbindung mit den Logarithmentafeln auf ganz außerordentliche Rechen-Erleichterungen, wozu

---

*) Da $(-10) = ii \cdot 10$ ist, so folgt, wenn man das Multiplikationsgesetz gelten läßt $\lg(-10) = \lg i + \lg i + \lg 10 = 2\lg i + 1$, also $\lg(-10) = 1 + 2\lg i = 1 + 2\lg\sqrt{-1}$. Allgemein: $\lg(-a) = \lg a + 2\lg i$. So erkennt man, daß die Logarithmen negativer reeller Zahlen nur durch die imaginären Zahlen erklärt werden können, worauf wir hier nicht eingehen.

einige Beispiele gegeben sein mögen (5stellige Logarithmen). Besonders das Ausziehen höherer Wurzeln wird ermöglicht bezw. erleichtert, z. B. ist $\lg \sqrt[5]{a} = \frac{1}{5} \lg a = 0{,}2 \lg a$, wozu der Numerus aufzuschlagen ist, wenn man $\sqrt[5]{a}$ erhalten will.

Aufgabe. $\dfrac{51{,}263^2 \cdot 5{,}7821^3}{\sqrt{772{,}45} \cdot 0{,}98216}$ oder $\dfrac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c} \cdot d}$.

Auflösung. $\lg \dfrac{a^2 b^3}{\sqrt{c} \cdot d} = [2 \lg a + 3 \lg b] - \left[\frac{1}{2} \lg c + \lg d\right]$.

$$\begin{array}{ll}
\lg a = 1{,}70980, & 2 \lg a = 3{,}41960 \\
\lg b = 0{,}76209 & 3 \lg b = 2{,}28627 \\
\hline
\lg \text{ des Zählers:} & \lg Z = 5{,}70587 \\
 & \\
\lg c = 2{,}88787 & \frac{1}{2} \lg c = 1{,}44394 \\
 & \lg d = 0{,}99218 - 1 \\
\hline
\lg \text{ des Nenners:} & \lg N = 1{,}43612
\end{array}$$

$$\lg \frac{Z}{N} = \lg Z - \lg N = 4{,}26975$$

$$\frac{Z}{N} = 18610.$$

Bemerkung. Mit Hülfe der Logarithmen verwandelt man das Multiplizieren in Addieren, das Dividieren in Subtrahieren, das Potenzieren in Multiplizieren, das Wurzelausziehen in Dividieren. Dagegen sind die Logarithmen nicht brauchbar für die Vereinfachung der Addition und Subtraktion (man müßte denn durch Absonderung gemeinschaftlicher Faktoren Vorteile finden). Die negativen Logarithmen schreibt man positiv, zieht jedoch von dem Dezimalbruch (Mantisse) die ganzzahlige Charakteristik (Kennziffer) ab. So war im vorigen Beispiele $\lg d = 0{,}99218 - 1$, was dasselbe ist wie $-0{,}000782$.

Sind Wurzeln aus echten Brüchen auszuziehen, z. B. $\sqrt[3]{0{,}98216}$, so ist nach Obigem der Logarithmus durch den Exponenten zu dividieren, und dabei kann die abzuziehende Kennziffer, die mit zu dividieren ist, eine gebrochene Zahl werden, was nicht mehr in das gebräuchliche Rechenschema paßt. Um dies zu vermeiden, vermehrt man Mantisse und Charakteristik um dieselbe Zahl, und zwar so, daß jene Division aufgeht. So wird im letzten Beispiele geschrieben $\lg d = 2{,}99218 - 3$, so daß $\frac{1}{3} \lg d = 0{,}99739 - 1$ wird. Demnach ist

$$\sqrt[3]{0{,}98216} = 0{,}99401.$$

111) Aber nicht nur Rechen-Erleichterungen finden statt, sondern es werden auch ganz neue Gebiete eröffnet, z. B. das der Exponentialgleichungen.

Aufgabe. x aus der Gleichung $2^x = 3$ zu berechnen.

Auflösung. $\lg(2^x) = \lg 3$, folglich $x \lg 2 = \lg 3$, folglich $x = \frac{\lg 3}{\lg 2}$ und $\lg x = \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2)$. Nun ist:

$$\begin{aligned} \lg 3 &= 0{,}477\,12, \text{ also } \lg(\lg 3) = 0{,}678\,63 - 1 \\ \lg 2 &= 0{,}301\,03, \text{ also } \lg(\lg 2) = 0{,}478\,61 - 1 \\ \lg x &= \lg(\lg 3) - \lg(\lg 2) = 0{,}200\,02 \end{aligned}$$

folglich $x = 1{,}5850$

Aufgabe. $a^x b^{2x} = c.$

Auflösung. $x \lg a + 2x \lg b = \lg c$, $x(\lg a + 2 \lg b) = \lg c$,

$$x = \frac{\lg c}{\lg a + 2 \lg b}.$$

Auf der Lösbarkeit der Exponentialgleichungen beruht die Lösbarkeit gewisser Aufgaben der Zinseszins- und Rentenrechnung. Jetzt soll nur auf die erstere eingegangen werden.

112) Zinseszinsrechnung.

Es sei c ein bestimmtes Anfangskapital, welches zu einem gewissen Prozentsatz p zinsbar angelegt wird. Da nun 100 Mark jährlich p Mark Zinsen geben, eine Mark also $\frac{p}{100}$ Mark giebt, so geben c Mark $c\frac{p}{100}$ Mark, und nach einem Jahre erhält man durch Zinszuschlag $c + \frac{cp}{100}$ Mark als ein neues Kapital $c_1 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Das vergrößerte Kapital verwandelt sich im zweiten Jahre in $c_2 = c_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, nach einem weiteren Jahre erhält man $c_3 = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$, nennt man also das Schlußkapital k, so hat man nach n Jahren, wenn man den Prozentsatz mit dem kaufmännischen Zeichen % bezeichnet:

1) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100}\right)^n$$

folglich

2) $$\lg k = \lg c + n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right),$$

also zur Berechnung des Anfangskapitals bei gegebenem Endkapital

3) $$\lg c = \lg k - n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right).$$

Zur Berechnung des Prozentsatzes hat man zunächst $n \lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \lg k - \lg c$, oder

4) $$\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = \frac{1}{n}(\lg k - \lg c).$$

Bezeichnet man den Numerus, der zur rechten Seite gehört, als $N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, so ergiebt sich $\left(1 + \frac{\%}{100}\right) = N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right)$, also

4*) $$\% = 100\left[N\left(\frac{\lg k - \lg c}{n}\right) - 1\right] = 100\,[N - 1].$$

Die Berechnung der Anzahl der Jahre beruht auf der Exponentialgleichung 1) und erfolgt, wie sich aus 2) ergiebt, nach der Formel

5) $$n = \frac{\lg k - \lg c}{\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right)},$$

also

5*) $$\lg n = \lg[\lg k - \lg c] - \lg\lg\left(1 + \frac{\%}{100}\right).$$

Diese letzte Lösung gilt nur für ganze Zahlen, da der Zinszuschlag nicht mitten im Jahre, sondern nur am Jahresschluß erfolgt. Der etwaige Zeitüberschuß würde also eine besondere Vereinbarung nötig machen.

113) Werden die Zinsen halbjährlich zum Kapital geschlagen, so hat man die doppelte Anzahl der Termine, also bei n Jahren $2n$ Termine, für diese aber den halben Prozentsatz. Dies giebt für n Jahre die Grundformel

6) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{200}\right)^{2n},$$

aus der die andern durch Logarithmierung u. s. w. abzuleiten sind.

Bei monatlichem Zinszuschlag erhält man ebenso

7) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{1200}\right)^{12n},$$

also bei jährlich m-maligem Zinszuschlag

8) $$k = c\left(1 + \frac{\%}{100m}\right)^{mn}.$$

(Über die Rentenrechnung soll erst später gesprochen werden.)

Beispiele zur Zinseszinsrechnung finden sich in den Aufgabensammlungen. Sie beziehen sich auch auf die Zunahme der Bevölkerung von Städten und Staaten, auf die Entwickelung der Verkehrsverhältnisse, z. B. auf die Zunahme der jährlichen Frachtmengen unserer Eisenbahnen, des Holzbestandes von Waldkomplexen u. dgl.

Wird der Prozentsatz als negativ angenommen, geht also die Grundformel über in

$$k = c\left(1 - \frac{\%}{100}\right)^n,$$

so handelt es sich z. B. um eine allmähliche Abnahme des Anfangskapitals, die jedoch niemals ganz zu Ende geht.

Die praktisch wichtigste Anwendung der Logarithmenlehre findet für die Schule in dem Gebiete der Trigonometrie statt.

Dritte Abteilung.
Trigonometrie.

Lehraufgabe der Secunda b.
(Prima der Realschulen.)
(Erster Jahrgang.)

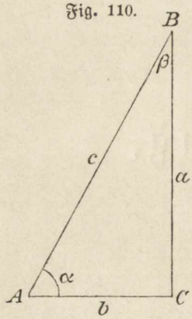
I. Die trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreiecke.

1) Unter Trigonometrie (Dreiecksmeßkunst) versteht man die Berechnung von Dreiecken aus drei zur Berechnung geeigneten Stücken. Solche Berechnungen fanden schon in der Geometrie statt. Sie beschränkten sich aber auf die Berechnung von Seiten und Flächen, während Winkel nur insoweit zur Berechnung kamen, als sie, wie die Winkel 60^0, 30^0, 45^0, 36^0 u. s. w. geometrisch konstruiert werden konnten. Auch waren die gegebenen Stücke in der Regel nur Seiten und Flächen, nur ausnahmsweise konstruierbare Winkel. Schon die Landmeßkunst beansprucht volle Befreiung von jenen Einschränkungen. Sie verlangt die Berechnung des Dreiecks mit Hülfe beliebiger Winkel und die Berechnung beliebiger Winkel aus gegebenen Stücken. Das Ziel der Trigonometrie besteht zunächst darin, jene Schranken aufzuheben. Zu diesem Zwecke ist es nötig, zwischen Seiten und Winkeln bestimmte Beziehungen aufzustellen.

2) Nach der Ähnlichkeitslehre haben rechtwinklige Dreiecke dieselben Winkel, sobald sie in einem Seitenverhältnis übereinstimmen. Aus dem Seitenverhältnis also müssen sich die Winkel bestimmen lassen; umgekehrt folgen aus den Winkeln die Seitenverhältnisse.

Ist z. B. in Fig. 110, $\frac{a}{b} = 1$, so ist $\alpha = \beta = 45^0$. Ist $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, so ist $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, denn es handelt sich um ein halbes gleichseitiges Dreieck, u. s. w.

Fig. 110.



Solcher Seitenverhältnisse sind 6 möglich, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ und ihre Umkehrungen $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$. Nur mit den drei erstgenannten braucht man sich zu beschäftigen, die Einrichtung der Logarithmentafeln macht es aber zweckmäßig, auch $\frac{b}{a}$ heranzuziehen.

Die vier bezeichneten Seitenverhältnisse hat man mit dem Winkel α folgendermaßen in Beziehung gesetzt:

Man bezeichnet $\frac{a}{c}$ als den Sinus des Winkels α, $\frac{b}{c}$ als den Cosinus desselben, $\frac{a}{b}$ als die Tangente desselben, $\frac{b}{a}$ als seine Cotangente.*)

Man schreibt abgekürzt:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \tan\alpha = \frac{a}{b},\ \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

In Worten: Im rechtwinkligen Dreiecke ist

der Sinus eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur Hypotenuse,

der Cosinus eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse,

die Tangente eines Winkels das Verhältnis der Gegenkathete zur anliegenden Kathete,

die Cotangente eines Winkels das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Gegenkathete.

Weil diese vier Verhältnisse von der Größe der Winkel abhängig sind, bezeichnet man sie als Funktionen der Dreieckswinkel oder als die trigonometrischen oder goniometrischen Funktionen.

---

*) Das Wort Sinus hat nichts mit dem lateinischen Worte sinus = Busen gemein. Die Bezeichnung scheint aus dem Arabischen zu stammen und ist unaufgeklärt geblieben. Die übrigen Worte werden später gelegentlich erläutert. Die Verhältnisse $\frac{c}{b}$ = Sekante von α, und $\frac{c}{a}$ = Cosekante von α sind für die Schulzwecke überflüssig.

3) **Beispiele.** Für $a = b$ ist $\sphericalangle \alpha = 45^0$, und dabei ist $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, also $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, also:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{0{,}5} = \cos 45^0;$$

$$\tan 45^0 = \frac{a}{a} = 1, \ \cot 45^0 = \frac{a}{a} = 1.$$

Im gleichseitigen Dreiecke mit Seite a ist die Höhe $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ $= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Demnach ist in dem durch diese Höhe abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecke:

$$\sin 60^0 = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = \cos 30^0;$$

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \tfrac{1}{2} = \sin 30^0,$$

$$\tan 60^0 = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} = \cot 30^0;$$

$$\cot 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tan 30^0.$$

Fällt man ferner bei einem konstruierbaren Centriwinkel vom Centrum das Lot auf die Sehne, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, deren Winkelfunktionen man berechnen kann. Ist z. B. r der Radius des Kreises, so ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, die halbe Seite also $\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)$, folglich:

$$\cos 72^0 = \frac{\frac{r}{4}(\sqrt{5} - 1)}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin 18^0$$ u. s. w. Nach Art von Abschnitt 148 der Geometrie kann man stets rechnend zu den halben Winkeln übergehen.

So erkennt man die Möglichkeit von Tabellen für die Funktionen der Winkel von 0^0 bis 90^0 und von Tabellen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Das Aufschlagen der Funktionen (bezw. ihrer Logarithmen) zu gegebenen Winkeln ist zu üben, ebenso das Aufschlagen der Winkel zu gegebenen Funktionswerten bezw. ihren Logarithmen.

4) **Aufgabe** a) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse $c = 12$ und die Kathete $a = 7$. Wie groß sind seine Winkel?

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{7}{12}$, also $\lg\sin\alpha = \lg\frac{7}{12} = \lg 7 - \lg 12$.

$$\begin{array}{rr} & \lg\ 7 = 0{,}84510 \\ & \lg 12 = 1{,}07918 \\ \hline \lg\sin\alpha = \lg 7 - \lg 12 & = 9{,}76592 - 10^{*)} \end{array}$$

folglich
$$\sphericalangle\,\alpha = 35^0\,41'\,10''$$
$$\sphericalangle\,\beta = 54^0\,18'\,50''$$

Aufgabe b) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Katheten $a = 15$ und $b = 8$. Wie groß sind die Winkel?

Auflösung. $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, $\lg\tan\alpha = \lg 15 - \lg 8$.

$$\begin{array}{rr} & \lg 15 = 1{,}17609 \\ & \lg\ 8 = 0{,}90309 \\ \hline \lg\tan\alpha = \lg 15 - \lg 8 & = 0{,}27300, \end{array}$$ folglich $\sphericalangle\,\alpha = 61^0\,55'\,40''$

$$\sphericalangle\,\beta = 28^0\,4'\,20''.$$

Aufgabe c) Ein rechtwinkliges Dreieck habe die Hypotenuse 13 und den Winkel $\alpha = 35^0\,20'\,10''$. Wie groß sind die Seiten a und b und der Inhalt F?

Auflösung. $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, folglich $a = c\cdot\sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ also $b = c\cos\alpha$ (auch $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ kann angewandt werden). $F = \frac{ab}{2}\cdot$ Also

$\lg a = \lg c + \lg\sin\alpha$, $\lg b = \lg c + \lg\cos\alpha$, $\lg F = \lg a + \lg b - \lg 2$.

$$\begin{array}{rl} \lg c = 1{,}11394 & \\ \lg\sin\alpha = 9{,}76221 - 10 & \\ \hline \lg a = 0{,}87615 & \\ a = 7{,}5188 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lg c = 1{,}11394 & \\ \lg\cos\alpha = 9{,}91157 - 10 & \\ \hline \lg b = 1{,}02551 & \\ b = 10{,}605 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 0{,}87615 \\ \lg b = 1{,}02551 \\ \hline \lg a + \lg b = 1{,}90166 \\ \lg 2 = 0{,}30103 \\ \hline \lg F = 1{,}60063 \\ F = 39{,}869 \end{array}$$

Aufgabe d) In einer Stadt, die unter $51^0\,30'$ nördlicher Breite liegt, sucht jemand bei Nacht eine Stellung auf, bei der ihm die

*) In den Tabellen ist statt 0, ... — 1 stets gesetzt 9, ... — 10, statt 0, ... — 2 stets 8, . . . — 10, statt 0, . . . — 3 stets 7, . . . — 10 u. s. w.

Spitze eines Domturms genau den Polarstern verdeckt. Wie hoch ist die Spitze über dem Auge des Beobachters, wenn seine Entfernung von der Mitte des Turmes 120 m beträgt?

Auflösung. Unter der genannten Breite steht der Polarstern $51^0\ 30'$ über dem Horizonte. Es ist also $\frac{h}{120} = \tan 51^0\ 30'$, d. h. $h = 120 \tan 51^0\ 30'$.

$$\begin{array}{r} \lg h = 2{,}07918 \\ \lg \tan\alpha = 0{,}09939 \\ \hline \lg h = 2{,}17857 \end{array}$$

$$h = 150{,}86 \text{ m}.$$

Aufgabe e) Wie viele Meilen (bezw. Kilometer) beträgt der Umfang des 50. Parallelkreises der Erdkugel, wenn der Radius der Erde zu 860 Meilen angenommen wird?

Auflösung. Zieht man von einem Punkte des Parallelkreises aus einen Erdradius r und ein Lot ϱ nach der Erdachse, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $(90^0 - 50^0)$ bei dem Erdcentrum. Also wird $\varrho = r \sin 40^0 = r \cos 50^0$. Der gesuchte Umfang ist $u = 2\varrho\pi = 2r\pi\cos 50^0$. Also $\lg u = \lg 2 + \lg r + \lg\pi + \lg\cos 50^0$;

$$\begin{array}{r} \lg 2 = 0{,}30103 \\ \lg r = 2{,}93450 \\ \lg \pi = 0{,}49715 \\ \lg\cos 50^0 = 9{,}80807 - 10 \\ \hline 3{,}54075 \end{array}$$

$$u = 3473{,}4 \text{ Meilen}.$$

5) Zwischen den Funktionen bestehen einfache Beziehungen, die sogenannten goniometrischen (der Winkelmessung entspringenden) Beziehungen.

Bildet man die Funktionen der spitzen Winkel α und $\beta = 90^0 - \alpha$ eines rechtwinkligen Dreiecks, so ergiebt sich Folgendes:

1) $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \quad \tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha,$

in Worten: Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Complementwinkels; die Cotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Complementwinkels. Zusammengefaßt: Die Cofunktionen eines Winkels sind gleich den Funktionen des Complementwinkels. (Cosinus heißt also des **Co**mplementes **Sinus**, so daß es sich um eine abgekürzte Schreibweise handelt.)

Deshalb haben die Logarithmentafeln nur die Winkel von 0^0 bis 45^0 nötig. —

6) Ferner ist

2) $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

denn $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\alpha;$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot\alpha,$$

woraus noch folgt

3) $$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

(Folglich ist $\lg\cot\alpha = \lg 1 - \lg\tan\alpha = 0 - \lg\tan\alpha = -\lg\tan\alpha$, was in den Tafeln zu vergleichen ist. So ist z. B. $\lg\tan 18^0 = 9{,}51178 - 10 = -0{,}48822 = -\lg\cot 18^0$. Die Tabelle der Cotangenten ist also leicht aus der der Tangenten abzuleiten, welche ihrerseits aus $\lg\tan\alpha = \lg\sin\alpha - \lg\cos\alpha$ hervorgeht.)

7) Eine weitere Formel ist:

4) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Beweis. $\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c},$

folglich $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

Folgerungen daraus sind

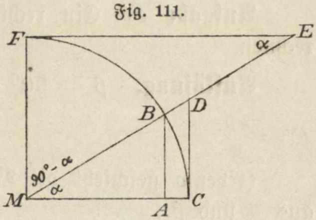
5) $$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

(Aus $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ ergiebt sich, wie man aus der logarithmischen Sinus-Tabelle die der Cosinus berechnen kann. Man kennt hiernach und nach Obigem sämtliche Funktionen aller Winkel zwischen 0^0 und 90^0, wenn man nur die Sinus von 0^0 bis 45^0 kennt.)

8) Ist im rechtwinkligen Dreiecke die Kathete a von der Länge Null, so ist auch $\measuredangle\,\alpha = 0$, und es ergiebt sich $\sin 0^0 = \frac{a}{c} = 0$, und, da b und c aufeinander fallen, $\cos 0^0 = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$, $\tan 0^0 = \frac{0}{b} = 0$, $\cot 0^0 = \frac{b}{0} = \infty$ (unendlich groß). Für den Complementwinkel 90^0 folgt: $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\tan 90^0 = \infty$, $\cot 90^0 = 0$.

9) In Fig. 111 sei der Radius $MB = 1$, dann ist $\sin\alpha = \frac{AB}{MB} = \frac{AB}{1} = AB$. Deshalb heißt AB die Sinuslinie für den Winkel α. (Die Maßzahl ihrer Länge stimmt überein mit dem Zahlenwerte des Sinus.) Ebenso ist $\cos\alpha = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{1} = MA$, und MA heißt die Cosinuslinie. Diese ist also die Projektion des Schenkels $MB = 1$ auf den Schenkel MC. Ferner ist $\tan\alpha = \frac{AB}{MA} = \frac{CD}{MC} = \frac{CD}{1} = CD$, daher heißt CD die Tangentenlinie. (Eigentlich stammt umgekehrt der Name der Funktion $\tan\alpha$ daher, daß CD eine Kreistangente ist.) Endlich ist noch $\cot\alpha = \frac{MA}{AB} = \frac{FE}{MF} = \frac{FE}{1} = FE$; FE heißt die Cotangentenlinie, und ist zugleich die Tangentenlinie für den Complementwinkel.

Fig. 111.



10) An der Figur erkennt man Folgendes:

Wächst der Winkel von 0^0 bis 90^0, so wächst der Sinus von 0 bis 1 und die Tangente von 0 bis ∞, dagegen nimmt der Cosinus ab von 1 bis 0, die Cotangente nimmt ab von ∞ bis 0.

[Weil hier die Funktionen Sinus und Tangente mit dem Winkel wachsen, werden beim Aufschlagen ihrer Logarithmen die sogenannten logarithmischen Differenzen addiert, dagegen subtrahiert, sobald es sich um Cofunktionen handelt, denn die letzteren nehmen ab, wenn der Winkel wächst.]

II. Berechnung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke und regelmäßiger Vielecke.

11) **Aufgabe** a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus a und c.

Auflösung. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $b = c\cos\alpha$ (oder $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$), $F = \frac{ab}{2}\cdot$ Entsprechend ist die Berechnung des Dreieckes aus b und c.

Aufgabe b) Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus a und b.

Auflösung. $\tan\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ (oder $c = \sqrt{a^2 + b^2})$), $F = \frac{ab}{2}$.

Aufgabe c) Ein rechtwinkliges Dreieck aus a und α zu berechnen.

Auflösung. $\beta = 90^0 - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, $b = \frac{a}{\tan\alpha} = a\cot\alpha$, $F = \frac{ab}{2}$.

(Ebenso geschieht die Berechnung aus a und β, aus b und α, aus b und β.)

Aufgabe d) Ein rechtwinkliges Dreieck aus c und α zu berechnen.

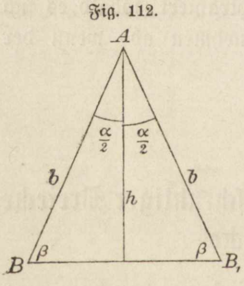
Auflösung. $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $F = \frac{ab}{2}$.

(Ebenso $\triangle$ aus c und β.)

12) Versuche Aufgaben wie folgende zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen aus a und r, oder α und r, aus F und α, F und a, F und c, F und ϱ; aus Umfang u und α, aus u und ϱ; aus h und α, wo h die Höhe auf der Hypotenuse ist, aus u und h, r und h, a und ϱ, c und ϱ, c und ϱ_1, c und ϱ_2, c und ϱ_3. Stelle selbst noch andere Aufgaben auf.

13) Das gleichschenklige Dreieck besteht aus zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, bietet also nichts Neues.

Fig. 112.



Aufgabe. a) Gegeben Basis a und Seite b.

Auflösung. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}$,

$\beta = 180^0 - \frac{\alpha}{2}$, $h = b\cos\frac{\alpha}{2}$, $F = \frac{ah}{2}$.

Aufgabe. b) Gegeben a und h.

Auflösung. $\frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{2h}{a} = \tan\beta$,

$\frac{\alpha}{2} = 90^0 - \beta$, $b = \frac{h}{\sin\beta}$, $F = \frac{ah}{2}$.

Aufgabe c) Gegeben b und $\sphericalangle\,\alpha$.

Auflösung. $\frac{a}{2} = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $h = b\cos\frac{\alpha}{2}$, $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Versuche, wie bei dem rechtwinkligen Dreiecke, Aufgaben aufzustellen, bei denen nicht nur Seiten oder Winkel oder h_1, sondern auch andere Stücke, wie h_2, F, u, ϱ, ϱ_1, ϱ_2, r u. s. w. gegeben sind.

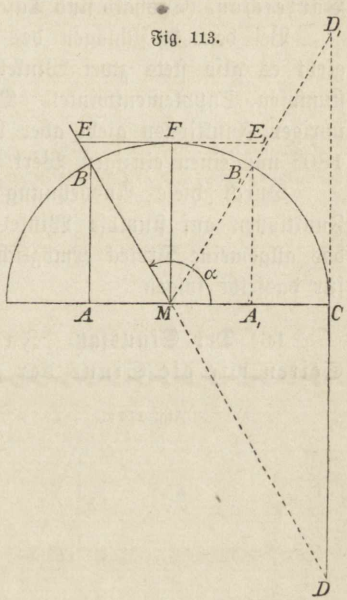
14) Das regelmäßige Vieleck. Ist r und die Seitenzahl n gegeben, so ist der Centriwinkel für jede Seite $\alpha = \frac{360^0}{n}$; der Winkel an der Basis jedes Einzeldreiecks ist $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ oder $\beta = 90^0 - \frac{180^0}{n}$. Aus r und $\frac{\alpha}{2}$ oder β läßt sich die Basis, die Höhe, die Fläche des Einzeldreiecks berechnen, so daß auch Alles am Vieleck berechnet werden kann.

Führe dies durch am 5-Eck, 10-Eck, 15-Eck, am 8-Eck und 16-Eck u. s. w. Neben n kann statt r auch gegeben sein ϱ, a, u, F u. s. w. Auch die übrig bleibenden Segmente des Um-Kreises lassen sich berechnen.

III. Die Funktionen des stumpfen Winkels und das allgemeine Dreieck.*)

15) In Fig. 113 sei α ein stumpfer Winkel. Fällt man ebenso, wie in Fig. 111 von B aus auf den Schenkel MC ein Lot, und ist $MB = 1$, so nennt man naturgemäß die Projektion MA von MB wie vorher die Cosinuslinie. Da diese aber auf die Rückverlängerung des wiederum positiv aufzufassenden Schenkels MC fällt, so muß man MA als negativ auffassen. Aus $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ würde, wenn man das Fortbestehen dieser Formel verlangt, AB als Sinuslinie folgen, denn es ist $AB = \sqrt{1 - MA^2}$, wobei MA auch negativ sein kann. Da aber jetzt die Sinuslinie dieselbe Richtung wie vorher hat, so ist sie wiederum als positiv aufzufassen. — Vergleicht man die Cosinus- und die Sinuslinie des stumpfen Winkels mit der seines Complementwinkels $\beta = 90^0 - \alpha$, so erkennt man,

Fig. 113.



*) Auf dem Gymnasium kann dieses Kapitel nach IIa verschoben werden, obwohl der Abschluß und die stereometrischen Berechnungen die Durchnahme auf IIb sehr wünschenswert erscheinen lassen.

daß die entsprechenden Linien für beide Winkel absolut genommen einander gleich sind, und zwar ist

$$1)\qquad \sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha),\quad \cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha).$$

Folglich muß sein:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(180^0 - \alpha)}{-\cos(180^0 - \alpha)} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\cos(180^0 - \alpha)}{\sin(180^0 - \alpha)},$$

d. h. 2) $\tan\alpha = -\tan(180^0 - \alpha),\quad \cot\alpha = -\cot(180^0 - \alpha).$

Letzteres erkennt man auch an der Figur, denn erstens schneidet die Tangente in C den rückwärtsverlängerten Schenkel MB in D, so daß die Tangentenlinie CD jetzt nach unten gerichtet, d. h. negativ ist, ferner ist $CD = -CD_1$. Ebenso ist die nach links gehende, in F berührende Cotangentenlinie FE jetzt negativ und gleich FE_1. Man hat also den Satz:

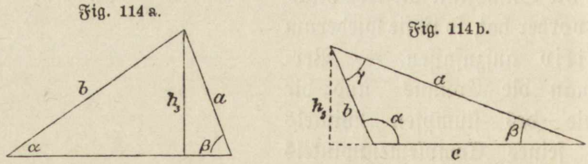
Die Funktionen von Supplementwinkeln sind absolut genommen einander gleich, und es unterscheiden sich nur Cosinus, Tangente und Cotangente solcher Winkel durch das Vorzeichen. (Deshalb sind Tafeln für die stumpfen Winkel überflüssig.)

Bei dem Aufschlagen des Winkels für einen gegebenen Sinus giebt es also stets zwei Winkel, den betreffenden spitzen und seinen stumpfen Supplementwinkel. Das Aufschlagen des Winkels für die übrigen Funktionen giebt aber bei positiven Winkeln zwischen 0^0 und 180^0 nur einen einzigen Wert.

Durch diese Ausdehnung des Begriffs der trigonometrischen Funktionen auf stumpfe Winkel wird der Beweis einiger Sätze für das allgemeine Dreieck ermöglicht, aus denen leichte Berechnungsarten für dasselbe folgen.

16) **Der Sinussatz.** In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 114 a. Fig. 114 b.



Beweis. In Fig. 114 a ist $\sin\alpha = \frac{h_3}{b}$, $\sin\beta = \frac{h_3}{a}$,

folglich $$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{h_3}{b} : \frac{h_3}{a} = \frac{1}{b} : \frac{1}{a} = a : b.$$

Allgemein also

3) $$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

[Beim stumpfwinkligen Dreieck in Fig. 114b ist

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{h_3}{b},$$

sonst Alles, wie vorher.]

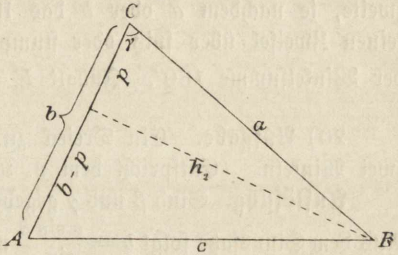
17) **Der Cosinussatz.** Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis. In der Geometrie ist in Abschnitt 140 und 141 gezeigt worden, daß in jedem Dreiecke

$$c^2 = a + b^2 \mp 2bp$$

ist, jenachdem der Seite c ein spitzer oder stumpfer Winkel gegenüberliegt.

Fig. 115a.

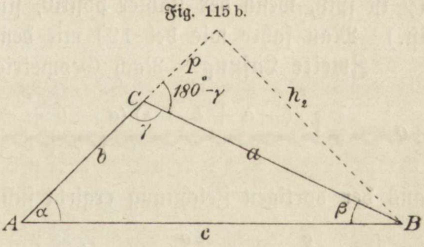


Im Falle des spitzen Winkels (Fig. 115a) ist nun die Projektion $p = a\cos\gamma$, dies eingesetzt giebt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Im Falle des stumpfen Winkels (Fig. 115b) ist die Projektion $p = a\cos(180^0 - \gamma) = -a\cos\gamma$, was, oben eingesetzt, ebenfalls $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ giebt.

Fig. 115b.



Während also die Geometrie zwei Sätze zu unterscheiden hat, kennt die Trigonometrie nur den einen Satz:

4) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Der Unterschied liegt jetzt in dem Ausdrucke $\cos\gamma$, der positiv für spitze und negativ für stumpfe Winkel ist.

18) **Der Inhaltssatz.** Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis. In Fig. 114a und 114b ist $F = \frac{c \cdot h_3}{2}$, also, da $h_3 = b \sin \alpha$ ist, $F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$.

Allgemein:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta.$$

19) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. (Dem 1. Kongruenzsatze entsprechend.)

Auflösung. Sind a, b und γ gegeben, so giebt der Cosinussatz $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$. Aus dem Sinussatze folgt $\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}$ und $\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c}$. Man wählt zum Rechnen das erste oder das zweite, je nachdem a oder b das kleinere ist, denn dann hat man keinen Zweifel über spitz oder stumpf. Der dritte Winkel folgt aus der Winkelsumme 180^0. Inhalt $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

20) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln. (Entspricht dem 2. Kongruenzsatze.)

Auflösung. Sind β und γ gegeben, so folgt $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$. Aus dem Sinussatze folgt $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ und $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$; $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

21) **Aufgabe.** Ein Dreieck aus den drei Seiten zu berechnen. (Dem dritten Kongruenzsatze entsprechend.)

Erste Lösung. Aus dem Cosinussatze folgt $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. ($\gamma$ ist spitz, wenn der Zähler positiv, stumpf, wenn der Zähler negativ ist.) Man fahre wie bei 19) mit dem Sinussatze fort.

Zweite Lösung. Nach Geometrie Abschnitt 193 ist

$$\varrho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a + b + c}} = \sqrt{\frac{p_1 \, p_2 \, p_3}{p}},$$

aus der dortigen Zeichnung ergiebt sich $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1} = \frac{2\varrho}{-a + b + c}$, $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2} = \frac{2\varrho}{a - b + c}$, ($\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3} = \frac{2\varrho}{a + b - c}$ kann zur Probe mit der Winkelsumme benutzt werden.) $F = \varrho p = \varrho \frac{a + b + c}{2}$.

Dritte Lösung. Aus Geometrie N. 194 folgt $F = \sqrt{p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}$, ferner ist, $\frac{ah_1}{2} = F$, folglich $h_1 = \frac{2F}{a}$, wobei a als größte Seite angenommen werden mag. Aus den rechtwinkligen Dreiecken folgt dann

$\sin\gamma = \frac{h_1}{b}$ und $\sin\beta = \frac{h_1}{c}$. ($h_1$ liegt innerhalb des Dreiecks, weil a die größte Seite war.)

22) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel. (Dem 4. Kongruenzsatze entsprechend.)

Auflösung. Gegeben a, b, α und $a > b$, dann giebt der Sinussatz den spitzen Winkel β aus $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$, $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$, $F = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

23) **Aufgabe.** Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem der kleineren gegenüberliegenden Winkel. (Dem 5. Kongruenzsatze entsprechend.)

Auflösung. Gegeben a, b, α und $a < b$. Man hat zwei Lösungen zu berechnen, die eine mit dem spitzen Winkel aus $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$, die andere mit dem stumpfen Supplementwinkel desselben. γ, c und F bezw. γ_1, c_1 und F_1 werden wie vorher gefunden.

24) **Aufgabe.** Welche Beziehung besteht zwischen der Seite a, dem gegenüberliegenden $\sphericalangle\, \alpha$ und dem Radius r des Um-Kreises?

Auflösung. Ist ABC das Dreieck mit a, α und r, so ziehe man von B aus den Durchmesser BA_1 des Um-Kreises und verbinde A_1 mit C, dann ist $\sphericalangle\, BA_1C = \alpha_1 = \alpha$ (Peripheriewinkel), und $\triangle\, BCA_1$ ist ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem ist $\sin\alpha_1 = \frac{a}{2r}$, folglich ist in dem ursprünglichen Dreiecke ebenfalls $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$. Ebenso ist $\sin\beta = \frac{b}{2r}$, $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$.

Bemerkung. Sämtliche Aufgaben, die man als Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen kann, lassen sich auch als trigonometrische Rechnungsaufgaben ausführen, wobei jedesmal drei von einander unabhängige Stücke gegeben sein müssen. Ist z. B. a und r gegeben, so kann α nicht gegeben werden, sondern man hat es aus $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$ zu berechnen; ein drittes Stück, z. B. h_1, muß noch als gegebene Größe herangezogen werden.

---

25) Ein Berggipfel C erscheine von einem Punkte A der Meeresfläche aus unter dem Elevationswinkel (Erhöhungswinkel) α. Um die Höhe und Lage des Berges zu bestimmen, segelt man um eine meßbare Entfernung e in der Richtung auf den Gipfel vorwärts, worauf er von B aus unter dem größeren Elevationswinkel β erscheint. Wie hoch ist der Berg und in welcher Entfernung von A ist sein Gipfel auf der Landkarte festzulegen?

Auflösung. Berechne Seite AC im Dreieck ABC, sodann die Seiten C_1C und AC_1 im rechtwinkligen Dreiecke CC_1A, wo C_1 der Projektionspunkt von C ist. (Die Krümmung der Erde soll vernachlässigt werden.)

26) Ein Berg auf einer Insel sei 3000 m hoch. Wie weit kann man von ihm aus über den Ocean sehen, wenn der Radius des Erdkörpers zu 859 Meilen ($859 \cdot 7500$ m) angenommen wird, und wie groß ist der Winkel zwischen der berechneten Tangente und der Horizontalen? (Depressionswinkel.)

Auflösung. Nach Satz 174 der Geometrie ist $t^2 = h(h + 2r)$, wo t die zu berechnende Tangente an den Erdkörper, h die Höhe des Berges und r der in demselben Maße gemessene Erdradius ist. Nach Berechnung der Tangente t ist ihr Berührungspunkt auf den senkrechten Radius zu projizieren und der geforderte Winkel zu berechnen.

27) Feldmesser haben eine horizontale Standlinie AB diesseits eines Stromes gemessen und wollen die Entfernungen AC und BC nach einer Marke jenseits derselben bestimmen. Wie groß sind dieselben, wenn sich beim Visieren die Winkel $CAB = \alpha$ und $CBA = \beta$ ergeben? Darauf soll die Höhe der Marke, z. B. eines Berggipfels, bestimmt werden, wenn α_1 der zu A gehörige Elevationswinkel ist.

Vierte Abteilung.

Stereometrie.

Lehraufgabe der Secunda b.

(Prima der Realschulen.)

(Erster Jahrgang.)

Vorbemerkung.

1) Aus der Lehraufgabe der Quarta und aus dem Zeichenunterrichte werden folgende Begriffe als hinreichend bekannt vorausgesetzt: Körper, ebene und krumme Fläche, Abstand eines Punktes von einer Ebene oder das von ihm aus auf die letztere gefällte Lot, parallele Ebenen und ihr gegenseitiger Abstand, die Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen, Ebenen, die sich rechtwinklig oder schiefwinklig schneiden. Schnittwinkel der letzteren, Gerade, die zu einer Ebene parallel sind, oder sie unter beliebigem Winkel schneiden, parallele Gerade im Raume, sich kreuzende Gerade. Der Würfel mit seinen Haupteigenschaften. Die Kugel mit ihren Hauptschnitten (größten Kreisen) und Parallelkreisen, Richtung ihrer Radien.

I. Übungen am Würfel und an den aus ihm abgeleiteten Körpern.

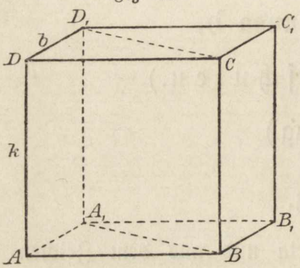
2) Das Zeichnen des Würfels. Die Kunst, dreidimensionale Körper und sonstige Raumgebilde in der nur zweidimensionalen Ebene durch eine korrekte Zeichnung wiederzugeben, heißt die darstellende Geometrie. Jede besondere Art der Darstellung eines Körpers in

der Ebene bezeichnet man als eine **Projektion** des Körpers. Die Berechtigung dieses Namens wird sich aus den folgenden Erläuterungen über die Darstellung des Würfels durch entsprechende Zeichnungen ergeben.

Man denke sich das Drahtmodell des Würfels auf einem horizontalen Reißbrette stehend und die Sonne so darauf scheinend, daß der Schatten des Modells auf das Reißbrett geworfen (**projiziert**) wird. Bei schrägem Einfall der Sonnenstrahlen, die man wegen der sehr großen Entfernung der Sonne als parallel betrachten darf, nennt man das entstehende Schattengebilde eine **schräge Parallelprojektion des Würfels**. (Vergl. Fig. 116.)

Dabei decken sich die unendlich dünn zu denkenden Drähte der Grundfläche mit ihren eigenen Schattenlinien, die also ein Quadrat bilden. Die senkrechten Würfelkanten aber werfen **parallele** Schattenlinien, denn steht z. B. die Sonne im Südosten, so gehen diese Schattenlinien sämtlich nach Nordwesten. Außerdem sind sie **gleich lang**. Steht nämlich die Sonne z. B. 50^0 über dem Horizonte, und ist k die Länge der Würfelkante, so ist die Schattenlänge der senkrechten Kanten $b = k \cot 50^0$. Allgemeiner ist $b = k \cot \alpha$, sobald die Sonne α^0 über dem Horizonte steht. Die Drähte der oberen Würfelfläche endlich geben Schattenlinien, welche die Endpunkte der eben besprochenen verbinden, so daß sie ein Quadrat bilden, welches dem zuerst besprochenen kongruent und gegen dasselbe um die Strecke b verschoben ist.

Fig. 116.



In Fig. 116 bedeutet bei dieser Auffassung $A_1 B_1 C_1 D_1$ die Grundfläche, $ABCD$ die obere Fläche, $A_1 A$, B_1B, $C_1 C$ und $D_1 D$ sind die Schatten der senkrechten Kanten.

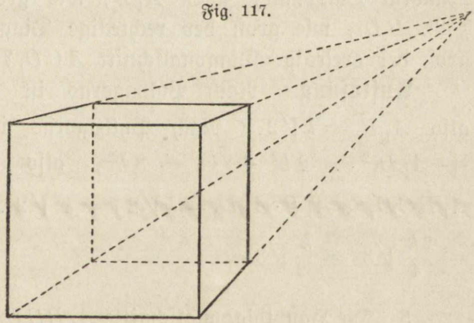
[**Aufgabe.** Versuche Fig. 116 so zu deuten, daß das Würfelmodell mit der Fläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ an die senkrechte Wandtafel gehalten und das Schattengebilde durch die Sonne auf diese geworfen wird. Welches ist dann die horizontale Grundfläche des Würfels, wo sind die senkrechten Seitenkanten, und wie hat man sich den Stand der Sonne zu denken?]

[Steht die Sonne senkrecht über dem Reißbrett, bezw. der Wandtafel, so fällt $ABCD$ auf $A_1 B_1 C_1 D_1$ und es wird $AA_1 = 0$, $BB_1 = 0$ u. s. w. In dem einen Falle entsteht dann die **Grundriß-Zeichnung**, in dem andern die **Aufriß-Zeichnung** des Würfels, in beiden Fällen ein einfaches Quadrat. Im Gegensatz zur vorigen Projektionsart bezeichnet man diese Zeichnungen als die senkrechte Projektion (orthogonale oder orthographische Projektion) des Würfels. Die Zeichnungen der Bau- und Maschinentechnik werden in der Regel durch Grundriß und Aufriß zugleich dargestellt. Für die mathematischen Zwecke der Schule ist die Schrägprojektion im allgemeinen die geeignetere, da sie nur eine Zeichnung erfordert. Nur für die Zeichnung der Kugel ist die senkrechte Projektion vorzuziehen, weil sie in dieser als Kreis, bei der schrägen dagegen als Ellipse erscheint.]

Die Richtung und Länge der Linien AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 in Figur 116 sind gleichgültig, denn man kann sich den Stand der Sonne am Himmel als ganz beliebig denken. Aus verschiedenen Gründen empfiehlt es sich jedoch, $AA_1 = \frac{1}{3} AB$ zu nehmen und den scheinbaren Winkel BAA_1 gleich 30^0 anzunehmen, der mit Hülfe des entsprechenden Winkeldreiecks bequem zu zeichnen ist. — Man nennt eine solche Zeichnung auch eine Parallelperspektive des Würfels, da man sich statt der Strahlen gebenden Sonne das Strahlen empfangende Auge denken kann. Befindet sich nämlich das Auge in größerer Entfernung von dem Würfelmodell, und zwar in der Richtung nach der Sonne hin, so verdecken die Drähte des Modells den von der Sonne geworfenen Schatten, so daß die Zeichnung den Würfel so darstellt, wie er dem Beobachter erscheint.

[Macht man den ersten Beleuchtungsversuch statt mit den Sonnenstrahlen mit einem Kerzenlichte, so erhalten die Quadrate verschiedene Größe, und die Schatten der senkrechten Drähte laufen so auseinander, als ob sie von einem Punkte ausgingen, dem äußeren Ähnlichkeitspunkte der beiden Quadrate. Fig. 117 stellt eine solche Projektion dar, die man als Centralprojektion (Centralperspektive, Malerperspektive) des Würfels bezeichnet. Sie stellt den Würfel so dar, wie er dem in endlicher Entfernung befindlichen Auge erscheint.]*)

Fig. 117.



*) Näheres über diese sämtlichen Darstellungsarten siehe in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen". Leipzig bei B. G. Teubner 1886.

3) **Aufgaben.***) a) Der Würfel habe die Kante k, wie groß ist seine Oberfläche, sein Inhalt und, wenn p' das spezifische Gewicht ist, sein Gewicht? (Bei Eisen z. B. $p' = 7{,}5$ zu nehmen.)

Auflösung. $O = 6k^2$, $I = k^3$, $p = k^3 p'$.

b) Wie groß sind k, I und p bei gegebener Oberfläche O?

Auflösung. $k = \sqrt{\frac{O}{6}}$, $I = k^3 = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3$, $p = \left(\sqrt{\frac{O}{6}}\right)^3 p'$, wobei auch p' gegeben sein muß.

c) Wie groß sind k, O und p bei gegebenen I?

Auflösung. $k = \sqrt[3]{I} = I^{\frac{1}{3}}$; $O = 6k^2 = 6I^{\frac{2}{3}}$, $p = I \cdot p'$.

d) Wie lang müssen die Kanten eines würfelförmigen Hektolitergefäßes genommen werden?

Auflösung. $x^3 = 100$ cbdcm, folglich $x = \sqrt[3]{100} = ?$.

e) Wie lang müssen die Kanten eines Eisenwürfels sein, der 1000 kg wiegen soll?

Auflösung. Aus $p = I \cdot 7{,}5 = x^3 7{,}5$ folgt $x = \sqrt[3]{\frac{p}{7{,}5}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{7{,}5}} = ?$

f) Ein Würfel von der Kantenlänge k habe das Gewicht p. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Masse?

Auflösung. $p' = \frac{p}{k^3}$.

4) **Aufgaben.** Wie groß ist bei dem Würfel in Fig. 116 jede Quadrat-Diagonale, z. B. A_1B, wie groß jede Haupt-Diagonale, z. B. BD_1, wie groß der rechteckige Diagonalschnitt A_1BCD_1, wie groß der dreieckige Diagonalschnitt ACD_1?

Auflösung. Nach Pythagoras ist $A_1B^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$, also $A_1B = k\sqrt{2}$. Nach Pythagoras ist ferner $BD_1{}^2 = A_1B^2 + A_1D_1{}^2 = 2k^2 + k^2 = 3k^2$, also $BD_1 = k\sqrt{3}$. Fläche $A_1BCD_1 = A_1B \cdot A_1D_1 = k\sqrt{2}\,k = k^2\sqrt{2}$. Fläche $ACD_1 = \frac{AC^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2k^2}{4}\sqrt{3} = \frac{k^2}{2}\sqrt{3}$.

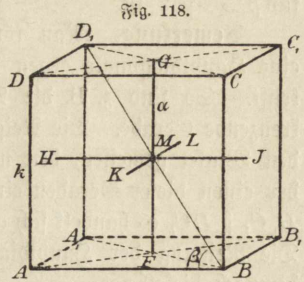
5) Die Hauptdiagonalschnitte A_1BCD_1 und AB_1C_1D (Fig. 118) schneiden sich in der Mittellinie FG des Würfels. Die beiden anderen Paare von Schnittflächen geben die Mittellinien HI und KL.

Je zwei der Geraden FG, HI und KL bestimmen eine Ebene, die den Würfel in kongruente Teile zerlegt. Diese Ebenen heißen

*) In der Klasse sind auch Zahlenbeispiele zu üben.

die Mittelschnitte des Würfels. Der Punkt M, der diesen drei Ebenen gemeinschaftlich ist, ist zugleich sämtlichen Hauptdiagonalschnitten gemein, in ihm schneiden sich sowohl die Mittellinien FG, HI, KL, als auch die vier Hauptdiagonalen AC_1, BD_1, B_1D und A_1C. M heißt der Mittelpunkt des Würfels. Er ist gleichweit von allen Ecken, gleichweit von allen Kanten, gleichweit von allen Flächen des Würfels entfernt. Er ist also der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, deren Radius $\varrho = \frac{k}{2}$ ist, und zugleich der Mittelpunkt

Fig. 118.



der umbeschriebenen Kugel, deren Radius $\frac{1}{2}\ BD$ oder $r = \frac{k}{2}\sqrt{3}$ ist. In der Krystallographie nennt man die drei Mittellinien FG, HI und KL das Achsenkreuz des Würfels.

6) **Aufgaben.** a) Wie groß sind die Kanten k, die Oberfläche O, der Inhalt I eines Würfels und der Radius r der umbeschriebenen Kugel, wenn der Radius ϱ der einbeschriebenen gegeben ist?

b) Wie groß sind k, O, I und ϱ, wenn r gegeben ist?

c) Einer Kugel mit Radius r sei ein Würfel um- und ein anderer einbeschrieben. Wie groß ist der Unterschied der Kanten, der Oberflächen, der Inhalte beider Würfel?

d) Wie groß ist der Radius r, wenn irgend eine der genannten Differenzen gegeben ist?

e) Welche Neigung hat jede Hauptdiagonale des auf horizontaler Basis stehenden Würfels?

Auflösung. In Fig. 118 ist $\tan\beta = \frac{A_1 D_1}{BA_1} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,5}$; $\lg 0,5 = 19,698\,97 - 20$, $\lg \sqrt{0,5} = 9,849\,49 - 10$, also $\beta = 35^0\,15'\,50''$. Man nennt diesen Winkel den Neigungswinkel der Hauptdiagonale gegen die Grundfläche. Der Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, wird stets in derjenigen Ebene gemessen, die durch die Gerade geht und auf der ersteren senkrecht steht, also in der projizierenden Ebene. Es handelt sich also um den Winkel der Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene.

Jede Hauptdiagonale des Würfels bildet mit jeder der Würfelflächen den Winkel $35^0\,15'\,50''$.

f) Welchen Winkel bildet jede Hauptdiagonale des Würfels mit den von ihr getroffenen Kanten?

Auflösung. Fig. 118 zeigt, daß es sich um den Complementwinkel des vorigen handelt, also um $\beta_1 = 54^0\,44'\,10''$, für den $\tan\beta_1 = \sqrt{2}$ ist.

Bemerkung. Man könnte auch nach der Neigung fragen, die eine Hauptdiagonale gegen Würfelkanten hat, mit denen sie sich nicht trifft. So sind z. B. die Diagonale BD_1 und die Kante DC sich kreuzende Gerade. Die Neigung der beiden gegeneinander wird durch den Winkel gemessen, den man erhält, wenn man durch einen Punkt der einen dieser Geraden eine Parallele zur andern legt. So ist z. B. $D_1C_1 \parallel DC$, es handelt sich also um den Winkel $BD_1C_1 = 54^0\,44'\,10''$. Die Neigung der Hauptdiagonalen gegen sämtliche Würfelkanten ist demnach dieselbe.

[g) Man könnte ferner nach der kleinsten Entfernung der sich kreuzenden Geraden DC und BD_1 von einander fragen.

Auflösung. Die Gerade DC ist parallel zu jeder durch D_1C_1 gelegten Ebene, also auch parallel zu der durch D_1C_1 und BD_1 gelegten Ebene $BC_1D_1A_1$, die unter 45^0 gegen die Horizontalebene geneigt ist. Von dieser Ebene hat DC überall die Entfernung $CI = DH = k\sqrt{\frac{1}{2}}$. Verbindet man M mit dem Halbierungspunkte von DC, so erhält man den kleinsten Abstand der Geraden DC und BD_1 von einander, d. h. wiederum $k\sqrt{\frac{1}{2}}$. Diese Verbindungslinie steht nämlich auf beiden Geraden senkrecht, was bei keiner zweiten Verbindungslinie ihrer Punkte stattfindet. Jede andere Verbindungslinie ist also länger.

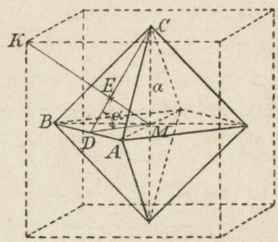
In ähnlicher Weise bestimmt man allgemein für zwei sich kreuzende Gerade das gemeinschaftliche Lot und die kürzeste Entfernung beider von einander.]

Bemerkung. In der Mineralogie tritt der Würfel auf als Krystallform für Steinsalz, Flußspat, Silber, Gold, Bleiglanz, Schwefelkies u. s. w.

7) **Aufgabe.** Den ebenflächigen Körper zu zeichnen und zu untersuchen, der dadurch entsteht, daß man bei einem Würfel die Endpunkte des Achsenkreuzes auf alle möglichen Arten mit einander verbindet.

Auflösung. In Fig. 119 ist die Zeichnung ausgeführt. Ist a die Länge jeder Halbachse, so ist $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $BC = a\sqrt{2}$. Dies ist die Länge jeder der 12 Kanten des Körpers. Die 8 Flächen sind demnach gleichseitige Dreiecke. Es handelt sich also um das regelmäßige Oktaeder oder Achtflach. Jede Fläche des Oktaeders ist, wenn man die Oktaederkante mit k bezeichnet, $\frac{k^2}{4}\sqrt{3}$, die gesamte Oberfläche also $O = 2k^2\sqrt{3}$. Der körperliche Inhalt wird erst später berechnet.

Fig. 119.



In der Stellung der Figur ist die Neigung jeder schrägen Kante 45°. Jede Kante bildet mit den drei mit ihr zusammenstoßenden Kanten zwei Winkel von 60° und einen von 90°.

Die Neigung der Fläche ABC mißt man mit Hülfe der Mittellinie DC und der Geraden DM, da beide auf der Schnittkante AB der Fläche ABC und der Horizontalebene ABM senkrecht stehen. Dabei ist $\tan\alpha = \frac{MC}{DM} = \frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$, also $\alpha = 54^0\ 44'\ 10''$.

Zieht man KM, welches ebenfalls in der Ebene MCD liegt, also CD in einem Punkte E schneidet, wobei $\sphericalangle KMD$ nach Obigen (vgl. 6) gleich $35^0\ 15'\ 50''$ ist, so folgt, daß $\sphericalangle DEM = 90^0$ ist. Da nun zugleich die Ebene $CDM \perp ABC$ ist, so ist EM das vom Mittelpunkte M auf die Fläche ABC gefällte Lot.

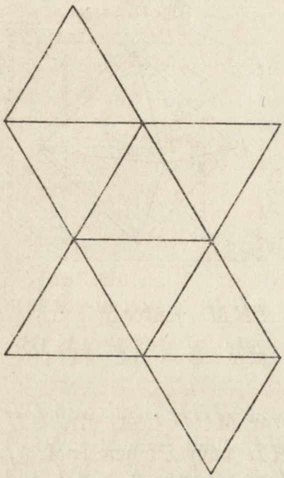
Aus $\tan\alpha = \sqrt{2}$ folgt, daß $EM = DE\sqrt{2}$ ist, und da $\triangle DEM \sim \triangle MEC$, so folgt, daß $CE = EM\sqrt{2} = DE\sqrt{2}\sqrt{2} = 2DE$ ist. Demnach ist E der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC. Da $DC = \frac{k}{2}\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, also $DE = \frac{DC}{3} = a\sqrt{\frac{1}{6}}$ ist, so folgt $EM = DE\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dies gilt für alle Flächen des Oktaeders. Folglich: Dem regelmäßigen Oktaeder läßt sich eine Kugel einbeschreiben, deren Radius $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist. Ebenso läßt sich ihm eine Kugel vom Radius $r = a$ umbeschreiben.

Je zwei mit den Kanten aneinander stoßende Oktaederflächen bilden einen Winkel von der Größe $2\alpha = 109^0\ 28'\ 20''$, je zwei nur in einer Ecke zusammenstoßende bilden einen Winkel $180^0 - 2\alpha = 70^0\ 31'\ 40''$. Man achte auf folgende Beziehungen:

Weil der Würfel 6 Flächen hat, besitzt das Oktaeder 6 Ecken,
" " " 8 Ecken " " " " 8 Flächen,
" " " 12 Kanten " " " " 12 Kanten,

denn jeder dreikantigen Ecke des Würfels liegt eine dreikantige Fläche des Oktaeders gegenüber, jeder vierkantigen Ecke des Oktaeders entspricht eine vierkantige Fläche des Würfels.

Fig. 120.



Je zwei gegenüberliegende Kanten bezw. Flächen des Oktaeders sind parallel.

Das Flächennetz des Oktaeders ist in Fig. 120 dargestellt. Die gleichseitigen Dreiecke sind dabei so angeordnet, daß in jeder Ecke des Körpers vier von ihnen zusammenstoßen.

Bemerkung. Das regelmäßige Oktaeder ist die Krystallform für Magneteisen und einige andere Eisenerze, für Rotkupfer, Schwefelkies, Bleiglanz, Silberglanz, Platin, Alaun, Gold u. s. w.

8) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Oktaeder sei eine der Größen a, k, O, r, ϱ gegeben. Die andern sollen aus ihr berechnet werden.

b) Einer Kugel vom Radius r sei ein regelmäßiges Oktaeder einbeschrieben und das entsprechende umbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Halbachsen, ihrer Kanten, ihrer Oberflächen?

c) Eine dieser Differenzen sei gegeben, wie groß ist dann der Radius r?

d) Suche zu beweisen, daß die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Oktaeders die Ecken des einbeschriebenen Würfels sind, zeichne die entsprechende Figur und berechne die neue Würfelkante aus der Halbachse des Oktaeders.

e) Einem Würfel sei ein Oktaeder, diesem ein Würfel eingezeichnet. Wie verhalten sich die Kanten der beiden Würfel?

f) Zeichne den ebenflächigen Körper, dessen Ecken die Halbierungspunkte der Oktaederkanten sind und beschreibe und berechne denselben.

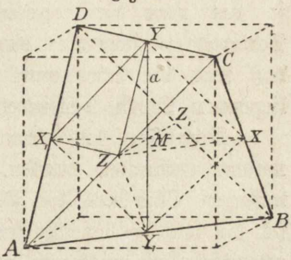
g) Löse dieselbe Aufgabe für die Halbierungspunkte der Kanten des Würfels.

9) **Aufgabe.** Es soll untersucht werden, ob sich aus den dreiseitigen Diagonalschnitten des Würfels ein regelmäßiger Körper herstellen läßt, und wie derselbe beschaffen ist.

Auflösung. In Fig. 121 ist gezeigt, daß sich mit Hülfe der Quadratdiagonalen ein Körper in den Würfel einzeichnen läßt, der von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt ist, das regelmäßige

Tetraeder oder Vierflach $ABCD$. Die Figur zeigt zugleich, daß die Halbierungspunkte der Seitenkanten dieses Körpers ein regelmäßiges Oktaeder bilden, und zwar so, daß vier Oktaederflächen in den Tetraederflächen liegen, wie z. B. $X_1 YZ$ in ACD, während die andern vier von dem Tetraeder kleinere Tetraeder abschneiden.

Fig. 121.



Die Tetraederflächen haben demnach, wie die Oktaederflächen, in der gezeichneten Stellung sämtlich die Neigung $54^0\,44'\,10''$ gegen die Horizontalebene, bilden also, wie an der Kante CD gezeigt werden kann, miteinander Winkel von der Größe $180^0 - 2\,(54^0\,44'\,10'') = 70^0\,31'\,40''$. Die einbeschriebene Kugel des Tetraeders ist identisch mit der des Oktaeders, also vom Radius $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn a die Länge der Halbachse MX ist. Die umbeschriebene Kugel dagegen hat den Radius $r = MD = a\sqrt{3}$, stimmt also mit der des Würfels überein. Da die Hauptdiagonalen des Würfels sich in einem Punkte M schneiden, und da jede von ihnen eine der Tetraederflächen senkrecht durchschneidet, so treffen sich die vier Höhen des Tetraeders in einem Punkte M, und von jeder ist durch diesen der vierte Teil abgeschnitten, weil $r = 3\,\varrho$ ist. Jede Tetraederfläche wird von den Kanten der übrigen Flächen unter Winkeln von der Größe $54^0\,44'\,10''$ geschnitten.

Ist k_1, die Tetraederkante, k die Würfelkante, a die Halbachse, so ist $k_1^{\,2} = 2\,k^2 = 8\,a^2$, also $k = 2\,a\sqrt{2}$, folglich jede Tetraederfläche $\frac{k_1^{\,2}}{4}\sqrt{3} = 2\,a^2\sqrt{3}$ und die gesamte Oberfläche des Körpers $O = 8\,a^2\sqrt{3}$, d. h. doppelt so groß, als die Oktaeder-Oberfläche, was sich auch ohne Rechnung zeigen läßt. Der körperliche Inhalt soll erst später berechnet werden.

Fig. 122.

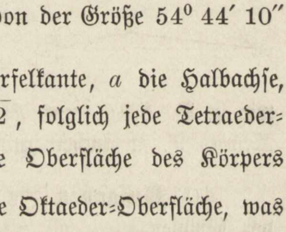


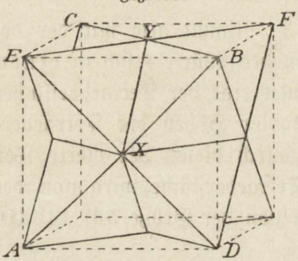
Fig. 122 stellt das Flächennetz des Tetraeders dar.

Die Zahl der Ecken des Körpers ist 4, die der Kanten 6. Die Mittelpunkte der Flächen des regelmäßigen Tetraeders bilden wiederum ein regelmäßiges Tetraeder. Je zwei Gegenkanten des Tetraeders kreuzen einander senkrecht. Legt man durch jede Kante eine Ebene parallel zur Gegenkante, so erhält man den umbeschriebenen Würfel (Fig. 121).

Denkt man sich das Tetraeder auf eine seiner Flächen gestellt, so hat man die regelmäßige dreiseitige Pyramide. (Unter Pyramide versteht man einen ebenflächigen Körper, der dadurch entsteht, daß man die Ecken eines Vielecks mit einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkte verbindet.)

Nach Fig. 121 kann man sich das Tetraeder auch folgendermaßen entstanden denken. Man bezeichne am Modell des regelmäßigen Oktaeders die Flächen abwechselnd mit + und —, denke sich die mit — bezeichneten weg und die mit + bezeichneten so weit erweitert, daß wiederum ein geschlossener Körper entsteht, nämlich das dem Oktaeder umbeschriebene Tetraeder. Deshalb nennt man in der Krystallographie das regelmäßige Tetraeder auch den Halbflächner oder die Hemiedrie des Oktaeders.

Fig. 123.



In der Mineralogie erscheint es mehrfach als Krystallform, z. B. beim Fahlerz, bei der Zinkblende u. s. w.

Aufgabe. Die beiden Tetraeder, die sich dem Würfel einzeichnen lassen, in ihrer gegenseitigen Durchdringung darzustellen.

Auflösung. In Fig. 123 ist die Aufgabe gelöst, wobei zunächst alle Quadratdiagonalen des Würfels gezogen sind. Von je zwei sich schneidenden Dreiecken, wie z. B. ABC und DEF sind dabei je zwei Schnittpunkte, z. B. X und Y, zu suchen und durch eine Schnittlinie zu verbinden.*)

10) **Aufgaben.** a) Bei einem regelmäßigen Tetraeder sei eine der Größen a, k, O, r, ϱ oder h (Höhe des Tetraeders $= r + \varrho$) gegeben. Die übrigen sollen daraus bestimmt werden.

b) Einer Kugel vom Radius r sei ein regelmäßiges Tetraeder um-, ein anderes einbeschrieben. Wie groß ist die Differenz ihrer Kanten, ihrer Halbachsen, ihrer Oberflächen?

c) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante k_1 sei ein anderes einbeschrieben, dessen Ecken mit den Flächen-Mittelpunkten

*) Es empfiehlt sich, die sichtbaren Flächenteile jedes Tetraeders mit leichten Farbentönen so anzulegen, daß zusammengehörige Stücke sich deutlich hervorheben. Das gegenseitige Durchdringen tritt dabei klar hervor, und der Schüler übt sich darin, die ebene Zeichnung räumlich (plastisch) zu sehen.

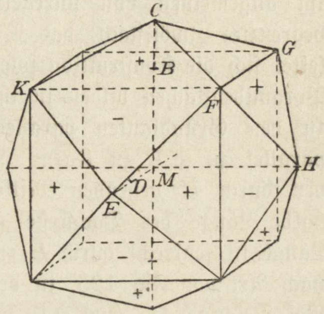
des anderen zusammenfallen. Die Kante des zweiten Tetraeders soll berechnet werden.

d) Einem regelmäßigen Tetraeder von der Kante k_1 sei ein Würfel umbeschrieben. Die Kante desselben soll berechnet werden.

e) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen der beiden sich durchdringenden regelmäßigen Tetraeder der Figur 123?

[11) **Aufgabe.***) Auf die Flächen eines Würfels Pyramiden von gegebener Höhe so aufzusetzen, daß ein Pyramidenwürfel entsteht.

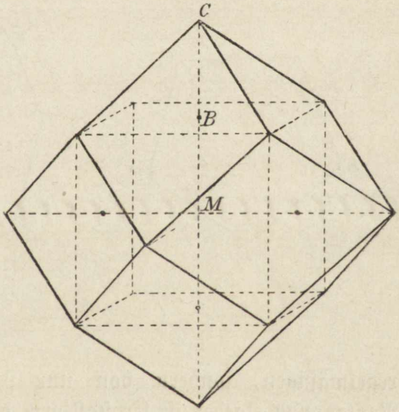
Fig. 124 a.



In Fig. 124a ist zunächst der gegebene Würfel gezeichnet und der Mittelpunkt jeder Fläche bestimmt. Dort sind auf jeder Fläche Lote von der gegebenen Länge BC errichtet, das nach vorn gerichtete Lot DE natürlich in der gewählten Verkürzung (z. B. in $\frac{1}{3}$ der Länge gezeichnet. Die Endpunkte der Lote sind mit den Würfelecken verbunden. Aus der Würfelkante k und der Pyramidenhöhe h lassen sich Kanten, Oberfläche, Winkel, Radius ϱ der einbeschriebenen Kugel u. s. w. des Körpers berechnen.

Bemerkung. Dieser Körper ist als Krystallform in der Mineralogie von Bedeutung. Er wird hier besprochen, weil sich aus ihm andere Körperformen leicht ableiten lassen. Macht man nämlich die Pyramidenhöhe gleich der halben Würfelkante, so erhalten die Pyramidenflächen die Neigung 45^0 gegen die Würfelflächen, und die Kante zwischen je zwei benachbarten fällt weg, so daß aus 24 Dreiecken 12 Rhomben entstehen. Fig. 124b stellt diesen besonderen Fall des

Fig. 124 b.

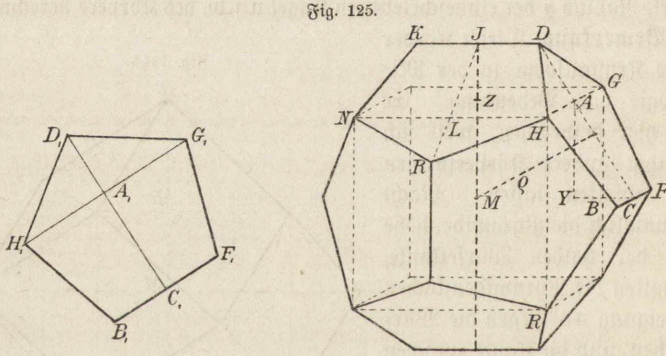


*) Auf dem Gymnasium sind die Abschnitte 11 bis 14 in IIb zu überschlagen, auf der Realschule als Übungsmaterial für das Zeichnen und die räumliche Anschauung zu betrachten, welches der Lehre von den regelmäßigen Körpern einen gewissen Abschluß giebt.

Pyramidenwürfels, das Rhombenzwölfflach oder **Rhombendodekaeder** dar. (Dies ist die häufigste Krystallform des Granats, der Körper wird daher auch als Granatoeder*) bezeichnet.) Aus der Würfelkante k lassen sich die Kanten, die Oberfläche, die Winkel des Körpers leicht berechnen.]

12) Bezeichnet man die Flächen des Pyramidenwürfels abwechselnd mit $+$ und $-$, wie es in Fig. 124a geschehen ist, läßt man die mit $-$ bezeichneten Flächen wegfallen, und erweitert man die übrig bleibenden so weit, daß der Körper wieder geschlossen ist, so entsteht ein im allgemeinen von unregelmäßigen, aber symmetrischen Fünfecken begrenztes Zwölfflach, das **Pentagondodekaeder**. Aus Fig. 124a leitet sich die Konstruktion folgendermaßen ab: Je zwei stehenbleibende Pyramidenflächen bilden in ihrer Erweiterung ein Dach, dessen Firste zu den Grundkanten parallel ist. Eine solche Firste ist durch C parallel zu KF zu legen. Rechts reicht sie bis zum Schnitte mit der durch H gehenden Mittellinie der Fläche FGH, wodurch die halbe Länge der Dachfirste gegeben ist. Eine solche von derselben Länge ist senkrecht durch E zu legen u. s. w. So entsteht eine Figur nach Art von Fig. 125, in der jedoch andere Buchstaben gewählt sind. Bei Neigung 45^0 (vgl. 11) entsteht das Rhombendodekaeder, bei dem also eine der Fünfecksseiten gleich Null geworden ist. (Das nicht von

Fig. 125.



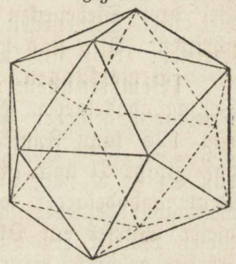
regelmäßigen, sondern von nur symmetrischen Fünfecken begrenzte Pentagondodekaeder ist Krystallform des Schwefelkieses oder Pyrits und wird daher auch Pyritoeder*) genannt).

---

*) Die Worte Granatoeder und Pyritoeder sind sprachlich als Mißbildungen zu betrachten, lassen sich aber in der Mineralogie kaum vermeiden.

In Fig. 125 ist der Fall dargestellt, in dem die symmetrischen Fünfecke regelmäßig werden, also das regelmäßige Pentagondodekaeder geben. Dabei muß die Pyramidenhöhe des zu Hülfe genommenen Pyramidenwürfels so gewählt werden, daß $MZ : ZI = C_1 A_1 : A_1 D_1$ ist, d. h. daß MI ebenso geteilt ist, wie die Mittellinie des regelmäßigen Fünfecks durch die auf ihr senkrechte Diagonale.*) Die Konstruktion des Körpers durch Zeichnung geschieht folgendermaßen: Ist $B_1 F_1 G_1 D_1 H_1$ das zu Grunde gelegte regelmäßige Fünfeck, so zeichne man einen Würfel, dessen Kante gleich der Diagonale $G_1 H_1$ ist. Man halbiere eine Seitenkante des letzteren, z. B. GH durch A, errichte im Mittelpunkte Y der zugehörigen Seitenfläche auf dieser ein Lot und schlage um A einen Bogen mit dem Teile $A_1 C_1$ der Mittellinie des Fünfecks, welcher auf dem Lote das Stück YC abschneidet. Man ziehe CA und verlängere es um $AD = A_1 D_1$. Durch C lege man $BF \parallel HG$ und mache, wenn man die Parallelperspektive mit Verkürzung $\frac{1}{3}$ gewählt hat, $CB = \frac{1}{3} C_1 B_1$ und CF ebenso groß. Dann ist $BFGDH$ das eine Fünfeck des Körpers in der richtigen Lage. Das Weitere ergiebt sich aus Fig. 125, in der gewisse Gruppen von Eckpunkten derselben Vertikalebene oder Horizontalebene angehören, was die Konstruktion erleichtert.

Fig. 126.



An die 12 Kanten des Würfels lassen sich also 12 regelmäßige Fünfecke mit den Diagonalen so anlegen, daß die Würfelmitte M senkrecht über der Mitte jedes Fünfecks liegt. (Das Ganze läßt sich durch Rechnung bestätigen, die darauf beruht, daß die Mittellinie des regelmäßigen Fünfecks durch die auf ihr senkrechte Diagonale stetig geteilt ist. Hier soll darauf nicht eingegangen werden, da es sich nur um eine vorläufige Kenntnisnahme von der Existenz dieses Körpers handelt.)

13) Bildet man auf dem Pentagondodekaeder durch je zwei Mittellinien die Mittelpunkte der zwölf Fünfecke, so entsteht ein neuer regelmäßiger Körper, das Ikosaeder oder Zwanzigflach, welches in Fig. 126 mit Hülfe der Fig. 125 dargestellt ist. Das Ikosaeder hat ebenso viel Flächen, wie das Pentagondodekaeder Ecken hat, und ebenso viele Ecken, wie das letztere Flächen hat. Die Mittelpunkte der Dreiecke des Ikosaeders bilden ein Pentagondodekaeder.

---

*) Diese Teilung ist eine stetige, da auch die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks sich gegenseitig stetig teilen.

Die Flächennetze beider Körper sind leicht herzustellen, so daß man auch Modelle aus Pappe verfertigen kann. Die Berechnung beider Körper ist auf eine der höheren Klassen zu verschieben, obwohl sie schon hier möglich ist.

14) Mit Hülfe des Würfels sind jetzt sämtliche möglichen regelmäßigen Polyeder in korrekter Zeichnung dargestellt, denn mehr als die fünf behandelten, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel und Pentagondodekaeder sind nicht möglich, wie sich aus Folgendem ergiebt: Stoßen in jeder Ecke drei, vier, fünf gleichseitige Dreiecke zusammen, so entstehen die erstgenannten drei Körper. Sechs gleichseitige Dreiecke bilden aber keine Ecke, sondern legen sich flach in die Ebene, da $6 \cdot 60^0 = 360^0$ ist. Eine noch größere Anzahl von Dreiecken kann erst recht keine Ecke bilden, da die Summe der Winkel 360^0 übersteigen würde. Stoßen in jeder Ecke drei Quadrate zusammen, so handelt es sich um den Würfel. Vier Quadrate bilden eine Ecke, sondern legen sich flach in die Ebene. Stoßen in jeder Ecke drei regelmäßige Fünfecke zusammen, so handelt es sich um das Pentagondodekaeder. Vier regelmäßige Fünfecke können keine Ecke bilden, da $4 \cdot 108^0 = 432^0$ ist und somit 360^0 weit überschreitet. Drei Sechsecke legen sich flach in die Ebene, weil $3 \cdot 120^0 = 360^0$ ist. Bei drei Siebenecken u. s. w. wird der Winkel 360^0 bereits überschritten. Also sind weitere regelmäßige Polyeder unmöglich.

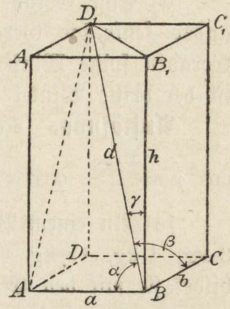
[**Bemerkungen.** Um jeden Würfel lassen sich zwei regelmäßige Pentagondodekaeder legen, die sich gegenseitig durchdringen, denn in Fig. 125 kann Fünfeck $BEGDH$ auch so an HG angelegt werden, daß Spitze D nach unten und Kante BF nach oben fällt. In jedes Pentagondodekaeder lassen sich 5 Würfel einzeichnen. Da zu jedem dieser Würfel ein Oktaeder oder zwei Tetraeder als einbeschriebene Körper gehören, so erkennt man die Möglichkeit des Stern-Oktaeders und Stern-Tetraeders, von dem das eine 5, das andere 10 sich durchkreuzende Einzelkörper hat. Den beiden sich durchdringenden Pentagondodekaedern entsprechen zwei sich durchdringende Ikosaeder.]

II. Senkrechte Prismen und Cylinder.

15) In Fig. 127 stelle $ABCD$ ein horizontales Rechteck dar, auf dessen Ebene in den Eckpunkten Lote von gleicher Höhe errichtet sind, deren Eckpunkte also der horizontalen Schnittebene $A_1 B_1 C_1 D_1$ angehören. Der so bestimmte ebenflächige Körper heißt Rechteckskörper (oder auch Rechtecker) oder senkrechtes Vierkantprisma (Säule).

Stehen die Grundkanten a und b unter sich und zur Höhe h in rationalem Verhältnis $a:b:h$, welches durch die kleinsten möglichen ganzen Zahlen ausgedrückt sein mag, so läßt sich der Körper ebenso in Würfel zerlegen, wie früher das Rechteck in Quadrate zerlegt wurde. Die Anzahl dieser Würfel ist abh. Betrachtet man jeden dieser Würfel als Raumeinheit, so ist der Inhalt des Körpers $I = abh$, oder, wenn man die Grundfläche ab mit G bezeichnet: $I = G \cdot h$, d. h. abgekürzt gesprochen: Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.

Fig. 127.



Der Fall des irrationalen Verhältnisses wird ebenso, wie bei dem Rechteck, dadurch erledigt, daß man mit beliebiger Genauigkeit rechnet, indem man für den endlosen Dezimalbruch ohne Periode den nächstliegenden endlichen Dezimalbruch von der gewählten Stellenzahl nimmt. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel

$$I = Gh$$

wird also dann nur angenähert geliefert, jedoch mit beliebiger Genauigkeit.

16) **Aufgaben.** a) Berechne aus a, b und h den Inhalt und die Oberfläche des Rechteckskörpers.

b) Berechne die Diagonale $BD_1 = d$ des Körpers.

Auflösung. Nach Pythagoras ist $BD_1^2 = h^2 + B_1D_1^2 = h^2 + (B_1C_1^2 + C_1D_1^2) = h^2 + a^2 + b^2$, also $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$.

c) Welche Winkel bildet diese Diagonale mit den Kanten?

Auflösung. Dreieck BAD_1 hat den rechten Winkel bei A, also ist $\cos\alpha = \frac{a}{d}$, woraus sich α berechnen läßt. Ebenso bestimmen sich die andern Winkel aus $\cos\beta = \frac{b}{d}$ und $\cos\gamma = \frac{h}{d}$.

Bemerkungen. Die Formel $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$ wird als der Pythagoreische Lehrsatz für den Raum bezeichnet und lautet in Worten: Das Quadrat über der Hauptdiagonale des Rechteckskörpers ist gleich der Summe der Quadrate über den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten dieses Körpers.

Aus der Formel folgt

$$1 = \frac{d^2}{d^2} = \frac{a^2 + b^2 + h^2}{d^2} = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{h^2}{d^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Bildet also eine Gerade mit drei auf einander Senkrechten die Winkel α, β und γ, so ist die Summe der Cosinus-Quadrate dieser Winkel gleich Eins.

d) Eine Gerade gehe von einer Ecke aus, in der drei auf einander senkrechte Gerade zusammenstoßen. Sie bilde mit sämtlichen Geraden spitze Winkel, von denen α und β gegeben sind. Wie groß ist der dritte Winkel γ?

Auflösung. Nach Obigem ist

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta, \text{ also } \cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

[e) An einem Punkte wirken senkrecht gegen einander die Kräfte 3 kg, 4 kg, 12 kg. Wie groß ist ihre Resultante, und welche Winkel bildet sie mit den Einzelkräften?

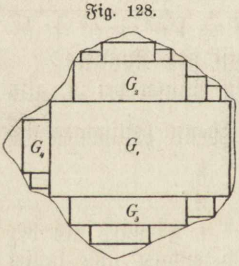
Auflösung. $R = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ kg. Die Winkel bestimmen sich aus $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.]

17) Werden mehrere Rechteckskörper von gleicher Höhe h aber von verschiedenen Grundkanten so auf dieselbe Ebene gestellt, daß je zwei von ihnen mit einer senkrechten Fläche zusammenstoßen, so bildet die Grundfläche eine aus Rechtecken bestehende Figur nach Art von Fig. 128. Der Inhalt des Gesamtkörpers ist dann

$$I = G_1 h + G_2 h + G_3 h + \cdots = (G_1 + G_2 + G_3 + \cdot\cdot) h = Gh,$$

wenn man die gesamte Grundfläche mit G bezeichnet.

Fig. 128.



Nun läßt sich aber jede beliebig begrenzte ebene Fläche nach Art der Fig. 128 mit Rechtecken ausfüllen, wobei, wenn man in geeigneter Weise kleinere und kleinere Rechtecke anwendet, die übrig bleibenden „dreieckigen" Flächen am Rande schließlich verschwindend klein werden, so daß man sie vernachlässigen kann. Demnach gilt von jedem senkrechten Prisma oder Cylinder von beliebiger Grundfläche, die dadurch entstehen, daß die Grundfläche senkrecht gegen ihre Ebene bewegt wird, die Formel

$$I = (G_1 + G_2 + G_3 + \cdot\cdot) h = G \cdot h.$$

Daher gilt der Satz:

Senkrechte Prismen und Cylinder von beliebiger Grundfläche gehorchen der Inhaltsformel $F = Gh$, d. h. abgekürzt gesprochen, Inhalt gleich Grundfläche mal Höhe.

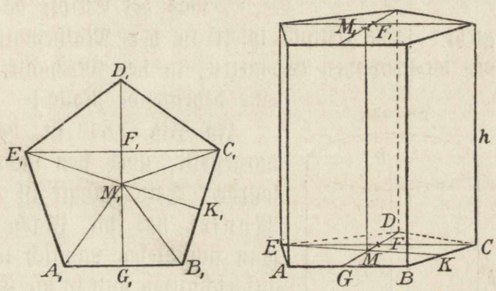
18) **Aufgaben.** a) Ein senkrechtes Dreikantprisma habe die Grundkanten a, b und c und die Höhe h. Wie groß ist die gesamte Oberfläche? (Benutze für das Dreieck die Heronische Formel.) Wie groß ist der Inhalt? Welche Winkel bilden die Seitenflächen des Körpers mit einander? (Trigonometrisch zu berechnen.)

b) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma*) von Grundkante a und Höhe h.

c) Dieselbe Aufgabe für das regelmäßige Dreikantprisma von Grundkante a und quadratischen Seitenflächen.

d) Dieselben Aufgaben für regelmäßige Prismen, deren Grundflächen 4=, 5=, 6=seitig sind. Auch entsprechende Spezialisierungen mit den Höhen können dabei vorgenommen werden. (Bei dem Fünfeck ist Trigonometrie anzuwenden.)

Fig. 129.



e) Regelmäßige Prismen von verschiedener Seitenzahl in unserer Parallelperspektive korrekt zu zeichnen.

In Fig. 129 ist die Aufgabe am regelmäßigen fünfseitigen Prisma gelöst. $A_1 B_1$ ist horizontal als AB hingelegt, $G_1 D_1$ auf $\frac{1}{3}$ reduziert und unter 30^0 angelegt, was der von uns gewählten Parallelperspektive entspricht. GF ist als $\frac{1}{3}\, G_1 F_1$ abgetragen. Durch F ist die Horizontale $EC = E_1 C_1$ so gelegt, daß F Halbierungspunkt bleibt. Dadurch ist das perspektivische Fünfeck $ABCDE$ bestimmt. Das Übrige ergiebt sich von selbst.

Bemerkung. Jedes regelmäßige Prisma hat eine Mittellinie, die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Grundflächen.

Verbindet man den oberen Endpunkt der Mittellinie mit den Ecken der Grundfläche, so erhält man die Kanten der regelmäßigen Pyramide. Ist die Grundfläche ein Kreis, so entsteht der Kegel.

Aufgabe. Bei gegebener Grundkante a und Höhe h die Seitenkanten einer regelmäßigen Pyramide und ihre Neigung, die Seitenflächen und ihre Neigung zu berechnen, je nachdem die Grundfläche 3=, 4=, 5=, 6=seitig ist.

*) Ein regelmäßiges Prisma ist ein senkrechtes Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Polygon ist.

19) Zeichnung und Berechnung des senkrechten Kreiscylinders.

Die Zeichnung des Kreiscylinders ergiebt sich am bequemsten folgendermaßen: Man wähle statt der Perspektive mit Neigung 30^0 die mit Neigung 90^0. Die Verkürzung auf $\frac{1}{3}$ kann man beibehalten. In Fig. 130 ist gezeigt, wie dadurch das Quadrat $ABCD$ mit dem einbeschriebenen Kreise in ein Rechteck $A_1 B_1 C_1 D_1$ verwandelt wird, dem eine Kurve einbeschrieben ist, die man als Ellipse bezeichnet. Jede der senkrechten Kreissehnen ist auf $\frac{1}{3}$ der Länge reduziert, was der Ellipse das Achsenverhältnis $1:3$ giebt. [Die Ellipse spielt in der Mathematik, im Zeichnen und in der darstellenden Geometrie, in der Mechanik, Physik und Astronomie eine bedeutende Rolle.]

Fig. 130.

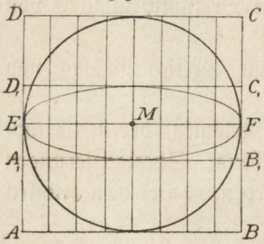
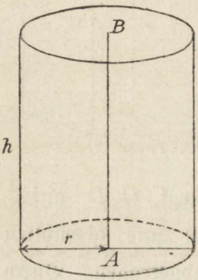


Fig. 131.



In Fig. 131 ist der fertige Kreiscylinder dargestellt, über den schon in Quarta gesprochen wurde. Sein Inhalt ist $I = Gh = r^2 \pi h$. Sein Mantel hat die Fläche $M = 2r\pi h$. Denkt man sich diesen nämlich längs einer der Geraden aufgeschnitten und in die Ebene ausgebreitet, so hat man ein Rechteck mit der Grundlinie $u = 2r\pi$ und der Höhe h. Nimmt man den Durchmesser d statt r, so ist $I = \frac{d^2}{4}\pi h, \quad M = d\pi h$.

20) **Aufgaben.** a) Ein cylindrisches Litergefäß soll doppelt so hoch, als breit sein. Wie sind die inneren Abmessungen zu nehmen?

Auflösung. $I = r^2 \pi h = r^2 \pi \cdot (4r)$ soll $= 1$ cbdcm. sein, also $4r^3\pi = 1$, folglich $r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} = ?$ dcm. Die Höhe wird $h = 4r$.

b) Ein cylindrisches Hektolitergefäß soll vier mal so breit als hoch sein. Wie sind die Maße zu nehmen?

Auflösung. $I = r^2\pi h = r^2 \pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^3 \pi}{2}$ soll gleich 100 cbdcm. sein. Daraus folgt $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} = ?$ dcm.

Andere Aufgaben verlangen die Berechnung des Gewichtes p mit Hülfe des spezifischen Gewichtes p'.

Jedes regelmäßige gerade Prisma hat einen einbeschriebenen und einen umbeschriebenen Cylinder, jede regelmäßige Pyramide einen um- und einen einbeschriebenen Kegel.

Aufgabe. Wie verhalten sich die Inhalte des Würfels und des ein- und umbeschriebenen Cylinders? Wie verhalten sich die Oberflächen dieser drei Körper?

[Die Triebwellen und Transmissionswellen der Technik, zahlreiche Maschinen und Bauteile, Fabrikschornsteine, Brunnen- und Bergwerksschachte und viele Werkzeuge und Geräte, besonders Gefäße, haben den Cylinder als Grundform.]

21) **Aufgabe.** Einen koncentrischen Hohlcylinder mit den Radien r und r_1 und der Höhe h zu zeichnen und seinen Inhalt und seine gesamte Oberfläche zu berechnen.

Fig. 132.

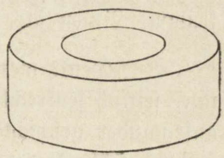


Fig. 132 stellt die Zeichnung dar, deren Ellipsen wie vorher zu konstruieren sind. (Man achte auf die Veränderlichkeit des Abstandes der inneren und äußeren Kurve.)

$$I = (r^2\pi - r_1{}^2\pi)\,h = \pi\,(r^2 - r_1{}^2)\,h$$
$$= \pi\,(r + r_1)\,(r - r_1)\,h.$$

(Letztere Zerlegung eignet sich für die logarithmische Berechnung.)

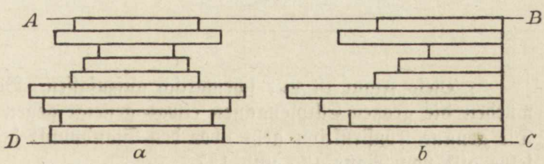
$$O = 2\,(r^2\pi - r_1{}^2\pi) + 2\,r\pi h + 2\,r_1\pi h = 2\pi\,[r^2 - r_1{}^2 + h\,(r + r_1)]$$
$$= 2\pi\,[(r + r_1)\,(r - r_1) + h\,(r + r_1)] = 2\pi\,(r + r_1)\,[r - r_1 + h].$$

Beispiel. Ein gußeisernes Schwungrad habe einen Schwungring von folgenden Abmessungen: $r = 2,8$ m, $r_1 = 2,5$ m, Dicke $h = 0,4$ m. Wie viel Tonnen wiegt er, wenn das spezifische Gewicht $p' = 7,5$ gesetzt wird?

III. Der Satz des Cavalieri und seine wichtigsten Anwendungen.

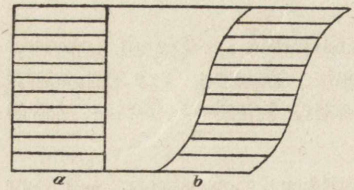
22) Der Inhalt des Satzes werde zunächst planimetrisch erläutert: Zwischen zwei Parallelen AB und DC mögen sich Rechteckstreifen von Millimeterhöhe befinden, die zwei Figuren a und b geben. Die in gleicher Höhe befindlichen Streifen sollen gleiche

Fig. 133.



Breite haben. Dann sind beide Figuren inhaltsgleich. Die eine ist durch bloße Verschiebung der Streifen aus der andern entstanden. Dasselbe gilt, wenn die Streifen nicht Millimeterhöhe, sondern nur den 1000., 1 000 000. u. s. w. Teil dieser Höhe haben. Die Figuren haben gleichen Inhalt, sobald sie in gleichen Höhen gleiche Querschnittlinien haben.

Fig. 134.



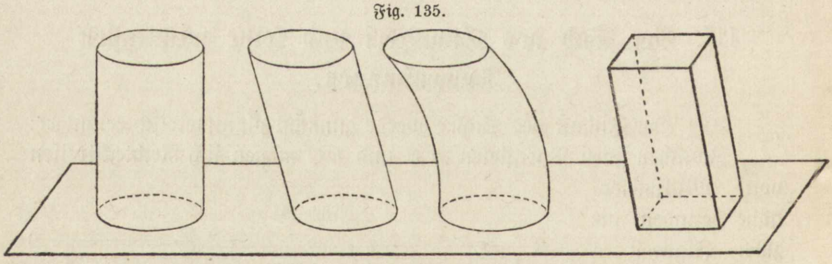
Dies ist z. B. auch in Fig. 134 der Fall, wo die einzelnen Streifen von so verschwindend kleiner Höhe zu denken sind, daß man in Figur b nicht einmal die Treppenstufen der vorigen Figur wahrnimmt, sondern krumme Linien als seitliche Begrenzung sieht.

23) Denkt man sich nun an Stelle der Streifen dünne horizontale, seitlich senkrecht begrenzte Platten, die zwischen parallelen Ebenen aufeinander geschichtet sind, so hat man Entsprechendes. Sind die in gleicher Höhe liegenden Platten von gleicher Grundfläche, so sind sie, wenn gleiche Dicke angenommen wird, inhaltsgleich, mag auch die Gestalt der verglichenen Platten noch so verschieden sein. Sind die Platten von verschwindend kleiner Dicke, so nimmt man seitlich keine Treppenstufen wahr, so daß die Konturen auch als krummlinig gelten können. Die Inhaltsgleichheit aber bleibt bestehen. So gilt ganz allgemein der Satz:

Haben zwei Körper in gleichen Höhen flächengleiche Querschnitte, so sind sie inhaltsgleich.

24) Die in Fig. 135*) dargestellten Körper sollen von oben bis unten denselben Querschnitt G haben und in der Höhe übereinstimmen.

Fig. 135.

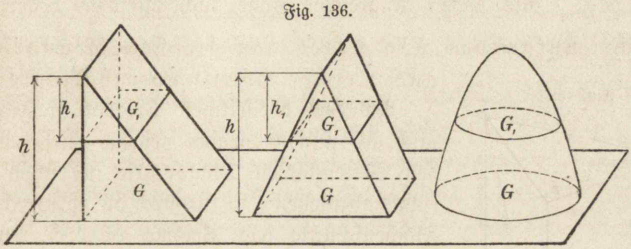


*) Diese Figur ist nur schematisch aufzufassen. Bei genauer Konstruktion würden die großen Ellipsenachsen etwas geneigt gegen die Horizontale liegen. Die genaue Konstruktion geht über den Standpunkt der Klasse hinaus. Dasselbe gilt von Figur 136 und 137.

Da nun der erste der Körper den Inhalt $G \cdot h$ hat, so sind sie sämtlich vom Inhalte Gh. Die Formel $I = Gh$ gilt also für senkrechte und schräge Prismen, für senkrechte und schräge Cylinder und von Körpern beliebigen Profils, die von oben bis unten flächengleiche Querschnitte haben. Die Gestalt dieser Querschnitte darf sich dabei von unten nach oben ändern.

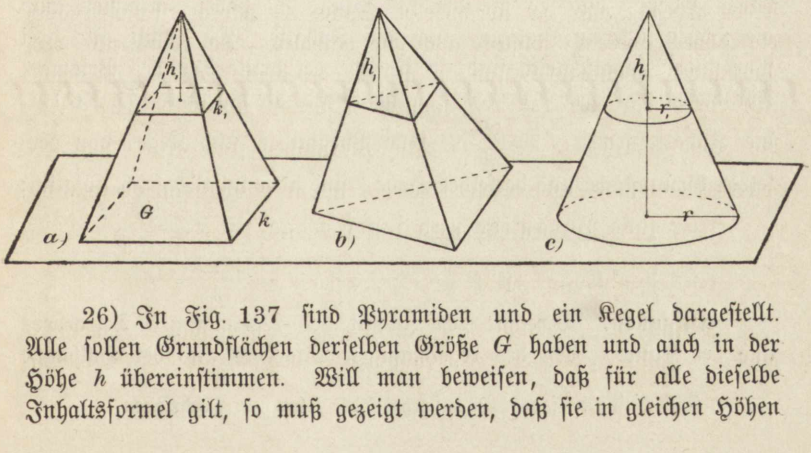
25) Der erste Dachkörper der Fig. 136 hat als Hälfte eines Rechteckskörpers den Inhalt $\frac{G \cdot h}{2}$; hat der zweite eine ebenso große

Fig. 136.



Grundfläche und dieselbe Höhe, so hat er denselben Inhalt. Im ersten nämlich ist $G_1 : G = h_1 : h$ (warum?), also $G_1 = G\frac{h_1}{h}$. Im zweiten ist ebenfalls $G_1 = G\frac{h_1}{h}$, also sind die Querschnitte beider Körper in gleichen Höhen flächengleich. Angenommen, das Profil des dritten Körpers sei so gewählt, daß auch bei ihm für jedes h_1 der Querschnitt $G_1 = G\frac{h_1}{h}$ ist, so ist auch für ihn die Inhaltsformel $I = \frac{G \cdot h}{2}$.

Fig. 137.

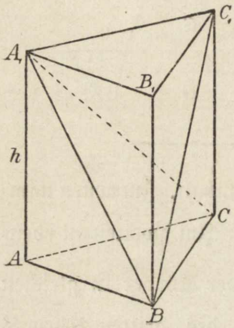


26) In Fig. 137 sind Pyramiden und ein Kegel dargestellt. Alle sollen Grundflächen derselben Größe G haben und auch in der Höhe h übereinstimmen. Will man beweisen, daß für alle dieselbe Inhaltsformel gilt, so muß gezeigt werden, daß sie in gleichen Höhen

gleiche Querschnitte haben. Zunächst ist der Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich, denn die Spitze ist als Ähnlichkeitspunkt zu betrachten, so daß es sich um eine gesetzmäßige Verkleinerung handelt. Sind k und k_1 entsprechende Linien in der ersten Figur, so ist $k_1 : k = h_1 : h$, also $k_1^2 : k^2 = h_1^2 : h^2$; es ist aber auch $G_1 : G = k_1^2 : k^2$, folglich $G_1 : G = h_1^2 : h^2$, d h.: Bei jeder Pyramide und jedem Kegel ist die horizontale Querschnittfläche proportional dem Quadrate ihres senkrechten Abstandes von der Spitze.

In jeder Höhe h_1 ist also bei allen drei Körpern der Figur 137 $G_1 = G\frac{h_1^2}{h^2}$, alle haben in gleicher Höhe flächengleichen Querschnitt. Folglich: Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

Fig. 138.



An dem dreiseitigen Prisma in Fig. 138 läßt sich nun Folgendes zeigen: Zieht man in den Seitenflächen Diagonalen in einem Zuge (ohne abzusetzen), so ist durch die entsprechenden Flächenschnitte das Prisma in drei Pyramiden zerlegt:

I. $(ABC)\, A_1$*)
II. $(A_1B_1C_1)\, B$ oder $(BC_1B_1)\, A_1$
III. $(BCC_1)\, A_1$

Die beiden ersten Pyramiden haben gleiche Grundflächen $ABC = A_1B_1C_1$ und gleiche Höhe (Abstand der oberen von der unteren Fläche), sie sind also inhaltsgleich. Die zweite Pyramide in der andern Schreibweise und die dritte haben gleiche Grundflächen BC_1B_1 und BCC_1 in derselben Ebene, und da sie dieselbe Spitze A_1 haben, stimmen auch die Höhen überein, folglich auch die Inhalte. Da somit alle drei Pyramiden inhaltsgleich sind, so ist jede der dritte Teil des Prismas. Für dieses war aber $I = Gh$, folglich ist für die Pyramide $(ABC)\, A_1$ die Inhaltsformel $I = \frac{Gh}{3}$. Alle Pyramiden und Kegel von derselben Grundfläche und derselben Höhe h sind aber inhaltsgleich, folglich:

Für jede Pyramide und jeden Kegel ist $I = \frac{G \cdot h}{3}$.

Für den Kegel ist $G = r^2\pi$, also $I = \frac{r^2\pi h}{3}$.

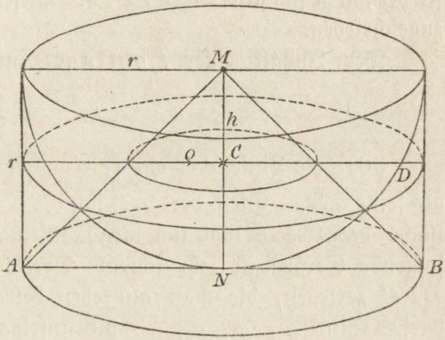
Aufgaben. Berechne den Inhalt des regelmäßigen Tetraeders aus der Kante k, den des regelmäßigen Oktaeders aus der Halbachse

*) Die Spitze ist jedesmal außerhalb der Klammer geschrieben.

a, den des Pyramidenwürfels aus der Würfelkante k und der Pyramidenhöhe h, ebenso den des Rhombendodekaeders.

27) Fig. 139 stellt einen Cylinder dar, der durch Rotation eines Quadrates von der Seite r um die Linie MN entstanden ist. Dieser Cylinder hat den Inhalt $(r^2\pi)\, r = r^3\pi$. Aus dem Cylinder ist der Kegel ABM ausgeschnitten, dessen Inhalt $= r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{r^3\pi}{3}$ ist. Der übrig bleibende Restkörper hat den Inhalt $r^3\pi - \frac{r^3\pi}{3}$ oder $\frac{2}{3} r^3\pi$. In den Cylinder ist außerdem eine Halbkugel eingeschrieben, von der sich zeigen läßt, daß sie in gleichen Höhen mit dem Restkörper flächengleichen Querschnitt hat. Im Abstande $MC = h$ ist nämlich $\varrho = h$, also hat dort der Restkörper die Schnittfläche $r^2\pi - \varrho^2\pi = \pi(r^2 - \varrho^2) = \pi(r^2 - h^2)$; die Halbkugel hat in derselben Höhe den Querschnitt $CD^2\pi = \pi(MD^2 - MC^2) = \pi\,(r^2 - h^2)$. Beide Schnitte stimmen also überein, und weil dies für jede Höhe gilt, so hat die Halbkugel mit dem Restkörper gleichen Inhalt. Für die Halbkugel ist also $I = \frac{2}{3} r^3\pi$, folglich für die ganze Kugel $I = \frac{4}{3} r^3\pi$.

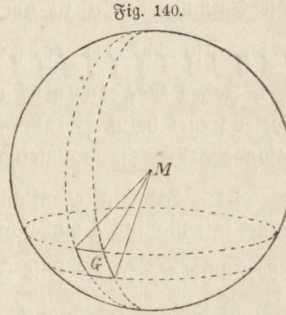
Fig. 139.



28) Denkt man sich die Oberfläche der Kugel in sehr kleine z. B. rechteckige Stücke zerlegt, die man bei ihrer Kleinheit als Ebenen betrachten darf (z. B. durch Meridiane und Parallelkreise), und verbindet man die Ecken mit dem Kugelcentrum M, so entstehen zahlreiche kleine Pyramiden. Sind ihre Grundflächen $G_1, G_2, G_3, \ldots$, so sind, weil r die Höhe ist, die Inhalte zusammengenommen

$$\frac{G_1 r}{3} + \frac{G_2 r}{3} + \frac{G_3 r}{3} + \cdots$$
$$= \frac{r}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots).$$

Fig. 140.



Die Pyramiden zusammengenommen geben den Kugelinhalt $I = \frac{4}{3} r^3\pi$, die Grundflächen zusammengenommen die Kugeloberfläche O. Also ist nach obiger Gleichung

$$I = \frac{r}{3} O \text{ oder } O = \frac{3}{r} I = \frac{3}{r} \frac{4}{3} r^3 \pi = 4 r^2 \pi .$$

Also: Die Kugeloberfläche ist gleich $4r^2\pi$ oder gleich dem Vierfachen von der Fläche des größten Kreises. Die Halbkugelwölbung hat also die doppelte Fläche, wie ihre Basis.

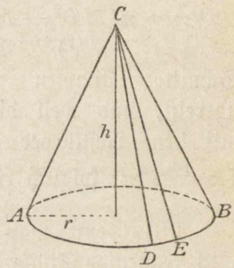
29) **Bemerkungen.** In Fig. 139 sind die Inhalte des Kegels, der Halbkugel und des Cylinders der Reihe nach $\frac{r^3\pi}{3}$, $\frac{2r^3\pi}{3}$, $r^3\pi = \frac{3r^3}{3}$, sie verhalten sich also wie 1 : 2 : 3. Dieser Satz wird dem Archimedes zugeschrieben.

Der Inhalt einer Hohlkugel mit den Radien r und r_1 ist

$$I = \tfrac{4}{3} r^3 \pi - \tfrac{4}{3} r_1{}^3 \pi = \tfrac{4}{3} \pi (r^3 - r_1{}^3).$$

30) Die Linie AC am senkrechten Kreiskegel bezeichnet man als seine Seite. Diese berechnet sich als $s = \sqrt{r^2 + h^2}$. Die Mantelfläche des Kegels läßt sich durch aufeinanderfolgende Gerade in sehr schmale Dreiecke wie DEC zerlegen, die man als eben betrachten darf. Sind $g_1, g_2, g_3, \cdots$ die aufeinanderfolgenden Grundlinien der Dreiecke, so ist die Summe ihrer Flächen

Fig. 141.

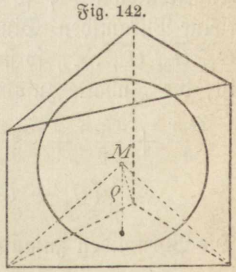


$$\frac{g_1 s}{2} + \frac{g_2 s}{2} + \frac{g_3 s}{2} + \cdots$$
$$= \frac{s}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + \cdots).$$

Die Summe der g ist aber der Kreisumfang $2r\pi$, also hat der Kegelmantel die Fläche $\frac{s}{2} 2r\pi = \boldsymbol{r\pi s}$.

Jeder Kegelstumpf oder Pyramidenstumpf ist die Differenz zweier Kegel bezw. Pyramiden. Später werden besondere Berechnungsmethoden gelehrt.

Fig. 142.



31) Ist ein ebenflächiger Körper einer Kugel mit Radius ϱ umbeschrieben, und ist seine Oberfläche O, so ist sein Inhalt $I = O \cdot \frac{\varrho}{3}$.

Beweis. Verbindet man das Kugelcentrum mit den Ecken jeder Fläche, so erhält man Pyramiden von der Höhe ϱ, deren

Grundflächen G_1, G_2, G_3, ... sein mögen. Die Summe der Inhalte ist

$$G_1 \cdot \frac{\varrho}{3} + G_2 \frac{\varrho}{3} + G_3 \frac{\varrho}{3} + \cdots = \frac{\varrho}{3}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots) = \frac{\varrho}{3} \cdot O \cdot$$

Diese Formel findet z. B. Anwendung bei der Berechnung des Inhalts regelmäßiger Polyeder.

IV. Vermischte Übungsaufgaben.

32) a) Die Erdkugel habe 860 Meilen Radius. Wie viele Quadratmeilen hat ihre Oberfläche? Wie viele Kubikmeilen beträgt der Inhalt? Gieb das Resultat auch in Quadrat- bezw. Kubikkilometern an.

b) Angenommen der Erdradius habe 860 Meilen, der Sonnenradius 100 000 Meilen. Wie viel mal so groß ist der Sonneninhalt im Verhältnis zum Erdinhalt?

Auflösung. $\frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r_1{}^3 \pi = r^3 : r_1{}^3$ u. s. w.

[c) Die Astronomen geben aber die Sonnenmasse als das 355 000fache der Erdmasse an, das mittlere spezifische Gewicht der Erde als 5,6. Wie groß ist danach das mittlere spezifische Gewicht der Sonne?]

d) Eine Eisenkugel soll 1000 kg wiegen. Wie groß ist der Radius zu wählen, wenn das spezifische Gewicht $p' = 7{,}5$ ist?

e) Die einem Würfel einbeschriebene Kugel habe den Inhalt I. Wie groß ist die Kante des Würfels?

f) Die einem Würfel umbeschriebene Kugel habe den Inhalt I, wie groß ist die Kante des Würfels?

g) Dieselben Aufgaben für die Oberfläche O dieser Kugeln.

h) Entsprechende Aufgaben für das regelmäßige Tetraeder und Oktaeder.

33) a) Wie groß ist der Inhalt eines dreiseitigen Prismas von regelmäßiger Grundfläche und der Grundkante k, wenn sich ihm eine Kugel einbeschreiben läßt? Wie groß ist dabei der Radius der umbeschriebenen Kugel?

b) Entsprechende Aufgaben für Prismen, deren Grundflächen regelmäßige Sechsecke, Achtecke &c. sind.

c) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma von quadratischen

14*

Seitenflächen einbeschrieben werden. Wie groß sind die Kanten, wenn die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6seitig gewählt wird.

d) Einer Kugel soll ein regelmäßiges Prisma umbeschriebeu werden. Wie groß werden die Kanten, je nachdem die Grundfläche 3-, 4-, 5-, 6seitig gewählt wird.

e) Einem Kegel vom Grund-Radius r und der Höhe h soll eine Kugel ein-, bezw. umbeschrieben werden. Wie groß werden die Radien?

f) Einem Kegel von denselben Dimensionen soll ein regelmäßiges Prisma mit quadratischen Seitenflächen eingezeichnet werden. Wie groß sind die Kanten, je nachdem das Prisma 3-, 4-, 5-, 6seitig ist?

Zahlreiche Übungsaufgaben zum Konstruieren und Berechnen findet man in des Verfassers „Einführung in das stereometrische Zeichnen", besonders auch solche krystallographischer Art.

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite 57, Zeile 9 von unten, statt „43b" lies „43c".
Seite 94, letzte Zeile, statt „die Araber" lies „die Alten und die Araber".
Seite 106, letzte Zeile, statt „müglich" lies „möglich".