

Loi de comportement héréditaire des continus irréversibles Applications à l'étude dynamique des structures

J. M. TERRIEZ (GRENOBLE)

ON PROPOSE UN schéma en vue de rendre compte du phénomène de l'hystérésis mécanique et de l'écroutissage des matériaux solides. La loi constitutive tensorielle associée à ce schéma respecte le principe de l'objectivité et fournit des comportements conformes aux principaux résultats expérimentaux. On obtient une formulation unique rendant compte des effets d'hystérésis, de fluage, de relaxation, d'écroutissage en déformation et en vitesse de déformation. On utilise ensuite une méthode numérique qui permet l'étude des structures sous diverses sollicitations et l'utilisation de lois constitutives variées.

Zaproponowano pewien model mający na celu opisanie zjawiska histerezy mechanicznej i wzmocnienia ciała stałego. Tensorowe prawa konstytutywne związane z tym modelem spełniają zasadę obiektywności oraz opisują zachowanie się materiału zgodnie z ważniejszymi wynikami badań doświadczalnych. Otrzymano sformułowanie pozwalające opisać efekty histerezy, pełzania, relaksacji, wzmocnienia odkształceniowego w funkcji prędkości deformacji. Zaproponowano pewną metodę numeryczną pozwalającą na zbadanie różnych konstrukcji opisanych różnymi równaniami konstytutywnymi, poddanych obciążeniom dynamicznym.

Предложена некоторая схема, имеющая целью описать явления механической гистерезиса и упрочнения твердого тела. Тензорные определяющие законы, связанные с этой схемой, удовлетворяют принципу объективности, а также описывают поведение материала согласно важнейшим результатам экспериментальных исследований. Полученная формулировка позволяет описать эффекты гистерезиса, ползучести, релаксации, деформационного упрочнения в функции скорости деформации. Предложен некоторый численный метод, позволяющий исследовать разные конструкции, описанные разными определяющими уравнениями, подвергнутые динамическим нагрузкам.

Introduction

SOLLICITATIONS cycliques, fatigue, grandes vitesses de déformation, grandes déformations sont des facteurs qui doivent être pris en compte pour garantir les conclusions du dimensionnement d'une structure dans des conditions dynamiques. La considération de ces différentes influences sur le comportement du matériau reste peu commode. Leur rôle, pourtant, peut être prépondérant dans la tenue de la construction. On remarque même que le problème de la réponse d'une structure anélastique à des sollicitations impulsives est encore ouvert.

Deux types de schémas ont été mis en oeuvre pour décrire les situations évoquées ci-dessus. Le premier type, souvent dit à variables internes, a fait l'objet de nombreux travaux. Le second type de schéma dont le formalisme est héréditaire n'a été jusqu'ici que peu utilisé.

C'est cette classe de schéma que l'on propose ici en vue de rendre compte du phénomène de l'hystérésis mécanique et de l'écroutissage des matériaux solides. La loi constitu-

tive tensorielle associée à ce schéma respecte le principe de l'objectivité et fournit des comportements conformes aux principaux résultats expérimentaux. On obtient une formulation unique rendant compte des effets d'hysteresis, de fluage, de relaxation, d'écrouissage en déformation et en vitesse de déformation. Le schéma est à structure héréditaire en ce sens que deux variables sont des fonctionnelles du chargement.

D'autre part, en matière de résolution des problèmes aux limites, on utilise une méthode numérique unique qui permet l'étude des structures sous diverses sollicitations (quasi statiques et dynamiques) et l'utilisation de lois constitutives variées.

La partie I de ce mémoire rappelle certaines propriétés des modèles rhéologiques. On en tire les concepts de base d'une loi du comportement des solides anélastiques. La partie II fournit les hypothèses retenues pour la formulation tensorielle d'un schéma à structure héréditaire. En partie III on présente quelques illustrations des propriétés du schéma constitutif et en partie IV son application à l'étude du comportement dynamique de structures simples et industrielles.

1. Introduction des concepts thermomécaniques fondamentaux d'un schéma du comportement irréversible

1.1. Rappel de 3 propriétés des modèles symboliques

L'analogie du comportement des modèles rhéologiques constitués de patins et de ressorts avec le comportement des solides irréversibles a fait l'objet d'études déjà anciennes (cf. PERSOZ [1] et IWAN [2]).

Les modèles considérés sont constitués par une suite infinie de couples ressorts-patins. On n'utilise que les dispositions classiques, en série ou en parallèle, décomposables au sens de Persoz (cf. Fig. 1).

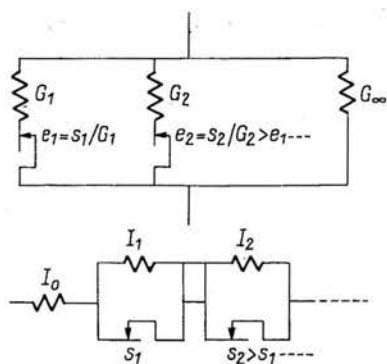


FIG. 1.

1.1.1. Propriété d'homothétie. On fait subir à un modèle série une évolution quelconque telle que OA à partir de l'état neutre. Le modèle ayant atteint l'état A , on lui impose une sollicitation de sens inverse (cf. Fig. 2). La branche AB (de rang noté ici $k = 1$) se déduit de la branche OA (de rang $k = 0$) par une homothétie de rapport 2: c'est la règle souvent dite de Masing.

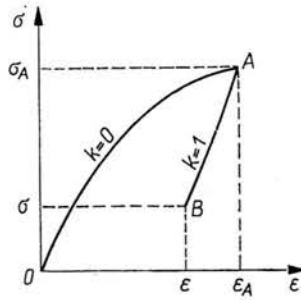


FIG. 2.

1.1.2. Aspect algorithmique. L'état du modèle en *A* peut être représenté par la ligne *OaA* d'un diagramme où l'on porte en abscisse le seuil *s* d'un couple du modèle série et en ordonnée la contrainte transmise par le patin de seuil *s* (cf. Fig. 3).

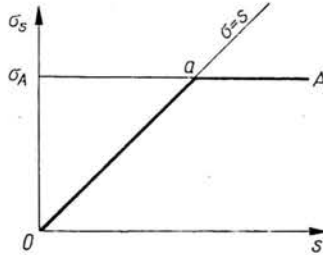


FIG. 3.

La première bissectrice représente l'état mécanique des couples dont le seuil est atteint. Les couples dont le seuil n'est pas atteint transmettent une contrainte égale à la contrainte actuelle: les points représentatifs de leur état mécanique est sur la droite *aA* d'ordonnée égale à σ_A .

On reporte l'état actuel atteint en *B*: la ligne d'état est alors *Oba'B* (cf. Fig. 4).

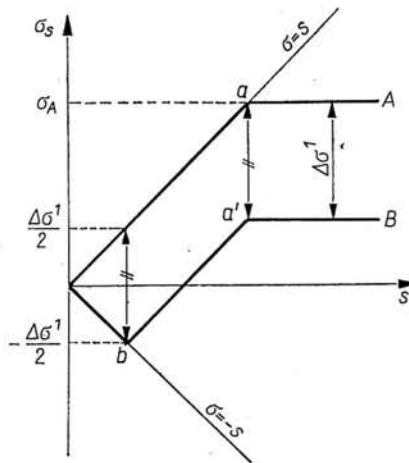


FIG. 4.

On met en oeuvre simultanément la règle de Masing et un algorithme dont la définition peut être déduite de la considération du diagramme. Lors d'une description correcte de la correspondance entre σ et ε , le rôle de l'algorithme est essentiellement, dans l'exemple

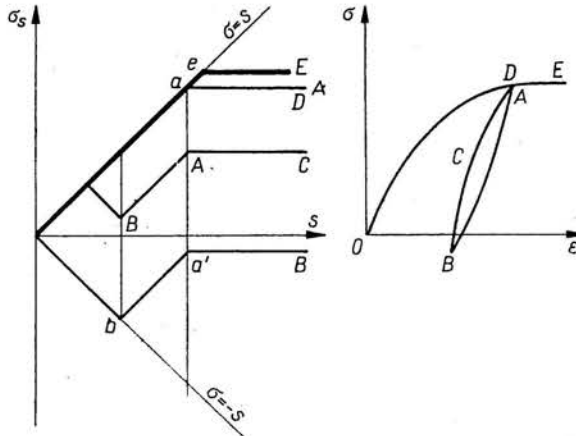


FIG. 5.

présenté à la Fig. 5, la mise en évidence de l'effacement des points anguleux A et B de la ligne d'état.

1.1.3. Evolution cyclique fondamentale. On considère l'évolution schématisée à la Fig. 6.

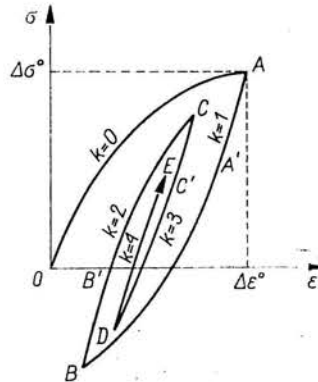


FIG. 6.

La construction du diagramme associé permet de mettre en évidence une suite discrète d'états de référence σ_R^k représentés par les points anguleux de la ligne d'état (cf. Fig. 7).

Si on effectue une infinité de cycles symétriques centrés, d'amplitude lentement décroissante et tendant vers 0, on constate que les différents éléments constitutifs du modèle retrouvent leur position initiale.

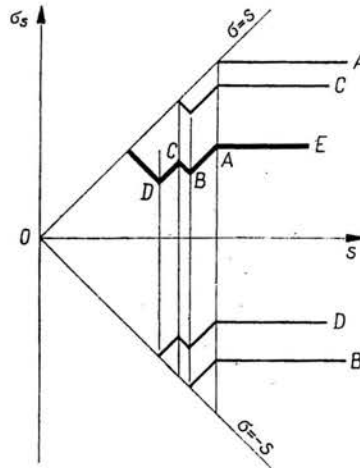


FIG. 7.

1.2. La description thermomécanique d'un comportement toujours irréversible

1.2.1. Notion de mémoire discrète. La Fig. 4 montre que le modèle conserve la mémoire de l'état d'inversion (ε_A, σ_A) grâce au point anguleux a' de la ligne d'état.

La mise en jeu d'un algorithme permet de déterminer la valeur du paramètre de Masing, de mémoriser une suite discrète d'informations (cf. Fig. 7), d'effacer celles devenues inutiles du fait des sollicitations imposées, de sélectionner dans la suite des informations mémorisées celle à prendre en compte pour définir la correspondance entre ε et σ lors du parcours d'une branche de rang k .

1.2.2. Quasi-reversibilité et schéma thermomécanique. On note également qu'à l'inversion en A le modèle retrouve les propriétés qu'il possédait en 0 à l'état neutre.

DE CARBON [3] a noté que l'aire du cycle est en $O(\Delta\varepsilon^4)$ si $\Delta\varepsilon$ est son amplitude (cf. Fig. 8).

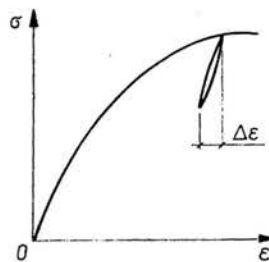


FIG. 8.

Comme l'a montré GUELIN [13], la mesure de l'aire des cycles en $O(\Delta\varepsilon^4)$ est d'une importante capitale pour l'interprétation de la thermomécanique des systèmes toujours irréversibles.

1.2.3. Interprétation du rôle de l'algorithme. On montre [14] que la construction d'un algorithme est possible sur la base d'une fonction d'aide W_L , non décroissante par morceaux, qui s'annule à chaque inversion. Le graphe de la fonction permet de distinguer immédiate-

ment les changements d'arc, le retour sur la courbe de première charge et sur toute autre branche de l'évolution antérieure.

On envisage donc un critère d'inversion sous la forme suivante: si $\delta W_L < 0$ entre t et $t + dt$, alors t est instant d'inversion t_I . On porte en abscisse la fonction corrigée $CW_L = 2W_L/w^2$ et en ordonnée la quantité $(-1)^k CW_L$.

Cet algorithme permet la détermination de la valeur du paramètre de Masing w , celle de la suite des états d'inversion mémorisés et de l'état de référence associé à l'instant actuel (cf. Fig. 9, 10).

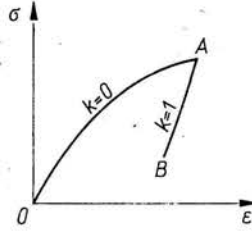


FIG. 9.

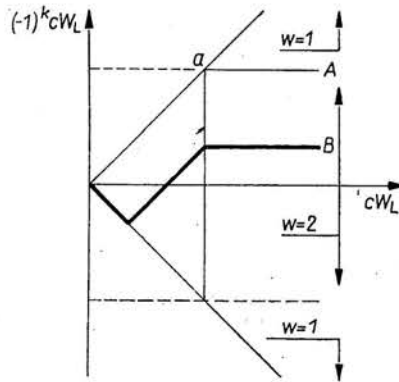


FIG. 10.

Sur la base des propriétés des modèles symboliques évoquées ci-dessus, le schéma de l'hystérésis mécanique doit comporter:

une définition de la correspondance entre ε et σ ,

un critère permettant de détecter les états d'inversion à mémoriser,

un algorithme conduisant à la définition du paramètre de Masing et au choix de l'état de référence à prendre en compte parmi la suite des états d'inversion mémorisés.

Il est manifeste que l'on peut rapprocher un certain nombre d'observations expérimentales du comportement des solides anélastiques et les propriétés des modèles symboliques rappelées précédemment: on note en particulier le comportement essentiellement irréversible de toute évolution (aspect conventionnel de la détermination d'une limite élastique apparition du phénomène d'hystérésis aux petites déformations).

On sait que plusieurs processus d'érouissage se succèdent et se superposent. L'observation des phénomènes microstructuraux met en évidence l'influence de l'histoire de l'évolution subie par le matériau sur son comportement.

2. Mise en oeuvre des concepts thermomécaniques dans une loi de comportement tensorielle a structure héréditaire

2.1. Hypothèse fondamentale

On suppose que les propriétés du solide anélastique résultent de la superposition et de l'interaction de contributions dissipatives relevant d'une description héréditaire [6, 7, 8, 13 et 14].

Chacune de ces contributions correspond à trois sortes de processus dissipatifs:

une première contribution à mémoire discrète est responsable d'un comportement d'hystérésis pure à accomodation immédiate comparable à celui des modèles symboliques;

une seconde contribution à mémoire continue est associée a la sensibilité des propriétés du matériau à la vitesse de déformation;

une troisième contribution, également à mémoire continue, correspond au changement de structure, indépendant de la loi de temps de l'évolution.

Ainsi, lors d'une évolution infinitésimale, le taux de variation du tenseur contrainte de Cauchy est la somme de trois termes: $\dot{\sigma}_a$ à mémoire discrète, $\dot{\sigma}_v$ et $\dot{\sigma}_g$ à mémoire continue.

$$(2.1) \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_a + \dot{\sigma}_v + \dot{\sigma}_g.$$

Seul $\dot{\sigma}_v$ dépend de la loi de temps de l'évolution.

2.2. Contribution d'hystérésis pure

Le schéma à mémoire discrète décrivant l'hystérésis pure est de la forme:

$$(2.2) \quad \dot{\sigma}_a = h(\sigma_a - \sigma_{aR}, w, D),$$

h est une fonction tensorielle isotrope qui s'annule avec la vitesse de déformation D ; elle est choisie homogène, de degré -1 par rapport au temps [4].

La définition complète du schéma est effectuée à partir de la fonction d'aide W_L définie par:

$$(2.3) \quad dW_L = \text{tr}(\sigma_a - \sigma_{aR})D dt.$$

Le critère d'inversion est: l'évolution du point matériel s'inverse au temps t si, entre t et $t + dt$, on a

$$(2.4) \quad \delta W_L < 0.$$

L'instant t est alors instant d'inversion noté t_I . La contrainte σ_a à l'instant t_I est contrainte d'inversion notée σ_{aI} . Le calcul de l'évolution entre t_I et $t_I + dt$ doit être effectué avec une contrainte de référence σ_{aR} égale à la contrainte d'inversion σ_{aI} .

A partir de la fonction d'aide corrigée $W = 2W_L/w^2$ on construit un algorithme: $\mathcal{A}(W, dW_L)$ qui détermine le paramètre w , la suite des états d'inversion à mémoriser,

la contrainte de référence σ_{aR} à prendre en compte pour le calcul de l'évolution actuelle. Ce choix est effectué parmi les contraintes d'inversion σ_{aI} mémorisées au cours de l'évolution antérieure du point matériel.

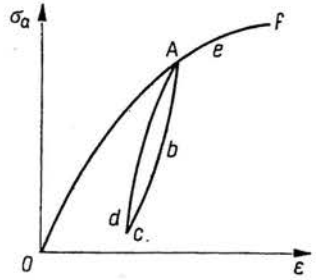


FIG. 11.

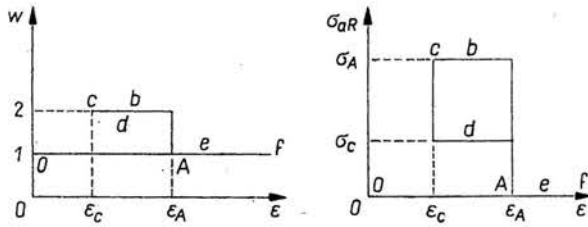


FIG. 12.

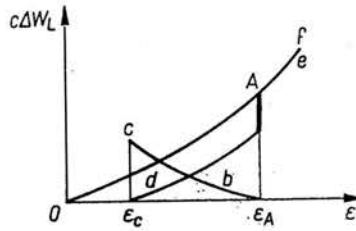


FIG. 13.

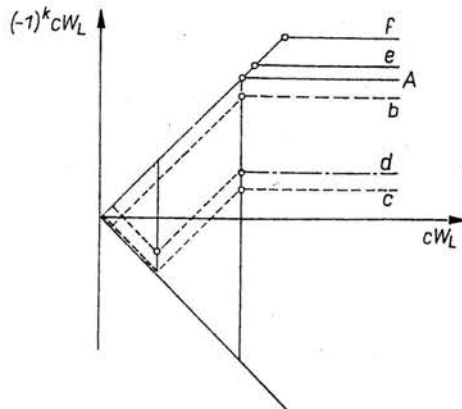


FIG. 14.

Soit l'évolution de la Fig. 11. Les fonctionnelles du chargement w et σ_{aR} associées à cette évolution se présentent alors comme suit (cf. Fig. 12): La Fig. 13 fournit l'évolution correspondante de la fonction d'aide corrigée.

Enfin, le diagramme de la Fig. 14 met en évidence la suite des états d'inversion à mémoriser ($c = 2/w^2$).

La ligne d'état qui correspond au point d de la courbe de charge présente bien les deux états d'inversion mémorisés au cours de l'évolution subie par le point matériel en A et en C . Le schéma d'hysteresis pure est de la forme:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_a &= h(\sigma_a - \sigma_{aR}, w, D), \\ \delta W_L < 0 \quad \text{avec:} \quad dW_L &= \text{tr}(\sigma_a - \sigma_{aR}) D dt, \\ \mathcal{A} \left(\frac{2W_L}{w^2}, dW_L \right) &\rightarrow [w, \sigma_{aI}, \sigma_{aR}]. \end{aligned}$$

Il concerne le comportement de solides assimilables à des continus simples, isotropes, isothermes, dénués d'écrouissage.

En vue de définir commodément les contributions d'écrouissage σ_v et σ_g , on introduit un paramètre d'avancement de l'évolution du matériau sous la forme:

$$(2.6) \quad \eta = \eta_0 \int_0^t \text{tr}(\sigma_a - \sigma_{aR}) D dt$$

où η_0 désigne un facteur conventionnel défini à partir de caractéristiques du matériau.

2.3. Schéma thermodynamique associé

On considère une évolution quasi-statique d'hystérésis pure.

P_e et P_i notent les puissances des efforts extérieurs et intérieurs

$$P_e = \sigma_a D.$$

Le théorème de l'énergie cinétique fournit: $P_e + P_i = 0$.

Soit E l'énergie interne du matériau, S l'entropie, ϕ la dissipation intrinsèque, π la puissance réversible reçue et Q le taux de chaleur associé aux irréversibilités internes. D'après la quasi-réversibilité du paragraphe 1.2.2., la puissance réversible reçue s'exprime par

$$\pi = \sigma_{aR} D.$$

Ainsi π est une fonctionnelle de la sollicitation. L'équation de Gibbs associée au schéma constitutif est donc:

$$\dot{E} = \dot{I} + \sigma_{aR} D \quad (I = T_0 S).$$

Compte tenu de la conservation de l'énergie $\dot{E} - \dot{Q} = P_e$, la dissipation intrinsèque est:

$$\phi = \dot{I} - \dot{Q} = P_e - \pi = (\sigma_a - \sigma_{aR}) D.$$

Le taux de la fonction d'aide W_L introduite précédemment vaut donc la dissipation intrinsèque:

$$\dot{W}_L = \phi.$$

Le critère d'inversion est donc l'expression du second principe de la thermodynamique. Le viol de ce critère conduit à changer σ_{aR} . Le paramètre d'avancement η représente la variation cumulée de la dissipation intrinsèque. Sa définition nécessite celle du critère d'inversion D et de l'algorithme ϕ . L'ensemble du schéma thermodynamique est donc étroitement associé à la description héréditaire à mémoire discrète de la loi constitutive: la puissance réversible est à mémoire discrète [8].

2.4. Schéma de comportement en présence d'écoulement

2.4.1. Contribution σ_v d'écoulement en vitesse de déformation. On suppose que le terme de contrainte dépendant de la loi de temps de l'évolution est la somme de deux convolutions:

l'une entre une fonction tensorielle isotrope de la vitesse de déformation $D:f_v(D)$ et une fonction mémoire scalaire décroissante $\chi(u)$ du temps intérieur $u = t - \tau$, à support borné par le temps caractéristique t_c ;

l'autre entre la fonction $f_v(D)$ et la fonction Heaviside $H(u)$ qui joue le rôle d'une mémoire scalaire parfaite. Une fonction scalaire A_v de la variable scalaire η positive non décroissante permet de pondérer l'influence de la contribution visqueuse à mémoire parfaite.

La contribution σ_v est alors de la forme

$$(2.7) \quad \sigma_v = f_v(D) * \chi(t) + A_v(\eta) f_v(D) * H(t).$$

2.4.2. Contribution σ_g d'écoulement en déformation. La forme de la contribution de contrainte σ_g est analogue à celle de σ_v . La fonction $f_v(D)$ est remplacée par une fonction $f_g(\sigma_g, \sigma_g - \sigma_{gR})$, homogène, de degré -1 par rapport au temps (la contribution de contrainte σ_g est alors indépendante de la loi de temps de l'évolution du matériau).

$$(2.8) \quad \sigma_g = \left[f_g \frac{dt}{d\eta} \right] * \varphi(\eta) + \left[A_g(\eta) f_g \frac{dt}{d\eta} \right] * H(\eta).$$

2.4.3. Forme de la loi constitutive. La contrainte totale σ remplace les contraintes σ_a , σ_v et σ_g dans l'expression des taux des différentes contributions (hypothèse d'interaction). Parallèlement à cette évolution réelle, on associe une évolution fictive dite squelette, définie par la contribution σ_a d'hystérésis pure.

Cette évolution squelette détermine le paramètre w , les contraintes de référence de l'évolution réelle σ_R et les valeurs du paramètre d'évolution η . Elle est représentative des grandes lignes du comportement du matériau. Le schéma prend alors la forme suivante

$$(2.9) \quad \dot{\sigma} = h(\sigma - \sigma_R, w, D) + \chi(0) f_v(D) + \int_{t_1}^t \chi'(t - \tau) f_v(\tau) d\tau + A_v(\eta) f_v(D) + \\ + \varphi(0) f_g(\dot{\sigma}, \sigma - \sigma_R) + \frac{d\eta}{dt} \int_{\eta_1}^{\eta} \varphi'(\eta - x) f_g(x) \frac{dt}{dx} dx + A_g(\eta) f_g(\dot{\sigma}, \sigma - \sigma_R),$$

$$(2.10) \quad \dot{\sigma}_a = h(\sigma_a - \sigma_{aR}, w, D),$$

$$(2.11) \quad \eta = \frac{1}{\eta_0} \int_0^t \text{tr}(\sigma_a - \sigma_{aR}) D(t) dt,$$

$$(2.12) \quad \delta W_L < 0,$$

$$(2.13) \quad dW_L = \text{tr}(\sigma_a - \sigma_{aR}) D dt,$$

$$(2.14) \quad A \left(\frac{2W_L}{w^2}, dW_L \right) \rightarrow [w, \sigma_{aR}, \sigma_R].$$

3. Illustrations des propriétés du schéma constitutif

3.1. Illustrations du comportement d'hystérésis pure

3.1.1. Formulation et illustrations monodimensionnelles. On considère un milieu continu non écrouissable (comportement squelette ou d'hystérésis pure).

La fonction tensorielle isotrope $h(\sigma - \sigma_R, w, D)$ introduite précédemment définit l'allure d'une branche d'évolution entre l'état de référence actif σ_R et l'état actuel du matériau σ .

$$(2.15) \quad h(\sigma - \sigma_R, w, D) = a_0 I + a_1 D + a_2 \sigma,$$

h est homogène de degré -1 par rapport au temps grâce au choix [4, 5]:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \overline{\Delta M} + \alpha_5 \overline{\Delta N}, \\ a_1 &= \alpha_1, \\ a_2 &= \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \overline{\Delta M} + \alpha_6 \overline{\Delta N}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{tr} D, & \overline{\Delta M} &= \text{tr}(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R) \overline{D}, \\ \overline{\Delta N} &= \text{tr}[(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R)(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R) \overline{D}] \end{aligned}$$

et où les α_i sont des fonctions scalaires des invariants:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \text{tr}(\sigma - \sigma_R), & \Delta \overline{S}_2 &= \text{tr}(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R)^2, \\ \Delta \overline{S}_3 &= \text{tr}(\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R)^3 \end{aligned}$$

et du paramètre de Masing w .

En prenant $\alpha_2 = 3\alpha_3 + \alpha_4 S_1 = 3\alpha_5 + \alpha_6 S_1 = 0$, $\alpha_0 = \text{constante}$, $\alpha_1 = \text{constante}$, $\alpha_6 = 0$ et après la décomposition de h en parties isotrope et déviatoire, on a:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \dot{S}_1 &= (3\alpha_0 + \alpha_1) E_1, \\ \dot{\overline{\sigma}} &= \alpha_1 \overline{D} + \alpha_4 \overline{\Delta M} (\overline{\sigma} - \overline{\sigma}_R), \end{aligned}$$

α_0 et $\alpha_1/2$ ayant alors le sens des coefficients de Lamé. L'expression de la fonction α_4 sous la forme:

$$\alpha_4 = \frac{-\alpha_1}{w^2 Y_0^2}$$

permet d'écrire :

$$(2.18) \quad \dot{\bar{\sigma}} = \alpha_1 \bar{D} - \frac{\alpha_1}{w^2 Y_0^2} \Delta M (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R).$$

La branche de première charge (évolution à partir de l'état neutre le long de laquelle $\sigma_R = 0$ et $w = 1$) a ainsi une allure identique à celle que fournit la loi constitutive de Prager en tangente hyperbolique puisqu'alors, en monodimensionnel, on a :

$$(2.19) \quad \dot{\sigma} = \alpha_1 \left[1 - \left(\frac{\sigma}{Y_0} \right)^2 \right] D.$$

L'utilisation du schéma constitutif complet constitué de (2.17) et (2.18), associées au critère d'inversion (2.12) et à l'algorithme (2.14) présentés précédemment, conduit, avec : $\alpha_1 = 0.2 \cdot 10^6$ MPa et $Y_0 = 10^{-3} \alpha_1$, aux résultats présentés sur la Fig. 15.

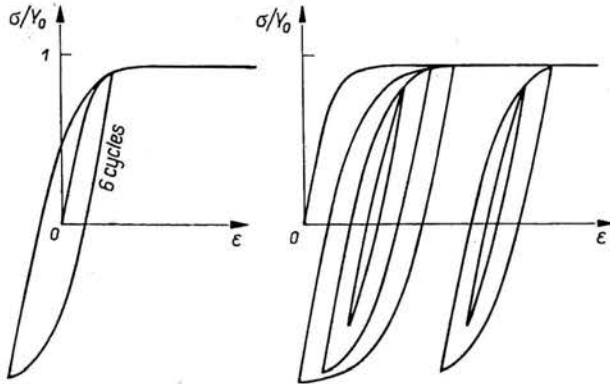


FIG. 15. Illustrations monodimensionnelles du comportement d'hystérésis pure.

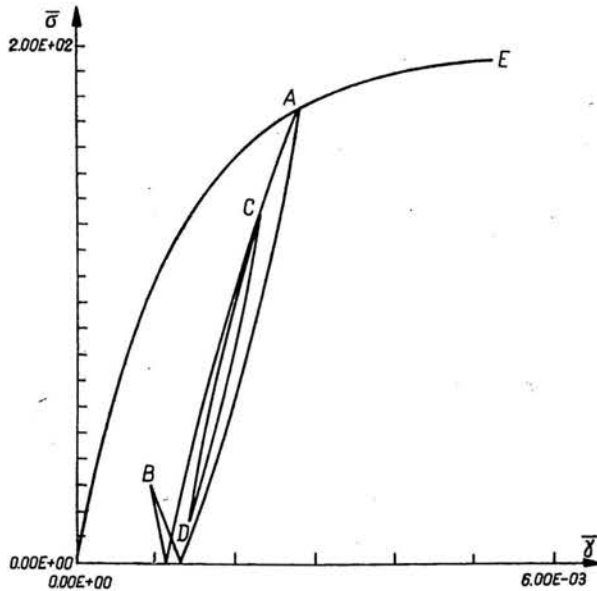


FIG. 16. Comportement d'hystérésis pure. Trajet cylindrique $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = f(t)$.

3.1.2. Illustrations tridimensionnelles. L'examen de cinématiques irrotationnelles à axes principaux fixes nous permet d'étudier les propriétés du schéma dans le cas tensoriel.

Les déformées successives sont supposées être des parallélépipèdes rectangles. d_1 , d_2 et d_3 notent les vitesses de déformation principales; σ_1 , σ_2 et σ_3 les contraintes principales.

EXEMPLE 1.

Soit une évolution linéaire par morceaux de d_3 d_1 et d_2 sont maintenus nuls. La Fig. 16 représente l'évolution de l'intensité des déviateurs contrainte et déformation:

$$\bar{\sigma} = (3\bar{S}_2^2)^{1/2}, \quad \bar{\gamma} = \left(\frac{8}{3}\bar{E}_2^2\right)^{1/2}.$$

Les variations de volume subies par le matériau au cours de cet essai heuristique ne sont pas présentées.

L'évolution de la fonction d'aide W_L définie par $dW_L = \text{tr}(\sigma - \sigma_R)D$ est indiquée à la Fig. 17. On distingue les états d'inversion où W_L s'annule et le retour sur la courbe de première charge où le matériau oublie l'évolution cyclique.

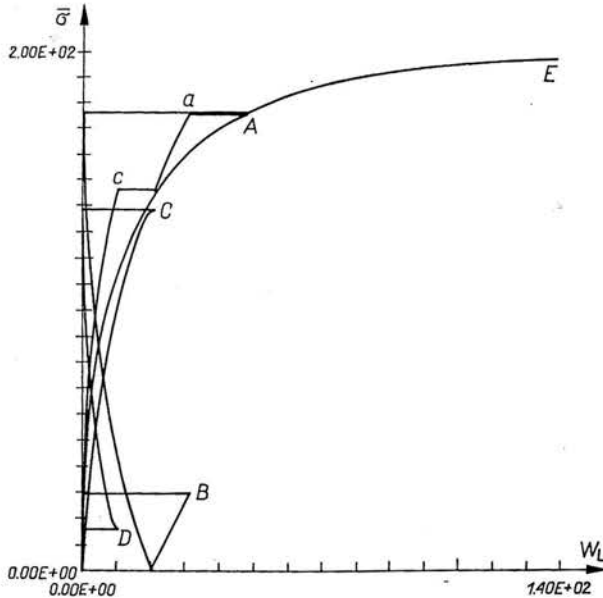


Fig. 17. Evolution de la fonction d'aide associée au trajet de la Fig. 2.

EXEMPLE 2.

La Fig. 18 réunit l'ensemble des résultats obtenus en imposant au matériau un trajet circulaire dans le plan $\sigma_1 = \sigma_2$.

EXEMPLE 3.

On impose au matériau un trajet contenu dans un plan perpendiculaire à la trissectrice du repère principal. L'absence de couplage entre les parties isotrope et déviatoire de la loi de comportement permet de se restreindre à des trajets contenus dans le plan orthogonal en 0 à la trissectrice.

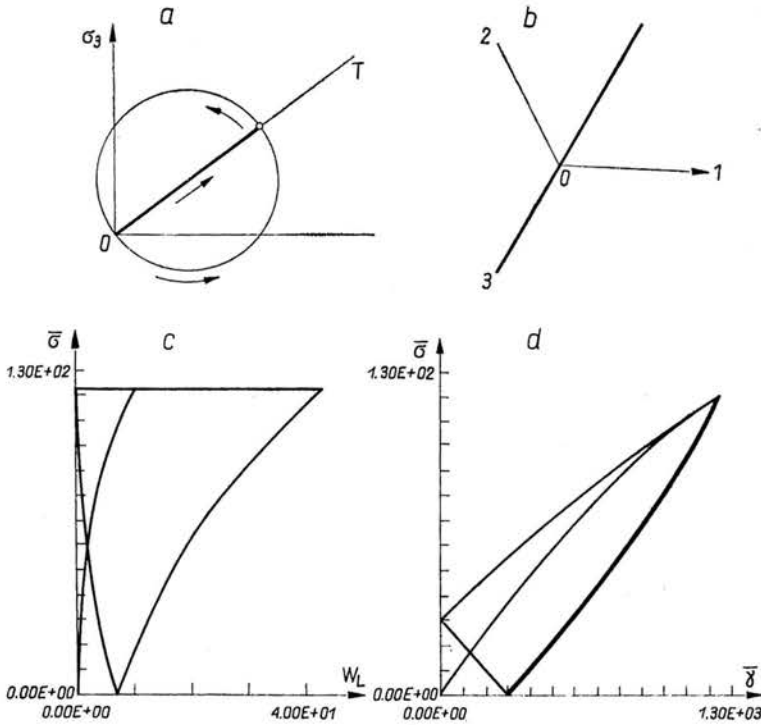


FIG. 18. Comportement d'hystérésis pure. Trajet circulaire dans le plan $\sigma_1 = \sigma_2$.

Le trajet choisi est un segment de droite parcouru plusieurs fois: la phase et le déviateur varient simultanément. Un exemple est indiqué sur la Fig. 19.

3.2. Illustrations du comportement en présence d'écroutissage en déformation

On suppose que la contribution de contrainte visqueuse est nulle. L'hypothèse fondamentale donne:

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_a + \dot{\sigma}_g.$$

La contribution d'hystérésis pure σ_a a la même forme que précédemment:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{S}_1 &= (3\alpha_0 + \alpha_1)E_1, \\ \dot{\bar{\sigma}} &= \alpha_1 \bar{D} + \alpha_4 \bar{\Delta M}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R). \end{aligned}$$

La fonction α_4 sera prise égale à: $-\alpha_1/\bar{S}_2^{-c}(wY_0)^c$ où: $\bar{S}_2 = (\text{tr } \bar{\sigma})^{1/2}$.

La fonction f_g (cf. 2.4.2) a une forme identique à celle de la fonction h .

$$f_g = \dot{\sigma} - \lambda E_1 I - \alpha_4 \gamma_4 \bar{\Delta M}(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_R),$$

α_4 étant une fonction du paramètre d'évolution η . Le paramètre A_g est constant. Il est considéré comme négligeable devant l'unité.

Ainsi l'écroutissage permanent intervient seul: (pas d'écroutissage transitoire c'est à dire pas d'effet de la mémoire décroissante à support borné).

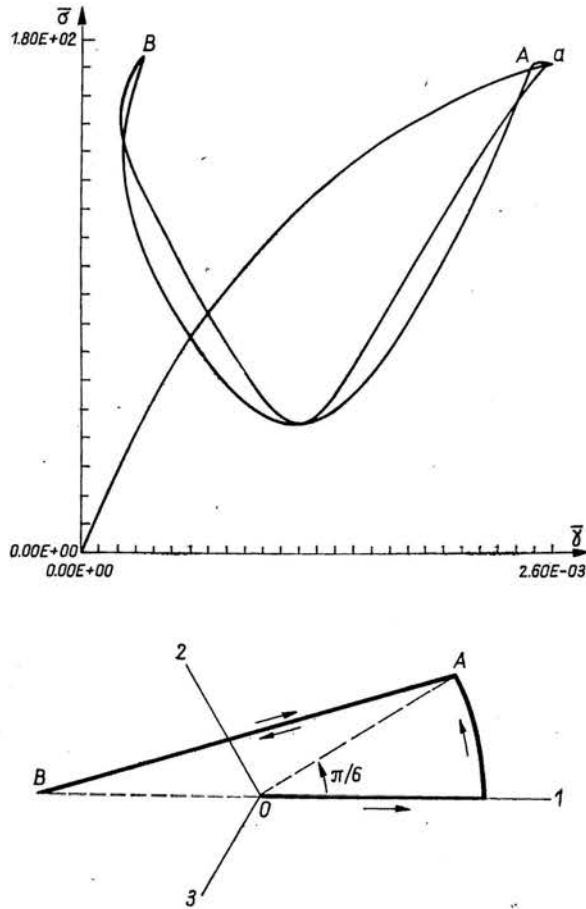


FIG. 19. Comportement d'hystérésis pure. Trajet dans le plan déviatoire π_σ .

La loi de comportement s'écrit donc (α_0 et α_1 ayant le sens des coefficients de Lamé λ, μ):

$$\dot{\sigma} = \lambda E_1 + 2\mu D + \alpha_4^c \overline{\Delta M} (\sigma - \sigma_R),$$

avec

$$\alpha_4^c = \frac{-\mu}{S_2^{2-c} S_{21}^c},$$

où

$$S_{21} = \frac{w Y_0}{\sqrt{c_2}}, \quad c_e = 1 - \gamma^\infty \left(1 - e^{-\frac{\Delta \eta}{\eta_0}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\eta}{a_1 \eta_0}} \right).$$

$\Delta \eta = \int_{t_1}^t \overline{\Delta M}_a(\tau) d\tau$ accroissement du paramètre d'évolution depuis l'état de référence actif pour la branche k . Le schéma dépend donc des 6 constantes scalaires $\lambda, \mu, Y_0, c, a_1$ et γ^∞ .

On prend

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.15 \cdot 10^6 \text{ MPa}, & \mu &= 0.075 \cdot 10^6 \text{ MPa}, \\ Y_0 &= 0.2 \cdot 10^3 \text{ MPa}, & c &= 0.9, \\ a_1 &= 300, & \bar{\gamma}^\infty &= 0.75. \end{aligned}$$

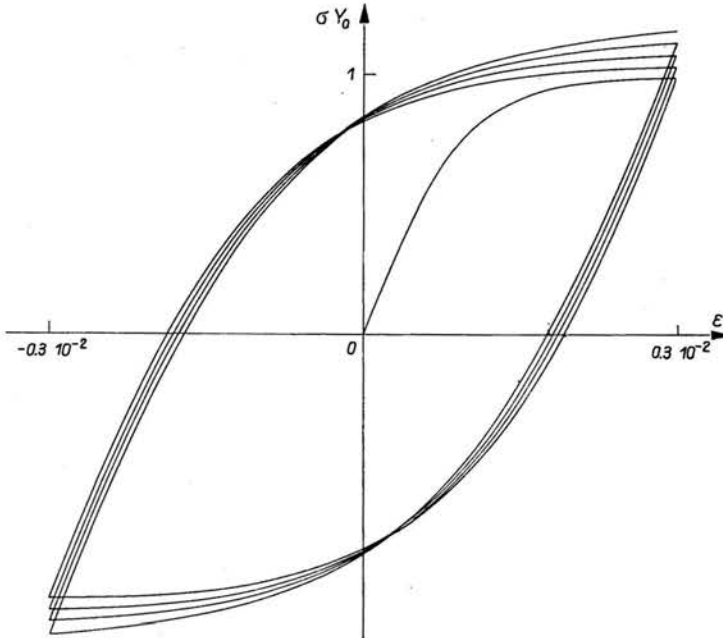


FIG. 20. Ecouissage en déformation. Illustration monodimensionnelle.

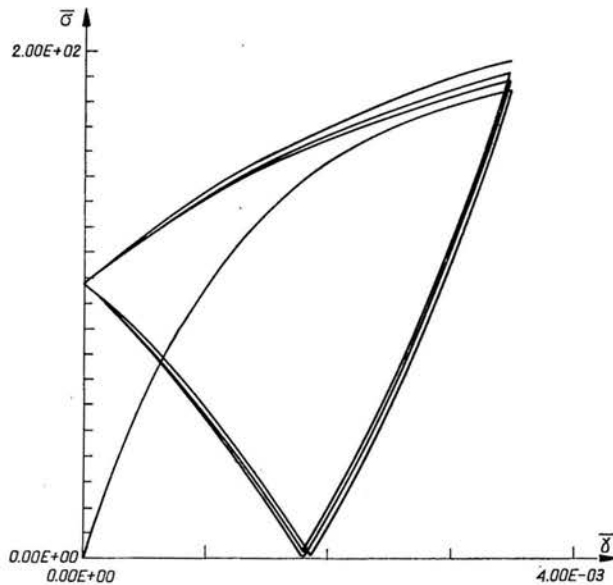


FIG. 21. Ecouissage en déformation. Trajet tridimensionnel, circulaire dans le plan $d_1 = d_2$.

Un essai push-pull classique, à vitesse de déformation constante et alternée $\pm D_0$, est présenté sur la Fig. 20.

Le comportement d'un cube de matière soumis à un trajet circulaire dans le plan $d_1 = d_2$ est indiqué sur la Fig. 21. Une illustration des propriétés du schéma constitutif muni de la contribution visqueuse σ_v (écrouissage en vitesse de déformation) est indiquée en [14] et [10]. On rend compte de l'influence de la vitesse de déformation sur les courbes de charge monotone, des phénomènes de relaxation et de fluage.

4. Applications au comportement dynamique des structures

La résolution du problème aux limites s'effectue en générant par éléments finis l'approximation de la fonctionnelle lagrangienne des membres des équations à prendre en compte dans la description du mouvement [9, 10, 11, 12].

On présente ici quelques applications à des structures simples et industrielles constituées d'un matériau muni du schéma héréditaire. Une discussion générale de la méthode numérique et son utilisation avec des lois de comportement classiques sont indiquées en [14].

4.1. Exemples monodimensionnels

4.1.1. EXEMPLE 1. On considère la propagation d'une sollicitation impulsionnelle en contrainte appliquée simultanément aux deux extrémités d'une tige de longueur l constituée d'un matériau dont la loi de comportement tient compte de l'écrouissage en vitesse de déformation.

On constate que la partie centrale de la barre subit des tractions. (cf. Figs 22 et 23).

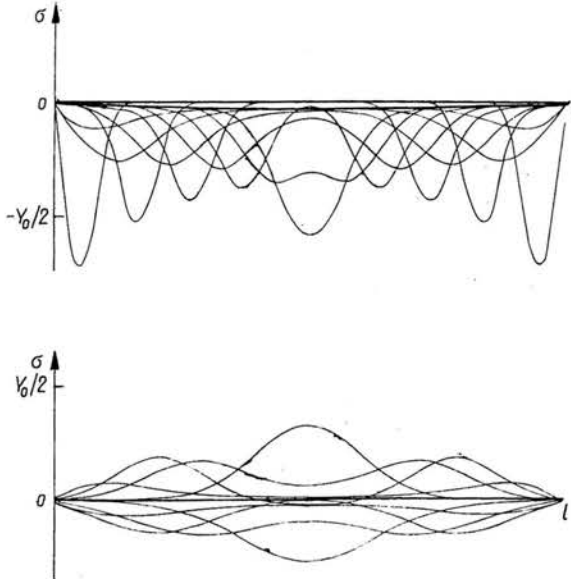


FIG. 22. Propagation d'une impulsion de contrainte appliquée aux deux extrémités d'une barre visco-élastoplastique.

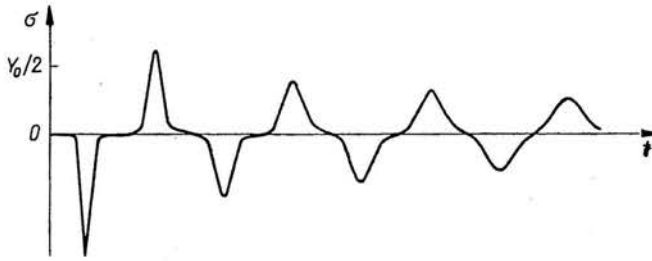


FIG. 23. Cas de la Fig. 22 évolution de la contrainte dans la partie médiane de la barre.

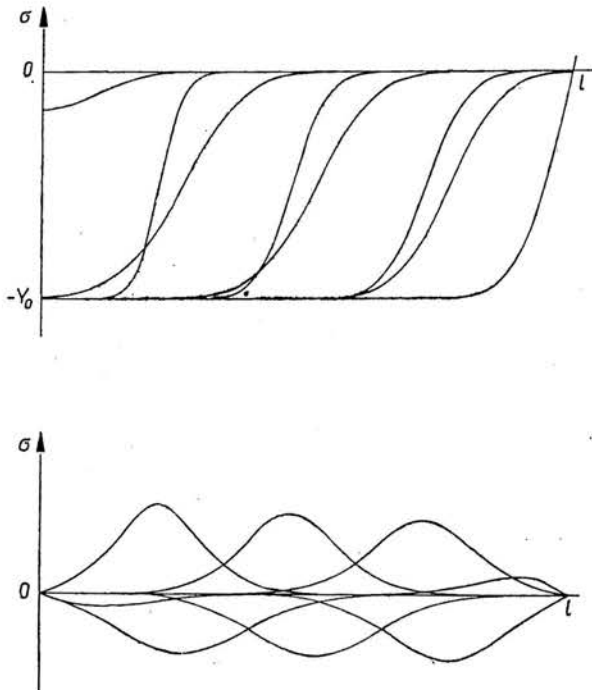


FIG. 24. Projection et rebond d'une barre visco-élastoplastique sur un obstacle fixe, rigide. Phase 1: contact, Phase 2: rebond.

4.1.2. EXEMPLE 2. La Fig. 24 présente la solution obtenue lorsque la tige visco-élastoplastique précédente est projetée sur un obstacle fixe. La vitesse d'impact vaut 5 ms^{-1} .

On distingue la phase de contact et celle du rebond de la barre.

4.2. Exemple d'une structure à symétrie sphérique

On considère une coque sphérique de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , d'épaisseur $e = r_1/10$. La sollicitation est une impulsion de pression à l'intérieur de la coque. La pression extérieure reste nulle [11].

La loi de comportement du matériau est identique à celle présentée au chapitre précé-

dent (elle ne tient compte que de la contribution de contrainte due à l'écroissage en déformation).

La Fig. 25 indique une propagation le long de l'épaisseur de la coque sphérique: contrainte radiale et contrainte tangentielle à différents instants.

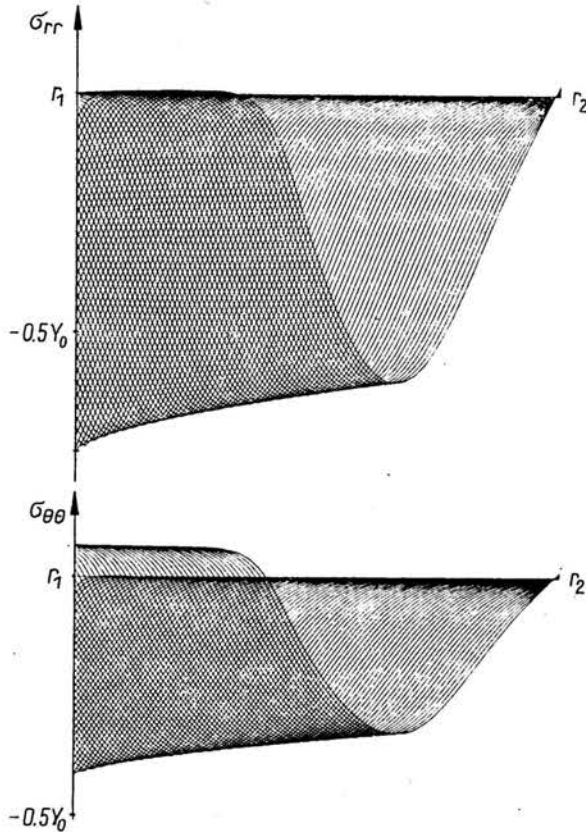


FIG. 25. Coque sphérique élastoplastique avec écroissage en déformation. Propagation d'une impulsion de pression intérieure.

4.3. Exemple d'une structure industrielle bidimensionnelle

On traite l'exemple d'une coque mince de révolution encastree à sa base (cf. Fig. 26) et sollicitée par une pression interne [10, 12, 14]. Le matériau consistant la cuve est muni de la loi de comportement qui tient compte de l'écroissage en déformation. Les paramètres de la loi sont ceux de Lamé: λ , μ (remplacés ici par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν); le pseudo-seuil de plasticité: Y_0 ; l'intensité de la consolidation $\bar{\gamma}^\infty$; le paramètre de courbure: c et le paramètre d'accommodation a_1 .

La détermination des paramètres de la loi s'effectue à partir d'essais classiques de traction-compression. On prend:

$$\begin{aligned} E &= 30 \cdot 10^6 \text{ psi}, & \bar{\gamma}^\infty &= 0.75, \\ \nu &= 0.3 & c &= 0.9, \\ Y_0 &= 34 \cdot 10^3 \text{ psi}, & a_1 &= 300. \end{aligned}$$

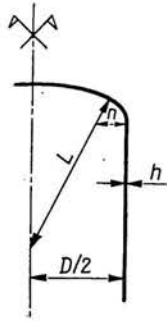


FIG. 26. Géométrie de la structure axisymétrique.

Les Figs. 27 et 28 présentent la réponse de la cuve à une mise en pression impulsionnelle: une pression de 65 psi s'établit en $0.5 \cdot 10^{-5}$ s. On peut noter la bonne stabilité de la solution numérique.

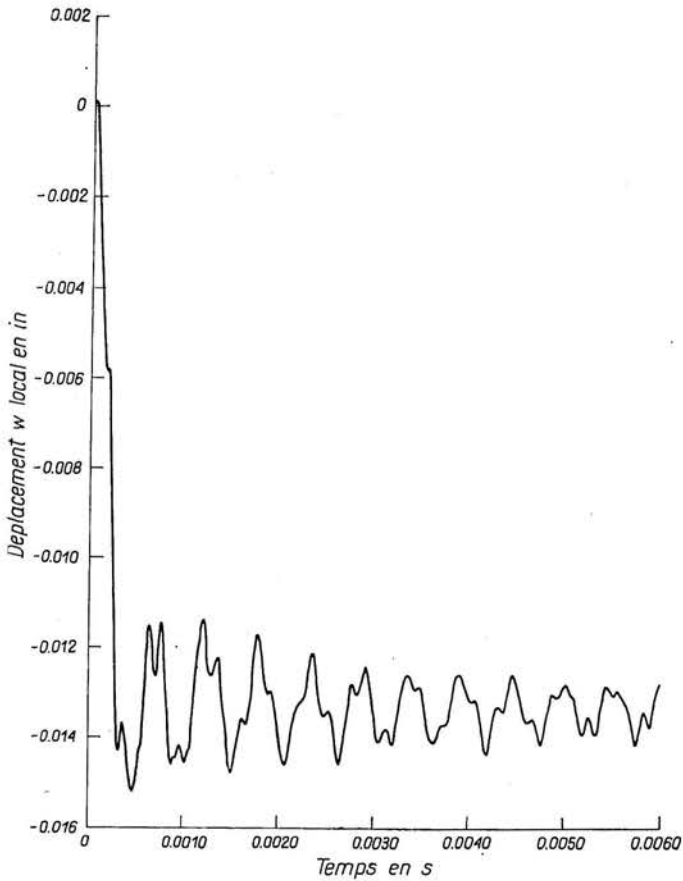


FIG. 27. Déplacement normal du coin de la cuve.

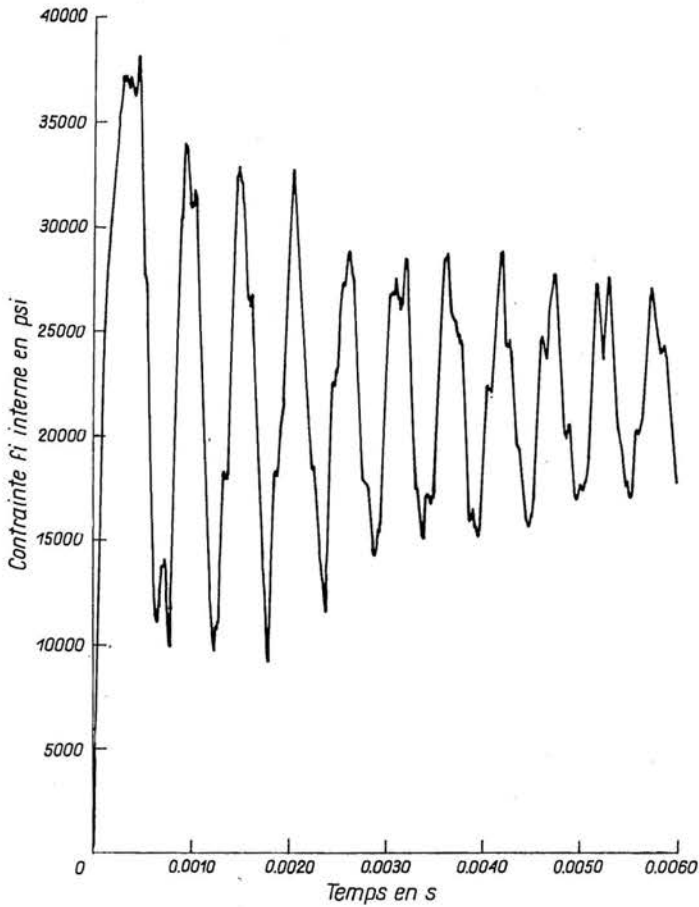


FIG. 28. Evolution de la contrainte meridienne au sommet de la cuve.

Références

1. B. PERSOZ, *La rhéologie*, Masson, Paris 1969.
2. W. D. IWAN, *On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems*, Trans. of Asme, 1967.
3. C. DE CARBON, *Déformations des solides*, CRAS, 215, série A, Paris 1942.
4. P. STUTZ, *Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents*, Thèse d'état, Grenoble 1972.
5. J. M. TERRIEZ, *Sur l'identification optimale de lois de comportement élastoplastiques isotropes*, Thèse de 3^e cycle, Grenoble 1974.
6. P. GUELIN, P. STUTZ, *Une nouvelle classe de lois de comportement décrivant les grandes déformations visco-élastoplastiques*, Arch. Mech., 29, 1, 1977.
7. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, *Remarks on the tensorial formulation of constitutive laws describing mechanical hysteresis*, Trans. 4th SMIRT, L 1/9 1977.
8. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, *Order, heat, intrinsic dissipation*, Trans. 5th SMIRT, L 16, 1979.
9. P. GUELIN, J. M. TERRIEZ, *Comportement non linéaire: problèmes à une et deux dimensions*, Mech. Res. Com., 5, 6, 1978.

10. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, J. M. TERRIEZ, *Remarques sur les réponses dynamiques des structures*, Mech. Res. Com.,
11. P. GUELIN, W. K. NOWACKI, J. M. TERRIEZ, *Sur l'analyse de réponses impulsionnelles en grandes déformations sphériques*, Arch. Mech., **32**, 2, 1980.
12. J. M. BOISSERIE, P. GUELIN, P. LE BOURG, J. M. TERRIEZ, *Réponses impulsionnelles de structures élastoplastiques*, Problèmes non-linéaires de Mécanique, Editions Scientifiques de Pologne, Varsovie 1980.
13. P. GUELIN, *Remarques sur l'hystérésis mécanique*, J. de Mécanique, **19**, 2, 1980.
14. J. M. TERRIEZ, *Sur un schéma à mémoire discrète du comportement des continus irréversibles*, Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1980.

INSTITUT DE MÉCANIQUE DE GRENOBLE, FRANCE.

Received December 31, 1980.