АЛГЕБРА
БУРДОНА

Czajewicz

АЛГЕБРА.

ЧАСТЬ I.

АЛГЕБРА

БУРДОНА.

ПЕРЕВОДЪ Ѳ. МЕЦА,

ПРИНЯТЫЙ ВЪ РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПРЕПОДАВАНІЯ ВЪ ИНСТИТУТѢ КОРПУСА ПУТЕЙ СООБЩЕНІЯ И ВЪ ГОРНОМЪ ИНСТИТУТѢ.

ИЗДАНІЕ ПЯТОЕ.

свѣренное съ 8-мъ французскимъ изданіемъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Военно-Учебныхъ Заведеній.

1844.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлено были въ Цензурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ.

С. Петербургъ, 14 Декабря 1843 года.

Ценсоръ *Петръ Корсаковъ*.

ОТЪ ИЗДАТЕЛЯ.

КЪ ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНІЮ.

Первое изданіе Алгебры Бурдона было переведено мною съ пятаго французскаго изданія. Съ тѣхъ поръ во Франціи это сочиненіе дошло до 8-го, а русскій переводъ предлагаю теперь четвертымъ *) изданіемъ. Слѣдовательно оригиналъ и переводъ шли ровнымъ шагомъ.

Какъ при прежнихъ изданіяхъ, такъ и при этомъ я воспользовался всѣми улучшеніями послѣдняго французскаго изданія, и обратилъ особенное вниманіе на языкъ перевода. Я старался, сохраняя точность языка, свойственнаго наукѣ, освободить его отъ тяжелыхъ оборотовъ, галлицизмовъ, и неправильностей, къ которымъ мы въ русскомъ математическомъ языкѣ почти привыкли.—За полный успѣхъ еще не ручаюсь; потому что это дѣло труднѣе, нежели кажется, и въ этомъ согласятся всѣ, которые занимались подобными работами. Сколько я успѣлъ въ этомъ, можно видѣть изъ самой книги.

Еще одна причина побуждала меня употребить всѣ средства къ улучшенію этого изданія.

---

*) А нынѣ пятымъ.

Книгопродавецъ И. Глазуновъ издалъ въ Маѣ нынѣшняго года Алгебру Бурдона; на этомъ изданіи не было выставлено имени Переводчика, какъ на моихъ послѣднихъ изданіяхъ, и также было напечатано, что она принята въ Институтѣ Корпуса Путей Сообщенія *); поэтому многіе (разумѣется съ вида) почли его за новое изданіе моего перевода. Каково было это изданіе, можно видѣть въ № 29 Литературныхъ прибавленій къ Инвалиду. Горестно видѣть, что учебныя книги дѣлаются предметомъ спекуляціи. Поэтому я долженъ былъ скорѣе, нежели предполагалъ, приступить къ новому изданію, и не щадя трудовъ и издержекъ, сдѣлать его по возможности лучшимъ въ наружномъ и внутреннемъ отношеніи.

Еще одно. Въ 8-мъ французскомъ изданіи исключены извлеченіе кубичнаго корня, и отысканіе логариѳмовъ, потому что Бурдонъ помѣстилъ эти статьи въ Ариѳметикѣ. У насъ Ариѳметика не преподается въ такомъ объемѣ, и потому я оставилъ эти статьи въ моемъ изданіи. Вторую часть я надѣюсь издать со временемъ со всѣми улучшеніями, которыя сдѣланы относительно теоріи уравненій и рѣшенія численныхъ уравненій.

Ѳ. Мецъ.

---

*) Въ С. Петербургскихъ Вѣдомостяхъ (№ 153, 10-го Іюля 1838) въ Предостерегательныхъ извѣстіяхъ, Институтъ объявилъ, что этотъ переводъ по невѣрности своей не могъ бытъ принять въ Институтъ, и Главный Ценсурный Комитетъ обязалъ И. Глазунова перепечатать заглавный листъ, и уничтожить слова: *принята для преподаванія въ Институтѣ Путей Сообщенія.*

АЛГЕБРА.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Алгебра есть часть Математики, въ которой численные вопросы рѣшаются посредствомъ общихъ и сокращенныхъ знаковъ. +

Вопросы бываютъ двухъ родовъ:

1) или требуется доказать существованіе нѣкоторыхъ свойствъ, принадлежащихъ извѣстнымъ и даннымъ числамъ; эти вопросы называются *теоремами*;

2) или по извѣстнымъ числамъ отыскиваютъ величину другихъ, неизвѣстныхъ чиселъ, но имѣющихъ съ первыми опредѣленныя отношенія. Эти вопросы называются *проблемами* или *задачами*.

2. Въ Алгебрѣ употребляютъ два рода знаковъ; одними означаютъ количества, а другими отношенія между ~~этими~~ количествами.

~~арабскими~~ латинскими

1. Количества означаютъ буквами Французской азбуки. Посредствомъ буквъ можно представить всѣ послѣдовательныя сужденія въ краткомъ видѣ; притомъ, когда количества представлены буквами, то гораздо легче замѣтить, что то или другое свойство есть общее многимъ числамъ, и также, что *способъ* рѣшенія задачи не зависитъ отъ частной величины данныхъ количествъ.

Отношенія между количествами, и дѣйствія, производимыя надъ количествами, означаютъ слѣдующими знаками:

2. Знакъ +, *плюсъ*, означаетъ сложеніе; напр. $25+36$ или 25 *плюсъ* 36, значитъ: 25 *сложенное съ* 36; $a+b$ или a *плюсъ* b, показываетъ, что число означенное чрезъ a, сложено съ числомъ означеннымъ чрезъ b.

3. Знакъ —, *минусъ*, означаетъ вычитаніе; напр. $45-24$ выговаривается: 45 *минусъ* 24, и значитъ: 45 *безъ* 24, или же *разность* 45 отъ 24; $a-b$ выговаривается: a *минусъ* b, или a *безъ* b.

4. Умноженіе означаютъ знакомъ $\times$, или точкою; 36×25, или $36 \,.\, 25$, значитъ: 36 *умноженное* на 25, или *произведеніе* изъ 36 на 25. Когда помножаемыя числа означены буквами, то не ставятъ между ними никакого знака; поэтому ab есть то же, что $a \times b$ или $a \,.\, b$; abc то же что $a \times b \times c$ или $a \,.\, b \,.\, c$. Но это сокращеніе только въ томъ случаѣ допускается, когда $\overset{\text{числа}}{\text{количества}}$ означены буквами; если бы такимъ же образомъ вмѣсто 5×6 написали 56, то нельзя было бы отличить это произведеніе, отъ числа *пятьдесятъ шесть*, написаннаго по десятичной системѣ счисленія.

5. Чтобы означить дѣленіе, пишутъ дѣлимое надъ дѣлителемъ и раздѣляютъ ихъ горизонтальною чертою; напрuм. $\frac{24}{6}$ выражаетъ 24 *раздѣленное* на 6, или *частное* отъ *раздѣленія* 24 на 6; $\frac{a}{b}$ значитъ a *раздѣленное* на b. Иногда пишутъ это такимъ образомъ: $a : b$.

чиселъ

6. Если надобно сложить нѣсколько равныхъ количествъ, напр. $a+a+a+a+a$, тогда пишутъ букву одинъ разъ, а съ лѣвой стороны ставятъ число, которое показываетъ, сколько разъ должно повторить букву. Это число называется *предстоящимъ*, или коефиціентомъ; здѣсь, напримѣръ, мы напишемъ $5a$, и 5 есть предстоящее; $11a$ выражаетъ сложеніе одиннадцати чиселъ равныхъ a; $12ab$, сложеніе двѣнадцати чиселъ равныхъ произведенію a на b.

7. *Степенью* ~~количества~~ называется произведеніе, составленное чрезъ умноженіе сего количества само на себя; напр: $a \times a$ или aa будетъ второй степени; $aaaaa$ будетъ пятой степени. Для краткости, пишутъ только одинъ разъ букву, означающую это количество, и надъ нею съ правой стороны ставятъ число, которое показываетъ, сколько разъ слѣдовало бы написать ее; напр. вмѣсто $a \times a$ напишемъ a^2, вмѣсто $a \times a \times a \times a \times a$ напишемъ a^5, и говоримъ: a *возвышенное въ пятую степень* или a *пятой степени*. Это число называется *показателемъ*; здѣсь 2 и 5 суть показатели.

wykładnik

Предстоящее показываетъ, сколько разъ буква сложена сама съ собою, а показатель, сколько разъ буква сама на себя умножена. Чтобы убѣдиться въ пользѣ показателей и предстоящихъ въ Алгебрѣ, положимъ, что должно выразить произведеніе, составленное изъ четырехъ множителей равныхъ a, трехъ множителей равныхъ b, и двухъ множителей равныхъ c; вмѣсто $aaaabbbcc$ мы можемъ написать $a^4b^3c^2$. Если же это послѣднее произведеніе должно взять семь разъ, то пишемъ $7a^4b^3c^2$.

8. То количество, которое должно умножить само на себя, чтобы составить данное количество, называется *корнемъ* послѣдняго количества. Если первое количество должно умножить само на себя два, три,... раза, или другими словами, возвысить во вторую, третью,.... степень, чтобы составить данное количество, то оно будетъ корнемъ 2-й, 3-й.... степени сего количества. Коренной знакъ, $\sqrt{\ }$, ставятъ предъ числомъ, изъ котораго должно извлечь корень; $\sqrt[3]{a}$ выговаривается: *корень третьей степени* или *кубическій* изъ a; $\sqrt[4]{b}$, *корень четвертой степени* изъ b.

9. Знакъ $=$ означаетъ равенство двухъ количествъ, и выговаривается: *равно*; напр. чтобы коротко выразить, что разность между 36 и 25 равна 11, пишутъ: $36-25=11$, т. е. 36 минусъ 25 равно 11.

10. Знакъ неравенства $>$ показываетъ, что одно количество болѣе или менѣе другаго; $a>b$ значитъ *a больше b*; $a<b$ значитъ *a меньше b*. Отверстіе знака всегда обращено къ большему количеству.

Слѣдующіе вопросы яснѣе покажутъ пользу алгебраическихъ знаковъ.

ПЕРВЫЙ ВОПРОСЪ.

3. *Сумма двухъ чиселъ равна 67, разность ихъ 19; како велико каждое число?*

Рѣшеніе.

Прежде всего постараемся означить условными знаками связь между данными и неизвѣстными числами вопроса.

Если изъ одного числа вычтемъ другое, то въ остаткѣ будетъ 19; поэтому, если меньшее число будетъ извѣстно, то стоитъ только приложить къ нему 19, чтобы найти большее число. Означимъ меньшее число чрезъ x; тогда большее число есть $x+19$, а сумма ихъ будетъ $x+x+19$, или $2x+19$.

По условію эта сумма равна 67; и такъ имѣемъ равенство или уравненіе: $2x+19=67$.

Если $2x$ сложенные съ 19 равняются 67, то $2x$ отдѣльно будутъ равны 67 безъ 19, или, $2x=48$. Слѣд. x равенъ половинѣ числа 48, т. е.

$$x=\frac{48}{2}=24.$$

Если меньшее число равно 24, то большее, $x+19$, будетъ $24+19$ или 43.

Алгебраическія выкладки пишутъ въ такомъ порядкѣ:

Пусть x меньшее число,
$x+19$ будетъ большее.
Уравненіе: $2x+19=67$, или $2x=67-19=48$:
слѣдовательно . . . . $x=\frac{48}{2}=24$.
и посему. . . . . $x+19=24+19=43$.
Въ самомъ дѣлѣ, $43+24=67$, $43-24=19$.

Другое рѣшеніе.

Пусть x будетъ большее число;
$x-19$ будетъ меньшее.
Уравненіе: $2x-19=67$, откуда $2x=67+19=86$;
слѣдовательно. . . . $x=\frac{86}{2}=43$;
а посему. . . $x-19=43-19=24$.

Изъ этихъ примѣровъ видно, сколь мало занимаетъ мѣста рѣшеніе задачи, когда всѣ послѣдовательныя сужденія выражаютъ алгебраическими знаками; если бы эти же сужденія выразили обыкновеннымъ языкомъ, то они заняли бы нѣсколько страницъ.

ОБЩЕЕ РѢШЕНІЕ 1-й ЗАДАЧИ.

4. *Сумма двухъ чиселъ есть* a, *разность ихъ* b. *Найти оба числа.*

Положимъ x . . . . . . меньшее число,
$x+b$, выразитъ большее.

Уравненіе: $2x+b=a$, откуда $2x=a-b$;
слѣдовательно . . . . . $x=\frac{a\ b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$;
посему, $x+b=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$.

Разсмотримъ выраженіе, которое мы нашли для x. Выраженіе $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ не есть численная величина; это *формула*; въ ней ясно видно, какія дѣйствія надобно произвесть надъ данными количествами, чтобы найти неизвѣстныя; въ самомъ дѣлѣ, когда количества, означенныя здѣсь буквами, и дѣйствія, показанныя знаками, мы выразимъ словами, то формула эта обратится въ слѣдующее правило: *когда извѣстна сумма двухъ чиселъ и разность ихъ, то полусумма, сложенная съ полуразностію, составитъ большее число, а полусумма безъ полуразности составитъ меньшее число.*

Теперь можемъ брать какія угодно величины для a и b; изъ формулъ $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ и $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ всегда найдемъ меньшее и большее число. И такъ въ этихъ формулахъ заключается рѣшеніе множества задачъ этого рода, которыя различаются только величинами данныхъ количествъ. Положимъ, напримѣръ, что сумма есть 237, разность 99; большее число будетъ

$$\frac{237}{2}+\frac{99}{2}=\frac{336}{2}=168,$$

меньшее, $\frac{237}{2}-\frac{99}{2}$ или $\frac{138}{2}=69$.

Въ самомъ дѣлѣ, $168+69=237$, $168-69=99$.

Изъ сего можно видѣть, какъ выгодно выражать буквами данныя количества. Числа измѣняются при вычисленіяхъ, и соединяются съ другими, такъ что по окончаніи дѣйствій нельзя узнать, какъ составленъ изъ нихъ выводъ; поэтому, если въ задачѣ перемѣнятъ величину данныхъ количествъ, то должно снова дѣлать тѣ же вычисленія. Надъ буквами, напротивъ того, можно только означать дѣйствія, и потому въ выводѣ сохраняются слѣды дѣйствій, которыя произведены надъ извѣстными количествами, для отысканія неизвѣстныхъ.

ВТОРОЙ ВОПРОСЪ. — ТЕОРЕМА.

5. *Сумма двухъ чиселъ, умноженная на разность ихъ,*

равна разности квадратовъ или вторыхъ степеней этихъ двухъ чиселъ.

Даны два числа 12 и 9. Сумма ихъ 21, разность 3. Если умножимъ сумму на разность, то получимъ 21×3 или 63; когда изъ 144, квадрата числа 12, вычтемъ 81 квадратъ числа 9, то получимъ также 63; слѣд. теорема справедлива. Теперь должно показать, что это свойство всегда имѣетъ мѣсто, какія бы ни взяли два числа.

Изобразимъ эти числа буквами a и b. Сумма выразится чрезъ $a + b$, разность чрезъ $a - b$. Чтобы составить произведеніе изъ сихъ двухъ выраженій, умножимъ сначала сумму $a+b$ на a; каждую изъ частей составляющихъ $a+b$, должно взять столько разъ, сколько единицъ въ a, и потомъ сложить оба частныя произведенія: получимъ $a \times a + b \times a$, или $a^2 + ab$. Но надлежало умножить не на цѣлое a, а на a безъ b; слѣд. $a^2 + ab$ больше требуемаго произведенія количествомъ $a+b$ взятымъ b разъ, т. е. $ab + b^2$. Посему должно вычесть $ab + b^2$ изъ произведенія $a^2 + ab$, это изобразится слѣдующимъ образомъ: $a^2 + ab - ab - b^2$. Произведенія $+ab$ и $-ab$ взаимно уничтожаются, и требуемое произведеніе будетъ $a^2 - b^2$.

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2.$$

Выводъ $a^2 - b^2$ не зависитъ отъ частной величины a и b: слѣд. эта теорема имѣетъ мѣсто для всякихъ двухъ чиселъ.

ТРЕТІЙ ВОПРОСЪ. — ТЕОРЕМА.

6. *Если къ числителю и знаменателю правильной дроби приложимъ одно и то же цѣлое число, то новая дробь будетъ больше первой.*

Пусть будетъ $\frac{5}{12}$ данная дробь; новая дробь будетъ $\frac{8}{15}$. Приводя эти дроби къ одному знаменателю, получимъ $\frac{75}{180}$ и $\frac{96}{180}$: вторая очевидно болѣе первой.

Чтобы удостовѣриться, будетъ ли эта теорема справедлива при всякой дроби, означимъ данную дробь чрезъ $\frac{a}{b}$, полагая $a < b$. Къ обѣимъ частямъ дроби приложимъ число m; будетъ $\frac{a+m}{b+m}$.

Чтобы сравнить объ дроби, надобно привести ихъ къ одному знаменателю, слѣдовательно умножить обѣ части 1-й дроби на $b+m$, и обѣ части 2-й на b. Но умножить a на $b+m$ значитъ взять a столько разъ, сколько единицъ въ b, и еще столько разовъ, сколько единицъ въ m, что даетъ $ab+am$. Также докажемъ, что b умноженное на $b+m$ равно b^2+bm; слѣдов. первая дробь будетъ $\frac{ab+am}{b^2+bm}$. Умножая обѣ части второй дроби $\frac{a+m}{b+m}$ на b, какъ показано въ § 5, получимъ $\frac{ab+bm}{b^2+bm}$.

Числители $ab+am$ и $ab+bm$ имѣютъ общую часть ab; но часть bm втораго числителя, болѣе части am перваго, потому что $b>a$; поэтому и вторая дробь болѣе первой.

Сверхъ того видно, что наша теорема только тогда справедлива, когда $\frac{a}{b}$ правильная дробь; еслибы a было больше b, тогда $ab+bm$ было бы меньше $ab+am$ и поэтому вторая дробь была бы меньше первой.

7. Разсматривая рѣшенія предъидущихъ вопросовъ, можно замѣтить, что при употребленіи алгебраическихъ знаковъ должны встрѣчаться нѣкоторыя правила, общія многимъ вопросамъ. Напр. во 2-мъ и 3-мъ вопросѣ мы умножали сумму $a+b$ на число a, сумму $a+m$ на b, число a на $b+m$. Слѣдовательно, если опредѣлимъ общія правила для дѣйствій, производимыхъ надъ алгебраическими количествами, то будемъ въ состояніи рѣшать всѣ численные вопросы помощію алгебраическихъ знаковъ. Поэтому мы прежде всего покажемъ: *какъ производить всѣ ариѳметическія дѣйствія надъ алгебраическими или буквенными количествами*, т. е. надъ числами, изображаемыми алгебраическими знаками. Нельзя не сознаться, что эта часть нѣсколько суха и непривлекательна для начинающихъ; но кто хочетъ быстро подаваться впередъ по обширному и плодовитому полю Алгебры, тотъ необходимо долженъ основательно пройти эти первыя правила.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

§ I. АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

8. Всякое количество, написанное алгебраическимъ языкомъ, т. е. помощію знаковъ, употребляемыхъ въ Алгебрѣ, называется *алгебраическимъ количествомъ* или *алгебраическимъ выраженіемъ даннаго количества*; напримѣръ, $3a$ есть алгебраическое выраженіе утроеннаго числа a; $5a^2$ есть алгебраическое выраженіе пять разъ взятаго квадрата a; $7a^3b^2$ алгебраическое выраженіе 7 разъ взятаго куба a, умноженнаго на квадратъ b.

$3a - 5b$ есть алгебраическое выраженіе разности между утроеннымъ a и 5 разъ взятымъ b.

$2a^2 - 3ab + 4b^2$, алгебраическое выраженіе удвоеннаго квадрата a, безъ утроеннаго произведенія a на b, и сложеннаго съ квадратомъ b, взятымъ четыре раза.

Одночленъ или *одночленное количество*, есть алгебраическое количество, не соединенное ни съ какимъ другимъ знакомъ $+$ или $-$; а *многочленъ*, или многочленное количество, есть алгебраическое выраженіе, составленное изъ многихъ членовъ съ знаками $+$ или $-$. Напр. $3a$, $5a^2$, $7a^3b^2$ суть одночлены; $3a - 5b$, $2a^2 - 3ab + 4b^2$, многочлены. Первый изъ этихъ многочленовъ называется *двучленомъ*, потому что онъ состоитъ изъ двухъ членовъ. Второй, составленный изъ трехъ членовъ, называется *трехчленомъ*, и т. д.

9. Если въ алгебраическомъ выраженіи вмѣсто буквъ вставимъ частныя величины ихъ, и произведемъ всѣ означенныя въ немъ ариѳметическія дѣйствія, то получимъ *численную величину* сего выраженія. Численная величина выраженія очевидно зависитъ отъ частной величины буквъ, и *вообще* должна измѣняться съ ними. Напр. численная величина выраженія $2a^3$ будетъ 54, когда положимъ $a=3$; потому что кубъ числа 3 есть 27, и 2×27 равно 54. Численная величина того же выраженія будетъ 250, когда положимъ $a=5$; потому что $5^3=125$ и $2\times125=250$.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ численная величина алгебраическаго выраженія остается *постоянною*, хотя величина буквъ будетъ измѣняться. Напр. если въ выраженіи $a-b$ равномѣрно увеличиваютъ a и b, то численная величина выраженія не перемѣняется.

Положимъ $a=7$, $b=4$; будетъ $a-b=3$.

Положимъ $a=12$, или $7+5$, $b=9$ или $4+5$; тогда $a-b=12-9=3$; и т. д.

Численная величина многочлена не перемѣняется отъ перестановки членовъ его, если только при каждомъ членѣ остается прежній знакъ. Напр. многочлены $4a^3-3a^2b+5ac^2$, $5ac^2-3a^2b+4a^3$, $4a^3+5ac^2-3a^2b$, имѣютъ одну и ту же численную величину. Это основывается на свойствѣ ариѳметическаго сложенія и вычитанія. Въ послѣдствіи мы часто будемъ пользоваться этимъ замѣчаніемъ.

10. Въ многочленныхъ количествахъ при однихъ членахъ находится знакъ $+$, при другихъ знакъ $-$. Первые суть *члены слагаемые*, вторые *члены вычитаемые*. Первые называются также *членами положительными*, а вторые *членами отрицательными*, названія весьма неправильныя, и освященныя единственно употребленіемъ.

Предъ первымъ членомъ многочлена обыкновенно не ставятъ знака; но тогда подразумѣвается при немъ знакъ $+$.

11. *Измѣреніемъ* члена называется всякая буква, входящая множителемъ въ сей членъ, а *степенью* члена число сихъ множителей или измѣреній. Напр. $2a$ будетъ членъ одного измѣренія или первой степени; $5ab$ есть членъ двухъ измѣреній или второй степени; $7a^3bc^2$ или $7aaabcc$ будетъ шести измѣреній, или шестой степени. Вообще, *степень* или *число измѣреній члена*, *опредѣляется суммою показателей буквъ сего члена*. Въ слѣдствіе самаго опредѣленія показателя, (2), при буквахъ, не имѣющихъ онаго, полагается показателемъ единица. И такъ степень члена $8a^2bcd^3$ будетъ $2+1+1+3$ или 7.

Многочленъ называется *однороднымъ*, когда всѣ его члены будутъ одинакой степени. Многочлены $3a-2b+c$, $3a^2-4ab+b^2$, $+5a^2c-4c^3+2ab^2$, суть однородные, $8a^3-4ab+c$, разнородный.

12. *Подобными* называютъ тѣ члены, которые составлены изъ одинакихъ буквъ съ одинакими показателями; $7ab$ и $3ab$, $4a^5b^2$ и $5a^5b^2$ будутъ подобные члены; $8a^2b$ и $7ab^2$ не будутъ подобными; въ нихъ хотя однѣ и тѣ же буквы, но показатели сходственныхъ буквъ различны.

Данъ многочленъ $4a^2b-3a^2c+9a^2c-2a^2b+7a^2c-6b^3$; можно написать его (9) такимъ образомъ:

$$4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^3;$$

но $4a^2b-2a^2b$ очевидно равно $2a^2b$; $7a^2c-3a^2c$ равно $4a^2c$, и весь многочленъ обратится въ $2a^2b+4a^2c+9ac^2-6b^3$

Разсмотримъ многочленъ, составленный изъ членовъ $+2a^3bc^2$, $-4a^3bc^2$, $+6a^3bc^2$, $-8a^3bc^2$, $+11a^3bc^2$.

Сумма слагаемыхъ членовъ $+2a^3bc^2+6a^3bc^2+11a^3bc^2$ равна $+19a^3bc^2$; сумма вычитаемыхъ членовъ $-4a^3bc^2$, $-8a^3bc^2$ приводится къ $-12a^3bc^2$. И такъ данные пять членовъ приводятся къ $19a^3bc^2-12a^3bc^2$, или къ $7a^3bc^2$.

Если сумма вычитаемыхъ членовъ больше суммы слагаемыхъ, тогда вычитаютъ положительное предстоящее изъ отрицательнаго и предъ остаткомъ пишутъ знакъ —. Напр. сумма слагаемыхъ членовъ есть $+5a^2b$, а сумма вычитаемыхъ $-8a^2b$; такъ какъ $-8a^2b$ составлено изъ $-5a^2b-3a^2b$, то $+5a^2b-8a^2b$ равно $+5a^2b-5a^2b-3a^2b$ или равно $-3a^2b$.

Изъ сего можемъ вывесть слѣдующее правило: *Чтобы соединить подобные члены, должно соединить въ одинъ членъ всѣ подобные члены съ знакомъ* $+$, *т. е. сложить предстоящіе этихъ членовъ, и къ суммѣ ихъ приписать общія буквы. Такимъ же образомъ составить одинъ вычитаемый членъ изъ всѣхъ подобныхъ членовъ съ знакомъ* $-$; *потомъ вычесть меньшую сумму изъ большой, и предъ остаткомъ написать знакъ большей суммы;* (должно замѣтить, что складываютъ или вычитаютъ одни предстоящіе, а не показатели).

По этому правилу найдемъ, что

$6a^2b-8a^2b-9a^2b+15a^2b-a^2b$ приводится къ $+3a^2b$.

$7abc^2-abc^2-7abc^2-8abc^2+4abc^2$ . . . . . . къ $-5abc^2$.

Соединеніе или сокращеніе подобныхъ членовъ собственно принадлежитъ Алгебрѣ, и встрѣчается въ *алгебраи-*

ческомъ сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи. Мы теперь займемся этими дѣйствіями, пропуская первоначальныя опредѣленія, которыя уже извѣстны изъ Ариѳметики.

СЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

13. Сложить выраженія $3a$, $5b$, $2c$.
Окончательное выраженіе этого сложенія будетъ $3a + 5b + 2c$, и болѣе сократиться не можетъ.

Сложить члены $4a^2b^3$, $2a^2b^3$, $7a^2b^3$; будетъ $4a^2b^3+2a^2b^3+7a^2b^3$, а по соединеніи (12), $13a^2b^3$.

Сложить многочлены :

$$3a^2 - 4ab,\ 2a^2 - 3ab + b^2,\ 2ab - 5b^2.$$

Составимъ изъ нихъ одинъ многочленъ, выражающій сумму ихъ, Къ числу, выраженному чрезъ $3a^2 - 4ab$, приложить число $2a^2 - 3ab + b^2$, значитъ приложить разность числа единицъ выраженныхъ чрезъ $2a^2 + b^2$, съ числомъ единицъ выраженныхъ чрезъ $3ab$; легко было бы сдѣлать это, если бы взяли частныя величины a и b; но какъ это невозможно въ настоящемъ видѣ этихъ количествъ, то замѣтимъ, что можно приложить сначала $2a^2+b^2$ къ $3a^2-4ab$, и потомъ вычесть $3ab$; тогда будетъ $3a^2-4ab+2a^2+b^2-3ab$, или, переставляя члены (9), $3a^2 - 4ab + 2a^2 - 3ab + b^2$. Когда приложимъ $2ab-5b^2$ къ этому выраженію, то будетъ

$$3a^2 - 4ab + 2a^2 - 3ab + b^2 + 2ab - 5b^2;$$

остается только соединить подобные члены (12), и требуемый выводъ будетъ

$$5a^2 - 5ab - 4b^2$$

Такимъ же образомъ можно поступать и съ другими многочленами; поэтому можемъ вывесть слѣдующее правило для сложенія многочленовъ: *Данные многочлены написать со знаками ихъ одинъ за другимъ, и потомъ, если возможно, соединить подобные члены.* Напримѣръ:

1.

$$\begin{array}{l} 3a^2 - 4ab - 2b^2 \\ +5a^2 + 2ab - b^2 \\ +3ab - 2b^2 - 3c^2 \\ \hline 8a^2 + ab - 5b^2 - 3c^2; \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} 7a^2b - 3abc - 8b^2c - 9c^3 + cd^2 \\ +9abc - 5a^2b + 3c^3 - 4b^2c + cd^2 \\ +4a^2b - 8c^3 + 9b^2c - 3d^3 \\ \hline 6a^2b + 6abc - 3b^2c - 14c^3 + 2cd^2 - 3d^3 \end{array}$$

Обыкновенно пишутъ данныя количества одни подъ другими, какъ показано въ этихъ примѣрахъ; потомъ соединяютъ подобные члены, и подписываютъ выводы съ ихъ знаками. Въ 1-мъ примѣрѣ мы видимъ, что членъ $3a^2$ подобенъ члену $5a^2$ во второй строкѣ; $8a^2$ будетъ окончательное выраженіе соединенія этихъ двухъ членовъ, которые легко прочеркиваютъ. Потомъ членъ $-4ab$ соединяютъ съ членами $+2ab$ и $3ab$, что даетъ $+ab$; этотъ членъ пишутъ вправо отъ $8a^2$, и прочеркиваютъ всѣ эти члены. Такимъ образомъ продолжаютъ дѣйствіе, пока всѣ члены будутъ прочеркнуты. Прочеркиваютъ члены для того, чтобы легче было отличить соединенные уже члены; непрочеркнутые члены остается еще соединить или сократить между собою.

ВЫЧИТАНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

14. Требуется вычесть $4b$ изъ $5a$; алгебраическое выраженіе сего вычитанія будетъ $5a-4b$.

Разность между $7a^3b$ и $4a^3b$ будетъ $7a^3b-4a^3b$ или $3a^3b$.

Вычесть $2b-3c$ изъ $4a$.
Можно изобразить выводъ такимъ образомъ: $4a-(2b-3c)$, т. е. вычитаемое количество заключаютъ въ скобки и ставятъ оное послѣ перваго съ знакомъ —. Теперь разсмотримъ, какъ составить одинъ многочленъ изъ этого выраженія: *въ этомъ состоитъ главное правило алгебраическаго вычитанія.*

Если бы a, b, c, были даны въ числахъ, то сначала сдѣлали бы вычитаніе, показанное въ выраженіи $2b-3c$, и остатокъ вычли бы изъ $4a$; такъ какъ въ настоящемъ видѣ данныхъ количествъ такое вычитаніе невозможно, то сперва вычтемъ $2b$ изъ $4a$, что́ даетъ $4a-2b$; но вычитая $2b$, мы вычли число, которое больше даннаго числомъ $3c$ единицъ; поэтому должно исправить выводъ, прибавляя къ нему $3c$. Тогда окончательное выраженіе будетъ $4a-2b+3c$.

Вычесть $5a^2-4ab+3bc-b^2$ изъ $8a^2-2ab$; это дѣйствіе можемъ изобразить такимъ образомъ:

$$8a^2-2ab-(5a^2-4ab+3bc-b^2).$$

Это выраженіе должно обратить въ одинъ многочленъ. Вычесть $5a^2 - 4ab + 3bc - b^2$, значитъ вычесть разность между суммою слагаемыхъ членовъ $5a^2 + 3bc$ и суммою вычитаемыхъ членовъ $4ab + b^2$. Можно сначала вычесть $5a^2 + 3bc$, что даетъ

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc;$$

но сей выводъ очевидно уменьшенъ числомъ $4ab + b^2$; слѣд. должно приложить къ выводу это количество, и будетъ

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 - 3bc + 4ab + b^2,$$

или, поставивъ члены въ прежнемъ порядкѣ,

$$8a^2 - 2ab - 5a^2 + 4ab - 3bc + b^2,$$

и по сокращеніи, $3a^2 + 2ab - 3bc + b^2$.

Изъ этого можемъ вывесть общее правило:

Чтобы вычесть одинъ многочленъ изъ другаго, должно написать вычитаемое количество вслѣдъ за уменьшаемымъ, перемѣняя знаки всѣхъ членовъ, и потомъ сократить цѣлый многочленъ, если возможно.

Такимъ образомъ найдемъ:

1-е. $$\left.\begin{array}{l} 5a^3 - 4a^2b + 3b^2c \\ -\ (3a^2b - 2a^3 - 8b^2c \end{array}\right\} = 7a^3 - 7a^2b + 11b^2c.$$

2-е. $$\left.\begin{array}{l} 4ab - cd - 2b^2 + 3a^2 \\ -\ (5ab - 4cd + 3b^2 + 3a^2 \end{array}\right\} = -ab + 3cd - 5b^2.$$

15. Основываясь на этомъ правилѣ, можно дѣлать нѣкоторыя преобразованія въ многочленахъ.

Напр. $6a^3 - 3ab + 2b^2 - 2bc$, можно перемѣнить

въ $6a^2 - (3ab - 2b^2 + 2bc)$.
Также . . . . $7a^3 - 8a^2b - 4b^2c + 6b^3$,
перемѣнится въ $7a^3 - (8a^2b + 4b^2c - 6b^3)$,
или въ . . . . $7a^3 - 8a^2b - (4b^2c - 6b^3)$.

Подобныя преобразованія, въ которыхъ многочлены разлагаются на двѣ части, раздѣленные знакомъ —, весьма полезны въ Алгебрѣ.

УМНОЖЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

16. Въ Ариѳметикѣ доказано, что произведеніе двухъ или многихъ чиселъ не измѣняется, въ какомъ бы порядкѣ ни помножали оныя.

Разсмотримъ сначала умноженіе двухъ одночленовъ, напр. $7a^3b^2$ умножить на $4a^2b$.

Это произведеніе можно выразить чрезъ $7a^3b^2 \times 4a^2b$. Но по первому правилу и въ слѣдствіе значенія алгебраическихъ знаковъ (2), можно написать это произведеніе такимъ образомъ: $7 \times 4 \times aaaaabbb$. Такъ какъ предстоящіе суть опредѣленныя числа, то ничто не препятствуетъ намъ перемножить ихъ между собою, что даетъ 28 для предстоящаго въ произведеніи. Притомъ $aaaaa$ выразится чрезъ a^5, и bbb чрезъ b^3; и такъ, окончательное выраженіе произведенія будетъ $28a^5b^3$.

Умножить $12a^2b^4c^2$ на $8a^3b^2d^2$; мы получимъ: $12 \times 8 \times aaaaabbbbbbccdd$ или $96a^5b^6c^2d^2$. Поэтому, при умноженіи двухъ одночленныхъ количествъ, должно: 1-е: *перемножить предстоящіе;* 2-е, *включить въ произведеніе всѣ буквы входящія въ одно время въ множимомъ и множителѣ, и надъ каждою поставить показателя, равнаго суммѣ показателей этой буквы въ обоихъ множителяхъ;* 3-е, *если буква содержится только въ одномъ изъ множителей, то должно написать ее въ произведеніи съ прежнимъ ея показателемъ.*

Правило предстоящихъ не затруднительно. Для объясненія правила показателей, замѣтимъ, что вообще число a должно быть столько разъ множителемъ въ произведеніи, сколько разъ оно входитъ въ множимое и множителя. Но показатели означаютъ сколько разъ буквы взяты множителями, (2): слѣд. сумма двухъ показателей одной и той же буквы показываетъ, сколько разъ она должна быть множителемъ въ самомъ произведеніи.

По предъидущему правилу найдемъ, что

$$8a^2bc^2 \times 7abcd^2 = 56a^3b^2c^3d^2;$$
$$21a^3b^2dc \times 8abc^3 = 168a^4b^3c^4d;$$
$$4abc \times 7df = 28abcdf.$$

17. Перейдемъ къ умноженію многочленовъ.

Возьмемъ сначала два многочлена $a+b+c$ и $d+f$, составленные изъ однихъ слагаемыхъ членовъ; произведеніе выразится чрезъ $(a+b+c)\times(d\times f)$. Какъ составить одинъ многочленъ изъ этого произведенія?

Умножить сумму $a+b+c$ на $d+f$, очевидно значитъ взять $a+b+c$ столько разъ, сколько единицъ заключается въ d, и столько разъ, сколько единицъ въ f, и сложить оба произведенія. Но $a+b+c$ взять d разовъ, значитъ взять d разъ каждую изъ частей множимаго, и сложить частныя произведенія, что даетъ $ad+bd+cd$. Умножить $a+b+c$ на f, значитъ взять f разъ каждую часть множимаго и сложить частныя произведенія; поэтому

$$(a+b+c)\,(d+f)=ad+bd+cd+af+bf+cf.$$

Чтобы перемножить два многочлена, составленные изъ слагаемыхъ членовъ, должно умножить каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя, и сложить произведенія.

Предстоящіе и показатели перемножаютъ по правиламъ умноженія одночленовъ, § 16. Напр. $(3a^2+4ab+b^2)\,(2a+5b)$ даетъ $6a^3+8a^2b+2ab^2+15a^2b+20ab^2+5b^3$, и по сокращеніи, $6a^3+23a^2b+22ab^2+5b^3$.

Разсмотримъ теперь самый общій случай. Если множимое составлено изъ слагаемыхъ и вычитаемыхъ членовъ, то оно собственно выражаетъ разность между числомъ единицъ означенныхъ суммою слагаемыхъ и числомъ единицъ означенныхъ суммою вычитаемыхъ членовъ. То же самое можно сказать о множителѣ. Поэтому умноженіе двухъ какихъ либо многочленовъ въ сущности приводится къ умноженію двучленныхъ количествъ вида $a-b$ и $c-d$, въ которыхъ a означаетъ сумму слагаемыхъ членовъ, $-b$ сумму вычитаемыхъ членовъ множимаго; то же самое означаютъ c и $-d$ въ множителѣ; остается разсмотрѣть, какъ произвесть умноженіе, выраженное чрезъ $(a-b)\,(c-d)$.

Умножить $a-b$ на $c-d$, значитъ взять $a-b$ столько разъ, сколько единицъ въ c, *минусъ* столько разъ, сколько единицъ въ d, т. е. должно умножить $a-b$ на c, и изъ произведенія вычесть $a-b$ умноженное на d. Но умножить $a-b$ на c, есть то же, что умножить c на $a-b$ (по правилу § 16), что даетъ $ca-cb$ или $ac-bc$. Произведеніе $a-b$ на d по тому же правилу будетъ $ad-bd$; это произведеніе должно вычесть изъ $ac-bc$, посему (14), должно перемѣнить знаки въ $ad-bd$, и написать это вслѣдъ за $ac-bc$, что даетъ

$$(a-b)\,(c-d)=ac-bc-ad+bd.$$

Разсматривая со вниманіемъ составленіе этого произведенія, увидимъ, что *должно умножить всѣ члены множимаго на каждый членъ множителя*; *притомъ, если количество ум-*

ножаютъ на слагаемый членъ множителя, то въ произведеніи пишутся тѣ же знаки, какіе во множимомъ; а если умножаютъ на вычитаемый членъ множителя, то члены произведенія принимаютъ противные знаки. Умноженіе членовъ между собою производится по правиламъ умноженія одночленовъ, (16).

Помножить два многочлена:

$$\begin{array}{lrrrrrr}
 & 4a^3 & -5a^2b & -8ab^2 & +2b^3, & & \\
\text{и} & 2a^2 & -3ab & -4b^2; & & & \\
\hline
 & 8a^5 & -10a^4b & -16a^3b^2 & +4a^2b^3 & & \\
 & & -12a^4b & +15a^3b^2 & +24a^2b^3 & -6ab^4 & \\
 & & & -16a^3b^2 & +20a^2b^3 & +32ab^4 & -8b^5 \\
\hline
 & 8a^5 & -22a^4b & -17a^3b^2 & +48a^2b^3 & +26ab^4 & -8b^5.
\end{array}$$

Подписавъ многочлены одинъ подъ другимъ, умножаемъ всѣ члены перваго многочлена на членъ $2a^2$ втораго, что даетъ $8a^5-10a^4b-16a^3b^2+4a^2b^3$; въ этомъ произведеніи члены имѣютъ тѣ же знаки, какіе во множимомъ. Переходимъ потомъ къ члену $3ab$, имѣющему знакъ —, умножаемъ на него всѣ члены множимаго, и въ каждомъ частномъ произведеніи при членахъ ставимъ знаки, противные тѣмъ, которые они имѣли во множимомъ, что даетъ $-12a^4b+15a^3b^2+24a^2b^3-6ab^4$; это произведеніе пишемъ подъ первымъ. Умножая на вычитаеый членъ $-4b^2$, получимъ $-16a^3b^2+20a^2b^3+32ab^4-8b^5$. Наконецъ, соединивъ подобные члены, получимъ произведеніе

$$8a^5-22a^4b-17a^3b^2+48a^2b^3+26ab^4-8b^5.$$

Правило знаковъ можно выразить слѣдующимъ образомъ: *когда оба члена множителя и множимаго имѣютъ одинакіе знаки, то произведеніе принимаетъ знакъ* +; *а когда знаки различны, произведеніе принимаетъ знакъ* —.

Говорятъ также алгебраическимъ языкомъ, что

+ умноженный на + или — на —, даетъ +;

+ умноженный на — или — на +, даетъ —.

Въ этомъ собственно нѣтъ смысла; нельзя понять, что значить перемножить между собою знаки ариѳметическихъ дѣйствій; но это выраженіе должно принимать только какъ сокращеніе предъидущаго правила.

Въ Алгебрѣ иногда допускаютъ подобныя выраженія, которыя, хотя сами по себѣ не точны, но удобнѣе напоминаютъ правила, ими выражаемыя.

Примѣры для упражненія:

1-е. $3a^2 - 5bd + cf$
Сокращен. $-5a^2 + 4bd - 8cf$.

произведен. $-15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 + 44bcdf - 8c^2f^2$.

2-е. $4a^3b^2 - 5a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 3a^2c^3 - 7abc^3$
$2ab^2 - 4abc - 2bc^2 + c^3$

$$\text{Сокращенное произведеніе} \left\{ \begin{array}{l} 8a^4b^4 - 10a^3b^4c + 28a^3b^3c^2 - 34a^3b^2c^3 \\ - 4a^2b^3c^3 - 16a^4b^3c + 12a^3bc^4 + 7a^2b^2c^4 \\ + 14a^2bc^5 - 14ab^2c^5 - 3a^2c^6 - 8abc^6. \end{array} \right.$$

18. При умноженіи алгебраическихъ количествъ надобно замѣтить слѣдующее:

1-е. Если данные многочлены будутъ *однородные*, § 11, (замѣтимъ, что большая часть вопросовъ, рѣшаемыхъ помощію Алгебры, въ особенности вопросы геометрическіе, доставляютъ однородныя выраженія), *то произведеніе также будетъ однороднымъ*; это очевидно слѣдуетъ изъ правилъ, постановленныхъ для буквъ и показателей при умноженіи одночленовъ. *Притомъ, степень каждаго члена произведенія, должна равняться суммѣ степеней двухъ какихъ либо членовъ множимаго и множителя.* Напр. въ первой задачѣ всѣ члены множимаго и множителя были второй степени; поэтому всѣ члены произведенія были четвертой степени. Во второй, гдѣ множимое пятой степени, а множитель третьей, члены произведенія были осьмой степени Этимъ можно дѣлать повѣрку показателей въ произведеніи. Напр. если въ одномъ членѣ произведенія, которое должно быть однороднымъ, сумма показателей равна 6, между тѣмъ какъ она равняется 7 въ прочихъ членахъ, то мы очевидно ошиблись при сложеніи показателей, и надобно снова перемножить члены, изъ которыхъ составилось это частное.

2-е. Когда члены въ произведеніи не сокращаются, *то число членовъ его равно произведенію числа членовъ множителя на число членовъ множимаго*, § 17. Напр. въ множимомъ 5 членовъ, а въ множителѣ 4; въ произведеніи должно быть 5×4 или 20 членовъ. Вообще, если множимое состоитъ изъ m членовъ, а множитель изъ n членовъ, то въ произведеніи будетъ $m \times n$ членовъ.

3-е. Нѣкоторые члены произведенія никогда не сокращаются ни съ какимъ другимъ членомъ, именно: 1-е. *Членъ, который происходитъ отъ умноженія такихъ двухъ членовъ множимаго и множителя, въ которыхъ одна и та же буква имѣетъ наибольшаго показателя.* 2-е. *Членъ, который происходитъ отъ умноженія двухъ членовъ съ наименьшими показателями одной и той же буквы.* Таковы во второй задачѣ: членъ $8a^4b^4$, происходящій отъ умноженія $4a^3b^2$ на ab^2; членъ $7abc^6$, происходящій отъ $-7abc^3$ на $+c^3$; членъ $-3a^2c^6$, отъ $-3a^2c^3$ на c^3. Въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ частныхъ произведеніяхъ показатель буквы будетъ или больше или меньше всѣхъ другихъ показателей той же буквы въ прочихъ частныхъ произведеніяхъ, и по этому они не могутъ сходствовать ни съ однимъ изъ прочихъ частныхъ произведеній. Это замѣчаніе будетъ весьма полезно при дѣленіи.

19. Покажемъ теперь нѣсколько случаевъ, которые часто встрѣчаются при умноженіи алгебраическихъ количествъ.

1-е. Составить квадратъ или вторую степень двучлена $a+b$. По извѣстнымъ правиламъ, имѣемъ

$$(a+b)^2 \text{ или } (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

т. е. *квадратъ суммы двухъ количествъ состоитъ изъ квадрата перваго количества, изъ квадрата втораго количества, и удвоеннаго произведенія перваго на второе.*

Возвысить въ квадратъ $5a^3+8a^2b$; будетъ

$$(5a^3+8a^2b)^2 = 25a^6 + 80a^5b + 64a^4b^2.$$

2-е. Составить квадратъ разности $a-b$. Имѣемъ $(a-b)^2$ или $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$; т. е. *квадратъ разности двухъ количествъ состоитъ: изъ квадрата перваго количества съ квадратомъ втораго, безъ удвоеннаго произведенія перваго на второе.*

И такъ $(7a^2b^2-12ab^3)^2 = 49a^4b^4 - 168a^3b^5 + 144a^2b^6$.

3-е. Умножить $a+b$ на $a-b$.

Имѣемъ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Слѣд. *сумма двухъ количествъ, умноженная на разность ихъ, даетъ разность ихъ квадратовъ.* Это уже доказано въ § 5.

Поэтому $(8a^3+7ab^2)(8a^3-7ab^2) = 64a^6 - 49a^2b^4$.

Эти выводы иногда весьма полезны для сокращенія вычисленій. Напримѣръ, умножить $5a^2 - 4ab + 3b^2$ на $5a^2 - 4ab - 3b^2$; первое количество есть сумма двухъ чиселъ $5a^2 - 4ab$ и $3b^2$, а второе разность ихъ; поэтому тотчасъ находимъ, что

$$(5a^2 - 4ab)^2 - (3b^2)^2 = 25a^4 - 40a^3b + 16a^2b^2 - 9b^4.$$

20. Разсматривая выводы полученные въ § 19, можно также замѣтить, что образованіе ихъ, или способъ составленія оныхъ посредствомъ множимаго и множителя, вовсе не зависитъ отъ частной величины буквъ a и b въ обоихъ множителяхъ.

Способъ составленія алгебраическаго произведенія изъ двухъ множителей, называется **ЗАКОНОМЪ** *сего произведенія. Законъ этотъ не перемѣняется, каковы бы ни были частныя величины буквъ, заключающихся въ сихъ множителяхъ.*

21. Иногда можно разложить данный многочленъ на нѣсколько множителей, и это часто бываетъ весьма полезно. Напр. возьмемъ многочленъ $25a^4 - 30a^3b + 15a^2b^2$; множители 5 и a^2 заключаются въ каждомъ членѣ; поэтому можно написать многочленъ въ такомъ видѣ:

$$5a^2(5a^2 - 6ab + 3b^2).$$

Также, $64a^4b^6 - 25a^2b^8$ перемѣнится въ $(8a^2b^8 + 5ab^4)(8a^2b^3 - 5ab^4)$.

Въ самомъ дѣлѣ, $64a^4b^6$ и $25a^2b^8$ суть квадраты количествъ $8a^2b^3$ и $5ab^4$; посему данное выраженіе и разлагается на двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ есть сумма, а другой разность корней данныхъ квадратовъ.

ДѢЛЕНІЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

22. Цѣль дѣленія алгебраическаго, какъ и ариѳметическаго, состоитъ въ томъ, чтобы *по данному произведенію и одному изъ множителей его, найти другой множитель.*

Разсмотримъ сначала два одночлена; напр. $72a^5$ раздѣлить на $8a^3$; это дѣйствіе означается чрезъ: $\frac{72a^5}{8a^3}$. Надобно отыскать третье одночленное количество, которое будучи умножено на $8a^3$, составило бы $72a^5$, т. е. чтобы предстоящее искомаго количества, умноженное на 8, дало въ произведеніи 72, а показатель буквы a искомаго количества, приложенный къ 3, показателю a въ дѣлителѣ, равнялся 5, показателю въ дѣлимомъ. Изъ сего видно, что надобно, раздѣлить предстоящее 72 на 8, и вычесть показателя 3 изъ 5; тогда $\frac{72a^5}{8a^3}=9a^2$; въ самомъ дѣлѣ, $8a^3 \times 9a^2 = 72a^5$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что $\frac{35a^3b^2c}{7ab}=5a^{3-1}b^{2-1}c=5a^2bc$, въ самомъ дѣлѣ, $7ab \times 5a^2bc = 35a^3b^2c$. И такъ, при дѣленіи одночленовъ: 1-е, *предстоящіе дѣлятъ одни на другіе*; 2-е, *въ частномъ числѣ пишутъ буквы, общія дѣлителю и дѣлимому, и надъ буквами ставятъ разность показателей;* наконецъ, 3-е, *въ частномъ пишутъ всѣ буквы входящія только въ дѣлимое, каждую съ ея собственнымъ показателемъ.*

По этому правилу найдемъ, что

$$\frac{48a^5b^3c^2d}{12ab^2c}=4a^2bcd;\quad \frac{150a^5b^8cd^3}{30a^3b^5d^2}=5a^2b^3cd.$$

Въ случаѣ, когда одна и та же буква имѣетъ одинакаго показателя въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, смотри § 24.

23. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что дѣленіе одночленовъ невозможно: 1-е, когда предстоящіе не дѣлятся одинъ на другаго; 2-е, когда нѣкоторые показатели въ дѣлителѣ больше показателей тѣхъ же буквъ въ дѣлимомъ; 3-е когда въ дѣлителѣ находятся такія буквы, которыхъ нѣтъ въ дѣлимомъ. Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ частное число остается въ видѣ *дробнаго одночлена*, т. е. одночленнаго выраженія, въ которое необходимо входитъ алгебраическій знакъ дѣленія; но эти количества иногда можно сократить.

Напр. раздѣлить $12a^4b^2cd$ на $8a^2bc^2$.

Здѣсь 12 не дѣлится на-цѣло на 8, и сверхъ того показатель буквы c меньше въ дѣлимомъ, чѣмъ въ дѣлителѣ; слѣдов. нельзя получить цѣлаго частнаго и должно представить его въ видѣ $\frac{12a^4b^2cd}{8a^2bc^2}$; но можно замѣтить, что въ обоихъ членахъ дроби есть общіе множители 4, a^2, b, c; исключая эти множители, получимъ $\frac{3a^2bd}{2c}$.

Вообще, для сокращенія дробнаго одночлена, должно: 1-е, *исключить наибольшаго множителя, общаго обоимъ предстоящимъ*; 2-е, *изъ большаго показателя вычесть меньшій показатель той же буквы, и букву эту съ показателемъ найденной разности написать въ той части дроби, гдѣ* *она имѣла большаго показателя;* 3-е, *буквы, которыя находятся только въ одной части, писать въ той же части съ ихъ показателями.*

По этому правилу найдемъ, что

$$\frac{48a^3b^2cd^2}{36a^2b^3c^2de}=\frac{4ad^2}{3bce};\ \frac{37ab^3c^5}{6a^3bc^4d}=\frac{37b^2c}{6a^2d};\ \frac{7a^2b}{14a^3b^2},=\frac{1}{2ab}.$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ всѣ множители дѣлимаго находятся также въ дѣлителѣ, и числитель обращается въ *единицу*, потому что обѣ части дроби дѣлятся на числителя.

24. Иногда нѣкоторыя буквы имѣютъ одинакихъ показателей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ. Напримѣръ, раздѣлимъ $24a^3b^2$ на $8a^2b^2$; буква b, имѣющая одинакаго показателя, не будетъ входить въ частное число, и получимъ $\frac{24a^3b^2}{8a^2b^2}=3a$. Но выводъ $3a$ можно выразить такъ, чтобы сохранились слѣды буквы b, уничтоженной чрезъ сокращеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, если *условимся* примѣнить къ выраженію $\frac{b^2}{b^2}$ правило показателей, § 22, то получимъ $\frac{b^2}{b^2}=b^0$. Этотъ новый знакъ b^0 показываетъ, § 2, что буква b входитъ 0 разъ множителемъ въ частное число, т. е. вовсе не находится въ ономъ; но въ то же время показываетъ, что она находилась въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, и уничтожилась при сокращеніи. Этотъ знакъ представляетъ ту выгоду, что сохраняетъ слѣды буквы, которая входила въ рѣшаемый вопросъ, вовсе не измѣняя вывода, потому что b^0 происходитъ отъ $\frac{b^2}{b^2}$ равнаго 1, слѣд. $3ab^0=3a\times1=3a$. Также $\frac{15a^2b^3c^2}{3a^2bc^2}=5a^0b^2c^0=5b^2$

Такъ какъ весьма важно имѣть точное понятіе о происхожденіи и значеніи знаковъ, употребляемыхъ въ Алгебрѣ, то мы докажемъ, что *вообще всякое количество* a, *имѣющее показателемъ* 0, *равняется* 1, то есть, $a^0=1$.

Мы уже знаемъ, что это выраженіе получится тогда, когда a имѣетъ одинакихъ показателей въ дѣлимомъ и дѣлителѣ; и такъ вообще $a^0=\frac{a^m}{a^m}$ (чрезъ m мы вообще означаемъ какое либо цѣлое число). Но частное отъ раздѣленія какого нибудь количества само на себя есть 1, посему $\frac{a^m}{a^m}=1$, и слѣдовательно $a^0=1$.

Повторяемъ, что символъ a^0 употребляется только условно, чтобы сохранить слѣды буквы, которая входила въ составъ вопроса и уничтожена при дѣленіи; это часто бываетъ весьма нужно.

Дѣленіе двухъ многочленовъ.

25. Раздѣлить $51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4+4ab^3$, на $4ab-5a^2+3b^2$.

Чтобы удобнѣе производить вычисленія, можно расположить многочлены такимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l}
51a^2b^2+10a^4-48a^3b-15b^4+4ab^3 & 4ab-5a^2+3b^2 \\ \cline{2-2}
+8a^3b-10a^4+6a^2b^2 & -2a^2+8ab-5b^2. \\ \cline{1-1}
57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3 & \\
-32a^2b^2+40a^3b-24ab^3 & \\ \cline{1-1}
25a^2b^2-15b^4-20ab^3 & \\
+20ab^3-25a^2b^2+15b^4 & \\ \cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}$$

По § 22 надобно *найти третій многочленъ, который. будучи умноженъ на второй, произвелъ бы первый.*

Изъ этого опредѣленія, и изъ правила умноженія многочленовъ, слѣдуетъ, что дѣлимое состоитъ изъ частныхъ произведеній отъ умноженія каждаго члена дѣлителя, на каждый членъ искомаго частнаго, которыя потомъ сложены между собою и сокращены. И такъ, если бы мы нашли въ дѣлимомъ такой членъ, который *безъ сокращенія* прямо происходитъ отъ умноженія одного изъ членовъ дѣлителя на какой либо членъ частнаго, тогда, раздѣливъ эти члены дѣлимаго и дѣлителя одинъ на другой, мы непремѣнно получили бы членъ искомаго частнаго.

Но по третьему замѣчанію § 18, членъ дѣлимаго $10a^4$, въ которомъ буква a имѣетъ наибольшаго показателя, прямо происходитъ отъ умноженія членовъ дѣлителя и частнаго, имѣющихъ наибольшіе показатели той же буквы. Слѣд. раздѣливъ членъ $10a^4$ на членъ $-5a^2$ дѣлителя, получимъ членъ искомаго частнаго. Остается только опредѣлить, какой знакъ должно поставить при этомъ частномъ. Для этого выведемъ *правило знаковъ при дѣленіи.*

При умноженіи, произведеніе двухъ членовъ съ одинакими знаками принимаетъ знакъ +, а произведеніе двухъ членовъ съ разными знаками принимаетъ знакъ —; поэтому: 1-е, когда члены дѣлителя и дѣлимаго имѣютъ знакъ +, тогда членъ частнаго долженъ имѣть +; 2-е, если членъ дѣлимаго съ +, а членъ дѣлителя съ —, то членъ частнаго принимаетъ знакъ —; ибо одинъ только знакъ —, умноженный на знакъ — дѣлителя, можетъ произвести знакъ + дѣлимаго; 3-е, когда членъ дѣлимаго съ —, а дѣлитель съ +, тогда частное принимаетъ —; 4-е, наконецъ, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ —, тогда частное принимаетъ +. Короче можно сказать:

Когда члены дѣлимаго и дѣлителя имѣютъ одинакіе знаки, тогда частное принимаетъ знакъ +; когда же знаки различны, то частное принимаетъ знакъ —. Говорятъ также для краткости:

+ раздѣленное на +, и — дѣленное на —, даютъ +;
— дѣленное на +, и + дѣленное на —, даютъ —.

Возвратимся къ задачѣ.

$10a^4$ и $-5a^2$ имѣютъ противные знаки, поэтому частное будетъ съ —; $10a^4$ раздѣленное на $5a^2$ равно $2a^2$, § 22, поэтому первый членъ искомаго частнаго будетъ $-2a^2$. Написавъ его подъ дѣлителемъ и умноживъ на $-2a^2$ всѣ члены дѣлителя, произведеніе $+8a^3b+10a^4-6a^2b^2$ вычтемъ изъ дѣлимаго; для сего пишемъ оное подъ дѣлимымъ, перемѣняя знаки всѣхъ членовъ, и сократимъ: въ остаткѣ отъ перваго частнаго дѣйствія получимъ

$$57a^2b^2-40a^3b-15b^4+4ab^3.$$

Этотъ остатокъ состоитъ изъ частныхъ произведеній отъ умноженія каждаго члена дѣлителя на каждый изъ не найденныхъ еще членовъ частнаго; слѣд. можно разсматривать его какъ новое дѣлимое, и поступать такъ же точно, какъ съ даннымъ дѣлимымъ. Посему возьмемъ въ этомъ остаткѣ членъ $-40a^3b$, въ которомъ a имѣетъ наибольшаго показателя, и раздѣлимъ на тотъ же членъ $5a^2$ дѣлителя; $-40a^3b$ раздѣленное на $-5a^2$, даетъ для частнаго новый членъ $+8ab$, который приписываютъ къ общему частному, возлѣ перваго члена $-2a^2$. Умноживъ всѣ члены дѣлителя на $+8ab$, произведеніе съ перемѣною знаковъ подписываемъ подъ вторымъ дѣлимымъ, и по сокращеніи получимъ остатокъ

$$25a^2b^2 - 15b^4 - 20ab^3;$$

раздѣляя снова $25a^2b^2$ на $-5a^2$, получимъ $-5b^2$, третій членъ частнаго. Умноживъ дѣлителя на $-5b^2$ и вычтя произведеніе изъ третьяго дѣлимаго, въ остаткѣ получимъ 0. И такъ, $-2a^2 + 8ab - 5b^2$ или $8ab - 2a^2 - 5b^2$ есть искомое частное; можно для повѣрки умножить оное на дѣлителя: произведеніе должно равняться дѣлимому. Въ этомъ примѣрѣ мы должны были при всякомъ частномъ дѣйствіи отыскивать члены дѣлимаго и дѣлителя, содержащіе наибольшаго показателя одной и той же буквы; чтобы облегчить себя, при началѣ дѣйствія пишутъ *всѣ члены дѣлимаго и дѣлителя въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели одной и той же буквы уменьшались отъ лѣвой руки къ правой.* Это называется расположить дѣлимое и дѣлителя по степенямъ одной и той же буквы. Тогда, чтобы найти членъ частнаго числа, достаточно раздѣлить первый членъ дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя; это имѣетъ мѣсто и при всѣхъ слѣдующихъ дѣйствіяхъ, ибо члены частнаго и произведенія отъ умноженія дѣлителя на сіи частныя, будутъ всегда *расположены по степенямъ той же буквы.*

Расположимъ данные многочлены по степенямъ буквы *a*, и потомъ раздѣлимъ первый на второй.

$$
\begin{array}{r|l}
10a^4 - 48a^3b + 51a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 & -5a^2 + 4ab + 3b^2 \\ \cline{2-2}
-10a^4 + 8a^3b + 6a^2b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & -2a^2 + 8ab - 5b^2 \\ \cline{1-1}
-40a^3b + 57a^2b^2 + 4ab^3 - 15b^4 & \\
+40a^3b - 32a^2b^2 - 24ab^3 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
25a^2b^2 - 20ab^3 - 15b^4 & \\
-25a^2b^2 + 20ab^3 + 15b^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad\quad &
\end{array}
$$

26. Чтобы раздѣлить одинъ многочленъ на другой, должно сначала *расположить многочлены по степенямъ одной буквы, и раздѣлить первый членъ дѣлимаго на* 1-й *лченъ дѣлителя; тогда получится первый членъ частнаго, на который должно умножить дѣлителя, и произведеніе вычесть изъ дѣлимаго; потомъ раздѣлить* 1-й *членъ ос-*

татка на 1-й членъ дѣлителя, чрезъ что получится второй членъ частнаго; умножить на этотъ членъ дѣлителя и вычесть произведенiе изъ остатка отъ перваго дѣйствiя. Такимъ образомъ поступаютъ до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ будетъ 0; **тогда дѣленiе произведено на-цѣло.**

Если дѣлимое и дѣлитель расположены, и первые члены ихъ не дѣлятся на-цѣло одинъ на другаго, то дѣленiе невозможно, т. е. нѣтъ многочлена, который, бывъ умноженъ на дѣлителя, въ произведенiи далъ бы дѣлимое. Вообще, *дѣленiе невозможно, когда 1-й членъ каждаго частнаго дѣлимаго не дѣлится на первый членъ дѣлителя.*

27. Между ариѳметическимъ и алгебраическимъ дѣленiемъ есть сходство въ способѣ расположенiя и вычисленiя количествъ; но они существенно различаются тѣмъ, что въ ариѳметическомъ дѣленiи цыфры частнаго получаются ощупью, между тѣмъ какъ въ алгебраическомъ дѣленiи частное отъ раздѣленiя 1-го члена частнаго дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя, всегда есть членъ искомаго частнаго. Если же эти два члена не дѣлятся одинъ на другой, то мы тотчасъ заключаемъ, что все дѣленiе невозможно; въ этомъ отношенiи алгебраическое дѣленiе проще ариѳметическаго.

Сверхъ того, ничто не препятствуетъ начать дѣйствiе съ правой руки, а не съ лѣвой; это значило бы производить дѣйствiе надъ членами содержащими наименьшихъ показателей буквы, по которой расположены многочлены. Въ Ариѳметикѣ частное отыщется не иначе, какъ начиная съ лѣвой руки.

Наконецъ, частныя дѣйствiя такъ мало ограничиваются симъ способомъ, что, вычтя изъ дѣлимаго произведенiе дѣлителя на 1-й членъ частнаго, мы можемъ расположить остатокъ и дѣлитель по степенямъ другой буквы, и частное отъ раздѣленiя 1-го члена новаго дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя, также будетъ однимъ изъ членовъ искомаго частнаго. Одной буквы придерживаются только потому, что нѣтъ причины перемѣнять ее; притомъ когда многочлены расположены по этой буквѣ, тогда первые члены дѣлимаго и дѣлителя съ лѣвой руки прямо даютъ членъ частнаго; если же перемѣнятъ букву, то надобно снова отыскивать члены съ наибольшими показателями новой буквы.

28. *Второй примѣръ*. Раздѣлить

$$21x^3y^2 + 25x^2y^3 + 68xy^4 - 40y^5 - 56x^5 - 18x^4y,$$

на $5y^2 - 8x^2 - 6xy$.

Вотъ ходъ вычисленій; располагая по степенямъ y.

$$\begin{array}{ll|l}
 & -40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 & 5y^2-6xy-8x^2 \\ \cline{3-3}
 & +40y^5-48xy^4-64x^2y^3 & -8y^3+4xy^2-3x^2y+7x^3 \\ \cline{2-2}
\text{1-й остатокъ} & 20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 & \\
 & -20xy^4+24x^2y^3+32x^3y^2 & \\ \cline{2-2}
\text{2-й остатокъ . . . .} & -15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5 & \\
 & +15x^2y^3-18x^3y^2-24x^4y & \\ \cline{2-2}
\text{3 й остатокъ . . . .} & 35x^3y^2-42x^4y-56x^5 & \\
 & -35x^3y^2+42x^4y+56x^5 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Весьма полезно пріучиться вычислять легко и скоро; поэтому мы покажемъ всѣ сокращенія, которыя можно ввести при дѣленіи. Они заключаются, какъ и въ Ариѳметикѣ, въ томъ, чтобы прямо вычитать изъ дѣлимаго частныя произведенія, по мѣрѣ составленія оныхъ.

$$\begin{array}{ll|l}
 & -40y^5+68xy^4+25x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 & 5y^2-6xy\quad 8x^2 \\ \cline{2-3}
\text{1-й остатокъ} & 20xy^4-39x^2y^3+21x^3y^2-18x^4y-56x^5 & -8y^3+4xy^2-3x^2y+7x^3 \\ \cline{2-2}
\text{2-й остатокъ. . .} & -15x^2y^3+53x^3y^2-18x^4y-56x^5 & \\ \cline{2-2}
\text{3-й остатокъ. . . . .} & 35x^3y^2-42x^4y-56x^5 & \\ \cline{2-2}
 & 0. &
\end{array}$$

Раздѣливъ $-40y^5$ на $5y^2$, частное будетъ $-8y^3$. Умножая $5y^2$ на $-8y^3$, имѣемъ $-40y^5$, а перемѣнивъ знакъ, $+40y^5$, чѣмъ уничтожается первый членъ дѣлимаго, и его можно зачеркнуть.

Потомъ, $-6xy \times -8y^3$ даетъ $+$, а при вычитаніи $-48xy^4$; вычтя изъ $68xy^4$, получимъ въ остаткѣ $20xy^4$. Наконецъ, $-8x^2 \times 8y^3$ будетъ $+$, а при вычитаніи $-64x^2y^3$; вычитая изъ $+25x^2y^3$, имѣемъ $-39x^2y^3$. И такъ послѣ перваго дѣйствія въ остаткѣ будетъ $20xy^4-39x^2y^3$, вмѣстѣ съ прочими членами, не входившими въ дѣйствіе.

Такимъ же образомъ поступаютъ со вторымъ дѣлимымъ, и такъ далѣе.

Третій примѣръ. $95a-73a^2+56a^4-25-59a^3$ раздѣлить на $-3a^2+5-11a+7a^3$.

$$\begin{array}{ll|l}
 & 56a^4-59a^3-73a^2+95a-25 & 7a^3-3a^2-11a+5 \\ \cline{2-3}
\text{1-й остатокъ...} & -35a^3+15a^2+55a-25 & 8a-5 \\ \cline{2-3}
\text{2-й остатокъ. . . .} & 0. &
\end{array}$$

29. Случается, что въ нѣсколькихъ членахъ содержатся одинакія степени той буквы, по которой намѣревались расположить многочлены. Какъ расположить въ такомъ случаѣ данные многочлены и какъ произвесть дѣленіе? Напримѣръ, даны многочлены

$11a^2b - 19abc + 10a^3 - 15a^2c + 3ab^2 - 15bc^2 + 5b^2c$,

и. . . . . $5a^2 + 3ab - 5bc$.

Замѣтимъ, что члены $11a^2b - 15a^2c$ можно представить такъ:

$(11b - 15c)a^2$, или такимъ образомъ $\left.\begin{array}{r}11b\\ -15c\end{array}\right| a^2$,

написавъ только одинъ разъ a^2, а слѣва, въ одномъ столбцѣ, всѣ количества на которыя она умножена. Сей многочленный множитель также называется предстоящимъ отъ a^2.

[Второй способъ соединенія членовъ одинакой степени выгоднѣе перваго; 1-е, въ случаѣ большаго числа членовъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, трудно вмѣстить ихъ въ одной строкѣ; 2-е, предстоящіе каждой степени нужно сверхъ того расположить по степенямъ какой ни есть другой буквы; поэтому, если первый членъ будетъ вычитаемый, то при употребленіи перваго способа надобно будетъ перемѣнять знаки, а при этомъ легко сдѣлать ошибки. Напр. выраженіе $-15b^2a^2 + 7bca^2 - 8c^2a^2$, напишется слѣдующимъ образомъ: $-(15b^2 - 7bc + 8c^2)\ a^2$. . . . § 15,

по второму же способу пишемъ такъ: $\left.\begin{array}{r}-15b^2\\ +7bc\\ -8c^2\end{array}\right| a^2$;

въ послѣднемъ случаѣ всѣ члены остаются съ прежними знаками.]

Равномѣрно. $-19abc + 3ab^2$ напишется: $\left.\begin{array}{r}+3b^2\\ -19bc\end{array}\right| a$.

Дѣйствія производятся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rr|r|ll}
 & 10a^3+11b & a^2+3b^2 & a-5b^2c+15bc^2 & \left\{\begin{array}{l}5a^2+3ba-5bc\\ \hline 2a+b-3c\end{array}\right. \\
 & +15c & -19bc & & \\ \hline
\text{1-й остатокъ.....} & 5b & a^2+3b^2 & a-5b^4c+15bc^2 & \\
 & -15c & -9bc & & \\ \hline
\text{2-й остатокъ} & 0 & & &
\end{array}$$

Дѣлимъ сначала $10a^3$ на $5a^2$; частное будетъ $2a$; вычтя произведеніе дѣлителя на $2a$, получимъ первый остатокъ. Раздѣляя на $5a^2$ часть умноженную на a^2, частное будетъ $b - 3c$. Умножая послѣдовательно каждый членъ дѣлителя на $b - 3c$, и вычитая каждое произведеніе, получимъ въ остаткѣ 0; посему $2a + b - 3c$ есть требуемое частное.

Чтобы представить самымъ общимъ образомъ этотъ случай, одинъ изъ сложнѣйшихъ въ дѣленіи, означимъ дѣлимое чрезъ $Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$, а дѣлителя чрезъ $A'a^2 + B'a + C'$.

[Когда въ задачѣ много количествъ, то нѣкоторыя количества означаютъ одинакими буквами, съ однимъ или болѣе значками; напримѣръ, пишутъ a', a'', a''', говоря: а *первое*, а *второе*, а *третье*, и т. д. По большой части означаютъ одною буквою съ различными знаками тѣ количества, которыя имѣютъ между собою какое либо сходство, на которое надобно обратить вниманіе при рѣшеніи.]

Въ этихъ многочленахъ каждое предстоящее A, B, C, D, E, A′, B′, C′, означаетъ соединеніе многихъ членовъ. Такъ напр. Aa^4 представляетъ всѣ члены дѣлимаго, содержащіе a^4, и т. д. Наибольшій показатель a въ дѣлимомъ есть 4, а въ дѣлителѣ 2, посему онъ равняется 2 въ частномъ, и частное будетъ такого вида: $A''a^2 + B''a + C''$. Чтобы въ этомъ частномъ опредѣлить часть частнаго, съ наибольшимъ показателемъ, замѣтимъ, что произведеніе двухъ частей $A'a^2$ и $A''a^2$ никакъ не можетъ соединиться съ другими произведеніями дѣлителя на частное и слѣд. равняется части Aa^4 дѣлимаго, содержащей наибольшую степень буквы a. Обратно, если раздѣлимъ Aa^4 на $A'a^2$, то должны получить часть $A''a^2$ частнаго; и такъ, остается раздѣлить A на A′, потому что a^4 раздѣленное на a^2, даетъ a^2. Если предстоящіе A и A′ также суть многочлены, составленные изъ одной или нѣсколькихъ буквъ, то поступаютъ съ ними по тѣмъ же правиламъ, и для того сначала располагаютъ эти многочлены по степенямъ одной буквы. Вотъ почему мы сказали, что члены, поставленные въ одномъ столбцѣ, надобно располагать по степенямъ какой либо другой буквы; а если нѣсколько членовъ въ столбцѣ, заключаютъ одинакую степень этой второй буквы, то надобно также вынести ее, и расположить остальные предстоящіе по степенямъ третьей буквы.

Отыскавъ часть $A''a^2$, умножаютъ всѣ части дѣлителя на $A''a^2$, и вычитая частныя произведенія, по мѣрѣ составленія ихъ, получаютъ первый остатокъ, съ которымъ поступаютъ такимъ же образомъ.

Вотъ еще два примѣра сего случая. (Здѣсь присоединены частныя дѣленія, необходимыя для главнаго дѣйствія).

Дѣлимое *Дѣлитель*

I.

$$\begin{array}{r|l|l|l}
12b^2 & a^3+23b^3 & a^2+10b^4 & a \\
-29bc & -31b^2c & -6b^2c^2 & \\
+15c^2 & -9bc^2 & & \\
 & +15c^3 & & \\ \hline
\text{1-й остатокъ} & +15b^3 & a^2+10b^4 & a \\
 & -25b^2c & -6b^2c^2 & \\
 & -9bc^2 & & \\
 & +15c^3 & & \\ \hline
\text{2-й остатокъ} \ldots\ldots & 0 & &
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{r|l} 3b & a+2b^2 \\ -5c & \end{array} \\ \hline
\text{Частное.} \\
\begin{array}{r|l|l} 4b & a^2+5b^2 & a \\ -3c & -3c^2 & \end{array}
\end{array}\right.$$

1-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l}
12b^2-29bc+15c^2 & 3b-5c \\ \hline
-9bc+15c^2 & 4b-3c \\ \hline
0 &
\end{array}$$

2-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l}
15^3-25b^2c-9bc^2+15c^3 & 3b-5c \\ \hline
-9bc^2+15c^3 & 5b^2-3c^2 \\ \hline
0 &
\end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
6b & a^4-7b^2 & a^3-3b^3 & a^2+4b^3 & a+b^2-2b \\
-10 & +23b & +22b^2 & -9b^2 & \\
 & -20 & -31b & +5b & \\
 & & +5 & -5 & \\ \hline
\end{array}
\quad
\left\{\begin{array}{l}
\begin{array}{r|l} 3b & a+b^2-2b \\ -5 & \end{array} \\ \hline
\begin{array}{r|l|l} 2a^3-3b & a^2+4b & a+1 \\ +4 & -1 & \end{array}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{1-й ост.}\ -9b^2 & a^3 \\
+27b & \\
-20 & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{2-й остатокъ}\ +12b^2 & a^2 \\
-23b & \\
+5 & \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\text{3-й остатокъ} \ldots\ldots\ +3b & a+b^2-2b \\
-5 & \\ \hline
\end{array}$$

4-й остатокъ. . . . 0

1-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l} 6b-10 & 3b-2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

2-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l} -9b^2+27b-20 & 3b-5 \\ \hline +12b-20 & -3b-4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

3-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l} 12b^2-23b+5 & 3b-5 \\ \hline -3b+5 & 4b-1 \\ \hline 0 & \end{array}$$

4-е *частное дѣленіе.*

$$\begin{array}{r|l} 3b-5 & 3b-5 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

30. Иногда въ дѣлимомъ заключается одна или нѣсколько буквъ, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ. Въ такомъ случаѣ располагаютъ оба многочлена по степенямъ одной изъ общихъ буквъ, и потомъ дѣлятъ обыкновеннымъ порядкомъ; но можно получить частное гораздо проще.

Положимъ, напримѣръ, что въ дѣлимомъ заключаются различныя степени буквы a, которой нѣтъ въ дѣлителѣ, (тогда говорятъ, что дѣлитель *независимъ* отъ буквы a). Располагая дѣлимое по степенямъ a, можно написать его въ видѣ:

$$Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E,$$

полагая, что 4 есть наибольшій показатель буквы a въ многочленѣ, и что A, B, C, D, E, одночленныя или многочленныя количества, не заключающія a. Пусть будетъ M дѣлитель, независимый отъ a.

Дѣлитель, умноженный на частное, долженъ составить дѣлимое; но какъ дѣлитель M не заключаетъ въ себѣ буквы a, то частное очевидно будетъ заключать въ себѣ тѣ же степени буквы a, какъ и дѣлимое. И такъ, это частное необходимо будетъ такого вида:

$$A'a^4+B'a^3+C'a^2+D'a+E'.$$

Положимъ, что это частное отыскано; умножая дѣлителя на каждую изъ частей $A'a^4$, $B'a^3$, $C'a^2$,..., получимъ произведенія $A'Ma^4$, $B'Ma^3$, $C'Ma^2$. . . ; они не могутъ сократиться между собою, потому что въ каждомъ главная буква имѣетъ разные показатели: поэтому они должны быть равны соотвѣтственнымъ членамъ Aa^4, Ba^3, Ca^3,..., дѣлимаго, именно

$$A'M = A,\ B'M = B,\ C'M = C, \ldots.$$

откуда $A' = \frac{A}{M}$, $B' = \frac{B}{M'}$, $C' = \frac{C}{M'}, \ldots.$

Изъ этого можемъ вывесть общее правило:

Чтобы многочленъ, расположенный по степенямъ одной буквы, дѣлился на-цѣло многочленомъ независимымъ *отъ той же буквы, всѣ предстоящіе различныхъ степеней этой буквы въ дѣлимомъ, должны дѣлиться на-цѣло дѣлителемъ. Предстоящіе разныхъ степеней сей буквы въ частномъ, суть послѣдовательныя частныя, получаемыя отъ раздѣленія предстоящихъ дѣлимаго на предстоящихъ дѣлителя*. Примѣръ: раздѣлить многочленъ

$3a^2b^3 - 3abc^3 - 2b^3c^2 + b^5 - 3a^2bc^2 + 3ab^3c - a^2c^3 + bc^4 + a^2b^2c$, на $b^2 - c^2$.

Дѣлимое, расположенное по степенямъ a, можно написать въ видѣ:

$$(3b^3 + b^2c - 3bc^2 - c^3)\,a^2 + (3b^3c - 3bc^3)\,a + b^5 - 2b^3c^2 + bc^4;$$

сдѣлавъ три частныя дѣленія

$$\frac{3b' + b^2c - 3bc^2 - c^3}{b^2 - c^2};\quad \frac{3b^3c - 3bc^3}{b^2 - c^2},\quad \frac{b^5c - 2b^3c^2 + bc^4}{b^2 - c^2}.$$

найдемъ частныя: $3b + c$, $3bc$, $b^3 - bc^2$; и такъ общее частное будетъ $(3b + c)a^2 + 3bca + b^3 - bc^2$.

Два послѣднія частныя, $3bc$ и $b^3 - bc^2$, можно найти гораздо скорѣе, замѣтивъ: 1-е, что $3b^3c - 3bc^3$ равняется (21) количеству $3bc(b^2 - c^2)$;
2-е, что $b^5 - 2b^3c^2 + bc^4$ равно $b(b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$ или.. $b(b^2 - c^2)^2$, (19).

Хотя есть общія правила для произведенія дѣйствій, но выводы весьма часто можно получать и проще, и скорѣе. Никогда не должно упускать случая сокращать дѣйствія, когда возможно: этимъ мы болѣе соображаемся съ духомъ алгебраическаго языка.

31. Между примѣрами алгебраическаго дѣленія, одинъ весьма замѣчателенъ по приложеніямъ своимъ, и такъ часто встрѣчается при рѣшеніи вопросовъ, что сдѣлался наконецъ *теоремою*.

Въ §§ 5 и 19 показано, что $(a + b)(a - b)$ даетъ произведеніе $a^2 - b^2$; поэтому, если $a^2 - b^2$ раздѣлимъ на $a - b$, въ частномъ будетъ $a + b$.

Если раздѣлимъ $a^3 - b^3$ на $a - b$, то получимъ въ частномъ $a^2 + ab + b^2$.

Количество $a^4 - b^4$, раздѣленное на $a - b$, даетъ въ частномъ $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$.

Тѣ же выводы можно получить обыкновеннымъ способомъ дѣленія. По этимъ выводамъ мы могли бы даже сказать, что дѣленіе всегда будетъ производится на-цѣло, какъ бы великъ ни былъ показатель буквы a и b. Чтобы совершенно увѣриться въ этомъ, означимъ показателя буквою m, и раздѣлимъ $a^m - b^m$ на $a - b$.

1-й остатокъ. . . $\begin{array}{c|l} a^m - b^m & a - b \\ \hline a^{m-1}b - b^m & a^{m-1} \end{array}$

или. . . . . . . $b(a^{m-1} - b^{m-1})$.

Раздѣляя a^m на a, по правилу показателей, § 22, получимъ въ частномъ a^{m-1}. Вычитая изъ дѣлимаго произведеніе $(a - b \times a^{m-1}$, первый остатокъ будетъ $a^{m-1}b - b^m$, который можемъ изобразить такъ: $b(a^{m-1} - b^{m-1})$. Теперь, если $a - b$ дѣлитъ на-цѣло $a^{m-1} - b^{m-1}$, то оно также раздѣлитъ на-цѣло $a^m - b^m$, т. е. если разность двухъ количествъ, возвышенныхъ въ *извѣстную* степень, дѣлится на разность тѣхъ же двухъ количествъ, то разность степеней, высшихъ единицею, также дѣлится на нее на-цѣло. Но $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ даетъ цѣлое частное, равное $a + b$; поэтому $\frac{a^3\ b^3}{a - b}$ также даетъ цѣлое частное, равное $a^2 + b\frac{a^2 - b^2}{a - b}$, или . . . . . $a^2 + b(a + b)$. или же $a^2 + ab + b^2$.

Равномѣрно, $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$ даетъ въ частномъ

$a^3 + b\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^3 + b(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$;

и вообще, $\frac{a^m - b^m}{a - b}$ даетъ частное цѣлое и равное . . . . . . $a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$. Легко сдѣлать повѣрку: умноживъ

$a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$ на $(a - b)$, увидимъ, что въ произведеніи останутся только a^m и $-b^m$; всѣ прочіе члены уничтожатся при сокращеніи. Напр. умножая $a^{m-2}b$ на a, получимъ $a^{m-1}b$; но умножая a^{m-1}

на $-b$, получимъ также $-a^{m-1}b$, которое уничтожится съ предъидущимъ членомъ; такимъ же образомъ уничтожатся и прочіе члены.

Предлагаемъ учащимся вникнуть въ этотъ способъ доказательства, который часто употребляется въ Алгебрѣ.

32. Мы показали въ §§ 23 и 26 главные признаки, по которымъ можно узнать, что одночленныя или многочленныя количества не дѣлятся на-цѣло, то есть, случаи, когда нѣтъ третьяго цѣлаго алгебраическаго количества, которое, будучи умножено на второе, дало бы первое.

Часто съ перваго взгляда можно узнать, что многочлены не дѣлятся одинъ на другой. Когда въ нихъ находятся двѣ или нѣсколько буквъ, то, не располагая еще многочленовъ по степенямъ одной изъ этихъ буквъ, должно разсмотрѣть члены дѣлимаго и дѣлителя, содержащіе высшую степень каждой буквы. Если для одной изъ буквъ эти члены не дѣлятся одинъ на другой, то дѣленіе невозможно; эту повѣрку надобно дѣлать при каждомъ частномъ дѣленіи.

Напримѣръ, Раздѣлить $12a^3-5a^2b+7ab^2-11b^3$ на $4a^2-8ab+3b^2$. Разсматривая букву a, дѣленіе кажется возможнымъ; но разсматривая букву b, узнаемъ, что дѣленіе невозможно, потому что $-11b^3$ не дѣлится на $3b^2$.

Заключимъ слѣдующими замѣчаніями:

1-е. Многочленъ никогда не раздѣлится другимъ многочленомъ, если въ дѣлителѣ заключается буква, которой нѣтъ въ дѣлимомъ; потому что никакое количество, умноженное на другое, въ которомъ находится извѣстная буква, не можетъ составить произведенія, независимаго отъ этой буквы.

2-е. Одночленное количество никогда не дѣлится на многочленное, потому что каждый многочленъ, § 18, умноженный на другой, даетъ не менѣе двухъ несокращаемыхъ членовъ.

3-е. Многочленное количество дѣлится на одночленное только въ томъ случаѣ, когда это послѣднее дѣлитъ на-цѣло каждый членъ дѣлимаго, и тогда частное получится исключеніемъ общаго множителя.

II. АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ИЛИ БУКВЕННЫЯ ДРОБИ.

О наибольшемъ общемъ дѣлителѣ.

33. Алгебраическія дроби принимаются въ томъ же значеніи, какъ ариѳметическія, напр. $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, показывая, что единица раздѣлена на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ знаменателѣ (который можетъ состоять изъ одного или многихъ членовъ), и что взято столько такихъ частей, сколько единицъ въ числителѣ. Поэтому сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе должны производиться по правиламъ, показаннымъ въ Ариѳметикѣ для вычисленія дробей; но въ приложеніи этихъ правилъ должно сообразоваться съ тѣми способами, которые мы вывели для вычисленія цѣлыхъ одночленныхъ или многочленныхъ алгебраическихъ количествъ. И такъ мы не будемъ останавливаться на первыхъ дѣйствіяхъ; въ послѣдствіи будетъ довольно случаевъ ознакомиться съ этими правилами. Но *приведеніе алгебраическихъ дробей къ простѣйшему ихъ выраженію* требуетъ внимательнѣйшаго разсмотрѣнія.

Когда два одночлена не дѣлятся на-цѣло, то дѣленіе обозначаютъ извѣстнымъ знакомъ, и частное представляется въ видѣ дроби, которую мы умѣемъ сокращать § 23. Чтò же касается до многочленныхъ дробныхъ выраженій, вотъ нѣсколько случаевъ, къ которыхъ они удобно сокращаются.

Напримѣръ, дано выраженіе $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

Это выраженіе можетъ, § 19, принять видъ $\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$; исключивъ общаго множителя $a-b$, получимъ $\frac{a+b}{a-b}$.

Возьмемъ еще выраженіе $\frac{5a^3-10a^2b+5ab^2}{8a^3-8a^2b}$.

Это выраженіе разлагается на $\frac{5a(a^2-2ab+b^2)}{8a^2(a-b)}$ или $\frac{5a(a-b)^2}{8a^2(a-b)}$; исключивъ общій множитель $a(a-b)$, получимъ $\frac{5a-5b}{8a}$.

Въ этихъ примѣрахъ оба члена дроби разлагались въ видѣ произведенія суммы двухъ количествъ на разность ихъ, въ видѣ квадрата суммы или разности двухъ количествъ; только навыкъ въ вычисленіи научаетъ дѣлать эти разложенія, когда они возможны.

Но если дробь составлена изъ многочленовъ болѣе сложныхъ, то разложеніе гораздо затруднительнѣе, и тогда должно прибѣгнуть къ способу *общаго наибольшаго дѣлителя.*

Полную теорію общаго наибольшаго дѣлителя можно изложить только тогда, когда приступимъ къ теоріи уравненій, съ которою она находится въ тѣсной связи. Здѣсь мы скажемъ объ ней только то, что̀ намъ теперь знать нужно.

Первоначальная теорія общаго наибольшаго алгебраическаго дѣлителя.

34. *Общій наибольшій дѣлитель двухъ многочленовъ есть наибольтій многочленъ, какъ относительно показателей, такъ и предстоящихъ, раздѣляющій на-цѣло данные многочлены.*

Если данные многочлены раздѣлимъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ ихъ, то частныя будутъ числа *первыя между собою*, то есть, между ими не будетъ уже никакого общаго множителя. Въ этомъ состоитъ отличительное свойство общаго наибольшаго дѣлителя.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ A и B данные многочлены, D наибольщій общій дѣлитель ихъ, A′ и B′ частныя; необходимо

$$A = A' \times D \text{ и } B = B' \times D.$$

Но если бы A′ и B′ имѣли еще общаго множителя d, тогда $d \times D$ было бы дѣлителемъ, общимъ двумъ многочленамъ, и было бы болѣе D, или показателями или предстоящими, а это противорѣчитъ опредѣленію дѣлителя D.

35. Въ Ариѳметикѣ доказано: 1-е. *Общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ чиселъ, состоитъ изъ частныхъ дѣлителей или множителей этихъ чиселъ, и не можетъ имѣть никакихъ другихъ множителей.*

2-е. *Общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ чиселъ, есть также общій наибольшій дѣлитель между меньшимъ числомъ и остаткомъ отъ ихъ дѣленія.*

Теорія общаго наибольшаго алгебраическаго дѣлителя также основывается на этихъ правилахъ; они вполнѣ будутъ доказаны въ седьмой главѣ.

Положимъ, что эти правила доказаны, и что теперь требуется отыскать общаго наибольшаго дѣлителя многочленовъ

$$a^3 - a^2b + 3ab^2 - 3b^3 \text{ и } a^2 - 5ab + 4b^2.$$

Первое дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2b+3ab^2-3b^3 & a^2-5ab+4b^2 \\ \hline +4a^2b-ab^2-3b^3 & a+4b \end{array}$$

1-й остатокъ. . . $19ab^2-19b^3$ или $19b^2(a-b)$.

Второе дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} a^2-5ab+4b^2 & a-b \\ \hline -4ab+4b^2 & a-4b \\ \hline 0 & \end{array}$$

то есть, $a-b$ есть общій наибольшій дѣлитель.

Раздѣлимъ многочленъ съ большимъ показателемъ на многочленъ низшей степени; въ частномъ будетъ $a+4b$, а въ остаткѣ $19ab^2-19b^3$. По второму правилу искомый дѣлитель будетъ также общимъ наибольшимъ дѣлителемъ между этимъ остаткомъ и меньшимъ многочленомъ.

Остатокъ $19ab^2-19b^3$ можно представить въ видѣ $19b^2(a-b)$; множитель $19b^2$ дѣлитъ этотъ остатокъ на-цѣло, но не дѣлитъ многочлена $a^2-5ab+4b^2$; и такъ, въ слѣдствіе перваго правила, множитель $19b^2$ не можетъ входитъ въ составъ общаго наибольшаго дѣлителя; это значитъ, что общій наибольшій дѣлитель между количествами $a^2-5ab+4b^2$ и $19b^2(a-b)$, а слѣд. и между данными количествами, есть тотъ же самый, какой мы имѣемъ между количествами $a^2-5ab+4b^2$ и $a-b$. И такъ, можно исключить множитель $19b^2$, и вопросъ приводится къ отысканію наибольшаго дѣлителя между

$$a^2-5ab+4b^2 \text{ и } a-b.$$

Раздѣляя первый многочленъ на второй, получаемъ въ частномъ $a-4b$, безъ остатка; и такъ $a-b$ будетъ общій наибольшій дѣлитель ихъ, а слѣдовательно и общій наибольшій дѣлитель данныхъ многочленовъ.

Теперь расположимъ данные многочлены по степенямъ буквы b, и снова отыщемъ общаго ихъ дѣлителя. Многочлены эти напишемъ такимъ образомъ:

$$-3b^3+3ab^2-a^2b+a^3 \text{ и } 4b^2-5ab+a^2.$$

Первое дѣйствіе.

$$\begin{array}{rl|l} & -12b^3+12ab^2-4a^2b+4a^3 & 4b^2-5ab+a^2 \\ \cline{2-3} \text{1-й остатокъ.} & -\ 3ab^2-\ a^2b+4a^3 & -3b,\ -3a \\ \cline{2-2} & -12ab^2-4a^2b+16a^3 & \\ \cline{2-2} \text{3-й остатокъ}\ \ldots\ldots & -19a^2b+19a^3 & \\ \text{или}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 19a^2(-b+a). & \end{array}$$

Второе дѣйствіе.

$$\begin{array}{l|l} 4b^2-5ab+a^2 & -b+a \\ \hline -\ ab+a^2 & -4b+a \\ \cline{1-1} 0. & \end{array}$$

Общій наибольшій дѣлитель есть $-b+a$ или $a-b$.

Съ перваго взгляда при дѣленіи встрѣчается затрудненіе въ томъ, что 1-й членъ $-3b^2$ дѣлимаго не дѣлится на 1-й членъ $4b^2$ дѣлителя. Но замѣтимъ, что предстоящее 4 этого члена не есть общій множитель количества $4b^2-5ab+a^2$, и въ слѣдствіе перваго правила, 4 не можетъ принадлежать общему наибольшему дѣлителю; поэтому можно ввести множитель 4 въ дѣлимое, что даетъ $-12b^3+12ab^2-4a^2b+4a^2$; тогда дѣленіе первыхъ членовъ дѣлается возможнымъ, и въ частномъ будетъ $-3b$. Въ остаткѣ получимъ $-3ab^2-a^2b+4a^3$. Здѣсь показатель буквы b еще равенъ показателю b въ дѣлителѣ: поэтому можно продолжать дѣленіе, умноживъ снова этотъ остатокъ на 4, чтобы сдѣлать дѣленіе первыхъ членовъ возможнымъ.

По умноженіи получимъ $-12ab^2-4a^2b+16a^3$; раздѣливъ на $4b^2-5ab+a^2$, въ частномъ будетъ $-3a$ (которое отдѣляютъ отъ перваго частнаго $-3b$ запятою, потому что между ими нѣтъ никакой связи), а въ остаткѣ $-19a^2b+19^3$.

Этотъ остатокъ можно написать въ видѣ $19a^2(-b+a)$; такъ какъ множитель $19a^2$ не можетъ входить въ составъ общаго дѣлителя, то можно исключить $19a^2$ и отыскивать общаго дѣлителя между многочленами $4b^2-5ab+a^2$ и... $-b+a$.

Раздѣливъ первый на второй, получимъ въ частномъ $-4b+a$. Дѣленіе производится безъ остатка; слѣдовательно $-b+a$ или $a-b$ есть искомый общій наибольшій дѣлитель.

36. Въ этомъ примѣрѣ, и вообще во всѣхъ задачахъ, въ которыхъ показатель главной буквы единицею болѣе въ дѣлимомъ нежели въ дѣлителѣ, гораздо лучше прямо умножать дѣлимое на квадратъ предстоящаго въ первомъ членѣ дѣлителя. Тогда первое частное, которое мы получимъ, будетъ содержать это предстоящее въ первой степени, а въ остаткѣ послѣ перваго дѣйствія это предстоящее также будетъ множителемъ, и дѣленіе можно продолжать до тѣхъ поръ, пока получимъ остатокъ, въ которомъ главная буква будетъ меньшей степени, нежели въ дѣлителѣ. Вотъ ходъ вычисленій:

Первое дѣйствіе.

Умножая дѣлимое на 16 или квадратъ числа 4,

$$\begin{array}{r|l} -48b^3+48ab^2-16a^2b+16a^3 & 4b^2-5ab+a^2 \\ \hline -12ab^2-\;4a^2b+16a^3 & -12b,\ -3a \\ \hline \end{array}$$

1,й остатокъ... $-19a^2b+19a^3$

или . . . . $19a^2\,(-b+a)$.

Второе дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} 4b^2-5ab+a^2 & -b+a \\ \hline -\;ab+a^2 & -4b+a \\ \hline 0 & \end{array}$$

Замѣчаніе. Если показатель главной буквы въ дѣлимомъ двумя, тремя, . . . единицами болѣе показателя той же буквы въ дѣлителѣ, то надобно умножить дѣлимое на третью, четвертую, ... степень предстоящаго 1-го члена дѣлителя. Это легко понять.

37. Возьмемъ $15a^5+10a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3-3ab^4$,

и . . . . $12a^3b^2+38a^2b^3+16ab^4-10b^5$.

Прежде нежели приступимъ къ дѣленію, замѣтимъ, что въ первомъ многочленѣ буква a общій множитель всѣхъ членовъ, а во второмъ мы видимъ ее только въ нѣкоторыхъ членахъ; поэтому она не будетъ находиться въ общемъ дѣлителѣ, и можно исключить ее изъ перваго многочлена. По той же причинѣ можно уничтожить множитель $2b^2$, общій второму многочлену, но не входящій въ первый. Вопросъ приводится къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя между

$15a^4+10a^3b+4a^2b^2+6ab^3-3b^4$,

и . . . . $6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3$.

Первое дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} 30a^4+20a^3b+8a^2b^2+12ab^3-6b^4 & 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 \\ \hline -75a^3b-32a^2b^2+37ab^3-6b^4 & 5a, \qquad -25b \\ -150a^3b-64a^2b^2+74ab^3-12b^4 & \\ \hline \text{1-й остат.} \quad +411a^2b^2+274ab^3-137b^4 & \\ \hline \end{array}$$

или . . . . $137b^2(3a^2+2ab-b^2)$.

Второе дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l} 6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 & 3a^2+2ab-b^2 \\ \hline +15a^2b+10ab^2-5b^3 & 2a+5b \\ \hline 0 & \end{array}$$

Слѣд. $3a^2+2ab-b^2$ есть общій наибольшій дѣлитель.

По прежнему способу слѣдовало бы умножить дѣлимое на предстоящее 6 перваго члена дѣлителя, или на квадратъ числа 6; но 16 и 6 имѣютъ общаго множителя 3; поэтому достаточно умножить дѣлимое на 2, множителя числа 6, не входящаго въ 15.

Въ остаткѣ отъ перваго дѣленія, первый членъ будетъ $-75a^3b$. Въ 75 также содержится множитель 3, входящій въ 6; чтобы продолжать дѣленіе, достаточно умножить этотъ остатокъ на 2; окончивъ дѣленіе, въ 1-мъ *главномъ остаткѣ* будетъ

$$411a^2b^2+274ab^3-137b^4.$$

Легко замѣтить, что въ этомъ остаткѣ $137b^2$ есть общій множитель; такъ какъ онъ не входитъ во 2-й многочленъ, то можно исключить $137b^2$, и вопросъ приводится къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя многочленовъ

$$6a^3+19a^2b+8ab^2-5b^3 \text{ и } 3a^2+2ab-b^2.$$

Раздѣливъ эти многочлены, получимъ въ частномъ $2a+5b$ безъ остатка; и такъ $3a^2+2ab-b^2$ есть искомый общій наибольшій дѣлитель.

38. *Примѣчаніе.* Исключеніе множителей, общихъ всѣмъ членамъ какого либо остатка, не только сокращаетъ вычисленія, но и само по себѣ необходимо. Если бы въ послѣднемъ примѣрѣ не уничтожили множитель $137b^2$, то надлежало бы умножить все дѣлимое на $137b^2$, чтобы дѣленіе 1-го члена новаго дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя было возможно; чрезъ это ввели бы и въ дѣлимое множитель, который находится уже въ дѣлителѣ; поэтому и въ искомомъ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ также находился бы множитель $137b^2$, который не долженъ и не можетъ входить въ составъ этого дѣлителя.

Въ слѣдующемъ примѣрѣ найдемъ подтвержденіе вышесказаннаго.

39. Найти общаго наибольшаго дѣлителя между многочленами:

$$ab + 2a^2 - 3b^2 - 4bc - ac - c^2,$$

и . . . . . . $9ac + 2a^2 - 5ab + 4c^2 + 8bc - 12b^2.$

Первое дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l}
2a^2+b & a-3b^2 \\
-c & \quad -4bc \\
 & \quad -c^2 \\ \hline
6b & a+9b \\
-10c & \quad -12bc \\
 & \quad -5c^2
\end{array}\left)\begin{array}{r|l}
2a^2-5b & a-12b^2 \\
+9c & \quad +8bc \\
 & \quad +4c^2 \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{1} \\
 & \\
 &
\end{array}\right.$$

или . . . . $(3b - 5c)\ (2 + 3b + c).$

Второе дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l}
2a^2-5b & a-12b^2 \\
+9c & \quad +8bc \\
 & \quad +4c^2 \\ \hline
-8b & a-12b \\
+8c & \quad +8bc+4c^2 \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{8ca+12bc+4c^2} \\ \hline
\multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}\left\{\begin{array}{l}
2a+3b+c \\ \hline
a-4b+4c
\end{array}\right.$$

Слѣд. $2a+3b+c$ есть общій наибольшій дѣлитель.

Расположивъ данные многочлены, можно прямо приступить къ дѣленію, и въ первомъ остаткѣ будетъ

$$\begin{array}{r|l}
6b & a+9b^2-12bc-5c^2 \\
-10c &
\end{array}$$

По прежнимъ примѣрамъ надобно взять второй многочленъ за дѣлимое, а этотъ остатокъ за дѣлителя и умножить новое дѣлимое на $6b-10c$, или просто на $3b-5c$, потому что въ 1-мъ членѣ дѣлимаго уже находится множитель 2. Но замѣтимъ, что первую часть остатка, $(6b-10c)a$, можно представить въ видѣ $(3b-5c)\,2a$; а когда раздѣлимъ вторую часть, $9b^2-12cb-5c^2$, на $3b-5c$, то получимъ $3b+c$; слѣдовательно вторую часть можно представить въ видѣ $(3b-5c)\,(3b+c)$, и весь остатокъ изобразится:

$$(3b-5c)\,(2a+3b+c).$$

Множитель $3b-5c$ этого остатка не находится въ новомъ дѣлимомъ (иначе этотъ множитель, независимый отъ буквы a, былъ бы по § 30 общимъ множителемъ всѣхъ предстоящихъ буквы a, что не имѣетъ мѣста), а потому безъ всякаго неудобства можемъ исключить $3b-5c$. Притомъ это необходимо: если бы не исключили $3b-5c$, то надлежало бы ввести и этотъ множитель въ новое дѣлимое; тогда въ данныхъ многочленахъ будетъ содержатся новый общій множитель, котораго они прежде не имѣли, и общій наибольшій дѣлитель также измѣнится; онъ увеличится множителемъ $3b-5c$, который не долженъ былъ содержаться въ немъ.

По исключеніи $3b-5c$, дѣленіе производится безъ остатка: $2a+3b+c$ есть общій наибольшій дѣлитель.

40. Предлагаемъ еще отыскать общій наибольшій дѣлитель между многочленами

$$a^4+3a^3b+4a^2b^2-6ab^3+2b^4$$

и . . . . $4a^2b+2ab^2-2b^3$,

или просто $2a^2+ab-b^2$,

если исключимъ общаго множителя $2b$ во второмъ многочленѣ.

Первое дѣйствіе.

$$\begin{array}{r|l}
8a^4+24a^3b+32a^2b^2-48ab^3+16b^4 & 2a^2+ab-b^2 \\ \hline
+20a^3b+36a^2b^2-48ab^3+16b^4 & 4a^2+10ab+13b^2 \\ \hline
+26a^2b^2-38ab^3+16b^4 & \\ \hline
\end{array}$$

1-й остатокъ . . . $-51ab^3+29b^4$

или . . . . $-b^3(51a-29b)$.

Второе дѣйствіе.

$2a^2+ab-b^2$ умножаемъ на 2601, квадратъ числа 51.

$$\begin{array}{rrrl}
5202a^2 & +2601ab & -2601b^2 & \Big| \; 51a-29b \\
-5202a^2 & +2958ab & & \Big| \; \overline{102a+109b} \\
\hline
 & +5559ab & -2601b^2 & \\
 & -5559ab & +3161b^2 & \\
\hline
\text{2-й остатокъ} \; . \; . \; . & & +560b^2 &
\end{array}$$

Показатель буквы *a* въ дѣлимомъ, *двумя* единицами болѣе показателя *a* въ дѣлителѣ: поэтому умножаютъ дѣлимое на кубъ 2-хъ, т. е. на 8. Потомъ послѣдовательно производятъ три дѣленія, и получаютъ въ остаткѣ $-51ab^3+29b^4$. По исключеніи множителя b^3, новый дѣлитель будетъ $-51a+29b$, или, перемѣняя знаки, $51a-29b$; а новое дѣлимое $2a^2+ab-b^2$.

Умноживъ это дѣлимое на квадратъ 51-го, или 2601, по раздѣленіи получимъ во 2-мъ остаткѣ $+560b^2$; это показываетъ, что данные многочлены *суть первые между собою*, то есть, не имѣютъ общаго множителя. Въ самомъ дѣлѣ, изъ втораго правила, § 35, слѣдуетъ, что общій наибольшій дѣлитель есть также дѣлитель остатка послѣ каждаго дѣйствія, и поэтому также долженъ дѣлить $560b^2$; но этотъ остатокъ независимъ отъ главной буквы *a*: поэтому, если бы данные многочлены могли имѣть общаго наибольшаго дѣлителя, то этотъ дѣлитель также не зависѣлъ бы отъ *a*, и слѣдовательно, § 30, былъ бы множителемъ всѣхъ предстоящихъ разныхъ степеней сей буквы, въ обоихъ многочленахъ; а это очевидно не имѣетъ здѣсь мѣста.

Въ этихъ примѣрахъ достаточно показано, какъ приступить къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя двухъ многочленовъ.

41. Общее правило. *Сначала исключаютъ общіе одночленные множители каждаго многочлена* (если эти множители дѣлимаго и дѣлителя имѣютъ и между собою общаго множителя, тогда замѣчаютъ этотъ множитель, какъ принадлежащій къ общему дѣлителю). *Потомъ даютъ дѣлимому такой видъ, чтобы* 1-й *членъ его дѣлился на* 1-й *членъ дѣлителя*, §§ 35 *и* 36, *и производятъ дѣленіе, отъ котораго получается остатокъ въ меньшей противъ дѣлителя степени; изъ остатка исключаются всѣ множители, общіе предстоящимъ главной буквы. Этотъ остатокъ берутъ за дѣлителя, а второй многочленъ за дѣлимое и поступа-*

ютъ по прежнему. Такимъ образомъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока получится остатокъ, раздѣляющій на-цѣло предъидущій остатокъ; въ этомъ случаѣ послѣдній дѣлитель есть общій наибольшій дѣлитель; или же, *пока получится остатокъ* независимый *отъ главной буквы*: тогда, § 40, данные многочлены суть первые между собою, если они не имѣютъ общаго множителя, независимаго отъ главной буквы, и не открытаго въ началѣ дѣйствія.

Замѣчаніе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ этотъ способъ недостаточенъ; въ послѣдствіи мы опять займемся имъ и дополнимъ его.

Вотъ новые примѣры, къ которымъ можно приложить общее правило.

1-й. $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$

и $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$.

Общій наибольшій дѣлитель $p - q$.

2-й. $36a^6 - 18a^5 - 27a^4 + 9a^3$,

и . . . . . $27a^5b^2 - 18a^4b^2 - 9a^3b^2$.

Общій наибольшій дѣлитель $9a^3(a - 1)$.

Теоріи первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій и общаго дѣлителя достаточно для разрѣшенія большаго числа вопросовъ. По мѣрѣ надобности мы будемъ въ послѣдствіи выводить новыя правила; теперь же перейдемъ къ разрѣшенію вопросовъ первой степени.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ВОПРОСЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

Предварительныя понятія объ уравненіяхъ.

42. Въ Алгебрѣ обыкновенно разсматриваются только тѣ задачи, которыя, бывъ выражены алгебраическимъ языкомъ, приводятся въ *уравненія*. Разсматривая рѣшеніе задачи § 3, замѣчаемъ, что это рѣшеніе состоитъ изъ двухъ частей. Въ первой выражаютъ алгебраическимъ языкомъ отношенія между извѣстными и неизвѣстными количествами вопроса, какъ они изложены въ самой задачѣ; такимъ образомъ получаютъ выраженіе двухъ равныхъ количествъ, которое называется *уравненіемъ*; напр., § 4, выраженіе $2x + b = a$. Во второй, изъ уравненія задачи выводится рядъ другихъ уравненій, и послѣднимъ уравненіемъ опредѣляется величина неизвѣстнаго количества, посредствомъ извѣстныхъ, какъ напр. выводъ $x = \frac{a-b}{2}$; это называется *рѣшить уравненіе*.

Для первой части нельзя постановить точныхъ правилъ; поэтому мы займемся сначала второю частію, которая подчинена общимъ и точнымъ правиламъ.

Всякое *уравненіе*, по опредѣленію своему, состоитъ изъ двухъ частей, раздѣленныхъ знакомъ $=$; часть, которая находится съ лѣвой стороны знака, называется *первою частію* уравненія, а другая *второю частію*.

Равенства бываютъ многихъ родовъ:

1-е. Равенство между извѣстными и опредѣленными числами, представленными буквами; напр. равенства: $a - b = c - d$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, въ которыхъ легко сдѣлать повѣрку, вставляя вмѣсто буквъ a, b, c, d, частныя числа, по которымъ составили эти равенства. Они собственно называются *равенствами*.

2-е. Равенство очевидное, которое повѣряется въ настоящемъ его видѣ; таковы равенства

$$25 = 12 + 13;\ 3a - 5b = a - b + 2a - 4b.$$

Ихъ называютъ *тождествами* (identités) или *явными равенствами* (égalités verifiées).

3-е. Наконецъ равенство, въ справедливости котораго можно увѣриться только тогда, когда вмѣсто одной или нѣсколькихъ буквъ, означающихъ неизвѣстныя, вставимъ нѣкоторыя числа, которыхъ величина зависитъ отъ извѣстныхъ и данныхъ чиселъ, содержащихся въ самомъ равенствѣ. Для отличія отъ другихъ, это равенство называется УРАВНЕНІЕМЪ, и мы теперь займемся имъ въ особенности.

Въ послѣдствіи мы будемъ говорить о другомъ родѣ равенства, объ *уравненіи тождественномъ*.

Уравненія съ одною неизвѣстною раздѣляются на разныя степени: уравненіями *первой степени* называются тѣ, въ которыхъ неизвѣстная величина входитъ въ первой степени; напр. уравненія

$4x + 5 = 17 - 4x$, $ax + b = cx + p$ будутъ 1-й степени.

Уравненіе $2x^2 - 3x = 5 - 2x^2$, будетъ 2-й степени.

$4x^3 - 5x^2 + x = 2x^2 + 11$, есть уравненіе 3-й степени.

Вообще *степень* уравненія показывается наибольшимъ показателемъ неизвѣстной, входящей въ уравненіе.

Уравненія раздѣляются также на *численныя* и *буквенныя*. Въ первыхъ содержатся одни ариѳметическія числа, кромѣ неизвѣстной, которая всегда означается буквою. Напр. $4x - 3 = 2x + 5$, $3x^2 - x = 8$, суть численныя уравненія; они представляютъ алгебраическое выраженіе задачъ, въ которыхъ извѣстныя количества даны въ числахъ.

Уравненія $ax + b = cx + d$, $ax^2 + bx = c$, суть буквенныя: въ нихъ данныя количества представлены буквами. Для отличія извѣстныхъ количествъ отъ неизвѣстныхъ, вторыя обыкновенно означаются послѣдними буквами азбуки, x, y, z, и пр.

Приступимъ къ рѣшенію уравненій первой степени съ одною неизвѣстною. *Рѣшить* уравненіе значитъ *найти всѣ величины неизвѣстныхъ, которыя удовлетворяютъ урав-*

нію, т. е. *когда вмѣсто неизвѣстныхъ вставимъ эти величины въ уравненіе, то первая часть будетъ равна второй.*

§ I. Уравненія первой степени съ одною неизвѣстною.

43. Равенство не перемѣнится, когда, 1-е, *приложимъ* къ обѣимъ частямъ, или *вычтемъ* изъ обѣихъ частей равенства одно и то же число; 2-е, если *умножимъ* или *раздѣлимъ* обѣ части равенства на одно и то же число. Вообще, если двѣ части равны, то онѣ будутъ равны и послѣ этихъ дѣйствій.

На этомъ основаны слѣдующія два преобразованія, безпрестанно встрѣчающіяся при рѣшеніи задачъ.

Первое преобразованіе. Члены уравненія можно переносить изъ одной части въ другую.

Напр. дано уравненіе $5x-6=8+2x$. Чтобы опредѣлить x, должно оставить одну эту неизвѣстную въ первой части уравненія. Но если вычтемъ изъ каждой части по $2x$, то равенство не перемѣнится (по первой аксіомѣ), и мы получимъ $5x-6-2x=8$, Здѣсь членъ $2x$, который былъ слагаемымъ во второй части, сдѣлался вычитаемымъ въ первой.

Если приложимъ къ обѣимъ частямъ по 6, то равенство также не нарушится, и получимъ

$$5x-6-2x+6=8+6,$$

но какъ два члена -6, $+6$, взаимно уничтожаются, то

$$5x-2x=8+6.$$

Здѣсь членъ, который былъ вычитаемымъ въ первой части, перешелъ во вторую, съ знакомъ сложенія.

Дано уравненіе $ax+b=d-cx$. Придавая къ обѣимъ частямъ cx, и вычитая изъ каждой b, получимъ:

$$ax+b+cx-b=d-cx+cx-b,$$

а по сокращеніи, $ax+cx=d-b$.

Вообще, *перенося члены изъ одной части уравненія въ другую, должно перемѣнять знаки ихъ.*

44. *Второе преобразованіе.* Дробные члены уравненія можно замѣнять цѣлыми количествами. Дано уравненіе:

$$\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=11+\frac{x}{5}.$$

Сначала приведемъ всѣ дроби къ общему знаменателю; будетъ $\frac{40x}{60}-\frac{45}{60}=11+\frac{12x}{60}$; какъ обѣ части уравненія можно умножить на одно и то же число, § 43, то умножимъ ихъ на 60: для этого достаточно уничтожить знаменателя 60 въ дробныхъ членахъ, и умножить цѣлый членъ на 60; тогда получимъ

$$40x-45=660+12x.$$

Можно вовсе не писать общаго знаменателя, а прямо перейти отъ даннаго уравненія ко второму, не забывая однако жъ умножить всѣ цѣлые члены на общій знаменатель. Возьмемъ другое уравненіе

$$\frac{5x}{12}-\frac{4x}{3}-13=-\frac{7}{8}-\frac{13x}{6}.$$

Знаменатели очевидно имѣютъ общихъ множителей, и наименьшее *кратное число этихъ знаменателей* есть 24. Когда приведемъ всѣ дроби къ этому знаменателю, и уничтожимъ его, тогда получимъ

$$10x-32x-312=21-52x;$$

(цѣлое число —13 умножено на 24).

Это новое уравненіе вѣрно, потому что мы привели дроби къ общему знаменателю и умножили обѣ части на одно и то же число 24.

Общее правило: *чтобъ уничтожить знаменателей въ уравненіи, должно составить наименьшее кратное число всѣхъ знаменателей* (если знаменатели не имѣютъ общихъ множителей, надобно взять произведеніе ихъ), *потомъ умножить всѣ цѣлые члены на это кратное число, а каждый дробный членъ на частное отъ раздѣленія кратнаго числа на знаменателя сего члена, и наконецъ уничтожить знаменатель.*

Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{ax}{b}-\frac{2c^2x}{ab}+4a=\frac{4bc^2x}{a^3}-\frac{5a^5}{b^2}+\frac{2c^2}{a}-3b;$$

очевидно a^3b^2 есть простѣйшее кратное всѣхъ знаменателей; умножая цѣлый членъ на a^3b^2 а каждый дробный членъ на частное отъ раздѣленія a^3b^2 на знаменателя этого члена, получаемъ

$$a^4bx-2a^2bc^2x+4a^4b^2=4b^4c^2x-5a^6+2a^2b^2c^2-3a^3b^3.$$

45. Приложимъ эти правила къ рѣшенію уравненія

$$4x-3=2x+5.$$

Перенося члены -3 и $2x$, обратимъ его въ . . . . $4x - 2x = 5 + 3$, или, сокращая, $2x = 8$.

Раздѣливъ обѣ части на 2, получимъ $x = \frac{8}{2} = 4$.

Въ самомъ дѣлѣ, если вставимъ въ уравненіе число 4, вмѣсто x, будетъ

$$4 \times 4 - 3 = 2 \times 4 + 5, \text{ или } 13 = 13.$$

Возьмемъ уравненіе $\frac{5x}{12} - \frac{4x}{3} - 13 = \frac{7}{8} - \frac{13x}{6}$, для котораго, § 44, получили $10x - 32x - 312 = 21 - 52x$. Перенесемъ неизвѣстные члены въ первую часть, а извѣстные во вторую, уравненіе будетъ

$$10x - 32x + 52x = 21 + 312,$$

или, по сокращеніи, . . . $30x = 333$.

Раздѣливъ обѣ части на 30, получимъ $x = \frac{333}{30} = \frac{111}{10}$.

Можно повѣрить выводъ, вставивъ вмѣсто x эту величину въ данное уравненіе.

Дано еще уравненіе

$$(3a - x)(a - b) + 2ax = 4b(x + a).$$

Сначала должно произвесть показанное умноженіе, чтобъ обратить обѣ части въ многочлены и освободить x. По извѣстнымъ правиламъ, § 17, получимъ

$$3a^2 - ax - 3ab + bx + 2ax = 4bx + 4ab;$$

а по сокращеніи, $ax - 3bx = 7ab - 3a^2$. Но $ax - 3bx$ есть то же, что $(a - 3b)x$; то и уравненіе будетъ $(a - 3b)x = 7ab - 3a^2$. Раздѣляя наконецъ обѣ части на $a - 3b$, находимъ

$$x = \frac{7ab - 3a^2}{a - 3b}.$$

Вообще, чтобъ рѣшить самое сложное уравненіе первой степени, должно, 1-е, *уничтожить знаменатели, и произвесть всѣ обозначенныя алгебраическія дѣйствія; тогда получится уравненіе, въ которомъ обѣ части будутъ цѣлые многочлены;* 2-е, *перенесть въ одну часть* (обыкновенно въ первую) *всѣ члены, содержащіе въ себѣ неизвѣстную, а въ другую часть всѣ извѣстные члены;* 3-е, *всѣ члены, заключающіе x, соединить въ одинъ, если уравненіе численное; а въ алгебраическомъ уравненіи, соединить всѣ эти члены въ одно произведеніе, составленное изъ двухъ множителей: первый* *изъ нихъ есть x, а второй совокупность количествъ, умноженныхъ на x, съ ихъ знаками; наконецъ, 4-е, раздѣлить обѣ части уравненія на число или многочленъ: умноженный на x, и произвесть дѣленіе, если возможно.*

Довольно сложный примѣръ, къ которому можно примѣнить всѣ эти правила, представляетъ уравненіе

$$\frac{(a+b)(x-b)}{a-b}-3a=\frac{4ab-b^2}{a+b}-2x+\frac{a^2-bx}{b}.$$

Уничтоживъ знаменателей, получимъ

$$b(a+b)^2(x-b)-3ab(a^2-b^2)=b(a-b)(4ab-b^2)$$
$$-2b(a^2-b^2)x+(a^2-b^2)(a^2-bx);$$

произведя обозначенныя скобками умноженія, получимъ

$$a^2bx+2ab^2x+b^3x-a^2b^2-2ab^3-b^4-3a^3b-3ab^3$$
$$=4a^2b^2-ab^3-4ab^3+b^4-2a^2bx+2b^3x+a^4-a^2b^2-a^2bx+b^3x;$$

перенеся члены съ x, и сокративъ,

$$4a^2bx+2ab^2x-2b^3x=4a^2b^2-6ab^3+2b^4+3a^3b+a^4;$$

соединивъ въ одинъ всѣ члены, содержащіе x,

$$b(4a^2+2ab-2b^2)x=4a^2b^2-6ab^3+2b^4+3a^3b+a^4,$$

и наконецъ $$x=\frac{a^4+3a^3b+4a^2b^2-6ab^3+2b^4}{b(4a^2+2ab-2b^2)}.$$

Это выраженіе нельзя обратить въ цѣлый многочленъ, § 32.

46. Разрѣшимъ уравненіе $3x-2=4x-7$. Перенеся члены, содержащіе x, въ первую, а извѣстные во вторую часть, найдемъ $3x-4x=2-7$, и по сокращеніи $-x=-5$.

Для объясненія этого вывода достаточно замѣтить, что можно перенесть всѣ члены, содержащіе x, во вторую часть, а въ первую извѣстные члены, тогда $7-2=4x-3x$, отсюда $5=x$, или наконецъ, $x=5$; и такъ, въ случаѣ такихъ выводовъ, какъ $-x=-5$, достаточно перемѣнить знаки обѣихъ частей; дѣйствительно, это приводится къ тому, чтобы неизвѣстные члены перенесть во вторую часть уравненія, а извѣстные въ первую, а потомъ вторую часть написать на мѣсто первой, и обратно.

Теперь можемъ приступить къ рѣшенію задачъ.

47. Мы уже сказали, что выраженіе смысла задачи алгебраическимъ уравненіемъ не подчинено никакимъ постояннымъ правиламъ. Иногда смыслъ вопроса тотчасъ представляетъ уравненіе; иногда нужно въ вопросѣ отыскивать условія, по которымъ можно бъ было составить уравненіе;

иногда же выражаются алгебраически условія не самой задачи, а другія, которыя можно разсматривать какъ слѣдствія первыхъ. Вообще, должно *предположить будто задача рѣшена, и потомъ, обозначивъ извѣстные количества цифрами или буквами, а неизвѣстныя послѣдними буквами, произвесть надъ ними тѣ же самыя сужденія и дѣйствія, которыя надлежало бы сдѣлать для повѣрки величины неизвѣстной, если бъ эта величина была дана.* Обозначая алгебраическимъ языкомъ повѣрку, получимъ два различныя выраженія одного и того же количества, содержащія въ себѣ свойство неизвѣстной; эти два выраженія соединяютъ знакомъ равенства, и тогда имѣютъ *уравненіе* задачи. Приложимъ эти правила къ слѣдующимъ задачамъ:

I. *Найти число, котораго половина, треть и четверть, сложенныя съ* 45, *составляютъ* 448.

Пусть будетъ x искомое число; $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, означатъ половину, треть и четверть этого числа. Но по условію всѣ три части, сложенныя съ 45, должны составить сумму 448; поэтому задача выразится уравненіемъ:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+45=448;$$

или, вычитая изъ обѣихъ частей 45,

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=403;$$

уничтоживъ знаменателей, $6x+4x+3x=4836$, а послѣ сокращенія, $13x=4836$; $x=\frac{4836}{13}=372$.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{372}{2}+\frac{372}{3}+\frac{372}{4}+45=186+124+93+45=448.$$

Подобныя задачи рѣшаются въ Ариѳметикѣ *правиломъ ложнаго положенія.* Изъ этого примѣра видно, какъ легко подобныя задачи рѣшать помощію Алгебры.

II. *Работникъ нанятъ на 48 дней, съ условіемъ, чтобы за каждый рабочій день платить ему по 1 р. 20 к., а за праздный день вычитать у него 60 к. за прокормленіе; черезъ 48 дней работникъ получилъ всего 25 р. 20 к. Спрашивается число рабочихъ и праздныхъ дней?*

Если бъ мы знали эти два числа, то умноживъ одно на 120, другое на 60, и вычтя послѣднее произведеніе изъ перваго, получили бы въ остаткѣ 25 р. 20 к. Означимъ эти дѣйствія алгебраическими знаками.

Пусть будетъ x число рабочихъ дней; $48 - x$ будетъ число праздныхъ дней; поэтому $120 \times x$, или $120x$ означать сумму выработанную, $60(48 - x)$ сумму вычтенныхъ у работника денегъ; и уравненіе задачи будетъ,

$$120x - 60(48 - x) = 2520,$$ или, раздѣливъ на 10,

$$12x - 6(48 - x) = 252, \text{ или } 12x - 288 + 6x = 252;$$

и такъ
$$18x = 252 + 288 = 540,$$

или
$$x = \frac{540}{18} = 30;$$

откуда
$$48 - x = 48 - 30 = 18.$$

И такъ, рабочихъ дней было 30, а праздныхъ 18; въ самомъ дѣлѣ, за 30 дней работнику слѣдовало получить 120×30 или 3,600; но за праздные 18 дней у него вычли 18×60 или 1018; слѣдовательно ему осталось $3600 - 1080$ или 2520, т. е. 25 р. 20 к.

Можно сдѣлать эту задачу общею, означивъ буквою n число всѣхъ дней, буквою a плату за каждый рабочій день, буквою b вычетъ за праздный день, и наконецъ c сумму, полученную работникомъ. По прежнему назовемъ x число рабочихъ дней; тогда $n - x$ выразитъ число праздныхъ дней. Слѣд. ax представитъ сумму, получаемую работникомъ, а $b(n - n)$ вычитаемую у него сумму. Уравненіе задачи будетъ

$$ax - b(n - x) = c,$$

или
$$ax - bn + bx = c,$$

откуда
$$(a + b)x = c + bn, \text{ слѣд. } x = \frac{c+bn}{a+b};$$

а посему,
$$n - x = n - \frac{(c + bn)}{a + b} = \frac{an+bn-c-bn}{a+b},$$

или
$$n - x = \frac{an - c}{a + b}.$$

III. *Собака погналась за лисицею, которая успѣла уже сдѣлать 60 скачковъ. Собака дѣлаетъ 6 скачковъ, между тѣмъ, какъ лисица дѣлаетъ 9 скачковъ; но 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы. Во сколько скачковъ собака догонитъ лисицу?*

Изъ смысла вопроса видно, что собака должна пробѣжать разстояніе въ 60 скачковъ, которыми лисица ее опередила, и разстояніе, которое проскачетъ лисица съ того времени, когда собака погналась за нею. И такъ, если путь собаки и лисицы можно выразить посредствомъ одной и той же неизвѣстной, то легко составить и уравненіе задачи.

Назову x число скачковъ собаки. Скачки собаки содержатся къ скачкамъ лисицы, какъ 6 къ 9, или, раздѣливъ на 6, какъ 1: $\frac{3}{2}$; поэтому, когда собака сдѣлаетъ x скачковъ, лисица сдѣлаетъ $\frac{3}{2}x$ скачковъ. Однако нельзя еще писать уравненіе $x = 60 + \frac{3}{2}x$: скачки собаки болѣе скачковъ лисицы, и потому внести ихъ въ уравненіе значило бы уравнять числа разнородныя, то есть, числа, составленныя изъ различныхъ единицъ. И такъ, должно напередъ выразить скачки лисицы въ скачкахъ собаки, или обратно. Но 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы; поэтому 1 скачекъ собаки равенъ $\frac{7}{3}$ скачка лисицы, а x скачковъ собаки равны $\frac{7}{3}x$ скачкамъ лисицы. Слѣдовательно уравненіе задачи будетъ

$$\frac{7}{3}x = 60 + \frac{3}{2}x,$$

отсюда $14x = 360 + 9x$, или $5x = 360$;

и наконецъ $x = 72$.

И такъ собака въ 72 скачка догонитъ лисицу, которая въ то же время сдѣлаетъ $72 \times \frac{3}{2}$ или 108 скачковъ.

Повѣрка. 72 скачка собаки равны $\frac{72 \times 7}{3}$ или 168 скачкамъ лисицы, то есть, $168 = 60 + 108$.

Слѣдующія двѣ задачи заслуживаютъ особенное вниманіе, потому что онѣ представляютъ превосходные примѣры для упражненій въ вычисленіяхъ.

48. IV. *Отецъ духовнымъ завѣщаніемъ назначилъ тремъ сыновьямъ раздѣлить имѣніе слѣдующимъ образомъ: первый долженъ взять сумму a и n-ю часть остатка; второй $2a$ и n-ю часть того, что останется за вычетомъ 1-й части и $2a$; наконецъ третій возьметъ $3a$ и n-ю часть остатка послѣ вычета первыхъ двухъ частей и $3a$. Все имѣніе раздѣлено: спрашивается какъ велико это имѣніе?*

Назовемъ x отцовское имѣніе. Если помощію этого количества составимъ алгебраическія выраженія всѣхъ трехъ частей, то вычитая сумму ихъ изъ имѣнія x и уравнивая остатокъ нулю, получимъ уравненіе задачи. Постараемся опредѣлить каждую изъ трехъ частей.

Все имѣніе означено x; послѣ вычета a останется $x-a$, и часть 1-го сына будетъ $a+\frac{x-a}{n}$, или $\frac{an+x-a}{n}$, это *первая часть*.

Чтобы составить 2-ю часть, должно изъ x вычесть 1-ю часть и $2a$; что даетъ

$x-2a-\frac{(an+x-a)}{n}$, или $\frac{nx+3an-x+a}{n}$, ... 1-й остатокъ.

Вторая часть состоитъ изъ $2a$ и n-й части перваго остатка; слѣд. она будетъ $2a+\frac{nx-3an-x+a}{n^2}$, или

$\frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2}$, . . . *вторая часть*.

Вычитая изъ x двѣ первыя части и $3a$, будетъ

$$x-3a-\frac{(an+x-a)}{n}-\frac{(2an^2+nx-3an-x+a)}{n^2},$$

или $\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2}$, ... второй остатокъ.

Третья часть будетъ $3a+\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^3}$,

или $\frac{3an^3+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^3}$, *третья часть*.

Но, по условію задачи, имѣніе совершенно раздѣлено; слѣд. разность между x и суммою трехъ частей должна равняться нулю, что даетъ уравненіе

$$\left.\begin{array}{l} x-\frac{(an+x-a)}{n}-\frac{(2an^2+nx-3an-x+a)}{n^2} \\ -\frac{(3an^3+n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a)}{n^3} \end{array}\right\}=0.$$

Уничтоживъ знаменателей и сокративъ, получимъ

$$n^3x-6an^3-3n^2x+10an^2+3nx-5an-x+a=0;$$

откуда $x=\frac{6an^3-10an^2+5an-a}{n^3-3n^2+3n-1}=\frac{a(6n^3-10n^2+5n-1)}{n^3-3n^2+3n-1}$.

Можно получить уравненіе и выводъ гораздо проще: если сказано что 3-й сынъ долженъ получить $3a$ и n-ю часть остатка, чтобъ все имѣніе было совершенно раздѣлено, то легко догадаться, что онъ и получилъ только $3a$, и что послѣдній остатокъ равенъ 0; но для этого остатка получено выраженіе

$$\frac{n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a}{n^2};$$

уравнявъ его нулю и уничтоживъ знаменатель, будетъ

$$n^2x-6an^2-2nx+4an+x-a=0,$$

$$\text{откуда } x=\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1}=\frac{a(6n^2-4n+1)}{n^2-2n+1}.$$

Это выраженіе имѣетъ ту же численную величину, какъ и первое выраженіе, полученное для x; различіе въ видѣ ихъ происходитъ оттого, что во второмъ уничтоженъ общій множитель. По правилу § 41 найдемъ, что многочлены $a(6n^3-10n^2+5n-1)$ и n^3-3n^2+3n-1 имѣютъ общій дѣлитель $n-1$: раздѣливъ на $n-1$ первое выраженіе, получимъ второе.

Эта задача показываетъ, какъ важно внимательное разсмотрѣніе всѣхъ обстоятельствъ въ задачѣ, которыя могутъ облегчить составленіе уравненія; въ противномъ случаѣ выводы могутъ быть гораздо сложнѣе, нежели какъ требуетъ сущность вопроса.

Тѣ условія, изъ которыхъ выведены выраженія трехъ частей, суть *явныя условія* данной задачи; а условіе, изъ котораго составили простѣйшее уравненіе задачи, и которое мы открыли при внимательнѣйшемъ разсмотрѣніи смысла задачи, есть *скрытое условіе*.

Чтобы получить каждую изъ трехъ частей, стоитъ только поставить вмѣсто x его величину въ ихъ выраженія.

Сдѣлаемъ приложеніе формулы $x=\frac{a(6n^2-4n+1)}{n^2-2n+1}$.

Пусть $a=10000$, $n=5$; тогда

$$x=\frac{10{,}000(6\times25-4\times5+1)}{25-10+1}=\frac{10{,}000\times131}{16}=\frac{1{,}310{,}000}{16}=81{,}875.$$

Повѣримъ условія вопроса этимъ примѣромъ.

Первый сынъ получитъ $10{,}000+\frac{81{,}875-10{,}000}{5}$ или 24,375.

Для раздѣла двумъ прочимъ сыновьямъ остается 81,875 —24,375, или 57,500. Второй долженъ получить $20{,}000+\frac{57{,}500-20{,}000}{5}$ или 27,500. Третьему сыну остается 27500 —

27,500 или 30,000. Но $30,000 = 10,000 \times 3$; слѣдовательно задача удовлетворяется рѣшеніемъ.

Можно рѣшить эту задачу и другимъ простѣйшимъ и притомъ болѣе замысловатымъ способомъ, который основывается на замѣчаніи, что отнявъ отъ имѣнія $3a$ и двѣ первыя части, въ остаткѣ получаемъ нуль.

Означимъ буквами r, r', r'', названные въ задачѣ остатки; алгебраическія выраженія трехъ частей будутъ:

$$a+\frac{r}{n},\quad 2a+\frac{r'}{n},\quad 3a+\frac{r''}{n}.$$

1-е. Но, изъ условія задачи ясно видно, что $r''=0$; то *часть третьяго* будетъ $3a$.

2-е. Остатокъ, послѣ выдачи второму сыну $2a+\frac{r'}{n}$, можно представить такъ: $r'-\frac{r'}{n}$, или $\frac{(n-1)r'}{n}$.

Этотъ остатокъ составляетъ также часть третьяго, и мы поэтому имѣемъ уравненіе

$$\frac{(n-1)r'}{n}=3a,\ \text{откуда}\ r'=\frac{3an}{n-1}.$$

И такъ *часть втораго* будетъ $2a+\left(\frac{3an}{n-1}:n\right)$, *) или $2a+\frac{3a}{n-1}$ или $\frac{2an+a}{n-1}$.

3-е. Остатокъ послѣ выдачи первому $a+\frac{r}{n}$, можно выразить въ видѣ $r-\frac{r}{n}$ или $\frac{(n-1)r}{n}$; притомъ онъ составляетъ сумму двухъ прочихъ частей, или $3a+\frac{2an+a}{n-1}$.

И такъ $\frac{(n-1)r}{n}=3a+\frac{2an+a}{n-1}=\frac{5an-2a}{n-1}$,

откуда $r=\frac{5an-2a}{n-1}\times\frac{n}{n-1}=\frac{5an^2-2an}{(n-1)^2}$;

слѣдовательно получимъ для 1-й части

$$a+\frac{5an^2-2an}{(n-1)^2}:n=a+\frac{5an-2a}{(n-1)^2}$$

$$=a+\frac{5an-2a}{n^2-2n+1}=\frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1},\ \textit{первая часть.}$$

---

*) Здѣсь двоеточіе означаетъ, что $\frac{3an}{n-1}$ надобно раздѣлить на a, § 2.

Наконецъ, все имѣніе будетъ

$$3a+\frac{2an+a}{n-1}+\frac{an^2+3an-a}{n^2-2n+1},$$

или, приведя къ одному знаменателю

$$\frac{3a(n^2-2n+1)+(2an+a)\,(n-1)+an^2+3an-a}{n^2-2n+1};$$

сдѣлавъ вычисленія и сокращенія, получимъ

$$\frac{6an^2-4an+a}{n^2-2n+1}=\frac{a(6n^2-4n+1)}{(n-1)^2},$$

выводъ, совершенно равный первому.

Сверхъ того рѣшеніе это полнѣе предъидущаго, потому что мы прямо получили величину всего имѣнія и каждой части.

49. V. *Отецъ, по завѣщанію, отказываетъ изъ своего имѣнія старшему сыну сумму a* и *n-ю часть остатка; второму сумму $2a$* и *n-ю часть остатка, за вычетомъ 1-й части и $2a$; третьему сумму $3a$* и *n-ю часть новаго остатка, и такъ далѣе; полагается притомъ, что всѣ сыновья получили равныя части. Спрашивается какъ велико все имѣніе, часть каждаго сына и число сыновей?*

Въ этой задачѣ замѣчательно то, что въ смыслѣ ея болѣе условій, нежели нужно для отысканія неизвѣстныхъ.

Назовемъ x все имѣніе; $x-a$ выразитъ остатокъ послѣ вычета суммы a. Часть старшаго будетъ

$$a+\frac{x-a}{n}\ \text{или}\ \frac{an+x-a}{n},\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{1-я часть.}$$

Вычитая эту часть и $2a$ изъ x, получимъ

$$x-2a-\frac{(an+x-a)}{n},\ \text{или}\ \frac{nx-3an-x+a}{n};$$

n-я часть этого выраженія есть $\frac{nx-3an-x+a}{n^2}$,

и такъ, часть втораго сына будетъ

$$2a+\frac{nx-3an-x+a}{n^2}\ \text{или}\ \frac{2an^2+nx-3an-x+a}{n^2},\ .\ .\ .\ .\ .\ \text{2-я часть.}$$

Такимъ же образомъ найдемъ прочія части; но всѣ части должны быть равны между собою, то достаточно сравнить первыя двѣ части, составивъ уравненіе

$$\frac{an+x-a}{n}=\frac{2an^2+nx-3an-x+n}{n^2},$$

откуда $x=an^2-2an+a.$

Вставивъ эту величину x въ выраженіе 1-й части, найдемъ $\frac{an+an^2-2an+a-a}{n}$;

или, сокративъ, $\frac{an^2-an}{n}=an-a=a(n-1).$

Всѣ части должны быть равны между собою: поэтому раздѣливъ все имѣніе на первую часть, въ частномъ получимъ число сыновей;

и такъ $\frac{an^2-2an+a}{an-a}$, или $n-1$, означаетъ число сыновей.

Все имѣніе . . . $an^2-2an+a$ или $a(n-1)^2$,
Часть старшаго и каждаго сына. . . $a(n-1)$;
Число сыновей . . . . $n-1$.

Остается разсмотрѣть, удовлетворяются ли прочія условія задачи; т. е. если второй возьметъ $2n$ и n-ю часть остатка, третій $3a$ и n-ю часть остатка, и т. д. будетъ ли часть каждаго сына въ самомъ дѣлѣ равна $a(n-1)$.

Какъ остатокъ отъ всего имѣнія, за вычетомъ 1-й части, есть $a(n-1)^2-a(n-1)$, то часть втораго будетъ $2a+\frac{a(n-1)^2-a(n-1)-2a}{n}$, или $\frac{2a(n-1)+a(n-1)^2-a(n-1)}{n}$, сокративъ, $\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n}$, или $\frac{an-a+an^2-2an+a}{n}$, и наконецъ . . . . . . $a\ (n-1)$.

Равномѣрно, разность между $a(n-1)^2$ и двумя первыми частями есть $a(n-1)^2-2a(n-1)$; поэтому часть третьяго выразится

$3a+\frac{a(n-1)^2-2a(n-1)-3a}{n}$, а по сокращеніи $\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n}$, или $a(n-1)$.

Вообще, для какой ни есть части p имѣли бъ

$$pa+\frac{a(n-1)^2-(p-1)a(n-1)-pa}{n},$$

или $$\frac{pa(n-1)+a(n-1)^2-p-1)a(n-1)}{n},$$

или $$\frac{an^2-an}{n},\text{ или же, } a\ (n-1).$$

Слѣдовательно всѣ условія вопроса удовлетворяются.

§ II. ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ И ЗАДАЧАХЪ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ И БОЛѢЕ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

50. Хотя нѣкоторыя изъ предъидущихъ задачъ заключали въ себѣ не одну неизвѣстную величину, а нѣсколько, но мы, при рѣшеніи этихъ задачъ, означали особенною буквою только одну неизвѣстную, и этого было достаточно, потому что, по самымъ условіямъ задачи, легко было выразить другія неизвѣстныя посредствомъ той же буквы; но это не всегда возможно.

Мы покажемъ, какъ вообще рѣшаются задачи съ многими неизвѣстными, и для того займемся сначала нѣкоторыми изъ тѣхъ, которыя мы уже рѣшили, помощію одной неизвѣстной.

Найти два числа, которыхъ сумма a, и разность b извѣстны, § 4.

Означивъ искомыя числа буквами x и y, по условію получимъ два уравненія $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$

Когда къ двумъ равнымъ числамъ A и B, приложимъ два другія равныя числа C и D, тогда выводы A+C и B+D также равны; т. е. если имѣемъ два уравненія A=B и C=D, то имѣемъ и A + C = B + D.

Также, если изъ двухъ равныхъ чиселъ вычтемъ два равныя числа, то остатки будутъ равны; т. е, изъ двухъ уравненій A=B и C=D, выводимъ также A—C = B—D.

Приложимъ эти правила къ уравненіямъ нашей задачи. Сложивъ ихъ, находимъ $2x = a + b$,

а вычитая второе изъ 1-го... $2y = a - b$.

Въ каждомъ изъ этихъ уравненій заключается одна только неизвѣстная, почему и выводимъ

изъ 1-го . . . . $x = \frac{a+b}{2}$, а изъ 2-го, . . . $y = \frac{a-b}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a, \text{ и } \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Возьмемъ опять задачу II, § 47, стр. 50, въ общемъ ея смыслѣ.

Назовемъ x число рабочихъ дней, y число праздныхъ;

тогда ax выразитъ сумму денегъ, полученную за рабочіе дни, bx сумму вычтенную у работника за праздные дни.

И такъ имѣются два уравненія $\begin{cases} x + y = n, \\ ax - by = c. \end{cases}$

Но извѣстно уже, что отъ умноженія двухъ частей уравненія на одно и то же число, равенство не нарушается; и мы можемъ умножить члены перваго уравненія на b, предстоящее неизвѣстной y во второмъ уравненіи; тогда будетъ . . . . . . $bx + by = bn$; соединяя это уравненіе со 2-мъ . . . . $ax - by = c$ дѣйствіемъ сложенія, получимъ $bx + ax = bn + c$; откуда $x = \frac{bn +}{a + b}$.

Умноживъ 1-е на a, предстоящее буквы x во 2-мъ уравненіи, имѣемъ . . . . . . $ax + ay = an$,
соединивъ его со 2-мъ . . $ax - by = c$
вычитаніемъ, получимъ . $(a + b)y = an - c$,
откуда $\frac{an - c}{a + b}$.

Введеніе особенныхъ буквъ для каждой неизвѣстной величины въ задачахъ, имѣетъ надъ прежними рѣшеніями то преимущество, что оба неизвѣстныя числа получаются независимо одно отъ другаго.

Исключеніе неизвѣстныхъ.

51. Даны два уравненія $\begin{cases} 5x + 7y = 43, \\ 11x + 9y = 69. \end{cases}$

которыя можно разсматривать какъ алгебраическое выраженіе данной задачи съ двумя неизвѣстными.

Если бъ одна изъ неизвѣстныхъ имѣла одинакія предстоящія въ обоихъ уравненіяхъ, то черезъ простое вычитаніе получили бы новое уравненіе, заключающее только вторую неизвѣстную, изъ котораго и вывели бы величину ея.

Умноживъ первое уравненіе на 9, предстоящее количества y во второмъ уравненіи, а это уравненіе на 7, предстоящее того же y въ 1-мъ уравненіи, получимъ,

$$\begin{gathered} 45x + 63y = 387. \\ 77x + 63y = 483, \end{gathered}$$

которыми можно замѣнить первыя, и въ которыхъ y имѣетъ одинакія предстоящія. Когда вычтемъ первое изъ втораго, то получимъ

$$32x = 96, \text{ откуда } x = 3.$$

Умножимъ первое данное уравненіе на 11, предстоящее количества x во 2-мъ уравненіи, а это уравненіе умножимъ на 5, предстоящее количества x въ 1-мъ, и составимъ два новыя уравненія

$$55x + 77y = 473,$$
$$55x + 45y = 345,$$

которыми также можно замѣнить данныя уравненія, и въ которыхъ x имѣетъ одинакія предстоящія. Вычитая второе уравненіе изъ перваго, получимъ

$$32y = 128, \text{ откуда } y = 4.$$

И такъ, $x=3$ и $y=4$, величины x и y, удовлетворяющія смыслу задачи. Въ самомъ дѣлѣ, 1-е. $5 \times 3 + 7 \times 4 = 43$; 2-е. $11 \times 3 + 9 \times 4 = 69$.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго мы нашли для неизвѣстныхъ величины, удовлетворяющія даннымъ уравненіямъ, называется *исключеніемъ неизвѣстныхъ:* оно въ самомъ дѣлѣ состоитъ въ уничтоженіи одной изъ неизвѣстныхъ, посредствомъ правильнаго преобразованія данныхъ уравненій. Этотъ способъ весьма сходенъ съ приведеніемъ дробей къ одному знаменателю, и точно также допускаетъ нѣкоторыя сокращенія,

Возьмемъ напр. уравненія $8x - 21y = 33$,

$$6x + 35y = 177.$$

Чтобы предстоящіе при y сдѣлать равными, замѣтимъ, что предстоящіе 21 и 35 имѣютъ общій множитель 7; посему достаточно умножить 1-е уравненіе на 5, а второе на 3, что̀ дастъ два новыя уравненія

$$40x - 105y = 165,$$
$$18x + 105y = 531;$$

сложивъ ихъ, получимъ $58x = 696$, откуда $x = 12$.

Предстоящіе при x заключаютъ множитель 2; чтобъ сдѣлать ихъ равными, достаточно умножить 1-е уравненіе на 3, а 2-е на 4, что̀ даетъ

$$24x - 63y = 99,$$
$$24x + 140y = 708;$$

вычитая первое изъ втораго, находимъ

$$203y = 609, \text{ откуда } y = 3.$$

Замѣчаніе. Весьма полезно отыскивать общіе множители въ предстоящихъ; этимъ сокращаются вычисленія.

Пусть даны еще уравненія

$$\frac{2x}{3}-4+\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12},$$
$$\frac{y}{6}-\frac{x}{2}+2=\frac{1}{6}-2x+6.$$

Уничтоживъ знаменателей, § 44, получимъ два уравненія

$$8x-48+6y+12x=96-9y+1,$$
$$y-3x+12=1-12x+36,$$

или $\begin{cases}20x+15y=145,\\ 9x+\quad y=\ 25,\end{cases}$ или $\begin{cases}4x+3y=29,\\ 9x+\ y=25.\end{cases}$

Умножая 2-е уравн. на 3, вычитая 1-е изъ 2-го, находимъ $23x=46$, откуда $x=2$; вставимъ эту величину x въ уравненіе $y=25-9x$; тогда будетъ $y=25-9\times 2=7$.

52. Теперь разсмотримъ три уравненія съ тремя неизвѣстными.

$$5x-6y+4z=15,$$
$$7x+4y-3z=19,$$
$$2x+\ y+6z=46.$$

Чтобъ исключить z изъ двухъ первыхъ уравненій, должно умножить 1-е на 3, а 2-е на 4, и сложить уравненія (потому что предстоящія буквы z имѣютъ противные знаки), что даетъ новое уравненіе $43x-2y=121$.

Умноживъ 2-е уравненіе на 2; одинъ изъ множителей предстоящаго буквы z въ 3-мъ, и сложивъ съ 3-мъ имѣемъ

$$16x+9y=84.$$

И такъ вопросъ приводится къ отысканію величинъ x и y, удовлетворяющихъ этимъ новымъ уравненіямъ.

Но умноживъ 1-е на 9, 2-е на 2, и сложивъ ихъ, получимъ $419x=1257$, откуда $x=3$.

Такимъ же образомъ вывели бы величину y; но гораздо проще вставить вмѣсто x величину его въ уравненіе $16x+9y=84$; тогда будетъ $48+9y=84$,

откуда $$y=\frac{84-48}{9}=4.$$

Вставивъ найденныя величины x и y въ первое данное уравненіе, получимъ

$$15-24+4z=15,\text{ откуда } z=\frac{24}{4}=6.$$

урвнія общій [illegible]

Вообще, пусть дано m уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ. *Чтобы найти величину неизвѣстныхъ, соединяемъ послѣдовательно одно изъ этихъ уравненій съ каждымъ изъ прочихъ $m—1$ уравненій, чтобъ чрезъ то исключить изъ нихъ одно неизвѣстное; тогда получимъ $m—1$ уравненій съ $m—1$ неизвѣстными; для исключенія другой неизвѣстной, соединяемъ одно изъ новыхъ уравненій съ $m—2$ другими, что даетъ $m—2$ уравненій съ $m—2$ неизвѣстными. Продолжая такимъ образомъ, наконецъ получимъ одно уравненіе съ одною неизвѣстною, изъ котораго и выведемъ величину этой неизвѣстной. Потомъ, переходя отъ одного уравненія къ другому до даннаго уравненія, постепенно опредѣлимъ величину другихъ неизвѣстныхъ.*

53. Этотъ способъ исключенія называется *способомъ исключенія посредствомъ сложенія и вычитанія*, потому что неизвѣстныя дѣйствительно уничтожаются сложеніемъ или вычитаніемъ двухъ уравненій, приготовленныхъ однако жъ такимъ образомъ, что въ обоихъ одна неизвѣстная имѣетъ одинакія предстоящія.

Есть еще два главные способа исключенія. Первый, называемый способомъ *подстановленій*, состоитъ въ слѣдующемъ: изъ одного уравненія выводятъ выраженіе одной неизвѣстной величины, принимая всѣ прочія количества за извѣстныя, и подставляютъ ее въ прочія уравненія; тогда получаютъ новыя уравненія, въ которыхъ будетъ одною неизвѣстною менѣе; продолжая то же дѣйствіе, получаютъ наконецъ одно уравненіе съ одною неизвѣстною.

Второй способъ по *сравненію*, состоитъ въ томъ, что изъ каждаго уравненія выводятъ величину одной и той же неизвѣстной величины, и потомъ сравниваютъ ея выраженія попарно; въ новыхъ уравненіяхъ будетъ одною неизвѣстною меньше; потомъ поступаютъ съ ними какъ и съ данными уравненіями.

Но эти два способа представляютъ то неудобство, что въ новыхъ уравненіяхъ содержатся иногда знаменатели, которые въ послѣдствіи надобно уничтожать. Впрочемъ способъ подстановленія выгоденъ, когда въ одномъ изъ уравненій предстоящее одной неизвѣстной будетъ 1; тогда помянутое неудобство не существуетъ. Вообще же *способъ исключенія посредствомъ сложенія и вычитанія* предпочтительнѣе, и если предстоящія не слишкомъ велики, можно даже дѣлать сложеніе или вычитаніе въ одно время съ умноженіемъ, посредствомъ котораго уравниваются предстоящія.

54. Часто случается, что не всѣ неизвѣстныя содержатся въ каждомъ уравненіи задачи; въ такихъ случаяхъ можно гораздо скорѣе сдѣлать исключеніе.

Напр. даны четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 13, \ \ldots\ldots (1),\\ 4u - 2z &= 30, \ \ldots\ldots (2),\\ 4y + 2z &= 14, \ \ldots\ldots (3),\\ 5y + 3u &= 32, \ \ldots\ldots (4). \end{aligned}$$

При первомъ взглядѣ можно замѣтить, что исключивъ z изъ уравненій (1) и (3), получимъ уравненіе въ x и y; исключивъ u изъ (2) и (4), получимъ также уравненіе въ x и y, а изъ двухъ уравненій легко опредѣлить неизвѣстныя x и y.

Исключивъ z изъ (1) и (3), получимъ $7y-2x=1$; а исключивъ u изъ (2) и (4), имѣемъ $20y+6x=38$.

Умножимъ первое на 3, и сложимъ со вторымъ будетъ $41y=41$; откуда . . . . , ... $y=1$

Вставляя эту величину въ $7y-2x=1$,
находимъ . . . . $x=3$

Вставивъ величину x въ уравненіе (2),
будетъ $4u-6=30$, откуда . . . . $u=9$

Наконецъ, подставивъ величину y въ уравненіе (3), получимъ . . . . $z=5$.

Для упражненія предлагаемъ пять уравненій:

$$\left.\begin{aligned} 7x-2z+3u&=17\\ 4y-2z+\ t&=11\\ 5y-3x-2u&=\ 8\\ 4y-3u+2t&=\ 9\\ 3z+8u&=33 \end{aligned}\right\}$$

Изъ которыхъ выведемъ слѣдующія величины;
$x=2$, $y=4$, $z=3$,
$u=3$, $t=1$.

55. До сихъ поръ мы предполагали, что число уравненій равно числу буквъ употребленныхъ для означенія неизвѣстныхъ. Это условіе необходимо для опредѣленности задачи со многими неизвѣстными, то есть, чтобы ею не допускалось безконечнаго числа рѣшеній.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что задача съ двумя неизвѣстными x и y, доставляетъ одно уравненіе $5x-3y=12$; изъ него выводимъ $x=\frac{12+3y}{5}$.

Но полагая послѣдовательно

$$y=1,\ 2,\ 3.\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\ldots,$$

будетъ

$$x=3,\ \frac{18}{5},\ \frac{21}{5},\ \frac{24}{5},\ \frac{27}{5},\ 6,\ \ldots\ldots;$$

и всѣ системы величинъ

$$(x=3,\ y=1),\ \left(x=\frac{18}{5},\ y=2\right),\ \left(x=\frac{21}{5},\ y=3\right),\ \ldots,$$

вставленныя вмѣсто x и y въ уравненіе, одинаково удовлетворяютъ ему.

Если бъ были даны уравненія съ тремя неизвѣстными, мы могли бъ исключить одну неизвѣстную изъ данныхъ уравненій, и получили бы одно уравненіе, которое, заключая двѣ неизвѣстныя, будетъ удовлетворяться безконечнымъ числомъ величинъ, взятыхъ для этихъ неизвѣстныхъ: слѣдовательно и для третьей неизвѣстной будемъ имѣть безконечное число величинъ. Вообще, задача будетъ тогда только *опредѣленная*, когда въ ней столько же различныхъ условій сколько неизвѣстныхъ, и когда каждое изъ этихъ условій можетъ выразиться уравненіемъ. Въ послѣдствіи мы займемся задачами, въ которыхъ меньше *существенно*-различныхъ уравненій, нежели неизвѣстныхъ.

56. Перейдемъ къ разрѣшенію другихъ задачъ съ двумя и болѣе неизвѣстными.

VI. *Нѣкто имѣетъ капиталъ въ 30.000 р., съ котораго получаетъ проценты по x рубл. со 100; онъ также имѣетъ долгу 20.000 р., за которые платитъ по y рубл. со 100. Сумма получаемыхъ процентовъ болѣе суммы платимыхъ 800 рублями. Другой, имѣетъ капиталъ въ 35,000 р., съ котораго получаетъ по y со 100, и долгу 24.000 р., за которые платитъ по x со 100; сумма получаемыхъ имъ процентовъ болѣе суммы платимыхъ 310 рублями. Опредѣлить оба процента x и y.*

Рѣшеніе. Проценты уже означены буквами x и y; чтобъ узнать, сколько приноситъ 30.000 р. по x со 100, составимъ пропорцію, $100 : x = 30,000 : \frac{30000x}{100} = 300x$. Также найдемъ, что 20,000 р. по y проц. приносятъ $\frac{20000y}{100}$ или

$200y$. По условію разность этихъ суммъ равна 800 рублямъ. И такъ для перваго уравненія имѣемъ

$$300x - 200y = 800.$$

Выражая алгебраически второе условіе задачи, найдемъ новое уравненіе . . . . $350y - 240x = 310$.

Первое уравненіе дѣлится на 100, а второе на 10, слѣдовательно ихъ можно замѣнить слѣдующими:

$$3x - 2y = 8,$$
$$35y - 24x = 31.$$

Чтобъ исключить x, умножимъ 1-е уравненіе на 8, и сложимъ со вторымъ; будетъ $19y = 95$, откуда $y = 5$. Подставивъ величину y въ первое, получимъ

$$3x - 10 = 8, \text{ откуда } x = 6.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

30,000 р. по 6 проц. даютъ 300×6 или 1800 р.

20,000 р. по 5 проц. даютъ 200×5 или 1000 р.

и $$1800 - 1000 = 800.$$

Также повѣряется и второе условіе.

VII. *Найдены три слитка разныхъ металловъ. Въ фунтѣ перваго находится 7 унцій серебра, 3 унціи мѣди и 6 олова. Въ фунтѣ втораго слитка 12 унцій серебра, 3 мѣди и 1 унція олова. Фунтъ третьяго содержитъ 4 унціи серебра, 7 мѣди и 5 олова. Спрашивается сколько надобно взять отъ каждаго слитка, чтобы составить новый слитокъ, котораго фунтъ содержалъ бы въ себѣ 8 унцій серебра* $3^3/_4$ *мѣди, и* $4^1/_4$ *олова?*

Рѣшеніе. Означимъ буквами x, y и z число унцій, которыя нужно взять изъ каждаго слитка, чтобы составить фунтъ требуемаго слитка. Какъ въ первомъ слиткѣ 7 унцій серебра на 1 фунтъ (или 16 унцій), то на 1 унцію выходитъ $\frac{7}{16}$ унцій серебра, а слѣд. на x унцій будетъ $\frac{7x}{16}$ унцій серебра. Такимъ же образомъ найдемъ, что $\frac{12y}{16}$, $\frac{4z}{16}$, выражаютъ число унцій серебра, взятыхъ во второмъ и третьемъ слиткахъ, для составленія новаго; но, по условію, въ новомъ слиткѣ должно быть 8 унцій серебра; слѣдовательно для перваго уравненія получимъ

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{7x}{16}+\frac{12y}{16}+\frac{4z}{16}=8,\ \text{или}\ .\ .\ . & 7x+12y+4z=128.\\ \text{Для мѣди найдемъ}.\ .\ .\ .\ .\ . & 3x+3y+7z=60.\\ \text{а для олова}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & 6x+y+5z=68.\end{array}\right\}$$

Въ этихъ уравненіяхъ неизвѣстная y имѣетъ самыя меньшія предстоящія; поэтому сначала исключимъ y.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Умноживъ второе уравненіе на 4, вычтемъ изъ него первое; будетъ}\ .\ .\ .\ .\ .\ . & 5x+24z=112\\ \text{Умножая третье уравненіе на 3, и вычитая изъ него второе},\ .\ .\ .\ .\ .\ . & 15x+8z=144\end{array}\right\}$$

Умноживъ послѣднее уравненіе на 3, и вычтя изъ этого произведенія предъидущее уравненіе, получимъ $40x=320$, или $x=8$. Подставивъ эту величину x въ уравненіе

$15x+8z=144$, будетъ $120+8z=144$, откуда $z=3$.

Наконецъ, подставивъ величины $x=8$ и $z=3$ въ уравненіе $6x+y+5z=68$, будетъ

$$48+y+15=68,\ \text{откуда}\ y=5.$$

И такъ, для составленія одного фунта новаго слитка, должно взять 8 унц. 1-го, 5 унц. 2-го, и 3 унц. 3-го. Въ самомъ дѣлѣ, если въ 16 унціяхъ 1-го слитка находится 7 унц. серебра, то въ 8 унціяхъ будетъ $\frac{7\times 8}{16}$ унцій серебра. Равномѣрно, $\frac{12\times 5}{16}$ и $\frac{4\times 3}{16}$ представятъ количество серебра, содержащагося въ 5 унціяхъ втораго слитка и въ 3 унц. третьяго. Но $\frac{7\times 8}{16}+\frac{12\times 5}{16}+\frac{4\times 3}{16}=\frac{128}{16}=8$; и такъ въ четвертомъ слиткѣ находится 8 унцій серебра, какъ требуется задачею. Такимъ же образомъ повѣряется условіе относительно мѣди и олова.

57. Для упражненія предлагаемъ слѣдующіе примѣры.

VIII. *Одинъ ремесленникъ оканчиваетъ работу, выраженную буквою* a, *въ* b *время, другой ремесленникъ работу* c *въ* d *время; третій, работу* e *въ* f *время. Спрашивается во сколько времени всѣ три ремесленника вмѣстѣ окончатъ работу* g.

(*Можно взять сажень за единицу работы, а день за единицу времени*).

Отвѣтъ: $x=\frac{bdfg}{abf+bcf+bde}$.

Приложеніе. $a=27$ саж., $b=4$ дн.; $c=35$ саж., $d=6$ дн.; $e=40$ саж., $f=12$ д.; $g=191$ саженъ. Найдемъ $x=12$.

IX. *Въ 32 фунтахъ морской воды содержится 1 фунтъ соли. Сколько фунтовъ прѣсной воды должно прибавить къ этимъ 32 фунтамъ, чтобы въ 32 фунтахъ новой смѣси содержалось не болѣе* $^1/_8$ *фунта соли?* (Отв. 224 ф.)

X. *Часы показываютъ полдень. Спрашив. сколько разъ стрѣлки сойдутся отъ полудня до полуночи, и въ какое время будутъ сходиться?* (Отв. *Число* сходовъ 11. — 1-й *сходъ* въ 1 ч. $5'^5/_{11}$; 2-й *сходъ* въ 2 ч. $10'^{10}/_{11}$; 3-й въ 3 ч. $16'^4/_{11}$; . . .).

XI. *Число состоитъ изъ трехъ знаковъ или цифръ; сумма цифръ есть 11; цифра единицъ вдвое больше цифры сотенъ; когда же приложимъ къ этому числу 297, то сумма даетъ искомое число на оборотъ. Какое число имѣетъ эти свойства?* (Отв. 326).

XII. *Нѣкто отдаетъ въ проценты 100,000 рублей; съ одной части этихъ денегъ онъ получаетъ по 5 со* $^0/_0$, *съ другой по 4 со* $^0/_0$, *всего же получаетъ процентовъ 4640 рублей. Спраш. каждая часть?* (Отв. 64,000 и 36,000).

XIII. А *имѣетъ нѣкоторый капиталъ, съ котораго получаетъ извѣстный процентъ;* В, *имѣя 10,000 руб. болѣе* А *и получая 1 со* $^0/_0$ *болѣе его, получаетъ 800 рубл. болѣе дохода;* С, *который имѣетъ 15,000 рубл. болѣе нежели* А *и 2 со* $^0/_0$ *процентовъ болѣе, получаетъ 1500 рублей болѣе* А; *спраш. какъ велики капиталы ихъ и по сколько получаютъ со* $^0/_0$?

Капиталы:	30,000,	40,000,	45,000.
Проценты:	4,	5,	6.

§ III. ЗАДАЧИ, СЪ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РѢШЕНІЯМИ.

ТЕОРІЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

58. При рѣшеніи задачъ, помощію алгебраическихъ знаковъ, часто встрѣчаются особенныя обстоятельства, которыя съ перваго взгляда кажутся затруднительными; разсматривая же ихъ внимательнѣе, можно не только объяснить, но даже воспользоваться ими для доставленія бо̀льшей общности *алгебраическому языку.*

Примѣръ: *Найти число, которое вмѣстѣ съ числомъ* b *составляетъ сумму* a.

Рѣшеніе. Называя x искомое число, имѣемъ уравненіе $b + x = a$, откуда $x = a - b$.

Это выраженіе или *формула* даетъ величину x, при всѣхъ частныхъ случаяхъ даннаго вопроса.

Положимъ $a = 47$, $b = 29$; будетъ

$$x = 47 - 29 = 18.$$

Положимъ еще $a = 24$, $b = 31$; будетъ $x = 24 - 31$.

Но 31 равно $24 + 7$; поэтому можно написать: $x = 24 - 24 - 7$, или $x = -7$. Эта величина x называется *отрицательнымъ рѣшеніемъ*. Какъ объяснить это рѣшеніе?

Переходя къ изложенію задачи, видимъ, что число 31, сложенное съ другимъ числомъ, никакъ не можетъ составить 24; въ этомъ частномъ случаѣ никакое число не можетъ удовлетворить задачѣ. Но если въ уравненіи задачи, $31 + x = 24$, вмѣсто $+x$ вставимъ найденную отрицательную величину -7, то будетъ $31 - 7 = 24$: это уравненіе вѣрно, и выражаетъ, что число 31, уменьшенное числомъ 7, даетъ въ разности 24.

Слѣд. *отрицательное рѣшеніе*, $x = -7$, показываетъ невозможность удовлетворить задачѣ въ настоящемъ ея смыслѣ; но независимо отъ знака, т. е. $x = 7$, это рѣшеніе удовлетворяетъ вопросу, съ такимъ измѣненіемъ: *найти число которое безъ 31, даетъ въ остаткѣ 24*, и эта задача отличается отъ первой только тѣмъ, что слово *вмѣстѣ* замѣнено словомъ *безъ*, а *сумма* замѣнена *остаткомъ*.

Чтобы прямо рѣшить новую задачу, стоитъ только составить уравненіе $31 - x = 24$, откуда $31 - 24 = x$, или $x = 7$.

Отцу a *лѣтъ*, *сыну* b *лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ сынъ будетъ вчетверо моложе отца?*

Рѣшеніе. Положимъ, черезъ x лѣтъ; тогда отцу будетъ $a + x$ лѣтъ, а сыну $b + x$ лѣтъ; и такъ имѣемъ уравненіе

$$b + x = \frac{a + x}{4}\text{, откуда } x = \frac{a + 4b}{3}.$$

Положимъ $a = 54$, $b = 9$;

и $$x = \frac{54 - 36}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если отцу 54 года, а сыну 9 лѣтъ, то черезъ 6 лѣтъ отцу будетъ 60; а сыну 15 лѣтъ; но 15 вчетверо менѣе 60, слѣдов. $x = 6$ удовлетворяетъ вопросу.

Положимъ теперь $a = 45,\ b = 15$;

будетъ $$x = \frac{45 - 60}{3} = -5.$$

Когда сдѣлаемъ вычитаніе и раздѣлимъ на 3, по правиламъ алгебраическаго дѣленія, § 25, то получимъ $x = -5$. Какъ понимать это *отрицательное рѣшеніе?*

Перейдемъ къ уравненію задачи, которое въ этомъ частномъ случаѣ будетъ $15 + x = \frac{45 + x}{4}$. Оно заключаетъ явную несообразность: вторая часть приводится къ $\frac{45}{4} + \frac{x}{4}$, а каждый изъ этихъ членовъ меньше соотвѣтствующаго члена первой части. Но если въ уравненіи вставимъ -5 вмѣсто $-x$, то будетъ $15 - 5 = \frac{45 - 5}{4}$, или $10 = \frac{40}{4}$, уравненіе вѣрное, которое показываетъ, что не прибавить, а вычесть должно 5 лѣтъ изъ обоихъ возрастовъ, для того, чтобы сынъ былъ вчетверо моложе отца. И такъ, независимо отъ знака, это рѣшеніе удовлетворяетъ слѣдующей задачѣ: *отцу 45 лѣтъ, сыну 15; сколько прошло лѣтъ съ того времени, когда сынъ былъ вчетверо моложе отца?*

Уравненіе новой задачи будетъ $15 - x = \frac{45 - x}{4}$, откуда выводимъ $60 - 4x = 45 - x$; и $x = 5$.

Въ самомъ дѣлѣ, если вникнемъ въ смыслъ вопроса, то увидимъ, что отношеніе настоящихъ лѣтъ сына и отца есть $\frac{15}{45}$ или $\frac{1}{3}$; очевидно лѣта сына не могутъ уже быть вчетверо менѣе лѣтъ отца; потому что, § 6, дробь увеличивается, когда къ обоимъ членамъ ея прикладываютъ одно и то же число, и напротивъ того уменьшается, когда изъ обоихъ членовъ вычитаютъ одно и то же число.

59. Можно вывесть общее правило:

1-е. *Всякая отрицательная величина, полученная для неизвѣстной въ задачѣ 1-й степени, показываетъ несообразность въ условіяхъ задачи, или покрайней мѣрѣ въ уравненіи, которымъ выражена эта задача*, § 60. 2-е. *Независимо отъ знака, эту величину можно разсматривать какъ рѣшеніе другой задачи, которая отличается отъ данной только тѣмъ, что нѣкоторыя количества изъ слагаемыхъ сдѣлались вычитаемыми, и обратно.*

Доказательство. Первую часть легко доказать. Если для x получаемъ отрицательную величину, то это необходимо происходитъ оттого, что въ уравненіи задачи требуется вычесть большее число изъ меньшаго, *дѣйствіе невозможное*. Такимъ образомъ величины $x = -7$, $x = -5$, произошли, § 58, изъ уравненій $x = 24 - 31$, $x = \frac{45 - 60}{3}$. Если же никакое независимое число *), взятое вмѣсто x, не удовлетворяетъ конечному уравненію, которое выведено помощію правильныхъ преобразованій изъ уравненія задачи (43, 44, 45), то и это первое уравненіе также не можетъ быть удовлетворено въ томъ смыслѣ, въ какомъ оно составлено.

Часто невозможность рѣшенія задачи въ прямомъ смыслѣ ея условій обнаруживается при первомъ взглядѣ на уравненіе, какъ напр. въ двухъ предъидущихъ примѣрахъ. Въ другихъ случаяхъ, это труднѣе замѣтить; но вычисленія всегда обнаружатъ невозможность.

Перейдемъ ко второй части правила. Если вмѣсто x вставимъ въ уравненіе $-x$, то всѣ члены, содержащіе x, изъ слагаемыхъ сдѣлаются вычитаемыми, и обратно; напр. $+ax$ обратится въ $+a \times -x$, или въ $-ax$; членъ $-bx$ обратится въ $-b \times -x$, или въ $+bx$. И такъ, выразивъ новое уравненіе словами, необходимо получимъ новую задачу, которая отличается отъ первой только тѣмъ, что нѣкоторыя количества изъ слагаемыхъ сдѣлались вычитаемыми, и обратно.

Остается показать, что подстановленіе $-x$ вмѣсто x въ уравненіе, даетъ въ выводѣ $x = p$, если сначала получили $x = -p$ (p число *независимое*).

Вообще, посредствомъ *извѣстныхъ преобразованій*, всякое уравненіе можно привесть къ виду $ax = -b$; (здѣсь a и b независимыя числа).

Изъ уравненія выводимъ $x = \frac{-b}{a}$, или $x = -\frac{b}{a}$ или наконецъ $x = -p$, выражая буквою p независимое число $\frac{b}{a}$. Но если въ первоначальномъ уравненіи вставимъ $-x$ вмѣсто x, то изъ новаго уравненія получимъ $-ax = -b$, откуда

---

*) *Независимымъ* называется число, разсматриваемое независимо отъ знака сложенія или вычитанія.

$x = \frac{-b}{-a}$ или $\frac{b}{a}$, или наконецъ $x = p$, *что и слѣдовало доказать.* [*])

Поэтому, независимо отъ знака, можно разсматривать отрицательныя рѣшенія какъ рѣшенія данныхъ задачъ; но не въ томъ смыслѣ, въ какомъ онѣ были предложены, а съ измѣненіемъ нѣкоторыхъ условій. Чтобы получить новое изложеніе задачи, всего лучше *въ уравненіи задачи перемѣнить* $+x$ *въ* $-x$, *и потомъ выразить новое уравненіе* словами. (Въ § 71 доказано это правило, относительно уравненій первой степени со многими неизвѣстными).

60. *Примѣчаніе.* Въ строгомъ смыслѣ это правило совершенно справедливо только въ отношеніи уравненій, а не всегда прилагается къ изложенію задачи; иногда, не смотря на совершенно правильное изложеніе смысла задачи, рѣшеніе ея уравненія даетъ отрицательную величину. Это происходитъ оттого, что въ приложеніи алгебраическаго способа къ рѣшенію задачъ, мы часто беремъ нѣкоторыя условія въ другомъ смыслѣ, нежели какъ слѣдовало бы ихъ понимать, и въ этомъ случаѣ найденное отрицательное рѣшеніе показываетъ какъ должно исправить погрѣшность, которая произошла отъ неправильнаго разсмотрѣнія условій задачи. И такъ уравненіе невѣрно, хотя вопросъ можно рѣшить; и только въ такомъ случаѣ, когда въ уравненіи съ точностію выражены, какъ самый вопросъ, такъ и смыслъ различныхъ его условій, можно приложить предъидущее правило къ изложенію вопроса. Въ послѣдствіи увидимъ подобные примѣры; въ особенности въ приложеніяхъ Алгебры къ геометрическимъ вопросамъ, правило это болѣе примѣняется къ уравненіямъ, нежели къ изложенію вопроса.

Впрочемъ, если внимательно разсмотрѣть доказательство этого правила, то легко замѣтить, что разсужденія относятся не столько къ изложенію задачъ, сколько къ уравненіямъ, которыя суть алгебраическія ихъ выраженія.

61. Въ предъидущемъ доказательствѣ мы умножали $+a$ на $-x$, дѣлили $-b$ на a, $-b$ на $-a$, и при этихъ дѣйствіяхъ

---

[*]) Смотри: Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel, par *Carnot*, 2-e édition. (*Разсужденіе о метафизикѣ исчисленія безконечныхъ*, перевед. В. Шищацкимъ. Казань. 1823).

примѣняли къ одночленамъ правила *знаковъ*, выведенныя для умноженія и дѣленія многочленовъ. Казалось бы что надобно также доказать справедливость этихъ правилъ, относительно отдѣльныхъ одночленовъ и это дѣлаютъ почти всѣ сочинители. Но доказательства ихъ имѣютъ только видъ точности, и весьма неопредѣленны. И такъ, мы просто скажемъ, что *для объясненія отдѣльныхъ выводовъ, встрѣчающихся въ Алгебрѣ, правила знаковъ, доказанныя для многочленовъ, распространены и на одночлены. Не допустить этого распространенія значило бы лишить себя одной изъ важнѣйшихъ выгодъ алгебраическаго языка, именно: соединенія въ одной формулѣ рѣшеній многихъ вопросовъ одного рода, которые отличаются только смысломъ нѣкоторыхъ условій; то есть, что нѣкоторыя количества будутъ слагаемыми въ однихъ и вычитаемыми въ другихъ, и на оборотъ.*

Распространеніе правилъ, принятыхъ для многочленовъ, на одночленныя количества, оправдывается также слѣдующимъ:

Въ доказательствѣ § 17, для умноженія двучленовъ $a-b$ и $c-d$, очевидно полагается $a>b$ и $c>d$. Въ противномъ случаѣ эти разсужденія не представляли бы уму никакого точнаго значенія; однако жъ, однажды принявъ правило знаковъ, мы не отрицаемъ этого правила, каковы бы ни были отношенія величинъ a, b, c, d. Но какъ произведеніе $a-b$ на c есть $ac-bc$, то *произведеніе отрицательнаго количества* $a-b$ (полагая $a<b$) *на положительное количество* c, *будетъ отрицательнымъ*.

Также, изъ произведенія b на $c-d$, выражаемаго формулою $bc-bd$, слѣдуетъ: что *произведеніе положительнаго количества* b *на отрицательное выраженіе* $c-d$, ($c<d$), *будетъ отрицательнымъ*.

Наконецъ, какъ произведеніе $a-b$ на $c-d$ есть $ac-bc-ad+bd$, которое можно изобразить такъ: $bd-ad-bc+ac$ или $d(b-a)-c(b-a)$, то, положивъ $d>c$ и $b>a$, или $b-a$ положительнымъ, необходимо будетъ $d(b-a)>c(b-a)$, а потому и $d(b-a)-c(b-a)$ положительное. Слѣд. *произведеніе отрицательнаго выраженія* $a-b$ *на отрицательное выраженіе* $c-d$ (полагая $a<b$ и $c<d$), *есть положительное*.

Къ тому жъ, въ этомъ-то и состоитъ одно изъ отличительныхъ свойствъ Алгебры. Въ Ариѳметикѣ и Геометріи мы разсуждаемъ о предметахъ дѣйствительно существующихъ, которые разумъ легко постигаетъ, между тѣмъ, какъ въ Алгебрѣ разсужденія и дѣйствія, по большей части, относятся къ предметамъ *воображаемымъ* или *мнимымъ*, или къ знакамъ выражающимъ дѣйствія невозможныя; но вѣрность выводовъ, которые получаются такимъ способомъ и которые мы также получили бы посредствомъ другихъ способовъ, хотя точнѣйшихъ, но гораздо продолжительнѣйшихъ, достаточно оправдываютъ ходъ, нами избранный.

62. Въ Алгебрѣ весьма часто случается прилагать правила знаковъ къ одночленнымъ количествамъ; поэтому мы повторимъ въ кратцѣ эти правила; притомъ, они доставятъ новыя выраженія, свойственныя алгебраическому языку.

Начнемъ сложеніемъ и вычитаніемъ.

Чтобы сложить $+b$ или $-b$ съ количествомъ, выраженнымъ буквою a, должно писать $a+b$ или $a-b$, то есть, *пишутъ члены одинъ возлѣ другаго, съ принадлежащими имъ знаками*, § 13.

Чтобы вычесть $+b$ или $-b$ изъ a, должно писать $a-b$ или $a+b$, то есть, *перемѣнить знакъ вычитаемаго члена и написать его съ новымъ знакомъ вслѣдъ за уменьшаемымъ членомъ*, § 14.

Касательно умноженія и дѣленія замѣтимъ, что

$$\left.\begin{array}{l} +a\times+b,\ \text{или}\ -a\times-b\ \text{даютъ произведеніе}\ +ab \\ -a\times+b,\ \text{или}\ +a\times-b\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ -ab \end{array}\right\}(17).$$

$$\left.\begin{array}{l} +a:+b,\ \text{или}\ -a:-b,\ \text{даютъ въ частномъ}\ +\frac{a}{b} \\ -a:+b,\ \text{или}\ +a:-b,\ \text{даютъ}\ \ldots\ldots\ -\frac{a}{b} \end{array}\right\}(25).$$

Изъ этихъ правилъ можно вывесть слѣдующее:

1-е. Въ Алгебрѣ, слова: *придать* и *сумма* не всегда соотвѣтствуютъ, какъ въ Ариѳметикѣ, понятію объ увеличиваніи: алгебраическая сумма $a+(-b)$ или $a-b$, собственно есть разность между числомъ единицъ, выражаемыхъ буквою a, и числомъ единицъ выражаемыхъ буквою b; слѣд. этотъ выводъ меньше a. Чтобъ отличить такую сумму отъ ариѳметической, ее и называютъ *алгебраическою суммою*. Напр. многочленъ $2a^3-3a^2b+3b^2c-2a^2c$ есть *алгебраическая сумма*, когда мы разсматриваемъ его какъ соединеніе членовъ $2b^2$, $-3a^2b$, $+3b^2c$, $-2a^2c$, съ ихъ знаками;

собственное же его значеніе есть ариѳметическая разность между суммою единицъ, заключающихся въ слагаемыхъ членахъ, и суммою единицъ вычитаемыхъ членовъ.

Поэтому, въ численныхъ приложеніяхъ алгебраическая сумма можетъ обратиться въ число *отрицательное* или имѣющее знакъ —.

2-е. Слова: *вычесть* и *разность* не всегда представляютъ понятіе объ уменьшеніи; разность между $+a$ и $-b$, равная $a+b$, больше числа a; это *алгебраическая разность*, потому что выводъ можно представить въ видѣ $a-(-b)$.

Поэтому отрицательныя величины можно разсматривать какъ рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ; напр. въ уравненіи $31+x=24$, выводъ $x=-7$ показываетъ, что должно приложить -7 къ 31, чтобы получить 24; и въ самомъ дѣлѣ, $31+(-7)$ или $31-7$ равно 24.

Въ уравненіи $15+x=\frac{45+x}{4}$, выводъ $x=-5$ также показываетъ, что должно приложить -5 къ обоимъ возрастамъ, чтобы лѣта сына составляли четвертую часть лѣтъ отца; въ самомъ дѣлѣ,

$$15+(-5), \text{ или } 15-5=10.$$

$$45+(-5), \text{ или } 45-5=40.$$

63. Частое употребленіе отрицательныхъ количествъ въ алгебраическихъ вычисленіяхъ и необходимость производить надъ ними тѣ же дѣйствія, какъ и надъ независимыми количествами, привела къ двумъ другимъ правиламъ, которыя въ послѣдствіи часто будутъ встрѣчаться: 1-е, *всякое отрицательное количество* $-a$, *менѣе* 0; 2-е, *изъ двухъ отрицательныхъ количествъ меньшее есть то, котораго численная или независимая величина будетъ болѣе.* Поэтому $-a<0$ и $-a<-b$, если численная величина a болѣе величины b. Объяснимъ оба правила.

Если изъ одного числа будемъ вычитать рядъ чиселъ, постепенно увеличивающихся, то остатки будутъ постепенно уменьшаться. Напр. если изъ числа 6, будемъ вычитать 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, . . . , то получимъ

6—1, 6—2, 6—3, 6—4, 6—5, 6—6, 6—7, 6—8, 6—9
или 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3.

Отсюда видно, что — 1 должно быть менѣе 0, потому что 0 выражаетъ разность между 6 и 6, между тѣмъ, какъ -1 выражаетъ разность между 6 и другимъ бо̀льшимъ числомъ. По той же причинѣ -1 болѣе -2, -2 болѣе -3, хотя численныя величины первыхъ выраженій менѣе величины вторыхъ.

Другимъ образомъ. Если для объясненія особенныхъ выводовъ, получаемыхъ черезъ алгебраическое рѣшеніе задачи, мы согласились разсматривать *отрицательныя выраженія* какъ количества, то производя надъ ними тѣ же дѣйствія, какъ и надъ независимыми числами, мы также должны получать точные выводы. Напримѣръ, очевидно: когда число a болѣе числа b, и къ каждому приложимъ число d, то первое $a+d$ также будетъ болѣе втораго $b+d$.

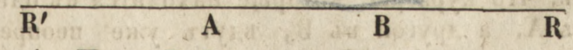
Если теперь допустимъ, что $0>-a$ и $-a>-(a+m)$, (a и m суть числа независимыя), и къ обѣимъ частямъ каждаго неравенства приложимъ $a+m$, то получимъ $a+m>m$ и $m>0$, что̀ справедливо. Напротивъ того, если положимъ $0<-a$, и $-a<-(a+m)$, то будетъ $a+m<0$, и $m<0$, выводъ нелѣпый.

ИЗСЛѢДОВАНІЕ ЗАДАЧЪ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ СЪ ДВУМЯ И БОЛѢЕ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

64. Когда задача рѣшена вообще, тогда весьма полезно разыскать: какія перемѣны произойдутъ въ выраженіяхъ неизвѣстныхъ количествъ, при измѣненіи величины данныхъ количествъ. Опредѣлить эти различныя величины и объяснить получаемые въ этихъ случаяхъ выводы, значитъ *изслѣдовать задачу*.

Слѣдующій вопросъ представляетъ почти всѣ обстоятельства, которыя могутъ встрѣтиться при изслѣдованіи задачъ первой степени.

XIV. *Два курьера отправляются въ одно время изъ двухъ разныхъ мѣстъ* A *и* B *и оба ѣдутъ въ* R. *Курьеръ, который выѣхалъ изъ* A, *проѣзжаетъ по* m *верстъ въ часъ; курьеръ изъ* B *ѣдетъ по* n *верстъ въ часъ. Спрашивается на какомъ разстояніи отъ* A *и* B *съѣдутся оба курьера?*



Рѣшеніе. Пусть R будетъ мѣстомъ ихъ съѣзда; назовемъ x и y неизвѣстныя разстоянія AR и BR, выраженныя въ верстахъ, и означимъ буквою a разстояніе между A и B. Первое уравненіе задачи будетъ

$$x-y=a, \; . \; . \; . \; . \; . \; 1\text{-е}.$$

Но m и n выражаютъ число верстъ, проѣзжаемыхъ въ 1 часъ (m и n будутъ относительными скоростями обоихъ курьеровъ), слѣдов. времена, въ которыя курьеры проѣдутъ пространства x и y, выразятся: $\frac{x}{m}$ и $\frac{y}{n}$; какъ эти времена равны, то второе уравненіе задачи будетъ

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}, \text{ или } nx-my=0, \; . \; . \; . \; 2\text{-е}.$$

Изъ уравненій 1 и 2 получимъ величины

$$x=\frac{am}{m-n}, \; y=\frac{an}{m-n}.$$

Изслѣдованіе. Какъ $m>n$, откуда $m-n>0$ или положительное, то эти величины будутъ положительными, и удовлетворятъ задачѣ въ прямомъ ея смыслѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если курьеръ A ѣдетъ скорѣе курьера B, то онъ ежеминутно къ нему приближается, и пространство, которое раздѣляло ихъ при отъѣздѣ, безпрестанно уменьшается, пока наконецъ совершенно уничтожится; тогда оба курьера будутъ находиться въ одной точкѣ назначеннаго имъ пути.

Но если $m<n$, откуда $m-n<0$ или отрицательное, обѣ величины въ одно время дѣлаются отрицательными, и будетъ

$$x=-\frac{am}{n-m}, \; y=-\frac{an}{n-m}.$$

Чтобъ объяснить эти выводы, замѣтимъ, что курьеры не могутъ съѣхаться по направленію AB, если они выѣхали въ *одно время* изъ точекъ A и B, потому что курьеръ B ѣдетъ скорѣе, и слѣдовательно пространство между ними безпрестанно увеличивается. Но какъ условіе, что они выѣхали въ одно время, нельзя выразить алгебраическимъ языкомъ, то оно и не входитъ въ уравненія задачи, которыя остались независимыми отъ этого условія. И такъ, если предположимъ, что курьеры, которые находятся въ одно время: одинъ въ A, а другой въ B, ѣдутъ уже неопредѣленное время по направленію AB, то они очевидно должны были встрѣтиться прежде въ какой-нибудь точкѣ R′, на продолженіи ВА; эта точка и опредѣлится величинами x и y. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ уравненіе задачи поэтому новому предположенію, (для чего, § 59, достаточно перемѣнить знаки при x и y въ обоихъ уравненіяхъ), получимъ

$$y-x=a,\ \frac{x}{m}=\frac{y}{n},$$

откуда $$x=\frac{am}{n-m},\ y=\frac{an}{n-m}.$$

Эти величины удовлетворяютъ новому изложенію задачи, въ которомъ полагается, что курьеры встрѣтились прежде прибытія въ точки А и В.

Положимъ $m=n$, откуда $m-n=0$; общія величины обратятся въ $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$. Какъ объяснить эти новые выводы?

Въ этомъ случаѣ нѣтъ возможности удовлетворить вопросу, то есть, курьеры никогда не могутъ съѣхаться. Если они находятся на разстояніи a одинъ отъ другаго и ѣдутъ съ равною скоростію, то они всегда остануся въ одинакомъ удаленіи. И такъ выводъ $\frac{am}{0}$ можно разсматривать какъ новый признакъ невозможности. Въ самомъ дѣлѣ, когда $m=n$, уравненія задачи будутъ

$$x-y=a,\ \frac{x}{m}=\frac{y}{m},$$

или $$x-y=a,\ x-y=0,$$

уравненія очевидно несообразныя.

Однако жъ выводы $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$, разсматриваются въ Алгебрѣ, какъ величины особаго рода, подъ названіемъ *безконечныхъ величинъ*, и вотъ почему:

Когда разность $m-n$, не равна нулю, но чрезвычайно мала, тогда выводы $\frac{am}{m-n}$, $\frac{an}{m-n}$. будутъ чрезвычайно велики.

Положивъ $m-n=0,01$, $m=3$, откуда $n=3-0,01=2,99$, будетъ

$$\frac{am}{m-n}=\frac{3a}{0,01}=300a,\ \frac{an}{m-n}=299a.$$

Положимъ еще $m-n=0,0001$, $m=3$, откуда $n=2,9999$. будетъ $\frac{am}{m-n}=30,000a$, $\frac{an}{m-n}=29,999a$.

Однимъ словомъ, пока разность скоростей не равна нулю, курьеры съѣдутся; но по мѣрѣ уменьшенія сей разности, разстояніе точки съѣзда отъ точекъ отправленія постепенно увеличивается. И такъ, когда эта *разность будетъ менѣе всякой данной величины*, *тогда разстоянія* $\frac{am}{m-n}$, $\frac{an}{m-n}$ *будутъ болѣе всякаго даннаго количества*, или безконечныя. Для краткости говорятъ: если $m-n=0$, то получаемъ $x=\frac{am}{0}$, $y=\frac{an}{0}$, величины безконечныя.

Какъ 0 меньше всякой независимой величины, то этотъ знакъ можетъ служить для выраженія послѣдняго *предѣла* наименьшей величины. Поэтому, количество, которое больше всякаго даннаго, или *безконечное* количество, можно выразить чрезъ $\frac{A}{0}$ (A есть независимое число); потому что дробь увеличивается, по мѣрѣ увеличенія числителя относительно знаменателя.

Безконечную величину означаютъ также ∞; а количество, которое меньше всякой данной величины, или 0, можно также выразить знакомъ $\frac{A}{\infty}$; потому что дробь будетъ тѣмъ меньше, чѣмъ знаменатель ея болѣе числителя. И такъ 0 и $\frac{A}{\infty}$ суть одинаковые условные знаки, которыми выражается количество, меньшее всякой данной величины, также какъ $\frac{A}{0}$ и ∞ означаютъ безконечныя величины.

Мы вдались въ нѣкоторыя подробности объ этихъ знакахъ потому, что въ иныхъ вопросахъ *безконечныя величины* могутъ почитаться отвѣтами или точными рѣшеніями смысла вопросовъ. Такіе вопросы часто встрѣчаются *въ приложеніи Алгебры къ Геометріи*. Но возвратимся къ задачѣ.

Когда $m=n$, задача въ сущности не имѣетъ рѣшенія въ *конечныхъ* и *опредѣленныхъ числахъ*; для неизвѣстныхъ получаются величины безконечныя.

Если при $m=n$, также $a=0$, то обѣ величины обратятся въ $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$. Какой смыслъ приписать этому новому выводу?

Обращаясь къ вопросу замѣтимъ, что курьеры, которые ѣдутъ съ одинакими скоростями и въ одно время выѣхали изъ одного мѣста, должны быть всегда вмѣстѣ, слѣдовательно каждая точка ихъ общаго пути будетъ для нихъ точкою съѣзда. Въ самомъ дѣлѣ при $m=n$, $a=0$, имѣемъ

$$x-y=0,\ \frac{x}{m}-\frac{x}{m}=0,$$

или,

$$x-y=0,\ x-y=0,$$

уравненія, совершенно сходныя. И такъ вопросъ будетъ неопредѣленный, § 55, потому что въ сущности имѣемъ только одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Здѣсь выраженіе $\frac{0}{0}$ *есть признакъ неопредѣленности въ изложеніи вопроса.*

Если курьеры ѣдутъ съ разною скоростію, то есть, $m>$ или $<n$, но притомъ $a=0$, тогда получимъ $x=0$, $y=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, курьеры, которые выѣхали изъ одного мѣста съ разною скоростію, очевидно не могутъ быть вмѣстѣ нигдѣ, кромѣ точки отъѣзда.

Одни только предъидущія предположенія приводятъ уже къ замѣчательнымъ выводамъ. Притомъ, этого достаточно, чтобы показать какимъ образомъ въ Алгебрѣ объясняютъ всѣ обстоятельства изложенія задачи.

Мы скоро далимъ болѣе общности предъидущему изслѣдованію; но прежде сдѣлаемъ замѣчаніе, весьма важное въ алгебраическихъ приложеніяхъ.

65. Если задача рѣшена вообще, то *достаточно перемѣнить знаки* въ формулахъ или величинахъ, полученныхъ для неизвѣстныхъ количествъ, чтобы найти величины соотвѣтствующія новымъ общимъ задачамъ, которыя отличаются отъ данной только тѣмъ, что нѣкоторыя количества изъ слагаемыхъ сдѣлались вычитаемыми, и обратно.

Возьмемъ напримѣръ задачу II (стран. 50 и 58). Полагая, что за вычетомъ работникъ получаетъ сумму c, мы имѣли уравненія

$$\left.\begin{array}{r}x+y=n\\ ax-by=c\end{array}\right\},\ \text{откуда}\ x=\frac{bn+c}{a+b},\ y=\frac{an-c}{a+b}.$$

Но если положимъ, что съ работника слѣдуетъ получить сумму c, то уравненія будутъ

$$\left.\begin{array}{r}x+y=n\\ by-ax=c\end{array}\right\}\ \text{или}\ \left\{\begin{array}{l}x+y=n,\\ ax-by=-c.\end{array}\right.$$

(Во второмъ уравненіи перемѣны знаки).

Не нужно рѣшать снова этихъ уравненій, чтобы найти соотвѣтствующія величины x и y; достаточно перемѣнить знаки буквы c, въ прежнихъ величинахъ x и y, что̀ даетъ

$$x=\frac{bn-c}{a+b},\ y=\frac{an+c}{a+b}.$$

Для доказательства, означимъ на время $-c$ буквою d; уравненія обратятся въ $x+y=n$, $ax-by=d$; они отличаются отъ уравненій первой задачи только тѣмъ, что $-c$ перемѣнено въ d. И такъ, необходимо найдемъ

$$x=\frac{bn+d}{a+b},\ y=\frac{an-d}{a+b}.$$

Когда вставимъ вмѣсто d величину его $-c$, будетъ

$$x=\frac{bn+(-c)}{a+b},\ y=\frac{an-(-c)}{a+b};$$

или, по правилу § 62, $x=\frac{bn-c}{a+b}$, $y=\frac{an+c}{a+b}$.

Можно выразить однѣми и тѣми же формулами выводы, соотвѣтствующіе обоимъ случаямъ, написавъ

$$x=\frac{bn\pm c}{a+b},\ y=\frac{an\mp c}{a+b}.$$

(Двойной знакъ, ±, выговаривается: *плюсъ или минусъ*; верхніе знаки въ обѣихъ величинахъ соотвѣтствуютъ тому случаю, когда работникъ получаетъ сумму c, а нижніе, когда онъ долженъ уплатить эту сумму).

Эти формулы также соотвѣтствуютъ и тому случаю, когда по разсчету ни работнику, ни хозяину ничего не приходится. Для этого достаточно положить $c=0$, что̀ даетъ

$$x=\frac{bn}{a+b},\ y=\frac{an}{a+b}.$$

Возьмемъ еще два общія уравненія $\begin{cases}ax+by=c,\\dx+fy=g,\end{cases}$ которыя выражаютъ какую ни есть задачу. Умножая первое на f, второе на b, и вычитая 2-е изъ 1-го, имѣемъ

$$(af-bd)\,x=cf-bg \text{ откуда } x=\frac{cf-bg}{af-bd}.$$

Также найдемъ, что . . . . $y=\frac{ag-cd}{af-bd}$.

Чтобы перейти отъ этихъ формулъ, 1-е, къ формуламъ, соотвѣтствующимъ уравненіямъ $\begin{cases}ax-by=c,\\dx+fy=g,\end{cases}$ достаточно перемѣнить b въ $-b$, что̀ даетъ $x=\frac{cf+bg}{af+bd}$, $y=\frac{ag-cd}{af+bd}$;

2-е, къ формуламъ, сооотвѣтствующимъ уравненіямъ $\left.\begin{array}{l} ax - by = c, \\ dx - fy = g, \end{array}\right\}$ достаточно перемѣнить b въ $-b$, и f, въ $-f$; что даетъ формулы $x = \frac{-cf + bg}{-af + bd} = \frac{bg - cf}{bd - df}$, $y = \frac{dg - cd}{bd - af}$. Доказательство то же самое, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ.

§ IV. Общее изслѣдованіе задачъ и уравненій первой степени.

66. Чтобы въ общемъ видѣ изслѣдовать задачи первой степени съ однею или многими неизвѣстными, постараемся вывести формулы, которыя могли бы представлять величину неизвѣстныхъ для всякой системы уравненій, заключающихъ равное число неизвѣстныхъ.

Но прежде докажемъ общее правило, которое можетъ быть приложено къ уравненіямъ всѣхъ степеней, такъ что правило, изложенное въ § 50, можетъ почесться частнымъ случаемъ этого общаго правила.

Если имѣемъ два или нѣсколько уравненій,

$$A = B \mid C = D \mid E = F \mid G = H \mid \ldots . [1].$$

съ двумя или болѣе неизвѣстными x, y, z, u; . . . , (число неизвѣстныхъ можетъ быть не равно числу уравненій), тогда:

1-е. *Вмѣсто одного изъ данныхъ уравненій можно взять уравненіе, происходящее отъ соединенія двухъ или болѣе уравненій, посредствомъ сложенія или вычитанія, если только первое уравненіе будетъ входить въ это соединеніе.*

Напримѣръ, вмѣсто уравненія $A = B$, можно вставить одно изъ слѣдующихъ:

$$A + C = B + D, \text{ или } A - C = B - D,$$
$$\text{или } A + B - D = B + D - F, \ldots . [2].$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ уравненія [1] составлены по опредѣленной величинѣ неизвѣстныхъ x, y, z, u, ... , то каждое изъ уравненій [2] необходимо должно удовлетворять тѣмъ же величинамъ неизвѣстныхъ. На оборотъ, всякая система величинъ x, y, z, u, . . . , которая удовлетворяетъ одному изъ уравненій [2] и уравненіямъ $C = D$, $E = F$, $G = H$, должна непремѣнно удовлетворять и уравненію $A = B$; въ самомъ дѣлѣ, разсматривая уравненія

$C=D$, $E=F$, $G=H$, вмѣстѣ напримѣръ съ уравненіемъ $A+C-E=B+D-F$, если вычтемъ изъ послѣдняго $C=D$ и приложимъ къ нему $E=F$, то найдемъ

$$A+C-E-C+E=B+D-F-D+F,$$

и по сокращеніи получимъ $A=B$.

2-е. *Можно даже*, прежде соединенія уравненій [1] посредствомъ сложенія или вычитанія, *умножить обѣ части одного или нѣсколькихъ уравненій на какое-нибудь извѣстное число*.

Если $A=B$, $C=D$, $E=F$, то и $mA=mB$, $nC=nD$, $pE=pF$ и обратно; поэтому, вмѣсто уравненій $A=B$, $C=D$, $E=F$, можно вставить $mA=mB$, $nC=nD$, $pE=pF$, потомъ ничто не мѣшаетъ соединять эти послѣднія уравненія посредствомъ сложенія или вычитанія.

67. Приступимъ къ изслѣдованію уравненій. Во-первыхъ, если означимъ буквою a *алгебраическую сумму* количествъ, на которыя умножено неизвѣстное, и буквою b *алгебраическую сумму* извѣстныхъ членовъ, то всякое уравненіе 1-й степени съ одною неизвѣстною, посредствомъ извѣстныхъ преобразованій, можно привести къ виду....$ax=b$.

Изъ этого уравненія имѣемъ $x=\frac{b}{a}$,

и очевидно, что никакое количество, кромѣ выраженнаго частнымъ $\frac{b}{a}$, не можетъ удовлетворять данному уравненію.

Во-вторыхъ, всякое уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными можно представить:

$$ax+by=c,$$

(a, b, c суть количества цѣлыя съ произвольными знаками).

Въ самомъ дѣлѣ, если въ данномъ уравненіи есть знаменатели то можно уничтожить ихъ, § 44; потомъ, перенеся всѣ члены, содержащіе x и y, въ первую часть, а всѣ извѣстные члены во вторую, можно означить *алгебраическую сумму* первыхъ количествами ax и by, алгебраическую сумму послѣднихъ буквою c.

Напримѣръ, даны уравненія $\left\{\begin{array}{ll} ax+by=c\,, \ldots & [1], \\ a'x+b'y=c', \ldots & [2]. \end{array}\right.$

Умножая 1-е уравненіе на b', 2-е на b, и вычитая одно изъ другаго получимъ

$$(ab' - ba')\,x = cb' - bc', \;.\;.\;.\;.\; [3],$$

откуда . . . . $= \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$.

По правилу § 66, уравненія [1] и [2] можно замѣнить уравненіями [1] и [3]; но уравненіе [3] даетъ *для* x *одну* только величину; а когда вставимъ эту величину въ уравненіе [1], то получимъ также *для* y только одну величину. Слѣдовательно данныя уравненія допускаютъ только одну систему величинъ для обѣихъ неизвѣстныхъ.

Притомъ величину y можно получить прямо посредствомъ исключенія x. Достаточно умножить 1-е уравненіе на a', 2-е на a, и вычесть первый выводъ изъ втораго (чтобы въ выраженіяхъ x и y были одинакіе знаменатели); тогда получимъ

$$(ab' - ba')\,y = ac' - ca'\;;\quad \text{откуда}\quad y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Перейдемъ теперь къ тремъ уравненіямъ съ тремя неизвѣстными, напримѣръ

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \;.\;.\;.\;.\;.\; [1], \\ a'x + b'y + c'z &= d', \;.\;.\;.\;.\;.\; [2], \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \;.\;.\;.\;.\;.\; [3]. \end{aligned}$$

Чтобъ исключить z, умножимъ 1-е уравненіе на c', 2-е на c, и вычтемъ 2-е изъ 1-го; тогда

$$(ac' - ca')\,x + (bc' - cb')\,y = dc' - cd' \;.\;.\;.\;.\;.\; [4].$$

Соединяя уравненія [2] и [3], получимъ

$$(a'c'' - c'a'')\,x + (b'c'' - c'b'')\,y = d'c'' - c'd'' \;,\;.\;.\;.\; [5].$$

Должно замѣтить, § 66, что уравненія [1], [2], [3], можно замѣнить уравненіями [1], [4], [5].

Чтобъ исключить y, умножимъ уравненіе [4] на $b'c'' - c'b''$, а уравненіе [5] на $bc' - cb'$; потомъ вычтемъ 2-е изъ 1-го, что даетъ

$$[\,(ac' - ca')(b'c'' - c'b'') - (a'c'' - c'a'')(bc' - cb')\,]\,x = (dc' - cd')(b'c'' - c'b'') - (d'c'' - c'd'')(bc' - cb')\;;$$

производя вычисленія, и раздѣливъ на c', получимъ уравненіе

$$(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')\,x = db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd'', \;.\;.\; [6]$$

изъ котораго получимъ для x одну величину

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Уравненія [1], [4], [5], а слѣдовательно и данныя уравненія, можно замѣнить уравненіями [1], [4], [6]; и такъ, если вставимъ эту величину x въ уравненіе [4], то получимъ только одну величину для y; если же эти величины x и y вставимъ въ уравненіе [1], то получимъ также только *одну* величину для z. Изъ этого видно, что данныя уравненія допускаютъ только одну систему величинъ для неизвѣстныхъ.

Величины y и z можно получить непосредственно, исключая x и z, и потомъ x и y, точно также какъ исключали y и z. Такимъ образомъ найдемъ, что

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

Легко представить себѣ ходъ дѣйствія при 4-хъ уравненіяхъ съ четырьмя неизвѣстными.

68. При употребленіи значковъ надъ буквами, для означенія предстоящихъ, открыли общія правила, по которымъ легко вывесть предъидущія формулы, не производя исключенія.

1-е. Изъ буквъ a и b, которыми означены предстоящіе неизвѣстныхъ x и y, составимъ два переложенія ab и ba, и соединимъ ихъ знакомъ —; будетъ $ab - ba$; потомъ въ каждомъ членѣ надъ второю буквою поставимъ значекъ, получится

$$ab' - ba'.$$

Это будетъ знаменатель обѣихъ величинъ. Чтобы опредѣлить числителя каждой неизвѣстной, должно вставить въ знаменатель вмѣсто буквы, означающей предстоящее неизвѣстной, букву, означающую извѣстное количество, оставляя значки на прежнихъ мѣстахъ. Поэтому $ab'-ba'$ перемѣнится въ $cb'-bc'$ для числителя величины x, и въ $ac'-ca'$ для числителя величины y.

2-е. Теперь возьмемъ три уравненія съ тремя неизвѣстными, означая буквами a, b, c предстоящія неизвѣстныхъ x, y, z, и буквами d извѣстное количество.

Чтобъ отыскать общаго знаменателя, возьмемъ опять $ab - ba$, и вставимъ въ каждомъ членѣ третье предстоящее c на всѣ мѣста; справа, въ срединѣ и слѣва; для ab получимъ

abc, acb, cba, и для ba получимъ bac, bca, cba; вставимъ между этими членами попеременно знакъ $+$ и $-$, и поставимъ въ каждомъ членѣ надъ второю буквою одинъ значекъ, надъ третьею два значка; получимъ

$$ab'c'' - ac'b'' + cb'a'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Чтобы составить числителя каждой неизвѣстной, вставимъ въ знаменателѣ вмѣсто буквы, означающей предстоящее искомой неизвѣстной, букву, означающую извѣстное количество, оставляя знаки на прежнихъ мѣстахъ; для x перемѣнимъ a въ d; для y вставимъ d вмѣсто b, а для z, d вмѣсто c.

Хотя этотъ законъ найденъ изъ наблюденія надъ двумя и тремя уравненіями, однако его можно распространить на всякое число уравненій. Доказательство этого закона весьма сложно, и выходитъ изъ предѣловъ нашего сочиненія; оно помѣщено въ *Complément de la théorie des équations du premier degré* par Desnanot и въ *Cours d'Analyse* par Cauchy.

69. Чтобы показать употребленіе этихъ формулъ, возьмемъ два уравненія $5x + 7y = 34$, $3x - 13y = -6$.

Сравнивая ихъ съ общими уравненіями

$$ax + by = c,\ a'x + b'y = c',\ \text{имѣемъ}$$

$$a = 5,\ b = -7,\ c = 34;\ a' = 3,\ b' = -13,\ c'' = -6.$$

Вставивъ въ формулы $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - b'a}$, вмѣсто a, b, c, a', b', c', эти величины, будетъ

$$\text{1-е.}\quad x = \frac{34 \times -13 - (-7) \times -6}{5 \times -13 - (-7) \times 4} = \frac{-34 \times 13 - 7 \times 6}{-5 \times 13 + 7 \times 3}$$

$$= \frac{-442 - 42}{-65 + 21} = \frac{-484}{-44} = 11;$$

$$\text{2-е.}\quad y = \frac{5 \times -6 - 34 \times 3}{5 \times -13 - (-7) \times 3} = \frac{-30 - 102}{-65 + 21} = \frac{-132}{-44} = 3.$$

Величины $x = 11$, $y = 3$, удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ. Можно увѣриться въ этомъ, вставляя ихъ въ уравненія. Но чтобы доказать это независимо отъ всякаго частнаго примѣра, замѣтимъ, что для перехода отъ формулъ, соотвѣтствующихъ уравненіямъ

$$ax + by = c, \text{ и } a'x + b'y = c',$$

къ формуламъ, соотвѣтствующимъ уравненіямъ

$$ax - by = c \text{ и } a'x - b'y = -c',$$

достаточно перемѣнить b въ $-b$, b' въ $-b'$, и c' въ $-c'$, что̀ даетъ

$$x=\frac{c\times-b'-(-b)\times-c'}{a\times-b'-(-b)\times a'}\quad y=\frac{a\times-c'-c\times a'}{a\times-b'-(-b)\times a'};$$

а чтобы изъ сихъ новыхъ общихъ формулъ вывесть величины, соотвѣтствующія частнымъ уравненіямъ, должно положить $a=5$, $b=7$, $c=34$, $a'=3$, $b'=13$, $c'=6$.

Наконецъ, чтобы получить величины, соотвѣтствующія даннымъ уравненіямъ, достаточно сдѣлать въ предъидущихъ общихъ формулахъ $a=5$, $b=-7$, $c=34$, $a'=3$, $b'=-13$, $c'=-6$, и произвесть вычисленія.

Вообще, *вмѣсто предстоящихъ* a, b...., a', b',...., *должно вставить частныя величины ихъ, взятыя съ тѣми же знаками, которые находятся при нихъ въ частныхъ уравненіяхъ, и потомъ произвесть всѣ обозначенныя дѣйствія.*

Эти приложенія также оправдываютъ необходимость распространить и на одночлены правила знаковъ, принятыя для многочленовъ, черезъ что общія формулы первой степени прилагаются ко всѣмъ частнымъ примѣрамъ.

70. Разсматривая эти формулы, можно замѣтить, что, при рѣшеніи частныхъ задачъ первой степени, получаются величины четырехъ родовъ, именно: *величины положительныя, величины отрицательныя, величины вида* $\frac{A}{\infty}$, и наконецъ *величины вида* $\frac{0}{0}$. Въ задачѣ курьеровъ получены эти четыре вывода, которые теперь разсмотримъ въ общемъ видѣ ихъ.

Положительныя величины обыкновенно выражаютъ рѣшенія задачъ въ томъ самомъ смыслѣ, въ какомъ онѣ предложены; однако жъ въ нѣкоторыхъ вопросахъ не всѣ положительныя величины удовлетворяютъ условіямъ задачи. Если напримѣръ, по свойству вопроса, всѣ искомыя числа должны быть цѣлыя, а въ рѣшеніи получаемъ дробныя числа, то рѣшены только уравненія задачи а не самая задача. Иногда же, по свойству вопроса, искомыя числа не должны быть болѣе или менѣе чиселъ извѣстныхъ и данныхъ предварительно; если найденныя величины, хотя и положительныя, не удовлетворяютъ этимъ условіямъ, которыя заключаясь въ изложеніи задачи, не могутъ быть выражены уравненіемъ, то задача также не рѣшается. И такъ *положительныя величины неизвѣстныхъ, въ сущности суть прямыя рѣшенія уравненій, и только тогда бываютъ рѣшеніями задачъ, когда свойство ихъ согласуется съ условіями задачи.* Чтобы понять, какимъ образомъ число можетъ удовлетворять уравненію, не удовлетворяя задачѣ которую оно выражаетъ, достаточно замѣтить, что *одно и то же уравненіе есть алгебраическое выраженіе многихъ задачъ*, изъ которыхъ однѣ допускаютъ *въ рѣшеніи* всевозможныя независимыя числа, другія же только числа извѣстнаго свойства.

71. Мы знаемъ уже, что̀ значатъ *отрицательныя величины* въ задачахъ съ одною неизвѣстною. Теперь докажемъ правило § 59 для задачъ со многими неизвѣстными.

Когда получаются отрицательныя величины для нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ, то очевидно уравненія задачи не удовлетворяются въ томъ смыслѣ, въ какомъ они были составлены; если бы система независимыхъ чиселъ, вставленныхъ вмѣсто x, y, z,...., могла удовлетворять этимъ уравненіямъ, то уравненія выведенныя изъ нихъ черезъ исключеніе, также должны бы были удовлетворяться тою же системою; тогда уравненіе, заключающее только одну изъ неизвѣстныхъ, для которыхъ получены отрицательныя величины, удовлетворялось бы независимымъ числомъ; а это противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно *должно измѣнить условія задачи, или по крайней мѣрѣ уравненія, выражающія эту задачу.*

Если послѣ того въ уравненіяхъ перемѣнятся знаки неизвѣстныхъ, для которыхъ получены отрицательные выводы, то въ членахъ, содержащихъ эти неизвѣстныя, также перемѣнятся знаки, и смыслъ вопроса вообще измѣнится въ томъ, что *нѣкоторыя количества изъ слагаемыхъ сдѣлаются вычитаемыми, и обратно.*

Наконецъ, когда эти измѣненія сдѣланы, тогда *новое изложеніе вопроса удовлетворяется величинами, найденными въ первомъ рѣшеніи, не принимая знаковъ ихъ въ соображеніе.* Возьмемъ напримѣръ три уравненія съ тремя неизвѣстными.

$ax+by+cz=d$, $a'x+b'y+c'=d'$, $a''x+b''y+c''z=d''$;

и положимъ, что изъ нихъ вывели $x=p$, $y=-q$, $z=-r$; измѣнимъ въ этихъ уравненіяхъ y и z въ $-y$ и $-z$, или въ y' и z' (означая на время $-y$ и $-z$ черезъ y' и z'); будетъ

$az+by'+cz'=d$, $a'x+b'y'+c'z'=d$, $a''x+b''y'+c''z'=d''$.

Эти уравненія отличаются отъ первыхъ только тѣмъ, что вмѣсто y и z вставлены y' и z', и необходимо дадутъ $x=p$, $y'=-q$, $z'=-r$; а вставляя снова $-y$ и $-z$ вмѣсто y' и z', получимъ: $x=p$, $-y=-p$, $-z=-r$, или наконецъ $x=p$, $y=p$, $z=r$, что́ и *надлежало доказать*.

И такъ, правило § 59 прилагается также къ задачамъ 1-й степени со многими неизвѣстными.

Замѣтимъ наконецъ, что иныя задачи не допускаютъ никакого измѣненія въ смыслѣ ихъ; въ этомъ случаѣ отрицательныя величины будутъ только рѣшеніями измѣненныхъ уравненій, которыя впрочемъ можно разсматривать какъ алгебраическое выраженіе другихъ задачъ, допускающихъ измѣненія.

72. Остается объяснить выраженія $\frac{A}{0}$, $\frac{0}{0}$.

Возьмемъ сначала уравненіе съ одною неизвѣстною, $ax=b$, откуда $x=\frac{b}{a}$.

1-е. Если возьмемъ для данныхъ количествъ такую величину, что $a=0$, то $x=\frac{b}{0}$. Данное уравненіе въ этомъ случаѣ будетъ $0\times x=b$, и не удовлетворяется никакимъ опредѣленнымъ числомъ; но это уравненіе можно также написать въ видѣ $\frac{b}{x}=0$; и если вмѣсто x будемъ вставлять числа постепенно увеличивающіяся, то $\frac{b}{x}$ менѣе и менѣе будетъ разнствовать отъ 0, и уравненіе болѣе и болѣе будетъ приближаться къ точному выраженію; наконецъ можно взять для x величину довольно большую, чтобы $\frac{b}{x}$ было меньше всякаго даннаго количества. Посему-то и говорятъ, что *безконечная величина* въ этомъ случаѣ удовлетворяетъ уравненію; въ самомъ дѣлѣ, есть задачи для которыхъ подобные выводы составляютъ рѣшенія; по крайней мѣрѣ достовѣрно, что уравненіе въ этомъ случаѣ не допускаетъ рѣшенія въ числахъ *конечныхъ*, а мы только это и хотѣли доказать.

2-е. Если въ одно время $a=0$ и $b=0$, то величина x обратится въ $x=\frac{0}{0}$.

Уравненіе будетъ въ этомъ случаѣ $0\times x=0$, и всякое *конечное число*, положительное или отрицательное, можетъ удовлетворять уравненію. И такъ *уравненіе* (или задача, которую оно выражаетъ) *будетъ неопредѣленное*.

73. Выраженіе $\frac{0}{0}$ иногда показываетъ существованіе множителя общаго обѣимъ частямъ дроби, который, въ слѣдствіе особаго предположенія, обращается въ 0.

Положимъ, напримѣръ, что при рѣшеніи какой-нибудь задачи получили выводъ $x=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$.

Предположивъ въ этой формулѣ $a=b$, получимъ $x=\frac{0}{0}$.

Но $a^3—b^3$ можно, § 31, привесть къ виду $(a—b)(a^2+ab+b^2)$, и $a^2—b^2$ равно $(a—b)(a+b)$; посему величина x приводится къ $x=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}$.

Если теперь уничтожимъ общій множитель $a-b$, то величина x будетъ $x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$, и сдѣлавъ потомъ $a=b$, она обратится въ $x=\frac{3a^2}{2a}$ или $x=\frac{3a}{2}$.

Возьмемъ еще выраженіе $x=\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}$. Дѣлая $a=b$, находимъ $x=\frac{0}{0}$; но исключивъ сначала общій множитель $a—b$, получимъ выраженіе $x=\frac{a+b}{a-b}$, которое обращается въ $x=\frac{2a}{0}$, когда положимъ $a=b$.

Поэтому, *выраженіе* $\frac{0}{0}$ *есть иногда признакъ существованія множителя, общаго обѣимъ частямъ дроби, которая принимаетъ этотъ видъ*. Слѣд. при опредѣленіи истинной величины дроби, должно сначала разсмотрѣть: нѣтъ ли въ ней множителя общаго числителю и знаменателю. Если нѣтъ, то уравненіе въ самомъ дѣлѣ будетъ *неопредѣленное*. Въ противномъ случаѣ уничтожаютъ общій множитель, и потомъ дѣлаютъ частное предположеніе, что даетъ истинную величину дроби, которая въ этомъ случаѣ можетъ представиться въ трехъ видахъ: $\frac{A}{B}$ (гдѣ A можетъ быть o), $\frac{A}{0}$, $\frac{0}{0}$, и уравненіе будетъ или *опредѣленное*, или *невозможное* въ конечныхъ числахъ, или же *неопредѣленное*.

Это замѣчаніе весьма полезно при изслѣдованіи задачъ.

74. Разсмотримъ теперь два уравненія съ двумя неизвѣстными, $\begin{cases} ax + by = c, \ldots\ldots [1], \\ a'x + by = c' \ldots\ldots [2]. \end{cases}$

Въ § 67 нашли $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$, $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.

Положимъ что $ab' - ba' = 0$, а числители $cb' - bc'$, $ac' - ca'$, не равны 0; тогда будемъ имѣть

$$x = \frac{cb' - bc'}{0},\ y = \frac{ac' - ca'}{0},\ \text{или}\ x = \frac{A}{0},\ y = \frac{B}{0}.$$

Объяснимъ эти выводы. Изъ уравненія $ab' - ba' = 0$, выводимъ $a' = \frac{ab'}{b}$, а вставивъ эту величину въ уравненіе [2], получимъ $\frac{ab'}{b} x + b'y = c'$, или, уничтоживъ знаменателя и раздѣливъ на b,

$$ax = b'y = \frac{bc'}{b'};$$

первая часть этого уравненія тождественна съ первою частію уравненія $ax + by = c$, между тѣмъ какъ вторыя различны, потому что изъ $c = \frac{bc'}{b'}$ выводимъ $cb' = bc'$, или $cb' - bc' = 0$, а по предположенію это выраженіе не равно нулю; притомъ же изъ $cb' \lessgtr bc'$ получимъ $c \lessgtr \frac{bc'}{b'}$.

И такъ *данныя два уравненія не могутъ быть удовлетворены въ одно время никакою системою конечныхъ величинъ* x *и* y.

Если $ab' - ba' = 0$, въ то же время и $cb' - bc' = 0$, то величина x приводится къ $x = \frac{0}{0}$; надобно объяснить эту величину. При отношеніи $ab' - ba' = 0$, уравненія приводятся къ виду $\begin{cases} ax + by = c, \\ ax + by = \frac{bc'}{b'}, \end{cases}$ и эти уравненія совершенно равны; потому что изъ $cb' - bc' = 0$ выводимъ $c = \frac{bc'}{b'}$.

И такъ, для рѣшенія задачи имѣемъ въ сущности только одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Слѣдовательно *задача будетъ неопредѣленная.*

Изъ отношенія $ab' - ba' = 0$, имѣемъ $b' = \frac{ba'}{a}$; вставивъ эту величину въ отношеніе $cb'-bc'=0$, получимъ $\frac{cba'}{a}-bc'$ $=0$, и по сокращеніи $ac'-ca'=0$, числитель величины y; изъ этого можно заключить: *когда величина x имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$, то величина y* вообще *будетъ того же вида и обратно.*

75. Это предложеніе не подходитъ только къ одному частному случаю: когда въ обоихъ уравненіяхъ предстоящее одной неизвѣстной равно нулю. Разсмотримъ этотъ замѣчательный случай. Положимъ, напримѣръ, что $b=0$ и $b'=0$; обѣ величины x и y въ этомъ случаѣ приводятся къ

$$x=\frac{0}{0} \text{ и } y=\frac{ac'-ca'}{0}, \text{ или } \frac{A}{0}.$$

Обратимся къ даннымъ уравненіямъ, которыя тогда обращаются въ

$$\left.\begin{array}{l} ax=c,\\ a'x=c,\end{array}\right\} \text{ откуда выводимъ } x=\frac{c}{a} \text{ и } x=\frac{c'}{d'}.$$

Здѣсь могутъ представиться два случая:

Или $\frac{c}{a}\gtrless\frac{c'}{a'}$; въ этомъ случаѣ уравненія несовмѣстны и величина y будетъ вида $\frac{A}{0}$ или безконечная, между тѣмъ какъ величина x будетъ вида $\frac{0}{0}$.

Или $\frac{c}{a}=\frac{c'}{d'}$; тогда уравненія согласны; притомъ, какъ отсюда выводимъ $ac'-ca'=0$, то величина y принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, подобно величинѣ x; съ тою однако жъ разницею, что величина y будетъ *неопредѣленная*, тогда какъ x имѣетъ опредѣленную величину $\frac{c}{a}$.

Сверхъ того, когда $b=0$, $b'=0$ и $ac'-ca'=0$, весьма легко доказать присутствіе общаго множителя, который въ одно время обращаетъ въ нуль оба члена общей величины x.

Положимъ $m=\frac{a'}{a}=\frac{c'}{c}$, и $n=\frac{b'}{b}$; тогда получимъ $a'=ma$, $c'=mc$ и $b'=nb$. Но если вставимъ эти величины a', b', c', въ общее выраженіе $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, то оно обратится въ . . . $x=\frac{cbn-cbm}{abn-bam}=\frac{cb(n-m)}{ab(n-m)}$, исключивъ множители b и $n-m$ получимъ $x = \frac{c}{a}$. Общее выраженіе $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$, послѣ тѣхъ же подстановленій, обращается въ $y = \frac{ac\,(m - m)}{ab\,(n - m)} = \frac{c\,(m - m)}{b\,(n - m)}$, которое въ слѣдствіе $m - m = 0$, и $b = 0$, приводится къ $y = \frac{0}{0}$; мы видѣли, что величина y въ самомъ дѣлѣ должна оставаться неопредѣленною.

Эти же сужденія прилагаются къ случаю, когда вмѣстѣ и $a = 0$ и $a' = 0$. Частный случай, когда оба предстоящіе въ уравненіи равны нулю, не подходитъ къ предложенію § 74. Нашли бы, при $a = 0$, $b = 0$, $x = \frac{cb'}{0}$, $y = \frac{-ca'}{0}$,

при $a' = 0$, $b' = 0$, $x = \frac{-bc'}{0}$, $y = \frac{ac'}{0}$.

Одни эти случаи заслуживаютъ вниманія.

76. Мы видѣли, что въ двухъ уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными, когда величина одной неизвѣстной была вида $\frac{A}{0}$ или $\frac{0}{0}$, то величина другой неизвѣстной, кромѣ одного частнаго случая, непремѣнно имѣла тотъ же видъ; сверхъ того, когда обѣ величины принимаютъ видъ $\frac{A}{0}$, уравненія *несовмѣстны*, а если онѣ вида $\frac{0}{0}$, уравненія будутъ *неопредѣленныя*.

Но если имѣемъ болѣе *двухъ* уравненій, то этихъ слѣдствій вывести нельзя. Напр. при трехъ уравненіяхъ, если положимъ общій знаменатель равнымъ 0, то, смотря по обстоятельствамъ, или ни одинъ числитель не будетъ равенъ 0; или всѣ будутъ равны 0; или только одинъ числитель будетъ равенъ 0, другіе же два не равны 0, и на оборотъ.

77. Это можно легко объяснить. При двухъ уравненіяхъ знаменатель состоитъ только изъ двухъ членовъ, и можетъ обращаться въ 0 только въ трехъ случаяхъ: когда имѣемъ

1-е. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$,

2-е. $a = 0$, $a' = 0$, или $b = 0$, $b' = 0$,

3-е. $a = 0$, $b = 0$, или $a' = 0$, $b' = 0$;

но при *трехъ* уравненіяхъ, знаменатель D, изображаемый:

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

можетъ быть представленъ въ различныхъ видахъ, напр.

$$a(b'c''-c'b'')+a'(cb''-bc'')+a''(bc'-cb'),$$
$$b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')+b''(ca'-ac'),$$
$$c(a'b''-b'a'')+c'(ba''-ab'')+c''(ab'-ba');$$

и это выраженіе можетъ обращаться въ 0 при множествѣ различныхъ предположеній, и притомъ такъ, что величины числителей будутъ независимы одна отъ другой.

Наприм. полагая, что ни одно изъ количествъ a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', не равно 0, допустимъ слѣдующія отношенія: $b'c''-c'b''=0$, $cb''-bc''=0$, откуда выводимъ $bc'-cb'=0$; тогда D обратится въ 0; а какъ числитель выраженія x, составляется изъ D, черезъ перемѣну a, a' a'' въ d, d', d'', то онъ очевидно обратится также въ 0; но нѣтъ причины полагать, что числители величинъ y и z также обратятся въ 0, потому что количества $b'c''-c'b''$, $cb''-bc''$ и $bc'-cb'$, не входятъ въ эти величины.

78. Окончимъ изслѣдованіе уравненій первой степени разсмотрѣніемъ одного частнаго случая, именно: когда въ общихъ уравненіяхъ полагаются въ одно время равными нулю всѣ извѣстныя количества, находящіяся во второй части. Въ этомъ случаѣ, изъ закона составленія числителей неизвѣстныхъ величинъ, § 68, очевидно слѣдуетъ, что эти числители также всѣ вдругъ уничтожатся, т. е, будетъ $A=0$, $B=0$, . . . Сверхъ того, какъ между предстоящими a, b, c, a', b', c', .. неизвѣстныхъ нѣтъ никакого особеннаго отношенія, то D, которое происходитъ отъ извѣстнаго соединенія этихъ предстоящихъ, вообще не будетъ равно нулю. И такъ мы получимъ $x=0$, $y=0$, $z=0$, . . . Эти величины очевидно удовлетворяютъ даннымъ уравненіямъ.

Если извѣстныя количества вторыхъ частей равны нулю и сверхъ того между предстоящими неизвѣстныхъ имѣемъ отношеніе $D=0$, то общія величины приводятся къ виду $x=\frac{0}{0}$, $y=\frac{0}{0}$, и проч.

Въ этомъ случаѣ уравненія будутъ *неопредѣленными*, но отношенія неизвѣстныхъ будутъ *опредѣленныя* числа, которыя можно вывесть изъ данныхъ уравненій. Напримѣръ, пусть даны три уравненія

$$ax+bx+cz=0,\ a'x+b'x+c'z=0,\ a''x+b''y+c''z=0,$$

въ которыхъ положимъ, § 67,

$$D \text{ или } ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0.$$

Они могутъ принять видъ
$$a\frac{x}{z}+b\frac{y}{z}+c=0, a'\frac{x}{z}+b'\frac{y}{z}+c'=0, a''\frac{x}{z}+b''\frac{y}{z}+c''=0.$$

Но принимая выраженія $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, за неизвѣстныя, изъ первыхъ двухъ уравненій выводимъ,
$$\frac{x}{z}=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}, \frac{y}{z}=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'};$$
поэтому, если будемъ брать для z *произвольныя величины, то величины x и y получатся помощію этихъ двухъ уравненій, въ которыхъ вторыя части суть отношенія постоянныя и равныя извѣстнымъ количествамъ.*

Остается узнать, удовлетворяютъ ли эти величины третьему уравненію, которое въ этомъ случаѣ дѣлается уравненіемъ условнымъ. Вставивъ ихъ въ это уравненіе, находимъ
$$a''\times\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}+b''\times\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}+c''=0,$$
или, по сокращеніи,
$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0,$$
а это условіе удовлетворяется по положенію.

79. Это приводитъ насъ къ разсмотрѣнію одного обстоятельства въ задачѣ V, § 49, именно: когда изложеніе задачи доставляетъ больше существенно различныхъ уравненій, нежели неизвѣстныхъ.

Для большей общности положимъ, что задача заключаетъ n неизвѣстныхъ, и доставляетъ m различныхъ уравненій, полагая $m>n$. *Должно соединить между собою n данныхъ уравненій, и вывесть изъ нихъ величины n неизвѣстныхъ; потомъ вставить эти величины въ прочія $m-n$ уравненій; тогда получимъ столько же отношеній между данными количествами: эти послѣднія отношенія должны быть удовлетворены, чтобы задача была возможна въ прямомъ ея смыслѣ.* Полученныя такимъ образомъ $m-n$ отношеній называются *условными уравненіями*.

80. Повторимъ вкратцѣ предъидущее изслѣдованіе. Изъ него видимъ: 1-е, что система уравненій 1-й степени съ равнымъ числомъ неизвѣстныхъ, удовлетворяется только однимъ способомъ, § 67.

2-е Всякая *положительная величина*, найденная для неизвѣстной, всегда удовлетворяетъ уравненіямъ задачи, хотя не всегда соотвѣтствуетъ изложенію ея, § 70.

3-е. *Отрицательная величина* удовлетворяетъ задачѣ или уравненію, которымъ она выражается, тогда только, когда измѣнено изложеніе задачи; но всегда удовлетворяетъ уравненію, взятому чисто въ алгебраическомъ смыслѣ, §§ 59 и 71.

4-е. Всякое *выраженіе вида* $\frac{A}{0}$, полученное для одной или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ, показываетъ несовмѣстность уравненій, по крайней мѣрѣ въ *конечныхъ* числахъ, для всѣхъ неизвѣстныхъ, §§ 72, 74 и 76.

5-е. *Выраженіе вида* $\frac{0}{0}$, полученное для одной или болѣе неизвѣстныхъ, соотвѣтствуетъ или неопредѣленности или несовмѣстности уравненій, §§ 72, 74, 75 и 76, или есть признакъ присутствія общаго множителя въ обоихъ членахъ дроби, которая приняла этотъ видъ, § 73.

6-е. Если вторыя части данной системы уравненій равны *нулю*, то величины вообще обращаются въ 0; если же притомъ и общій знаменатель неизвѣстныхъ равняется 0, то число величинъ будетъ *безконечно*; но эти величины имѣютъ между собою постоянное отношеніе, § 78.

7-е. Когда уравненій болѣе нежели неизвѣстныхъ, вопросъ возможенъ только въ томъ случаѣ, когда величины неизвѣстныхъ, выведенныя изъ равнаго числа уравненій, удовлетворяютъ также прочимъ уравненіямъ, § 79.

81. Предлагаемъ новыя задачи для изслѣдованія и рѣшенія.

XV. *Банкиръ имѣетъ монеты двухъ родовъ; чтобы составить червонецъ, нужно* a *монетъ перваго рода или* b *монетъ 2-го рода. У него требуютъ* c *монетъ на червонецъ. Сколько возьметъ онъ монетъ каждаго рода?*

Отвѣтъ. 1-го рода $\frac{a(c-b)}{-b}$; 2-го рода $\frac{b(a-c)}{a-b}$.

XVI. *Найти два смѣжные бока прямоугольника, полагая 1-е, что они находятся между собою въ данномъ отношеніи* $m : n$; *2-е, когда приложимъ или вычтемъ изъ этихъ боковъ количества* a *и* b, *то площадь измѣнится количествомъ* p.

Прикладывая a и b къ двумъ бокамъ, будетъ

$$x=\frac{m(p-ba)}{na+m},\ y=\frac{n(p-ab)}{na+mb}.$$

XVII. *Найти имѣніе трехъ особъ* A, B, C, *зная: 1-е, что имѣніе* A *вмѣстѣ съ* a *разъ взятыми имѣніями* B *и* C, *равно* p; *2-е имѣніе* B, *сложенное съ имѣніями* A *и* C, *взятыми* m *разъ, равно* q; *3-е, имѣніе* C *и* n *разъ имѣнія* A *и* B, *равно* r.

(Эту задачу легко рѣшить помощію вспомогательной неизвѣстной, выражающей сумму имѣній A, B, C).

XVIII. *Найти имѣніе шести особъ* A, B, C, D, E, F, *по слѣдующимъ условіямъ: 1-е, Сумма имѣній* A *и* B *равна* a; *сумма* $C+D=b$, $E+F=c$; *2-е, имѣніе* A *въ* m *разъ болѣе* C; D *въ* n *разъ больше* E; F *въ* p *разъ болѣе* B.

(Эту задачу можно рѣшить посредствомъ одного уравненія съ одною неизвѣстною).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧЪ И УРАВНЕНІЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

82. **Введеніе.** Когда изложеніе задачи доставляетъ уравненіе вида $ax^2=b$, въ которомъ неизвѣстная умножена сама на себя, то это будетъ уравненіе *второй степени*. Раздѣливъ обѣ части его на a, получимъ $x^2=\frac{b}{a}$; слѣдовательно для рѣшенія уравненія требуется *отыскать такое число, которое, будучи само на себя умножено, дало бы число выраженное формулою* $\frac{b}{a}$; это дѣлается посредствомъ *извлеченія квадратнаго корня*.

Въ Ариѳметикѣ подробно изложены способы извлеченія квадратныхъ корней изъ численныхъ величинъ, цѣлыхъ или дробныхъ; намъ остается примѣнить ихъ къ числамъ, выраженнымъ алгебраическими знаками.

§ I. Составленіе квадрата и извлеченіе квадратнаго корня изъ алгебраическихъ количествъ.

83. Займемся сначала одночленными количествами. Чтобъ открыть способъ извлеченія квадратнаго корня, разсмотримъ, какъ составляется квадратъ одночленнаго количества.

По правиламъ умноженія одночленовъ, § 16, имѣемъ

$$(5a^2b^3c)^2 = 5a^2b^3c \times 5a^2b^3c = 25a^4b^6c^2;$$

т. е. чтобы составить квадратъ одночлена, должно *возвысить въ квадратъ предстоящее и удвоить показателей*. Слѣдовательно, чтобы отъ квадрата одночлена перейти къ корню его, должно: *1-е, извлечь квадратный корень изъ предстоящаго, по правиламъ изложеннымъ въ Ариѳметикѣ; 2-е раздѣлить каждый показатель на два*. Напримѣръ, $\sqrt{64a^6b^4} = 8a^3b^2$; въ самомъ дѣлѣ, $(8a^3b^2) = 8a^3b^2 \times 8a^3b^2 = 64a^6b^4$.

Также $\sqrt{625a^2b^8c^6} = 25ab^4c^3$; потому что $(25ab^4c^3)^2 = 625a^2b^8c^6$.

И такъ, одночленное количество тогда будетъ квадратомъ другаго одночлена, когда *предстоящее будетъ полнымъ квадратомъ*, *и всѣ показатели четные*. Количество $98ab^4$ не будетъ полнымъ квадратомъ одночлена, потому что 98 неполный квадратъ, и надъ буквою a нечетный показатель. Въ такомъ случаѣ ставятъ только передъ количествомъ знакъ $\sqrt{\ }$, и пишутъ $\sqrt{98ab^4}$. Эти выраженія называются *неизвлекомыми* или *ирраціональными количествами*.

84. Можно однако жъ сокращать эти выраженія, основываясь на томъ, что *квадратный корень изъ произведенія двухъ или болѣе множителей, равенъ произведенію квадратныхъ корней сихъ множителей;* или, говоря алгебраическимъ языкомъ,

$$\sqrt{abcd\ \ldots\ldots} = a \times b \times \sqrt{c} \times \sqrt{d}\ldots$$

Докажемъ это правило. По опредѣленію квадратнаго корня какого бы то ни было числа, имѣемъ

$$(\sqrt{abcd\ \ldots\ldots})^2 = abcd\ \ldots\ldots;\ \text{притомъ},$$

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}\ldots)^2 = (\sqrt{a})^2 . (\sqrt{b})^2 . (\sqrt{c})^2 \ldots = abcd\ldots$$

Квадраты количествъ $\sqrt{abcd\ldots}$ и $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{d}\ldots$ равны; слѣдов. эти количества также равны между собою.

Поэтому, выраженіе $\sqrt{98ab^4}$ можно представить въ видѣ $\sqrt{49b^4 \times 2a} = \sqrt{49b^4} \times \sqrt{2a}$.

Но $\sqrt{49b^4}=7b^2$, § 83; и такъ $\sqrt{98ab^4}=7b^2\sqrt{2a}$.

Также, $\sqrt{45a^2b^3c^2d}=\sqrt{9a^2b^2c^2\times 5bd}=3abc\times\sqrt{5bd}$;

$\sqrt{864a^2b^5c^{11}}=\sqrt{144a^2b^4c^{10}\times 6bc}=12ab^2c^5\times\sqrt{6bc}$.

Вообще, для сокращенія одночленнаго неизвлекомаго количества, *отдѣляютъ всѣ множители, составляющіе полные квадраты, извлекаютъ изъ нихъ корни, § 83, и пишутъ произведеніе этихъ корней передъ кореннымъ знакомъ, оставляя подъ знакомъ прочіе множители.*

Въ выраженіяхъ $7b^2\sqrt{2a}$, $3abc\sqrt{5bd}$, $12ab^2c^5\sqrt{6bc}$, количества $7b^2$, $3abc$, $12ab^2c^5$ называются *предстоящими кореннаго количества.*

85. До сихъ поръ мы не брали въ разсужденіе знака одночленнаго количества. Но, какъ при рѣшеніи вопросовъ встрѣчаются одночлены съ знаками $+$ и $-$, то надобно знать, какъ производить дѣйствія надъ этими количествами. Извѣстно, что квадратъ одночлена составляется чрезъ умноженіе одночлена самого на себя; поэтому, § 62, *квадратъ всякаго одночлена съ $+$ или $-$, всегда будетъ положительнымъ*, напр. квадратъ одночлена $+5a^2b^3$ или $-5a^2b^3$, одинаково будетъ $+25a^4b^6$. Изъ этого можно заключить, что *квадратный корень положительнаго одночлена одинаково принимаетъ знакъ $+$ и $-$*; напримѣръ, $\sqrt{9a^4}=\pm 3a^2$; потому что $+3a^2$ и $-3a^2$, возвышенные въ квадратъ, одинаково даютъ $+9a^4$.

Теперь ясно, что изъ *отрицательнаго* одночлена нельзя извлечь квадратнаго корня, потому что квадратъ всякаго одночлена, положительнаго и отрицательнаго, необходимо долженъ быть положительный. И такъ, количества $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4a^2}$, $\sqrt{-5}$, суть алгебраическія выраженія, представляющія дѣйствія невозможныя. Эти выраженія называются *мнимыми количествами.* Какъ эти выраженія части встрѣчаются при рѣшеніи вопросовъ 2-й степени, и должны входить въ вычисленія, то на нихъ также распространили правила сокращенія, изложенныя въ § 84.

Напр. $\sqrt{-9}$ обратится въ $\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$, или $3\sqrt{-1}$;

также $\sqrt{-4a^2}=\sqrt{4a^2}\times\sqrt{-1}=2a\sqrt{-1}$.

$\sqrt{-8a^2b}=\sqrt{4a^2}\times\sqrt{-2b}=2a\times\sqrt{-2b}=2a\sqrt{2b}\cdot\sqrt{-1}$.

86. Мы видѣли, § 19, что квадратъ двучлена $a+b$ равенъ $a^2+2ab+b^2$.

Составимъ квадратъ тричлена $a+b+c$. Означая $a+b$ одною буквою s, будетъ

$$(a+b+c)^2=(s+c)^2=s^2+2sc+c^2.$$

Но $s^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $2sc=2(a+b)c=2ac+2bc$;

Слѣд. $(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; т. е. *квадратъ трехчлена состоитъ изъ суммы квадратовъ трехъ членовъ и удвоенныхъ произведеній этихъ членовъ, перемноженныхъ по два.*

Положимъ, что этотъ *законъ составленія квадрата* справедливъ для многочлена, имѣющаго m членовъ, и разсмотримъ, будетъ ли онъ также справедливъ, когда въ многочленѣ будетъ $m+1$ членовъ.

Пусть будетъ $a+b+c+d+...+i+k$ многочленъ, составленный изъ $m+1$ членовъ; означимъ буквою s сумму первыхъ m членовъ $a+b+c+d...+i$; $s+k$ представляетъ данный многочленъ, и будетъ

$$(s+k)^2=s^2+2sk+k^2,$$

или, вставивъ вмѣсто s величину его

$$(s+k)^2=(a+b+c+d....+i)^2+2(a+b+c+d+...+i)k+k^2.$$

Первая часть этого выраженія, по предположенію, состоитъ *изъ квадратовъ всѣхъ членовъ 1-го многочлена, и удвоенныхъ произведеній этихъ членовъ, взятыхъ по два;* во второй части заключаются *всѣ удвоенныя произведенія членовъ 1-го многочлена на новый членъ k*; въ третьей *квадратъ новаго члена.* И такъ тотъ же *законъ составленія* имѣетъ мѣсто для новаго многочлена; но онъ признанъ уже справедливымъ для трехчлена, слѣдовательно будетъ справедливъ и для четырехчлена, а поэтому и для пятичленнаго количества, и т. д.

Можно выразить этотъ *законъ* другимъ образомъ: *квадратъ многочлена состоитъ изъ квадрата 1-го члена, удвоеннаго произведенія 1-го члена на 2-й, и квадрата 2-го члена; изъ удвоенныхъ произведеній двухъ первыхъ членовъ на 3-й, и квадрата 3-го члена; изъ удвоенныхъ произведеній трехъ первыхъ членовъ на 4-ый, и квадрата 4-го члена и т. д.* Это изложеніе ближе подходитъ къ способу извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена. По этому правилу найдемъ, что

$$(5a^3-4ab^2)^2=25a^6-40a^4b^2+16a^2b^4:$$

$(3a^2-2ab+4b^2)^2=9a^4-12a^3b+4a^2b^2+24a^2b^2-16ab^3+16b^4$,
и сокращая, $=9a^4-12a^3b+28a^2b^2-16ab^3+16b^4$,
$(5a^2b-4abc+6bc^2-3ab)^2=25a^4b^2-40a^3b^2c+76a^2b^2c^2$
$-48ab^2c^3+36b^2c^4-30a^3b^2+24a^2b^2c-36ab^2c^2+9a^2b^2$.

87. Перейдемъ къ извлеченію квадратнаго корня.

Означимъ буквою N данный многочленъ, R корень его, и положимъ, что оба многочлена расположены по нисходящимъ степенямъ одной изъ буквъ, напр. a.

Замѣтимъ, что два первые члена N тотчасъ могутъ дать два первые члена корня R: въ самомъ дѣлѣ, изъ закона составленія квадрата, § 86 слѣдуетъ: *1-е, что въ квадратѣ 1-го члена количества* R, *буква a имѣетъ наибольшаго показателя*; *2-е что въ удвоенномъ произведеніи 1-го члена корня* R *па второй, показатель буквы a также болѣе, чѣмъ въ прочихъ частяхъ*. Эти двѣ части не могли соединиться съ прочими и необходимо должны выражать тѣ два члена количества N, въ которыхъ самый большой и непосредственно за нимъ слѣдующій показатель буквы a. И такъ, когда N полный квадратъ, тогда, *1-е, первый членъ также долженъ быть полнымъ квадратомъ, и корень его,* § *83, даетъ первый членъ корня* R; *2-е, второй членъ* N *долженъ дѣлиться на удвоенный 1-й членъ корня* R, *и частное будетъ вторымъ членомъ корня* R.

Чтобы получить прочіе члены, *составимъ квадратъ найденнаго двучлена,* и вычтемъ его изъ N: остатокъ, который мы означимъ N′, содержитъ удвоенныя произведенія 1-го члена корня R на 3-й, 2-го члена на 3-й, и прочія части. Но *въ удвоенномъ произведеніи 1-го члена на 3-й, показатель буквы a долженъ быть болѣе, нежели во всѣхъ слѣдующихъ частяхъ*, слѣд. это произведеніе не могло соединиться съ ними и должно составлять первый членъ остатка N′; и такъ *первый членъ остатка* N′ *долженъ дѣлиться на удвоенный 1-й членъ корня* R, *и дать въ частномъ третій членъ того же корня* R.

Чтобы получить прочіе члены, *составимъ удвоенныя произведенія 1-го и 2-го членовъ на 3-й, и квадратъ 3-го члена, и вычтемъ ихъ изъ* N; тогда получимъ остатокъ N″, въ которомъ содержится двойное произведеніе 1-го члена R на 4-й, съ прочими частями: но по прежнему докажемъ, что *1-й членъ остатка* N″ *необходимо есть удвоенное произве-*

деніе 1-го члена корня R *на 4-й; раздѣляя его на 1-й членъ* R, *получимъ въ частномъ 4-й членъ* R, *и такъ далѣе.*

Замѣчаніе. Отыскавъ первые два члена корня R, непремѣнно должно вычесть квадратъ найденнаго двучлена изъ N; потому-что въ квадратѣ 2-го члена R буква a обыкновенно имѣетъ того же показателя, какъ и въ удвоенномъ произведеніи 1-го члена на 3-й, и эти-то два члена соединяются въ одинъ. И такъ, тогда только можемъ сказать, что 1-й членъ остатка равенъ удвоенному произведенію 1-го члена R на 3-й, когда вычтемъ этотъ квадратъ изъ N. Тоже самое замѣтить надобно при трехъ, четырехъ, . . , первыхъ найденныхъ членахъ.

Изъ этихъ разсужденій можно вывесть общій способъ извлеченія квадратнаго корня изъ многочлена.

Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ многочлена

$$49a^2b^2 - 24ab^3 + 25a^4 - 30a^3b + 16b^4.$$

$$\begin{array}{l|l}
25a^4 - 30a^3b + 49a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & 5a^2 - 3ab + 4b^2. \\ \cline{2-2}
\underline{-25a^4 + 30a^3b \quad - \quad 9a^2b^3} & 10a^2 \\
\text{1-й остатокъ} \ldots 40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4 & \\
\qquad\qquad \underline{-40a^2b^2 + 24ab^3 - 16b^4} & \\
\qquad \text{2-й остатокъ} \ldots 0 &
\end{array}$$

Расположивъ многочленъ по степенямъ a, извлекаемъ квадратный корень изъ $25a^4$, что̀ даетъ $5a^2$, которое пишемъ по правую сторону многочлена; потомъ дѣлимъ 2-й членъ $-30a^3b$ на удвоенное $5a^2$, т. е. на $10a^2$; (пишемъ $10a^2$ подъ $5a^2$), и частное, $-3ab$, ставимъ возлѣ $5a^2$: первые два члена корня будутъ $5a^2 - 3ab$, а квадратъ ихъ $25a^4 - 30a^3b + 9a^2b^2$; вычитая этотъ квадратъ изъ даннаго многочлена, получимъ остатокъ, въ которомъ 1-й членъ есть $40a^2b^2$. Раздѣливъ этотъ членъ на $10a^2$ (удвоенное $5a^2$), частное $4b^2$ будетъ третьимъ членомъ корня, и пишется возлѣ первыхъ двухъ членовъ: составивъ произведеніе $(5a^2 - 3ab) \times 4b^2 \times 2$, и возвысивъ $4b^2$ въ квадратъ, получимъ $40a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4$; вычтя это изъ 1-го остатка, останется 0. И такъ $5a^2 - 3ab + 4b^2$ есть искомый корень, или, лучше сказать, § 81, одна изъ величинъ искомаго корня. Вторая величина его будетъ $-5a^2 + 3ab - 4b^2$, и мы получимъ ее, написавъ $-5a^2$ для корня изъ $25a^4$, и раздѣляя потомъ $-30a^3b$ на $-10a^2$, что̀ даетъ $+3ab$ для втораго члена, и такъ далѣе. Но когда первая величина отыскана, можно прямо писать вторую такимъ образомъ — $(5a^2 - 3ab + 4b^2)$.

Для упражненія можно заняться примѣрами § 86.

88. Если въ данномъ многочленѣ нѣсколько членовъ съ одинакими степенями главной буквы, то многочленъ располагается какъ показано, § 29, при дѣленіи, и потомъ поступаютъ какъ въ § 87, принимая за одну часть *алгебраическую сумму* членовъ, имѣющихъ одинакіе показатели, и замѣняя въ изложеніи этого способа слова: *первый членъ* многочлена, *первый членъ*, остатка, *первый*, *второй*, *третій*. . . , члены корня, выраженіями: *первая часть* многочлена, *первая* часть остатка, 1-я, 2-я, 3-я . . . , *части* корня; впрочемъ такіе примѣры рѣдко встрѣчаются.

89. Въ заключеніе замѣтимъ слѣдующее:

1-е. Двучленъ не можетъ быть полнымъ квадратомъ; потому-что квадратъ простѣйшаго многочлена, т. е. двучлена, состоитъ изъ трехъ отдѣльныхъ частей, которыя не могутъ соединиться одна съ другою. Выраженіе $a^2 + b^2$ есть неполный квадратъ; въ немъ недостаетъ члена $\pm 2ab$ чтобы быть квадратомъ количества $a \pm b$.

2-е. Трехчленъ, расположенный по степенямъ одной буквы, только тогда будетъ полнымъ квадратомъ, когда крайніе члены суть полные квадраты, а третій равенъ удвоенному произведенію квадратныхъ корней этихъ членовъ. Слѣдовательно, чтобы отыскать корень, должно *извлечь корни изъ двухъ крайнихъ членовъ и написать ихъ* съ одинакими *знаками*, *если удвоенное произведеніе будетъ положительное, и съ* разными *знаками*, *если оно отрицательное*; *потомъ повѣрить: удвоенное произведеніе этихъ корней даетъ ли третій членъ.* И такъ квадратный корень изъ $9a^6 - 48a^4a^2 + 64a^2b^2$ будетъ , . . . $\sqrt{9a^6} - \sqrt{64a^2b^2}$, т. е. $3a^3 - 8ab$, потому что

$$3a^3 \times - 16ab = - 48a^4b^2.$$

$4a^2 + 12ab - 9b^3$ не можетъ быть полнымъ квадратомъ: хотя $4a^2$ и $9b^2$ суть квадраты количествъ $2a$ и $3b$, и $12ab = 2a \times 6b$, но $- 9b^2$ не есть квадратъ.

3-е. Когда при извлеченіи квадратнаго корня, 1-й членъ одного изъ остатковъ не дѣлится въ точности на удвоенный первый членъ корня, то данный многочленъ неполный квадратъ. Это необходимо слѣдуетъ изъ разсужденій, на которыхъ мы основали способъ извлеченія корня.

4-е. Коренныя количества, не составляющія *полныхъ* *квадратовъ*, можно сокращать по правиламъ § 84. Напримѣръ, въ выраженіи $\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}$, подкоренное количество, которое есть неполный квадратъ, можно изобразить въ видѣ $ab(a^2+4ab+4b^2)$; множитель между скобками очевидно есть $(a+2b)^2$; поэтому можемъ написать, § 84,

$$\sqrt{a^3b+4a^2b^2+4ab^3}=(a+2b)\sqrt{ab}.$$

90. *Вычисленіе коренныхъ величинъ второй степени.* При извлеченіи квадратнаго, корня представляются новыя алгебраическія выраженія, напр. $\sqrt{a}$, $3\sqrt{b}$, $7\sqrt{2}$, извѣстныя подъ именемъ *неизвлекомыхъ количествъ*, или *коренныхъ величинъ второй степени*. Какъ производить четыре первыя основныя дѣйствія надъ этими выраженіями?

Опредѣленіе. Двѣ коренныя величины 2-й степени *подобны*, когда подъ знакомъ находится одно и то же количество; таковы будутъ $3a\sqrt{b}$ и $5c\sqrt{b}$, $9\sqrt{2}$ и $7\sqrt{2}$.

Сложеніе и вычитаніе. Чтобы сложить или вычесть *подобныя* коренныя величины, *складываютъ или вычитаютъ ихъ предстоящіе, и сумму или разность ставятъ передъ общимъ кореннымъ знакомъ;* напримѣръ

$$3a\sqrt{b}+5c\sqrt{b}=(3a+5c)\sqrt{b};\quad 3a\sqrt{b}-5c\sqrt{b}=(3a-5c)\sqrt{b};$$
$$7\sqrt{2a}+3\sqrt{2a}=10\sqrt{2a};\quad 7\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=4\sqrt{2a}.$$

Два *различныя* коренныя количества можно иногда сдѣлать подобными помощію сокращеній, § 84. Напримѣръ.

$$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a};$$
$$2\sqrt{45}-3\sqrt{5}=6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}.$$

Сложеніе и вычитаніе *различныхъ* коренныхъ величинъ означается только посредствомъ + и —; напр. если должно сложить $2\sqrt{b}$ съ $5\sqrt{a}$, то пишутъ просто $5\sqrt{a}+2\sqrt{b}$.

Умноженіе и дѣленіе. Чтобъ умножить или раздѣлить два коренныя количества, должно составить изъ нихъ произведеніе или частное, и надъ нимъ поставить общій коренной знакъ. Напр. $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$; и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; (квадраты выраженій $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ равны одному и тому же количеству $\frac{a}{b}$; слѣд. самыя выраженія равны между собою). Предстоящіе перемножаются или дѣлятся между собою, и произведеніе или частное пишется передъ кореннымъ знакомъ. Напр.

$$3\sqrt{4ab}\times 4\sqrt{25a^2}=12\sqrt{100a^3b}=120a\sqrt{ab};$$

$$2a\sqrt{bc}\times 3a\sqrt{bc}=6a^2\sqrt{b^2c^2}=6a^2bc;$$

$$2a\sqrt{a^2+b^2}\times -3a\sqrt{a^2+b^2}=-6a^2(a^2+b^2).$$

$$5a\sqrt{b}:2c\sqrt{c}=\frac{5a}{2c}\sqrt{\frac{b}{c}};$$

$$12ab\sqrt{6bc}:4b\sqrt{2b}=3a\sqrt{\frac{6bc}{2b}}=3a\sqrt{3c}.$$

91. При опредѣленіи численныхъ значеній коренныхъ величинъ употребляютъ два *преобразованія*.

Первое состоитъ въ перенесеніи предстоящаго подъ знакъ корня. Напримѣръ, выраженіе $3a\sqrt{5b}$ приводится къ $\sqrt{9a^2}\times\sqrt{5b}$, или $\sqrt{9a^2\times 5b}=\sqrt{45a^2b}$; поэтому, *чтобы перенести предстоящее подъ коренной знакъ достаточно возвысить его въ квадратъ*. Покажемъ пользу этого преобразованія.

Положимъ, надобно вычислить выраженіе $6\sqrt{13}$ такъ, чтобы погрѣшность была меньше единицы. Какъ 13 неполный квадратъ, то для корня можно получить только приблизительную величину. Этотъ корень равенъ 3-мъ съ дробью, а помножая на 6, получимъ 18 съ дробью, или немного болѣе 18. Чтобъ опредѣлить въ точности цѣлую часть, выраженіе $6\sqrt{13}$ должно привесть къ виду $\sqrt{6^2\times 13}=\sqrt{36\times 13}=\sqrt{468}$. Извлекая квадратъ изъ 468, получимъ 21 съ дробью, слѣдов. $6\sqrt{13}=21$ съ дробью.

Также найдемъ, что $12\sqrt{7}=31$ съ дробью.

Второе преобразованіе употребляютъ для исключенія коренныхъ знаковъ изъ знаменателей, въ выраженіяхъ вида $\frac{a}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{a}{p-\sqrt{q}}$ гдѣ a, p, цѣлыя числа, также какъ и q, которое притомъ полагается *неполнымъ квадратомъ*. Подобныя выраженія часто встрѣчаются при рѣшеніи задачъ второй степени.

Для этого надобно умножить оба члена дроби на $p-\sqrt{q}$, если въ знаменателѣ $p+\sqrt{q}$, или на $p+\sqrt{q}$, когда знаменателемъ будетъ $p-\sqrt{q}$. Сдѣлавъ это умноженіе, и замѣтивъ, § 5, что сумма двухъ количествъ, умноженная на разность ихъ, даетъ разность квадратовъ, получимъ

$$\frac{a}{p+\sqrt{q}}=\frac{a(p-\sqrt{q})}{(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})}=\frac{a(p-\sqrt{q})}{p^2-q}=\frac{ap-a\sqrt{q}}{p^2-q};$$

$$\frac{a}{p-\sqrt{q}}=\frac{a(p+\sqrt{q})}{(p-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})}=\frac{a(p+\sqrt{q})}{p^2-q}=\frac{ap+a\sqrt{q}}{p^2-q};$$

въ знаменателяхъ этихъ выраженій нѣтъ коренныхъ величинъ.

Чтобы показать пользу такого преобразованія, положимъ, требуется вычислить приблизительно выраженіе $\frac{7}{3-\sqrt{5}}$; оно приводится къ $\frac{7(3+\sqrt{5})}{9-5}$ или $\frac{21+7\sqrt{5}}{4}$.

Но $$7\sqrt{5}=\sqrt{49\times 5}=\sqrt{245},$$

и приблизительная величина до единицы есть 15. И такъ $\frac{7}{3-\sqrt{5}}=\frac{21+15+\text{дробь}}{4}=\frac{36}{4}=9$, вѣрное до $^1/_4$. Чтобы получить точнѣйшую величину этого выраженія, достаточно вычислить съ большимъ приближеніемъ $\sqrt{245}$, приложить къ этому корню 21, и сумму раздѣлить на 4.

Вычислимъ еще выраженіе $\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$ до 0,01.

$$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}-\frac{7\sqrt{5}(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{11-5}=\frac{7\sqrt{55}-7\sqrt{15}}{8};\text{ но}$$

$$7\sqrt{55}=\sqrt{55\times 49}=\sqrt{2695}=51,91\text{ до }0,01;$$

$$7\sqrt{15}=\sqrt{15\times 49}=\sqrt{735}\quad=27,11;$$

и такъ $$\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}=\frac{51,91-27,11}{8}=3,10;$$

будетъ требуемая величина, вѣрная даже до $\frac{1}{800}$.

Также найдемъ, что $\frac{3+2\sqrt{7}}{5\sqrt{12}-6\sqrt{6}}=3,159$ вѣрно до 0,001.

Замѣчаніе. Въ этихъ выраженіяхъ можно было бъ вычислять отдѣльно всѣ подкоренныя величины, входящія въ числитель и въ знаменатель; но тогда, не имѣя точной величины знаменателя, мы не могли бы составить себѣ вѣрнаго понятія о степени приближенія найденной величины; между тѣмъ какъ этимъ преобразованіемъ знаменатель дѣлается *соизмѣримымъ*, и слѣдовательно степень приближенія всегда извѣстна.

II. Рѣшеніе уравненій второй степени.

92. Есть два рода уравненій второй степени: уравненія *двучленныя*, или *неполныя*, и уравненія *тричленныя*, или *полныя*.

Въ первыхъ находятся только извѣстные члены, и члены, содержащіе неизвѣстную въ квадратѣ, напр. $3x^2=5$, $4x^2-7=3x^2+9$, $\frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$. Ихъ называютъ *двучленными* потому, что помощію извѣстныхъ преобразованій, §§ 43 и 44, ихъ всегда можно привесть къ виду $ax^2=b$. Для примѣра возьмемъ третье, болѣе сложное уравненіе: уничтоживъ знаменатели, получимъ

$$8x^2-72+10x^2=7-24x^2+299,$$

а перенеся члены и сокративъ, $42x^2=378$.

Въ трехчленныхъ уравненіяхъ, кромѣ квадрата неизвѣстной, заключается также неизвѣстная въ первой степени, какъ въ уравненіяхъ

$$5x^2-7x=34;\ \frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}.$$

Тѣми же преобразованіями ихъ можно привесть къ виду $ax^2+bx=c$.

Замѣчаніе. Иногда уравненіе съ перваго взгляда можетъ казаться уравненіемъ первой степени, и только по уничтоженіи знаменателей увидимъ, что оно второй степени. Напримѣръ, уравненіе $\frac{5-2x}{3+x}=\frac{4x}{2-x}$, по уничтоженіи знаменателей, обращается въ

$$(5-2x)(2-x)=4x(3+x),\ \text{или}\ 2x^2+21x=10.$$

Вообще, когда x находится въ знаменателѣ, для опредѣленія степени уравненія, надобно прежде уничтожить знаменатели, § 44, и произвесть всѣ возможны сокращенія.

93. *Двучленное уравненіе* $ax^2=b$, . . . [1] легко рѣшить. Сначала выводимъ $x^2=\frac{b}{a}$ . . . [2].

Если $\frac{b}{a}$ положительное число, цѣлое или дробное, то, по извѣстнымъ правиламъ, найдемъ квадратный корень его; если же $\frac{b}{a}$ алгебраическое количество, то къ нему примѣняются правила, изложенныя въ § 87. Полученный выводъ будетъ выражать величину x, удовлетворяющую уравненію [2]. Но квадратъ количества $+m$, или $-m$, одинаково будетъ $+m^2$, § 85; поэтому найденный выводъ можно взять съ знакомъ $+$ или $-$; изъ этого заключаемъ, что уравненіе [2] въ сущности имѣетъ два рѣшенія, которыя можно изобразить . . . . $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе [1] вставимъ вмѣсто x отдѣльно величины $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $-\sqrt{\frac{b}{a}}$, то получимъ

$$a\times\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ или } a.\frac{b}{a}=b, \text{ или } b=b;$$

$$a\times\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=b, \text{ или } a.\frac{b}{a}=b, \text{ или } b=b.$$

Очевидно, что только эти величины могутъ удовлетворять уравненію [2], а слѣдовательно и уравненію [1].

Замѣчаніе. Когда $\frac{b}{a}$ величина отрицательная, обѣ величины x будутъ мнимыя, § 85; это значитъ, что уравненію, или задачѣ, выраженной этимъ уравненіемъ, нельзя удовлетворить никакимъ числомъ.

Примѣръ I. Рѣшимъ уравненіе

$$4x^2-7=3x^2+9.$$

Получится $x^2=16$, и $x=\pm\sqrt{16}=\pm4$.

Примѣръ II. $\frac{1}{3}x^2-3+\frac{5}{12}x^2=\frac{7}{24}-x^2+\frac{299}{24}$.

Въ § 92 мы уже получили $42x^2=378$,

откуда $x^2=\frac{378}{42}=9$, и $x=\pm3$.

Примѣръ III. Изъ уравненія $3x^2=5$, $x^2=\frac{5}{3}$;

$$x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15};$$

какъ число 15 неполный квадратъ, то обѣ величины x можно получить только приблизительно.

Примѣръ IV. $3x^2+17=5x^2+89$.

$$2x^2=-72, \text{ или } x^2=-36$$

$$x=\pm\sqrt{-36}=\pm6\sqrt{-1}.$$

94. *Полное уравненіе* 2-й *степени*: $ax^2+bx=c$.

Раздѣлимъ обѣ части уравненія на a, предстоящее при x^2, и для краткости положимъ $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$; получимъ

$$x^2+px=q, \;.\;.\;.\;[1].$$

Если первую часть, x^2+px, сдѣлать полнымъ квадратомъ двучлена, то извлеченіемъ квадратнаго корня изъ обѣихъ частей, получимъ уравненіе 1-й степени. Сравнимъ эту часть съ квадратомъ двучлена $x+a$, т. е. съ $x^2+2ax+a^2$: въ выраженіи x^2+px видимъ квадратъ 1-го члена x, и удвоенное произведеніе того же 1-го члена x на 2-й, $\frac{p}{2}$, (принимая $px=2.\frac{p}{2}.x$); поэтому, приложивъ къ x^2+px еще квадратъ 2-го члена, или $\frac{p^2}{4}$, первую часть уравненія сдѣлаемъ квадратомъ двучлена $x+\frac{p}{2}$; разумѣется, для сохраненія равенства, должно приложить $\frac{p^2}{4}$ и ко второй части уравненія; тогда получимъ

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}+q, \quad .\;.\;.\;.\;.\; [2];$$

извлекая корень, $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$;

наконецъ, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.

Здѣсь ставится двойной знакъ $\pm$, потому что квадратъ количества $+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, или $-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ одинаково будетъ $\frac{p^2}{4}+q$.

Притомъ изъ уравненія [2] видно, что величину $x+\frac{p}{2}$ можетъ выражать только $+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, или $-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, такъ, что $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ и $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ суть единственныя величины, которыя могутъ удовлетворять уравненію [2], а слѣд. и уравненію [1].

И такъ, *во всякомъ уравненіи* 2-й *степени неизвѣстная имѣетъ двѣ величины, и отнюдь не болѣе.*

Вообще, для рѣшенія полнаго уравненія 2-й степени, должно *привесть уравненіе къ виду* $x^2+px=q$; потомъ *приложить къ обѣимъ частямъ квадратъ половины предстоящаго втораго члена, въ который входитъ неизвѣстная* x *въ* 1-й *степени; извлечь изъ обѣихъ частей квадратный корень, поставивъ передъ корнемъ* 2-й *части двойной знакъ* $\pm$; наконецъ *вывесть изъ этого уравненія величину* x.

Двоякая величина x, находимая такимъ способомъ, равна *половинѣ предстоящаго при* x, *взятаго съ противнымъ знакомъ, плюсъ или минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины, сложенной съ извѣстнымъ членомъ.*

Рѣшимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ I. $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 8 - \frac{2}{3}x - x^2 + \frac{273}{12}$.

Сдѣлавъ всѣ требуемыя вычисленія, получимъ

$$10x^2 - 6x + 9 = 96 - 8x - 12x^2 + 273;$$

$$22x^2 + 2x = 360.$$

$$x^2 + \frac{2}{22}.\ x = \frac{360}{22}.$$

Приложивъ къ обѣимъ частямъ $\left(\frac{1}{22}\right)^2$, будетъ

$$x^2 + \frac{2}{22}x + \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2;$$

а извлекая квадратный корень,

$$x + \frac{1}{22} = \pm\sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2};$$

и наконецъ $x = -\frac{1}{22} \pm \sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2}$.

Этотъ выводъ сходенъ съ опредѣленіемъ двоякой величины x.

Вычислимъ теперь подкоренную величину;

$$\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2 = \frac{360 \times 22 + 1}{(22)^2} = \frac{7921}{(22)^2};$$

но $\sqrt{7921} = 89$; то $\sqrt{\frac{360}{22} + \left(\frac{1}{22}\right)^2} = \frac{89}{22}$.

Наконецъ $x = -\frac{1}{22} \pm \frac{89}{22}$.

Написавъ отдѣльно каждую величину, получимъ

$$x = -\frac{1}{22} + \frac{89}{22} = \frac{88}{22} = 4,$$

$$x = -\frac{1}{22} - \frac{89}{22} = -\frac{90}{22} = -\frac{45}{11}.$$

И такъ, одна изъ величинъ, удовлетворяющихъ данному уравненію, есть цѣлое положительное число, другая же дробное отрицательное.

Примѣръ II. $6x^2 - 37x = -57$.

$$x^2 - \frac{37}{6}x = -\frac{57}{6}.$$

$$x^2 - \frac{37}{6}x + \left(\frac{37}{12}\right)^2 = -\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2;$$

$$x - \frac{37}{12} = \pm\sqrt{-\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2},$$

$$x = \frac{37}{12} \pm \sqrt{-\frac{57}{6} + \left(\frac{37}{12}\right)^2}.$$

Для вычисленія подкореннаго количества, замѣтимъ, что $(12)^2 = 12 \times 12 = 6 \times 24$; поэтому достаточно умножить 57 на 24, что̀ даетъ 1368; потомъ 37 само на себя, что̀ даетъ 1369, и раздѣлить разность ихъ, 1, на $(12)^2$. И такъ, . . . $\left(\frac{37}{12}\right)^2 - \frac{57}{6} = \frac{1}{(12)^2}$, а извлекая корень, будетъ $\frac{1}{12}$.

Посему, $x = \frac{37}{12} \pm \frac{1}{22}$, или $\begin{cases} x = \frac{37}{12} + \frac{1}{12} = \frac{38}{12} = \frac{19}{6}, \\ x = \frac{37}{12} - \frac{1}{12} = \frac{36}{12} = 3. \end{cases}$

Этотъ примѣръ замѣчателенъ тѣмъ, что обѣ величины x положительныя и непосредственно соотвѣтствуютъ изложенію вопроса, выраженнаго даннымъ уравненіемъ.

Примѣръ III. $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2$.

$$x^2 - ax = 2a^2 - 9ab + 9b^2;$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2;$$

$$x^2 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{9a^2}{4} - 9ab + 96^2};$$

но $\frac{9a^2}{4} - 9ab + 9b^2$ очевидно равно $\left(\frac{3a}{2} - 3b\right)^2$, то и

$$x = \frac{a}{2} \pm \left(\frac{3a}{2} - 3b\right), \text{ откуда } \begin{cases} x = 2a - 3b, \\ x = -a + 3b. \end{cases}$$

Обѣ эти величины будутъ положительныя, если $2a > 3b$ и $3b > a$, то есть, если a и b положительныя, и притомъ b больше $\frac{a}{3}$, но меньше $\frac{2a}{3}$.

IV. $x^2 - 7x + 10 = 0$, . . . даетъ величины $\begin{cases} x = 2, \\ x = 5. \end{cases}$

V. $\frac{1}{3}x - x^2 + 2x - \frac{4}{5}x^2 = 49 - 3x^2 + 4x$; $\begin{cases} x = 7{,}12, \\ x = -5{,}73. \end{cases}$

VI. $a^2+b^2-2bx+x^2=\frac{m^2x^2}{n^2}$, даетъ

$$x=\frac{n}{n^2-m^2}\left(bn\pm\sqrt{a^2m^2+b^2m^2-a^2n^2}\right).$$

VII. $$x-2=\frac{4x-9}{x};$$

$$x^2-2x=4x-9,\ x^2-6x=-9,$$

$$x=3\pm\sqrt{9-9},\text{ или } x=3;$$

въ этомъ случаѣ обѣ величины x обратились въ одну.

95. Можно рѣшить уравненіе $ax^2+bx=c$, не уничтожая предстоящее при x^2; но преобразованія сдѣлаются гораздо сложнѣе.

Членъ ax^2 можно представить въ видѣ $(x\sqrt{a})^2$, а членъ bx въ видѣ $2x\sqrt{a}\times\frac{b}{2\sqrt{a}}$; тогда количество ax^2+bx составитъ два первые члена квадрата отъ $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$; придавъ къ обѣимъ частямъ $\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$, или $\frac{b^2}{4a}$, первую часть сдѣлаемъ полнымъ квадратомъ, и уравненіе будетъ

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=c+\frac{b^2}{4a};$$

извлекая корень, $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}$;

откуда $$x\sqrt{a}=-\frac{b}{2\sqrt{a}}\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}.$$

Раздѣливъ обѣ части на $\sqrt{a}$, и замѣтивъ, что

1-е, $$-\frac{b}{2\sqrt{a}}:\sqrt{a}=-\frac{b}{2(\sqrt{a})^2}=-\frac{b}{2a},$$

2-е, $$\sqrt{c+\frac{b^2}{4a}}:\sqrt{a}=\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}},\ \S\ 90,$$

получимъ наконецъ; $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}}$,

или, $$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a};$$

но эта величина гораздо удобнѣе выводится изъ уравненія, приведеннаго къ виду . . . . $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$.

96. Приложимъ предъидущія правила къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

I. *Найти такое число, котораго удвоенный квадратъ сложенный съ утроеннымъ тѣмъ же числомъ равенъ* 65.

Назовемъ x искомое число; уравненіе задачи будетъ

$$2x^2+3x=65,$$

откуда $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{65}{2}+\frac{9}{16}}=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4};$

$$x=-\frac{3}{4}+\frac{23}{4}=5;\ x=-\frac{3}{4}-\frac{23}{4}=-\frac{13}{2}.$$

Первая величина удовлетворяетъ задачѣ, потому что

$$2\times(5)^2+3\times5=2\times25+15=65.$$

Чтобъ объяснить вторую, вмѣсто x вставимъ $-x$ въ уравненіе $2x^2+3x=65$: тогда, только въ членѣ $3x$ перемѣнится знакъ, потому что $(-x)^2=x^2$, и мы, вмѣсто $x=-\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}$, получимъ $x=\frac{3}{4}\pm\frac{23}{4}$, или $x=\frac{13}{2}$ и $x=-5$, величины, отличныя отъ предъидущихъ только знаками. Итакъ, независимо отъ знака, отрицательное рѣшеніе $\frac{13}{2}$ удовлетворяетъ другой задачѣ: *найти такое число, котораго удвоенный квадратъ, безъ утроеннаго того же числа, равенъ* 65. Въ самомъ дѣлѣ

$$2\times\left(\frac{13}{2}\right)^2-3\times\frac{13}{2}=\frac{169}{2}-\frac{39}{2}=65.$$

II. *Куплено нѣсколько аршинъ сукна за 240 рублей; если за ту цѣну взять сукна тремя аршинами менѣе, каждый аршинъ обойдется 4-мя рублями дороже.* Спрашивается: *сколько куплено аршинъ сукна?*

Положимъ, что сукна куплено x аршинъ; $\frac{240}{x}$ представить цѣну каждаго аршина. Если за 240 р. получатъ 3-мя аршинами менѣе, то есть, $x-3$ аршинъ, каждый аршинъ будетъ стоитъ $\frac{240}{x-3}$. Но какъ, по условію, послѣдняя цѣна больше первой 4-мя рублями, то получимъ уравненіе

$$\frac{240}{x-3}-\frac{240}{x}=4,\ \text{откуда}\ x^2-3x=180;$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=\frac{3\pm27}{2};$$

$$x=15\ \text{и}\ x=-12.$$

Величина $x=15$ удовлетворяетъ задачѣ: если дано 240 рублей за 15 аршинъ, то аршинъ стоитъ $\frac{240}{15}$, или 16 рублей; когда же за 240 рублей получатъ 12 аршинъ, то аршинъ обойдется въ 20 рублей, 4-мя рублями дороже.

Для втораго рѣшенія можно составить новую задачу, которой оно удовлетворяетъ. Возвратимся къ первому уравненію, и поставивъ $-x$, вмѣсто x, получимъ уравненіе

$$\frac{240}{-x-3}-\frac{240}{-x}=4,\text{ или }\frac{240}{x}-\frac{240}{x+3}=4,$$

которое словами можно выразить двояко: 1-е. *Куплено на 240 рублей нѣсколько аршинъ сукна; если за ту же цѣну взять 3-мя аршинами болѣе, то каждый аршинъ обойдется 4-мя рублями дешевле; спрашивается сколько куплено аршинъ?* 2-е. *Продано нѣсколько аршинъ сукна за 240 рублей; если за ту же цѣну уступить 3-мя аршинами болѣе, то за каждый аршинъ получили бы 4-мя рублями менѣе. Спрашивается сколько продано аршинъ?*

Послѣднее изложеніе, быть можетъ, еще ближе подходитъ къ перемѣнѣ знака; потому что отрицательную покупку можно принять за продажу.

Разрѣшая уравненія новыхъ задачъ, найдемъ $x=12$, $x=-15$; потому что уравненіе, по сокращеніи, будетъ $x^2+3x=180$, вмѣсто $x^2-3x=180$.

Замѣчаніе. Двѣ послѣднія задачи подтверждаютъ правило, изложенное въ § 59 для задачъ 1-й степени; а въ § 99 мы докажемъ тоже правило вообще для всѣхъ уравненій 2-й степени.

III. *Банкиръ принимаетъ въ учетъ два векселя; одинъ въ 8776 рублей, которому срокъ платежа черезъ 9 мѣсяцевъ; другой въ 7488 рублей, которому срокъ черезъ 8 мѣсяцевъ; за первый онъ даетъ 1200 рублей болѣе нежели за второй; спрашивается по скольку процентовъ беретъ онъ въ учетъ?*

Рѣшеніе. Чтобы сократить вычисленія, означимъ буквою x проценты со 100 руб. въ мѣсяцъ, или $12x$ годовой процентъ: $9x$ и $8x$ будутъ проценты на 9 и 8 мѣсяцевъ; поэтому 100 рублей черезъ 9 и 8 мѣсяцевъ будутъ $100+9x$ и $100+8x$. Чтобъ опредѣлить, въ какой цѣнѣ банкиръ долженъ принять каждый вексель, составимъ пропорціи:

$$100+9x:100=8776:\frac{877{,}600}{100+9x},$$

$$100+8x:100=7488:\frac{748,800}{100+8x},$$

въ которыхъ четвертые члены выражаютъ сумму, заплаченную банкиромъ за каждый вексель. Уравненіе задачи будетъ

$$\frac{877,600}{100+9x}-\frac{748,800}{100+8x}=1200,$$

или раздѣливъ уравненія на 400,

$$\frac{2194}{100+9x}-\frac{1872}{100+8x}=3;$$

$$216x^2+4396x=2200,$$

$$x=-\frac{2198}{216}\pm\sqrt{\frac{2200}{216}+\frac{(2198)^2}{(216)^2}};$$

$$x=\frac{-2198\pm\sqrt{5,306,404}}{216},$$

а умноживъ на 12, $12x=\dfrac{-2198\pm\sqrt{5,306,404}}{18}$.

Для полученія величины $12x$ вѣрно до 0,01, достаточно извлечь корень изъ 5,306,404 приблизительно до 0,1, потому что онъ дѣлится еще на 18. Корень этотъ будетъ 2303,5; и такъ

$$12x=\frac{-2198\pm2303,5}{18};$$

слѣд. $12x=\dfrac{105,5}{18}=5,86$ и $12x=\dfrac{-4501,5}{18};=-250,08;$ положительная величина $12x=5,86$ представляетъ искомые проценты.

Отрицательный выводъ можно разсматривать только какъ величину, соединенную съ положительною тѣмъ же уравненіемъ 2-й степени. Перемѣняя въ уравненіи x въ $-x$, трудно было бы прибрать къ новому уравненію задачу, подобную данной.

IV'. *Нѣкто купилъ лошадь, которую черезъ нѣкоторое время согласился продать за 24 червонца. При продажѣ онъ теряетъ столько червонцевъ на 100 изъ цѣны, заплаченной за лошадь, сколько червонцевъ стоила ему лошадь. Спрашивается сколько заплатилъ онъ?*

Рѣшеніе. Положимъ, что за лошадь заплачено x червонцевъ; $x-24$ есть одно выраженіе потери при продажѣ. При продажѣ теряется столько червонцевъ на 100, сколько въ x единицъ, то есть, на 1 червонецъ теряется $\frac{x}{100}$, а на x червонцевъ $\frac{x^2}{100}$; поэтому получимъ уравненіе: $\frac{x^2}{100}=x-24$;

$$x^2-100x=-2400.$$

$$x=50\pm\sqrt{2500-2400}=50\pm10.$$

$$x=60 \text{ и } x=40.$$

Обѣ величины удовлетворяютъ задачѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если лошадь стоила 60 червонцевъ, то при продажѣ ея за 24 червонца хозяинъ теряетъ 36 червонцевъ; но по условію задачи должно терять 60 на 100 изъ 60, то есть, $\frac{60}{100}\times60$, или $\frac{60.60}{100}=36$; слѣд. 60 удовлетворяетъ задачѣ.

Если же заплачено 40, то убытку при продажѣ будетъ 16; а по условію должно потерять 40 на 100 изъ 40, или $40\times\frac{40}{100}=16$; слѣд. 40 также удовлетворяетъ задачѣ.

Общее изслѣдованіе уравненій 2-й степени.

До сихъ поръ мы рѣшали только численныя задачи 2-й степени. Теперь, чтобъ ознакомиться со способомъ рѣшать общія задачи и объяснять всѣ выводы, которые могутъ происходить при различныхъ данныхъ количествахъ, займемся самымъ общимъ уравненіемъ 2-й степени, и разсмотримъ всѣ обстоятельства, которыя могутъ встрѣтиться при различныхъ величинахъ предстоящихъ: это предметъ *изслѣдованія уравненій 2-й степени.*

97. Прежде нежели приступимъ къ изслѣдованію, замѣтимъ одно свойство уравненій, которое въ послѣдствіи будетъ доказано для уравненій всѣхъ степеней съ одною неизвѣстною.

Возьмемъ общее уравненіе

$$x^2+px=q, \text{ или лучше } x^2+px-q=0,$$

и обѣ соотвѣтствующія величины x, именно:

$$x=-\frac{p}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

перенеся въ первую часть всѣ члены, получимъ

$$x+\frac{p^2}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0,\quad x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0.$$

Перемножимъ эти новыя равенства.

Первое изъ нихъ есть разность количествъ $x+\frac{p}{2}$ и $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, а второе сумма ихъ; по § 5 получимъ,

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=0,$$

и сокративъ, $x^2+px-q=0.$

Изъ этого видно, что *первая часть всякаго уравненія второй степени*, приведеннаго къ виду $x^2+px-q=0$. *есть произведеніе двухъ множителей, которые равны разностямъ между* x *и каждымъ изъ двухъ выводовъ, выражающихъ его величину*; посему, означивъ эти величины x' и x'', получимъ

$$x^2+px-q=(x-x')\,(x-x'').$$

Вѣроятно, по этому свойству величины неизвѣстной названы *корнями*: зная эти величины, всегда можно составить уравненіе.

Вообще, корнемъ уравненія называется всякое выраженіе, численное или алгебраическое, вещественное или мнимое, которое, *будучи вставлено вмѣсто неизвѣстной въ данное уравненіе, дѣлаетъ первую часть равною второй части*. Здѣсь это слово имѣетъ другое значеніе, а не то, какое ему дается относительно чиселъ.

98. Это свойство доказывается и другимъ способомъ, изъ котораго можно вывесть довольно важныя заключенія.

Возьмемъ какое нибудь количество a, и раздѣлимъ на $x-a$ первую часть уравненія $x^2+px-q=0$.

$$x^2+px-q\;\left|\begin{array}{l} x-a \\ \hline x+a+p. \end{array}\right.$$

1-й остатокъ . . . $+(a+p)\,x-q$;

2-й остатокъ . . . $+a^2+pa-q$.

Дѣленіе 1-го члена дѣлимаго x^2 на 1-й членъ дѣлителя x, даетъ въ частномъ x, и въ первомъ остаткѣ . . . . $(a+p)x-q$; дѣленіе 1-го члена $(a+p)x$ этого остатка на x, даетъ въ частномъ $a+p$, и въ новомъ остаткѣ a^2+pa-q, количество независимое отъ x.

Если a будетъ корнемъ уравненія $x^2+px-q=0$, то

$a^2+pa-q=0$; и такъ второй остатокъ произведеннаго дѣленія равенъ 0, и дѣленіе производится на-цѣло; слѣдовательно, *первую часть даннаго уравненія можно раздѣлить на* $x-a$.

Обратно, если x^2+px-q дѣлится на $x-a$, то необходимо $a^2+pa-q=0$, то есть, тогда a корень уравненія.

Какъ x^2+px-q, дѣлится на $x-a$, если a корень уравненія, и даетъ въ частномъ $x+a+p$, то и обратно $x+a+p$ дѣлить на-цѣло x^2+px-q, и даетъ въ частномъ $x-a$; изъ этого можно заключить, что величина $-a-p$, есть также корень уравненія.

Поэтому имѣемъ равенство

$$x^2+px-q=(x-a)(x+a+p),$$

которое совершенно согласно съ выводомъ § 97.

Если a корень уравненія $x^2+px-q=0$, то $-a-p$ есть второй корень того же уравненія; но

1-е, сложивъ величины a и $-a-p$, получимъ $-p$;

2-е, отношеніе $a^2+pa-q=0$ приводится къ . . . . . $a(-a-p)=-q$.

Изъ сего выводимъ, что *во всякомъ уравненіи второй степени*, приведенномъ къ виду $x^2+px-q=0$, *предстоящее* р *втораго члена*, *взятое съ противнымъ знакомъ*, *равно алгебраической суммѣ корней; а послѣдній членъ*, — q, *равенъ произведенію этихъ корней*. Можно прямо повѣрить это надъ величинами полученными въ § 94,

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q},\quad x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Складывая первыя и вторыя части, получаемъ $x'+x''=-p$; а помножая ихъ, $x'+x''=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=-q$.

Замѣчаніе. Не должно забывать, что всѣ эти свойства относятся только къ уравненію, приведенному къ виду $x^2+px-q=0$, то есть, 1-е, все уравненіе раздѣлено на предстоящее при x^2; 2-е, всѣ члены перенесены въ первую часть и расположены по степенямъ x.

Изслѣдованіе.

99. Возьмемъ общее уравненіе $x^2+px=q$, изъ котораго выводимъ $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$.

Въ этомъ выраженіи заключается коренное количество; величину его можно опредѣлить въ точности или приблизительно, въ такомъ только случаѣ, когда подкоренное количество, § 85, будетъ положительное. Но $\frac{p^2}{4}$ всегда будетъ положительное, хотя бы p было отрицательное; слѣд. знакъ количества $q+\frac{p^2}{4}$ собственно зависитъ отъ знака извѣстнаго количества q.

Пусть q *положительное.* Тогда уравненіе будетъ вида $x^2 \pm px = +q$ (здѣсь выставлены знаки предстоящихъ); получимъ
$$x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{q+\frac{p^2}{4}};$$
обѣ величины x очевидно возможны, и опредѣлятся въ точности, если $q+\frac{p^2}{4}$ полный квадратъ, или же до произвольной степени приближенія.

Но *первая величина* будетъ *положительная* и прямо удовлетворитъ уравненію, или задачѣ, выраженной этимъ уравненіемъ; потому что величина $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$ всегда болѣе $\frac{p}{2}$, слѣд. и выраженіе $\mp\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$ будетъ имѣть такой же знакъ, какой находится передъ кореннымъ количествомъ.

Вторая величина, по той же причинѣ, необходимо будетъ *отрицательная*: она должна имѣть такой же знакъ, какой имѣетъ коренное количество. Независимо отъ знака, эта величина будетъ соотвѣтствовать данному уравненію только въ томъ случаѣ, когда перемѣнимъ x въ $-x$, то есть, уравненію $x^2 \mp px = q$. Въ самомъ дѣлѣ, послѣднее уравненіе даетъ величины
$$x = \pm\frac{p}{2} \pm \sqrt{q+\frac{p^2}{4}},$$
отличающіяся отъ предъидущихъ только знаками.

Замѣчательно притомъ, что одно и то же уравненіе связываетъ между собою двѣ задачи, которыя однако жъ различаются смысломъ нѣкоторыхъ условій. (Смотри двѣ задачи въ § 96).

Положимъ q *отрицательнымъ.* Уравненіе будетъ вида $x^2 \pm px = -q$, а величины для x будутъ

$$x = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Извлеченіе корня возможно тогда только, когда $q < \frac{p^2}{4}$. Если это условіе удовлетворяется, обѣ величины будутъ возможны; притомъ, какъ численная величина $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ менѣе $\frac{p}{2}$, то *обѣ* величины *отрицательныя*, когда въ уравненіи p съ положительнымъ знакомъ, то есть, въ уравненіи вида $x^2 + px = -q$; и *обѣ положительныя*, когда p величина отрицательная, то есть, въ уравненіи $x^2 - px = -q$.

Изъ двухъ свойствъ § 88 можно получить тотъ же выводъ. Пусть a и b будутъ корнями уравненія 2-й степени $x^2 + px - q = 0$; тогда между этими корнями и предстоящими имѣемъ отношенія: $a + b = -p$, $ab = -q$.

Если q будетъ *положительнымъ* во 2-й части, и слѣдовательно *отрицательнымъ* въ 1-й, произведеніе обоихъ корней будетъ отрицательное, и потому *корни должны имѣть противные знаки*. Притомъ, алгебраическая сумма ихъ будетъ *отрицательная*, или *положительная*, смотря потому, будетъ ли p положительное или отрицательное, то есть, корень, имѣющій *большую численную* величину, всегда будетъ противнаго знака съ предстоящимъ p.

Но когда при q знакъ *отрицательный* во 2-й части, и слѣд. положительный въ 1-й, тогда произведеніе обоихъ корней будетъ положительнымъ, и слѣд. *они имѣютъ одинакіе знаки*, то есть, *отрицательные*, когда p будетъ положительное, и *положительные*, когда p будетъ отрицательное.

100. Случай, когда оба корня положительные, заслуживаетъ особеннаго вниманія. Тогда уравненіе будетъ вида $x^2 - px = -q$, и черезъ перемѣну знаковъ обратится въ

$$px - x^2 = q, \text{ или } x(p - x) = q.$$

Но это уравненіе очевидно будетъ алгебраическимъ выраженіемъ слѣдующей задачи: *Раздѣлить число p на двѣ части, которыхъ произведеніе равно другому числу q*; (p и q независимыя числа); въ самомъ дѣлѣ, когда назовемъ одну часть x, другая будетъ $p - x$, а произведеніе ихъ $x(p - x)$, которое, по предположенію, равно q.

Замѣтимъ теперь, что уравненіе не перемѣнится, если назовемъ x бо̀льшую или меньшую часть, и нѣтъ причины, по которой бы рѣшеніе дало одну изъ нихъ преимущественно передъ другою; слѣд. оно должно дать обѣ вмѣстѣ. Этимъ объясняется, почему уравненіе допускаетъ два прямыя рѣшенія.

Но чтобъ обѣ величины x были возможны, q должно быть менѣе $\frac{p^2}{4}$. Въ самомъ дѣлѣ, какія бы ни были искомыя части, всегда можно означить разность ихъ буквою d; а какъ сумма ихъ есть p, то, § 4, большая часть будетъ $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, а меньшая $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$. Произведеніе обоихъ выраженій даетъ, § 5, величину $\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}$, которая необходимо меньше $\frac{p^2}{4}$, если только не предполагаемъ обѣихъ частей равными между собою; въ этомъ же случаѣ $d=0$, и произведеніе приводится къ $\frac{p^2}{4}$. И такъ нелѣпо требовать, чтобы произведеніе q, было болѣе $\frac{p^2}{4}$.

Изъ сего также слѣдуетъ, что *наибольшее произведеніе, которое можно получить, когда раздѣлятъ какое либо число на двѣ части и перемножатъ ихъ между собою, есть квадратъ половины этого числа.* Положимъ, должно разложить число 56. Имѣемъ:

$$56=36+20, \text{ и } 36\times20=720;$$
$$56=31+25, \text{ и } 31\times25=775;$$
$$56=29+27, \text{ и } 29\times27=783;$$
$$56=28+28, \text{ и } 28\times28=784;$$

Здѣсь видно, что произведеніе будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе разность между обѣими частями, а *наибольшее* произведеніе получимъ тогда, когда обѣ части равны.

Разборъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

101. 1-е. Если въ уравненіи вида $x^2+px=-q$ т. е. когда q отрицательный (знакъ p можетъ быть произвольнымъ), положимъ $q=\frac{p^2}{4}$, то подкоренное количество $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, обѣихъ величинъ x, обращается въ нуль, и обѣ величины приводятся къ $x=-\frac{p}{2}$; тогда говорятъ, что *оба корня равны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если въ этомъ уравненіи вмѣсто q вставимъ $\frac{p^2}{4}$, оно обратится въ $x^2+px=-\frac{p^2}{4}$, откуда

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0, \text{ или } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Здѣсь 1-я часть *есть произведеніе двухъ равныхъ множителей*; слѣдов. можно также сказать, что корни уравненія равны, потому что приравнивая каждый множитель нулю, получаютъ одну и ту же величину для x.

2-е. Если въ общемъ уравненіи $x^2+px=q$, положимъ $q=0$, величины x обратятся въ

$$x=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2} \text{ или } x=0, \text{ и въ } x=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2} \text{ или } x=-p.$$

Въ самомъ дѣлѣ, тогда уравненіе имѣетъ видъ . . . . $x^2+px=0$ или $x(x+p)=0$, и одинаково удовлетворяется, когда положимъ $x=0$, или же $x+p=0$, откуда $x=-p$.

3-е. Если въ общемъ уравненіи $x^2+px=q$, положимъ $p=0$, то будетъ $x^2=q$, откуда $x=\pm\sqrt{q}$; то есть, въ этомъ случаѣ *обѣ величины x равны и съ противными знаками*; онѣ будутъ *возможныя*, *когда* q положительное, и *мнимыя*, когда q отрицательное. Тогда уравненіе входитъ въ разрядъ двучленныхъ уравненій, о которыхъ говорено въ § 93.

4-е. Когда положимъ $p=0$ и $q=0$, уравненіе приводится къ $x^2=0$, и даетъ двѣ величины x, равныя 0.

102. Остается разсмотрѣть одинъ случай, который часто встрѣчается при рѣшеніи задачъ 2-й степени.

Возьмемъ уравненіе $ax^2+bx=c$, изъ котораго выводимъ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

Положимъ, что въ слѣдствіе частныхъ величинъ данныхъ количествъ, имѣемъ $a=0$; выраженіе обратится въ

$$x=\frac{-b\pm b}{0}, \text{ откуда } x=\frac{0}{0} \text{ и } x=-\frac{2b}{0}.$$

Вторая величина представляется въ видѣ *безконечной величины*, и можетъ быть принята за рѣшеніе, если данный вопросъ допускаетъ рѣшенія въ безконечныхъ величинахъ, § 72.

Постараемся объяснить первую, $\frac{0}{0}$.

Разсматривая данное уравненіе, видимъ, что при $a=0$ оно обратится въ $bx=c$; отсюда имѣемъ $x=\frac{c}{b}$, выраженіе *конечное* и *опредѣленное*, которое можно принять за истинную величину выраженія $\frac{0}{0}$ въ разсматриваемомъ случаѣ. Величину $\frac{c}{b}$ можно вывести изъ выраженія

$$\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}.$$

Умножимъ числителя и знаменателя на $-b-\sqrt{b^2+4ac}$; получимъ $\frac{b^2-(b^2+4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2+4ac})}$, или $\frac{-4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2+4ac}}$, и раздѣливъ на $2a$,

$$\frac{-2c}{-b-\sqrt{b^2+4ac}}.$$

Когда въ этомъ выраженіи положимъ $a=0$, то получимъ $\frac{-2c}{-2b}$ или $\frac{c}{b}$. [Цѣль этого преобразованія состояла въ томъ, чтобъ освободить въ обѣихъ частяхъ дроби множитель $2a$, отъ котораго выраженіе обращалось къ виду $\frac{0}{0}$].

Положимъ въ одно время $a=0$ и $b=0$. Обѣ величины x обращаются къ виду $\frac{0}{0}$.

Если обратимся къ данному уравненію, то увидимъ, что оно обращается въ $c=0$, и не можетъ быть удовлетворено никакою величиною x; но легко доказать, что въ этомъ случаѣ обѣ величины x *безконечныя*.

Въ самомъ дѣлѣ, первая, $x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, обратится въ $\frac{c}{b}$, когда положимъ $a=0$, которое обратится въ $\frac{c}{0}$, когда положимъ еще $b=0$.

Вторая величина, $\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, посредствомъ тѣхъ же преобразованій, (т. е. умноживъ ее на $-b+\sqrt{b^2+4ac}$ и уничтоживъ общаго множителя $2a$), обращается въ

$$\frac{-2c}{-b+\sqrt{b^2+4ac}};$$

и когда положимъ $a=0$, $b=0$, она обратится въ $-\frac{2c}{0}$.

Наконецъ, положимъ въ одно время $a=0$, $b=0$, $c=0$; обѣ величины x будутъ вида $\frac{0}{0}$, и никакими преобразованіями нельзя обратить ихъ въ опредѣленныя величины. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ уравненіе приводится къ $0=0$, и становится совершенно *неопредѣленнымъ*.

Это единственный случай неопредѣленности въ уравненіяхъ второй степени.

Можно получить тѣ же самые выводы другимъ способомъ, который гораздо проще, и притомъ прилагается въ послѣдствіи къ уравненіямъ всѣхъ степеней.

Въ уравненіи $ax+bx=c$ положимъ $x=\frac{1}{y}$; получимъ,

$$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}=c, \text{ откуда } cy^2-by-a=0.$$

Положимъ теперь $a=0$; это уравненіе обратится въ $cy^2-by=0$, и даетъ двѣ величины: $y=0$ и $y=\frac{b}{c}$.

Вставляя эти величины въ отношеніе $x=\frac{1}{y}$, выводимъ:

$$x=\frac{1}{0},\ x=\frac{c}{b}.$$

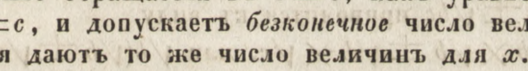
Если при $a=0$ имѣемъ и $b=0$, то величина . . . $x=\frac{c}{b}$ также обращается въ $\frac{c}{0}$ или *безконечную*.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $cy^2-by-a=0$ приводится въ этомъ случаѣ къ уравненію $cy^2=0$, въ которомъ оба корня равны 0; слѣд. обѣ соотвѣтствующія величины x будутъ безконечныя.

Когда въ одно время $a=0$, $b=0$, $c=0$, то уравненіе $cy^2-by-a=0$ обращается въ $0=0$, какъ уравненіе . . . $ax^2+bx=c$, и допускаетъ *безконечное* число величинъ для y, которыя даютъ то же число величинъ для x.

Приложимъ эти правила къ различнымъ задачамъ, въ которыхъ найдемъ всѣ обстоятельства, обыкновенно встрѣчающіяся въ задачахъ 2-й степени.

ЗАДАЧИ СВѢТЯЩИХСЯ ТОЧЕКЪ.



103. V. *На линіи, соединяющей два свѣтящія тѣла*

А и В, *опредѣлить точку, которая равно освѣщена обоими тѣлами.*

Изъ Физики извѣстно, что *напряженія свѣта, падающаго на двѣ различныя точки, находятся въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній этихъ точекъ отъ свѣтящаго тѣла;* т. е., когда свѣтящее тѣло будетъ А, а точки въ С и В, тогда напряженіе свѣта въ С *относится* къ напряженію свѣта въ В, *какъ* $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$.

Рѣшеніе. Назовемъ a разстояніе АВ двухъ тѣлъ; b и c, напряженія свѣта, изливаемаго тѣлами А и В на единицѣ разстоянія; С искомую точку. Положимъ $AC = x$; слѣдовательно $BC = a - x$.

Напряженіе свѣта тѣла А на единицѣ разстоянія, мы назвали b; слѣдовательно по закону Физики, на разстояніяхъ 2, 3, 4, ... , оно будетъ $\frac{b}{4}$, $\frac{b}{9}$, $\frac{b}{16}$,..., а на разстояніи x, выразится количествомъ $\frac{b}{x^2}$. Равномѣрно, изъ точки В, на разстояніи $a - x$, напряженіе свѣта будетъ $\frac{c}{(a-x)^2}$; но, по условію, эти количества должны быть равны; слѣдовательно имѣемъ уравненіе

$$\frac{b}{x^2} = \frac{c}{(a-x)^2};$$

чрезъ вычисленія получимъ: $(b-c)x^2 - 2abx = -a^2b$,

$$x = \frac{ab}{b-c} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{(b-c)^2} - \frac{a^2b}{b-c}},$$

$$x = \frac{a(b \pm \sqrt{bc})}{b-c}$$

Это выраженіе можно сократить, потому что,

1-е, $b \pm \sqrt{bc}$ приводится къ виду

$$\sqrt{b} \times \sqrt{b} \pm \sqrt{b} \times \sqrt{c}, \text{ или } \sqrt{b}(\sqrt{b} \pm \sqrt{c});$$

2-е, $b - c = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c^2}) = (\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})$.

И такъ, взявъ сначала верхній знакъ, имѣемъ

$$x = \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}.$$

для второй же величины найдемъ,

$$x = \frac{a\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Впрочемъ эти сокращенныя величины можно прямо вывесть изъ даннаго уравненія; потому что

$\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a-x)^2}$ приводится къ $\frac{(a-x)^2}{x^2}=\frac{c}{b}$, а извлекая корень, къ $\frac{a-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{c}{b}}=\frac{\pm\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, откуда $a\sqrt{b}-x\sqrt{b}=\pm x\sqrt{c}$; слѣдовательно $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$.

Замѣчаніе. Первыя величины были сложнѣе, потому что мы рѣшили уравненіе общимъ способомъ, который сложнѣе послѣдняго.

Изслѣдуемъ эти сокращенныя величины; мы имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l}1\text{-е. } x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\\ 2\text{-е. } x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\end{array}\right\rangle \text{ откуда } \left|\begin{array}{l}a-x=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\\ a-x=\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.\end{array}\right.$$

Положимъ сначала $b>c$.

Первая величина x, $\frac{a\sqrt{b}'}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; есть положительная и меньше a, потому что $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{c}}$ есть дробь; слѣд. опредѣляемая этою величиною точка, одинаково освѣщенная обоими тѣлами, будетъ находиться между точками А и В, гдѣ нибудь въ С. Притомъ эта точка ближе къ В, нежели къ А; какъ $b>c$, то $\sqrt{b}+\sqrt{b}$ или $2\sqrt{b}>\sqrt{b}+\sqrt{c}$, откуда $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{1}{2}$, а посему $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}>\frac{a}{2}$. Такъ и должно быть, потому что мы предполагаемъ, что тѣло А свѣтозарнѣе, нежели В.

Соотвѣтствующая величина $a-x$, $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, также положительная и притомъ меньше $\frac{a}{2}$, въ чемъ легко удостовѣриться.

Вторая величина x, $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, также положительная, но болѣе a, потому что $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}>1$. Этою величиною опредѣляется другая точка С′, на продолженіи линіи АВ, вправо отъ свѣтящихъ тѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ свѣтъ изливается во всѣ стороны, то на продолженіи АВ можетъ находиться другая равно освѣщаемая точка, которая и должна быть ближе къ тѣлу, у котораго напряженіе свѣта слабѣе.

Можно узнать à posteriori, почему эти двѣ величины выражаются однимъ и тѣмъ же уравненіемъ. Если вмѣсто

AC, возьмемъ за неизвѣстную AC′, то BC′$=x-a$; въ этомъ случаѣ получимъ уравненіе $\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(x-a)}$; а какъ $(x-a)^2$ тождественно съ $(a-x)^2$, то это уравненіе совершенно равно составленному прежде уравненію; посему и нѣтъ причины, по которой изъ послѣдняго уравненія должно было бы вывесть AC преимущественно предъ AC′.

Вторая величина $a-x$, $\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, есть отрицательная, чтò и должно быть, потому что $x>a$; но когда перемѣнимъ знаки уравненія $a-x=\frac{-a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, тогда $x-a=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, и эта величина $x-a$ представляетъ независимую величину разстоянія BC′.

Положимъ, $b<c$,

Первая величина, $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, остается положительною, но меньше $\frac{a}{2}$ потому-что

$$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{b}+\sqrt{b}>2\sqrt{b}.$$

Соотвѣтствующая величина $a-x$, или $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, также положительная и притомъ больше $\frac{a}{2}$. И такъ, при $b<c$, точка C, находясь между A и B, должна быть ближе къ тѣлу A, нежели къ B.

Вторая величина: $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ или $\frac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$, есть существенно отрицательная. Чтобъ объяснить ее, возвратимся къ уравненію, которое черезъ перемѣну x въ $-x$, обращается въ $\frac{b}{x^2}=\frac{c}{(a+x)^2}$. Но $a-x$ выражало разстояніе отъ искомой точки до B, слѣдовательно здѣсь это разстояніе выразится количествомъ $a+x$, и потому искомая точка должна находиться влѣво отъ A, напр. въ C″. Въ самомъ дѣлѣ, по условію тѣло B лучезарнѣе тѣла A, поэтому искомая точка должна находиться ближе къ A, нежели къ B.

Соотвѣтствующая величина $a-x$, $\frac{-a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ или $\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$ есть отрицательная; это происходитъ отъ того, что при x отрицательномъ, $a-x$ дѣйствительно выражаетъ *ариѳметическую сумму*.

Пусть будетъ $b=c$.

Первыя величины x и $a-x$ обратятся въ $\frac{a}{2}$; поэтому одинаково освѣщенная точка будетъ въ срединѣ AB.

Другія двѣ величины обращаются въ $\frac{a\sqrt{b}}{0}$, или въ *безконечныя*: т. е. разстояніе второй равно освѣщенной точки отъ A и B, болѣе всякаго даннаго количества. Этотъ выводъ вполнѣ согласуется съ предположеніемъ; если положимъ, что разность $b-c$ не равна нулю, однако жъ чрезвычайно мала, то вторая одинако освѣщенная точка существуетъ, но въ чрезвычайно большомъ разстояніи отъ свѣтящихъ тѣлъ; что̀ видно изъ выраженія $\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, въ которомъ знаменатель чрезвычайно малъ въ сравненіи съ числителемъ; наконецъ, когда положимъ $b=c$, или $\sqrt{b}-\sqrt{c}=0$, то искомая точка не можетъ существовать, или должна находиться въ *безконечномъ* разстояніи.

Если сдѣлать $b=c$ въ несокращенныхъ выраженіяхъ x,

$$x=\frac{a(b+\sqrt{bc})}{b-c} \text{ и } x=\frac{a(b-\sqrt{bc})}{b-c},$$

то первое, соотвѣтствующее величинѣ $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, обратится въ $\frac{2ab}{0}$, а второе, соотвѣтствующее $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, въ $\frac{0}{0}$; но выраженіе $\frac{0}{0}$ происходитъ единственно отъ присутствія множителя $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, общаго обоимъ членамъ величины x, §§ 73 и 102. Въ 1-мъ выраженіи также содержится общій множитель $\sqrt{b}+\sqrt{c}$; по исключеніи, получимъ $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, что̀ также приводится къ виду $\frac{a\sqrt{b}}{0}$, когда $b=c$.

Положимъ, $b=c$ и $a=0$.

Первая система величинъ x и $a-x$ обращается въ 0, вторая въ $\frac{0}{0}$. Здѣсь послѣднее выраженіе есть признакъ *неопредѣленности*; изъ уравненія задачи $(b-c)x^2-2abx=-a^2b$, получимъ $0.x^2-0.x=0$, а этому уравненію удовлетворяетъ всякое число, вставленное вмѣсто x. Въ самомъ дѣлѣ, оба свѣтящія тѣла, при одинакомъ напряженіи свѣта находятся въ одной точкѣ: поэтому они *должны одинаково освѣщать каждую точку на линіи* AB.

Величина 0, полученная для первой системы, есть одно изъ тѣхъ рѣшеній въ *безконечныхъ величинахъ*, о которыхъ мы говорили.

Положимъ наконецъ $a = 0$, *и* b *не равно* c.

Обѣ системы обращаются въ 0; это значитъ, что въ этомъ случаѣ только одна точка одинаково освѣщена, т. е. *точка, въ которой находятся оба свѣтящія тѣла*. Тогда уравненіе приводится къ $(b-c)\,x^2 = 0$, и даетъ двѣ равныя величины: $x = 0$, $x = 0$.

Въ этомъ изслѣдованіи можно видѣть новое доказательство точности, съ какою Алгебра выражаетъ и объясняетъ всѣ обстоятельства изложенія задачи.

104. VI. *Найти такіе два числа* x *и* y, *что разность этихъ чиселъ, умноженныхъ на числа* a *и* b, *равна числу* s, *а разность ихъ квадратовъ, числу* q.

Рѣшеніе. Назовемъ x и y искомыя числа; очевидно получимъ уравненія: $ax - by = s$, $x^2 - y^2 = q$.

Изъ 1-го выводимъ $x = \frac{by+s}{a}$, и вставляя эту величину во 2-е, имѣемъ

$$(a^2 - b^2)y^2 - 2bys = s^2 - a^2q,$$

слѣдовательно

$$y = \frac{bs \mp a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Вставивъ эту величину въ выраженіе x, будетъ

$$x = \frac{b\left(\frac{bs \pm a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}\right) + s}{a},$$

откуда

$$x = \frac{as \pm b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Здѣсь верхній знакъ величины y соотвѣтствуетъ верхнему знаку величины x, а нижній знакъ y нижнему знаку въ x.

Изслѣдованіе. Мы будемъ предполагать, что a, b, s, q суть количества независимыя; въ противномъ случаѣ въ нѣкоторыхъ членахъ перемѣнились бы знаки, и слѣдовало бы сдѣлать эти перемѣны прежде изслѣдованія величинъ x и y.

Положимъ $a > b$, и слѣдовательно $a^2 - b^2$ *положительное*.

Обѣ величины x и y только тогда возможны, когда

$$q(a^2 - b^2) < s^2, \text{ откуда } q < \frac{s^2}{a^3 - b^2}.$$

Положимъ, что это условіе удовлетворено, и опредѣлимъ знаки, принимаемые обѣими системами величинъ.

1-я система будетъ
$$\begin{cases} x = \dfrac{as + b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \\ y = \dfrac{bs + a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

Обѣ величины этой системы необходимо будутъ положительныя, и поэтому составляютъ *прямое рѣшенiе* задачи въ настоящемъ смыслѣ ея.

2-я система будетъ
$$\begin{cases} x = \dfrac{as - b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}, \\ y = \dfrac{bs - a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}. \end{cases}$$

Величина x есть положительная; если $a>b$, то $as>bs$, *и тѣмъ болѣе* $as > b\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)}$, потому что подкоренное количество меньше s.

Величина y можетъ быть положительною или отрицательною. Она будетъ положительная, когда
$$bs > a\sqrt{s^2 - q(a^2 - b^2)},$$
или, возвысивъ въ квадратъ, $b^2s^2 > a^2s^2 - a^2q(a^2 - b^2)$; прилагая къ каждой части $a^2q(a^2 - b^2)$, и вычитая b^2s^2, имѣемъ $a^2q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2)$, откуда, раздѣляя на $a^2(a^2 - b^2)$, $q > \frac{s^2}{a^2}$.

И такъ, вторая система тогда будетъ *прямымъ и возможнымъ рѣшенiемъ*, когда $q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$, но $> \frac{s^2}{a^2}$, то есть, величина q содержится между числами $\frac{s^2}{a^2}$ и $\frac{s^2}{a^2 - b^2}$.

[Замѣтимъ, что удобнѣе вывесть условiе $q > \frac{s^2}{a^2}$ изъ уравненiя $(a^2 - b^2)\, y^2 - 2bsy = s^2 - a^2q$, полученнаго для y, потому что при $a > b$, это уравненiе будетъ подходитъ къ виду уравненiя $x^2 - px = -q$, если имѣемъ $a^2q > s^2$ или $q > \frac{s^2}{a^2}$; и мы уже знаемъ, § 100, что въ этомъ случаѣ оба корня будутъ положительные].

Если же, напротивъ того, $q > \frac{s^2}{a^2}$, и тѣмъ болѣе $q < \frac{s^2}{a^2 - b^2}$, то величина y второй системы будетъ *отрицательною*, и (независимо отъ знака y) эта система будетъ рѣшеніемъ другой задачи, которую можно представить уравненіями $\left\{\begin{array}{l} ax+by=s, \\ x^2-y^2=q, \end{array}\right.$ и которая различается отъ данной задачи тѣмъ, что s выражаетъ *сумму*, а не *разность*.

И такъ, въ случаѣ $a>b$, задача допускаетъ два *возможныя и прямыя* рѣшенія, когда $q>\frac{s^2}{a^2}$ но $<\frac{s^2}{a^2-b^2}$; и только *одно* рѣшеніе, когда $q<\frac{s^2}{a^2}$.

Возьмемъ для a, b, s, какія либо независимыя числа, и, полагая $a>b$, выберемъ для q число, заключающееся между предѣлами $\frac{s^2}{a^2}$ и $\frac{s^2}{a^2-b^2}$: тогда мы непремѣнно должны получить *два прямыя рѣшенія*. Положимъ, напр. $a=6$, $b=4$, $s=15$, откуда

$$\frac{s^2}{a^2}=\frac{225}{36}=6\frac{1}{4},\ \frac{s^2}{a^2-b^2}=\frac{225}{20}=11\frac{1}{4}.$$

Поэтому можно положить, напримѣръ, $q=10$, и будетъ

$$x=\frac{6\times15\pm4\sqrt{225-20\times10}}{20}=\frac{90\pm20}{20}=\frac{11}{2}\ \text{и}=\frac{7}{2},$$

$$y=\frac{4\times15\pm6\sqrt{225-20\times10}}{20}=\frac{60\pm30}{20}=\frac{9}{2}\ \text{и}=\frac{3}{2}.$$

Рѣшенія $\left(x=\frac{11}{2},\ y=\frac{9}{2}\right)$ и $\left(x=\frac{7}{2},\ y=\frac{3}{2}\right)$ очевидно суть *два первыя рѣшенія* уравненій

$$6x-4y=15,\ x^2-y^2=10.$$

Но если положимъ $q=5$, то легко увѣримся, что только одна 1-я система доставитъ прямое рѣшеніе.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ОТНОСЯЩІЕСЯ КЪ ПРЕДПОЛОЖЕНІЮ $a<b$.

Положимъ $q=\frac{s^2}{a^2-b^2}$, откуда $q(a^2-b^2)=s^2$.

Обѣ системы величинъ x и y приводятся къ

$$x=\frac{as}{a^2-b^2},\ y=\frac{bs}{a^2-b^2};$$

въ этомъ случаѣ будетъ только одно, и притомъ *прямое* рѣшеніе задачи.

Положимъ $q=\frac{s^2}{a^2}$, откуда $s^2=a^2q$ и $s=a\sqrt{q}$.

1-я система будетъ $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{as+b\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.\sqrt{q}, \\ y=\frac{bs+a\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.\sqrt{q}; \end{array}\right.$

вторая, ... $\begin{cases} x = \frac{s - b\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2} = \sqrt{q}, \\ y = \frac{bs - a\sqrt{b^2q}}{a^2-b^2} = 0. \end{cases}$

Въ самомъ дѣлѣ, если $s^2 = a^2q$, то уравненіе, полученное для y, обратится въ $(a^2 - b^2)y^2 - 2bsy = 0$, откуда . . . $y = 0$, $y = \frac{2bs}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2}\sqrt{q}$. Вставимъ каждую изъ этихъ величинъ въ уравненіе $x = \frac{by+s}{a}$; будетъ

$$x = \frac{s}{a} = \sqrt{q}, \qquad x = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\sqrt{q}.$$

Положимъ, $a < b$, слѣдовательно $a^2 - b^2$ *отрицательное*. Выраженія x и y можно представить въ видѣ

$$x = \frac{-as \mp b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2},$$

$$y = \frac{-bs \mp a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)}}{b^2 - a^2}.$$

Всѣ эти величины возможны, потому что подкоренныя количества необходимо положительныя.

Что̀ же касается до знаковъ, то 1-я величина x есть существенно отрицательная, также какъ и 1-я величина y. И такъ эти величины, независимо отъ знака, соотвѣтствуютъ не даннымъ уравненіямъ, но уравненіямъ

$$by - ax = s, \quad x^2 - y^2 = q,$$

изъ которыхъ въ 1-мъ *члены* ax *и* by *переставлены*.

Вторая величина x необходимо положительная; когда $b > a$, то $b\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > as$, потому что численная величина подкореннаго количества болѣе s.

Но вторая величина y только тогда будетъ положительною, когда $a\sqrt{s^2 + q(b^2 - a^2)} > bs$,

возвысивъ въ квадратъ, . . $a^2s^2 + a^2q(b^2 - a^2) > b^2s^2$; перенеся a^2s^2, . . . $a^2q(b^2 - a^2) > (b^2 - a^2)s^2$,

и раздѣливъ на $a^2(b^2 - a^2)$, ... $q > \frac{s^2}{a^2}$.

Если возьмемъ для a, b, s, q, такія величины, что $b > a$ и $q > \frac{s^2}{a^2}$, задача также допускаетъ *прямое рѣшеніе*.

Положимъ наконецъ $a = b$, *откуда* $a^2 - b^2 = 0$.

Первая система величинъ при этомъ предположеніи обратится въ $x = \frac{2as}{0}$ $y = \frac{2as}{0}$;

а вторая, въ $x=\frac{0}{0}$ $y=\frac{0}{0}$;

но обращаясь къ уравненію $(a^2-b^2)y^2-2bsy=s^2-a^2q$, которое при $a=b$ приводится къ $-2asy \quad =s^2-a^2q$, выведемъ изъ этого уравненія, $y=\frac{a^2q-s^2}{2as}$;

а изъ выраженія $x=\frac{by+s}{a}$, получимъ $x=\frac{a^2q+s^2}{2as}$.

[Мы найдемъ тѣ же выводы, когда въ уравненіи, полученномъ для y, положимъ $y=\frac{1}{z}$, какъ показано въ § 102.]

Величины: $x=\frac{a^2q+s^2}{2as}$, $y=\frac{a^2q-s^2}{2as}$, тогда будутъ *прямыми* рѣшеніями задачи, $q>\frac{s^2}{a^2}$.

Преобразованіе неравенствъ.

105. При изслѣдованіи двухъ послѣднихъ задачъ, мы вывели нѣсколько *неравенствъ*, и производили надъ ними такія же преобразованія, какія производятъ надъ равенствами. Эти преобразованія необходимы, когда при изслѣдованіи задачи, между данными количествами должно опредѣлить отношенія, при которыхъ задача допускаетъ прямое или по крайней мѣрѣ возможное рѣшеніе, и потомъ изъ этихъ отношеній вывесть предѣлы, между которыми должны заключаться частныя величины нѣкоторыхъ данныхъ количествъ, чтобъ изложеніе вопроса соотвѣтствовало извѣстному обстоятельству. Правила, опредѣленныя для уравненій, вообще могутъ быть приложены и къ неравенствамъ; есть однако нѣкоторыя исключенія, которыя необходимо знать нужно, чтобъ не сдѣлать ошибокъ при употребленіи знаковъ неравенства. Эти исключенія происходятъ отъ того, что въ алгебраическихъ вычисленіяхъ *отрицательныя выраженія* разсматриваются какъ *количества*.

ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ЧРЕЗЪ СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ. *Неравенство не перемѣнится, если къ двумъ частямъ его прибавимъ, или вычтемъ изъ каждой части одно и то же количество.* Напримѣръ, возьмемъ неравенство $8>3$; мы также имѣемъ $8+5>3+5$; $8-5>3-5$. Возьмемъ еще $-3<-2$; имѣемъ также $-3+6<-2+6$, и $-3-6<-2-6$, (§ 63). Какъ и въ уравненіяхъ, это преобразованіе употребляется для перенесенія членовъ изъ одной части неравенства въ другую; напр. неравенство $a^2 + b^2 > 3b^2 - 2a^2$ можно написать такимъ образомъ: $a^2 + 2a^2 > 3b^2 - b^2$ или . . . . $3a^2 > 2b^2$.

Можно также сложить соотвѣтствующія части двухъ или болѣе неравенствъ, составленныхъ въ одинакомъ отношеніи; напр. изъ $a > b$, $c > d$, $e > f$, получаемъ . . . . $a + c + e > b + d + f$.

Но *при вычитаніи соотвѣтственныхъ частей двухъ или болѣе неравенствъ, составленныхъ въ одинакомъ отношеніи*, встрѣчаются исключенія, Возьмемъ неравенства $4 < 7$ и $2 < 3$; можемъ написать $4 - 2 < 7 - 3$, или $2 < 3$. Но возьмемъ $9 < 10$ и $6 < 8$; чрезъ вычитаніе получаемъ $9 - 6 > 10 - 8$, или $3 > 2$. Слѣд. неравенство будетъ въ другомъ отношеніи. Поэтому должно какъ можно рѣже употреблять это преобразованіе, и послѣ всегда повѣрять, въ какомъ отношеніи существуетъ полученное неравенство.

ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ЧРЕЗЪ УМНОЖЕНІЕ И ДѢЛЕНІЕ. *Всякое неравенство можно умножить на положительное число;* напримѣръ, изъ $a < b$ выводимъ $3a < 3b$; изъ $-a < -b$ получаемъ $-3a < -3b$. Это правило служитъ къ уничтоженію знаменателей.

Если дано неравенство $\frac{a^2 - b^2}{2d} > \frac{c^2 - d^2}{3a}$, то, умножая обѣ части на $6ad$, получаемъ

$$3a(a^2 - b^2) > 2d\,(c^2 - d^2).$$

То же самое правило относится и къ дѣленію.

Но *если умножимъ или раздѣлимъ двѣ части неравенства на величину отрицательную, то отношеніе неравенства измѣняется*. Возьмемъ напр. $8 > 7$; умноживъ обѣ части на -5, имѣемъ, на оборотъ, $-24 < -21$. Точно также, при $8 > 7$ имѣемъ $\frac{8}{-3}$ или $-\frac{8}{3} >$ или $-\frac{7}{-3}$ или $-\frac{7}{3}$. Итакъ, когда умножаютъ или дѣлятъ неравенство на алгебраическое количество, то должно разсмотрѣть: не будетъ ли *множитель* или *дѣлитель* величиною отрицательною: въ этомъ случаѣ должно обратить знакъ неравенства. Въ задачѣ § 104, изъ неравенства

$$a^2q(a^2 - b^2) > s^2(a^2 - b^2),$$

мы имѣли право вывести $q > \frac{s^2}{a^2}$, по раздѣленіи на $a^2(a^2 - b^2)$;

потому что мы предполагали $a > b$, и слѣд. $(a^2 - b^2)$ была величина положительная.

Нельзя перемѣнить знака двухъ частей неравенства, не перемѣняя въ то же время отношенія его; потому что это преобразованіе очевидно приводится къ *умноженію обѣихъ частей* на -1.

ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ЧРЕЗЪ ВОЗВЫШЕНІЕ ВЪ КВАДРАТЪ. *Можно возвысить въ квадратъ обѣ части неравенства, составленнаго изъ независимыхъ чиселъ.* Такимъ образомъ, неравенство $5 > 3$, даетъ $25 > 9$; изъ неравенства $a + b > c$, получимъ $(a + b)^2 > c^2$.

Но если неизвѣстны знаки, которые находятся предъ частями неравенства, то нельзя сказать впередъ, въ какомъ отношеніи будетъ полученное неравенство. Напр., $-2 > 3$, даетъ $(-2)^2$ или $4 < 9$; но $-3 > -5$, даетъ напротивъ, $(-3)^2$ или $9 < (-5)^2$ или 25. Поэтому, прежде возвышенія неравенства въ квадратъ, должно удостовѣриться, что обѣ части суть *числа независимыя.*

ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ЧРЕЗЪ ИЗВЛЕЧЕНІЕ КВАДРАТНАГО КОРНЯ. *Можно извлечь квадратный корень изъ двухъ частей неравенства между независимыми числами: отъ этого отношенія численныхъ величинъ корней не перемѣнятся.*

Изъ двухъ частей неравенства можно извлечь квадратный корень только тогда, когда обѣ части величины *положительныя*: иначе получили бы *выраженія мнимыя*, которыя нельзя сравнивать между собою. Напримѣръ, если имѣемъ $9 < 25$, то получимъ $\sqrt{9} < \sqrt{25}$ или $3 < 5$. Изъ $a^2 < b^2$, получаемъ $a < b$, если a и b числа независимыя. Неравенство $a^2 > (c - b)^2$ даетъ $a > c - b$, если $c > b$; но $a > b - c$, если напротивъ того, $b > c$.

Однимъ словомъ, когда обѣ части неравенства состоятъ изъ членовъ слагаемыхъ и вычитаемыхъ, *тогда корень каждой части должно представить въ видѣ многочлена, въ которомъ показанныя вычитанія были бы возможны.*

106. Вотъ еще нѣсколько задачъ для упражненія.

VII. *Два купца продаютъ одну и ту же матерію по разнымъ цѣнамъ; второй продалъ тремя аршинами болѣе перваго, и оба получили* 35 рублей. *Первый говоритъ второму: я бы за твой кусокъ получилъ* 24 рубля; *другой отвѣчаетъ: а я за твой кусокъ получилъ бы* $12\frac{1}{2}$ рублей. *Сколько аршинъ продалъ каждый?*

$$\left(\text{Отвѣтъ: }\begin{array}{ll} \text{1-й купецъ, } x = 15, & \\ \text{2-й купецъ, } y = 18; & \end{array} \text{или } \begin{array}{l} x = 5, \\ y = 8. \end{array}\right)$$

VIII. *Купецъ по одному заемному письму долженъ уплатить 6240 рублей черезъ 8 мѣсяцевъ, и по другому 7632 р. черезъ 9 мѣсяцевъ. Вмѣсто того онъ даетъ заемное письмо въ 14,256, съ тѣмъ, чтобъ уплатить его черезъ годъ. Спрашивается, сколько платилъ онъ процентовъ?*

(Отвѣтъ: 10 р. 33 к. на $\frac{0}{0}$ въ годъ).

Здѣсь предполагается, что цѣна каждаго заемнаго письма разочтена по то время, въ которое сдѣланъ размѣнъ; потому что задачу можно рѣшать различно, и получать совершенно различные выводы, смотря по времени, въ которое сдѣланъ разсчетъ.

IX. *Банкиръ далъ въ долгъ двумъ купцамъ 13,000 рублей, и отъ обоихъ получаетъ одинакую сумму процентовъ. Если бы первый платилъ тѣ же проценты, какъ второй, то банкиръ получилъ бы отъ перваго 360 рублей; а если бы второй платилъ столько же процентовъ, сколько первый, банкиръ получалъ бы отъ него 490 рублей. Спрашив. сколько процентовъ платилъ каждый купецъ.* (Отвѣтъ: 7 и 6).

Замѣчаніе. Уравненіе этой задачи можно рѣшить проще, нежели общимъ способомъ.

X. *Найти два прямоугольника, когда извѣстно, что сумма площадей ихъ равна q, сумма основаній равна a, и что площадь каждаго будетъ p и p' когда взаимно перемѣнимъ высоты этихъ прямоугольниковъ.* Рѣшить и изслѣдовать эту задачу.

(Отв. Основаніе перваго $x = \frac{a(2 + q \pm \sqrt{q^2 - 4pp'})}{2(p + p' + q)}$.

XI. *Раздѣлить два числа a и b; каждое на двѣ части, такъ, чтобы произведеніе отъ первой части числа a на первую часть числа b, равнялось числу p; а произведеніе вторыхъ частей a и b равнялось числу p'.* Рѣшить и изслѣдовать эту задачу.

XII. *Найти такое число, котораго квадратъ относится къ произведенію разностей между этимъ числомъ и двумя другими числами a и b, какъ p : q.* Рѣшить и изслѣдовать эту задачу.

Совѣтуемъ въ особенности заняться послѣднею задачею, потому что изслѣдованіе ея представляетъ новыя приложенія правилъ; относящихся къ неравенствамъ; сверхъ того, формулы, получаемыя при рѣшеніи этой задачи, заключаютъ въ себѣ рѣшенія множества другихъ вопросовъ, которые отличаются отъ даннаго только смысломъ нѣкоторыхъ условій.

Вопросы, относящіяся къ наибольшимъ *и* наименьшимъ *величинамъ. Свойства трichленовъ второй степени.*

107. Въ приложеніи Алгебры къ Геометріи встрѣчаются задачи особаго рода, которыхъ цѣль состоитъ въ томъ, чтобъ *опредѣлить наибольшую или наименьшую величину, до которой можетъ достигнуть выводъ, получаемый посредствомъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ числами.*

Напримѣръ. *Раздѣлить данное число* $2a$ *на двѣ части, такъ, чтобы произведеніе этихъ частей было* наибольшее (maximum).

Означимъ буквою x одну часть; другая будетъ $2a-x$, а произведеніе ихъ $x\,(2a-x)$. Если будемъ перемѣнять величину x, то это произведеніе также будетъ имѣть различныя *величины*: нужно найти такую величину для x, при которой это произведеніе будетъ имѣть *наибольшую* величину.

Назовемъ y это наибольшее произведеніе котораго, величина еще неизвѣстна; по смыслу задачи получимъ уравненіе $x(2a-x)=y$.

Полагая y извѣстнымъ, и выводя величину x, имѣемъ

$$x=a\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Но этотъ выводъ показываетъ, что обѣ величины x только тогда возможны, когда y меньше, или по крайней мѣрѣ не больше a^2; поэтому заключаемъ, что наибольшая величина, какую только можетъ имѣть y, или произведеніе двухъ искомыхъ частей, есть a^2, когда же сдѣлаемъ $y=a^2$, будетъ $x=a$.

И такъ, *для полученія наибольшаго произведенія, надобно раздѣлить* $2a$ *на двѣ равныя части, и* наибольшая *величина равна квадрату половины даннаго количества*. Этотъ выводъ мы уже получили другимъ способомъ, § 100.

Простѣйшее рѣшеніе. Назовемъ $2x$ разность между обѣими частями; какъ сумма ихъ $2a$, то большую часть можно, § 4, представить выраженіемъ $\frac{2a+2x}{2}$, или $a+x$, а меньшую выраженіемъ $a-x$; уравненіе будетъ, $(a+x)(a-x)=y$, или, $a^2-x^2=y$, откуда

$$x=\pm\sqrt{a^2-y}.$$

Эта величина x только тогда возможна, когда y не болѣе a^2. Если положимъ $y=a^2$, то $x=0$: поэтому *обѣ части должны быть равны*. Это рѣшеніе выгоднѣе потому, что приводитъ къ двучленному уравненію второй степени.

108. *Замѣчаніе*. Въ уравненіяхъ: $x(2a-x)=y$ и $(a+x)(a-x)=y$, величину x называютъ *перемѣнною*, а выраженія $x(2a-x)$ или $(a+x)(a-x)$ функціями этой перемѣнной Эта функція, выражаемая буквою y, есть также *перемѣнная*, и численная величина ея зависитъ отъ величины x. Поэтому обыкновенно называютъ первую *перемѣнною независимою*, тогда какъ вторая, y, принимаетъ величины, зависящія отъ величинъ x.

Рѣшая уравненія $x(2a-x)=y$ и $(a+x)(a-x)=y$ относительно x, получимъ

$$x=a\pm\sqrt{a^2-y} \text{ и } x=\pm\sqrt{a^2-y},$$

и въ этомъ случаѣ можемъ разсматривать y какъ *перемѣнную независимую*, а x какъ *функцію* этой перемѣнной.

109. Вторая задача. *Раздѣлить число $2a$ на двѣ части, такъ, чтобы сумма квадратныхъ корней изъ этихъ частей была наибольшая*.

Назовемъ x^2 одну изъ этихъ частей; другая будетъ $2a-x^2$, а сумма квадратныхъ корней ихъ равна $x+\sqrt{2a-x^2}$; слѣд. это выраженіе должно сдѣлать наибольшимъ.

Положимъ $x+\sqrt{2a-x^2}=y$.

Чтобъ рѣшить уравненіе, должно уничтожить коренной знакъ. Производя вычисленія, послѣдовательно получимъ

$$\sqrt{2a-x^2}=y-x,$$

$$2a-x^2=y^2-2xy+x^2;$$

$$2x^2-2xy=2a-y^2;$$

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{2a-y^2}{2}},$$

$$x=\frac{y}{2}\pm{}^1/_2\sqrt{4a-y^2}.$$

Обѣ величины x будутъ возможны, когда y^2 меньше, или по крайней мѣрѣ равно $4a$; поэтому $2\sqrt{a}$ есть *наибольшая величина* для y. Но если $y=2\sqrt{a}$, то $x=\sqrt{a}$, откуда $x^2=a$ и $2a-x^2=a$. Слѣд. *число* $2a$ *должно раздѣлить на двѣ равныя части, чтобъ сумма квадратныхъ корней этихъ частей была* наибольшая. Притомъ эта сумма равна $2\sqrt{a}$.

Напр дано число 72; $72=36+36$, и $\sqrt{36}+\sqrt{36}=12$; слѣд. 12 есть *наибольшая* сумма квадратныхъ корней изъ числа 72, раздѣленнаго на двѣ части. Разложимъ теперь 72 на $64+8$; $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{8}=2+$ дробь; слѣд. $\sqrt{64}+\sqrt{8}=10+$ дробь. Положимъ еще $72=49+23$; тогда $\sqrt{49}+\sqrt{23}=11+$ дробь.

Третья задача. *Выраженіе* $\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}$ *сдѣлать* наименьшимъ (minimum), полагая $m>n$.

Положимъ, что $\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}=y$; вычисленіями выводимъ

$$m^2x^2-(m^2-n^2)yx=-n^2;$$

$$x=\frac{(m^2-n^2)y}{2m^2}\pm\frac{1}{2m^2}\sqrt{(m^2-n^2)^2y^2-4m^2n^2}.$$

Чтобъ обѣ величины x, соотвѣтствующія одной величинѣ y, были возможны, $(m^2-n^2)^2y^2$ *по крайней мѣрѣ* должно быть равно $4m^2n^2$, и въ этомъ случаѣ $y=\frac{2mn}{m^2-n^2}$; это будетъ наименьшая величина функціи y.

Но дѣлая $y=\frac{2mn}{m^2-n^2}$ въ выраженіи x, подкоренное количество уничтожится, и величина x обратится въ

$$x=\frac{m^2-n^2}{2m^2}\times\frac{2mn}{m^2-n^2}=\frac{n}{m};$$

слѣд. величина $x=\frac{n}{m}$ дѣлаетъ данное выраженіе *наименьшимъ*.

110. Способъ рѣшенія подобныхъ вопросовъ состоитъ въ слѣдующемъ.

Составивъ алгебраическое выраженіе количества, допускающаго наибольшую *или* наименьшую *величину, уравниваемъ его какой ни есть буквѣ* y. *Если получимъ уравненіе 2-й степени въ* x (означая буквою x перемѣнное количество въ данномъ выраженіи), *то рѣшаемъ это уравненіе относительно* x; *потомъ уравниваемъ нулю подкоренное количество и выводимъ изъ него величину* y, *которая и представляетъ искомое* наибольшее *или* наименьшее. *Наконецъ*, *вставивъ эту величину* y *въ выраженіи* x, *получимъ величину перемѣнной* x, *удовлетворяющую вопросу.*

Замѣчаніе. Если подкоренное количество остается положительнымъ при всѣхъ величинахъ y, то заключаемъ, что *данное выраженіе можетъ принимать всѣ возможныя величины*, или, другими словами, наибольшею *величиною такого выраженія будетъ безконечность, а* наименьшею *нуль.*

Напр. выраженіе $\frac{4x^2+4x-3}{6(2x+1)}$ допускаетъ ли *наибольшую* или *наименьшую* величину?

Положимъ $\frac{4x^2+4x-3}{6(2x+1)}=y$; отсюда выводимъ

$$4x^2-4(3y-1)x=6y+3,$$

$$x=\frac{3y-1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9y^2+4}.$$

Какую бы величину ни взяли для y, подкоренное количество всегда останется положительнымъ. И такъ, данное выраженіе допускаетъ всевозможныя величины.

Въ этихъ примѣрахъ подкоренное количество въ величинѣ x состояло только изъ двухъ частей: одна съ y или y^2, другая же часть вся извѣстная, и легко было найти *наибольшую* или *наименьшую* величину, допускаемую сею функціею. Но иногда подкоренное количество представляется въ видѣ my^2+ny+p; въ этомъ случаѣ вопросъ гораздо сложнѣе, и для полнаго рѣшенія его нужно сначала доказать нѣсколько свойствъ, принадлежащихъ этимъ трichленамъ.

Свойства трichленовъ 2-й степени.

111. *Трichленомъ 2-й степени* называется всякое алгебраическое выраженіе, которое можно привесть къ виду my^2+ny+p, гдѣ m, n и p означаютъ *извѣстныя количества*, съ какими ни есть знаками, а y *перемѣнную*, то есть, количество, которому даютъ различныя величины. Напримѣръ,

$$3y^2-5y+7,\quad -9y^2+2y+5,$$

$$(a-b+2c)\,y^2+4b^2y-2ac^2+3a^2b,$$

суть трichлены второй степени въ y.

Если приравняемъ нулю трichленъ my^2+ny+p, то есть, $my^2+ny+p=0$, откуда $y=-\frac{n}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{n^2-4mp}$, . . [1], то относительно свойства величинъ y можно сдѣлать три главныя предположенія.

Можемъ имѣть: 1-е, $n^2-4mp>0$ или *положительное*; тогда оба корня уравненія *возможны* и *неравны*, съ какими ни есть знаками;

2-е, или $n^2-4mp=0$; оба корня *возможны* и *равны*;

3-е, или $n^2-4mp<0$, или *отрицательное*; тогда оба корня *мнимые*.

Въ этихъ трехъ случаяхъ замѣчаемъ слѣдующее:

Въ 1-мъ случаѣ, когда для уравненія [1] получаемъ два возможные и неравные корня, *если вставимъ вмѣсто* y *какое ни есть количество* (положительное или отрицательное), *содержащееся между обоими корнями, то получимъ выводъ, имѣющій съ предстоящимъ* y^2 *противные знаки; если же вставимъ вмѣсто* y *количество, не содержащееся между корнями, то при выводѣ будетъ тотъ же знакъ, какой находится при предстоящемъ величины* y^2.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ буквами y' и y'' корни (полагая ихъ *возможными*) уравненія

$$my^2+ny+p=0 \text{ или } m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=0.$$

Первую часть уравненія можно, § 97, представить въ видѣ $m(y-y')(y-y'')$. Слѣд. имѣемъ

$$my^2+ny+p=m(y-y')(y-y''),$$

какую бы величину ни взяли для y.

Теперь пусть будетъ α количество, содержащееся между y' и y'', то есть, $\alpha>$ или $<y'$, и въ то же время $\alpha<$ или $>y''$; тогда будетъ $\alpha-y'>$ или <0, но $\alpha-y''<$или >0; откуда видимъ, что множители $\alpha-y'$, $\alpha-y''$ имѣютъ *разные знаки*, и произведеніе ихъ, $(a-y')(\alpha-y'')$, будетъ *отрицательнымъ*. Слѣд. выводъ $m(\alpha-y')(\alpha-y'')$ или величина его $m\alpha^2+n\alpha+p$, будетъ имѣть знакъ, противный знаку предстоящаго m.

Если же положимъ $\alpha>$ или $<y'$ и $\alpha>$ или $<y''$, откуда $\alpha-y'>$ или <0 и $a-y''>$ или <0, то оба множители имѣютъ одинакіе знаки; слѣд. произведеніе ихъ $(\alpha-y')(\alpha-y'')$ есть *положительное*, а посему $m(\alpha-y')(\alpha-y'')$ или $m\alpha^2+n\alpha+p$ одинакаго знака съ m, Ч. Д. Н.

Во 2-мъ случаѣ, когда получаются два возможные и равные корни, *всякое количество* (исключая количество, отъ котораго трichленъ обращается въ нуль), *вставленное вмѣсто y, даетъ выводъ одинакаго съ предстоящимъ y^2 знакомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, какъ оба корня равны, то имѣемъ отношеніе $n^2-4mp=0$, откуда $p=\frac{n^2}{4m}$; тогда трichленъ my^2+ny+p или $m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)$ можно представить въ видѣ $m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}\right)$ или $m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$; но при всякой величинѣ y, не равной $-\frac{n}{2m}$, количество $\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$ очевидно будетъ положительнымъ; и такъ $m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2$ или my^2+ny+p будетъ одинакаго знака съ m; Ч. Д. Н.

Въ 3-мъ случаѣ, когда оба корня мнимые, *всякое вещественное количество, положительное или отрицательное, вставленное вмѣсто y, даетъ выводъ одинакаго знака съ предстоящимъ y^2.*

Какъ оба корня мнимые, то имѣемъ отношеніе $n^2-4mp<0$, откуда $4mp>n^2$, или, § 105, раздѣливъ на $4m^2$, $\frac{p}{m}>\frac{n^2}{4m^2}$. И такъ, положимъ $\frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}+k^2$, гдѣ k^2 означаетъ количество положительное; будетъ: my^2+ny+p.

$$\text{или } m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=m\left(y^2+\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}+k^2\right)$$

$$=m\left(y+\frac{n}{2m}\right)^2+mk^2;$$

это количество всегда будетъ одинакаго знака съ m, какую бы величину ни взяли для y.

112. Второе свойство приводитъ насъ къ предложенію, которое часто встрѣчается въ Аналитикѣ.

Если трichленъ 2-й степени, my^2+ny+p, полный квадратъ, то между предстоящими существуетъ отношеніе $n^2-4mp=0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если трichленъ полный квадратъ вида $(m'y+n')^2$, то оба корня уравненія $my^2+ny+p=0$ должны быть *равны*; но чтобъ они были равны, подкоренное количество, n^2-4mp, должно равняться *нулю*; и такъ имѣемъ отношеніе $n^2-4mp=0$.

Обратно. Если между предстоящими имѣется отношеніе $n^2-4mp=0$, трichленъ будетъ полнымъ квадратомъ;

потому что изъ этого отношенія выводимъ $p = \frac{n^2}{4m}$, откуда $my^2 + ny + p = my^2 + ny + \frac{n^2}{4m} = \left(y\sqrt{m} + \frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2$.

113. Разсмотримъ употребленіе этихъ свойствъ при рѣшеніи вопросовъ о *наибольшихъ и наименьшихъ* величинахъ.

Опредѣлить, можетъ ли функція $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ выражать послѣдовательно всѣ величины, при перемѣнной x.

Положимъ $\frac{x^2-2x+21}{6x-14} = y$; выводимъ,

$$x^2 - 2(3y+1)x = -21 - 14y,$$

$$x = 3y + 1 \pm \sqrt{9y^2 - 8y - 20}.$$

Чтобъ x было возможно, $9y^2 - 8y - 20$ должно быть положительнымъ. Но приравнивая это количество нулю, будетъ

$$y^2 - \frac{8}{9}y - \frac{20}{9} = 0, \text{ откуда } y = 2 \text{ и } y = -\frac{10}{9}.$$

Мы получили для y двѣ возможныя и неравныя величины; поэтому, въ слѣдствіе перваго свойства, стр. 140, когда возьмемъ для y величины между 2 и $-\frac{10}{9}$, напримѣръ 1, 0, — 1, тогда тричленъ будетъ величиною *отрицательною*, потому что y имѣетъ положительное предстоящее; но когда вставимъ вмѣсто y всѣ другія величины, какъ 3, 4, ... , или —2, —3, —4, ... , то получимъ выводъ *положительный*. И такъ, *въ независимыхъ числахъ*, число 2 есть наименьшая величина y, при которой величина x возможна. Вставляя $y = 2$ въ выраженіи x, коренной знакъ уничтожится, и $x = 7$.

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$, при $x = 7$, обращается въ $\frac{49-14+21}{42-14} = \frac{56}{28} = 2$.

Корень $y = -\frac{10}{9}$, *въ отрицательныхъ числахъ* есть наибольшая величина, допускаемая для y, и соотвѣтствующая величина x будетъ

$$x = 3 \times -\frac{10}{9} + 1 = -\frac{7}{3}.$$

Замѣчаніе. Если въ величинѣ x, предстоящее перемѣнной y^2 подъ кореннымъ знакомъ будетъ *отрицательное*, и двѣ величины y, выводимыя изъ тричлена приравненнаго нулю, будутъ: одна положительная, другая отрицательная, то *положительная величина есть* НАИБОЛЬШАЯ, потому что при всякой большей величинѣ выводъ былъ бы одинакаго знака съ предстоящимъ y^2; а *величина отрицательная есть* НАИМЕНЬШАЯ изъ отрицательныхъ величинъ, которыя можно взять для y.

Можно разсмотрѣть другія обстоятельства: напр. когда при положительномъ предстоящемъ y^2, обѣ величины y будутъ положительными; или когда обѣ величины мнимыя. Для упражненія могутъ служить слѣдующіе вопросы:

Число 2a раздѣлить на двѣ части, такъ, чтобы сумма частныхъ отъ взаимнаго раздѣленія этихъ частей одну на другую, была НАИМЕНЬШАЯ. (Обѣ части должны быть равны, и *наименьшая* величина есть 2).

Даны два числа a и b; отыскать для x такую величину, чтобъ выраженіе $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$ *имѣло наибольшую величину.*

(Отв. *наибольшая величина есть* $\frac{(a+b)^2}{4ab}$, и соотвѣтствующая ей величина x равна $\frac{2ab}{a-b}$).

Даны два числа a *и* b; *отыскать для* x *такую величину, чтобъ выраженіе* $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$ *было наименьшимъ.*

Отвѣтъ. Здѣсь получимъ двѣ величины:
$x=+\sqrt{ab}$, для которой наименьшее есть $y=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$,
и $x=-\sqrt{ab}$, для которой наибольшее есть $y=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

III. Уравненія и задачи 2-й степени съ двумя и болѣе неизвѣстными. Новыя дѣйствія надъ коренными величинами 2-й степени, возможными или мнимыми.

114. Здѣсь нельзя еще представить полную теорію рѣшенія этихъ задачъ, потому что рѣшеніе двухъ уравненій 2-й степени съ двумя неизвѣстными, вообще зависитъ отъ рѣшенія уравненій 4-й степени съ одною неизвѣстною; но мы займемся нѣкоторыми вопросами, которые зависятъ только отъ рѣшенія уравненія 2-й степени съ одною неизвѣстною.

I. *Найти два числа, коихъ произведеніе равно* p, *а сумма произведеній на числа* a *и* b, *равна* 2s.

Называя x и y два искомыя числа, имѣемъ уравненія

$$ax + by = 2s,\ xy = p.$$

Изъ 1-го выводимъ $y = \frac{2s - ax}{b}$; вставивъ во 2-е и сокращая $$ax^2 - 2sx = -bp.$$

И такъ $$x = \frac{s}{a} \pm \frac{1}{a}\sqrt{s^2 - abp},$$

а посему $$y = \frac{s}{b} \mp \frac{1}{b}\sqrt{s^2 - abp}.$$

Слѣд. задача допускаетъ два прямыя рѣшенія, потому что s очевидно $> \sqrt{s^2 - abp}$; но чтобъ они были возможны, s^2 должно быть болѣе или равно abp.

Пусть $a = b = 1$; величины x и y обратятся въ

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p} \text{ и } y = s \mp \sqrt{s^2 - p}.$$

Обѣ величины y равны величинамъ x, взятымъ въ обратномъ порядкѣ; то есть, когда $s + \sqrt{s^2 - p}$ представляетъ величину x, то соотвѣтствующая величина y будетъ $s - \sqrt{s^2 - p}$, и обратно.

Объяснимъ это обстоятельство. Замѣтимъ, что при.... $a = b = 1$, уравненія обращаются въ

$$x + y = 2s,\ xy = p;$$

тогда задача приводится къ тому, чтобъ *отыскать два числа, которыхъ сумма равна* 2s, *а произведеніе равно* p; или *число* 2s *раздѣлить на двѣ части, коихъ произведеніе равно* p; мы же видѣли, § 100, что обѣ части необходимо связаны между собою однимъ уравненіемъ 2-й степени .... $x^2 - 2sx + p = 0$, въ которомъ *предстоящее втораго члена есть сумма* 2s, *взятая съ противнымъ знакомъ*, *а третій членъ есть произведеніе* p *двухъ частей.*

115. II. *Найти четыре члена геометрической пропорціи, по извѣстной суммѣ* 2s *крайнихъ, суммѣ* 2s' *среднихъ членовъ, и суммѣ квадратовъ* $4c^2$.

Назовемъ u, x, y, z, четыре члена пропорціи; по условіямъ задачи и свойству пропорцій, уравненія задачи будутъ

$$u+z=2s,$$
$$x+y=2s',$$
$$uz=xy,$$
$$u^2+x^2+y^2+z^2=4c^2.$$

Съ перваго взгляда опредѣленіе величины неизвѣстныхъ покажется затруднительнымъ; но когда введемъ *вспомогательную неизвѣстную*, то весьма легко ихъ найти.

Пусть будетъ p неизвѣстное произведеніе крайнихъ или среднихъ членовъ; тогда имѣемъ уравненія

$$\text{1-е.}\ \left\{\begin{aligned} u+z&=2s\\ uz&=p, \end{aligned}\right. \quad \text{откуда} \quad \left\{\begin{aligned} u&=s+\sqrt{s^2-p},\\ z&=s-\sqrt{s^2-p}. \end{aligned}\right.$$

(Смотри предъидущую задачу).

$$\text{2-е.}\ \left\{\begin{aligned} x+y&=2s',\\ xy&=p, \end{aligned}\right. \quad \text{откуда} \quad \left\{\begin{aligned} x&=s'+\sqrt{s'^2-p},\\ y&=s'-\sqrt{s'^2-p}. \end{aligned}\right.$$

Теперь опредѣленіе четырехъ неизвѣстныхъ зависитъ только отъ опредѣленія произведенія p.

Замѣнивъ u, x, y, z ихъ величинами, послѣднее уравненіе задачи обратится въ

$$[s+\sqrt{s^2-p}]^2+[s-\sqrt{s^2-p}]^2+[s'+\sqrt{s'^2-p}]^2+$$
$$[s'-\sqrt{s'^2-p}]^2=4c^2$$ или $4s^2+4s'^2-4p=4c^2$; слѣдовательно $p=s^2+s'^2-c^2$.

Подставляя эту величину p въ выраженіяхъ u, x, y, z, найдемъ $u=s+\sqrt{c^2-s'^2}$, $x=s'+\sqrt{c^2-s^2}$,

$$z=s-\sqrt{c^2-s'^2},\quad y=s'-\sqrt{c^2-s^2}.$$

Эти числа пропорціональны между собою, потому что

$$uz=[s+\sqrt{c^2-s'^2}]\,.\,[s-\sqrt{c^2-s'^2}]=s^2-c^2+s'^2;$$
$$xy=[s'+\sqrt{c^2-s^2}]\,.\,[s'-\sqrt{c^2-s'^2}]=s'^2-c^2+s^2.$$

116. Уравненіе съ двумя неизвѣстными будетъ *второй степени*, когда въ немъ содержатся члены, въ которыхъ *сумма показателей двухъ неизвѣстныхъ равна двумъ и не болѣе двухъ.* Напримѣръ,

$$3x^2-4x+y^2-xy-5y+6=0,\quad 7xy-4x+y=0,$$

(Если уравненіе имѣетъ знаменатели, то предполагается, что x и y не входятъ въ знаменатели; смот. примѣчаніе въ § 92.) Слѣд. всякое уравненіе 2-й степени съ двумя неизвѣстными будетъ вида:

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+fx+g=0,$$

гдѣ a, b, c, . . . , означаютъ извѣстныя численныя или алгебраическія количества. Пусть даны уравненія

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+fx+g=0,$$
$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+f'x+g'=0.$$

Располагая эти уравненія по степенямъ x, получимъ

$$cx^2+(by+f)x+ay^2+dy+g=0,$$
$$c'x^2+(b'y+f)x+a'y^2+d'y+g'=0.$$

Когда въ обоихъ уравненіяхъ величины x^2 имѣютъ одинакія предстоящія, то вычтя эти уравненія одно изъ другаго, получимъ уравненіе 1-й степени въ x, которымъ можно замѣнить одно изъ данныхъ уравненій; изъ этого уравненія выведемъ величину x выраженную въ y, и, подставивъ ее въ одно изъ данныхъ уравненій, получимъ уравненіе, заключающее одну только неизвѣстную, y.

Умножимъ 1-е уравненіе на c', 2-е на c; будетъ

$$cc'x^2+(by+f)c'x+(ay^2+dy+g)c'=0,$$
$$cc'x^2+(b'y+f')cx+(a'y^2+d'y+g')c=0;$$

эти уравненія могутъ замѣнить предъидущія, и предстоящія x^2 въ обоихъ одинаковы.

Вычитая 2-е изъ 1-го, находимъ

$$[(bc'-cb')y+fc'-cf']x+(ac'-ca')y^2+(dc'-cd')y+gc'-cg'=0,$$

откуда $x=\dfrac{(ca'-ac')y^2+(cd'-dc')y+cg'-gc'}{(bc'-cb')y+fc'-cf'}$.

Подставивъ это выраженіе x въ одно изъ данныхъ уравненій, получимъ *окончательное уравненіе* въ y. Не дѣлая подстановленія, которое привело бы къ весьма сложному выводу, легко замѣтить, что уравненіе въ y будетъ 4-й степени. Въ самомъ дѣлѣ, какъ числитель выраженія x будетъ вида my^2+ny+p, то квадратъ его, или выраженіе x^2 будетъ 4-й степени; а въ каждомъ изъ данныхъ уравненій находится x^2.

И такъ, вообще, *рѣшеніе двухъ уравненій* 2-й *степени съ двумя неизвѣстными, зависитъ отъ рѣшенія уравненія* 4-й *степени съ одною неизвѣстною*.

117. Нѣкоторыя уравненія 4-й степени рѣшаются какъ уравненія 2-й степени; эти уравненія, которыя будутъ вида $x^4+px^2+q=0$, называются *тричленными уравненіями* 4-й *степени*, потому что въ нихъ заключаются только три рода членовъ: члены содержащіе x^4, члены съ x^2, и извѣстные члены.

Чтобъ рѣшить уравненіе $x^4+px^2+q=0$, положимъ $x^2=y$; тогда уравненіе перемѣнится въ $y^2+py+q=0$, откуда $y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$; но изъ уравненія $x^2=y$ имѣемъ $x=\pm\sqrt{y}$;

слѣд. $$x=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}}.$$

Легко замѣтить, что x имѣетъ четыре величины: каждый изъ знаковъ $+$ и $-$ предъ первымъ кореннымъ знакомъ, можно послѣдовательно соединять съ каждымъ изъ двухъ знаковъ втораго подкореннаго количества; *но взятыя по двѣ, эти величины равны и съ противными знаками*.

Возьмемъ напр. уравненіе $x^4-25x^2=-144$;

полагая $x^2=y$, будетъ $y^2-25y=-144$,

откуда $y=16$, $y=9$.

Подставивъ эти величины въ уравненіе $x^2=y$, получимъ,

1-е. $x^2=16$, откуда $x=\pm4$; 2-е, $x^2=9$, или $x=\pm3$.

И такъ, величины x суть . . . $+4$, -4, $+3$ и -3.

Дано уравненіе $x^4-7x^2=8$.

Положимъ $x^2=y$; урав. перемѣнится въ $y^2-7y=8$, откуда $y=8$ и $y=-1$.

И такъ, 1-е, $x^2=8$, слѣд. $x=\pm2\sqrt{2}$; 2-е, $x^2=-1$, или $x=\pm\sqrt{-1}$; послѣднія двѣ величины мнимыя.

Дано уравненіе $x^4-(2bc+4a^2)x^2=-b^2c^2$;

положивъ $x^2=y$, будетъ $y^2-(2bc+4a^2)y=-b^2c^2$;

откуда, $y=bc+2a^2\pm2a\sqrt{bc+a^2}$,

и слѣд. $x=\pm\sqrt{bc+2a^2\pm2a\sqrt{(bc+a^2)}}$.

118. При рѣшеніи *трichленнаго уравненія 4-й степени*, встрѣчается новый родъ алгебраическаго дѣйствія, именно: *извлеченіе квадратнаго корня изъ количества вида* $A \pm \sqrt{B}$, гдѣ A и B количества соизмѣримыя съ какими ни есть знаками. Напримѣръ:

Возвысить въ квадратъ выраженіе $3 \pm \sqrt{5}$.

Получимъ $(3 \pm \sqrt{5})^2 = 9 \pm 6\sqrt{5} + 5 = 14 \pm 6\sqrt{5}$;

и обратно, $\sqrt{14 \pm 6\sqrt{5}} = 3 \pm \sqrt{5}$.

$$(\sqrt{7} \pm \sqrt{11})^2 = 7 \pm 2\sqrt{77} + 11 = 18 \pm 2\sqrt{77};$$

и обратно, $\sqrt{18 \pm 2\sqrt{77}} = \sqrt{7} \pm \sqrt{11}$.

Поэтому, выраженіе вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ можно иногда привесть къ виду $A' \pm \sqrt{B'}$, или $\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}$. Всегда надобно дѣлать это преобразованіе, когда оно возможно; потому что тогда остается только извлечь одинъ или два простые квадратные корня, между тѣмъ какъ въ выраженіи $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, должно извлекать квадратный корень изъ квадратнаго корня.

Дано количество вида $A \pm \sqrt{B}$, *узнать, будетъ ли оно квадратомъ другаго количества, вида* $A' \pm \sqrt{B'}$, *или* $\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'}$ *и опредѣлить это количество.*

Чтобъ рѣшить вопросъ, прежде надобно замѣтить слѣдующій законъ: когда имѣемъ равенство, вида

$$m + \sqrt{n} = m' + \sqrt{n'},$$

гдѣ m и m' соизмѣримыя, а $\sqrt{n}$ и $\sqrt{n'}$ два несоизмѣримыя числа, тогда мы также должны имѣть отдѣльно

$$m = m', \quad \sqrt{n} = \sqrt{n'}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предложеннаго равенства выводимъ: $\sqrt{n} = m' - m + \sqrt{n'}$, или, возвысивъ въ квадратъ,

$$n = (m' - m)^2 + n' + 2(m' - m)\sqrt{n'}.$$

Первая часть равенства есть число соизмѣримое, поэтому вторая часть также должна быть соизмѣримою; но $\sqrt{n'}$ несоизмѣримо по положенію, слѣд. и количество $2(m' - m)\sqrt{n'}$ будетъ несоизмѣримымъ. И такъ, чтобъ равенство существовало, количество $2(m' - m)\sqrt{n}$ должно уничтожиться, а для сего надобно положить $m' - m = 0$, откуда $m' = m$, а слѣд. и $\sqrt{n} = \sqrt{n'}$, Ч. Д Н.

Назовемъ теперь p и q двѣ части, изъ которыхъ долженъ состоять квадратный корень изъ $A + \sqrt{B}$; тогда p и q

несоизмѣримыя количества, или же: одно изъ нихъ будетъ *соизмѣримое*, а другое *несоизмѣримое* количество 2-й степени, такъ, что p^2 и q^2 необходимо будутъ соизмѣримые. Имѣемъ уравненіе

$$p+q=\sqrt{A+\sqrt{B}}, \quad . \ . \ . \ [1]$$

и возвысивъ въ квадратъ, $p^2+q^2+2pq=A+\sqrt{B}$.

Здѣсь вторая часть уравненія несоизмѣрима, слѣдов. и первая часть несоизмѣрима. Но p^2 и q^2, поэтому и p^2+q^2 соизмѣримы, слѣд. въ первой части $2pq$ должно быть несоизмѣримо, и въ слѣдствіе доказаннаго закона, можно раздѣлить это уравненіе на два:

$$p^2+q^2=A, \quad . \ . \ . \ [2];$$
$$2pq=\sqrt{B}, \quad . \ . \ [3].$$

Изъ уравненія [3] можно вывесть величину q, и вставить ее въ уравненіе [2]; тогда получимъ трichленное уравненіе 4-й степени въ p, изъ котораго легко вывесть величины p и q. Но еще удобнѣе опредѣлить ихъ слѣдующимъ образомъ:

Вычтемъ уравненіе [3] изъ [2]; будетъ

$$(p-q)^2=A-\sqrt{B}, \text{ и } p-q=\sqrt{A-\sqrt{B}};$$

перемноживъ это уравненіе съ [1], получимъ

$$p^2-q^2=\sqrt{A^2-B}.$$

Этотъ выводъ уже показываетъ, что выраженіе p^2-q^2 также соизмѣримо, когда p^2 и q^2 соизмѣримы; поэтому $A+\sqrt{B}$ только тогда будетъ полнымъ квадратомъ количества . . . $A'+\sqrt{B'}$ или $\sqrt{A}+\sqrt{B'}$, когда и количество A^2-B будетъ *полнымъ квадратомъ: это есть признакъ, по которому узнаютъ возможность предложеннаго дѣйствія.*

Какъ A^2-B должно быть полнымъ квадратомъ, то означимъ численную величину корня его буквою C; будетъ

$$p^2-q^2=\pm C, \quad . \ . \ . \ . \ [4].$$

Соединивъ уравненія [2] и [4] сложеніемъ и вычитаніемъ, получимъ

$$p^2=\frac{A\pm C}{2} \text{ откуда } p=\pm\sqrt{\frac{A\pm C}{2}},$$
$$q^2=\frac{A\mp C}{2} \text{ откуда } q=\pm\sqrt{\frac{A\mp C}{2}};$$

что даетъ для требуемаго корня

$$p+q \text{ или } \sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

Въ этихъ величинахъ p и q мы не принимали въ соображеніе нижняго знака количества C, потому что получили бы тѣ же самыя величины для $p+q$. Но соединеніе двухъ двойныхъ знаковъ $\pm$ каждой величины p и q, даетъ *четыре* величины, которыя заключаются въ выраженіи $\sqrt{A+\sqrt{B}}$, когда выставимъ всѣ знаки его: $\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$; поэтому въ приложеніяхъ должно употреблять слѣдующую формулу:

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\pm\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}, \ldots [5],$$

и знаки, которые должно соединять между собою для составленія равенства, опредѣлятся уравненіемъ [3], именно: p и q должны имѣть *одинакіе* знаки, когда имѣемъ $+\sqrt{B}$, и *различные*, когда возьмемъ $-\sqrt{B}$.

119. Приложимъ эту формулу къ частнымъ примѣрамъ. Напримѣръ, возьмемъ численное выраженіе

$$94\pm42\sqrt{5} \text{ или } 94\pm\sqrt{8820};$$

здѣсь $A=94$, $B=8820$, слѣд. $A^2-B=8836-8820=16$, *полный квадратъ*; и такъ $C=4$;

слѣд. $p=\sqrt{\frac{94+4}{2}}=\pm7$, $q=\sqrt{\frac{94-4}{2}}=\pm3\sqrt{5}$.

Поэтому $\sqrt{94\pm42\sqrt{5}}=\pm7\pm3\sqrt{5}$,

или, яснѣе, $\sqrt{94+42\sqrt{5}}=\pm(7+3\sqrt{5})$,

$$\sqrt{94-42\sqrt{5}}=\pm(7-3\sqrt{5}).$$

Возьмемъ еще выраженіе, полученное въ § 117,

$$x=\pm\sqrt{bc+2a^2\pm2a\sqrt{bc+a^2}}.$$

Имѣемъ, $A=bc+2a^2$, $B=4a^2bc+4a^4$;

откуда $A^2-B=b^2c^2$, *полный квадратъ*; слѣд. $C=bc$,

и $p=\pm\sqrt{\frac{bc+2a^2+bc}{2}}=\pm\sqrt{bc+a^2}$, $q=\pm a$.

И такъ, $\sqrt{bc+2a^2\pm2a\sqrt{bc+a^2}}=\pm\sqrt{bc+a^2}\pm a$,

или $\sqrt{bc+2a^2+2a\sqrt{bc+a^2}}=\pm(\sqrt{bc+a^2}+a)$,

$$\sqrt{bc+2a^2-2a\sqrt{bc+a^2}}=\pm(\sqrt{bc+a^2}-a).$$

Также найдемъ, что $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \pm({}^1/_2\sqrt{10}+{}^1/_2\sqrt{2})$;

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \pm({}^1/_2\sqrt{10}-{}^1/_2\sqrt{2});$$

$$\sqrt{bc+2b\sqrt{bc-b^2}} + \sqrt{bc-2b\sqrt{bc-b^2}} = \pm 2b;$$

$$\sqrt{1+4\sqrt{-3}} = \pm(2+\sqrt{-3});$$

$$\sqrt{1-4\sqrt{-3}} = \pm(2-\sqrt{-3});$$

$$\sqrt{-1+4\sqrt{-3}} = \pm(\sqrt{3}+2\sqrt{-1});$$

$$\sqrt{-1-4\sqrt{-3}} = \pm(\sqrt{3}-2\sqrt{-1});$$

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}} + \sqrt{16-30\sqrt{-1}} = 10,$$

$$\sqrt{16+30\sqrt{-1}} - \sqrt{16-30\sqrt{-1}} = 6\sqrt{-1}.$$

120. Чтобъ удостовѣриться въ точности формулы [5], возвысимъ въ квадратъ обѣ части ея; будетъ

$$A \pm \sqrt{B} = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} \pm 2\sqrt{\frac{A^2-C^2}{4}},$$

или, замѣтивъ, что $C^2 = A^2 - B$ даетъ $B = A^2 - C^2$,

$$A \pm \sqrt{B} = A \pm \sqrt{B}.$$

Поэтому, даже и въ томъ случаѣ, когда $A^2 - B$ неполный квадратъ, можно замѣнить выраженіе $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ второю частію формулы [5]; однако жъ, отъ этого выводы не сдѣлались бы менѣе сложными, потому что количества p и q представлялись бы въ томъ же видѣ, какъ въ данномъ выраженіи.

121. Формула [5] въ примѣненіяхъ всего выгоднѣе для вычисленія мнимыхъ выраженій вида $\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$.

Изъ послѣднихъ примѣровъ § 119 можно видѣть уже, что въ случаѣ, когда въ данномъ выраженіи $A^2 - B$ полный квадратъ, подобныя выраженія можно привесть къ виду $a' \pm b'\sqrt{-1}$, называя a' и b' количества возможныя, соизмѣримыя или несоизмѣримыя. Это можно сдѣлать и тогда, когда $A^2 - B$ неполный квадратъ.

Въ самомъ дѣлѣ, приложивъ формулу [5] къ выраженію $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$, имѣемъ

$$A = a,\ B = -b^2, \text{ откуда } A^2 - B = a^2 + b^2,$$

и $p = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}}$, $q = \pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}}$;

или, положивъ для краткости, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, количество вообще *несоизмѣримое*, но необходимо *возможное*, *положительное* и *больше* a,

$$p=\pm\sqrt{\frac{a+c}{2}},\quad q=\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}=\pm\sqrt{\frac{c-a}{2}}\cdot\sqrt{-1};$$

слѣдов.
$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{c+a}{2}}+\sqrt{\frac{c-a}{2}}\cdot\sqrt{-1}\right) \quad \text{(M)}$$

$$\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{c+a}{2}}-\sqrt{\frac{c-a}{2}}\sqrt{-1}\right) \quad ..\text{(N)}$$

Но количества $\sqrt{\frac{c+a}{2}}$, $\sqrt{\frac{c-a}{2}}$, всегда будутъ возможныя, каковы бы ни были a и b, потому что c или $\sqrt{(a^2+b^2)}$ численно болѣе a. И такъ, всякое выраженіе вида

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}.$$

всегда можно привесть къ виду, въ которомъ обыкновенно представляются мнимыя величины 2-й степени, $a'\pm b'\sqrt{-1}$, называя a' и b' какія либо возможныя количества.

Докажемъ пользу этихъ преобразованій новымъ примѣромъ: Сократить, если возможно, выраженіе

$$x=\sqrt{3+2\sqrt{-1}}+\sqrt{3-2\sqrt{-1}}.$$

Прилагая формулы (M) и (N), имѣемъ

$$a=3,\ b=2,\ \text{откуда}\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13};$$

слѣд.
$$\sqrt{3+2\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

замѣтивъ, что здѣсь x представляетъ ариѳметическую сумму двухъ подкоренныхъ количествъ, имѣемъ

$$x=\pm2\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}=\pm\sqrt{2(\sqrt{13}+3)}.$$

Изъ этого примѣра, также какъ изъ предпослѣдняго примѣра § 119, видно, что иногда изъ *мнимыхъ выраженій*, посредствомъ соединенія ихъ между собою, можно получить выводы возможные, и даже *соизмѣримые*.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЯ УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

Введеніе. Нерѣдко изложеніе задачи представляетъ менѣе уравненій, чѣмъ неизвѣстныхъ: такая задача называется *неопредѣленною*, потому что уравненіямъ ея, § 55, можетъ удовлетворять безконечное множество величинъ, взятыхъ вмѣсто неизвѣстныхъ. Но иногда свойство самой задачи требуетъ, чтобъ величины неизвѣстныхъ были выражены *цѣлыми числами;* въ такомъ случаѣ неизвѣстная, которая принимала всѣ возможныя величины, допускаетъ только цѣлыя величины, и притомъ такія, при которыхъ другія неизвѣстныя выражаются также цѣлыми числами. Этимъ условіемъ число *рѣшеній* весьма уменьшается, въ особенности если брать въ соображеніе только *прямыя рѣшенія*, то есть, рѣшенія въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ для всѣхъ неизвѣстныхъ.

Предметъ неопредѣленнаго анализа 1-й степени *состоитъ въ рѣшеніи неопредѣленныхъ задачъ первой степени въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.*

I. Уравненіе и задачи 1-й степени съ двумя неизвѣстными.

122. Всякое уравненіе 1-й степени съ двумя неизвѣстными можно, § 67, привесть къ виду: $ax+by=c$, гдѣ a, b, c, числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя.

Замѣтимъ сначала, что уравненію не могутъ удовлетворять цѣлыя числа, если a и b имѣютъ общій множитель h, который не дѣлитъ на-цѣло вторую часть c. Положивъ $a=ha'$, $b=hb'$, уравненіе перемѣнимъ въ $ha'x+hb'y=c$, или въ $a'x+b'y=\frac{c}{h}$, которому не удовлетворяетъ никакая система цѣлыхъ величинъ x и y, пока c не дѣлится на-цѣло на h.

Мы всегда будемъ предполагать, что a и b числа *первыя между собою*; если бъ у нихъ былъ общій множитель, c должно было бъ имѣть тотъ же множитель, а въ такомъ случаѣ его можно уничтожить въ уравненіи.

123. Для большей ясности займемся сначала частными уравненіями, а потомъ разсмотримъ ихъ вообще.

Раздѣлить число 159 на двѣ части: одна дѣлится на 8, а другая на 13.

Назовемъ x и y частныя отъ раздѣленія двухъ искомыхъ частей на 8 и 13; $8x$ и $13y$ выразятъ эти части, и изъ нихъ составимъ уравненіе

$$8x+13y=159, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; [1];$$

это уравненіе должно рѣшить въ числахъ *цѣлыхъ и положительныхъ* для x и y.

Изъ уравненія [1] получимъ, $x=\frac{159-13y}{8}$.

или, исключивъ цѣлыя, $x=19-y+\frac{7-5y}{8}$.

Величина x будетъ цѣлая, когда возьмемъ для y такую величину, при которой выраженіе $\frac{7-5y}{8}$ дѣлается числомъ цѣлымъ; притомъ это условіе необходимо; слѣд. чтобъ x было цѣлымъ числомъ, *необходимо*, и *достаточно*, чтобы $\frac{7-5y}{8}$ равнялось цѣлому числу. Пусть t означаетъ это цѣлое число; тогда $\frac{7-5y}{8}=t$, откуда $5y+8t=7$, . . . [2], и величина x будетъ: $x=19-y+t$.

Всякая цѣлая величина t, которая, будучи вставлена въ уравненіе [2], даетъ цѣлую же величину для y, дѣлаетъ выраженіе $\frac{7-5y}{8}$ *цѣлымъ числомъ*; тогда обѣ соотвѣтствующія величины x и y будутъ цѣлыя и удовлетворятъ, § 66, уравненію [1], которое выводятъ исключеніемъ t изъ уравненій $\frac{7-5y}{8}=t$ и $x=19-y+t$. Вопросъ очевидно приводится къ тому, чтобъ рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе [2], въ которомъ предстоящіе проще, чѣмъ въ уравненіи [1].

Изъ уравненія [2] получимъ . . . $y = \frac{7-8t}{5}$,

или, исключивъ цѣлыя, $y = 1 - t + \frac{2-3t}{5}$.

Всякая цѣлая величина t, при которой $2-3t$ дѣлается кратнымъ знаменателя 5, даетъ также *для* y цѣлую величину, и будетъ поэтому требуемая величина. Положимъ $\frac{2-3t}{5} = t'$, гдѣ t' есть новая неопредѣленная величина; будетъ $3t + 5t' = 2$, . . . [3], и величина y обратится въ $y = 1 - t + t'$.

Исключая t' между двумя послѣдними уравненіями, получимъ уравненіе [2].)

И такъ вопросъ приводится къ рѣшенію уравненія [3] въ цѣлыхъ числахъ; изъ него выводимъ

$$t = \frac{2-5t'}{3} = -t' + \frac{2-2t'}{3}.$$

Положимъ $\frac{2-2t'}{3} = t''$, откуда $2t'' + 3t'' = 2$, . . [4], и слѣдовательно $t = -t' + t''$.

Изъ уравненія [4] получимъ $t' = \frac{2-3t''}{2} = 1 - t'' - \frac{t''}{2}$.

Положимъ наконецъ $\frac{t''}{2} = t'''$, откуда $t'' = 2t'''$, ... [5] и слѣдовательно $t' = 1 - t'' - t'''$.

Въ уравненіи [5] предстоящее количества t'' есть *единица*, слѣд. всякая цѣлая величина, взятая для t''', даетъ цѣлую величину для t''. Сверхъ того, неизвѣстныя x и y, и неопредѣленныя t, t', t'', t''', соединены между собою пятью уравненіями

$$\begin{aligned} x &= 19 - y + t, \\ y &= 1 - t + t', \\ t &= -t' + t'', \\ t' &= 1 - t'' + t''', \\ t'' &= 2t'''. \end{aligned}$$

Взявъ *для* t'' цѣлое число, и переходя отъ послѣдняго уравненія къ двумъ первымъ, получимъ соотвѣтствующія цѣлыя числа *для* x и y, которыя необходимо должны удовлетворять данному уравненію; потому что это уравненіе, какъ показано выше, получится исключеніемъ t, t', t'', t''' между всѣми пятью уравненіями.

Но чтобы назначить для t''' только тѣ числа, которымъ соотвѣтствуютъ цѣлыя и положительныя величины x и y, должно непосредственно выразить x и y, § 108, величиною неопредѣленной t'''.

Замѣнивъ t'' величиною его въ t''', получимъ

$$t'=1-2t'''-t'''=1-3t''';$$

переходя къ выраженію t, $t=-1+3t'''+2t'''=-1+5t'''$. Для y получимъ $y=1-(-1+5t''')+1-3t'''=\ 3-8t'''$, наконецъ, $x=19-(3-8t''')+(-1+5t''')=\ 15+13t'''$.

Легко увѣриться, что данное уравненіе получится черезъ исключеніе t''' между двумя послѣдними уравненіями. Умноживъ 1-е на 13, 2-е на 8, и сложивъ ихъ, получимъ

$$13y+8x=159.$$

Положимъ послѣдовательно $t'''=0, 1, 2, 3,\ldots$; или же $t'''=-1, -2, -3,\ldots$; изъ этихъ формулъ получимъ всѣ цѣлыя величины x и y, положительныя или отрицательныя, которыя удовлетворяютъ данному уравненію; но если условіе задачи допускаетъ одни *цѣлыя и прямыя рѣшенія*, то для t''' можно брать только тѣ величины, которыя дѣлаютъ $3-8t'''$ и $15+13'''$ положительными; этому условію удовлетворяютъ только величины $t'''=0$, и $t'''=-1$: всякая положительная величина t''' дѣлаетъ y отрицательнымъ, а всякая отрицательная величина, которая численно болѣе 1, дѣлаетъ x отрицательнымъ.

Положивъ $t'''=0$, получимъ $y=3$, $x=15$;
а положивъ $t'''=-1$, $y=11$, $x=2$.

Слѣд. только двѣ системы величинъ: $(x=15,\ y=3)$ и $(x=2, y=11)$, удовлетворяютъ уравненію $8x+13y=159$.

Въ нашей задачѣ $8x$ и $13y$ представляютъ двѣ искомыя части; поэтому 8×15 или 120, и 13×3 или 39 составляютъ *одно рѣшеніе;* 8×2 или 16 и 13×11 или 143 *другое рѣшеніе;* то есть, 159 можно разложить на $120+39$, и на $16+143$.

124. *Возьмемъ уравненіе* $17x-49y=-8$, ... [1], откуда

$$x=\frac{49y-8}{17}=2y+\frac{15y-8}{17},$$

Чтобъ цѣлой величинѣ y соотвѣтствовала цѣлая величина x, *необходимо и достаточно*, чтобъ $15y-8$ было кратнымъ числа 17. Положимъ $\frac{15y-8}{17}=t$; будетъ

$$15y-17t=8,\ .\ .\ .\ [2],\ \text{а}\ x=2y+t.$$

(Исключивъ t между двумя послѣдними уравненіями, получимъ уравненіе [1].)

Изъ уравненія [2] получимъ, $y=\frac{8+17t}{15}=t+\frac{8+2t}{15}$; выраженіе $\frac{8+2t}{15}$ должно быть цѣлымъ числомъ (этого условія достаточно). Положивъ $\frac{8+2t}{15}=t'$, получимъ

$$2t-15t'=-8, \; . \; . \; . \; . \; [3], \text{ и } y=t+t',$$

Уравненіе [3] даетъ, $t=\frac{15t'-8}{2}=7t'-4+\frac{t'}{2}$:

если положимъ $\frac{t'}{2}=t''$, то будетъ

$$t'=2t'', \text{ и посему } t=7t'-4+t'',$$

Чтобъ выразить x и y посредствомъ неопредѣленной t'', сблизимъ уравненія

$$x=2y+t,$$
$$y=\;t+t',$$
$$t=7t'-4+t'',$$
$$t'=2t'';$$

3-е уравненіе обратится въ $t=7\times2t''-4+t''=15t''-4$;
2-е въ $y=15t''-4+2t''$. или $y=17t''-4$;
1-е въ $x=2(17t''-4)+15t''-4$, или $x=49t''-12$.

Исключивъ t'' между этими формулами; умноживъ 1-ю на 49, 2-ю на 17, и вычтя одну изъ другой, получимъ данное уравненіе

$$17x-49y=-204+196=-8.$$

Притомъ очевидно, что всякая положительная величина t'', даетъ также положительныя величины для x и y; но нельзя положить t'' отрицательнымъ.

Полагая $t''=1, \; 2, \; 3, \; 4 \; . \; . \; . \; ,$
найдемъ . . . . $y=13, \; 30, \; 47, \; 64 \; . \; . \; . \; .$
$x=37, \; 86, \; 135, \; 184 \; . \; . \; . \; .$

И такъ, данное уравненіе имѣетъ безконечное множество *цѣлыхъ* и *положительныхъ* рѣшеній. и наименьшая величина будетъ $x=37$, $y=13$.

Эта система удовлетворяетъ уравненію; потому что

$$17\times37-49\times13=629-637=-8.$$

125. *Общее правило.* Возьмемъ уравненіе $ax+by=c$,.. [1]; *сначала выведемъ величину неизвѣстной, имѣющей меньшее предстоящее*, напр. x; *исключивъ цѣлыя*, получимъ выраженіе x въ функціи y, составленное изъ цѣлой части и дроби, которую должно обратить въ цѣлое число. *Положивъ дробную часть равною первой неоредѣленной* t, *получимъ новое уравненіе* [2] *въ* y и t съ простѣйшими предстоящими; *притомъ величина* x *будетъ выражена цѣлою функціею отъ* y *и* t, *и даное уравненіе получится исключеніемъ* t *между уравненіемъ* [2] *и уравненіемъ, опредѣляющимъ величину* x, *въ функціи* y *и* t.

Изъ уравненія [2] *выведемъ величину* y, *исключимъ цѣлыя числа, и положимъ, что дробная часть равна второй неопредѣленной* t′; *получимъ еще простѣйшее уравненіе* [3] *въ* t *и* t′; *величина* y *будетъ выражена въ цѣлой функціи отъ* t *и* t′ *и данное уравненіе получится исключеніемъ* t *и* t′ *между уравненіемъ* [3] *и двумя уравненіями, опредѣляющими* x *въ цѣлой функціи отъ* y *и* t, *и отъ* t *и* t′.

Съ уравненіемъ [3] *поступаемъ какъ съ уравненіями* [1] *и* [2], *и продолжаемъ тѣ же дѣйствія, пока наконецъ получимъ уравненіе съ двумя неопредѣленными, изъ которыхъ одна имѣетъ въ предстоящемъ единицу.*

Переходя потомъ отъ послѣдняго уравненія къ первымъ, посредствомъ послѣдовательныхъ подстановленій, опредѣлимъ величины x *и* y, *въ функціи послѣдней неопредѣленной.*

Такимъ образомъ получимъ двѣ формулы, и давая послѣдней неопредѣленной произвольныя величины, найдемъ всѣ системы *цѣлыхъ величинъ, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ*, которыя удовлетворяютъ данному уравненію $ax+by=c$.

Если требуются однѣ цѣлыя и положительныя величины для x и y, то по составу этихъ формулъ можно узнать *предѣлы*, между которыми должны заключаться величины послѣдней неопредѣленной, чтобъ выполнить это условіе.

Замѣчанія. 1-е. По этому способу мы всегда окончательно получимъ уравненіе, въ которомъ предстоящее одной неопредѣленной равно единицѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ первомъ дѣйствіи бо́льшее предстоящее двухъ неизвѣстныхъ дѣлится на меньшее; во второмъ, меньшее предстоящее на остатокъ отъ раздѣленія ихъ; въ третьемъ, первый остатокъ на второй, и т. д.; то есть, къ двумъ предстоящимъ прилагается способъ общаго дѣлителя; но какъ оба предстоящія первыя между собою, по предположенію, § 122, то окончательно всегда получится въ остаткѣ 1, которая и будетъ предстоящимъ предпослѣдней *неопредѣленной*.

2-е. Если приложимъ этотъ способъ къ уравненію, въ которомъ предстоящія двухъ неизвѣстныхъ имѣютъ общій множитель, не входящій во 2-ю часть, то вычисленіе всегда покажетъ *невозможность* рѣшить задачу въ цѣлыхъ числахъ.

Напримѣръ, дано уравненіе $49x - 35y = 11$.

(Число 7 есть множитель предстоящихъ x и y, и не входитъ во 2-ю часть.)

Изъ него выводимъ $y = \frac{49x - 11}{35} = x + \frac{14x - 11}{35}$.

Положимъ $\frac{14x - 11}{35} = t$, что̀ даетъ $y = x + t$;

тогда
$$x = \frac{35t + 11}{14} = 2t + \frac{7t + 11}{14}.$$

Полагая $\frac{7t + 11}{14} = t'$, что̀ даетъ $x = 2t + t'$,

найдемъ
$$t = \frac{14t' - 11}{7} = t' - 1 - \frac{4}{7}.$$

Послѣднему уравненію *невозможно удовлетворить цѣлыми числами* t и t', потому что $\frac{4}{7}$ есть дробь. Слѣдовательно и данное уравненіе не удовлетворяется цѣлыми числами для x и y.

126. Этотъ способъ допускаетъ нѣкоторыя *сокращенія*, весьма выгодныя при вычисленіяхъ.

Обратимся къ уравненію $17x - 49y = -8$,

изъ котораго вывели, $x = \frac{49y - 8}{17}$.

Число 49, равное $17 \times 2 + 15$, также равно $17 \times 3 - 2$; а $\frac{49y}{17} = 3y - \frac{2y}{17}$; и такъ, вмѣсто $x = 2y + \frac{15y - 8}{17}$, можемъ написать
$$x = 3y - \frac{(2y + 8)}{17},$$

и вопросъ приводится къ отысканію такого цѣлаго числа для y, которое дѣлаетъ выраженіе $\frac{2y + 8}{17}$ цѣлымъ числомъ.

Это выраженіе можемъ написать въ видѣ $\frac{2(y+4)}{17}$; но 2 и 17 *первыя между собою* числа, слѣд. чтобы $\frac{2(y+4)}{17}$ было цѣлымъ числомъ, *необходимо и достаточно*, чтобъ $y+4$ дѣлилось на 17.

Положимъ $\frac{y+4}{17}=t$, гдѣ t цѣлое число совершенно произвольное; будетъ $y=17t-4$;
а для x получимъ $x=3y-2t=49t-12$.

Эти формулы также представляютъ всѣ цѣлыя рѣшенія данной задачи: исключая между ими t, получимъ уравненіе $17x-49y=-8$. Сдѣлавъ $t=1, 2, 3, 4, \ldots$, найдемъ цѣлыя и положительныя величины для x и y; но нельзя полагать t ни отрицательнымъ, ни равнымъ 0.

Теперь мы знаемъ всю важность такихъ сокращеній; при нихъ нужно было ввести въ вычисленія *только одну неопредѣленную*. Подобныя сокращенія встрѣчаются почти во всѣхъ примѣрахъ; но объяснить ихъ можно только надъ частными уравненіями, и для того разсмотримъ еще слѣдующія задачи.

127. II. *Какъ уплатить 78 рублей монетами двухъ родовъ: однѣ въ 5, а другія въ 3 рубля?*

Назовемъ x число монетъ въ 5 рублей, y число 3-хъ рублевыхъ монетъ; имѣемъ уравненіе $5x+3y=78$, допускающее въ рѣшеніи однѣ цѣлыя и положительныя величины.

Рѣшая относительно y, имѣемъ $y=\frac{78-5x}{3}$,

или, исключивъ цѣлыя, ... $y=26-x-\frac{2x}{3}$,

или же . . . . $y=26-2x+\frac{x}{3}$.

Въ первомъ видѣ величины y, величина y, соотвѣтствующая цѣлой величинѣ x, только тогда будетъ цѣлою, когда $\frac{2x}{3}$ также будетъ число цѣлое; но какъ 2 и 3 числа первыя между собою, то необходимо и достаточно, чтобъ x дѣлилось на-цѣло на 3.

И такъ, положимъ $x=3t$; получимъ

$$y=26-x-2t, \text{ или } y=26-5t.$$

Во второмъ видѣ величины y, неизвѣстная x должна быть кратною числа 3, что̀ даетъ $x=3t$, откуда

$$y=26-2x+t \text{ или } y=26-5t.$$

Эти двѣ формулы показываютъ, что неопредѣленная t должна быть положительною и не болѣе $\frac{26}{5}$ или $5\frac{1}{5}$.

Положивъ, $t = 0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5.$
получимъ , . . $x = 0,\ \ 3,\ \ 6,\ \ 9,\ 12,\ 15.$
$y = 26,\ 21,\ 16,\ 11,\ \ 6,\ \ 1.$

Задача допускаетъ шесть различныхъ рѣшеній, именно: 26 однихъ 3-хъ рублевыхъ монетъ; 21 монеты въ 3 руб. и 3 мон. въ 5 руб.; 16 мон. въ 3 руб. и 6 м. въ 5 р. и проч.

III. *Найти число, отъ раздѣленія котораго на 39, въ остаткѣ получается 16, а отъ раздѣленія на 56, въ остаткѣ 27.*

Назовемъ N искомое число x и y цѣлыя частныя отъ раздѣленія числа N′ на 39 и 56; тогда имѣемъ два уравненія $\quad N = 39x + 16$ и $N = 56y + 27$,
изъ которыхъ имѣемъ $39x + 16 = 56y + 27$,
или . . . . $39x - 56y = 11$, ... [1].

Изъ него выводимъ $x = \frac{56y + 11}{39} = y + \frac{17y + 11}{39}$,

или же, $x = 2y - \frac{(22y - 11}{39} = 2y - \frac{11(2y - 1)}{39}$.

(Здѣсь мы увеличили цѣлыя величины y, замѣтивъ, что 11 можно сдѣлать общимъ множителемъ въ числителѣ дроби).

Въ выраженіи $\frac{11(2y - 1)}{39}$, 11 и 39 первыя между собою числа; поэтому, оно будетъ цѣлымъ числомъ, когда $2y - 1$ будетъ дѣлиться на 39.

Положимъ $\frac{2y - 1}{39} = t$, откуда $2y - 39t = 1$, . . . [2],
и слѣдовательно . . . . , ... $x = 2y - 11t$.
Изъ уравненія [2] имѣемъ $y = \frac{39t + 1}{2} = 19t + \frac{t + 1}{2}$;
Положивъ $\frac{t + 1}{2} = t'$, получимъ $t = 2t' - 1$; слѣдовательно

$$y = 19t + t' = 19(2t' - 1) + t' \text{ или } y = 39t' - 19.$$

Если вставимъ величины y и t въ выраженіе x, то найдемъ $x = 56t' - 27$; но это безполезно, потому что въ нашей задачѣ N *главная неизвѣстная* (x и y только вспомогательныя неизвѣстныя) и мы уже имѣемъ $N = 56y + 27$. Достаточно вставить здѣсь величину y: тогда $N = 56\,(39t' - 19) + 27$
или $\qquad N = 2184t' - 1037$.

Изъ этой формулы видно, что для t' можно брать всѣ положительныя величины, но ни одной отрицательной.

Когда $t'=1$, $N=2184-1037=1147$; это есть меньшее изъ всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, которыя удовлетворяютъ задачѣ. Но если доказано, что 1147 удовлетворительно, то всѣ другія величины N при $t'=2, 3, 4, \ldots.$ необходимо удовлетворяютъ задачѣ. Это легко доказать: въ формулѣ N число 2184 происходитъ отъ умноженія 56 на 39, слѣдов. при $t'=2, 3, 4, \ldots$, получимъ для N кратныя этого числа 2184, съ придачею первой разности 1147; а какъ 2184 всегда дѣлится на-цѣло числомъ 56 или 39, то остатки отъ раздѣленія всѣхъ величинъ N на эти числа будутъ тѣ же, какіе получили при раздѣленіи числа 1147.

Замѣчаніе. Пріемъ, употребленный въ этой задачѣ, требуетъ большаго навыка въ вычисленіяхъ; мы совѣтуемъ употреблять какъ можно чаще подобные пріемы, потому что они значительно сокращаютъ вычисленія.

128. Сравнивая формулы, которыми опредѣляютъ величины x и y въ предъидущихъ задачахъ, съ самыми уравненіями задачъ, напр. (въ послѣдней задачѣ) уравненіе $39x-56y=11$ съ формулами: $y=39t'-19$ и $x=56t'-27$, замѣчаемъ, что *предстоящія неопредѣленной въ формулахъ, равны предстоящимъ неизвѣстныхъ x и y въ данномъ уравненіи*, не принимая въ соображеніе знака одного предстоящаго; то есть, *предстоящее неопредѣленной въ величинѣ x, равно предстоящему неизвѣстной y; а предстоящее неопредѣленной въ величинѣ y, равно предстоящему неизвѣстной x, взятому съ противнымъ знакомъ*, или *обратно* (относительно знаковъ).

Чтобъ доказать это свойство, обратимся къ общему уравненію $ax+by=c$, . . . [1],
и положимъ, что посредствомъ показаннаго способа получили двѣ формулы

$$x=mt+A, \quad \ldots \quad [2], \quad y=nt+B, \quad \ldots \quad [3].$$

Въ этихъ формулахъ предстоящія m и n необходимо первыя между собою. Если бъ они имѣли общаго множителя, напр. если $m=m'k$, $n=n'k$, то формулы перемѣнятся въ $x=m'k.t+A$, $y=n'k.t+B$; а положивъ $t=\frac{t'}{k}$, получимъ

$$x=m't'+A, \quad y=n't'+B;$$

тогда дробной величинѣ $\frac{t'}{k}$ будутъ соотвѣтствовать цѣлыя величины x и y, а по свойству нашего способа всѣ неопредѣленныя, вводимыя въ вычисленіе, могутъ принимать только цѣлыя величины.

Какъ величины [2] и [3] должны удовлетворять уравненію [1], какую бы величину ни взяли для t, поэтому необходимо имѣть должны,

$$a(mt+\mathrm{A})+b\,(nt+\mathrm{B})=c,$$

или, располагая, относительно t,

$$(am+bn)\,t+a\mathrm{A}+b\mathrm{B}=c\;.\;.\;.\;.\;[4];$$

но какъ при $t=0$, формулы [2] и [3] даютъ $x=\mathrm{A}$ и $x=\mathrm{B}$, то эти величины должны составлять отдѣльную систему; слѣд. имѣемъ отдѣльно $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}=c$, и равенство [4] приводится къ $(am+bn)\,t=0$.

Чтобъ этому равенству удовлетворяла всякая *цѣлая* величина взятая для t, должно положить

$$am+bn=0\text{, откуда }\frac{n}{m}=-\frac{a}{b};$$

но, какъ извѣстно, m и n *первыя* между собою, также какъ a и b; поэтому (см. Ариѳметику),

$$n=a,\ m=-b,\ \text{или}\ n=-a,\ m=b.$$

129. Можно доказать это свойство независимо отъ способа, которому слѣдовали для полученія величинъ x и y. Возьмемъ опять уравненіе

$$ax+by=c,\;.\;.\;.\;[1],$$

и положимъ, что какимъ либо способомъ нашли

$$y=\beta\ \text{и}\ x=\alpha$$

для *перваго рѣшенія* въ цѣлыхъ числахъ, (положительныхъ или отрицательныхъ); всѣ прочія рѣшенія заключаются въ формулахъ

$$\left.\begin{array}{l} y=\beta+at, \\ x=a-bt, \end{array}\right| \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} y=\beta-at, \\ x=\alpha+bt; \end{array}\right.$$

(t означаетъ произвольное цѣлое число).

Въ самомъ дѣлѣ, когда α и β составляютъ первую систему величинъ x и y въ цѣлыхъ числахъ, то имѣемъ равенство

$$a\alpha+b\beta=c,\;.\;.\;.\;[2];$$

вычтя равенство [2] изъ уравненія [1], получимъ уравненіе

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0,\;.\;.\;.\;[3],$$

которымъ можно замѣнить данное. Но уравненіе [3] можно написать въ видѣ $x-\alpha=-\frac{b(y-\beta)}{a}$; и чтобъ величина x, соотвѣтствующая цѣлой величинѣ y, была также цѣлою, $b(y-\beta)$ должно дѣлиться на a; но, § 122, предстоящіе a и b первые между собою (въ противномъ случаѣ уравненіе не рѣшалось бы въ цѣлыхъ числахъ); слѣдов. по правилу, показанному въ Ариѳметикѣ, $y-\beta$ должно быть кратнымъ числа a. И такъ, положивъ

$$y-\beta=at, \text{ имѣемъ } x-\alpha=-bt;$$

изъ этихъ уравненій выводимъ

$$y=\beta+at, \quad x=\alpha-bt.$$

Какъ при t не имѣется опредѣленнаго знака, то въ формулахъ можемъ поставить $-t$ вмѣсто t; тогда имѣемъ

$$y=\beta-at, \quad x=\alpha+bt.$$

Легко убѣдиться, что при всякой цѣлой величинѣ t, величины $y=\beta+at$, $x-\alpha-bt$ удовлетворяютъ данному уравненію. Въ самомъ дѣлѣ, вставивъ ихъ въ данное уравненіе, находимъ

$$a(\alpha-bt)+b(\beta+at)=c, \text{ и сокративъ, } a\alpha+b\beta=c,$$

равенство точное, потому что α и β по условію составляютъ рѣшеніе даннаго уравненія.

130. *Слѣдствіе.* Если въ формулахъ

$$y=\beta+at, \quad x=\alpha-bt,$$

положимъ послѣдовательно

$$t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ldots,\ \text{и}\ t=-1,-2,-3\ \ldots$$

онч обратятся въ

$$\left.\begin{array}{l} y=\beta,\ \beta+a,\ \beta+2a,\ \ldots \\ x=\alpha,\ \alpha-b,\ \alpha-2b,\ \ldots \end{array}\right\} \text{ и } \left\{\begin{array}{l} y=\beta,\ -a,\ \beta-2a,\ \ldots \\ x=\alpha;+b,\ \alpha+2b,\ \ldots \end{array}\right.$$

Поэтому, всѣ положительныя или отрицательныя цѣлыя рѣшенія даннаго уравненія, *составляютъ двѣ ариѳметическія прогрессіи, въ которыхъ разностями будутъ: для величины x, предстоящее неизвѣстной y въ данномъ уравненіи; а для y, предстоящее неизвѣстной x въ томъ же уравненіи.*

131. Второй способъ. Изслѣдованіе § 129 показываетъ, что главное затрудненіе при рѣшеніи уравненія $ax+by=c$, состоитъ въ отысканіи *перваго рѣшенія*, потому что всѣ прочія получатся изъ формулъ

$$x=\alpha-bt, \quad y=\beta+at.$$

Это приводитъ насъ ко второму способу рѣшенія неопредѣленнаго уравненія. Онъ основывается на свойствѣ непрерывныхъ дробей. Для примѣра возьмемъ уравненіе, § 124,

$$17x - 49y = -8.$$

Если обратимъ $\frac{17}{49}$ въ непрерывную дробь, и составимъ сближающіяся дроби, получимъ

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{23},\ \frac{17}{49}.$$

Но въ Ариѳметикѣ доказано, что *числитель разности двухъ сближающихся дробей равенъ* $+1$, *если вторая* (уменьшаемая) *дробь четная въ ряду, или* -1, *если она нечетная.*

Какъ $\frac{17}{49}$ есть нечетный членъ въ ряду сближающихся дробей, то

$\frac{17}{49} - \frac{8}{23} = \frac{-1}{49 \times 23}$, откуда $17 \times 23 - 49 \times 8 = -1$.

Умноживъ обѣ части равенства на 8, то есть, на вторую часть даннаго уравненія, *взятую съ противнымъ знакомъ*, будетъ

$$17 \times 23 \times 8 - 49 \times 8 \times 8 = -8,$$

или $17 \times 184 - 49 \times 64 = -8;$

это равенство вѣрно и отличается отъ даннаго только тѣмъ, что x и y замѣнены числами 184 и 64; поэтому, данному уравненію необходимо удовлетворяютъ величины

$$x = 184,\ y = 64.$$

Это первое рѣшеніе; прочія опредѣлятся, § 129, формулами

$$x = 184 + 49t,\ y = 64 + 17t.$$

Когда требуются однѣ цѣлыя и положительныя величины, должно взять для t величину положительную, или же равную 0, —1, —2, —3. При $t = -3$, будетъ $x = 37$, $y = 13$; это система наименьшихъ величинъ, найденныхъ въ § 124.

132. Для большей общности рѣшимъ уравненіе

$$ax - by = c, \quad . \; . \; . \; [1],$$

гдѣ a и b независимыя числа, но c можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ.

Изобразимъ непрерывною дробью выраженіе $\frac{a}{b}$, въ которомъ a и b первыя между собою числа, § 122, и составимъ послѣдовательныя сближающіяся дроби; послѣдняя дробь есть $\frac{a}{b}$, а предпослѣднюю можетъ представить выраженіе $\frac{m}{m'}$, чтò даетъ отношеніе

$$a \times m' - b \times m = \pm 1;$$

именно: $+ 1$, если выраженіе $\frac{a}{b}$ выведено изъ дроби четнаго ряда, и $- 1$, когда оно выведено изъ дроби нечетнаго ряда.

Предположимъ, что оно происходитъ отъ дроби *четнаго* ряда; имѣемъ *равенство*

$$a \times m' - b \times m = + 1;$$

а умноживъ на c, $a \times m'c - b \times mc = c$,
которое отъ уравненія $ax - by = c$,
отличается тѣмъ, что въ немъ x и y замѣнены выраженіями $m'c$ и mc; слѣд. $x = m'c$ и $y = mc$ составляютъ *первое рѣшеніе*.

Если сближающаяся дробь $\frac{a}{b}$ нечетная въ ряду, то
получимъ $a \times m' - b \times m = - 1$:
умножая на $- c$, $a(-m'c) - b \times (-mc) = c$.
Сравнивая это равенство съ уравненіемъ $ax - by = c$, получаемъ $x = - m'c$, $y = - mc$ для *перваго рѣшенія*.

Уравненіе вида . . . . $ax + by = c$,
гдѣ предстоящіе a и b имѣютъ одинакіе знаки, можно перемѣнить въ . . . . $ax - b . (-y) = c$;
составляя по прежнему равенство $a \times m'c - b \times mc = c$,
или равенство . . . . $ax(-m'c) - b \times (-mc) = c$,
можно заключить, что $x = m'c$, $y = -mc$, или $x = -m'c$, $y = mc$, составляютъ рѣшеніе даннаго уравненія.

И какое бы ни было данное уравненіе, помощію непрерывныхъ дробей всегда можно получить *первое рѣшеніе*; а прочія выведутся изъ формулъ

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at.$$

133. Приложимъ этотъ способъ къ уравненію

$$29x + 17y = 250.$$

Обращая $\frac{29}{17}$ въ непрерывную дробь, получимъ сближающіяся дроби $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{29}{17}$, откуда выведемъ $29 \times 7 - 17 \times 12 = -1$, ($\frac{29}{17}$ дробь нечетнаго ряда).

Умноживъ обѣ части равенства на -250, будетъ

$$29 \times (-1750) - 17 \times (-3000) = 250;$$

но данное уравненіе можно написать такъ:

$$29 \times x - 17 \times (-y) = 250;$$

слѣд. $x = -1750$, $y = 3000$, составляютъ *первое рѣшеніе*.

Тогда формулы будутъ $x = -1750 - 17t$,
$y = 3000 + 29t$.

Чтобы получить рѣшенія въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, должно взять t отрицательнымъ; перемѣняя знакъ t, имѣемъ, $x = -1750 + 17t$; $y = 3000 - 29t$, и величины x и y будутъ положительныя только въ томъ случаѣ, когда

$$17t > 1750, \text{ а } 29t < 3000, \text{ откуда}$$

$$t > \frac{1750}{17} > 102\frac{16}{17}, \text{ но } < \frac{3000}{29} < 103\frac{13}{29}.$$

Слѣд. $t = -103$ единственная величина неопредѣленной, дѣлающая x и y положительными; она даетъ $x = 1$, $y = 13$; вставивъ эти величины въ уравненіе, будетъ

$$29 \times 1 + 17 \times 13 = 29 + 221 = 250.$$

Изъ этого видно, съ какою точностію можно опредѣлить всѣ рѣшенія даннаго уравненія посредствомъ этого способа.

134. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно получить первое рѣшеніе, не обращая $\frac{a}{b}$ *въ непрерывную дробь*; именно:

1-е. Когда извѣстное количество c есть *кратное* одного изъ предстоящихъ a и b.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе $5x + 3y = 78$; 78 дѣлится на предстоящее 3, и въ частномъ даетъ 26. Слѣд. полагая $x = 0$ и $y = 26$, уравненіе будетъ удовлетворено, потому что оно перемѣнится въ

$$5 \times 0 + 3 \times 26 = 78;$$

всѣ же другія рѣшенія найдутся изъ формулъ

$$x = 3t, \; y = 26 - 5t.$$

Возьмемъ еще уравненіе $12x + 35y = 156$; 156 раздѣленное на 12 даетъ 13; и такъ $x = 13$, $y = 0$, составляютъ *первую систему величинъ;* для прочихъ имѣемъ

$$x = 13 - 35t,\quad y = 12t.$$

2-е. Когда въ уравненіи сумма или разность предстоящихъ a и b, умноженныхъ на два цѣлыя числа, дѣлитъ на-цѣло вторую часть.

Напр. дано уравненіе . . . . $25x - 16y = 12$.

Полагая $x = 2$, $y = 3$, имѣемъ $25 \times 2 - 16 \times 3 = 2$; слѣд. умноживъ обѣ части равенства на 6, частное отъ раздѣленія 12 на 2, получимъ $25 \times 12 - 16 \times 18 = 12$. Изъ сего можемъ заключить, что $x = 12$, $y = 18$, удовлетворяютъ данному уравненію.

Дано уравненіе . . . . $13x - 47y = 0$.

Оно очевидно удовлетворяется, полагая $x = 0$, $y = 0$;
и такъ общія формулы будутъ $x = 47t$, $y = 13t$.

Впрочемъ эти способы можно употреблять только въ нѣкоторыхъ случаяхъ, между тѣмъ какъ обращеніе въ непрерывную дробь есть способъ общій. Предлагаемъ ознакомиться съ обоими способами рѣшенія уравненія $ax + by = c$.

135. По однимъ знакамъ уравненія $ax + by = c$, можно судить, имѣетъ ли оно опредѣленное или безконечное число *рѣшеній въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ.*

1-е При b положительномъ (a всегда можно принять положительнымъ) всегда будетъ опредѣленное число рѣшеній.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія имѣемъ $x = \frac{c - by}{a}$.

Если c будетъ отрицательное, то какую бы положительную величину ни взяли для y, соотвѣтствующая величина x будетъ отрицательная; въ этомъ случаѣ уравненіе *не допускаетъ ни одного рѣшенія.*

При c положительномъ, нельзя взять для y величины положительной болѣе $\frac{c}{b}$; иначе x сдѣлался бы отрицательнымъ; притомъ, наибольшей величинѣ y соотвѣтствуетъ наименьшая величина x, и обратно; слѣд; и проч.

2-е. При b отрицательномъ, какой бы знакъ ни стоялъ при c, уравненіе допускаетъ *неопредѣленное* число

рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ формулы обратятся въ $x=\alpha+bt,\ y=\beta+at.$
Допуская самый невыгодный случай (т. е. когда α и β отрицательныя числа); чтобъ x и y были положительными, достаточно взять для t величины, численно превышающія $\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$. И такъ для t можно брать всѣ цѣлыя числа, превышающія эти два частныя.

Когда a, b, c, всѣ положительныя, всегда можно отыскать предѣлы, между которыми должны заключаться величины неопредѣленной t; для этого достаточно въ формулахъ $x=\alpha-bt,\ y=\beta+at,$
положить $\alpha-bt>0,\ \beta+at>0,$

изъ чего выводимъ, § 105, $t<\frac{\alpha}{b}$, но $>-\frac{\beta}{a}$; когда эти неравенства не согласуются, уравненіе не имѣетъ ни одного рѣшенія въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ; если же они согласуются, то число цѣлыхъ величинъ, которыя можно взять для t между предѣлами $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$, выражаетъ число рѣшеній.

Замѣчаніе. Какъ разность между высшимъ предѣломъ $\frac{\alpha}{b}$ и низшимъ предѣломъ $-\frac{\beta}{a}$ равна $\frac{a\alpha+b\beta}{ab}$ или $\frac{c}{b}$ (потому что $a\alpha+b\beta=c$), то $\frac{c}{ab}$ или $q+1$ (называя q цѣлое число отъ раздѣленія c на ab) есть *наибольшее* число всѣхъ рѣшеній.

II. УРАВНЕНІЯ И ЗАДАЧИ СЪ ТРЕМЯ И БОЛѢЕ НЕИЗВѢСТНЫМИ.

136. Разсмотримъ сначала *два уравненія съ тремя неизвѣстными*. Напримѣръ

$$5x+4y+z=272,\ .\ .\ .\ .\ .\ [1],$$
$$8x+9y+3z=656,\ .\ .\ .\ .\ .\ [2];$$

въ первомъ уравненіи предстоящее неизвѣстной z равно 1, поэтому сначала исключимъ эту неизвѣстную.

Умножимъ 1-е уравненіе на 3, и вычтемъ изъ него 2-е; получимъ уравненіе $7x+3y=160,\ .\ .\ .\ .\ [3],$ которымъ можно замѣнить уравненіе [2].

Прилагая къ уравненію [3] первый способъ, находимъ формулы: $x = 1 - 3t,\ y = 51 + 7t$.
Вставивъ эти выраженія x и y въ уравненіе [1], имѣемъ,

$$5(1 - 3t) + 4(51 + 7t) + z = 272,$$

откуда выводимъ $z = 63 - 13t$.

Величины трехъ неизвѣстныхъ выражены въ *цѣлой функціи* неопредѣленной t. Слѣд. взявъ для t какія либо цѣлыя величины, получимъ тоже цѣлыя величины для x, y, z, и эти величины удовлетворяютъ даннымъ двумъ уравненіямъ; потому что, какъ выше замѣчено, система этихъ трехъ формулъ замѣняетъ *данныя два уравненія*.

Если для x, y, z, требуются цѣлыя и положительныя величины, t очевидно не можетъ быть положительнымъ, потому что x сдѣлался бы отрицательнымъ; но можно положить $t = 0, -1, -2$ . . . . . до $t = -\frac{51}{7}$ или $-7\frac{2}{7}$.

При	$t =$ 0,	—1,	—2,	—3,	—4,	—5,	—6,	—7,
найдемъ....	$x =$ 1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22;
	$y =$ 51,	44,	37,	30,	23,	16,	9,	2;
	$z =$ 63,	76,	89,	102,	115,	128,	141,	154.

Слѣд. задача допускаетъ *восемь* различныхъ *рѣшеній*. Повѣримъ одни крайнія.

1 . $x = 1,\ y = 51,\ z = 63$, даютъ $\left\{\begin{array}{l} 5 . 1 + 4 . 51 + 1 . 63 = 272; \\ 8 . 1 + 9 . 51 + 3 . 63 = 656, \end{array}\right.$

2 . $x = 22,\ y = 2,\ z = 154$, даютъ $\left\{\begin{array}{l} 5 . 22 + 4 . 2 + 1 . 154 = 272. \\ 8 . 22 + 9 . 2 + 3 . 154 = 656. \end{array}\right.$

137. *Второй примѣръ*. Даны уравненія

$$6x + 7y + 4z = 122, \ . \ . \ [1],$$
$$11x + 8y - 6z = 145, \ . \ . \ [2].$$

Чтобъ исключить z, умножимъ 1-е уравненіе на 3, 2-е на 2, и сложимъ оба уравненія; получимъ

$$40x + 37y = 656, \ . \ . \ . \ [3],$$

и по первому способу найдемъ $\left\{\begin{array}{l} x = 9 + 37t, \\ y = 8 - 40t. \end{array}\right.$

Вставивъ величины x и y въ уравненіе [1], получимъ
$6(9 + 37t) + 7(8 - 40t) + 4z = 122$, или $2z - 29t = 6$, . [4].
Здѣсь неизвѣстная z не выражена цѣлою функціею неопредѣленной t, какъ величины x и y; слѣд; должно употребить

для уравненія [4] одинъ изъ извѣстныхъ способовъ. Тогда найдемъ формулы, $t=2t'$, $z=29t'+3$.

Всякая цѣлая величина t, вставленная въ выраженіяхъ x и y, даетъ цѣлыя же величины для этихъ неизвѣстныхъ; поэтому, вставивъ $2t'$ вмѣсто t, получимъ формулы $x=74t'+9$,

$y=8-80t'$,

которыя съ формулою . . . . $z=29t'+3$,

заключаютъ всѣ *системы цѣлыхъ величинъ* x, y, z, удовлетворяющихъ даннымъ уравненіямъ.

Когда требуются одни прямыя рѣшенія, нельзя сдѣлать t' ни положительнымъ, ни отрицательнымъ; потому что въ первомъ случаѣ y, а во второмъ x и z будутъ отрицательныя. Но полагая $t'=0$, получаемъ $x=9$, $y=8$, $z=3$; одна эта система удовлетворяетъ даннымъ уравненіямъ.

Общее правило: *Исключивъ одну неизвѣстную изъ данныхъ уравненій, отыщемъ для* вновь полученнаго *уравненія двѣ формулы, которыми другія двѣ неизвѣстныя опредѣляются въ* цѣлой функціи *неопредѣленной* t; *вставивъ эти выраженія въ одно изъ данныхъ уравненій, получимъ новое уравненіе, въ которомъ содержатся только* t *и первая неизвѣстная.* Для этого уравненія также отыщемъ двѣ формулы, въ которыхъ обѣ его неизвѣстныя выражены въ цѣлой функціи *отъ второй неопредѣленной* t'; наконецъ *вставимъ выраженіе* t' *въ выраженіяхъ двухъ первыхъ неизвѣстныхъ*; тогда величины трехъ неизвѣстныхъ будутъ выражены цѣлою функціею отъ t' и останется только назначить предѣлы, между которыми должны заключаться величины t', чтобы величины главныхъ неизвѣстныхъ были цѣлыя и положительныя.

Замѣчаніе. Когда въ одномъ уравненіи предстоящее одной изъ неизвѣстныхъ 1, то выгоднѣе начинать съ исключенія этой неизвѣстной; потому что, выразивъ двѣ прочія *цѣлою функціею* одной и той же неопредѣленной, и вставивъ эти величины въ то уравненіе, гдѣ предстоящее третьей неизвѣстной 1, прямо получимъ эту неизвѣстную въ *цѣлой функціи* отъ той же неопредѣленной; и такъ, въ этомъ случаѣ достаточно одного дѣйствія. Мы видѣли этотъ случай въ уравненіяхъ § 136.

138. При трехъ уравненіяхъ съ четырмя неизвѣстными, сначала *исключаютъ одну неизвѣстную*, *и*, *выразивъ*, *помощію двухъ найденныхъ уравненій, три прочія неизвѣстныя* цѣлою функціею *одной и той же неопредѣленной, вставляютъ эти величины въ одно изъ данныхъ уравненій. Если въ новомъ уравненіи предстоящіе двухъ неизвѣстныхъ не равны* 1, *то выводятъ двѣ формулы, опредѣляющія эти неизвѣстныя* цѣлою функціею *второй неопредѣленной; потомъ, въ выраженіяхъ трехъ первыхъ неизвѣстныхъ, замѣняютъ первую неопредѣленную функціею второй неопредѣленной, и тогда всѣ данныя неизвѣстныя будутъ выражены въ* цѣлой функціи *отъ второй неопредѣленной.*

Тѣ же сужденія дѣлаютъ при четырехъ уравненіяхъ съ пятью неизвѣстными, и т. д. Для упражненія предлагаемъ слѣдующіе примѣры.

III. *Серебренникъ имѣетъ три куска серебра, разной доброты: въ одномъ фунтѣ перваго куска содержится* 7 *частей чистаго серебра, во второмъ* $5^1/_2$, *въ третьемъ* $4^1/_2$ *части* (раздѣляя фунтъ на 10 частей). *Онъ хочетъ составить кусокъ въ* 30 *фунтовъ вѣсомъ, въ которомъ было бы* 6 *частей чистаго серебра на фунтъ. Сколько фунтовъ должно взять отъ каждаго куска?*

$$\text{Отвѣтъ.}\quad \begin{cases} x = 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18, \\ y = 20,\ 15,\ 10,\ 5,\ 0, \\ z = 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12, \end{cases}$$

то есть, *пять* рѣшеній, допуская 0 въ величинахъ y и z.

IV. *Даны три цѣлыя числа; помножая эти числа соотвѣтственно на* 3, 5, 7, *сумма частныхъ произведеній составитъ* 560; *а помноживъ ихъ на квадраты этихъ чиселъ, сумма произведеній будетъ* 2920. *Опредѣлить эти три числа*

$$\text{Отвѣтъ.}\quad \left\{\begin{array}{l} x = 15,\ 50 \\ y = 82,\ 40 \\ z = 15,\ 30 \end{array}\right\}, \text{ то есть, } \textit{два} \text{ рѣшенія.}$$

V. *Когда цѣлое число* N *раздѣлено на* 11, *въ остаткѣ имѣютъ* 3; *когда* N *раздѣлятъ на* 19, *то въ остаткѣ* 5; *а* N, *раздѣленное на* 29, *даетъ въ остаткѣ* 10. *Найти* N.

Отвѣтъ. $N = 4128 + 6061t$, и 4128 наименьшее число, удовлетворяющее задачѣ.

VI. *Найти для x такое число, чтобы выраженія* $\frac{3x-10}{7}$, $\frac{11x+8}{17}$, $\frac{16x-1}{5}$, *были цѣлыми числами.*

(Отвѣтъ: $x = 211 - 595t$).

139. Если въ VI задачѣ назовемъ y, z и v частныя $\frac{3x-10}{7}$, $\frac{11x+8}{17}$, $\frac{16x-1}{5}$, то получимъ уравненія

$$3x - 10 = 7y,\ 11x + 8 = 17z;\ 16x - 1 = 5y,$$

или $3x - 7y = 10,\ 11x - 17z = -8,\ 16x - 5v = 1.$

Къ этимъ уравненіямъ должно приложить способъ, показанный въ § 138 для трехъ уравненій съ четырмя неизвѣстными; но мы опредѣлимъ величину главной неизвѣстной x другимъ способомъ, который гораздо проще, и притомъ прилагается ко всѣмъ вопросамъ подобнаго рода.

Во первыхъ, третье выраженіе $\frac{16x-1}{5}$ приводится къ . . $3x + \frac{x-1}{5}$; чтобъ оно было цѣлое, достаточно сдѣлать $x - 1$ кратнымъ числа 5.

Положимъ $\frac{x-1}{5} = t$; откуда $x = 1 + 5t$.

Всякая цѣлая величина t даетъ для x число цѣлое, удовлетворяющее третьему условію задачи.

Вставимъ эту величину x въ 1-е выраженіе $\frac{3x-10}{7}$, что̀ даетъ $\frac{15t-7}{7}$, или $2t - 1 + \frac{t}{7}$; слѣд. это выраженіе также будетъ цѣлымъ, когда положимъ $t = 7t'$. И такъ, 1-е и 3-е выраженія будутъ цѣлыя, когда $x = 1 + 5t$, и $t = 7t'$, что̀ даетъ . . . $x = 1 + 35t'$.

Вставимъ эту новую величину во 2-е выраженіе, $\frac{11x+8}{17}$; будетъ $\frac{385t'+19}{17}$, или $23t' + 1 + \frac{2(1-3t')}{17}$; но 2 и 17 первыя между собою числа; поэтому, достаточно и необходимо сдѣлать $1 - 3t'$ кратнымп числа 17, чтобы 2-е выраженіе было число цѣлое.

Положивъ $\frac{1-3t'}{17} = t''$, получимъ $t' = \frac{1-17t''}{3} = -6t'' + \frac{t''+1}{1}$; полагая $\frac{t''+1}{3} = t'''$, получаемъ $t'' = 3t''' - 1$, слѣд. $t' = -6(3t''' - 1) + t'''$ или $t' = -17t''' + 6$; вставивъ эту величину въ выраженіе $x = 1 + 35t'$, получимъ

$$x = 211 - 595t''';$$

этою формулою опредѣлятся всѣ величины x, удовлетворяющія условію задачи.

Пусть $t'''=0$, найдемъ $x=211$; это есть меньшая величина искомаго числа. Полагая t''' отрицательнымъ, получимъ прочія рѣшенія.

Замѣчаніе. Предстоящее неопредѣленной t''' въ послѣдней формулѣ, 595, равно произведенію $7\times17\times5$ знаменателей данныхъ выраженій. Легко понять причину этого свойства; но если знаменатели не будутъ первыми между собою, въ такомъ случаѣ предстоящее равно *простѣйшему кратному этихъ знаменателей.*

140. Остается сказать о тѣхъ задачахъ, въ которыхъ двумя или нѣсколькими неизвѣстными *болѣе*, нежели уравненій. Возьмемъ напр. уравненіе $ax+by+cz=d$, съ тремя неизвѣстными.

Перенесемъ членъ cz во 2-ю часть; будетъ

$$ax+by=d-cz, \text{ или } ax+by=c'$$

(означая буквою c' количество $d-cz$, которое полагаемъ извѣстнымъ).

Для этого уравненія составимъ формулы $x=\alpha-bt$, $y=\beta+at$, потомъ *въ* α *и* β *вставимъ вмѣсто* c' *величину* $d-cz$; тогда x и y будутъ выражены *цѣлою функціею неопредѣленной* t и 3-й *неизвѣстной* z.

Напримѣръ: *заплатить* 187 *рублей монетами въ* 5, 6 и 20 *рублей.*

Означая буквами x, y и z число требуемыхъ монетъ каждаго рода, имѣемъ уравненіе

$$5x+6y+20z=187,$$

или $$5x+6y=187-20z=c'$$

откуда $x=\frac{c'-6y}{5}$ или $x=-y+\frac{c'-y}{5}$.

Полагая $\frac{c'-y}{5}=t$, будетъ $y=c'-5t$.

откуда . . . . $x=-c'+6t$.

Вставивъ въ этихъ формулахъ вмѣсто c' величину его $187-20z$, имѣемъ $\begin{cases} x=-187+20z+6t, \\ y=187-20z-5t. \end{cases}$

Когда x и y допускаютъ положительныя и отрицательныя цѣлыя числа, можно брать для z и t произвольныя величины; но если требуются одни прямыя рѣшенія, то самый видъ даннаго уравненія $5x+6y+20z=187$ показываетъ, что величины z не должны быть болѣе $\frac{187}{20}$ или $9\frac{7}{20}$, иначе x или y сдѣлаются отрицательными.

Положимъ послѣдовательно $z=0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots\ 8,\ 9$; при $z=0$, получимъ формулы

$$x=-187+6t,\quad y=187-5t,$$

показывающія, что t должно быть $>\frac{187}{6}$ но $<\frac{187}{5}$, или $>31\frac{1}{6}$ и $<37\frac{2}{5}$. Слѣд. t допускаетъ 6 величинъ, именно: 32, 33, 34, 35, 36 и 37.

И такъ, при $z=0$, имѣемъ
$$\begin{array}{l} t=32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37, \\ x=\ \ 5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35, \\ y=27,\ 22,\ 17,\ 12,\ \ 7,\ \ 2. \end{array}$$

Полагая $z=1$, найдемъ $\left\{\begin{array}{l} x=-167+6t. \\ y=\ \ \ 167-5t; \end{array}\right.$

откуда $t>\frac{167}{6}$ или $27\frac{5}{6}$, но $<\frac{167}{5}$ или $33\frac{2}{5}$,

что также даетъ 6 величинъ: 28, 29, 30, 31, 32 и 33.

Слѣд. для $z=1$, имѣемъ $\left\{\begin{array}{l} t=28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33, \\ x=\ \ 1,\ \ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31, \\ y=27,\ 22,\ 17,\ 12,\ \ 7,\ \ 2. \end{array}\right.$

Для $z=2$, найдемъ $\left\{\begin{array}{l} t=25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29, \\ x=\ \ 3,\ \ 9,\ 15,\ 21,\ 27, \\ y=22,\ 17,\ 12,\ \ 7,\ \ 2. \end{array}\right.$

Для $z=3$, ... $\left\{\begin{array}{l} t=22,\ 23,\ 24,\ 25, \\ x=\ \ 5,\ 11,\ 17,\ 23, \\ y=17,\ 12,\ \ 7,\ \ 2. \end{array}\right.$

. . . .

При $z=8$, формулы будутъ $\left\{\begin{array}{l} x=-27+6t, \\ y=\ \ \ 27-5t, \end{array}\right.$

откуда $t>\frac{27}{6}$ но $<\frac{27}{5}$, или $>4\frac{1}{2}$ но $<5\frac{2}{5}$. И такъ для t имѣемъ только величину $t=5$, что̀ дастъ $x=3$, $y=2$.

Наконецъ, положенію $z=9$ не соотвѣтствуетъ ни одно *рѣшеніе*; потому что формулы обратятся въ $x = -7 + 6t$, $y = 7 - 5t$;

откуда $t > \frac{7}{6}$ но $< \frac{7}{5}$, или $> 1\frac{1}{6}$ но $< 1\frac{2}{5}$, а эти выводы противорѣчатъ одинъ другому.

141. Изъ § 150 можно видѣть, какъ поступать при двухъ уравненіяхъ съ четырмя неизвѣстными, трехъ уравненіяхъ съ пятью неизвѣстными. Однако жъ мы представимъ еще полное рѣшеніе задачи этого рода, чтобы показать, какъ иногда можно сократить вычисленія.

VII. *Нѣкто купилъ 100 штукъ скота за 100 червонцевъ; за быка платилъ по 10 червонцевъ, за корову по 5, за теленка по 2, а за овцу по $^1/_2$ червонца. Сколько куплено скота каждаго рода?*

Называя x, y, z, u, искомыя числа, имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+u=100 \\ 10x+5y+2z+{}^1/_2u=100 \end{array}\right\} \text{ или } \left\{\begin{array}{l} x+y+z+u=110, \\ 20x+10y+4z+u=200. \end{array}\right.$$

Вычтя 1-е уравненіе изъ 2-го, получимъ

$$19x+9y+3z=100,$$

съ которымъ должно поступать, какъ показано въ § 140. Но выгоднѣе выразить y и z въ *цѣлой функціи* отъ x; во-первыхъ, потому, что x очевидно не можетъ быть болѣе $\frac{100}{19}$ или $5\frac{5}{19}$, и во-вторыхъ, предстоящіе y и z имѣютъ общаго множителя, а это необходимо доставитъ намъ условіе, которымъ опредѣлятся величины x.

И такъ, перенесемъ $19x$ во вторую часть; будетъ

$$9y+3z=100-19x, \text{ или } 3y+z=\frac{100-19x}{3}.$$

Но для x, y, z, u, требуются цѣлыя и положительныя числа; поэтому $\frac{100-19x}{3}$ должно быть цѣлое и положительное; это двоякое условіе очевидно удовлетворяется только величинами $x=1$ и $x=4$. И такъ x можетъ имѣть только эти величины.

Если $x=1$, то $3y+z=27$, или . . . $z=27-3y$;
вставивъ эти величины въ 1-е данное
уравненіе, находимъ, ... $u=72+2y$;
первая формула показываетъ, что y не можетъ быть >9; и такъ для $x=1$, имѣемъ

$$\begin{array}{llllllllll} y = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ z = & 27, & 24, & 21, & 18, & 15, & 12. & 9, & 6, & 3, & 0, \\ u = & 72, & 74, & 76, & 78, & 80, & 82, & 84, & 86, & 88, & 90. \end{array}$$

Положимъ $x = 4$; будетъ $3y + z = 8$, откуда

$$z = 8 - 3y, \quad u = 88 + 2y.$$

Выраженіе z показываетъ, что y не можетъ быть > 2; и такъ, при $x = 4$ имѣемъ

$$\left\{\begin{array}{llll} y = & 0, & 1, & 2, \\ z = & 8, & 5, & 2, \\ u = & 88, & 80, & 92. \end{array}\right.$$

Слѣд. задача допускаетъ 13 рѣшеній, и только 10, когда исключить рѣшенія, содержащія 0.

Замѣчаніе. При употребленіи способа, изложеннаго въ § 140, подобныя сокращенія иногда необходимы; напримѣръ, если бъ имѣли уравненіе

$$6x + 10y - 15z = 11.$$

въ которомъ всѣ предстоящія, взятыя по два, имѣютъ общій множитель.

142. Цѣль неопредѣленнаго анализа 2-*й степени* также состоитъ въ томъ, чтобы рѣшить въ цѣлыхъ числахъ задачи, доставляющія менѣе уравненій, чѣмъ неизвѣстныхъ. Но въ уравненіи 2-й степени съ двумя неизвѣстными, одна изъ нихъ вообще опредѣляется *несоизмѣримою функціею* другой; поэтому вопросъ заключается въ томъ, чтобъ: 1-е, опредѣлить для одной неизвѣстной такія соизмѣримыя величины, которыя даютъ соизмѣримыя же величины для другой; 2-е, избрать между величинами первой неизвѣстной тѣ цѣлыя величины, изъ которыхъ выводятся цѣлыя же величины для второй.

Изъ этого можно заключить, что неопредѣленный анализъ 2-й степени представляетъ болѣе затрудненій, чѣмъ 1-я степень. Въ самомъ дѣлѣ, эта теорія есть одна изъ труднѣйшихъ въ алгебраическомъ анализѣ, и выходитъ изъ предѣловъ сего сочиненія. (Смотри въ Théorie des nombres de M. *Legendre*). Въ Алгебрѣ Люйлье рѣшено нѣсколько задачъ 2-й степени съ двумя неизвѣстными, въ которыхъ уравненія содержатъ только *произведеніе неизвѣстныхъ*, не заключая квадратовъ ихъ.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

СОСТАВЛЕНІЕ СТЕПЕНЕЙ И ИЗВЛЕЧЕНІЕ КОРНЕЙ ВООБЩЕ.

Введеніе. Нельзя рѣшать уравненія 2-й степени, не умѣя извлечь квадратнаго корня; точно также, для рѣшенія уравненія 3-й, 4-й,.... степени, нужно умѣть извлекать корни 3-й, 4-й,.... степени изъ всякаго численнаго или алгебраическаго количества.

Хотя можно составить всякую степень числа чрезъ умноженіе, ариѳметическое или алгебраическое; но *составленіе* степени подчинено извѣстному закону, который необходимо знать, чтобы *переходить отъ степени къ корню*.

Въ § 86 сказано, что законъ составленія квадрата численнаго или алгебраическаго количества, основывается на выраженіи квадрата двучленнаго количества; мы покажемъ теперь, что законъ составленія какой ни есть степени, вообще выводится изъ выраженія двучлена въ той же степени. Поэтому начнемъ *опредѣленіемъ выраженія двучлена въ какой ни есть степени*.

I. Двучленъ Ньютона и слѣдствія изъ него выводимыя.

143. Умножая двучленъ $x+a$ самъ на себя, получимъ слѣдующіе выводы:

$(x+a)^1=x+a$,

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$,

$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$,

$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^5+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

Въ этихъ выводахъ легко замѣтить *законъ* составленія показателей x и a; но гораздо труднѣе открыть правило предстоящихъ. Ньютонъ (Newton), знаменитый Англійскій математикъ, открылъ законъ, по которому можно прямо составить данную степень двучлена, не проходя чрезъ низшія степени. Неизвѣстно, какія разсужденія привели его къ этому; но въ послѣдствіи существованіе закона доказано съ самою строгою точностію. Мы рѣшимъ теперь нѣсколько вопросовъ относящихся къ переложеніямъ, а изъ нихъ легко выведемъ *формулу двучлена,* то есть, выраженіе двучленнаго количества въ какой ни есть степени

144. *Предварительныя свѣдѣнія.* Извѣстно изъ Ариѳметики, что произведеніе изъ n множителей a, b, c, d,..., не перемѣняется, въ какомъ бы порядкѣ ни перемножали ихъ; должно опредѣлить: сколько разъ можно иначе располагать эти различныя буквы однѣ за другими. Выводы, соотвѣтствующіе каждой перемѣнѣ буквъ, называются *переложеніями* (permutations).

Двѣ буквы a и b даютъ одно произведеніе ab, но два переложенія ab и ba. Три буквы a, b, c. даютъ одно произведеніе abc, но шесть переложеній abc, acb, cab, bac, bca, cba.

Возьмемъ m буквъ a, b, c, d, e,...; соединяя эти буквы по 2, по 3, по 4, ... , и наконецъ по $m-1$, во всевозможныхъ порядкахъ, получимъ выводы, которые называются *соединеніями* (arrangemens). Напр. ab, ac, ad, . . , ba, bc, bd, . . , ca, cb, cd, . . , суть соединенія изъ m буквъ, взятыхъ по двѣ; abc, abd,...., bac, bad, . . . , acb, acd, . . . , соединенія изъ m буквъ, взятыхъ по три.

Наконецъ, составимъ такія соединенія по 2, по 3,..., по $m-1$ буквъ, которыя различаются между собою по крайней мѣрѣ одною буквою; получаемые выводы называются *сочетаніями* (combinaisons). Напр. ab, ac, bc, . . , ad, bd, cd, . . . , суть сочетанія буквъ, взятыхъ по двѣ, пока выводы различаются по крайней мѣрѣ одною буквою; abc, abd, . . . , acd, bcd, . . . , суть сочетанія буквъ, взятыхъ по три. Поэтому:

Переложеніями *называютъ выводы, получаемые при расположеніи данныхъ буквъ однѣхъ за другими во всевозможныхъ порядкахъ, такъ что въ каждомъ выводѣ входятъ всѣ буквы, но каждая не болѣе одного раза.*

Соединенія *суть выводы, получаемые при расположеніи m данныхъ буквъ однѣхъ за другими, и во всевозможныхъ порядкахъ*, по 2, по 3, по 4, . . . , по n буквъ, причемъ $m>n$, то есть, въ каждомъ выводѣ менѣе даннаго числа буквъ; если же $n=m$, соединенія по n буквъ обратятся въ простыя переложенія.

Наконецъ, **сочетанія** *суть соединенія, которыя различаются между собою по крайней мѣрѣ одною изъ буквъ, входящихъ въ оныя.*

145. I. *Опредѣлить число* **переложеній** (permutations) *изъ* n *буквъ?*

Двѣ буквы a и b очевидно даютъ два переложенія ab и ba. И такъ, число переложеній изъ двухъ буквъ есть 2 или 1×2.

Возьмемъ 3 буквы, a, b, c. Удерживая букву a на 1-мъ мѣстѣ, двумя другими буквами можно сдѣлать два переложенія bc и cb, и слѣд. будетъ abc, acb; но всѣхъ буквъ 3, и каждую можно поставить на 1-мъ мѣстѣ; слѣд. *всѣхъ переложеній* будетъ 2×3, или $1\times 2\times 3$.

Вообще, возьмемъ n буквъ a, b, c, d, . . . , и положимъ извѣстнымъ *число переложеній изъ* n — 1 *буквъ*, которое назовемъ Q.

Взявъ отдѣльно одну изъ n буквъ, напишемъ ее на 1-мъ мѣстѣ каждаго изъ Q переложеній, доставляемыхъ другими $n-1$ буквами; получимъ Q переложеній изъ n буквъ, начинающихся тою буквою, которую мы отдѣлили; но такимъ образомъ можно поставить на 1-мъ мѣстѣ каждую изъ n буквъ; слѣдовательно всѣхъ переложеній изъ n буквъ будетъ . . . . $Q\times n$.

Пусть $n=2$; тогда Q означаетъ число переложеній изъ одной буквы; слѣдов. $Q=1$, и въ этомъ случаѣ $Q\times n$ равно 1×2.

Когда $n=3$, Q выражаетъ число переложеній изъ 3—1 или изъ 2 буквъ, и равно 1×2. Тогда $Q\times n=1\times 2\times 3$.

При $n=4$, Q означаетъ число переложеній изъ 3 буквъ, и равно $1\times 2\times 3$. Слѣд. $Q\times n=1\times 2\times 3\times 4$.

Поэтому формула $Q\times n$ заключаетъ всѣ частные случаи данной задачи: повторяя предъидущія сужденія, можно прямо рѣшить общій случай, и вывесть изъ него частные.

146. II. *Дано m буквъ a, b, c, d, . . . ; опредѣлить* *число* **соединеній** (arrangemens) *по n буквъ, которыя можно составить изъ этихъ m буквъ, полагая $m > n$.*

Чтобы прямо рѣшить общій вопросъ, положимъ извѣстнымъ число соединеній по $n-1$ буквъ, составленныхъ изъ m буквъ, и назовемъ P это число.

Въ концѣ одного изъ этихъ соединеній напишемъ каждую изъ несодержащихся въ немъ буквъ; число ихъ необходимо равно $m-(n-1)$ или $m-n+1$; такимъ образомъ очевидно составится $m-n+1$ соединеній изъ n буквъ, которыя различаются между собою послѣднею буквою.

Возьмемъ какое либо другое соединеніе изъ $n-1$ буквъ, и въ концѣ напишемъ каждую изъ $m-n+1$ буквъ, не входящихъ въ оное; также получимъ $m-n+1$ соединеній изъ n буквъ, которыя различаются между собою и съ предъидущими по крайней мѣрѣ расположеніемъ одной изъ первыхъ $n-1$ буквъ; но къ каждому изъ P соединеній по $n-1$ буквъ можно приписать каждую изъ остальныхъ $m-n+1$ буквъ; поэтому число соединеній изъ m буквъ, взятыхъ по n, выразится формулою

$$P\,(m-n+1).$$

Положимъ $n=2$, откуда $m-n+1=m-1$; P, выражая здѣсь число соединеній по $2-1$ или по 1 буквѣ, и слѣд. столько соединеній, сколько буквъ, равно m, и формула обратится въ $m\,(m-1)$.

Когда $n=3$, откуда $m-n+1=m-2$, P выражаетъ число соединеній по 2 буквы, и равно $m\,(m-1)$; слѣдов. формула перемѣнится въ $m\,(m-1)\,(m-2)$.

Когда $n=4$, причемъ $m-n+1=m-3$, P выражаетъ число соединеній по 3 буквы, и равно $m\,(m-1)\,(m-2)$; слѣд. формула будетъ $m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$; и т. д.

Замѣчаніе. Изъ способа, по которому выведены частные случаи изъ общей формулы P $(m-n+1)$, можно заключить, что формула эта выразится строкою

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\;.\;.\;.\;.\;(m-n+1);$$

то есть, *она состоитъ изъ произведенія n послѣдовательныхъ и уменьшающихся чиселъ, включительно отъ m до $m-(n-1)$ или $m-n+1$ включительно.*

Изъ нее легко вывесть формулу § 145, то есть, величину $Q\times n$ выраженную строкою.

Въ самомъ дѣлѣ, въ § 144 показано, что *соединенія* обращаются въ переложенія, когда число буквъ каждаго соединенія равно числу данныхъ буквъ; слѣд. для перехода отъ числа всѣхъ соединеній изъ m буквъ по n, къ числу всѣхъ переложеній изъ n буквъ, достаточно сдѣлать $m=n$ въ этой строкѣ, что̀ даетъ

$$n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\;.\;.\;.\;.\;.\;1.$$

Написавъ строку на оборотъ, и замѣчая, что послѣдній множитель 1, поэтому предпослѣдній 2, передъ нимъ 3, и такъ далѣе, получимъ

$$Q\times n = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-2)\,(n-1)\,n,$$

то есть, $Q\times n$ равно произведенію послѣдовательныхъ чиселъ отъ 1 до n.

147. III. *Опредѣлить число* сочетаній (combinaisons) *которыя можно составить изъ m буквъ, взятыхъ по n.*

Назовемъ X число всѣхъ *соединеній* изъ m буквъ по n; Y, число *переложеній* изъ n буквъ, и Z, число *сочетаній* по n буквъ.

Чтобы получить всѣ соединенія изъ m буквъ по n, достаточно въ каждомъ изъ Z сочетаній по n буквъ сдѣлать всѣ переложенія, допускаемыя этими n буквами; но каждое сочетаніе изъ n буквъ по положенію даетъ Y переложеній, слѣд. Z сочетаній по n буквъ даетъ $Y\times Z$ соединеній по n буквъ. Мы назвали X число всѣхъ соединеній; слѣдовательно $X=Y\times Z$, откуда $Z=\frac{X}{Y}$. Но

$$X=P\,(m-n+1),\ \S\ 146,\ \text{и}\ Y=Q\times n,\ \S\ 145;$$

слѣдовательно $Z=\frac{P(m-n+1)}{Q\times n}=\frac{P}{Q}\times\frac{m-n+1}{n}$.

Какъ P выражаетъ число соединеній по $n-1$ буквъ, Q число переложеній изъ $n-1$ буквъ, слѣдов. $\frac{P}{Q}$ выражаетъ число сочетаній изъ m буквъ, взятыхъ по $n-1$.

Положимъ $n=2$; тогда $\frac{P}{Q}$, выражая число сочетаній по 2—1 или по 1 буквѣ, равно m, и формула обратится въ $m\times\frac{m-1}{2}$ или $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

Положимъ $n=3$; тогда $\frac{P}{Q}$ выражаетъ число сочетаній по 2 буквы, и равно $\frac{m(m-1)}{1.2}$; формула будетъ $\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

Вообще, для числа сочетаній по n буквъ, найдемъ

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4.5\ldots n-2.n-1.n}.$$

Замѣчаніе. Послѣднее выраженіе не имѣетъ никакого значенія, когда положимъ $n=1$; это происходитъ отъ того, что въ этомъ выраженіи данное число сочетаній опредѣляется только посредствомъ другаго, уже опредѣленнаго числа сочетаній; но простѣйшія сочетанія суть сочетанія по 1 буквѣ, которыхъ число равно m: слѣд. эту формулу можно употреблять только начиная отъ $n=2$.

148. *Доказательство формулы двучлена*. Чтобъ удобнѣе открыть законъ разложенія въ строку двучлена $x+a$, въ степени m, составимъ произведеніе изъ нѣсколькихъ двучленовъ $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, . . . (Мы означаемъ вторые члены различными буквами для того, чтобы подобныя произведенія не соединялись между собою).

$$(x+a)\,(x+b)=x^2\begin{array}{l|l}+a & x+ab\,;\\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)=x^3\begin{array}{l|l|l}+a & x^2+ab & x+abc\,;\\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{l|l|l|l}+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd.\\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ +d & +bc & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

Составляя эти произведенія по правиламъ алгебраическаго умноженія, примѣчаемъ въ нихъ слѣдующій законъ.

1-е. Относительно показателей: въ 1-мъ членѣ показатель буквы x равенъ числу двучленныхъ множителей; въ слѣдующихъ членахъ показатель постепенно уменьшается единицею, и въ послѣднемъ членѣ равенъ нулю.

2-е, Относительно предстоящихъ различныхъ степеней количества x: предстоящее 1-го члена единица; во 2-мъ оно равно суммѣ вторыхъ членовъ двучленныхъ множителей; въ 3-мъ, суммѣ различныхъ произведеній вторыхъ же членовъ, взятыхъ по два; въ 4-мъ, суммѣ различныхъ произведеній тѣхъ же членовъ, взятыхъ по 3; вообще, можно заключить, что предстоящее n-го члена равно суммѣ различныхъ произведенiй вторыхъ членовъ, взятыхъ по $n-1$. Послѣднiй членъ равенъ произведенiю всѣхъ вторыхъ членовъ.

Чтобъ увѣриться въ общности этого закона, положимъ, что онъ признанъ справедливымъ для произведенiя изъ m двучленовъ, и разсмотримъ, перемѣнится ли онъ, когда введемъ въ произведенiе новый множитель. Пусть будетъ

$$x^m+\mathrm{A}x^{m-1}+\mathrm{B}x^{m-2}+\ldots+\mathrm{M}x^{m-n+1}+\mathrm{N}x^{m-n}+\ldots+\mathrm{U},$$

произведенiе изъ m двучленовъ; ($\mathrm{M}x^{m-n+1}$ представляетъ n-ый членъ строки; $\mathrm{N}x^{m-n}$ есть послѣдующiй членъ, то есть, предъ которымъ находится n членовъ). Введемъ новый множитель $x+\mathrm{K}$; располагая произведенiе по степенямъ x, получимъ

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x^{m+1}+\mathrm{A} & x^m+\mathrm{B} & x^{m-1}+\mathrm{C} & x^{m-2}+\ldots+\mathrm{N} & x^{m-n+1}+\ldots\ldots \\ \quad\;\;+\mathrm{K} & \quad\;\;+\mathrm{AK} & \quad\;\;+\mathrm{BK} & \qquad\quad\;\;+\mathrm{MK} & \qquad\;\;+\mathrm{UK}. \end{array}$$

Законъ показателей не измѣнился.

Относительно предстоящихъ замѣчаемъ: 1-е, предстоящее 1-го члена *единица*; 2-е, $\mathrm{A}+\mathrm{K}$, предстоящее x^m, также есть *сумма вторыхъ членовъ* всѣхъ $m+1$ двучленовъ; 3-е, въ произведенiи первыхъ m двучленовъ, B по положенiю равно суммѣ различныхъ произведенiй вторыхъ членовъ, взятыхъ по два; AK выражаетъ сумму произведенiй отъ умноженiя каждаго втораго члена первыхъ m двучленовъ на новый второй членъ K; слѣд. $\mathrm{B}+\mathrm{AK}$ также есть *сумма различныхь произведенiй по два взятыхъ вторыхъ членовъ въ* $m+1$ *двучленахъ*.

Вообще, N выражаетъ у насъ сумму произведенiй по n вторыхъ членовъ изъ m двучленовъ, а MK сумму произведенiй по $n-1$ этихъ вторыхъ членовъ, умноженныхъ на новый *вторый членъ* K; поэтому предстоящее $\mathrm{N}+\mathrm{MK}$, которое въ многочленѣ степени $m+1$ имѣетъ передъ собою n членовъ, *равно суммѣ различныхъ произведенiй по* n *вторыхъ членовъ изъ* $m+1$ двучленовъ.

Послѣднiй членъ $\mathrm{U}.\mathrm{K}$ равенъ произведенiю $m+1$ вторыхъ членовъ.

И такъ, законъ составленiя, предположенный справедливымъ для произведенiя изъ m двучленовъ, также справедливъ для $m+1$ двучленовъ; слѣдовательно этотъ законъ будетъ общимъ.

Въ произведенiи m двучленныхъ множителей, $(x+a)$

$(x+b)(x+c)(x+d)$, сдѣлаемъ $a=b=c=d\ldots$; тогда оно обратится въ $(x+a)^m$. Относительно же предстоящихъ произведенія, $a+b+c+d+\ldots.$, $ab+ac+ad+\ldots$, замѣчаемъ:

1-е. Предстоящее x^{m-1}, или $a+b+c+d+\ldots$, перемѣнится въ $a+a+a+\ldots$, то есть, въ a взятое столько разъ, сколько имѣется буквъ a, b, $c,\ldots$, и слѣд. въ ma;

2-е. Предстоящее x^{m-2}, или $ab+ac+ad+\ldots$, обратится въ $a^2+a^2+a^2\ldots$, или a^2 взятое столько разъ, сколько составится сочетаній изъ m буквъ, взятыхъ по двѣ, то есть, въ $m\frac{m-1}{2}a^2$;

3-е. Предстоящее x^{m-3} равно произведенію отъ умноженія a^3 на число сочетаній изъ m буквъ, взятыхъ по три, или равно $m\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot a^3$, и такъ далѣе.

Вообще, какъ $\mathrm{N}x^{m-n}$ означаетъ членъ строки, имѣющій передъ собою n членовъ, то предстоящее N, которое равнялось суммѣ различныхъ произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по n, въ этомъ случаѣ обратится въ a^n, умноженное на число сочетаній составленныхъ изъ m буквъ, взятыхъ по n. И такъ, § 147, $\mathrm{N}=\frac{\mathrm{P}(m-n+1)}{\mathrm{Q}\,.\,n}a^n$.

Слѣд. получимъ наконецъ формулу

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2}$$

$$+m\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3}+\ldots+\frac{\mathrm{P}(m-n+1)}{\mathrm{Q}\,.\,n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m.$$

149. Въ этой строкѣ легко замѣтить простой *законъ*, по которому каждое предстоящее составляется изъ предстоящаго предъидущаго члена.

Предстоящее каждаго члена равно предстоящему предъидущаго члена, умноженному на показателя буквы x *въ этомъ же членѣ, и раздѣленному на число предъидущихъ членовъ*. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ *общій членъ*

$$\frac{\mathrm{P}(m-n+1)}{\mathrm{Q}\,.\,n}a^nx^{m-n},$$

(онъ потому называется *общимъ членомъ*, что изъ него можно вывесть всѣ прочіе, полагая $n=2,3\ldots$); предъидущій $n^{й}$ членъ будетъ $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\cdot a^{n-1}x^{m-n+1}$, потому что $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ выражаетъ число сочетаній по n—1 буквъ, § 147; но предстоящее $\frac{\mathrm{P}(m-n+1)}{\mathrm{Q}\,.\,n}$

равно $\frac{P}{Q}$, предстоящему $n^{\text{го}}$ члена, умноженному на $m-n+1$, (показателю x въ $n^{\text{мъ}}$ членѣ) и раздѣленному на n, число предъидущихъ членовъ. Этотъ-то законъ, открытый Ньютономъ, собственно составляетъ *формулу двучлена*. Посредствомъ этого закона можно написать въ строку всякую степень двучлена, не употребляя общей формулы.

Напримѣръ, написать въ строку $(x+a)^6$. Найдемъ $(x+a)^6=+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$.

Составивъ два первые члена по общей формулѣ . . . . $x^m+max^{m-1}+$ . . . . , умножимъ 6, предстоящее втораго члена, на 5, показателя x въ этомъ членѣ, и раздѣлимъ произведеніе на 2, чтò даетъ 15 для предстоящаго третьяго члена. Для четвертаго, умножимъ 15 на 4, показателя x въ третьемъ членѣ, и раздѣлимъ произведеніе на 3, число предъидущихъ членовъ, чтò даетъ 20; и т. д. для всѣхъ прочихъ членовъ. Напримѣръ,

$$(x+a)^{10}=x^{10}+10ax^9+45a^2x^8+120a^3x^7+210a^4x^6$$
$$+252a^5x^5+210a^6x^4+120a^7x^3+45a^8x^2+10a^9x+a^{10}.$$

Въ послѣдствіи мы покажемъ, какъ разлагать въ строку степени алгебраическихъ выраженій.

Слѣдствія, выводимыя изъ формулы двучлена и теоріи переложеній.

150. *Первое слѣдствіе.* Выраженіе $(x+a)^m$ составлено одинакимъ образомъ относительно къ a и x; поэтому, и въ строкѣ, получаемой отъ разложенія этого выраженія, должно быть то же самое; и такъ, если въ строкѣ находится членъ вида Ka^nx^{m-n}, то долженъ также находиться другой членъ, вида Kx^na^{m-n} или $Ka^{m-n}x^n$. Эти два члена очевидно будутъ въ равномъ разстояніи отъ крайнихъ членовъ строки: какъ число предъидущихъ членовъ всегда означается показателемъ буквы a въ данномъ членѣ, то передъ Ka^nx^{m-n} находится n членовъ, а передъ $Ka^{m-n}x^n$ находится $m-n$ членовъ, слѣд. послѣ него остается еще n членовъ (потомучто число всѣхъ членовъ равно $m+1$).

И такъ, *въ строкѣ, получаемой при возвышеніи двучлена въ какую либо степень, предстоящія членовъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ крайнихъ членовъ, равны между собою.*

Замѣчаніе. Въ членахъ $Ka^n x^{m-n}$, $Ka^{m-n}x^n$, предстоящія выражаютъ число сочетаній по n и $m-n$, составляемыхъ изъ m количествъ; поэтому число сочетаній изъ m *количествъ, взятыхъ по* n, *равно числу сочетаній изъ* m *же количествъ, взятыхъ по* $m-n$. Напр. 12 количествъ, взятыя по 4, даютъ столько же сочетаній, сколько тѣ же 12 количествъ, взятыя по 12—4 или по 8. Шесть количествъ по 2, даютъ то же число сочетаній, какъ и шесть количествъ, по 6 — 2 или по 4.

151. *Второе слѣдствіе*. Въ общей формулѣ

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\,\frac{m-1}{2}\,a^2x^{m-2} + \dots\dots\dots$$

положимъ $x=1$; $a=1$; она перемѣнится въ

$$(1+1)^m \text{ или } 2^m = 1 + m + m\frac{(m-1)}{2} + m\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3} + \dots\,.$$

то есть, *въ формулѣ двучлена, сумма предстоящихъ равна* 2, *возвышенным въ степень* m. Напримѣръ, въ формулѣ

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5,$$

сумма 1+5+10+10+5+1 предстоящихъ, равна 2^5, или 32. Въ строкѣ $(x+a)^{10}$, въ § 149, сумма предстоящихъ равна 2^{10} или 1024.

152. *Третіе слѣдствіе*. Когда составимъ произведеніе изъ ряда чиселъ уменьшающихся единицею, полагая наприм. первое число m, а послѣднее $m-p$ (m и p цѣлыя числа), то это произведеніе дѣлится на произведеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до $p+1$; то есть,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots.(m-p)}{1.2.3.4.\dots p+1}$$

будетъ цѣлое число. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 147 это выраженіе представляло число сочетаній, составляемыхъ изъ m буквъ, взятыхъ по $p+1$; но число сочетаній необходимо должно быть цѣлое, слѣдовательно и это выраженіе будетъ число цѣлое.

Предлагаемъ учащимся доказать это свойство независимо отъ теоріи переложеній или формулы двучлена; но предваряемъ, что вопросъ этотъ, довольно легкій для первыхъ выраженій $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}$, гораздо труднѣе рѣшить въ общемъ случаѣ.

II. Извлеченіе корней изъ чиселъ.

Въ Ариѳметикѣ изложены правила извлеченія *кубичнаго корня*; но мы повторимъ здѣсь теорію этого дѣйствія, потому что оно, послѣ извлеченія квадратнаго корня, употребляется чаще другихъ дѣйствій; потомъ покажемъ способъ извлеченія корней вообще.

153. *Кубомъ* или *третьею степенью* числа называется произведеніе, составленное изъ трехъ такихъ чиселъ; а число, которое по возвышеніи въ кубъ производитъ данное число, называется *корнемъ третьей степени* или *кубичнымъ корнемъ* даннаго числа.

Числа	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
даютъ кубы	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Обратно, числа первой строки суть кубичные корни чиселъ второй строки. Въ этой строкѣ только девять полныхъ кубовъ между всѣми числами, выражаемыми одною, двумя и тремя цифрами; слѣдов. кубичные корни всѣхъ прочихъ чиселъ будутъ цѣлыя числа съ дробью, *которая не соизмѣрима съ единицею*.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $\frac{a}{b}$ (дробь несократимая) есть корень цѣлаго числа N; тогда и $\frac{a^3}{b^3}$ равно N; но это невозможно: какъ a и b числа первыя между собою, то и a^3 и b^3 также первыя между собою, слѣд. $\frac{a^3}{b^3}$ не можетъ быть равно цѣлому числу.

Разность *между двумя послѣдовательными* кубами тѣмъ болѣе, чѣмъ больше ихъ корни. Назовемъ a и $a+1$ два послѣдовательныя цѣлыя числа; имѣемъ, § 149,
$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$; и $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$;
т. е. *разность двухъ послѣдовательныхъ кубовъ равна утроенному квадрату меньшаго корня, сложенному съ утроеннымъ меньшимъ корнемъ и съ единицею.* И такъ разность между кубами чиселъ 90 и 89 равна $3(89)^2+3\times 89+1$ или равна 24031.

Покажемъ, какъ извлекать кубичный корень изъ цѣлаго числа.

Корень числа, въ которомъ не болѣе трехъ знаковъ, *извѣстенъ* по кубамъ *первыхъ девяти чиселъ*. Напр. кубичный корень изъ 125 есть 5; кубичный корень изъ 841 есть 9 или 10, приблизительно до 1 единицы; потому что 841 содержится между 729 и 1000, или между кубомъ 9 и 10.

I. Возьмемъ число содержащее болѣе трехъ знаковъ, напримѣръ, 103,823.

$$\begin{array}{r|l} 103.823 & 47 \\ \underline{94} & \overline{48} \\ 398.23 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 48 \\ \underline{48} \\ 384 \\ \underline{192} \\ 2304 \\ \underline{48} \\ 18432 \\ \underline{9261} \\ 110592 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 47 \\ \underline{47} \\ 329 \\ \underline{188} \\ 2209 \\ \underline{47} \\ 15463 \\ \underline{8836} \\ 103823 \end{array}$$

Это число содержится между 1,000 или кубомъ 10, и 1,000,000 или кубомъ 100; слѣд. корень его состоитъ изъ двухъ знаковъ: изъ десятковъ и единицъ. Назовемъ a десятки, b единицы; по § 146 получимъ

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Слѣд. кубъ числа, содержащаго десятки и единицы, состоитъ *изъ куба десятковъ*, *изъ утроеннаго произведенія квадрата десятковъ на единицы*, *изъ утроеннаго произведенія квадрата единицъ на десятки и изъ куба единицъ*.

Кубъ десятковъ, составляя *тысячи*, не можетъ содержаться въ послѣднихъ трехъ знакахъ съ правой руки, но долженъ заключаться въ части 103 (которую отдѣляютъ отъ трехъ послѣднихъ цифръ точкою). Наибольшій кубъ, содержащійся въ 103, есть 64, и корень его равенъ 4; слѣд. 4 есть знакъ десятковъ искомаго корня, потому что 103823 заключается между $(40)^3$ или 64000, и $(50)^3$ или 125 000 и такъ, искомый корень состоитъ изъ 4 десятковъ и нѣсколькихъ единицъ, не болѣе *девяти*.

Кубъ десятковъ, 64, вычтемъ изъ 103; въ остаткѣ будетъ 39, и снося три послѣднія цифры, получимъ число 39823, въ которомъ содержится еще *утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы* и двѣ остальныя части полнаго куба; но квадратъ десятковъ не можетъ быть менѣе ста, поэтому утроенное произведеніе можетъ содержаться только въ части 398, лѣвѣе цифръ 23, которую также отдѣляютъ точкою. Составивъ утроенное произведеніе квадрата десятковъ, 16×3 или 48, и раздѣливъ 398 на 48, частное 8 будетъ или точное число единицъ искомаго корня, или же число большее: потому что сверхъ утроеннаго произведенія квадрата десятковъ на единицы, въ этихъ же 398 сотняхъ содержатся сотни, происходящія отъ суммы двухъ другихъ частей, т. е. утроеннаго произведенія квадрата единицъ на десятки, и куба единицъ. Чтобъ удостовѣриться, будетъ ли знакъ 8 слишкомъ великъ, можно изъ этого знака 8 и знака 4 (десятковъ) составить всѣ три части куба, содержащіяся въ 39823. Но *гораздо выгоднѣе* возвысить въ кубъ 48 (какъ показано въ вычисленіяхъ); получимъ 110592, которое больше даннаго числа; слѣд. число 8 слишкомъ велико. Составляя кубъ числа 47, находимъ 103823; поэтому данное число полный кубъ, и корень его 47.

Замѣчаніе. Нельзя сначала отыскивать знака единицъ, потому что кубомъ единицъ могутъ быть десятки и даже сотни, которыя соединяются съ десятками и сотнями, происходящими отъ остальныхъ частей куба.

Извлечь кубичный корень изъ 47,954.

$$\begin{array}{r|lrr}
47.954 & 36 & 36 & 37 \\
27 & \overline{27} & 36 & 37 \\
\overline{209} & & \overline{216} & \overline{259} \\
 & & 108 & 111 \\
47954 & & \overline{1296} & \overline{1369} \\
46656 & & 36 & 37 \\
\overline{1298} & & \overline{7776} & \overline{9583} \\
 & & 3888 & 4107 \\
 & & \overline{46656} & \overline{50653}
\end{array}$$

Число 47,954 менѣе 1,000,000, слѣд. корень его состоитъ изъ двухъ цифръ: изъ десятковъ и единицъ. Кубъ десятковъ содержится въ 47 *тысячахъ*, и по прежнему докажемъ, что 3, корень наибольшаго куба въ числѣ 47, выражаетъ десятки. Вычтя кубъ числа 3, или 27 изъ 47, снесемъ къ остатку цифру 9. Въ 209 сотняхъ заключаются утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, и произведенія остальныхъ двухъ частей; и такъ, раздѣливъ 209 на утроенный квадратъ десятковъ, или 27, частное 7 будетъ цифра единицъ искомаго корня, или же число большее. Возвысивъ 37 въ кубъ, получимъ 50,653, которое больше даннаго числа 47,954; составляя же кубъ 36, имѣемъ 46,656, а вычтя изъ даннаго, въ остаткѣ будетъ 1298. Слѣд. данное число неполный кубъ, и корень его будетъ 36, съ погрѣшностію *менѣе единицы*. Въ самомъ дѣлѣ, разность 1298 меньше числа $3\times(36)^2+3\times36+1$, (стр. 189) потому что при повѣркѣ мы уже получили 3888 для утроеннаго квадрата 36.

II. *Извлечъ кубичный корень изъ числа, содержащаго болѣе шести цифръ*, напр. 43,725,658.

```
        43.725.658 | 352                        352
        27         |--------
        ---        | 27 . . . . . .     3675   352
        167        |                           ----
                               35              704
                               35             1760
                              ----
           43725              175            1056
           42875             105             ------
           -----             ----            123904
            8506             1225               352
                               35            ------
                             ----            247808
        43725658             6125           619520
        43614208            3675            371712
        --------            -----          --------
остатокъ . . . 111450       42875          43614208
```

Искомый корень имѣетъ болѣе одной цифры, предположимъ, что онъ состоитъ изъ единицъ и десятковъ (десятки же могутъ быть выражены одною или нѣсколькими цифрами).

Кубъ десятковъ не менѣе тысячи, слѣд. необходимо долженъ заключаться въ части, находящейся по лѣвую сторону трехъ послѣднихъ цифръ 658. Если извлечемъ корень изъ наибольшаго куба содержащагося въ 43,725, полагая что это число выражаетъ простыя единицы, то получимъ всѣ десятки корня. Въ самомъ дѣлѣ, назовемъ a корень наибольшаго куба въ числѣ 43,725; искомый корень долженъ имѣть по крайней мѣрѣ a десятковъ, потому что произведеніе $a^3\times1000$ можно вычесть изъ 43,725,000 и тѣмъ болѣе изъ 43,725,658. Сверхъ того, корень не можетъ состоять изъ $a+1$ десятковъ; какъ $(a+1)^3$ болѣе 43725, то $(a+1)^3\times1000$ болѣе 43,725,000 по крайней мѣрѣ одною тысячью, и слѣд. болѣе числа 43,725,658: и такъ, искомый корень состоитъ изъ a десятковъ, и нѣсколькихъ единицъ, не болѣе *девяти*.

Вопросъ приводится къ извлеченію кубичнаго корня изъ 43,725; въ этомъ числѣ болѣе трехъ цифръ, слѣд. въ корнѣ его содержатся десятки и единицы. Чтобы получить десятки, отдѣлимъ три послѣднія цифры 725. и извлечемъ корень изъ наибольшаго куба въ числѣ 43. (Изъ этого видно, что слѣдовало бы сдѣлать, когда бы и въ этомъ числѣ было болѣе трехъ цифръ).

Наибольшій кубъ въ числѣ 43 есть 27; корень его 3, выражаетъ число десятковъ корня изъ 43,725 (или сотни общаго корня). Вычтя 27 изъ 43, къ остатку 16 сносимъ первую цифру 7 изъ отдѣленія 725, что̀ даетъ 167.

Составивъ утроенный квадратъ десятковъ, получимъ 27, и раздѣливъ 167 на 27, частное 6 есть точная цыфра единицъ въ корнѣ изъ 43725, или же слишкомъ велика. Легко замѣтить, что эта цифра въ самомъ дѣлѣ слишкомъ велика; и такъ возьмемъ 5, и для повѣрки возвысимъ 35 въ кубъ; получимъ 42875, а вычтя изъ 43725, имѣемъ число 850, которое очевидно меньше $3 \times (35)^2 + 3 \times 35 + 1$. И такъ, 35 есть корень наибольшаго куба въ числѣ 43725, и слѣд. число десятковъ искомаго корня.

Остается найти единицы. Снесемъ первую цифру 6 послѣдняго отдѣленія 658', что̀ даетъ 8506; раздѣливъ это число на утроенный квадратъ 35 десятковъ, (мы уже при повѣркѣ составили квадратъ 35), частное будетъ 2, которое повѣряемъ, возвышая въ кубъ 352, что̀ даетъ 43,614,208, а вычтя изъ даннаго числа, въ остаткѣ имѣемъ 111450. И такъ, 352 есть кубичный корень изъ 43,725,658, вѣрно до 1 единицы.

Общее правило. *Чтобъ извлечь кубичный корень изъ цѣлаго числа, раздѣляю число на грани изъ трехъ цифръ, начиная съ правой руки, пока въ послѣдней грани останется одна, двѣ, и не болѣе трехъ цифръ* (число цифръ искомаго корня равно числу граней); потомъ *извлекаю корень изъ наибольшаго куба содержащагося въ первой грани слѣва, и вычитаю его изъ первой грани. Къ остатку сношу первую цифру 2-й грани, и раздѣляю составленное число на утроенный квадратъ первой цифры корня; частное приписываю къ этой цифрѣ, и число, составленное обѣими цифрами, возвышаю въ кубъ; когда кубъ больше числа, составленнаго двумя первыми гранями, то уменьшаю частное одною или болѣе единицами, и найдя кубъ, который* *не болѣе этого числа, вычитаю его. Къ остатку приписываю первую цифру 3-й грани и раздѣляю это число на утроенный квадратъ найденныхъ для корня двухъ цифръ; частное* (если не слишкомъ велико) *будетъ такое число, что приписавъ его къ двумъ первымъ цифрамъ корня, и возвысивъ въ кубъ число ими составленное, произведеніе не будетъ болѣе числа, означеннаго тремя гранями; сдѣлавъ вычитаніе, сношу къ остатку первую цифру 4-й грани, и продолжаю тотъ же рядъ дѣйствій, пока снесу всѣ цифры.*

Примѣчаніе. Если остатки при вычисленіяхъ кажутся слишкомъ велики, то легко увѣриться въ этомъ: *остатокъ долженъ быть менѣе утроеннаго квадрата найденнаго корня, сложеннаго съ утроеннымъ корнемъ и съ единицею*, стр. 189. Въ противномъ случаѣ надобно увеличить послѣднюю цифру корня.

Примѣры для упражненія:

$$\sqrt[3]{483239} = 78 \text{ съ остаткомъ } 8687;$$

$$\sqrt[3]{91632508641} = 4508 \text{ съ остаткомъ } 20644129;$$

$$\sqrt[3]{32977340218432} = 32068.$$

154. *Извлеченіе корня $n^{\text{й}}$ степени изъ цѣлаго числа* (*). Пусть N означаетъ данное число, а n степень извлекаемаго корня. Число 10 въ $n^{\text{й}}$ степени, или 10^n, выражается единицею съ n нулями, и есть наименьшее число, составленное изъ $n+1$ цифръ; поэтому, если въ N только n цифръ, то корень его состоитъ изъ одной цифры, и получится возвышеніемъ въ $n^{\text{ую}}$ степень первыхъ десяти чиселъ, отъ 1 до 10; меньшее изъ двухъ чиселъ, между которыми заключается число N, есть требуемый корень. Но когда въ N болѣе n цифръ, то въ корнѣ его содержатся десятки и единицы. Называя a десятки, b единицы, по § 148 имѣемъ,

$$N = (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

т. е. данное число состоитъ *изъ $n^{\text{ой}}$ степени десятковъ, изъ n разъ взятаго произведенія десятковъ въ степени* (n — 1)

---

*) Чтобы совершенно ясно понять этотъ способъ, надобно хорошо знать способъ извлеченія квадратныхъ и кубичныхъ корней.

на единицы, и ряда другихъ частей, которыя безполезно разсматривать.

Но $n^{ая}$ степень десятковъ не можетъ дать менѣе единицы съ n нулями, и поэтому не содержится въ послѣднихъ n цифрахъ съ правой руки; поэтому отдѣляютъ эти n цифръ, и извлекаютъ корень изъ наибольшей $n^{й}$ степени, содержащейся въ остальной части: этимъ корнемъ выразятся *десятки* искомаго корня.

Если въ этой части все еще болѣе n цифръ, то снова отдѣляютъ n послѣднихъ цифръ, и извлекаютъ корень наибольшей $n^{й}$ степени, содержащейся въ новой части съ лѣвой стороны, и такъ далѣе.

Раздѣливъ число N *на грани изъ* n *цифръ* (въ послѣдней грани слѣва можетъ быть менѣе n цифръ), *извлечемъ корень изъ наибольшей* $n^{й}$ *степени, содержащейся въ* 1-й грани слѣва, что даетъ цифру наивысшаго порядка единицъ искомаго корня, или цифру десятковъ въ корнѣ числа, составленнаго первыми двумя гранями слѣва. *Вычтя* $n^{ую}$ *степень этой цифры изъ* 1-й грани, получимъ остатокъ, который вмѣстѣ со 2-ю гранью содержитъ еще n разъ взятое произведеніе найденной цифры (которая выражала десятки) въ степени $(n-1)$, на слѣдующую цифру, и рядъ другихъ частей; но это произведеніе очевидно не можетъ дать единицъ низшаго порядка, нежели 10^{n-1}; слѣд. оно не можетъ заключаться въ $n-1$ послѣднихъ цифрахъ 2-й грани. И такъ, достаточно *снести къ остатку отъ 1-й грани первую цифру 2-й грани*, *и раздѣлить это число на* n *разъ первую цифру корня* въ степени $(n-1)$: частное выразитъ вторую цифру корня, или будетъ слишкомъ велико. Для повѣрки, напишемъ ее возлѣ первой цифры, справа, *возвысимъ обѣ вмѣстѣ въ* $n^{ю}$ *степень, и произведеніе вычтемъ*, если возможно, *изъ двухъ первыхъ граней*; получимъ второй остатокъ, къ которому *сносимъ первую цифру 3-й грани, и это число раздѣлимъ на* n *разъ взятую степень* $(n-1)$ *найденнаго уже корня*, и такъ далѣе.

Извлечь корень 5-й степени изъ 550731776.

$$\begin{array}{r|l} 5507.31776 & 5 \\ \underline{3125} & \overline{3125} \\ 23823 & \end{array}$$

Отдѣливъ пять цифръ справа, находимъ, что 5507 содержится между $(5)^5$ или 3125, и $(6)^5$ или 7776; слѣд. 5 выражаетъ десятки искомаго корня. Вычтя 3125 изъ 5507, къ остатку 2382 сносимъ первую цифру 3 первой грани справа, и 23823 дѣлимъ на 5 разъ 4-ю степень числа 5, или на 3125. Частное будетъ 7; но возвысивъ 57 въ 5-ю степень, получимъ 601,692,057, которое больше даннаго. Взявъ 56, получимъ $(56)^5 = 550,731,776$; слѣд. 56 есть искомый корень. Также найдемъ

$$\sqrt[5]{2090455} = 18 \text{ съ остаткомъ } 200887.$$

$$\sqrt[5]{11167913618807} = 407.$$

$$\sqrt[5]{94931877133} = 37.$$

155. *Примѣчаніе.* Когда степень извлекаемаго корня есть число кратное двухъ или болѣе другихъ, напр. 4, 6, 8, . . . , тогда можно получить искомый корень извлеченіемъ корней низшей степени. Чтобъ удостовѣриться въ возможности сего дѣйствія, замѣтимъ, что

$$(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\times 4} = a^{12};$$

и вообще, $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times a^m \ldots = a^{m.n}$, § 16. Слѣд. $n^я$ *степень* $m^й$ *степени числа, равна* $mn^й$ *степени этого числа.*

Обратно, корень $mn^й$ степени какого либо числа, равенъ корню $n^й$ степени изъ корня $m^й$ степени сего числа, или, говоря языкомъ алгебраическимъ, $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ . . . $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a'$;

возвысивъ въ $n^{ю}$ степень, получимъ . . . . $\sqrt[m]{a} = a'^n$;

[по опредѣленію корня, имѣемъ $(\sqrt[n]{К})^n = К$].

Возвысивъ обѣ части въ $m^{ю}$ степень, $a = (a'^n)^m = a'^{mn}$,

а извлекая $mn^{ый}$ корень изъ двухъ частей, $\sqrt[mn]{a} = a'$; но

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a'$ по положенію; слѣд. $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Замѣч. Какъ $(a^m)^n$ и $(a^n)^m$ одинаково даютъ a^{mn}, то можемъ заключить, что и $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}=\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}$.

$$\sqrt[4]{256}=\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt{16}=4:$$

$$\sqrt[6]{2985984}=\sqrt[3]{\sqrt{2985984}}=\sqrt[3]{1728}=12;$$

$$\sqrt[6]{1771561}=\sqrt[3]{\sqrt{1771561}}=11;$$

$$\sqrt[8]{1679616}=\sqrt[4]{\sqrt{(1679616)}}=\sqrt{\sqrt{1296}}=\sqrt{36}=6.$$

Замѣчаніе. Хотя можно извлекать послѣдовательные корни въ произвольномъ порядкѣ, но гораздо выгоднѣе начинать съ извлеченія корней меньшихъ степеней; тогда болѣе сложное дѣйствіе извлеченія корня высшей степени, производится надъ меньшимъ числомъ цифръ.

Извлеченіе корней по приближенію.

156. Если требуется извлечь $n^{й}$ корень изъ цѣлаго числа, не составляющаго *полной степени*, то по способу показанному въ § 154 можно найти только цѣлую часть корня; а дробь, дополняющую этотъ корень, нельзя опредѣлить въ точности; потому что извѣстно когда: a и b первые между собою, то a^n и b^n также первые между собою; и такъ $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ или $\frac{a^n}{b^n}$ не можетъ составить цѣлое число N, т. е. $\sqrt[n]{N}$ нельзя въ точности выразить дробью $\frac{a}{b}$. Но можно опредѣлить корень до произвольной степени приближенія.

Извлечь вообще $n^{й}$ корень изъ цѣлаго числа a, вѣрно до $\frac{1}{p}$, то есть, чтобы погрѣшность была менѣе дроби $\frac{1}{p}$.

Число a можно представить въ видѣ $\frac{a\times p^n}{p^n}$. Называя r корень изъ ap^n, вѣрный до 1 единицы, число $\frac{a\times p^n}{p^n}$ или a будетъ заключаться между $\frac{r^n}{p^n}$ и $\frac{(r+1)^n}{p^n}$; слѣд. и $\sqrt[n]{a}$ заключается между корнями двухъ послѣднихъ чиселъ, т. е. между $\frac{r}{p}$ и $\frac{r+1}{p}$. И такъ $\frac{r}{p}$ есть требуемый корень, вѣрный до дроби $\frac{1}{p}$.

Общее правило. *Чтобъ извлечь корень $n^{й}$ степени изъ цѣлаго числа, приблизительно до дроби $\frac{1}{p}$ должно умножить данное число на p^n, извлечь изъ произведенія корень $n^{й}$ степени, вѣрный въ единицахъ, и наконецъ раздѣлить его на p.*

157. Приложимъ эти правила къ частнымъ примѣрамъ.

Извлечь кубичный корень изъ 15, вѣрно до $\frac{1}{12}$. Должно, § 156, умножить 15 на 12^3 или $15 \times 1728 = 25920$; но $\sqrt[3]{25920} = 29$ вѣрно въ единицахъ, слѣд. искомый корень есть $\frac{29}{12}$ или $2\frac{5}{12}$.

Извлечь кубичный корень изъ 47, вѣрно до $\frac{1}{20}$.

$47 \times 20^3 = 47 \times 8000 = 376000$; $\sqrt[3]{376000} = 72$, до 1 единицы; слѣд. $\sqrt[3]{47} = \frac{72}{20} = 3\ \frac{12}{20}$ или $3\frac{3}{5}$ вѣрно до $\frac{1}{20}$.

Вычислить $\sqrt[3]{25}$ *вѣрно* до 0,001.

Надобно умножить 25 на $(1{,}000)^3$ или на 1,000,000,000 что̀ даетъ 25,000,000,000. Но кубичный ко̀рень этого числа есть 2920; слѣд. $\sqrt[3]{25} = 2{,}920$, вѣрно до 0,001.

Вообще, *чтобъ извлечь кубичный корень изъ цѣлаго числа, приблизительно до десятичной дроби, приписываемъ съ правой стороны числа столько разъ по три нуля, сколько требуется десятичныхъ въ корнѣ; потомъ изъ новаго числа извлекаемъ корень вѣрный въ единицахъ, и наконецъ отдѣляемъ съ правой стороны корня требуемое число десятичныхъ цифръ.*

Извлечь кубичный корень изъ десятичной дроби; напр. изъ числа 3,1415.

Знаменатель этой дроби, 10,000, неполный кубъ; умножимъ его на 100, чтобъ сдѣлать полнымъ кубомъ, т. е.

припишемъ 2 нуля съ правой стороны данной десятичной дроби; тогда будетъ 3,141500. Отбрасывая запятую и извлекая, § 153, кубичный корень изъ цѣлаго числа 3,141,500, получимъ 146; потомъ, раздѣливъ выводъ на 100 или $\sqrt[3]{1,000,000}$, найдемъ $\sqrt[3]{3,1415} = 1,46$ вѣрно до 0,01.

Чтобъ найти ближайшую величину, къ числу приписываютъ *трижды* столько нулей, сколько требуется *десятичныхъ въ искомомъ корнѣ.*

Когда должно извлечь кубичный корень изъ обыкновенной дроби, приближенно до 1 десятичной, всего лучше *обратить данную дробь въ десятичную, и вычислить втрое болѣе десятичныхъ, нежели требуется въ корнѣ.*

Извлечь корень 6-й степени изъ 23 до 0,01.

По § 156, должно умножить 23 на 100^6, т. е. приписать *двѣнадцать* нулей; потомъ изъ этого числа извлечь корень 6-й степени, и раздѣлить на 100; но по § 155 имѣемъ

$\sqrt[6]{23 \times (100)^6} = \sqrt[3]{\sqrt{23 \times (100)^6}}$; слѣд. по извлеченіи квадратнаго корня изъ $23 \times (100)^6$, вѣрно до 1, извлечемъ изъ вывода кубичный корень и раздѣлимъ его на 100, или отдѣлимъ двѣ цифры справа; тогда получимъ $\sqrt[3]{23} = 1,68$ вѣрно до 0,01.

Вычислить выраженіе $\sqrt[4]{29,437}$ вѣрно до 0,001.

По § 156 должно умножить 29,437 на $(1000)^4$; для этого во-первыхъ, уничтожимъ запятую, и припишемъ потомъ девять нулей справа, что̀ даетъ 29,437,000,000,000. Извлекая изъ этого числа квадратный корень, получимъ число 5425587, а $\sqrt{5425587} = 2329$; и такъ будетъ 2,329 вѣрно до 0,001.

Иначе. Извлечемъ сначала квадратный корень изъ 29,437, вѣрно до 0,000001; будетъ 5,425587. Извлекая квадратный корень изъ этого числа, получимъ 2,329.

Вычислить $\sqrt[3]{5 \times 3\sqrt{2}}$ вѣрно до 0,01.

Можно умножить $5 + 3\sqrt{2}$ на $(100)^3$, вычислить это произведеніе вѣрно до единицы, § 91, извлечь изъ вывода кубичный корень, вѣрный въ единицахъ, и наконецъ раздѣлить послѣдній выводъ на 100.

Но гораздо лучше вычислить во-первыхъ $3\sqrt{2}$, или $\sqrt{18}$ въ десятичныхъ, вѣрно до 0,000001, что̀ даетъ 4,242640, откуда $5+3\sqrt{2}=9,242640$. Но $\sqrt[3]{9,242640}=2,09$; слѣд. $\sqrt[3]{5+3\sqrt{2}}=2,09$ до 0,01.

Вычислить $\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}}$ вѣрно до 0,1.

$\frac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{2}}$ по § 91 обратится въ $\frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}$; но

1-е, $20\sqrt{3}$ или $\sqrt{1200}=32,641$ вѣрно до 0,001;

2-е, $5\sqrt{6}$, или $\sqrt{150}=12,247$ вѣрно до 0,001.

Слѣд. $\frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{14}=\frac{46,888}{14}=3,349$, а данное выраженіе равно $\sqrt[3]{3,349}$, равно 1,6 вѣрно до 0,1.

$\sqrt[3]{473}$ вѣрно до $\frac{1}{10}=\frac{155}{20}$; $\sqrt[3]{79}$ вѣрно до $0,0001=4,2808$;

$\sqrt[3]{13}$ до $0,01=1,53$; $\sqrt[3]{3,00415}$ до $0,0001=1,4429$;

$\sqrt[3]{0,00101}$ до $0,01=0,10$; $\sqrt[3]{\frac{14}{23}}$ до $0,001=0,814$.

III. Составленіе степеней и извлеченіе корней изъ алгебраическихъ количествъ.

Вычисленіе коренныхъ величинъ.

158. Разсмотримъ сначала одночленныя количества. Возвысить $2a^3b^2$ въ 5-ю степень; имѣемъ (2),

$$(2a^3b^2)^5=2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2\times 2a^3b^2;$$

поэтому, предстоящее 2 должно 4 раза само на себя помножить, или возвысить въ 5-ю степень, а показателя каждой буквы сложить 4 раза съ самимъ собою или умножить на 5.

Слѣд. $(2a^3b^2)^5=2^5\times a^{3\times5}b^{2\times5}=32a^{15}b^{10}$.

Также, $(8a^2b^3c)^3=8^3\times a^{2\times3}b^{3\times3}c^3=512a^6b^9c^3$.

И такъ, чтобъ возвысить одночленъ въ данную степень, *должно возвысить въ эту степень предстоящее, и помножить показателя каждой буквы на показателя степени.*

Обратно, для извлеченія корня какой либо степени изъ одночлена, должно *извлечь корень изъ предстоящаго, и раздѣлить показателя каждой буквы на показателя корня.*

Напр. $\sqrt[3]{64a^9b^3c^6} = 4a^3bc^2$, $\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4} = 2a^2b^3c$.

Поэтому одночленное количество только тогда составляетъ полную степень извлекаемаго корня, когда предстоящее полная степень этого корня, и показатели всѣхъ буквъ дѣлятся на показателя корня. Въ послѣдствіи покажемъ, какъ приводить въ простѣйшій видъ коренныя количества, которыя не составляютъ полныхъ степеней.

159. Обратимъ вниманіе на знаки одночленныхъ количествъ. Замѣтимъ, что *квадратъ одночлена всегда будетъ положительный*, и что всякую четную степень $2n$ можно разсматривать какъ $n^{ю}$ степень квадрата, т. е. $n^{2n} = (a^2)^n$; поэтому *всякая четная степень количества положительнаго или отрицательнаго, должна быть положительною.* Напр. $(\pm 2a^2b^3c)^4 = +16a^8b^{12}c^4$.

Притомъ, нечетная степень $(2n+1)$, составляется умноженіемъ четной степени $2n$ на первую степень; слѣд. *каждая нечетная степень одночлена имѣетъ тотъ же знакъ, какой при самомъ одночленѣ.*

Напр. $(+4a^2b)^3 = +64a^6b^3$, $(-4a^2b)^3 = -64a^6b^3$.

Поэтому, 1-е, *корень нечетной степени изъ одночлена принимаетъ тотъ знакъ, который находится при этомъ одночленѣ.* Напримѣръ

$$\sqrt[3]{+8a^3} = +2a, \quad \sqrt[3]{-8a^3} = -2a, \quad \sqrt[5]{-32a^{10}b^5} = -2a^2b.$$

2-е. *Корень четной степени изъ положительнаго одночлена, принимаетъ безъ различія знакъ + и —.* Напримѣръ

$$\sqrt[4]{81a^4b^{12}} = \pm 3ab^3, \quad \sqrt[6]{64a^{18}} = \pm 2a^3.$$

3-е. *Корень четной степени изъ отрицательнаго одночлена, есть мнимый*; потому что нѣтъ такого количества, которое, будучи возвышено въ четную степень, дало бы выводы отрицательные. И такъ $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-b}$, $\sqrt[8]{-c}$, означаютъ дѣйствія невозможныя, и суть *выраженія мнимыя*, также какъ и $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$, . . ; § 85.

160 Перейдемъ къ многочленамъ.

Мы умѣемъ возвышать въ степени двучленъ $x+a$; покажемъ какъ поступать въ томъ случаѣ, когда въ немъ имѣются предстоящія и показатели, напримѣръ, въ выраженіи $(2a^2 + 3ab)^3$.

Положимъ временно $2a^2 = x$, $3ab = y$; будетъ

$$(2a^2 + 3ab)^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

вставивъ опять $2a^2$ и $3ab$ вмѣсто x и y, получимъ

$$(2a^2+3ab)^3=(2a^2)^3+3(2a^2)^2.(3ab)+3(2a^2).(3ab)^2+(3ab)^3,$$

или $(2a^2 + 3ab)^3 = 8a^6 + 36a^5b + 54a^4b^2 + 27a^3b^3$.

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\begin{aligned}(4a^2b-3abc)^4 &= (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\\ &= (4a^2b)^4 + 4(4a^2b)^3.(-3abc) + 6(4a^2b)^2.(-3abc)^2\\ &\quad + 4(4a^2b).(-3abc)^3 + (-3abc)^4\\ &= 256a^8b^4 - 768^7b^4c - 864a^6b^4c^2 - 432a^5b^4c^3 + 81a^4b^4c^4.\end{aligned}$$

(Знаки поперемѣнно положительные и отрицательные).

Возьмемъ выраженіе $(x+y+z)^3$; полагая сначала $x+y=u$, будетъ $(u+z)^3=u^3+3zu^2+3z^2u+z$,

или, замѣнивъ u его величиною $x+y$.

$$(x+y+z)^3=(x+y)^3+3z\,(x+y)^2+3z^2\,(x+y)+z^3;$$

произведемъ указанныя дѣйствія; получимъ

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z\\ +3xz^2+3yz^2+z^3.\end{aligned}$$

Это выраженіе состоитъ *изъ куба трехъ членовъ, изъ утроеннаго квадрата каждаго члена, умноженнаго на первую степень одного изъ прочихъ членовъ, изъ 6 разъ взятаго произведенія трехъ членовъ.* Этотъ законъ прилагается ко всѣмъ многочленамъ, § 86.

Чтобъ найти кубъ многочлена, въ которомъ находятся предстоящія и показатели, должно, какъ и въ двучленѣ, *означить каждый членъ одною буквою, написать въ строку, вмѣсто буквъ вставить величины ихъ, и произвесть всѣ показанныя вычисленія.* Напримѣръ,

$$\begin{aligned}(2a^2-4ab+3b^2)^3=8a^6-49a^8b+132a^4b^2-208a^3b^3+198a^2b^4\\ -108ab^5+27b^6.\end{aligned}$$

Такимъ же образомъ составляется 4я, 5я, . . . , степени многочленовъ.

161. Приступимъ къ извлеченію корней какой либо степени изъ многочленовъ.

Назовемъ P данный многочленъ, который расположенъ по нисходящимъ степенямъ буквы a; положимъ также, что $x+y+z+\ldots$ есть искомый корень, который также расположенъ по степенямъ a.

Возвышая $x+y+z+\ldots$ въ m-ю степень, и полагая, что $y+z+\ldots$ составляютъ одинъ членъ, получаемъ

$$\text{P или } (x+\overline{y+z+\ldots})^m = x^m + mx^{m-1}(y+z+\ldots)$$
$$+ m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+\ldots)^2$$
$$+ \ldots\ldots$$

По законамъ алгебраическаго умноженія, въ членѣ x^m второй части этого равенства, показатель буквы a очевидно болѣе, нежели въ прочихъ членахъ, и ни съ однимъ изъ нихъ не могъ соединиться. Поэтому x^m равенъ тому члену P, въ которомъ наибольшій показатель при a; а когда извлечемъ корень m-й степени изъ перваго члена P, необходимо получимъ первый членъ x искомаго корня. Вычтемъ x^m изъ P, и назовемъ R остатокъ; получимъ R или

$$\text{P} - x^m = mx^{m-1}(y+z+u+\ldots)$$
$$+ m\frac{m-1}{2}x^{m-2}(y+z+u+\ldots)^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

новое равенство, въ которомъ членъ $mx^{m-1}y$, во второй части, также не могъ соединиться съ другими.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ въ членахъ y, y^2, y^3, . . . , составляющихъ часть выраженій заключенныхъ скобками, показатели буквы a болѣе, нежели въ членахъ соотвѣтствующихъ выраженій, то достаточно показать, что въ членѣ $mx^{m-1}y$ показатель буквы a болѣе, нежели въ общемъ членѣ $x^{m-n}y^n$, (здѣсь безполезно разсматривать предстоящее).

Но сравнивая количества $x^{m-1}y$ и $x^{m-n}y^n$, которыя можно представить въ видѣ $x^{m-n}y \times x^{n-1}$ и $x^{m-n}y \times y^{n-1}$, видимъ, что они имѣютъ общій множитель $x^{m-n}y$, а изъ прочихъ двухъ множителей, въ первомъ, x^{n-1}, показатель буквы a болѣе, нежели во второмъ, y^{n-1}. Слѣдов. членъ $mx^{m-1}y$ не можетъ соединиться съ членомъ $x^{m-n}y^n$, и тѣмъ менѣе съ другими членами.

И такъ, членъ $mx^{m-1}y$ равенъ, безъ сокращенія, тому члену остатка R, въ которомъ наибольшій показатель при a, и раздѣливъ первый членъ R на mx^{m-1}, необходимо получимъ второй членъ y корня.

Вычтя $(x+y)^m$ изъ P, и называя R′ остатокъ, также докажемъ, что первый членъ остатка R′ или $P-(x+y)^m$, представляетъ величину $mx^{m-1}z$, и раздѣливъ его на mx^{m-1}, получимъ третій членъ z корня; и такъ далѣе. Вотъ *общій* способъ:

Расположивъ многочленъ P по степенямъ одной буквы, извлечь корень m-й степени изъ перваго члена: получится *первый* членъ корня. Вычесть m-ю степень его изъ P, и написать подъ первымъ членомъ корня произведеніе изъ степени $(m-1)$ этого корня, умноженной на m.

Раздѣлить первый членъ остатка на это произведеніе: получится *второй* членъ корня. Составить m-ю степень двухъ членовъ корня, и вычесть ее изъ P.

Раздѣлить первый членъ новаго остатка на m разъ степень $(m-1)$ перваго члена корня: получимъ *третій* членъ корня, и такъ далѣе.

Легко примѣнить этотъ способъ къ извлеченію корней 3-й, 4-й, 5-й, . . . степени.

Вычисленіе коренныхъ величинъ.

162. Если требуется извлечь корень изъ количества не составляющаго полной данной степени, то можно только обозначить дѣйствіе знакомъ $\sqrt{}$; надъ этимъ знакомъ ставятъ показателя корня, или число, означающее степень извлекаемаго корня.

Иногда можно представить *подкоренныя выраженія* въ простѣйшемъ видѣ, основываясь на томъ, § 84, что *корень* n-й *степени изъ произведенія, равенъ произведенію корней* n-й *степени изъ множителей произведенія*, или, говоря алгебраическимъ языкомъ,

$$\sqrt[n]{abcd\ldots}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\sqrt[n]{d}\ \ldots\ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, возвысивъ оба выраженія въ n-ю степень, для перваго получимъ

$$(\sqrt[n]{abcd})^n=abcd;\ \text{а для втораго}$$

$$(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\ \ldots\ldots)^n=(\sqrt[n]{a})^n.(\sqrt[n]{b})^n.(\sqrt[n]{c})^n\ldots=abcd.$$

Какъ n-ыя степени этихъ выраженій равны, то и самыя выраженія равны между собою, § 157.

Возьмемъ количество $\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}$, которое нельзя замѣнить соизмѣримымъ одночленомъ, потому что 54 неполный кубъ, и притомъ показатели буквъ a и c не дѣлятся на 3; имѣемъ $\sqrt[3]{54a^4b^3c^2}=\sqrt[3]{27a^3b^3}\times\sqrt[3]{2ac^2}=3ab\sqrt[3]{2ac^2}$; также,

$$\sqrt[3]{8a^2}=2\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{48a^5b^8c^6}=2ab^2c\sqrt[4]{3ac^2};$$

$$\sqrt[6]{192a^7bc^{12}}=\sqrt[6]{64a^6c^{12}}\times\sqrt[6]{3ab}=2ac^2\sqrt[6]{3ab}.$$

163. Правило, доказанное въ § 155, доставляетъ другой родъ сокращенія.

Напр. дано выраженіе $\sqrt[6]{4a^2}$; въ слѣдствіе правила будетъ $\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{\sqrt{4a^2}}$; но количество подъ первымъ кореннымъ знакомъ есть полный квадратъ; извлекая квадратный корень, получимъ $\sqrt[6]{4a^2}=\sqrt[3]{2a}$.

Также, $\sqrt[4]{36a^2b^2}=\sqrt{\sqrt{36a^2b^2}}=\sqrt{6ab}$.

Вообще, $\sqrt[mn]{a^n}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[m]{a}$; то есть, если показатель корня есть кратное число n, и подкоренное количество полная $n^я$ степень, то *данная величина не перемѣнится, когда раздѣлимъ показателя корня на n, и извлечемъ корень $n^й$ степени изъ подкореннаго количества*.

Не менѣе важно обратное предложеніе, то есть, *показателя корня можно умножить на какое ни есть число, когда въ то же время возвысимъ подкоренное количество въ степень, означенную этимъ числомъ*. Напр. $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, a есть то же, что и $\sqrt[n]{a^n}$, слѣдовательно $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[mn]{a^n}$.

Посредствомъ этого правила различныя коренныя выраженія приводятся къ одному показателю корня.

Напримѣръ, даны $\sqrt[3]{2a}$ и $\sqrt[4]{(a+b)}$.

Умножимъ показателя перваго корня на показателя 2-го корня, 4, и возвысимъ количество $2a$ въ 4-ю степень; умножимъ также показателя 2-го корня на показателя перваго, 3, и возвысимъ $(a+b)$ въ кубъ: отъ этого величины данныхъ выраженій не перемѣнятся; сдѣлавъ это, получимъ

$$\sqrt[3]{2a}=\sqrt[12]{2^4a^4}=\sqrt[12]{16a^4},\ \sqrt[4]{a+b}=\sqrt[12]{(a+b)^3}.$$

Общее правило. *Для приведенія коренныхъ количествъ къ одному показателю корня, должно умножить показатель каждаго корня на произведеніе показателей прочихъ корней, и возвысить подкоренное количество въ степень, означенную этимъ произведеніемъ.*

Правило это весьма сходно съ приведеніемъ дробей къ одному знаменателю, и допускаетъ тѣ же сокращенія.

Напр. привесть къ одному показателю корня величины

$\sqrt[4]{a}$. $\sqrt[6]{5b}$ и $\sqrt[8]{(a^2+b^2)}$.

Числа 4, 6, 8, имѣютъ общіе множители, и 24 есть простѣйшее кратное ихъ; поэтому достаточно умножить первое на 6, второе на 4, третье на 3, и въ то же время возвысить подкоренныя количества въ $6^{ю}$, $4^{ю}$ и $3^{ю}$ степень, что даетъ

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt[24]{a^6},\ \sqrt[6]{5b}=\sqrt[24]{5^4b^4},\ \sqrt[8]{a^2+b^2}=\sqrt[24]{(a^2+b^2)^3}.$$

Теперь произведемъ надъ коренными величинами всѣ ариѳметическія дѣйствія, которыхъ будетъ *шесть*, включая въ то число составленіе степеней и извлеченіе корней.

164. *Сложеніе и вычитаніе* производится точно также, какъ показано въ § 90 для коренныхъ величинъ $2^{й}$ степени; то есть, когда коренныя величины *различны*, *то дѣйствія только означаютъ знакомъ + или —*; если же онѣ *подобны*, то *складываютъ или вычитаютъ предстоящія, и сумму или разность пишутъ предъ общимъ кореннымъ знакомъ.*

Напр. $3\sqrt[3]{b}+2\sqrt[3]{b}=5\sqrt[3]{b},\ 3\sqrt[3]{b}-2\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{b}.$

$$3a\sqrt[4]{b}\pm2c\sqrt[4]{b}=(3a\pm2c)\sqrt[4]{b}.$$

Посредствомъ преобразованій § 162 и 163 часто можно обращать различныя коренныя величины въ подобныя. Напримѣръ

$$\sqrt{48ab^2}+b\sqrt{75a}=4b\sqrt{3a}+5b\sqrt{3a}=9b\sqrt{3a};$$

$$\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{b^4+2ab^3}=2a\sqrt[3]{b+2a}-b\sqrt[3]{b+2a}$$
$$=(2a-b)\sqrt[3]{b+2a};$$

$$3\sqrt[6]{4a^2}+2\sqrt[3]{2a}=3\sqrt[3]{2a}+2\sqrt[3]{2a}=5\sqrt[3]{2a}.$$

165. *Умноженіе и дѣленіе.* Сначала положимъ, что показатели корней одинаковы.

Напр. $\sqrt[n]{a}$ умножить или раздѣлить на $\sqrt[n]{b}$

Будетъ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$, и $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Въ самомъ дѣлѣ, § 162, возвысимъ $\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{ab}$ въ $n^{ю}$ степень; для обоихъ получимъ ab; слѣд. эти два выраженія равны. Возвысивъ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ въ $n^{ю}$ степень, имѣемъ $\frac{a}{b}$; слѣдовательно и эти два выраженія равны.

При одинакихъ показателяхъ корня, умножаютъ или дѣлятъ подкоренныя количества одно на другое, и надъ выводомъ ставятъ общій коренный знакъ. Предстоящія умножаютъ или дѣлятъ отдѣльно. Напримѣръ

$$2a\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c}}\times-3a\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^2}{d}}=-6a^2\sqrt[3]{\frac{(a^2+b^2)^3}{cd}}=\frac{-6a^2(a^2+b^2).}{\sqrt[3]{cd}}$$

$$3a\sqrt[4]{8a^2}\times2b\sqrt[4]{4a^2c}=6ab\sqrt[4]{32a^4c}=12a^2b\sqrt[4]{2c};$$

$$\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}:\sqrt[3]{\frac{(a^2-b^2)}{8b}}=\sqrt[3]{\frac{8b(a^2b^2+b^4)}{a^2-b^2}}=2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}.$$

Если показатели корней различны, то сначала приводятъ корни къ одному показателю, § 163.

Напримѣръ, $3a\sqrt[6]{b}\times5b\sqrt[8]{2c}=15ab\sqrt[24]{8b^4c^3}$.

166. *Составленіе степеней и извлеченіе корней.* Возвысить $\sqrt[m]{a}$ въ $n^{ю}$ степень; имѣемъ

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \; . \; . \; . \; . = \sqrt[m]{a^n},$$

по правилу показанному при умноженіи.

Слѣд. *чтобъ возвысить коренную величину въ данную степень, должно возвысить въ эту степень подкоренное количество, оставляя надъ выводомъ прежній коренный знакъ.* Предстоящія отдѣльно возвышаются въ данную степень.

Напр. $(\sqrt[4]{4a^3})^2 = \sqrt[4]{(4a^3)^2} = \sqrt[4]{16a^6} = 2a\sqrt[4]{4a^2}$.

$$(3\sqrt[3]{2a})^5 = 3^5 \times \sqrt[3]{(2a)^5} = 243\sqrt[3]{32a^5} = 486a\sqrt[3]{4a^2}.$$

Когда показатель корня есть кратное показателя данной степени, можно дѣлать сокращенія.

Напр. возвысить $\sqrt{2a}$ въ квадратъ; замѣтимъ, § 155, что $\sqrt[4]{2a} = \sqrt{\sqrt{2a}}$; но чтобъ возвысить въ квадратъ послѣднее выраженіе, достаточно уничтожить первый коренный знакъ; и такъ будетъ $(\sqrt[4]{2a})^2 = \sqrt{2a}$.

Возвысить $\sqrt[6]{3b}$ въ квадратъ; это выраженіе приводится къ $\sqrt[3]{\sqrt{3b}}$; слѣд. $(\sqrt[6]{3b})^2 = \sqrt[3]{3b}$, то есть, *когда показатель корня дѣлится на показателя степени, достаточно произвесть это дѣленіе, чтобъ возвысить коренное количество въ данную степень.*

При извлеченіи корней, напротивъ того, умножаютъ показателя корня на данную степень; напримѣръ

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{3c^2}} = \sqrt[15]{3c^2}, \quad \sqrt[3]{\sqrt{7a}} = \sqrt[6]{7a};$$

это правило изложено въ § 155, но въ обратномъ порядкѣ. Поэтому можно иногда сократить выраженіе; напримѣръ

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3}}$, равное $\sqrt[4]{\sqrt[4]{8a^3}}$, § 155, приводится къ $\sqrt[4]{2a}$.

Также $$\sqrt[2]{\sqrt[5]{9a^2}} = \sqrt[5]{\sqrt[2]{9a^2}} = \sqrt[5]{3a}.$$

167. Правила, показанныя для вычисленія коренныхъ величинъ, преимущественно основываются на томъ, что $\sqrt[n]{}$

изъ произведенія нѣсколькихъ множителей, равенъ произведенію корней $n^{и}$ степени изъ этихъ множителей; а это правило доказывается тѣмъ, § 162, что два выраженія равны между собою, когда одинакія степени этихъ выраженій равны; но это послѣднее правило, вѣрное относительно ариѳметическихъ чиселъ, не всегда можно приложить къ алгебраическимъ выраженіямъ: мы покажемъ, что одно и то же алгебраическое число можетъ имѣть нѣсколько *квадратныхъ корней*, нѣсколько *кубичныхъ*, и т. д.

Пусть x означаетъ общее выраженіе квадратнаго корня изъ числа a, и p *численную* величину этого корня; имѣемъ уравненіе $x^2 = a$, или $x^2 = p^2$, откуда $x = \pm p$. Изъ этого слѣдуетъ: какой бы знакъ ни имѣла численная величина p квадратнаго корня изъ a, квадратъ ея всегда даетъ a, какъ показано въ § 85.

Во-вторыхъ, назовемъ x общее выраженіе кубичнаго корня числа a, и p численную величину корня; имѣемъ уравненіе $x^3 = a$, или $x^3 = p^3$.

Этому уравненію удовлетворяетъ величина $x = p$. Притомъ $x^3 = p^3$ можно представить въ видѣ $x^3 - p^3 = 0$; но, § 31, $x^3 - p^3$ дѣлится на $x - p$, и даетъ въ частномъ $x^2 + px + p^2$; слѣд. уравненіе $x^3 - p^3 = 0$ приметъ видъ

$$(x - p)(x^2 + px + p^2) = 0;$$

этому уравненію можно удовлетворить, полагая:

или $\quad x - p = 0$, откуда $x = p$;

или $\quad x^2 + px + p^2 = 0$, откуда $x = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{-3}$,

которое напишемъ въ видѣ $\quad x = p\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$.

Слѣд. *кубичный корень числа a допускаетъ три различныя алгебраическія величины*:

$$p,\ p\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right),\ p\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right).$$

Рѣшить уравненіе $x^4 = a$ или $x^4 = p^4$, (p выражаетъ численную величину количества $\sqrt[4]{a}$). Этому уравненію можно дать видъ $x^4 - p^4 = 0$. Но $x^4 - p^4 = (x^2 - p^2)(x^2 + p^2)$, § 19, слѣд. получимъ уравненіе $(x^2 - p^2)(x^2 + p^2) = 0$, которое удовлетворяется, полагая, или

$$x^2 - p^2 = 0, \text{ откуда } x = \pm p,$$

или $\quad x^2 + p^2 = 0$, откуда $x = \pm\sqrt{-p^2} = \pm p\sqrt{-1}$.

И такъ, для корня 4-й степени изъ a получимъ четыре *различныя алгебраическія* выраженія.

Возьмемъ уравненіе $x^6 = p^6$, или $x^6 - p^6 = 0$.

Но $x^6 - p^6 = (x^3 - p^3)(x^3 + p^3)$, и уравненіе обратится въ $(x^3 - p^3)(x^3 + p^3) = 0$.

Изъ уравненія $x^3 - p^3 = 0$ мы имѣли

$$x = p, \text{ и } x = p\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right).$$

Разсмотримъ теперь уравненіе $x^3 + p^3 = 0$. Вставивъ временно $-p'$ вмѣсто p, оно будетъ $x^3 - p'^3 = 0$, откуда $x = p'$ и $x = p'\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$; или, вставивъ вмѣсто p' его величину $-p$,

$$x = -p \text{ и } x = -p\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right).$$

И такъ уравненіе $x^6 - p^6 = 0$, а посему и корень 6-й степени изъ a, допускаетъ *шесть* величинъ: p, αp, $\alpha' p$, $-p$, $-\alpha p$, $-\alpha' p$, полагая для краткости

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ \alpha' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Можно заключить по аналогіи (въ послѣдствіи это будетъ доказано), что всякое уравненіе вида $x^m - a = 0$, или $x^m - p^m = 0$, доставляетъ m различныхъ рѣшеній, то есть, корень m-й степени изъ какого ни есть числа, имѣетъ *m различныхъ алгебраическихъ величинъ*.

168. *Замѣчаніе первое.* Въ предъидущихъ уравненіяхъ, и выводахъ ихъ, положимъ $a = 1$, откуда и $p = 1$: получимъ корни 2-й, 3-й, 4-й,..., степени изъ единицы. И такъ $+1$ и -1 суть два *квадратные корня единицы*, потому что уравненіе $x^2 - 1 = 0$ даетъ $x = \pm 1$.

Также, $+1$, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, суть три кубичные корня единицы, или корни изъ $x^3 - 1 = 0$.

$+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, суть четыре корня 4-й степени изъ единицы, или уравненія $x^4 - 1 = 0$.

169. *Замѣчаніе второе.* Въ уравненіи $x^m + a = 0$, назовемъ p численную величину корня m-й степени изъ a; уравненіе перемѣнится въ

$$x^m \mp p^m = 0\,;$$

положивъ $x = py$, гдѣ y новая неизвѣстная, получимъ $p^m y^m \mp p^m = 0$, и раздѣливъ на p^m, $y^m \mp 1 = 0$.

Это показываетъ, что по извѣстнымъ величинамъ $\sqrt[m]{1}$ или $\sqrt[m]{-1}$, можно опредѣлить величины $\sqrt[m]{a}$ или $\sqrt[m]{-a}$, умножая p на различные корни $m^{й}$ степени изъ $+1$ или -1.

170. Изъ предъидущаго разбора слѣдуетъ, что правила вычисленія коренныхъ величинъ, справедливыя относительно ариѳметическихъ чиселъ, допускаютъ нѣкоторыя *измѣненія*, когда дѣйствія производятся надъ *знаками* или *выраженіями алгебраическими*; въ особенности въ приложеніи этихъ правилъ къ *мнимымъ выраженіямъ*, измѣненія необходимы, и естественно слѣдуютъ изъ сказаннаго въ § 167.

Напримѣръ, умножить $\sqrt{-a}$ на $\sqrt{-a}$; по правилу § 74,

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{+a^2}=\pm a.$$

Эта двоякая величина вѣрна, пока въ выраженіи $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ обѣ коренныя величины допускаютъ двойной знакъ $\pm$; но предположивъ, что онѣ имѣютъ одинакіе знаки, выраженіе $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ приводится къ $(\sqrt{-a})^2$; а какъ для возвышенія $\sqrt{m}$ въ квадратъ достаточно уничтожить коренный знакъ, то необходимо получимъ $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$.

Составить произведеніе $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$.

По правилу § 165 имѣли бы $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{+ab}$, которое равно $\pm p$, § 167, означая буквою p численную величину квадратнаго корня изъ ab; въ сущности же въ выводѣ получимъ $-p$ или $-\sqrt{ab}$, когда положимъ, что предъ количествмми $\sqrt{-a}$ и $\sqrt{-b}$ находится знакъ $+$; потому что
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}$ и $\sqrt{-b}=\sqrt{b}.\sqrt{-1}$; слѣдовательно

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{b}.\sqrt{-1}=\sqrt{ab}.(\sqrt{-1})^2$$
$$=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

По этимъ правиламъ найдемъ для различныхъ степеней корня изъ -1,

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^2=\quad-1;$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2=-1\times-1=+1.$$

Послѣдующія четыре степени получатся умноженіемъ четвертой, $+1$, на 1-ю, на 2-ю, 3-ю и 4-ю степени и тогда найдемъ также: $+\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$. Вообще всѣ степени $\sqrt{-1}$ составляютъ періодъ изъ четырехъ членовъ.

Опредѣлить произведеніе $\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}$, которое по правилу было бы $\sqrt[4]{+ab}$, и дало бы четыре величины

$$+\sqrt[4]{ab}, -\sqrt[4]{ab}, +\sqrt[4]{ab}.\sqrt{-1}, -\sqrt[4]{ab}.\sqrt[4]{-1}, \S\ 167.$$

Чтобъ опредѣлить истинное произведеніе, замѣтимъ, что

$$\sqrt[4]{-a}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{-1},\ \sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{b}\times\sqrt[4]{-1},$$

но $$\sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{-1}=(\sqrt[4]{-1})^2=(\sqrt{\sqrt{-1}})^2=\sqrt{-1};$$

слѣд. $$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\ .\ \sqrt{-1}.$$

Приложимъ эти вычисленія къ повѣркѣ выраженія $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, корня уравненія $x^3-1=0$, то есть, *кубичнаго корня* единицы, § 168.

По формулѣ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, имѣемъ

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3=\frac{(-1)^3+3(-1)^2.\sqrt{-3}+3(-1).(\sqrt{-3})^2+(\sqrt{-3})^3}{8}$$

$$=\frac{-1+3\sqrt{-3}-3\times-3-3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

Такимъ же образомъ повѣрили бъ и вторую величину,

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

IV. ТЕОРІЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ. ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ О СТРОКАХЪ.

171. Теперь покажемъ два новые алгебраическіе знаки, весьма выгодные въ вычисленіяхъ, именно: дробные и отрицательные показатели; они выведены изъ правила извлеченія корней и раздѣленія одночленныхъ количествъ.

Напримѣръ, извлечь $\sqrt[n]{\ }$ изъ количества a^m. Когда m кратное числа n, § 158, должно раздѣлить показателя m на показателя n корня; но если m не дѣлится на n, и слѣд. алгебраическое извлеченіе корня невозможно, то можно согласиться обозначить это дѣйствіе дѣленіемъ показателей.

Поэтому будетъ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, по условію, основанному на правилѣ показателей при извлеченіи корней изъ одночленовъ.

И такъ $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[4]{a^7} = a^{\frac{7}{4}}$.

Раздѣлить a^m на a^n. Если $m > n$, § 23, должно вычесть показателя дѣлителя изъ показателя дѣлимаго, что̀ даетъ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; но если $m < n$, и слѣд. алгебраическое дѣленіе невозможно, то можно условиться обозначать дѣйствіе и въ этомъ случаѣ вычитаніемъ показателей. Положимъ, численная разность между n и m равна p; тогда $n = m + p$ и $\frac{a^m}{a^{m+p}} = a^{-p}$; притомъ, $\frac{a^m}{a^{m+p}}$ уничтоженіемъ общаго множителя a^m приводится къ $\frac{1}{a^p}$. Слѣд. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

И такъ, *выраженіе* a^{-p} показываетъ невозможность выполнить дѣленіе; истинная же величина его есть *частное отъ раздѣленія единицы на эту же букву* a, *съ положительнымъ показателемъ* p; напримѣръ

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, \quad a^{-5} = \frac{1}{a^5}.$$

Обозначеніе отрицательнаго показателя выгодно потому, что дробныя выраженія представляются въ видѣ цѣлыхъ.

Изъ соединенія извлеченія корня съ дѣленіемъ, которыхъ нельзя произвесть надъ одночленомъ, произошелъ новый родъ обозначенія: *дробный отрицательный показатель*. Напримѣръ:

Извлечь $\sqrt[n]{}$ *изъ* $\frac{1}{a^m}$. Количество $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$,

слѣдовательно $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{n}}$,

замѣняя коренный знакъ дробнымъ показателемъ.

И такъ, выраженія $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-p}, $a^{-\frac{m}{n}}$, въ слѣдствіе *условій основанныхъ на предъидущихъ правилахъ*, суть тоже что и $\sqrt[n]{a^m}$, $\frac{1}{a^p}$, $\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$, и смотря по обстоятельствамъ, можно употреблять тотъ или другой способъ изображенія.

Количества $a^{\frac{m}{n}}$, a^{-p}, $a^{-\frac{m}{n}}$, обыкновенно выговариваютъся: *а въ степени* $\frac{m}{n}$, *а* въ степени $-p$, *а* въ степени $-\frac{m}{n}$; но лучше было бы говорить: *а* показатель $\frac{m}{n}$, *а* показатель $-p$ и такъ далѣе, употребляя слово: *степень*, только для означенія произведенія изъ равныхъ множителей.

172. Докажемъ теперь, что вычисленіе количествъ съ дробными и отрицательными показателями, производится по правиламъ вычисленія количествъ, имѣющихъ цѣлые и положительные показатели.

Умноженіе. *Умножить* $a^{\frac{3}{5}}$ на $a^{\frac{2}{3}}$. Достаточно сложить показатели; потому что, § 171, $a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}$, $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$; слѣд. $a^{\frac{3}{5}}\times a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[15]{a^{19}}=a^{\frac{19}{15}}$, § 165.

Умножить $a^{-\frac{3}{4}}$ на $a^{\frac{5}{6}}$; будетъ

$$a^{-\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{6}}=a^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}=a^{-\frac{9}{12}+\frac{10}{12}}=a^{\frac{1}{12}};$$

въ самомъ дѣлѣ, $a^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}$, $a^{5}=\sqrt[6]{a^5}$; слѣдовательно

$$\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}\times\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[12]{\frac{1}{a^9}}\times\sqrt[12]{a^{10}}=\sqrt[12]{\frac{a^{10}}{a^9}}=\sqrt[12]{a}=a^{\frac{1}{12}}$$

Вообще, умножить $a^{-\frac{m}{n}}$ на $a^{\frac{r}{s}}$;

имѣемъ $$a^{-\frac{m}{n}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{-\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}=a^{\frac{nr-ms}{ns}};$$

потому что $a^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$, $a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}$; слѣдовательно

$$a^{-\frac{m}{n}}\times a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}\times\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[ns]{\frac{a^{nr}}{n^{m}s}}=\sqrt[ns]{a^{nr-ms}}=a^{\frac{nr-ms}{ns}}.$$

Вообще, чтобъ умножить между собою два одночлена съ какими ни есть показателями, должно *сложить показатели одинакихъ буквъ*; это правило уже найдено въ § 16, для количествъ, имѣющихъ цѣлые и положительные показатели. Примѣры:

$$a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{2}}c^{-1}\times a^2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{11}{4}}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{2}{5}}$$
$$3a^{-2}b^{\frac{2}{3}}\times 2a^{-\frac{4}{5}}b^{\frac{1}{2}}c^2=6a^{-\frac{14}{5}}b^{\frac{7}{6}}c^2.$$

Дѣленіе. При раздѣленіи одночленовъ съ дробными или отрицательными показателями, должно, также какъ при количествахъ съ цѣлыми и положительными показателями, § 22, *показателя буквы въ дѣлителѣ, вычесть изъ показателя той же буквы въ дѣлимомъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ частномъ каждая буква должна имѣть такого показателя, что приложивъ къ нему показателя той же буквы въ дѣлителѣ, сумма равнялась бы показателю въ дѣлимомъ; слѣд. показатель частнаго равенъ разности показателей дѣлимаго и дѣлителя. По этому правилу получимъ,

$$a^{\frac{2}{3}}:a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=a^{\frac{17}{12}};$$

$$a^{\frac{3}{4}}:a^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}=a^{-\frac{1}{20}};\quad a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}};$$

$$a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{4}}:a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{8}}=a^{\frac{9}{10}}b^{-\frac{1}{8}}.$$

Составленіе степеней. Чтобъ возвысить въ m-ю степень одночленъ съ какими ни есть показателями, должно, § 158, *умножить показателя каждой буквы на показателя m степени.*

Напримѣръ, $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^5=a^{\frac{15}{4}}$, $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3=a^{\frac{6}{3}}=a^2$;

$$\left(2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^6=64a^{-3}b^{\frac{9}{2}},\qquad \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{12}=a^{-10}.$$

Извлеченіе корней. Чтобъ извлечь $\sqrt[n]{}$ изъ одночлена, по правилу § 158 *показатели буквъ дѣлятся на показателя n корня.*

Показатель буквы въ выводѣ, умноженный на показателя n извлекаемаго корня, долженъ равняться показателю этой буквы въ данномъ одночленѣ; поэтому въ выводѣ показатель долженъ равняться частному отъ раздѣленія даннаго показателя буквы, на показателя n корня.

Напримѣръ $\sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{9}}$; $\sqrt[4]{a^{-\frac{8}{11}}}=a^{\frac{2}{11}}$; $\sqrt[2]{a^{-\frac{3}{4}}}=a^{-\frac{3}{8}}$;

$$\sqrt[3]{a^{\frac{3}{5}}b^{-2}}=a^{\frac{1}{5}}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Послѣднія три правила мы вывели изъ правила умноженія; можно также доказать ихъ, основываясь на происхожденіи количествъ съ дробными и отрицательными показателями.

Мы окончимъ дѣйствіемъ, котораго доказательство можно также отнести къ двумъ предъидущимъ дѣйствіямъ.

Возвысить $a^{\frac{m}{n}}$ въ степень $-\frac{r}{s}$; надобно доказать, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{m}{n}\times-\frac{r}{s}}=a^{-\frac{mr}{ns}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, обращаясь къ происхожденію сихъ значеній, найдемъ, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{\frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r}}=\sqrt[s]{\frac{1}{(\sqrt[n]{a^m})^r}}=\sqrt[s]{\frac{1}{\sqrt[n]{a^{mr}}}}$$

$$=\sqrt[s]{\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mr}}}}=\sqrt[ns]{a^{-mr}}=a^{-\frac{mr}{ms}}.$$

Главная выгода этихъ показателей состоитъ въ томъ, что вычисленіе подобныхъ выраженій производится по тѣмъ же правиламъ, какъ вычисленія количествъ съ цѣлыми показателями. Сверхъ того эти вычисленія приводятся къ простымъ дѣйствіямъ надъ дробными числами, которыя намъ уже извѣстны.

173. *Примѣчаніе.* Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ въ послѣдствіи приведетъ насъ къ разсмотрѣнію количествъ съ *несоизмѣримыми показателями*. Казалось бы, что правила, выведенныя для соизмѣримыхъ показателей, слѣдовало бы особо доказать для несоизмѣримыхъ; но замѣтимъ, что несоизмѣримое число, напр. $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, хотя и состоитъ изъ цѣлой части и дроби, которую нельзя выразить точно, но къ ней можно *приближаться* сколько угодно; поэтому, вмѣсто несоизмѣримаго числа всегда можно разсматривать такое дробное число, котораго разность съ числомъ несоизмѣримымъ, менѣе всякой данной величины; прилагая же правила къ знаку, выражающему несоизмѣримое число, должно подразумѣвать, что эти правила прилагаются къ дробному числу, которое приблизительно представляетъ величину несоизмѣримую.

И такъ можемъ заключить, что предъидущія правила прилагаются къ несоизмѣримымъ показателямъ; они распространены даже и на мнимые показатели.

Приложеніе формулы двучлена къ извлеченію корней по приближенію.

174. Какъ правила вычисленія цѣлыхъ и положительныхъ показателей распространены на вычисленіе какихъ ни есть показателей, то можно полагать, что и формулу двучлена, которою опредѣляется m-я степень двучлена при m цѣломъ и положительномъ, можно также употреблять при m дробномъ, положительномъ или отрицательномъ. Это въ самомъ дѣлѣ доказано, и потомъ выведены слѣдствія весьма важныя, какъ *для извлеченія корней по приближенію, такъ и для разложенія въ строку алгебраическихъ выраженій.*

Доказательство этой формулы въ случаѣ какихъ ни есть показателей, помѣщено въ § 182; теперь же мы покажемъ употребленіе этой формулы для опредѣленія приблизительной величины корней. Но прежде надобно преобразовать эту формулу.

Въ $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + \ldots..,$ освободимъ во 2-й части множитель x^m; будетъ

$$(x+a)^m = x^m(1+m).\frac{a}{x}+m\frac{m-1}{2}.\frac{a^2}{x^2}+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{a^3}{x^3}+.);$$

или, полагая $m=\frac{1}{n}$, $(x+a)^{\frac{1}{n}}$ или $\sqrt[n]{x+a}=$

$$x^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}.\frac{a}{x}+\frac{1}{n}.\frac{\frac{1}{n}-1}{2}.\frac{a^2}{x^2}+\frac{1}{n}.\frac{\frac{1}{n}-1}{2}.\frac{\frac{1}{n}-2}{3}.\frac{a^3}{x^3}+\ldots\right)$$

$$=x^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}.\frac{a}{x}+\frac{1}{n}.\frac{n-1}{2}.\frac{a^2}{x^2}+\frac{1}{n}.\frac{n-1}{2n}.\frac{2n-1}{3n}.\frac{a^3}{x^3}+\right) \quad [1]$$

(Для составленія новаго члена, достаточно умножить четвертый членъ на $\frac{3n-1}{4n}$ и на $\frac{a}{x}$, потомъ перемѣнить знакъ, и такъ далѣе.)

175. Извлечь кубичный корень изъ 31. Наибольшій кубъ въ числѣ 31 есть 27; поэтому въ формулѣ [1] положимъ $n=3$, $x=27$ и $a=4$, что̀ даетъ

$$\sqrt[3]{31}=\sqrt[3]{27+4}=27^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{4}{27}\right)^{\frac{1}{3}};$$ будетъ

$$\sqrt[3]{31}=3\left(1+\frac{1}{3}.\frac{4}{27}-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{16}{729}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{5}{9}.\frac{64}{19683}-.\right);$$

или $$\sqrt[3]{31}=3+\frac{4}{27}-\frac{61}{2187}+\frac{320}{531441}-\ldots.$$

Пятый членъ получится умноженіемъ $\frac{320}{531441}$ на $\frac{3n-1}{4}$ $\times\frac{a}{x}$, или на $\frac{2}{3}\times\frac{4}{27}$, съ перемѣною знака въ произведеніи, что̀ даетъ $-\frac{2560}{43046721}$.

Для шестаго члена, имѣли бы

$$+\frac{2560}{43046721}\cdot\frac{4n-1}{5n}\cdot\frac{a}{x}=\frac{2560}{43046721}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{4}{27}=\frac{112640}{17433922005},$$

и такъ далѣе. Возьмемъ только пять первыхъ членовъ строки, и обратимъ ихъ въ десятичныя; получимъ

$$\begin{array}{rl} 3 & =3{,}00000 \\ \frac{4}{27} & =0{,}14815 \\ \frac{320}{531441} & =0{,}00060 \\ & \overline{3{,}14875} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} -\frac{16}{2187} & =-0{,}00731 \\ -\frac{2560}{43046721} & =-0{,}00006 \\ & \overline{-0{,}00737} \\ & +3{,}14875 \\ & \overline{3{,}14138} \end{array}$$

Слѣд. $\sqrt[3]{31}=3{,}14138$, и мы докажемъ, что въ этомъ выводѣ погрѣшность менѣе 0,00001.

176. *Примѣчаніе.* Когда выраженіе какого либо числа представлено рядомъ членовъ, въ которыхъ численная величина уменьшается до безконечности, то чѣмъ болѣе возьмемъ членовъ въ строкѣ, тѣмъ болѣе приблизимся къ истинной величинѣ даннаго числа. Если сверхъ того члены *поперемѣнно будутъ положительными и отрицательными*, то, остановясь на какомъ либо членѣ, можно съ точностію опредѣлить *степень полученнаго приближенія*.

Возьмемъ неопредѣленный рядъ членовъ . . . . $a-b+c-d+e-f+\ldots$, гдѣ a, b, c, d, . . . , независимыя, безпрерывно уменьшающіяся количества. Назовемъ x число, представляемое этою строкою: тогда численная величина x будетъ заключаться между двумя послѣдовательными суммами строки. Возьмемъ на удачу двѣ послѣдовательныя суммы $a-b+c-d+e-f$, $a-b+c-d+e-f+g$; въ 1-й послѣ $-f$ слѣдуютъ члены $+\overline{g-h}+\overline{k-l}+\ldots$; но разности $g-h$, $k-l$ суть числа положительныя, потому ьто члены строки уменьшаются, слѣд. чтобы получить полную величину x, къ суммѣ $a-b+c-d+e-f$ должно прибавить извѣстное положительное число. И такъ, имѣемъ уже $a - b + c - d + e - f < x$.

Во 2-й, послѣ $+ g$ слѣдуютъ члены $- h + k - l + m - \ldots$; но разности $- h + k$, $- l + m$, .. суть отрицательныя; слѣд. чтобъ получить истинную величину x, къ суммѣ $a - b + c - d + e - f + g$ должно прибавить количество отрицательное, то есть, уменьшить эту сумму. И такъ, имѣемъ

$$a - b + c - d + e - f + g > x.$$

Слѣд. *x заключается между этими двумя суммами.*

Слѣдствіе. Численная разность этихъ двухъ суммъ очевидно равна g; *слѣд. когда для величины x возьмемъ извѣстное число членовъ $a - b + c - d + e - f$, то численная погрѣшность меньше послѣдующаго члена строки.* Въ примѣрѣ § 175, гдѣ всѣ члены попеременно были положительные и отрицательные и постепенно уменьшались, численная величина первыхъ пяти членовъ

$$3 + \frac{4}{27} - \frac{16}{2187} + \frac{320}{531441} - \frac{2560}{43046721},$$

несходна съ истинною величиною выраженія $\sqrt[3]{31}$ менѣе чѣмъ на величину 6-го члена, равнаго $\frac{112640}{17433922005}$; но эта дробь менѣе $\frac{1}{100000}$; слѣд. $\sqrt[3]{31} = 3,14138$ вѣрно до 0,00001. Можно повѣрить это по способу показанному въ § 165; но вычисленія будутъ продолжительнѣе.

177. Вообще, чтобы приблизительно извлечь корень $n^{й}$ степени изъ числа N, помощію строкъ, *разлагаютъ число* N *на двѣ части;* $p^n + q$, *гдѣ p цѣлая часть корня изъ* N, § 153, *и въ выраженіи* $\sqrt{x + a}$, § 175, *полагаютъ* $x = p^n$, $a = q$. *Потомъ производятъ вычисленія, и останавливаются у того члена, который съ вида меньше десятичной дроби, опредѣляющей степень приближенія; наконецъ, обращаютъ всѣ вычисленные члены въ десятичную дробь, и соединяютъ слагаемые и вычитаемые члены.*

Этотъ способъ выгоденъ въ томъ только случаѣ, когда $\frac{q}{p^n}$ довольно малая дробь; въ противномъ случаѣ члены строки медленно уменьшаются, и чтобъ дойти до требуемой степени приближенія, должно вычислять множество членовъ.

Когда $p^n < q$, то надобно даже нѣсколько измѣнить этотъ способъ; потому что тогда $\frac{a}{x}$ или $\frac{q}{p^n}$ больше 1, также какъ и слѣдующія степени $\frac{a}{x}$, которыя численно безпрестанно увеличиваются, по мѣрѣ увеличенія показателей.

Напримѣръ, *извлечь кубичный корень изъ* 56; наибольшій кубъ въ этомъ числѣ есть 27; слѣд. будетъ

$$x = 27,\ a = 29;\ \text{откуда}\ \frac{a}{x} = \frac{29}{27},$$

и члены строки не будутъ уменьшаться, но увеличиваться (мы не говоримъ о предстоящихъ, которыя суть дроби мало различающіяся отъ единицы). Но 56 можно также разложить на 64—8 или 4^3—8; тогда $\frac{8}{64}$ или $\frac{1}{8}$ весьма малая дробь. Если же въ выраженіи $\sqrt[n]{(x + a)}$, § 174, вмѣсто a поставимъ $-a$, будетъ

$$\sqrt[n]{x - a} = x^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{a}{x} - \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{3n}\cdot\frac{a^3}{x^3}\cdot\cdot\right)$$

И такъ, полагая $x = 64$, $a = 8$, получимъ рядъ членовъ, которые быстро уменьшаются.

Въ этой строкѣ всѣ члены отрицательные, исключая перваго, и поэтому нельзя опредѣлить степень приближенія, получаемую при извѣстной суммѣ членовъ, § 176; но тогда можно взять столько членовъ, что совокупность остальныхъ членовъ не можетъ имѣть вліянія на десятичную дробь, до которой намѣрены довести приближеніе.

Примѣры:

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{32 + 7} = 2{,}0807 \text{ до } 0{,}0001;$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64 + 1} = 4{,}02073 \text{ до } 0{,}00001;$$

$$\sqrt[4]{260} = \sqrt[4]{256 + 4} = 4{,}01553 \text{ до } 0{,}00001;$$

$$\sqrt[7]{108} = \sqrt[7]{128 - 20} = 1{,}95204 \text{ до } 0{,}00001.$$

178. Посредствомъ формулы двучлена можно также разлагать въ строку алгебраическія выраженія.

Напр. *дано выраженіе* $\frac{1}{1-z}$; имѣемъ $\frac{1}{1-z} = (-z)^{-1}$.

Въ формулѣ $(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + \ldots\ldots$ положимъ $x = 1$, $a = -z$, $m = -1$; будетъ

$$(1-z)^{-1}=1-1.(-z)-1.\frac{-1-1}{2}.(-z)^2-1.\frac{-1-1}{2}.\frac{-1-2}{3}.(-z)^3..$$

или, произведя вычисленія и замѣтивъ, что каждый членъ состоитъ изъ четнаго числа множителей съ знакомъ —,

$$(1-z)^{-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\ldots$$

Тотъ же выводъ получили бы посредствомъ алгебраическаго дѣленія 1 на $1-z$, § 26.

Возьмемъ выраженіе $\frac{2}{(1-z)^3}$ или $2(1-z)^{-3}$; получимъ

$$2[1-3.(-z)-3.\frac{-3-1}{2}.(-z)^2-3.\frac{-3-1}{2}.\frac{-3-2}{2}.(-z)^3-\ldots\ldots$$

или, по сокращеніи,

$$2(1-z)^{-3}=2(1+3z+6z^2+10z^3+15z^4+\ldots).$$

Дано количество $\sqrt[3]{2z-z^2}$ или $\sqrt[3]{2z}\times\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Положивъ въ формулѣ $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\ldots$ $x=1$, $a=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{3}$, имѣемъ

$$\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot\left(-\frac{z}{2}\right)^2+\ldots.$$

$$=1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2-\frac{5}{648}z^3-\ldots.;$$

и такъ, $\sqrt[3]{2z-z^2}=\sqrt[3]{2z}\left(1-\frac{1}{6}z-\frac{1}{36}z^2-\frac{5}{648}z^3-\ldots\right)$.

Способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ. Возвратныя строки.

179. Алгебраическія выраженія разлагаются также въ строку другимъ способомъ, который проще прежняго, и притомъ прилагается ко всѣмъ алгебраическимъ выраженіямъ безъ исключенія.

Чтобъ дать понятіе объ этомъ способѣ, разложимъ выраженіе $\frac{a}{a'+b'x}$ въ строку по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ x. Это очевидно возможно; потому что $\frac{a}{a'+b'x}$ приводится къ $a(a'+b'x)^{-1}$, и прилагая формулу двучлена, получимъ рядъ членовъ, расположенныхъ по восходящимъ цѣлымъ и положительнымъ степенямъ x. И такъ положимъ

$$\frac{a}{a'+b'x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+..[1],$$

гдѣ A, B, C, D,... предстоящія, въ функціи отъ a, a', b', но независимыя отъ x; эти самыя предстоящія должно опредѣлить, и потому ихъ называютъ *неопредѣленными предстоящими*; (лучше было бы назвать ихъ *опредѣляемыми предстоящими*; но мы будемъ придерживаться къ общепринятому названію).

Для опредѣленія этихъ предстоящихъ, умножимъ обѣ части уравненія [1] на $a'+b'x$; располагая строку по степенямъ x и перенося a, получимъ

$$0=\left[\begin{array}{l|l|l|l|l} Aa'+Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots \\ -a+Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \end{array}\right]\ldots[2].$$

Если величины A, B, C, D, . . . будутъ опредѣлены, то уравнаніе [1], поэтому и уравненіе [2], должно удовлетворяться при всѣхъ величинахъ x. Но полагая $x=0$, уравненіе [2] приводится къ $0=Aa'-a$, откуда получимъ... $A=\frac{a}{a'}$.

Предстоящее A, равное $\frac{a}{a'}$ при $x=0$, должно сохранить ту же величину при всякой величинѣ x, потому что A, по положенію, независимо отъ x; и такъ, при всякой величинѣ x уравненіе [2] приводится къ

$$0=\left[\begin{array}{r|l|l|l} Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+\ldots. \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' & \end{array}\right],$$ и раздѣляя на x,

$$0=\left[\begin{array}{r|l|l|l} Ba' & +Ca' & x+Da' & x^2+\ldots \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' & \end{array}\right],\ldots[3].$$

Это уравненіе также должно удовлетворяться всѣми величинами x; положивъ $x=0$, получимъ

$Ba'+Ab'=0$, откуда $B=-\frac{Ab'}{a'}=\frac{a}{a'}\times-\frac{b'}{a'}=-\frac{ab'}{a'^2}$.

Какъ величина B должна быть постоянною при всѣхъ величинахъ x, то откинемъ въ уравненіи [3] членъ $Ba'+Ab'$, который уничтожается при этой величинѣ B, и раздѣлимъ уравненіе на x; будетъ

$$0=\left[\begin{array}{r|l|l} Ca'+Da' & x+Ea' & x^2+\ldots. \\ +Bb'+Cb' & +Db' & \end{array}\right].$$

Полагая снова $x=0$, получаемъ $Ca'+Bb'=0$, откуда $C=-\frac{Bb'}{a'}$, или $C=-\frac{ab'}{a'^2}\times-\frac{b'}{a'}=\frac{ab'^2}{a'^3}$.

Такимъ же образомъ найдемъ $Da'+Cb'=0$, откуда $D=-\frac{Cb'}{a'}=\frac{ab'^2}{a'^3}\times-\frac{b'}{a'}=-\frac{ab'^3}{a'^4}$; и такъ далѣе.

Легко замѣтить, что каждое предстоящее составляется умноженіемъ предъидущаго предстоящаго на $-\frac{b'}{a'}$; и такъ имѣемъ

$$\frac{a}{a'+b'x}=\frac{a}{a'}-\frac{ab'}{a'^2}x+\frac{ab'^2}{a'^3}x^2-\frac{ab'^3}{a'^4}x^3+\frac{ab'^4}{a'^5}x^4-\ldots$$

180. Изъ сего слѣдуетъ, что основное правило способа неопредѣленныхъ предстоящихъ состоитъ въ слѣдующемъ: *чтобъ уравненіе вида* $0=\mathrm{M}+\mathrm{N}x+\mathrm{P}x^2+\mathrm{Q}x^3+\ldots$, (M, N, Q, . . . , предстоящіе независимые отъ x), *удовлетворялось всѣми величинами* x, *каждое предстоящее отдѣльно должно равняться* 0.

Въ самомъ дѣлѣ, эти предстоящіе независимы отъ x, и потому, когда опредѣлимъ величины ихъ по какимъ либо частнымъ значеніямъ, взятымъ для x, то эти величины также будутъ приличествовать имъ при какой либо величинѣ x. Но положивъ $x=0$, находимъ $\mathrm{M}=0$, и, раздѣливъ уравненіе на x, оно обратится въ

$$0=\mathrm{N}+\mathrm{P}x+\mathrm{Q}x^2+\ldots.;$$

положивъ и въ этомъ уравненіи $x=0$, находимъ $\mathrm{N}=0$, и уравненіе, по раздѣленіи на x, приводится къ $0=\mathrm{P}+\mathrm{Q}x+\ldots$, и такъ далѣе. Поэтому имѣемъ отдѣльно $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$, . . . ; такимъ образомъ получится столько уравненій, сколько требуется опредѣлить предстоящихъ A, B, C, D, ...

Правило это можно изложить иначе: *Если уравненіе вида*

$$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots.=a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots.$$

удовлетворяется при всѣхъ величинахъ x, *то члены одинакихъ степеней въ обѣихъ частяхъ взаимно равны;* потому что по перенесеніи всѣхъ членовъ во 2-ю часть, видъ уравненія не перемѣняется, а изъ этого заключаемъ, что

$$a-a'=0,\ b-b'=0,\ c-c'=0\ \ldots.;$$

слѣд. $a'=a,\ b'=b,\ c'=c,\ d'=d.\ \ldots..$

Уравненіе, въ которомъ всѣ члены расположены по степенямъ одной буквы, и которое удовлетворяется всѣми величинами взятыми для сей буквы, называется *уравненіемъ тождественнымъ*, § 42, для отличія отъ *обыкновеннаго уравненія*, т. е. уравненія, которое удовлетворяется только извѣстными величинами этой буквы.

181. Въ способѣ *неопредѣленныхъ предстоящихъ* должно знать предварительно видъ строки относительно показателей буквы x. Обыкновенно предполагаютъ, что строка расположена по восходящимъ и положительнымъ степенямъ x, начиная отъ x^0; но это не всегда допускается, и вычисленія показываютъ, въ какихъ случаяхъ надобно измѣнить видъ строки.

Напр. *разложить въ строку выраженіе* $\frac{1}{3x-x^2}$.

Положимъ $\frac{1}{3x-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$; по уничтоженіи знаменателей, имѣемъ

$$0 = -1 + 3Ax + \left.\begin{matrix}3B\\-A\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}3C\\-B\end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix}3D\\-C\end{matrix}\right| x^4 + \ldots\ldots,$$

изъ этого могли бы заключить, § 189, что

$$-1 = 0,\ 3A = 0,\ 3B - A = 0,\ \ldots.$$

Но первое уравненіе, $-1 = 0$, нелѣпо и показываетъ, что этотъ видъ строки несроденъ выраженію $\frac{1}{3x-x^2}$; если же этому выраженію дадимъ видъ $\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x}$, и положимъ

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{3-x} = \frac{1}{x}(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots),$$

тогда по сокращеніи получимъ

$$0 = \begin{matrix}3A\\-1\end{matrix} + \left.\begin{matrix}3B\\-A\end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix}3C\\-B\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}3D\\-C\end{matrix}\right| x^3 + \ldots\ldots,$$

что даетъ уравненія

$$3A - 1 = 0,\ 3B - A = 0,\ 3C - B = 0,\ \ldots\ldots,$$

откуда $A = \frac{1}{3},\ B = \frac{1}{9},\ C = \frac{1}{27},\ D = \frac{1}{81},\ \ldots\ldots$

И такъ, $\frac{1}{3x-x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x^2 + \frac{1}{81}x^3 + \ldots\right)$,

или $\frac{1}{3x-x^2} = \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{9}x^0 + \frac{1}{27}x + \frac{1}{81}x^2 + \ldots\ldots,$

т. е. одинъ членъ строки съ отрицательнымъ показателемъ.

182. Представимъ теперь полное *докозательство формулы двучлена*, *основанное на способѣ неопредѣленныхъ предстоящихъ*.

Для сокращенія вычисленій напишемъ $(x+a)^m$ въ видѣ $x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$. Сдѣлавъ $y = \frac{a}{x}$ и выразивъ $(1+y)^m$

строкою, достаточно умножить ее на x^m, и потомъ, вмѣсто y вставить величину его $\frac{a}{x}$: тогда получимъ строку отъ разложенія $(x+a)^m$. (Это преобразованіе дѣлается для того, чтобъ въ вычисленіи не имѣть степеней x^m, x^{m-1}, . . . перваго члена x).

Пусть m равно положительному числу $\frac{p}{q}$ (q можетъ равняться 1, и тогда показатель будетъ цѣлый).

Положимъ $(1+y)\frac{p}{q} = 1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+ \ldots .[1]$

(Составленіе первыхъ цѣлыхъ степеней побуждаетъ насъ представить строку въ этомъ видѣ, потому что при $y=0$ первая часть обратится въ 1, и слѣд. независимое отъ y количество, во второй части, также должно равняться 1).

Для опредѣленія предстоящихъ A, B, C, D . . . , въ уравненіи [1] вставимъ z вмѣсто y; будетъ

$$(1+z)\frac{p}{q} = 1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+ \ldots . [2];$$

здѣсь A, B, C,... имѣютъ тѣ же величины, какъ въ строкѣ [1], потому что онѣ независимы отъ величины y. Вычтемъ уравненіе [2] изъ [1].

$$(1+y)^{\frac{p}{q}}-(+z)^{\frac{p}{q}}=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+ \ldots . [3]$$

Положимъ $(1+y)^{\frac{1}{q}}=u$, $(1+z)^{\frac{1}{q}}=v$; будетъ $1+y=u^q$, $1+z=v^q$, откуда $y-z=u^q-v^q$; уравненіе [3] обратится въ $u^p-v^p=A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+ \ldots [4]$, или, раздѣливъ первую часть на u^q-v^q, вторую на $y-z$, равное a^q-v^q, будетъ

$$\frac{u^p-v^p}{u^q-v^q}=\frac{A(y-z)+B(y^2-z^2)+C(y^3-z^3)+D(y^4-z^4)+ \ldots .}{y-z}.$$

Но u^p-v^p дѣлится на $u-v$, § 31, и даетъ въ частномъ

$$u^{p-1}+vu^{p-2}+v^2u^{p-3}+ \ldots . +v^{p-1};$$

также, u^q-v^q, раздѣленное на $u-v$, даетъ

$$u^{q-1}+vu^{q-2}+v^2u^{q-3}+ \ldots . +v^{q-1}.$$

Притомъ, $y-z$, y^2-z^2, y^3-z^3, y^4-z^4, ..., раздѣленные на $y-z$, даютъ въ частномъ

$1,\ y+z,\ y^2+yz+z^2,\ y^3+yz^2+y^2z+z^3, \dots\dots;$
и такъ уравненіе [4] обратится въ

$$\frac{u^{p-1}+vu^{p-2}+v^2u^{p-3}+\dots+v^{p-1}}{u^{q-1}+vu^{q-2}+v^2u^{q-3}+\dots+v^{q-1}}=A+B(y+z)+C(y^2+yz+z^2)+..$$

Въ этомъ уравненіи положимъ $y=z$, откуда, въ слѣдствіе уравненій $(1+y)^{\frac{1}{q}}=u$, $(1+z)^{\frac{1}{q}}=v$, будетъ и $u=v$; первая часть обратится въ $\frac{p\,.\,u^{p-1}}{q\,.\,u^{q-1}}$ или $\frac{p}{q}\times\frac{u^p}{u^q}$.

Если вмѣсто u^p опять вставимъ величину его $(1+y)\,\frac{p}{q}$ или $1+Ay+By^2+Cy^3+\dots$, а вмѣсто u^q величину его $1+y$, то эта первая часть обратится въ $\frac{p}{q}.\frac{1+Ay+By^2-Cy^3+\dots}{1+y}$.

Притомъ, вторая часть приводится къ $A+2By+3Cy^3+4Dy^3+\dots$; слѣд. получимъ уравненіе

$$\frac{p}{q}.\frac{1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+..}{1+y}+A+2By+3Cy^2+4Dy^3+\dots$$

а уничтоживъ знаменателя $1+y$, и произведя вычисленія,

$$\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\cdot Ay+\frac{p}{q}\cdot By^2+\frac{p}{q}\cdot Cy^3+\frac{p}{q}.\,Dy^4+\dots\dots=$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}A+2B & y+3C & y^2+4D & y^3+5E & y^4+\dots\dots\\ \quad+A & \;+2B & \;+3C & \;+4D & \end{array}$$

Сравнивая почленно обѣ части сего *тождественнаго уравненія*, § 180, получимъ равенства:

$$\frac{p}{q}=A,\ \text{откуда}\dots\dots\dots A=\frac{p}{q};$$

$$\frac{p}{q}A=2B+A,\ \text{откуда},\dots.\ B=\frac{A\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2};$$

$$\frac{p}{q}B=3C+2B,\qquad \text{слѣд.}\ C=\frac{B\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3};$$

$$\frac{p}{q}C=4D+3C,\qquad \text{слѣд.}\ D=\frac{C\left(\frac{p}{q}-3\right)}{4},\ \text{и такъ далѣе.}$$

Законъ составленія предстоящихъ очевиденъ. Называя M предстоящее $n^{\text{го}}$ члена, и N предстоящее послѣдующаго члена, будемъ имѣть

$$M=Nn+(n-1)M,\ \text{откуда}\ N=\frac{M\left(\frac{p}{q}-n+1\right)}{n}.$$

Легко убѣдиться, что предъидущее доказательство также прилагается къ случаю, когда показатель число цѣлое, то есть, когда $q = 1$.

Когда m равно дробному отрицательному числу $-\frac{p}{q}$, слѣдуютъ тому же ходу; но дойдя до уравненія, соотвѣтствующаго уравненію [4],

$$u^{-p} - v^{-p} = \mathrm{A}(y-z) + \mathrm{B}(y^2-z^2) + \mathrm{C}(y^3-z^3) + \ldots.,$$

замѣтимъ, что $u^{-p} - v^{-p} = \frac{1}{u^p} - \frac{1}{v^p} = \frac{v^p - u^p}{u^p v^p} = -\frac{u^p - v^p}{u^p v^p}$; и такъ, раздѣливъ 1-ю часть на $u^q - v^q$, а 2-ю на равное ему количество $y - z$. получимъ

$$-\frac{1}{u^p v^p} \cdot \frac{u^p - v^p}{u^q - v^q} = \frac{\mathrm{A}(y-z) + \mathrm{B}(y^2-z^2) + \ldots}{y-z}$$

или, уничтоживъ множители $u - v$ и $y - z$,

$$-\frac{1}{u^p v^p} \cdot \frac{u^{p-1} + vu^{p-2} + \ldots + v^{p-1}}{u^{q-1} + vu^{q-2} + \ldots + v^{q-1}} = \mathrm{A} + \mathrm{B}(y+z) + \ldots\ldots;$$

потомъ, дѣлая $y = z$, откуда $u = v$, получимъ

$$-\frac{1}{u^{2p}} \cdot \frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}} = -\frac{p}{q} \cdot \frac{u^{-p}}{u^q} = \mathrm{A} + 2\mathrm{B}y + 3\mathrm{C}y^2 + \ldots..$$

Остальныя вычисленія совершенно сходны съ предъидущими. И такъ имѣемъ, какое бы ни было m,

$$(1+y)^m = 1 + my + m\frac{m-1}{2}y^2 + \ldots..;$$

вставимъ $\frac{a}{x}$ вмѣсто y, и умножимъ на x^m; будетъ

$$x^m\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m = (x+a)^m = x^m + max^{m-1}m + \frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + \ldots$$

И такъ формула двучлена доказана вообще.

183. *Возвратныя строки.* При разложеніи въ строку алгебраическихъ соизмѣримыхъ дробей способомъ неопредѣленныхъ предстоящихъ, получаются строки особаго рода, извѣстныя подъ именемъ *возвратныхъ строкъ*.

Въ § 179, для выраженія $\frac{a}{a'+b'x}$ получили строку . . . $\frac{a}{a'} - \frac{ab'}{a'^2}x + \frac{ab'^2}{a'^3}x^2 - \ldots.$, въ которой каждый членъ составленъ умноженіемъ предъидущаго члена на $-\frac{b'}{a'}x$.

Это свойство принадлежитъ всѣмъ соизмѣримымъ алгебраическимъ дробямъ, и вообще, *всякая дробь, соизмѣримая въ x, разлагается въ строку, въ которой каждый членъ ра-*

венъ алгебраической суммѣ извѣстнаго числа предъидущихъ членовъ, умноженныхъ на нѣкоторыя постоянныя количества.

Совокупность постоянныхъ количествъ, на которыя помножаютъ извѣстное число предъидущихъ членовъ, для составленія новаго члена, называется *отношеніемъ* строки (èchelle de relation).

Въ предъидущей строкѣ *отношеніе* было $-\frac{b'}{a'}.x$, и строка называется *возвратною строкою перваго порядка.*

Разложить въ строку выраженіе $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}$.

Положимъ $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+.$;
по уничтоженіи знаменателей и перенесеніи членовъ, будетъ

$$0=\left\{\begin{array}{ll|l|l|l|l} Aa' & +Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots\ldots\ldots \\ -a & +Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \\ & -b & +Ac' & +Bc' & +Cc' & \\ & & -c & +Ad' & +Bd' & \end{array}\right\}$$

что̀ даетъ уравненія

$$A'-a=0,\ \text{откуда}\qquad A=\frac{a}{a'};$$

$$Ba'+Ab'-b=0.\qquad B=-\frac{b'}{a'}A+\frac{1}{a'}b=\frac{-ab'+ba'}{a'^2}$$

$$Ca'+Bb'+Ac'-c=0,\qquad C=-\frac{b'}{a'}B-\frac{c'}{a'}A+\frac{1}{a'}c;$$

или $$C=\frac{ab'^2-ba'b'-aa'c'+ca'^2}{a'^3},$$

$$Da'+Cb'+Bc'+Ad'=0,\qquad D=-\frac{b'}{a'}C-\frac{c'}{a'}B-\frac{d'}{a'}A;$$

$$Ea'+Db'+Cc'+Bd'=0,\qquad E=-\frac{b'}{a'}D-\frac{c'}{a'}C-\frac{d'}{a'}B;$$

. . . .

Первыя три предстоящія прямо получатся, безъ всякаго закона; но начиная съ четвертаго, каждое предстоящее составлено изъ суммы трехъ предъидущихъ предстоящихъ, соотвѣтственно умноженныхъ на $-\frac{b'}{a'}$, $-\frac{c'}{a'}$, $-\frac{d'}{a'}$, именно: на $-\frac{b'}{a'}$ предъидущее предстоящее; на $-\frac{c'}{a'}$ второе отъ искомаго предстоящее, и на $-\frac{d'}{a'}$ третье отъ искомаго предстоящее; и такъ предстоящія A, B, C, D, ... представляютъ уже *возвратную строку*, въ которой *отношеніе* составлено изъ

$$\left(-\frac{b'}{a'}, -\frac{c'}{a'}, -\frac{d'}{a'}\right).$$

Поэтому четвертый членъ строки, Dx^3, равенъ

$$-\frac{b'}{a'}Cx^3 - \frac{c'}{a'}Bx^3 - \frac{d'}{a'}Ax^3,$$

или

$$-\frac{b'}{a'}x.Cx^2 - \frac{c'}{a'}x^2.Bx - \frac{d'}{a'}x^3.A.$$

Пятый членъ, Ex^4, будетъ $-\frac{b'}{a'}Dx^4 - \frac{c'}{a'}Cx^4 - \frac{d'}{a'}Bx^4$,

или $-\frac{b'}{a'}x.Dx^3 - \frac{c'}{a'}x^2.Cx^2 - \frac{d'}{a'}x^3.Bx$, и такъ далѣе.

И такъ, начиная съ четвертаго, каждый членъ искомой строки равенъ суммѣ трехъ предъидущихъ, соотвѣтственно умноженныхъ на $\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2, -\frac{d'}{a'}x^3\right)$. Чтобы получить первые три члена $A + Bx + Cx^2$, должно замѣнить A, B, C, найденными для нихъ величинами.

184. Возвратныя строки, по числу членовъ *отношенія* строки, дѣлятся на различные порядки. Напр. выраженіе $\frac{a}{a'+b'x}$ производитъ возвратную строку *перваго порядка*, въ которой отношеніе есть $-\frac{b'}{a'}x$.

Выраженіе $\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2}$ доставляетъ возвратную строку *втораго порядка*, въ которой отношеніе $\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2\right)$.

Строка, выведенная въ § 183, была третьяго порядка. Вообще, выраженіе вида $\frac{a+bx+cx^2+\ldots+kx^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2+\ldots+k'x^{n-1}}$ производитъ возвратную строку $n^{\text{го}}$ порядка, которой отношеніе будетъ

$$\left(-\frac{b'}{a'}x, -\frac{c'}{a'}x^2 \ldots, -\frac{k'}{a'}x^n\right).$$

Замѣчаніе. Мы предполагали, что въ числителѣ буква x низшей степени, нежели въ знаменателѣ. Въ противномъ случаѣ сначала должно произвесть дѣленіе, располагая по восходящимъ степенямъ x: тогда получится частное цѣлое относительно x, съ дробью, подобною вышепоказанной дроби.

Напр. *дано выраженіе* $\frac{1-x-3x^2+4x^3+x^4}{2-5x+3x^2-x^3}$;

$$\begin{array}{l|l} x^4+4x^3-3x^2-x+1 & -x^3+3x^2-5x+2 \\ \hline +7x^2-8x^2+x+1 & -x-7 \\ \quad +13x^2-34x+15 & \end{array}$$

Получимъ цѣлое частное $-x-7$, и дробь

$$\frac{13x^2-34x+15}{-x^3+3x^2-5x+2} \text{ или } \frac{15-34x+13x^2}{2-5x+3x^2-x^3}.$$

Притомъ, въ свойствѣ, изложенномъ въ § 183, произойдутъ нѣкоторыя измѣненія, когда числитель будетъ высшей степени, чѣмъ знаменатель.

Въ послѣдствіи мы опять займемся этими строками, которыя представляютъ многія любопытныя розысканія.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ТЕОРІЯ ПРОГРЕССІЙ И ЛОГАРИѲМОВЪ.

Здѣсь мы покажемъ еще два рода строкъ и сдѣлаемъ приложеніе теоріи показателей. Этою главою мы заключимъ первую часть Алгебры; потому что ею дополняются всѣ алгебраическія свѣдѣнія, необходимыя для изученія *Тригонометріи* и *Приложенія Алгебры къ Геометріи*.

I. Ариѳметическія и Геометрическія прогрессіи.

185. *Ариѳметическою прогрессіею* называется рядъ членовъ, послѣдовательно увеличивающихся или уменьшающихся постояннымъ количествомъ, которое называется *разностію* прогрессіи. Изъ двухъ рядовъ

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 . . . .

60, 56, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28 . . . .

первый *прогрессія возрастающая* и *разность* ея 3; второй *прогрессія убывающая*, въ которой разность 4.

Означимъ вообще буквами a, b, c, d, e, f, ... члены ариѳметической прогрессіи; она пишется такъ:

$$\div a . b . c . d . e . f . g . h . i . k \ldots .$$

и выговаривается: *a безъ b, равно b безъ c, равно c безъ d*,...., или a *содержится къ b, къ c, къ d, къ e, къ f*,.... Это есть рядъ *равныхъ разностей*, въ которыхъ каждый членъ въ одно время есть предъидущій и послѣдующій, исключая перваго члена и послѣдняго.

186. Назовемъ r *разность* прогрессіи, которую всегда будемъ полагать возрастающею. (Для убывающей прогрессіи достаточно перемѣнить въ выводахъ r на $-r$).

Въ слѣдствіе опредѣленія прогрессіи, очевидно

$$b=a+r,\ c=b+r=a+2r,\ d=c+r=a+3r,\ \ldots;$$

вообще, *каждый членъ равенъ* 1-му *члену, сложенному съ разностію, умноженною на число предъидущихъ членовъ*. Назовемъ l какой либо членъ, и n число всѣхъ членовъ включительно до l; *для общаго члена* получимъ выраженіе

$$l=a+(n-1)r.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая послѣдовательно $n=1, 2, 3,$.. выведемъ изъ него 1-й, 2-й, 3-й, ... члены прогрессіи. Въ убывающей прогрессіи, напротивъ того, имѣли бы

$$l=a-(n-1)r.$$

Напримѣръ, *найти* 50-ый *членъ прогрессіи*

$$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 \ldots .$$

Дѣлая $n=50$, получимъ $l=1+49\times 3=148$.

187. Можно найти и *сумму извѣстнаго числа членовъ* данной ариѳметической прогрессіи. *Пусть дана прогрессія* $\div a. b. c. d. e. \ldots . i. k. l$, гдѣ r разность, а n число членовъ.

Если назовемъ x членъ, передъ которымъ находится p членовъ, а y членъ, послѣ котораго слѣдуетъ p членовъ, то будемъ имѣть

$$x=a+p\times r;$$
$$y=l-p\times r;$$

сложивъ эти равенства, получимъ формулу $x+y=a+l$; поэтому, во всякой прогрессіи *сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ равно-отстоящихъ отъ нихъ* членовъ; или *два крайніе члена и два равно-отстоящіе отъ нихъ члена, со-*

ставляютъ равенство (въ томъ порядкѣ, какъ они написаны).

Подъ данною прогрессіею напишемъ теперь ту же прогрессію на оборотъ;

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ i.\ k.\ l,$$
$$\div\ l.\ k.\ i.\ h\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ c.\ b.\ a.$$

Назовемъ S сумму членовъ данной прогрессіи; сложивъ почленно обѣ прогрессіи, будетъ

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots(i+c)+(k+b)+(l+a);$$

или, какъ всѣ части $a+l$, $b+k$, $c+i$, . . . , равны, и такихъ частей n,

$$2S=(a+l)n, \text{ и наконецъ, } S=\frac{(a+l)n}{2};$$

то есть, *сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна суммѣ крайнихъ, умноженныхъ на половину числа членовъ.*

Вставимъ вмѣсто l величину его $a+(n-1)r$;

будетъ $$S=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2};$$

но первое выраженіе употребительнѣе.

Найти сумму пятидесяти первыхъ членовъ прогрессіи 2, 9, 16, 23, 30 . . . , ?

Для 50-го члена имѣемъ $l=2+49\times7=345$;

слѣд. $$S=\frac{(2+345)50}{2}=347\times25=8675.$$

Для 100-го члена найдемъ $l=2+99\times7=695$; а *для суммы 100 первыхъ членовъ*, $S=\frac{(2+695)100}{2}=34,850$.

188. Формулы $l=a+(n-1)r$ и $S=\frac{(a+l)n}{2}$, заключаются пять количествъ, a, r, n, l и S; слѣд. можно вообще предложить себѣ: *по даннымъ тремъ изъ этихъ количествъ, найти два другія.* Этотъ вопросъ подраздѣляется на столько частныхъ вопросовъ, сколько можно составить сочетаній изъ 5 буквъ, взятыхъ по 3 и по 2. Но въ § 147 для числа сочетаній по 2 и по 3 буквы мы имѣли

$$\frac{m(m-1)}{1.2} \text{ и } \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Полагая $m=5$, получимъ $\frac{5\times4}{1.2}$ или 10, и $\frac{5\times4\times3}{1.2.3}$ или 10; и такъ, изъ 5 буквъ, взятыхъ по 3, имѣемъ столько же сочетаній, сколько изъ 5 же буквъ, взятыхъ по 2, (смотри § 150).

Слѣдовательно, общій вопросъ подраздѣляется на 10 частныхъ вопросовъ, именно:

По извѣстнымъ, 1-е. a, r, n, найти l и S;
2-е. a, r, l, ... n и S;
3-е. a, r, S, ... n и l;
4-е. a, n, l, ... r и S;
5-е. a, n, S, ... r и l;
6-е. a, l, S, ... r и n;
7-е. r, n, l, ... a и S;
8-е. r, n, S, ... a и l;
9-е. r, l, S, ... a и n;
10-е. n, l, S, ... a и r.

Мы уже рѣшили 1-й вопросъ, потому что найденныя формулы прямо опредѣляютъ l и S въ функціи a, r, n. Рѣшеніе прочихъ не представляетъ никакого затрудненія; однако жъ мы совѣтуемъ учащимся заняться ими, чтобы пріобрѣсть болѣе навыка въ рѣшеніи уравненій 1-й и 2-й степени. Хотя величины a, r, n, l и S въ обѣихъ формулахъ не имѣютъ показателей, но когда a и n или l и n неизвѣстны, то получимъ уравненіе 2-й степени, потому что эти количества входятъ вмѣстѣ въ каждое изъ двухъ уравненій, и притомъ помножены между собою во 2-мъ уравненіи.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ убывающую прогрессію

$$\div\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, -1 \,.\, -3 \,.\, -5 \,.\,.\, ;$$

въ ней сумма первыхъ трехъ членовъ, также какъ и сумма первыхъ девяти членовъ, равна 27; поэтому, если дано $a=11$, $r=-2$, $S=27$, и требуется опредѣлить l и n, то найдемъ двѣ системы величинъ: $l=7$, $n=3$, и $l=-5$, $n=9$; слѣд. опредѣленіе n, напримѣръ, должно зависѣть отъ уравненія 2-й степени.

189 Ограничимся рѣшеніемъ 4-го вопроса, то есть, *по извѣстнымъ* a, n *и* l, *опредѣлимъ* r и S.

Изъ формулы $l=a+(n-1)r$ выводимъ $r=\frac{l-a}{n-1}$, а формулою $S=\frac{(a+l)n}{2}$ непосредственно опредѣлится величина S.

Изъ выраженія $r=\frac{l-a}{n-1}$ выводится рѣшеніе слѣдующей задачи: *между двумя данными числами a и b вставить m* **среднихъ пропорціональныхъ** *ариѳметическихъ членовъ* (такъ называются члены, которые содержатся между a и b, и составляютъ съ ними ариѳметическую прогрессію).

Для рѣшенія задачи, достаточно опредѣлить *разность* прогрессіи; но перемѣняя въ формулѣ l на b, и n на $m+2$, выражающее въ этомъ случаѣ число членовъ, найдемъ $r=\frac{b-a}{m+2-1}=\frac{b-a}{m+1}$; то есть, *разность* искомой прогрессіи *равна разности данныхъ чиселъ a и b, раздѣленной на число среднихъ членовъ съ* 1.

Отыскать разность, легко составить второй членъ прогрессіи, или *первый среднiй членъ*, придавая r или $\frac{b-a}{m+1}$ къ 1-му члену a; прикладывая r къ найденному первому среднему, получимъ *второй среднiй* членъ, и такъ далѣе.

Напр. *вставить 12 среднихъ членовъ между 12 и 77.* Имѣемъ $r=\frac{77-12}{13}=\frac{63}{13}=5$, что̀ даетъ прогрессію

12 . 17 . 22 . 27 . 32 . 37 . . . . . . 72 . 77.

Слѣдствіе. *Если между каждыми двумя членами прогрессіи вставимъ одинакое число среднихъ пропорціональныхъ членовъ, то всѣ члены въ совокупности составятъ одну прогрессію.*

Пусть будетъ $\div a . b . c . d ....$ данная прогрессія, m число среднихъ пропорціональныхъ членовъ, помѣщаемыхъ между a и b, b и c, c и d . . . .

Разность каждой частной прогрессіи выразится количествами $\frac{b-a}{m+1}, \frac{c-b}{m+1}, \frac{d-c}{m+1}..$, которыя взаимно равны, потому что a, b, c,... составляютъ прогрессію; и такъ *разность* всѣхъ частныхъ прогрессій будетъ одна и та же; сверхъ того, *послѣдній* членъ первой частной прогрессіи составляетъ *первый* членъ второй прогрессіи; поэтому, всѣ эти члены вмѣстѣ составляютъ одну прогрессію.

190. I. *Опредѣлить первый членъ и число членовъ ариѳметической прогрессіи, въ которой разность 6, послѣдній членъ 185, а сумма 2945?*

(*Отвѣтъ.* Первый членъ 5, число членовъ 31.)

II. *Между каждыми двумя членами прогрессіи . . . . $\div$ 2.5.8.11.14 . . . , вставить* девять *среднихъ членовъ.*

(*Отвѣтъ.* Разность равна 0,3.)

III. *Батальонъ построенъ въ видѣ треугольника; въ первой шеренгѣ находится 1 рядовой, во второй 2, въ третьей 3, въ $n^{\text{й}}$ шеренгѣ n рядовыхъ. Найти число рядовыхъ.* — **Другими словами:** *выразить сумму послѣдовательныхъ чиселъ* 1, 2, 3, . . . , *отъ* 1 *до* n.

(*Отвѣтъ.* $S=\frac{n(n+1)}{2}$.).

IV. *найти сумму n первыхъ членовъ прогрессіи нечетныхъ чиселъ* 1, 3, 5. 7, 9 . . . . . ?

(*Отвѣтъ.* $S=n^2$, или квадрату числа членовъ.)

V. *Въ 40 саженяхъ отъ начала дороги находится куча песку; однимъ возомъ песку можно усыпать 6 саженъ по длинѣ дороги, на всю же дорогу требуется 100 возовъ. Сколько саженъ должна проѣхать повозка, находящаяся въ 40 саженяхъ отъ песчаной кучи, чтобъ усыпать всю дорогу и возвратиться на прежнее мѣсто?*

(*Отвѣтъ.* 67400 саженъ.)

VI. *Пѣхотинецъ идетъ по 30 верстъ въ день; кавалеристъ отправился въ то же время, и въ 1-й день проѣхалъ только 9 верстъ, во 2-й 15 верстъ, и т. д., прибавляя каждый день по 6 верстъ. Спраш. во сколько дней и на какомъ разстояніи онъ догонитъ пѣхотинца.*

(Въ 8 дней, на разстояніи 240 верстъ.)

Геометрическая прогрессія.

191. Геометрическою прогрессіею называется такой рядъ членовъ, въ которомъ каждый членъ равенъ предъидущему члену, умноженному на *постоянное количество*, которое называется *знаменателемъ содержанія*; напримѣръ, ряды:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots\ldots,$$
$$64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{16},\ \ldots\ldots;$$

въ первомъ, каждый членъ равенъ *удвоенному* предъидущему, а во второмъ каждый членъ равенъ *четверти* предъидущаго. Знаменатель содержанія (или частное) въ первой прогрессіи 2, во второй $^1/_4$.

Положимъ, что числа a, b, c, d, e, f..... составляютъ геометрическую прогрессію; этотъ рядъ пишется такъ: $∺ a : b : c : d : e : f$ . . . . Геометрическая прогрессія различается отъ ариѳметической тѣмъ, что послѣдняя есть рядъ равныхъ разностей, между тѣмъ какъ первая есть рядъ равныхъ *частныхъ* или равныхъ отношеній; поэтому она также называется *равночастною* прогрессіею.

192. Назовемъ q знаменателя прогрессіи $∺ a : b : c : d$, ($q > 1$ въ *возрастающей* прогрессіи, и < 1 въ *убывающей*); изъ самаго опредѣленія прогрессіи выводимъ равенства

$$b = aq,\ c = bq = aq^2,\ d = cq = aq^3,\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

вообще, $n^{\text{й}}$ членъ, то есть, членъ, имѣющій передъ собою $n - 1$ членовъ, будетъ aq^{n-1}.

Назовемъ l этотъ членъ; тогда имѣемъ формулу $l = aq^{n-1}$, которою прямо опредѣляется величина каждаго члена. Напр. 8-й членъ прогрессіи $∺ 2 : 6 : 18 : 54$ . . . . , равенъ $2 \times 3^7 = 2 \times 2187 = 4374$.

Двѣнадцатый членъ прогрессіи $∺ 64 : 16 : 4 : 1 : {}^1/_4$...., равенъ $64\left(\frac{1}{4}\right)^{11} = \frac{4^3}{4^{11}} = \frac{1}{4^8} = \frac{1}{65536}$.

193. *Опредѣлить сумму n первыхъ членовъ прогрессіи*

$$∺ a : b : c : d : e : f : .\ .\ ,\ i : k : l,$$

въ которой l означаетъ $n^{\text{ый}}$ членъ.

По § 192, имѣемъ равенства

$$b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq,\ .\ .\ .\ .\ ,\ k = iq,\ l = kq;$$

складывая ихъ по частямъ, получимъ

$$b + c + d + e + \ldots\ldots + k + l = (a + b + c + d + \ldots\ldots + i + k)q,$$

или, называя S искомую сумму,

$$S - a = (S - l)q = Sq - lq,$$

или же $Sq - S = lq - a$; слѣдов. $S = \frac{lq - a}{q - 1}$; то есть, чтобъ найти сумму опредѣленнаго числа членовъ геометрической прогрессіи, должно *умножить послѣдній членъ на знаменателя содержанія*, *вычесть изъ произведенія* 1-й *членъ, и раздѣлить разность на знаменателя содержанія безъ* 1.

Въ убывающей прогрессіи $q < 1$ и $l < a$; поэтому, чтобъ числитель и знаменатель дроби были положительные, формулѣ даютъ видъ $S = \frac{a - lq}{1 - q}$.

Вставляя aq^{n-1} вмѣсто l, оба выраженія S примутъ видъ

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1},\ S=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Помощію этихъ формулъ найдемъ:

1-е. *Для суммы 8 первыхъ членовъ прогрессіи*

∺ $2:6:18:54:\ .\ .\ .\ :2\times3^7$ или 4374,

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{13122-2}{2}=6560;$$

2-е. *Для суммы 12 первыхъ членовъ прогрессіи*

∺ $64:16:4:1:\frac{1}{4}:\frac{1}{16}:\ .\ .\ .\ :64\left(\frac{1}{4}\right)^{11}$ или $\frac{1}{65536}$,

$$S=\frac{64-\frac{1}{65536}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{256-\frac{1}{65536}}{3}=85+\frac{21845}{65536}.$$

Главное затрудненіе состоитъ въ опредѣленіи численной величины послѣдняго члена, которое требуетъ весьма долгихъ вычисленій при большомъ числѣ членовъ.

194. *Замѣчаніе*. Если въ формулѣ $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ сдѣлаемъ $q=1$, она обратится въ $S=\frac{0}{0}$.

Здѣсь неопредѣленность также происходитъ, § 73, отъ существованія общаго множителя, который обращается въ нуль; потому что, § 31, выраженіе q^n-1 дѣлится на $q-1$, и даетъ въ частномъ $q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots\ldots+q+1$; сдѣлавъ это дѣленіе, величина S приметъ видъ

$$S=aq^{n-1}+aq^{n-2}+aq^{n-3}+\ .\ .\ .\ .\ +aq+a\,.$$

и потомъ, положивъ $q=1$, $S=a+a+a+\ldots+a=na$.

Можно получить тотъ же выводъ изъ данной прогрессіи ∺ $a:b:c:\ .\ .\ .\ .\ .\ :l$; полагая $q=1$, она обратится въ строку ∺ $a:a:a:\ .\ .\ .\ :a$, и сумма этой строки также равна na.

195. *Безконечныя геометрическія прогрессіи*. Возьмемъ убывающую прогрессію ∺ $a:b:c:d:e:f\ldots.$, съ неопредѣленнымъ числомъ членовъ.

Формулу $S=\frac{a-aq^n}{1-q}$ можно написать въ видѣ $S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$. Но въ убывающей прогрессіи q есть дробь; q^n также дробное число, и тѣмъ меньше, чѣмъ болѣе n. И такъ, чѣмъ болѣе возьмемъ членовъ въ прогрессіи, тѣмъ меньше будетъ $\frac{aq^n}{1-q}$ или $\frac{a}{1-q} \times q^n$, и сумма членовъ тѣмъ ближе будетъ подходить къ величинѣ 1-й части выраженія S, то есть, къ $\frac{a}{1-q}$. Наконецъ, если возьмемъ для n число, больше всякой данной величины, или положимъ $n = \infty$, выраженіе $\frac{a}{1-q} \times q^n$ будетъ меньше всякой данной величины, или равно 0; тогда выраженіе $\frac{a}{1-q}$ будетъ представлять величину всей строки.

Изъ этого заключаемъ, что сумма членовъ безконечно уменьшающейся прогрессіи выражается формулою

$$S = \frac{a}{1-q}$$

Собственно говоря, это есть *предѣлъ*, къ которому безпрерывно приближаются всѣ частныя суммы, получаемыя по мѣрѣ увеличенія числа членовъ, взятыхъ въ прогрессіи. Разность между этими суммами и $\frac{a}{1-q}$ можно уменьшать сколько угодно, и въ нуль она обращается только тогда, когда возьмемъ безконечное число членовъ.

Приложенія. Возьмемъ безконечно убывающую прогрессію $1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} \ldots$

Сумма членовъ будетъ $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$; принявъ это выраженіе для суммы первыхъ n членовъ, погрѣшность равна $\frac{a}{1-q} . q^n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Положимъ $n = 5$; будетъ $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{2 \times 3^4} = \frac{1}{162}$.

При $n = 6$ имѣемъ $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\circ} = \frac{1}{163} . \frac{1}{3} = \frac{1}{486}$.

Поэтому, когда возьмемъ $\frac{3}{2}$ за сумму извѣстнаго числа членовъ, *погрѣшность* будетъ тѣмъ менѣе, чѣмъ болѣе взято членовъ.

Дана прогрессія $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} \ldots$

Имѣемъ $S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

196. Выраженіе $S=\frac{a}{1-q}$ можно прямо вывесть изъ прогрессіи $\div\!\div a : b : c : d : e : f : \ldots\ldots$

Обратимся къ уравненіямъ $b=aq$, $c=bq$, $d=cq\ldots$, и сложимъ ихъ; будетъ

$$b+c+d+e+\ldots=(a+b+c+d+\ldots)q.$$

Первая часть очевидно есть данная строка безъ 1-го члена a, и слѣд. равна $S-a$; вторая часть равна q умноженному на всю строку, потому что въ ней нѣтъ послѣдняго члена, или лучше сказать, онъ равенъ нулю; и такъ qS выразитъ вторую часть; предъидущія равенства обратятся въ

$$S-a=qS, \text{ откуда } S=\frac{a}{1-q}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, разлагая $\frac{a}{1-q}$ въ строку посредствомъ дѣленія, получимъ неопредѣленный выводъ, $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots$ а этотъ выводъ ничто иное, какъ данная строка, въ которой вмѣсто b, c, d,..., вставлены величины ихъ въ функціи a.

Иначе. Возьмемъ прогрессію $\div\!\div a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots$, и положимъ $S=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots$; получимъ, умноживъ обѣ части на q,

$$qS=aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\ldots$$

Вычтя одно уравненіе изъ другаго, получимъ

$$S-qS=a, \text{ откуда } S=\frac{a}{1-q}.$$

197. Въ возрастающей строкѣ, выраженіе $S=\frac{a}{1-q}$ нельзя уже принять за *предѣлъ частныхъ суммъ*; тогда, имѣя опредѣленное число членовъ, § 193, будетъ $S=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$: поэтому вторая часть $\frac{aq^n}{1-q}$ численно увеличивается, по мѣрѣ увеличенія n, то есть, чѣмъ болѣе возьмемъ членовъ, тѣмъ болѣе будетъ разность между суммою ихъ и количествомъ $\frac{a}{1-q}$.

Въ этомъ случаѣ, въ формулѣ $S=\frac{a}{1-q}$ можно видѣть только алгебраическое выраженіе, отъ разложенія котораго происходитъ строка $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots$

Здѣсь представляется обстоятельство, съ перваго взгляда весьма странное. Какъ эта строка происходитъ отъ разложенія дроби $\frac{a}{1-q}$, то должны имѣть

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4 \ldots .$$

Но полагая $a=1$, $q=2$, получимъ

$\frac{=a}{1-q}$ или $-1=1+2+4+8+16+32+\ .\ .\ .\ .\ ;$

въ этомъ уравненіи первая часть отрицательная, вторая же кажется положительною, и тѣмъ больше, чѣмъ болѣе q.

Объяснимъ этотъ выводъ. Если въ уравненіи $\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+\ldots$, остановимся у какого либо члена строки, то для сохраненія равенства должно дополнить частное: напримѣръ, останавливаясь на 4-мъ членѣ, aq^3,

$$\begin{array}{ll|l} & a & 1-q \\ \cline{3-3} \text{1-й остатокъ} & +aq & a+aq+aq^2+aq^3+\dfrac{aq^4}{1-q} \\ \text{2-й . . . . .} & +aq^2 & \\ \text{3-й . . . . .} & +aq^3 & \\ \text{4-й . . . . .} & +aq^4 & \end{array}$$

должно приложить къ частному дробное выраженіе $\frac{aq^4}{1-q}$, и тогда въ сущности имѣемъ

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+\frac{aq^4}{1-q}.$$

Положимъ теперь $a=1$, $q=2$; будетъ

$$-1=1+2+4+8+\frac{16}{-1}=1+2+4+8-16,$$

равенство, очевидно вѣрное.

Вообще, когда выраженіе въ x, которое мы означимъ $f(x)$, (выговаривается: *функція* отъ x), разложено въ строку вида $a+bx+cx^2+\ .\ .\ .$, то въ точности имѣемъ $f(x)=a+bx+cx^2+\ldots$ только въ томъ предположеніи, что остановясь на какомъ либо членѣ во 2-й части, дополнили строку извѣстнымъ выраженіемъ въ x.

Въ *приближающихся* строкахъ (séries convergentes), можно предполагать дополнительное выраженіе столь малымъ, сколько угодно, и даже вовсе не писать дополненія послѣ извѣстнаго числа членовъ строки.

198. *Примѣчаніе*. Вслѣдствіе опредѣленія геометрическихъ прогрессій, § 191, можно разсматривать ихъ какъ возвратныя строки 1-го порядка, въ которыхъ *отношеніе* есть *знаменатель содержанія* прогрессіи, § 184. Изъ этого можно заключить, что безконечныя прогрессіи, также какъ и всѣ возвратныя строки вообще, происходятъ отъ разложенія въ строку алгебраической дроби. Мы показали, §§ 195 и 196, какъ находить эту *производящую дробь* въ прогрессіяхъ; въ послѣдствіи покажемъ рѣшеніе того же вопроса для всѣхъ возвратныхъ строкъ.

199. Количества a, q, n, l и S, въ формулахъ $l=aq^{n-1}$ $S=\frac{lq-a}{q-1}$, §§ 192 и 193, доставляютъ 10 частныхъ задачъ, которыя различаются отъ задачъ ариѳметическихъ прогрессій, § 188, только тѣмъ, что буква r замѣщена буквою q. Опредѣлимъ, напримѣръ, q и S, по извѣстнымъ a, l и n.

Первая формула даетъ $q^{n-1}=\frac{l}{a}$, откуда $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$; вставивъ эту величину во второй формулѣ, получимъ S.

Помощію выраженія $q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$, *между двумя данными членами a* и *b* можно *вставить m* среднихъ пропорціональныхъ *членовъ*, то есть, *m количествъ, составляющихъ съ крайними числами a и b геометрическую прогрессію.*

Для этого достаточно узнать *знаменателя содержанія*; но какъ число среднихъ членовъ равно m, то число n всѣхъ членовъ равно $m+2$, и притомъ $l=b$; поэтому величина q обратится въ $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$; то есть, *данныя числа a* и *b* должно *раздѣлить одно на другое, и изъ частнаго извлечь корень степени $m+1$*, или *степени, равной числу среднихъ членовъ съ единицею*. Тогда прогрессія будетъ

$$\div\div\; a : a\times\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} : a\times\sqrt[m+1]{\frac{b^2}{a^2}} : a\times\sqrt[m+1]{\frac{b^3}{a^3}} : \ldots : b.$$

Напримѣръ, вставить 6 *среднихъ пропорціональныхъ членовъ между числами* 3 и 384.

Какъ $m=6$, то $q=\sqrt[7]{\frac{384}{3}}=\sqrt[7]{128}=2$; слѣдовательно прогрессія будетъ

$$∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.$$

Мы скоро покажемъ другіе способы для скорѣйшаго вычисленія числа, выраженнаго этою формулою.

Когда между каждыми двумя членами геометрической прогрессіи вставимъ одинакое число среднихъ пропорціональныхъ членовъ, то всѣ такимъ образомъ составленныя прогрессіи, вмѣстѣ составятъ одну прогрессію. Это доказывается также, какъ въ § 189.

200. Изъ *десяти* главныхъ задачъ на геометрическія прогрессіи, легко рѣшить *четыре* слѣдующія:

1-е. По извѣстнымъ a, q, n, найти l и S.

$$l=aq^{n-1},\ S=\frac{lq-a}{q-1},\ S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

2-е. По даннымъ a, n, l, опредѣлить q и S.

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}},\ S=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$$

3-е. По даннымъ q, n, l, найти a и S.

$$a=\frac{l}{q^{n-1}},\ S=\frac{l(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}.$$

4-е. По извѣстнымъ q, n, S, опредѣлить a и l.

$$a=\frac{S(q-1)}{q^n-1},\ l=\frac{Sq^{n-1}(q-1)}{q^n-1}.$$

Двѣ другія задачи: когда требуется отыскать количества a и q, или l и q, зависятъ отъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ второй формулы выводимъ . . . $a=lq-Sq+S$; а вставивъ эту величину въ первую, $l=aq^{n-1}$, получимъ $l=(lq-Sq+S)q^{n-1}$, или

$$(S-l)\,q^n-Sq^{n-1}+l=0,$$

уравненіе $n^{\text{й}}$ степени, которое еще не умѣемъ рѣшить.

Точно также получимъ уравненіе $aq^n-Sq+S-a=0$, для опредѣленія l и q.

201. Наконецъ, *четыре* остальныя задачи, въ которыхъ неизвѣстно n и одно изъ 4 прочихъ количествъ, приводятъ къ уравненіямъ особаго рода.

Изъ второй формулы легко опредѣлить одно изъ количествъ a, q, l и S въ *функціи* трехъ прочихъ; и такъ рѣшеніе приводится къ опредѣленію n посредствомъ формулы $l = aq^{n-1}$.

Но это равенство приводится къ $q^n = \frac{lq}{a}$, уравненію вида $a^x = b$, гдѣ количества a и b извѣстны и надобно отыскать показателя x; такія уравненія называются *неопредѣленно-степенными уравненіями*, для отличія отъ извѣстныхъ намъ уравненій, въ которыхъ показатели неизвѣстной были извѣстныя числа. Займемся рѣшеніемъ этихъ уравненій; на нихъ основывается одна изъ важнѣйшихъ теорій въ Математикѣ: теорія *логариѳмовъ*.

II. Теорія неопредѣленно-степенныхъ количествъ и Логариѳмовъ.

202. *Рѣшеніе уравненія* $a^x = b$. Вопросъ состоитъ въ томъ, чтобъ отыскать показателя степени, въ которую должно возвысить данное число a, для составленія другаго даннаго числа b. Разсмотримъ сначала нѣсколько частныхъ случаевъ.

Напримѣръ, рѣшить уравненіе $2^x = 64$. Возвышая 2 въ различныя степени, найдемъ, $2^6 = 64$; слѣд. $x = 6$ удовлетворяетъ уравненію.

Для уравненія $3^x = 243$, найдемъ $x = 5$. Однимъ словомъ, когда b *полная степень* даннаго числа a, искомое x всегда будетъ цѣлымъ числомъ, и получится возвышеніемъ числа a въ различныя степени, начиная отъ степени 0.

Рѣшимъ уравненіе $2^x = 6$. Дѣлая $x = 2$ и $x = 3$, имѣемъ $2^2 = 4$ и $2^3 = 8$; поэтому величина x заключается между 2 и 3.

Положимъ $x = 2 + \frac{1}{x'} \ldots$ (тогда $x' > 1$).

Вставивъ эту величину въ данное уравненіе, имѣемъ

$2^{2+\frac{1}{x'}} = 6$, или, § 172, $2^2 \times 2^{\frac{1}{x'}} = 6$; слѣд.

$2^{\frac{1}{x'}} = \frac{3}{2}$, а возвысивъ въ степень x' обѣ части, $\left(\frac{3}{2}\right)^{x'} = 2$.

Чтобъ опредѣлить x', положимъ послѣдовательно

$x'=1$ и $x'=2$; находимъ $\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}<2$, и $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2$; и такъ x' заключается между 1 и 2.

Положимъ $x'=1+\frac{1}{x''}$; (x'' также >1).
Вставивъ эту величину въ уравненіе съ x', имѣемъ
$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x''}}=2$, или $\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x''}}=2$, а сокративъ, $\left(\frac{4}{3}\right)^{x''}=\frac{3}{2}$.
Полагая $x''=1$ и $x''=2$, будетъ

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 \text{ или } \frac{4}{3}<\frac{3}{2}, \text{ и } \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ или } \frac{16}{9}>\frac{3}{2};$$

слѣдовательно x'' заключается между 1 и 2.

Положимъ $x''=1+\frac{1}{x'''}$; получимъ

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2}, \text{ или } \frac{4}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x'''}}=\frac{3}{2}; \text{ или } \left(\frac{9}{8}\right)^{x'''}=\frac{4}{3}.$$

Полагая послѣдовательно x''' равно 2, 3, находимъ,
$\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}=1+\frac{17}{64}<1+\frac{1}{3}$, и $\left(\frac{9}{8}\right)^3=\frac{729}{512}=1+\frac{217}{512}>1+\frac{1}{3}$;
и такъ x''' содержится между 2 и 3.

Пусть $x'''=2+\frac{1}{x^{IV}}$; уравненіе въ x''' обратится въ

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{x^{IV}}}=\frac{4}{3}, \text{ или } \frac{81}{64}\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x^{IV}}}=\frac{4}{3} \text{ или } \left(\frac{256}{243}\right)^{x^{IV}}=\frac{9}{8}.$$

Продолжая вычисленія, найдемъ, что величина x заключается между двумя цѣлыми числами k и $k+1$. Полагая $x^{IV}=k+\frac{1}{x^{V}}$, определимъ x^{V}, какъ опредѣляли x^{IV}, и такъ далѣе.

Сближая найденныя уравненія

$$x=2+\frac{1}{x'},\ x'=1+\frac{1}{x''},\ x''=1+\frac{1}{x'''},\ x'''=2+\frac{1}{x^{IV}},\ \ldots\ldots,$$

получимъ величину x въ видѣ непрерывной дроби

$$x=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x^{IV}}}}}.$$

Но (смот. въ Ариѳметикѣ), чѣмъ болѣе возьмемъ членовъ въ непрерывной дроби, тѣмъ болѣе приближаемся къ истинной величинѣ даннаго числа; и такъ, этимъ способомъ всегда найдется величина x, удовлетворяющая уравненію $2^x = 6$, если не въ точности, по крайней мѣрѣ съ произвольною степенью приближенія.

Составляя первыя четыре сближающіяся дроби, находимъ $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{5}$; и дробь $\frac{13}{5}$ не подходитъ къ истинной величинѣ x менѣе чѣмъ па $\frac{1}{5^2}$ или $\frac{1}{25}$, и даже еще менѣе; потому что вычисливъ величину x^{IV} по уравненію $\left(\frac{256}{243}\right)^{x^{\text{IV}}} = \frac{9}{8}$, увидимъ, что x^{IV} содержится между 2 и 3, или $x^{\text{IV}} = 2 + \frac{1}{x^{\text{V}}}$; слѣд. пятая сближающаяся дробь есть $\frac{13 \times 2 + 5}{5 \times 2 + 2}$ или $\frac{31}{12}$. И такъ дробь $\frac{13}{5}$ разнствуетъ отъ величины x меньше чѣмъ на $\frac{1}{12 \times 5}$ или $\frac{1}{60}$, а дробь $\frac{31}{12}$ только на $\frac{1}{(12)^2}$, или на $\frac{1}{144}$.

203. *Общій способъ*. Рѣшить уравненіе $a^x = b$, полагая a и b болѣе 1, и притомъ $a < b$.

Составляя послѣдовательныя степени a, найдемъ, что b содержится между a^n и a^{n+1}; положимъ $x = n + \frac{1}{x'}$; вставляя эту величину въ уравненіе, получимъ

$$a^{n+\frac{1}{x'}} = b \text{ или } a^n \times a^{\frac{1}{x'}} = b, \text{ откуда } \left(\frac{b}{a^n}\right)^{x'} = a,$$

или, полагая для краткости $\frac{b}{a^n} = c, \ldots c^{x'} = a$.

Продолжая по прежнему, увидимъ, что x' содержится между n' и $n'+1$, что даетъ $x = n' + \frac{1}{x''}$; вставивъ эту величину въ уравненіе x', также получимъ уравненіе вида $d^{x''} = c$, $\left(\text{полагая } d = \frac{c}{d^{n'}}\right)$, и такъ далѣе. Наконецъ для x найдемъ выраженіе, вида

$$x' = n + \cfrac{1}{n' + \cfrac{1}{n'' + \cfrac{1}{n''' + \ldots}}}$$

Продолжая дѣйствія, получимъ величину x до произвольной степени приближенія, которую всегда опредѣлить можно. Она означается частнымъ *отъ раздѣленія единицы на квадратъ знаменателя послѣдней сближающейся дроби*, нами полученной.

204. *Примѣчанія*. 1-е. Когда при $a > 1$ и $b > 1$, положимъ $b < a$, то замѣчая, что $a^\circ = 1$, § 24, и $a^1 = a$, заключаемъ, что x содержится между 0 и 1; тогда сначала нужно положить $x = \frac{1}{x'}$, то есть, сдѣлать $n = 0$ въ предъидущихъ вычисленіяхъ.

2-е. Если b дробь и $a > 1$, величина x необходимо будетъ < 0 или *отрицательная*: и такъ въ уравненіи $a^x = b$ должно положить $x = -y$, что̀ даетъ $a^{-y} = b$, откуда, § 171, $a^y = \frac{1}{b}$; а какъ $\frac{1}{b} > 1$, то y опредѣлится по предъидущему способу, и соотвѣтствующая величина x будетъ равняться величинѣ y, съ *отрицательнымъ* знакомъ.

Тоже самое относится къ случаю, когда $b > 1$ и $a < 1$.

$3^x = 15$, ... $x = 2,465$ вѣрно до 0,001;

$10^x = 3$, ... $x = 0,477$ до 0,001;

$5^x = \frac{2}{3}$, ... $x = -0,25$ до 0,01;

$\left(\frac{7}{12}\right)^x = \frac{3}{4}$, ... $x = 0,53$ до 0,01.

Здѣсь сближающіяся дроби обращены въ десятичныя.

205. Разсмотримъ теперь: получится ли по предъидущему способу непрерывная дробь съ опредѣленнымъ числомъ сближающихся дробей, или число это будетъ неопредѣленнымъ. Въ первомъ случаѣ имѣли бы для x число *соизмѣримое*, равное послѣдней сближающейся дроби, а во второмъ x было бы *несоизмѣримымъ*.

Для рѣшенія вопроса положимъ, въ уравненіи $a^x = b$, что x равно соизмѣримому числу $\frac{m}{n}$, и разсмотримъ: какое отношеніе должно существовать между числами a и b, чтобъ допустить это предположеніе, то есть, чтобъ x было *соизмѣримымъ*.

Во-первыхъ, пусть a и b цѣлыя числа: имѣемъ уравненіе $a^{\frac{m}{n}} = b$, которое можно представить въ видѣ $a^m = b^n$.

Это равенство возможно только въ томъ случаѣ, когда a и b составлены изъ одинакихъ первыхъ между собою множителей; если въ b содержится множитель, котораго нѣтъ въ a, то, раздѣливъ равенство на этотъ множитель, 2-я часть будетъ цѣлымъ числомъ, а 1-я дробью: выводъ нелѣпый; напримѣръ, когда имѣемъ . . . . . $a = \alpha^p\beta^q\gamma^r\delta^s$ также должны имѣть . . . . $b = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}$; вставивъ эти величины въ уравненіе $a^m = b^n$, оно обратится въ

$$\alpha^{mp}\beta^{mq}\gamma^{mr}\delta^{ms} = \alpha^{np'}\beta^{mq'}\gamma^{nr'}\delta^{ns'}.$$

Это новое равенство очевидно можетъ существовать только тогда, когда степени одного и того же перваго множителя равны въ обѣихъ частяхъ; если онѣ не равны, то, раздѣливъ обѣ части на высшую степень, также получили бы нелѣпый выводъ: *цѣлое равно дроби.* Слѣд. должны имѣть отдѣльно $mp = np'$, $mq = nq'$, $mr = nr'$, $ms = ns'$, откуда выводимъ $\frac{m}{n} = \frac{p'}{p} = \frac{q'}{q} = \frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}$.

Слѣд. величина x соизмѣрима, когда a и b *составлены изъ одинакихъ первыхъ* между собою *множителей*, и *показатели этихъ множителей составляютъ между собою рядъ равныхъ отношеній.* Когда эти два условія удовлетворены, величина x равна постоянному отношенію, существующему между показателями.

Во-вторыхъ, положимъ, что a и b дробныя числа и равны $\frac{h}{h'}$, $\frac{k}{k'}$: уравненіе $a^m = b^n$ обратится въ

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^m = \left(\frac{k}{k'}\right)^n, \text{ откуда } h^m k'^n = h'^m k^n.$$

Но h и h', k и k' всегда можно предполагать первыми между собою, слѣдоват. таковыми же будутъ h^m и h'^m, k^n и k'^n; и такъ, чтобы предъидущее равенство существовало, нужно имѣть отдѣльно $h^m = k^n$ и $h'^m = k'^n$, а это приводитъ къ тѣмъ же условіямъ, которыя мы выше нашли при сравненіи числителей и знаменателей между собою.

Замѣчаніе. Когда $\frac{h}{h'} > 1$, но $\frac{k}{k'} < 1$, или обратно, тогда должно перемѣнить знакъ при x въ неопредѣленно-степенномъ уравненіи $a^x = b$ (или, все равно, оборотить дробь, которая по предположенію меньше 1, удерживая x положительный), и потомъ вывесть показанныя отношенія.

206. *Частные случаи.* 1-е. Если a и b цѣлыя числа и въ обоихъ одинъ и тотъ же первый множитель, то x соизмѣримо. Напр. дано уравненіе $4^x = 32$ или $2^{2x} = 2^5$; будетъ

$$2x = 5, \text{ откуда } x = \frac{5}{2}.$$

Дано $27^x = 2187$, или $3^{3x} = 3^7$; будетъ $x = \frac{7}{3}$.

2-е. *Когда a состоитъ изъ однихъ первыхъ множителей въ* 1-й *степени*, b должно быть полною степенью a, чтобъ x было соизмѣримо, такъ, что въ этомъ случаѣ x будетъ или *цѣлымъ*, или *несоизмѣримымъ*.

Напр. положимъ $a = \alpha\beta\gamma\delta$, откуда $b = \alpha^{p'}\beta^{q'}\gamma^{r'}\delta^{s'}$; тогда $a^m = b^n$ обратится въ $\alpha^m\beta^m\gamma^m\delta^m = \alpha^{p'n}\beta^{q'n}\gamma^{r'n}\delta^{s'n}$,
откуда $m = p'n = q'n = r'n = s'n$ или $p' = q' = r' = s'$;
слѣд. $b = \alpha^{p'}\beta^{p'}\gamma^{p'}\delta^{p'} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{p'} = a^{p'}$, и посему $x = p'$.

Напр, пусть $a = 10 = 2 \times 5$; b должно быть полною степенью 10, чтобъ x было соизмѣримо.

Теорія логариѳмовъ.

207. *Введеніе.* Въ уравненіи $a^x = y$, будемъ вставлять вмѣсто y всевозможныя ариѳметическія числа, не перемѣняя a, которое имѣетъ величину положительную; по способу § 203, для всякой величины y можно опредѣлить соотвѣтствующую величину x, хотя не точную, но по крайней мѣрѣ съ произвольною степенью приближенія.

Положимъ во-первыхъ $a > 1$.

Дѣлая послѣдовательно $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots,$
получимъ $y = a^0$ или $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots,$
слѣд. *всѣ величины y* (*которыя болѣе* 1), *получатся возвышеніемъ числа a въ различныя степени, означенныя* положительными *показателями, цѣлыми или дробными и величина x будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе величина y.*

Положимъ $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5 \ldots\ldots,$
будетъ, $y = a^0$ или $1, \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5} \ldots\ldots;$
слѣд. *всѣ величины* у (*которыя меньше* 1); *получаются возвышеніемъ числа a въ степени, означенныя* отрицательными *показателями, и численная величина x будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ величина* у *ближе къ* 0.

Напротивъ того, пусть $a < 1$ и равно дроби $\frac{1}{a'}$; полагая $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ .\ .\ .\ ,$ найдемъ $y = \left(\frac{1}{a'}\right)^0$ или $1,\ \frac{1}{a'},\ \frac{1}{a'^2},\ \frac{1}{a'^3},\ \frac{1}{a'^4},\ \frac{1}{a'^5}\ .\ .\ .\ ;$ а полагая $x = 0, -1, -2, -3, -4, -5\ .\ .\ .\ ,$ найдемъ $y = \left(\frac{1}{a'}\right)^0$ или $1,\ a',\ a'^2,\ a'^3,\ a'^4,\ a'^5,\ .\ .\ .\ .\ ,$ то есть, когда $a < 1$, то имѣемъ тѣ же выводы, какъ при $a > 1$, но на оборотъ. Вообще однако жъ можемъ сказать, что *возвышеніемъ какого ни есть постояннаго числа въ различныя степени, можно получить всевозможныя ариѳметическія числа.* (Нельзя однако жъ положить $a = 1$, потому что всѣ степени единицы равны 1).

208. Представимъ себѣ, что составлена таблица, въ которой съ одной стороны написаны всѣ цѣлыя числа, а противъ нихъ *показатели степеней*, въ которыя слѣдовало бы возвысить извѣстное *постоянное число*, для составленія этихъ чиселъ: тогда будемъ имѣть понятіе о *логариѳмическихъ* таблицахъ.

Вообще логариѳмъ *числа есть показатель степени, въ которую должно возвысить извѣстное постоянное число, чтобы составить первое число.*

Для этого *постояннаго* числа можно взять какое угодно число, лишь бы оно было $>$ или < 1; но единожды избранное, оно должно оставаться неизмѣннымъ для составленія всѣхъ чиселъ, и называется *основаніемъ* системы логариѳмовъ.

Какое бы ни взяли число за основаніе, *логариѳмъ основанія есть единица, и логариѳмъ* 1 *есть* 0.

Въ самомъ дѣлѣ, 1-е, $a^1 = a$, откуда $\log.\ a = 0$.
2-е, $a^0 = 1$, откуда $\log.\ 1 = 0$.

(Для краткости, логариѳмъ обыкновенно означаютъ такъ: log. или l., и вслѣдъ пишутъ данное число).

Приступимъ теперь къ употребленію таблицы логариѳмовъ въ численныхъ выкладкахъ.

209. *Ариѳметическое умноженіе и дѣленіе.* Умножить между собою рядъ чиселъ $y,\ y',\ y'',\ y''',\ .\ .\ .$ Назовемъ $x,\ x',\ x'',\ x''',\ .\ .\ .\ ,$ ихъ логариѳмы, вычисленные, по какому либо основанію a.

По опредѣленію, § 208, имѣемъ равенства

$$y = a^x,\ y' = a^{x'},\ y'' = a^{x''},\ y''' = a^{x'''},\ \ldots .$$

Умноживъ эти уравненія между собою и прилагая правило показателей, § 172, получимъ

$$yy'y''y''' \ldots = a^{x+x'+x''+x'''} \ldots$$

Слѣд. $\log . yy'y'' \ldots = x + x' + x'' + \ldots = \mathrm{l}.y + \mathrm{l}.y' + \mathrm{l}.y'' + .$ то есть, *логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей произведенія.*

Раздѣлить два числа y и y' одно на другое. Называя x и x' логариѳмы ихъ, получимъ уравненія $y = a^x$, $y' = a^{x'}$, откуда, § 172, $\frac{y}{y'} = a^{x-x'}$.

Слѣдовательно $\log . \frac{y}{y'} = x - x' = \log . y - \log . y'$;

то есть, *логариѳмъ частнаго отъ раздѣленія двухъ чиселъ, равенъ разности ихъ логариѳмовъ.*

Слѣдствіе. Если нужно сдѣлать умноженіе, то отыщемъ въ таблицѣ логариѳмы множителей и сложимъ ихъ: получимъ логариѳмъ произведенія; отыскавъ этотъ новый логариѳмъ въ таблицѣ, соотвѣтствующее ему число будетъ требуемое произведеніе. Слѣд. *умноженіе производится простымъ сложеніемъ.*

Когда требуется раздѣлить одно число на другое, вычитаютъ логариѳмъ дѣлителя изъ логариѳма дѣлимаго, и отыскиваютъ число, соотвѣтствующее разности: это будетъ искомое частное. И такъ, *дѣленіе производится вычитаніемъ.*

210. *Составленіе степеней и извлеченіе корней.* Пусть вообще требуется возвысить y въ степень $\frac{m}{n}$; называя по прежнему a основаніе, и x логариѳмъ числа y, имѣемъ уравненіе $y = a^x$; возвысивъ обѣ части въ степень $\frac{m}{n}$, будетъ

$y^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}x}$. Слѣдовательно $\log . y^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} . x = \frac{m}{n} . \log . y$;

то есть, *логариѳмъ числа, возвышеннаго въ какую либо степень, равенъ логариѳму числа, умноженному на показателя степени.*

Если $n = 1$, то $\log . y^m = m \times \log . y$, уравненіе, согласное съ прежнимъ опредѣленіемъ.

Теперь положимъ $m = 1$, при какой величинѣ n; будетъ $\log.y^{\frac{1}{n}}$ или $\log.\sqrt[n]{y}=\frac{1}{n}.\log.y$; т. е. *логариѳмъ корня всякаго числа, равенъ логариѳму того же числа, раздѣленному на показателя корня.*

Слѣдствія. Надобно ли возвысить число въ данную степень, достаточно отыскать въ таблицахъ логариѳмъ его, умножить логариѳмъ на показателя степени, и въ таблицахъ отыскать число, соотвѣтствующее произведенію: оно будетъ требуемая степень числа.

Чтобъ извлечь корень, достаточно раздѣлить логариѳмъ даннаго числа на показателя степени; число, соотвѣтствующее въ таблицахъ сему частному, будетъ требуемый корень. Изъ этого видимъ, что возвышеніе въ степени и извлеченіе корней чрезвычайно облегчаются употребленіемъ логариѳмовъ.

211. Предъидущія свойства независимы отъ рода избранной системы логариѳмовъ; но для употребленія логариѳмовъ въ выкладкахъ, должно имѣть таблицы, содержащія въ себѣ логариѳмы всѣхъ чиселъ, вычисленныхъ по данному *основанію.* Чтобъ составить таблицы, въ уравненіи $a^x=y$ должно послѣдовательно брать для y всевозможныя величины и опредѣлить соотвѣтствующія величины x, по способу § 203.

Обыкновенно берется основаніемъ число 10 и построеніе таблицъ приводится къ рѣшенію уравненія $10^x=y$. Дѣлая послѣдовательно $y=1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$, остается рѣшить уравненія

$$10^x=1,\ 10^x=2,\ 10^x=3,\ 10^x=4,\ \ldots\ldots$$

Замѣтимъ притомъ, что въ слѣдствіе сказаннаго въ § 203, достаточно вычислить одни логариѳмы первыхъ между собою чиселъ: 1, 2, 3, 5, 7, 11. 13, 17,....; потому что всѣ прочія числа происходятъ отъ умноженія этихъ чиселъ между собою, и логариѳмы ихъ, § 209, получатся чрезъ сложеніе логариѳмовъ первыхъ чиселъ. Напримѣръ

$$6=2\times3,\ \text{поэтому}\ \log.\ 6=\log.\ 2+\log.\ 3;$$
$$24=2^3\times3;\ \text{слѣд.}\ \log.\ 24=3\log.\ 2+\log.\ 3;$$
$$360=2^3\times3^2\times5;\ \text{откуда}\ \log.360=3\log.\ 2+\log.\ 3+\log.\ 5.$$

Притомъ въ таблицахъ достаточно помѣстить логариѳмы цѣлыхъ чиселъ, потому что логариѳмъ дроби опредѣлится, § 209 вычитаніемъ логариѳма дѣлителя изъ логариѳма дѣлимаго.

212. Вычисливъ логариѳмическія таблицы по какому ни есть основанію a, легко построить множество другихъ таблицъ.

Возьмемъ b для основанія новой системы логариѳмовъ; пусть N означитъ какое ни есть число, log. N и log. X два логариѳма его, вычисленные по основаніямъ a и b; имѣемъ уравненіе $b^{\mathrm{x}} = \mathrm{N}$, и взявъ логариѳмы обѣихъ частей въ системѣ, имѣющей основаніемъ a, получимъ $\mathrm{X}.\log.\, b = \log.\,\mathrm{N}$.

Слѣдовательно $\mathrm{X} = \frac{\log.\ \mathrm{N}}{\log.\ b}$;

то есть, *чтобъ найти логариѳмъ какого ни есть числа въ новой системѣ, по извѣстному логариѳму его въ первой системѣ, должно раздѣлить сей послѣдній на логариѳмъ новаго основанія, вычисленнаго также по первой системѣ.*

Напр. логариѳмъ числа 4, въ системѣ имѣющей основаніемъ 3, равенъ $\frac{\log.\ 4}{\log.\ 3}$, гдѣ log. 4 и log. 3 два логариѳма, вычисленные по извѣстной системѣ, имѣющей основаніемъ 10.

Пусть будетъ N, N′, N″ . . . . рядъ чиселъ, a основаніе извѣстной системы, b основаніе новой системы; имѣемъ рядъ уравненій

$$\mathrm{X} = \frac{\log.\ \mathrm{N}}{\log.\ b} = \frac{1}{\log.\ b}.\log.\,\mathrm{N};\ \mathrm{X}' = \frac{1}{\log. b}.\log.\mathrm{N}';\ \mathrm{X}'' = \frac{1}{\log.\ b}.\log.\mathrm{N}'';$$

слѣд. если имѣемъ уже таблицу, то для построенія другой достаточно *умножить* логариѳмы 2-й системы на постоянное количество $\frac{1}{\log.\ b}$. Это количество, которое служитъ для перехода отъ одной таблицы къ другой, называется *модулемъ* (module) новой таблицы относительно къ прежней.

III. Расположеніе и употребленіе обыкновенныхъ таблицъ.

Предположимъ, что учащіеся употребляютъ таблицы Каллета, которыя доведены до 108,000, между тѣмъ какъ другія меньшія таблицы не простираются далѣе 10,000.

213. Мы видѣли, § 206, что въ системѣ, имѣющей основаніемъ 10, однѣ только полныя степени 10, какъ то 100, 1000, 10,000, . . . , имѣютъ *соизмѣримые* логариѳмы. Всѣ прочія цѣлыя числа имѣютъ несоизмѣримые логариѳмы, получаемые только до извѣстной степени приближенія. Въ таблицахъ Каллета эти логариѳмы выражены десятичными дробями, и вѣрны до седьмой десятичной цифры включительно.

Если въ уравненіи $10^x = y$, положимъ

$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots . n - 1,\ n,$

то $y = 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 1000, \ldots 10^{n-1},\ 10^n.$

Полагая $x = 0, -1,\ -2,\ -3,\ -4 \ldots -(n-1), -n,$

находимъ $y = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000} \ldots \frac{1}{10^{n-1}}, \frac{1}{10^n}.$

Слѣдовательно: 1-е, логариѳмы всѣхъ чиселъ, превышающихъ 1, суть *положительные*, и возрастаютъ отъ 0 до безконечности; логариѳмы дробей суть *отрицательные*, но численная ихъ величина будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ дробь меньше, такъ, что логариѳмъ дроби, меньшей всякой данной величины, будетъ *отрицательный*, но численная величина его *безконечна;* поэтому говорятъ, что логариѳмъ *нуля* есть *безконечность отрицательная*, или $\log.\ 0 = -\infty$.

2-е. Какъ всякое число, состоящее изъ двухъ, трехъ,.., и вообще n цифръ, заключается между 1 и 10, 10 и 100, 100, и 1000 . . ., и вообще между 10^{n-1} и 10^n, то цѣлая часть логариѳма его равна $n-1$, или составлена изъ столькихъ единицъ безъ одной, сколько цифръ въ числѣ. Эта цѣлая часть называется *характеристикою*; она показываетъ порядокъ единицъ въ числѣ, которое соотвѣтствуетъ этому логариѳму. Напримѣръ, число 2849 заключается между 1000 и 10000 или 10^3 и 10^4; поэтому характеристика логариѳма его будетъ 3. Обратно, когда характеристика 5, то число содержится между 10^5 и 10^6, или составлено изъ шести цифръ.

214. Изъ двухъ свойствъ § 209 имѣемъ

$$\log.\ (a \times 10^n) = \log.\ a + \log.\ 10^n = \log.\ a + n,$$

и $$\log. \frac{a}{10^n} = \log.\ a - \log.\ 10^n = \log.\ a - n;$$

это показываетъ, что *при извѣстномъ логариѳмѣ числа а, достаточно приложить къ характеристикѣ, или вычесть изъ нее n единицъ, чтобы получить логариѳмъ числа, которое въ* 10^n *разъ больше или меньше а.*

Можно также заключить, что *логариѳмы десятичныхъ* *дробей, которыя различаются между собою только мѣстомъ, гдѣ стоитъ запятая, имѣютъ одну и ту же десятичную часть; въ нихъ только различныя характеристики.*

Употребленіе таблицъ.

Въ таблицахъ обыкновенно включаютъ только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до извѣстнаго предѣла; поэтому, для употребленія логариѳмовъ въ численныхъ выкладкахъ, должно умѣть находитъ *логариѳмъ даннаго числа*; и обратно *находить число, соотвѣтствующее данному логариѳму.*

I. *Отыскать логариѳмъ даннаго числа.*

Сначала возьмемъ цѣлыя числа. Число которое не болѣе 108000, отыскиваютъ въ таблицахъ, въ столбцѣ, означенномъ буквою N (nombres), п противъ него находятъ логариѳмъ его.

Возьмемъ число 34735879, котораго нѣтъ въ таблицахъ. Оно состоитъ изъ 8 цифръ, слѣд. 7 харатеристика его логариѳма, и остается отыскать десятичную часть. Но по § 214 эта десятичная часть будетъ та же, какъ и въ логариѳмѣ числа 34735,879. Поэтому, *отдѣливъ справа столько цифръ, что остальная часть числа находится въ таблицахъ*, получимъ число, заключающееся между 34735 и 34736; и такъ логариѳмъ его равенъ log. 34735, съ частію разности между log. 34736 и log. 34735. По таблицамъ log. 34735=5407673. (Не нужно приписывать характеристику). Тамъ же показано, что разность между log. 34736 и log. 34735 равна 125 единицамъ порядка 7-ой десятичной цифры.

Чтобы получить ту часть разности, которая, будучи приложена къ 5407673, дала бы log. 34735,879, составимъ пропорцію: *Единица разности между числами 34736 и 34735, даетъ 125 десяти-миліонныхъ разности между ихъ логариѳмами; а 0,879 разности между 37435,879 и 37435, какую дастъ разность между ихъ логариѳмами?* или

$$1 : 125 = 0,879 : x = 125 \times 8,079 = 109,875;$$

произведеніе 109,875 или лучше 110 *десяти-миліонныхъ*, выражаетъ количество, которое должно приложить къ 5407673, что даетъ 5407783. И такъ 7,5407783 логариѳмъ даннаго числа. Вычисленія производятся слѣдующимъ порядкомъ.

Данное число, 34735879;

отдѣляя 3 цифры справа, 34735,879, log. 34735 = 5407673.
Разность двухъ логариѳмовъ 125
Разность чиселъ 0,879
Произведенiе 109,875
Должно приложить къ log. 34735. 110
Сумма = 5407783;
слѣд. log, 34735879 = 7,5407783.

Дано число 7054039;
отдѣляя только 2 цифры, 70540,39, log. 70540 = 8484355.
Разность табличная . . 62
Разность чиселъ . . . 0,39
Произведенiе 24,18
Слѣдуетъ приложить къ log. 70540 24
Сумма = 8484379.
Въ данномъ числѣ 7 цифръ; слѣд. log.7054039 = 6,848379.

Также найдемъ, что log. 70004739 = 7,8451274.

Примѣчанiе. Для рѣшенiя послѣднихъ задачъ мы составляли пропорцiю между *разностiю чиселъ и разностiю ихъ логариѳмовъ*. Эта пропорцiя никогда не бываетъ точною, но тѣмъ болѣе приближается къ истинной величинѣ, чѣмъ данныя числа болѣе; при употребленiи Каллетовыхъ таблицъ, погрѣшность не имѣетъ влiянiя на 7-ю десятичную цифру, если данныя числа болѣе 10000. Вотъ почему нужно отдѣлять какъ можно менѣе цифръ съ правой руки, когда данное число превышаетъ предѣлы таблицъ.

Если число составлено *изъ цѣлаго съ дробью, то цѣлое обращаютъ въ дробь, и вычитаютъ логариѳмъ знаменателя изъ логариѳма числителя.*

Напримѣръ, $\log. 359\,\frac{27}{43} = \log. \frac{15464}{43}$

$= 4,1893218 - 1,6334685 = 2,5558533.$

Если дано число *дробное*, то логариѳмъ его будетъ *отрицательнымъ* тогда *изъ логариѳма знаменателя вычитаютъ логариѳмъ числителя*, *и передъ выводомъ ставятъ знакъ* —.

Напримѣръ. $\log. \frac{7}{9} = -(\log.9 - \log.7) = -0,10914447.$

Въ десятичной дроби отбрасываютъ запятую, и отыскавъ логариѳмъ новаго числа, *вычитаютъ изъ характеристики столько единицъ, сколько въ числѣ десятичныхъ.*

$$\text{Напр. } \log.\,75{,}47325 = \log.\,7547325 - 5 = 1{,}8777931;$$

$$\log.\,0{,}0739 = \log.\,739 - 4 = -(4 - \log.\,739) = -1{,}1313556;$$

$$\log.\,0{,}004734 = \log.\,4734 - 6 = -6 - \log.\,4734) = -2{,}3477732$$

Періодическую десятичную дробь сначала приводятъ въ обыкновенную дробь, и потомъ поступаютъ по вышесказанному; напр.

$$\log.\,37{,}375375\ \ldots = \log.\,37\,\frac{375}{999} = 1{,}5725856.$$

$$\text{Также, } \log.\,3{,}1430783078\ \ldots\,. = \log.\,\frac{3142764}{999900} = 1{,}4973551.$$

II. *Отыскать число, по данному логариѳму его.*

Данный логариѳмъ можетъ быть положительный или отрицательный.

Положительный логариѳмъ, напр. съ характеристикою 4, отыскиваютъ между логариѳмами чиселъ, имѣющихъ 5 цифръ; когда оно находится въ таблицахъ, то выписываютъ соотвѣтствующее ему число.

Если же этотъ логариѳмъ содержится между двумя послѣдовательными логариѳмами, въ такомъ случаѣ искомое число равно меньшему изъ двухъ чиселъ, соотвѣтствующихъ симъ логариѳмамъ, съ нѣкоторою дробью, которую должно опредѣлить, по крайней мѣрѣ *приблизительно.*

Назовемъ L данный логариѳмъ, log. N меньшій изъ двухъ послѣдовательныхъ и ближайшихъ къ данному логариѳмовъ. Пусть будетъ притомъ δ разность сихъ послѣднихъ (означенная въ таблицахъ), δ' разность между L и log. N; чтобы получить искомую дробь, составимъ пропорцію:

Для δ *разности между двумя послѣдовательными логариѳмами,* log. N *и* log. (N + 1), *разность между числами есть* 1; *а для* δ' *разности между* L *и* log. N, *какая разность между числами*?

$$\text{или,} \qquad \delta : 1 :: \delta' : x = \frac{\delta'}{\delta};$$

послѣднюю величину должно приложить къ N, чтобы получить искомое число. (При составленіи этой пропорціи, *погрѣшность* вообще менѣе *сотыхъ* частей искомаго числа, если только оно болѣе 10000).

Примѣръ. Данъ логариѳмъ . . . . , . . 4,7325679.
Въ таблицахъ ближайшій и меньшій
логариѳмъ, 4,7325626
Разность . . . . . . 53.

Число соотвѣтствуюшее 4,7325626 есть 54021; разность между log. 54022 и log. 54021 равна 81. Пропорція,

$$81 : 1 :: 53 : x = \frac{53}{81} = 0{,}65 \text{ вѣрно до } 0{,}01;$$

слѣдовательно 4,7325679 = 54021,65.

Также 4,0794685 = log. 12007,94, вѣрно до 0,01.

Если характеристика логариѳма (положительнаго) менѣе 4, то прикладываютъ къ ней столько единицъ, чтобы данныя числа были не менѣе 10000; *потомъ отыскиваютъ число, соотвѣтствующее новому логариѳму, и наконецъ дѣлятъ его на* 10, 100, 1000 . . . смотря потому, 1, 2 или 3 . . . . единицы приложены къ характеристикѣ.

Напр. данъ логариѳмъ 2,4567398.
Приложимъ 2 единицы; будетъ 4,4567398 = log. 28624,63, вѣрно до 0,01; слѣд. 2,4567398 = log. 286,2463.

Также найдемъ, что 0,3472586 = log. 2,224634, вѣрно до 0,000001.

Если же характеристика болѣе 4, то вычитаютъ излишнее число единицъ, и *опредѣливъ число, соотвѣтствующее новому логариѳму, умножаютъ его на* 10, 100, 1000..., смотря по тому, сколько единицъ вычли изъ характеристики.

Напр. данъ логариѳмъ 7,6840567. Вычтя 3 единицы, будетъ 4,6840567 = log. 48312,19; слѣдовательно 7,6840567 = log. 48312190, вѣрно до десятка (*въ этомъ случаѣ таблицы не могутъ дать ближайшаго числа*).

Дано 13,7412769; будетъ 4,7412769 = log. 55115,90, слѣд. 13,7412769 = log. 55115900000000, *вѣрно до одного десятка милліоновъ*.

Отрицательнымъ логариѳмамъ соотвѣтствуютъ дроби, которыя можно опредѣлить съ большою точностію.

Данъ напр. логариѳмъ —2,4537875; мы тотчасъ замѣчаемъ, что искомое число заключается между 0,01 и 0,001, § 219.

Приложимъ къ нему 7 единицъ (чтобъ сдѣлать характеристику равною 4), т. е. вычтемъ этотъ логариѳмъ изъ

7,0000000. Получимъ $+\,7 - 2,4537875 = 4,5462125 =$ log. 35173,25; но, прикладывая къ характеристикѣ 7 единицъ, мы, § 214, умножили число на 10000000; слѣд. истинную величину искомаго числа получимъ, когда перенесемъ запятую на 7 рядовъ влѣво, что даетъ $-2,4537875 =$ log. 0,003517325, вѣрно до 0,000000001.

Замѣчаніе. При отысканіи чиселъ, соотвѣтствующихъ отрицательнымъ логариѳмамъ, не нужно даже составлять пропорцію; потому что цѣлое число, находимое въ таблицахъ, обыкновенно достаточно вѣрно.

Есть еще другой способъ для опредѣленія числа, соотвѣтствующаго отрицательному логариѳму.

Возьмемъ опять логариѳмъ $-2,4537875$, или log. $1 - 2,4537875$ (потому что log. $1 = 0$).

Называя x число, соотвѣтствующее 2,4537875, будетъ log. $1 - 2,4537875 =$ log. $1 -$ log. $x =$ log. $\frac{1}{x}$; слѣд. *достаточно раздѣлить единицу на число, соотвѣтствующее данному логариѳму, и взятое безъ знака его*; но какъ x опредѣляется только приблизительно, и даже иногда весьма неудовлетворительно, поэтому и частное отъ раздѣленія единицы на это число нельзя получить съ желаемою точностію; однако жъ, въ вопросахъ, не требующихъ большой точности, для скорости иногда употребляютъ этотъ способъ.

215. Въ приложеніяхъ логариѳмовъ часто случается дѣлать нѣсколько послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній. Эти дѣйствія приводятся къ одному сложенію посредствомъ *ариѳметическаго дополненія.*

Ариѳметическимъ дополненіемъ логариѳма называется *число, которое должно приложить къ этому логариѳму*, чтобы составить *10 цѣлыхъ единицъ*, или число, которое получится вычитаніемъ даннаго логариѳма изъ 10. Напр. дополненіе логариѳма 3,4725843 равно $10 - 3,4725843 = 6,5274157$; дополненіе $2,7325490 = 10 - 2,7325490 = 7,2674510$.

Дополненіе получится, когда вычтемъ первую цифру съ правой руки изъ 10, всѣ же прочія изъ 9; если съ правой руки находятся нули, то они пишутся и въ дополненіи; поэтому можно писать дополненіе прямо, смотря на данный логариѳмъ, или по диктовкѣ онаго.

Найти численную величину выраженія
$l - l' + l'' - l''' - l^{\text{IV}} + l^{\text{V}} \ldots$, гдѣ $l, l', l'' \ldots$ суть логариѳмы, которые надобно сложить и вычесть между собою.

Это выраженіе можно представить въ видѣ

$$l + l'' + l^{v} + \overline{10 - l'} + \overline{10 - l'''} + \overline{10 - l^{iv}} - 30,$$

или, $l + l'' + l^{v} +$ доп. $l' +$ доп. $l''' +$ доп. $l^{iv} - 30$; то есть, *должно сложить логариѳмы слагаемые съ дополненіями логариѳмовъ вычитаемыхъ, и вычесть изъ суммы столько разъ 10, сколько взято дополненій.*

По обыкновенному способу слѣдовало бы составить сумму слагаемыхъ и сумму вычитаемыхъ членовъ, и вычесть меньшую сумму изъ большей, слѣд. сдѣлать два сложенія и одно вычитаніе, между тѣмъ какъ здѣсь дѣлается одно сложеніе; а вычисленіе дополненій такъ легко, что нельзя принимать этого въ счетъ.

216. При употребленіи дополненій представляется особый родъ логариѳмовъ, довольно выгодный при вычисленіяхъ. Напримѣръ, отыскать логариѳмъ $\frac{7}{15}$. Имѣемъ

$$\log. \frac{7}{15} = \log. 7 - \log. 15 = \log. 7 + \text{доп. } \log. 15 - 10;$$

$\log.\ 7 = 0{,}84509804$

доп. $\log\ 15 = 0{,}82390874$

$9{,}66900678$

вычитая 10, ... $-0{,}33099322$,

или . . . . -1.66900678.

Сложивъ дополненіе log. 15 съ log. 7, изъ вывода 9,66900678 должно вычесть 10, и это можно сдѣлать двоякимъ образомъ: или вычитая выводъ изъ 10, и придавая остатку знакъ —, что̀ даетъ —0,33099322; или вычитая 10 изъ одной характеристики 9, не трогая десятичной, что̀ даетъ —1.66900678, т. е. *логариѳмъ, имѣющій отрицательную характеристику и положительную десятичную часть.*

Для отличія этихъ логариѳмовъ отъ логариѳмовъ совершенно отрицательныхъ, послѣ характеристики ставятъ точку вмѣсто запятой. Лучше было бы писать такъ: $-1 + 0{,}66900678$, потому что это есть истинное его значеніе; но первый способъ изображенія короче.

При опредѣленіи логариѳма десятичной дроби, также получится этотъ родъ логариѳмовъ. Напр. нашли бы, что $\log. 0{,}00534 = \log. 534 - 5 = 2{,}72754126 - 5 = -3.72754126$.

Эти логариѳмы иногда выгоднѣе отрицательныхъ логариѳмовъ. Но прежде нежели покажемъ употребленіе ихъ надобно замѣтить слѣдующее:

1-е Чтобъ опредѣлить число, соотвѣтствующее такому логариѳму, достаточно приложить требуемое число единицъ къ характеристикѣ, и потомъ отыскать его въ таблицахъ. Напр. данъ логариѳмъ—3.4720563; прикладывая 7 единицъ къ характеристикѣ, будетъ 4,4720563, логариѳмъ положительный; отыскавъ соотвѣтствующее число, остается раздѣлить его на 10000000 или 10^7.

2-е. Умножая логариѳмъ . . . . — 3.4720563
на какое либо число, напр. на 8 . . . 8
для десятичной части получимъ 3,7764504
а для характеристики . . . . —24
что̀ даетъ наконецъ . . . . —21,7764504.

3-е Если требуется раздѣлить этотъ логариѳмъ на 8, то сначала прикладываютъ къ характеристикѣ столько *отрицательныхъ* единицъ, чтобы она дѣлилась на 8, т. е. логариѳмъ—3.4720563 напишемъ въ видѣ—8+5,4720563. Раздѣливъ это выраженіе на 8, получимъ — 1.6840070.

Теперь покажемъ приложеніе этихъ дѣйствій.

Ариѳметическія дѣйствія.

217. *Умноженіе и дѣленіе.* Отыскать приближенную величину произведенія $\frac{31}{75}\times\frac{13}{12}\times\frac{47}{48}$.

Называя x это произведеніе, имѣемъ, § 209,

log. x = log. 31—log. 75+log. 13—log. 12+log. 47—log. 48,
log. 31 = 1,49136169,
log. 13 = 1,11394335,
log. 47 = 1,67209786,
доп. log. 75 = 8,12493874,
доп. log. 12 = 8,92081875,
доп. log. 48 = 8,31875876,
— 1,64191915 = 29,64191915 — 30;
прикладывая . . . 5
получимъ 4,6419191
4,6419102 = log. 43844.

Разность 89
Разность въ таблицахъ 99
$\frac{89}{99} = 0,90.$

Слѣд. 4,6419191 = log. 43844,90, и требуемое произведеніе будетъ 0,4384490, вѣрное до 0,0000001.

Составленіе степеней. При возвышеніи числа въ какую ни есть степень, логариѳмъ его умножается на показателя степени; поэтому, чтобы получить выводъ, вѣрный до 7-й десятичной включительно, въ логариѳмѣ числа должно быть болѣе 7 десятичныхъ. Въ таблицахъ Каллета послѣ обыкновенныхъ логариѳмовъ помѣщены логариѳмы съ 20 десятичными; слѣд. всегда можно взять эти логариѳмы съ двумя или тремя десятичными болѣе, нежели въ обыкновенныхъ таблицахъ.

Возвысить 29 въ 5-ю степень; будетъ, § 210,

$$\log.\ (29)^5 = 5 \log.\ 29\ ;$$

но . . . . $\log.\ 29 = 1{,}462397998,$

$5 \log.\ 29 = 7{,}311989990;$

отнявъ 3 единицы . . . . $4{,}3119900;$

$4{,}3119868 = \log.\ 20511.$

Разность . . . . 32 | $\frac{32}{212} = 015;$

Разность табличная. 212

слѣд. 20511150 есть искомое число, вѣрное до 10.

Вычислить $(2)^{64}$.

Имѣемъ $\log.\ 2 = 0{,}3010299956\ ;$

$64 \log.\ 2 = 19{,}2659197.$

Отнявъ 15 единицъ, $4{,}2659197;$

$4{,}2659022 = \log.\ 18446.$

Разность . . . . 175 | $\frac{175}{235} = 0{,}74.$

Разность табличная 235

И такъ $4{,}2659197 = \log.\ 18446{,}74$

Слѣд. искомое число = 1846740,000.000.000.000, вѣрно до 10 *трилліоновъ*, т. е. послѣднія 13 цифръ не могутъ быть вычислены по таблицамъ; но въ этихъ примѣрахъ предполагается, что желаютъ получить только понятіе о величинѣ числа, и мы видѣли съ какою скоростію это дѣлается.

Вычислить еще $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$.

Съ дополненіями.	*Безъ дополненій.*
$\log.\ 2 = -0{,}3010299956$	$\log.\ 3 = -0{,}4771212547$
доп. $\log.\ 3 = \quad 9{,}5228787453$	$\log.\ 2 = \quad 0{,}3010299956$
$\log.\ \frac{2}{3} = -1.8239087409$	$\log.\ \frac{2}{3} = -0{,}1760912591$
$11\ \log.\ \frac{2}{3} = -2.0629961499$	$11\ \log.\ \frac{2}{3} = -1{,}9370038510$
прилагая $+6$	прилагая $+6,$
получимъ $4{,}0629961$	получимъ $4{,}0629961.$

Этому логариѳму соотвѣтствуетъ число 11561,02; слѣд. 0,01156102 есть искомое число, вѣрно до 0,00000001.

Извлеченіе корней. Для этого дѣйствія достаточно брать логариѳмы съ 7 десятичными.

Извлечь корень 7-й степени изъ 1162049.

Имѣемъ, § 216, $\log. \sqrt[7]{1162049} = \frac{1}{7} \log. 1162049$.

$$\begin{array}{rrl|r}
 & \log.\ 11620 = & 4,0652061 & \text{Разность табл. } 364 \\
\log.\ 11620,49 - & \log.\ 11620 = & 183 & \text{Разн. чиселъ } 049 \\
 & \log.\ 11620,49 = & 4,0652244 & 3366 \\
\text{Слѣд.} & \log.\ 1162049 = & 6,0652244 & 1496 \\
 & \frac{1}{7} \log.\ 1162049 = & 0,8664606 & 183,26 \\
\text{прикладывая } 4, & & 4,8664606 & \\
 & & 4,8664587 = \log.\ 73529. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
\text{Разность} \ldots & 19 & \dfrac{19}{59} = 0,32; \\
\text{Разность таб.} \ldots & 59 &
\end{array}$$

и такъ $4,8664606 = \log. 73529,32$.

Слѣд. искомый корень $= 7,352932$ вѣрно до 0,000001.

Вычислить $\sqrt[11]{\frac{13}{27}}$; $\log. \sqrt[11]{\frac{13}{27}} = \frac{1}{11} (\log. 13 - \log. 27)$.

Съ дополненіями.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 13 = & 1,11394335 \\
\text{доп.} \log.\ 27 = & 8,56863624 \\
\hline
\log.\ \frac{13}{27} = & -1.68257959 = -11 + 10,68257959; \\
\frac{1}{11} \log. \frac{13}{27} = & -1.97114360; \\
\text{прилагая} & +5 \\
\hline
\text{получимъ} & 4,97114360 = \log.\ 93571,49.
\end{array}$$

Слѣд. искомый корень есть 0,9357149 вѣрно до 0,0000001.

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\sqrt[7]{\left(\frac{11}{9}\right)^5} = 1,154118; \quad (73)^7 = 11047390000000.$$

$$(0,0457)^{12} = 0,000000000000000082984.$$

218. *Вычисленіе алгебраическихъ выраженій посредствомъ логариѳмовъ.*

Положимъ, что рѣшеніе задачи доставило выраженіе

$x = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2)3a}}{\sqrt{(a+b)\sqrt{cd}}}$, и по извѣстнымъ величинамъ a, b, c, d, требуется отыскать численную величину x; помощію логариѳмовъ можно привести всѣ указанныя дѣйствія къ легкимъ дѣйствіямъ сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Въ самомъ дѣлѣ, по § 209 и 210 имѣемъ,

$$\log.\ x = \log.\ \sqrt[3]{(a^2 - b^2)3a} - \log.\ \sqrt{(a+b).\ \sqrt{cd}}.$$

Но $\log. \sqrt[3]{a^2 - b^2)3a} = \frac{1}{3}[\log.(a+b) + \log.(a-b) + \log.3 + \log.a]$ и $\log.\ \sqrt{(a+b)\sqrt{cd}} = \frac{1}{2}\ [\log.\ (a+b) + \frac{1}{2}\log.\ c + \frac{1}{2}\log.\ d]$; слѣд. $l.\ x = \frac{1}{3}[l.(a+b) + l.(a-b) + l.3 + l.a] - \frac{1}{2}[l.(a+b) + \frac{1}{2}l.c + \frac{1}{2}l.d]$.

Даны напримѣръ, $a = 60$, $b = 15$, $c = 16$, $d = 9$; будетъ $l.\ x = \frac{1}{3}\ [l.\ 75 + l.\ 45 + l.\ 3 + l.\ 60] - \frac{1}{2}[l.\ 75 + \frac{1}{2}l.\ 16 + \frac{1}{2}l.\ 9]$; вычисляя отдѣльно двѣ суммы между скобками, и потомъ взявъ *треть* 1-й и *половину* 2-й, получимъ

$$\log.\ x = 1{,}9278487 - 1{,}4771212 = 0{,}4507275;$$

слѣд. $x = 2{,}823108$.

Вычислить выраженіе $x = \frac{2a^4 - 3ab^3 + b^4}{a^3 - 3a^2b + 4b^2c}$.

Во-первыхъ, можно написать это выраженіе въ видѣ

$$x = \frac{a^3\left(2a - \frac{3b^3}{a^2} = \frac{b^4}{a^3}\right)}{a^2\left(a - 3b -+ \frac{4b^2c}{a^2}\right)} = \frac{a\left(2a - \frac{3b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}\right)}{a - 3b + \frac{4b^2c}{a^2}}$$

Теперь положимъ $m = \frac{4b^2c}{a^2}, n = \frac{3b^2}{a^2}, p = \frac{b^4}{a^3}$;

выраженіе обратится въ $x = \frac{a(2a - n + p)}{a - 3b + m}$,

или, прилагая логариѳмы,

$$\log.\ x = \log.\ a + \log.\ (2a - n + p) - \log.\ (a - 3b + m),$$

которое легко вычислить, когда извѣстны величины m, n, p. Изъ уравненій же $m = \frac{4b^2c}{a^2}, n = \frac{3b^3}{a^2}, p = \frac{b^4}{a^3}$, имѣемъ

$\log.\ m = l.\ 4 + 2\,l.\ b + l.\ c - 2\ l.\ a$; $\log.\ n = l.\ 3 + 3\,l.\ b - 2\ l.\ a$;

$$\log.\ p = 4\ \log.\ b - 3\ \log.\ a.$$

Все искусство состоитъ въ томъ, чтобы дробное выраженіе преобразовать въ выраженіе *линейное* или 1-й степени, помощію вычисленія другихъ выраженій, представляющихъ одни только умноженія, дѣленія и составленія степеней.

Также найдемъ, что

$$\log.\frac{a^2-b^2}{bd}=\text{l}.(a+b)+\text{l}.(a-b)+\text{доп.}\log.b+\text{доп.}\log.d-20;$$

$$\log.\frac{a^3-2ba^2+bc^2}{a^2-ba+4cd}=\text{l}.a+\text{l}.(a-2b+h)+\text{доп.}\text{l}.(a-b+h')-10,$$

вычисляя h и h' по формуламъ

$$\log.h=\text{l}.b+2\ \text{l}.c-2\ \text{l}.a;\ \log.h'=\text{l}.4+\text{l}.c+\text{l}.d-\text{l}\ a.$$

219. *Неопредѣленно-степенныя уравненія.* Мы показали, § 203, способъ рѣшенія уравненія $a^x=b$, и вывели изъ него теорію логариѳмовъ; теперь, когда таблицы логариѳмовъ построены, можно употребить логариѳмы для рѣшенія подобныхъ уравненій.

Взявъ логариѳмы обѣихъ частей уравненія $a^x=b$, будетъ, § 210, $x\times\log.a=\log.b$, откуда $x=\frac{\log.b}{\log.a}$.

Возьмемъ напр. уравненіе $3^x=15$, для котораго въ § 203 нашли $x=2{,}465$ вѣрно до 0,001; изъ него выводимъ

$$x=\frac{\log.15}{\log.3}=\frac{1{,}17609126}{0{,}47712125}=2{,}465.$$

Уравненіе $a^x=b$ называется *неопредѣленно-степеннымъ уравненіемъ 1-го порядка*; а уравненія вида $a^{b^x}=c$, $a^{b^{c^x}}=d$, *неопредѣленно-степенными уравненіями втораго, третьяго, порядка*.

Чтобы получить понятіе о выраженіи a^{b^x}, надобно представить себѣ, что b возвышено въ степень x, и потомъ a возвышено въ степень b^x.

Также $a^{b^{c^x}}$ показываетъ, что возвысивъ c въ степень x, возвысили b въ степень c^x и наконецъ a въ степень b^{c^x}. Возьмемъ логариѳмы уравненія $a^{b^x}=c$; будетъ,

$b^x\times\log.a=\log.c$, откуда $b^x=\frac{\log.c}{\log.a}$, и взявъ снова логариѳмы,

$x\times\lg.b=\lg.\frac{\lg.c}{\lg.a}=\lg.\lg.c-\lg.\lg.a$; слѣд. $x=\frac{\lg.\lg.c-\lg.\lg.a}{\lg.b}$

[Ежели log. c десятичная дробь, то логариѳмъ ея опредѣлится по таблицамъ, какъ логариѳмъ всякаго числа].

Рѣшить уравненіе $a^{b^{c^x}}=d$.

Взявъ логариѳмы, имѣемъ $b^{c^x}\times\log.a=\log.d$, откуда $b^{c^x}=\frac{\log.d}{\log.a}$; взявъ снова логариѳмы, получимъ

$$c^x = \frac{\log.\log.d - \log.\log.a}{\log.b}$$; и наконецъ

$$x \times \lg.c = \lg.\frac{\lg.\lg.d - \lg.\lg.a}{\lg.b} = \lg.(\lg\ \lg.d - \lg.\lg.a) - \lg.\lg.b;$$

слѣдовательно $$x = \frac{\lg.(\lg.\lg.d - \lg.\lg.a) - \lg.\lg.b}{\lg.c}.$$

Точно также рѣшаются неопредѣленно-степенныя уравненія высшихъ порядковъ. Въ *алгебраическомъ* отношеніи эти формулы совершенно справедливы; но не трудно замѣтить, что въ приложеніяхъ онѣ даютъ величины весьма не точныя, и даже нельзя опредѣлить степень полученнаго приближенія.

220. *Примѣчаніе.* Когда при вычисленіи алгебраическихъ выраженій случится брать *логариѳмъ отрицательнаго числа*, въ такомъ случаѣ поступаютъ точно также, какъ будто бъ это число было положительнымъ, и потомъ въ выводѣ ставятъ надлежащій знакъ, или же повѣряютъ: соотвѣтствуетъ ли выводъ данному вопросу.

Напримѣръ, требуется найти помощію логариѳмовъ величину произведенія abc; имѣемъ формулу.

$$\log.abc = \log.a + \log.b + \log.c.$$

Пусть $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$; поступая точно также, какъ будто передъ 3 находится знакъ $+$, найдемъ

$$\log.abc = \log.30;$$

но какъ въ произведеніи abc находится *одинъ* отрицательный множитель, то искомое произведеніе будетъ -30.

Пусть $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$; по тому же правилу найдомъ, $\log.abc = \log.30$;

въ abc содержатся *два* отрицательные множителя, слѣд. искомое произведеніе будетъ $+30$.

(Вообще, произведеніе будетъ *положительнымъ* или *отрицательнымъ*, соотвѣтственно *четному* или *нечетному* числу отрицательныхъ множителей).

Рѣшить уравненіе $x = (-8)^{\frac{5}{3}}$, откуда $\log.x = \frac{5}{3}\log.(-8)$.

Полагая, что передъ 8 находится $+$, найдемъ

$$\log.x = \log.32;$$

но степень, которой показатель есть $\frac{5}{3}$, равняется кубичному корню изъ 5-й степени, и должна имѣть тотъ же знакъ, какъ и число, надъ которымъ производятся эти дѣйствія; слѣд. имѣемъ $x = -32$.

Возьмемъ уравненіе $9^x = -3$, откуда $x = \frac{\log.(-3)}{\log.9}$; получимъ $x = \frac{1}{2}$, рѣшеніе вѣрное; потому что изъ двухъ корней числа 9, одинъ равенъ $+3$, другой -3.

Если бъ эта повѣрка не удалась, то заключили бъ, что данное уравненіе нелѣпо; это можно приложить къ уравненію $(-9)^x = 3$, потому что -9 ни въ какой степени не можетъ дать числа 3.

По тѣмъ же правиламъ найдемъ рѣшенія

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = x.\ x = 4;$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 4,\ x = \pm 8;$$

$$(-4)^{\frac{3}{2}} = x,\ x = 8;$$

послѣдній выводъ при повѣркѣ оказывается ложнымъ.

221. *Геометрическія пропорціи и прогрессіи.*

Пусть дана пропорція $a : b = c : x$, откуда $x = \frac{bc}{a}$; прилагая къ этому выраженію логариѳмы, получимъ $\log.x = \log.b + \log.c - \log.a$, или $\log a.\log b : \log c.\log d$; слѣд *если четыре числа находятся въ пропорціи геометрической, то логариѳмы ихъ составляютъ пропорцію ариѳметическую.*

Возьмемъ теперь геометрическую прогрессію

$$∺ a : b : c : d : e : f : g : h : \ldots,$$

которую § 191, можно написать въ видѣ

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{g} = \ldots$, и взявъ логариѳмы,

$$\log.\frac{a}{b} = \log.\frac{b}{c} = \log.\frac{c}{d} = \log.\frac{d}{e} = \log.\frac{e}{f} = \ldots,\ \text{или}$$

$$\log.a - \log.b = \log.b - \log.c = \log.c - \log d = \log.d - \log.e = \log.e - \log.f \ldots$$

и наконецъ $\div \log.a.\log.b.\log.c.\log.d \ldots\ldots$

и такъ, *логариѳмы чиселъ* a, b, c, d . . . . *геометрической прогрессіи, составляютъ ариѳметическую прогрессію.*

Это предложеніе сближаетъ алгебраическое опредѣленіе логариѳмовъ. § 207, съ ариѳметическимъ: *логариѳмы суть* *числа ариѳметической прогрессіи, соотвѣтствующія почленно числамъ геометрической прогрессіи.*

Употребленіе логариѳмовъ весьма выгодно при рѣшеніи вопросовъ, относящихся къ геометрическимъ прогрессіямъ.

1-е. Назвавъ u послѣдній членъ геометрической прогрессіи, имѣемъ, § 192,

$$u = aq^{n-1}, \text{ откуда } \log.u = \log.a + (n-1)\log.q.$$

Найдемъ 20-й членъ прогрессіи $1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{27}{8} : \ldots$

Формула обратится въ

$$\log.u = \log.1 + 19(\log.3 - \log.2) = 19(\log.3 - \log.2),$$

[потому что $\log.1 = 0$]; по вычисленіи получимъ

$$\log.u = 3,3457339 = \log.2216,84;$$

откуда $u = 2216,84$, вѣрно до 0,01.

2-е. Если требуется вставить m среднихъ пропорціональныхъ членовъ между данными числами a и b, то знаменатель содержанія опредѣлится, § 199, формулою

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}; \text{ откуда } \log.q = \frac{\log.b - \log.a}{m+1}.$$

Пусть $a=2$, $b=15$, $m=50$; будетъ $\log.q = \frac{\log.15 - \log.2}{51}$; по вычисленіи получимъ $\log.q = 0,0171581 = \log.1,040299$; слѣд. $q = 1,040299$.

Чтобы прямо вычислить 20-й *средній пропорціональный* членъ, который будетъ 21-мъ членомъ прогрессіи, имѣемъ

$x = 2\left(\sqrt[51]{\frac{15}{2}}\right)^{20}$, откуда $\log x = \log.2 + \frac{20(\log.15 - \log.2)}{51}$; по вычисленіи найдемъ, $\log.x = 0,6441913 = \log.4,407489$; и такъ 20-й пропорціональный членъ есть 4,407489.

3-е. Въ § 193 нашли для выраженія суммы членовъ $S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$, откуда $\log.S = \log.a + \log.(q^n-1) - \log.(q-1)$. Въ этой формулѣ сначала вычисляютъ выраженіе q^n, полагая $\log.q^n = n\log.q$, послѣ чего легко найти $q^n - 1$, и потомъ $\log.(q^n-1)$. Ниже будетъ показано употребленіе этой формулы.

4-е. По извѣстнымъ a, q и u въ формулѣ $u = aq^{n-1}$, найти величину n. Имѣемъ

$$\log.u = \log.a + (n-1)\log.q, \text{ откуда } n = 1 + \frac{\log.u - \log.a}{\log.q}.$$

Напримѣръ, *найти число членовъ прогрессіи, въ которой 1-й членъ 3, послѣдній 6144, и знаменатель содержанія 2;* получимъ

$n = 1 + \frac{\log.6144 - \log.3}{\log.2} = 1 + \frac{3,31132995}{0,30102999} = 1 + 11 = 12$; (частное $\frac{331132995}{30102999}$ равно $11 + \frac{1}{30102999}$; но дробь откидывается, потому что она происходитъ отъ употребленія логариѳмовъ).

222. Логариѳмы употребляются съ большою пользою при вычисленіи процентовъ.

Первый общій вопросъ. *Извѣстная сумма отдана за извѣстные проценты въ* ростъ, то есть, *съ пріобщеніемъ годовыхъ процентовъ къ капиталу предъидущаго года. Спрашивается, во что̀ обратится эта сумма черезъ данное число лѣтъ?*

Назовемъ a данную сумму, n число лѣтъ, и r проценты съ 1 рубля въ годъ (то есть, сотую часть процента со 100 рублей).

Какъ 1 рубль приноситъ r процентовъ, то сумма a принесетъ въ годъ ar процентовъ; слѣд. въ концѣ 1-го года капиталъ a обратится въ $a + ar$ или $a(1+r)$.

Пусть $a(1+r) = a'$; этотъ новый капиталъ въ концѣ 2-го года обратится въ $a'(1+r)$; слѣд. первоначальный капиталъ a будетъ $a(1+r)(1+r)$ или $a(1+r)^2$.

Въ концѣ 3-го года получимъ . . . $a(1+r)^3$,
и вообще, въ концѣ n-го года . . . . . $a(1+r)^n$.
Слѣд. называя A послѣднюю величину, имѣемъ уравненія

$$A = a(1+r)^n, \text{ и } \log. A = \log. a + n \times \log. (1+r).$$

Приложеніе. Какая получится сумма отъ 30,000 рублей, отданныхъ въ ростъ по 5 на $\frac{0}{0}$, на 30 лѣтъ?

Достаточно положить въ послѣдней формулѣ

$$a = 30000, \ n = 30, \ r = \frac{5}{100} = 0,05;$$

$$\log. A = \log. 30000 + 30 \log. (1,05).$$

$\log. 1,05 = 0,021189299$, и $30 \log. 1,05 = 0,63567897$;
$\log. 30000 = 4,47712125.$

$\log. A = 5,11280022.$

Слѣд. A = 129958 р. 27 к.

Формула $A = a(1+r)^n$ содержитъ четыре количества

a, r, n, и A, и поэтому представляетъ четыре различные вопроса:

1-е. *По извѣстнымъ* a, r, n, *опредѣлить* A; мы уже рѣшили этотъ вопросъ.

2-е. *Опредѣлить, какую сумму должно отдать въ* ростъ, *чтобъ черезъ* n *лѣтъ получить сумму* A, *полагая по* r *процентовъ съ рубля.* Изъ уравненія $A=a(1+r)^n$ выводимъ $\log. a = \log. A - n \log. (1+r)$;
слѣд. величина a будетъ извѣстна.

Этотъ вопросъ составляетъ правило *сложнаго учета*, потому что вопросъ приводится къ опредѣленію: какъ велика должна быть теперь сумма A, которую слѣдуетъ уплатить чрезъ n лѣтъ, принимая въ счетъ нарастающіе проценты съ капитала и проценты съ процентовъ.

3-е. *Опредѣлить проценты, которые должно взимать съ суммы* a, *отданной въ ростъ, чтобъ черезъ* n *лѣтъ составилась сумма* A.

Формула $1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}$, даетъ $\log. (1+r) = \frac{\log. A - \log. a}{n}$.
Зная $1+r$, легко опредѣлить r, и потомъ проценты со 100 рублей.

4-е. Наконецъ, *опредѣлить время, на которое должно отдать въ ростъ сумму* a, *по 1 процентовъ съ рубля, чтобы получить сумму* A.

Формула будетъ $n=\frac{\log. A - \log. a}{\log. (1+r)}$.

Если A должно быть вдвое, втрое, вчетверо, ... , болѣе a, то формула будетъ проще.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $A=ak$; тогда формула . . . $A=a(1+r)^n$ обратится въ $ka=a(1+r)^n$, откуда
$n=\frac{\log. k}{\log. (1+r)}$; то есть, величина n не зависитъ отъ величины первоначальнаго капитала.

Второй общій вопросъ. *Опредѣлить, какую сумму должно отдать въ обращеніе, чтобъ ежегодно получать опредѣленную сумму* b, *которую черезъ* n *лѣтъ уплатилась бы эта сумма, проценты съ нее и проценты съ процентовъ, полагая по* r *съ 1 рубля въ годъ.*

Назовемъ a искомый капиталъ; черезъ n лѣтъ онъ обратится въ $a(1+r)^n$. Слѣд. когда опредѣлимъ, во что̀ обратятся ежегодно платимыя суммы въ концѣ n-го года, то въ сложности онѣ должны равняться $a(1+r)^n$.

Но b, полученное въ концѣ 1-го года, въ концѣ n-го года обратится въ $b(1+r)^{n-1}$.

Также, b, полученное въ концѣ втораго года, въ концѣ n-го года обратится въ $b(1+r)^{n-2}$.

Также точно $b(1+r)^{n-3}$, $b(1+r)^{n-4}$, . . . , $b(1+r)$, b, выразятъ величины прочихъ суммъ въ концѣ n-го года. Слѣд. имѣемъ уравненіе

$$a(1+r)^n=b(1+r)^{n-1}+b(1+r)^{n-2}+\ .\ .\ .\ +b(1+r)+b;$$

но вторая часть уравненія, написанная на оборотъ, очевидно составляетъ геометрическую прогрессію, въ которой 1-й членъ b, частное $1+r$, и число членовъ n; слѣд. для суммы, § 193, получимъ выраженіе

$$\frac{b(1+r)^n-b}{1+r-1} \text{ или } \frac{b[(1+r)^n-1]}{r}; \text{ поэтому}$$

$$a(1+r)^n=\frac{b[(1+r)^n-1]}{r}, \text{ откуда } a=\frac{b[(1+r)^n-1)}{r(1+r)^n};$$

прилагая логариѳмы,

$$\log. a=\log. b+\log. [(1+r)^n-1]-\log. r-n\log. (1+r).$$

Въ этой формулѣ также 4 количества a, b, r, n, и поэтому четыре различные вопроса. Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ.

На сколько лѣтъ должно отдать въ ростъ сумму а *по 5 и 10 процентовъ, чтобъ сумма удвоилась?*

Отвѣтъ. По 6 со $\frac{0}{0}$ на 14л. 2м.; по 10 со $\frac{0}{0}$ на 7л. 3м.

Какую сумму должно отдать въ проценты, чтобы въ продолженіи 12 лѣтъ ежегодно получать по 1500 рублей, которыми въ концѣ 12-го года выплатился бъ отданный въ проценты капиталъ и проценты, полагая по 7 р. 50 к. со $\frac{0}{0}$ въ годъ?

Отвѣтъ. 11602 р. 91 к.

Нѣкто купилъ имѣніе за 100.000, рублей; сумму эту онъ долженъ уплатить въ 15 сроковъ, принимая въ счетъ проценты и полагая по 5 со $\frac{0}{0}$ на каждый срокъ. Сколько придется платить въ каждый срокъ?

Отвѣтъ. 9634 р. 22 к.

Извѣстное число жителей ежегодно нарастаетъ на $\frac{1}{100}$; *спрашивается, черезъ сколько лѣтъ это число будетъ въ 10 разъ болѣе?*

Отвѣтъ. Почти черезъ 231 годъ.

Изъ ста-ведерной бочки вина ежедневно выцѣживаютъ по одному ведру, и тотчасъ дополняютъ ее ведромъ воды; опредѣлить: 1-е, сколько будетъ чистаго вина въ бочкѣ, когда она дополнится 50-мъ ведромъ воды? 2-е, черезъ сколько времени въ бочкѣ останется половина, треть и четверть чистаго вина?

Отвѣтъ. На 1-ю часть вопроса: $60^1/_2$ ведеръ; на 2-ю часть: *половина* черезъ 69 дней; *треть* черезъ 109 дней; *четверть* черезъ 138 дней.

IV. ЛОГАРИѲМИЧЕСКІЕ И НЕОПРЕДѢЛЕННО-СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

Изложенный въ § 203 способъ рѣшенія уравненія $a^x = b$, даетъ достаточное понятіе о составленіи логариѳмическихъ таблицъ: но когда требуется опредѣлить величину x съ большею точностію, этотъ способъ неудобенъ; тогда употребляютъ другіе, гораздо легчайшіе и скорѣйшіе способы, какъ для повѣрки составленныхъ уже таблицъ, такъ и для построенія новыхъ таблицъ; способы эти состоятъ въ разложеніи логариѳмовъ въ ряды.

223. Пусть требуется разложить въ строку логариѳмъ числа y. Приложимъ здѣсь способъ неопредѣленныхъ предстоящихъ, §§ 179 и 181.

Очевидно, что нельзя положить

$$\log. y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots\ldots;$$

потому что сдѣлавъ $y=0$, 1-я часть обратится, § 213, въ $-\infty$ или $+\infty$, смотря по тому, будетъ ли основаніе $>$ или <1; между тѣмъ какъ 2-я часть, которая должна быть равна 1-й, обращается въ A.

Также нельзя положить $\log. y = Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots$, потому что $y = 0$ даетъ $\log. 0$ или $\pm\infty = 0$. Но если y обратимъ въ $1+x$, и положимъ

$$\log. (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots [1],$$

то сдѣлавъ $x=0$, уравненіе $\log. 1 = 0$ не представляетъ никакого признака нелѣпости.

Опредѣлимъ теперь предстоящіе A, B, C .... Для этого будемъ слѣдовать способу, показанному въ § 182, замѣняя x буквою z; тогда имѣемъ

$$\log. (1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots\ldots [2].$$

Вычтя это уравненіе изъ уравненія [1], получимъ

$$\log.(1+x)-\log.(1+z)=A(x-z)+B(x^2-z^2)+\ldots.[3].$$

Вторая часть дѣлится на $x-z$; разсмотримъ, нельзя ли вывесть этотъ множитель и въ 1-й части. Замѣтимъ, что

$$\log.(1+x)-\log.(1+z)=\log.\frac{1+x}{1+z}=\log.\left(1+\frac{x-z}{1-z}\right);$$

но вмѣсто $\frac{x-z}{1-z}$ можно взять одно число u, и разложить $\log.(1+u)$ или $\log.\left(1+\frac{x-z}{1-z}\right)$ какъ $\log.(1+x)$, что̀ даетъ

$$\log.\left(1+\frac{x-z}{1-z}\right)=A.\frac{x-z}{1+z}+B\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^2+C\left(\frac{x-z}{1+z}\right)^3+\ldots$$

Вставимъ эту строку вмѣсто $\log.(1+x)-\log.(1+z)$ въ уравненіе [3], и раздѣлимъ уравненіе на $x-z$;

$$A.\frac{1}{1+z}+B.\frac{x-z}{(1+z)^2}+C.\frac{(x-z)^2}{(1-z)^3}+\ldots$$

$$=A+B(x+z)+C(x^2+xz+z^2)+\ldots$$

Это уравненіе должно, подобно предъидущимъ, удовлетворяться всѣми величинами x и z; поэтому положимъ $x=z$; будетъ

$$\frac{A}{1+x}=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+5Ex^4+\ldots.;$$

или, раздѣливъ на $1+x$, знаменателя 1-й части,

$$A(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^4+\ldots$$

И такъ, по правилу § 183 имѣемъ равенства

$$A=A,\ -A=2B,\ A=3C,\ -A=4D,\ A=5E\ldots;$$

откуда выводимъ

$$A=A,\ B=-\frac{A}{2},\ C=+\frac{A}{3},\ D=-\frac{A}{4},\ E=+\frac{A}{5}\ldots$$

Законъ составленія строки очевиденъ; предстоящее n-го члена равно $\pm\frac{A}{n}$, смотря по тому, будетъ ли n четное число или нечетное; и такъ, для $\log.(1+x)$ наконецъ получимъ

$$\log.(1+x)=\frac{A}{1}x-\frac{A}{2}x^2+\frac{A}{3}x^3-\ldots=A\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)$$

224. *Замѣчаніе.* По этому способу всѣ предстоящіе B, C, D, E, ... были опредѣлены въ функціи A, но это послѣднее предстоящее осталось неопредѣленнымъ. Такъ и быть должно по свойству выраженія, которое мы разлагали въ строку; потому что можно составить безчисленное множество системъ логариѳмовъ, и поэтому въ общей строкѣ, происходящей отъ разложенія log. $(1+x)$, должно существовать произвольное количество, посредствомъ котораго можно отличить системы логариѳмовъ одну отъ другой. Притомъ мы видѣли, § 212, что логариѳмы одного и того же числа, взятые въ двухъ системахъ, различаются только однимъ, *постояннымъ для всѣхъ чиселъ* множителемъ; слѣд. это произвольное количество должно быть общій множитель всѣхъ строкъ; по этой причинѣ мы нашли

$$\log.(1+x)=A\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+..\right) \quad [4].$$

Число A есть *модуль*, § 212, отъ величины котораго зависитъ свойство разсматриваемой системы логариѳмовъ.

225. Сдѣлаемъ простѣйшее предположеніе, то есть, положимъ $A=1$, и пусть l. $(1+x')$ означаетъ эту систему логариѳмовъ; получимъ

$$l'.(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+....[5].$$

Если возьмемъ для x всевозможныя величины, то послѣдовательно составимъ всѣ логариѳмы этой системы, которая называется *естественною* или *Неперовою системою* (отъ Непера, котораго почитаютъ изобрѣтателемъ логариѳмовъ). Займемся составленіемъ этой системы; изъ нее легко вывести всѣ прочія системы, принимая для A различныя величины, или по формулѣ § 212.

Въ строкѣ [5] положимъ $x=0$; будетъ $l'.1=0$. Полагая $x=1$, будетъ $l'.2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-....$; эта строка весьма мало уменьшается, и поэтому должно вычислить много членовъ, чтобы получить достаточно приближенныя величины; напр. должно вычислить 100 первыхъ членовъ для опредѣленія величины $l'.2$ вѣрно до 0,01, § 176. Вообще, этою строкою не опредѣлятся логариѳмы цѣлыхъ чиселъ; потому что для всякаго числа, болѣе 2, получимъ строку, въ которой члены безпрестанно увеличиваются.

Покажемъ теперь главнѣйшія преобразованія, посредствомъ которыхъ получаются ряды, дающіе логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ (въ таблицахъ помѣщаютъ только цѣлыя числа).

Первое преобразованіе. Въ строкѣ [5] положимъ $x=\frac{1}{y}$; замѣчая что $\mathrm{l}'.\left(1+\frac{1}{y}\right)=\mathrm{l}'.(y+1)-\mathrm{l}'.y$, будетъ

$$\mathrm{l}'.(y+1)-\mathrm{l}'.y=\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}+\frac{1}{3y^3}-\frac{1}{4y^4}+\ldots, \quad [6].$$

Дѣлая послѣдовательно $y=2,\ 3,\ 4\ \ldots$, находимъ

$$\mathrm{l}'.3-\mathrm{l}'.2=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\ldots$$

$$\mathrm{l}'.4-\mathrm{l}'.3=\frac{1}{3}-\frac{1}{18}+\frac{1}{81}-\frac{1}{324}+\ldots$$

$$\mathrm{l}'.5-\mathrm{l}'.4=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{1}{192}-\frac{1}{1024}+\ldots$$

Первая строка даетъ логариѳмъ числа 3 посредствомъ логариѳма 2; вторая, логариѳмъ 4 въ функціи логариѳма 3, и такъ далѣе. Притомъ всегда можно опредѣлить степень приближенія, § 176, потому что эти ряды состоятъ изъ членовъ поперемѣнно положительныхъ и отрицательныхъ, безпрерывно уменьшающихся.

Второе преобразованіе. Можно получить ряды, которые еще удобнѣе для вычисленій, слѣдующимъ образомъ: вставимъ $-x$ вмѣсто x въ строкѣ

$$\mathrm{l}'.(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$$

будетъ $\mathrm{l}'.(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$,

вычтя эти ряды одинъ изъ другаго, и замѣчая, что

$\mathrm{l}'.(1+x)-\mathrm{l}'.(1-x)=\mathrm{l}'.\frac{1+x}{1-x}$, получимъ

$$\mathrm{l}'.\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots\right).$$

Чтобы члены 2-й части уравненія быстро уменьшались, x должно быть весьма малою дробью, а въ этомъ случаѣ $\frac{1+x}{1+x}$ хотя больше 1, но очень немногимъ. И такъ положимъ $\frac{1+x}{1+x}=1+\frac{1}{z}$, ($z$ не меньше 1); будетъ

$(1+x)\,z=(1-x)\,(z+1)$, откуда получимъ $x=\frac{1}{2z+1}$.

Слѣд. строка обратится въ $\mathrm{l}'.\left(1+\frac{1}{z}\right)$, или

$$\mathrm{l}'.(z+1)-\mathrm{l}'.z=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3(2z+1)^3}+\frac{1}{5(2z+1)^5}+\ldots\right).$$

Этою строкою также опредѣляется разность двухъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ; но члены ея гораздо быстрѣе уменьшаются, нежели въ строкѣ [6]; поэтому она удобнѣе для употребленія.

Полагая послѣдовательно $z = 1, 2, 3, 4, \ldots$, находимъ

$$l'.2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 3^3} + \frac{1}{5 \times 3^5} + \frac{1}{7 \times 3^7} + \ldots\right),$$

$$l'.3 - l'.2 = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} + \frac{1}{7 \times 5^7} + \ldots\right),$$

$$l'.4 - l'.3 = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3 \times 7^3} + \frac{1}{5 \times 7^5} + \frac{1}{7 \times 7^7} + \ldots\right).$$

. . . .

Положимъ $z = 100$; тогда

$$l'.101 - l'.100 = 2\left(\frac{1}{201} + \frac{1}{3(201)^3} + \frac{1}{5(201)^5} + \ldots\right);$$

когда логариѳмъ числа 100 извѣстенъ, достаточно взять 1-й членъ строки, чтобы получить логариѳмъ числа 101 съ 7-ю десятичными.

Есть другія, еще удобнѣйшія формулы, для опредѣленія логариѳмовъ въ функціи другихъ извѣстныхъ логариѳмовъ; но предъидущихъ достаточно, чтобы показать, какъ легко составить логариѳмическія таблицы.

226. Когда Неперовы логариѳмы вычислены, легко составить всякую другую систему.

Напримѣръ, для составленія обыкновенной системы, должно, § 212, умножить каждый Неперовъ логариѳмъ на модуль $\frac{1}{l'.10}$. Это число, выраженное въ десятичныхъ и вычисленное очень приблизительно, равно 0,4342944819; это *модуль для перехода отъ Неперовой системы къ обыкновенной, имѣющей основаніемъ* 10.

Притомъ этотъ модуль выражаетъ *обыкновенный логариѳмъ основанія Неперовой системы;* потому что, означая это основаніе буквою e, имѣемъ $e^{l'10} = 10$, или, взявъ обыкновенные логариѳмы,

$$l'.10 \times \log.\, e = \log.\, 10 = 1;\ \text{слѣд.}\ \log.\, e = \frac{1}{l'.10} = 0{,}43429\ldots$$

Опредѣляя соотвѣтствующее этому логариѳму число по обыкновеннымъ таблицамъ, находимъ

$$0{,}4342944819\ldots = \log.\, e = \log.\, 2{,}7182818284\ldots$$

И такъ, $e = 2{,}7182818284\ldots$

Мы скоро получимъ этотъ выводъ другимъ образомъ.

227. *Разложеніе количества* a^x въ строку.

Связь, существующая между неопредѣленно-степенными количествами и логариѳмами, [связь эта состоитъ въ томъ, что въ системѣ логариѳмовъ, въ которой a основаніе, x будетъ, § 208, логариѳмомъ выраженія a^x], заставляетъ насъ предполагать, что a^x также можно разложить въ строку по степенямъ x; тогда мы имѣли бы строку, происходящую отъ разложенія числа, въ функціи его логариѳма, то есть, обратное предъидущихъ предложеній.

Положимъ, эта строка будетъ вида

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \; . \; . \; . \; . \; [1];$$

полагая $x=0$, уравненіе обратится въ $a^0=1$; этотъ выводъ справедливъ, и поэтому можемъ допустить всю строку.

Для опредѣленія A, B, C, . . . , вставимъ z вмѣсто x; будетъ $a^z = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \; . \; . \; . \; , [2]$; вычтя уравненіе [2] изъ [1], получимъ уравненіе

$$a^x - az = A(x-z) + B(x^2-z^2) + C(x^3-z^3) + \; . \; . \; . \; [3];$$

вторая часть дѣлится на $x-z$; чтобы освободить этотъ множитель и въ 1-й части, замѣтимъ, что $a^x - a^z$ можно представить подъ видомъ $a^z(a^{x-z}-1)$; слѣд. если въ строкѣ [1] вмѣсто x вставимъ $x-z$, будетъ

$$a^z(a^{x-z}-1) = a^z[(Ax-z) + B(x-z)^2 + C(x-z)^3 + \ldots.]$$

Вставивъ въ уравненіе [3] вмѣсто $a^x - a^z$ эту величину, и раздѣливъ уравненіе на $x-z$, находимъ

$$a^z[A + B(x-z) + C(x-z)^2 + \; . \; . \; . \; .]$$
$$= A + B(x+z) + C(x^2+xz+z^2) + \; . \; . \; . \; .$$

Въ этомъ уравненіи положимъ $x=z$; оно обратится въ

$$a^x . A = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 \; . \; . \; . \; .$$

или, вставивъ вмѣсто a^x строку [1],

$$A + A^2x + ABx^2 + \; . \; . \; . = A + 2Bx + 3Cx^2 + \; . \; . \; . \; .$$

Сравнивая отдѣльно предстоящія одинакихъ степеней, получимъ $A=A,\ A^2=2B,\ AB=3C,\ AC=4D\ldots$;

откуда $A=A,\ B=\dfrac{A^2}{1.2}\ C=\dfrac{A^3}{1.2.3},\ D=\dfrac{A^4}{1.2.3.4}$.

Законъ составленія строки очевиденъ; членъ, передъ которымъ въ строкѣ [1] находится n членовъ, выраженъ количествомъ $\dfrac{A^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,n}$.

Здѣсь всѣ предстоящія B, C, D . . . выражены въ функціи предстоящаго A, которое еще остается *неопредѣленнымъ*, т. е. этого способа недостаточно, для опредѣленія предстоящаго A; но не менѣе того, оно имѣетъ опредѣленную величину, которая найдется слѣдующимъ пріемомъ:

Можно представить a^x въ видѣ $(1+\overline{a-1})^x$ или $(1+b)^x$, полагая, для краткости, $a-1=b$; разложивъ $(1+b)^x$ въ строку, по формулѣ двучлена получимъ

$$(1+b)^x=1+\frac{x}{1}b+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}b^2+\frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}b^3+\ .\ .\ .$$

но взявъ только ту часть строки, въ которой содержится x, для этой части получимъ выраженіе

$$\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^5}{6}-\ldots\right)x;$$

притомъ предстоящее x въ строкѣ [1] равно A, слѣд. имѣемъ

$$A=\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^5}{5}-\ .\ .\ .,$$

или, вставляя вмѣсто b величину его $a-1$,

$$A=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\ .\ .\ .$$

Обыкновенно означаютъ буквою k выраженіе $\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)}{3}-\ .\ .\ .$; и такъ, вставивъ k вмѣсто A въ величинахъ полученныхъ для B, C, D . . . , и помѣстивъ эти величины въ строкѣ [1], получимъ наконецъ для разложенія количества a^x,

$$a^x=1+\frac{kx}{1}+\frac{k^2x^2}{1.2}+\frac{k^3x^3}{1.2.3}+\frac{k^4x^4}{1.2\ 3.4}+\ldots.[4]$$

228. *Слѣдствіе.* Если въ этой строкѣ положимъ $x=1$, она обратится въ

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3.}+\frac{k^4}{1.2.3.4}+\ .\ .\ .\ .;$$

здѣсь a выражено въ функціи k, также какъ въ отношеніи $k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\ .\ .\ .$ имѣли k въ функціи a.

Теперь отыщемъ частную величину a, соотвѣтствующую $k=1$; называя c эту величину, находимъ

$$c=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3.}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ .\ .\ .\ .\ .,$$

строка убывающая, въ которой сумма 11 первыхъ членовъ равна 2,7182818, вѣрно до 0,0000001.

Сравнивая этотъ выводъ съ числомъ, которое получили въ § 226 для величины e, основанія Неперовыхъ логариѳмовъ, можно заключить, что c и e *тождественны*. Это можно доказать.

Въ формулѣ [4] положимъ $kx=1$, откуда $x=\frac{1}{k}$; она обратится въ $a^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.$, что необходимо даетъ $a^{\frac{1}{k}}=c$.

Взявъ логариѳмы послѣдняго равенства въ системѣ имѣющей основаніемъ c, находимъ

$$\frac{1}{k}\log.\ a=1,\ \text{откуда}\ \log.\ a=k,$$

или, вставивъ вмѣсто k величину его, § 227,

$$\log.\ a=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{1}+\frac{(a-1)^3}{2}-\frac{(a-1)^4}{3}+\ldots.;$$

или, полагая $a=1+x$, откуда $a-1=x$,

$$\log.(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

Эту же формулу получили въ § 225 для разложенія Неперова логариѳма $1+x$; слѣд. c и e *тождественны*.

229. Покажемъ теперь различные виды, принимаемые формулою [4] въ § 227.

Возьмемъ снова отношеніе $a^{\frac{1}{k}}=e$ или $a^{\frac{1}{k}}=c$, (потому что $c=e$), и отыщемъ логариѳмы его въ какой ни есть системѣ; будетъ $\frac{1}{k}.\log.a=\log.\ e$, откуда $k=\frac{\log.\ a}{\log.\ e}$

И такъ, формула [4] обращается въ

$$a^x=1+\frac{x}{1}.\frac{\lg.a}{\lg.e}-\frac{x^2}{1.2}.\left(\frac{\lg\ a}{\lg.e}\right)^2+\frac{x^3}{1.2.3}.\left(\frac{\lg.a}{\lg.e}\right)^3+\ldots.$$

Въ этомъ видѣ обыкновенно представляютъ строку отъ разложенія a^x, полагая что взяты логариѳмы какой ни есть системы.

Частные случаи. 1-е. Число a можно взять за основаніе системы логариѳмовъ; въ этомъ случаѣ $\log.\ a=1$ и $k=\frac{1}{\log.e}$; формула обратится въ

$$a^x=1+\frac{x}{1}.\frac{1}{\log.e}+\frac{x^2}{1.2}.\left(\frac{1}{\log.e}\right)^2+\frac{x^3}{1.2.3}.\left(\frac{1}{\log.e}\right)^3+\ldots.$$

Этотъ видъ будетъ имѣть разложеніе какого ни есть числа въ функціи логариѳма его, котораго основаніемъ будетъ a.

2-е. Когда постоянное число e взято за основаніе системы логариѳмовъ, тогда $\log.\,e = 1$, откуда $k = \log.a$, или лучше сказать, $k = l'.a$, по § 225; при этомъ предположеніи будетъ

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}.\,l.'a + \frac{x^2}{1.2}.\,(l.'a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\,(l'.a)^3 + \ldots$$

3-е. Наконецъ, положимъ $a = e$, что необходимо даетъ $\frac{\log.a}{\log.e}$ или $k = 1$. Формула обратится въ

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Эта строка самая употребительная, и даетъ разложеніе числа въ функціи его Неперова логариѳма.

Въ послѣдней главѣ мы увидимъ слѣдствія, выводимыя изъ этихъ формулъ; но теперь же можемъ показать, какимъ образомъ разложеніе логариѳмовъ въ ряды выводится изъ разложенія неопредѣленно-степенныхъ количествъ.

Во-первыхъ, отношеніе $k = \frac{\log.a}{\log.\,e}$, которое обращается въ $k = l'.a$, когда возьмемъ e за основаніе системы логариѳмовъ даетъ, § 227,

$$l'.a = \frac{a-x}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots..,$$

или $$l'.(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots..$$

Изъ этого же отношенія послѣ выводимъ

$$\log.\,a = k.\,\log.\,e,$$

а вставивъ вмѣсто k величину его, и полагая $a = 1 + x$,

$$\log.\,(1+x) = \log.\,e\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

Легко найти неизвѣстный модуль, $\log.\,e$, § 226, когда вычислены Неперовы логариѳмы.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

(Статьи, означенныя звѣздочкой, (*), не входятъ въ курсъ преподаванія въ Институтахъ: Корпуса Путей Сообщенія и Горномъ).

ВВЕДЕНІЕ.

ГЛАВА I. *Алгебраическія дѣйствія.*

ГЛАВА II. *Вопросы и уравненія первой степени.*

ГЛАВА III. *Задачи и уравненія второй степени.*

ГЛАВА IV. *Неопредѣленный анализъ.*