ANALYTISCHE
GEOMETRIE
Der
Kegelschnitte

# ANALYTISCHE GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE

MIT BESONDERER

BERÜCKSICHTIGUNG DER NEUEREN METHODEN

VON

GEORGE SALMON.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS

DEUTSCH BEARBEITET

VON

**Dr. WILHELM FIEDLER.**



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1860.

# Vorrede.

Das vorliegende Werk ist eine Bearbeitung des „A Treatise on Conic Sections. By the Rev. George Salmon, A. M., Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin.“, welches im Jahre 1848 in London zuerst und 1855 in dritter Auflage erschien.

Durch diesen seltenen Erfolg, die vielseitige Anerkennung in den gelehrten Zeitschriften und durch die bald erfolgte Unternehmung französischer Uebersetzungen wurde dasselbe vor vielen ähnlichen Werken ausgezeichnet. Möge die vorliegende Ausgabe ihm auch in Deutschland solche Anerkennung erwerben.

Ich fürchtete nicht, zu irren, wenn ich die Ursache jenes Erfolgs wesentlich in Eigenschaften zu erkennen glaubte, welche auch in Deutschland noch zu selten bei ähnlichen Werken gefunden werden, und die doch ohne Zweifel denen im höchsten Grade förderlich sind, welche die analytische Geometrie studiren. In der Entwickelung der neueren Methoden, derjenigen zuerst, welche die analytische Geometrie über das Coordinatensystem des Cartesius hinausführten, und der andern sodann, durch welche sie seitdem zu einer rein analytischen Wissenschaft sich immer vollständiger entwickelt hat, sah ich den Kern jener Vorzüge.

Man findet im I., II. und V. Kapitel des Buches alles Wesentliche zur Theorie des Punktes und der geraden Linien im System der Cartesischen und dem der Polar-Coordinaten; ebenso im VI., VII., X und XI. Kapitel die Theorie der Kegelschnitte, überall mit sorgfältig gewählten Aufgaben begleitet. Zudem enthalten die Kapitel III., VIII. und XII besondere reichhaltige Aufgaben-Sammlungen zur Förderung des weiteren Studiums dieser Partien. Die

Gesammtzahl der in diesen elementaren Theilen des Werks enthaltenen Aufgaben beläuft sich auf nahe dreihundert.

Aller übrige Raum und damit die bei weitem grössere Hälfte des Werkes ist der Einführung in die neueren Methoden und der Entwickelung jener umfassenderen Gesichtspunkte gewidmet, welche die Gesammtheit derselben zu geben vermag; denn es ist ein sehr reicher Erwerb, den die analytische Geometrie seit der Zeit der grossen Arbeiten von Poncelet und Carnot, von Möbius und Plücker gemacht hat. Ihn den Elementen zu verknüpfen, auf die man sich gewöhnlich allein beschränkt, in einem Buche von mässigem Umfange von jenen Elementen zu dem gegenwärtigen Standpunkt der wissenschaftlichen Arbeit hinzuführen, das schien mir seit lange eine wichtige Aufgabe; es war der entscheidende Antrieb zur Unternehmung der vorliegenden Arbeit, dass ich in dem englischen Original einen ausgezeichneten Versuch zur Lösung derselben gemacht fand.

Es war ferner meine Auffassung dieser Aufgabe und des Verhältnisses deutscher Studirenden zu ihr, woraus eine Reihe von Erweiterungen und Veränderungen hervorging, welche ich hier zu bezeichnen die Pflicht habe. Sie betreffen: Im IV. Kapitel die Theorie der dreipunktigen Linear-Coordinaten, durch deren Zusammenstellung mit dem System der dreiseitigen Punkt-Coordinaten später das Princip der Dualität zu so einfachem Ausdruck gelangt; überall in den späteren Kapiteln knüpfen sich daran andre Erweiterungen zur Erläuterung der dualen Interpretation analytischer Resultate. Im XIII. Kapitel die Anwendung des Differential- und Integral-Calculs zur Quadratur und Rectification der Kegelschnitte. Die Artikel 312—326 des XIV. und mit Ausnahme der Artikel 328—333 und 362—367 das ganze XV. Kapitel, welches der Anwendung der homogenen Formen und der Determinanten-Theorie auf die Geometrie gewidmet ist. Endlich im XVI. Kapitel die Theorie der geometrischen Verwandtschaften in den Artikeln 453—480. Dazu kommt die Stellung der Theorie des Kreises nach der Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung, anstatt wie gewöhnlich vor derselben. Ueberdies finden sich in allen Theilen des Werkes zerstreut kleinere Zusätze, die hier nicht aufzuzählen nöthig ist.

Für alle wesentlichen Veränderungen habe ich mich der Billigung und der ausgezeichnet fördernden Theilnahme des Verfassers zu erfreuen gehabt. Dieselbe hat mir die ganze Arbeit zu einer ungemein genussreichen und angenehmen gemacht. Seinen inhaltreichen Briefen verdanke ich die Anregung zu einigen Anmerkungen und Erweiterungen, die man gewiss als sehr schätzbare Bereicherungen erkennen wird; eine briefliche Andeutung ist z. B. die Quelle der im Schluss des VI. Zusatzes gegebenen Entwickelungen über einen Satz von Faure. Auch ist sehr Vieles von dem in den Erweiterungen verwendeten Material das Seine und in anderen Schriften und Abhandlungen von ihm schon in ähnlicher Form gegeben worden; so z. B. die Theorie der dreipunktigen Linear-Coordinaten in dem einleitenden Abschnitt des „Treatise on the higher plane Curves" und die Theorie der geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades im VI. Kapitel des nämlichen Werkes. Ich hoffe, dass gerade die sorgfältige Benutzung dieser Arbeiten zur Einheit des Ganzen wesentlich beigetragen habe.

Von jener Absicht, das Buch zu einer möglichst vollständigen und gründlichen Einführung in die gegenwärtige wissenschaftliche Situation der analytischen Geometrie zu gestalten, liess ich mich bei allen jenen Erweiterungen leiten. Sollte sie selbst der Rechtfertigung bedürfen? Ich weiss es wohl, dass in den Arbeiten unserer Möbius und Plücker die allgemeine Coordinaten-Bestimmung längst eine sehr tiefe und vollständige Begründung gehabt hat, dass es für den Kenner der mathematischen Literatur nicht schwer ist, von diesen Arbeiten aus die ganze sogenannte neuere Geometrie, die Entdeckungen von Steiner, Chasles etc., dem analytischen Gedankengange anzuschliessen, und dass auch der Weg zu den an homogenen Formen entwickelten Ergebnissen von Hesse, Joachimsthal und Cayley mit geringer Mühe zu finden ist. Und doch glaube ich, dass ein Buch, welches bei mässigem Umfange systematisch die Hauptergebnisse dieser Forschungen vereinigt und so das Studium der Original-Arbeiten nicht überflüssig jedoch leichter und fruchtbarer macht, jedem Studirenden willkommen ist. In diesem Sinne wird — so hoffe ich — das Studium des gegenwärtigen Buches durch die trimetrischen Coordinaten-Systeme und die Methoden der abgekürzten Bezeichnung (Kap. IV, VIII, XIV) zu dem „barycentrischen Calcul“ von Möbius und dem „System der analytischen Geometrie“ von Plücker hinführen; die im „Systeme der analytischen Geometrie des Raumes“ von Plücker bereits gegebene Entwickelung des tetraedrischen Coordinaten-Systems schliesst sich dann als eine leichte Erweiterung an. Ebenso soll die Methode der Projectionen zum Studium von Poncelet's „Traité des propriétés projectives des figures,“ die Theorie der geometrischen Verwandtschaften ersten Grades zu dem der zahlreichen Arbeiten dieser Richtung seit Möbius, Plücker, Steiner und Magnus anleiten, so endlich das Kapitel von der allgemeinen homogenen Gleichung zur Algebra der linearen Transformationen, die als eine allgemeine algebraisch-geometrische Formenlehre mehr und mehr in den Mittelpunkt der Wissenschaft rückt.

Vielleicht kann man fragen, warum aus der grossen Zahl der behandelten und der möglichen Coordinaten-Systeme hier nur die beiden dreiseitigen berücksichtigt worden sind? Aber ich hielt dafür, dass es wohl Aufgabe eines Werkes mit dem geschilderten Zwecke sei, die Coordinaten-Bestimmung in völliger Allgemeinheit zu entwickeln, aber keineswegs möglichst viele specielle Formen derselben durchzuführen. Für das genaue Studium des Gegenstandes darf man wohl auf die speciell demselben gewidmeten Schriften verweisen, von denen ich hier nennen will: „Neun verschiedene Coordinaten-Systeme, im Zusammenhang untersucht von J. G. H. Swellengrebel.“ Bonn 1853, und „Die Uebertragungs-Principien der Analytischen Geometrie von N. Druckenmüller.“ Bd. I. Trier 1842. Endlich „Leçons sur les Coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, par G. Lamé. Paris 1859. — Dann aber wird man schwerlich tadeln wollen, dass die trimetrischen Systeme gewählt wurden, die so innig mit dem Fortschritt der Geometrie verwachsen sind und deren Anwendung, stillschweigend oder ausgesprochenermassen, seit dem barycentrischen Calcul in den eigentlich wissenschaftlichen Arbeiten immer häufiger geworden ist, die auch den neuesten Forschungen über die Theorie der höheren ebenen Curven und, in ihrer tetraedrischen Fortentwickelung, der algebraischen Oberflächen zu Grunde gelegt sind.

Andererseits dürfte wohl kaum die Aufnahme einiger rein algebraischen Artikel aus der Theorie der Determinanten bedenklich gefunden werden, weil überall schon die nächsten Schritte in dieser Theorie wieder der geometrischen Interpretation fähig sind, und weil gerade die geometrische Auffassung dem Verständniss dieser Theorie selbst ungemein förderlich ist. Hoffentlich zeigen die zahlreichen grösseren Beispiele (Kap. XV und XVI) hinreichend deutlich, wie die Theorie der linearen Transformationen einerseits mit gewissen Functionen der in der Gleichung einer geometrischen Form vorkommenden Coefficienten bekannt macht, welche die Eigenschaft der Invariabilität besitzen, und deren Verschwinden eine von der Wahl der Coordinaten-Achsen unabhängige Eigenschaft der dargestellten Curve oder Oberfläche ausdrückt (Invarianten), und wie sie andererseits die Gleichungen anderer geometrischer Formen entwickeln lehrt, welche permanente d. i. solche Beziehungen zu der gegebenen besitzen, welche durch die Wahl der Coordinaten-Achsen nicht geändert werden (Covarianten); es ist auch angedeutet, wie sie zur Erkenntniss der einfachsten analytischen Ausdrücke oder der kanonischen Formen für jedes geometrische Gebild zu führen vermag.

Allerdings konnte Alles dies wegen der Beschränkung auf das Gebiet der Gleichungen zweiten Grades mit nur zwei oder drei Veränderlichen nur eine Einführung sein, und hier und da konnten die Ergebnisse mehr nur angedeutet als vollständig entwickelt werden. So hat die allgemeine Differential-Gleichung der Invarianten und die Methode ihrer Entwicklung aus der Natur einer algebraischen homogenen Form nicht gegeben werden können; aber es ist gezeigt worden, wie den Begriffen der Invarianten und Covarianten alle analytisch-geometrischen Bedingungen sich einordnen, von denen im Gebiete der binären Formen die harmonische Theilung, die Lage der Brennpunkte in involutorischen Systemen etc., in dem der ternären die Deformirung eines Kegelschnitts in zwei gerade Linien, die Gattung desselben u. s. w., sowie alle unveränderlichen Beziehungen von zwei und drei Kegelschnitten zu einander abhängen. Dass die hier entscheidenden Formen Invarianten oder Covarianten der gegebenen Formen sind, konnte gezeigt werden, aber ob sie alle möglichen oder auch nur die hauptsächlichsten Functionen dieser Art sind, welche der gegebenen Form entsprechen, ist aus diesem Grunde eine offene Frage geblieben. Und alle die Bedenken, welche ich mir selbst gegen die Aufnahme solcher Partien, deren wissenschaftlicher Abschluss über das Ziel des gegenwärtigen Werkes hinausgeht, erhoben habe, mussten doch vor der Ueberlegung verschwinden, dass es in der Natur der Sache begründet sei, wenn die erste Stufe der analytisch-geometrischen Wissenschaft, die Theorie der Kegelschnitte, noch nicht die vollständige Verfügungsfähigkeit über alle Hilfsmittel erlangt, welche der weiter vorgeschrittenen Wissenschaft zu Gebote stehen; dass es aber trotzdem einer wissenschaftlichen Darstellung derselben zukomme, die bahnbrechenden Gedanken möglichst frühe zu entwickeln, von welchen dieser Fortschritt am kräftigsten gefördert wird. Gewiss, dass die Algebra der linearen Transformationen in ihrer Ausbildung zur analytisch-geometrischen Formenlehre einer der wichtigsten unter ihnen ist; und merkwürdig genug, dass das 19. Jahrhundert erst den genialen Gedanken des grossen Leibnitz von einer „Characteristica situs" verwirklicht! (Leibnitz an de l'Hospital, vom 28. April 1693 in „Leibnitzen's Mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt. Berlin 1850." Bd. II. p. 236.)

Es sind dem gegenwärtigen Werke einige Zusätze beigefügt, welche specielle Fragen behandeln, die in der systematischen Entwickelung nicht mit solcher Ausführlichkeit Platz finden konnten. Der erste derselben stellt, in der Absicht, auf das Studium des barycentrischen Calculs hinzuführen, die statische Begründung der trimetrischen Coordinaten-Systeme neben die im Buche selbst gegebene rein geometrische, und man wird mit besonderer Freude die statische Begründung des trimetrischen Punkt-Coordinaten-Systems durch den Herrn Prof. Möbius selbst gegeben finden; auf meinen Wunsch gestattete er mir freundlich den Abdruck einer darauf bezüglichen brieflichen Mittheilung.

Der zweite und dritte Zusatz sind mit einigen Erweiterungen aus dem Original selbst herübergenommen, während die drei letzten wieder neu hinzugefügt wurden. Man wird bemerken, dass die Entwickelungen in der letzten Hälfte des Zusatzes VI sich sofort auf die Oberflächen zweiten Grades und die den in Bezug auf sie sich selbst conjugirten Tetraedern eingeschriebenen und umschriebenen Kugeln übertragen lassen. Wenn hier der Ort nicht war, darauf näher einzugehen, so mögen diese Entwickelungen doch eben deshalb schicklich den Schluss des gegenwärtigen Bandes bilden.

Es scheint mir angemessen, hier Mittheilungen zu machen über eine Fortsetzung dieses Werkes, welche ich beabsichtige, wenn eine entsprechende Aufnahme desselben mich dazu ermuntert. Dieselbe soll zunächst dies Werk durch eine analytische Geometrie der höheren ebenen Curven vervollständigen, und später möchte sich daran eine in demselben Geiste bearbeitete analytische Geometrie des Raumes anschliessen. Für jene würde das von competenten Beurtheilern hochgeschätzte „Treatise on the higher plane Curves" des Verfassers der „Conic Sections" die Grundlage bilden, und ich habe bereits die werthvolle Zusage desselben erhalten, die durch den Fortschritt der Wissenschaft wünschenswerth gewordenen nicht unbedeutenden Veränderungen durch die Ergebnisse seiner eignen und der Arbeiten seiner gelehrten Landsleute, sowie durch seine ausdauernde berathende Theilnahme zu fördern. Die analytische Geometrie des Raumes soll über die Theorie der Oberflächen zweiten Grades hinaus die Grundlinien einer Theorie der algebraischen Oberflächen überhaupt und die Anwendung der allgemeinen Principien auf die Theorie der Oberflächen dritter Ordnung insbesondere enthalten; eine geringere Ausführlichkeit in den elementaren Theilen wird bei der Leichtigkeit, mit der sich die in diesem Bande dargelegten Principien auf den Raum übertragen, und mit welcher insbesondere die tetrametrischen Coordinaten-Systeme aus den trimetrischen hervorgehen, sehr wohl zulässig sein.

Weil aber für die allgemeine Theorie der Curven ebenso, wie für eine ähnliche analytische Geometrie des Raumes die vollständige

Theorie der linearen Transformationen unentbehrlich ist, so sollte der analytischen Geometrie der höheren ebenen Curven eine Einleitung über diese Theorie vorausgehen, welche überall das, was in den Artikeln des gegenwärtigen Bandes nur in der Fassung eines speciellen Falles oder gar nicht entwickelt werden konnte, in seiner wahrhaft allgemeinen Form und bis zu den neuesten Ergebnissen fortgeführt darbieten würde. Die „Lessons introductory to the modern higher Algebra. By the Rev. G. Salmon. Dublin 1859“ sollen den Kern derselben bilden. Wegen ihres Umfangs und um ihrer reiner algebraischen Natur willen kann sie selbstständig und vor der analytischen Geometrie der höheren ebenen Curven erscheinen. Sie wird durch ihre allgemeine Fassung zugleich die Grundlage für die entsprechenden Partien der analytischen Geometrie des Raumes bilden, und ich hege die Hoffnung, dass sie dem deutschen mathematischen Publikum deshalb besonders willkommen sein möge, weil so Vieles in den neuesten Entwickelungen dieser Theorie in schwerer zugänglichen englischen Quellen enthalten ist; ich hege sie am sichersten von dem Leser dieses Werkes, der in dieser Ergänzung die weitere Entwickelung manches belangreich scheinenden Anfanges erwarten mag.

Und so empfehle ich denn das Buch dem wohlwollenden Urtheil der Herren Fachgenossen und der Aufmerksamkeit aller derjenigen, welche mathematische Studien lieben oder sich denselben widmen wollen.

Chemnitz, im August 1860.

**Wilhelm Fiedler.**

# Inhaltsverzeichniss.

## I. Kapitel.

## Der Punkt.



## II. Kapitel.

## Die gerade Linie.

### III. Kapitel.

## Aufgaben über die gerade Linie.



### IV. Kapitel.

## Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie.



### V. Kapitel.

## Gleichungen von höheren Geraden, welche gerade Linien darstellen.

### VI. Kapitel.

## Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung.



### VII. Kapitel.

## Der Kreis.



### VIII. Kapitel.

## Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis; Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf seine Gleichung.

### IX. Kapitel.

## Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen.



### X. Kapitel.

## Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades als Central-Gleichung: Ellipse und Hyperbel.

### XI. Kapitel.

## Die Parabel.



### XII. Kapitel.

## Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte.

## XIII. Kapitel.

## Die Methode des Unendlich-Kleinen, die Quadratur und Rectification der Kegelschnitte.

### XIV. Kapitel.

## Die Methoden der abgekürzten Bezeichnung, die trimetrischen Coordinaten-Systeme und das Princip der Dualität in ihrer Anwendung auf die Kegelschnitte.

## XV. Kapitel.

## Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades und die Algebra der linearen Transformationen.

## XVI. Kapitel.

## Geometrische Methoden.

### I. Die Methode der reciproken Polaren.

## II. Die harmonischen und anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

## III. Die Methode der Projectionen und die geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades.

## Zusätze.

## Erstes Kapitel.

# Der Punkt.

1. Die Sätze der Geometrie können in zwei Klassen eingetheilt werden, nämlich in Sätze, welche die Grösse von Linien und in solche, welche die Lage derselben betreffen. Dass das Quadrat der Hypothenuse ebenso gross ist als die Summe der Quadrate der Katheten, ist ein auf die Grösse bezüglicher Satz; dass die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte begegnen, ist dagegen ein Satz über die Lage.

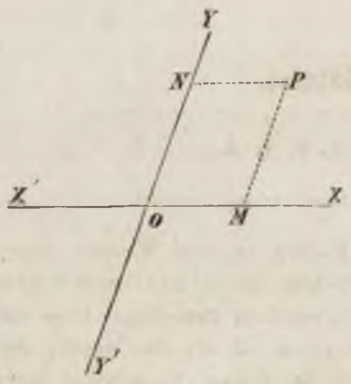
Die Sätze der ersten Klasse können leicht algebraisch ausgedrückt werden; wählen wir das vorher gegebene Beispiel, so kann der angezogene Satz, wenn $a$, $b$, $c$ die Längen der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnen, geschrieben werden $c^2 = a^2 + b^2$. Mit dieser Anwendung der Algebra auf die Geometrie ist der Leser längst vertraut, da die Sätze des zweiten Buches von Euklid zumeist Beziehungen der Grössen von Linien betreffen und der Beweis fast immer durch den Gebrauch algebraischer Symbole vereinfacht ist.

Es ist weit weniger leicht zu sehen, auf welche Weise Sätze algebraisch auszudrücken sind, die sich auf die Lage von Linien beziehen. Obgleich daher die Algebra bald nach ihrer Einführung in Europa zur Auflösung der ersten Klasse von Aufgaben benutzt ward, so ward doch ihre Anwendung nicht vor dem Jahre 1637 auf diese letztere Klasse derselben ausgedehnt, in welchem Jahre Des Cartes durch die Publikation seiner „Geometrie“ den Grund zu der Wissenschaft legte, in welche wir einzutreten im Begriff sind.

2. Die von Des Cartes eingeführte und durch die späteren Geometer allgemein gebrauchte Methode zur Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Ebene ist die folgende.

Wir setzen voraus, dass die Lage zweier festen geraden Linien $XX'$, $YY'$, die sich in dem Punkte O durchschneiden, bekannt sei. Wenn wir nun durch irgend einen Punkt $P$ $PM$ parallel zu $YY'$ und $PN$ parallel zu $XX'$ ziehen, so ist offenbar, dass wir aus der Lage des Punktes $P$ die Längen der Parallelen $PM$ und $PN$ erfahren und dass wir umgekehrt aus den Längen von $PM$ und $PN$ die Lage des Punktes $P$ ableiten können. Setzen wir z. B. voraus, das $PN = a$, $PM = b$ gegeben wären, so haben wir $OM = a$, $ON = b$ abzutragen und durch $M$ und $N$ die Parallelen zu $YY'$ und $XX'$ respective zu ziehen, welche sich alsdann in dem Punkte $P$ durchschneiden.

Fig. 1.




Es ist gebräuchlich die zu $YY'$ parallele Linie $PM$ durch $y$ und die zu $XX'$ parallele Linie $PN$ durch $x$ zu bezeichnen und von dem Punkte $P$ ist alsdann zu sagen, dass er durch die Gleichungen $x = a$, $y = b$ bestimmt ist.

3. Die Parallelen $PM$, $PN$ werden die Coordinaten des Punktes $P$ genannt, die Parallele zu $YY'$ heisst gewöhnlich die Ordinate und die Parallele zu $XX'$ die Abscisse des Punktes $P$.

Die festen geraden Linien $XX'$ und $YY'$ werden als die Coordinaten-Achsen bezeichnet und der Punkt $O$, in welchem sie sich durchschneiden, heisst der Anfangspunkt. Man nennt die Achsen rechtwinklig oder schiefwinklig, je nachdem der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, ein rechter Winkel ist oder nicht.

Man sieht leicht, dass die Coordinaten des Punktes $M$ in der vorigen Figur $x = a$, $y = o$ sind; die des Punktes $N$ $x = o$, $y = b$ und die des Anfangspunktes selbst $x = o$, $y = o$.

4. Damit den Gleichungen $x = a$, $y = b$ nur durch einen Punkt genügt werde, ist es nothwendig, nicht allein die Grössen, sondern auch die Vorzeichen der Coordinaten zu beachten. Wenn wir auf die Vorzeichen der Coordinaten nicht achten, so dürfen wir $OM = a$ und $ON = b$ zu beiden Seiten des Anfangspunktes abtragen und jeder der vier Punkte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ genügt den Gleichungen $x = a$, $y = b$. Es ist aber möglich, zwischen den Linien $OM$, $OM'$ (welche der Grösse nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt sind), algebraisch zu unterscheiden, indem man ihnen verschiedene Vorzeichen beilegt. Wir lassen als Regel gelten, dass, wenn in einer bestimmten Richtung gemessene Linien als positive betrachtet werden, in der entgegengesetzten Richtung gemessene Linien als negativ zu betrachten sind. Es ist dabei willkürlich, in welcher Richtung wir die positiven Linien messen, aber es ist gebräuchlich, das nach rechts gemessene $OM$ und das nach oben gemessene $ON$ als positive und die in den entgegengesetzten Richtungen abgetragenen $OM'$, $ON'$ als negative Linien zu betrachten. Vermittelst dieser Bestimmungen sind die vier Punkte $P$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ leicht zu unterscheiden; ihre Coordinaten sind respective

Fig. 2.

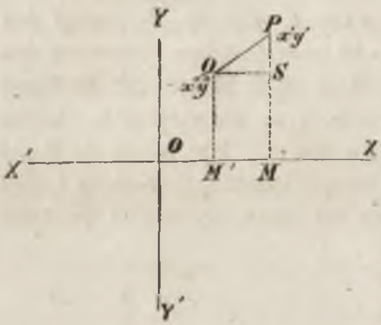

$$x = +a, \quad x = -a, \quad x = +a, \quad x = -a.$$
$$y = +b, \quad y = +b, \quad y = -b, \quad y = -b.$$

Diese Unterscheidung der Vorzeichen kann dem Anfänger keine Schwierigkeit darbieten, von welchem vorausgesetzt werden darf, dass er mit den Principien der Trigonometrie vertraut ist. Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Punkte $x = +a$, $y = +b$ und $x = -a$, $x = -b$ in einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie liegen und dass sie vom Anfangspunkte gleichweit nach entgegengesetzten Seiten entfernt sind.

*NB.* Punkte von den Coordinaten $x = a$, $y = b$, oder $x = x'$, $y = y'$ werden kurz als Punkt $ab$ und Punkt $x'y'$ bezeichnet.

5. **Die Entfernung zweier Punkte $x'y'$, $x''y''$ unter Voraussetzung rechtwinkliger Achsen durch ihre Coordinaten auszudrücken.**

Fig. 3.




Nach Euklid I, 47 ist

$$PQ^2 = PS^2 + SQ^2;$$

es ist aber

$$PS = PM - QM' = y' - y'',$$
$$QS = OM - OM' = x' - x'';$$

also

$$\delta^2 = PQ^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2.$$

Um die Entfernung irgend eines Punktes vom Anfangspunkte auszudrücken, müssen wie $x'' = o$, $y'' = o$ setzen und erhalten $\delta^2 = x^2 + y^2$.

Da die Entfernung zweier Punkte als eine Quadratwurzel gefunden wird, so hat sie wesentlich ein doppeltes Vorzeichen. Wir deuten dasselbe auf den verschiedenen Sinn, in welchem die geradlinige Strecke durchlaufen werden kann. Wenn die Entfernung $PQ$ als positiv angesehen wird, so ist die Strecke $QP$ negativ.

6. In dem Folgenden werden wir zwar nur selten Ursache haben von schiefwinkligen Coordinaten Gebrauch zu machen, weil im Allgemeinen die Formeln bei der Anwendung rechtwinkliger Coordinaten von grösserer Einfachheit sind; da jedoch schiefwinklige Coordinaten zuweilen mit Vortheil angewendet werden, so wollen wir die hauptsächlichsten Formeln in ihrer allgemeinsten Form geben.

Setzen wir in der letzten Figur den Winkel $YOX$ schief und $= \omega$ voraus, so ist

$$\angle PSQ = 180^0 - \omega, \text{ und } PQ^2 = PS^2 + QS^2 - 2PS \,.\, QS \,.\, \cos PSQ$$

oder

$$PQ^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(x' - x'')\,(y' - y'')\cos\omega.$$

Das Quadrat der Entfernung eines Punktes $x'y'$ vom Anfangspunkt ist

$$= x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\omega.$$

Beim Gebrauch dieser Formeln muss auf die Vorzeichen der Coordinaten genau geachtet werden. Wenn der Punkt $Q$ z. B. im Winkel $XOY'$ läge, so wäre das Vorzeichen von $y''$ zu wechseln und die Linie $PS$ wäre statt der Differenz von $y'$, $y''$ die Summe derselben.

*Aufg. 1.* Die Coordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x' = 2$, $y' = 3$; $x'' = 4$, $y'' = -5$, $x''' = -3$, $y''' = -6$; man soll unter Voraussetzung rechtwinkliger Achsen die Längen seiner Seiten berechnen.

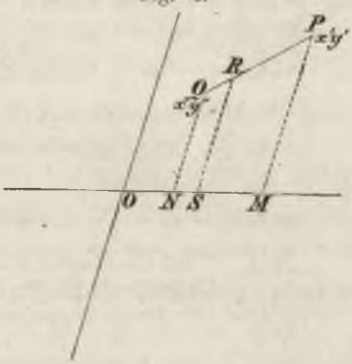
*Aufl.* $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

*Aufg. 2.* Man soll die Längen der Seiten eines Dreiecks berechnen, dessen Ecken dieselben Coordinaten haben wie vorher, unter der Voraussetzung des Achsenwinkels von $60^0$.

*Aufl.* $\sqrt{52}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt{151}$.

**7. Aus den Coordinaten zweier Punkte $x'y'$, $x''y''$ die Coordinaten desjenigen Punktes abzuleiten, der ihre Verbindungslinie in einem gegebenen Verhältniss $m:n$ theilt.**

Fig. 4.




Sind $x$, $y$ die Coordinaten des Punktes $R$, welchen wir zu bestimmen suchen, so ist

$$m:n = PR:RQ = MS:SN$$

oder

$$m:n = x'-x : x-x'',$$
$$mx - mx'' = nx' - nx,$$

also

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m+n},$$

und in derselben Weise

$$y = \frac{my'' + ny'}{m+n}.$$

Wird der Theilpunkt als ein äusserer gedacht, so haben wir

$$m:n = x-x' : x-x''$$

und daher $x = \dfrac{mx'' - nx'}{m-n}$, $y = \dfrac{my'' - ny'}{m-n}$.

Wir können hiernach die Fälle des innern und äusseren Theilpunktes durch die Bestimmung von einander unterscheiden, dass die Theilung einer Linie in dem Verhältniss $m:+n$, die innere Theilung in diesem Verhältniss und die Theilung in dem Verhältniss $m:-n$

die äussere Theilung in demselben Verhältniss bezeichnen soll; denn die Formeln für den äusseren Theilpunkt werden aus denen für den inneren durch die Veränderung des Vorzeichens von $m$ oder $n$ erhalten.

Wir wählen für den innern Theilpunkt das Theilungsverhältniss $m : + n$ wegen der Uebereinstimmung im Sinne, welchen der Uebergang von dem einen Endpunkte zum Theilpunkt und von diesem zum andern Endpunkte der geradlinigen Strecke zeigt; indess wir für den äussern Theilpunkt das Theilungsverhältniss $m : - n$ angemessener finden, weil hier der Uebergang von dem einen Endpunkt der Strecke zum Theilpunkt in dem entgegengesetzten Sinne von dem erfolgt, in welchem man von diesem letztern zum andern Endpunkt der Strecke gelangt. Die Grundformeln zur Bestimmung der Coordinaten des Theilpunkts sind demnach

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$$

und gelten für positives Theilungsverhältniss oder gleiche Vorzeichen von $m$ und $n$ für den innern und für ungleiche Vorzeichen von $m$ und $n$ für den äussern Theilpunkt.

In der geraden Linie $(x', y')$, $(x'', y'')$ ist jeder Punkt durch das Verhältniss $\pm \frac{m}{n}$ bestimmt, in welchem die Strecke zwischen jenen Punkten von ihm getheilt wird.

*Aufg. 1.* Die Coordinaten des Mittelpunkts der Linie zu finden, welche die Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindet.

*Aufl.* $x = \frac{x' + x''}{2}$, $y = \frac{y' + y''}{2}$.

*Aufg. 2.* Die Coordinaten der Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks zu finden, welches die Punkte $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ zu Ecken hat.

*Aufl.* $(3, -1)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

*Aufg. 3.* Die Verbindungslinie der Punkte $(2, 3)$, $(4, -5)$ ist in drei gleiche Theile getheilt; man soll die Coordinaten des dem ersten Punkte zunächst liegenden Theilpunktes finden.

*Aufl.* $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

*Aufg. 4.* Die Ecken eines Dreiecks sind die Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, man soll die Coordinaten des Punktes angeben, der das erste Drittheil der Verbindungslinie einer Ecke mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite, von diesem letzteren aus gerechnet, angiebt.

*Aufl.* $x = \frac{x' + x'' + x'''}{3}$, $y = \frac{y' + y'' + y'''}{3}$.

*Aufg.* 5. Für das in Aufg. 2 gegebene Dreieck sind die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten begegnen.

*Aufl.* $x = 1$, $y = -\frac{8}{3}$.

*Aufg.* 6. In einem Dreieck ist eine Seite in dem Verhältniss $m:n$ und die Verbindungslinie dieses Theilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke in dem Verhältniss $m + n : l$ getheilt; die Coordinaten dieses letzteren Theilpunktes sind zu berechnen.

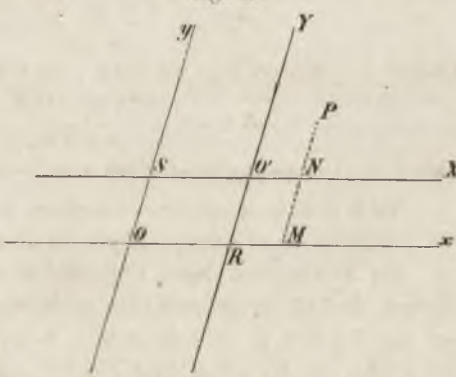
*Aufl.* $x = \dfrac{lx' + mx'' + nx'''}{l + m + n}$, $y = \dfrac{ly' + my'' + ny'''}{l + m + n}$.

8. Transformation der Coordinaten. Es ist oft nothwendig, aus den bekannten Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein Paar Achsen seine auf irgend ein andres Paar von Achsen bezogenen Coordinaten abzuleiten. Diese Operation wird die Transformation der Coordinaten genannt.

Wir unterscheiden drei Fälle; zuerst setzen wir den Anfangspunkt geändert, aber die neuen Achsen den alten parallel voraus; zweitens setzen wir voraus, dass die Richtung der Achsen sich verändere, aber der Anfangspunkt unverändert bleibt; und drittens untersuchen wir den Fall, wo beides, der Anfangspunkt und die Richtung der Achsen, sich verändert.

Erster Fall. Die neuen Achsen sind den alten parallel. In der Figur sind die alten Achsen $Ox$, $Oy$ und die neuen $O'X$ und $O'Y$. Die Coordinaten des neuen Anfangspunktes $O'$ in Bezug auf die alten Achsen sind $x'$, $y'$ oder $O'S = x'$, $O'R = y'$; die alten Coordinaten sind durch $x$, $y$, die neuen durch $X$, $Y$ bezeichnet; dann haben wir

Fig. 5.



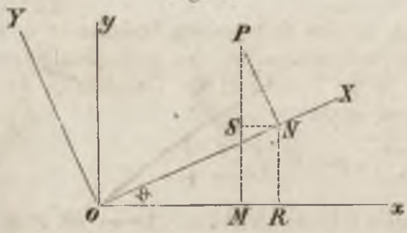

$$OM = OR + RM \text{ und } PM = PN + NM,$$

d. h. $$x = x' + X. \text{ und } y = y' + Y.$$

Diese Formeln sind offenbar gleich richtig für rechtwinklige, wie für schiefwinklige Achsen.

9. Zweiter Fall. Die Richtung der Achsen ist verändert, der Anfangspunkt bleibt ungeändert.

Fig. 6.




1.) Wir beginnen mit dem Fall, wo beide Achsensysteme rechtwinklig sind und bezeichnen den Winkel $x O X = y O Y$ durch $\vartheta$.

Dann ist

$$PM = PS + NR;$$
$$OM = OR - SN.$$

Weil aber $\angle SPN = x O X = \vartheta,$

so ist

$$PS = PN \cos\vartheta, \; NR = ON \sin\vartheta, \; OR = ON \cos\vartheta, \; SN = PN \sin\vartheta.$$

Wir haben daher

$$y = Y\cos\vartheta + X\sin\vartheta, \quad x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta.$$

2.) Keines der Achsensysteme ist rechtwinklig. In der Figur sind dann $PS$, $PN$ respective parallel zu $Oy$, $OY$ und $NS$ parallel zu $Ox$ gezogen.

Dann ist wie vorher $PM = PS + NR$; aber nicht mehr $PS = PN \cos SPN$, weil $\angle PSN$ nicht mehr $= 90^0$ ist, sondern

$$PS : PN = \sin PNS \; (= \sin YOx) : \sin PSN \; (= \sin y O x);$$

$$PS = \frac{PN \sin YOx}{\sin y O x}.$$

Ebenso $NR : ON = \sin x O X : \sin NRO \; (= \sin y O x)$

$$NR = \frac{ON . \sin x O X}{\sin y O x}.$$

Also $y \sin x O y = Y \sin x O Y + X \sin x O X.$

Nach den Gesetzen der Symmetrie können wir dann schreiben

$$x \sin y O x = X \sin y O X + Y \sin y O Y.$$

Bei Anwendung dieser Formeln muss man sorgfältig die Vorzeichen der in ihnen enthaltenen Winkel berücksichtigen. Man hat das Zeichen + zu gebrauchen, wenn die Winkel $x O y$, $x O Y$, $x O X$ alle auf derselben Seite von $Ox$ und die Winkel $y O x$, $y O X$, $y O Y$ auf derselben Seite von $Oy$ gemessen sind. In dem in der Figur dargestellten Falle liegt der Winkel $y O Y$ mit den Winkeln $y O x$ und $y O X$ nicht auf derselben Seite von $Oy$ und die Formel wird

$$x \sin y O x = X \sin y O X - Y \sin y O Y.$$

Es ist oft zweckmässig, diese Formeln in folgender Art zu schreiben: Man bezeichnet den Winkel der alten Achsen $yOx$ durch $\omega$, den der neuen Achse der $X$ mit der alten Achse der $x$, $XOx$ durch $\alpha$ und den Winkel $YOx$ durch $\beta$; dann werden die Formeln:

$$y \sin\omega = X \sin\alpha + Y \sin\beta;\ x \sin\omega = X \sin(\omega - \alpha) + Y \sin(\omega - \beta).$$

10. Dritter Fall. Indem man die Transformationen der beiden vorigen Artikel combinirt, kann man die auf neue völlig willkürlich gelegene Achsen bezogenen Coordinaten eines Punktes finden. Man ermittelt zuerst die Coordinaten in Bezug auf ein Paar Achsen, welche durch den neuen Anfangspunkt parallel zu den alten Achsen gelegt sind und berechnet sodann aus diesen die auf die geforderten Achsen bezüglichen Coordinaten selbst. Die allgemeinen Ausdrücke werden gefunden, indem man zu den für $x$ und $y$ im letzten Artikel gegebenen Werthen respective $x'$ und $y'$ addirt.

*Aufg. 1.* Die Coordinaten eines Punktes genügen der Relation $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 18$; in welche andre verwandelt sich diese, wenn der Anfangspunkt nach dem Punkte (2, 3) verlegt wird? parallel

*Aufl.* $X^2 + Y^2 = 31$.

*Aufg. 2.* Die Coordinaten eines auf rechtwinklige Achsen bezogenen Punktes genügen der Relation $y^2 - x^2 = 6$; in welche andre Relation geht diese über, wenn die Halbirungslinien der Winkel zwischen den gegebenen Achsen das neue Achsensystem bilden?

*Aufl.* $XY = 3$.

*Aufg. 3.* Man transformire die Gleichung $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 4$ von Achsen, welche unter dem Winkel von $60^0$ geneigt sind, zu den Halbirungslinien der Winkel zwischen den alten Achsen.

*Aufl.* $X^2 - 27\,Y^2 + 12 = 0$.

*Aufg. 4.* Man transformire dieselbe Gleichung zu rechtwinkligen Achsen, indem man die Achse der $x$ beibehält.

*Aufl.* $3\,X^2 + 10\,Y^2 - 7\,XY\sqrt{3} = 6$.

*Aufg. 5.* Will man von einem Systeme rechtwinkliger Achsen zu einem andern übergehen, ohne den Anfangspunkt zu verlegen, so muss

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

sein, weil beide das Quadrat der Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkte ausdrücken. Man bestätige diess durch Quadriren und Addiren der im Artikel 9 für $X$ und $Y$ gegebenen Ausdrücke.

*Aufg. 6.* Man bewähre allgemein, dass

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos xOy = X^2 + Y^2 + 2XY \cos XOY.$$

11. Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten wird durch Coordinatentransformation nicht geändert.

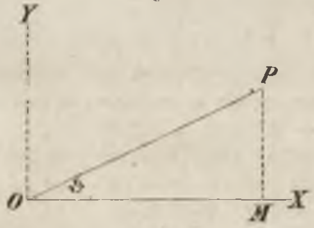
Die Transformation kann den Grad der Gleichung nicht erhöhen, denn wenn die Glieder der höchsten Potenzen in der gegebenen Gleichung $x^m$, $y^m$ u. s. w. sind, so sind die in der transformirten Gleichung $[x' \sin \omega + x \sin (\omega - \alpha) + y \sin (\omega - \beta)]^m$, $(y' \sin \omega + x \sin \alpha + y \sin \beta)^m$ u. s. w., welche offenbar keine den $m$. Grad übersteigenden Potenzen von $x$ und $y$ enthalten können. Die Transformation kann aber den Grad der Gleichung auch nicht erniedrigen, weil man durch Transformation der transformirten Gleichung zu den alten Achsen nothwendig die ursprüngliche Gleichung wieder erhalten muss, und daher, wenn die erste Transformation den Grad der Gleichung vermindert hätte, die zweite Transformation ihn wieder erhöhen müsste, entgegen dem, was eben bewiesen worden ist.

12. Polar-Coordinaten. Ausser der Methode zum Ausdruck der Lage eines Punktes, welche wir bisher angewendet haben, wird noch eine andre öfter angewendet.

Wenn ein fester Punkt $O$ und eine feste gerade Linie $OX$ durch ihn gegeben ist, so kennt man die Lage irgend eines Punktes $P$, wenn man die Länge $OP$ und den Winkel $POX$ angiebt. Die Linie $OP$ heisst der Radius vector, der feste Punkt $O$ wird der Pol genannt und die Bestimmungsmethode die Methode der Polar-Coordinaten.

Aus den Cartesischen Coordinaten $x$, $y$ eines Punktes findet man leicht seine Polar-Coordinaten und umgekehrt. Wenn die feste gerade Linie mit der Achse der $x$ zusammenfällt, ist

Fig. 7.




$OP : PM = \sin PMO : \sin POM;$

indem man $OP$ durch $\varrho$, $\angle POM$ durch $\vartheta$ und $\angle YOX$ durch $\omega$ bezeichnet, wird

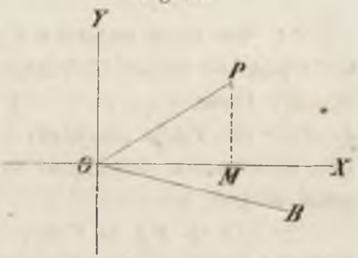
$PM = y = \dfrac{\varrho \sin \vartheta}{\sin \omega}$ und in derselben Weise $OM = x = \dfrac{\varrho \sin (\omega - \vartheta)}{\sin \omega}$.

Für den gewöhnlicheren Fall rechtwinkliger Coordinaten ist $\omega = 90^0$ und einfacher

$$x = \varrho \cos \vartheta \text{ und } y = \varrho \sin \vartheta.$$

Wenn die feste Linie $OB$ mit der Achse der $x$ nicht zusammenfällt, sondern den Winkel $\alpha$ mit ihr bildet, so ist $\angle POB = \vartheta$ und $\angle POM = \vartheta - \alpha$, und in den vorigen Formeln nur $\vartheta - \alpha$ für $\vartheta$ zu setzen.

Fig. 8.




Für rechtwinklige Coordinaten ist $x = \varrho \cos(\vartheta - \alpha)$ und $y = \varrho \sin(\vartheta - \alpha)$.

*Aufg. 1.* Die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten sind in solche für Polar-Coordinaten zu übertragen:

$x^2 + y^2 = 5mx$ *Aufl.* $\varrho = 5m \cos \vartheta$.
$x^2 - y^2 = a^2$ $\varrho^2 \cos 2\vartheta = a^2$.

*Aufg. 2.* Die folgenden Gleichungen in Polar-Coordinaten sind in solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzusetzen:

$\varrho^2 \sin 2\vartheta = 2a^2$. *Aufl.* $xy = a^2$.
$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
$\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta = a^{\frac{1}{2}}$ $x^2 + y^2 = (2a - x)^2$.
$\varrho^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\vartheta$ $(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

13. Die geradlinige Entfernung zweier Punkte durch ihre Polar-Coordinaten auszudrücken.

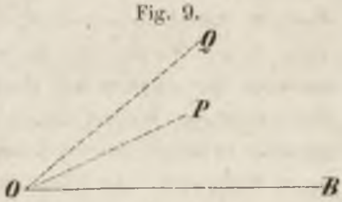
Sind $P$ und $Q$ die beiden Punkte, $OP = \varrho'$, $\angle POB = \vartheta'$; $OQ = \varrho''$, $\angle QOB = \vartheta''$; so ist

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\,OP.\,OQ.\cos POQ$$

oder

$$\delta^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 - 2\varrho'\varrho'' \cos(\vartheta'' - \vartheta').$$

Fig. 9.



# Zweites Kapitel.

## Die gerade Linie.

14. Wir sahen im letzten Kapitel, dass wir die Lage eines Punktes vermittelst zweier Gleichungen rücksichtlich seiner Coordinaten von der Form $x = a$, $y = b$ bestimmen können. Es ist sicher, dass wir den Punkt gleichfalls bestimmen können, wenn uns irgend zwei Gleichungen des ersten Grades zwischen seinen Coordinaten gegeben sind, wie

$$Ax + By + C = o, \; A'x + B'y + C' = o;$$

denn diess sind zwei Gleichungen zwischen zwei unbekannten Grössen und wir können sie auflösen, indem wir nach einander $y$ und $x$ zwischen ihnen eliminiren, um dadurch zwei Resultate von der Form

$$x = a, \; y = b$$

zu erhalten.

*Aufg.* Welcher Punkt ist durch die Gleichungen

$$3x + 5y = 13, \; 4x - y = 2$$

gegeben?

*Aufl.* $x = 1$, $y = 2$.

15. Zwei Gleichungen höheren Grades zwischen den Coordinaten repräsentiren nicht einen Punkt, sondern eine bestimmte Anzahl von Punkten; denn indem wir $y$ zwischen den Gleichungen eliminiren, erhalten wir eine Gleichung, die nur $x$ enthält; die Wurzeln derselben mögen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \ldots$ sein. Wenn wir nun irgend einen dieser Werthe ($\alpha_1$) für $x$ in die ursprünglichen Gleichungen einsetzen, so erhalten wir zwei Gleichungen in $y$, welche eine gemeinschaftliche Wurzel haben müssen, weil das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen durch die Voraussetzung $x = \alpha_1$ gleich Null wird. Ist diese gemeinschaftliche Wurzel $y = \beta_1$, so genügt der Punkt von den Coordinaten $x = \alpha_1$, $y = \beta_1$ beiden gegebenen Gleichungen zugleich; ebenso der Punkt, dessen Coordinaten $x = \alpha_2$, $y = \beta_2$ sind u. s. w.

Wenn die gegebenen Gleichungen respective vom $m^{ten}$ und $n^{ten}$ Grad sind, so ist die Gleichung in $x$ nach der Theorie der Elimination vom $mn^{ten}$ Grade, sie hat folglich $mn$ Wurzeln $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots$ und die zwei Gleichungen repräsentiren daher $mn$ Punkte.

*Aufg. 1.* Welche Punkte sind durch die zwei Gleichungen $x^2 + y^2 = 5$, $xy = 2$ dargestellt?

*Aufl.* Indem wir $y$ zwischen diesen Gleichungen eliminiren, erhalten wir $x^4 - 5x^2 + 4 = o$. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x^2 = 1$ und $x^2 = 4$ und daher die vier Werthe von $x$

$$x = +1,\ x = -1,\ x = +2,\ x = -2.$$

Indem wir einen dieser Werthe in die zweite Gleichung substituiren, erhalten wir den correspondirenden Werth von $y$.

$$y = +2,\ y = -2,\ y = +1,\ y = -1.$$

Die zwei gegebenen Gleichungen repräsentiren daher die vier Punkte

$$(+1, +2),\ (-1, -2),\ (+2, +1),\ (-2, -1).$$

*Aufg. 2.* Welche Punkte sind durch die Gleichungen

$$x - y = 1,\ x^2 + y^2 = 25$$

gegeben?

*Aufl.* $(4, 3)$, $(-3, -4)$.

*Aufg. 3.* Welche Punkte bestimmen die Gleichungen

$$x^2 - 5x + y + 3 = o,\ x^2 + y^2 - 5x - 3y + 6 = o?$$

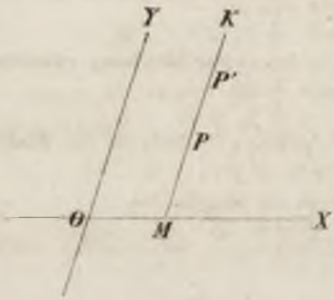
*Aufl.* $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$.

16. Nachdem wir gesehen haben, dass irgend zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten geometrisch einen Punkt oder mehrere Punkte repräsentiren, gehen wir dazu weiter, die geometrische Bedeutung einer einzigen Gleichung zwischen den Coordinaten zu untersuchen.

Wir erkennen zunächst die Analogie dieses Falles mit den Auflösungen einer Klasse geometrischer Aufgaben, welche dem Leser bekannt sind. Wir bestimmen ein Dreieck aus der Basis und irgend zwei andren Bedingungen; ist aber zu ihr nur eine weitere Bedingung gegeben, so wird die Spitze, deren Lage nun nicht länger bestimmt ist, doch immer auf einen gewissen Ort beschränkt. So finden wir auch, dass eine Gleichung zwischen den zwei Coordinaten, obgleich sie nicht hinreicht, einen Punkt zu bestimmen, doch hinreichend ist, ihn auf einen gewissen Ort zu beschränken. Denn die Gleichung drückt aus, dass zwischen den Coordinaten jedes durch sie dargestellten Punktes eine gewisse Beziehung besteht. Wenn nun diese Beziehung nicht allgemein zwischen den Coordinaten eines beliebig gewählten Punktes stattfindet, so giebt es doch mehr als einen Punkt, für welchen sie wahr ist; die Vereinigung dieser Punkte bildet einen Ort von Punkten, deren Coordinaten der Gleichung genügen, und dieser Ort ist als die geometrische Bedeutung der gegebenen Gleichung zu betrachten.

Wir erläutern diess zuerst an dem einfachsten Beispiel. Erinnern wir uns der Construction, durch welche wir die Lage eines Punktes aus den zwei Gleichungen $x = a$, $y = b$ bestimmten; wir nahmen $OM = a$, zogen $MK$ parallel zu $OY$ und trugen darauf $MP = b$ ab, $P$ war der geforderte Punkt. Wäre ein andrer Werth von $y$ gegeben gewesen, $x = a$, $y = b'$, so hätten wir durch das nämliche Verfahren einen Punkt $P'$ gefunden, der noch in der Linie $MK$, aber in einer andern Entfernung von $M$ liegt.

Fig. 10.




Wenn endlich der Werth von $y$ völlig unbestimmt gelassen ist, und wir nur die eine Gleichung $x = a$ haben, so sehen wir, dass der Punkt $P$ irgendwo in der Linie $MK$ liegt, dass aber seine Lage in ihr nicht bestimmt ist. Die Linie $MK$ ist daher der Ort aller der durch die Gleichung $x = a$ dargestellten Punkte; welchen Punkt wir in der Linie $MK$ auch wählen, das $x$ desselben ist immer $= a$.

17. Wenn allgemein eine Gleichung beliebigen Grades zwischen den Coordinaten gegeben ist, so setzen wir für $x$ irgend einen beliebigen Werth $x = a$ voraus und die Gleichung erlaubt sodann, eine endliche Zahl von Werthen von $y$ zu bestimmen, welche diesem speciellen Werth von $x$ entsprechen; für jeden der Punkte $p, q, r \ldots$, deren $x$ der angenommene Werth und deren $y$ eines der aus der Gleichung gefundenen ist, wird der Gleichung genügt. Sodann nehmen wir für $x$ irgend einen andern Werth $x = a'$ und finden in derselben Art eine andre Reihe von Punkten, deren Coordinaten die Gleichung befriedigen; ebenso wenn wir $x = a''$, $x = a'''$ u. s. w. voraussetzen.

Fig. 11.

Wenn wir so $x$ alle möglichen Werthe nach einander annehmen lassen, so bildet die Vereinigung der wie vorher gefundenen Punkte einen Ort, von welchem jeder Punkt den Bedingungen der Gleichung genügt und welcher daher ihr geometrischer Ausdruck ist.

Wir sehen daraus, dass jede mögliche Gleichung zwischen den Coordinaten geometrisch irgend einen Ort darstellen muss. In dieser Betrachtung ist die ganze Wissenschaft der analytischen Geometrie begründet.

18. Denn es ist die Aufgabe der analytischen Geometrie, die Natur der durch verschiedene Gleichungen dargestellten Oerter zu untersuchen.

Nachdem wir den durch eine gegebene Gleichung, z. B. $Ax + By + C = o$, repräsentirten Ort erkannt haben, sind wir sicher, dass jeder Punkt dem Orte angehört, zwischen dessen Coordinaten die durch die Gleichung ausgedrückte Relation besteht, und umgekehrt, dass die Coordinaten jedes Punktes, welchen wir im Orte annehmen können, durch diese Relation verbunden sind.

Diese Oerter werden nach den Graden der Gleichungen classificirt, welche sie darstellen und als vom $m^{ten}$, $n^{ten}$ oder $p^{ten}$ u. s. w. Grade bezeichnet, je nachdem diese Gleichungen zwischen $x$ und $y$ vom $m^{ten}$, $n^{ten}$ oder $p^{ten}$ Grade sind.

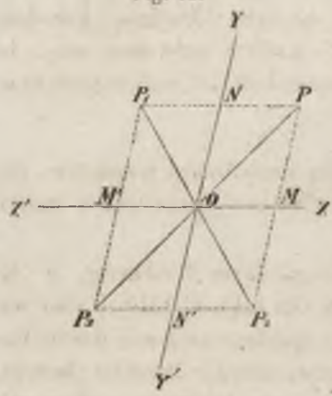
Wir beginnen mit der Gleichung des ersten Grades und werden finden, dass sie immer eine gerade Linie repräsentirt und dass umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie immer vom ersten Grade ist.

19. Wir haben im Artikel 16 den einfachsten Fall einer Gleichung ersten Grades, nämlich die Gleichung $x = a$, untersucht und gefunden, dass eine Gleichung von dieser Form eine zur Achse $OY$ parallele gerade Linie $PM$ repräsentirt, die die Achse $OX$ in einer Entfernung $OM = a$ vom Anfangspunkt schneidet. Ebenso repräsentirt die Gleichung $y = b$ eine zur Achse $OX$ parallele Linie $PN$, welche der Achse $OY$ in einer Entfernung $ON = b$ vom Anfangspunkt begegnet.

Indem wir zur Untersuchung des an Einfachheit nächsten Falles übergehen, dass eine gerade Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, betrachten wir die Relation, welche zwischen den Coordinaten der in einer solchen geraden Linie liegenden Punkte besteht.

Wenn wir einen Punkt $P$ in einer solchen Linie annehmen, so ändern bei der Veränderung des Punktes zwar beide Coordinaten $PM$, $OM$ ihre Länge, aber ihr Verhältniss $PM : OM$ bleibt unverändert, nämlich gleich dem Verhältniss $\sin POM : \sin OPM$; demnach wird die Gleichung

Fig. 12.



$$y = \frac{\sin POM}{\sin MPO} \cdot x$$

für jeden Punkt der Linie $OP$ erfüllt und ist als die Gleichung dieser Linie zu bezeichnen. Wenn umgekehrt die Bestimmung des durch die Gleichung $y = mx$ dargestellten Ortes verlangt wird, so schreiben wir die Gleichung in der Form $\frac{x}{y} = m$; die Aufgabe ist dann, den Ort des Punktes $P$ so zu finden, dass immer, wenn wir durch ihn $PM$ und $PN$ zu zwei festen geraden Linien parallel ziehen, das Verhältniss $PM : PN$ constant ist. Dieser Ort ist nothwendig eine durch den Durchschnittspunkt jener beiden festen Linien gehende gerade Linie $OP$, welche den von ihnen gebildeten Winkel so theilt, dass

$$\sin POM = m \cdot \sin PON$$

ist.

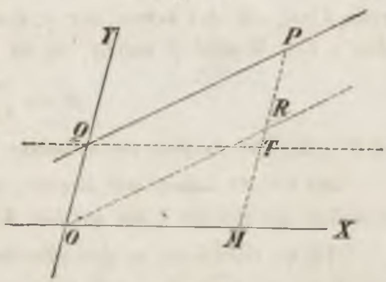
Bei rechtwinkligen Achsen ist $\sin PON = \cos POM$ und daher $m = \text{tang } POM$; die Gleichung $y = mx$ repräsentirt daher eine gerade Linie, die durch den Anfangspunkt geht und mit der Achse der $x$ einen Winkel bildet, dessen Tangente $= m$ ist.

20. Eine Gleichung in der Form $y = + mx$ bezeichnet eine gerade Linie $OP$, welche in den Winkeln $YOX$, $Y'OX'$ gelegen ist; eine Gleichung in der Form $y = - mx$ stellt dagegen eine in den Winkeln $Y'OX$, $YOX'$ gelegene gerade Linie dar. Denn aus der Gleichung $y = + mx$ erhellet, dass für positive $x$ auch $y$ positiv ist und dass negativen $x$ auch negative $y$ entsprechen; die durch diese Gleichung repräsentirten Punkte müssen daher ihre Coordinaten entweder beide positiv oder beide negativ haben, und solche

Punkte liegen nur in den Winkeln $XOY$ und $X'OY'$. Dem entgegen muss, um der Gleichung $y = -mx$ zu genügen, $y$ für alle positiven $x$ negativ und für alle negativen $x$ positiv sein; Punkte, welche dieser Gleichung genügen, haben daher ihre Coordinaten von verschiedenem Vorzeichen und liegen nothwendig in den Winkeln $Y'OX$ und $YOX'$.

21. Um nun zu untersuchen, wie eine in Bezug auf die Achsen völlig willkürlich gelegene gerade Linie $PQ$ zu repräsentiren ist, ziehen wir durch den Anfangspunkt $OR$ parallel zu $PQ$ und bezeichnen den Schnittpunkt der Ordinate $PM$ mit $OR$ durch $R$. Nun ist offenbar das Verhältniss $RM : OM$ unveränderlich ($RM = m \,.\, OM$); aber die Ordinate $PM$ differirt von $RM$ um die constante Länge $PR = OQ$, welche wir $b$ nennen wollen. Somit können wir die Gleichung schreiben

Fig. 13.




$$PM = RM + PR = m \,.\, OM + PR,$$

d. h.

$$y = mx + b.$$

Diese für jeden Punkt der Linie $PQ$ erfüllte Gleichung $y = mx + b$ heisst die Gleichung dieser geraden Linie.

Aus dem letzten Art. geht hervor, dass $m$ positiv oder negativ ist, jenachdem $OR$, die durch den Anfangspunkt zur geraden Linie gezogene Parallele, in dem Winkel $YOX$ oder in $Y'OX$ liegt; und ebenso dass $b$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt $Q$, in welchem die gerade Linie die Achse $OY$ schneidet, über oder unter dem Anfangspunkt liegt.

Umgekehrt bezeichnet die Gleichung $y = mx + b$ stets eine gerade Linie; denn sie kann in der Form geschrieben werden

$$\frac{y - b}{x} = m.$$

Wenn wir aber $QT$ parallel zu $OM$ ziehen, so ist $TM = b$ und daher $PT = y - b$, und wir haben demnach den Ort eines Punktes zu finden, welcher so liegt, dass die durch ihn zur Achse $OY$ gezogene Parallele $PT$ die feste gerade Linie $QT$ so schneidet, dass das Verhältniss $PT : QT$ constant bleibt. Dieser Ort ist offenbar die durch $Q$ gehende gerade Linie $QP$. Da die allgemeinste

Gleichung des ersten Grades $Ax + By + C = o$ auf die Form $y = mx + b$ reducirt werden kann, als äquivalent mit

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

so repräsentirt diese Gleichung stets eine gerade Linie.

22. Aus den letzten Artikeln lässt sich die geometrische Bedeutung der Constanten in der Gleichung einer geraden Linie erkennen.

Wenn die durch die Gleichung $y = mx + b$ dargestellte gerade Linie mit der Achse der $x$ den Winkel $\alpha$ und mit der Achse der $y$ den Winkel $\beta$ macht, so ist (Art. 19)

$$m = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und wenn die Achsen rechtwinklig sind, $m = \operatorname{tang}\alpha$.

Im Art. 21 sahen wir bereits, dass $b$ den Abschnitt bezeichnet, welchen die gerade Linie in der Achse der $y$ bestimmt.

Ist die Gleichung in der allgemeinen Form $Ax + By + C = o$ gegeben, so reduciren wir sie, wie im letzten Artikel auf die Form $y = mx + b$ und finden, dass

$$-\frac{A}{B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

oder bei rechtwinkligen Achsen $= \operatorname{tang}\alpha$; und dass $-\frac{C}{B}$ die Länge des in der $y$ Achse bestimmten Abschnitts ist.

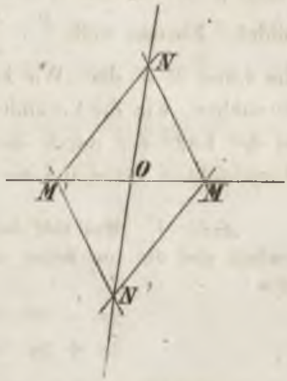
Zusatz. Die geraden Linien $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ sind parallel zu einander, wenn $m = m'$, weil sie dann beide mit der Achse der $x$ denselben Winkel bilden; ebenso sind die geraden Linien $Ax + By + C = o$ und $A'x + B'y + C' = o$ parallel, wenn $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$.

Ausser den Formen $Ax + By + C = o$ und $y = mx + b$ giebt es noch zwei andere, in denen die Gleichung einer geraden Linie oft gebraucht wird; sie sollen zunächst abgeleitet werden.

23. Die Längen der Abschnitte zu finden, welche die Linie $MN$, deren Gleichung $Ax + By + C = o$ ist, in den Achsen bestimmt. Im letzten Artikel fanden wir die Länge des Abschnittes in der Achse der $y$, indem wir die

jetzige Gleichung mit der Gleichung $y = mx + b$ verglichen. Wir ziehen es jedoch im gegenwärtigen Artikel vor, dieselbe Aufgabe mit Hilfe eines bereits im 18. Artikel enthaltenen allgemeinen Princips direct zu untersuchen. Da die Coordinaten eines jeden Punktes der Linie $MN$ der gegebenen Gleichung genügen müssen, so müssen es auch die Coordinaten des Punktes $M$, in welchem sie die Achse der $x$ schneidet. Nun ist aber für jeden Punkt in der $x$ Achse $y = o$ (Art. 3) und die Gleichung wird daher für den Punkt $M$

Fig. 14.




$$Ax + C = o;$$

und da die Abscisse des Punktes $M$ eben der geforderte Abschnitt $OM$ ist, so folgt

$$OM = -\frac{C}{A}.$$

Ebenso

$$ON = -\frac{C}{B}.$$

Daraus ist die Gleichung einer geraden Linie leicht zu finden, welche in den Achsen die Abschnitte $OM = a$, $ON = b$ bestimmt. Die allgemeine Gleichung einer geraden Linie ist

$$Ax + By + C = o, \text{ oder } \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = o;$$

es ist aber $\frac{A}{C} = -\frac{1}{OM} = -\frac{1}{a}$ u. $\frac{B}{C} = -\frac{1}{ON} = -\frac{1}{b}$; also ist die Gleichung der bezeichneten geraden Linie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Diese Gleichung einer geraden Linie, ausgedrückt durch die von ihr in den Achsen bestimmten Abschnitte gilt ebensowohl für schiefwinklige als für rechtwinklige Achsen.

Die Lage der Linie ändert sich mit den Vorzeichen der Grössen $a$ und $b$. So stellt die gegebene Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, welche positive Abschnitte in beiden Achsen voraussetzt, die gerade Linie $MN$ der vorigen Figur dar, dagegen repräsentirt

$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ die gerade Linie $MN'$, welche in der Achse der $x$ einen positiven und in der Achse der $y$ einen negativen Abschnitt bildet. Ebenso stellt $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 1$ die Linie $NM'$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = -1$ die Linie $M'N'$ dar. Wir können es dem Leser überlassen, zu untersuchen, wie die Veränderung in den Zeichen von $A$, $B$, $C$, sich in der Lage der durch die allgemeine Gleichung $Ax + By + C = o$ dargestellten geraden Linie ausprägt.

*Aufg. 1.* Man soll die Lage der folgenden geraden Linien untersuchen und die von ihnen in den Achsen gebildeten Abschnitte bestimmen:

$$2x - 3y = 7; \quad 3x + 4y + 9 = 0,$$
$$3x + 2y = 6; \quad 4y - 5x = 20.$$

*Aufg. 2.* Unter der Voraussetzung, dass die Seiten eines Dreiecks als Coordinatenachsen genommen werden, soll man die Verbindungslinie der Punkte ausdrücken, welche den $m^{ten}$ Theil von jeder derselben abschneiden und nach Art. 22 zeigen, dass sie der Basis des Dreiecks parallel ist.

*Aufl.* $\quad \frac{mx}{a} + \frac{my}{b} = 1.$

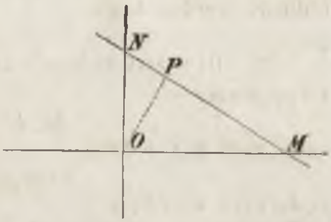
24. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung $A = o$ voraussetzen, so wird der von der geraden Linie in der Achse der $x$ bestimmte Abschnitt $-\frac{C}{A}$ unendlich gross. Die gerade Linie $By + C = o$ schneidet daher die $x$ Achse in unendlicher Entfernung oder ist parallel zu ihr. Dies stimmt mit Art. 16 überein.

Die Entfernung vom Anfangspunkt, in welcher diese Parallele die Achse der $y$ schneidet, ist $-\frac{C}{B}$ (Art. 22.). Für $C = o$ verschwindet diese Entfernung und die Gleichung $y = o$ repräsentirt die Achse der $x$ selbst. Ebenso bezeichnet $Ax + C = o$ eine zur Achse der $y$ parallele gerade Linie und $x = o$ die Achse der $y$ selbst.

25. Die Gleichung einer geraden Linie durch die Länge der auf sie vom Anfangspunkt gefällten Normale und durch die von dieser mit den Achsen gebildeten Winkel auszudrücken.

Sei $OP = p$ die Länge der Normale, $\angle POM = \alpha$ der von ihr mit der Achse der $x$, $\angle PON = \beta$ der mit der Achse der $y$ gebildete Winkel, $OM = a$, $ON = b$. Dann ist die Gleichung der geraden Linie $MN$

Fig. 15.




$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Indem wir diese Gleichung mit $p$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{p}{a} x + \frac{p}{b} y = p.$$

Es ist aber $\frac{p}{a} = \cos\alpha$; $\frac{p}{b} = \cos\beta$ und daher die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos\alpha + y \cos\beta = p.$$

Bei rechtwinkligen Coordinaten, wie wir sie zumeist gebrauchen, ist $\beta = 90^0 - \alpha$. Demnach ist

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$$

die Gleichung einer geraden Linie, für welche die vom Anfangspunkt auf sie gefällte Normale die Länge $p$ hat und den Winkel $\alpha$ mit der Achse der $x$ einschliesst, in rechtwinkligen Coordinaten.

Wenn die Gleichung einer geraden Linie in der allgemeinen Form $Ax + By + C = o$ gegeben ist, so kann sie leicht auf die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ reducirt werden; dividiren wir dieselbe durch $\sqrt{(A^2 + B^2)}$, sodass sie wird

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} x + \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} y + \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = o$$

so können wir setzen

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \cos\alpha \text{ und } \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \sin\alpha,$$

weil die Summe der Quadrate dieser zwei Grössen $= 1$ ist. Wir lernen daraus, dass $\frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ und $\frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ respective der cosinus und sinus des Winkels sind, welchen die vom Anfangspunkt auf die Linie $Ax + By + C = o$ gefällte Senkrechte mit der Achse der $x$ bildet und dass $\frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ die Länge dieser Senkrechten ist. Die in diesen Werthen vorkommende Quadratwurzel ist übrigens eines doppelten Vorzeichens fähig, in Uebereinstimmung damit, dass die Gleichung auf eine der beiden Formen

$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = o,\ x\cos(180^0+\alpha) + y\cos(180^0+\beta) + p = o$

reducirt werden kann.

26. Die auf schiefwinklige Coordinaten bezogene Gleichung

$$Ax + By + C = o$$

soll auf die Form

$$x\cos\alpha + y\cos\beta = p$$

reducirt werden.

Nehmen wir an, dass die gegebene Gleichung durch Multiplication mit einem gewissen Factor $R$ auf die vorgeschriebene Form reducirt werde, so ist $RA = \cos\alpha,\ RB = \cos\beta$.

Wenn aber zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ die Summe $\omega$ haben, so ist immer

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \sin^2\omega.$$

Also ist $R^2(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega) = \sin^2\omega$ und die auf die verlangte Form reducirte Gleichung ist daher

$$\frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}x + \frac{B\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}y + \frac{C\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}} = o.$$

Wir lernen daraus, dass

$$\frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}},\ \frac{B\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}$$

respective die cosinus der Winkel sind, welche die vom Anfangspunkt auf die Linie $Ax + By + C = o$ gefällte Senkrechte mit den Achsen der $x$ und $y$ bildet; und dass

$$\frac{C\sin\omega}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\omega)}}$$

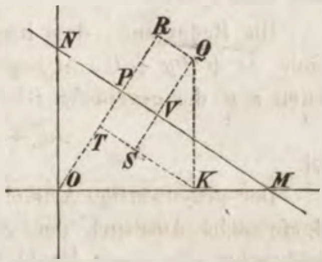
die Länge dieser Senkrechten ist. Diese Länge kann auch leicht dadurch berechnet werden, dass man den doppelten Inhalt des Dreiecks $NOM$ ($ON.\ OM.\ \sin\omega$) durch die Länge von $MN$ dividirt, deren Ausdruck leicht zu finden ist.

27. Die Länge der Senkrechten von einem Punkt $x'y'$ auf die gerade Linie zu finden, deren Gleichung ist $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = o$,

Wir werden finden, dass sie durch Substitution der Coordinaten $x'y'$ des Punktes an die Stelle von $x$ und $y$ in die gegebene Gleichung erhalten wird und dass sie somit ist:

$$\pm (x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p).$$

Fig. 16.




Wir ziehen $QR$ von dem gegebenen Punkte $Q$ parallel zu der gegebenen geraden Linie und $QS$ senkrecht dazu; dann ist

$OK = x'$ und $OT = x' \cos\alpha$.

Wegen $\angle SQK = \beta$ und $QK = y'$ ist ferner

$$RT = QS = y' \cos\beta;$$

also

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta = OR.$$

Indem wir davon die Senkrechte vom Anfangspunkt $OP$ subtrahiren, erhalten wir

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta - p = PR$$

als den Ausdruck der Senkrechten $QV$, wie bewiesen werden sollte.

Wäre in der Figur der Punkt $O$ auf der Seite der geraden Linie gewählt worden, welche dem Anfangspunkt am nächsten liegt, so hätten wir für die Senkrechte den Ausdruck $p - x' \cos\alpha - y' \cos\beta$ erhalten und wir sehen daraus, dass die Senkrechte ihr Vorzeichen wechselt, wenn wir von einer Seite der geraden Linie auf die andre übergehen. Es ist willkürlich, auf welcher Seite der Linie wir sie als positiv betrachten wollen. Wenn wir zur Darstellung des Perpendikels die Form der Gleichung wählen, in welcher das absolute Glied positiv ist, so haben wir die Senkrechten als positiv zu betrachten, welche von der Seite des Anfangspunktes auf die gerade Linie gefällt werden, dagegen die als negativ, welche von auf der andern Seite gelegenen Punkten ausgehen; umgekehrt, wenn wir die andre Form wählen.

Die in der Form $Ax + By + C = o$ gegebene Gleichung der geraden Linie reduciren wir auf die Form $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = o$ und erhalten die Länge des von einem Punkte $x'y'$ auf sie gefällten Perpendikels

$$= \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \text{ oder} = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}}.$$

je nachdem die Achsen rechtwinklig oder schiefwinklig sind. Durch Vergleichung dieses Ausdrucks für die Senkrechte von $x'y'$ mit dem für die Senkrechte vom Anfangspunkt sehen wir, dass $x'y'$ mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite der geraden Linie liegt, wenn $Ax' + By' + C$ mit $C$ dasselbe Vorzeichen hat und umgekehrt.

Die Bedingung, dass irgend ein Punkt $x'y'$ in der geraden Linie $Ax + By + C = o$ liege, besteht darin, dass seine Coordinaten $x'y'$ der gegebenen Gleichung genügen müssen, oder dass

$$Ax' + By' + C = 0$$

sei.

Der gegenwärtige Artikel zeigt, dass diese Bedingung nur der algebraische Ausdruck der geometrischen Wahrheit ist, dass die Senkrechte von einem Punkte $x'y'$ in einer geraden Linie auf dieselbe gleich Null ist.

*Aufg. 1.* Die Länge der Senkreckten vom Anfangspunkt auf die Linie
$$3x + 4y + 20 = o$$
bei rechtwinkligen Achsen zu finden.

*Aufl.* $p = 4$.

*Aufg. 2.* Finde die Länge der Senkrechten vom Punkte (2, 3) auf die gerade Linie
$$2x + y - 4 = o.$$

*Aufl.* $p' = \frac{3}{\sqrt{5}}$; der gegebene Punkt liegt auf der dem Anfangspunkt entgegengesetzten Seite der geraden Linie.

*Aufg. 3.* Finde die Länge der Senkrechten vom Punkte (3, — 4) auf die gerade Linie
$$4x + 2y - 7 = o$$
unter Voraussetzung eines Achsenwinkels von $60^0$.

*Aufl.* $p' = \frac{3}{4}$; der Punkt liegt mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite.

*Aufg. 4.* Die Länge der vom Anfangspunkt auf die gerade Linie
$$a(x - a) + b(y - b) = o$$
gefällten Senkrechten anzugeben.

*Aufl.* $p = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

28. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, die durch den gegebenen Punkt $x'y'$ geht.

Die allgemeine Gleichung einer geraden Linie kann, wie wir sahen unter die Form $y = mx + b$ gebracht werden; hier können $m$ und $b$ als Unbekannte angesehen und aus Bedingungen, welche bezüglich der geraden Linie gegeben sind, bestimmt werden. Soll der Punkt $x'y'$ in der Linie liegen, so muss die für jeden Punkt derselben gültige Gleichung $y = mx + b$ auch für den Punkt $x'y'$ wahr sein; so erhalten wir die Bedingung

$$y' = mx' + b.$$

Wenn keine weitere Bedingung gegeben ist, so können wir nicht beide unbekannte Grössen $m$ und $b$ bestimmen, wir finden mit Hilfe der vorigen Bedingungsgleichung nur den Werth der einen von ihnen $b = y' - mx'$ und erhalten durch Substitution desselben in die allgemeine Gleichung

$$y = mx + y' - mx'$$

oder

$$y - y' = m(x - x')$$

als die Gleichung einer durch den Punkt $x'y'$ gehenden geraden Linie. Wie es sein muss, bleibt $m$ unbestimmt, weil unendlich viele verschiedene gerade Linien durch den Punkt $x'y'$ gezogen werden können.

29. Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte $x'y'$ und $x''y''$ geht.

Die Bedingung, dass die gerade Linie noch durch einen zweiten Punkt gehen soll, erlaubt uns, die Constante $m$ zu bestimmen, welche im letzten Artikel noch unbestimmt bleiben musste.

Nach diesem Artikel ist die Gleichung einer geraden Linie durch $x'y'$, $y - y' = m(x - x')$ oder $\frac{y - y'}{x - x'} = m$. Da aber die verlangte gerade Linie auch durch den Punkt $x''y''$ gehen muss, so muss diese Gleichung auch erfüllt bleiben, wenn man für $xy$ die Coordinaten desselben $x''y''$ einsetzt. Demnach ist

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = m$$

und durch Substitution daher die Gleichung der verlangten geraden Linie

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

In dieser Form scheint die Gleichung am leichtesten zu behalten; durch die Befreiung von Brüchen bringen wir sie jedoch in eine Form, in der sie zumeist brauchbarer ist, nämlich

$$(y' - y'')x - (x' - x'')y + x'y'' - x''y' = o$$

oder

$$xy' - x'y + x'y'' - x''y' + x''y - xy'' = o$$

Zusatz. Die Gleichung der geraden Linie die den Punkt $x'y'$ mit dem Anfangspunkt verbindet ist $xy' = x'y$.

Es kommt zuweilen vor, dass die Gleichung der geraden Verbindungslinie zweier Punkte ohne alle Rechnung geschrieben werden kann. Wenn wir im voraus wüssten, dass die Coordinaten beider Punkte durch die Relationen

$$Ax' + By' + C = o \text{ und } Ax'' + By'' + C = o$$

verbunden sind, so ist offenbar, dass die Verbindungslinie derselben durch die Gleichung

$$Ax + By + C = o$$

ausgedrückt sein muss; denn diese ist die Gleichung einer geraden Linie und enthält die beiden Punkte, weil sie durch die Coordinaten derselben befriedigt wird.

*Aufg. 1.* Bilde die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks, dessen Eckpunkte durch ihre Coordinaten gegeben sind wie folgt

$$(2, 1), (3, -2), (-4, -1).$$

*Aufl.* $3x + y = 7$, $x + 7y + 11 = o$, $3y - x = 1$.

*Aufg. 2.* Finde die Längen der Senkrechten, welche von den Ecken dieses Dreiecks auf die Gegenseiten gefällt werden.

*Aufl.* $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$. Der Anfangspunkt der Coordinaten liegt im Dreieck.

*Aufg. 3.* Bilde die Gleichungen der Seiten des aus $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ bestimmten Dreiecks.

*Aufl.* $4x + y = 11$, $x - 7y = 39$, $9x - 5y = 3$.

*Aufg. 4.* Die Gleichung der geraden Verbindungslinie der Punkte

$$x', y' \text{ und } \frac{mx' + nx''}{m+n}, \frac{my' + ny''}{m+n}$$

zu bilden.

*Aufl.* $(y' - y'')x + (x' - x'')y + x'y'' - x''y' = 0$.

*Aufg. 5.* Die Gleichung der geraden Linie anzugeben, welche die Punkte

$$x'y' \text{ und } \frac{x'' + x'''}{2}, \frac{y'' + y'''}{2}$$

verbindet.

*Aufl.*

$$(y'' + y''' - 2y')x - (x'' + x''' - 2x')y + x''y' - x'y'' + x'''y' - x'y''' = 0.$$

*Aufg. 6.* Die Gleichungen der geraden Linien zu bilden, welche die Ecken des Dreiecks in Aufg. 3 mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden.

*Aufl.* $5x - 6y = 21$; $17x - 3y = 25$; $7x + 9y + 17 = 0$.

*Aufg.* 7. Welches ist die Gleichung der geraden Verbindungslinie der Punkte $\frac{lx' - mx''}{l - m}$, $\frac{ly' - my''}{l - m}$ und $\frac{lx' - nx'''}{l - n}$, $\frac{ly' - ny'''}{l - n}$?

*Aufl.* $x[l(m-n)y' + m(n-l)y'' + n(l-m)y'''] - y[l(m-n)x' + m(n-l)x'' + n(l-m)x'''] = lm(y'x'' - y''x') + mn(y''x''' - y'''x'') + nl(y'''x' - y'x''')$.

30. **Die Bedingung anzugeben, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen.**

Wir fanden im Artikel 29 die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte und haben nur auszudrücken, dass die Coordinaten des dritten dieser Gleichung genügen müssen.

Die Bedingung ist daher

$$(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = o$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

welche in der mehr symmetrischen Form

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) = o$$

geschrieben werden kann.*)

31. **Den Inhalt des durch drei Punkte gebildeten Dreiecks zu berechnen**

Wir erhalten den doppelten Inhalt, indem wir die Länge der Verbindungslinie zweier Eckpunkte mit der Länge der vom dritten Eckpunkt auf dieselbe gefällten Senkrechten multipliciren.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Achsen ist die Länge der von $x_3 y_3$ auf die Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ gefällten Senkrechten (Art. 27)

$$\frac{(y_1 - y_2)\,x_3 - (x_1 - x_2)\,y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2]}}$$

in diesem Bruche stellt der Nenner die Länge der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ mit $x_2 y_2$ dar und

$$y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$$

bezeichnet daher den doppelten Inhalt des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks.

---

*) Beim Gebrauch dieser und ähnlicher Formeln, welche wir bei spätern Gelegenheiten anwenden werden, ist es nützlich, die Coordinaten in einer festen Aufeinanderfolge zu denken, z. B. nimmt im 2. Glied der eben gegebenen Formel $y''$ die Stelle von $y'$, $x'''$ die von $x''$ und $x'$ die von $x'''$ im ersten Gliede ein und im dritten gehen wir von $y''$ zu $y'''$, von $x'''$ zu $x'$, und von $x'$ zu $x''$ über. Man kann dies Verfahren kurz als eine cyklische Vertauschung der Indices bezeichnen.

Fig. 17.

Unter Voraussetzung schiefwinkliger Achsen wird dieser doppelte Inhalt gefunden, indem man in derselben Art die Ausdrücke für die Länge des Perpendikels und der Verbindungslinie benutzt, welche in den Artikeln 26 und 6 gegeben sind. Die einzige Veränderung besteht darin, dass der hier gefundene Ausdruck mit dem sinus des Achsenwinkels zu multipliciren ist.

Zusatz 1. Der doppelte Inhalt des von den Punkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ mit dem Anfangspunkt der Coordinaten gebildeten Dreiecks ist $y_1 x_2 - y_2 x_1$, wie aus dem allgemeinen Ausdruck folgt; indem man darin $x_3 = o;\ y_3 = o$ setzt.

Zusatz 2. Die Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen, drückt aus, dass der Inhalt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks gleich Null ist.

*Aufgabe.* Man soll den folgenden Satz beweisen: W e n n z w e i f e s t e g e r a d e L i n i e n , w e l c h e s i c h i n e i n e m P u n k t e $A$ s c h n e i d e n , v o n e i n e r u m d e n f e s t e n P u n k t $O$ d r e h e n d e n G e r a d e n i n d e n P u n k t e n $B$ u n d $C$ g e s c h n i t t e n w e r d e n , s o i s t d i e a l g e b r a i s c h e S u m m e d e r r e c i p r o k e n W e r t h e d e r D r e i e c k s f l ä c h e n $OAB$ u n d $OAC$ c o n s t a n t .

32. D e n I n h a l t e i n e s P o l y g o n s d u r c h d i e C o o r d i n a t e n s e i n e r E c k p u n k t e a u s z u d r ü c k e n .

Wenn wir innerhalb des Polygons einen Punkt $xy$ wählen und ihn mit allen Eckpunkten desselben: $x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ \ldots\ x_n y_n$ durch gerade Linien verbinden, so ist der Inhalt des Polygons die Summe der Inhalte aller der Dreiecke, in welche dasselbe in dieser Weise getheilt worden ist.

Diese doppelten Inhalte sind nach dem letzten Artikel respective:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2 y_3 - x_3 y_2$$
$$\vdots$$
$$x(y_{n-1} - y_n) - y(x_{n-1} - x_n) + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}$$
$$x(y_n - y_1) - y(x_n - x_1) + x_n y_1 - x_1 y_n.$$

Durch Addition derselben verschwinden alle die Glieder, welche $x$ und $y$ als Factoren enthalten, wie auch nöthig, weil der Werth des Totalinhalts von der Art unabhängig sein muss, in welcher das Polygon in Dreiecke zerlegt wird; wir erhalten für den doppelten Inhalt den Ausdruck:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_n y_1 - x_1 y_n).$$

Derselbe kann auch geschrieben werden:

$$x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1})$$

oder

$$y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + \ldots + y_n(x_{n-1} - x_1).$$

*Aufg. 1.* Berechne den Inhalt des Dreiecks (2, 1), (3, — 2), (— 4, — 1).
*Aufl.* $= 10$.

*Aufg. 2.* Berechne den Inhalt des Dreiecks (2, 3), (4 — 5), (— 3, — 6).
*Aufl.* $= 29$.

*Aufg. 3.* Berechne den Inhalt des Vierecks (1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1).
*Aufl.* $= 8$.

33. Aus den Gleichungen zweier geraden Linien die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes zu finden.

Jede der Gleichungen drückt eine Relation aus, welcher von den Coordinaten des geforderten Punktes genügt werden muss; deshalb finden wir seine Coordinaten, indem wir die beiden Gleichungen für die unbekannten Grössen $x$ und $y$ auflösen.

Wenn die Gleichungen in der allgemeinen Form

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o$$

gegeben sind, so finden wir

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} \text{ und } y = \frac{CA' - C'A}{AB' - A'B}.$$

Im Artikel 14 sahen wir, dass die Lage eines Punktes bestimmt war durch zwei Gleichungen zwischen seinen Coordinaten. Jede dieser Gleichungen, stellt einen Ort dar, welchem der Punkt angehören muss und er ist somit der Durchschnittspunkt der beiden durch die Gleichungen dargestellten Oerter. Die einfachsten Gleichungen zur Darstellung eines Punktes, nämlich $x = a$, $y = b$ sind die Gleichungen zweier Parallellinien zu den Coordinatenachsen, deren Durchschnittspunkt der verlangte Punkt ist.

Darum repräsentiren zwei Gleichungen des ersten Grades nur einen Punkt und zwei Gleichungen von höheren Graden mehr als einen Punkt; denn in jenem Falle stellt jede Gleichung eine gerade Linie dar und zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden; in diesem allgemeinen Falle sind die durch die Gleichungen dargestellten Oerter Curven, welche einander in mehr als einem Punkte durchschneiden.

Zusatz. Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien sind unendlich gross, derselbe liegt also in unendlicher Entfernung, wenn $AB' = A'B$. In diesem Falle sind die geraden Linie parallel. (Art. 22.)

34. Die Bedingung zu finden, unter welcher drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Sind

$$Ax + By + C = o,\quad A'x + B'y + C' = o,\quad A''x + B''y + C'' = o$$

die Gleichungen derselben, so heisst die verlangte Bedingung

$$A''(BC' - B'C) + B''(CA' - C'A) + C''(AB' - A'B) = o;$$

denn wenn sie sich in einem Punkte schneiden sollen, so müssen die Coordinaten des Punktes, in welchem zwei von ihnen sich schneiden, der Gleichung der dritten Genüge leisten.

Die gefundene Bedingung kann auch in einer der folgenden Formen geschrieben werden

$$A(B'C'' - B''C') + B(C'A'' - C''A') + C(A'B'' - A''B') = o$$

$$A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C) = o\text{*}.$$

*Aufg. 1.* Die Seiten eines Dreiecks haben die Gleichungen

$$x + y = 2,\quad x - 3y = 4,\quad 3x + 5y + 7 = 0,$$

welches sind die Coordinaten seiner Ecken?

*Aufl.* $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{14}, -\frac{19}{14})$, $(\frac{17}{2}, -\frac{13}{2})$.

*Aufg. 2.* Berechne die Coordinaten der Punkte, in welchen die geraden Linien $3x + y - 2 = 0$, $x + 2y = 5$, $2x - 3y + 7 = 0$ sich schneiden.

*Aufl.* $(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5})$, $(\frac{1}{7}, \frac{17}{7})$, $(-\frac{1}{11}, \frac{25}{11})$.

*Aufg. 3.* Die Coordinaten der Durchschnittspunkte von

$$2x + 3y = 13,\quad 5x - y = 7,\quad x - 4y + 10 = 0$$

zu finden,

*Aufl.* Sie schneiden sich in dem Punkte (2, 3).

---

*) Wenn man einen dieser Ausdrücke, z. B. den letzten durch $C.C'.C''$ dividirt, so dass man erhält

$$\frac{A}{C}\left(\frac{B'}{C'} - \frac{B''}{C''}\right) + \frac{A'}{C'}\left(\frac{B''}{C''} - \frac{B}{C}\right) + \frac{A''}{C''}\left(\frac{B}{C} - \frac{B'}{C'}\right) = 0,$$

so erkennt man die vollständige Analogie dieser Bedingung, unter welcher drei gerade Linien durch einen Punkt gehen, mit der, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen. An die Stelle der Coordinaten dieser Punkte treten die Grössen $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}; \frac{A'}{C'}, \frac{B'}{C'}; \frac{A''}{C''}, \frac{B''}{C''}$, die von den geraden Linien gebildeten Achsenabschnitte. Können sie nicht als Coordinaten der geraden Linien bezeichnet werden?

*Aufg. 4.* Die Coordinaten der Ecken und die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks zu finden, dessen Seiten durch die Gleichungen

$$2y - 3x = 10,\ 2y + x = 6,\ 16x - 10y = 33,\ 12x + 14y + 29 = 0$$

gegeben sind.

*Aufl.*

$$(-1,\ \tfrac{7}{2}),\ (3,\ \tfrac{3}{2}),\ (\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{5}{2}),\ (-3,\ \tfrac{1}{2});\ 6y - x = 6;\ 8x + 2y + 1 = 0.$$

*Aufg. 5.* Die Durchschnittspunkte der Gegenseiten desselben Vierecks und die Gleichung der Verbindungslinie desselben zu berechnen.

$$(83,\ \tfrac{259}{2}),\ (-\tfrac{71}{5},\ \tfrac{101}{10});\ 162y - 199x = 4462.$$

*Aufg. 6.* Die Diagonalen des durch

$$x = a,\ x = a',\ y = b,\ y = b'$$

gebildeten Parallelogramms auszudrücken.

*Aufl.*

$$(b - b')x - (a - a')y = a'b - ab',\ (b - b')x + (a - a')y = ab - a'b'.$$

*Aufg. 7.* Wenn von einem Dreieck die Basis und die Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit der Spitze zu Coordinatenachsen gewählt sind, so sollen die Gleichungen der Linien, die von den Basisecken nach den Mittelpunkten der Seiten gehen und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes berechnet werden.

*Aufl.* Sind die Coordinaten der Spitze $o$, $y'$, und die der Basisecken $x'$, $o$ und $-x'$, $o$ so sind die Gleichungen der Halbirungslinien

$$3x'y - y'x - x'y' = o,\ 3x'y + y'x - x'y' = o$$

und die Coordinaten ihres Schnittpunktes $\left(o,\ \frac{y'}{3}\right)$.

*Aufg. 8.* Die Gleichungen der Seiten eines Vierecks sind:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b'} = 1,\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a'} = 1.$$

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Gegenseiten und des Mittelpunktes ihrer Verbindungslinie zu finden.

*Aufl.* $\frac{aa'(b+b')}{ba' - ab'},\ \frac{bb'(a+a')}{ab' - a'b};\ \frac{aa'(b+b')}{a'b' - ab},\ \frac{bb'(a+a')}{a'b' - ab};$

$$\frac{aa'(a-a')(b+b')^2}{2(a'b'-ab)(ab'-a'b)},\quad \frac{bb'(b'-b)(a+a')^2}{2(a'b'-ab)(ab'-a'b)}.$$

*Aufg. 9.* Die Gleichung der Linie zu berechnen, welche in demselben Viereck die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

*Aufl.* $\frac{2x}{a-a'} + \frac{2y}{b-b'} = 1.$

*Aufg. 10.* Nachzuweisen, dass die in der Aufg. 8 gefundenen Coordinaten des Mittelpunktes der Verbindungslinie der Gegenecken derselben Gleichung genügen.

35. Den Inhalt des durch die drei Linien
$Ax + By + C = o,\ A'x + B'y + C' = o,\ A''x + B''x + C'' = o$
gebildeten Dreiecks zu finden.

Wenn wir nach Artikel 33 die Coordinaten der Ecken berechnen und ihre Werthe in die Formel des Artikels 31 einsetzen, so erhalten wir für den doppelten Inhalt den Ausdruck:

$$\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B}\left(\frac{A'C'' - A''C'}{A'B'' - A''B'} - \frac{A''C - AC''}{AB'' - A''B}\right) +$$
$$\frac{B'C'' - B''C'}{A'B'' - A''B'}\left(\frac{A''C - AC''}{AB'' - A''B} - \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}\right) +$$
$$\frac{B''C - BC''}{A''B - AB''}\left(\frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} - \frac{A'C'' - A''C'}{A''B' - A'B''}\right).$$

Wir reduciren diesen Ausdruck auf einen gemeinsamen Nenner und bemerken, dass der Zähler des zwischen den ersten Klammern enthaltenen Theils die mit $A''$ multiplicirte Grösse

$$A''(BC' - B'C) + A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'')$$

ist, und dass die in den beiden folgenden Klammern enthaltenen Theile des Ausdrucks die Producte derselben Grösse mit $A, A'$ respective sind, dadurch erhalten wir für den doppelten Inhalt des Dreiecks

$$\frac{[A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C)]^2}{(AB' - A'B)(A'B'' - A''B')(A''B - AB'')}.$$

Wenn die drei geraden Linien sich in einem Punkte schneiden, so wird dieser Ausdruck für den Flächeninhalt Null (Art. 34); wenn irgend zwei von ihnen parallel sind, so wird er unendlich gross. (Art. 22, 33).

36. Aus den Gleichungen zweier geraden Linien die einer dritten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden zu finden.

Die zunächstliegende Methode zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, nach Artikel 33 die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwei geraden Linien zu berechnen und ihre Werthe in die Gleichung des Artikels 28, nämlich in

$$y - y' = m(x - x')$$

einzusetzen.

Eine leichtere Auflösung nimmt aber die Aufgabe auf Grund des folgenden wichtigen Princips an: Wenn $S = o$, $S' = o$ die

**Gleichungen irgend zweier Oerter sind**, so **enthält der durch die Gleichung** $S + kS' = o$ (wo $k$ eine Constante ist) **dargestellte Ort alle die den beiden gegebenen Oertern gemeinsamen Punkte.** Denn es ist offenbar, dass Coordinaten, welche der Gleichung $S = o$ und zugleich der Gleichung $S' = o$ genügen, auch die Gleichung $S + kS' = o$ befriedigen.

Daher bezeichnet die Gleichung

$$(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = o,$$

welche offenbar die Gleichung einer geraden Linie ist, eine solche gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o$$

gezogen ist; denn die Coordinaten des Schnittpunktes dieser beiden geraden Linien müssen, in die Gleichung

$$(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = o$$

eingesetzt, diese identisch machen, weil sie jeden ihrer Theile getrennt $= o$ machen.

*Aufg. 1.* Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche den Anfangspunkt mit dem Durchschnittspunkt der Linien

$$Ax + By + C = o, \quad A'x + B'y + C' = o$$

verbindet.

*Aufl.* Indem wir die erste Gleichung mit $C'$, die zweite mit $C$ multipliciren und die Producte von einander abziehen, erhalten wir die Gleichung der geforderten Linie

$$(AC' - A'C)x + (BC' - B'C)y = o:$$

denn diese geht nach Art. 19 durch den Anfangspunkt und nach dem gegenwärtigen Artikel durch den Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linien.

*Aufg. 2.* Die Gleichung der durch den Schnittpunkt derselben geraden Linien gezogenen Parallelen zur Achse der $x$ soll gefunden werden.

*Aufl.* $(BA' - AB')y + CA' - AC' = o.$

*Aufg. 3.* Es ist die Gleichung der geraden Linie auszudrücken, welche den Durchschnittspunkt derselben Linien mit dem Punkte $x'y'$ verbindet.

*Aufl.* Wir bestimmen in der allgemeinen Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen geraden Linien geht, die Constante $k$ durch die Bemerkung, dass dieser Gleichung durch die Coordinaten $x'y'$ genügt werden muss und finden als die verlangte Gleichung

$$(Ax + By + C)(A'x' + B'y' + C') = (Ax' + By' + C)(A'x + B'y + C').$$

*Aufg. 4.* Welches ist die Gleichung der geraden Linie, die den Punkt (2, 3) mit dem Durchschnittspunkt von

$$2x + 3y + 1 = 0 \text{ und } 3x - 4y = 5$$

verbindet?

*Aufl.*

$$11\,(2x + 3y + 1) + 14\,(3x - 4y - 5) = 0 \text{ oder } 64x - 23y = 59.$$

37. Das im letzten Artikel begründete Princip liefert für drei sich in demselben Punkt durchschneidende gerade Linien ein Kennzeichen, welches häufig bequemer ist als das im Artikel 34 angegebene.

**Drei gerade Linien gehen durch denselben Punkt, wenn ihre Gleichungen, indem man jede mit einer constanten Grösse multiplicirt, Null zur Summe geben**; d. h. wenn für alle $x$ und $y$ die Relation besteht

$$l(Ax + By + C) + m(A'x + B'y + C') + n(A''x + B''y + C'') = o.$$

Denn in diesem Falle müssen die Werthe der Coordinaten, welche die beiden ersten Theile der Gleichung einzeln mit Null identisch machen, auch den dritten Theil gleich Null setzen.

*Aufg. 1.* Die drei geraden Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

*Aufl.* Die Gleichungen dieser Linien sind nach Art. 29, Aufg. 5

$$(y'' + y''' - 2y')\,x - (x'' + x''' - 2x')\,y + (x''y' - x'y'') + (x'''y' - x'y''') = 0,$$

$$(y''' + y' - 2y'')\,x - (x''' + x' - 2x'')\,y + (x'''y'' - x''y''') + (x'y'' - x''y') = 0,$$

$$(y' + y'' - 2y''')\,x - (x' + x'' - 2x''')\,y + (x'y''' - x'''y') + (x''y''' - x'''y'') = 0.$$

Da die Summe dieser drei Gleichungen Null ist, so gehen die durch sie dargestellten geraden Linien durch einen Punkt. Nach Art. 33 findet man seine Coordinaten $\left(\frac{x' + x'' + x'''}{3}, \frac{y' + y'' + y'''}{3}\right)$.

*Aufg.* Derselbe Satz ist unter der Voraussetzung zu beweisen, dass zwei Seiten des Dreiecks von den Längen $a$ und $b$ zu Achsen genommen sind.

*Aufl.* $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ sind die Gleichungen der drei Halbirungslinien; ihre blose Ansicht liefert den Beweis.

38. Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem die gerade Verbindungslinie der Punkte $x'y'$, $x''y''$ von der Linie $Ax + By + C = o$ geschnitten wird.

Wir können diese Aufgabe dadurch lössen, dass wir die Gleichung der Verbindungslinie jener beiden Punkte bilden und nach Artikel 33 ihren Durchschnittspunkt mit der gegebenen Linie bestimmen.

Eine andere Methode, die wir oft anwenden werden, um den Punkt zu bestimmen, in welchem die gerade Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte durch einen gegebenen Ort geschnitten wird, ist in dem Folgenden enthalten.

Nach Artikel 7 sind die Coordinaten eines Punktes in der geraden Linie, welche die gegebenen Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindet, immer von der Form

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m + n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$$

und wir können das Verhältniss $\frac{m}{n}$, in welchem die Verbindungslinie dieser Punkte durch den gegebenen Ort getheilt wird, als eine unbekannte Grösse ansehen, welche sich aus der Bedingung bestimmt, dass die eben geschriebenen Coordinaten der Gleichung des Ortes genügen müssen.

So haben wir im gegenwärtigen Falle

$$A \cdot \frac{mx'' + nx'}{m + n} + B \cdot \frac{my'' + ny'}{m + n} + C = 0;$$

also

$$\frac{m}{n} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}.$$

Demnach sind die Coordinaten des gesuchten Punktes

$$x = \frac{(Ax' + By' + C)x'' - (Ax'' + By'' + C)x'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By'' + C)}$$

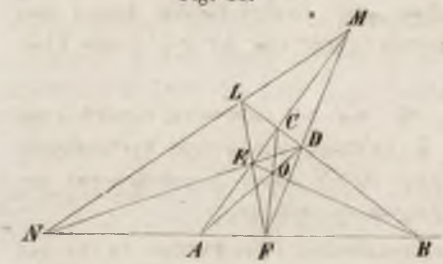
$$y = \frac{(Ax' + By' + C)y'' - (Ax'' + By'' + C)y'}{(Ax' + By' + C) - (Ax'' + By' + C)}$$

Der Werth für das Verhältniss $m : n$ konnte auch geometrisch aus der Bemerkung abgeleitet werden, dass das Verhältniss, in welchem die Verbindungslinie von $x'y'$ und $x''y''$ geschnitten wird, dem Verhältniss der Senkrechten gleich ist, die man von diesen

Punkten auf die gegebene gerade Linie fällen kann; denn nach Artikel 27 sind diese Senkrechten

$$\frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \text{ und } \frac{Ax'' + By'' + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

Fig. 18.




Wenn eine gerade Linie die Seiten eines Dreiecks $BC$, $AC$, $AB$ in den Punkten $L$, $M$, $N$ durchschneidet, so ist

$$\frac{BL.\ CM.\ AN}{CL.\ AM.\ BN} = -1.$$

Sind die Coordinaten der Ecken $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, so haben wir

$$\frac{BL}{CL} = -\frac{Ax'' + By'' + C}{Ax''' + By''' + C};$$

$$\frac{CM}{AM} = -\frac{Ax''' + By''' + C}{Ax' + By' + C};$$

$$\frac{AN}{BN} = -\frac{Ax' + By' + C}{Ax'' + By'' + C}$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar, wenn man noch hinsichtlich der Vorzeichen dieser Theilungsverhältnisse bemerkt, dass entweder alle drei das negative oder nur eines das negative und die andern das positive Zeichen erhalten müssen, weil die Dreiecksseiten durch die Transversale nur entweder alle drei ausserhalb oder zwei innerhalb und eine ausserhalb des Dreiecks geschnitten werden können.

39. **Man bestimme das Verhältniss, nach welchem die Verbindungslinie zweier Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ durch die Verbindungslinie zweier andern Punkte $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ geschnitten wird.**

Die Gleichung der letztern geraden Linie ist (Art. 29)

$$(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + x_3 y_4 - x_4 y_3 = o;$$

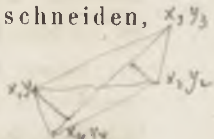
daher nach dem letzten Artikel

$$\frac{m}{n} = -\frac{(y_3 - y_4)\,x_1 - (x_3 - x_4)\,y_1 + x_3\,y_4 - x_4\,y_3}{(y_3 - y_4)\,x_2 - (x_3 - x_4)\,y_2 + x_3\,y_4 - x_4\,y_3}$$

$$= -\frac{x_1\,(y_3 - y_4) + x_3\,(y_4 - y_1) + x_4\,(y_1 - y_3)}{x_2\,(y_3 - y_4) + x_3\,(y_4 - y_2) + x_4\,(y_2 - y_3)}.$$

Aus Artikel 31 ist offenbar, dass diess das Verhältniss der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ist, deren Ecken sind $x_1 y_1$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ und $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, wie dies auch geometrisch evident ist.

Wenn die geraden Verbindungslinien eines Punktes mit den Ecken eines Dreiecks die Gegenseiten $BC$, $CA$, $AB$ respective in Punkten $D$, $E$, $F$ schneiden, so ist



$$\frac{BD.\,CE.\,AF}{CD.\,AE.\,BF} = +\,1.$$

Sind die Ecken $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und ist der angenommene Punkt $x_4\,y_4$, so folgt

$$\frac{BD}{CD} = \frac{x_1\,(y_2 - y_4) + x_2\,(y_4 - y_1) + x_4\,(y_1 - y_2)}{x_1\,(y_4 - y_3) + x_4\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_4)},$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{x_2\,(y_3 - y_4) + x_3\,(y_4 - y_2) + x_4\,(y_2 - y_3)}{x_1\,(y_2 - y_4) + x_2\,(y_4 - y_1) + x_4\,(y_1 - y_2)},$$

$$\frac{AF}{BF} = \frac{x_1\,(y_4 - y_3) + x_4\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_4)}{x_2\,(y_3 - y_4) + x_3\,(y_4 - y_2) + x_4\,(y_2 - y_3)}$$

und die Wahrheit des Satzes ist offenbar, wenn man nur noch bemerkt, dass entweder alle drei Theilpunkte $D$, $E$, $F$ innerhalb der Dreiecksseiten oder einer innerhalb und zwei ausserhalb derselben liegen.

40. Den von zwei geraden Linien gebildeten Winkel unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten zu finden.

Der von den beiden geraden Linien gebildete Winkel ist dem Winkel gleich, welchen die vom Anfangspunkte aus auf sie gefällten Perpendikel mit einander einschliessen; wenn wir die von diesen mit der Achse der $x$ gebildeten Winkel $\alpha$, $\alpha'$ nennen, so ist nach Artikel 25

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}};\quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}};$$

$$\cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{(A'^2+B'^2)}};\quad \sin\alpha' = \frac{B'}{\sqrt{(A'^2+B'^2)}};$$

also $$\sin(\alpha-\alpha') = \frac{BA' - AB'}{\sqrt{(A^2+B^2)}\,.\,\sqrt{(A'^2+B'^2)}};$$

$$\cos(\alpha-\alpha') = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{(A^2+B^2)}\,.\,\sqrt{(A'^2+B'^2)}},$$

und daher $$\operatorname{tang}(\alpha-\alpha') = \frac{BA' - AB'}{AA' + BB'}.$$

Zusatz 1. Der von beiden Linien gebildete Winkel verschwindet, wenn $BA' - AB' = o$;
die geraden Linien sind dann nach Artikel 22 parallel.

Zusatz 2. Die zwei geraden Linien sind rechtwinklig zu einander, wenn $AA' + BB' = o$,
weil dann die Tangente ihres Winkels unendlich gross wird.

Wenn die Gleichungen der beiden geraden Linien in der Form $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ gegeben sind, so ergiebt sich die Tangente des von ihnen gebildeten Winkels

$$= \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

weil dieser Winkel die Differenz der Winkel ist, die die Linien selbst mit der Achse der $x$ bilden und weil $m$ und $m'$ (Art. 22) die Tangenten dieser letztern Winkel sind; die geraden Linien sind parallel, wenn $m = m'$, und rechtwinklig auf einander, wenn $mm' + 1 = o$*.

---

*) Werfen wir hier die naheliegende Frage auf, ob nicht auch parallele Linien rechtwinklig zu einander sein können, so erhalten wir die Bedingung $m^2 + 1 = 0$ oder $m = \pm\sqrt{-1}$. Zwei gerade Linien also, welche durch Gleichungen wie

$$y = \pm x\sqrt{-1} + b,\qquad y = \pm x\sqrt{-1} + b'$$
$$y = xi + b\qquad\qquad y = xi + b'$$

dargestellt werden, sind zugleich parallel, d. h. haben ihren Durchschnittspunkt in unendlicher Entfernung und stehen rechtwinklig zu einander. Ein merkwürdiges Resultat ergiebt sich, wenn man die Tangente des Winkels berechnet, der eine durch die Gleichung $y = xi$ dargestellte gerade Linie mit irgend einer andern macht, welche mit der Abscissenachse den Winkel $\varphi$ einschliesst. Man erhält

$$\tan\overset{(\varphi-\psi)}{\cancel{-(\varphi\psi)}} = \frac{\tan\psi - \tan\varphi}{1 + \tan\psi\tan\varphi} = \frac{i - \tan\varphi}{1 + i\tan\varphi} = \frac{(i - \tan\varphi)(1 - i\tan\varphi)}{1 + \tan^2\varphi} = i = \tan\psi.$$

41. **Den Winkel zwischen zwei geraden Linien bei schiefwinkligen Coordinaten zu finden.**

Wir verfahren genau wie im letzten Artikel, indem wir die Ausdrücke des Artikel 26 zu Grunde legen:

$$\cos\alpha = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}},$$

$$\cos\alpha' = \frac{A'\sin\omega}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega)}};$$

somit

$$\sin\alpha = \frac{B - A\cos\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}},$$

$$\sin\alpha' = \frac{B' - A'\cos\omega}{\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega)}}.$$

Also:

$$\sin(\alpha - \alpha') = \frac{(BA' - AB')\sin\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}\,.\,\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega)}},$$

$$\cos(\alpha - \alpha') = \frac{BB' + AA' - (AB' + A'B)\cos\omega}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega)}\,.\,\sqrt{(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\omega)}}.$$

Endlich

$$\tan(\alpha - \alpha') = \frac{(BA' - A'B)\sin\omega}{AA' + BB' - (AB' + A'B)\cos\omega}.$$

Die geraden Linien sind somit parallel, wenn $AB' = A'B$; sie sind rechtwinklig, wenn

$$AA' + BB' = (AB' + A'B)\cos\omega.$$

42. **Die Gleichung einer geraden Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht und mit einer gegebenen geraden Linie $y = mx + b$ einen vorgeschriebenen Winkel $\varphi$ bildet.**

Setzen wir rechtwinklige Coordinatenachsen voraus, so kann die Gleichung der geforderten Linie geschrieben werden

$$y - y' = m'(x - x')$$

---

Die imaginäre gerade Linie $y = xi$ bildet sonach mit jeder beliebigen andern geraden Linie einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente immer $= i$ ist.

Die rein analytische Natur dieser Resultate erhellt aus ihnen selbst; gleichwohl werden wir dieselben in der Theorie der Curven, der Transformation von Winkelrelationen usw. eine wichtige Rolle spielen sehen.

und die Formel des Artikel 40

$$\tan\varphi = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

erlaubt uns

$$m' = \frac{m - \tan\varphi}{1 + m\tan\varphi}$$

zu bestimmen.

Darnach bestimmt sich sehr einfach die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen geraden Linie $y = mx + b$ rechtwinklig ist.

Denn da die Bedingung, unter welcher zwei gerade Linien rechtwinklig auf einander sind $mm' = -1$ ist, so ist die Gleichung der verlangten Senkrechten

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

Ebenso ist die Gleichung der vom Punkte $x'y'$ auf die gerade Linie $Ax + By + C = o$ gefällten Senkrechten

$$A(y - y') = B(x - x');$$

die Coefficienten von $x$ und $y$ werden vertauscht und das Zeichen des einen von ihnen in das entgegengesetzte umgeändert.

*Aufg. 1.* Die Gleichungen der Perpendikel zu finden, die von den Ecken des Dreiecks (2, 1), (3, — 2); (— 4, — 1) auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden.

*Aufl.* Die Gleichungen der Seiten sind (Art. 29, Aufg. 1).

$$x + 7y + 11 = 0,\ 3y - x = 1,\ 3x + y = 7$$

und die Gleichungen der Perpendikel

$$7x - y = 13,\quad 3x + y = 7,\quad 3y - x = 1.$$

Das Dreieck ist demnach rechtwinklig.

*Aufg. 2.* Die Gleichungen der auf den Seiten desselben Dreiecks in ihren Mittelpunkten errichteten Senkrechten zu finden.

*Aufl.* Die Mittelpunkte sind $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $(-1, 0)$, $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$; die Perpendikel $7x - y + 2 = 0$, $3x + y + 3 = 0$, $3y - x + 4 = 0$; sie durchschneiden sich im Punkte $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

*Aufg. 3.* Welches sind die Gleichungen der von den Ecken des Dreiecks (2, 3), (4, — 5), (— 3, — 6) (Art. 29. Aufg. 3) auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel?

*Aufl.* $7x + y = 17$, $5x + 9y + 25 = 0$, $x - 4y = 21$; sie durchschneiden sich in $(\frac{89}{29}, - \frac{130}{29})$.

*Aufg. 4.* Die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten desselben Dreiecks errichteten Perpendikel anzugeben.

*Aufl.* $7x + y + 2 = 0$, $5x + 9y + 16 = 0$, $x - 4y = 7$; ihr Schnittpunkt ist $(-\frac{1}{29}, - \frac{51}{29})$.

*Aufg. 5.* Aus den Coordinaten der Ecken eines Dreiecks die allgemeinen Gleichungen der von ihnen auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel abzuleiten.

*Aufl.*

$$(x'' - x''')x + (y'' - y''')y + (x'x''' + y'y''') - (x'x'' + y'y'') = 0.$$
$$(x''' - x')x + (y''' - y')y + (x''x' + y''y') - (x''x''' + y''y''') = 0.$$
$$(x' - x'')x + (y' - y'')y + (x'''x'' + y'''y'') - (x'''x' + y'''y') = 0.$$

Weil diese Gleichungen Null zur Summe geben, so schneiden sich diese drei Perpendikel stets in einem Punkte.

*Aufg. 6.* Die Gleichungen der Senkrechten in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks auf denselben auszudrücken und zu zeigen, dass sie sich in einem Punkte schneiden.

*Aufl.*

$$(x'' - x''')x + (y'' - y''')y - \tfrac{1}{2}(x''^2 - x'''^2) - \tfrac{1}{2}(y''^2 - y'''^2) = 0.$$
$$(x''' - x')x + (y''' - y')y - \tfrac{1}{2}(x'''^2 - x'^2) - \tfrac{1}{2}(y'''^2 - y'^2) = 0.$$
$$(x' - x'')x + (y' - y'')y - \tfrac{1}{2}(x'^2 - x''^2) - \tfrac{1}{2}(y'^2 - y''^2) = 0.$$

*Aufg. 7.* Die Basis eines Dreiecks und die von der Spitze auf dieselbe gefällte Senkrechte sind als Coordinatenachsen gewählt; man soll die Gleichungen der von den Basisecken auf die Gegenseiten gefällten Perpendikel und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes angeben.

*Aufl.* Sind die Coordinaten der Spitze $(o, y')$ und die der Basisecken $(x', o)$, $(- x'', o)$, so sind die Gleichungen der Perpendikel

$$x''(x - x') + y'y = 0, \quad x'(x + x'') - y'y = 0$$

und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes

$$\left(o, \frac{x'x''}{y'}\right).$$

*Aufg. 8.* Für dieselben Achsen soll man die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Perpendikel und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes ausdrücken.

*Aufl.*

$$2(x''x + y'y) = y'^2 - x''^2;\ 2(xx' + y'y) = x'^2 - y'^2;\ 2x = x' - x'';$$
$$\left(\frac{x' - x''}{2}, \frac{y'^2 - x'x''}{2y'}\right).$$

43. **Die Gleichung der Halbirungslinie des Winkels zu finden, welchen die geraden Linien**

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = o,\quad x \cos\beta + y \sin\beta - p' = o$$

**einschliessen.**

Wir finden die Gleichung dieser geraden Linie am einfachsten, indem wir algebraisch ausdrücken, dass die von irgend einem Punkte $x, y$ in ihr auf die beiden geraden Linien gefällten Perpendikel gleich sind; diess giebt unmittelbar die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = x \cos\beta + y \sin\beta - p',$$

weil jede Seite derselben die Länge einer von diesen Senkrechten bezeichnet. (Art. 27).

Nach Artikel 27 wechselt das Zeichen der Senkrechten, beim Uebergang von der einen Seite einer Linie auf die andre; es bezeichnet also die Gleichung

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = -(x \cos\beta + y \sin\beta - p')$$

die Halbirungslinie des von den beiden geraden Linie gebildeten andern Winkels, welcher das Supplement des vorigen ist.

Wenn die Gleichungen in der Form

$$Ax + By + C = o,\quad A'x + B'y + C' = o$$

gegeben sind, so ist die Gleichung des Paars der Winkelhalbirungslinien

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{(A'^2 + B'^2)}}.$$

Wenn wir das Vorzeichen wählen, welches den beiden constanten Gliedern einerlei Vorzeichen giebt, so folgt aus Artikel 27, dass wir die Halbirungslinie des Winkels durch die Gleichung ausdrücken, in welchem der Anfangspunkt liegt; und wenn wir den constanten Gliedern entgegengesetzte Zeichen geben, so haben wir die Gleichung der Halbirungslinie des Supplementwinkels.

*Aufg. 1.* Die Gleichung der Halbirungslinien des Winkels zwischen zwei geraden Linien auf die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ zu reduciren.

*Aufl.*

$$x \cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') + 90^0\right] + y \sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') + 90^0\right] = \frac{p - p'}{2 \sin\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')};$$

$$x \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') + y \sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \frac{p + p'}{2 \cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')} = 0.$$

Man sieht in dieser Form am deutlichsten, dass die beiden Halbirungslinien rechtwinklig auf einander stehen.

*Aufg.* 2. Man soll beweisen, dass sich die Winkelhalbirungslinien eines Dreiecks in einem Punkte schneiden.

*Aufl.* Denkt man den Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb des Dreiecks gewählt, so sind die Gleichungen:

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) - (x \cos \beta + y \sin \beta - p') = 0,$$
$$(x \cos \beta + y \sin \beta - p') - (x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'') = 0,$$
$$(x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'') - (x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0.$$

*Aufg.* 3. Welches sind die Gleichungen der Winkelhalbirungslinien für $3x + 4y - 9 = 0,\ 12x + 5y - 3 = 0$?

*Aufl.* $7x - 9y + 34 = 0,\ 9x + 7y = 12.$

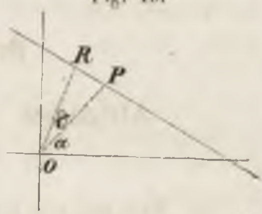
41. **Die Polargleichung einer geraden Linie zu finden.** (Artikel 12).

Wenn wir das Perpendikel auf die gegebene gerade Linie als unsere feste Achse voraussetzen und $OR$ irgend ein durch den Pol nach einem ihrer Punkte gezogener Radius vector ist, so folgt für

$$OR = \varrho,\ \angle ROP = \vartheta$$

$O R. \cos \vartheta = O P$, d. h. die gesuchte Gleichung ist $\varrho \cos \vartheta = p$.

Fig. 19.




Bildet die feste Achse mit dem Perpendikel den Winkel $\alpha$, so ist die Gleichung $\varrho \cos (\vartheta - \alpha) = p$.

Diese Gleichung kann auch durch Transformation der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

erhalten werden, denn indem man für $x$ $\varrho \cos \vartheta$ und für $y$ $\varrho \sin \vartheta$ (Artikel 12) substituirt, wird diese Gleichung

$$\varrho (\cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha) = p;$$

oder wie vorher $\varrho \cos (\vartheta - \alpha) = p.$

Eine Gleichung von der Form

$$\varrho (A \cos \vartheta + B \sin \vartheta) = C$$

kann wie im Artikel 25 auf die Form $\varrho \cos (\vartheta - \alpha) = p$ reducirt werden, indem man sie durch $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ dividirt; wir haben dann

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}},\ \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}},\ p = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

*Aufg. 1.* Die Gleichung $\varrho = 2a \sec\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$ in eine solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzuwandeln.

*Aufg. 2* Die Polar-Coordinaten des Durchschnittspunktes der folgenden geraden Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu bestimmen: $\varrho \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = 2a$, $\varrho \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = a$.

*Aufl.* $\varrho = 2a$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; der Winkel $= \frac{\pi}{3}$.

*Aufg. 3.* Welches ist die Polargleichung der geraden Linie, die die Punkte $\varrho'$, $\vartheta'$; $\varrho''$, $\vartheta''$ verbindet?

*Aufl.*

$$\varrho'\varrho'' \sin(\vartheta' - \vartheta'') + \varrho''\varrho \sin(\vartheta'' - \vartheta) + \varrho\varrho' \sin(\vartheta - \vartheta') = 0.$$

---

## Drittes Kapitel.

# Aufgaben über die gerade Linie.

45. Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Principien dargelegt haben, auf welche gestützt wir die Lage eines Punktes oder einer geraden Linie algebraisch auszudrücken im Stande sind, wollen wir einige weitere Beispiele von der Anwendung dieser Methode zur Auflösung geometrischer Aufgaben hinzufügen. Der Anfänger muss sich in der Anwendung der Methode zur Lösung solcher Aufgaben fleissig üben, bis er Leichtigkeit und Schnelligkeit in ihrem Gebrauche erlangt hat. Die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele sind nicht sowohl ihrer selbst wegen als deshalb gewählt, um daran zu zeigen, wie dergleichen Aufgaben algebraisch gelösst werden können und mögen daher wohl selbst einfachere geometrische Auflösungen annehmen. Solche einzelne Fälle dürfen nicht zu der Voraussetzung verleiten, dass die geometrische Methode, die bei ihnen den Vorzug verdient, auch in andern Fällen vorzuziehen sei. Jede Methode hat ihre eigenthümlichen Vorzüge. Wenn für einige Aufgaben die geometrischen Auflösungen klarer und einfacher sind, so verfährt da-

gegen die algebraische Methode mit grösserer Gleichförmigkeit und führt mit grösserer Sicherheit zum Ziel. Es muss das Bestreben des Studirenden sein, sich beider Untersuchungs-Methoden in der Art zu bemächtigen, dass er fähig sei, jede von ihnen nach der Natur der vorliegenden Aufgabe anzuwenden.

Wir wollen von denjenigen Arten der Aufgaben, welche am häufigsten vorkommen, je einige Beispiele geben; derjenige Leser, welcher dieser sich bemeistert hat, wird in der Anwendung derselben Methode auf irgend andre Aufgaben, die sich ihm darbieten mögen, keine Schwierigkeit finden.

46. Aufgaben, bei denen zu beweisen ist, dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Es erscheint unnöthig, zu den im letzten Kapitel bereits gegebenen noch andre Beispiele über diesen Gegenstand hinzuzufügen. Das Verfahren, welches wir verfolgen, ist dieses: Wir bilden die Gleichungen der drei geraden Linien; alsdann können wir entweder sogleich bemerken, dass die drei Gleichungen Null zur Summe geben, wenn sie mit passenden Constanten multiplicirt werden: ist diess der Fall, so wissen wir nach Artikel 37, dass die durch die Gleichungen repräsentirten geraden Linien sich in einem Punkte schneiden; oder wir berechnen die Coordinaten des Durchschnittspunctes von zweien der geraden Linien und untersuchen, ob sie der Gleichung der dritten genügen; oder endlich, wir wenden das Kennzeichen des Artikel 34 auf die Gleichungen an.

Bei den Auflösungen dieser wie jeder andern Klasse geometrischer Aufgaben können im Allgemeinen die Gleichungen durch eine geschickte Wahl der Coordinatenachsen vereinfacht werden; indem man zwei der wichtigsten Linien der Figur zu Coordinatenachsen wählt, werden die analytischen Ausdrücke wesentlich verkürzt. Andrerseits geschieht es freilich oft, dass durch die Annahme von Coordinatenachsen, welche mit der Figur nicht in einer solchen besondern Verbindung stehen, die Gleichungen an Symmetrie das gewinnen, was ihnen an Einfachheit abgeht. Der Leser kann dies aus den zwei in Aufgabe 1 und 2 des Artikel 37 gegebenen Auflösungen derselben Aufgabe erkennen, wo die erste Auflösung, obgleich die längere, den Vorzug hat, dass man aus der entwickelten Gleichung der einen Winkelhalbirungslinie sogleich die der andern ohne Rechnung ableiten kann.

Weil Ausdrücke, welche Winkel enthalten, durch die Anwendung schiefwinkliger Coordinaten complicirter werden, ist es im Allgemeinen rathsam, für solche Aufgaben rechtwinklige Achsen vorauszusetzen.

Aufgaben, in denen zu beweisen ist, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Es kann vorkommen, dass die Coordinaten des dritten Punktes als aus denen der zwei ersten $x'y'$, $x''y''$ nach den Formeln

$$\frac{mx'' + nx'}{m+n}, \quad \frac{my'' + ny'}{m+n}$$

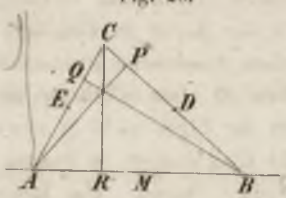
hervorgehend sofort erkannt werden; in diesem Falle folgt aus Artikel 7, dass die drei Punkte in einer geraden Linie liegen. In anderen Fällen bilden wir die Gleichung der geraden Linie, welche zwei von ihnen verbindet und untersuchen, ob die Coordinaten des dritten ihr genügen.

47. Geometrische Oerter. Die analytische Geometrie eignet sich mit vorzüglicher Leichtigkeit zur Untersuchung der Oerter. Wir haben nur die Relation aufzusuchen, welche die Bedingungen der Aufgabe zwischen den Coordinaten des Punktes fordern, dessen Ort gesucht wird; der algebraische Ausdruck dieser Relation liefert uns sofort die Gleichung des verlangten Ortes.

*Aufg. 1.* Welches ist der Ort der Spitze eines Dreiecks, von welchem die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten gegeben sind?

*Aufl.* Wir nehmen die Basis $AB$ zur Achse der $x$ und eine in ihrem Endpunkte $A$ auf ihr errichtete Senkrechte zur Achse der $y$, nennen die Länge der Basis $c$ und die Coordinaten der Spitze $x$, $y$. Dann ist

Fig. 20.




$$BC^2 = CR^2 + RB^2 = y^2 + (c - x)^2$$
$$AC^2 = x^2 + y^2,$$

daher $BC^2 - AC^2 = c^2 - 2cx$, und indem wir diess einer Constanten gleich setzen $\quad c^2 - 2cx = m^2$.

die Gleichung des Ortes der Spitze. Dies ist nach Art. 15 die Gleichung einer zur Basis senkrechten geraden Linie in der Entfernung $\frac{c^2 - m^2}{2c}$ vom Anfangspunkt. Indem wir diess von $c$ subtrahiren, erhalten wir das andere Segment $= \frac{c^2 + m^2}{2c}$ und bewähren leicht, dass der gefundene Ort die Basis so theilt, dass die Differenz der Quadrate der Segmente der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist. (Eukl. I. 47. Zus. 4.)

*Aufg.* 2. Von einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; welches ist der Ort des Punktes in dem von seiner Spitze auf die Basis gefällten Perpendikel, welcher jenseits der Spitze um die Länge der einen Seite von der Basis entfernt ist?

*Aufl.* Wir nehmen dieselben Achsen, um zu untersuchen, welche Relation zwischen den Coordinaten des Punktes besteht, dessen Ort wir zu bestimmen haben. Die Abscisse desselben ist $AR$ und seine Ordinate nach der Voraussetzung $= AC$; wenn $m$ die gegebene Summe der Seiten ist, so ist $BC = m - y$.

Auch gilt $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \, . \, AR,$$

d. h. indem man $AB$ wieder durch $c$ bezeichnet

$$(m - y)^2 = c^2 + y^2 - 2cx,$$

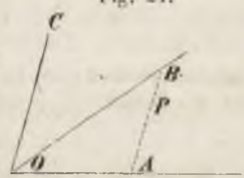
woraus wir durch Reduction erhalten

$$2my - 2cx = m^2 - c^2,$$

die Gleichung einer geraden Linie.

*Aufg.* 3. Wenn zwei feste gerade Linien $OA$ und $OB$ gegeben sind und durch eine dritte von gegebener Richtung $AB$ geschnitten werden, so soll der Ort des Punktes $P$ gefunden werden, der die Strecke $AB$ in einem gegebenen Verhältniss theilt.

Fig. 21.




Wir können hier schiefwinklige Achsen anwenden, weil die Aufgabe die Betrachtung von Winkeln nicht erfordert; nehmen wir also die feste Linie $OA$ zur Achse der $x$, $OC$ zur Achse der $y$, so dass die Gleichung von $OB$ von der Form

$$y = mx$$

ist. Es wird verlangt, den Ort des Punktes $P$ zu finden, welcher $AB$ so theilt, dass immer $AP = n \, . \, AB$. Weil der Punkt $B$ in der geraden Linie $y = mx$ liegt, so haben wir

$$AB = m \, . \, OA, \text{ daher } AP = mn \, . \, OA;$$

es ist aber $AP$ die Ordinate des Punktes $P$ und $OA$ seine Abscisse, daher wird der Ort von $P$ durch die Gleichung

$$y = mnx$$

ausgedrückt, und ist somit eine durch den Punkt $O$ gehende gerade Linie.

*Aufg.* 4. Von einer beliebigen Anzahl von Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze sind die Grundlinien und die Summe ihrer Inhalte gegeben; man soll den Ort ihrer Spitze finden.

*Aufl.* Sind die Gleichungen der Grundlinien

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = o, \quad x \cos\beta + y \sin\beta - p_1 = o,$$
$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - p_2 = o \text{ etc.},$$

ihre Längen $a$, $b$, $c$ . . . . und die gegebene Summe der Inhalte $= m^2$, so ist $a\,(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)$, weil nach Art. 27 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$ die Senkrechte vom Punkt $x$, $y$ auf die erste Linie bezeichnet, der doppelte Inhalt des ersten Dreiecks und die Gleichung des Ortes muss daher sein

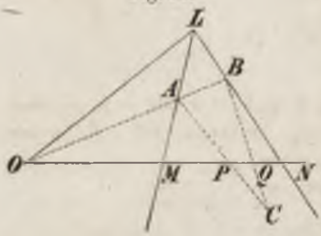
$$a\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + b\,(x\cos\beta + y\sin\beta - p_1)$$
$$+ c\,(x\cos\gamma + y\sin\gamma - p_2) + \ldots = 2\,m^2.$$

Diese ist aber, da sie $x$ und $y$ nur im ersten Grade enthält, die Gleichung einer geraden Linie.

*Aufg.* 5. Zwei Ecken eines Dreiecks $ABC$ bewegen sich in festen geraden Linien $LM$, $LN$ und die drei Seiten desselben drehen sich um feste Punkte $O$, $P$, $Q$, die in einer geraden Linie liegen; welches ist der Ort der dritten Ecke?

*Aufl.* Wir nehmen die gerade Linie $OP$, welche die drei festen Punkte enthält, zur Achse der $x$ und die gerade Linie $OL$, welche den Durchschnittspunkt der beiden festen geraden Linien mit dem Punkte $O$ verbindet, zur Achse der $y$. Unter den Voraussetzungen

Fig. 22.




$$OL = b,\ OM = a,\ ON = a',\ OP = c,\ OQ = c'$$

sind die Gleichungen von $LM$ und $LN$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

und wenn $ABC$ eine durch die Coordinaten von $C$ $x'$, $y'$ bestimmte Lage des beweglichen Dreiecks ist, so ist die Gleichung von $CP$, als der Verbindungslinie des Punktes $x$, $y$ mit dem Punkte $P$ $(x = c,\ y = o)$

$$(x' - c)\,y - y'x + c\,y' = o.$$

Daraus folgen die Coordinaten von $A$, als dem Durchschnittspunkt dieser Linie mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

$$x_1 = \frac{ab\,(x' - c) + acy'}{b\,(x' - c) + ay'},\quad y_1 = \frac{b\,(a - c)\,y'}{b\,(x' - c) + ay'}.$$

Die Coordinaten von $B$ werden aus den vorigen gefunden, indem man statt $a$ und $c$ respective $a'$ und $c'$ einführt:

$$x_2 = \frac{a'b(x' - c') + a'c'y'}{b(x' - c') + a'y'},\quad y_2 = \frac{b(a' - c')y'}{b(x' - c') + a'y'}.$$

Damit aber diese beiden Punkte $x_1\,y_1$ und $x_2\,y_2$ in einer durch den Coordinatenanfang gehenden geraden Linie liegen, muss die Relation gelten

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Darnach haben wir

$$\frac{b\,(a - c)\,y'}{ab\,(x' - c) + acy'} = \frac{b\,(a' - c')\,y'}{a'b\,(x' - c') + a'c'y'}.$$

Da diese Relation von den Coordinaten des Punktes $x'y'$ stets erfüllt werden muss, so wird die Gleichung des Ortes einfach dadurch erhalten, dass man die bestimmten Coordinaten $x'y'$ in die laufenden $xy$ verwandelt, durch Befreiung von Brüchen ergiebt sich dann

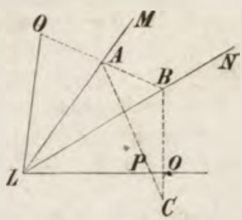
$$(a-c)\left[a'b\,(x-c')+a'c'y\right]=(a'-c')\left[ab\,(x-c)+acy\right],$$

oder
$$\frac{(ac'-a'c)x}{cc'(a-a')-aa'(c-c')}+\frac{y}{b}=1.$$

Der Ort ist demnach eine durch den Punkt $L$ gehende gerade Linie.

*Aufg.* 6. In der letzten Aufgabe den Ort der Ecke $C$ unter der Voraussetzung zu finden, dass die Punkte $P, Q$ in einer, statt durch $O$, durch $L$ gehenden geraden Linie liegen.

Fig. 23.




*Aufl.* Wir nehmen die Linie $LP$ zur Achse der $x$ und $LO$ zur Achse der $y$; setzen $LP=a$, $LQ=a'$, $LO=b$ und $y=mx$, $y=m'x$ als die Gleichungen von $LM$, $LN$. Alsdann ist die Gleichung von $CP$ als der geraden Verbindungslinie von $x'y'$ und $a, o$

$$(x-a)\,y'=(x'-a)\,y.$$

Die Coordinaten des Punktes $A$, in welchem diese Linie $y=mx$ schneidet, sind

$$x_1=\frac{ay'}{y'-mx'+am}\ \text{ und }\ y_1=\frac{amy'}{y'-mx'+am}.$$

In derselben Art werden die Coordinaten von $B$ gefunden

$$x_2=\frac{a'y'}{y'-m'x'+a'm'}\ \text{ und }\ y_2=\frac{a'm'y'}{y'-m'x'+a'm'}.$$

Wir müssen nun ausdrücken, dass die Verbindungslinie dieser Punkte durch $O$ geht, d. h. durch den Punkt $x=o$, $y=b$; dazu muss die Gleichung dieser Linie sein

$$(x_1-x_2)\,b=x_1y_2-x_2y_1$$

oder
$$x_1(y_2-b)=x_2(y_1-b).$$

Indem wir hierin die für $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ erhaltenen Werthe substituiren und von Brüchen befreien, wird die Gleichung durch $y'$ theilbar und wir erhalten als die durch die Coordinaten des Punktes $x'y'$ zu erfüllende Relation

$$a\left[(a'm'-b)\,y+m'b\,(x-a')\right]=a'\left[(am-b)\,y+mb\,(x-a)\right],$$

die Gleichung einer geraden Linie. Sie geht nach Art. 36 durch den Schnittpunkt derjenigen beiden geraden Linien, welche durch die Gleichungen

$$(a'm'-b)\,y+m'b\,(x-a')=o,\ (am-b)\,y+mb\,(x-a)=o$$

ausgedrückt werden; es sind dies die geraden Linjen, welche die Punkte $P$ und $Q$ mit den Punkten verbinden, in welchen die durch $O$ gezogene Parallele zu $LQ$ die Linien $LM$, $LN$ schneidet.

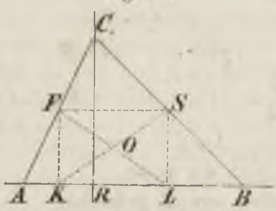
48. Anstatt die Bedingungen der Aufgabe direct in Gliedern der Coordinaten des Punktes auszudrücken, dessen Ort gesucht wird, ist es oft zweckmässig, sie zunächst in Gliedern anderer Linien der Figur zu bestimmen; dann ist es nöthig, so viele Relationen aufzustellen, als zur Elimination der so eingeführten unbekannten Grössen hinreichend sind, um durch diese eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes zu finden, dessen Ort gesucht wird. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung dieser Methode hinreichen.

*Aufg. 1.* Den Ort der Mittelpunkte der Rechtecke zu finden, die in ein gegebenes Dreieck eingeschrieben sind.

*Aufl.* Wir nehmen $CR$ und $AB$ zu Coordinatenachsen und setzen $CR = p$, $BR = s$ und $AR = s'$; dann sind die Gleichungen von $AC$ und $BC$

$$\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1 \text{ und } \frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1.$$

Fig. 24.




Wenn wir nun in der Entfernung $FK = k$ eine zur Basis parallele Linie $FS$ ziehen, deren Gleichung $y = k$ ist, so finden wir die Abscissen der Punkte $F$ und $S$, in denen diese den Linien $AC$ und $BC$ begegnet, durch Substitution von $y = k$ in die Gleichungen von $AB$ und $BC$. So erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$\frac{k}{p} - \frac{x}{s'} = 1 \text{ oder } KR = -s'\left(1 - \frac{k}{p}\right);$$

aus der zweiten

$$\frac{k}{p} + \frac{x}{s} = 1 \text{ oder } RL = s\left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Daraus ergiebt sich die Abscisse des Mittelpunktes von $FS$ nach Art. 7

$$x = \frac{s - s'}{2}\left(1 - \frac{k}{p}\right),$$

welche auch für den Mittelpunkt des Rechtecks die Abscisse ist. Seine Ordinate ist

$$y = \frac{k}{2}.$$

Sollen wir eine Relation finden, welche zwischen dieser Ordinate und Abscisse für jeden Werth von $k$ bestehen muss, so haben wir nur zwischen diesen Gleichungen $k$ zu eliminiren; so erhalten wir für die Gleichung des verlangten Ortes

$$2x = (s - s')\left(1 - \frac{2y}{p}\right)$$

oder

$$\frac{2x}{s - s'} + \frac{2y}{p} = 1.$$

Der gesuchte Ort ist also eine gerade Linie und die Abschnitte, welche dieselbe in den Achsen bildet, zeigen, dass es die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Basis $AB$ mit dem Mittelpunkte der Höhe $CR$ ist.

*Aufg.* 2. Zur Basis $AB$ eines Dreiecks ist eine Parallele $FS$ gezogen und in den Durchschnittspunkten $F$ und $S$ derselben mit den Seiten sind auf diesen Perpendikel $FQ$ und $SQ$ errichtet, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren?

*Aufl.* Wir benutzen die nämlichen Achsen, wie in der Aufg. 1. Dann hat die Linie $FQ$, welche zu $AC$ oder $\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1$ in $F$ oder $-s'\left(1 - \frac{k}{p}\right)$, $k$ senkrecht ist, die Gleichung:

$$\frac{1}{p}\left[x + s'\left(1 - \frac{k}{p}\right)\right] + \frac{1}{s'}(y - k) = 0.$$

In derselben Art findet man die Gleichung von $SQ$

$$\frac{1}{p}\left[x - s\left(1 - \frac{k}{p}\right)\right] - \frac{1}{s}(y - k) = 0.$$

Weil nun der Punkt, dessen Ort wir suchen, in beiden Linien $FQ$ und $SQ$ liegt, so drückt jede der eben geschriebenen Gleichungen eine Relation aus, der seine Coordinaten genügen müssen; weil aber diese Gleichungen $k$ enthalten, so drücken sie Relationen aus, die nur für den speciellen Punkt des Ortes wahr sind, welcher dem Falle der Parallelen $FS$ in der Höhe $k$ über der Basis entspricht. Wenn wir aber zwischen diesen Gleichungen die unbestimmte Grösse $k$ eliminiren, so erhalten wir eine Relation zwischen den Coordinaten $x$, $y$ und den bekannten Grössen allein und diese ist, weil ihr für jede Lage der Parallelen $FS$ genügt sein muss, die verlangte Gleichung des Ortes.

Um $k$ zwischen den Gleichungen zu eliminiren, schreiben wir sie in der Form

$$FQ: \quad \frac{x}{p} + \frac{s'}{p} + \frac{y}{s'} = k\left(\frac{1}{s'} + \frac{s'}{p^2}\right)$$

und

$$SQ: \quad \frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p} = k\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{p^2}\right)$$

und erhalten nun die Gleichung des Ortes

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{p^2}\right)\left(\frac{x}{p} + \frac{s'}{p} + \frac{y}{s'}\right) = \left(\frac{1}{s'} + \frac{s'}{p^2}\right)\left(\frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p}\right).$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, weil $x$ und $y$ darin nur im ersten Grade vorkommen und man erkennt, dass sie durch die Spitze des gegebenen Dreiecks geht, weil die Coordinaten derselben $x = o$, $y = p$ der Gleichung genügen. Nach Art. 36 geht sie auch durch den Durchschnitt der Linien

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{s'} + \frac{s'}{p} = o, \quad \frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p} = o,$$

welches die in den Endpunkten der Basis auf den anstossenden Seiten errichteten Perpendikel sind.

* *Aufg. 3.* Parallel zur Basis eines Dreiecks ist eine gerade Linie gezogen und die Punkte, in denen sie die Seiten desselben schneidet, sind mit zwei festen Punkten in der Basis durch gerade Linien verbunden, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren?

*Aufl.* Wir behalten die Achsen und die übrigen Bestimmungen der Aufgabe 2 und lassen die Coordinaten der festen Punkte $T$ und $V$ in der Basis sein für $T(m, o)$ und für $V(n, o)$. Alsdann ist die Gleichung von

$FT$ $\quad \left[s'\left(1 - \frac{k}{p}\right) + m\right] y + kx - km = o$, und die von

$SV$ $\quad \left[s\left(1 - \frac{k}{p}\right) + n\right] y - kx + kn = o.$

Indem wir diese Gleichungen in die Form

$$(s' + m)\, y - k\left(\frac{s'}{p}\, y - x + m\right) = o,$$

$$(s - n)\, y - k\left(\frac{s}{p}\, y + x - n\right) = o$$

bringen und die Grösse $k$ eliminiren, erhalten wir für die Gleichung des Ortes $\quad (s - n)\left(\frac{s'}{p}\, y - x + m\right) = (s' + m)\left(\frac{s}{p}\, y + x - n\right).$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, weil $x$ und $y$ nur im ersten Grade darin enthalten sind.

*Aufg. 4.* In einem Dreiecke sind die Schnittpunkte einer Parallelen zur Basis mit den Seiten mit den gegenüberliegenden Basisecken verbunden; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der Verbindungslinien angeben.

*Aufl.* Die Aufgabe ist zwar ein specieller Fall der vorigen, nimmt aber eine einfachere Auflösung an, indem man die Seiten $AC$ und $CB$ des Dreiecks zu Achsen wählt; sind dann ihre Längen $a$ und $b$, so können die proportionalen Abschnitte, welche die Parallele in ihnen macht, durch $\mu a$ und $\mu b$ ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen der Transversalen $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{\mu b} = 1$ und $\frac{x}{\mu a} + \frac{y}{b} = 1$,

und indem man die eine von der andern subtrahirt und den Rest durch die Constante $1 - \frac{1}{\mu}$ dividirt, erhält man für die Gleichung des Ortes

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = o,$$

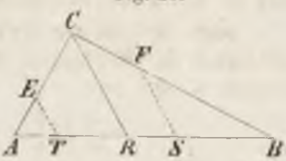
die wir früher (Art. 37, Aufg. 2) als Gleichung der geraden Linie gefunden haben, welche die Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet.

*Aufg. 5.* In der Basis eines Dreiecks sei ein Stück $AT$ und am andern Ende ein Stück $BS$ genommen, welches zu $AT$ in einem festen Verhältniss steht; werden sodann $ET$ und $FS$ einer festen geraden Linie

$CR$ parallel gezogen, so ist der Ort des Punktes $O$ zu finden, in welchem sich die Linien $EB$ und $FA$ durchschneiden.

*Aufl.* Wir nehmen $CR$ zur Achse der $y$, setzen $AT = k$, $BR = s$, $AR = s'$, $CR = p$ und das feste Verhältniss $m$, so dass $BS = mk$. Alsdann sind die Coordinaten von $S$ $\quad s - mk, \; o$
und die von $T$ $\quad -(s' - k), \; o.$

Fig. 25.




Wir finden sodann die Ordinaten von $E$ und $F$, indem wir diese Werthe von $x$ in die Gleichungen von $AC$ und $BC$ substituiren, also für

$$E \qquad x = -(s' - k), \; y = \frac{pk}{s'},$$

für

$$F \qquad x = s - mk, \; y = \frac{mpk}{s}.$$

Wir bilden nun die Gleichungen der geraden Linien $EB$ und $FA$, nämlich

$$EB \qquad (s + s' - k)\, y + \frac{pk}{s'}\, x - \frac{pks}{s'} = o,$$

$$FA \qquad (s + s' - mk)\, y - \frac{mpk}{s}\, x - \frac{mpks'}{s} = o,$$

und eliminiren endlich $k$, indem wir die eine Gleichung von der andern abziehen und den Rest mit $k$ dividiren; so erhalten wir

$$(m - 1)\, y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right) x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps}{s'}\right) = o,$$

die Gleichung einer geraden Linie.

*Aufg.* 6. $PP'$ und $QQ'$ sind ein Paar beliebige Parallelen zu den Seiten eines Parallelogramms, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes der Linien $PQ$ und $P'Q'$?

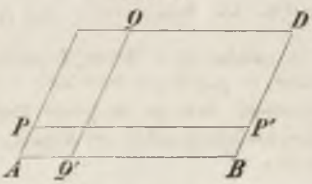
*Aufl.* Wir nehmen zwei der Seiten des Parallelogramms zu Achse und setzen ihre Längen $a$ und $b$, bezeichnen $AQ'$ durch $m$ und $AP$ durch $n$. Dann ist die Gleichung von $PQ$, als der geraden Verbindungslinie von $P\,(o, n)$ mit $Q\,(m, b)$

$$(b - n)\, x - my + mn = o,$$

und die Gleichung von $P'Q'$, der Verbindungslinie von $P'\,(a, n)$ mit $Q'\,(m, o)$

$$nx - (a - m)\, y - mn = o.$$

Fig. 26.




Da hier zwei unbestimmte Grössen $m$ und $n$ vorhanden sind, so kann man vermuthen, dass es nicht möglich sein werde, sie beide aus diesen zwei Gleichungen zu eliminiren; wenn man jedoch die beiden Gleichungen durch Addition vereinigt, so verschwinden beide Unbestimmte und man erhält den Ort

$$bx - ay = o,$$

die Gleichung der Diagonale des Parallelogramms.

*Aufg. 7.* Ein Punkt und zwei feste gerade Linien sind gegeben; man zieht durch jenen irgend zwei gerade Linien und verbindet die Punkte, wo diese den festen geraden Linien begegnen, kreuzweis; welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser Verbindungslinien?

*Aufl.* Wir nehmen die festen geraden Linien zu Coordinatenachsen und lassen die Gleichungen der durch den festen Punkt willkürlich gezogenen Geraden sein

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \text{ und } \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1.$$

Weil diese Linien durch den festen Punkt $x'y'$ gehen müssen, sind

$$\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1 \text{ und } \frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$$

oder durch Subtraction

$$x'\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) + y'\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Die Gleichungen der Transversalen sind darnach

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n'} = 1 \text{ und } \frac{x}{m'} + \frac{y}{n} = 1;$$

und liefern durch Subtraction

$$x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) - y\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der vorher gefundenen lassen sich

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'}\right) \text{ und } \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)$$

eliminiren und wir erhalten dadurch

$$x'y + y'x = o$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie. Sie steht in einer bald näher darzulegenden Beziehung zu der geraden Linie

$$x'y - y'x = 0,$$

welche den Anfangspunkt mit dem Punkte $x'y'$ verbindet.

*Aufg. 8.* Durch irgend einen Punkt in der Basis eines Dreiecks wird in gegebener Richtung eine gerade Linie von gegebener Länge so gezogen, dass sie in jenem Punkte halbirt ist; welches ist der Ort der Durchschnittspunkte der Linien, die ihre Enden mit denen der Basis verbinden?

*Aufg. 9.* Von einem Dreiecke ist die Basis und die Bestimmung bekannt, dass seine Seiten eine feste zur Basis parallele Linie $AB$ in den Punkten $C$, $D$ so schneiden, dass das Verhältniss $AC : BD$ gegeben ist, welches ist der Ort der Spitze?

*Aufg. 10.* Wenn in einem Dreiecke der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten bekannt sind, den Ort der Punkte zu bestimmen, welche die Basis in einem gegebenen Verhältniss theilen.

*Aufg. 11.* Zwei feste Punkte $A$, $B$, einer in jeder der Achsen, sind gegeben, zwei andere $A'B'$ werden so gewählt, dass

$$OA' + OB' = OA + OB;$$

welchen Ort beschreibt der Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$AB',\ A'B?$$

49. Aufgaben, in welchen zu beweisen ist, dass eine bewegliche gerade Linie durch einen festen Punkt geht.

Wir haben im Artikel 36 gesehen, dass die gerade Linie

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = o,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(A + kA')x + (B + kB')y + C + kC' = o,$$

wo $k$ eine unbestimmte Grösse ist, immer durch einen festen Punkt geht, nämlich durch den Punkt, wo die beiden geraden Linien

$$Ax + By + C = o \text{ und } A'x + B'y + C' = o$$

sich schneiden. Wir entnehmen daraus den Satz: Wenn die Gleichung einer geraden Linie eine unbestimmte Grösse im ersten Grade enthält, so geht die gerade Linie immer durch einen festen Punkt.

*Aufg. 1.* Wenn in einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der reciproken Werthe der Seiten gegeben sind, so geht die Basis immer durch einen festen Punkt.

*Aufl.* Wenn wir die Seiten zu Achsen wählen, ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

und die Bedingung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ oder } \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$$

zu erfüllen; daher ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - \frac{y}{a} = 1,$$

in welcher $c$ constant und $a$ unbestimmt ist; schreiben wir dies

$$\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{c} - 1 = o,$$

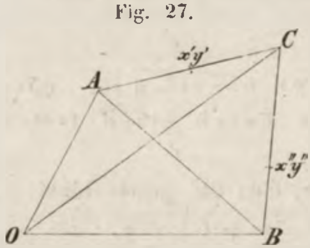
so erkennen wir, dass die Basis stets durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$x - y = o \text{ und } y = c$$

geht.

*Aufg.* 2. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen geraden Linien $OA$, $OB$, $OC$ und zwei seiner Seiten gehen durch feste Punkte; es ist zu beweisen, dass auch die dritte Seite durch einen festen Punkt geht.

Fig. 27.




*Aufl.* Wir wählen die festen geraden Linien $OA$, $OB$, in denen die Basisecken sich bewegen, zu Achsen, so dass die Linie $OC$, welche die Spitze des Dreiecks durchläuft, eine Gleichung von der Form $y = mx$ hat und bezeichnen die Coordinaten der festen Punkte durch $x'y'$, $x''y''$. Sind dann in irgend einer Lage die Coordinaten der Spitze $x = a$ und folglich $y = ma$, so ist die Gleichung von $AC$

$$(x' - a)\, y - (y' - ma)\, x + a\,(y' - mx') = o.$$

Ebenso ist die Gleichung von $BC$

$$(x'' - a)\, y - (y'' - ma)\, x + a\,(y' - mx'') = o.$$

Die Länge des von der Linie $AC$ bestimmten Abschnittes $OA$ wird hiernach durch Substitution von $x = o$ in die Gleichung derselben gefunden, nämlich $\quad y = -\frac{a\,(y' - mx')}{x' - a}$;

ebenso die Länge des Abschnitts $OB$ für $y = o$ aus der Gleichung von $BC$ $\quad x = \frac{a\,(y'' - mx'')}{y'' - ma}$.

Daraus ergiebt sich die Gleichung von $AB$

$$x \,.\, \frac{y'' - ma}{y'' - mx''} - y \,.\, \frac{x' - a}{y' - mx'} = a.$$

Da hierin $a$ unbestimmt ist und nur im ersten Grade vorkommt, so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt. Derselbe kann gefunden werden, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{y''}{y'' - mx''} \,.\, x - \frac{x'}{y' - mx'} \,.\, y - a\left(\frac{mx}{y'' - mx''} - \frac{y}{y' - mx'} + 1\right) = o$$

schreibt; er ist der Durchschnittspunkt der zwei geraden Linien

$$\frac{y''}{y'' - mx''} \,.\, x - \frac{x'}{y' - mx'} \,.\, y = o$$

und

$$\frac{mx}{y'' - mx''} - \frac{y}{y' - mx'} + 1 = o.$$

*Aufg.* 3. Man soll untersuchen, ob in der vorigen Aufgabe unter gewissen Bedingungen die Basis auch dann noch durch einen festen Punkt geht, wenn die gerade Linie, in welcher die Spitze $C$ sich bewegt, den Punkt $O$ nicht enthält.

*Aufl.* Wir behalten die Achsen und die Bezeichnung bei, mit der einen nothwendigen Abweichung, dass die Gleichung der von der Spitze durchlaufenen geraden Linie durch $y = mx + n$ und daher die Coordinaten der Spitze in irgend einer Lage durch $a$ und $ma + n$ ausgedrückt werden. Dann ist die Gleichung von $AC$

$$(x' - a)\, y - (y' - ma - n)\, x + a\,(y' - mx') - nx' = o.$$

Die Gleichung von $BC$ ist

$$(x'' - a)\, y - (y'' - ma - n)\, x + a\,(y'' - mx'') - nx'' = o.$$

Daraus $$OA = -\frac{a\,(y' - mx') - nx'}{x' - a};\ OB = \frac{a\,(y'' - mx'') - nx''}{y'' - ma - n}.$$

Daher ist die Gleichung von $AB$

$$x\,.\,\frac{y'' - ma - n}{a\,(y'' - mx'') - nx''} - y\,.\,\frac{x' - a}{a\,(y' - mx') - nx'} = 1.$$

Wenn diese Gleichung von Brüchen befreit wird, so enthält sie im Allgemeinen $a$ im zweiten Grade und die Basis geht daher im Allgemeinen nicht durch einen festen Punkt.

Wenn aber die Punkte $x'y'$, $x''y''$ in einer durch $O$ gehenden geraden Linie

$$y = kx$$

liegen, so dass wir $y'' = kx''$ und $y' = kx'$ substituiren können, so wird die Gleichung

$$x\,.\,\frac{y'' - ma - n}{x''} - y\,.\,\frac{x' - a}{x'} = a\,(k - m) - n,$$

welche $a$ nur im ersten Grade enthält und somit eine durch einen festen Punkt gehende gerade Linie bezeichnet.

*Aufg. 4.* Wenn eine gerade Linie so bestimmt wird, dass die Producte der auf sie von einer Anzahl fester Punkte gefällten Perpendikel mit bestimmten Constanten die Summe Null geben, so geht dieselbe durch einen festen Punkt.

*Aufl.* Ist die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = o,$$

so ist die von $x'y'$ auf sie gefällte Senkrechte von der Länge

$$x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p$$

und die Bedingungen der Aufgabe liefern die Gleichung

$$m'\,(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - p) + m''\,(x'' \cos\alpha + y'' \sin\alpha - p)$$
$$+\, m'''\,(x''' \cos\alpha + y''' \sin\alpha - p) + \ldots. = o, .$$

Unter Benutzung der Bezeichnung $\Sigma\,(mx')$ für die algebraische Summe der $mx$, d. h. für

$$m'x' + m''x'' + \ldots.$$

und in gleicher Art $\Sigma\,(my')$ für

$$m'y' + m''y'' + \ldots.$$

$\Sigma\,(m)$ für $$m' + m'' + \ldots.$$

können wir diese Gleichung schreiben

$$\Sigma\,(mx') \cos\alpha + \Sigma\,(my') \sin\alpha - p\,\Sigma\,(m) = o.$$

Und indem wir in die Originalgleichung den hieraus erhaltenen Werth von $p$ substituiren, erhalten wir für die Gleichung der beweglichen geraden Linie

$$x\,\Sigma(m)\cos\alpha + y\,\Sigma(m)\sin\alpha - \Sigma(mx')\cos\alpha - \Sigma(my')\sin\alpha = o$$

oder $$x\,\Sigma(m) - \Sigma(mx') + [y\,\Sigma(m) - \Sigma(my')]\tan\alpha = o.$$

Da diese Gleichung die unbestimmte Grösse $\tan\alpha$ im ersten Grade enthält, so geht die durch sie ausgedrückte gerade Linie durch den festen Punkt, welchen die Gleichungen

$$x\,\Sigma(m) - \Sigma(mx') = o,\quad y\,\Sigma(m) - \Sigma(my') = o$$

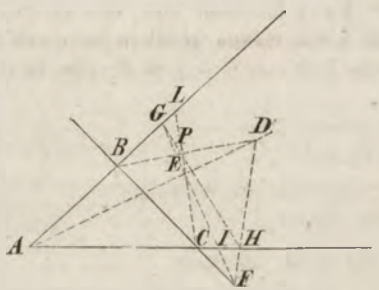
bestimmen, d. h. durch den Punkt

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + \ldots.}{m' + m'' + \ldots.},\quad y = \frac{m'y' + m''y'' + \ldots.}{m' + m'' + \ldots.}.$$

Dieser Punkt wird oft als das Centrum der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte bezeichnet.

*Aufg.* 5. Man giebt ein Dreieck $ABC$ und zwei Punkte $D$, $E$, welche mit der Ecke $A$ in derselben geraden Linie liegen; man verbindet diese Punkte mit einem beliebigen Punkte $F$ der Gegenseite $BC$ und bemerkt die Durchschnittspunkte $G$, $H$ dieser Verbindungslinien mit je einer der beiden anliegenden Seiten des Dreiecks. Man soll beweisen, dass die gerade Linie $GH$ für jede Lage des Punktes $F$ in der Geraden $BC$ durch den festen Punkt $P$ geht, in welchem die Linien $BD$ und $CE$ sich schneiden.

Fig. 28.




Es ist nicht schwer, diess auf dem gewöhnlichen Wege zu beweisen; wir überlassen dies dem Leser und bemerken überdiess, dass der im Art. 38 entwickelte Satz von der Transverversale eines Dreiecks zum Beweise dienen kann.

Wenn man die Seite $BC$ in unendlicher Entfernung voraussetzt, so geht der Satz in den folgenden über: Man hat einen Winkel $BAC$ und zwei Punkte $D$, $E$, welche mit seinem Scheitel in gerader Linie liegen; wenn man durch diese letzteren zwei parallele Gerade zieht, welche den Schenkeln des Winkels im Punkte $G$, $H$ begegnen, so geht die gerade Linie $GH$ immer durch denselben Punkt, in welcher Richtung auch die Parallelen gezogen wurden.

Man darf endlich die Punkte $A$, $D$, $E$, $B$, $C$, $F$ als Ecken eines zwei geraden Linien eingeschriebenen Sechsechs betrachten und alsdann unsern Satz als einen Specialfall aus dem allgemeinen Theorem über die in Curven zweiten Grades eingeschriebenen Sechsecke betrachten, welches im Art. 264 gegeben werden wird. Aus demselben ergiebt sich, dass die Punkte $G$, $H$ und $P$ in einer geraden Linie liegen und somit, da $P$ unveränderlich ist, so lange $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ sich nicht ändern, dass die gerade Linie $GH$ sich um einen festen Punkt dreht, während $F$ die Gerade $BC$ durchläuft.

50. Wenn die Gleichung einer geraden Linie die Coordinaten irgend eines Punktes im ersten Grade enthält, sowie

$$(Ax' + By' + C)\,x + (A'x' + B'y' + C')\,y + (A''x' + B''y' + C'') = o,$$

so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt, wenn der Punkt $x'y'$ sich auf einer geraden Linie bewegt. Denn wenn der Punkt $x'y'$ stets in einer geraden Linie

$$Lx' + My' + N = o$$

liegt, so kann mit Hilfe dieser Relation $x'$ aus der gegebenen Gleichung eliminirt werden und die unbestimmte Grösse $y'$ verbleibt im ersten Grade in derselben, die Linie geht also durch einen festen Punkt. Daraus entspringt der Satz: Wenn die Coefficienten in der Gleichung

$$Ax + By + C = o$$

durch die Relation $\quad aA + bB + cC = o$

verbunden sind, in welcher $a$, $b$, $c$ Constanten sind, indess $A$, $B$, $C$ veränderlich gedacht werden, so geht die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie immer durch einen festen Punkt.

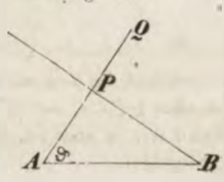
Denn durch Elimination von $C$ zwischen beiden Gleichungen erhalten wir $\quad (cx - a)A + (cy - b)B = o$

die Gleichung einer durch den Punkt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gehenden geraden Linie.

51. Polar-Coordinaten. Es ist im Allgemeinen nützlich, diese Methode anzuwenden, wenn die Aufgabe verlangt, den Ort der Endpunkte von geraden Linien zu finden, welche nach einem gegebenen Gesetz durch einen festen Punkt gezogen sind.

*Aufg. 1.* $A$ und $B$ sind zwei feste Punkte; durch $B$ wird eine gerade Linie gezogen und von $A$ ein Perpendikel $AP$ darauf gefällt, und dasselbe so verlängert, dass das Rechteck $AP \cdot AQ$ constant bleibt. Welches ist der Ort des Punktes $Q$?

Fig. 29.




*Aufl.* Wir nehmen $A$ zum Pol und $AB$

zur festen Achse, so dass $AQ$ der durch $\varrho$ zu bezeichnende Radius vector und der Winkel $QAB = \vartheta$ ist; die Aufgabe fordert, die zwischen $\varrho$ und $\vartheta$ bestehende Relation zu finden.

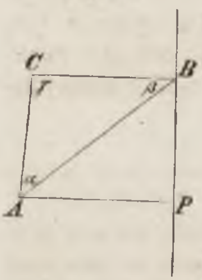
Wir setzen $AB = c$ und haben aus dem rechtwinkligen Dreieck $APB$ $AP = c.\cos\vartheta$; wegen $AP.AQ =$ const. $= k^2$ ist sodann

$$\varrho c \cos\vartheta = k^2, \text{ oder } \varrho \cos\vartheta = \frac{k^2}{c};$$

wir haben im Art. 44 gesehen, dass dieses die Gleichung einer zu $AB$ senkrechten geraden Linie ist, die in der Entfernung $A = \frac{k^2}{c}$ vom Pol vorbeigeht.

*Aufg.* 2. Von einem Dreieck, dessen Winkel gegeben sind, ist eine der Ecken $A$ fixirt, die zweite $B$ bewegt sich längs einer festen geraden Linie, man soll den Ort der dritten finden.

Fig. 30.



*Aufl.* Wir nehmen die feste Ecke $A$ zum Pol und das von ihm zur festen Linie gefällte Perpendikel $AP$ zur Achse, so dass $AC = \varrho$, $\angle CAP = \vartheta$.

Da die Winkel des Dreiecks $ABC$ gegeben sind, so ist $AB$ in einem festen Verhältniss zu

$$AC \; (= m \,.\, AC) \text{ und } \angle BAP = \vartheta - \alpha;$$

aber man hat

$$AP = AB \,.\cos BAP,$$

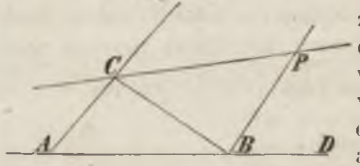
d. h. indem man $AP$ durch $a$ bezeichnet

$$m\,\varrho \cos(\vartheta - \alpha) = a,$$

welches nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie ist, die mit der gegebenen einen Winkel $\alpha$ bildet und die Entfernung $\frac{a}{m}$ vom Pol $A$ besitzt.

*Aufg.* 3. In einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; in einem Endpunkt der Basis $B$ errichtet man auf der anliegenden Seite $BC$ ein Perpendikel und verlangt, den Ort des Punktes $P$ zu finden, wo dieses von der äusseren Halbirungslinie $CP$ des Winkels an der Spitze getroffen wird.

Fig. 31.



*Aufl.* Indem wir den Punkt $B$ zum Pol wählen, wird $BP$ der Radius vector $\varrho$ und durch Wahl der verlängerten Basis zur festen Achse wird der Winkel $PBD = \vartheta$, und die Aufgabe verlangt, $\varrho$ durch $\vartheta$ auszudrücken. Wir bezeichnen die Seiten und die Gegenwinkel des Dreiecks durch $a, b, c, A, B, C$; dann ist offenbar $\angle BCP = 90^0 - \frac{1}{2}C$ und aus dem Dreiecke $PCB$, $a = \varrho \tan \frac{1}{2}C$. Wenn wir $a$ und $\tan\frac{1}{2}C$ durch $\vartheta$ ausdrücken können, so ist die Aufgabe gelöst.

Aus dem Dreieck $ABC$ ist

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

hier kann für $b$, $m - a$ eingesetzt werden, wenn $m$ die gegebene Summe der Seiten bezeichnet und $\cos B$ ist $= \sin \vartheta$; daher

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \vartheta,$$

und
$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)}.$$

Hiernach bleibt nur übrig, einen Ausdruck für $\tan \frac{1}{2} C$ zu finden. Es ist
$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{b \sin C}{b\,(1 + \cos C)}.$$

Aber $b \sin C = c \sin B = c \cos \vartheta$; $b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \vartheta$;

also
$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{c \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}.$$

Darnach können wir $\varrho$ durch $\vartheta$ ausdrücken; denn indem wir die oben für $a$ und $\tan \frac{1}{2} C$ erhaltenen Werthe in die Gleichung $a = \varrho \tan \frac{1}{2} C$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)} = \frac{\varrho\, c \cos \vartheta}{(m - c \sin \vartheta)}, \text{ oder } \varrho \cos \vartheta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Der Ort ist demnach eine zur Basis des Dreiecks senkrechte Linie, in dem Abstande $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ vom Punkte $B$.

Der Leser kann zu eigener Uebung den Ort untersuchen, welcher bei gegebener Differenz der Seiten durch die innere Halbirungslinie des Winkels an der Spitze bestimmt wird.

*Aufg. 4.* Gegeben sind $n$ feste gerade Linien und ein fester Punkt $O$; wenn man durch diesen irgend einen Radius vector zieht, der diese geraden Linien in Punkten $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ schneidet, und in ihm einen Punkt $R$ so bestimmt, dass

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{Or_1} + \frac{1}{Or_2} + \frac{1}{Or_3} + \ldots + \frac{1}{Or_n},$$

so soll man den Ort von $R$ bestimmen.

***Aufl.*** Wenn die Gleichungen der geraden Linien durch $\varrho \cos(\vartheta - \alpha) = p_1$, $\varrho \cos(\vartheta - \beta) = p_2$, $\varrho \cos(\vartheta - \gamma) = p_3$ usw. dargestellt werden, so ist die Gleichung des Ortes offenbar

$$\frac{n}{\varrho} = \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{p_1} + \frac{\cos(\vartheta - \beta)}{p_2} + \frac{\cos(\vartheta - \gamma)}{p_3} + \ldots$$

nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie. Der hierin enthaltene Satz ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeinern, welchen wir später beweisen werden.

# Viertes Kapitel.

## Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie.

52. Im Artikel 36 sahen wir, dass die Gleichung

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) - k(x \cos \beta + y \sin \beta - p') = o$$

eine gerade Linie bezeichnet, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = o \text{ und } x \cos \beta + y \sin \beta - p' = o$$

gezogen ist.

Es ist oft zweckmässig, für die Quantitäten, welche mit Null verglichen, diese Gleichungen liefern, Abkürzungen zu gebrauchen.

Indem wir $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ durch $\alpha$
und $x \cos \beta + y \sin \beta - p'$ durch $\beta$
bezeichnen, wird der eben ausgesprochene Satz kürzer ausdrückbar; es bezeichnet die Gleichung $\alpha - k\beta = o$ eine gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der zwei geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$ gezogen ist. Wir nennen diese letzteren kurz die Linien $\alpha$ und $\beta$ und ihren Durchschnittspunkt den Punkt $\alpha\beta$.

Ebenso bietet sich oft Gelegenheit, für Gleichungen von geraden Linien in der Form $Ax + By + C = o$ Abkürzungen zu gebrauchen. Zur Unterscheidung sollen in diesen Fällen römische Buchstaben angewendet und die Buchstaben des griechischen Alphabets immer in dem Sinne gebraucht werden, dass die Gleichung in der Form

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = o$$

gegeben war.

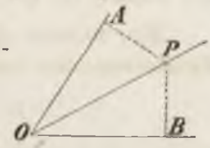
53. Hiernach untersuchen wir die Bedeutung des Coefficienten $k$ in der Gleichung $\alpha - k\beta = o$. Aus Artikel 27 ist erinnerlich, dass die Quantität $\alpha$, d. h. $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ die Länge des Perpendikels bezeichnet, welches man von irgend einem Punkte $xy$ auf die durch $\alpha = o$ repräsentirte Linie $OA$ fällen kann; und dass ebenso $\beta$ die Länge des vom Punkte $xy$

auf die Linie $OB$, welche durch $\beta = o$ dargestellt ist, gefällten Perpendikels ausdrückt. Demnach ist der Sinn der Gleichung

$$\alpha - k\beta = o \text{ oder } \frac{\alpha}{\beta} = k,$$

dass das Verhältniss der Perpendikel, die man von irgend einem Punkte des durch sie dargestellten Ortes auf die geraden Linien $OA$ und $OB$ fällen kann, constant und $= k$ sei. Der durch die Gleichung

Fig. 32.




$$\alpha - k\beta = o$$

dargestellte Ort ist eine durch $O$ gehende gerade Linie und

$$k = \frac{PA}{PB} = \frac{\sin POA}{\sin POB}.$$

Nach den über die Vorzeichen festgesetzten Bestimmungen (Artikel 27) ergiebt sich, dass $\alpha + k\beta = o$ eine gerade Linie bezeichnet, die den Winkel $AOB$ äusserlich so theilt, dass

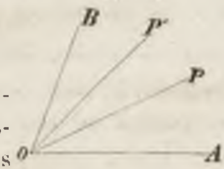
$$\frac{\sin POA}{\sin POB} = k$$

ist.

Insofern die gerade Linie oder der Strahl $OP$ den Winkel zwischen den Strahlen $OA$, $OB$ nach diesem Sinusverhältniss theilt, bezeichnen wir sie als einen Theilstrahl. In dem Vorigen ist angenommen, dass die Perpendikel $PA$, $PB$ diejenigen sind, die wir als positiv zu betrachten übereinkamen, indess diejenigen, welche auf die entgegengesetzten Seiten von $\alpha$, $\beta$ gefällt werden, als negativ gelten.

54. Vielleicht ist der Leser mit dem folgenden geometrischen Fundamentalsatz schon bekannt: Wenn ein Büschel von vier geraden Linien, welche durch denselben Punkt $O$ gehen, durch eine beliebige gerade Transversale in den vier Punkten $A$, $P$, $P'$, $B$ geschnitten wird, so ist das Verhältniss

Fig. 33.




$$\frac{AP \cdot P'B}{AP' \cdot PB} \text{ oder } \frac{AP}{PB} : \frac{AP'}{P'B}$$

unveränderlich, wie auch die Transversale gezogen sei. Man nennt dasselbe das anharmonische Verhältniss oder das Doppelschnittverhältniss des Büschels; jene Bezeichnung stammt von H. Chasles, diese von H. Möbius; das Werk des letzteren, welches die bezüglichen Entwicklungen enthält, erschien unter dem Titel: „Der barycentrische Calcul“ im Jahre 1827. H. Chasles hat die anharmonische Function zur Grundlage eines Systems der Geometrie gemacht, dessen erster Theil in dem „Traité de Géométrie supérieure“ vom Jahre 1852 vorliegt. Der Satz selbst findet sich bereits in den mathematischen Sammlungen des Pappus als der 129te im 7. Buch.

Man beweist denselben, indem man vom Punkte $O$ auf die Transversale das Perpendikel $p$ fällt und bemerkt, dass

$$p \,.\, AP = OA \,.\, OP \,.\, \sin AOP,$$
$$p \,.\, P'B = OP' \,.\, OB \,.\, \sin P'OB,$$
$$p \,.\, AP' = OA \,.\, OP' \,.\, \sin AOP',$$
$$p \,.\, PB = OP \,.\, OB \,.\, \sin POB,$$

weil jede dieser Gleichungen den doppelten Inhalt eines der Dreiecke $AOP$, $P'OB$, $AOP'$, $POB$ auf zweifache Weise ausdrückt. Aus denselben ergiebt sich aber

$$p^2 \,.\, AP \,.\, P'B = OA \,.\, OP \,.\, OP' \,.\, OB \,.\, \sin AOP \,.\, \sin P'OB,$$
$$p^2 \,.\, AP' \,.\, PB = OA \,.\, OP \,.\, OP' \,.\, OB \,.\, \sin AOP' \,.\, \sin POB;$$

somit $$\frac{AP \,.\, P'B}{AP' \,.\, PB} = \frac{\sin AOP \,.\, \sin P'OB}{\sin AOP' \,.\, \sin POB},$$

oder $$\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = \frac{\sin POA}{\sin POB} : \frac{\sin P'OA}{\sin P'OB},$$

in welchen Ausdrücken das Verhältniss der Sinus ein von der Lage der Transversale unabhängiges ist. In der gleichmässigen Form der in diesen Gleichungen verbundenen Ausdrücke ist der dualistische Charakter der Function des Doppelschnittverhältnisses ausgeprägt, nach welchem dasselbe immer gleichzeitig ein Doppelschnittverhältniss von vier Strahlen eines Büschels und von vier Punkten einer geradlinigen Reihe ist.

55. Wenn die Gleichungen zweier geraden Linien durch

$$\alpha - k\beta = o, \quad \alpha - k'\beta = o$$

ausgedrückt sind, so ist das anharmonische oder Doppelschnittverhältniss der vier geraden Linien

$$\alpha = o, \quad \beta = o, \quad \alpha - k\beta = o, \quad \alpha - k'\beta = o$$

durch den Quotienten $k : k'$ gegeben.

Denn es ist $$k = \frac{\sin AOP}{\sin BOP}, \quad k' = \frac{\sin AOP'}{\sin BOP'}$$
somit $$\frac{k}{k'} = \frac{\sin POA}{\sin POB} : \frac{\sin P'OA}{\sin P'OB},$$
welches das Doppelschnittverhältniss des Büschels ist.

Das Büschel wird als ein harmonisches bezeichnet, wenn $\frac{k}{k'} = -1$, denn dann ist der Winkel innerlich und äusserlich so getheilt, dass die Sinus der Theile in dem nämlichen Verhältniss stehen. Demnach gilt der Satz: Zwei Linien, deren Gleichungen sind
$$\alpha - k\beta = o, \quad \alpha + k\beta = o$$
bilden mit den geraden Linien
$$\alpha = o, \quad \beta = o$$
ein harmonisches Büschel.

Als eine Anwendung der vorhergehenden Principien diene der Beweiss des folgenden Satzes:

Man denke vier gerade Linien in einer Ebene, welche durch die Gleichungen
$$A = o, \; B = o, \; C = o, \; D = o$$
repräsentirt sein mögen und einen beliebigen Punkt $O$; man verbinde den letzteren mit den durch diese Geraden bestimmten Durchschnittspunkten und bestimme zu jeder der Verbindungslinien den conjugirt-harmonischen Strahl im Verhältniss zu den beiden geraden Linien, nach deren Durchschnittspunkt er hingeht; alsdann schneiden sich die Paare dieser letzteren Geraden, welche zu gegenüberliegenden Ecken des Vierecks ($ABCD$) gehören, in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

Sind $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ die Werthe, welche die ersten Theile der Gleichungen der gegebenen Geraden annehmen, wenn man darin an Stelle der laufenden Coordinaten diejenigen des Punktes $O$ einsetzt, so ist $$AB_1 - A_1B = o$$
die Form der Gleichung der geraden Linie, welche den Punkt $O$ mit dem Durchschnittspunkt der Geraden $A = o$, $B = o$ verbindet Die Gleichung $$AB_1 + A_1B = o$$
oder $$\frac{A}{A_1} + \frac{B}{B_1} = o$$

repräsentirt dann die Gleichung der geraden Linie, welche dieser letzten in Bezug auf $A=o$, $B=o$ harmonisch conjugirt ist.

Darnach ergeben sich die Gleichungen der drei Paare von geraden Linien, von denen der Satz spricht, wie folgt:

$$\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}=o,\quad \frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=o;$$

$$\frac{A}{A_1}+\frac{C}{C_1}=o,\quad \frac{B}{B_1}+\frac{D}{D_1}=o;$$

$$\frac{A}{A_1}+\frac{D}{D_1}=o,\quad \frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}=o.$$

Die Durchschnittspunkte derselben liegen augenscheinlich in der Geraden $\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=o.$

56. **Im Allgemeinen wird das anharmonische oder Doppelschnittverhältniss von vier geraden Linien**

$$\alpha-k\beta=o,\ \alpha-l\beta=o;\ \alpha-m\beta=o,\ \alpha-n\beta=o$$

**durch den Ausdruck**

$$\frac{(n-l)(m-k)}{(n-m)(l-k)} \text{ oder } \frac{n-l}{n-m}:\frac{k-l}{k-m}$$

**gegeben.**

Fig. 34.


Denn wenn die Strahlen des Büschels durch eine beliebige Parallele zu der geraden Linie $\beta=o$ in den vier Punkten $K$, $L$, $M$, $N$ respective geschnitten werden, so ist das Doppelschnittverhältniss durch

$$\frac{NL}{NM}:\frac{KL}{KM} \text{ dargestellt;}$$

bezeichnet man ferner durch $A$ den Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Linie $\alpha=o$, und mit $e$ die überall gleich grosse Entfernung derselben von der geraden Linie $\beta=o$, so geht diess Verhältniss nach einander über in

$$\frac{NA-LA}{NA-MA}:\frac{KA-LA}{KA-MA}, \text{ in } \frac{\frac{NA}{e}-\frac{LA}{e}}{\frac{NA}{e}-\frac{MA}{e}}:\frac{\frac{KA}{e}-\frac{LA}{e}}{\frac{KA}{e}-\frac{MA}{e}}$$

und nach der Bedeutung der Coefficienten in den Gleichungen der Strahlen des Büschels und der Proportionalität der Längen $NA$, $LA$, $MA$, $NA$ mit den senkrechten Abständen der Punkte $K$, $L$, $M$, $N$ von der Linie $\alpha = o$ in den oben gegebenen Ausdruck

$$\frac{n-l}{n-m} : \frac{k-l}{k-m}.$$

*Aufg. 1.* Man soll mit Hilfe dieser Bezeichnung den Beweis führen, dass die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

Die Gleichungen der Halbirungslinien sind nach Art. 43, 53

$$\alpha - \beta = o, \quad \beta - \gamma = o, \quad \gamma - \alpha = o,$$

wenn die Gleichungen der Seiten durch $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ ausgedrückt sind. Da die drei Gleichungen der Halbirungslinien die Identität $o = o$ zur Summe geben, so haben die Linien selbst einen gemeinsamen Durchschnittspunkt.

*Aufg. 2.* Die Halbirungslinien von zwei äusseren Winkeln eines Dreiecks schneiden sich auf der Halbirungslinie des dritten innern Winkels.

Indem man sich der Uebereinkunft hinsichtlich der Zeichen erinnert, erkennt man leicht, dass die Gleichungen der beiden ersten Halbirungslinien durch $\alpha + \beta = o$, $\alpha + \gamma = o$ gegeben sind; ihre Subtraction liefert $\beta - \gamma = o$, die Gleichung der Halbirungslinie des dritten inneren Winkels.

*Aufg. 3.* Die drei Höhenperpendikel in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkte.

Wenn man die den Seiten $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ respective gegenüberliegenden Winkel durch $A$, $B$, $C$ bezeichnet, so ergeben sich die Gleichungen der Höhenperpendikel nach Art. 53 als

$$\alpha \cos A - \beta \cos B = o,$$
$$\beta \cos B - \gamma \cos C = o,$$
$$\gamma \cos C - \alpha \cos A = o,$$

weil jedes derselben den Winkel, von dessen Scheitel es ausgeht, in Theile zerlegt, die die Complemente der benachbarten Winkel sind: der Anblick dieser Gleichungen lehrt, dass sie drei gerade Linien darstellen, die sich in demselben Punkte schneiden.

*Aufg. 4.* In jedem Dreieck gehen die geraden Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten durch einen Punkt.

Die Perpendikel, welche man von dem Mittelpunkte der Seite $\gamma = o$ auf die benachbarten Seiten fällen kann, stehen in dem Verhältniss $\sin A : \sin B$ und es sind somit die Gleichungen der bezeichneten Halbirungslinien

$$\alpha \sin A - \beta \sin B = o, \quad \beta \sin B - \gamma \sin C = o, \quad \gamma \sin C - \alpha \sin A = o.$$

*Aufg.* 5. Welches ist die Gleichung der auf der Basis eines Dreiecks in ihrem Endpunkte errichteten Senkrechten?

Sie ist $$\alpha - \beta \cos C = o$$
unter der Voraussetzung, dass die Senkrechte in dem Endpunkte der Basis $\alpha = o$ errichtet ist, wo diese mit der Seite $\beta = o$ zusammentrifft.

*Aufg.* 6. Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dass die Senkrechten von den Ecken des ersten auf die Seiten des zweiten sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch die Senkrechten von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten durch einen Punkt.

Man bezeichne durch $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$; $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = o$ die Seiten der beiden Dreiecke, durch $(\alpha\,\beta)$ den Winkel zwischen $\alpha = o$ und $\beta = o$ und in derselben Weise alle andern, so ergiebt sich die Gleichung der von der Ecke $(\alpha\,\beta)$ auf die Seite $\gamma' = o$ gefällten Senkrechten in der Form
$$\alpha \cos (\beta\,\gamma') - \beta \cos (\alpha\,\gamma') = o;$$
und die beiden Senkrechten von den Ecken $(\beta\gamma)$ und $(\gamma\alpha)$ auf die Seiten $\alpha' = o$ und $\beta' = o$ respective in den Formen
$$\beta \cos (\gamma\,\alpha') - \gamma \cos (\beta\,\alpha') = o,$$
$$\gamma \cos (\alpha\,\beta') - \alpha \cos (\gamma\,\beta') = o.$$
Indem man zwischen den beiden ersten Gleichungen $\beta$ eliminirt und die erhaltene Gleichung mit der dritten verbindet, erhält man die Bedingung, dass diese drei geraden Linien durch einen Punkt gehen, in der Form
$$\cos (\alpha\beta') \cos (\beta\gamma') \cos (\gamma\alpha') = \cos (\alpha'\beta) \cos (\beta'\gamma) \cos (\gamma'\alpha),$$
und die vollständige Symmetrie dieser Gleichung zeigt, dass sie ebensowohl die Bedingung ausdrückt, unter welcher die von den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersten gefällten Perpendikel durch einen Punkt gehen.

57. Die geraden Linien $\alpha - k\beta = o$ und $k\alpha - \beta = o$ bilden mit der geraden Linie $\alpha - \beta = o$, welche den von den Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, gebildeten Winkel halbirt, gleiche Winkel, weil die eine von ihnen mit der Linie $\alpha = o$ denselben Winkel bildet, wie die andere mit der Linie $\beta = o$.

*Aufg.* Wenn von den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien durch denselben Punkt gezogen werden, so schneiden sich auch die drei geraden Linien in einem Punkte, welche von denselben Ecken und unter derselben Neigung gegen die resp. Winkelhalbirungslinien gezogen werden, wie die vorigen.

Sind $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ die Seiten des Dreiecks und $l\alpha - m\beta = o$, $m\beta - n\gamma = o$, $n\gamma - l\alpha = o$ die drei von den Ecken des Dreiecks ausgehenden geraden Linien, als welche nach dem Princip des Art. 36 sich in einem Punkte durchschneiden müssen; dann sind nach dem gegenwärtigen Artikel die Gleichungen der drei geraden Linien, die mit jenen unter gleichen Winkeln gegen die betreffenden Winkelhalbirungslinien des Dreiecks von denselben Ecken aus gezogen sind

$$m\alpha - l\beta = o,\ n\beta - m\gamma = o,\ l\gamma - n\alpha = o$$

oder $$\frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = o,\ \frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = o,\ \frac{\gamma}{n} - \frac{\alpha}{l} = o,$$

welche sich in einem Punkte schneiden müssen.

58. **Die Gleichung jeder geraden Linie kann in die Form** $$lL + mM + nN = o$$ **gebracht werden, wenn $L = o$, $M = o$, $N = o$ die Gleichungen von irgend drei geraden Linien darstellen, die nicht durch denselben Punkt gehen.**

Hat man

$$L = Ax + By + C,\ M = A'x + B'y + C',\ N = A''x + B''y + C'',$$

und ist $ax + by + c = o$ die Gleichung irgend einer vierten geraden Linie, so sind, um dieselbe in der Form

$$lL + mM + nN = o$$

auszudrücken, die drei unbekannten Coefficienten $l$, $m$, $n$ durch die drei Bedingungsgleichungen zu bestimmen

$$lA + mA' + nA'' = a,$$
$$lB + mB' + nB'' = b,$$
$$lC + mC' + nC'' = c,$$

und man erhält daraus

$$l = \frac{a(B'C'' - B''C') + b(C'A'' - C''A') + c(A'B'' - A''B')}{A(B'C'' - B''C') + B(C'A'' - C''A') + C(A'B'' - A''B')}$$

und entsprechende Werthe für $m$ und $n$.

Aus Artikel 34 ergiebt sich, dass die so eben nachgewiesene Beziehung der Gleichung irgend einer geraden Linie auf die Gleichungen irgend dreier festen Geraden nicht mehr zulässig ist, wenn die drei geraden Linien $L = o$, $M = o$, $N = o$ sich in einem Punkte schneiden, weil dann die Werthe von $l$, $m$ und $n$ durch das Verschwinden des gemeinschaftlichen Nenners unendlich gross werden. Eben weil die Bedingung des Artikels 34, unter welcher drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden, für Gleichungen von der Form $Ax + By + C = o$ gegeben war, sind auch hier zunächst Gleichungen von dieser Form vorausgesetzt worden; wenn jedoch die Gleichungen der drei festen geraden Linien in der Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ gegeben wären und durch die Symbole $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ vertreten würden, so ist aus denselben Gründen wahr, dass die Gleichung jeder vierten geraden Linie in die Form

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

gebracht werden kann.

59. Die Gleichung der geraden Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte $(x', y')$, $(x'', y'')$ in der Form $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ auszudrücken.

Wenn wir durch $\alpha'$ die Grösse bezeichnen, welche durch Substitution der Coordinaten $x', y'$ in den durch das Symbol $\alpha$ vertretenen Ausdruck erhalten wird, also

$\alpha' = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p$ und durch $\beta'$, $\gamma'$, $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ die in gleicher Weise gebildeten übrigen Grössen, so wird die Bedingung, dass die gerade Linie $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ die beiden Punkte $(x', y')$, $(x'' y'')$ enthalte, durch die Gleichungen

$$l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = o,\ l\alpha'' + m\beta'' + n\gamma'' = o$$

ausgedrückt und indem wir diese Gleichungen für $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ auflösen, erhalten wir als Gleichung der Verbindungslinie jener beiden Punkte

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = o.$$

Damit ist offenbar, unabhängig von dem letzten Artikel, auch bewiesen, dass die Gleichung jeder geraden Linie in die Form $\quad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$

gebracht werden kann.

*Aufg. 1.* Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte zu finden, welche durch die Gleichungen

$$k\alpha - \beta = o,\ l\alpha - \gamma = o,$$
$$k'\alpha - \beta = o,\ l'\alpha - \gamma = o$$

bestimmt sind.

Aus dem ersten Paare von Gleichungen folgen $\beta' = k\alpha'$, $\gamma' = l\alpha'$, aus dem zweiten $\beta'' = k'\alpha''$, $\gamma'' = l'\alpha''$.

Indem man diese Werthe in die Gleichung dieses Artikels substituirt, wird sie durch $\alpha'\alpha''$ theilbar und wir erhalten

$$\alpha(kl' - k'l) + \beta(l - l') + \gamma(k' - k) = o.$$

Man erhält dieselbe Gleichung auch in folgender Weise: Die gesuchte Gleichung muss nach Art. 36 in jede der Formen

$$(k\alpha - \beta) + A(l\alpha - \gamma) = o,\ (k'\alpha - \beta) + A'(l'\alpha - \gamma) = o$$

gebracht werden können, welche identisch sein müssen; da in beiden der Coefficient von $\beta$ der nämliche ist, so erfährt man durch Vergleichung der Coefficienten in $\alpha$ und $\gamma$

$$A = A' = -\frac{k - k'}{l - l'},$$

und gelangt durch Substitution dieses Werthes in die gesuchte Gleichung zu derselben Gestalt wie vorher.

*Aufg.* 2. Die Gleichung der geraden Linie zu bilden, welche den Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel eines Dreiecks mit dem Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Seiten verbindet.

Nach Art. 57, Aufg. 3, 4 hat man

$$\beta' = \frac{\alpha' \cos A}{\cos B},\ \gamma' = \frac{\alpha' \cos A}{\cos C},\ \beta'' = \frac{\alpha'' \sin A}{\sin B},\ \gamma'' = \frac{\alpha'' \sin A}{\sin C},$$

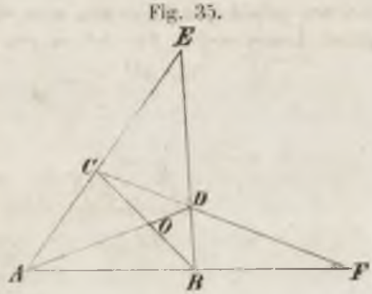
und durch Substitution dieser Werthe somit die Gleichung

$$\alpha \sin 2A \,.\, \sin(B - C) + \beta \sin 2B \,.\, \sin(C - A) + \gamma \sin 2C \,.\, \sin(A - B) = o.$$

60. Das allgemeine Princip, dass es möglich ist, die Gleichung jeder geraden Linie in Gliedern aus den Gleichungen von irgend drei gegebenen geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ auszudrücken, wird ferner durch die folgenden Aufgaben erläutert.

*Aufg.* 1. Die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks analytisch abzuleiten.

Fig. 35.




Sind die Gleichungen von $AC$, $AB$, $BD$ respective $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, so können die Gleichungen von $AD$ und $BC$ durch $l\alpha - m\beta = o$, $m\beta - n\gamma = o$ resp. ausgedrückt werden. Die Gleichungen aller andern geraden Linien der Figur lassen sich mit Hilfe der bisher eingeführten Grössen ausdrücken.

So ist $$l\alpha - m\beta + n\gamma = o$$
die Gleichung von $CD$, denn sie ist die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunkt von

$$l\alpha - m\beta = o\ (AD) \text{ und } \gamma = o\ (BD)$$

und durch den von

$$\alpha = o\ (AC) \text{ und } m\beta - n\gamma = o\ (BC),$$

d. h. durch die Punkte $D$ und $C$ hindurchgeht.

Ferner ist $l\alpha - n\gamma = o$ die Gleichung von $OE$, weil sie durch $E$, den Durchschnittspunkt von $\alpha = o$ $(AC)$ und $\gamma = o$ $(BD)$ und auch durch den Durchschnittspunkt von

$$l\alpha - m\beta = o\ (AD) \text{ und } m\beta - n\gamma = o\ (BC)$$

hindurchgeht; das letztere, weil $l\alpha - n\gamma = (l\alpha - m\beta) + (m\beta - n\gamma)$ ist.

Die gerade Linie $EF$ verbindet den Durchschnittspunkt von $\alpha = o$, $\gamma = o$ $(E)$ mit dem von $l\alpha - m\beta + n\gamma = o$, $\beta = o$ $(F)$ und ihre Gleichung ist daher $l\alpha + n\gamma = o$.

Endlich ist die Gleichung von $FO$, welche die Punkte

$$l\alpha + n\gamma = o,\ \beta = o \text{ oder } F \text{ und } l\alpha - m\beta = o,\ m\beta - n\gamma = o$$

oder $O$ verbindet, $l\alpha - 2m\beta + n\gamma = o$.

Aus Art. 55 ergiebt sich jetzt, dass die vier Linien $EA$, $EB$, $EO$, $EF$ ein harmonisches Büschel bilden, denn ihre Gleichungen sind resp.

$$\alpha = o,\ \gamma = o,\ l\alpha - n\gamma = o,\ l\alpha + n\gamma = o;$$

und ebenso bilden die Geraden $FE$, $FO$, $FC$, $FB$ ein harmonisches Büschel, weil ihre Gleichungen heissen

$$l\alpha - m\beta + n\gamma + m\beta = o,\ l\alpha - m\beta + n\gamma - m\beta = o,\ l\alpha - m\beta + n\gamma = o,\ \beta = o$$

und endlich die Linien $OC$, $OD$, $OE$, $OF$ als von den Gleichungen

$$m\beta - n\gamma = o;\ l\alpha - m\beta = o,\ l\alpha - n\gamma = o,\ l\alpha - 2m\beta + n\gamma = o$$

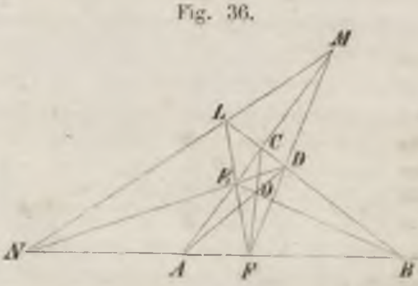
oder

$$m\beta - n\gamma = o,\ l\alpha - m\beta = o,\ l\alpha - m\beta + (m\beta - n\gamma) = o,\ l\alpha - m\beta - (m\beta - n\gamma) = o$$

sind. Auf diese Eigenschaften des Vierecks gründet sich die Construction der vierten Harmonikalen.

*Aufg.* 2. Man soll die Eigenschaften des Liniensystems discutiren, welches gebildet wird, wenn man durch die Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht, die sich in einem Punkte schneiden.

Fig. 36.




Sei $ABC$ das Dreieck und die Gleichungen seiner Seiten $AB$, $BC$, $CA$ resp.

$$\gamma = o,\ \alpha = o,\ \beta = o;$$

dann kann man die Gleichungen der drei durch den Punkt $O$ gehenden Geraden $OA$, $OB$, $OC$ resp.

$$m\beta - n\gamma = o,\ n\gamma - l\alpha = o,\ l\alpha - m\beta = o$$

wählen (Art. 57). Dadurch sind aber die Gleichungen aller andern geraden Linien der Figur bestimmt, es ist z. B. die Gleichung von $EF$

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = o,$$

denn sie geht durch den Punkt $E$ oder den Schnittpunkt der Linien $\beta = o$, $n\gamma - l\alpha = o$ und durch $F$, den Schnittpunkt von

$$\gamma = o,\ m\beta - l\alpha = o.$$

Ebenso ist $l\alpha - m\beta + n\gamma = o$ die Gleichung von $DF$ und $l\alpha + m\beta - n\gamma = o$ die Gleichung von $DE$. Darnach ergiebt sich leicht, dass die Punkte $L, M, N$, d. h. die Durchschnittspunkte von $EF$ oder $m\beta + n\gamma - l\alpha = o$ mit $BC$ oder $\alpha = o$, von $FD$ oder $l\alpha - m\beta + n\gamma = o$ und $CA$ oder $\beta = o$ und von $DE$ oder $l\alpha + m\beta - n\gamma = o$ mit $AB$ oder $\gamma = o$ in einer geraden Linie liegen, deren Gleichung $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ ist.

Die Gleichung der Linie $CN$ ist $l\alpha + m\beta = o$, denn es ist dies eine durch $C$, den Schnittpunkt von $\alpha = o$, $\beta = o$ und $N$, den Schnittpunkt von $l\alpha + m\beta - n\gamma = o$ mit $\gamma = o$ gehende gerade Linie.

Man erkennt daraus, dass $BN$ harmonisch getheilt ist, denn die Gleichungen der vier geraden Linien $CN$, $CA$, $CF$, $CB$ sind

$$l\alpha + m\beta = o,\ \beta = o,\ l\alpha - m\beta = o,\ \alpha = o.$$

In derselben Art erkennt man auch die Punktereihen $L, C, D, B$ und $M, C, E, A$ als harmonisch, und die gerade Linie $LMN$ bezeichnet somit auf den Seiten des Dreiecks die Punkte, welche zu den von den durch $O$ gezogenen Transversalen angegebenen Schnittpunkten conjugirt harmonisch sind.

*Aufg.* 3. Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dass die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer geraden Linie liegen, so gehen die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken beider Dreiecke verbinden, durch denselben Punkt.

Wenn die Seiten des ersten Dreiecks durch $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ repräsentirt werden und $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ die Gleichung der geraden Linie ist, in welcher die entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks jenen begegnen, so müssen die Seiten des zweiten Dreiecks, welche jenen resp. entsprechen, durch Gleichungen von der Form

$$l'\alpha + m\beta + n\gamma = o,\ l\alpha + m'\beta + n\gamma = o,\ l\alpha + m\beta + n'\gamma = o$$

dargestellt werden und man erhält durch successive Subtraction dieser drei Gleichungen von einander die folgenden

$$(l - l')\alpha = (m - m')\beta,\ (m - m')\beta = (n - n')\gamma,\ (n - n')\gamma = (l - l')\alpha,$$

welche nach dieser ihrer Ableitung gerade Linien durch die Ecken des zweiten Dreiecks und nach ihrer Form gerade Linien durch die entsprechenden Ecken des erstern darstellen, zugleich aber durch den blossen Anblick als durch denselben Punkt gehend erkannt werden.

61. Wir haben gesehen, dass in Beziehung auf drei beliebig angenommene gerade Linien

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o$$

die Gleichung jeder vierten Geraden in der Form

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

ausgedrückt werden kann, und dass es möglich ist, Aufgaben zu lösen durch eine Reihe von Gleichungen, welche ohne directe

Beziehung auf $x$ und $y$ in Gliedern von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ausgedrückt sind. Daraus entspringt für das im Vorigen ausführlich erläuterte Princip ein neuer Gesichtspunkt. Anstatt $\alpha$ nur als ein Symbol für die Grösse $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ anzusehen, können wir annehmen, dass es die Länge der Senkrechten von einem Punkte auf die Linie $\alpha = o$ bezeichne; und wir können darnach ein System von Dreilinien-Coordinaten bilden, in welchem die Lage eines Punktes durch seine Entfernungen von drei festen geraden Linien, den Fundamentallinien, bestimmt und in welchem eine gerade Linie durch eine homogene Gleichung $A\alpha + B\beta + C\gamma = o$ zwischen diesen Entfernungen dargestellt wird. In dieser Homogeneität liegt, wie weitergehende Untersuchungen lehren, der hauptsächlichste Vorzug des neuen Coordinatensystems; an dieser Stelle und durch das Vorhergehende erkennt man einen Vorzug desselben vor dem System der Cartesischen Coordinaten darin, dass in diesem die höchste mögliche Vereinfachung durch die Wahl zweier der merkwürdigsten Linien der Figur zu Coordinatenachsen erlangt wird, während bei der Anwendung von Dreilinien-Coordinaten zu Gunsten der Einfachheit über drei Fundamentallinien verfügt werden kann. Daraus vornehmlich entspringt die grössere Kürze der in Artikel 56 erhaltenen Ausdrücke im Vergleich zu den entsprechenden des zweiten Capitels.

62. Wenn eine Gleichung $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ gegeben und das Fundamentaldreieck bekannt ist, so kann die durch sie repräsentirte gerade Linie leicht construirt werden. Wir gelangen dazu am kürzesten und einfachsten durch Verweisung auf Aufgabe 2, Artikel 60. Nach derselben bestimmen sich die drei Punkte $L$, $M$, $N$ in denen die durch die Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

bezeichnete gerade Linie die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ des Fundamentaldreiecks respective schneidet, durch die Gleichungenpaare

$$\alpha = o,\ m\beta + n\gamma = o;\ \beta = o,\ n\gamma + l\alpha = o;\ \gamma = o,\ l\alpha + m\beta = o.$$

Die geraden Linien $m\beta + n\gamma = o$ oder $AL$, $n\gamma + l\alpha = o$ oder $BM$ und $l\alpha + m\beta = o$ oder $CN$ theilen aber die Winkel $BAC$, $CBA$, $ACB$ des Dreiecks respective so, dass das Sinusverhältniss der Theile $m:n$, $n:l$, $l:m$ ist; man hat demnach nur diese durch die Coefficienten der Gleichung bestimmte Theilung der Winkel des Fundamentaldreiecks zu vollziehen, um durch die drei Punkte, in denen die Theilstrahlen die Gegenseiten derselben schneiden, die durch die Gleichung dargestellte gerade Linie zu erhalten. Diese Construction liefert zugleich den Beweis für den Satz: Wenn auf den Seiten $AB$, $BC$, $CA$ eines Dreiecks drei Punkte $N$, $L$, $M$ in gerader Linie gewählt werden, so besteht für die Winkel, welche die Verbindungslinien derselben mit den Gegenecken des Dreiecks mit den anstossenden Seiten desselben einschliessen, die Relation

$$\frac{\sin LAB}{\sin LAC} \cdot \frac{\sin MBC}{\sin MBA} \cdot \frac{\sin NCA}{\sin NCB} = 1.$$

63. Eine Gleichung, welche nicht homogen ist, wie z. B. $\alpha = 3$, soll auf die homogene Form $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ gebracht werden.

Wenn durch $a$, $b$, $c$ die Längen der Seiten des Dreiecks $ABC$ bezeichnet werden, welches die drei Fundamentallinien bilden, so sind durch $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ respective die doppelten Inhalte der Dreiecke $OBC$, $OCA$, $OAB$ ausgedrückt, welche durch Verbindung eines willkürlich gewählten Punktes $O$ in der Ebene des Fundamental-Dreiecks mit den Ecken desselben gebildet werden, denn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind die Längen der Perpendikel, die man von einem solchen Punkte auf die Fundamentallinien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ fällen kann. Somit ist, wie auch der Punkt $O$ genommen sein mag, die Grösse $a\alpha + b\beta + c\gamma$ immer dieselbe und dem doppelten Inhalt des Dreiecks $ABC$ gleich. Für den im Innern des Dreiecks gewählten Punkt $O$ erhellt dies ohne weiteres; für einen ausserhalb gewählten Punkt genügt die Erinnerung, dass durch den Uebergang des Punktes $O$ von der einen Seite einer Fundamentallinie $\alpha = o$ auf die andere der Werth des auf dieselbe bezüglichen Perpendikels sein Vorzeichen wechselt: in dem bezeichneten Falle geht die Grösse

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \text{ in } 2(\Delta OAC + \Delta OBA - \Delta OCB) = 2 . \Delta ABC$$

über.

Setzen wir dann diesen doppelten Inhalt $= M$, so kann die Gleichung $\alpha = 3$ geschrieben werden

$$M\alpha = 3(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

welches die verlangte Form ist.

Zu demselben Zweck ist die Constante

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

brauchbar, in welcher $A$, $B$, $C$ die Winkel des Fundamentaldreiecks sind, welche den Seiten $a$, $b$, $c$ respective gegenüberliegen. Der Werth dieser Constanten ist für alle endlich bestimmbaren Punkte der Ebene des Systems $= \dfrac{M \sin A}{a}$.

64. **Man soll die Gleichung einer Parallelen zur geraden Linie** $$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$ **in Dreilinien-Coordinaten ausdrücken.**

In Cartesischen Coordinaten sind parallele gerade Linien durch Gleichungen von der Form

$$Ax + By + C = o,\ Ax + By + C' = o$$

ausgedrückt, welche nur um eine Constante differiren; ebenso drückt die Gleichung

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + k(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = o$$

eine zu $A\alpha + B\beta + C\gamma = o$ parallele Linie aus, weil die beiden Gleichungen nur um eine Constante differiren.

*Aufg. 1.* Welches ist die Gleichung einer Parallellinie zur Basis eines Dreiecks durch die Spitze desselben?

Sie ist $\alpha \sin A + \beta \sin B = o$; denn dies ist eine durch den Punkt $\alpha = o$, $\beta = o$ gezogene Linie und der Basis parallel, weil man sie in der Form schreiben kann

$$\gamma \sin C - (\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = o.$$

Die vier geraden Linien

$\alpha = o$, $\beta = o$, $\alpha \sin A + \beta \sin B = o$, $\alpha \sin A - \beta \sin B = o$,

deren letzte die von der Spitze nach dem Mittelpunkte der Basis gezogene gerade Linie ist, bilden ein harmonisches Büschel; der Mittelpunkt einer geraden begrenzten Strecke und der unendlich entfernte Punkt derselben sind harmonisch-conjugirt in Bezug auf die Endpunkte der Strecke.

*Aufg. 2.* Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks verbindet, ist zur Basis desselben parallel.

Sie ist die Verbindungslinie der Punkte

$\beta \sin B - \gamma \sin C = o$, $\alpha = o$ und $\alpha \sin A - \gamma \sin C = o$, $\beta = o$

und hat daher die Gleichung

$$\alpha \sin A + \beta \sin B - \gamma \sin C = o,$$

welche nach dem Princip dieses Artikels eine Parallele zu $\gamma = o$ darstellt.

*Aufg. 3.* Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche im Mittelpunkte der Seite eines Dreiecks auf derselben senkrecht steht.

Sie ist eine Parallele zu der Linie $\alpha \cos A - \beta \cos B = o$ durch den Punkt, in welchem $\alpha \sin A - \beta \sin B = o$, $\gamma = o$ sich schneiden. Ihre Gleichung ist demnach

$$\alpha \sin A - \beta \sin B + \gamma \sin (A - B) = o.$$

*Aufg. 4.* Die drei auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Mittelpunkten errichteten Perpendikel schneiden sich in einem Punkte.

Ihre Gleichungen sind:

$$\alpha \sin A - \beta \sin B + \gamma \sin (A - B) = o,$$
$$\beta \sin B - \gamma \sin C + \alpha \sin (B - C) = o,$$
$$\gamma \sin C - \alpha \sin A + \beta \sin (C - A) = o$$

und geben Null zur Summe, wenn man sie vor der Addition respective mit $\sin {}^2C$, $\sin {}^2A$, $\sin {}^2B$ multiplicirt.

Die Gleichungen der geraden Linien, welche ihren Schnittpunkt mit den Ecken des Dreiecks verbinden, sind

$$\frac{\alpha}{\cos A} = \frac{\beta}{\cos B} = \frac{\gamma}{\cos C}.$$

*Aufg. 5.* Zu beweisen, dass dieser Schnittpunkt der geraden Linie angehört, deren Gleichung im Art. 59, Beisp. 2 gegeben ist.

*Aufg. 6.* Man soll die Entfernung zweier Punkte aus ihren Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$ in Bezug auf ein dreieckiges System ableiten.

Wir dürfen die Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ eines Punktes $P$ als die Verhältnisse ansehen, welche zwischen den Flächen der von ihm und je einem Paar der Fundamentalpunkte gebildeten Dreiecken und der Fläche des Fundamentaldreiecks bestehen und haben dann die Relationen

$$\alpha + \beta + \gamma = 1,$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 1,$$

somit $$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = o.$$

Die Entfernung beider Punkte $(r)$ muss sich als eine rationale homogene Function des zweiten Grades von den Grössen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ ausdrücken lassen und da man leicht aus der vorigen Beziehung die Identitäten

$$2(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') = (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2 - (\gamma - \gamma')^2,$$
$$2(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') = (\beta - \beta')^2 - (\gamma - \gamma')^2 - (\alpha - \alpha')^2,$$
$$2(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = (\gamma - \gamma')^2 - (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2$$

erhält, so muss sie in der Form

$$r^2 = L(\alpha - \alpha')^2 + M(\beta - \beta')^2 + N(\gamma - \gamma')^2$$

erscheinen. Zur Bestimmung der Coefficienten $L$, $M$, $N$ erhalten wir drei Bedingungen, indem wir die Punkte $P$ und $Q$ nach einander mit den Ecken des Fundamentaldreiecks zusammenfallen lassen, als in welchen die Coordinaten immer die Werthe $o$, $o$, $1$ annehmen, so dass die Differenzen $o$, $1$, $1$ werden. Wenn wir die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks durch $a$, $b$, $c$ ausdrücken, so sind diese Bedingungen

$$M + N = a^2,\ N + L = b^2,\ L + M = c^2,$$

also

$$L = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, M = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, N = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

und daher endlich

$$r^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}(\alpha - \alpha')^2 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}(\beta - \beta')^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}(\gamma - \gamma')^2,$$

für welchen Ausdruck auch

$$r^2 = \frac{\cos A}{a}(\alpha - \alpha')^2 + \frac{\cos B}{b}(\beta - \beta')^2 + \frac{\cos C}{c}(\gamma - \gamma')^2$$

gesetzt werden kann, wenn man durch $A$, $B$, $C$ die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet.

*Aufg.* 7. Welches ist die Länge des Perpendikels von dem Punkte $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ auf die gerade Linie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o?$$

Sie ist:

$$\frac{A\alpha' + B\beta' + C\gamma'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 - 2AB\cos C - 2BC\cos A - 2CA\cos B)}}$$

*Aufg.* 8. Man soll den Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$; $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ durch die Coordinaten seiner Ecken ausdrücken.

*Aufg.* 9. Man soll die Bedingung ausdrücken, unter welcher zwei gerade Linien

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o,\ A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = o$$

recktwinklig zu einander sind.

*Aufl.* Wenn durch $A$, $B$, $C$ die Winkel des Fundamentaldreiecks $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ zugleich mit bezeichnet werden, so ist die verlangte Bedingung

$$AA' + BB' + CC' = (AB' + A'B)\cos C + (BC' + B'C)\cos A + (CA' + C'A)\cos B.$$

(Vergl. Art. 41).

65. Es ist von Interesse, zu untersuchen, welches die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$$

ist. Sie ist in der allgemeinen Form der Gleichung einer geraden Linie inbegriffen, kann aber nach dem Vorigen keine endlich bestimmbaren Punkte enthalten, weil für die Coordinaten jedes solchen die Grösse $\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$ einer gewissen Constanten gleich, aber nicht Null wird.

In der allgemeinen Gleichung der geraden Linie

$$Ax + By + C = o$$

bestimmen $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ die Abschnitte, welche dieselbe in den Coordinatenachsen bildet; je kleiner also $A$ und $B$ werden, desto grösser sind diese Abschnitte bei unverändertem Werthe von $C$, desto weiter entfernt ist daher die durch

$$Ax + By + C = o$$

dargestellte Linie vom Ursprung. Für $A = o$, $B = o$ sind jene Abschnitte unendlich gross und alle Punkte der Linie sind in unendlicher Entfernung gelegen. Wir kommen also zu dem Schlusse, dass die paradoxe Gleichung $C = o$, eine Constante gleich Null, und daher auch die Gleichung

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$$

eine gerade Linie repräsentirt, die in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten gelegen ist.

66. Wenn nach Artikel 63 eine Parallele zur geraden Linie $\alpha = o$ allgemein durch $\alpha + C = o$ ausgedrückt wird, so erkennt man jetzt, dass dies nur ein weiteres Beispiel von der Anwendung des im Artikel 36 aufgestellten Princips ist, denn parallele Linien können als solche betrachtet werden, die sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden und eine Gleichung von der Form $\alpha + C = o$ repräsentirt eine gerade Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien $\alpha = o$, $C = o$ gezogen ist, oder durch den Punkt, wo die Linie $\alpha = o$ die unendlich entfernte Linie $C = o$ durchschneidet.

67. Es ist leicht zu zeigen, dass Cartesische Coordinaten nur ein specieller Fall von Dreilinien-Coordinaten sind. Man findet zuerst einen wesentlichen Unterschied zwischen beiden darin, dass Gleichungen in Dreilinien-Coordinaten homogen sind, während man in den Gleichungen mit Cartesischen Coordinaten ein absolutes Glied von Gliedern des ersten, zweiten u. s. w. Grades unterscheidet. Aber eine einfache Ueberlegung zeigt, dass diese Differenz nur scheinbar ist, dass Gleichungen in Cartesischen Coordinaten in Wirklichkeit ebenfalls homogen sein müssen, wenn auch freilich nicht in der Form. Der Sinn der Gleichung $x = 3$

kann beispielsweise kein anderer sein, als dass die Linie $x$ drei Fussen oder Zollen oder überhaupt drei Lineareinheiten gleich ist, während die Gleichung $xy = 9$ aussagt, dass das Rechteck $xy$ gleich 9 Quadratfussen oder 9 Quadratzollen oder überhaupt gleich 9 Quadraten von einer gewissen Lineareinheit ist.

Um solche Gleichungen auch der Form nach homogen zu machen, kann man die Lineareinheit durch $z$ bezeichnen und dann die Gleichung der geraden Linie in der Form schreiben

$$Ax + By + Cz = o.$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

und erinnert sich, dass nach Artikel 64 die Gleichung einer unendlich entfernten geraden Linie die Form $z = o$ annimmt, so erkennt man, dass Gleichungen in Cartesischen Coordinaten nur die specielle Form sind, in welcher Gleichungen in Dreilinien-Coordinaten erscheinen, wenn zwei der Fundamentallinien zu Coordinatenachsen gewählt werden, indess die dritte derselben in unendlicher Entfernung liegt.

68. In dem Vorhergehenden ist eine wesentliche Erweiterung des ursprünglich angenommenen Begriffs der Coordinaten enthalten; während es im System des Cartesius gerade, zu zwei festen Achsen parallele Linien sind, welche durch ihre Länge von ihrem gemeinsamen Ausgangspunkte bis zu den Achsen die Lage des ersteren bestimmen, ist im System der Polar-Coordinaten die Bestimmung des Punktes durch den Radius vector und seinen Drehungswinkel in Bezug auf den Pol und eine feste Anfangslage und in dem so eben erörterten aus dem Gebrauche der Symbole so natürlich hervorgegangenen System der Dreilinien-Coordinaten durch die von demselben auf drei unveränderliche feste Fundamentallinien gefällten Perpendikel vollzogen und so theils die Art, theils die Lage und Zahl der Coordinaten geändert worden; an Stelle zweier zu festen Achsen parallelen geraden Linien ist eine gerade Strecke und ein Winkel in dem einen Falle getreten und in dem andern dienen statt dessen die Verhältnisse, welche zwischen den von ihm auf die Fundamentallinien gefällten Perpendikeln bestehen.

Man versteht hiernach leicht, wie jeder besondern Art, die Lage eines Punktes in Bezug auf Punkte oder Linien zu bestimmen, deren Lage als bekannt vorausgesetzt wird, ein besonderes Coordinatensystem entsprechen muss; aber es ist hier nicht der Ort, diese Bemerkung weiter auszuführen.

Nachdem die Bestimmung eines Punktes durch Coordinaten erlangt ist, wird jede gerade oder krumme Linie als eine Reihe von Punkten aufgefasst, und das Gesetz der gegenseitigen Abhängigkeit ihrer Coordinaten durch eine Gleichung zwischen denselben dargestellt; so genügen die Cartesischen Coordinaten aller Punkte einer geraden Linie einer vollständigen Gleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen, die Dreilinien-Coordinaten derselben Punkte einer homogenen Gleichung des ersten Grades zwischen drei Veränderlichen, und diese Gleichungen stellen eben deshalb die gerade Linie dar.

Setzt man an die Stelle des Punktes als des ursprünglichen durch Coordinaten zu bestimmenden Raumelementes irgend ein andres geometrisches Gebilde, so erhält man dadurch in einem andern Sinne neue Coordinatensysteme. Immer aber stellen Gleichungen zwischen den Coordinaten die aus jenen Elementargebilden zusammengesetzten räumlichen Formen dar.

Neben dem Punkte hat kein anderes geometrisches Gebilde so viel Berechtigung, als elementar betrachtet zu werden, und kein andres bietet so leicht die Möglichkeit, durch stetige Reihung neue Gebilde als zusammengesetzte aus sich hervorzutreiben, als die gerade Linie. Indem man jede gerade Linie in Bezug auf gewisse feste Punkte oder feste Linien von bekannter Lage durch Coordinaten in verschiedener Weise bestimmt, erhält man die verschiedenen Coordinatensysteme der geraden Linie.

69. Das einfachste derselben entspringt aus dem Cartesischen Coordinatensystem und es ist schon bei einer früheren Gelegenheit auf dasselbe hingedeutet worden. (Vergl. Artikel 34, Anmerkung.) Die Coordinaten der geraden Linie sind die Abschnitte, welche sie in den Coordinatenachsen, vom Anfangspunkte aus

gezählt, bestimmt. Wenn man diese Abschnitte in der Art variabel annimmt, dass ihre zusammengehörigen Werthe stets einer bestimmten Gleichung genügen, so repräsentirt diese Gleichung ein zusammengesetztes geometrisches Gebilde, welchem alle die durch ihre Coordinaten ihr genügenden geraden Linien als Elemente angehören. Im Artikel 50 ist bereits gezeigt worden, dass, wenn $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ diese Coordinaten oder Achsenabschnitte sind, die Gleichung $aA + bB + cC = o$ alle die geraden Linien darstellt, welche durch einen bestimmten Punkt gehen; die Cartesischen Coordinaten desselben wurden durch $x_1 = \frac{a}{c}$, $y_1 = \frac{b}{c}$ ausgedrückt. Die gegebene Gleichung kann daher als die Gleichung dieses Punktes in Linear-Coordinaten angesehen werden und die allgemeine Gleichung eines Punktes in dem System der Linear-Coordinaten, in welchem eine gerade Linie durch ihre Achsenabschnitte $x$ und $y$ bestimmt wird, ist somit

$$ax + by + c = o.$$

Wir erinnern hier an die Anmerkung des Artikel 34, in welcher auf die Uebereinstimmung aufmerksam gemacht ward, welche zwischen der Gleichung stattfindet, die in dem System dieser Linear-Coordinaten die Bedingung ausdrückt, unter welcher drei gerade Linien durch denselben festen Punkt gehen und derjenigen Gleichung, die im Cartesischen System anzeigt, dass drei Punkte in derselben geraden Linie liegen. (Man vergleiche dazu Artikel 72).

Als eine nützliche Uebung empfehlen wir dem Leser den Beweis des folgenden Satzes, welcher nach den eben gegebenen Andeutungen vollkommen analog zu dem am Schlusse des Art. 55 mitgetheilten geführt werden kann.

Wenn die Seiten und Diagonalen eines Vierecks $ABCD$ von einer Transversale in den Punkten $a, b, c, d, e, f$ respective geschnitten sind und die in Bezug auf die entsprechenden Ecken des Vierecks conjugirt harmonischen Punkte dieser letzteren durch $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ bezeichnet werden, so gehen die geraden Linien $a_1c_1$, $b_1d_1$ und $e_1f_1$ durch einen und denselben Punkt.

70. Dem zuletzt entwickelten System der Dreilinien-Coordinaten, welches ein Punkt-Coordinaten-System ist, entspricht unter den möglichen Systemen von Linear-Coordinaten eines, welches man als das System der Dreipunkt-Coordinaten bezeichnen kann, und das unter Andeutung seiner einfachsten Anwendungen hier entwickelt werden soll, um auch dieser Seite der Coordinatenbestimmung mehr als bisher gerecht zu werden und für spätere ausgedehnte Anwendungen Grund zu legen.

Von zwei festen Punkten $A$ und $B$ aus denke man auf eine beliebige gerade Linie Perpendikel gefällt und bezeichne die Längen derselben durch $\alpha$ und $\beta$; alsdann hat das Perpendikel von dem Punkte der geraden Linie $AB$, dessen Theilungsverhältniss $l:m$ ist, auf dieselbe gerade Linie die Länge $\frac{l\alpha + m\beta}{l+m}$, und für jede gerade Linie, welche durch diesen Theilungspunkt selbst geht, muss somit die Relation $l\alpha + m\beta = o$ erfüllt sein. Man darf dieselbe als die Gleichung des Punktes betrachten, der in der Verbindungslinie der beiden Punhte $\alpha = o$, $(A)$ und $\beta = o$, $(B)$ so liegt, dass er die geradlinige Strecke zwischen ihnen im Verhältniss $l : m$ theilt. Verbindet man diesen Punkt $l\alpha + m\beta = o$ mit einem dritten festen Punkte $\gamma = o$, $(C)$ und theilt die Strecke zwischen beiden im Verhältniss $n:(l+m)$, so ist die Länge der von diesem Theilpunkt auf irgend eine gerade Linie, die von den drei festen Punkten die Abstände $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ hat, gefällten Senkrechten

$$\frac{(l+m)\frac{l\alpha + m\beta}{l+m} + n\gamma}{l+m+n} = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l+m+n},$$

und wenn für eine gerade Linie die Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

zwischen ihren drei Abständen von jenen festen Punkten besteht, so muss sie durch jenen Theilpunkt selbst hindurch gehen. Diese Gleichung drückt somit den mathematischen Zusammenhang zwischen den Coordinaten aller geraden Linien aus, die durch einen gewissen Punkt gezogen werden können, insofern man als solche die senkrechten Abstände derselben von drei festen Fundamentalpunkten betrachtet, und ist somit die Gleichung dieses Punktes.

Jeder Punkt in der Ebene der Fundamentalpunkte ist durch seine drei Theilungscoefficienten $l$, $m$, $n$, die Constanten seiner Gleichung, vollkommen bestimmt und kann aus denselben leicht construirt werden. Sind $A$, $B$, $C$ die drei Fundamentalpunkte, so findet man den durch die Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

dargestellten Punkt gleichmässig durch folgende drei Constructionen: 1.) Man theilt $BC$ in $D$ im Verhältniss $n:m$ und $AD$ im Verhältniss $(n+m):l$. 2.) Man theilt $CA$ in $E$ im Verhältniss $l:n$ und $BE$ im Verhältniss $(l+n):m$. 3.) Man theilt $AB$ in $F$ im Verhältniss $m:l$ und $CF$ im Verhältniss $(m+l):n$. In jedem Falle ist der letzterhaltene Theilpunkt $O$ der Punkt, welchen die gegebene Gleichung darstellt. Man erhält ihn offenbar auch, wenn man die Punkte $D$, $E$, $F$, welche respective die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ in den Verhältnissen $n:m$, $l:n$, $m:l$ theilen, mit den gegenüberliegenden Ecken des Fundamentaldreiecks verbindet.

In jeder dieser Constructionen ist zugleich der Beweis für den Satz enthalten: Die geraden Linien, welche nach den drei Ecken $A$, $B$, $C$ eines Dreiecks von einem beliebigen Punkte $O$ in seiner Ebene gezogen werden, begegnen den Gegenseiten $BC$, $CA$, $AB$ in Punkten $D$, $E$, $F$, für welche stets:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1.$$

Aus diesem Satze und dem in Artikel 62 aus der entsprechenden Construction des Systems der Dreilinien-Coordinaten abgeleiteten entspringen ferner noch die folgenden beiden, welche sich auf dieselben Figuren beziehen:

$$1.)\ \frac{\sin OAB}{\sin OAC} \cdot \frac{\sin OBC}{\sin OBA} \cdot \frac{\sin OCA}{\sin OCB} = -1$$

$$2.)\ \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1.$$

71. In der vorhergehenden Entwickelung und ihren Ergebnissen, sowie auch in der Construction eines durch seine Gleichung gegebenen Punktes, ist die vollständige Analogie unverkennbar, welche sie mit den Entwickelungen des Artikel 61 und der Construction des Artikel 62 haben. Diese Analogie findet

sich auch weiterhin bewährt und wir bezeichnen hier, um dies deutlicher zu machen, eine Reihe einfacher Ergebnisse, deren Begründung theilweise dem Leser selbst zur Uebung überlassen bleiben soll.

Wenn zwei Punkte durch die Gleichungen

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o,\ l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = o$$

gegeben sind, so ist durch

$$A \cdot \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n} + B \cdot \frac{l'\alpha + m'\beta + n'\gamma}{l' + m' + n'} = o$$

der Punkt in ihrer geraden Verbindungslinie ausgedrückt, welcher die von ihnen begrenzte Strecke in dem Verhältniss $B:A$ theilt; und wenn abkürzend

$$\mu = o,\ \nu = o$$

die Gleichungen zweier Punkte bedeuten, so ist

$$\mu + k\nu = o$$

die Gleichung irgend eines Punktes in ihrer Verbindungslinie, dessen Lage in Bezug auf jene beiden durch die Grösse $k$ bestimmt ist, die man den Modulus des Theilpunkts nennen kann. Die zwei Gleichungen

$$\mu + k\nu = o,\ \mu - k\nu = o$$

bezeichnen Punkte, welche die gerade Strecke zwischen den Punkten $\mu = o$, $\nu = o$ innerlich und äusserlich in demselben Verhältniss theilen; somit sind

$$\mu = o,\ \nu = o,\ \mu + k\nu = o,\ \mu - k\nu = o$$

die Gleichungen von vier harmonischen Punkten in derselben geraden Linie. Das anharmonische Verhältniss der vier Punkte

$$\mu = o,\ \nu = o,\ \mu + k\nu = o,\ \mu + l\nu = o$$

wird durch $k:l$ und das der vier allgemein bestimmten Punkte

$$\mu + k\nu = o,\ \mu + l\nu = o,\ \mu + m\nu = o,\ \mu + n\nu = o$$

durch

$$\frac{k - l}{k - m} : \frac{n - l}{n - m}$$

ausgedrückt, Formeln, welche ganz mit denen übereinstimmen, die früher für das Doppelschnittverhältniss von vier Strahlen eines Büschels gefunden wurden. Es ist schon damals auf den dualistischen Charakter der Function des Doppelschnittverhältnisses hingewiesen worden, nach welchem sie ebensowohl Strahlen eines Büschels als Punkte einer Reihe umfasst.

Speciell ist $\mu + \nu = o$ der Mittelpunkt und $\mu - \nu = o$ der unendlich entfernte Punkt der geraden Linie zwischen $\mu = o$ und $\nu = o$.

Demnach haben die Mittelpunkte der drei Seiten des Fundamentaldreiecks die Gleichungen

$$\alpha + \beta = o, \ \beta + \gamma = o, \ \gamma + \alpha = o$$

und die ihnen harmonisch conjugirten unendlich entfernten Punkte derselben Seiten die folgenden

$$\alpha - \beta = o, \ \beta - \gamma = o, \ \gamma - \alpha = o.$$

Man sieht, dass diese Punkte in einer geraden Linie liegen, da ihre Gleichungen Null zur Summe geben und erkennt, dass für die Coordinaten dieser geraden Linie die Bedingung $\alpha = \beta = \gamma$ gilt; dieses hätte aber schon aus der Bemerkung geschlossen werden dürfen, dass aller Unterschied zwischen den Entfernungen endlicher Punkte von unendlich weit entfernten unangebbar wird. Ein Punkt in unendlicher Entfernung wird durch

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

ausgedrückt, wenn zugleich

$$l + m + n = o$$

ist, weil alsdann die Coordinaten der unendlich entfernten geraden Linie der Gleichung genügen.

Zwei Punkte

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o, \ a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = o$$

liegen in der geraden Linie, deren Coordinaten sind

$$\alpha = ac_1 - a_1c; \ \beta = cb_1 - c_1b; \ \gamma = ba_1 - b_1a.$$

Drei Punkte

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o, \ a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = o, \ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = o$$

liegen in derselben geraden Linie, wenn zwischen den Coefficienten ihrer Gleichungen die Relation besteht

$$a(b_1c_2 - b_2c_1) + a_1(b_2c - bc_2) + a_2(bc_1 - b_1c) = o.$$

Es sind dies dieselben Werthe, welche im Dreilinien-Coordinatensystem die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier geraden Linien $a\alpha + b\beta + c\gamma = o$, $a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = o$ darstellen, und dieselbe Bedingungsgleichung, unter welcher drei gerade Linien

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o, \ a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = o, \ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = o$$

durch denselben Punkt gehen.

*Aufg. 1.* Die geraden Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der Gegenseiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Wird das Dreieck als Fundamentaldreieck betrachtet, so sind die drei Halbirungslinien $AD$, $BE$, $CF$ respective durch die Paare von Gleichungen

$$\alpha = o,\ \beta + \gamma = o;\ \beta = o,\ \gamma + \alpha = o;\ \gamma = o,\ \alpha + \beta = o$$

dargestellt und ihre Coordinaten genügen somit alle der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma = o,$$

welche daher die Gleichung ihres Durchschnittspunktes ist.

*Aufg. 2.* Die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Man betrachte das Dreieck als Fundamentaldreieck und bezeichne die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ resp. durch $a$, $b$, $c$ und ihre Gegenwinkel durch $A$, $B$, $C$, so sind diese Halbirungslinien entweder durch die Paare von Gleichungen

$$\alpha = o,\ b\beta + c\gamma = o;\ \beta = o,\ c\gamma + a\alpha = o;\ \gamma = o,\ a\alpha + b\beta = o,$$

oder durch die Paare

$$\alpha = o,\ \beta \sin B + \gamma \sin C = o;\ \beta = o,\ \gamma \sin C + \alpha \sin A = o;$$
$$\gamma = o,\ \alpha \sin A + \beta \sin B = o$$

gegeben.

Jene Bedingungen genügen sämmtlich der Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o,$$

diese ebenso der Gleichung

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o,$$

welche daher die Gleichungen des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes jener geraden Linien sind.

*Aufg. 3.* Die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks gehen durch denselben Punkt.

*Aufg. 4.* Die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierecks liegen in einer geraden Linie.

Man wähle drei der Ecken des Vierecks zu Fundamentalpunkten, so dass die Gleichungen der vier Ecken desselben sind

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ l\alpha + m\beta + n\gamma = o.$$

Dann ist die Gleichung des Durchschnittspunktes $E$ der Gegenseiten $AB$ und $CD$ $\qquad l\alpha + m\beta = o,$

denn sie wird nicht nur durch die Coordinaten der geraden Linie $AB$, sondern auch durch die von $CD$ befriedigt; das letztere, weil man sie schreiben kann

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma) - n\gamma = o.$$

Ebenso ist die Gleichung des Durchschnittspunktes $F$ der Gegenseiten $AD$ und $BC$ $\qquad m\beta + n\gamma = o.$

Dann ist die Gleichung des Mittelpunktes der Diagonale $AC$

$$\alpha + \gamma = o;$$

die des Mittelpunktes der Diagonale $BD$

$$\beta + \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n} = o$$

oder $\qquad (l + m + n)\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma) = o$

und endlich die des Mittelpunktes der dritten Diagonale $EF$

$$\frac{l\alpha + m\beta}{l + m} + \frac{m\beta + n\gamma}{m + n} = o$$

oder $\qquad (m + n)(l\alpha + m\beta) + (l + m)(m\beta + n\gamma) = o.$

Da man diese Gleichung auch schreiben kann

$$ln(\alpha + \gamma) + m[(l + m + n)\beta + (l\alpha + m\beta + n\gamma)] = o,$$

so erkennt man, dass dieser letztere Punkt mit den beiden ersteren in derselben geraden Linie liegt.

*Aufg.* 5. In ganz ähnlicher Art lässt sich der allgemeinere Satz beweisen: Wenn man zu drei in den Diagonalen eines vollständigen Vierecks gewählten Punkten, welche in gerader Linie liegen, die conjugirt-harmonischen in Bezug auf die Endpunkte der Diagonalen bestimmt, so liegen diese gleichfalls in einer geraden Linie.

72. Die beiden zuletzt entwickelten Coordinatensysteme, das System der Dreilinien- und das der Dreipunkt-Coordinaten, fordern in manchen Beziehungen zur gegenseitigen Vergleichung auf. Durch jedes von ihnen wird derselbe analystische Ausdruck in andrer Weise geometrisch interpretirt; dazu liefern die letzten Aufgaben, verglichen mit früheren (Art. 56, 60) mannigfache Belege. Man erkennt jedoch leicht, dass dies eine Eigenschaft ist, die allen Coordinatensystemen zukommt; jedes neue Coordinatensystem lehrt alle möglichen analytischen Formen auf eine neue Weise interpretiren und führt dadurch oft zur Entdeckung neuer geometrischer Wahrheiten, öfter zu neuen Ableitungen für schon bekannte Sätze. Darum insbesondere ist es so wichtig, die Beschränkung auf ein Coordinatensystem aufzugeben und den Begriff der Coordinaten in solcher Art zu verallgemeinern, wie es in den letzten Artikeln geschehen ist. Da jedoch die Fähigkeit, von diesen allgemeineren Gesichtspunkten Nutzen zu ziehen und sie fruchtbar zu machen, nur durch die gründliche Durcharbeitung eines einzelnen Systems oder mehrerer

besondern Systeme erworben werden kann, so soll in dem Folgenden das Cartesische Coordinatensystem als die Hauptgrundlage beibehalten und auf andre zunächst nur bei besondern Anlässen eingegangen werden.

Die beregte Vergleichung der beiden Coordinatensysteme eröffnet den Blick auf eine *gewisse Zusammengehörigkeit solcher geometrischer Sätze, wie sie durch die doppelte Interpretation gleicher analytischer Facta erlangt werden*; sie zeigt in Beispielen, dass Punkte durch gerade Linien, Punktreihen durch Strahlenbüschel, Mittelpunkte von Strecken durch Halbirungslinien von Winkeln u. s. w. gewissermassen ersetzt werden, indem man von einer Interpretation zur andern übergeht. Die Verhältnisse der Figur, aus welcher die Constructionen der geraden Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

und die des Punktes $\quad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$

hervorgingen, bieten ein reichhaltiges Beispiel dafür dar.

Diese Zusammengehörigkeit und bestimmte Vertretungsfähigkeit hat man unter dem Namen der *Reciprocität* als ein wichtiges Princip in die Geometrie eingeführt. Werth und Bedeutung desselben können erst weiterhin näher gewürdigt werden.

---

## Fünftes Kapitel.

# Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen.

---

73. Ehe wir dazu übergehen, von den Curven zu handeln, welche durch Gleichungen, deren Grad den ersten übersteigt, dargestellt werden, wollen wir einige Fälle untersuchen, in denen diese Gleichungen gerade Linien repräsentiren.

*Wenn eine Anzahl von Gleichungen*

$$L = o,\ M = o,\ N = o\ \ldots.$$

*Seite für Seite mit einander multiplicirt werden, so dass daraus die Gleichung*

$$LMN\ \ldots. = o$$

entsteht, so bezeichnet diese die Vereinigung aller der durch ihre Factoren repräsentirten Linien, denn sie wird durch die Werthe der Coordinaten befriedigt, welche irgend einen ihrer Factoren gleich Null machen. Wenn umgekehrt eine Gleichung höheren Grades in ein Product mehrerer anderen von niedrigeren Graden aufgelöst werden kann, so repräsentirt sie ebenfalls die Vereinigung aller durch ihre Factoren dargestellten geometrischen Oerter. Eine Gleichung vom $n^{ten}$ Grade, die in $n$ Factoren vom ersten Grade zerlegt werden kann, repräsentirt daher $n$ gerade Linien.

74. Eine homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades zwischen zwei Veränderlichen repräsentirt $n$ gerade Linien, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

Denn ist die Gleichung

$$x^n - px^{n-1}y + qx^{n-2}y^2 - \ldots \pm ty^n = o,$$

so erhalten wir durch Division mit $y^n$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - p\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + q\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} - \ldots = o,$$

eine Gleichung, welche durch Auflösung für $\frac{x}{y}$ $n$ Werthe liefert; bezeichnen wir dieselben durch $a$, $b$, $c$ ...., so kann diese Gleichung in Factoren zerlegt werden

$$\left(\frac{x}{y} - a\right)\left(\frac{x}{y} - b\right)\left(\frac{x}{y} - c\right) \ldots = o$$

und die ursprüngliche Gleichung ist dann in die Form

$$(x - ay)(x - by)(x - cy) \ldots = o$$

gebracht; sie repräsentirt also $n$ gerade Linien

$$x - ay = o, \; x - by = o \ldots,$$

welche nach der Form ihrer Gleichungen alle durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen.

So repräsentirt insbesondere die homogene Gleichung

$$x^2 - pxy + qy^2 = o$$

die zwei geraden Linien

$$x - ay = o, \; x - by = o,$$

wenn $a$ und $b$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - p\left(\frac{x}{y}\right) + q = o$$

sind.

In derselben Art erkennt man, dass die Gleichung

$$(x-a)^n - p(x-a)^{n-1}(y-b) + q(x-a)^{n-2}(y-b)^2 \ldots + t(y-b)^n = o$$

$n$ gerade Linien bezeichnet, welche durch den Punkt $x=a$, $y=b$ gehen.

*Aufg. 1.* Welcher Ort ist durch die Gleichung $xy = o$ dargestellt?

Die beiden Coordinatenachsen, weil der Gleichung durch jede der beiden Voraussetzungen $x = o$, $y = o$ genügt wird.

*Aufg. 2.* Welcher Ort ist durch $x^2 - y^2 = o$ dargestellt?

Die beiden Halbirungslinien der von den Coordinatenachsen gebildeten Winkel $x \pm y = o$. (Art. 43.)

*Aufg. 3.* Welches ist die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = o?$$

Sie repräsentirt die beiden geraden Linien

$$x - 2y = o, \; x - 3y = o$$

*Aufg. 4.* Welcher Ort wird dargestellt durch

$$x^2 - 2xy \cos\vartheta + y^2 = o?$$

$$x = y \tan(45^0 \pm \tfrac{1}{2}\vartheta).$$

*Aufg. 5.* Welche gerade Linien sind durch

$$x^2 - 2xy \tan\vartheta - y^2 = o$$

ausgedrückt?

*Aufg. 6.* Welche geraden Linien repräsentirt

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 = o?$$

75. Es ist nützlich, die drei Fälle näher zu untersuchen, welche die Auflösung der Gleichung

$$x^2 - pxy + qy^2 = o$$

darbietet; die Wurzeln derselben können reell und verschieden, reell und gleich und sie können imaginär sein.

Der erste Fall hat keinerlei Schwierigkeiten; $a$ und $b$ sind, wenn man rechtwinklige Coordinaten voraussetzt, die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Linien mit der Achse der $y$ bilden, $p$ ist daher die Summe dieser Tangenten und $q$ ist ihr Product.

Im zweiten Falle, wo $a = b$, bezeichnet man oft die Gleichung

$$x^2 - pxy + qy^2 = o$$

als die Repräsentantin einer einzigen geraden Linie

$$x - ay = o.$$

Aber es hat mancherlei Vorzüge, den Sprachgebrauch der Geometrie dem der Algebra völlig entsprechend zu machen und ebenso wie man nicht sagt, dass jene Gleichung nur eine Wurzel, sondern vielmehr, dass sie zwei gleiche Wurzeln habe, auch nicht zu sagen, dass sie nur eine gerade Linie, sondern dass sie zwei zusammenfallende gerade Linien darstelle.

Man denke drittens die beiden Wurzeln imaginär. In diesem Falle können keine reellen Coordinaten gefunden werden, die der Gleichung genügen, ausgenommen die Coordinaten des Ursprungs $x = o$, $y = o$; man sagt daher in diesem Falle wohl, dass die Gleichung keine geraden Linien repräsentire, sondern dass sie die Gleichung des Coordinatenanfangspunktes sei. Diese Ausdrucksweise ist offenbar verwerflich, denn wir sahen (Art. 14, 15), dass zur Bestimmung irgend eines Punktes zwei Gleichungen erforderlich sind und können nicht ausnahmsweise eine einzelne Gleichung als Gleichung eines Punktes anerkennen wollen. Wir sind überdies gewohnt, zu finden, dass zwei verschiedene Gleichungen auch immer zwei verschiedene geometrische Bedeutungen haben, hier aber müssten unzählig viele verschiedene Gleichungen alle denselben Punkt unterschiedslos bedeuten, denn es ist dann offenbar unwesentlich, welches die Werthe von $p$ und $q$ sind, sobald sie nur imaginäre Wurzelwerthe liefern, d. h. sobald $p^2 < 4q$ ist.

Deshalb ziehen wir vor, die Ausdrucksweise der analytischen Geometrie genau der Sprache der Algebra entsprechend zu machen; wie wir also nicht sagen, dass die Gleichung

$$x^2 - pxy + qy^2 = o$$

keine Wurzeln hat, wenn $p^2 < 4q$, sondern dass sie zwei imaginäre Wurzeln hat, so sagen wir auch nicht, dass sie in diesem Falle keine geraden Linien repräsensirt, sondern dass zwei imaginäre gerade Linien durch sie dargestellt werden.

Somit repräsentirt die Gleichung

$$x^2 - pxy + qy^2 = o,$$

welche stets auf die Form $(x - ay)(x - by) = o$ reducirt werden kann, in jedem Falle zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene gerade Linien; sie sind reell, wenn $a$ und $b$ reell sind, fallen zusammen, wenn $a$ und $b$ gleich sind und sind imaginär, wenn $a$ und $b$ imaginär sind.

Wenn es hier ohne grosse Bedeutung scheinen mag, welchen Sprachgebrauch wir annehmen, so werden wir im weiteren Fortschreiten doch vielfach erkennen, dass uns in vielen Fällen die Einfachheit und Strenge des Ausdrucks und manche wichtige Analogien verloren gehen müssten, wenn wir den hier empfohlenen Sprachgebrauch nicht annehmen.

Dieselben Bemerkungen gelten für die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o,$$

welche auf die Form

$$x^2 - pxy + qy^2 = o$$

einfach dadurch reducirt wird, dass man sie mit dem Coefficienten von $x^2$ dividirt; sie repräsentirt immer zwei durch den Coordinatenanfang gehende gerade Linien, welche reell sind, so lange $(B^2 - 4\,AC)$ positiv ist, zusammenfallen für $B^2 - 4\,AC = o$ und imaginär sind, wenn $(B^2 - 4\,AC)$ negativ ist.

Wir wenden endlich dieselbe Ausdrucksweise an, wenn wir gleiche oder imaginäre Wurzeln in der Auflösung der allgemeinen homogenen Gleichung des $n^{ten}$ Grades antreffen.

76. Den Winkel zu finden, welcher von den durch die Gleichung $\quad x^2 - pxy + qy^2 = o$ dargestellten geraden Linien gebildet wird.

Wenn die Gleichung auf die Form

$$(x - ay)(x - by) = o$$

gebracht ist, so ist nach Artikel 40 die trigonometrische Tangente des von ihnen gebildeten Winkels $\dfrac{a-b}{1+ab}$; aber das Product der Wurzeln der gegebenen Gleichung ist $= q$ und die Differenz derselben $\quad = \sqrt{(p^2 - 4q)}$,

man erhält somit für jene Tangente den Ausdruck

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{(p^2 - 4q)}}{1 + q}.$$

Ist die Gleichung in der Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$$

gegeben, so findet man ebenso

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A + C}$$

Zusatz. Die beiden geraden Linien schneiden sich rechtwinklig, d. h. $\tan \varphi$ wird unendlich gross, wenn $q = -1$ oder wenn $A + C = o$.

*Aufg.* Welches ist der Winkel zwischen den Linien, welche dargestellt sind durch

$$x^2 + xy - 6y^2 = o \quad ? \qquad 45^0.$$
$$x^2 - 2xy \sec \vartheta + y^2 = o \quad ? \qquad \vartheta.$$

Für schiefwinklige Achsen ergiebt sich auf dieselbe Weise zur Bestimmung des fraglichen Winkels die Formel

$$\tan \varphi = \frac{\sin \omega \,.\, \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A + C - B \cos \omega}.$$

77. Welches ist die Gleichung der Halbirungslinien des Winkels, den die durch die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$$

dargestellten geraden Linien mit einander bilden?

Sind $x - ay = o$ und $x - by = o$ die Gleichungen der geraden Linien, welche jene Gleichung repräsentirt und bezeichnet man durch $x - \mu y = o$ die Gleichung der Halbirungslinie ihres Winkels, so bestimmt sich die Grösse $\mu$ durch die einfache Bemerkung, dass sie die Tangente des Winkels ist, den die gesuchte Winkelhalbirungslinie mit der Achse der $y$ bildet und dass dieser Winkel der halben Summe der Winkel gleich ist, welche von jenen geraden Linien mit dieser Achse gebildet werden. Durch Vergleichung der Tangente des doppelten Winkels mit der Tangente der Summe zweier Winkel ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$\frac{2\mu}{1 - \mu^2} = \frac{a + b}{1 - ab}.$$

Nach der Theorie der Gleichungen ist aber

$$a + b = -\frac{B}{A} \text{ und } ab = \frac{C}{A},$$

somit $\dfrac{2\mu}{1 - \mu^2} = -\dfrac{B}{A - C}$ oder $\mu^2 - 2\dfrac{A - C}{B}\mu - 1 = o.$

Von den Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, welche zur Bestimmung von $\mu$ dient, ist die eine die Tangente des Winkels, den die innere Halbirungslinie des Winkels der beiden durch die Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$ gegebenen geraden Linien mit der Achse der $y$ bildet und die andre die Tangente des Winkels, den die äussere Halbirungslinie des nämlichen Winkels mit derselben Achse macht.

Indem wir in diese quadratische Bestimmungsgleichung für $\mu$ seinen Werth $\frac{x}{y}$ substituiren, erhalten wir die Gleichung beider Winkelhalbirungslinien

$$x^2 - 2\frac{A-C}{B}xy - y^2 = o.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt (Artikel 76), dass die beiden Halbirungslinien rechtwinklig zu einander sind.

Man kann diese Gleichung auch erhalten, indem man nach Artikel 43 für die beiden geraden Linien

$$x - ay = o,\ x - by = o$$

die Gleichungen der innern und äussern Winkelhalbirungslinien bildet, und diese mit einander multiplicirt; man erhält so

$$\frac{(x-ay)^2}{1+a^2} = \frac{(x-by)^2}{1+b^2}$$

und durch Beseitigung der Brüche und Substitution der in $A$, $B$, $C$ ausgedrückten Werthe von $ab$ und $(a+b)$ die oben gefundene Gleichung.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Wurzeln dieser Gleichung stets reell sind, selbst dann, wenn die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$ imaginär waren. Ein Paar von imaginären geraden Linien haben somit ein Paar reelle Winkelhalbirungslinien.

Es ist die Existenz solcher Beziehungen zwischen reellen und imaginären geraden Linien, welche die Betrachtung der letzteren besonders nützlich macht.

78. Die Bedingung zu finden, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt.

Wir schreiben die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

in der Form

$$Ax^2 + (By + D)x + (Cy^2 + Ey + F) = o.$$

Durch die Auflösung derselben für $x$ finden wir die Wurzeln

$$x = -\frac{By + D \pm \sqrt{[(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF]}}{2A}.$$

Dieser Werth von $x$ kann nicht auf die Form

$$x = my + n$$

reducirt werden, wenn nicht die Grösse unter dem Wurzelzeichen ein vollständiges Quadrat ist. Die Bedingung, unter welcher dies allein der Fall ist, wird bekanntlich ausgedrückt durch

$$(B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF) = (BD - 2AE)^2.$$

Die Ausführung der angedeuteten Operationen liefert nach einer Division durch 4 $A$

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = o$$

als die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt.

*Aufg. 1.* Repräsentirt die Gleichung

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = o$$

gerade Linien und welche?

Indem man wie im Vorhergehenden für $x$ auflöst, erhält man für die durch die Gleichung dargestellten geraden Linien die Gleichungen

$$x - y - 1 = o, \quad x - 4y + 2 = o.$$

*Aufg. 2.* Repräsentirt die Gleichung

$$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2)$$

gerade Linien und welche?

*Aufg. 3.* Welche gerade Linien sind durch die Gleichung

$$x^2 - xy + y^2 - x - y + 1 = o$$

dargestellt?

*Aufg. 4.* Man soll die Grösse $B$ so bestimmen, dass die Gleichung

$$x^2 + Bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = o$$

gerade Linien darstellt.

Indem man die Werthe der Coefficienten in die allgemeine Bedingungsgleichung substituirt, erhält man für $B$ die quadratische Gleichung $$6B^2 - 35B + 50 = o,$$
aus welcher für $B$ die Werthe $B' = \frac{10}{3}$, $B'' = \frac{5}{2}$ hervorgehen.

79. Die in dem vorigen Artikel angewendete Methode, obgleich die einfachste in dem Fall der Gleichung zweiten Grades, ist auf Gleichungen höherer Grade nicht anwendbar; wir geben daher in dem Folgenden noch eine andre Auflösung derselben Aufgabe.

Dieselbe verlangt, zu erkennen, ob die gegebene Gleichung des zweiten Grades mit dem Product der Gleichungen zweier geraden Linien

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha_1 x + \beta_1 y - 1) = o$$

identisch werden kann.

Wir schreiben hierzu die allgemeine Gleichung des zweiten Grades in der Form

$$\frac{A}{F}x^2 + \frac{B}{F}xy + \frac{C}{F}y^2 + \frac{D}{F}x + \frac{E}{F}y + 1 = o$$

und vergleichen die Coefficienten ihrer Glieder mit den entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung jenes Products; dadurch erhalten wir fünf Bedingungsgleichungen, von denen vier die Bestimmung der vier unbekannten Grössen $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$ liefern müssen. Durch die Substitution der erhaltenen Werthe in die fünfte Bedingungsgleichung finden wir die verlangte Bedingung.

Jene fünf Gleichungen sind

$$\alpha\alpha_1 = \frac{A}{F},\ \alpha + \alpha_1 = -\frac{D}{F},\ \beta\beta_1 = \frac{C}{F},\ \beta + \beta_1 = -\frac{E}{F},\ \alpha\beta_1 + \alpha_1\beta = \frac{B}{F}.$$

Die vier ersten liefern sofort zwei quadratische Gleichungen zur Bestimmung von $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$. Wir können dieselben auch durch die Bemerkung erhalten, dass diese vier Grössen die Reciproken der Abschnitte sind, welche durch die geraden Linien in den Coordinaten-Achsen gebildet werden und dass die von dem durch die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

dargestellten Orte in den Achsen gebildeten Abschnitte dadurch bestimmt werden, dass man in derselben nach einander $x = o$, $y = o$ setzt, wodurch sich ergeben

$$Ax^2 + Dx + F = o,\ Cy^2 + Ey + F = o.$$

Bezeichnen wir durch $L$, $L_1$, $M$, $M_1$ die vier so erhaltenen Durchschnittspunkte des bezeichneten Ortes mit den Achsen, so müssen, wenn derselbe aus geraden Linien zusammengesetzt ist, diese entweder das Paar

$LM$, $L_1M_1$ oder das Paar $LM_1$, $L_1M$

sein; die Gleichungen derselben sind

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha_1 x + \beta_1 y - 1) = o$$

und

$$(\alpha x + \beta_1 y - 1)(\alpha_1 x + \beta y - 1) = o$$

und die gleichmässige Berechtigung derselben lehrt, dass für $\frac{B}{F}$ nicht allein der oben gegebene Werth

$\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta$, sondern auch der andere $\alpha\beta + \alpha_1\beta_1$ gelten muss. Die Summe beider Grössen ist

$$= (\alpha + \alpha_1)(\beta + \beta_1) = \frac{DE}{F^2}$$

und ihr Product

$$\alpha\alpha_1(\beta^2 + \beta_1^2) + \beta\beta_1(\alpha^2 + \alpha_1^2) = \frac{A}{F} \cdot \frac{E^2 - 2CF}{F^2} + \frac{C}{F} \cdot \frac{D^2 - 2AF}{F^2},$$

und es ergiebt sich daher zur Bestimmung von $\frac{B}{F}$ die quadratische Gleichung

$$\frac{B^2}{F^2} - \frac{DE}{F^2} \cdot \frac{B}{F} + \frac{AE^2 + CD^2 - 4ACF}{F^3} = o,$$

welche, von Brüchen befreit, die im vorigen Artikel erhaltene Bedingungsgleichung wiedergiebt

*Aufgabe.* Man soll die Grösse $B$ so bestimmen, dass

$$x^2 + Bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = o$$

gerade Linien darstelle

Die Abschnitte in den Achsen sind durch die Gleichungen

$$x^2 - 5x + 6 = o, \; y^2 - 7y + 6 = o$$

gegeben, deren Wurzeln

$$x_1 = 2, \; x_2 = 3; \; y_1 = 1, \; y_2 = 6$$

sind.

Indem wir die Gleichungen der geraden Verbindungslinien der so gefundenen Punkte bilden, sehen wir, dass die Gleichung, wenn sie gerade Linien darstellt, entweder von der Form

$$(x + 2y - 2) \cdot (2x + y - 6) = o,$$

oder von der Form

$$(x + 3y - 3)(3x + y - 6) = o$$

sein muss. Daraus ergeben sich durch Ausführung der angedeuteten Multiplicationen die Werthe von $B$.

80. Man soll angeben, wie viele Bedingungsgleichungen erfüllt sein müssen, damit die allgemeine Gleichung des $n^{ten}$ Grades gerade Linien darstellt.

Die Zahl derselben wird durch das Verfahren des vorigen Artikels leicht erhalten; wir vergleichen die allgemeine Gleichung des $n^{ten}$ Grades, nachdem wir in ihr das absolute Glied der Einheit gleichgemacht haben, mit dem Product von $n$ linearen Gleichungen

$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha_1 x + \beta_1 y - 1)(\alpha_2 x + \beta_2 y - 1) \ldots = o.$$

Ist die Zahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung $= N$, so erhalten wir durch die Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten in ihr und in der Entwickelung dieses Productes $N - 1$ Gleichungen. Von denselben dienen $2n$ zur Bestimmung der $2n$ unbekannten Grössen, $\alpha, \alpha_1, \ldots \beta, \beta_1 \ldots$, und die so erhaltenen Werthe derselben liefern in die übriggebliebenen Gleichungen substituirt, $N - 1 - 2n$ Bedingungen.

Da aber die allgemeine Gleichung $n^{ten}$ Grades in der Form geschrieben werden kann:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad A \\ \qquad\qquad + Bx + Cy \\ \qquad + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ + Gx^3 + Hx^2y + Kxy^2 + Ly^3 \\ + \ldots \\ + \ldots \end{array}$$

so ist die Zahl ihrer Glieder die Summe der arithmetischen Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1)$,

also
$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}.$$

Daher ergiebt sich die Anzahl der nöthigen Bedingungen

$$N - 1 - 2n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

81. Es ist zu bestimmen, wie viele Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die allgemeine Gleichung des $n^{ten}$ Grades $n$ gerade Linien darstellt, deren jede durch einen gegebenen Punkt geht.

Wir vergleichen die allgemeine Gleichung mit der Entwickelung der Gleichung

$$[y - y_1 - m(x - x_1)][y - y_2 - m_1(x - x_2)] \ldots = o.$$

Diese Entwickelung enthält die $n$ unbekannten Grössen $m$, $m_1$, $m_2 \ldots$ und es bleiben demnach

$$N - 1 - n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

Bedingungen.

82. Welches ist die Zahl der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die allgemeine Gleichung $n^{ten}$ Grades $n$ gerade Linien repräsentirt, die alle durch denselben Punkt gehen?

Wir vergleichen die allgemeine Gleichung mit der Entwickelung von

$$[y - y_1 - m(x - x_1)]\,[y - y_1 - m_1(x - x_1)] \ldots\ldots = o.$$

Diese letztere enthält ausser den $n$ unbekannten Grössen $m$, $m_1$, $m_2$ ..... noch die zwei unbekannten $x_1$, $y_1$ und die Zahl der Bedingungen ist demnach

$$N - 1 - (n + 2) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} - 2.$$

## Sechstes Kapitel.

# Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung.

83. Die allgemeinste Form der Gleichung zweiten Grades ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o,$$

worin $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ Constanten sind.

Die Natur der durch diese Gleichung dargestellten Curven ist von den speciellen Werthverhältnissen der Constanten abhängig. Wie das vorige Kapitel gezeigt hat, in welchen Fällen sie zwei gerade Linien darstellt, so ist es die Aufgabe des gegenwärtigen Kapitels, die verschiedenen Curven zu classificiren, welche durch Gleichungen der angezeigten allgemeinen Form dargestellt werden können und einige der Eigenschaften zu entwickeln, welche ihnen allen gemeinsam sind*).

*) Wir werden später beweisen, dass der durch eine Ebene in einem Kegel über circularer Basis gemachte Schnitt eine Curve vom 2. Grade ist, und umgekehrt, dass es keine Curve des zweiten Grades giebt, welche nicht als ein Kegelschnitt betrachtet werden kann. Unter diesem Gesichtspunkte sind die Curven des zweiten Grades zuerst von den Geometern untersucht worden. Wir gedenken dieser Eigenschaften, weil wir es oft passend finden werden, die Bezeichnung „Kegelschnitt“ statt der längeren Benennung „Curve des zweiten Grades“ zu gebrauchen.

Fünf Relationen zwischen den Coefficienten sind hinreichend, eine Curve des zweiten Grades zu bestimmen. Zwar enthält die allgemeine Gleichung sechs Constanten, aber es ist offenbar, dass die Natur der Curve nicht von der absoluten Grösse dieser Coefficienten abhängt, weil die Gleichung, wenn wir sie mit irgend einer Constanten $n$ multipliciren oder dividiren, immer dieselbe Curve darstellt; wir können daher die Gleichung durch $F$ dividiren, um das absolute Glied $= 1$ zu machen und sie ist daher durch 5 Constante bestimmt.

So z. B. kann ein Kegelschnitt durch 5 Punkte beschrieben werden. Indem wir in die Gleichung die Coordinaten $x'$, $y'$ u. s. w. jedes Punktes substituiren, durch welchen die Curve gehen muss, erhalten wir fünf Relationen zwischen den Coefficienten, nämlich

$$\frac{A}{F}x'^2 + \frac{B}{F}x'y' + \frac{C}{F}y'^2 + \frac{D}{F}x' + \frac{E}{F}y' + 1 = o$$

u. s. w., welche zur Bestimmung der fünf Grössen $\frac{A}{F}$ u. s. w. genügen.

84. Weil wir in diesem Kapitel oft Gelegenheit haben, die Methode der Coordinatentransformation anzuwenden, so ist es nützlich, im voraus die Veränderungen anzuzeigen, welche die allgemeine Gleichung, durch die Transformation zu parallelen Achsen durch einen neuen Ursprung $x'$ $y'$ erfährt. Wir bilden die neue Gleichung, indem wir $x + x'$ für $x$, $y + y'$ für $y$ einsetzen (Art. 8) und erhalten

$$A(x+x')^2 + B(x+x')(y+y') + C(y+y')^2 + D(x+x') + E(y+y') + F = o.$$

Indem wir diese Gleichung nach den Potenzen der Veränderlichen ordnen, finden wir, dass die Coefficienten von $x^2$, $xy$, $y^2$ dieselben sind, wie vorher $A$, $B$, $C$; dass

das neue $D$ $\quad D' = 2Ax' + By' + D$,

das neue $E$ $\quad E' = 2Cy' + Bx' + E$,

das neue $F$ $\quad F_{,} = Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F$;

d. h. wenn die Gleichung einer Curve des zweiten Grades zu parallelen Achsen durch einen neuen Ursprung transformirt wird, so bleiben die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen ungeändert, während das neue absolute Glied das Resultat der

Substitution der Coordinaten des Ursprungs in die Original-Gleichung ist*).

. 85. Jede gerade Linie schneidet eine Curve zweiten Grades in zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten.

Wir betrachten zuerst den Fall von Linien, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Die Wahrheit des Satzes erhellt dann leicht durch Transformation zu Polarcoordinaten.

Wenn der Winkel zwischen den Achsen $\omega$ ist, so sehen wir (Art. 12), dass für eine Linie, die mit den Achsen die Winkel $\alpha$ und $\beta$ macht die Beziehungen gelten:

$$x \sin \omega = \rho \sin \alpha, \ y \sin \omega = \rho \sin \beta, \ .$$

oder wie wir zur Abkürzung schreiben wollen

$$x = m\rho, \ y = n\rho.$$

Indem wir diese Substitutionen in die allgemeine Gleichung vollziehen, erhalten wir zur Bestimmung der Länge des Radius vector für einen der Punkte, in welchen die durch die Gleichung $my = nx$ repräsentirte gerade Linie die Curve schneidet, die quadratische Gleichung $(Am^2 + Bmn + Cn^2)\rho^2 + (Dm + En)\rho + F = o.$

Weil diese Gleichung immer zwei Werthe für $\rho$ giebt, welche beide verschieden, gleich oder imaginär sein können, so schneidet jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende gerade Linie die Curve in zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten. Wir übertragen in dieser Ausdrucksweise ähnlich wie in Art. 75 die Bezeichnung imaginär von den Wurzeln der aufzulösenden Gleichung auf die Punkte, denen dieselben als Radien vectoren zugehören. Ein imaginärer Punkt besitzt daher stets mindestens eine imaginäre Coordinate und ist ein rein analytischer Begriff, für den wir keinerlei geometrische Darstellung versuchen. Die Vernachlässigung dieser imaginären Punkte würde jedoch zu einem eben so grossen Verluste von Allgemeinheit in unseren Entwicklungen und zu eben so vielfältigen Inconvenienzen in unserer Sprache führen, als wenn unter alleiniger Beachtung der reellen Wurzeln der Gleichungen die Wahrheit des Satzes geleugnet würde, dass jede Gleichung eben so viele Wurzeln besitzt, als ihr Grad Einheiten zählt.

*) Dies gilt ganz ebenso für Gleichungen von beliebigen Graden.

Der Fall der nicht durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden geraden Linie wird auf den vorigen zurückgeführt, indem man den letzteren Punkt nach irgend einem Punkte der Linie verlegt. Die Gleichung wird dann

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = o,$$

wo $D'$, $E'$, $F'$ die im letzten Artikel gefundenen Werthe haben, und die Entfernungen des neuen Anfangspunktes von den Punkten, in denen irgend eine durch ihn gezogene gerade Linie die Curve schneidet, sind die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Form mit der der vorhergehenden genau übereinstimmt.

86. Die nächsten Artikel beschäftigen sich mit einer Discussion der verschiedenen Formen, welche von der oben für $\varrho$ gefundenen quadratischen Gleichung angenommen werden, je nach den verschiedenen Werthen, welche wir dem Verhältniss $m:n$ geben können.

Der Leser wird die von uns befolgte Methode besser verstehen, wenn er sich der folgenden elementaren Principien erinnert. Setzen wir voraus, dass wir irgend eine quadratische Gleichung

$$a\varrho^2 + b\varrho + c = o$$

zu discutiren haben, so kann ihre Lösung in einer der folgenden äquivalenten Formen geschrieben werden;

$$\varrho = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{(b^2 - 4ac)}};$$

die letztere ist die Form, in welcher die Lösung erscheint, wenn wir die gegebene Gleichung durch $\varrho^2$ dividiren und sie für die Reciproke von $\varrho$ auflösen.

1.) Wenn wir $c = o$ haben, so ist die quadratische Gleichung durch $\varrho$ dividirbar und eine der Wurzeln ist $\varrho = o$, indess die andre ist $= -\frac{b}{a}$. Wenn wir nicht allein $c = o$, sondern auch $b = 0$ haben, so ist die quadratische Gleichung durch $\varrho^2$ dividirbar und ihre beiden Wurzeln sind gleich $o$.

2.) Wenn wir $a = o$ haben, so ist eine der Wurzeln der Gleichung $= \infty$; denn wenn wir die Gleichung schreiben

$$c\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + b\left(\frac{1}{\varrho}\right) + a = o,$$

so erhellt aus dem letzten Fall, dass, wenn $a = o$, die beiden

Wurzeln sind $\frac{1}{\varrho} = o$ und $\frac{1}{\varrho} = -\frac{b}{c}$, welchen Werthen entsprechen $\varrho = \infty$, $\varrho = -\frac{c}{b}$. Dasselbe erhellt auch, indem wir in der allgemeinen Form der Lösung $a = o$ machen. Wenn nicht allein $a = o$, sondern auch $b = o$ ist, so sind beide Wurzeln $= \infty$.

3.) Wenn $b = o$ ist, so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung gleich mit entgegengesetzten Zeichen.

4.) Wenn $b^2 = 4ac$ ist, sind die beiden Wurzeln gleich und wir können entweder schreiben $\varrho = -\frac{b}{2a}$ oder $= -\frac{2c}{b}$. Wenn $b^2 > 4ac$, so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung reell; wenn $b^2 < 4ac$, so sind die Wurzeln imaginär.

87. Wenden wir nun diese Principien auf die Gleichung an, welche die Punkte bestimmt, in denen die Linie $my = nx$ die Curve schneidet,

$$(Am^2 + Bmn + Cn^2)\,\varrho^2 + (Dm + En)\,\varrho + F = o.$$

1.) Sei $F = o$. In diesem Falle ist einer der Werthe von $\varrho = o$, oder der Coordinatenanfang ist einer der Punkte, in denen die Linie die Curve schneidet. Der andere Werth ist

$$\varrho = -\frac{Dm + En}{Am^2 + Bmn + Cn^2}.$$

Wenn wir dagegen nicht nur $F = o$ haben, sondern die Linie auch in einer solchen Richtung gezogen, dass $Dm + En = o$ ist, so wird der zweite Werth von $\varrho$ auch $= o$ und die Linie $my = nx$ schneidet die Curve im Anfangspunkt der Coordinaten in zwei zusammenfallenden Punkten.

Indem wir die Gleichung

$$Dm + En = o$$

mit $\varrho$ multipliciren und erinnern, dass $m\varrho = x$, $n\varrho = y$, finden wir die Gleichung der geraden Verbindungslinie der zwei unendlich nahen Schnittpunkte, nämlich

$$Dx + Ey = o.$$

Wir nennen die gerade Linie, welche zwei unendlich nahe Punkte mit einer Curve gemein hat, eine T a n g e n t e derselben und die Stelle der Curve, welche durch das Zusammenfallen beider Punkte bezeichnet wird, den B e r ü h r u n g s p u n k t derselben.

*Aufg. 1.* Finde die Gleichung der Tangente im Coordinatenanfangspunkt zu der Curve

$$5x^2 + 7xy + y^2 - x + 2y = o.$$

*Aufl.* $$x = 2y.$$

*Aufg. 2.* Der Punkt (1, 1) ist in der Curve

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0;$$

transformire die Gleichung zu parallelen Achsen durch diesen Punkt und finde die Gleichung der Tangente in ihm.

*Aufl.* Sie ist $9x - 5y = o$ bezogen zu den neuen Achsen und $9(x - 1) - 5(y - 1) = 0$ bezogen auf die alten.

88. Die Gleichung der Tangente in irgend einem Punkte $x'y'$ zu finden.

*a*) Wenn wir zu parallelen Achsen durch $x'y'$ transformiren, so verschwindet $F'$ (Art. 84) weil $x'y'$ in der Curve ist. Die Gleichung der Tangente ist dann $D'x + E'y = o$ in Bezug auf die neuen, oder
$$D'(x - x') + E'(y - y') = o$$
in Bezug auf die alten Achsen. Schreiben wir für $D'$ und $E'$ die in Art. 84 gefundenen Werthe, so ist die Gleichung der Tangente
$$(2Ax' + By' + D)(x - x') + (Bx' + 2Cy' + E)(y - y') = o,$$
welche in einfacherer Form geschrieben werden kann, indem man auf beiden Seiten die Identität
$$2Ax'^2 + 2Bx'y' + 2Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + 2F = o$$
addirt; man erhält so die Gleichung der Tangente
$$(2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = o.$$

*b*) Wir erhalten die nämliche Gleichung auch, indem wir einfach nach der gegebenen Definition der Tangente als der geraden Verbindungslinie zweier unendlich naher Punkte der Curve verfahren; die gerade Linie, welche zwei Punkte $x_1y_1$, $x_2y_2$ verbindet, hat die Gleichung
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Liegen diese Punkte in der durch die Gleichung
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$
bestimmten Curve, so gelten die Bedingungsgleichungen
$$Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = o$$
und
$$Ax_2^2 + Bx_2y_2 + C_2y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = o.$$

und es ergiebt sich daraus durch Subtraction

$$A(x_1^2 - x_2^2) + B(x_1 y_1 - x_2 y_2) + C(y_1^2 - y_2^2) + D(x_1 - x_2) + E(y_1 - y_2) = o,$$

wofür geschrieben werden kann

$$A(x_1^2 - x_2^2) + B[y_1(x_1 - x_2) + x_2(y_1 - y_2)] + C(y_1^2 - y_2^2) + D(x_1 - x_2) + E(y_1 - y_2) = o.$$

Durch Division mit $(x_1 - x_2)$ folgt hieraus

$$A(x_1 + x_2) + B\left[y_1 + x_2\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)\right] + C(y_1 + y_2)\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) + D + E\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) = o,$$

und indem wir diese Gleichung für $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ auflösen, erhalten wir

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{A(x_1 + x_2) + By_1 + D}{C(y_1 + y_2) + Bx_2 + E},$$

somit die Gleichung der Verbindungslinie der gewählten Curvenpunkte

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{A(x_1 + x_2) + By_1 + D}{C(y_1 + y_2) + Bx_2 + E}.$$

Fallen beide in einen einzigen zusammen, so dass $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, so entspringt daraus die Gleichung der Tangente

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{2Cy_1 + Bx_1 + E}$$

oder $(2Ax_1 + By_1 + D)(x - x_1) + (Bx_1 + 2Cy_1 + E)(y - y_1) = o$ wie vorher.

*Aufg.* Finde die Tangente in (2, 1) zu

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = o;$$

*Aufl.* $9x + 10y = 28$.

89. 2.) Betrachten wir nun den Fall, in welchem ein Werth von $\varrho$ unendlich werden kann.

Wir haben im Art. 86 gesehen, dass dies eintritt, wenn der Coefficient von $\varrho^2$ in der quadratischen Gleichung, welche $\varrho$ bestimmt, verschwindet, wenn

$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o.$$

Wenn daher $m:n$ so gewählt wird, um dieser Relation zu genügen, so schneidet die Linie $my = nx$ die Curve in einem unendlich entfernten Punkte; der andre Werth von $\varrho$ ist im Allgemeinen endlich, nämlich $\varrho = -\frac{F}{Dm + En}$.

Weil im Allgemeinen zwei Werthe von $m : n$ gefunden werden können, welche der Bedingung $Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$ genügen, so können durch den Coordinatenanfangspunkt zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre gerade Linien gezogen werden, welche die Curve in einer unendlichen Entfernung schneiden, und jede von diesen Linien schneidet die Curve nur noch in einem andern Punkt.

Wenn wir die Gleichung $Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$ mit $\varrho^2$ multipliciren und für $m\varrho$ und $n\varrho$ ihre Werthe $x$ und $y$ substituiren, so erhalten wir für die Gleichung dieser zwei Linien

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o.$$

Wir können durch Transformation der Coordinaten, wie in Artikel 85 zeigen, dass es für jeden beliebigen Punkt zwei gerade Linien giebt, welche von ihm aus so gezogen werden, dass sie die Curve erst in unendlicher Entfernung schneiden, und da in Artikel 84 gezeigt wurde, dass die Coefficienten $A, B, C$ durch Transformation ungeändert bleiben, so erhalten wir für jeden Punkt dieselbe quadratische Gleichung

$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$$

zur Bestimmung dieser geraden Linien.

Wenn also durch einen Punkt zwei reelle Linien gezogen werden können, die die Curve im Unendlichen schneiden, so wird dieselbe auch von den durch irgend einen andern Punkt zu ihnen gezogenen Parallellinien erst in unendlicher Entfernung geschnitten*).

90. Die wichtigste Frage, die wir betreffs der Form der durch irgend eine Gleichung dargestellten Curve thun können, ist, ob sie in jeder Richtung begrenzt ist, oder ob sie sich in irgend einer Richtung ins Unendliche erstreckt. Das Beispiel unbegrenzter Ausdehnung giebt der Fall, in welchem sie ein Paar gerade Linien darstellt. Es ist daher nothwendig, ein Kennzeichen zu finden, wodurch wir unterscheiden können, welcher Klasse von Oertern die durch irgend eine specielle Gleichung zweiten Grades dargestellte Curve angehört. Ein solches Kennzeichen ist uns aber durch den letzten Artikel geliefert. Denn wenn die Curve in jeder Rich-

*) Dies ist auch geometrisch evident, weil parallele Linien als durch denselben unendlich entfernten Punkt gehend betrachtet werden müssen.

tung begrenzt wäre, so kann kein durch den Ursprung gezogener Radius vector der Curve einen unendlichen Werth haben; wir fanden aber im letzten Artikel, dass wir, damit der Radius vector unendlich werde, haben müssen

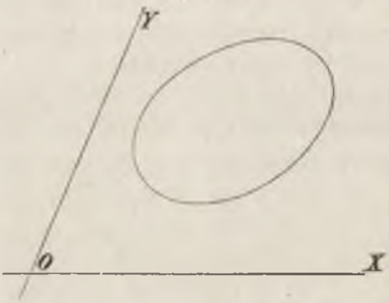
$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$$

1.) Wenn wir nun voraussetzen $B^2 - 4AC$ sei negativ, so sind die Wurzeln dieser Gleichung imaginär und es kann kein reeller Werth von $m:n$ gefunden werden, welcher der Bedingung

$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$$

genügt. In diesem Falle kann daher keine reelle gerade Linie gezogen werden, die die Curve im Unendlichen schneidet, und die Curve ist in jeder Richtung begrenzt. Wir werden im zehnten Kapitel zeigen, dass ihre Form die in der Figur dargestellte ist. Eine Curve dieser Klasse wird Ellipse genannt.

Fig. 37.




2.) Wenn $B^2 - 4AC$ positiv ist, so sind die Wurzeln der Gleichung

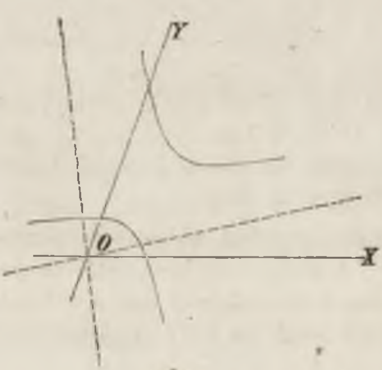
$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$$

reell und verschieden; folglich giebt es zwei reelle Werthe von $m:n$, welche den Radius vector des einen der Punkte unendlich machen, wo die Linie $my = nx$ die Curve schneidet.

Also können in diesem Falle zwei reelle gerade Linien durch den Ursprung gezogen werden, die die Curve im Unendlichen schneiden.

Eine Curve dieser Klasse wird eine Hyperbel genannt und wir zeigen im zehnten Kapitel, dass ihre Form die in der Figur dargestellte ist.

Fig. 38.

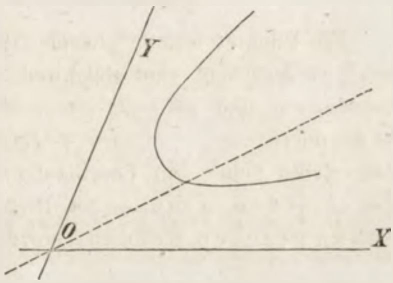


3.) Wenn $B^2 - 4AC = o$, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$Am^2 + Bmn + Cn^2 = o$$

reell und einander gleich und die zwei Richtungen, in welchen eine gerade Linie gezogen werden kann, die die Curve in unendlicher Entfernung schneidet, fallen zusammen. Eine Curve dieser Klasse wird eine Parabel genannt und wir zeigen im elften Kapitel, dass ihre Form die hier dargestellte ist.

Fig. 30.




91. Indem wir die eben vorgetragenen Principien auf Beispiele anwenden, zählen wir zunächst einige der wichtigsten Fälle auf, welche sich am häufigsten in denselben darbieten:

1.) Wenn $B = o$, so ist die Curve eine Ellipse, sobald $A$ und $C$ dasselbe Zeichen haben und sie ist eine Hyperbel, wenn sie entgegengesetzte Zeichen haben.

2.) Wenn entweder $A$ oder $C = o$ und $B$ nicht $= o$, so reducirt sich die Grösse $B^2 - 4AC$ auf $B^2$, welches wesentlich positiv ist und die Curve ist eine Hyperbel; in dem Falle wo $A = o$, ist die Achse der $x$ selbst eine von den Linien, welche die Curve im Unendlichen schneiden und ebenso in dem Falle $C = o$, die Achse der $y$; diese Linien sind im Allgemeinen durch die Gleichung gegeben $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$.

3.) Wenn entweder $A$ oder $C = o$ und zu gleicher Zeit $B = o$, so wird $B^2 - 4AC = o$ und die Curve ist eine Parabel.

4.) Im Allgemeinen ist die Curve eine Parabel, wenn die drei ersten Glieder ein vollkommenes Quadrat bilden.

*Aufg.* Bestimme die Gattung der durch folgende Gleichungen dargestellten Curven:

$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 7y - 4 = o.$ Ellipse.

$2x^2 + xy - y^2 + 3x + y = o.$ Hyperbel.

$x^2 - 2xy + y^2 - x - y - 1 = o.$ Parabel.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = o.$ Parabel.

92. 3.) Untersuchen wir nun zunächst den Fall, wo der Werth von $m:n$ so beschaffen ist, dass die quadratische Gleichung, (Art. 85) durch welche $\varrho$ bestimmt ist, gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen hat. Dies ist der Fall, wenn

$$Dm + En = o. \quad \text{(Art. 86.)}$$

Die Punkte, welche gleichen und entgegengesetzten Werthen von $\varrho$ entsprechen, sind gleichweit entfernt vom Anfangspunkt der Coordinaten und auf entgegengesetzten Seiten desselben. Daher ist die durch $$Dx + Ey = o$$ dargestellte Sehne im Coordinatenanfang halbirt. Also kann durch jeden gegebenen Punkt im Allgemeinen eine Sehne gezogen werden, welche in ihm halbirt wird.

93. Es giebt jedoch einen Fall, wo durch denselben Punkt mehr als eine Sehne gezogen werden kann, die in ihm halbirt wird.

Wenn in der allgemeinen Gleichung $D = o$, $E = o$ ist, so hat die Grösse $Dm + En$, welches immer der Werth von $m:n$ sein mag, den Werth Null und wir sehen, aus denselben Gründen wie vorher, dass in diesem Falle jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene Sehne in ihm halbirt wird.

Der Coordinatenanfangspunkt wird dann das Centrum der Curve genannt.

Wenn nun zwar für irgend einen willkürlich gewählten Coordinatenanfang die Grössen $D$ und $E$ nicht $= o$ sind, so sehen wir doch, dass wenn die Curve ein Centrum hat, die Grössen $D$ und $E$ verschwinden, sobald wir diesen Punkt zum Coordinatenanfang wählen; oder umgekehrt, dass wenn die Achsen zu irgend einem neuen Anfangspunkt so transformirt werden, dass die Coefficienten von $x$ und $y$ verschwinden, dieser neue Anfangspunkt der Coordinaten ein Centrum der Curve sein muss.

Um zu bestimmen, ob es möglich ist, durch Transformation der Coordinaten das neue $D$ und $E = o$ zu machen, benutzen wir die in Artikel 84 gegebenen Formeln für die einer Transformation entsprechenden Veränderungen der Constanten und finden, dass die Coordinaten des neuen Anfangspunktes die Bedingungen

$$2Ax' + By' + D = o \text{ und } 2Cy' + Bx' + E = o$$

erfüllen müssen.

Diese zwei Gleichungen sind hinreichend, $x'$ und $y'$ zu bestimmen und da sie linear sind, so kann ihnen nur durch je einen Werth von $x$ und $y$ genügt werden, also haben Kegelschnitte im Allgemeinen ein und nur ein Centrum.

Seine Coordinaten werden durch Auflösung dieser Gleichungen gefunden:

$$x = -\frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC}, \quad y = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC}.$$

In der Ellipse und Hyperbel ist die Grösse $B^2 - 4AC$ immer endlich (Artikel 90); aber in der Parabel ist

$$B^2 - 4AC = o$$

und die Coordinaten des Centrums werden demnach unendlich. Die Ellipse und Hyperbel sind deshalb wohl zusammen als Centralcurven bezeichnet worden, während die Parabel eine Curve ohne Centrum genannt worden ist.

Der Anfänger muss jedoch dabei sich erinnern, dass genau gesprochen, jede Curve des zweiten Grades ein Centrum hat, obgleich in dem Fall der Parabel dieses Centrum in einer unendlichen Entfernung gelegen ist.

94. Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen zu finden, die bei einer Curve des zweiten Grades einer gegebenen geraden Linie parallel sind.

Wir sahen (Artikel 92), dass eine Sehne durch den Anfangspunkt der Coordinaten $my = nx$ in ihm halbirt wird, wenn $Dm + En = o$ ist. Verlegen wir nun den Anfangspunkt nach irgend einem andern Punkte, so erhellt in derselben Art, dass eine zu jener parallele Sehne in dem neuen Anfangspunkt halbirt wird, wenn $m$ Einheiten des neuen $D$ mit $n$ Einheiten des neuen $E$ zusammen die Summe Null geben, oder (Artikel 83)

$$m(2Ax' + By' + D) + n(Bx' + 2Cy' + E) = o.$$

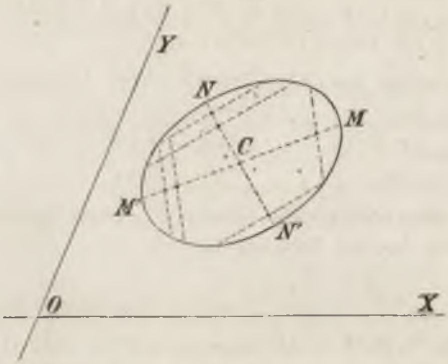
Diess ist daher eine Relation, welcher durch die Coordinaten des neuen Anfangspunktes genügt werden muss, wenn derselbe der Mittelpunkt einer zu $my = nx$ parallelen Sehne sein soll. Also muss der Mittelpunkt irgend einer zu ihr parallelen Sehne in der geraden Linie

$$m(2Ax + By + D) + n(Bx + 2Cy + E) = o$$

liegen und diese ist somit der verlangte geometrische Ort.

Jede gerade Linie, die ein System von parallelen Sehnen einer

Fig. 40.

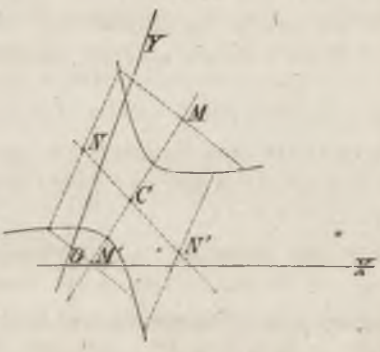



Curve halbirt, wird ein **Durchmesser** derselben genannt, und die Sehnen, welche er halbirt, heissen seine Ordinaten.

Die Form der Gleichung zeigt (Artikel 36), dass jeder Durchmesser durch den Durchschnitt der zwei geraden Linien gehen muss, welche die Gleichungen

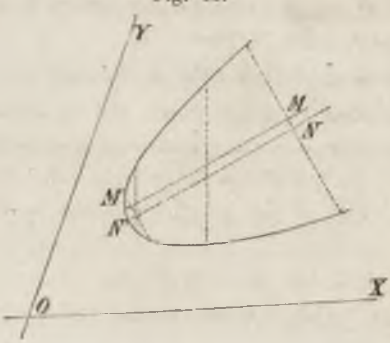
$$2Ax + By + D = o \text{ und } 2Cy + Bx + E = o$$

Fig. 41.




darstellen; dies aber sind die Gleichungen, durch welche wir in Artikel 93 die Coordinaten des Centrums bestimmten und wir erkennen, dass **jeder Durchmesser durch das Centrum der Curve geht.** Wenn also irgend ein Kegelschnitt gegeben ist, so können wir sein Centrum geometrisch finden; denn wenn wir irgend zwei parallele Sehnen ziehen und ihre Mittelpunkte verbinden, so haben wir einen

Fig. 42.




Durchmesser. In gleicher Art finden wir einen andern Durchmesser. Wenn diese zwei Durchmesser einander parallel sind, ist die Curve eine Parabel, wenn sie sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt das Centrum der Curve.

Weil $m(2Ax + By + D) + n(Bx + 2Cy + E) = o$ die Gleichung des Durchmessers ist, der die zu $my = nx$ parallelen Sehnen halbirt, so ergiebt sich durch die successiven Annahmen $m = o$ und $n = o$, dass

$$2Ax + By + D = o$$

die Gleichung des Durchmessers ist, der die zur Achse der $x$ parallelen Sehnen halbirt, und

$$2Cy + Bx + E = o$$

die Gleichung des Durchmessers, der die zur Achse der $y$ parallelen Sehnen halbirt.

In der Parabel ist $B^2 - 4AC = o$ oder $\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C}$ und es ist also die Linie $2Ax + By + D = o$ der Linie $2Cy + Bx + E = o$ parallel; folglich sind alle Durchmesser der Parabel parallel zu einander. Dies ist auch deshalb offenbar, weil wir gezeigt haben, dass alle Durchmesser eines Kegelschnittes durch das Centrum gehen müssen, welches im Fall der Parabel in unendlicher Entfernung ist, und weil parallele gerade Linien als solche betrachtet werden können, die sich in unendlicher Entfernung schneiden *).

95. **Die Durchmesser der Parabel haben dieselbe Richtung, wie die geraden Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden.**

Denn die Linien durch den Ursprung, welche die Curve in unendlicher Entfernung schneiden, sind (Art. 89) durch die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o,$$

oder indem wir für $B$ seinen Werth $\sqrt{(4AC)}$ schreiben,

$$(\sqrt{A}x + \sqrt{C}y)^2 = o$$

ausgedrückt. Aber die Durchmesser sind nach dem letzten Artikel parallel zu $2Ax + By = o$, welches wenn wir für $B$ denselben

*) Das vertraute Beispiel des Kreises reicht hin, dem Anfänger die Natur der Durchmesser der Curven zweiten Grades zu erläutern. Er muss nur bemerken, dass die Durchmesser nicht im Allgemeinen, wie im Fall des Kreises, ihre Ordinaten unter rechten Winkeln durchschneiden. In der Parabel z. B. wo die Richtung der Durchmesser unveränderlich ist, kann die der Ordinaten jede beliebige sein und der Winkel zwischen beiden jeden möglichen Werth annehmen.

Werth schreiben, sich auch auf $\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy} = o$ reducirt. Also schneidet jeder Durchmesser der Parabel die Curve in einem unendlich entfernten Punkte und kann daher nur einen endlichen Punkt mit ihr gemein haben.

96. **Wenn zwei Durchmesser eines Kegelschnittes so liegen, dass einer von ihnen alle zu dem andern parallele Sehnen halbirt, so halbirt auch der zweite alle Sehnen, welche dem ersten parallel sind.**

Die Gleichung des Durchmessers, welcher die zu $my = nx$ parallelen Sehnen halbirt, ist (Artikel 94)

$$(2Am + Bn)x + (Bm + 2Cn)y + Dm + En = o.$$

Wenn dieser dann zu $m'y = n'x$ parallel ist, so müssen wir haben

$$\frac{m'}{n'} = -\frac{Bm + 2Cn}{2Am + Bn},$$

oder

$$2Amm' + B(m'n + mn') + 2Cnn' = 0$$

Aber die Symmetrie dieser Gleichung in Bezug auf die Grössen $m$, $n$, $m'$, $n'$ zeigt, dass sie auch die Bedingung giebt, unter welcher die gerade Linie $my = nx$ zu dem Durchmesser parallel ist, der die Sehnen $m'y = n'x$ halbirt.

Zwei Durchmesser, die so aufeinander bezogen sind, dass jeder die zu dem andern parallelen Sehnen halbirt, heissen **conjugirte Durchmesser.**

Nur die Centralcurven können conjugirte Durchmesser haben, weil bei der Parabel die Richtung aller Durchmesser dieselbe ist. Ist in der allgemeinen Gleichung $B = o$, so sind die Achsen zu einem Paar conjugirter Durchmesser parallel.

Denn der Durchmesser, welcher die zur Achse der $x$ parallelen Sehnen halbirt, wird in diesem Falle $2Ax + D = 0$ und daher zur Achse der $y$ parallel; in gleicher Weise wird der Durchmesser, welcher die zur Achse der $y$ parallelen Sehnen halbirt, in diesem Falle $2Cy + E = o$ und daher zur Achse der $x$ parallel.

97. Wir haben bemerkt, dass die Ordinaten eines Durchmessers oder der ihm conjugirte Durchmesser im Allgemeinen nicht rechtwinklig zu ihm stehen und untersuchen daher jetzt die Frage, welchen Bedingungen ein Paar conjugirte Durchmesser genügen müssen, wenn sie sich rechtwinklig durchschneiden sollen.

Die Gleichung des zu $my = nx$ conjugirten Durchmessers ist nach dem vorigen Artikel

$$m(2Ax + By + D) + n(2Cy + Bx + E) = o.$$

Beide gerade Linien sind nach Art. 40 rechtwinklig zu einander, wenn $(2Am + Bn)n - (Bm + 2Cn)m = o,$

oder $$Bm^2 - 2(A - C)nm - Bn^2 = o.$$

Daraus entspringen für $\frac{m}{n}$ zwei bestimmte reelle Werthe und wenn wir die Bedingungsgleichung mit $\varrho$ multipliciren und $x$, $y$ für $m\varrho$, $n\varrho$ resp. einsetzen,

$$Bx^2 - 2(A - C)xy - By^2 = o,$$

welches nach Artikel 76 die Gleichung zweier reellen zu einander rechtwinkligen geraden Linien ist. In jeder Centralcurve existiren somit ein Paar conjugirte Durchmesser, welche rechtwinklig zu einander stehen. Wir nennen dieselben die Achsen der Curve und die Punkte, in denen sie die Curve schneiden, die Scheitel derselben. Die Entwickelungen des Artikel 77 zeigen überdies, dass die Gleichung der Achsen mit der Gleichung derjenigen beiden geraden Linien übereinstimmt, welche den innern und äussern Winkel zwischen den beiden durch die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$$

repräsentirten Geraden halbiren. Wir haben im Artikel 89 gesehen, dass jede dieser beiden geraden Linien die Curve in einem unendlich entfernten Punkte schneidet und überdies in einem Punkte in der Entfernung $$\varrho = -\frac{F}{Dm + En}$$

vom Anfangspunkt der Coordinaten. Ist dieser Anfangspunkt das Centrum der Curve, so sind (Artikel 93)

$$D = o, \quad E = o,$$

d. h. der Radius vector auch des zweiten, sonst in endlicher Entfernung gelegenen Schnittpunktes wird unendlich. Durch das Centrum der Curve können demnach zwei gerade Linien gezogen werden, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten in unendlicher Entfernung treffen und welche somit als Tangenten der Curve in den unendlich entfernten Punkten derselben betrachtet werden können. Sie werden die Asymptoten der

Curve genannt und sind reell im Falle der Hyperbel und imaginär im Falle der Ellipse. In jedem Falle ist die unendlich entfernte gerade Linie die Berührungssehne, welche diesen reellen oder imaginären Tangenten entspricht.

Nach dem Vorigen sind die Achsen der Curve diejenigen Durchmesser derselben, welche die von ihren Asymptoten gebildeten Winkel halbiren, und sie sind reell, gleichviel ob die Asymptoten reell oder imaginär sind.

Die Lage dieser Achsen lässt sich auch ebensogut durch die Berechnung des Winkels $\vartheta$ bestimmen, den eine von ihnen mit der Achse der $x$ einschliesst. Dazu gehen wir auf die Bedingungsgleichung

$$Bm^2 - 2(A - C)mn - Bn^2 = o$$

zurück und bemerken, dass für $m$ und $n$ respective $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ gesetzt werden dürfen; dadurch ergiebt sich zur Bestimmung des Winkels $\vartheta$ die Bedingungsgleichung

$$B\cos^2\vartheta - 2(A - C)\cos\vartheta\sin\vartheta - B\sin^2\vartheta = o,$$

und da dieselbe in

$$B\cos 2\vartheta - (A - C)\sin 2\vartheta = o$$

übergeht,

$$\tan 2\vartheta = \frac{B}{A - C}.$$

98. Dasselbe Ergebniss konnte auch durch Coordinatentransformation abgeleitet werden; denn es ist leicht zu zeigen, dass es stets möglich ist, die Gleichung zweiten Grades von einem Paar rechtwinkliger Achsen zu andern rechtwinkligen Achsen so zu transformiren, dass der Coefficient von $xy$ aus der Gleichung verschwindet. Dann aber sind nach Artikel 96 die Coordinatenachsen einem Paar conjugirter Durchmesser parallel und diese sind die Achsen der Curve.

Ist der Winkel, um welchen das neue Achsensystem gegen das alte gedreht wird, $\vartheta$, so wird die Transformation durch die Einführung von $x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$ für $x$ und von $x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$ für $y$ vollzogen und die Gleichung wird

$$\begin{gathered}A(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)^2 + B(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta)(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta) \\ + C(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)^2 + D(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta) \\ + E(x\sin\vartheta + y\cos\vartheta) + F = o.\end{gathered}$$

Durch Ordnung der Glieder erhalten wir zum Coefficienten von $x^2$ $$A' = A\cos^2\vartheta + B\cos\vartheta\sin\vartheta + C\sin^2\vartheta,$$
zum Coefficienten von $xy$
$$B' = 2C\sin\vartheta\cos\vartheta + B(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - 2A\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
und zu dem von $y^2$
$$C' = A\sin^2\vartheta - B\cos\vartheta\sin\vartheta + C\cos^2\vartheta.$$

Soll nun das Glied $Bxy$ nach der Transformation verschwinden, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung
$$2(C - A)\sin\vartheta\cos\vartheta + B(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) = o$$
zur Bestimmung von $\vartheta$ und daraus wie oben
$$\tan 2\vartheta = \frac{B}{A - C}.$$

Wenn $B = o$ und $A = C$ ist, so wird $\tan 2\vartheta = \frac{0}{0}$ und die Achsen der Curve sind unbestimmt, oder jeder Durchmesser ist rechtwinklig zu dem ihm conjugirten; die besondere Curve zweiten Grades, deren Gleichung dieser Bedingung genügt, ist der Kreis.

99. 4.) Betrachten wir nun zuletzt den Fall, wo die Gleichung, welche $\varrho$ bestimmt, gleiche Wurzeln hat. Wenn dies der Fall ist, so schneidet die Linie $my = nx$ die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten und berührt sie daher; die Gleichung (Art. 85)
$$(Am^2 + Bmn + Cn^2)\varrho^2 + (Dm + En)\varrho + F = o,$$
hat aber gleiche Wurzeln wenn
$$(Dm + En)^2 = 4F(Am^2 + Bmn + Cn^2).$$

Weil dies eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $m:n$ giebt, so sehen wir, dass durch den Ursprung stets zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre Tangenten gezogen werden können. Indem wir die eben gefundene Gleichung durch $\varrho^2$ multipliciren und für $m\varrho$ und $n\varrho$ $x$ und $y$ substituiren, erhalten wir die Gleichung des Paars der Tangenten durch den Anfangspunkt der Coordinaten
$$(D^2 - 4AF)x^2 + 2(DE - 2BF)xy + (E^2 - 4CF)y^2 = o.$$

Es ist nöthig, speciell den Fall zu bezeichnen, wo diese zwei Tangenten zusammenfallen. Wenn wir die Bedingung anwenden, dass die eben gefundene Gleichung gleiche Wurzeln haben soll, so erhalten wir

$$(D^2 - 4AF)(E^2 - 4CF) = (DE - 2BF)^2$$

oder $$4F(AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF) = o.$$

dies wird dann erfüllt, wenn $F = o$, d. h. wenn der Anfangspunkt der Curve angehört.

Es kann also irgend ein Punkt in der Curve als der Durchschnitt zweier zusammenfallenden Tangenten betrachtet werden, sowie jede Tangente als die Verbindungslinie zweier zusammenfallenden Punkte angesehen werden darf.

Die Gleichung hat aber auch gleiche Wurzeln, wenn

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = o.$$

Wir erhielten diese Gleichung im Artikel 78 als die Bedingung, unter welcher die Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien repräsentire. Um zu erklären, warum wir hier wieder auf diese Gleichung treffen, erinnern wir, dass unter einer Tangente überhaupt eine gerade Linie verstanden wird, welche die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; wenn sich daher die Curve auf zwei gerade Linien reducirt, so ist die einzige gerade Linie, welche den Ort in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden kann, die durch den Durchschnittspunkt dieser geraden Linien gezogene, und weil zu einer Curve zweiten Grades immer zwei Tangenten gezogen werden können, so müssen in diesem Falle beide Tangenten mit der Linie nach diesem Durchschnittspunkte zusammenfallen.

100. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche die Berührungspunkte der vom Ursprung aus gezogenen Tangenten verbindet.

Wir haben im letzten Artikel gesehen, dass, wenn $m':n'$ eine der Wurzeln von

$$(D^2 - 4AF)m^2 + 2(DE - 2BF)mn + (E^2 - 4CF)n^2 = o$$

ist, die gerade Linie $m'y = n'x$ die Curve berührt und ~~[illegible]~~ Dass alsdann die quadratische Gleichung

$$(Am'^2 + Bm'n' + Cn'^2)\varrho^2 + (Dm' + En')\varrho + F = o$$

gleiche Wurzeln hat.

Aber nach Artikel 86 ist der gemeinschaftliche Werth der gleichen Wurzeln einer Gleichung

$$a\varrho^2 + b\varrho + c = o$$

durch $-\dfrac{2c}{b}$ gegeben.

Der Werth des Radius vectors des Berührungspunktes ist daher

$$\varrho = -\frac{2F}{Dm' + En'},$$

oder es ist

$$Dm'\varrho + En'\varrho + 2F = o.$$

Die Coordinaten jedes Berührungspunktes genügen daher der Gleichung

$$Dx + Ey + 2F = o,$$

welche die Gleichung der geforderten Linie ist. Sie ist die Gleichung einer reellen Linie, gleichviel ob die Tangenten durch den Coordinatenanfangspunkt reell oder imaginär sind. Wir nennen sie die Polare des Coordinatenanfanges, und umgekehrt nennen wir den letztern den Pol dieser Linie. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten zugleich das Centrum der Curve ist, so reducirt sich die Gleichung seiner Polare auf die Form

$$F = o,$$

welche nach Artikel 65 die unendlich entfernte gerade Linie repräsentirt. Demnach ist das Centrum der Curve als der Pol der geraden Linie in Bezug auf dieselbe zu betrachten, welche ganz in unendlicher Entfernung liegt. Wir halten dies Ergebniss zu denen des Artikel 97, nach welchen die unendlich entfernte gerade Linie die Berührungssehne der reellen oder imaginären Tangenten ist, welche man vom Centrum aus an die Curve ziehen kann.

101. Die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x'y'$ zu finden. Wenn wir die Gleichung zu parallelen Achsen durch $x'y'$ transformiren, so ist die Polare des neuen Anfangspunktes

$$D'x + Ey + 2F' = o,$$

und indem wir zum alten Coordinatensystem zurückkehren, oder $x - x'$ für $x, y - y'$ für $y$ einführen,

$$D'(x - x') + E'(y - y') + 2F' = o.$$

Schreiben wir nun für $D'$, $E'$, $F'$ ihre Werthe (Artikel 84) und reduciren, wie in Artikel 88, so finden wir für die Gleichung der Polare

$$(2Ax'+By'+D)x+(Bx'+2Cy'+E)y+Dx'+Ey'+2F=o.$$

Aus der Vergleichung dieses Ergebnisses mit der in Artikel 88 gefundenen Gleichung sehen wir, dass die Polare irgend eines Punktes in der Curve die Tangente der Curve in diesem Punkte ist.

102. Die Polare des Anfangspunktes

$$Dx+Ey+2F=o$$

ist parallel zu derjenigen Sehne der Curve, welche im Anfangspunkt halbirt wird und die daher eine Ordinate des durch ihn gehenden Durchmessers der Curve ist. Also ist die Polare irgend eines Punktes parallel zu den Ordinaten des durch diesen Punkt gehenden Durchmessers.

Dies enthält als einen speciellen Fall den Satz: Die Tangente am Ende eines Durchmessers ist parallel zu den Ordinaten dieses Durchmessers. Im Fall der Centralcurven schliessen wir noch, weil die Ordinaten eines Durchmessers parallel zum conjugirten Durchmesser sind: Die Polare eines beliebigen Punktes in einem Durchmesser einer Centralcurve ist dem conjugirten Durchmesser parallel.

103. Wenn irgend ein Punkt $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ genommen wird, so muss seine Polare durch $x'y'$ gehen.

Denn die Bedingung unter welcher $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, ist (Artikel 99)

$$(2Ax'+By'+D)x''+(2Cy'+Bx'+E)y''+Dx'+Ey'+2F=o.$$

Aber diese kann geschrieben werden

$$(2Ax''+By''+D)x'+(2Cy''+Bx''+E)y'+Dx''+Ey''+2F=o$$

und ist daher auch die Bedingung, unter welcher $x'y'$ in der Polare von $x''y''$ liegt.

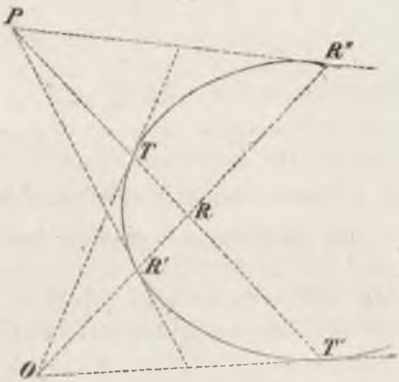
Die Form der Gleichung der Polare zeigt bereits an (Artikel 50), dass die Polare eines Punktes, welcher sich längs einer geraden Linie bewegt, sich um einen festen

Punkt dreht, nämlich (nach dem Vorigen) um den Pol der geraden Linie.

Das Theorem dieses Artikels kann auch so ausgesprochen werden: Der Durchschnitt irgend zweier geraden Linien ist der Pol der geraden Linie, die ihre Pole verbindet und umgekehrt: Die gerade Verbindungslinie irgend zweier Punkte ist die Polare des Durchschnittspunkts der Polaren dieser Punkte.

104. Wenn in einem durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogenen Radius vector das harmonische Mittel $OR$ zwischen den durch die Curve in ihm bestimmten Abschnitten genommen wird, so liegt $R$ in der Polare des Anfangspunktes.

Fig. 43.




Wir fanden (Art. 85), dass $OR'$, $OR''$ durch die quadratische Gleichung

$$(Am^2 + Bmn + Cn^2)\,\varrho^2 + (Dm + En)\,\varrho + F = o$$

bestimmt sind; daher ist nach der Theorie der Gleichungen

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OR'} + \frac{1}{OR''} = -\frac{Dm + En}{F}.$$

Um den Ort von $R$ zu finden, müssen wir für $m.\,OR$ und $n.\,OR$ resp. $x$ und $y$ schreiben und die Gleichung des Ortes ist somit

$$Dx + Ey + 2F = o,$$

d. h. die Gleichung der Polare des Anfangspunktes der Coordinaten. In jeder durch den Anfangspunkt gezogenen geraden Linie wird die zwischen den Durchschnittspunkten mit der Curve enthaltene Strecke durch ihn und seine Polare harmonisch getheilt.*)

*) Für die Aufzählung einiger speciellen in diesem Satze enthaltener Fälle verweisen wir den Leser auf den Abschnitt über die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

105. Wenn zwei Linien durch irgend einen Punkt gezogen werden und man verbindet die Punkte, wo sie eine Curve zweiten Grades schneiden, so begegnen sich die geraden Verbindungslinien in der Polare des Punktes.

Wir wählen die beiden geraden Linien zu Coordinatenachsen und bezeichnen die durch die Curve in ihnen bestimmten Abschnitte durch $a$, $a'$ für die Achse der $x$ und durch $b$, $b'$ für die Achse der $y$.

Alsdann sind

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = o \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = o$$

die Gleichungen der directen und

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b} - 1 = o \text{ und } \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} - 1 = o$$

die der transversalen Verbindungslinien.

Die Gleichung der geraden Linie, welche den Durchschnittspunkt des ersten Paares dieser Geraden mit dem Durchschnittspunkt des zweiten Paares derselben verbindet, ist somit (Art. 36)

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} + \frac{y}{b'} - 2 = o.$$

Ist aber

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

die Gleichung der Curve, so sind $a$ und $a'$ aus der Gleichung

$$Ax^2 + Dx + F = o$$

und $b$ und $b'$ aus der Gleichung

$$Cy^2 + Ey + F = o$$

bestimmt; es ist somit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{D}{F} \text{ und } \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = -\frac{E}{F},$$

oder die Gleichung jener Verbindungslinien

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) - 2 = o$$

wird $-\frac{D}{F}x - \frac{E}{F}y - 2 = o$ oder $Dx + Ey + 2F = o$,

welches die Gleichung der Polare des Anfangspunktes ist.

Wenn die Curve zweiten Grades als ein Paar gerade Linien erscheint, so geht als ein specieller Fall dieses Satzes das in der Aufgabe 7 Artikel 48 enthaltene Ergebniss hervor.

Die Tangenten, welche in den Durchschnittspunkten zweier geraden Linien mit einer Curve zweiten Grades an dieselbe gezogen werden, schneiden sich in der Polare des Durchschnittspunkts jener Geraden.

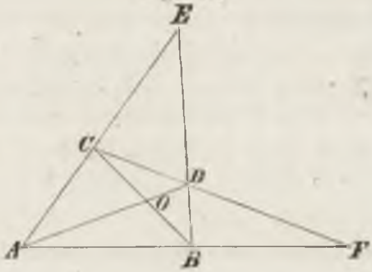
Dies ist ein specieller Fall des vorigen Satzes, nämlich der, wo die beiden Linien als zusammenfallend vorausgesetzt sind; er folgt auch unmittelbar aus Artikel 101, weil der Pol irgend einer durch den Punkt $(O)$ gezogenen Sehne in der Polare des Punktes $(TT)$ liegen muss; und unter dem Pol einer geraden Linie der Durchschnittspunkt der Tangenten in den Punkten der Curve verstanden ward, wo dieselbe von der geraden Linie geschnitten wird. Nach dieser Eigenschaft kann die Polare eines Punktes als der geometrische Ort definirt werden, welchem die Durchschnittspunkte der Tangenten in den Endpunkten der durch ihn gezogenen Sehnen angehören. Diese Definition ist ebensowohl brauchbar, wenn der Punkt innerhalb, als wenn er ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

106. Wenn durch einen Punkt $O$ (Fig. 43) eine gerade Linie $OR$ willkürlich gezogen und der Pol der Linie $P$ mit $O$ durch ein Gerade verbunden wird, so bilden die Linien $OP$, $OR$ mit den von $O$ aus an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten ein harmonisches Büschel.

Denn da $OR$ die Polare von $P$ ist, so ist $TT'$ in $T$ und $R$ harmonisch geschnitten und somit bilden die Linien $OP$, $OT$, $OR$, $OT'$ ein harmonisches Büschel.

*Aufg. 1.* Wenn ein Viereck $ABCD$ einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so ist jeder der Punkte $E$, $F$, $O$ der Pol der geraden Linie, welche die beiden andern verbindet.

Fig. 44.




Weil $EC$ und $ED$ zwei durch den Punkt $E$ gezogene Linien sind und $CD$, $AB$ ein Paar der Verbindungslinien der Punkte, wo sie den Kegelschnitt schneiden, so müssen sich diese Linien in der Polare von $E$ durchschneiden; so auch $AD$ und $CB$; daher ist die Linie $OF$ die Polare von $E$. In derselben Art wird bewiesen, dass $EF$ die Polare von $O$ und $EO$ die Polare von $F$ ist.

*Aufg.* 2. Von einem ausserhalb gelegenen Punkt an einen Kegelschnitt eine Tangente mit Hülfe des Lineals allein zu ziehen. Man zieht irgend zwei gerade Linien durch den gegebenen Punkt $E$ und vervollständigt das Viereck, welches ihre Durchschnittspunkte mit der Curve bilden, wie in der Figur; dann schneidet die Linie $OF$ den Kegelschnitt in zwei Punkten, welche mit $E$ verbunden, die zwei verlangten Tangenten sind.

*Aufg.* 3. Wenn ein Viereck einem Kegelschnitt umschrieben ist, so ist jede Diagonale die Polare des Durchschnittspunktes der beiden andern.

Wir beweisen diesen Satz, wie wir auch den in der Aufgabe 1.) enthaltenen hätten beweisen können, mittels der harmonischen Eigenschaften des Vierecks. Es ist gezeigt worden, dass $EA$, $EO$, $EB$, $EF$ ein harmonisches Büchel bilden. (Art. 60, Aufg. 1.) Weil also $EA$, $EB$ nach der Voraussetzung zwei Tangenten eines Kegelschnitts sind und $EF$ eine gerade Linie durch ihren Durchschnittspunkt, so muss nach Art. 104 $EO$ auch durch den Pol von $EF$ gehen; aus demselben Grunde $FO$ durch den Pol von $EF$; $O$ muss daher dieser Pol sein.

107. Das Theorem des Artikels 102 kann auch durch ein Verfahren bewiesen werden, welches aus dem in Artikel 38 angewendeten hervorgeht. Wir können das Verhältniss suchen, in welchem die Verbindungslinie zweier Punkte durch die Curve geschnitten wird. Nach Artikel 7 hat jeder Punkt in der geraden Verbindungslinie zweier Punkte $x'y'$ und $x''y''$, welchem das Theilungsverhältniss $l:m$ entspricht, die Coordinaten

$$\frac{lx'' + mx'}{l + m},\ \frac{ly'' + ly'}{l + m};$$

wenn diese Werthe für $x$ und $y$ in die Gleichung der Curve eingesetzt werden, so ergiebt sich zur Bestimmung des Theilungsverhältnisses, in welchem die Verbindungslinie der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ durch die Curve geschnitten wird, die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} &l^2(Ax''^2 + Bx''y'' + Cy''^2 + Dx'' + Ey'' + F) \\ &+ lm[(2Ax'' + By'' + D)x' + (Bx'' + 2Cy'' + E)y' + Dx'' + Ey'' + 2F] \\ &+ m^2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F) = o. \end{aligned}$$

Wenn nun $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, so verschwindet der Coefficient von $lm$, die Wurzeln der Gleichung sind von der Form $l = \pm \mu m$ und die Verbindungslinie der Punkte $x'y'$ und $x''y''$ wird durch die Curve harmonisch getheilt.

Dieselbe Gleichung erlaubt uns, die Gleichung der beiden Tangenten zu bilden, welche man von irgend einem Punkte aus an die Curve ziehen kann. Denn wenn $x''y''$ in einer der Tangenten durch $x'y'$ liegt, so muss die Gleichung für $l:m$ gleiche Wurzeln haben und $x''y''$ muss daher der Gleichung genügen:

$$4(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F)(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F) = [(2Ax' + By' + D)x + (Bx' + 2Cy' + E)y + Dx' + Ey' + 2F]^2.$$

108. **Wenn durch irgend einen Punkt $O$ zwei Sehnen gezogen werden, die die Curve in den Punkten $R', R''$; $S', S''$ schneiden, so ist das Verhältniss $\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''}$ der Rechtecke aus den durch die Curve gebildeten Abschnitten dieser Sehnen für jede Lage des Punktes $O$ das nämliche, sobald die Richtung der Sehnen $OR$, $OS$ dieselbe bleibt.**

Denn aus der zur Bestimmung von $\varrho$ in Artikel 85 gegebenen Gleichung folgt,

$$OR'.OR'' = \frac{F}{Am^2 + Bmn + Cn^2}.$$

In gleicher Art ist

$$OS'.OS'' = \frac{F}{Am'^2 + Bm'n' + Cn'^2},$$

also

$$\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''} = \frac{Am'^2 + Bm'n' + Cn'^2}{Am^2 + Bmn + Cn^2}.$$

Da aber die Coefficienten $A, B, C$ in der allgemeinen Gleichung unverändert bleiben, wenn die Achsen nach einem neuen Anfangspunkt verlegt werden (Artikel 84) und die Grössen $m, n, m', n'$ nur von den Winkeln abhängen, welche die Radien vectoren mit den Achsen bilden und somit constant sind, solange diese ihre Richtung beibehalten, so ist die Unveränderlichkeit des Verhältnisses $\frac{OR'.OR''}{OS'.OS''}$ unter den ausgesprochenen Voraussetzungen bewiesen.

Der Satz dieses Artikels kann auch so ausgesprochen werden: **Wenn durch zwei feste Punkte $O$ und $O'$ irgend** zwei parallele Linien $OR$ und $O'\varrho$ gezogen werden, so ist das Verhältniss der Rechtecke $\frac{OR'.OR''}{O'\varrho'.O'\varrho''}$ constant, welches auch die Richtung dieser Linien sei.

Denn diese Rechtecke sind

$$\frac{F}{Am^2+Bmn+Cn^2} \text{ und } \frac{F'}{Am^2+Bmn+Cn^2},$$

wenn $F'$ der Werth ist, welchen das absolute Glied der allgemeinen Gleichung annimmt, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten von $O$ nach $O'$ verlegt.

Das Verhältniss dieser Rechtecke ist daher $= \frac{F}{F'}$, und daher vom $m$ und $n$ unabhängig. Dieser Satz ist die Verallgemeinerung der Sätze 35, 36 im 3. Buch des Euklid.

109. Das Theorem des vorigen Artikels schliesst verschiedene specielle Fälle ein, welche getrennt anzuzeigen nützlich ist.

I. Ist $O'$ das Centrum der Curve, so ist $O'\varrho' = O'\varrho''$ und die Grösse $O'\varrho'.O'\varrho''$ wird das Quadrat des zu $OR'$ parallelen Halbdurchmessers. Also verhalten sich die Rechtecke aus den Abschnitten zweier sich schneidender Sehnen, zu einander, wie die Quadrate der zu diesen Sehnen parallelen Durchmesser.

II. Wäre die Linie $OR$ eine Tangente, so ist $OR' = OR''$ und die Grösse $OR'.OR''$ wird das Quadrat der Tangente; und weil zwei Tangenten durch den Punkt $O$ gezogen werden können, so können wir aus dem eben gefundenen Verhältniss die Quadratwurzel ausziehen und schliessen, dass die Längen zweier durch einen Punkt gezogenen Tangenten sich zu einander verhalten, wie die der Durchmesser, zu welchen sie parallel sind.

III. Sei die Linie $OO'$ ein Durchmesser und $OR$, $O'\varrho$ parallel zu seinen Ordinaten, so ist $OR' = OR''$ und $O'\varrho' = O'\varrho''$. Schneide der Durchmesser die Curve in den Punkten $A$, $B$ so ist

$$\frac{OR^2}{AO.OB} = \frac{O'\varrho^2}{AO'.O'B},$$

d. h., die Quadrate der Ordinaten irgend eines Durchmessers sind den Rechtecken über den Segmenten proportional, welche sie im Durchmesser bestimmen.

110. Es giebt aber einen Fall, in welchem der Satz des Artikels 108 nicht länger gültig bleibt, nämlich, wenn die Linie $OS$ parallel zu einer von den Linien ist, die die Curve im Unendlichen schneiden. Das Segment $OS'$ ist dann unendlich und $OS$ schneidet die Curve nur in einem endlichen Punkt. Wir prüfen im gegenwärtigen Artikel die naheliegende Vermuthung, ob in diesem Falle das Verhältniss $\frac{OS'}{OR'.OR''}$ constant ist. Nehmen wir zur grössern Einfachheit die Linie $OS$ zur Achse der $x$ und die Linie $OR$ zur Achse der $y$. Weil die Achse der $x$ parallel zu einer der Linien ist, die die Curve im Unendlichen schneiden, so ist $A = o$ (Artikel 91. 2.) und die Gleichung der Curve demnach von der Form

$$Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o.$$

Indem wir $y = o$ machen, wird der Abschnitt in der Achse der $x$ gefunden $OS' = -\frac{F}{D}$ und indem wir $x = o$ machen, das Rechteck unter den Abschnitten in der Achse der $y = \frac{F}{C}$. Also $\frac{OS'}{OR'.OR''} = -\frac{C}{D}$. Wenn wir nun die Achse zu irgend andern parallelen Achsen transformiren, (Artikel 84) so bleibt $C$ unverändert und das neue $D$ wird $= By' + D$. Also verändert sich jenes Verhältniss $-\frac{C}{D}$ in $-\frac{C}{By' + D}$. Wenn die Curve aber eine Parabel ist, so ist $B = o$ und das Verhältniss ist constant; d. h. wenn in einer Parabel eine gerade Linie irgend einen Durchmesser schneidet, so ist das Rechteck unter den in ihr bestimmten Segmenten zu dem durch sie im Durchmesser gebildeten Abschnitt in constantem Verhältniss, solange ihre Richtung dieselbe bleibt.

Wenn die Curve eine Hyperbel ist, so ist das Verhältniss nur constant, solange $y'$ constant ist. Also sind die durch zwei parallele Sehnen einer Hyperbel in einer Parallelen zu einer Asymptote gebildeten Abschnitte proportional den Rechtecken unter den Segmenten der Sehnen.

111. Die Bedingung zu finden, unter welcher die gerade Linie $ax + by + c = o$ den durch die allgemeine Gleichung dargestellten Kegelschnitt berührt. Indem wir für $y$ aus $ax + by + c = o$ auflösen und in die allgemeine

Gleichung einsetzen, finden wir die Abscissen der Punkte, wo diese Linie den Kegelschnitt schneidet, durch die quadratische Gleichung bestimmt

$$(Ab^2 - Bab + Ca^2)x^2 + (Bbc - 2Cac - Db^2 + Eab)x$$
$$+ Cc^2 - Ebc + Fb^2 = o.$$

Wenn die gerade Linie den Kegelschnitt berührt, so muss diese quadratische Gleichung gleiche Wurzeln haben, oder die Bedingung

$$(Bbc - 2Cac - Db^2 + Eab)^2 = 4(Ab^2 - Bab + Ca^2)(Cc^2 - Ebc + Fb^2)$$

erfüllt sein. Indem wir ausmultipliciren wird diese Gleichung durch $b^2$ dividirbar und kann geordnet werden, wie folgt:

$$(E^2 - 4CF)a^2 + (D^2 - 4AF)b^2 + (B^2 - 4AC)c^2 + 2(2AE - BD)bc$$
$$+ 2(2CD - BE)ca + 2(2BF - DE)ab = o.$$

## Verschiedene Aufgaben.

*Aufg. 1.* Die Gleichung des Kegelschnitts zu finden, welcher die Abschnitte $a$, $a'$, $b$, $b'$ in den Achsen bildet.

Die Abschnitte in den Achsen sind durch die quadratischen Gleichungen gegeben

$$x^2 - (a + a')x + aa' = o, \quad y^2 - (b + b')y + bb' = o.$$

Diese sind aber das, was die allgemeine Gleichung wird, wenn man darin $y = o$, $x = o$ macht, es ist also diese Gleichung

$$bb'x^2 + Bxy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = o$$

wo $B$ unbestimmt bleibt.

*Aufg. 2.* Die Gleichung der Parabel zu finden, welche die Achsen in den Punkten $x = a$, $y = b$ berührt.

Wir setzen im Vorigen $a = a'$, $b = b'$ und bestimmen $B$ durch die Bedingung $B^2 = 4AC$, so finden wir

$$b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 - 2b^2ax - 2a^2by + a^2b^2 = o.$$

Wir geben dem Coefficienten von $xy$ das Zeichen —, weil, wenn wir ihm das Zeichen + beilegten, die Gleichung keine Parabel, sondern zwei zusammenfallende gerade Linien $bx + ay - ab = o$ repräsentirte.

*Aufg. 3.* Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so geht die Polare eines festen Punktes durch einen festen Punkt.

Nehmen wir zwei Gegenseiten des durch die Punkte gebildeten Vierecks zu Achsen, bilden dann nach Art. 99 die Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ in Bezug auf den in Aufg. 1 gefundenen Kegelschnitt, so enthält dieselbe die unbestimmte Grösse $B$ im ersten Grad und geht daher immer durch einen festen Punkt.

Wenn vier dieser Kegelschnitte betrachtet werden, so kann man aus den Gleichungen der vier Polaren, welche dem gewählten Punkte in Bezug auf dieselben entsprechen, das Doppelschnittverhältniss des von ihnen gebildeten Büschels ableiten. Man findet es unabhängig von den Coordinaten dieses Punktes. Man darf darnach von dem Doppelschnittsverhältniss von vier Kegelschnitten sprechen, sofern sie durch dieselben vier Punkte gehen.

*Aufg. 1.* Finde den Ort des Centrums eines Kegelschnitts, der durch vier gegebene Punkte geht.

Das Centrum des Kegelschnitts in Beisp. 1 ist durch die Gleichungen gegeben

$$2bb'x + By - (a + a')bb' = o, \quad 2aa'y + Bx - aa'(b + b') = o.$$

Eliminiren wir $B$, so ist der Ort

$$2bb'x^2 - 2aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y = o$$

ein Kegelschnitt, welcher durch den Durchschnittspunkt jedes der 3 Linienpaare geht, welche durch die vier Punkte gezogen werden, und durch die Mittelpunkte dieser Linien.

---

## Siebentes Kapitel.

## Der Kreis.

---

112. Wir haben im Artikel 98 den Kreis als diejenige Curve zweiten Grades bezeichnet, in welcher jeder Durchmesser auf seinem conjugirten rechtwinklig ist, und die Coefficientengleichheit $A = C$ als die analytische Bedingung dieser Eigenthümlichkeit erkannt. In Folge dessen ist seine allgemeine Gleichung unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = o.$$

Für rechtwinklige Achsen, als welche zu einem Paare conjugirter Durchmesser parallel sind, verschwindet das Glied $Bxy$ und die allgemeine Gleichung geht über in

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = o.$$

Wählen wir endlich das Centrum der Curve zum Anfangspunkt der Coordinaten, so verschwinden die Glieder $Dx$ und $Ey$, und die allgemeine Gleichung reducirt sich auf

$$Ax^2 + Ay^2 + F_1 = o,$$

oder

$$x^2 + y^2 = -\frac{F_1}{A}.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass das Centrum des Kreises nicht allein der Halbirungspunkt aller durch dasselbe gezogenen Sehnen des Kreises ist, sondern **dass alle Punkte des Kreises vom Centrum gleichweit entfernt sind**, denn $x^2 + y^2$ ist das Quadrat der Entfernung eines beliebigen Punktes $xy$ der Curve vom Coordinatenanfang und der Werth derselben ist einer Constanten gleich. Diese geradlinige Entfernung aller Punkte der Kreislinie vom Centrum heisst der Radius des Kreises und soll in den folgenden Entwicklungen stets durch $r$ bezeichnet werden.

113. **Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Centrum der Punkt $ab$ und dessen Radius $r$ ist.**

Indem wir ausdrücken, dass die Entfernung eines beliebigen Punktes $(x, y)$ der Curve vom Centrum dem Radius gleich ist, erhalten wir für rechtwinklige Coordinaten:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

und für schiefwinklige

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\omega = r^2$$

als Gleichung des Kreises.*)

Daraus ergiebt sich als Gleichung eines Kreises, dessen Centrum der Anfangspunkt der Coordinaten ist

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ist die Achse der $x$ ein Durchmesser des Kreises und die Achse der $y$ die in einem seiner Endpunkte auf ihm errichtete Senkrechte, so geht die allgemeine Gleichung durch die Substitution $a = r$, $b = o$ in

$$x^2 + y^2 = 2rx$$

über.

Diese einfachsten Formen der Kreisgleichung kommen in den Anwendungen am häufigsten vor.

Durch Vergleichung der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit den allgemeinen Formen der Kreisgleichung erhalten

---

*) Da von schiefwinkligen Achsen in der Theorie des Kreises selten Gebrauch zu machen ist, so werden wir im Folgenden zumeist nur die Gleichung für rechtwinklige Achsen berücksichtigen.

wir die Bedingungen, unter welchen jene einen Kreis repräsentirt, wie folgt. Für rechtwinklige Coordinaten

$$B = o, \ A = C,$$

und für schiefwinklige Coordinaten

$$\frac{B}{A} = 2\cos\omega, \ A = C.$$

Die Coefficienten der allgemeinen Gleichung sind im erstern Falle mit den Mittelpunktscoordinaten und dem Radius des Kreises verbunden wie folgt:

$$\frac{D}{A} = -2a, \ \frac{E}{A} = -2b, \ \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2,$$

und diese letzteren bestimmen sich somit aus den Coefficienten der allgemeinen Gleichung durch die Formeln

$$a = -\frac{D}{2A}, \ b = -\frac{E}{2A}, \ r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Die allgemeine Gleichung kann in der Form

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

geschrieben werden, in welcher die Mittelpunktscoordinaten und der Halbmesser des Kreises direct erkennbar sind.

Um sie zu erhalten, hat man die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ gleich Eins zu machen, $F$ zu transponiren und die Quadrate zu vervollständigen, indem man auf beiden Seiten die Quadrate der halben Coefficienten von $x$ und $y$ addirt.

Da die Werthe der Mittelpunktscoordinaten von $F$ unabhängig sind, so lernen wir, dass Kreise concentrisch sind, wenn ihre Gleichungen nur im constanten Glied von einander abweichen.

*Aufg. 1.* Finde die Mittelpunktscoordinaten und den Halbmesser des Kreises $x^2 + y^2 - 5x - 4y = 7.$

*Aufl.* $$\left(\frac{5}{2}, 2\right), \ \frac{\sqrt{69}}{2}.$$

*Aufg. 2.* Reducire $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20$ auf die Form des Art. 113.

*Aufl.* $$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2.$$

*Aufg. 3.* Finde die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kreise

$$x^2 + y^2 = 2y, \ x^2 + y^2 = 2x.$$

*Aufl.* $$x + y = 1.$$

114. Wir betrachten in diesem Artikel die Wirkungen einiger besondern Voraussetzungen in der allgemeinen Gleichung.

1.) Wenn $F = o$, so ist der Anfangspunkt der Coordinaten in der Curve; denn dann wird der Gleichung durch die Werthe $x = o, y = o$ genügt, d. h. durch die Coordinaten des Anfangspunktes. Derselbe Grund beweisst allgemein den Satz: Wenn einer Gleichung beliebigen Grades das absolute Glied fehlt, so geht die durch sie dargestellte Curve durch den Coordinatenanfangspunkt.

2.) Wenn $D^2 + E^2 = 4AF$, so erhellt aus Artikel 113, dass der Radius des Kreises verschwindet, und dass die Gleichung auf die Form

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = o$$

reducirt werden kann. Es ist klar, dass dieser Gleichung einzig und allein durch die Coordinaten des Punktes $x = a$, $y = b$ genügt werden kann; daher ist es gebräuchlich, zu sagen, dass die eben geschriebene Gleichung die Gleichung dieses Punktes ist. Wir halten dieser Ausdrucksweise die im Artikel 75 angegebenen Gründe entgegen und ziehen es vor, die Gleichung als die eines unendlich kleinen Kreises zu bezeichnen, der den Punkt $(a, b)$ zum Centrum hat. Wir haben im Artikel 75 gesehen, dass sie auch als die Gleichung zweier durch den Punkt $ab$ gehenden imaginären geraden Linien betrachtet werden kann, weil sie in die Factoren

$$(x - a) + (y - b)\sqrt{-1} = o \text{ und } (x - a) - (y - b)\sqrt{-1} = o$$

zerfällt werden kann.

Die Vergleichung mit Artikel 89 und 97 lehrt, dass dieselben die Asymptoten der Curve sind. Wir erinnern zugleich an Artikel 40.

Diese Bemerkungen wenden sich ebenso auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 = o$$

an, welche ein specieller Fall der obigen ist.

3.) Wenn $D^2 + E^2$ kleiner als $4AF$ ist, so wird der Radius des Kreises imaginär, und die Gleichung, welche dann mit einer der Formen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + r^2 = o$$

äquivalent ist, kann durch keine reellen Werthe der Coordinaten $x$ und $y$ befriedigt werden.

In der Untersuchung der Eigenschaften des Kreises ziehen wir es vor, auch solche unter ihnen, welche aus den allgemeinen Entwicklungen des vorigen Kapitels leicht als specielle Fälle hergeleitet werden könnten, unabhängig von denselben auf dem Wege zu entwickeln, welcher durch die besondere Natur des Kreises sich empfiehlt; die angedeutete Ableitung aus den allgemeinen Eigenschaften der Curve zweiten Grades überlassen und empfehlen wir dem Leser als eine vorzüglich nützliche Uebung.

115. Die Coordinaten der Punkte zu finden, in denen eine gegebene gerade Linie einen gegebenen Kreis schneidet.

Sei die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

und die der geraden Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

Diese zwei Gleichungen sind hinreichend (Artikel 15), die Coordinaten der Durchschnittspunkte zu finden. Indem wir z. B. die Werthe von $y$ aus beiden entwickeln und mit einander vergleichen, erhalten wir zur Bestimmung von $x$ die Gleichung

$$\frac{p - x \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

oder durch Reduction

$$x^2 - 2px \cos \alpha + p^2 - r^2 \sin^2 \alpha = o;$$

also $$x = p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{(r^2 - p^2)}.$$

Ebenso bestimmt sich

$$y = p \sin \alpha \mp \cos \alpha \sqrt{(r^2 - p^2)}.$$

(Der Leser mag, indem er diese Werthe in die gegebenen Gleichungen substituirt, sich selbst überzeugen, dass das negative Zeichen in dem Werth von $y$ dem positiven in dem Werth von $x$ entspricht und umgekehrt.)

Weil wir eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $x$ oder $y$ erhalten, so müssen wir, um unsere Sprache mit der Sprache der Algebra übereinstimmend zu machen, behaupten, dass jede gerade Linie einen Kreis in zwei Punkten schneidet. Wir unterscheiden die drei Fälle dieser Auflösung:

1.) Wenn $p$, d. h. die Entfernung der geraden Linie vom Centrum des Kreises, kleiner ist als der Radius, so erhalten wir zwei reelle Werthe für $x$ und $y$, und die gerade Linie schneidet den Kreis in zwei reellen Punkten.

2.) Wenn $p = r$ d. h. die Entfernung der geraden Linie vom Centrum gleich dem Radius ist, so führt die Analysis zu dem geometrisch wohlbekannten Ergebnisse, dass die gerade Linie eine Tangente des Kreises ist; denn die zwei Werthe von $x$ sind in diesem Falle gleich, und ebenso die zwei Werthe von $y$. Die beiden Durchschnittspunkte fallen in einen einzigen zusammen, und die Tangente wird als die gerade Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte der Curve betrachtet.

3.) Sei $p$ grösser als $r$. In diesem Falle ist es gebräuchlich zu sagen, dass die gerade Linie den Kreis nicht schneidet. Aber die Analysis ersetzt die reellen Werthe für $x$ und $y$ durch imaginäre Werthe, und wir finden es daher passender, zu sagen, dass in diesem Falle die gerade Linie den Kreis in zwei imaginären Punkten schneidet. (Vergl. Artikel 85).

Wenn die Kreisgleichung in der Form

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = o$$

und die gerade Linie durch

$$ax + by + c = o$$

gegeben ist, so führt die nämliche Elimination und Auflösung einer Gleichung des zweiten Grades zur Bestimmung der Durchschnittspunkte. Ist die gerade Linie speciell eine der Coordinatenachsen, so werden die Durchschnittspunkte durch die Gleichungen

$$Ax^2 + Dx + F = o, \quad y = o$$

$$Ay^2 + Ey + F = o, \quad x = o$$

resp. für die Achse der $x$ und der $y$ bestimmt. Die Achse der $x$ ist eine Tangente des Kreises, wenn

$$D^2 = 4AF,$$

und die Achse der $y$, wenn

$$E^2 = 4AF.$$

Die Bestimmung der Punkte, in welchen ein Kreis die Coordinatenachsen durchschneidet, dient zur Fixirung seiner Lage ebenso gut, wie die Angabe seines Centrums und seines Radius; denn der Kreis ist, da seine allgemeine Gleichung nur drei unabhängige Constanten enthält, durch drei Punkte vollkommen bestimmt.

*Aufg. 1.* Finde die Coordinaten des Durchschnitts von
$$x^2 + y^2 = 65 \text{ mit } 3x + y = 25.$$

*Aufl.* (7, 4) und (8, 1).

*Aufg. 2.* Finde den Durchschnitt von $(x - c)^2 + (y - 2c)^2 = 25c^2$ mit $4x + 3y = 35c$.

*Aufl.* Die Linie berührt im Punkte $(5c, 5c)$.

*Aufg. 3.* Finde die Punkte, wo die Achsen durch
$$x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = o$$
geschnitten werden.

*Aufl.* $x = 3,\ x = 2;\ y = 6,\ y = 1.$

*Aufg. 4.* Welches ist die Gleichung des Kreises, der die Achsen in Entfernungen vom Coordinatenanfang $= a$ berührt?

*Aufl.* $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = o.$

*Aufg. 5.* Wenn berührt die gerade Linie $y = mx + b$ den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$?

*Aufl.* Wenn $b^2 = r^2(1 + m^2)$.

*Aufg. 6.* Finde die Tangente vom Coordinatenanfang an den Kreis
$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = o.$$
Die Punkte, wo irgend eine durch den Coordinatenanfang gezogene gerade Linie $y = mx$ den Kreis schneidet, sind durch die Gleichung
$$A(m^2 + 1)x^2 + (D + Em)x + F = o$$
gegeben. Wenn die Linie den Kreis berührt, hat diese quadratische Gleichung gleiche Wurzeln oder es ist
$$(D + Em)^2 = 4AF(m^2 + 1),$$
eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $m$.

*Aufg. 7.* Finde die Tangenten vom Anfangspunkt der Coordinaten an den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = o.$

*Aufl.* $x - y = o,\ 7y + x = o.$

116. **Die Gleichung der Tangente zu finden, welche im Punkte $x'y'$ an einen gegebenen Kreis gezogen werden kann.**

Weil die Tangente (Art. 115) als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte in der Curve definirt worden ist, so wird ihre Gleichung gefunden, indem man zuerst die Gleichung der geraden Linie bildet, welche irgend zwei Punkte $x'y'$, $x''y''$ in der Curve verbindet und dann in dieser Gleichung $x' = x''$, $y' = y''$ macht. In Anwendung dieses Grundgedankens auf den Kreis lassen wir zuerst das Centrum den Anfangspunkt der Coordinaten sein, so dass die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist.

Die Gleichung der Verbindungslinie von irgend zwei Punkten $x'y'$ und $x''y''$ ist (Art. 29)

$$\frac{y-y'}{x-x'} = \frac{y'-y''}{x'-x''}.$$

Da die beiden Punkte $x'y'$, $x''y''$ der Kreisperipherie angehören, so ist: $r^2 = x'^2 + y'^2 = x''^2 + y''^2$,

also $$x'^2 - x''^2 = y''^2 - y'^2$$

und daher $$\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{x'+x''}{y'+y''}.$$

Also wird die Gleichung der Sehne

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{x'+x''}{y'+y''},$$

und durch die Voraussetzung $x' = x''$, $y' = y''$ die Gleichung der

Tangente $$\frac{y-y'}{x-x'} = -\frac{x'}{y'},$$

oder durch Reduction und mit Hilfe der Bemerkung, dass $x'^2 + y'^2 = r^2$,

$$xx' + yy' = r^2.$$

Die Transformation auf einen neuen Coordinatenanfang, für welchen $a$, $b$ die Coordinaten des Centrums sind, liefert alsdann durch die Substitution $x-a$, $x'-a$, $y-b$, $y'-b$ für $x, x', y, y'$ die Gleichung des Kreises

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

und die der Tangente

$$(x-a)(x'-a) + (y-b)(y'-b) = r^2;$$

eine wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Kreisgleichung sehr bequeme Form.

Die Vergleichung der gefundenen Gleichung der Tangente

$$xx' + yy' = r^2$$

mit der Gleichung des nach dem Berührungspunkte $x'y'$ gehenden Radius $$xy' - yx' = o$$

zeigt, dass die Tangente des Kreises auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

Wir hätten durch Voraussetzung dieser Eigenschaft, als einer aus der Elementar-Geometrie bekannten, die Gleichung der Tangente des Kreises ableiten können; allein es ist uns von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass aus der Gleichung der Curve alle ihre Eigenschaften ohne Kenntniss ihrer geometrischen Theorie abgeleitet werden können. Die dabei benutzten Methoden müssen die allgemeinen auf alle Curven anwendbaren Grundgedanken darlegen.

Wenn die Kreisgleichung in der allgemeinen Form für schiefwinklige Achsen

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = o$$

gegeben ist, sodass $B = 2A\cos\omega$ ist, so erhalten wir den Ausdruck, welcher mit $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ äquivalent ist, wenn die beiden Punkte dem durch die Gleichung dargestellten Kreise angehören, indem wir genau dieselben Operationen auf diese letztere anwenden, wie sie in Art. 88 unter $b$), mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades vorgenommen wurden. Die Gleichung der Tangente wird so erhalten

$$(2Ax' + By' + D)x + (2Ay' + Bx' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = o.$$

*Aufg.* 1. Finde die Tangente im Punkte (5, 4) zu

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

*Aufl.* $3x + y = 19.$

*Aufg.* 2. Welches ist die Gleichung der die Punkte $x'y'$, $x''y''$ verbindenden Sehne im Kreise $x^2 + y^2 = r^2$?

*Aufl.* $(x' + x'')x + (y' + y'')y = r^2 + x'x'' + y'y''.$

*Aufg.* 3. Finde die Bedingung, unter welcher $Ax + By + C = o$ den Kreis $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ berührt.

*Aufl.*
$$\frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = r,$$

weil die Senkrechte vom Punkte $ab$ auf diese Linie dann $= r$ sein muss.

117. Die Berührungspunkte der von einem gegebenen Punkte aus an einen Kreis gezogenen Tangenten zu finden.

Wenn $x'y'$ der gegebene Punkt ist und wenn wir durch $x'', y''$ die Coordinaten des Berührungspunktes ausdrücken, so ist die Gleichung der Tangente

$$xx'' + yy'' = r^2.$$

und unterliegt den Bedingungen

$$x'x'' + y'y'' = r^2 ,$$

weil sie den Punkt $x'y'$ und

$$x''^2 + y''^2 = r^2,$$

weil sie zwei zusammenfallende Punkte des Kreises enthält. Durch Auflösung dieser Bedingungsgleichungen erhalten wir für die Coordinaten des Berührungspunktes die Ausdrücke

$$x'' = \frac{r^2x' \pm ry'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2},\ y'' = \frac{r^2y' \mp rx'\sqrt{(x'^2+y'^2-r^2)}}{x'^2+y'^2}.$$

Von jedem Punkte aus lassen sich somit an den Kreis zwei Tangenten ziehen, welche reell sind, solange

$$x'^2 + y'^2 > r^2$$

ist, d. h. so lange der Punkt ausserhalb des Kreises ist.

Wenn $x'^2 + y'^2 = r^2$, so fallen beide Tangenten zusammen; der Punkt liegt dann in der Kreislinie selbst.

Wenn verlangt wird, die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten verbindet, d. h. die Gleichung der Polare des gegebenen Punktes in Bezug auf den Kreis, so genügt die Erinnerung an eine im Artikel 29 gemachte Bemerkung, um sofort zu erkennen, dass

$$xx' + yy' = r^2$$

dieselbe ist.

Denn die Coordinaten jedes der beiden Berührungspunkte genügen der Bedingungsgleichung

$$x''x' + y''y' = r^2.$$

Diese gerade Linie

$$xx' + yy' = r^2$$

ist stets reell, ob nun die Tangenten vom Punkte $x'y'$ aus reell oder imaginär sind.

Sie ist senkrecht zu der Linie $x'y - xy' = o$, welche $x'y'$ mit dem Centrum verbindet; und ihre Entfernung vom Centrum ist (Art. 25) $\frac{r^2}{\sqrt{(x'^2+y'^2)}}$. Demnach wird also die Polare irgend eines Punktes $P$ geometrisch construirt, indem man ihn mit dem Centrum $C$ verbindet, in der Verbindungslinie einen Punkt $M$ so nimmt, dass $CM . CP = r^2$ wird, und in demselben eine Senkrechte auf $CP$ errichtet. Da die Form der Gleichung der Polare mit derjenigen der Gleichung der Tangente vollkommen übereinstimmt, so ist die Tangente mit der Polare ihres Berührungspunktes identisch. (Vergl. Artikel 101). Durch die nämlichen Betrachtungen erhalten wir die Gleichung der Polare eines Punktes $x'y'$ in Bezug auf den Kreis

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = o$$

in der Form

$$(2Ax' + By' + D)x + (2Ay' + Bx' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = o.$$

Coroll. Die Polare des Coordinatenanfangspunktes ist

$$Dx + Ey + 2F = o.$$

*Aufg. 1.* Finde die Polare von (4, 4) in Bezug auf

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13.$$

*Aufl.* $$3x + 2y = 20.$$

*Aufg. 2.* Finde die Polare von (4, 5) in Bezug auf

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 8.$$

*Aufl.* $$5x + 6y = 48.$$

*Aufg. 3.* Finde den Pol von $Ax + By + C = o$ in Bezug auf

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

*Aufl.* $\left(-\frac{Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C}\right)$, wie aus der Vergleichung der gegebenen Gleichung mit $xx' + yy' = r^2$ hervorgeht.

*Aufg. 4.* Finde den Pol von $3x + 4y = 7$ in Bezug auf

$$x^2 + y^2 = 14.$$

*Aufl.* $$(6, 8).$$

*Aufg. 5.* Finde den Pol von $2x + 3y = 6$ in Bezug auf

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12.$$

*Aufl.* $$(-11, -16).$$

118. **Die Länge der Tangente zu finden, die von einem beliebigen Punkte an den Kreis**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = o$$

**gezogen wird.**

Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes vom Centrum ist $= (x - a)^2 + (y - b)^2$;
und weil dies das Quadrat der Tangente um das Quadrat des Radius übertrifft, so wird das Quadrat der Tangente von einem Punkte aus gefunden, indem man die Coordinaten des Punktes für $x$ und $y$ in den ersten Theil der Gleichung des Kreises substituirt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = o.$$

Weil die allgemeine Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = o,$$

wenn man sie durch $A$ dividirt, mit einer Gleichung von der Form

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=o$$

identisch ist (Artikel 113), so lernen wir, dass das Quadrat der Tangente zu einem Kreise aus der in ihrer allgemeinsten Form gegebenen Gleichung desselben gefunden wird, indem man diese durch den Coefficienten in $x^2$ dividirt und dann die Coordinaten des gegebenen Punktes in die Gleichung substituirt.

Das Quadrat der vom Coordinatenanfang ausgehenden Tangente wird gefunden, indem man $x$ und $y=o$ macht, und ist daher gleich dem durch $A$ dividirten absoluten Glied in der Gleichung des Kreises.

Dieselbe Methode ist anwendbar, wenn die Achsen schiefwinklig sind.

119. Das Verhältniss zu finden, in welchem die Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte $x'y'$, $x''y''$ durch einen gegebenen Kreis geschnitten wird.

Wir verfahren genau wie in Artikel 38 und in Artikel 107. Die Coordinaten irgend eines Punktes in der Linie müssen (Artikel 7) von der Form sein

$$\frac{lx''+mx'}{l+m},\quad \frac{ly''+my'}{l+m}.$$

Indem wir diese Werthe in die Gleichung des Kreises

$$x^2+y^2-r^2=o$$

substituiren und ordnen, erhalten wir zur Bestimmung des Verhältnisses $l:m$ die quadratische Gleichung

$$l^2(x''^2+y''^2-r^2)+2lm(x'x''+y'y''-r^2)+m^2(x'^2+y'^2-r^2)=o.$$

Wenn aus dieser Gleichung die Werthe von $l:m$ bestimmt sind, so haben wir damit zugleich die Coordinaten der Punkte, wo die gerade Linie den Kreis schneidet. Die Symmetrie der Gleichung lässt die jetzige Methode geeigneter erscheinen als die in Artikel 115 gebrauchte.

Wenn $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegt, so haben wir

$$x'x''+y'y''-r^2=o,$$

(Artikel 117) und die Factoren der vorhergehenden Gleichung müssen von der Form $l+\mu m$, $l-\mu m$ sein; die $x'y'$ und $x''y''$ verbindende gerade Linie wird daher innerlich und äusserlich in demselben Verhältniss geschnitten und wir leiten daraus den wohlbekannten Satz ab: Jede durch einen beliebigen Punkt gezogene gerade Linie wird harmonisch getheilt durch den Punkt, den Kreis und die Polare des Punktes. (Vergl. Artikel 104).

120. Die Gleichung der Tangenten von einem gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis zu finden.

Wir haben vorher (Artikel 117) die Coordinaten der Berührungspunkte gefunden; indem wir ihre Werthe in die Gleichung $xx'' + yy'' - r^2 = o$ substituiren, erhalten wir für die Gleichung der einen Tangente

$$r(xx' + yy' - x'^2 - y'^2) + (y'x - yx')\sqrt{(x'^2 + y'^2 - r^2)} = o,$$

und für die der andern

$$r(xx' + yy' - x'^2 - y'^2) - (y'x - yx')\sqrt{(x'^2 + y'^2 - r^2)} = o.$$

Diese beiden Gleichungen geben mit einander multiplicirt die Gleichung des Tangentenpaares in einer von Wurzeln freien Form. Der vorhergehende Artikel erlaubt uns aber diese Gleichung in einer einfacheren Form zu erhalten. Denn die Gleichung, welche $l:m$ bestimmt, hat gleiche Wurzeln, wenn die $x'y'$ und $x''y''$ verbindende gerade Linie den Kreis berührt; wenn daher $xy$ irgend ein Punkt in einer der Tangenten durch $x'y'$ ist, so genügen seine Coordinaten nothwendig der Bedingung

$$(x'^2 + y'^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = (xx' + yy' - r^2)^2;$$

diese ist daher die Gleichung des Tangentenpaares durch den Punkt $x'y'$. Sie ist mit der durch die erstangezeigte Methode erhaltenen identisch.

121. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch drei Punkte geht.

Wir haben nur die allgemeine Gleichung

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = o$$

zu schreiben und darein nach einander die Coordinaten jedes der gegebenen Punkte zu substituiren; so erhalten wir drei Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen $D$, $E$, $F$.

*Aufg. 1.* Finde den durch den Coordinatenanfang und durch die Punkte (2, 3) und (3, 4) gehenden Kreis.

Hier ist $F = o$ und wir haben

$B + 2D + 3E = o$, $25 + 3D + 4E = o$, woher $D = -23$, $E = 11$.

*Aufg. 2.* Finde den Kreis durch die Punkte (1, 2), (1, 3), (2, 5). Wir haben

$5 + D + 2E + F = o$, $10 + D + 3E + F = o$, $29 + 2D + 5E + F = o$,

daher $D = -9$, $E = -5$, $F = 14$.

*Aufg.* 3. Finde den Kreis durch die Punkte $(2, -3), (3, -4), (-2, -1)$.

*Aufl.* $D = 8, \ E = 20, \ F = 31$.

*Aufg.* 4. Finde den Kreis, welcher die Abschnitte $a$ und $b$ in der $x$ Achse bildet.

*Aufl.* $D = -(a + b), \ F = ab$, $E$ unbestimmt.

*Aufg.* 5. Für dieselbe Lage der Coordinatenachsen, wie in Art. 48, Aufg. 1 soll man die Gleichung des Kreises finden, der durch den Coordinatenanfang und die Mittelpunkte der Seiten geht.

*Aufl.* $2p(x^2 + y^2) - p(s - s')x - (p^2 + ss')y = o$. Der Kreis geht daher auch durch den Mittelpunkt der Basis.

122. Die Gleichung des Kreises durch drei Punkte $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ in Gliedern der Coordinaten dieser Punkte auszudrücken.

Wir haben in

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = o$$

die aus

$$(x'^2 + y'^2) + Dx' + Ey' + F = o,$$
$$(x''^2 + y''^2) + Dx'' + Ey'' + F = o,$$
$$(x'''^2 + y'''^2) + Dx''' + Ey''' + F = o,$$

abgeleiteten Werthe von $D$, $E$, $F$ zu substituiren. Das Resultat dieser Elimination von $D$, $E$, $F$ zwischen diesen vier Gleichungen wird in der Form

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)\,[x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')] & - \\ (x'^2 + y'^2)\,[x''(y''' - y) + x'''(y - y'') + x(y'' - y''')] & + \\ (x''^2 + y''^2)\,[x'''(y - y') + x(y' - y''') + x'(y''' - y)] & - \\ (x'''^2 + y'''^2)\,[x(y' - y'') + x'(y'' - y) + x''(y - y')] & = o\end{aligned}$$

erhalten; am einfachsten durch Multiplication der vier Gleichungen mit den in dieser Gleichung auftretenden Factoren von

$$(x^2 + y^2), \ (x'^2 + y'^2)$$

u. s. w., da dann durch Addition der Producte die Coefficienten $D$, $E$, $F$ gleichzeitig verschwinden.

Wenn verlangt wird, die Bedingung zu finden, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen, so haben wir nur in der letzten Gleichung $x_4 y_4$ für $xy$ zu schreiben. Die daraus entspringende Bedingung erlaubt folgende geometrische Interpretation: Wenn $A$, $B$, $C$, $D$ irgend vier Punkte in einem Kreise sind und $O$ irgend ein fünfter beliebig genommener Punkt, und wir bezeichnen durch $BCD$ den Flächeninhalt des Dreiecks $BCD$ u. s. w. so ist

$$OA^2 . BCD + OC^2 . ABD = OB^2 . ACD + OD^2 . ABC.$$

123. Wir zeigen zum Schluss dieses Kapitel, wie die **Polargleichung des Kreises** zu finden ist.

Wir können sie entweder erhalten, indem wir für $x$, $\varrho \cos \vartheta$ und für $y$, $\varrho \sin \vartheta$ (Artikel 12) in eine der früher gegebenen Gleichungen des Kreises

$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = o$ oder $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,

substituiren, oder sie auch unabhängig aus der geometrischen Natur des Kreises finden, wie folgt:

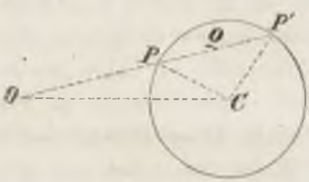
Sei $O$ der Pol, $C$ das Centrum des Kreises und $OC$ die feste Achse; sei die Entfernung $OC = d$ und $OP$ irgend ein Radius vector und daher $= \varrho$, endlich der Winkel $POC = \vartheta$, so haben wir

$PC^2 = OP^2 + OC^2 - 2 OP . OC . \cos POC$,

d. h. $r^2 = \varrho^2 + d^2 - 2 \varrho d \cos \vartheta$;

dies ist daher die Polargleichung des Kreises.

Fig. 45.




Wenn die feste Achse nicht mit $OC$ zusammenfällt, sondern damit einen Winkel $\alpha$ bildet, so ist die Gleichung, wie in Artikel 44

$$\varrho^2 - 2 d \varrho \cos (\vartheta - \alpha) + d^2 - r^2 = o.$$

Wenn wir den Pol im Kreise voraussetzen, so nimmt die Gleichung die einfachere Form $\varrho = 2r \cos \vartheta$ an, weil $r = d$ wird; ein Resultat, welches wir auch rein geometrisch aus der Eigenschaft erhalten haben würden, dass der Peripheriewinkel über dem Halbkreis ein rechter ist; oder indem wir für $x$ und $y$ ihre polaren Werthe in die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2rx$$

einsetzten.

# Achtes Kapitel.

## Lehrsätze und Aufgaben vom Kreis; Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf seine Gleichung.

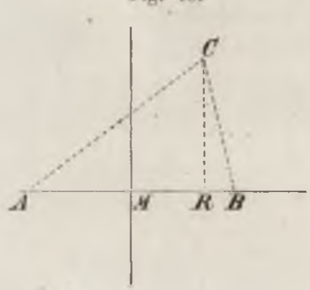
124. Nachdem wir im vorigen Kapitel gezeigt haben, wie die Gleichungen des Kreises und der bemerkenswerthesten auf ihn bezüglichen Linien zu bilden sind, wollen wir in dem jetzigen diese Gleichungen durch Beispiele erläutern und sie zur Begründung einiger der wichtigsten Eigenschaften des Kreises anwenden. Und da wir im dritten Kapitel hinreichend gezeigt haben, wie im Allgemeinen die analytische Methode auf die Auflösung von Aufgaben anzuwenden ist, halten wir es nicht für nothwendig, hier mit gleicher Umständlichkeit auf den Gegenstand einzugehen und können manche Details unterdrücken, welche durch den Leser, der die dort gegebenen Aufgaben gelöst hat, leicht ergänzt werden können.

Wir beginnen mit einigen Beispielen von kreisförmigen Oertern, welche als Beispiele der Methode dienen können, durch die man die Lage eines Kreises aus seiner Gleichung bestimmt, wenn der Leser in jedem Falle nach Artikel 113 die Coordinaten des Centrums und den Radius bestimmt, oder auch, wenn er nach Artikel 115 die Punkte findet, wo der Kreis die Achsen schneidet.

*Aufg. 1.* Gegeben ist die Basis und der gegenüberliegende Winkel eines Dreiecks, man soll den Ort der Spitze finden.

Wir nehmen die Basis zur Achse der $x$ und eine Senkrechte zu ihr durch ihren Mittelpunkt zur Achse der $y$, bezeichnen die Coordinaten der Spitze durch $x, y$ und die Basis durch $2c$. Dann ist die Tangente des Winkels an der Basis $CAB = \frac{CR}{AR}$ oder $\frac{y}{c+x}$ und die von $CBR = \frac{CR}{BR}$ oder $\frac{y}{c-x}$. Wir können daher die Tangente der Summe der Basiswinkel finden, sie der negativen Tangente von $C$, dem Winkel an der Spitze, gleich setzen oder

Fig. 46.



$$\frac{\frac{y}{c+x}+\frac{y}{c-x}}{1-\frac{y^2}{c^2-x^2}}=-\tan C,$$

und indem wir diese Gleichung reduciren, die Gleichung des gesuchten Ortes finden, als $x^2+y^2-2cy\cot C-c^2=o$,
welche einen Kreis darstellt, der durch die Endpunkte der Basis geht, dessen Halbmesser $=\frac{c}{\sin C}$ und Mittelpunkt $(o, \cot C)$ ist. Der Mittelpunkt liegt daher über, in oder unter der Basis, je nachdem der Winkel $C$ spitz, recht oder stumpf ist.

*Aufg.* 2. Die vorige Aufgabe bei beliebiger Lage der Coordinatenachsen zu lösen.

Die Coordinaten der Basispunkte seien $x'y'$, $x''y''$.

Die Gleichung der einen Seite sei

$$y-y'=m(x-x'),$$

dann wird die Gleichung der andern Seite, die mit dieser den Winkel $C$ bildet, (Art. 42)

$$(1+m\tan C)(y-y'')=(m-\tan C)(x-x'').$$

Durch Elimination von $m$ erhalten wir nun die Gleichung des Ortes

$$\tan C[(y-y')(y-y'')+(x-x')(x-x'')]+x(y'-y'')-y(x'-x'')$$
$$+x'y''-y'x''=o,$$

welche sich auf die Gleichung der vorigen Aufgabe reducirt, wenn

$$y'=y''=o,\ x'=+c,\ x''=-c.$$

Wenn $C$ ein rechter Winkel wäre, so sind die Gleichungen der Seiten

$$y-y'=m(x-x'),\ m(y-y'')+(x-x'')=o$$

und die des Ortes ist

$$(y-y')(y-y'')+(x-x')(x-x'')=o.$$

*Aufg.* 3. In einem Dreieck ist die Basis und der Winkel an der Spitze gegeben; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der drei Senkrechten bestimmen, die von den Ecken auf die Gegenseiten gefällt werden.

Die Gleichungen der Senkrechten zu den Scheitelseiten sind

$$m(y-y'')+(x-x'')=o,\ (m-\tan C)(y-y')+(1+m\tan C)(x-x')=o.$$

Indem wir $m$ eliminiren, erhalten wir die Gleichung des Ortes

$$\tan C[(y-y')(y-y'')+(x-x')(x-x'')]=x(y'-y'')$$
$$-y(x'-x'')+x'y''-y'x'';$$

eine Gleichung, welche von der im letzten Artikel gefundenen lediglich im Vorzeichen von $\tan C$ abweicht und welche daher der Ort ist, den wir für die Spitze gefunden haben würden, wenn dieselbe Basis und der Winkel an der Spitze gleich dem Supplement des vorigen gegeben worden wäre.

*Aufg. 4.* Von einem Dreieck ist die Basis und das Verhältniss der Scheitelseiten gegeben, man soll den Ort der Spitze finden.

Mit denselben Coordinatenachsen wie in Aufg. 1 finden wir bei dem Verhältniss $m : n$ für die Gleichung des Ortes

$$m^2[y^2 + (c - x)^2] = n^2[y^2 + (c + x)^2].$$

Der Ort ist also ein Kreis, dessen Centrum in der Achse der $x$ ist, in einer Entfernung vom Coordinatenanfangspunkt $= \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} c$, und dessen Radius $= \frac{2mn}{m^2 - n^2} c$; er schneidet die Basis in den Punkten $x = \frac{m + n}{m - n} c$, und $x = \frac{m - n}{m + n} c$.

Da die Coordinaten der Endpunkte der Basis $x = \pm c$ sind, so sind dies (Art. 7) die zwei Punkte, wo diese Basis in dem Verhältniss $m : n$ geschnitten wird.

*Aufg. 5.* Gegeben ist die Basis eines Dreiecks und $m$ Quadratflächen über der einen, sammt $n$ über der andern Scheitelseite, man soll den Ort des Scheitels aufsuchen.

*Aufl.* Ein Kreis, dessen Centrum ist $\left(\frac{m \mp n}{m \pm n} c, o\right)$.

*Aufg. 6.* Bestimme den Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat seiner Entfernung von einem gegebenen Punkte seiner Entfernung von einer gegebenen geraden Linie proportional ist.

*Aufg. 7.* Eine Linie von constanter Länge bewegt sich zwischen zwei festen geraden Linien, in ihren Endpunkten sind auf diesen letztern Linien Senkrechte errichtet, man sucht den Ort ihres Durchschnittspunktes.

*Aufg. 8.* Es ist allgemein irgend eine Anzahl von Punkten gegeben, man soll den Ort eines Punktes finden, der so liegt, dass die Summe der $m'$, $m''$ . . . fachen Quadrate seiner Entfernungen vom ersten, zweiten . . . Punkte respective eine constante Grösse sei, oder (indem wir die Bezeichnung des Art. 49, Aufg. 4 annehmen), dass $\Sigma(mr^2)$ constant sei.

Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes $xy$ vom Punkt $x'y'$ ist
$$(x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Wir multipliciren dies mit $m'$ und addiren es zu den entsprechenden Gliedern, die man durch den Ausdruck der Entfernungen des Punktes $xy$ von den andern Punkten $x''y''$ . . . gefunden hat. Unter Benutzung der angeführten Bezeichnungsweise können wir für die Gleichung des Ortes schreiben:

$$\Sigma(m)x^2 + \Sigma(m)y^2 - 2\Sigma(mx')x - 2\Sigma(my')y + \Sigma(mx'^2) + \Sigma(my'^2) = C.$$

Also ist der Ort ein Kreis, dessen Mittelpunktscoordinaten sind

$$x = \frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}, \quad y = \frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}.$$

d. h. das Centrum ist der Punkt, den wir in jener Aufgabe 4, Art. 49 das Centrum der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte genannt haben.

Wenn wir den Werth vom Radius dieses Kreises untersuchen, so finden wir $R^2\Sigma(m) = \Sigma(m r^2) - \Sigma(m \varrho^2)$,
wo $\Sigma(m r^2) = C$ gleich der Summe der $m$ fachen Entfernungsquadrate jedes der gegebenen Punkte von einem Punkte des Kreises und $\Sigma(m\varrho^2)$ gleich der Summe der $m$ festen Entfernungsquadrate aller Punkte von dem Centrum der mittlern Entfernungen ist.

125. Wir geben demnächst einige Beispiele, die das Problem des Artikel 115 enthalten, nämlich das Problem, die Coordinaten der Punkte zu finden, wo eine gerade Linie einen gegebenen Kreis schneidet.

*Aufg. 1.* Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen eines Kreises zu finden, die einer gegebenen Linie parallel sind.

Sei die Gleichung irgend einer der parallelen Sehnen

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o,$$

wo $\alpha$ nach der Voraussetzung bestimmt und $p$ veränderlich ist; die Abscissen der Punkte, wo diese Linie den Kreis schneidet (Art. 115), werden aus der Gleichung $x^2 - 2px\cos\alpha + p^2 - r^2\sin^2\alpha = o$ gefunden.

Wenn nun die Wurzeln dieser Gleichung $x'x''$ sind, so ist die Abscisse des Mittelpunkts der Sehne $\frac{x'+x''}{2}$ und also nach der Theorie der Gleichungen $= p\cos\alpha$. In gleicher Weise ist das $y$ des Mittelpunktes $= p\sin\alpha$. Also ist die Gleichung des Ortes $\frac{x}{y} = \tan\alpha$, d. h. eine zu dem System paralleler Sehnen senkrechte gerade Linie durch den Mittelpunkt, weil $\alpha$ der Winkel ist, den eine Senkrechte zur Sehne $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = o$ mit der Achse der $x$ bildet.

*Aufg. 2.* Die Bedingung zu finden, dass der durch den Kreis in der Linie $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ gebildete Abschnitt einen rechten Winkel am Punkt $x'y'$ fasse.

Wir fanden Art. 124, Aufg. 2 die Bedingung, dass die die Punkte $x''y''$, $x'''y'''$ mit $xy$ verbindenden geraden Linien rechtwinklig zu einander sein sollten, nämlich

$$(x - x'')(x - x''') + (y - y')(y - y''') = o.$$

Seien nun $x''y''$, $x'''y''$ die Punkte, wo die Linie den Kreis schneidet, so ist nach dem letzten Beispiel

$$x'' + x''' = 2p\cos\alpha,\ x''x''' = p^2 - r^2\sin\alpha,\ y'' + y''' = 2p\sin\alpha$$
$$y''y''' = p^2 - r^2\cos\alpha;$$

aus diesen Werthen ergiebt sich die geforderte Bedingung

$$x'^2 + y'^2 - 2px'\cos\alpha - 2py'\sin\alpha + 2p^2 - r^2 = o.$$

*Aufg.* 3. Den Ort des Mittelpunkts einer Sehne zu finden, welche einen rechten Winkel an einem gegebenen Punkte spannt.

Wenn $xy$ die Coordinaten des Mittelpunkts sind, so haben wir nach Aufg. 1 $\quad p\cos\alpha = x,\quad p\sin\alpha = y,\quad p^2 = x^2 + y^2,$

und durch die Substitution dieser Werthe wird die in der vorigen Aufgabe gefundene Bedingung

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + x^2 + y^2 = r^2.$$

*Aufg.* 4. Den Ort des Fusspunktes einer Senkrechten von $x'y'$ auf eine Sehne zu finden, welche einen rechten Winkel an dem Punkte spannt.

Die Coordinaten des Fusspunktes der Senkrechten werden durch die Gleichungen bestimmt

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,\quad (x - x')\sin\alpha - (y - y')\cos\alpha = o,$$

also, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

$$R\sin\alpha = y - y',\ R\cos\alpha = x - x',\ Rp = x^2 + y^2 - xx' - yy';$$

die Bedingung in Aufg. 2 kann geschrieben werden

$$0 = x'^2 + y'^2 - r^2 + 2p(p - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) = x'^2 + y'^2 - r^2 + 2p[(x - x')\cos\alpha + (y - y')\sin\alpha];$$

aber $\qquad (x - x')\cos\alpha + (y - y')\sin\alpha = R,$

also $\qquad x'^2 + y'^2 - r^2 + 2(x^2 + y^2 - xx' - yy') = o,$

oder der Ort ist derselbe, wie der in der letzten Aufgabe gefundene.

*Aufg.* 5. Ist eine gerade Linie und ein Kreis gegeben, so soll man einen Punkt so finden, dass, wenn man durch ihn eine Sehne zieht, und von ihren Endpunkten auf die gegebene Linie Perpendikel fällt, das Rechteck dieser Senkrechten constant sei.

Man nehme die gegebene Linie zur $y$ Achse, und zur Achse der $x$ eine vom Centrum des gegebenen Kreises auf sie gefällte Senkrechte, deren Länge $p$ genannt werden mag. Dann ist die Gleichung des Kreises

$$y^2 + (x - p)^2 = r^2.$$

Wenn ferner die Coordinaten des gesuchten Punktes $x'y'$ sind, so ist die Gleichung irgend einer Geraden durch ihn

$$y - y' = m(x - x') \text{ oder } y = mx + y' - mx'.$$

Indem wir diesen Werth von $y$ in die Gleichung des Kreises einsetzen, erhalten wir zur Bestimmung der $x$ der Punkte, wo die Linie den Kreis schneidet,

$$(1 + m^2)x^2 + [2m(y' - mx') - 2p]x + (y' - mx')^2 + p^2 - r^2 = o.$$

Aber $x$ ist die Senkrechte auf die gegebene Linie, und das Product der beiden Senkrechten ist daher nach der Theorie der Gleichungen

$$= \frac{(y' - mx')^2 + p^2 - r^2}{1 + m^2}.$$

Dies Rechteck ist also im Allgemeinen nicht von $m$ unabhängig; dazu ist nöthig, dass der Zähler mit $(1 + m^2)$ dividirt werden kann und dies erfordert, dass $y' = o$ und $x'^2 = p^2 - r^2$ ist.

Also giebt es zwei solcher Punkte, die der Achse der $x$ angehören und deren Entfernung vom Ursprung gleich der Länge der von ihm aus an den Kreis gezogenen Tangente ist.

*Aufg. 6.* Wenn irgend eine Sehne durch einen festen Punkt auf dem Durchmesser eines Kreises gezogen wird und ihre Enden mit einem Endpunkte des Durchmessers verbunden werden, so schneiden die Verbindungslinien auf der Tangente am andern Ende des Durchmessers Stücke ab, deren Rechteck constant ist.

Nehmen wir den Durchmesser zur Achse der $x$ und das eine Ende von ihm zum Ursprung, so ist die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = 2rx$$

und die irgend einer durch einen festen Punkt im Durchmesser gezogenen Sehne $\qquad y = m(x - x')$.

Durch Combination dieser Gleichungen bestimmt man die Coordinaten der Endpunkte der Sehne.

Man kann jedoch ohne vorherige Ableitung dieser Coordinaten aus ihnen die Gleichung erhalten, welche die beiden geraden Linien darstellt, die den Anfangspunkt der Coordinaten mit den Endpunkten der Sehne verbinden.

Denn wenn man durch Combination dieser Gleichungen eine homogene Function des zweiten Grades bildet, so ist diese nach Art. 74 die Gleichung zweier durch den Ursprung gezogenen geraden Linien und zugleich nothwendig durch die Coordinaten der Punkte erfüllt, welche den beiden gegebenen Gleichungen genügen.

Diese homogene Function erhält man, indem man diese Gleichungen schreibt wie folgt: $x^2 + y^2 = 2rx$ und $mx' = mx - y$ und sie mit einander multiplicirt, das Product ist:

$$mx'(x^2 + y^2) = 2rx(mx - y).$$

Da diese Gleichung in $x$ und $y$ homogen ist, so ist sie die geforderte Gleichung der Verbindungslinien. Man kann sie in der Form schreiben: $\qquad mx' . y^2 + 2r . xy + m(x' - 2r)x^2 = o$;

sie erlaubt uns, die irgend einem Werthe von $x$ entsprechenden Werthe von $y$ zu finden und zeigt, dass das Product dieser Werthe $= \frac{x' - 2r}{x'} . x^2$ und daher von $m$ unabhängig ist. Die in einer Senkrechten am Ende des Durchmessers gebildeten Abschnitte werden gefunden, indem man in der vorigen Gleichung $x = 2r$ macht und ihr Product ist daher $4r^2 . \frac{x' - 2r}{x'}$, welches so lange constant ist, als $x'$ unverändert bleibt.

126. Wir wollen nun zunächst einige von den Eigenschaften der Polare eines Punktes aus ihrer Gleichung ableiten. (Artikel 117).

Wenn durch einen festen Punkt irgend eine Sehne im Kreise und in den Endpunkten derselben Tangenten an ihn gezogen werden, den Ort ihres Durchschnittspunktes zu finden.

Sei irgend ein Punkt im Orte $XY$, so ist die die Berührungspunkte der von $XY$ ausgehenden Tangenten verbindende Linie

$$Xx + Yy = r^2;$$

aber nach der Voraussetzung geht diese Linie durch den Pol $x'y'$, sodass $Xx' + Yy' = r^2$; dies ist die Relation, welche die Coordinaten des Punktes $XY$ verbindet, sein Ort ist daher die gerade Linie $$xx' + yy' = r^2,$$
oder die Polare des Punktes $x'y'$.

Der eben bewiesene Satz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn ein Punkt in der Polare eines zweiten Punktes liegt, so liegt der zweite Punkt in der Polare des ersten. Denn die Bedingung, unter welcher $x'y'$ in der Polare des Punktes $x''y''$ liegt, ist $x'x'' + y'y'' = r^2$.
Dies ist aber auch die Bedingung, unter der der Punkt $x''y''$ in der Polare von $x'y'$ liegen soll.

Wenn durch einen Punkt $O$ zwei beliebige gerade Linien nach einem Kreise gezogen und die Durchschnittspunkte direct und kreuzweise verbunden werden, so bestimmen die Punkte $P$ und $Q$, in denen die Verbindungslinien sich schneiden, die Polare des Punktes $O$ in Bezug auf den Kreis. Der Beweis bleibt derselbe wie in Artikel 105. Vergl. Artikel 117.

127. Wenn irgend zwei Punkte $A$ und $B$ und ihre Polaren mit Bezug auf einen Kreis vom Centrum $O$ gegeben sind und man fällt eine Senkrechte $AP$ von $A$ auf die Polare von $B$ und eine Senkrechte $BQ$ von $B$ auf die Polare von $A$, so ist

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

Die Gleichung der Polare von $A\,(x'y')$ ist

$$xx' + yy' - r^2 = o$$

und $BQ$, die Senkrechte auf diese Linie von $B\,(x''y'')$ ist

$$\frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}.$$

Also finden wir, da $\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = OA$

$$OA \,.\, BQ = x'x'' + y'y'' - r^2;$$

und aus denselben Gründen

$$OB \,.\, AP = x'x'' + y'y'' - r^2.$$

Also $$\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}.$$

128. Ist ein Kreis und ein Dreieck $ABC$ gegeben, so bilden die Polaren der drei Ecken desselben in Bezug auf den Kreis ein Dreieck $A'B'C'$, (wo $A'$ der Pol von $BC$, $B'$ der Pol von $AC$, und $C'$ der Pol von $AB$ ist) welches so liegt, dass die Linien $AA'$, $BB'$, $CC'$ durch denselben Punkt gehen.

Die Gleichung der Verbindungslinie des Punktes $x'y'$ mit dem Durchschnitt der zwei Linien

$$xx'' + yy'' - r^2 = o \text{ und } xx''' + yy''' - r^2 = o$$

ist (Artikel 36)

$$AA' \qquad (x'x''' + y'y''' - r^2)\,(xx'' + yy'' - r^2) - (x'x'' + y'y'' - r^2)\,(xx''' + yy''' - r^2) = o.$$

In gleicher Art ergeben sich

$$BB' \qquad (x''x' + y''y' - r^2)\,(xx''' + yy''' - r^2) - (x''x''' + y''y''' - r^2)\,(xx' + yy' - r^2) = o,$$

$$CC' \qquad (x'''x'' + y'''y'' - r^2)\,(xx' + yy' - r^2) - (x'''x' + y'''y' - r^2)\,(xx'' + yy'' - r^2) = o,$$

und nach Artikel 37 müssen diese Linien durch denselben Punkt gehen.

Das folgende ist ein specieller Fall des eben bewiesenen Theorems: Wenn ein Kreis einem Dreieck eingeschrieben ist und jede Ecke des Dreiecks mit dem Berührungspunkte des Kreises mit der Gegenseite verbunden wird, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte.

*Aufg.* Beweise nach Art. 38, dass die drei Durchschnittspunkte von $AB$ und $A'B'$, von $AC$ und $A'C'$ und von $BC$ und $B'C'$ in einer geraden Linie liegen.

129. Bei Aufgaben über den Kreis ist es oft zweckmässig, anstatt die Lage eines Puntes in der Curve durch seine zwei Coordinaten $x'y'$ zu bestimmen, diese beiden in Gliedern einer einzigen unabhängigen Veränderlichen auszudrücken. Wenn $\vartheta'$ der Winkel ist, welchen der Radius nach $x'y'$ mit der Achse der $x$ macht, so wird für den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten $x' = r\cos\vartheta'$, $y' = r\sin\vartheta'$, und indem man diese Werthe in die Formeln substituirt, werden sie im Allgemeinen vereinfacht. Die Gleichung der Tangente im Punkte $x'y'$ wird durch diese Substitution

$$x\cos\vartheta' + y\sin\vartheta' = r;$$

und die Gleichung der $x'y'$ mit $x''y''$ verbindenden Sehne, welche nach Artikel 116 ist

$$x(x' + x'') + y(y' + y'') = r^2 + x'x'' + y'y'',$$

durch eine ähnliche Substitution

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') + y\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'') = r\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta''),$$

wo $\vartheta'$ und $\vartheta''$ die Winkel sind, welche die nach den Enden der Sehne gezogenen Radien mit der Achse der $x$ bilden.

Diese Gleichung würden wir auch direct aus der allgemeinen Gleichung der geraden Linie $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ erhalten haben, denn der Winkel, den die Senkrechte zur Sehne mit der Achse der $x$ bildet, ist offenbar die halbe Summe der Winkel, die von den Radien nach ihren Enden mit der Achse der $x$ gebildet werden; und die Senkrechte zur Sehne ist $= r\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')$.

*Aufg. 1.* Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Tangenten zweier gegebenen Punkte des Kreises zu finden.

Die Tangenten sind

$$x\cos\vartheta' + y\sin\vartheta' = r,\quad x\cos\vartheta'' + y\sin\vartheta'' = r$$

und daher die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes

$$x = r\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')},\quad y = r\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\vartheta' + \vartheta'')}{\cos\frac{1}{2}(\vartheta' - \vartheta'')}.$$

*Aufg. 2.* Den Ort des Durchschnitts der Tangenten an den Enden einer Sehne von constanter Länge zu finden.

Indem wir die Substitution dieses Art. in die Gleichung

$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \text{const.}$$

machen, reducirt sie sich zu $\cos(\vartheta' - \vartheta'') = \text{const.}$, oder $\vartheta' - \vartheta'' = \text{const.}$

Wenn die gegebene Länge der Sehne $= 2r\sin\delta$ war, so ist $\vartheta' - \vartheta'' = 2\delta$. Die in dem letzten Beispiel gefundenen Coordinaten erfüllen die Bedingung $(x^2 + y^2)\cos^2\delta = r^2$.

*Aufg. 3.* Welches ist der Ort eines Punktes, in welchem eine Sehne von gegebener Länge in einem bestimmten Verhältniss geschnitten wird?

Indem man nach Art 7 die Coordinaten des Punktes schreibt, wo die Sehne in gegebenem Verhältniss getheilt ist, findet man, dass sie der. Bedingung $x^2 + y^2 =$ const. genügen.

*Aufg. 4.* Die Diagonalen eines dem Kreis umschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkte,

Die von den Radien nach den Berührungspunkten mit der Achse der $x$ gebildeten Winkel seien $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, $2\delta$, $2\varepsilon$, $2\varphi$; dann ist die Gleichung der Verbindungslinie des Durchschnittspunktes der Tangenten in $2\alpha$, $2\beta$ mit dem der Tangenten in $2\delta$, $2\varepsilon$

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\delta)}\left[x\cos(\alpha+\delta)+y\sin(\alpha+\delta)-r\cos(\alpha-\delta)\right]$$
$$+\frac{1}{\sin(\beta-\varepsilon)}\left[x\cos(\beta+\varepsilon)+y\sin(\beta+\varepsilon)-r\cos(\beta-\varepsilon)\right]=o.$$

welche, mit den andern zwei Gleichungen derselben Form zusammenaddirt, die Summe Null giebt.

130. Wir haben gesehen, dass die Tangente eines Kreises $x^2+y^2=r^2$ eine Gleichung von der Form

$$x\cos\vartheta+y\sin\vartheta=r$$

hat und erkennen ganz ebenso, dass die Gleichung der Tangente zu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ geschrieben werden kann

$$(x-a)\cos\vartheta+(y-b)\sin\vartheta=r;$$

wenn daher umgekehrt die Gleichung einer geraden Linie eine Unbestimmte $\vartheta$ in der Form

$$(x-a)\cos\vartheta+(y-b)\sin\vartheta=r$$

enthält, so berührt sie den Kreis

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

*Aufg. 1.* Wenn eine Sehne von constanter Länge in einen Kreis eingeschrieben wird, so berührt sie stets einen zweiten Kreis. Denn in der Gleichung der Sehne

$$x\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta'+\vartheta'')+y\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta'+\vartheta'')=r\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta'')$$

(nach dem letzten Art.) ist $\vartheta'-\vartheta''$ bekannt und $\vartheta'+\vartheta''$ unbestimmt; die Sehne berührt daher stets den Kreis

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\delta.$$

*Aufg. 2.* Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist und eine gerade Linie so gelegt wird, dass das $m'$ fache des Perpendikels auf sie vom 1. Punkt vermehrt um das $m''$ fache des Perpendikels zu ihr vom 2. Punkt usw. eine constante Summe giebt, so umhüllt die Linie einen festen Kreis. Dies weicht von der Aufgabe 4 in Art. 49 nur darin ab, dass die Summe, anstatt 0 zu sein, constant ist.

Indem wir die Bezeichnung dieses Artikels annehmen, haben wir statt der dort gefundenen Gleichung

$$[x\Sigma(m) - \Sigma(mx')]\cos\alpha + [y\Sigma(m) - \Sigma(my')]\sin\alpha = o,$$

nur zu schreiben:

$$[x\Sigma(m) - \Sigma(mx')]\cos\alpha + [y\Sigma(m) - \Sigma(my')]\sin\alpha = \text{const.}$$

Also berührt die gerade Linie stets den Kreis

$$\left[x - \frac{\Sigma(mx')}{\Sigma(m)}\right]^2 + \left[y - \frac{\Sigma(my')}{\Sigma(m)}\right]^2 = \text{const.},$$

dessen Centrum das Centrum der mittleren Entfernungen der gegebenen Punkte ist.

131. Wir schliessen dem Vorigen einige Beispiele von dem Gebrauch der Polar-Coordinaten an.

*Aufg. 1.* Wenn man durch einen festen Punkt eine Sehne im Kreise zieht, so ist das Rechteck aus ihren Segmenten von constantem Inhalt. (Euklid. III. 35. 36.)

Nehmen wir den festen Punkt zum Pol, so ist die Polargleichung (Art. 123) $\varrho^2 - 2\varrho d\cos\vartheta + d^2 - r^2 = o$;
offenbar sind $OP$, $OP'$, d. h. die Werthe der Radien vectoren, die einem gegebenen Werth von $\vartheta$ oder $POC$ entsprechen, die Wurzeln dieser Gleichung. Nun ist nach der Theorie der Gleichungen $OP.OP'$, das Product dieser Wurzeln, $= d^2 - r^2$, eine von $\vartheta$ unabhängige Grösse und daher constant, wie immer die Richtung sei, in welcher die Linie $OP$ gezogen ist. Wenn der Punkt $O$ ausserhalb des Kreises läge, so ist $d^2 - r^2$ das Quadrat über der Länge der Tangenten.

*Aufg. 2.* Wenn durch einen festen Punkt $O$ eine Sehne in einem Kreise gezogen, und $OQ$ als das arithmetische Mittel zwischen den Segmenten $OP$, $OP'$ genommen wird, den Ort von $Q$ zu finden.

Wir haben $OP + OP'$ oder die Summe der Wurzeln der quadratischen Gleichung im letzten Beispiel $= 2d\cos\vartheta$; aber

$$OP + OP' = 2OQ,$$

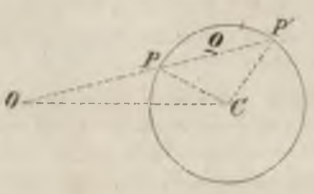
daher

$$OQ = d\cos\vartheta.$$

Also ist die Polargleichung des Ortes

$$\varrho = d\cos\vartheta.$$

Fig. 47.





Nun erhellt aus der Endgleichung des Artikels 123, dass dies die Gleichung eines über der Linie $OC$ als Durchmesser beschriebenen Kreises ist.

Die Aufgabe dieses Beispiels hätte auch so ausgedrückt werden können: Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen im Kreise zu finden, welche durch einen festen Punkt gehen.

*Aufg. 3.* Man soll den Ort von $Q$ finden, wenn die Linie $OQ$ das harmonische Mittel zwischen $OP$ und $OP'$ ist, d. h. $OQ = \dfrac{2.OP.OP'}{OP + OP'}$;

aber es ist $OP.OP' = d^2 - r^2$ und $OP + OP' = 2d\cos\vartheta$ und daher die Polargleichung des Ortes

$$\varrho = \frac{d^2 - r^2}{d\cos\vartheta} \text{ oder } \varrho\cos\vartheta = \frac{d^2 - r^2}{d}.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, welche in der Entfernung von $O = d - \frac{r^2}{d}$ und daher in der Entfernung von $C = \frac{r^2}{d}$ zu $OC$ senkrecht ist. Demnach ist der Ort die Polare des Punktes $O$. (Art. 117.)

Wir können in derselben Art diese und ähnliche Aufgaben lösen, wenn die Gleichung in der Form gegeben ist:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = o,$$

denn durch Transformation zu Polar-Coordinaten wird diese Gleichung

$$\varrho^2 + \left(\frac{D}{A}\cos\vartheta + \frac{E}{A}\sin\vartheta\right)\varrho + \frac{F}{A} = o,$$

und indem wir genau wie in diesem Beispiel verfahren, finden wir für den Ort der harmonischen Mittel

$$\varrho = \frac{-2F}{D\cos\vartheta + E\sin\vartheta},$$

und zu rechtwinkligen Coordinaten zurückkehrend,

$$Dx + Ey + 2F = o,$$

die früher gefundene Gleichung der Polare des Anfangspunktes. (Art. 117.)

*Aufg. 4.* Ein Punkt und eine gerade Linie sind gegeben, den Ort von $Q$ zu finden, wenn $OQ$ als der inverse Werth von $OP$, dem Radius vector der geraden Linie, genommen wird.

*Aufg. 5.* Von einem Dreieck ist der Scheitel, der Scheitelwinkel und das Rechteck unter den Seiten gegeben; man soll den durch die eine Basisecke beschriebenen Ort bestimmen, wenn die andre sich in einer geraden Linie oder einem Kreise bewegt.

Wir nehmen den Scheitel zum Pol, setzen die Länge der Seiten gleich $\varrho$ und $\varrho'$ und die Winkel, die sie mit der Achse bilden, $\vartheta$ und $\vartheta'$; alsdann finden wir, indem wir für $\varrho$, $\frac{k^2}{\varrho'}$ und für $\vartheta$, $C + \vartheta'$ in die Gleichung des gegebenen Ortes einsetzen, eine Relation zwischen $\varrho'$ und $\vartheta'$, welche die Polargleichung des durch die andre Basisecke beschriebenen Ortes ist. Diese Aufgabe kann in derselben Art gelöst werden, wenn anstatt ihres Products das Verhältniss der Seiten gegeben wäre.

*Aufg. 6.* Durch den Durchschnitt zweier Kreise ist eine gerade Linie gezogen; man hat den Mittelpunkt des zwischen die Kreise gefassten Stücks derselben zu finden.

Die Gleichungen der Kreise sind von der Form

$$\varrho = 2r\cos(\vartheta - \alpha) \text{ und } \varrho = 2r'\cos(\vartheta - \alpha')$$

und die Gleichung des Ortes ist alsdann

$$\varrho = r\cos(\vartheta - \alpha) + r'\cos(\vartheta - \alpha');$$

sie repräsentirt einen Kreis.

*Aufg.* 7. Wenn durch einen beliebigen Punkt $O$ in der Peripherie eines Kreises drei Sehnen willkürlich gezogen werden und über jeder als Durchmesser ein Kreis beschrieben wird, so schneiden sich diese drei Kreise in drei andern Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

Wenn wir den festen Punkt zum Pol nehmen, und $d$ der Durchmesser des ursprünglichen Kreises ist, so ist seine Gleichung (Art. 123)

$$\varrho = d \cos \vartheta.$$

Wenn der Durchmesser eines der andern Kreise mit der festen Achse einen Winkel $\alpha$ bildet, so ist seine Länge $= d \cos \alpha$ und die Gleichung des Kreises $\varrho = d \cos \alpha \,.\, \cos (\vartheta - \alpha)$

die Gleichung des andern Kreises ist endlich ebenso:

$$\varrho = d \cos \beta \,.\, \cos (\vartheta - \beta).$$

Um die Polar-Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser zwei Kreise zu finden, suchen wir den Werth von $\vartheta$, welcher

$$\cos \alpha \,.\, \cos (\vartheta - \alpha) = \cos \beta \,.\, \cos (\vartheta - \beta)$$

macht und finden leicht $\vartheta = \alpha + \beta$ und den entsprechenden Werth von

$$\varrho = d \cos \alpha \cos \beta.$$

Ebenso sind die Polar-Coordinaten des Durchschnitts vom 1. und 3. Kreise $\vartheta = \alpha + \gamma$ und $\varrho = d \cos \alpha \cos \gamma$.

Um nun die Polargleichung der diese beiden Punkte verbindenden Linie zu finden, nehmen wir die allgemeine Gleichung der geraden Linie

$$\varrho \cos (k - \vartheta) = p$$

(Art. 44) und setzen in sie nach einander diese Werthe von $\vartheta$ und $\varrho$, um so 2 Gleichungen zur Bestimmung von $p$ und $k$ zu erhalten; daraus ergiebt sich

$$p = d \cos \alpha \cos \beta \cos [k - (\alpha + \beta)] = d \cos \alpha \cos \gamma \cos [k - (\alpha + \gamma)].$$

Also $k = \alpha + \beta + \gamma$ und $p = d \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Die Symmetrie dieser Werthe zeigt, dass es dieselbe gerade Linie ist, welche die Durchschnitte des 1. und zweiten und des 2. und 3. Kreises verbindet, dass daher die drei Punkte in derselben geraden Linie liegen.

132. Wenn wir eine Gleichung zweiten Grades in der im 4. Kapitel auseinandergesetzten a b g e k ü r z t e n  B e z e i c h n u n g s w e i s e ausgedrückt haben und zu wissen wünschen, ob sie einen Kreis darstellt, so haben wir nur auf $x$ und $y$ Coordinaten zurückzugehen, indem wir für jede Abkürzung $\alpha$ ihr Aequivalent

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$$

einsetzen, um dann zu untersuchen, ob der Coefficient von $xy$ in der transformirten Gleichung verschwindet, und die Coefficienten von $x^2$ und $y^2$ einander gleich sind. Die folgenden Beispiele mögen hinreichen, dies zu erläutern.

Ein Punkt bewege sich so, dass die Producte seiner senkrechten Abstände von den beiden Paaren der Gegenseiten eines Vierecks in einem gegebenen Verhältniss stehen; unter welchen Bedingungen ist der Ort dieses Punktes ein Kreis?

Sind $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, $\delta = o$ die Gleichungen der vier Seiten des Vierecks so ist die Gleichung des Ortes

$$\alpha\gamma = k\beta\delta;$$

sie repräsentirt eine Curve des zweiten Grades, welche durch die Ecken des Vierecks geht, weil ihr durch jede der vier Voraussetzungen genügt wird

$$\alpha = o,\ \beta = o;\ \alpha = o,\ \delta = o;\ \beta = o,\ \gamma = o;\ \gamma = o,\ \delta = o.$$

Um zu erkennen, ob diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, schreiben wir sie in voller Länge:

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)(x \cos\gamma + y \sin\gamma - p'') =$$
$$k(x \cos\beta + y \sin\beta - p')(x \cos\delta + y \sin\delta - p''').$$

Indem wir ausmultipliciren, und den Coefficienten von $x^2$ mit dem von $y^2$ gleich und den von $xy$ gleich Null setzen, erhalten wir die Bedingungen

$$\cos(\alpha + \gamma) = k \cos(\beta + \delta) \text{ und } \sin(\alpha + \gamma) = k \sin(\beta + \delta).$$

Die Quadrate dieser Gleichungen liefern durch ihre Addition die Bedingung $k = \mp 1$ und aus der Erfüllung derselben folgt entweder

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \text{ oder } = 180^0 + \beta + \delta;$$

und daraus ebenso

$$\alpha - \beta = \delta - \gamma \text{ oder } = 180 + \delta - \gamma.$$

Da $\alpha - \beta$ der Winkel zwischen den vom Coordinatenanfang auf die Linien $\alpha$ und $\beta$ gefällten Senkrechten und daher das Supplement des von $\alpha$ und $\beta$ selbst gebildeten Winkels ist, welcher den Anfangspunkt der Coordinaten enthält, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn das Viereck von $\alpha\beta\gamma\delta$ in einen Kreis einschreibbar ist. (Euklid. III 22). Und es ergiebt sich ohne weitere Untersuchung, dass für einen innerhalb des Vierecks gelegenen Coordinatenanfang $k = -1$ zu nehmen und der von $\alpha$ und $\beta$ gebildete Winkel das Supplement des von $\gamma$ und $\delta$ eingeschlossenen ist (beide so genommen, dass der Coordinatenanfang innerhalb derselben liegt), während der Lage des

Coordinaten-Anfangspunktes ausserhalb des Vierecks der Werth $k=+1$ und die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel entspricht.

133. Unter welcher Bedingung ist der Ort eines Punktes ein Kreis, für welchen das Quadrat der Entfernung von der Basis eines festen Dreiecks in einem constanten Verhältniss zum Producte der Entfernungen von den Seiten desselben steht?

Sind $\alpha=o$, $\beta=o$, $\gamma=o$ die Seiten des Dreiecks, so ist die Gleichung des Ortes $\alpha\beta=k\gamma^2$. Wenn wir nun die Punkte suchen, wo die Linie $\alpha=o$ diesen Ort schneidet, indem wir in seiner Gleichung $\alpha=o$ machen, so erhalten wir das vollkommne Quadrat $\gamma^2=o$. Also schneidet $\alpha=o$ den Ort in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. nach Art. 38 sie berührt den Ort im Punkte $(\alpha, \gamma)$. Ebenso berührt $\beta$ den Ort im Punkte $(\beta, \gamma)$. Also sind $\alpha$ und $\beta$ beide Tangenten und $\gamma$ ist ihre Berührungssehne.

Um nun zu erkennen, ob der Ort ein Kreis ist, schreiben wir seine Gleichung wie im letzten Artikel in voller Länge und erhalten, indem wir die Kennzeichen des Artikel 113 anwenden, die folgenden Bedingungen

$$\cos(\alpha+\beta)=k\cos 2\gamma, \quad \sin(\alpha+\beta)=k\sin 2\gamma,$$

wo wie im letzten Art. $k=1$ ist; somit wird das Dreieck gleichschenklig. Also dürfen wir schliessen, dass wenn man von irgend einem Punkte eines Kreises auf zwei Tangenten und ihre Berührungssehne Perpendikel fällt, das Quadrat der letztern immer gleich dem Rechteck unter den zwei erstern ist.

*Aufg.* Unter welchen Bedingungen ist der Ort eines Punktes ein Kreis, für welchen die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Senkrechten constant ist.

Die Gleichung des Ortes ist

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=c^2$$

und die Bedingungen, unter denen diese einen Kreis repräsentirt, sind

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=o, \qquad \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=o$$

$$\cos 2\alpha=-2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma), \quad \sin 2\alpha=-2\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$

Durch Quadriren und Addiren erhält man

$$1=4\cos^2(\beta-\gamma) \text{ und } \beta=\gamma=60^0.$$

Ebenso findet man jeden der beiden andern Winkel des Dreiecks gleich $60^0$, so dass das Dreieck gleichseitig sein muss.

134. Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher dem aus den Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ gebildeten Dreieck umschrieben ist.

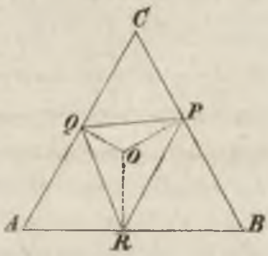
Eine Curve zweiten Grades, welche dem gegebenen Dreieck umschrieben ist, wird allgemein durch eine Gleichung von der Form
$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = o$$
dargestellt; da derselben durch jede der Voraussetzungen:
$$\alpha = o,\ \beta = o;\ \beta = o,\ \gamma = o;\ \gamma = o,\ \alpha = o,$$
genügt wird.

Die Bedingungen, unter welchen diese Gleichung einen Kreis repräsentirt, werden durch das Verfahren des Artikel 132 gefunden, wie folgt:
$$l \cos(\beta + \gamma) + m \cos(\gamma + \alpha) + n \cos(\alpha + \beta) = o,$$
$$l \sin(\beta + \gamma) + m \sin(\gamma + \alpha) + n \sin(\alpha + \beta) = o.$$

Indem wir $m$ und $n$ nacheinander zwischen diesen Gleichungen eliminiren, erhalten wir
$$\frac{m}{l} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)};\quad \frac{n}{l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)}.$$
Wenn nun $C$ der von den Seiten $\alpha$, $\beta$ eingeschlossene Winkel ist, so erhalten wir $\sin C = \sin(\alpha - \beta)$ u. s. w., weil $\sin(\alpha - \beta)$ der Winkel zwischen den Senkrechten zu diesen Seiten ist; demnach ist die Gleichung des einem Dreieck ($\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$) umschriebenen Kreises
$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o.$$

Die geometrische Bedeutung der eben gefundenen Gleichung ist der Beachtung werth. Wenn wir von irgend einem Punkt $O$ die Senkrechten $OP$, $OQ$ auf die Linien $\alpha$, $\beta$ fällen, so sind $\alpha$, $\beta$ die Längen dieser Senkrechten; und weil der Winkel zwischen ihnen das Supplement von $C$ ist, so ist die Grösse $\alpha\beta \sin C$ das Doppelte des Inhalts des Dreiecks $OPQ$. In gleicher Art sind $\beta\gamma \sin A$ und $\gamma\alpha \sin B$ das Doppelte der Dreiecke $OQR$ und $ORP$. Also ist die Grösse
$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C$$
das Doppelte des Inhalts des Dreiecks $PQR$ und die im letzten Artikel gefundene Gleichung sagt aus, dass der Inhalt des Dreiecks $PQR$ ver-

Fig. 48.



schwindet, solange der Punkt $O$ auf der Peripherie des umschriebenen Kreises genommen wird; d. h. dass die drei Punkte $P, Q, R$ alsdann in einer geraden Linie liegen. Wenn gefordert ist, den Ort eines Punktes $O$ so zu bestimmen, dass das Dreieck $PQR$, welches die Fusspunkte der von ihm auf die Seiten des gegebenen Dreiecks gefällten Perpendikel zu Ecken hat, von constantem Inhalt sei, so wird die Gleichung des Ortes

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = \text{const.},$$

und weil diese von der Gleichung des umschriebenen Kreises nur im constanten Gliede abweicht, so ist es (Artikel 113) die Gleichung eines mit ihm concentrischen Kreises.

135. Aus der Gleichung

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = o$$

können wir die Gleichungen der Tangenten des Kreises in den Ecken des Dreiecks finden. Schreiben wir die Gleichung in der Form: $\gamma(\beta \sin A + \alpha \sin B) + \alpha\beta \sin C = o$, so sehen wir (Artikel 134), dass $\gamma$ den Kreis in den zwei Punkten schneidet, wo sie die Linien $\alpha, \beta$ schneidet, weil die Gleichung durch die Substitution $\gamma = o$ auf $\alpha\beta = o$ reducirt wird.

Aus demselben Grunde sind die Punkte, in welchen die Linie $\beta \sin A + \alpha \sin B$ den Kreis schneidet, diejenigen beiden, wo sie die Linien $\alpha$ und $\beta$ schneidet. Aber diese zwei Punkte fallen zusammen, weil $\beta \sin A + \alpha \sin B$ durch den Punkt $\alpha\beta$ geht. Weil aber die Linie $\beta \sin A + \alpha \sin B$ den Kreis in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet, ist sie eine Tangente desselben in dem Punkte $\alpha\beta$.

Wir sahen Artikel 64, dass $\alpha \sin A + \beta \sin B = o$ die Gleichung der Parallelen zur Basis $\gamma$ ist, die man durch die Spitze $\alpha\beta$ ziehen kann. Also macht nach Artikel 57 die Tangente $\alpha \sin B + \beta \sin A = o$ denselben Winkel mit einer Seite des Dreiecks, wie die Basis mit der andern. (Euklid III 32.)

Aus der Form der Gleichungen der drei Tangenten

$$\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\sin B} = o, \quad \frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C} = o, \quad \frac{\gamma}{\sin C} + \frac{\alpha}{\sin A} = o.$$

geht hervor, dass die drei Punkte, in denen jede von ihnen die Gegenseite des Dreiecks trifft, in gerader Linie liegen, nämlich in der geraden Linie, deren Gleichung ist

$$\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C} = o.$$

Man findet ferner, dass die Gleichungen der Verbindungslinien der Ecken des eingeschriebenen Dreiecks mit denen des umgeschriebenen sind

$$\frac{\alpha}{\sin A} - \frac{\beta}{\sin B} = o, \quad \frac{\beta}{\sin B} - \frac{\gamma}{\sin C} = o, \quad \frac{\gamma}{\sin C} - \frac{\alpha}{\sin A} = o;$$

ihre Form lehrt, dass sie sich in einem Punkte schneiden. (Art. 36).

136. Wir leiten demnächst ebenso die Gleichung des in das Dreieck $(\alpha, \beta, \gamma)$ eingeschriebenen Kreises ab. Die Gleichung

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\alpha\beta = o$$

repräsentirt eine Curve zweiten Grades, welche jede der Linien $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ berührt. Wenn wir den Punkt suchen, welchen eine Seite $\gamma$ mit dem durch diese Gleichung repräsentirten Orte gemein hat, so erhalten wir — durch Einsetzen von $\gamma = o$ — das vollkommene Quadrat $\quad l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 - 2lm\alpha\beta = o;$ die Wurzeln dieser Gleichung sind gleich und wir erfahren, dass die zwei Punkte, in denen $\gamma$ die Curve schneidet, zusammenfallen und dass daher $\gamma$ eine Tangente ist. In derselben Art kann gezeigt werden, dass die Linien $\alpha$ und $\beta$ die durch die vorige Gleichung dargestellte Curve berühren. Man kann diese Gleichung auch in der folgenden Form schreiben:

$$l^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} = o;$$

denn wenn man diese von Wurzeln befreit, so zeigt sie sich mit der oben geschriebenen identisch.

Als die einfachste Methode, die besondern Werthe von $l$, $m$, $n$ zu erhalten, für welche die vorige Gleichung einen Kreis repräsentirt, erscheint die, welche im Folgenden mitgetheilt wird. Verbinden wir die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises durch gerade Linien und repräsentiren die Gleichungen derselben durch $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = o$, die Winkel des von ihnen gebildeten Dreiecks aber durch $A'$, $B'$, $C'$; dann muss nach Artikel 134 die Gleichung des Kreises sein

$$\beta'\gamma' \sin A' + \gamma'\alpha' \sin B' + \alpha'\beta' \sin C' = o.$$

Nun haben wir im Artikel 133 gezeigt, dass für jeden Punkt im Kreise die Bedingungen $\alpha'^2 = \beta\gamma$, $\beta'^2 = \gamma\alpha$ und $\gamma'^2 = \alpha\beta$ erfüllt sind und es ist leicht zu sehen, dass

$$A' = 90^0 - \tfrac{1}{2}A, \quad B' = 90^0 - \tfrac{1}{2}B, \quad C' = 90^0 - \tfrac{1}{2}C.$$

Indem wir diese Werthe substituiren, erhalten wir die Gleichung des Kreises

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}C = o.$$

Die allgemeine Gleichung repräsentirt also einen Kreis, wenn $l, m, n$ proportional sind zu

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A,\ \cos^2\tfrac{1}{2}B,\ \cos^2\tfrac{1}{2}C.$$

Es kann in gleicher Art gezeigt werden, dass die Gleichung des die Seite $\alpha$ und die verlängerten Seiten $\beta$ und $\gamma$ berühren den Kreises ist

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}A + \beta^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}B + \gamma^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}C = o.$$

137. Da die im letzten Artikel gegebene allgemeine Gleichung in der Form

$$n\gamma(n\gamma - 2l\alpha - 2m\beta) + (l\alpha - m\beta)^2 = o$$

geschrieben werden kann, so folgt, dass die Linie $l\alpha - m\beta$, welche offenbar durch den Punkt $\alpha\beta$ geht, auch durch den Punkt gehen muss, wo $\gamma$ die Curve schneidet. Die drei Linien, welche die Berührungspunkte der Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, sind daher durch die Gleichungen

$$l\alpha - m\beta = o,\ m\beta - n\gamma = o,\ n\gamma - l\alpha = o$$

dargestellt und schneiden sich somit in einem Punkte.

Ganz derselbe Beweis, welcher zeigt, dass $\gamma$ die Curve berührt, lehrt auch, dass $n\gamma - 2l\alpha - 2m\beta$ die Curve berührt, denn wenn diese Grösse $= o$ gesetzt ist, haben wir das vollkommene Quadrat $(l\alpha - m\beta)^2 = o$; also schneidet diese Linie die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten d. h. berührt die Curve und $l\alpha - m\beta$ geht durch den Berührungspunkt. Wenn also die Ecken des Dreiecks mit den Berührungspunkten der Gegenseiten verbunden und in den Punkten, wo die Verbindungslinie den Kreis ferner schneidet, Tangenten gezogen werden, so sind die Gleichungen derselben

$$2l\alpha + 2m\beta - n\gamma = o,\ 2m\beta + 2n\gamma - l\alpha = o;\ 2n\gamma + 2l\alpha - m\beta = o.$$

Und wir erkennen, dass die drei Punkte, wo jede von diesen Tangenten die entgegengesetzte Seite des Dreiecks schneidet, in einer geraden Linie $\quad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$

liegen, denn diese Linie geht durch den Durchschnitt der ersten Geraden mit $\gamma$, durch den der zweiten mit $\alpha$ und ebenso durch den der dritten mit $\beta$.

Wir beantworten gleich an dieser Stelle als eine einfache Uebung die Frage: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die allgemeine Gleichung zweiten Grades

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 + 2p\beta\gamma + 2q\gamma\alpha + 2r\alpha\beta = o$$

einen Kreis repräsentirt?

Wir können uns zur Beantwortung auf den in der Aufg. 1 des Artikel 131 enthaltenen, überdies elementaren, Satz stützen, nach welchem das Rechteck der von einem Kreise auf allen durch denselben Punkt gehenden Transversalen gebildeten Abschnitte constant ist. Betrachten wir das Fundamentaldreieck $ABC$ und nennen die Schnittpunkte seiner Seiten $BC$, $CA$, $AC$ mit dem Kreise respective $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$, so müssen nach diesem Satze die Relationen

$$Ab_1 \,.\, Ab_2 = Ac_1 \,.\, Ac_2,$$
$$Bc_1 \,.\, Bc_2 = Ba_1 \,.\, Ba_2,$$
$$Ca_1 \,.\, Ca_2 = Cb_1 \,.\, Cb_2$$

bestehen.

Wenn wir aber die den Punkten $c_1$, $c_2$ entsprechenden Werthe von $\gamma$ durch $\gamma_1$, $\gamma_2$ und die Seitenlängen $BC$, $CA$, $AB$ des Fundamentaldreiecks durch $a$, $b$, $c$ bezeichnen, so ist

$$\frac{Ab_1}{b} = \gamma_1 \,. \qquad \frac{Ab_2}{b} = \gamma_2 .$$

Für jeden Punkt der Linie $CA$ oder $\beta = o$ ist aber auch

$$l\alpha^2 + n\gamma^2 + 2q\gamma\alpha = o \text{ und } \alpha + \gamma = 1,$$

in Folge dessen

$$l(1-\gamma)^2 + n\gamma^2 + 2q\gamma(1-\gamma) = o,$$

oder

$$\gamma^2(l + n - 2q) + 2\gamma(q - l) + l = o.$$

Daraus ergiebt sich

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{Ab_1 \,.\, Ab_2}{b^2} = \frac{l}{l + n - 2q} .$$

Ebenso erhält man

$$\frac{Ac_1 \,.\, Ac_2}{c^2} = \frac{l}{l + m - 2r}$$

und somit an Stelle der Relation

$$Ab_1 \,.\, Ab_2 = Ac_1 \,.\, Ac_2$$

$$\frac{l + n - 2q}{b^2} = \frac{l + m - 2r}{c^2} .$$

Die Untersuchung der andern Paare von Abschnitten ergänzt dies zu der symmetrischen Doppelbedingung

$$\frac{m+n-2p}{a^2}=\frac{n+l-2q}{b^2}=\frac{l+m-2r}{c^2}.$$

Man kann diese Bedingung auch in der Form

$$l\sin^2 B+m\sin^2 A-2r\sin A\sin B=m\sin^2 C+n\sin^2 B-2r\sin B\sin C$$
$$=n\sin^2 A+l\sin^2 C-2q\sin C\sin A$$

erhalten, indem man davon ausgeht, dass die Gleichung eines Kreises immer in der Form

$$\alpha\beta\sin C+\beta\gamma\sin A+\gamma\alpha\sin B+(\alpha\sin A+\beta\sin B+\gamma\sin C)$$
$$(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)=o$$

muss geschrieben werden können.

---

## Neuntes Kapitel.

# Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen.

---

138. Die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise zu finden.

Wenn $S=o$, $S'=o$ die Gleichungen zweier Kreise sind, so ist nach Artikel 36 jede Gleichung von der Form $S-kS'=o$ die Gleichung einer durch ihre Durchschnittspunkte gehenden Linie. Schreiben wir die Gleichungen

$$S=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=o.$$
$$S'=(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=o.$$

so ist offenbar, dass die Gleichung $S-kS'=o$ im Allgemeinen einen Kreis darstellt, weil der Coefficient von $xy$ Null und der Coefficient von $x^2$ dem von $y^2$ gleich ist. In einem Falle, nämlich für $k=1$, stellt sie aber eine gerade Linie dar; die Glieder des zweiten Grades verschwinden dann und die Gleichung wird

$$S-S'=2(a'-a)x+2(b'-b)y+r'^2-r^2+a^2-a'^2+b^2-b'^2=o.$$

Diese ist daher die Gleichung der durch die Durchschnittspunkte der beiden Kreise gehenden geraden Linie.

139. Die Durchschnittspunkte der zwei Kreise werden gefunden, indem man wie in Artikel 115 die Punkte sucht, in welchen die Linie $S - S'$ einen der gegebenen Kreise schneidet. Diese Punkte sind reelle, zusammenfallende oder imaginäre Punkte, je nach der Natur der Wurzeln der resultirenden Gleichung; aber es ist bemerkenswerth, dass, gleichviel ob die Kreise sich in reellen oder imaginären Punkten schneiden, die Gleichung der Durchschnittssehne $S - S' = o$ immer eine reelle gerade Linie repräsentirt, welche in Bezug auf beide Kreise wichtige geometrische Eigenschaften besitzt. Dies ist in Uebereinstimmung mit unsrer früheren Anmerkung, dass die Verbindungslinie zweier Punkte ihre Existenz und ihre Eigenschaften bewahren kann, wenn auch diese Punkte imaginär geworden sind. Um das Unangemessene zu vermeiden, welches die Benennung dieser Linie $S - S' = o$ als Durchschnittssehne dann hat, wenn die Kreise sich geometrisch nicht zu schneiden scheinen, ist sie die Radical-Achse*) beider Kreise genannt worden; auch die Benennung Chordale ist für dieselbe angewendet worden.**)

140. Eine der merkwürdigsten Eigenschaften dieser Linie ist in der geometrischen Bedeutung der Gleichung $S - S' = o$ bereits enthalten. Wir sahen (Artikel 118), dass die Substitution der Coordinaten eines beliebigen Punktes $xy$ in die Gleichung des Kreises das Quadrat der Tangente liefert, die man von ihm aus an den Kreis ziehen kann. Demnach sagt die Gleichung

$$S - S' = o$$

aus, dass die von einem beliebigen Punkte der Radical-Achse an beide Kreise gezogenen Tangenten gleich lang sind.

Die Linie $(S - S')$ besitzt diese Eigenschaft, gleichviel ob sie den Kreis in reellen Punkten schneidet oder nicht.

Wenn die Kreise sich nicht in reellen Punkten schneiden, so ist die Lage der Radical-Achse geometrisch bestimmt, indem sie die Verbindungslinie ihrer Centra so schneidet, dass die Differenz der Quadrate ihrer Theile gleich der Differenz der Quadrate der Halbmesser ist, und in diesem Theilpunkte sich senkrecht erhebt;

*) Gaultier, Journ. de l'école. pol. Cah. XVI. 1813.

**) Von H. Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen I. 93.

dies ist offenbar, weil auch die Tangenten von diesem Punkte einander gleich sein müssen.

Wenn verlangt wäre, den Ort eines Punktes zu finden, für welchen die von ihm zu zwei Kreisen gezogenen Tangenten in constantem Verhältniss stehen, so erhellt aus Artikel 118, dass die Gleichung des Ortes sein muss

$$S - k^2 S' = o;$$

dieselbe repräsentirt aber nach Art. 138 einen durch die reellen oder imaginären Durchschnittspunkte von $S$ und $S'$ gehenden Kreis. Wenn die Kreise $S$ und $S'$ sich nicht in reellen Punkten durchschneiden, so können wir die Relation, welche sie mit dem Kreise $S - k^2 S$ verbindet, ausdrücken, indem wir sagen, dass die drei Kreise eine gemeinschaftliche Radical-Achse haben.

141. Aus der Form der Gleichung der Radical-Achse zweier Kreise leiten wir das folgende Theorem ab:

Wenn drei Kreise gegeben sind und wir nehmen für jedes Paar derselben die Radical-Achse, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkt. Derselbe wird das Radical-Centrum*) der drei Kreise genannt.

Denn die Gleichungen der drei Radical-Achsen sind

$$S - S' = o, \quad S' - S'' = o, \quad S'' - S = o,$$

welche Linien sich nach Artikel 37 in einem Punkt schneiden. Aus diesem Theorem geht unmittelbar das Folgende hervor:

Wenn verschiedene Kreise durch dieselben zwei festen Punkte gehen, so geht ihre Durchschnittssehne mit einem festen Kreis durch einen festen Punkt.

Denn denken wir irgend einen der Kreise, die durch die zwei gegebenen Punkte gehen, als fest, so ist seine Durchschnittssehne mit dem gegebenen Kreise unveränderlich und seine Durchschnittssehne mit irgend einem andern durch die gegebenen Punkte gehenden Kreise die diese Punkte verbindende gerade Linie. Diese zwei geraden Linien bestimmen in ihrem Durchschnitt einen Punkt, durch welchen die Durchschnittssehne des veränderlichen Kreises mit dem gegebenen Kreise gehen muss.

*Aufg.* 1. Finde die Radical-Achse von

$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + 7 = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + 6x + 8y - 9 = 0$$

*Aufl.* $10x + 13y = 16.$

---

*) Der Chordalpunkt nach H. Plücker.

*Aufg.* 2. Finde das Radical-Centrum von
$(x-1)^2+(y-2)^2=7$, $(x-3)^2+y^2=5$, $(x+4)^2+(y+1)^2=9$.

*Aufl.* $\left(-\frac{1}{16}, -\frac{25}{16}\right)$.

142. Kreise, die eine gemeinschaftliche Radical-Achse besitzen, haben manche merkwürdige Eigenschaften; dieselben können leichter untersucht werden, indem man die Radical-Achse zur Achse der $y$ und die Verbindungslinie der Centra zur Achse der $x$ nimmt. Dann ist die Gleichung eines beliebigen Kreises aus dem System

$$x^2+y^2-2kx+\delta^2=o;$$

$\delta$ bleibt für alle Kreise des Systems constant und die Gleichungen der verschiedenen Kreise desselben werden erhalten, indem man dem $k$ verschiedene Werthe giebt. Denn offenbar liegt das Centrum in der Achse der $x$ (Artikel 113) in der veränderlichen Entfernung $k$ vom Anfangspunkt der Coordinaten; und wenn wir irgend zwei Kreise nehmen

$$x^2+y^2-2k'x+\delta^2=o,$$
$$x^2+y^2-2k''x+\delta^2=o,$$

und die Gleichung des einen von der des andern abziehen, so ergiebt sich für ihre Durchschnittssehne $x=o$ oder die Achse der $y$. Wenn wir dem $\delta^2$ das Zeichen $+$ geben, so schneidet die Radical-Achse die Kreise in imaginären Punkten, und wenn wir ihm das Zeichen $-$ geben, in reellen Punkten.

143. Wenn verschiedene Kreise durch dieselben zwei festen Punkte gehen, so geht die Polare eines gegebenen Punktes in Bezug auf irgend einen von ihnen auch durch einen festen Punkt.

Die Gleichung der Polare von $x'y'$ in Bezug auf

$$x^2+y^2-2kx+\delta^2=o$$

ist (Artikel 117)

$$xx'+yy'-k(x+x')+\delta^2=o;$$

diese Linie muss, weil ihre Gleichung die Unbestimmte $k$ im ersten Grade enthält, immer durch den Durchschnitt von

$$xx'+yy'+\delta^2=o \text{ und } x+x'=o$$

gehen.

144. Es können immer zwei Punkte so gefunden werden, dass ihre Polaren in Bezug auf irgend einen der Kreise nicht allein durch einen festen Punkt gehen, sondern ganz fest sind.

Das wird dann stattfinden, wenn

$$xx' + yy' + \delta^2 = o \text{ und } x + x' = o$$

dieselbe gerade Linie darstellen, denn diese gerade Linie ist dann die Polare, welches auch der Werth von $k'$ sei. Aber diese Identität tritt ein, wenn $y' = o$ und $x'^2 = \delta^2$ oder $x' = \pm \delta$.

Die zwei Punkte, deren Coordinaten wir eben gefunden haben, besitzen manche merkwürdige Eigenschaften in der Theorie dieser Kreise; sie liegen so, das die Polare des einen von ihnen in Bezug auf irgend einen der Kreise eine durch den andern gehende Senkrechte zur Centrallinie ist. Man kann die Gleichung des Kreises in der Form

$$y^2 + (x - k)^2 = k^2 - \delta^2,$$

schreiben und erkennt daraus, dass für alle Werthe von $k$, welche der Bedingung $k^2 < \delta^2$ genügen, der Kreis imaginär wird; für $k^2 = \delta^2$, ist die Gleichung von der Klasse 2.), Artikel 114, und repräsentirt einen Kreis von unendlich kleinem Radius, dessen Centrum die Coordinaten $y = o$, $x = \pm \delta$ hat. Demnach können die eben gefundenen Punkte selbst als Kreise des Systems betrachtet werden und in diesem Sinne sind sie von M. Poncelet als die Grenzpunkte des Systems der Kreise bezeichnet worden.*)

145. Wenn wir von irgend einem Punkte der Radical-Achse Tangenten an alle diese Kreise ziehen, so ist der Ort der Berührungspunkte nothwendig ein Kreis, weil wir bewiesen haben (Art. 140), dass alle diese Tangenten gleich lang sind. Auch muss dieser Kreis alle Kreise des gegebenen Systems unter rechten Winkeln schneiden, weil seine Radien Tangenten derselben sind. Die Gleichung dieses Kreises kann leicht gefunden werden.

Das Quadrat der Tangente von irgend einem Punkte

$$x = o,\ y = h$$

an den Kreis $\quad x^2 + y^2 - 2kx + \delta^2 = o;$

welches gefunden wird, indem man die Coordinaten desselben in diese Gleichung einsetzt, ist $h^2 + \delta^2$,

und der Kreis, dessen Centrum der Punkt $x = o$, $y = h$ und dessen Radius-Quadrat $= h^2 + \delta^2$ ist, hat die Gleichung

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2 + \delta^2 \text{ oder } x^2 + y^2 - 2hy = \delta^2.$$

Also, wie auch der in der Radical-Achse genommene Punkt liege (oder welches immer der Werth von $h$ sein mag), immer geht

*) Traité des Propriétés Project. p. 41.

dieser Kreis durch den festen Punkt $y = o$, $x = \pm \delta$, den wir im letzten Artikel gefunden haben.

Und wir erkennen, dass alle Kreise, welche das gegebene System unter rechten Winkeln schneiden, durch die Grenzpunkte des Systems gehen.

*Aufg. 1.* Man beweise den Satz: Wenn die Polare von $A$ in Bezug auf das System durch den festen Punkt $B$ geht, so gehören die beiden Grenzpunkte dem über $AB$ als Durchmesser beschriebenen Kreise an.

*Aufg. 2* Man beweise den Satz: Das Quadrat der Tangente von einem Punkte eines Kreises zu einem andern ist in einem constanten Verhältniss zu der Senkrechten von dem Punkte auf ihre Radical-Achse.

*Aufg. 3.* Den Winkel ($\alpha$) zu finden, unter welchem zwei Kreise sich schneiden. Bezeichnen wir die Radien der Kreise durch $R$ und $r$, und durch $D$ die Entfernung ihrer Centra, so ist

$$D^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha,$$

weil der Winkel, unter welchem die Kreise sich schneiden, gleich dem von ihren Radien im Durchschnittspunkt gebildeten Winkel ist.

*Aufg. 4.* Wenn ein beweglicher Kreis zwei feste Kreise unter constanten Winkeln schneidet, so schneidet er alle Kreise, die dieselben Radical-Achsen haben, unter constanten Winkeln.

Wir repräsentiren die Gleichungen der zwei festen Kreise durch $S = o$, $S' = o$ und ihre Radien durch $r$, $r'$; dann genügen die Coordinaten des Centrums des beweglichen Kreises den Bedingungen

$$R^2 - 2Rr \cos \alpha = S \text{ und } R^2 - 2Rr' \cos \beta = S',$$

weil $D^2 - r^2$, das Quadrat der Tangente an den ersten festen Kreis, gleich $S$ sein muss. (Art. 118.) Aus diesen Gleichungen schliessen wir aber: $R^2 - 2R \cdot \dfrac{kr \cos \alpha + lr' \cos \beta}{k + l} = \dfrac{kS + lS'}{k + l}$,

welches genau die Bedingung ist, unter welcher der bewegliche Kreis mit dem Kreis $kS + lS'$ den constanten Winkel bildet, für welchen

$$(k + l) r'' \cos \gamma = kr \cos \alpha + lr' \cos \beta$$

ist, sobald durch $r''$ der Radius des Kreises $kS + lS'$ bezeichnet wird.

*Aufg. 5.* Ein Kreis, welcher zwei feste Kreise unter constanten Winkeln schneidet, berührt auch zwei feste Kreise.

Denn wir können das Verhältniss $k : l$ so bestimmen, dass $\gamma = o$, oder $\cos \gamma = 1$ ist. Ist $D$ die Centraldistanz der Kreise $S$ und $S'$, so ergiebt sich $\quad (k + l)^2 r''^2 = (k + l)(kr^2 + lr'^2) - klD^2$,

und indem wir den daraus für $r''$ abgeleiteten Werth in die Gleichung der letzten Aufgabe einsetzen, ergiebt sich zur Bestimmung von $\dfrac{k}{l}$ eine quadratische Gleichung.

146. Eine gemeinsame Tangente zweier Kreise zu construiren.

Wir repräsentiren die beiden Kreise durch die Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

und symbolisch durch $S$,

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r'^2 \text{ oder } S'.$$

Aus Artikel 116 ist bekannt, dass die Gleichung einer Tangente zu $S$ die Form hat

$$(x - a)(x' - a) + (y - b)(y' - b) = r^2,$$

da nach Artikel 129

$$\frac{x' - a}{r} = \cos\alpha, \quad \frac{y' - b}{r} = \sin\alpha$$

gesetzt werden darf, so geht dieselbe über in

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = r.$$

Ebenso ist eine Tangente zu $S'$

$$(x - a')\cos\beta + (y - b')\sin\beta = r'.$$

Wir suchen die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit diese zwei Gleichungen dieselbe gerade Linie darstellen. Zuerst erfahren wir aus der Vergleichung des Verhältnisses der Coefficienten von $x$ und $y$, $\tan\alpha = \tan\beta$ also $\beta$ entweder $= \alpha$ oder $= 180^0 + \alpha$. Wenn eine von diesen Bedingungen erfüllt ist, so vergleichen wir ferner die absoluten Glieder und finden im ersten Falle

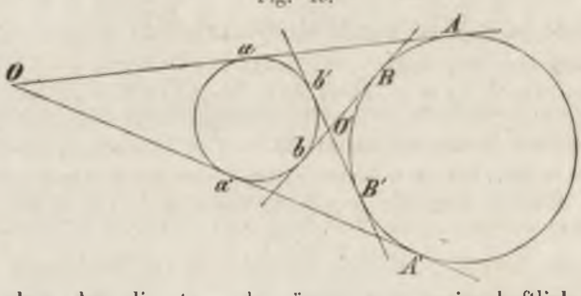
$$(a - a')\cos\alpha + (b - b')\sin\alpha + r - r' = o,$$

und im zweiten

$$(a - a')\cos\alpha + (b - b')\sin\alpha + r + r' = o.$$

Jede dieser Gleichungen ist in Bezug auf die Bestimmung von $\alpha$ eine quadratische Gleichung; die Wurzeln der ersten Gleichung

Fig. 49.




entsprechen den directen oder äusseren gemeinschaftlichen Tangenten $Aa$, $A'a'$, die Wurzeln der zweiten Gleichung den transversalen oder innern gemeinsamen Tangenten $Bb$, $B'b'$.

Wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes der gemeinsamen Tangente mit dem Kreis $S$ zu wissen wünschen, müssen wir in die eben gefundene Gleichung für $\cos\alpha$ den Werth $\frac{x'-a}{r}$ und für $\sin\alpha$ den Werth $\frac{y'-b}{r}$ substituiren und finden

$$(a-a')(x'-a)+(b-b')(y'-b)+r(r-r')=o.$$
$$(a-a')(x'-a)+(b-b')(y'-b)+r(r+r')=o.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt mit der Gleichung $S$ des Kreises combinirt, eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die Coordinaten der Punkte $A$ und $A'$ sind, in welchen die directen gemeinschaftlichen Tangenten den Kreis $S$ berühren; und man erhält wie in Artikel 117

$$(a'-a)(x-a)+(b'-b)(y-b)=r(r-r')$$

als die Gleichung von $AA'$, der Berührungssehne der directen gemeinsamen Tangenten. So ist gleicherweise

$$(a'-a)(x-a)+(b'-b)(y-b)=r(r+r')$$

die Gleichung der Berührungssehne der transversalen gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Centrum des Kreises $S$ zusammenfällt, so sind $a$ und $b=o$ und wir finden für die Gleichung der Berührungssehnen

$$a'x+b'y=r(r\mp r').$$

*Aufg.* Finde die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise $x^2+y^2-4x-2y+4=o$, $x^2+y^2+4x+2y-4=o$. Die Berührungssehnen der gemeinschaftlichen Tangenten mit dem ersten Kreise sind $2x+y=6$, $2x+y=3$.

Die erste Sehne schneidet den Kreis in den Punkten $(2,2)$ $\left(\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$, deren Tangenten sind $y=2$, $4x-3y=10$,
und die zweite Sehne schneidet den Kreis in den Punkten $(1,1)$ $\left(\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$, in welchen die Tangenten sind $x=1$, $3x+4y=5$.

147. Die Punkte $O$ und $O'$, in welchen die directen oder transversalen Tangenten sich schneiden, werden aus einem im nächsten Artikel auseinandergesetzten Grunde Centra der Aehnlichkeit beider Kreise genannt. Ihre Coordinaten können leicht bestimmt werden, denn $O$ ist der Pol der Sehne $AA'$, deren Gleichung ist $\frac{(a'-a)r}{r-r'}(x-a)+\frac{(b'-b)r}{r-r'}(y-b)=r^2$,
in Bezug auf den Kreis $S$.

Indem wir diese Gleichung mit der Gleichung der Polare des Punktes $x'y'$ vergleichen,

$$(x'-a)(x-a)+(y'-b)(y-b)=r^2,$$

erhalten wir

$$x'-a=\frac{a'-a}{r-r'}r \text{ oder } x'=\frac{a'r-ar'}{r-r'},$$

$$y'-b=\frac{b'-b}{r-r'}r \text{ oder } y'=\frac{b'r-br'}{r-r'}.$$

In der nämlichen Art findet man für die Coordinaten von $O'$ die Werthe:

$$x=\frac{a'r+ar'}{r+r'},\quad y=\frac{b'r+br'}{r+r'}.$$

Diese Werthe der Coordinaten zeigen an, dass die Centra der Aehnlichkeit die Punkte sind, in denen die Verbindungslinie der Centra äusserlich und innerlich in dem Verhältniss der Radien getheilt ist.

*Aufg.* Finde die gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise

$$x^2+y^2-6x-8y=0,\quad x^2+y^2-4x-6y=3.$$

Die Gleichung des Tangentenpaares zu

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

durch $x'y'$ ist (nach Art. 120)

$$[(x'-a)^2+(y'-b)^2-r^2]\,[(x-a)^2+(y-b)^2-r^2]=[(x-a)(x'-a)$$
$$+(y-b)(y'-b)-r^2]^2.$$

Nun sind die Coordinaten des äussern Aehnlichkeits-Centrums gefunden $(-2,\ -1)$ und es ist also das Paar der Tangenten durch dasselbe

$$25\,(x^2+y^2-6x-8y)=(5x+5y-10)^2,$$

oder

$$xy+x+2y+2=0,$$

oder

$$(x+2)(y+1)=0.$$

Da die gegebenen Kreise einander in reellen Punkten durchschneiden, so ist das andere Paar der gemeinsamen Tangenten imaginär; aber ihre Gleichung wird gefunden, indem man das Paar der Tangenten durch das andere Aehnlichkeits-Centrum $\left(\frac{22}{9},\ \frac{31}{9}\right)$ aufsucht; sie ist

$$40x^2+xy+40y^2-199x-278y+722=0.$$

148. Jede durch den Durchschnitt der gemeinsamen Tangenten gezogene gerade Linie wird durch die beiden Kreise in Proportion getheilt. Wenn man auf dem

Radius vector irgend eines Punktes $P$ einen Punkt $Q$ so bestimmt, dass $OP = m . OQ$, so sind das $x$ und $y$ des Punktes $P$ resp. das $m$fache von dem $x$ und $y$ des Punktes $Q$, und wenn daher $P$ eine Curve beschreibt, so wird der Ort von $Q$ durch Substitution von $mx$, $my$ für $x$ und $y$ in die Gleichung der durch $P$ beschriebenen Curve gefunden.

Wenn nun die gemeinschaftlichen Tangenten zu Achsen genommen werden, und wir $OA$ durch $a$, $OA'$ durch $a'$ bezeichnen, so sind die Gleichungen beider Kreise (Artikel 115, Aufg. 4)

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega - 2ax - 2ay + a^2 = o,$$

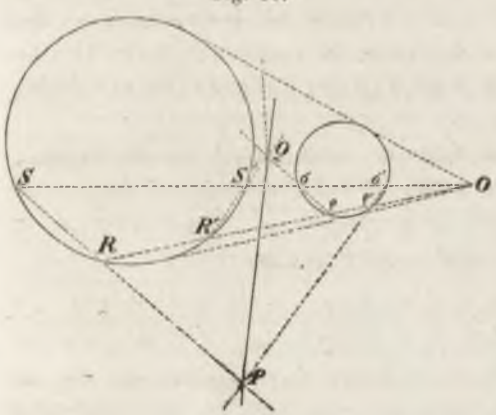
$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega - 2a'x - 2a'y + a'^2 = o.$$

Aber die zweite Gleichung geht aus der ersten hervor, wenn wir $\frac{ax}{a'}$, $\frac{ay}{a'}$ für $x$, $y$ in die erste Gleichung einsetzen, sie repräsentirt daher den durch Verlängerung jedes Radius vector des ersten Kreises im Verhältniss $a : a'$ erzeugten Ort.

Weil das Rechteck $O\varrho . O\varrho'$ constant ist (Fig. 50), und weil wir gezeigt haben, dass $OR$ in einem constanten Verhältniss zu $O\varrho$ ist, so folgt, dass das Rechteck $OR . O\varrho' = OR' . O\varrho$ constant ist, wie auch die Linie durch $O$ gezogen sei.

149. Wenn wir durch ein Aehnlichkeits-Centrum irgend zwei Linien ziehen, die den ersten Kreis in den Punkten $R, R', S, S'$, und den zweiten in den Punkten $\varrho, \varrho', \sigma, \sigma'$, schneiden, so sind die Sehnen $RS$, $\varrho\sigma$ und $R'S'$, $\varrho'\sigma'$ parallel, und die Sehnen $RS$, $\varrho'\sigma'$ und $R'S'$, $\varrho\sigma$ schneiden sich in der Radical-Achse der beiden Kreise.

Fig. 50.




Nehmen wir $OR$, $OS$ zu Achsen, so sehen wir, (Art. 148) dass $OR = m.O\varrho$, $OS = m.O\sigma$ und dass, wenn die Gleichung des Kreises $\varrho\sigma\varrho'\sigma'$ ist

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Ey + F = o,$$

die des andern sein muss

$$Ax^2 + Bxy + Ay^2 + m(Dx + Ey) + m^2F = o;$$

und daher ist die Gleichung der Radical-Achse (Artikel 139)

$$Dx + Ey + (m + 1) F = o.$$

Sind ferner die Gleichungen von $\varrho\sigma$ und $\varrho'\sigma'$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1,$$

so müssen die Gleichungen von $RS$ und $R'S'$ sein

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{mb} = 1, \quad \frac{x}{ma'} + \frac{y}{mb'} = 1.$$

Es ist aus der Form der Gleichungen offenbar, dass $RS$ zu $\varrho\sigma$ parallel ist; und $RS$ muss $\varrho'\sigma'$ in der Linie

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) = 1 + m$$

durchschneiden, oder, wie in Artikel 105, in der Linie

$$Dx + Ey + (1 + m) F = o,$$

der Radical-Achse beider Kreise.

Ein specieller Fall von diesem Theorem ist es, dass die Tangenten in $R$ und $\varrho$ parallel sind und die in $R$ und $\varrho'$ sich in der Radicalachse begegnen.

150. Wenn drei Kreise gegeben sind, so geht die Verbindungslinie eines Aehnlichkeits-Centrums des ersten und zweiten Kreises mit einem Aehnlichkeits-Centrum des ersten und dritten auch durch ein Aehnlichkeits-Centrum des zweiten und dritten.

Wenn wir die Gleichung der Linie bilden, die die Punkte

$$\left(\frac{ra' - r'a}{r - r'}, \frac{rb' - r'b}{r - r'}\right), \quad \left(\frac{ra'' - r''a}{r - r''}, \frac{rb'' - r''b}{r - r''}\right)$$

verbindet, so erhalten wir (Aufg. 7 Art. 29)

$$[r(b' - b'') + r'(b'' - b) + r''(b - b')]x - [r(a' - a'') + r'(a'' - a) + r''(a - a')]y + r(b'a'' - b''a') + r'(b''a - ba'') + r''(ba' - b'a) = o.$$

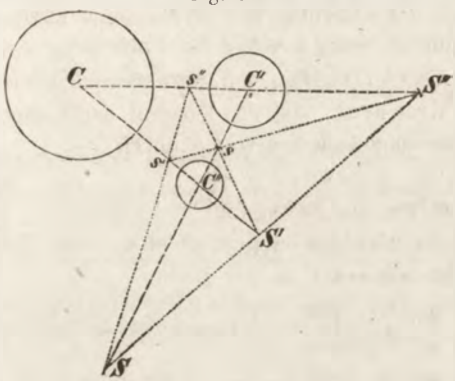
Die Symmetrie dieser Gleichung beweist, dass die von ihr dargestellte Linie auch durch das dritte Centrum der Aehnlichkeit

$$x = \frac{r'a'' - r''a'}{r' - r''},\quad y = \frac{r'b'' - r''b'}{r' - r''}$$

hindurchgeht.

Diese Linie wird die Achse der Aehnlichkeit der drei Kreise genannt. Weil für jedes Paar Kreise zwei Aehnlichkeits-Centra existiren, so giebt es für drei Kreise in Allem sechs und diese sind längs vier Achsen der Aehnlichkeit vertheilt, wie die Figur zeigt. Die Gleichungen der andern drei werden gefunden, indem man entweder das Zeichen von $r$, von $r'$ oder von $r''$ in der eben gegebenen Gleichung in das entgegengesetzte umwandelt.

Fig. 51.




151. Wenn ein Kreis ($\Sigma$) zwei andre ($S$ und $S'$) berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch ein Aehnlichkeits-Centrum von $S$ und $S'$.

Denn wenn zwei Kreise sich berühren, so fällt eins ihrer Aehnlichkeits-Centra mit dem Berührungspunkt zusammen und nach dem im letzten Artikel bewiesenen Theorem muss die Verbindungslinie eines Aehnlichkeits-Centrums von $S$ und $\Sigma$ mit einem Aehnlichkeits-Centrum von $S'$ und $\Sigma$ auch durch ein Aehnlichkeits-Centrum von $S$ und $S'$ gehen.

Wenn der Kreis $\Sigma$ die Kreise $S$ und $S'$ entweder beide äusserlich oder beide innerlich berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungpunkte auch durch das äussere Aehnlichkeits-Centrum von $S$ und $S'$. Wenn $\Sigma$ den einen Kreis äusserlich und den andern innerlich berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch das innere Aehnlichkeits-Centrum der Kreise $S$ und $S'$.

152. Wir beschliessen dies Kapitel durch die Untersuchung des Problems: Einen Kreis zu beschreiben, der drei ge-

gebene Kreise berührt. Die Gleichungen der drei Kreise mögen in den allgemeinen Formen

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=o \text{ oder } S=o,$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2=o \text{ oder } S'=o,$$
$$(x-a'')^2+(y-b'')^2-r''^2=o \text{ oder } S''=o$$

gegeben sein.

Wir können die Lage des Centrums des berührenden Kreises aus der Bedingung bestimmen, nach welcher die Entfernung zwischen den Mittelpunkten irgend zweier sich berührenden Kreise gleich der Summe ihrer Radien ist. Da das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes vom Centrum von $S$ durch

$$(x-a)^2+(y-b)^2=S+r^2$$

ausgedrückt wird so haben wir die Bedingung

$$S+r^2=(R+r)^2;$$

und in gleicher Weise ergeben sich

$$S'+r'^2=(R+r')^2,$$
$$S''+r''^2=(R+r'')^2.$$

Diese Gleichungen wenden sich offenbar auf den Fall der äusseren Berührung an. Wenn die Berührung zwischen irgend zwei Kreisen innerlich wäre, so ist die Entfernung zwischen den Centren gleich der Differenz der Radien und wir müssen das Zeichen von $r$ oder $r'$ oder $r''$ in den vorigen Formeln wechseln. Dies giebt zu den folgenden verschiedenen möglichen Zeichen-Combinationen Anlass:

$$\begin{array}{lcccccccc} r & + & + & + & + & - & - & - & -, \\ r' & + & + & - & - & + & + & - & -, \\ r'' & + & - & + & - & + & - & + & -; \end{array}$$

es können daher acht verschiedene Kreise gefunden werden, welche die drei gegebenen berühren. Wenn wir $R$ aus den vorigen Formeln eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen, welche uns gestatten, die Coordinaten des Centrums des berührenden Kreises zu bestimmen.

Wir erhalten durch Subtraction der Gleichungen

$$S-S'=2R(r-r') \text{ und } S-S''=2R(r-r''),$$

oder
$$\frac{S-S'}{r-r'}=\frac{S-S''}{r-r''}.$$

Dies ist die Gleichung der Linie, die das Centrum des berühren den Kreises mit dem Radical-Centrum verbindet (Artikel 141). Sie kann in der mehr symmetrischen Form geschrieben werden

$$(r' - r'')\, S + (r'' - r)\, S' + (r - r')\, S'' = o.$$

Wenn wir nun für $S$, $S'$, $S''$ ihre Werthe schreiben, so wird der Coefficient von $x$ in dieser Gleichung gefunden

$$-2[a(r' - r'') + a'(r'' - r) + a''(r - r')],$$

und der von $y$

$$-2[b(r' - r'') + b'(r'' - r) + b''(r - r')].$$

Durch Vergleichung dieser Coefficienten mit den in der Gleichung der Aehnlichkeits-Achse (Artikel 150) auftretenden, kommen wir nach Artikel 40 zu dem Schluss, dass das Centrum des Kreises, welcher drei andere berührt, in dem vom Radical-Centrum auf die Achse der Aehnlichkeit gefällten Perpendikel liegt.

Wir sahen, dass acht Kreise gezeichnet werden können, welche drei gegebene berühren, und da die drei Kreise vier Achsen der Aehnlichkeit haben, so müssen die Centra der berührenden Kreise paarweis auf den Senkrechten liegen, die man vom Radical-Centrum auf die vier Achsen der Aehnlichkeit fällen kann.

Ieder Achse der Aehnlichkeit entsprechen zwei Kreise, weil die Gleichung einer Achse der Aehnlichkeit (Artikel 150) unverändert bleibt, wenn wir darin die Vorzeichen aller Radien vertauschen. Also entspricht die dem Fall der äusseren Berührung $(+r + r' + r'')$ correspondirende Achse auch dem Fall der innern Berührung $(-r - r' - r'')$, und ebenso für die andern Achsen der Aehnlichkeit.

153. Aus den drei im letzten Artikel gefundenen Gleichungen können wir noch eine andre Relation zwischen den Coordinaten des Centrums des berührenden Kreises ableiten. Diese Relation ist jedoch vom zweiten Grade und obgleich für die algebraische Auflösung des Problems hinreichend, so erlaubt sie uns doch nicht, die Resultate in einer elementargeometrischen Art darzustellen.

Um diese Inconvenienz zu beseitigen, bestimmte Gergonne*) statt der Coordinaten des Centrums des berührenden Kreises die

*) Georgonne Annales VII, 289.

Coordinaten seines Berührungspunktes mit einem der gegebenen Kreise. Wir haben schon eine diese Coordinaten vereinigende Relation, weil der Punkt auf einem gegebenen Kreise liegt; wenn wir also noch eine andre Relation zwischen ihnen finden, so reicht dies zu seiner Bestimmung vollständig hin.

Nehmen wir zur Vereinfachung das Centrum des Kreises, dessen Berührungspunkt mit dem gesuchten Kreise wir finden wollen, zum Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. nehmen wir $a = o$, $b = o$, so müssen die Coordinaten $A$ und $B$ des Centrums von $\Sigma$ nach dem letzten Artikel die Relationen erfüllen

$$S - S' = 2R(r - r'),\quad S - S'' = 2R(r - r'').$$

Wenn aber $x$ und $y$ die Coordinaten des Berührungspunktes von $\Sigma$ mit $S$ sind, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken

$$A = \frac{x(R + r)}{r},\quad B = \frac{y(R + r)}{r}.$$

Die Substitution von $mx$, $my$ für $x$, $y$ in die Gleichung einer geraden Linie liefert dasselbe Ergebniss, wie die Multiplication der ganzen Gleichung mit $m$ und nachmalige Verminderung des absoluten Glieds um seinen $(m - 1)$ fachen Betrag; in Erinnerung, dass das absolute Glied in $S - S'$ (Artikel 138)

$$r'^2 - r^2 - a'^2 - b'^2$$

ist, erhalten wir als das Resultat der Substitution für $A$ und $B$ in die Gleichung $\quad (S - S') = 2R(r - r')$

$$\frac{R + r}{r}(S - S') + \frac{R}{r}(a'^2 + b'^2 + r^2 - r'^2) = 2R(r - r'),$$

oder

$$(R + r)(S - S') = R[(r - r')^2 - a'^2 - b'^2].$$

Ebenso finden wir

$$(R + r)(S - S'') = R[(r - r'')^2 - a''^2 - b''^2].$$

Die Elimination von $R$ aus diesen Gleichungen lehrt, dass der Berührungspunkt einer der Durchschnittspunkte des Kreises $S$ mit der geraden Linie

$$\frac{S - S'}{a'^2 + b'^2 - (r - r')^2} = \frac{S - S''}{a''^2 + b''^2 - (r - r'')^2}$$

ist.

154. Um nun die geometrische Lösung des Problems zu vervollständigen, ist es nöthig, zu zeigen, wie die gerade Linie, deren Gleichung eben gefunden wurde, zu construiren ist.

Sie geht offenbar durch das Radical-Centrum der Kreise und ein zweiter Punkt von ihr wird wie folgt gefunden. Schreiben wir $S - S'$ in voller Länge (Artikel 138) so ist die Gleichung

$$\frac{2a'x + 2b'y + r'^2 - r^2 - a'^2 - b'^2}{a'^2 + b'^2 - (r - r')^2} = \frac{2a''x + 2b''y + r''^2 - r^2 - a''^2 - b''^2}{a''^2 + b''^2 - (r - r'')^2}.$$

Und wenn wir zu beiden Seiten der Gleichung 1 addiren, so erhalten wir $\dfrac{a'x + b'y + (r' - r)r}{a'^2 + b'^2 - (r - r')^2} = \dfrac{a''x + b''y + (r'' - r)r}{a''^2 + b''^2 - (r - r'')^2}$;

welches zeigt, dass die obige Linie durch den Durchschnitt von

$$a'x + b'y + (r' - r)\, r = o$$

und

$$a''x + b''y + (r'' - r)\, r = o$$

geht.

Aber die erste dieser geraden Linien ist nach Artikel 146 die Berührungssehne der gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise $S$ und $S'$ im Kreise $S$; oder in andern Worten (Art. 147): sie ist die Polare des Aehnlichkeits-Centrums dieser Kreise in Bezug auf $S$. Ebenso ist die zweite gerade Linie die Polare des Aehnlichkeits-Centrums der Kreise $S$ und $S''$; daher — weil der Durchschnitt irgend zweier Linien der Pol der Verbindungslinie ihrer Pole ist, — ist der Durchschnitt der Linien:

$$a'x + b'y + (r' - r)\, r = o \text{ und } a''x + b''y + (r'' - r)\, r = o$$

der Pol der Aehnlichkeits-Achse der drei Kreise in Bezug auf den Kreis $S$.

Wir erhalten somit die folgende Construction (Fig. 52):

Wir ziehen irgend eine der 4 Aehnlichkeits-Achsen der drei Kreise, nehmen ihren Pol in Bezug auf jeden Kreis und verbinden die so gefundenen Punkte ($P$, $P'$, $P''$) mit dem Radical-Centrum; wenn die Verbindungslinien die Kreise in den Punkten $ab$, $a'b'$, $a''b''$ schneiden, so ist der durch $a$, $a'$, $a''$ gehende Kreis einer von denen, welche die drei Kreise berühren, und der Kreis durch $b$, $b'$, $b''$ ein andrer.

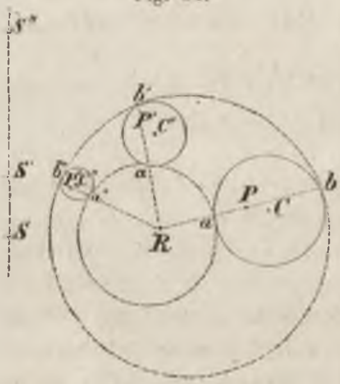
Indem man dies Verfahren mit den andern drei Achsen der Aehnlichkeit wiederholt, erhält man die andern sechs berührenden Kreise.

155. Es ist nützlich zu zeigen, wie die vorigen Resultate ohne algebraische Rechnungen abgeleitet werden können.

1.) Nach Art. 151 schneiden sich die Linien $ab$, $a'b'$, $a''b''$ in einem Punkte, nämlich im Centrum der Aehnlichkeit der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.

2.) Ebenso schneiden sich $a'a''$, $b'b''$ in $S$, dem Centrum der Aehnlichkeit von $C'$, $C''$.

Fig. 52.



3.) Daher schneiden sich die transversalen Linien $a'b'$, $a''b''$ in der Radical-Achse von $C'$,$C''$; ebenso $a''b''$, $ab$ in der Radical-Achse von $C''$, $C$. Daher muss der Punkt $R$ (das Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$), das Radical-Centrum der Kreise $CC'C''$ sein.

4.) Weil auch $a'b'$, $a''b''$ durch ein Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$ gehen, so schneiden sich (Art. 149) $a'a''$, $b'b''$ in der Radical-Achse dieser zwei Kreise. Daher müssen auch die Punkte $S'$ und $S''$ in derselben Radical-Achse liegen und daher ist $SS'S''$ oder die Achse der Aehnlichkeit der Kreise $C, C', C''$ die Radical-Achse der Kreise $aa'a''$, $bb'b''$.

5.) Weil $a''b''$ durch das Centrum der Aehnlichkeit von $aa'a''$, $bb'b''$ geht, so müssen die Tangenten an diese Kreise in den Punkten, wo sie dieselben schneidet, sich in der Radicalachse $SS'S''$ begegnen. Aber dieser Durchschnittspunkt muss offenbar der Pol von $a''b''$ in Bezug auf den Kreis $C''$ sein. Weil nun der Pol von $a''b''$ in $SS'S''$ liegt, so muss der Pol von $SS'S''$ in Bezug auf den Kreis $C''$ in $a''b''$ liegen. Also wird $a''b''$ construirt, indem man das Radical-Centrum mit dem Pol von $SS'S''$ in Bezug auf $C''$ verbindet.

6.) Weil das Aehnlichkeits-Centrum zweier Kreise in der Verbindungslinie ihrer Centra liegt, und die Radical-Achse zu dieser Linie senkrecht ist, so lernen wir wie in Art. 152, dass die Verbindungslinie der Centra von $aa'a''$ und $bb'b''$ durch $R$ geht und auf $SS'S''$ senkrecht ist.

*Aufg.* Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise unter bestimmten Winkeln schneidet.

Mit Hilfe der Aufg. 5 Art. 145 wird dies auf das Problem des gegenwärtigen Art. zurückgeführt; übrigens können die drei Gleichungen $R^2 - 2Rr\cos\alpha = S$, $R^2 - 2Rr'\cos\beta = S'$, $R^2 - 2Rr''\cos\gamma = S''$ auch direct wie in Art. 152 discutirt werden.

## Zehntes Kapitel.

# Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades als Central-Gleichung:

## Ellipse und Hyperbel.

156. In der Untersuchung der Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel werden unsere Gleichungen durch die Voraussetzung wesentlich vereinfacht, dass das Centrum mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt. Wir sahen, dass durch diese Transformation die Coefficienten von $x$ und $y$ in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades gleich Null werden, so dass sie die Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F' = o$$

annimmt.

Es ist dabei nützlich, den Werth von $F'$ in Gliedern der Coefficienten der erst gegebenen Gleichung zu wissen; wir sahen in Art. 84, dass

$$F' = Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F,$$

wo $x'y'$ die Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind. Die Berechnung dieser Grösse wird erleichtert, indem man sie in die Form bringt

$$F' = \tfrac{1}{2}\left[(2Ax' + By' + D)x' + (2Cy' + Bx' + E)y' + (Dx' + Ey' + 2F)\right].$$

Die ersten beiden Glieder müssen für die Coordinaten des Centrums $= o$ werden und das letzte nach Art. 93:

$$= D \cdot \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} + E \cdot \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} + 2F,$$

also
$$F' = \frac{AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF}{B^2 - 4AC}.$$

Wenn der Zähler dieses Bruches $= o$ wird, so reducirt sich die Gleichung durch die Transformation auf die Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o,$$

und stellt daher nach Art. 74 zwei reelle oder imaginäre gerade Linien dar, je nachdem $B^2 - 4AC$ positiv oder negativ ist. Wie wir schon im Art. 72 gesehen haben, so ist auch hiernach die Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien darstelle,

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = o.$$

Denn diese Gleichung muss offenbar erfüllt sein, damit, wenn wir den Coordinatenanfang nach dem Durchschnittspunkt der geraden Linien verlegen, das absolute Glied verschwinde.

*Aufg. 1.* Transformire $3x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = o$ zum Centrum $(\frac{7}{2}, -4)$.

$$12x^2 + 16xy + 4y^2 + 1 = o.$$

*Aufg. 2.* Transformire $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = o$ zum Centrum $(-3, -1)$.

$$x^2 + 2xy - y^2 = 22.$$

157. Wenn man die Transformation des Coordinatenanfangs nach dem Centrum der Curve mit der Wahl zweier beliebigen conjugirten Durchmesser zu Coordinatenachsen verbindet, so verschwindet auch das Glied $Bxy$ aus der Gleichung und die allgemeine Gleichung zweiten Grades reducirt sich auf die Form

$$Ax^2 + Cy^2 = F.$$

Wir haben in Art. 97, 98 gezeigt, dass es für jede Curve zweiten Grades ein Paar conjugirte Durchmesser giebt, welche rechtwinklig zu einander sind und sie als die Achsen der Curve bezeichnet.

Für die Transformation einer bestimmten numerischen Gleichung des zweiten Grades aus der allgemeinen Form in die specielle, welche sie annimmt, wenn die Achsen der Curve zu Coordinatenachsen genommen sind, ist die Kenntniss des folgenden Satzes von grossem Vortheil: Wenn eine Gleichung des zweiten Grades von einem Paar rectangulärer Achsen zu einem andern transformirt wird, so bleiben die Grössen $A + C$ und $B^2 - 4AC$ unverändert.

Der erste Theil wird unmittelbar bewiesen, indem man die Werthe des neuen $A$ und $C$ addirt (Art. 98), weil wir dann erhalten

$$A' + C' = A + C.$$

Um den zweiten Theil zu beweisen, schreiben wir die Werthe des Art. 98 in den folgenden Formen:

$$2A' = A + C + B \sin 2\vartheta + (A - C) \cos 2\vartheta,$$
$$2C' = A + C - B \sin 2\vartheta - (A - C) \cos 2\vartheta.$$

Daraus folgt

$$4A'C' = (A + C)^2 - [B \sin 2\vartheta + (A - C) \cos 2\vartheta]^2.$$

Aber nach demselben Artikel ist auch

$$B'^2 = [B \cos 2\vartheta - (A - C) \sin 2\vartheta]^2;$$

daher $\quad B'^2 - 4A'C' = B^2 + (A - C)^2 - (A + C)^2 = B^2 - 4AC.$

Stellen wir daher die Forderung, die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts für rechtwinklige Coordinatenachsen zu den Achsen der Curve selbst zu transformiren, so sind die neuen Coefficienten mit den alten durch die beiden Bedingungsgleichungen verbunden

$$A' + C' = A + C, \; 4A'C' = 4AC - B^2.$$

Denn $B'$ ist gleich Null, da die neuen Coordinatenachsen ein Paar conjugirte Durchmesser sind. Diese Bedingungen liefern das Product und die Summe der neuen Coefficienten $A'$ und $C'$, und erlauben somit, die quadratische Gleichung zu bilden, welche diese Grössen bestimmt.

*Aufg. 1.* Bestimme die Achsen der Ellipse $14x^2 - 4xy + 11y^2 = 60$ und transformire die Gleichung zu ihnen.

Die Achsen sind Art. 97

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = o \text{ oder } (2x - y)(x + 2y) = o.$$

Wir haben $A' + C' = 25$, $4A'C' = 600$; also $A' = 10$, $C' = 15$; und die transformirte Gleichung ist $2x^2 + 3y^2 = 12$.

*Aufg. 2.* Transformire die Hyperbel $11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$ zu den Achsen.

$$A' + C' = -13, \; A'C' = -2028; \; A' = 39, \; C' = -52.$$

Die transformirte Gleichung ist $3x^2 - 4y^2 = 12$.

*Aufg. 3.* Transformire $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ zu den Achsen.

$$(A + C - R)x^2 + (A + C + R)y^2 = 2F, \text{ wo } R^2 = B^2 + (A - C)^2.$$

158. Nachdem wir gezeigt haben, dass die Grössen $A + C$ und $B^2 - 4AC$ unverändert bleiben, wenn wir von einem rectangulären System zu einem andern transformiren, liegt die Frage nahe, wie sich diese Grössen beim Uebergang zu irgend einem schiefwinkligen Coordinatensystem verhalten.

Wir können zu der alten Achse der $x$ zurückkehren und haben, wenn wir eine Achse der $y$ annehmen, welche zu ihr unter dem Winkel $\omega$ geneigt ist, nach Art. 9 für $x$: $x + y \cos\omega$ und für $y$: $y \sin\omega$ einzusetzen. Wir haben dann die Bedingungsgleichungen: $A' = A$, $B' = 2A\cos\omega + B\sin\omega$,

$$C' = A\cos^2\omega + B\cos\omega\sin\omega + C\sin^2\omega.$$

Daraus folgt

$$\frac{A' + C' - B'\cos\omega}{\sin^2\omega} = A + C, \; \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\omega} = B^2 - 4AC.$$

Wenn wir daher die Gleichung von irgend einem Systeme der Coordinatenachsen zu einem beliebigen andern Systeme transformiren, so bleiben die Grössen

$$\frac{A + C - B\cos\omega}{\sin^2\omega} \text{ und } \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega}$$

ungeändert.

Wir können mit Hilfe dieses Theorems eine in schiefen Coordinaten gegebene Gleichung zu den Achsen transformiren, denn wir können immer die Summe und das Product des neuen $A$ und $C$ in Gliedern der alten Coefficienten ausdrücken.

*Aufg. 1.* Man transformire die Gleichung $10x^2 + 6xy + 5y^2 = 10$ unter der Voraussetzung $\cos\omega = \frac{3}{5}$ zu den Achsen.

Es ist $A + C = \frac{285}{16}$, $AC = \frac{1025}{16}$, folglich $A = 5$, $C = \frac{205}{16}$, und die transformirte Gleichung $16x^2 + 41y^2 = 32$.

*Aufg. 2.* Transformire $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ zu den Achsen für $\omega = 60^0$.

*Aufl.* $$x^2 - 15y^2 = 3.$$

*Aufg. 3.* Transformire $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ zu den Achsen.

*Aufl.* $(A+C-B\cos\omega - R)x^2 + (A+C-B\cos\omega + R)y^2 = 2F\sin^2\omega$,

wo $$R^2 = [B - (A+C)\cos\omega]^2 + (A-C)^2\sin^2\omega.$$

159. Wir halten es für nützlich, hier einen andern Beweis von den beiden wichtigen Theoremen der letzten Artikel anzuschliessen.

Angenommen, dass eine Gleichung für Achsen, welche den Winkel $\omega$ mit einander bilden, zu anderen unter dem Winkel $\Omega$ geneigten Achsen transformirt werden soll, und dass dabei durch die Substitutionen des Art. 9 die Grösse

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

in $$A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

übergehe, so muss doch immer durch die nämliche Substitution die Grösse $$x^2 + 2xy\cos\omega + y^2$$

in die andre $$X^2 + 2XY\cos\Omega + Y^2$$

übergeführt werden, weil die eine wie die andere die bei der Transformation unverändert gebliebene Entfernung eines Punktes vom Anfangspunkt der Coordinaten repräsentirt. Daraus folgt aber, dass $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + h(x^2 + 2xy\cos\omega + y^2)$$

$$= A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + h(X^2 + 2XY\cos\Omega + Y^2)$$

sein muss.

Und wenn wir $h$ so bestimmen, dass die linke Seite der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, so muss die rechte Seite auch ein vollkommenes Quadrat sein. Aber die Bedingung, unter welcher erstere ein vollkommenes Quadrat wird, ist

$$(B + 2h \cos \omega)^2 = 4(A + h)(C + h),$$

oder $h$ muss eine der Wurzeln der Gleichung sein

$$4h^2 \sin^2\omega + 4(A + C - B \cos \omega)h + 4AC - B^2 = o.$$

Wir erhalten eine zweite quadratische Gleichung von derselben Form zur Bestimmung des Werthes von $h$, der die andere Seite der Gleichung zu einem vollkommenen Quadrat macht; aber weil beide Seiten für dieselben Werthe von $h$ vollkommene Quadrate werden müssen, so ist es nöthig, dass diese beiden Bestimmungsgleichungen identisch sind, d. h. dass ihre correspondirenden Coefficienten übereinstimmen. Es ergiebt sich also, wie vorher:

$$\frac{A + C - B \cos \omega}{\sin^2\omega} = \frac{A' + C' - B' \cos \Omega}{\sin^2\Omega}, \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\omega} = \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\Omega}.$$

Wir schliessen in der Form von Aufgaben die Beweise einiger Sätze an, welche sich hieraus sehr leicht gewissermassen als Corollare ergeben.

*Aufg.* 1. Die Summe der Quadrate von den Reciproken zweier zu einander rechtwinkliger Halbdurchmesser ist constant. Sind ihre Längen $a$, $b$, so ergiebt sich, indem wir nach einander in der Gleichung der Curve $x = o$, $y = o$ machen

$$Aa^2 = F, \; Cb^2 = F,$$

und das eben ausgesprochene Theorem ist nur die geometrische Erläuterung des Factums, dass $A + C$ constant ist.

*Aufg.* 2. Der Inhalt des durch Verbindung der Endpunkte zweier conjugirten Durchmesser gebildeten Dreiecks ist constant. Die auf zwei conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung ist $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ und weil $\frac{4AC - B^2}{\sin^2\omega}$ constant ist, so ist auch $a'b' \sin \omega$, der Inhalt des bezeichneten Dreiecks, constant.

*Aufg.* 3. Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Halbdurchmesser ist constant. Weil $\frac{A + C - B \cos \omega}{\sin^2\omega}$ constant ist, so ist $\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right)$ constant und daher, weil es $a'b' \sin \omega$ ist, auch $a'^2 + b'^2$.

## Die auf die Achsen bezogene Gleichung.

160. Wir sahen, dass die auf die Achsen bezogene Gleichung von der Form war $Ax^2 + Cy^2 = F$, worin $C$ in dem Fall der Ellipse positiv, und im Fall der Hyperbel negativ ist. (Art. 90, 2.)

Die Gleichung der Ellipse kann in der folgenden schicklicheren Form geschrieben werden: Seien die durch die Ellipse in den Achsen gemachten Abschnitte $x = a$, $y = b$, so finden wir, indem wir $y = o$ und $x = a$ in der Gleichung der Curve machen

$$Aa^2 = F \text{ und } A = \frac{F}{a^2}.$$

In gleicher Weise wird $C = \frac{F}{b^2}$. Durch die Substitution dieser Werthe kann die Gleichung der Ellipse geschrieben werden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Weil wir zur Achse der $x$, welche Achse uns beliebt, wählen können, so wollen wir voraussetzen, dass wir die Achsen so gewählt haben, dass $a$ grösser als $b$ sei.

Die Gleichung der Hyperbel, welche, wie wir sahen, von der der Ellipse nur in dem Vorzeichen des Coefficienten von $y^2$ abweicht, nimmt durch dieselben Substitutionen die entsprechende Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

an.

Der Abschnitt in der Achse der $x$ ist offenbar $= \pm a$, aber der in der Achse der $y$, gefunden aus der Gleichung $y^2 = -b^2$, ist imaginär. Die Achse der $y$ schneidet also die Curve nicht in reellen Punkten.

Weil wir zur Achse der $x$ die Achse gewählt haben, welche die Curve in reellen Punkten schneidet, so sind wir in diesem Falle nicht berechtigt, anzunehmen, dass $a$ grösser ist als $b$.

161. Die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn das Centrum zum Pol genommen ist.

Wir schreiben $\varrho \cos \vartheta$ für $x$ und $\varrho \sin \vartheta$ für $y$ in der vorhergehenden Gleichung und erhalten

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{b^2},$$

eine Gleichung, welche wir in einer der äquivalenten Formen schreiben können,

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\vartheta} = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\vartheta}.$$

Es ist üblich, die folgenden Abkürzungen zu gebrauchen:

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2;$$

und die Grösse $e$ wird die Excentricität der Curve genannt*). Indem wir den Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches durch $a^2$ dividiren, erhalten wir die zumeist gebrauchte Form, nämlich

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2\vartheta}.$$

162. Die Figur der Ellipse zu untersuchen. Der kleinste Werth, welchen $b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\vartheta$ haben kann, wird erhalten für $\vartheta = o$ oder $\vartheta = \pi$; aus

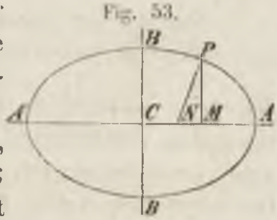
$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\vartheta}$$

ergiebt sich daher als der grösste Werth von $\varrho$ der Abschnitt in der Achse der $x$ $\quad \varrho = \pm a.$

Ferner ist der grösste Werth von $b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\vartheta$ der für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, oder $\sin\vartheta = \pm 1$; demnach ist der kleinste Werth von $\varrho$ der in der Achse der $y$ bestimmte Abschnitt $\varrho = \pm b$. Die längste Sehne, die man durch das Centrum ziehen kann, ist somit die Achse der $x$ und die kürzeste die Achse der $y$; deshalb nennt man diese Linien die grosse und die kleine Achse der Curve.

Es ist offenbar, dass $\varrho$ wächst, während $\vartheta$ abnimmt und umgekehrt; also jeder Durchmesser ist um so länger, je weniger seine Richtung von der der grossen Achse abweicht. Die Form der Curve ist daher die hier dargestellte. (Fig. 53.)

Fig. 53.




Wir erhalten denselben Werth von $\varrho$, ob wir voraussetzen $\vartheta = \alpha$ oder $\vartheta = -\alpha$; d. h. zwei Durchmesser, welche mit

*) Man hat auch wohl beide Grössen durch den Namen der Excentricität bezeichnet und $c$ von $e$ als die lineare von der numerischen Excentrität unterschieden.

*der Achse gleiche Winkel machen, sind gleich.* Es ist leicht zu sehen, dass die Umkehrung dieses Theorems auch wahr ist.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, wenn das Centrum eines Kegelschnitts gegeben ist, seine Achsen geometrisch zu bestimmen. Denn beschreiben wir irgend einen mit ihm concentrischen Kreis, welcher den Kegelschnitt schneidet, so sind die durch die Durchschnittspunkte gehenden Durchmesser einander gleich; und nach dem eben bewiesenen Theorem sind die Achsen des Kegelschnitts die innere und äussere Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels.

163. Die Gleichung der Ellipse kann in eine andre Form gebracht werden, welche die Gestalt der Curve noch deutlicher erkennen lässt. Die Auflösung derselben für $y$ liefert:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Wenn wir nun mit dem Halbmesser $a$ einen concentrischen Kreis beschreiben, so ist seine Gleichung

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und wir leiten daraus die folgende Construction ab: *Man beschreibe einen Kreis über der grossen Achse* (Fig. 54) *und nehme in jeder Ordinate $LQ$ desselben einen Punkt $P$ so, dass $LP$ und $LQ$ in einem constanten Verhältniss $b:a$ sei; der Ort von $P$ ist die geforderte Ellipse.*

Fig. 54.

Demnach liegt der über der grossen Achse beschriebene Kreis ganz ausserhalb der Ellipse. Wir können aus denselben Gründen die Ellipse auch construiren, indem wir über der kleinen Achse einen Kreis beschreiben und jede Ordinate in dem constanten Verhältniss $a:b$ vergrössern. Der über der kleinen Achse beschriebene Kreis liegt mithin völlig innerhalb der Curve. Die Verbindung beider Betrachtungen liefert endlich die folgende Construction der Ellipse aus ihren Achsen: Man zeichnet die concentrischen Kreise, welche die Achsen zu Durchmessern haben, verzeichnet in denselben einen beliebigen Durchmesser und legt durch die den beiden Kreisen angehörigen Endpunkte desselben je eine Parallele zu der Achse der Ellipse, welche der Durchmesser des andern Kreises ist: Die Durchschnittspunkte dieser Parallelen sind Punkte der Ellipse.

Die Gleichung des Kreises ist die specielle Form, welche die Gleichung der Ellipse annimmt, wenn wir voraussetzen $b = a$.

164. Die Polargleichung der Hyperbel zu finden. Die Transformation zu Polarcoordinaten liefert (Artikel 161) die Gleichung der Hyperbel in den äquivalenten Formen

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\vartheta - a^2 \sin^2\vartheta} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\vartheta} = \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)\cos^2\vartheta - a^2}$$

Weil Formeln, die die Ellipse betreffen, in die entsprechenden Formeln für die Hyperbel übergehen, indem man das Zeichen von $b^2$ verwechselt, so müssen wir in diesem Falle die Abkürzung $c^2$ für $a^2 + b^2$ und $e^2$ für $\frac{a^2 + b^2}{a^2}$ gebrauchen, die Grösse $e$ wird die Excentricität der Hyperbel genannt. Wir dividiren den Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches durch $a^2$ und erhalten die Polargleichung der Hyperbel, welche nur im Zeichen von $b^2$ von der der Ellipse abweicht, nämlich

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2\vartheta - 1}.$$

165. Die Figur der Hyperbel zu untersuchen. Die Namen grosse Achse und kleine Achse sind nicht auf die Hyberbel anwendbar (Artikel 160), und wir wollen daher die Achse der $x$ die transversale oder Hauptachse und die der $y$ die conjugirte oder Nebenachse nennen. Der Ausdruck

$$b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\vartheta,$$

der Nenner in dem Werthe von $\varrho^2$, wird offenbar am grössten, wenn $\vartheta = o$ oder $= \pi$; daher ist in demselben Fall $\varrho$ am kleinsten, oder die transversale Achse ist die kürzeste Sehne, welche durch das Centrum der Curve gezogen werden kann.

Wenn $\vartheta$ wächst, so wächst $\varrho$ stetig mit, bis zu dem durch

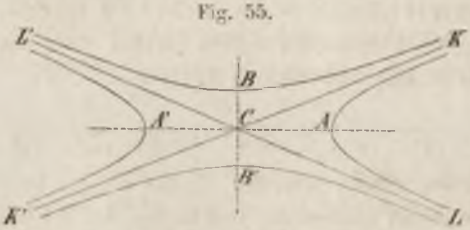
$$\sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \left(\text{oder } \tan\vartheta = \frac{b}{a}\right)$$

bestimmten Werthe von $\vartheta$, wo der Nenner des Werthes von $\varrho$ Null und $\varrho$ unendlich gross wird. Jenseits dieses Werthes von $\vartheta$ wird $\varrho^2$ negativ und die Durchmesser hören auf, die Curve in reellen Punkten zu schneiden, bis

$$\sin\vartheta = -\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \left(\text{oder } \tan\vartheta = -\frac{b}{a}\right),$$

wo $\varrho$ wieder unendlich gross wird. Es nimmt dann ebenso regelmässig ab, wie $\vartheta$ ferner wächst, bis $\vartheta = 180^0$, wo es wieder seinen kleinsten Werth $= a$ annimmt. Die Form der Hyperbel ist daher die in den durch $A'$ und $A$ gehenden Curven der Figur 55 dargestellte.

Fig. 55.




166. Wir fanden, dass die Achse der $y$ die Curve nicht in reellen Punkten schneidet, weil wir die Gleichung $\varrho^2 = -b^2$ zur Bestimmung ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve erhielten. Wenn wir jedoch unbeschadet dessen auf der Achse der $y$ die Strecken $CB = CB' = \pm b$ abtragen, so findet sich, dass die Länge $CB$ eine wichtige Beziehung zur Curve hat, und schicklich eine Achse der Curve genannt werden kann. Man kann ebenso auf jedem andern Durchmesser, für dessen Länge sich die Bestimmungsgleichung

$$\varrho^2 = -R^2$$

ergiebt, die Längen $\pm R$ abtragen, obgleich er die Curve nicht in reellen Punkten schneidet und die so erhaltene Linie als einen Durchmesser der Hyperbel bezeichnen.

Die Gleichung des von den Endpunkten dieser Durchmesser, welche die Curve nicht in reellen Punkten schneiden, gebildeten Ortes wird gefunden, indem man das Zeichen von $\varrho^2$ in der Gleichung der Curve vertauscht,

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2\vartheta}{b^2} - \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Es ist die Gleichung einer Hyperbel, welche die Achse der $y$ zur Hauptachse und die Achse der $x$ zur Nebenachse hat. Sie ist durch die die Punkte $B$, $B'$ enthaltende Curve der Figur repräsentirt und wird als die conjugirte Hyperbel der gegebenen bezeichnet.

167. Wir zeigten im Artikel 165, dass die dem Werth

$$\tan\vartheta = \pm \frac{b}{a}$$

entsprechenden Durchmesser die Curve im Unendlichen schneiden; sie sind daher dieselben, wie die im Art. 97 Asymptoten der Curve genannten Linien. Es sind die Linien $CK$, $CL$ in der Figur, und sie trennen offenbar die Durchmesser, welche die Curve in reellen Punkten schneiden, von denen, welche sie in imaginären Punkten schneiden. Man erkennt auch, dass zwei conjugirte Hyperbeln dieselben Asymptoten haben. Der Ausdruck

$$\tan\vartheta = \pm \frac{b}{a}$$

erlaubt uns aus den der Grösse und Lage nach gegebenen Achsen die Asymptoten zu finden; denn wenn wir ein Rechteck bilden, indem wir durch $B$ und $A$ Parallelen zu den Achsen ziehen, so sind die Asymptoten die Diagonalen dieses Rechtecks. Man hat ferner

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \frac{1}{e},$$

und da die Asymptoten mit der Achse der $x$ gleiche Winkel bilden, so muss der Winkel, welchen sie mit einander bilden $= 2\vartheta$ sein; d. h. wenn die Excentricität einer Hyperbel gegeben ist, so ist auch der Winkel zwischen den Asymptoten gegeben; er ist das Doppelte des Winkels, dessen Secante der Excentricität gleich ist.

*Aufg.* Die Excentricität eines durch die allgemeine Gleichung gegegebenen Kegelschnitts zu finden.

Wir können nach Art. 76 zunächst die Tangente des Winkels zwischen den durch $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$ repräsentirten geraden Linien ausdrücken und dann den Ausdruck für die Secante seiner Hälfte bilden. Oder wir können mit Zuhilfenahme des Art. 157 Aufg. 3 verfahren.

Wir erhalten $\frac{1}{a^2} = \frac{A+C-R}{2F}$, $\frac{1}{b^2} = \frac{A+C+R}{2F}$,

wo $R^2 = B^2 + (A-C)^2 = B^2 - 4AC + (A+C)^2$.

Also $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{R}{F}$, $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{2R}{A+C+R}$.

# Die Tangente.

168. Wir schreiten nun dazu fort, einige Eigenschaften der Ellipse und Hyperbel zu untersuchen und finden es vortheilhaft, beide Curven zusammen zu betrachten; denn da ihre Gleichungen nur in dem Zeichen von $b^2$ differiren, so haben sie manche Eigenschaften gemein, welche gleichzeitig bewiesen werden können, indem man das Zeichen von $b^2$ als unbestimmt ansieht. Wir wollen in den folgenden Artikeln die Zeichen gebrauchen, welche der Ellipse angehören. Der Leser kann dann die entsprechenden Formeln für die Hyperbel erhalten, indem er das Zeichen von $b^2$ verwechselt.

Wir könnten einige der folgenden Resultate als specielle Fälle der im sechsten Kapitel aus der allgemeinen Gleichung erhaltenen ableiten, aber wir halten es für der Mühe werth, die wichtigsten Gleichungen unabhängig zu begründen.

Die Gleichung der Tangente der Curve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

zu finden.

Die Methode, die wir verfolgen wollen, ist mit der in Artikel 116 gebrauchten identisch. Die Coordinaten zweier Punkte der Curve genügen den Relationen

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1;$$

also $$\frac{x'^2-x''^2}{y'^2-y''^2}=-\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x'+x''}{y'+y''}.$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der zwei Punkte ist daher

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x'+x''}{y'+y''}.$$

Die der Tangente wird gefunden, indem man $x'=x''$, $y'=y''$ macht $$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x'}{y'};$$

oder durch Reduction und erinnernd, dass $x'y'$ der Gleichung der Curve genügt:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1.$$

169. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche die Berührungspunkte der Tangenten vom Punkte $(x'y')$ aus verbindet.

Wenn die Coordinaten des Berührungspunktes der einen der Tangenten durch $(x'y')$ mit $X$, $Y$ bezeichnet werden, so haben wir, indem wir nach Artikel 168 die Gleichung der Tangente in $X$, $Y$ bilden und in sie die Coordinaten $x'y'$ einsetzen, welche ihr genügen müssen,

$$\frac{Xx'}{a^2} + \frac{Yy'}{b^2} = 1.$$

Wir sehen daher, dass die Coordinaten jedes der Berührungspunkte der Gleichung

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

genügen müssen, und weil dies die Gleichung einer geraden Linie ist, so muss sie ihre Verbindungslinie darstellen.

*Aufg. 1.* Die Bedingung zu finden, unter welcher irgend eine Linie $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ berührt.

Indem wir die Gleichungen $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ und $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ vergleichen, finden wir $\frac{x'}{a^2} = \frac{1}{m}$ und $\frac{y'}{b^2} = \frac{1}{n}$ und durch Substitution der daraus entspringenden Werthe von $x'$ und $y'$ in die Gleichung der Curve erhalten wir die geforderte Bedingung

$$\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1.$$

Sie geht auch als ein specieller Fall aus der Formel des Artikels 111 hervor, welche die Aufgabe für die allgemeine Gleichung zweiten Grades löst.

*Aufg. 2.* Die Gleichung des Tangentenpaares von $x'y'$ an den Kegelschnitt zu finden. Wir verfahren wie in Artikel 107 und finden

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2.$$

*Aufg. 3.* Den durch das Tangentenpaar von $x'y'$ an die Curve gebildeten Winkel zu finden.

Wenn eine Gleichung zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt, so bezeichnen die gleich Null gesetzten drei höchsten Glieder zwei zu ihnen parallele Linien durch den Ursprung; also hängt der durch das erste Paar der geraden Linien eingeschlossene Winkel nur von den drei höchsten Gliedern der allgemeinen Gleichung ab. Ordnen wir dann die im letzten Beispiel gefundene Gleichung, so finden wir nach Art. 76

$$\tan\vartheta = \frac{2ab\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)}}{x'^2 + y'^2 - a^2 - b^2}.$$

*Aufg. 4.* Finde den Ort eines Punktes, an welchem die von ihm aus gezogenen Tangenten sich unter rechten Winkeln schneiden.

Indem wir den Nenner des Werthes von $\tan\vartheta$ mit $o$ vergleichen, finden wir
$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$
die Gleichung eines mit der Ellipse concentrischen Kreises. Der Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, der nicht $90^0$ ist, ist im Allgemeinen eine Curve des vierten Grades.

## Conjugirte Durchmesser.

170. Wenn die Gleichung der Curve auf irgend ein Paar conjugirte Durchmesser bezogen ist, so verschwindet (Art. 96, 97) der Coefficient von $xy$, und wenn $a'$, $b'$ die Längen dieser Durchmesser sind, so kann die Gleichung geschrieben werden (wie in Art. 160)
$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Nun kann genau ebenso wie in Artikel 168 gezeigt werden, dass die Gleichung einer Tangente bezogen auf diese Achsen ist
$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1,$$
und wie in Art. 169, dass die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x'y'$ von derselben Form ist.

Die Polare irgend eines Punktes in der Achse der $x$ ist daher
$$\frac{xx'}{a'^2} = 1.$$

Die Polare irgend eines Punktes $P$ wird gefunden, indem man den Durchmesser durch diesen Punkt zieht, $CP.CP'$ gleich dem Quadrate des Halbdurchmessers bestimmt und sodann durch $P'$ eine Parallele zum conjugirten Durchmesser zieht. Dies schliesst als einen speciellen Fall das früher Art. 102 bewiesene Theorem ein, nämlich:

Die Tangente an den Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum conjugirten Durchmesser.

171. Der eben begründete Satz erlaubt uns, die auf rectanguläre Achsen bezogene Gleichung des conjugirten Durchmessers zu demjenigen, welcher durch einen Punkt $x'y'$ in der Curve geht, zu finden.

Denn wir haben nur die Gleichung einer zu der Tangente, deren Gleichung wir in Art. 168 fanden, parallelen Linie durch den Anfangspunkt der Coordinaten auszudrücken und erhalten daher für die Gleichung des conjugirten Durchmessers

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0.$$

Sei $\vartheta$ der von der Achse der $x$ mit dem ursprünglichen Durchmesser gebildete Winkel, so ist offenbar $\tan\vartheta = \frac{y'}{x'}$, und wenn $\vartheta'$ der durch den conjugirten Durchmesser mit derselben Achse gebildete Winkel ist, so zeigt diese Gleichung (Art. 22), dass

$$\tan\vartheta' = -\frac{b^2x'}{a^2y'},$$

also
$$\tan\vartheta \,.\, \tan\vartheta' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Diese Relation, welche die mit der grossen Achse von einem Paar conjugirter Durchmesser gebildeten Winkel verbindet, erlaubt uns sogleich zu bestimmen, ob ein gegebenes Paar von Durchmessern conjugirt sind oder nicht.

Die entsprechende Relation für die Hyperbel ist (Art. 168

$$\tan\vartheta \,.\, \tan\vartheta' = \frac{b^2}{a^2}.$$

172. Weil in der Ellipse $\tan\vartheta . \tan\vartheta'$ negativ ist, so muss, wenn einer der Winkel $\vartheta, \vartheta'$ spitz und daher seine Tangente positiv ist, der andre stumpf sein, seine Tangente negativ. Also, conjugirte Durchmesser der Ellipse liegen auf verschiedenen Seiten der kleinen Achse (welche $\vartheta = 90^0$ entspricht.)

In der Hyperbel ist im Gegentheil $\tan\vartheta \tan\vartheta'$ positiv und $\vartheta, \vartheta'$ müssen entweder beide spitz oder beide stumpf sein. Also, in der Hyperbel liegen conjugirte Durchmesser auf derselben Seite der conjugirten Achse.

In der Hyperbel muss, wenn $\tan\vartheta$ kleiner als $\frac{b}{a}$ ist, $\tan\vartheta'$ grösser als $\frac{b}{a}$ sein; aber nach Artikel 167 ist der dem Winkel, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist, entsprechende Durchmesser, die Asymptote, welche nach demselben Artikel die Durchmesser, welche die Curve schneiden, von denen trennt, welche sie nicht schneiden. Also, *wenn der eine von zwei conjugirten Durchmessern die Hyperbel in reellen Punkten schneidet, so thut dies der andre nicht.* Es wird auch erkannt, dass *jede Asymptote ihr eigner conjugirter Durchmesser ist.*

173. *Die Coordinaten $x'' y''$ des Endpunkts von dem Durchmesser zu finden, der zu dem durch $x' y'$ gehenden conjugirt ist.*

Diese Coordinaten werden leicht gefunden, indem man aus der Gleichung des conjugirten Durchmessers

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = o$$

und der der Curve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x$ und $y$ bestimmt.

Indem wir in die letztere die aus der erstern gefundenen Werthe für $x$ und $y$ einsetzen und uns erinnern, dass die Coordinaten $x', y'$ der Gleichung der Curve genügen, finden wir ohne Schwierigkeit

$$\frac{x''}{a} = \pm \frac{y'}{b}, \quad \frac{y''}{b} = \mp \frac{x'}{a}.$$

174. *Die Längen eines Durchmessers ($a'$) und seines conjugirten ($b'$) in Gliedern der Abscisse vom Endpunkte des Durchmessers auszudrücken.*

1.) Wir haben $\qquad a'^2 = x'^2 + y'^2.$

Aber
$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2).$$

Also
$$a'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x'^2 = b^2 + e^2 x'^2.$$

2.) Ferner ist

$$b'^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2$$
$$= (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Also
$$b'^2 = a^2 - e^2 x'^2.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, oder die Summe der Quadrate irgend eines Paars von conjugirten Durchmessern ist constant. (Aufg. 3, Art. 159.)

175. In der Hyperbel müssen wir die Zeichen von $b^2$ und $b'^2$ ändern und erhalten

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$

oder die Differenz der Quadrate irgend eines Paares conjugirter Durchmesser einer Hyperbel ist constant.

Wenn wir in der Hyperbel $a = b$ haben, so wird ihre Gleichung

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

und sie wird eine gleichseitige Hyperbel genannt. Das eben bewiesene Theorem zeigt, dass jeder Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel seinem conjugirten gleich ist.

Die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel sind durch die Gleichung

$$x^2 - y^2 = o$$

gegeben, und daher unter rechten Winkeln zu einander. Deshalb wird diese Hyperbel oft auch eine rectanguläre Hyperbel genannt.

Die Bedingung, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel darstelle ist $A = -C$; denn dies ist nach Art. 76 die Bedingung, unter welcher die Asymptoten

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$$

rechtwinklig unter einander sind; aber wenn die Hyperbel rectangulär ist, muss sie gleichseitig sein, weil (Art. 167) die Tangente des halben Winkels zwischen den Asymptoten $= \frac{b}{a}$ und daher, wenn dieser Winkel $45^0$ ist,

$$b = a$$

sein muss.

176. Die Länge der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente zu finden.

Die Länge der Senkrechten vom Coordinatenanfang auf die Linie

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

ist (Art. 27)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}\right)}} = \frac{ab}{\sqrt{\left(\frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2}\right)}}.$$

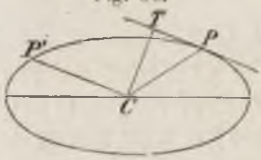
Wir zeigten aber im Art. 174, dass

$$b'^2 = \frac{b^2x'^2}{a^2} + \frac{a^2y'^2}{b^2}, \quad \text{also } p = \frac{ab}{b'}.$$

177. Den von zwei conjugirten Durchmessern eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

Der Winkel zwischen den Durchmessern ist gleich dem Winkel zwischen dem einen und der Tangente, welche dem andern parallel ist; nun ist (Fig. 56)

Fig. 56.



$$\sin CPT = \frac{CT}{CP} = \frac{p}{a'}.$$

Also $$\sin PCP' = \sin \vartheta = \frac{ab}{a'b'}.$$

Die Gleichung $a'b' \sin \vartheta = ab$ zeigt, dass das durch Verbindung der Enden von conjugirten Durchmessern der Ellipse oder Hyperbel gebildete Dreieck einen constanten Inhalt hat. (Art. 159, Aufg. 2.)

178. Da die Summe der Quadrate irgend zweier conjugirten Durchmesser constant ist, so ist ihr Rechteck ein Maximum, wenn sie gleich sind und daher ist in diesem Falle $\sin \vartheta$ ein Minimum, also ist der spitze Winkel zwischen den zwei gleichen conjugirten Durchmessern kleiner und folglich der stumpfe Winkel grösser, als der von irgend einem andern Paar conjugirter Durchmesser gebildete. Die Länge der gleichen conjugirten Durchmesser wird gefunden, indem man $a' = b'$ in die Gleichung

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

substituirt. Daraus ergiebt sich $a'^2$ als die Hälfte der Summe von $a^2$ und $b^2$ und in diesem Falle

$$\sin \vartheta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Der Winkel, welchen jeder dieser conjugirten Durchmesser mit der Achse der $x$ macht, wird aus der Gleichung gefunden

$$\tan \vartheta \,.\, \tan \vartheta' = -\frac{b^2}{a^2},$$

indem man darin $\tan \vartheta = -\tan \vartheta'$ setzt, weil irgend zwei gleiche Durchmesser gleiche Winkel mit der Achse der $x$ auf entgegengesetzten Seiten von ihr bilden. (Art. 162.) Somit

$$\tan \vartheta = \frac{b}{a}.$$

Es folgt daher nach Art. 167, dass, wenn eine Ellipse und Hyperbel dieselben Achsen in Grösse und Lage haben, die Asymptoten der Hyperbel mit den gleichen conjugirten Durchmessern der Ellipse zusammenfallen.

Die allgemeine Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser (Art. 170) wird $x^2 + y^2 = a'^2$, wenn $a' = b'$.

Wir sehen daraus, dass die Gleichung jeder Ellipse in dieselbe Form, wie die Gleichung des Kreises gebracht werden kann, nämlich in die Form $x^2 + y^2 = r^2$, indem man die gleichen conjugirten Durchmesser zu Coordinatenachsen wählt; aber in dem Falle der Ellipse ist der Winkel zwischen diesen Achsen schief, während er beim Kreise ein rechter ist.

179. Die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente in Function der Winkel auszudrücken, die sie mit den Achsen bildet.

Wenn wir davon ausgehen, die Gleichung der Tangente

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

in die Form $$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

zu bringen (Art. 25), so finden wir durch Vergleichung dieser Gleichungen unmittelbar

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\sin \alpha}{p}.$$

Indem wir dann in die Gleichung der Curve diese erhaltenen Werthe von $x', y'$ einsetzen, finden wir

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha \text{ *)}.$$

Die Gleichung der Tangente kann daher geschrieben werden

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)} = o$$

und nach Artikel 27 ist die Senkrechte von irgend einem Punkte $(x', y')$ auf die Tangente

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - \sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)}.$$

*Aufg.* Den Ort des Durchschnitts der Tangenten zu finden, die sich unter rechten Winkeln schneiden.

Seien $p, p'$ die Senkrechten zu diesen Tangenten, so ist

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \; p'^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha, \; p^2 + p'^2 = a^2 + b^2.$$

---

*) Ebenso findet man, dass

$$p^2 = a'^2 \cos^2 \alpha + b'^2 \cos^2 \beta,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ die Winkel sind, welche irgend zwei conjugirte Durchmesser mit der Senkrechten machen.

Aber das Quadrat der Entfernung vom Centrum bis zum Durchschnitt zweier Linien, die sich rechtwinklig schneiden, ist gleich der Summe der Quadrate seiner Entfernungen von diesen Linien selbst; diese Entfernung ist daher constant und der geforderte Ort ist somit ein Kreis. (Art. 169, Aufg. 4.)

180. Die Sehnen, welche die Enden eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte der Curve verbinden, werden Supplementarsehnen genannt.

Durchmesser, die zu irgend einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, sind conjugirt.

Denn betrachten wir das Dreieck, welches gebildet wird durch Verbindung der Enden eines Durchmessers $AB$ mit einem Punkte $D$ der Curve; so muss, nach den Elementen der Geometrie die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier Seiten mit der dritten Seite parallel sein, also muss der $AD$ halbirende Durchmesser parallel zu $BD$ und der $BD$ halbirende parallel zu $AD$ sein.

Dasselbe kann analytisch bewiesen werden, indem man die Gleichungen von $AD$ und $BD$ bildet und zeigt, dass das Product der Tangenten der durch diese Linien mit der Achse gebildeten Winkel $= -\frac{b^2}{a^2}$ ist.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, die Paare conjugirter Durchmesser zu construiren, welche einen vorgeschriebenen Winkel mit einander bilden. Denn wenn wir über irgend einem Durchmesser das Segment eines Kreises beschreiben, welches den gegebenen Winkel enthält, und die Punkte, wo dieser Kreis die Curve schneidet, mit den Enden des angenommenen Durchmessers verbinden, so erhalten wir ein Paar Supplementarsehnen, die unter dem angegebenen Winkel geneigt sind und die zu ihnen parallelen Durchmesser sind die zu einander conjugirten Durchmesser, welche der Aufgabe genügen.

Wir geben in Form von Aufgaben die Beweise einer Reihe von Sätzen, welche sich hieran anschliessen.

*Aufg. 1.* Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.

Die Gleichungen sind

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = \pm 1.$$

Dies folgt auch aus dem Theorem des Art. 105 und aus der Bemerkung, dass das Centrum der Pol der unendlich entfernten geraden Linie ist. (Art. 100.)

*Aufg.* 2. Wenn eine veränderliche Tangente eines Central-Kegelschnitts zwei feste parallele Tangenten schneidet, so bestimmt sie Abschnitte auf diesen, deren Rechteck constant und dem Quadrat des zu ihnen parallelen Halbdurchmessers gleich ist.

Nehmen wir den den Tangenten parallelen Durchmesser und den ihm conjugirten zu Coordinaten-Achsen, so sind die Gleichungen der Curve und der veränderlichen Tangente

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 \text{ und } \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1.$$

Die Abschnitte in den festen Tangenten werden gefunden, indem man $x$ nacheinander $= \pm a'$ in der letzten Gleichung macht, und wir erhalten sie daher $\quad y = \frac{b'^2}{y'^2}\left(1 \mp \frac{x'}{a'}\right)$

und daher ist ihr Product $\quad \frac{b'^4}{y'^2}\left(1 - \frac{x'^2}{a'^2}\right),$

welcher Ausdruck sich durch die Substitution des der Gleichung der Curve entnommenen Werthes von $y'^2$ auf $b'^2$ reducirt.

*Aufg.* 3. Bei derselben Construction ist das Rechteck aus den Segmenten der veränderlichen Tangente gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers.

Denn der Abschnitt auf einer der parallelen Tangenten verhält sich zu dem anliegenden Segment der veränderlichen Tangente wie die parallelen Halbdurchmesser. (Art. 109.) Daher verhält sich das Rechteck aus den Abschnitten der festen Tangenten zu dem Rechteck aus den Abschnitten der veränderlichen Tangente, wie die Quadrate dieser Halbdurchmesser; und da das erste Rechteck gleich dem Quadrat des den festen Tangenten parallelen Halbdurchmessers ist, so muss auch das zweite Rechteck gleich dem Quadrat des zur veränderlichen Tangente parallelen Halbdurchmessers sein.

*Aufg.* 4. Das Rechteck aus den Segmenten einer Tangente, welche durch ihren Durchschnitt mit zwei beliebigen conjugirten Durchmessern gebildet werden, ist dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers gleich.

Nehmen wir den der Tangente parallelen Halbdurchmesser und seinen conjugirten zu Achsen, so sind die Gleichungen irgend zweier conjugirten Durchmesser

$$y = \frac{y'}{x'}x \text{ und } \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = o,$$

und die dadurch in der Tangente gebildeten Abschnitte werden gefunden, indem man $x = a'$ macht,

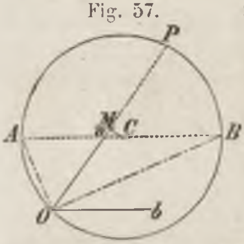
$$y = \frac{y'}{x'}a' \text{ und } y = -\frac{b'^2}{a'}\frac{x'}{y'};$$

das von ihnen gebildete Rechteck ist $= b'^2$. Wir hätten in gleicher Weise einen rein algebraischen Beweis für den Satz der Aufg. 3 geben können. — Die Verbindungslinien des Centrums und der Punkte, in welchen eine veränderliche Tangente ein Paar feste parallele Tangenten schneidet, sind nach dem Vorigen nothwendig Paare conjugirter Durchmesser.

*Aufg. 5.* Aus der Grösse und Lage zweier conjugirter Durchmesser ($Oa$, $Ob$) in einem Centralkegelschnitt die Achsen desselben zu bestimmen.

Die folgende Construction ist auf das in der letzten Aufgabe gefundene Theorem gegründet: Durch $a$, das Ende des einen Durchmessers, ziehe man eine Parallele zum andern; sie ist zugleich eine Tangente der Curve. Bestimme darnach (Fig. 57) in $Oa$ einen Punkt $P$ so, dass das Rechteck $Oa \,.\, aP = Ob^2$ (auf der dem $a$ entgegengesetzten Seite von $O$ für die Ellipse, auf derselben Seite für die Hyperbel), und beschreibe einen Kreis durch $O$, $P$, der sein Centrum in $aC$ hat, so bezeichnen die Linien $OA$, $OB$ die Achsen der Curve. Denn weil das Rechteck $Aa \,.\, aB = Oa \,.\, aP = Ob^2$ ist, so sind die Linien $OA$, $OB$ conjugirte Durchmesser, und weil $AB$ ein Durchmesser des Kreises ist, ist der von ihnen gebildete Winkel $AOB$ ein rechter.

Fig. 57.




*Aufg. 6.* Wenn irgend zwei Halbdurchmesser gegeben sind, so sind die Dreiecke, welche von ihnen und denjenigen beiden unter ihren Ordinaten gebildet werden, welche respective durch den Endpunkt des andern Halbdurchmessers gehen, von gleicher Fläche.

*Aufg. 7.* Die Dreiecke, welche irgend zwei Halbdurchmesser mit den beiden Tangenten der Curve in ihren Endpunkten bilden, sind von gleicher Fläche.

*Aufg. 8.* Das anharmonische Verhältniss eines Büschels von vier Durchmessern eines Kegelschnitts ist dem der conjugirten Durchmesser gleich.

## Die Normale.

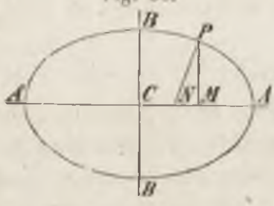
181. Eine durch irgend einen Punkt einer Curve senkrecht zur Tangente in diesem Punkte gezogene gerade Linie wird eine Normale genannt. Indem wir nach Artikel 42 die Gleichung einer durch $(x'y')$ gehenden Linie bilden, die zu $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$ senkrecht ist, finden wir die Gleichung der Normale eines Kegelschnitts

$$\frac{x'}{a^2}(y-y') = \frac{y'}{b^2}(x-x')$$

oder
$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2,$$

wo $c^2$ wie in Art. 161 die Differenz $a^2 - b^2$ bezeichnet.

Fig. 58.




Wir finden daraus den Abschnitt $CN$ (Fig. 58), welchen eine Normale in der Hauptachse bestimmt, durch die Substitution $y = o$

$$x = \frac{c^2}{a^2}x', \text{ oder } x = e^2x'.$$

Wir können daher von irgend einem Punkte in der Achse eine Normale zu einer Ellipse ziehen, denn aus $CN$ bestimmen wir hiernach die Abscisse des Fusspunktes der Normale in der Curve.

Der Kreis kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität $= o$, weil $c^2 = a^2 - b^2 = o$. Der Abschnitt $CN$ ist daher in dem Fall des Kreises immer $= o$, oder jede Normale eines Kreises geht durch sein Centrum.

182. Das Stück $MN$ der Hauptachse, welches zwischen Normale und Ordinate enthalten ist, wird die Subnormale genannt. Ihre Länge ist nach dem letzten Artikel

$$x' - \frac{c^2}{a^2}x' = \frac{b^2}{a^2}x';$$

d. i. die Normale zerlegt die Abscisse in zwei Theile, welche in einem constanten Verhältniss sind.

Wenn eine im Punkte $P$ an die Curve gezogene Tangente die Achse in $T$ schneidet, so wird der Abschnitt $MT$ die Subtangente genannt.

Weil die ganze Länge $CT = \frac{a^2}{x'}$ ist (Art. 173), so ist die Subtangente

$$= \frac{a^2}{x'} - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

Auch die Länge der Normale kann leicht gefunden werden. Denn:

$$PN^2 = P'M^2 + MN^2 = y'^2 + \frac{b^4}{a^4}x'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2\right).$$

Wenn aber $b'$ der zu $CP$ conjugirte Halbdurchmesser ist, so ist die Grösse innerhalb der Parenthesen $= b'^2$. (Art. 174). Also ist die Länge der Normale

$$PN = \frac{bb'}{a}.$$

Wenn die Normale bis zum Durchschnitt mit der kleinen Achse verlängert wird, so zeigt man in derselben Art, dass ihre Länge

$$= \frac{ab'}{b}$$

ist. Die Vergleichung beider Ergebnisse liefert den Satz: Das Rechteck aus den Segmenten der Normale ist gleich dem Quadrat des conjugirten Halbdurchmessers.

Im Artikel 178 fanden wir, dass die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente $= \frac{ab}{b'}$. Also ist das Rechteck aus der Normale und der Senkrechten vom Centrum auf die Tangente constant, und gleich dem Quadrat der Halbachse. Die Länge der Normale kann auch in Function des Winkels ausgedrückt werden, den sie mit der Achse einschliesst:

$$PN = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha)}} \text{ (Art. 179)} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)}}.$$

*Aufg. 1.* Eine Normale zu einer Hyperbel oder Ellipse zu ziehen, die durch einen gegebenen Punkt geht.

Ist der Punkt in der Curve, an welchen die Normale gezogen ist, $XY$, so ist ihre Gleichung (Art. 181)

$$\frac{a^2x}{X} - \frac{b^2y}{Y} = c^2,$$

und wenn diese Normale durch einen festen Punkt $x'y'$ geht, gilt somit die Relation

$$\frac{a^2x'}{X} - \frac{b^2y'}{Y} = c^2.$$

Also sind die Punkte in der Curve, deren Normalen durch $x'y'$ gehen, die Durchschnittspunkte der gegebenen Curve mit der Hyberbel

$$c^2xy = a^2x'y - b^2y'x.$$

*Aufg. 2.* Wenn durch irgend einen gegebenen Punkt in einem Kegelschnitt zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander so gezogen werden, dass sie die Curve schneiden, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch einen festen Punkt in der Normale.

Nehmen wir die Tangente und Normale der Curve in dem gegebenen Punkte zu Coordinaten-Achsen, so muss die Gleichung der Curve von der Form sein

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o.$$

($F = o$, weil der Ursprung in der Curve liegt und $D = o$, (Art. 87) weil die Tangente als Achse der $x$ vorausgesetzt ist.) Ist nun die Gleichung irgend zweier geraden Linien durch den Anfangspunkt der Coordinaten durch

$$x^2 + pxy + qy^2 = o$$

repräsentirt, so multipliciren wir diese Gleichung mit $A$ und subtrahiren sie von der Curve und erhalten

$$(B - Ap)xy + (C - Aq)y^2 + Ey = o$$

(Art. 36) als die Gleichung einer durch die Durchschnittspunkte der bezeichneten geraden Linie und des Kegelschnitts gehenden Figur. Aber dieselbe kann in $y = o$ (die Gleichung der Tangente in dem gegebenen Punkte) und

$$(B - Ap)x + (C - Aq)y + E = o$$

zerlegt werden, und diese letztere muss daher die Gleichung der die Endpunkte der gegebenen Linien verbindenden Sehne sein. Der Punkt, in welchem diese Sehne die Normale, die Achse der $y$, schneidet, ist bestimmt durch seine Ordinate

$$y = \frac{E}{Aq - C}.$$

Wenn aber die geraden Linien rechtwinklig sind, ist

$$q = -1$$

(Art. 76) und der Abschnitt in der Normale hat die constante Länge

$$= \frac{-E}{A + C}.$$

Für den Kreis ist diese constante Länge dem Halbmesser gleich, für die gleichseitige Hyperbel ist sie unendlich gross.

Der Beweis zeigt auch, dass **dieser Satz allgemein dann wahr ist, wenn die geraden Linien mit der Normale Winkel bilden, für welche das Product der trigonometrischen Tangenten constant ist,** denn dann ist $q$ constant und daher der Abschnitt

$$\frac{E}{Aq - C}$$

desgleichen.

*Aufg. 3.* Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten in den Punkten $x'y'$ und $x''y''$ zu bestimmen.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1 \text{ und } \frac{x''x}{a^2} + \frac{y''y}{b^2} = 1$$

sind

$$x = \frac{a^2(y' - y'')}{y'x'' - y''x'}, \quad y = \frac{b^2(x' - x'')}{x'y'' - y'x''}.$$

Diese Resultate können in einer andern Form geschrieben werden, weil $2(y'x''-y''x')=(x'+x'')(y'-y'')-(y'+y'')(x'-x'')$

und nach Art. 168 $\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x'+x''}{y'+y''}$.

Indem man diese Substitutionen macht, werden die vorhergehenden Werthe:

$$x=\frac{x'+x''}{1+\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}},\quad y=\frac{y'+y''}{1+\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}}.$$

*Aufg. 4.* Die Coordinaten des Durchschnitts der Normalen in den Punkten $x'y'$, $x''y''$ zu finden.

Indem wir ebenso verfahren, wie in der letzten Aufgabe, finden wir

$$x=\frac{(a^2-b^2)x'x''X}{a^4},\quad x=\frac{(b^2-a^2)y'y''Y}{b^4},$$

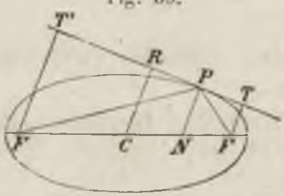
worin $XY$ die Coordinaten des Durchschnitts der Tangenten bezeichnen, die in der letzten Aufgabe gefunden wurden.

## Die Brennpunkte.

183. Zwei Punkte, welche in der grossen Achse einer Ellipse zu beiden Punkten des Centrums in der Entfernung

$$\pm\sqrt{(a^2-b^2)}\text{ oder }\pm c$$

Fig. 59.




gelegen sind, heissen die Brennpunkte der Curve (Fig. 59.) Die Brennpunkte der Hyperbel sind zwei Punkte in der transversalen Achse, gleichfalls in der Entfernung $\pm c$ vom Centrum, wo $c$ jedoch die der Hyperbel entsprechende Bedeutung $=\sqrt{(a^2+b^2)}$ hat.

Die Entfernung eines beliebigen Punktes der Ellipse vom Brennpunkt auszudrücken. Da $x=+c.$, $y=o$ die Coordinaten des einen Brennpunkts sind, so ist das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes $(x', y')$ von ihm:

$$=(x'-c)^2+y'^2=x'^2+y'^2-2cx'+c^2.$$

Aber nach Artikel 174 ist

$$x'^2+y'^2=b^2+e^2x^2\text{ und }b^2+c^2=a^2.$$

Also $$FP^2=a^2-2cx+e^2x^2,$$

und indem man erinnert, dass $c=ae$,

$$FP=a-ex.$$

(Wir verwerfen den Werth $ex - a$, den man erhält, indem man der Quadratwurzel das andre Vorzeichen giebt, denn weil $x$ kleiner als $a$ und $e$ kleiner als 1 ist, ist die Grösse $ex - a$ stets negativ und kann in unserm Falle nicht in Betracht kommen, weil wir nicht die Richtung sondern die absolute Grösse des Radius vector $FP$ betrachten.)

Wir haben ebenso für die Entfernung vom andern Brennpunkt $$F'P = a + ex,$$
weil nur $-e$ für $+e$ in der vorigen Formel zu schreiben ist; also ist $$FP + F'P = 2a$$
oder *die Summe der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ellipse von den Brennpunkten ist constant und gleich ihrer grossen Achse.*

184. Indem wir den vorigen Satz auf die Hyperbel anwenden, erhalten wir denselben Werth für $FP^2$; aber indem wir die Quadratwurzel ausziehen, müssen wir das Zeichen des Werthes von $FP$ wechseln, denn in der Hyperbel ist $x$ grösser als $a$ und $e$ ist grösser als 1. Also ist $a - ex$ immer negativ und die absolute Grösse des Radius vector ist daher
$$FP = ex - a.$$
In gleicher Weise ist $$F'P = ex + a,$$
und daher $$F'P - FP = 2a;$$
*also ist in der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen constant und gleich der transversalen Achse. Für beide Curven ist das Rechteck unter den Brennstrahlen* $= a^2 - e^2 x^2$ d. h. (Art. 174) *gleich dem Quadrat des halben conjugirten Durchmessers.*

185. Es ist nützlich, die Umkehrung der obigen Resultate zu beweisen, indem man den Ort der Spitze eines Dreiecks sucht, für welches die Basis und die Summe oder die Differenz der Seiten gegeben ist.

Indem man den Mittelpunkt der Basis ($= 2c$) zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, wird die Gleichung des Ortes,
$$\sqrt{[y^2 + (c + x)^2]} \pm \sqrt{[y^2 + (c - x)^2]} = 2a,$$
welche durch Entfernung der Wurzelgrössen die Form
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

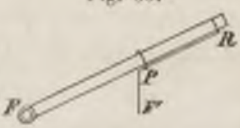
annimmt. Wenn die Summe der Seiten gegeben ist, so ist $a$ grösser als $c$, weil die Summe der Seiten stets grösser als die Basis sein muss; daher ist der Coefficient von $y^2$ positiv und der Ort eine Ellipse.

Wenn aber die Differenz gegeben ist, so ist $a$ kleiner als $c$, der Coefficient von $y^2$ negativ und der Ort eine Hyperbel.

186. Mit Hilfe des vorigen Theorems kann man eine Ellipse oder Hyperbel mechanisch beschreiben. Wenn die Enden eines Fadens an zwei festen Punkten $F$ und $F'$ befestigt sind, so beschreibt ein Stift, der sich so bewegt, dass er den Faden immer gleichmässig gestreckt erhält, eine Ellipse, von welcher $F$ und $F'$ die Brennpunkte sind und deren grosse Achse gleich der Länge des Fadens ist.

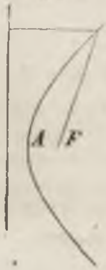
Um eine Hyperbel zu beschreiben, lasse man ein Lineal (Fig. 60) an einem Ende $F$ drehbar befestigt sein; wenn dann ein am festen Punkte $F'$ befestigter Faden auch an einem Punkt des Lineals $R$ befestigt ist und durch einen Ring in $P$ gespannt erhalten wird, so beschreibt der Punkt $P$ bei der Drehung des Lineals eine Hyperbel. Denn da die Summe von $F'P$ und $PR$ constant ist, so muss es die Differenz von $FP$ und $F'P$ auch sein.

Fig. 60.




187. Die Polare eines Brennpunkts wird die Directrix des Kegelschnitts genannt. Die Directrix ist daher nach Artikel 170 eine gerade Linie, welche in einer Entfernung $\pm \frac{a^2}{c}$ vom Centrum zur grossen Achse senkrecht ist. (Fig. 61.)

Fig. 61.




Da wir die Entfernung der Directrix vom Centrum kennen, so können wir ihre Entfernung von irgend einem Punkt in der Curve finden. Sie muss gleich sein mit

$$\frac{a^2}{c} - x' \text{ oder } = \frac{a}{c}(a - ex') = \frac{1}{e}(a - ex').$$

Aber die Entfernung irgend eines Punktes in der Curve vom Brennpunkt ist gleich $a - ex'$. Wir erkennen also die wichtige Eigenschaft der Kegelschnitte, dass die Entfernung eines

Punktes der Curve vom Brennpunkt zu seiner Entfernung von der Directrix in dem constanten Verhältniss $e:1$ steht.

Umgekehrt kann ein Kegelschnitt als der Ort eines Punktes definirt werden, dessen Entfernung von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, zu seiner Entfernung von einer festen geraden Linie, der Directrix, in einem constanten Verhältniss steht. Auf diese Definition haben verschiedene Schriftsteller die Theorie der Kegelschnitte gegründet. Indem man die feste Linie zur Achse der $x$ nimmt, kann die Gleichung des Ortes sogleich geschrieben werden

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = e^2 y^2,$$

eine Gleichung welche eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, je nachdem $e$ kleiner, grösser als Eins oder gleich Eins ist*).

*Aufg.* Wenn eine Curve so beschaffen ist, dass die Entfernung irgend eines Punktes in ihr von einem festen Punkt als eine rationale lineare Function seiner Coordinaten ausgedrückt werden kann, so muss die Curve ein Kegelschnitt und der feste Punkt ihr Brennpunkt sein.

Denn wenn die Entfernung ausgedrückt werden kann durch

$$\varrho = Ax + By + C,$$

so bezeichnet diese Gleichung, da $Ax + By + C$ der Senkrechten proportional ist, welche man auf die gerade Linie von der Gleichung

$$Ax + By + C = o$$

fällen kann, die Eigenschaft der Curve, dass die Entfernung irgend eines ihrer Punkte von dem festen Punkt zu seiner Entfernung von dieser geraden Linie in einem constanten Verhältniss steht.

---

*) Diese und die Eigenschaften der Artikel 183 und 184 sind der Verallgemeinerung fähig. Wenn man die Brennstrahlen zweier Punkte eines Kegelschnitts zieht, so bilden dieselben ein Viereck, welches einem Kreise umschrieben ist, dessen Centrum der Pol der Sehne ist, welche beide Punkte des Kegelschnitts verbindet. Die Summe der von den Brennpunkten an diesen Kreis gelegten Tangenten ist für die Ellipse, die Differenz derselben für die Hyperbel constant. Die Länge einer solchen Tangente steht zu der Entfernung des Mittelpunktes des bezeichneten Kreises von der Directrix in einem constanten Verhältniss, welches mit dem übereinstimmt, das wir so eben durch $e:1$ ausgewerthet haben.

188. Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkt auf die Tangente zu finden.

Die Länge der Senkrechten vom Brennpunkt $(+c, o)$ auf die Linie $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$ ist nach Artikel 27

$$=\frac{1-\frac{cx'}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)}};$$

aber nach Artikel 176 ist

$$\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}\right)}=\frac{b'}{ab}.$$

Also $$FT=\frac{b}{b'}(a-ex)=\frac{b}{b'}.FP.$$

In gleicher Weise ist

$$F'T'=\frac{b}{b'}(a+ex)=\frac{b}{b'}.F'P.$$

Also $$FT.F'T'=b^2 \text{ (weil } a^2-e^2x^2=b'^2);$$

oder das Rechteck aus den Perpendikeln von den Brennpunkten auf die Tangente ist constant und gleich dem Quadrat über der halben kleinen Achse.

Diese Eigenschaft gilt ebenso wohl für die Ellipse als für die Hyperbel.

189. Einige wichtige Consequenzen können aus dem eben gefundenen Werth der Perpendikel gezogen werden.

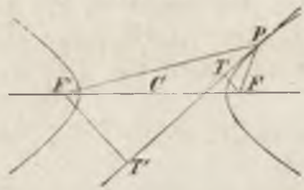
Denn wir haben

$$FT=\frac{b}{b'}FP \text{ oder } \frac{FT}{FP}=\frac{b}{b'}; \text{ aber } \frac{FT}{FP}=\sin FPT.$$

Also ist der Sinus des Winkels, den der Brennstrahl mit der Tangente bildet $=\frac{b}{b'}$. Denselben Werth finden wir für $\sin F'PT'$, den sinus des Winkels, welchen der andre Brennstrahl mit der Tangente bildet. Also bilden die Brennstralalen des Berührungspunktes gleiche Winkel mit der Tangente.

Diese Eigenschaft ist sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel gültig, und aus der Betrachtung der Figuren 62 und 59 ist offenbar, dass die Tangente der Ellipse die äussere Halbirungslinie des Winkels zwischen den Brennstrahlen und die Tangente der Hyperbel die innere Halbirungslinie desselben ist.

Fig. 62.




Wenn also eine Ellipse und eine Hyperbel dieselben Brennpunkte haben, so schneiden sie einander in den Punkten, die sie gemein haben, rechtwinklig, d. h. die Tangente der Ellipse in diesem Punkt schliesst mit der Tangente der Hyperbel in demselben Punkte einen rechten Winkel ein.

*Aufg. 1.* Beweise analytisch, dass confocale Kegelschnitte sich rechtwinklig schneiden.

Die Coordinaten jedes Durchschnittspunktes der Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

genügen der durch Subtraction beider Gleichungen erhaltenen Relation

$$\frac{(a^2 - a'^2)x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{(b^2 - b'^2)y'^2}{b^2 b'^2} = o.$$

Aber wenn die Kegelschnitte confocal sind, ist

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2,$$

und diese Relation wird $\frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} = o.$

Dies ist aber die Bedingung (Art. 40), unter welcher die zwei Tangenten

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1 \text{ und } \frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 1$$

rechtwinklig zu einander sind.

*Aufg. 2.* Bestimme die Länge einer Linie, die durch das Centrum parallel zu einem Brennstrahl gezogen und durch die entsprechende Tangente begrenzt wird.

Diese Länge wird gefunden, indem man die Senkrechte vom Centrum auf die Tangente $\left(\frac{ab}{b'}\right)$ mit dem Sinus des Winkels zwischen Radius vector und Tangente $\left(\frac{b'}{b}\right)$ dividirt und ist daher $= a$.

190. Die Normale ist, als eine Senkrechte zur Tangente, die innere Halbirungslinie des Winkels zwischen den Brennstrahlen in dem Fall der Ellipse, und die äussere Halbirungslinie in dem Fall der Hyperbel.

Wir können einen unabhängigen Beweis davon geben, indem wir zeigen, dass sie die Entfernung zwischen den Brennpunkten in zwei Theile zerlegt, welche in dem Verhältniss der Brennstrahlen sind (Euklid VI. 3); denn die Entfernung des Fusspunkts der Normale vom Centrum ist (Art. 181) $= e^2 x'$. Also sind seine Entfernungen von den Brennpunkten

$$c + e^2 x' \text{ und } c - e^2 x',$$

Grössen, welche offenbar die $e$ fachen Werthe von

$$a + e x' \text{ und } a - e x'$$

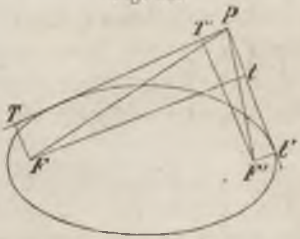
sind.

*Aufg.* Eine Normale zur Ellipse von irgend einem Punkt in der kleinen Achse aus zu ziehen.

Der durch den gegebenen Punkt und die beiden Brennpunkte gehende Kreis schneidet die Curve in den Punkten, nach denen die Normale zu ziehen ist.

191. Aus dem Satz des Artikel 188, dass das Rechteck unter den von den Brennpunkten auf die Tangente gefällten Normalen constant ist, kann noch eine andre wichtige Folge hergeleitet werden. Denn für zwei beliebige Tangenten (Fig. 63) ist

Fig. 63.



$$FT . F'T' = Ft . F't',$$

oder

$$\frac{FT}{Ft} = \frac{F't'}{F'T'}.$$

Aber $\frac{FT}{Ft}$ ist das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche die Linie $FP$ den Winkel an $P$ theilt und $\frac{F't'}{F'T'}$ ist das Verhältniss der Sinus der Theile, in welche $F'P$ denselben Winkel theilt; wir haben daher $\angle TPF = \angle t'PF'$. Wenn wir einen Kegelschnitt durch $P$ denken, der $F$ und $F'$ zu Brennpunkten hat, so ist in Art. 188 gezeigt, dass die Tangente an ihn gegen die Linien $FP$ und $F'P$ gleich geneigt ist; wir schliessen daher nach dem gegenwärtigen Artikel, dass sie auch zu $PT, Pt$ gleich geneigt ist, und leiten so den folgenden nützlichen Lehrsatz ab: Die Tangenten, welche man durch einen beliebigen Punkt auf einem Kegelschnitt an einen confocalen Kegelschnitt ziehen kann, sind gegen die Tangente des Kegelschnitts in jenem Punkte gleich geneigt.

192. Man soll den Ort der Fusspunkte der Senkrechten bestimmen, die von den Brennpunkten auf die Tangente gefällt werden können.

Die Senkrechte vom Brennpunkte wird in Function des von ihr mit der Achse gebildeten Winkels ausgedrückt, indem man in die Formel des Artikel 179, nämlich

$$p = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - \sqrt{(a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)}$$

einsetzt, $x' = c,\ y' = o.$

Demnach ist die Polargleichung des Ortes

$$\varrho = c \cos\alpha - \sqrt{(a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)},$$

oder $$\varrho^2 - 2c\varrho \cos\alpha + c^2 \cos^2\alpha = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha,$$

oder $$\varrho^2 - 2c\varrho \cos\alpha = b^2.$$

Dies ist nach Artikel 123 die Polargleichung eines Kreises, dessen Centrum in der Achse der $x$ in der Entfernung $c$ vom Brennpunkte liegt, der Kreis ist daher mit der Curve concentrisch. Sein Halbmesser ist nach demselben Artikel $= a$. Wenn wir also einen Kreis beschreiben, der die transversale Achse einer Hyperbel oder Ellipse zum Durchmesser hat, so liegt der Fusspunkt der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Tangente in der Peripherie dieses Kreises.

Oder umgekehrt, wenn wir von einem Punkt $F$ einen Radius vector $FP$ zu einem gegebenen Kreise ziehen und $TP$ senkrecht zu $FP$ legen, so berührt die Linie $TP$ stets einen Kegelschnitt, der $F$ zu seinem Brennpunkt hat, und der eine Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem $F$ innerhalb oder ausserhalb des Kreises ist.

Aus Art. 189 Aufg. 2 ist bekannt, dass die Linie $CT$, deren Länge $= a$ ist, dem Brennstrahl $F'P$ parallel läuft.

193. Den Winkel zu finden, der durch die von einem Punkte $(x, y)$ aus an einen Central-Kegelschnitt gelegte Tangente am Brennpunkte gespannt wird.

Wir wählen das Centrum zum Anfangspunkt der Coordinaten, bezeichnen den Berührungspunkt der Tangente durch $(x', y')$ und die Radien vectoren, welche diesem und dem gegebenen Punkt entsprechen durch $\varrho'$ und $\varrho$, endlich die Winkel, welche dieselben mit der Hauptachse einschliessen, durch $\vartheta'$ und $\vartheta$; alsdann gelten die Gleichungen:

$$\cos\vartheta = \frac{x+c}{\varrho},\ \sin\vartheta = \frac{y}{\varrho} \text{ und } \cos\vartheta' = \frac{x'+c}{\varrho'},\ \sin\vartheta' = \frac{y'}{\varrho'}$$

und demnach

$$\cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{(x+c)(x'+c) + yy'}{\varrho\varrho'}.$$

Aber nach der Gleichung der Tangente ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

und wir erhalten durch Substitution des daraus entspringenden Werthes von $yy'$

$$\varrho\varrho'\cos(\vartheta - \vartheta') = xx' + cx + cx' + c^2 - \frac{b^2}{a^2}xx' + b^2.$$

$$= e^2xx' + cx + cx' + a^2 = (a+ex)(a+ex');$$

oder weil $\varrho' = a + ex'$ ist:

$$\cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{a+ex}{\varrho}.$$

Weil dieser Werth nur von den Coordinaten $x, y$ abhängt, und die Coordinaten des Berührungspunktes nicht enthält, so spannt jede Tangente von $xy$ aus denselben Winkel am Brennpunkt; es wird also der von irgend einer Sehne am Brennpunkt gespannte Winkel durch die Verbindungslinie des Brennpunkts mit ihrem Pol halbirt.

194. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Pol einer durch ihn gehenden Sehne ist senkrecht zu dieser Sehne.

Dieser Satz kann als ein specieller Fall des letzten Artikels abgeleitet werden, weil der am Brennpunkt gespannte Winkel in diesem Falle 180° ist. Man kann ihn aber auch direct beweisen wie folgt: Die Gleichung der Senkrechten durch einen Punkt $(x'y')$ zur Polare dieses Punktes

$$\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1\right)$$

ist wie in Artikel 181

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2.$$

Wenn aber $x' y'$ ein Punkt in der Directrix ist, so haben wir $x' = \frac{a^2}{c}$ und man kann erkennen, dass sowohl der Gleichung der Polare als der der Senkrechten durch die Coordinaten des Brennpunktes ($x = c, y = o$) genügt wird. Beim Gebrauch der Polarcoordinaten in der Untersuchung der Curven wird der von der Tangente in einer Senkrechten zum Radius vector des Berührungspunktes gebildete Abschnitt die Polarsubtangente genannt. Demnach kann das Theorem dieses Artikels auch so ausgesprochen werden: Die Directrix ist der Ort des Endpunktes der Polarsubtangente für den Brennpunkt als Pol.

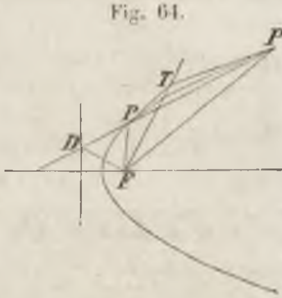
Wir werden im folgenden Kapitel erkennen, dass die Theoreme dieses und des letzten Artikels auch für die Parabel wahr sind.

Die folgenden Aufgaben enthalten die Beweise einiger Sätze, die sich hier naturgemäss anschliessen.

*Aufg. 1.* Der Winkel, welcher durch den zwischen zwei festen Tangenten enthaltenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente am Brennpunkte gespannt wird, ist constant.

Nach Art. 193 ist er die Hälfte des durch die Berührungssehne der festen Tangenten gespannten Winkels.

Fig. 64.




*Aufg. 2.* Wenn eine Sehne $PP'$ (Fig. 64) die Directrix in $D$ schneidet, so ist $FD$ die äussere Halbirungslinie des Winkels $PFP'$.

Denn $FT$ ist die innere Halbirungslinie (Art. 193), aber $D$ ist der Pol von $FT$ (weil es der Durchschnitt von $PP'$, der Polare von $F$, mit der Directrix, der Polare von $F$, ist); daher ist $DF$ senkrecht zu $FT$ und somit die äussere Halbirungslinie.

Eine interessante Folge dieser Eigenschaft ist die nachstehend angegebene:

Wenn zwei feste Punkte $Q, Q'$ eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen Punkte $P$ desselben verbunden werden, so fassen die Verbindungslinien in der Directrix des Kegelschnitts ein Segment zwischen sich, welches vom zugehörigen Brennpunkt aus unter constantem Winkel gesehen wird. Denn wenn wir die Durchschnittspunkte jener beiden Sekanten der Curve mit der Directrix durch $R$, $R'$ bezeichnen, so ist nach dem Vorigen

$$\angle PFR = \tfrac{1}{2} \angle PFQ + 90^0$$

und

$$\angle PFR' = \tfrac{1}{2} \angle PFQ' + 90^0.$$

Somit

$$\angle RFR' = \tfrac{1}{2} \angle QFQ'.$$

Geht die Sehne $QQ'$ durch den Brennpunkt, so ist dieser constante Winkel demnach $= 90^0$.

Der Satz ist geeignet, ein gutes Beispiel für den Gebrauch der Polar-Coordinaten in der Untersuchung der Kegelschnitte zu bilden. Er entspricht übrigens dem Satz von der Gleichheit der Peripheriewinkel über demselben Bogen am Kreise. Mit Hilfe der allgemeinen Definition der Brennpunkte, welche wir später entwickeln werden, kann man ihm eine noch allgemeinere Form geben.

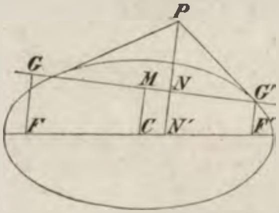
Die folgenden Sätze sind in der zwischen den Gleichungen der Polare und der Tangente bestehenden Analogie begründet.

*Aufg.* 3. Wenn sich ein Punkt in einer festen Senkrechten zur Achse bewegt, so dreht sich die von ihm auf seine Polare gefällte Senkrechte um einen festen Punkt in der Achse.

Denn der durch die Senkrechte bestimmte Abschnitt in der Achse ist (wie in Artikel 181) $= e^2 x'$ und daher constant, wenn $x'$ constant ist.

*Aufg.* 4. Finde die Längen der vom Centrum und von den Brennpunkten auf die Polare von $(x', y')$ gefällten Senkrechten.

Fig. 65.




*Aufg.* 5. Beweise dass

$$CM \,.\, PN' = b^2$$

ist. (Fig. 65.) Dieser Satz entspricht dem im Artikel 182 bewiesenen, nach welchem das Rechteck aus der Normale und der vom Centrum auf die Tangente gefällten Senkrechten constant ist.

*Aufg.* 6. Beweise $PN' \,.\, NN' = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - e^2 x'^2)$.

Wenn $P$ ein Punkt der Curve ist, so giebt diese Gleichung den bekannten Ausdruck für die Länge der Normale wieder: $PN = \frac{bb'}{a}$ (Art. 182.).

*Aufg.* 7. Beweise $FG \,.\, F'G' = CM \,.\, NN'$.

Für den speciellen Fall, wo $P$ in der Curve liegt, geht dies über in

$$FG \,.\, F'G' = b^2.$$

**195. Die Polargleichung der Ellipse oder Hyperbel unter der Voraussetzung zu finden, dass der Brennpunkt zum Pole genommen ist.**

Die Länge des Brennstrahls (Art. 183) $= a - ex'$ giebt wegen $\varrho \cos \vartheta + c = x'$, (als vom Centrum aus gemessen)

$$\varrho = a - e\varrho \cos \vartheta - ec,$$

oder
$$\varrho = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\vartheta} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\vartheta}.$$

Die doppelte Ordinate im Brennpunkt wird der **Parameter** genannt; seine Hälfte wird gefunden, indem man $\vartheta = 90^0$ in die eben gegebene Gleichung substituirt und ist daher

$$= \frac{b^2}{a} = a(1-e^2).$$

Der Parameter wird gewöhnlich durch den Buchstaben $p$ bezeichnet und die Gleichung alsdann geschrieben

$$\varrho = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\vartheta}.$$

Der Parameter wird auch das **latus rectum** (bei den Alten *latus erectum*) genannt.

*Aufg. 1.* **Das harmonische Mittel zwischen den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne ist constant und dem Halbparameter gleich.**

Denn wenn der Radius vector $FP$, rückwärts durch den Brennpunkt verlängert, die Curve noch in $P'$ schneidet, so ist

$$FP = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\vartheta} \text{ und } FP' = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{1 - e\cos\vartheta},$$

weil es dem Winkel $(180 + \vartheta)$ entspricht; somit

$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FP'} = \frac{4}{p}.$$

*Aufg. 2.* **Das Rechteck aus den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne steht zur ganzen Sehne in einem constanten Verhältniss.**

Dieser Satz kann als ein andrer Ausdruck des in der letzten Aufgabe enthaltenen bezeichnet werden; aber man erkennt auch direct, dass die Grössen $FP \cdot FP'$, $FP + FP'$ in einem constanten Verhältniss stehen, denn sie sind
$$\frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - e^2\cos^2\vartheta} \text{ und } \frac{2b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - e^2\cos^2\vartheta}.$$

*Aufg. 3.* **Jede Sehne durch den Brennpunkt ist die dritte Proportionale zwischen der Hauptachse und dem zu ihr parallelen Durchmesser.** Denn die Länge des Halbdurchmessers, der mit der transversalen Achse einen Winkel $\vartheta$ bildet, (Art. 161) ist

$$R^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\vartheta}$$

und daher ist die in der letzten Aufgabe gefundene Länge der Sehne

$$= \frac{2R^2}{a}.$$

*Aufg. 4.* Die Summe zweier Sehnen, die durch den Brennpunkt parallel zu zwei conjugirten Durchmessern gezogen werden, ist constant.

Denn die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant. (Art. 174.)

*Aufg. 5.* Die Summe der Reciproken zweier rechtwinklig zu einander durch einen Brennpunkt gezogenen Sehnen ist constant.

196. Die auf den Scheitel bezogene Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 = px - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Demnach ist in der Ellipse das Quadrat der Ordinate kleiner als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse.

Die Gleichung der Hyperbel wird in derselben Art gefunden

$$y^2 = px + \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Oder in der Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate grösser als das Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse.

Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass in der Parabel diese Grössen gleich sind.

Auf Grund dieser Eigenschaft sind die Namen Parabel, Hyperbel und Ellipse zuerst gegeben worden. (Pappus, Math. Coll. Buch VII.)

## Die Asymptoten.

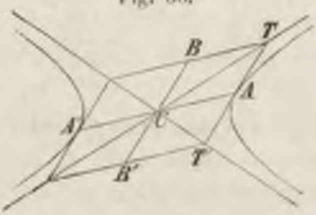
197. Wir haben bisher nur Eigenschaften discutirt, die der Ellipse und Hyperbel gemeinsam sind. Es giebt aber eine Klasse von Eigenschaften der Hyperbel, zu denen sich keine entsprechenden unter denen der Ellipse finden, diejenigen nämlich, welche von den Asymptoten abhängen, als welche in der Ellipse imaginär sind.

Wir sahen, dass die Gleichungen der Asymptoten immer erhalten werden, indem man die Summe der höchsten Potenzen der Veränderlichen $= o$ setzt, vorausgesetzt, dass der Coordinatenanfang mit dem Centrum zusammenfalle. Wenn unter dieser Vor-

aussetzung die auf ein Paar conjugirte Durchmesser bezogene Gleichung der Curve
$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$
ist, so ist die Gleichung der Asymptoten
$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = o,$$
d. h. diese letzteren sind
$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = o \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = o.$$

Demnach sind die Asymptoten parallel den Diagonalen des Parallelogramms, welches ein beliebiges Paar conjugirter Durchmesser zu seinen anstossenden Seiten hat. (Fig. 66.) Denn die Gleichung von $CT$ ist $\frac{y}{x} = \frac{b'}{a'}$ und diese Linie muss daher mit einer Asymptote zusammenfallen, während die Gleichung von $AB$ $\left(\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1\right)$ zeigt, dass diese Linie zur andern Asymptote parallel ist. (Art. 167.)

Fig. 66.




Man kann somit aus zwei bekannten conjugirten Durchmessern die Asymptoten, oder aus den Asymptoten zu jedem gegebenen Durchmesser den ihm conjugirten finden; denn wenn wir $AO$ zu einer Asymptote parallel bis zum Durchschnitt mit der andern ziehen, und es um sich selbst verlängern, so finden wir $B$, den Endpunkt des conjugirten Durchmessers.

198. Der zwischen den Asymptoten liegende Theil einer Tangente wird im Berührungspunkt halbirt und ist dem Durchmesser gleich, der dem nach dem Berührungspunkt gehenden conjugirt ist.

Dies ergiebt sichaus dem letzten Artikel, in welchem wir bewiesen, dass
$$AT = b' = AT'$$
ist; oder auch direct, indem wir den Durchmesser durch den Punkt und den zu ihm conjugirten zu Achsen wählen, so dass die Gleichung der Asymptoten ist
$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = o.$$

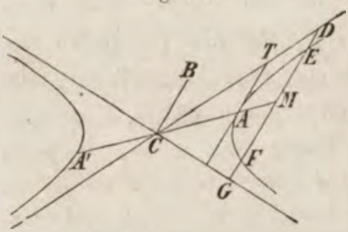
Aus derselben ergiebt sich für $x = a'$

$$y = \pm b';$$

und da die Tangente in $a$ dem conjugirten Durchmesser parallel ist, so ist dieser Werth der dem Scheitel entsprechenden Ordinate der Asymptote zugleich der Werth des Abschnittes welcher durch die letztere in der Tangente gebildet wird.

199. Die Abschnitte $DE$ und $FG$ (Fig. 67), welche auf einer die Hyperbel schneidenden geraden Linie zwischen der Curve und den Asymptoten enthalten sind, haben gleiche Länge.

Fig. 67.




Denn wenn wir den zu $DG$ parallelen Durchmesser und den ihm conjugirten zu Achsen wählen, so folgt aus dem letzten Artikel, dass der Theil $DG$ von dem Durchmesser halbirt wird; da aber auch die Strecke $EF$ zwischen beiden Schnittpunkten mit der Curve halbirt wird so ist

$$DE = FG.$$

Die Längen dieser Linien können unmittelbar gefunden werden, denn aus der Gleichung der Asymptoten

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = o$$

folgt $$y\ (= DM = MG) = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

und aus der Gleichung der Curve

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

$$y\ (= EM = FM) = \pm b' \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}.$$

Also $$DE\ (= FG) = b' \left[\frac{x}{a'} - \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right].$$

und $$DF\ (= EG) = b' \left[\frac{x}{a'} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right].$$

200. Aus diesen Gleichungen folgt, dass das Rechteck $DE.DF$ constant und $= b'^2$ ist. Ie grösser also $DF$ ist, um so kleiner muss $DE$ sein. Nun ist offenbar, dass $DF$ um so länger

wird, in je grösserer Entfernung vom Centrum es gelegen ist, und dass $DF, \left[= b'\left\{\frac{x}{a'} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{a'^2} - 1\right)}\right\}\right.$ für ein unbegrenzt wachsendes $x$ grösser als jede angebbare Grösse werden muss, d. h. Je weiter vom Centrum eine gerade Linie entfernt ist, um so kleiner ist der zwischen der Curve und ihrer Asymptote enthaltene Abschnitt derselben und durch Vergrösserung jener Entfernung kann dieser Abschnitt kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden.

201. Wenn die Asymptoten zu Achsen genommen werden, so verschwinden die Coefficienten $D$ und $E$ aus der allgemeinen Gleichung, weil der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Centrum zusammenfällt und die Coefficienten $A$ und $C$, weil die Achsen die Curve in unendlicher Entfernung schneiden (Art. 91, 2); also reducirt sich die Gleichung der Curve auf die Form

$$xy = k^2.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist offenbar, dass der Inhalt des durch die Coordinaten gebildeten Parallelogramms constant ist.

202. Für die in der Form $xy = k^2$ gegebene Gleichung der Curve die Gleichung einer Sehne oder einer Tangente zu bilden.

Wir haben $y' = \frac{k^2}{x'}$, und $y'' = \frac{k^2}{x''}$,

daher $$y' - y'' = -\frac{k^2(x' - x'')}{x'x''}.$$

Die Gleichung einer Sehne ist daher

$$\frac{y - y'}{x - x'} = -\frac{k^2}{x'x''},$$

welche nach der Bemerkung, dass $k^2 = y'x' = y''x''$ ist, wie folgt geschrieben werden kann

$$y'x + x''y = k^2 + y'x''.$$

Indem wir $x' = x''$ und $y' = y''$ machen, finden wir die Gleichung der Tangente $x'y + y'x = 2k^2$,

oder, indem wir für $k^2$ $x'y'$ schreiben,

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} = 2.$$

Aus dieser Form erhellt, dass die in den Asymptoten durch irgend eine Tangente gemachten Abschnitte $= 2x'$ und $2y'$ sind; ihr Rechteck ist daher $= 4k^2$ d. h. das Dreieck, welches irgend eine Tangente mit den Asymptoten bildet, hat einen constanten Inhalt, nämlich den doppelten Inhalt des durch die Coordinaten des Berührungspunktes gebildeten Parallelogramms.

*Aufg. 1.* Wenn zwei feste Punkte in einer Hyperbel $(x'y')$, $(x''y'')$ mit irgend einem veränderlichen Punkt $(x'''y''')$ derselben verbunden werden, so ist die Strecke, welche die Verbindungslinien auf jeder der Asymptoten bestimmen, constant.

Da die Gleichung einer der Verbindungslinien ist

$$x'''y + y'x = y'x''' + k^2,$$

so ist der von ihr in der Achse der $x$ vom Anfangspunkt der Coordinaten aus gebildete Abschnitt durch die Substitution $y = o$

$$= x''' + x'.$$

Ebenso ist der Abschnitt, welcher der andern Verbindungslinie entspricht $= x''' + x''$,
und die Differenz zwischen beiden $x' - x''$ ist somit von der Lage des Punktes $(x'''y''')$ in der Curve unabhängig.

*Aufg. 2.* Bestimme die Coordinaten des Punktes, in welchem die Tangenten der Curve in $(x'y')$, $(x''y'')$ sich schneiden.

Wir bestimmen aus den Gleichungen

$$x'y + y'x = 2k^2 \text{ und } x''y + y''x = 2k^2$$

die Werthe von $x$ und $y$ und erhalten

$$x = \frac{2k^2(x' - x'')}{x'y'' - x''y'} = \frac{2x'x''}{x' + x''}, \quad y = \frac{2y'y''}{y' + y''}.$$

203. **Die Grösse $k^2$ durch die Achsen der Curve auszudrücken.**

Da die Achse den Winkel zwischen den Asymptoten halbirt, so werden die Coordinaten des Scheitels gefunden, indem man in der Gleichung $xy = k^2$, $x = y$ setzt und sind daher $x = y = k$.

Wenn man alsdann durch $\vartheta$ den von der Achse mit der Asymptote gebildeten Winkel bezeichnet, so ist

$$a = 2k \cos \vartheta,$$

(denn $a$ ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Seitenlänge $= k$ und Basiswinkel $= \vartheta$); aber nach Art. 167 ist

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}},$$

also

$$k = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}.$$

Die Asymptotengleichung der Curve ist somit

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

204. Die Senkrechte vom Brennpunkt auf die Asymptote ist gleich der conjugirten Achse $b$.

Denn sie ist durch $CF \sin \vartheta$ ausgedrückt und somit $= b$, weil

$$CF = \sqrt{(a^2 + b^2)} \text{ und } \sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

Dies hätte auch als ein specieller Fall der Eigenschaft abgeleitet werden können, dass das Product der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Senkrechten constant und $= b^2$ ist. Denn die Asymptote kann als eine Tangente betrachtet werden, deren Berührungspunkt in einer unendlichen Entfernung ist (Artikel 97), und die Senkrechten von den Brennpunkten auf sie sind offenbar einander gleich.

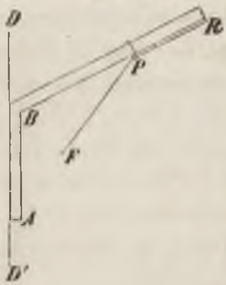
205. Der Abstand des Brennpunktes von einem Punkte in der Curve ist gleich der Länge, welche von der Directrix auf einer durch den Punkt parallel zur Asymptote gezogenen geraden Linie abgeschnitten wird.

Denn die Entfernung vom Brennpunkt ist das $e$fache des Abstandes von der Directrix (Art. 187), und die Entfernung von der Directrix verhält sich zur Länge der bezeichneten Parallellinie wie $\cos \vartheta$ ($= \frac{1}{e}$ Art. 167) zu 1.

Man kann daraus eine Methode zur Erzeugung der Hyperbel durch eine stetige Bewegung ableiten.

Ein in $B$ gebrochenes Lineal $ABR$ (Fig. 68) bewegt sich mit seiner Kante $AB$ längs der festen Linie $DD'$. Ein Faden von der Länge $RB$ ist an den zwei Punkten $R$ und $F$ befestigt, während ein Ring in $P$ den Faden stets gespannt hält; dann beschreibt der Punkt $P$ bei der Bewegung des Lineals eine Hyperbel, von welcher $F$ ein Brennpunkt, $BR$ die Richtung einer Asymptote und $DD'$ die Directrix ist; denn $PF$ ist stets gleich $PB$.

Fig. 68.




## Elftes Kapitel.

# Die Parabel.

206. Die Gleichung zweiten Grades, so sahen wir in Artikel 91, repräsentirt eine Parabel, wenn die ersten drei Glieder ein vollkommnes Quadrat bilden oder wenn die Gleichung von der Form ist $$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o.$$

Wir sahen, dass wir diese Gleichung nicht so für einen endlichen Coordinatenanfang transformiren können, dass die Coefficienten von $x$ und $y$ beide verschwinden. Die Form der Gleickung leitet jedoch sogleich zu einer andern Methode, sie zu vereinfachen.

Wir wissen (Art. 27), dass die Grösse $Dx + Ey + F$ zu der Länge der Senkrechten vom Punkt $(xy)$ auf die durch die Gleichung $$Dx + Ey + F = o$$ repräsentirte gerade Linie und ebenso die Grösse $ax + by$ der Senkrechten auf die Linie $ax + by = o$ proportional ist.

Wenn wir also die zwei geraden Linien construiren, welche die Gleichungen
$$ax + by = o, \quad Dx + Ey + F = o$$
darstellen, so drückt die Gleichung der Curve aus, dass das Quadrat der Senkrechten von einem Punkt der Curve auf die erste gerade Linie in einem constanten Verhältniss zu der Senkrechten auf die zweite Linie ist.

Wenn wir nun unsre Achsen transformiren und die Linie $ax + by = o$ zur neuen Achse der $x$, die Linie $Dx + Ey + F = o$ zur neuen Achse der $y$ machen, so wird das neue $y$ proportional zu der Senkrechten auf die Linie $ax + by$ und das neue $x$ zu der Senkrechten auf $Dx + Ey + F$, und die transformirte Gleichung erhält die Form . $y^2 = px$.

Es ist offenbar, dass der neue Anfangspunkt ein Punkt in der Curve ist, und, weil wir für jeden Werth von $x$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von $y$ haben, dass die neue Achse der $x$ ein Durchmesser ist, die neue Achse der $y$ aber parallel zu seinen Ordinaten.

Aber die Ordinate eines Durchmessers in seinem Endpunkt ist nach Artikel 102 eine Tangente der Curve, und die neue $y$Achse ist somit die Tangente der Curve im Anfangspunkt der Coordinaten.

Wenn also die Gleichung der Parabel in der Form

$$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o$$

gegeben ist, so repräsentirt die Gleichung $ax + by = o$ den durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Durchmesser und die Gleichung $Dx + Ey + F = o$ die Tangente der Curve in dem Punkte, welchen dieser Durchmesser mit derselben gemein hat. Und die Gleichung der Curve, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente am Endpunkte desselben als Achsen, ist von der Form

$$y^2 = px.$$

207. Obgleich wir so die Gleichung der Parabel in eine wirklich einfache Form übergeführt sehen, so haben unsre neuen Achsen doch die Unzweckmässigkeit, im Allgemeinen nicht rectangulär zu sein. Wir beweisen jedoch in dem Folgenden, dass es möglich ist, die Gleichung unter Beibehaltung der rectangulären Achsen in diese Form zu bringen.

Wenn wir eine willkürliche Constante $k$ einführen, so wird die Gleichung $(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o$ der Gleichung

$$(ax + by + k)^2 + (D - 2ak)x + (E - 2bk)y + F - k^2 = o$$

äquivalent gefunden. Also ist, wie im letzten Artikel

$$ax + by + k = o$$

die Gleichung eines Durchmessers und

$$(D - 2ak)x + (E - 2bk)y + F - k^2 = o$$

die der Tangente in seinem Endpunkt. (Dies bestätigt unser Beweis, Artikel 94, dass alle Durchmesser einer Parabel parallel sind.)

Nun ist die Bedingung, dass diese zwei Linien zu einander senkrecht sind, (Artikel 40)

$$a(D - 2ak) + b(E - 2bk) = o.$$

Also
$$k = \frac{aD + bE}{2(a^2 + b^2)}.$$

Weil wir eine einfache Gleichung zur Bestimmung des besondern Werths von $k$ erhalten, welcher die neuen Achsen rectangulär macht, so giebt es einen Durchmesser, dessen Ordinaten von ihm senkrecht geschnitten werden und dieser Durchmesser wird die Achse der Curve genannt. Dann aber ergiebt sich, wie im letzten Artikel, dass wenn wir diesen Durchmesser

$$ax + by + k = o$$

und die dazu senkrechte Tangente

$$a(D - 2ak)x + b(E - 2bk)y + F - k^2 = o$$

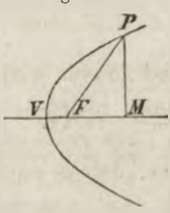
zu Achsen nehmen, die transformirte Gleichung die Form

$$y^2 = px$$

erhält.

208. Aus der Gleichung $y^2 = px$ können wir sogleich die Figur der Curve erkennen. Sie muss zu beiden Seiten der Achse der $x$ symmetrisch sein, weil jeder Werth von $x$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für $y$ liefert. Kein Theil von ihr kann auf der negativen Seite des Anfangspunkts liegen, weil $y$ für negative Werthe von $x$ imaginär wird, und wenn wir dem $x$ wachsende positive Werthe geben, erhalten wir wachsende Werthe für $y$. Also ist die Gestalt der Curve die hier dargestellte. (Fig. 69.)

Fig. 69.



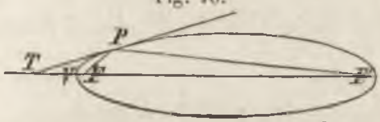

Obgleich die Parabel der Hyperbel gleicht, insofern sie unendliche Zweige besitzt, so besteht doch eine wichtige Verschiedenheit zwischen der Natur der unendlichen Zweige der beiden Curven; die der Hyperbel strebten, wie wir sahen, unablässig, mit zwei divergirenden geraden Linien zusammenzufallen, aber dies gilt nicht für die Parabel, weil wir für die Bestimmung der Punkte, in welchen eine gerade Linie $x = ky + l$ die Parabel $y^2 = px$ schneidet, die quadratische Gleichung

$$y^2 - pky - pl = o$$

erhalten, deren Wurzeln nie beide unendlich sein können, so lange $k$ und $l$ endliche Werthe haben. Daher giebt es keine endliche gerade Linie, welche die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten im Unendlichen schneidet; denn irgend ein Durchmesser $y=m$, welcher die Curve allerdings in einem unendlich entfernten Punkte schneidet (Art. 95), trifft sie doch auch in dem Punkte $x=\frac{m^2}{p}$ und obgleich dieser Werth wächst, wenn $m$ wächst, so wird er doch nicht unendlich, so lange $m$ endlich ist.

209. Die Gestalt der Parabel kann aus dem folgenden Lehrsatze mit besonderer Klarheit erkannt werden: **Wenn von einer Ellipse ein Scheitel und ein Brennpunkt gegeben sind, während ihre grosse Achse als unbegrenzt wachsend gedacht wird, so nähert sich die Curve fortwährend mehr der Parabel.**

Fig. 70.




Die auf ihren Scheitel bezogene Gleichung der Ellipse ist (Art. 196)
$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Wir wünschen $b$ in Theilen der Entfernung $VF$ $(=m)$ auszudrücken, welche wir als unveränderlich voraussetzen. Wir haben
$$m=a-\sqrt{(a^2-b^2)}$$
(Art. 183); also $b^2=2am-m^2$; dadurch wird die Gleichung
$$y^2=\left(4m-\frac{2m^2}{a}\right)x-\left(\frac{2m}{a}-\frac{m^2}{a^2}\right)x^2.$$

Wenn wir nun voraussetzen, dass $a$ unendlich geworden sei, so verschwinden ausser dem ersten alle Glieder auf der rechten Seite der Gleichung und die Gleichung reducirt sich auf
$$y^2=4mx.$$
d. i. die Gleichung einer Parabel.

Wir sehen also, dass, wenn Brennpunkt und Scheitel einer Ellipse gegeben sind, während die grosse Achse unbegrenzt wächst, der Parameter $\left(=\frac{2b^2}{a}\text{ Art. 195}\right)$ endlich bleibt und $=4m$ wird.

Wenn die Gleichung der Parabel in der Form $y^2=px$ gegeben wird, so wird deshalb die Grösse $p$ der **Hauptparameter** genannt.

Eine Parabel kann auch als eine Ellipse betrachtet werden, deren Excentricität $= 1$ ist; denn $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$. Nun sehen wir, dass $\frac{b^2}{a^2}$, der Coefficient von $x^2$ in der vorigen Gleichung verschwindet, wenn wir $a$ nach den vorgeschriebenen Bedingungen wachsen lassen; demnach wird $e^2$ endlich $= 1$.

210. Den Parameter der Parabel

$$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o$$

auszudrücken.

Wir haben (Art. 207) gesehen, dass diese Gleichung in der Form geschrieben werden kann:

$(ax + by + k)^2 + (D - 2ak)x + (E - 2bk)y + F - k^2 = o,$

welches, wenn man für $k$ den in jenem Artikel gefundenen Werth einsetzt, ist

$$(ax + by + k)^2 + \frac{bD - aE}{a^2 + b^2}(bx - ay + F') = o,$$

wo zur Abkürzung

$$F' = \frac{(a^2 + b^2)(F - k^2)}{bD - aE}$$

gesetzt worden ist. Wenn man nun durch $X$ und $Y$ die Senkrechten von irgend einem Punkt auf die Linien $ax + by + k = o$ und $bx - ay + F' = o$ bezeichnet, so wird diese Gleichung

$$(a^2 + b^2)Y^2 = \frac{aE - bD}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}X.$$

und daher
$$p = \frac{aE - bD}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Aufg. 1.* Die Gleichung

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 22x + 46y + 9 = o$$

in die Form $y^2 = px$ zu bringen. Hier ist $k = 5$ und die Gleichung kann geschrieben werden

$$(3x + 4y + 5)^2 = 2(4x - 3y + 8).$$

oder wenn wir die Abstände irgend eines Punktes von $3x + 4y + 5 = o$ und $4x - 3y + 8 = o$ durch $Y$ und $X$ bezeichnen

$$Y^2 = \frac{2}{5}X.$$

*Aufg. 2.* Bestimme den Parameter der Parabel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

*Aufl.*
$$\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieser Werth kann auch direct mit Hilfe der folgenden Sätze abgeleitet werden, welche später bewiesen werden: Der Brennpunkt einer Parabel ist der Fusspunkt einer Senkrechten vom Durchschnittspunkt zweier sich rechtwinklig schneidenden Tangenten auf ihre Berührungssehne, und der Parameter eines Kegelschnitts wird gefunden, indem man das Vierfache des Reckteck̈s aus den Abschnitten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne durch die Länge dieser Sehne dividirt. (Art. 195.)

*Aufg.* 3. Wenn $a$ und $b$ die Längen zweier Tangenten einer Parabel sind, welche sich rechtwinklig schneiden, und $m$ ein Viertheil des Parameters ist, so soll bewiesen werden, dass

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}.$$

211. Den Parameter von

$$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o$$

bei schiefen Coordinatenachsen zu bestimmen.

Wir verfahren wie in Artikel 207; da die Achsen aber schief vorausgesetzt sind, so müssen wir die Bedingung des Artikel 41 für das rechtwinklige Durchschneiden zweier geraden Linien anwenden und erhalten für $k$ die Bestimmungsgleichung

$$a(D - 2ak) + b(E - 2bk) = [a(E - 2bk) + b(D - 2ak)] \cos\omega,$$

also $$k = \frac{aD + bE - (aE + bD)\cos\omega}{2(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)}.$$

Die transformirte Gleichung ist dann

$$(ax + by + k)^2 + \frac{bD - aE}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega}[(b - a\cos\omega)x - (a - b\cos\omega)y + F'] = o,$$

worin $$F' = \frac{(F - k^2)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)}{(bD - aE)}.$$

Durch die Substitutionen

$$Y = \frac{(ax + by + k)\sin\omega}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)}},$$

$$X = \frac{(b - a\cos\omega)x - (a - b\cos\omega)y + F'}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)}}$$

erhalten wir daraus zur Herstellung der Form $Y^2 = pX$

$$p = \frac{(aE - bD)\sin^2\omega}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Aufg.* Finde den Parameter der Parabel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = o.$$

*Aufl.* $$p = \frac{4\,a^2 b^2 \sin^2\omega}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

## Die Tangente.

212. Die Gleichung einer Sehne der Parabel wird aus den Coordinaten der von ihr verbundenen Punkte der Parabel wie folgt gefunden. Weil $y'^2 = px'$ und $y''^2 = px''$ so ist

$$y'^2 - y''^2 = p(x' - x'') \text{ und } \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{p}{y' + y''},$$

und die Gleichung einer Sehne somit

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{p}{y' + y''} \text{ oder } (y' + y'')\,y - px - y'y'' = o.$$

Die Gleichung der Tangente geht daraus durch die Substitution $y' = y''$ hervor und wird wegen $y'^2 = px'$

$$2yy' = p(x + x').$$

Für den Durchschnittspunkt der Tangente mit der Achse ergiebt sich $x = -x'$, oder die Strecke $TM$ d. i. die Subtangente wird im Scheitel halbirt.

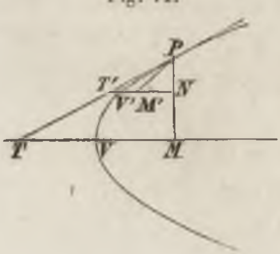
Da die Gleichung der Parabel für schiefwinklige Achsen die Form

$$y^2 = p'x$$

behält, wenn zu denselben ein Durchmesser und die durch seinen Endpunkt gehende Parabeltangente gewählt werden, so bleiben auch die Gleichungen der Sehne und Tangente unverändert und die Subtangente ist auch dann noch das Doppelte der Abscisse.

Dies giebt eine einfache Methode, an irgend einen Punkt einer Parabel eine Tangente zu ziehen, weil wir nur $TV = VM$ (Fig. 71) zu nehmen und $PT$ zu ziehen haben; es erlaubt uns auch, nachdem wir diese Tangente gefunden haben, die irgend einem andern Durchmesser entsprechende Ordinate des Punktes zu bestimmen, weil wir nur $V'M' = T'V'$ zu machen und $PM'$ zu ziehen haben.

Fig. 71.



213. Es folgt aus Artikel 101 oder kann wie in Artikel 169 bewiesen werden, dass die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $x'y''$ mit der der Tangente dieselbe Form hat und daher durch $2y'y = p(x + x')$ dargestellt ist. Wenn wir den Punkt suchen, wo diese Polare die Achse der $x$ schneidet, so erhalten wir

$$x = -x'$$

und damit einen Satz, welcher uns häufig nützlich sein wird: dass der Abschnitt, den die Polaren zweier Punkte in der Achse der $x$ bilden dem Abschnitt zwischen den von diesen Punkten auf die Achse gefällten Senkrechten gleich ist; jede dieser Grössen ist $= (x' - x'')$.

## Durchmesser.

214. Wir haben erwähnt, dass die Gleichung der Parabel für einen Durchmesser und die seinem Endpunkt entsprechende Tangente die Form
$$y^2 = p'x$$
erhält.

Wir wollen dies durch wirkliche Transformation der auf rectanguläre Achsen bezogenen Gleichung $y^2 = px$ nochmals beweisen, weil es nützlich ist, den neuen Parameter $p'$ in Theilen des alten $p$ auszudrücken. Die Gleichung $y^2 = px$ wird durch Transformation zu parallelen Achsen durch einen Punkt $x'y'$ in der Curve (indem wir $x + x'$ und $y + y'$ für $x$ und $y$ schreiben) in

$$y^2 + 2yy' = px$$

übergeführt.

Wenn wir alsdann mit Beibehaltung der Achse der $x$ eine neue Achse der $y$ wählen, die zu jener unter dem Winkel $\vartheta$ geneigt ist, so ist unser altes $y = PN = PM' \sin\vartheta$ und das alte $x = V'M' + PM' \cos\vartheta$. (Siehe die Fig. des Art. 212.) Wir substituiren daher $y \sin\vartheta$ für $y$ und $x + y\cos\vartheta$ für $x$ und unsre Gleichung wird

$$y^2 \sin^2\vartheta + 2yy' \sin\vartheta = px + py \cos\vartheta.$$

Damit diese sich auf die Form $y^2 = px$ reducire, müssen wir haben

$$2y' \sin\vartheta = p\cos\vartheta \text{ oder } \tan\vartheta = \frac{p}{2y'}.$$

Aus der Gleichung

$$2y'y = p(x + x')$$

sehen wir aber, dass $\vartheta$ der von der Tangente mit der Achse der $x$ gebildete Winkel ist. Somit nimmt die obige Gleichung auf einen Durchmesser und die entsprechende Tangente bezogen die Form an

$$y^2 = \frac{p}{\sin^2\vartheta}\,x \text{ oder } y^2 = p'x.$$

Die Grösse $p'$ wird der dem Durchmesser $V'M'$ entsprechende Parameter genannt und wir sehen, dass der Parameter irgend eines Durchmessers dem Haupt-Parameter direct und dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen seine Ordinaten mit der Achse bilden, verkehrt proportional ist; denn es ist

$$p' = \frac{p}{\sin^2\vartheta}.$$

Wir können den Parameter irgend eines Durchmessers aus den Coordinaten seines Scheitels ableiten vermittelst der Gleichung

$$\tan\vartheta = \frac{p}{2y'};$$

denn darnach ist

$$\sin\vartheta = \frac{p}{\sqrt{(p^2 + 4y'^2)}} = \sqrt{\left(\frac{p}{p + 4x'}\right)}$$

und

$$p' = p + 4x.$$

## Die Normale.

215. Die Gleichung einer durch $(x'y')$ senkrecht zur Tangente

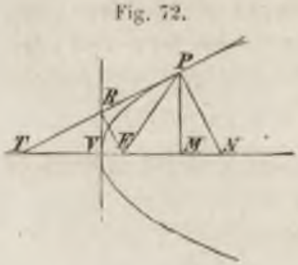
$$2yy' = p(x + x')$$

gezogenen geraden Linie ist

$$p(y - y') + 2y'(x - x') = o.$$

Der von ihr in der Achse der $x$ gebildete Abschnitt ist

Fig. 72.




$$x\ (= VN) = x' + \frac{p}{2},$$

und daher wegen $VM = x$, (Fig. 72)

$$MN \text{ (die Subnormale)} = \frac{p}{2}.$$

In der Parabel ist die Subnormale constant und dem Halbparameter gleich.

Die Normale selbst ist

$$= \sqrt{(PM^2 + MN^2)} = \sqrt{\left(y'^2 + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left[p\left(x' + \frac{p}{4}\right)\right]}.$$

## Der Brennpunkt.

216. Ein Punkt in der Achse der Parabel, dessen Entfernung vom Scheitel einem Viertheil des Hauptparameters gleich ist, wird der Brennpunkt der Curve genannt. Es ist derselbe Punkt, welcher im Artikel 209 uns dazu führte, Analogien mit dem Brennpunkt der Ellipse zu vermuthen, und die Entwickelungen des gegenwärtigen Abschnitts werden zeigen, dass eine Parabel in jeder Beziehung als eine Ellipse betrachtet werden darf, deren einer Brennpunkt eben dieser Punkt ist, während der andre in unendlicher Entfernung liegt. Um Brüche zu vermeiden, wollen wir in den folgenden Artikeln zuweilen die Abkürzung $m = \frac{p}{4}$ anwenden.

Die Entfernung irgend eines Punktes in der Curve vom Brennpunkt zu finden.

Da die Coordinaten des Brennpunkts $m$, $o$ sind, so ist das Quadrat seiner Entfernung von irgend einem Punkte $(x'y')$

$$(x' - m)^2 + y'^2 = x'^2 - 2mx' + m^2 + 4mx' = (x' + m)^2.$$

Demnach ist die Entfernung irgend eines Punktes vom Brennpunkt $x' + m$. Damit lässt sich das Resultat des Artikel 214 einfacher in dem Satze ausdrücken: Der Parameter irgend eines Durchmessers ist das Vierfache der Entfernung seines Endpunkts vom Brennpunkte.

217. Die Polare des Brennpunkts einer Parabel wird wie bei der Ellipse und Hyperbel die Directrix genannt. Weil der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel $= m$, ist seine Polare nach Artikel 213 eine zur Achse senkrechte Linie in demselben Abstand auf der andern Seite des Scheitels. Die Entfernung irgend eines Punktes von der Directrix ist somit

$$= x' + m,$$

welches durch Vergleichung mit dem Ergebniss des letzten Artikels den Satz giebt: Die Entfernung irgend eines Punktes der Curve von der Directrix ist seiner Entfernung vom Brennpunkte gleich.

Wir sahen im Artikel 187, dass in der Ellipse und Hyperbel die Entfernung vom Brennpunkt zu der Entfernung von der Directrix in dem constanten Verhältniss $e:1$ ist und erkennen jetzt, dass diess auch für die Parabel gilt, weil in ihr $e=1$ ist. (Art. 209.)

Die im Artikel 205 zur mechanischen Beschreibung der Hyperbel gegebene Methode liefert eine Parabel, wenn man den Winkel $ABR$ einem rechten Winkel gleich macht.

218. **Der Punkt, wo eine Tangente die Achse schneidet, und ihr Berührungspunkt sind vom Brennpunkt gleich weit entfernt.**

Denn die Entfernung vom Scheitel bis zu dem Punkte, wo die Tangente die Achse schneidet, ist $x'$ (Art. 212), also die Entfernung dieses letzteren Punktes vom Brennpunkt $= x' + m$.

219. **Iede Tangente bildet mit der Achse und dem Radius vector des Berührungspunktes gleiche Winkel.**

Dies ergiebt sich aus der Betrachtung des gleichschenkligen Dreiecks, welches wir im letzten Artikel als durch die Achse, die Tangente und den Brennstrahl des Berührungspunktes gebildet zeigten.

Es ist nur eine Ausdehnung der Eigenschaft der Ellipse (Artikel 189), dass $\angle TPF = \angle T'PF'$; denn wenn wir den Brennpunkt $F'$ als in unendlicher Entfernung gelegen voraussetzen, so wird die Linie $PF'$ parallel zur Achse und $\angle TPF = \angle PTF$.

Demnach schneidet die Tangente vom Endpunkte der Brennpunkts-Ordinate die Achse unter einem Winkel von $45^0$.

220. **Die Länge der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten zu bestimmen.**

Die Senkrechte vom Punkt $(m, o)$ auf die Tangente

$$yy' = 2m(x + x')$$

ist

$$= \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \frac{2m(x' + m)}{\sqrt{(4mx' + 4m^2)}} = \sqrt{[m(x' + m)]}.$$

d. h. $FR$ (siehe Fig. 72) ist die mittlere Proportionale zwischen $FV$ und $FP$.

Aus diesem Ausdruck und aus Artikel 215 folgt auch, dass $FR$ die Hälfte der Normale ist, welches wir auch geometrisch aus dem Factum erkannt haben würden, dass $TF = FN$.

221. Die vom Brennpunkt auf die Tangente gefällte Senkrechte durch den von ihr mit der Achse eingeschlossenen Winkel auszudrücken.

Wir haben

$$\cos\alpha = \sin FTR = \sqrt{\left(\frac{m}{x' + m}\right)},$$

(Art. 214); daher nach Art. 220

$$FR = \sqrt{[m(x' + m)]} = \frac{m}{\cos\alpha}.$$

Die Gleichung der Tangente wird daher für den Brennpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{m}{\cos\alpha} = o,$$

und darnach kann die Senkrechte von irgend einem andern Punkte aus in Function des von ihr mit der Achse gebildeten Winkels ausgedrückt werden.

222. Der Ort des Fusspunkts der vom Brennpunkt auf die Tangente gefällten Senkrechten ist eine gerade Linie.

Denn nehmen wir den Brennpunkt zum Pol, so ist die Polargleichung des fraglichen Ortes

$$\varrho = \frac{m}{\cos\alpha} \text{ oder } \varrho\cos\alpha = m,$$

eine Gleichung, welche offenbar die Scheiteltangente der Parabel repräsentirt. Wenn wir umgekehrt von irgend einem Punkt $F$ einen Radius vector $FR$ zu einer geraden Linie $VR$ und $PR$ senkrecht zu ihm ziehen, so tangirt die Linie $PR$ stets eine Parabel, für welche der Punkt $F$ Brennpunkt ist.*)

Als eine nützliche Uebung empfehlen wir dem Leser die Untersuchung des durch den Fusspunkt der Senkrechten vom Brennpunkt auf die Tangente beschriebenen Ortes in rectangulären Coordinaten.

---

*) Die allgemeine Auflösung der Klasse von Aufgaben, welcher diese Erzeugungsweise der Parabel angehört und in denen die Enveloppe einer beweglichen geraden Linie zu bestimmen ist, kann erst im weiteren Verlaufe der Untersuchung gegeben werden.

223. Den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten zu bestimmen, welche einander rechtwinklig durchschneiden.

Aus der im Artikel 222 entwickelten Gleichung einer Tangente $x \cos^2\alpha + y \sin\alpha \cos\alpha + m = o$
ergiebt sich die Gleichung der zu ihr senkrechten Tangente (d. h. derjenigen, deren Normale den Winkel $90^0 + \alpha$ mit der Achse bildet) durch die Substitution von $\cos\alpha$ für $\sin\alpha$ und $-\sin\alpha$ für $\cos\alpha$ $x \sin^2\alpha - y \sin\alpha \cos\alpha + m = o$,
und indem man durch einfache Addition dieser Gleichungen $\alpha$ eliminirt, erhält man als die Gleichung des verlangten Ortes

$$x + 2m = o,$$

d. i. die Gleichung der Directrix, denn die Entfernung des Brennpunkts von der Directrix ist $= 2m$.

224. Der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten ist die Hälfte des Winkels welchen die Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte einschliessen.

Denn in dem gleichschenkligen Dreieck $PFT$ ist der Winkel $PTF$, den die Tangente mit der Achse bildet, die Hälfte des Winkels $PFN$, welchen der Brennstrahl mit ihr einschliesst. Nun ist der Winkel zwischen irgend zwei Tangenten gleich der Differenz der Winkel, die sie mit der Achse bilden und der Winkel zwischen den Brennstrahlen ist gleich der Differenz der von ihnen mit der Achse eingeschlossenen Winkel.

Der Lehrsatz des letzten Artikels kann als ein specieller Fall des gegenwärtigen Satzes angesehen werden, denn wenn zwei Tangenten mit einander einen rechten Winkel einschliessen, so bilden die Brennstrahlen der Berührungspunkte mit einander einen Winkel von $180^0$ und die zwei Tangenten entsprechen den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne und schneiden sich daher nach der Definition der Directrix in derselben.

225. Die gerade Linie, welche den Brennpunkt mit dem Durchschnittspunkt zweier Tangenten verbindet, halbirt den Winkel, welchen die Berührungspunkte der letztern am Brennpunkte spannen.

Aus den Gleichungen zweier Tangenten

$$x \cos^2\alpha + y \sin\alpha \cos\alpha + m = o,$$
$$x \cos^2\beta + y \sin\beta \cos\beta + m = o,$$

finden wir durch Subtraction die Gleichung der geraden Linie, welche ihren Durchschnittspunkt mit dem Brennpunkt verbindet

$$x \sin(\alpha + \beta) - y \cos(\alpha + \beta) = o.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, die mit der Achse der $x$ einen Winkel $(\alpha + \beta)$ einschliesst. Weil aber $\alpha$ und $\beta$ die von den Senkrechten auf die Tangenten mit der Achse gebildeten Winkel sind, so haben wir $VFP = 2\alpha$ und $VFP' = 2\beta$; daher halbirt die gerade Linie, welche mit der Achse den Winkel $(\alpha + \beta)$ bildet, den Winkel $PFP'$. Dieser Satz kann auch bewiesen werden, indem man wie in Artikel 193, den Winkel $(\vartheta - \vartheta')$ berechnet, unter welchem die durch den Punkt $(xy)$ gehende Tangente einer Parabel vom Brennpunkt aus gesehen wird; denn wenn man findet

$$\cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{x + m}{\varrho},$$

so zeigt dieser von den Coordinaten des Berührungspunktes unabhängige Werth, dass er für jede der zwei Tangenten, die man durch $(xy)$ ziehen kann, derselbe ist.

Zusatz 1.) Wenn wir den Fall nehmen, wo der Winkel $PFP' = 180^0$ so geht $PP'$ durch den Brennpunkt; die Tangenten $TP$ und $TP'$ schneiden einander in der Directrix und der Winkel $TFP$ ist gleich $90^0$. (Art. 194.) Dies kann auch direct bewiesen werden, indem man die Gleichung der Polare irgend eines Punktes $(-m, y')$ in der Directrix und die Gleichung der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt bildet; diese zwei Gleichungen sind

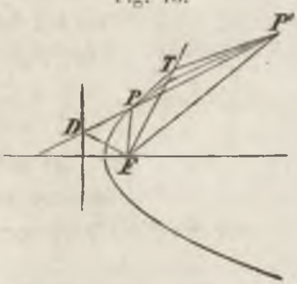
$$y'y = 2m(x - m)$$

und

$$2m(y - y') + y'(x - m) = o,$$

und sie stellen offenbar zwei zu einander rechtwinklige gerade Linien dar.

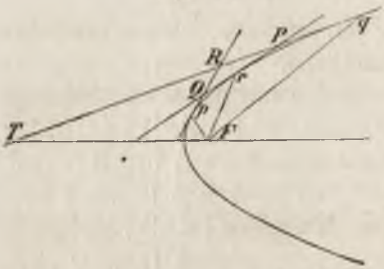
Fig. 73.




Zusatz 2.) Wenn eine Sehne $PP'$ (Fig. 73) die Directrix in $D$ schneidet, so ist $FD$ die äussere Halbirungslinie des Winkels $PFP'$. Dies ist in der 2. Aufgabe des Artikels 194 bereits bewiesen worden.

Zusatz 3.) Wenn eine veränderliche Tangente der Parabel zwei feste Tangenten schneidet, so ist der Winkel, unter welchem der zwischen den festen Tangenten liegende Theil der veränderlichen Tangente vom Brennpunkt aus erscheint, das Supplement des Winkels, welchen die festen Tangenten bilden.

Fig. 74.




Denn der Winkel $QRT$ (Fig. 74) ist die Hälfte des Winkels $pFq$ (Art. 224), und nach dem jetzigen Artikel ist $\angle PFQ$ auch die Hälfte von $\angle pFq$, daher

$$PFQ = QRT,$$

d. i. gleich dem Supplement des $\angle PRQ$.

Zusatz 4.) Der Kreis, welcher dem von irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt.

Denn der durch $PRQ$ beschriebene Kreis muss durch $F$ gehen, weil der im Segment $PFQ$ enthaltene Winkel das Supplement des in $PRQ$ enthaltenen ist.

226. Die Polargleichung der Parabel für den Brennpunkt als Pol abzuleiten.

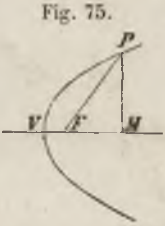
Wir zeigten im Artikel 216, dass der Brennstrahl

$$FP = \varrho = x' + m = VM + m = FM + 2m = \varrho\cos\vartheta + 2m$$

ist. (Fig. 75.)

Daraus folgt $$\varrho = \frac{2m}{1 - \cos\vartheta};$$

Fig. 75.




dieselbe Gleichung geht aus der Gleichung des Artikel 195 durch die Substitution $e = 1$ hervor. (Art. 209.) Die in den Aufgaben des Artikel 195 entwickelten Eigenschaften gelten daher auch für die Parabel.

In dieser Gleichung ist $\vartheta$ von der Seite $FM$ her gemessen vorausgesetzt; wenn wir ihn als von der Seite $FV$ gemessen betrachten, so ist

$$\varrho = \frac{2m}{1 + \cos\vartheta}.$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden

$$\varrho \cos^2 \tfrac{1}{2} \vartheta = m \,,$$

oder

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \tfrac{1}{2} \vartheta = m^{\frac{1}{2}} \,,$$

und gehört somit einer Klasse von Gleichungen an, deren allgemeine Form

$$\varrho^n \cos n\vartheta = a^n$$

ist. Einige Eigenschaften derselben gedenken wir später zu entwickeln.

---

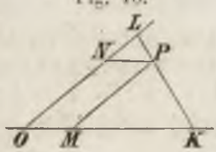
## Zwölftes Kapitel.

# Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte.

227. Die Methode, die Algebra auf Probleme bezüglich der Kegelschnitte anzuwenden, ist im Wesentlichen dieselbe, wie die in dem Falle der geraden Linie und des Kreises angewendete und wird keinem Leser Schwierigkeiten darbieten, der die im dritten und achten Kapitel gegebenen Beispiele sorgfältig durchgearbeitet hat. Wir wollen daher aus der grossen Anzahl von Aufgaben, die zu Oertern des zweiten Grades führen, nur einige auswählen und ihnen mehrere Eigenschaften der Kegelschnitte anreihen, welche zur Aufnahme in die vorhergehenden Entwickelungen nicht geeignet erschienen.

*Aufg. 1.* Eine Linie von constanter Länge bewegt sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels; man soll den durch einen festen Punkt in ihr beschriebenen Ort finden.

Fig. 76.




Bezeichnen wir $PL$ durch $n$, $PK$ durch $m$, und $LK$ durch $l$, so haben wir aus ähnlichen Dreiecken $OL = \frac{ly}{m}$ und $OK = \frac{lx}{n}$.

Mittelst der Relation

$$LK^2 = OL^2 + OK^2 - 2OL \,.\, OK \cos \omega$$

folgt daraus

$$l^2 = \frac{l^2 y^2}{m^2} + \frac{l^2 x^2}{n^2} - \frac{2 l^2 xy \cos \omega}{mn}$$

oder

$$\frac{x^2}{n^2} + \frac{y^2}{m^2} - \frac{2xy \cos \omega}{nm} = 1 \,;$$

die Gleichung einer Ellipse, die den Punkt $O$ zu ihrem Centrum hat; denn $B^2 - 4AC$ ist hier negativ, nämlich $= -\frac{4}{n^2 m^2} \sin^2 \omega$.

*Aufg.* 2. Welches ist der Ort, den der vierte Endpunkt eines Parallelogramms durchläuft, wenn zwei Seiten desselben $OK$, $OL$ unveränderlich, und die zugehörige Diagonale um einen festen Punkt $P$ drehend vorausgesetzt werden?

*Aufg.* 3. Welches ist der Ort der Endpunkte aller der Durchmesser, welche man parallel zur einen Diagonale eines Rechtecks in Kreisen ziehen kann, die über der andern Diagonale beschrieben werden?

Wir wählen zwei benachbarte Seiten des Rechtecks zu Coordinaten-Achsen und bezeichnen die Länge der mit der Achse der $x$ zusammenfallenden durch $m$, und die Länge der in der Achse der $y$ liegenden durch $n$, ferner durch $a$ und $b$ die Coordinaten des Centrums des Kreises, von dem wir voraussetzen, dass er über der durch den Coordinatenanfang gehenden Diagonale beschrieben sei. Die Gleichung dieses Kreises muss von der Form sein

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = o$$

und seine Mittelpunkts-Coordinaten unterliegen der Bedingung

$$m^2 + n^2 - 2am - 2bn = o.$$

Die Gleichung desjenigen Durchmessers, welcher der zweiten Diagonale des Rechtecks parallel geht, ist alsdann

$$an + bm = my + nx.$$

Wir erhalten die Gleichung des gesuchten Ortes, indem wir die Coordinaten des Mittelpunktes $a$, $b$ aus den drei aufgestellten Bedingungsgleichungen eliminiren. Diese Elimination liefert

$$(m^2 + n^2)(y^2 - x^2 + mx - ny) = o,$$

oder als die Gleichung des Ortes

$$y^2 - x^2 + mx - ny = o.$$

Durch die Substitution $x + \frac{m}{2}$ für $x$ und $y + \frac{n}{2}$ für $y$, d. h. bei Verlegung des Anfangspunktes in den Mittelpunkt des Rechtecks geht dieselbe in

$$x^2 - y^2 = \frac{m^2 + n^2}{4}$$

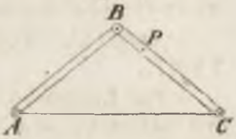
über, d. h. der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche den Mittelpunkt des Rechtecks zum Centrum und Parallelen zu den Seiten desselben zu Achsen hat. Sie geht durch die Ecken des Rechtecks, weil $x = \pm \frac{m}{2}$, $y = \pm \frac{n}{2}$ gefunden wird.

*Aufg.* 4. Oder der Ort des Durchschnittspunktes der auf $OK$, $OL$ in denselben Punkten $L$, $K$ wie in Aufg. 2 errichteten Senkrechten, d. h. der vierten Ecke des entsprechenden veränderlichen Kreisvierecks?

*Aufg.* 5. Welchen Ort beschreibt ein Punkt $Q$, der in $LK$ so angenommen wird, dass $QK = PL$ ist?

*Aufg. 6.* Zwei gleiche Lineale $AB$, $BC$ (Fig. 77) sind durch ein Charnier in $B$ vereinigt, der Endpunkt $A$ ist befestigt, indess $C$ die gerade Linie $AC$ durchlaufen muss; man soll den durch irgend einen festen Punkt $P$ in $BC$ beschriebenen Ort finden.

Fig. 77.




*Aufg. 7.* Man soll aus der Basis und der Differenz der Basiswinkel eines Dreiecks den Ort der Spitze desselben bestimmen.

Wir können genau wie in Artikel 124, Aufgabe 1 verfahren, wo die Summe der Basiswinkel gegeben ist. Der Ort wird als eine gleichseitige Hyperbel gefunden, welche die Basis zum Durchmesser hat. Da die Differenz der Basiswinkel gegeben ist, so ist leicht zu sehen, dass die innere und äussere Halbirungslinie des Winkels an der Spitze zu festen Linien parallel sein müssen, und diese geraden Linien sind den Asymptoten der gefundenen Hyberbel parallel.

Umgekehrt, wenn wir das Dreieck betrachten, dessen Basis der Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel ist, und dessen Spitzen in der Curve liegen, so sind die Seiten nach Art. 180 zu conjugirten Durchmessern parallel; conjugirte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel machen aber gleiche Winkel mit den Asymptoten. (Art. 175.)

*Aufg. 8.* Man soll aus der Basis und dem Product der Tangenten der Basiswinkel eines Dreiecks den Ort des Scheitels bestimmen.

Derselbe ist ein Kegelschnitt, dessen Scheitel mit den Basisecken zusammenfallen. Dies ist die Umkehrung von Art. 171.

*Aufg. 9.* Aus der Basislänge und dem Product der Tangenten der halben Basiswinkel den Ort der Spitze zu finden.

Indem man die Tangenten der Hälften der Basiswinkel in Theilen der Seiten ausdrückt, findet man, dass die Summe der Seiten gegeben ist, und dass daher der Ort eine Ellipse ist, welche die Basisecken zu Brennpunkten hat.

*Aufg. 10.* Welches ist der Ort des Mittelpunktes des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises, von welchem die Basis und die Summe seiner Seiten bekannt sind?

Man kann aus den beiden letzten Beispielen unmittelbar erkennen, dass der Ort eine Ellipse ist, deren Scheitel die Endpunkte der gegebenen Basis sind.

*Aufg. 11.* Wenn der Inhalt irgend eines Dreiecks und der Winkel an der Spitze desselben der Grösse und Lage nach bestimmt sind, so soll man den Ort eines Punktes finden, der die Basis in einem gegebenen Verhältniss theilt.

*Aufg. 12.* Die Basis eines Dreiecks ist gegeben und der eine Basiswinkel ist doppelt so gross, als der andere; welches ist der Ort der Spitze?

*Aufg. 13.* Theile einen Kreisbogen in drei gleiche Theile.

Der Theilpunkt wird als der Durchschnitt des gegebenen Bogens mit einer gewissen Hyperbel bestimmt.

*Aufg. 14.* Die Basis und der Inhalt eines Dreiecks sind gegeben; man soll den Ort des Punktes finden, in welchem seine drei Höhenperpendikel sich schneiden.

*Aufg. 15.* Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises finden, welcher zwei andere Kreise berührt, oder welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt.

*Aufg. 16.* Die Basis eines Dreiecks und die Länge des durch die Seiten in einer gegebenen geraden Linie gebildeten Abschnitts ist gegeben; man soll den Ort der Spitze bestimmen.

*Aufg. 17.* Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; der Ort der dritten Ecke ist zu finden.

*Aufg. 18.* Zwei Ecken eines Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien, indess seine Seiten sich um feste Punkte drehen; man soll den Ort der dritten Ecke bestimmen.

*Aufg. 19.* Welches ist der Ort des Centrums eines Kreises, der in zwei gegebenen geraden Linien vorgeschriebene Abschnitte macht.

*Aufg. 20.* Ein Dreieck $ABC$ ist einem gegebenen Kreis umschrieben, der Winkel an $C$ ist gegeben und $B$ bewegt sich längs einer festen geraden Linie; man soll den Ort von $A$ finden.

Wir wenden Polar-Coordinaten an, deren Pol das Centrum des Kreises ist und deren Winkel gegen die Normale auf die feste gerade Linie gemessen werden, und bezeichnen in diesem Sinne die Coordinaten von $A$, $B$ durch $\varrho, \vartheta$; $\varrho', \vartheta'$. Dann ist $\varrho' \cos \vartheta' = p$. Aber es ist leicht zu sehen, dass der Winkel $AOB$ gegeben ist ($= \alpha$); und da die Höhe des Dreiecks $AOB$ gegeben ist, gilt die Gleichung

$$r = \frac{\varrho \varrho' \sin \alpha}{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2 \varrho \varrho' \cos \alpha)}}.$$

Aus ihr geht durch die Substitution von $\vartheta + \vartheta' = \alpha$ die Polar-Gleichung des Ortes $$r^2 = \frac{p^2 \varrho^2 \sin^2 \alpha}{\varrho^2 \cos^2(\alpha - \vartheta) + p^2 - 2 p \varrho \cos(\alpha - \vartheta)}$$ hervor, eine Gleichung, welche einen Kegelschnitt darstellt.

*Aufg. 21.* Eine gerade Linie bewegt sich so, dass sie stets einen festen Kegelschnitt berührt; in jeder ihrer Lagen bestimmt man ihren Pol in Bezug auf einen andern festen Kegelschnitt, welches ist der von diesem Pol durchlaufene Ort?

Wenn wir die beiden Kegelschnitte durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o.$$

repräsentiren, so ist die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf den zweiten nach Art. 101

$$(2Ax' + By' + D)x + (2Cy' + Bx' + E)y + Dx' + Ey' + 2F = o,$$

Aber die Bedingung, unter welcher diese gerade Linie den ersten Kegelschnitt berührt, ist nach Art. 169, Aufg. 1

$$a^2(2Ax' + By' + D)^2 + b^2(2Cy' + Bx' + E)^2 = (Dx' + Ey' + 2F)^2.$$

Diese Bedingung, welche durch die Coordinaten des Punktes befriedigt werden muss, ist die Gleichung seines Ortes und offenbar vom zweiten Grade.

228. Wir geben in diesem Artikel einige auf die Focal-Eigenschaften der Kegelschnitte bezügliche Aufgaben und Sätze und fordern den Leser auf, die fehlenden Beweise zu entwickeln.

*Aufg. 1.* In einem Kegelschnitt ist die Focal-Distanz eines jeden Punktes der bis zum Durchschnitt mit der Tangente am Endpunkt der Brennpunkts-Ordinate verlängerten Ordinate des Punktes gleich.

*Aufg. 2.* Vom Brennpunkt eines Kegelschnittes aus werden gegen die Tangenten desselben unter gegebenem Winkel gerade Linien gezogen; man soll den Ort ihrer Fusspunkte bestimmen.

*Aufg. 3.* Den Ort des Poles einer festen geraden Linie in Bezug auf eine Reihe concentrischer und confocaler Kegelschnitte zu finden.

Wir wissen, dass der Pol einer geraden Linie $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aus den Gleichungen $mx = a^2$ und $ny = b^2$ (Art. 169) gefunden wird; wenn die Brennpunkte des Kegelschnitts gegeben sind, so ist $a^2 - b^2 = c^2$ bestimmt, und der Ort des Pols der festen geraden Linie ist durch $mx - ny = c^2$ repräsentirt, welches die Gleichung einer zur gegebenen geraden Linie senkrechten Geraden ist.

Wenn die gegebene Linie einen der Kegelschnitte berührt, so ist ihr Pol der Berührungspunkt; d. i. die Tangenten eines Kegelschnittes in den Punkten, in denen die Tangente eines confocalen Kegelschnitts ihn schneidet, begegnen sich in der Normale des letzteren.

*Aufg. 4.* Für Polar-Coordinaten, deren Pol mit dem Brennpunkt zusammenfällt, soll man beweisen, dass die Polargleichung der Tangente in dem Punkte, dessen Winkelcoordinate $\alpha$ ist, durch

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos\vartheta + \cos(\vartheta - \alpha)$$

repräsentirt ist.

*Aufg. 5.* Beweise, dass die Polar-Gleichung der Sehne, welche die Punkte von den Winkel-Coordinaten $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ verbindet,

$$\frac{p}{2\varrho} = e \cos\vartheta + \sec\beta \cos(\vartheta - \alpha)$$

ist.

Man findet diese Gleichung nützlich in Untersuchungen über Sätze, welche sich auf Winkel am Brennpunkte beziehen. Für diese Untersuchungen werden wir jedoch später (Kap. XIV) noch einfachere Methoden entwickeln.

*Aufg. 6.* Wenn eine Sehne $PP'$ eines Kegelschnitts durch einen festen Punkt $O$ geht, so ist $\tan\frac{1}{2}PFO \,.\, \tan\frac{1}{2}P'FO$ constant.

Wir geben einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes. Denken wir irgendwo in $PP'$ einen Punkt $O$ genommen, und sei die Entfernung $FO$ das $e'$fache der Entfernung von $O$ von der Directrix; so gelten, da die Entfernungen von $P$ und $O$ von der Directrix zu $PD$ und $OD$ proportional sind, die Gleichungen:

$$\frac{FP}{PD} : \frac{FO}{OD} = \frac{e}{e'} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin PDF}{\sin PFD} : \frac{\sin ODF}{\sin OFD} = \frac{e}{e'}.$$

Also nach Art. 194
$$\frac{\cos OFT}{\cos PFT} = \frac{e}{e'};$$

oder, weil (Art. 193) $PFT$ die Hälfte der Summe und $OFT$ die Hälfte der Differenz der Winkel $PFO$ und $P'FO$ ist

$$\tan\tfrac{1}{2}PFO \,.\, \tan\tfrac{1}{2}P'FO = \frac{e - e'}{e + e'}.$$

Es ist offenbar, dass das Product dieser Tangenten constant bleibt, selbst wenn $O$ nicht constant verbliebe, sondern sich auf einem Kegelschnitt bewegte, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat, wie der gegebene Kegelschnitt.

*Aufg. 7.* Wenn in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne die Normalen gezogen sind, so halbirt eine durch ihren Durchschnittspunkt der Achse parallel gezogene gerade Linie die Sehne.

Für einen Punkt in der Directrix, dessen Coordinaten durch

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad y = \beta,$$

ausgedrückt sind, ist die Gleichung seiner durch den Brennpunkt gehenden Polare

$$\frac{x}{c} + \frac{\beta y}{b^2} = 1.$$

Indem wir den aus dieser Gleichung entspringenden Werth von $x$ in die Gleichung der Curve einsetzen, so erhalten wir die Coordinaten der Punkte, in welchen diese Linie die gegebene Curve schneidet, durch die Gleichung

$$(b^2 + e^2\beta^2)y^2 - 2b^2e^2\beta y - \frac{b^6}{a^2} = o.$$

Wenn also $y', y''$ die Ordinaten der Durchschnittspunkte sind, so ist

$$y' + y'' = \frac{2b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2}, \quad y'y'' = \frac{-b^6}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)},$$

aber (Art. 182, Aufg. 4)

$$y = \frac{b^2 - a^2}{b^4}\, y'y''\beta = \frac{b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2} = \frac{y' + y''}{2}.$$

Es wird in derselben Weise gefunden, dass die Abscissen des Durchschnittspunkts der Sehne mit der Curve durch die Gleichung bestimmt sind

$$(b^2 + e^2\beta^2)x^2 - 2b^2cx + c^2(b^2 - \beta^2) = o,$$

so dass

$$x' + x'' = \frac{2b^2c}{b^2 + e^2\beta^2}, \quad x'x'' = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{b^2 + e^2\beta^2};$$

und die Abscisse des Durchschnitts der Normalen ist

$$x = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}.$$

*Aufg. 8.* Wenn eine Sehne durch einen Brennpunkt geht, so geht die gerade Linie, welche den Durchschnittspunkt der Tangenten an ihren Endpunkten mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Normalen verbindet, durch den andern Brennpunkt.

Die Gleichung der bezeichneten Verbindungslinie ist

$$c\beta(x + c) = (a^2 + c^2)\, y.$$

*Aufg. 9.* Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen an den Enden einer Brennpunkts-Sehne.

Indem wir aus

$$x = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}$$

für $\beta^2$ auflösen, haben wir

$$\beta^2 = \frac{b^2(c^3 - a^2x)}{c^2(c + x)}, \quad b^2 + e^2\beta^2 = \frac{b^2c(a^2 + c^2)}{a^2(c + x)}.$$

Weil aber

$$y = \frac{b^2e^2\beta}{b^2 + e^2\beta^2},$$

ist, so haben wir

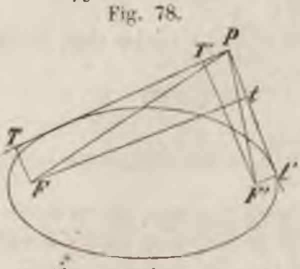
$$\beta = \frac{(a^2 + c^2)\, y}{c(c + x)}.$$

also
$$\frac{(a^2+c^2)^2y^2}{c^2(c+x)^2} = \frac{b^2(c^3-a^2x)}{c^2(c+x)}$$
und der Ort ist eine Ellipse
$$(a^2+c^2)^2y^2 = b^2(c+x)(c^3-a^2x)$$
oder
$$(a^2+c^2)^2y^2 + a^2b^2x^2 + b^4cx = b^2c^4.$$

Für einen beliebigen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts wird der Ort, welchen der Durchschnittspunkt der Normalen für die Endpunkte einer um ihn drehenden Sehne beschreibt, vom dritten Grade.

*Aufg. 10.* Wenn $\vartheta$ der Winkel zwischen den von einem Punkte $P$ (Fig. 78.) an die Ellipse gezogenen Tangenten ist, und $\varrho\,\varrho'$ die Entfernungen dieses Punktes vom Brennpunkt bezeichnen, so soll bewiesen werden, dass $\cos\vartheta = \frac{\varrho^2+\varrho'^2-4a^2}{2\varrho\varrho'}$ ist.

Fig. 78.




Denn nach Art. 189 ist
$$\sin TPF . \sin tPF = \frac{FT . F'T'}{PF . PF'} = \frac{b^2}{\varrho\varrho'}.$$
Aber man hat
$$\cos FPF' - \cos TPt = 2 \sin TPF . \sin tPF.$$
und somit
$$2\varrho\varrho' \cos FPF' = \varrho^2 + \varrho'^2 - 4a^2.$$

*Aufg. 11.* Wenn ein Punkt $M$ in der Ebene eines Kegelschnitts mit den Brennpunkten $F, F'$ desselben verbunden wird, und die Schnittpunkte dieser geraden Verbindungs-Linien mit der Curve resp. durch $A, B$; $C, D$ bezeichnet werden, so ist
$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}.$$

Wir bezeichnen den Durchschnittspunkt der Linien $AD$ und $BC$ durch $P$ und den von $AC$ und $BD$ durch $Q$; dann ist $PM$ die Polare von $Q$ und $QM$ die Polare von $P$, die Geraden $MA$, $MP$, $MC$, $MQ$ bilden ein harmonisches Büschel, in welchem $MP$ und $MQ$ die Halbirungslinien der durch die Geraden $AB$ und $CD$ gebildeten Winkel sind. (Vergl. die Note des Art. 187.)

Nach einem bekannten einfachen Satze über die Dreiecksflächen, welche von einer um einen festen Punkt gedrehten Geraden mit zwei festen geraden Linien gebildet werden (siehe Art. 31, Aufg.) hat man aber
$$\frac{1}{\Delta AMP} \pm \frac{1}{\Delta BMP} = \frac{1}{\Delta CMP} \pm \frac{1}{\Delta DMP}.$$
Man leitet daraus durch Substitution bekannter Ausdrücke für die Dreiecksflächen
$$\frac{1}{MP . \sin AMP}\left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}\right) = \frac{1}{MP . \sin CMP}\left(\frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}\right)$$

her, und hieraus die zu beweisende Gleichung, indem man bemerkt, dass

$$\angle AMP = \angle CMP$$

ist.

Es ist nicht schwer, denselben Satz rein analytisch zu beweisen; wir empfehlen es als eine nützliche Uebung.

229.. Wir geben in diesem Artikel einige speciell auf die Parabel bezüglichen Aufgaben.

*Aufg. 1,* Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zwei Tangenten in den Punkten $(x', y')$, $(x'', y'')$ der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen.

*Aufl.* $$y = \frac{y' + y''}{2}, \quad x = \frac{y'y''}{p}.$$

*Aufg. 2.* Die Höhenperpendikel des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks schneiden sich in der Directrix.

Die Gleichung einer dieser Senkrechten ist nach Art. 42

$$\frac{y'y''' - y'y''}{p}\left(x - \frac{y''y'''}{p}\right) + \frac{y''' - y''}{2}\left(y - \frac{y'' + y'''}{2}\right) = o;$$

sie nimmt durch die Division mit $(y''' - y'')$ die Form

$$y'\left(x + \frac{p}{4}\right) - \frac{y'y''y'''}{p} + \frac{py}{2} - \frac{p(y' + y'' + y''')}{4} = o$$

an, und man erkennt aus der Symmetrie der Gleichung, dass die drei fraglichen Senkrechten sich in der Directrix in der Höhe

$$y = \frac{2y'y''y'''}{p^2} + \frac{y' + y'' + y'''}{2}$$

schneiden.

*Aufg. 3.* Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks, welches durch die Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte gebildet wird.

Substituiren wir die Coordinaten der Ecken des Dreiecks in die Formel des Artikels 31, so finden wir für den letzt bezeichneten Inhalt den Ausdruck $\frac{1}{2p}(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')$

und für den ersteren die Hälfte derselben Grösse.

*Aufg. 4.* Bestimme den Radius des Kreises, welcher einem der Parabel eingeschriebenen Dreieck umschrieben ist.

Der Radius des umschriebenen Kreises eines Dreiecks, welches die Seitenlängen $d$, $e$, $f$ und den Inhalt $\Sigma$ besitzt, wird durch $\frac{def}{4\Sigma}$ ausgedrückt.

Wenn aber $d$ die Länge der Sehne zwischen den Punkten $(x'', y'')$, $(x''', y''')$ und $\vartheta'$ der Winkel ist, welchen diese Sehne mit der Achse macht, so ist offenbar $$d \sin \vartheta' = y'' - y'''.$$
Durch Einsetzen des in der letzten Aufgabe abgeleiteten Ausdrucks für den Inhalt ergiebt sich der fragliche Halbmesser
$$R = \frac{p}{2 \sin \vartheta' . \sin \vartheta'' \sin \vartheta'''}.$$
Wir können diesen Radius auch durch die zu den Seiten des Dreiecks parallelen Brennpunkts-Sehnen ausdrücken; denn nach Art. 195, Aufg. 2 ist die Länge einer Sehne, welche den Winkel $\vartheta$ mit der Achse bildet,
$$c = \frac{p}{\sin^2 \vartheta}.$$
Also
$$R^2 = \frac{c' c'' c'''}{4p}.$$
Aus Art. 214 ergiebt sich, dass $c'$, $c''$, $c'''$ die Parameter der Durchmesser sind, welche die Seiten des Dreiecks halbiren.

*Aufg.* 5. Drücke den Radius des Kreises, welcher dem von drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umschrieben ist, in Function der Winkel aus, welche dieselben mit der Achse bilden.

*Aufl.*
$$R = \frac{p}{8 \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \sin \vartheta'''}$$
oder
$$R^2 = \frac{p' p'' p'''}{64 p},$$
wenn $p'$, $p''$, $p'''$ die Parameter derjenigen Durchmesser sind, welche durch die Berührungspunkte der Tangenten gehen. (Art. 214.)

*Aufg.* 6. Bestimme den Winkel, welchen die zwei vom Punkte $(x', y')$ an die Parabel $y^2 = 4mx$ gezogenen Tangenten bilden.

Die Gleichung des Tangentenpaares wird wie in Art. 107 ermittelt und ist $$(y'^2 - 4mx')(y^2 - 4mx) = [yy' - 2m(x + x')]^2.$$

Die Gleichung zweier durch den Coordinatenanfangspunkt zu ihnen gezogenen Parallelen ist alsdann
$$x' y^2 - y' xy + mx^2 = o,$$
und der von denselben eingeschlossene Winkel wird nach Art. 76 durch
$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{(y'^2 - 4mx')}}{x' + m}$$
bestimmt.

*Aufg.* 7. Den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel zu bestimmen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.

*Aufl.* Die Hyberbel
$$y^2 - 4mx = (x + m)^2 \tan^2 \varphi \text{ oder } y^2 + (x - m)^2 = (x + m)^2 \sec^2 \varphi.$$

Aus der letztern Form der Gleichung geht hervor, dass die Hyperbel denselben Brennpunkt und die nämliche Directrix wie die Parabel besitzt, und dass ihre Excentricität $= \sec \varphi$ ist.

*Aufg. 8.* Den Ort des Fusspunktes der Senkrechten zu bestimmen, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird.

Die Länge der Senkrechten von $(m, o)$ auf

$$2m\,(y - y') + y'\,(x - x') = o$$

ist
$$\frac{y'(x' + m)}{\sqrt{(y'^2 + 4m^2)}} = \sqrt{[x'(x' + m)]}.$$

Wenn aber $\vartheta$ der durch die Senkrechte mit der Achse der $x$ gebildete Winkel ist (Art. 214), so ist $\sin\vartheta = \sqrt{\left(\frac{m}{x'+m}\right)}$, $\cos\vartheta = \sqrt{\left(\frac{x'}{x'+m}\right)}$, und die Polar-Gleichung des Ortes ist daher

$$\varrho = \frac{m\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Sie liefert die Gleichung $y^2 = mx$ für Cartesische Coordinaten.

*Aufg. 9.* Die Coordinaten des Punktes zu finden, in welchem die den Punkten $(x', y')$ $(x'', y'')$ entsprechenden Normalen sich schneiden.

*Aufl.* $x = 2m + \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{4m}$, $y = -\frac{y'y''(y' + y'')}{8m^2}$.

Wenn durch $\alpha, \beta$ die Coordinaten des Durchschnittspunktes der entsprechenden Tangenten bezeichnet sind (Aufg. 1), so hat man auch:

$$x = 2m + \frac{\beta^2}{m} - \alpha, \quad y = -\frac{\alpha\beta}{m}.$$

*Aufg. 10.* Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Normalen in den Endpunkten der durch $(x', y')$ gehenden Sehnen.

Wir haben dann die Relation

$$\beta y' = 2m\,(x' + a),$$

und erhalten durch die Substitution des aus dieser Relation abgeleiteten Werthes in die Resultate des letzten Beispiels,

$$2mx + \beta y' = 4m^2 + 2\beta^2 + 2mx'; \; 2m^2 y = 2\beta m x' - \beta^2 y';$$

sodann durch Elimination von $\beta$

$$2[2m(y - y') + y'(x - x')]^2 = (4mx' - y'^2)\,(y'y + 2x'x - 4mx' - 2x'^2),$$

die Gleichung einer Parabel, deren Achse zu der Senkrechten von dem Punkte auf seine Polare parallel ist.

*Aufg. 11.* Finde den Ort des Durchschnittspunkts der zu einander rechtwinkligen Normalen.

In diesem Falle ist

$$a = -m, \; x = 3m + \frac{\beta^2}{m}; \; y = \beta; \; y^2 = m(x - 3m).$$

*Aufg. 12.* Man soll aus den Längen zweier Tangenten $a$ und $b$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $\omega$ den Parameter finden.

Man ziehe den die Berührungs-Sehne halbirenden Durchmesser, so ist der Parameter desselben $p' = \frac{y^2}{x}$ und der Hauptparameter ist

$$p = \frac{y^2 \sin^2\vartheta}{x} = \frac{w^2 y^2}{4x^3},$$

wo $w$ die Länge der vom Durchschnittspunkt der Tangenten auf die Sehne gefällten Senkrechten ist. Aber

$$2wy = ab \sin\omega \text{ und } 16x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega;$$

also
$$p = \frac{4ab\sin\omega}{(a^2+b^2+2ab\cos\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

(Art. 211.)

*Aufg. 13.* Zeige aus der Gleichung des einem Tangentendreieck der Parabel umschriebenen Kreises, dass er durch den Brennpunkt der Curve geht.

Die Gleichung des einem Dreieck umschriebenen Kreises ist nach Art. 134 $\beta\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha\beta\sin C = o;$
das absolute Glied in dieser Gleichung wird durch Einführung der Werthe gefunden, welche die Symbole $\alpha, \beta, \gamma$ vertreten

$$p'p''\sin(\beta-\gamma) + p''p\sin(\gamma-\alpha) + pp'\sin(\alpha-\beta).$$

Wenn aber die Linie $\alpha$ eine Tangente der Parabel ist und der Ursprung der Brennpunkt, so ist (Art. 221)

$$p = \frac{m}{\cos\alpha}$$

und das absolute Glied

$$= \frac{m^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left[\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha + \sin(\gamma-\alpha)\cos\beta + \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma\right],$$

d. h. mit Null identisch.

*Aufg. 14.* Finde den Ort des Durchschnittspunkts der Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist entweder 1.) das Product des Sinus oder 2.) das der Tangenten, 3.) die Summe oder 4.) die Differenz der Cotangenten der Winkel, die sie mit der Achse bilden.

Im ersten Falle ein Kreis, im zweiten eine gerade Linie, im dritten eine gerade Linie, im vierten eine Parabel.

230. Wir schliessen einige vermischte Beispiele an.

*Aufg. 1.* Wenn eine gleichseitige Hyperbel einem Dreieck umschrieben ist, so geht sie auch durch den Durchschnittspunkt seiner Höhen.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Achsen in gegebenen Punkten schneidet, ist (Aufg. 1, Art. 111)

$$bb'x^2 + Bxy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = o.$$

Für rechtwinklige Achsen repräsentirt diese Gleichung eine gleichseitige Hyperbel (Art. 175), wenn

$$aa' = - bb'.$$

Wenn daher eine Seite des gegebenen Dreiecks und die von der Gegenecke auf sie gefällte Senkreckte zu Achsen genommen werden, so sind die Abschnitte $a, a', b$ gegeben und $b'$ ist daher auch bekannt; die Curve schneidet aber die Senkrechte, d. i. die Achse der $y$ in dem festen Punkt

$$y = - \frac{aa'}{b},$$

welcher nach Aufg. 7, Art. 42 der Durchschnittspunkt der Höhen im Dreieck ist.

*Aufg.* 2. Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umschriebene Kreis durch das Centrum der Curve*).

Wir wählen zwei Seiten des Dreiecks zu Coordinatenachsen. Der Pol der Achse der $x$ in Bezug auf einen durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt liegt in dem Durchmesser, der die zur $x$ Achse parallelen Sehnen halbirt $(2Ax + By + D = o)$ und auch in der Polare des Coordinatenanfangs $(Dx + Ey + 2F = o)$.

Wenn die Relation $DE = 2BF$ besteht, so schneiden diese beiden Linien die Achse der $y$ in demselben Punkt, und der Pol der Achse der $x$ ist der Punkt $y = - \frac{D}{B}$ in der Achse der $y$. In demselben Fall ist der Pol der Achse der $y$ der Punkt in der Achse der $x$, für welchen

$$x = - \frac{E}{B}.$$

Die Gleichung des Kreises durch diese zwei Punkte und den Coordinatenanfangspunkt ist

$$B(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) + Ex + Dy = o$$

oder

$$x(2Cy + Bx + E) + y(2Ax + By + D) - 2(A + C - B \cos\omega)xy = o,$$

eine Gleichung, welcher offenbar durch die Coordinaten des Centrums genügt wird, vorausgesetzt, dass wir haben

$$A + C = B \cos \omega,$$

d. h. vorausgesetzt, dass die Curve eine gleichseitige Hyperbel ist. (Art. 76, 175.)

---

*) Dies ist ein specieller Fall eines im nächsten Kapitel zu beweisenden Satzes.

Wenn $DE$ nicht gleich $2BF$ wäre, so ist doch bewiesen, dass der Kreis durch das Centrum geht, den man durch den Coordinatenanfang und die Punkte $\left(o, -\frac{D}{B}\right)$ und $\left(-\frac{E}{B}, o\right)$ legen kann, d. h. durch die Punkte, indem jede der beiden Achsen den Durchmesser schneidet, welche die zur andern parallelen Sehnen halbirt, d. h. Ein durch das Centrum einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei beliebige Punkte beschriebener Kreis geht auch durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien, welche durch jeden dieser Punkte parallel zur Polare des andern gezogen werden können.

*Aufg. 3.* Wenn man in den Endpunkten zusammen fallender Focalsehnen in zwei confocalen Kegelschnitten die Tangenten dieser letztern construirt, so sind dieselben zugleich Tangenten einer Parabel, die diese Focalsehne zur Directrix und den Brennpunkt, durch welchen sie nicht gezogen ist, zum Brennpunkt hat; diese Parabel tangirt überdies die Nebenachse der beiden Kegelschnitte und jede Tangente, welche ihr und einem der beiden Kegelschnitte gemeinsam ist, wird von ihrem Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen.

*Aufg. 4.* Wenn auf einer Tangente eines Kegelschnitts Punkte $A$ und $B$ so gewählt werden, dass $AB$ constant ist, welches ist alsdann der Ort des Durchschnittspunkts der von $A$ und $B$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten? *)

Die Punkte, in denen ein Tangentenpaar des durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitts die Achse der $x$ schneidet, werden nach Art. 107 aus der Gleichung gefunden

$$\begin{aligned}&[(4AC - B^2)y'^2 + (4AE - 2BD)y' + 4AF - D^2]\,x^2\\ &+ 2[(BD - 2AE)x'y' + (2CD - BE)y'^2 + (D^2 - 4AF)x'\\ &+ (DE - 2BF)y']x + [(4AF - D^2)x'^2 + (4BF - 2DE)x'y'\\ &+ (4CF - E^2)y'^2] = o.\end{aligned}$$

Indem wir die Differenz der Wurzeln dieser Gleichung bilden und sie einer Constanten gleich setzen, erhalten wir die Gleichung des Ortes; sie ist im Allgemeinen vom 4. Grade. Für $D^2 = 4AF$ berührt jedoch die Achse der $x$ den gegebenen Kegelschnitt, und die Gleichung des Ortes wird durch $y^2$ theilbar und reducirt sich dadurch auf den zweiten Grad. Mit Hilfe derselben Gleichung würden wir auch den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten finden, wenn die Summe, das Product u. s. w. der in der Achse gebildeten Abschnitte gegeben wäre.

---

*) Man vergleiche den Abschnitt des letzten Kapitels über die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

## Der excentrische Winkel.

231. Es ist vortheilhaft, die Lage eines Punktes in einer Curve, wenn möglich, durch eine einzige unabhängige Veränderliche auszudrücken, statt durch die zwei Coordinaten $x', y'$. So ist es im Falle der Ellipse von grossem Nutzen für die Discussion ihrer Eigenschaften, eine ähnliche Substitution zu machen, wie die in Artikel 129 in dem Fall des Kreises angewendete. Wir nehmen an

$$x' = a \cos \varphi, \quad y' = b \sin \varphi,$$

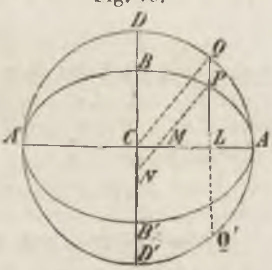
eine Substitution, welche offenbar mit der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

verträglich ist.

Die geometrische Bedeutung des Winkels $\varphi$ ist leicht zu erkennen. Wenn wir einen Kreis über der grossen Achse als Durchmesser beschreiben (Fig. 79), und die Ordinate in $P$ bis zum Durchschnitt mit dem Kreise in $Q$ verlängern, so ist der Winkel

Fig. 79.




$$QCL = \varphi,$$

denn $CL = CQ . \cos QCL$,

oder $x' = a \cos \varphi$;

und $PL = \frac{b}{a} QL$

(Art. 163), und weil $QL = a \sin \varphi$,

$$y' = b \sin \varphi.$$

232. Wir ziehen zuerst einige Folgerungen aus dieser Construction. Wenn durch $P$ eine Parallele $PN$ zum Radius $CQ$ gelegt wird, so ist $PM : CQ = PL : QL = b : a$;

aber $CQ = a$, daher $PM = b$.

$PN$, parallel zu $CQ$, ist übrigens $= a$.

Wenn also von irgend einem Punkte der Ellipse eine Linie $= a$ bis zur kleinen Achse gezogen wäre, so ist der durch die grosse Achse in ihr bestimmte Abschnitt $= b$. Würde die Ordinate $PQ$ bis zum fernern Durchschnitt $Q'$ mit dem Kreise verlängert, so ergiebt sich ebenso, dass in einer durch $P$ zum Radius $CQ'$ gezogenen Parallelen von den Achsen Theile von constanter Länge abgeschnitten werden. Wenn daher umgekehrt, eine Linie

$MN$ von constanter Länge sich zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels fortbewegt, und ein Punkt $P$ so genommen ist, dass $MP$ constant bleibt, so beschreibt $P$ eine Ellipse, deren Achsen $= MP$ und $NP$ sind. (Art. 227. Aufg. 1.)

Nach diesem Princip ist ein Instrument zur Erzeugung der Ellipse durch eine continuirliche Bewegung construirt worden, welches man den elliptischen Zirkel genannt hat. $CA$, $CD'$ sind zwei feste Lineale, $MN$ ein drittes Lineal von constanter Länge, welches so beweglich ist, dass seine Endpunkte die Linien $CA$, $CD'$ durchlaufen; alsdann beschreibt ein in einem Punkt von $MN$ befestigter Stift eine Ellipse. Wenn der Stift im Mittelpunkt von $MN$ befestigt ist, so beschreibt er einen Kreis.

233. Die Betrachtung des Winkels $\varphi$ liefert eine einfache Methode zur geometrischen Construction des Durchmessers, welcher einem gegebenen conjugirt ist, denn

$$\tan\vartheta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a}\tan\varphi.$$

Also wird die Relation

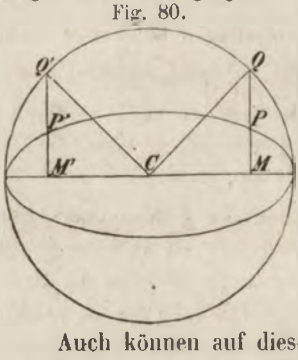
$$\tan\vartheta \,.\, \tan\vartheta' = -\frac{b^2}{a^2}$$

(Art. 174) zu

$$\tan\varphi \,.\, \tan\varphi' = -1 \text{ oder } \varphi - \varphi' = 90^0.$$

Wir erhalten also die folgende Construction, um den zu irgend einem gegebenen conjugirten Durchmesser zu ziehen: Man verlängere die Ordinate des gegebenen Punktes $P$ (Fig. 80) bis zum Durchschnitt $Q$ mit dem über der grossen Achse beschriebenen Halbkreis, ziehe $CQ$ und errichte $CQ'$ senkrecht zu ihm; dann bestimmt die von $Q'$ auf die Achse gefällte Senkrechte einen Punkt $P'$ der Ellipse, welcher dem fraglichen conjugirten Durchmesser angehört.

Fig. 80.




Auch können auf diese Weise die in Artikel 173 gegebenen Coordinaten von $P'$ leicht gefunden werden; denn aus

$$\cos\varphi' = \sin\varphi \text{ folgt } \frac{x''}{a} = \frac{y'}{b},$$

und aus $\quad \sin\varphi' = -\cos\varphi$ sodann $\dfrac{y''}{b} = -\dfrac{x'}{a}$.

Aus diesen Werthen geht auch hervor, dass die Dreiecke $PCM$, $P'CM'$ von gleichem Inhalt sind.

*Aufg. 1.* Die Längen zweier conjugirten Halbdurchmesser in Function des Winkels $\varphi$ auszudrücken.

*Aufl.* $a'^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$, $\quad b'^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$.

*Aufg. 2.* Die Gleichung einer Sehne der Ellipse aus den Winkeln $\varphi$ und $\varphi'$ zu bestimmen *).

*Aufl.* $\dfrac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') + \dfrac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi') = \cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')$.

*Aufg. 3.* Drücke in derselben Weise die Gleichung der Tangente aus.

*Aufl.* $\quad \dfrac{x}{a}\cos\varphi + \dfrac{y}{b}\sin\varphi = 1.$

*Aufg. 4.* Die Länge der, zwei Punkte $\alpha$, $\beta$ verbindenden Sehne, zu bestimmen.

*Aufl.* $D^2 = a^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + b^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2$,

$D = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\left[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Aber nach Aufg. 1 repräsentirt die mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ behaftete Grösse die Länge des dem Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ conjugirten Halbdurchmesser, und nach Aufg. 2, 3 ist die Tangente im Punkte $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ parallel zu der die Punkte $\alpha$, $\beta$ verbindenden Sehne; wenn also $b'$ die Länge des zur gegebenen Sehne parallelen Halbdurchmessers repräsentirt, so ist $\quad D = 2b'\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

*Aufg. 5.* Den Inhalt des durch drei Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gebildeten Dreiecks zu finden.

Nach Art. 31 ist

$$\begin{aligned} 2\Sigma &= ab\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha)\right] \\ &= ab\left[2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) - 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)\right] \\ &= 4\,ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha), \end{aligned}$$

oder $\quad \Sigma = 2ab\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$.

*Aufg. 6.* Den Radius des Kreises zu finden, welcher dem durch drei Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bestimmten Dreiecke umschrieben ist.

Der fragliche Halbmesser ist

$$R = \frac{def}{4\Sigma} = \frac{b'b''b'''}{ab},$$

*) Vergleiche Art. 129.

wenn durch $d$, $e$, $f$ die Seiten des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks und durch $b'$, $b''$, $b'''$ die zu ihnen resp. parallelen Halbdurchmesser bezeichnet werden. Bedeuten endlich $c'$, $c''$, $c'''$ die denselben Seiten resp. parallelen Brennpunkts-Sehnen, so ist

$$R^2 = \frac{c'c''c'''}{4p}.$$

(Art. 229, Aufg. 4.)

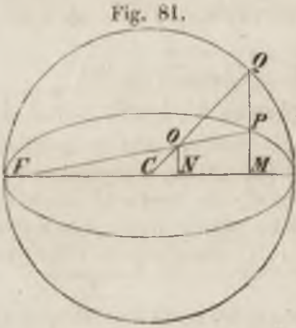
*Aufg.* 7. Die Gleichung dieses Kreises zu entwickeln.

*Aufl.* $$x^2+y^2-\frac{2(a^2-b^2)x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$-\frac{2(b^2-a^2)y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)=$$
$$\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)\right].$$

Aus dieser Gleichung kann man leicht die Coordinaten seines Centrums bestimmen.

*Aufg.* 8. Welches ist der Ort des Punktes, in dem der Brennstrahl $FP$ den Halbdurchmesser des Kreises $CQ$ schneidet?

Fig. 81.




Bezeichnen wir die Central-Coordinaten von $P$ durch $x'$, $y'$, die von $O$ durch $x$, $y$, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $FON$, $FPM$

$$\frac{y}{x+c}=\frac{y'}{x'+c}, =\frac{b\sin\varphi}{a(e+\cos\varphi)}.$$

Weil nun $\varphi$ der von dem Radius vector des Punktes $O$ mit der Achse der $x$ gebildete Winkel ist, so erhalten wir die Polar-Gleichung des Ortes, indem wir $\varrho\cos\varphi$ für $x$, $\varrho\sin\varphi$ für $y$ schreiben,

$$\frac{\varrho}{c+\varrho\cos\varphi}=\frac{b}{a(e+\cos\varphi)}$$

oder
$$\varrho=\frac{bc}{c+(a-b)\cos\varphi}.$$

Demnach ist der Ort eine Ellipse, von welcher $C$ der eine Brennpunkt ist, und man kann leicht nachweisen, dass der andre mit $F$ zusammenfällt.

*Aufg.* 9. Die Normale des Punktes $P$ wird bis zum Durchschnitt mit $CQ$ verlängert, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes?

Die Gleichung der Normale (Art. 181) ist

$$\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=c^2,$$

oder (Art. 231)
$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2;$$

da aber, wie in der letzten Aufgabe $\varrho \cos \varphi$ für $x$ und $\varrho \sin \varphi$ für $y$ substituirt werden kann, so geht dieselbe in

$$(a - b)\,\varrho = c^2 \text{ oder } \varrho = a + b$$

über. Der fragliche Ort ist daher ein mit der Ellipse concentrischer Kreis.

*Aufg. 10.* Es ist in der Astronomie nützlich, den Winkel $PFC$ vermittelst des Winkels $\varphi$ auszudrücken.

Man findet $$\tan \tfrac{1}{2} PFC = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} \tan \tfrac{1}{2} \varphi.$$

*Aufg. 11.* Wenn vom Scheitel der Ellipse ein Radius vector nach einem Punkte der Curve und durch das Centrum eine Parallele zu ihm gezogen wird, so soll man den Ort des Punktes bestimmen, in welchem diese letztere die Tangente des Punktes schneidet.

Die trigonometrische Tangente des durch den Radius vector vom Scheitel mit der Achse gebildeten Winkels ist $= \frac{y'}{x' + a}$; daher ist die Gleichung der durch das Centrum gezogenen Parallellinie

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x' + a} = \frac{b \sin \varphi}{a(1 + \cos \varphi)} = \frac{b}{a} \, \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

oder $$\frac{y}{b} \sin \varphi + \frac{x}{a} \cos \varphi = \frac{x}{a};$$

sonach wird der Ort des Durchschnitts dieser Linie mit der Tangente

$$\frac{y}{b} \sin \varphi + \frac{x}{a} \cos \varphi = 1$$

durch $\frac{x}{a} = 1$ repräsentirt, d. h. der fragliche Ort ist die Tangente am andern Ende der Achse.

Dieselbe Untersuchungsmethode bleibt anwendbar, wenn der erste Radius vector durch einen beliebigen Punkt $(x', y')$ in der Curve gezogen ward; man substituirt alsdann $a'$ und $b'$ für $a$ und $b$, und der Ort ist die Tangente an dem diametral entgegengesetzten Punkt.

234. Die Methoden des vorigen Artikels können nicht direct auf die Hyperbel angewendet werden.

Wir können aber für dieselbe die Substitutionen

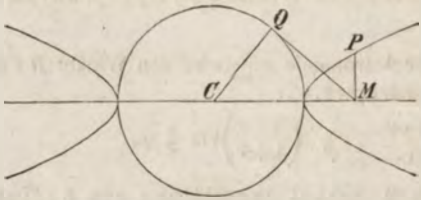
$$x' = a \sec \varphi, \quad y' = b \tan \varphi$$

mit ähnlichem Vortheil benutzen. Sie sind statthaft, weil

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Winkel $\varphi$ kann geometrisch dargestellt werden, indem man eine Tangente $MQ$ (Fig. 82) vom Fusspunkt der Ordinate $M$ an den über der Hauptachse beschriebenen Kreis zieht; dann ist der Winkel

Fig. 82.




$$QCM = \varphi,$$

weil $CM = CQ . \sec QCM$.

Wir haben auch

$$QM = a \tan \varphi,$$

und $\quad PM = b \tan \varphi.$

d. h.: wenn man vom Fusspunkt einer Ordinate der Hyperbel eine Tangente zu dem über der Hauptachse beschriebenen Kreise zieht, so ist diese in einem constanten Verhältniss zur Ordinate.

235. Weil die Gleichung der conjugirten Hyperbel ist

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1,$$

so kann irgend ein Punkt in der conjugirten Hyperbel durch

$$y'' = b \sec \varphi' \text{ und } x'' = a \tan \varphi'$$

ausgedrückt werden. Wenn durch $\vartheta$ der von einem Durchmesser der Curve mit der Achse der $x$ gebildete Winkel bezeichnet wird,

so ist $$\tan \vartheta = \frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \sin \varphi.$$

Ebenso $$\tan \vartheta' = \frac{y''}{x''} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sin \varphi'},$$

und die zwischen zwei conjugirten Durchmessern stattfindende Relation $$\tan \vartheta \,.\, \tan \vartheta' = \frac{b^2}{a^2}$$

geht in $$\sin \varphi = \sin \varphi' \text{ oder } \varphi = \varphi'$$

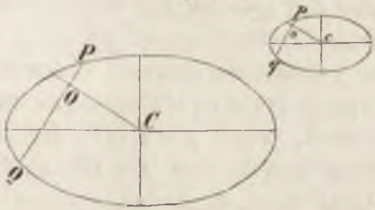
über. (Vergl. Art. 233.)

## Aehnliche Kegelschnitte.

236. Irgend zwei Figuren heissen **ähnlich und in ähnlicher Lage**, wenn die Radien vectoren der ersten von einem gewissen Punkt $O$ (Fig. 83) in einem constanten Verhältniss zu den parallelen Radien vectoren der zweiten von einem andern Punkt $o$ stehen. Wenn es möglich ist, zwei solche Punkte $O$ und $o$ zu fin-

den, so kann man darnach unendlich viele andre bestimmen; denn wenn man einen Punkt $C$ wählt und $oc$ parallel zu $OC$ und im constanten Verhältniss $op:OP$ zieht, so ist in den ähnlichen Dreiecken $OCP$ und $ocp$ die Linie $cp$ zu $CP$ parallel und in dem gegebenen Verhältniss. Ebenso kann man von jedem andern durch $c$ gezogenen Radius vector zeigen, dass er zu dem durch $C$ gelegten parallelen Radius vector in demselbem Verhältniss steht. Wenn zwei Centralkegelschnitte einander ähnlich sind, so sind alle Durchmesser des einen proportional den parallelen Durchmessern des andern, weil die Rechtecke $OP.OQ$, $op.oq$ den Quadraten der parallelen Durchmesser proportional sind. (Art. 109.)

Fig. 83.



237. Wir beabsichtigen zunächst, die **Bedingung** zu suchen, unter welcher zwei Kegelschnitte, von den Gleichungen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o$$

ähnlich und in ähnlicher Lage sind. Die Gleichung des ersten, auf sein Centrum als Ursprung bezogen, muss (Art. 156) von der Form sein $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F',$$
und das Quadrat irgend eines Halbdurchmessers

$$R^2 = \frac{F'}{A\cos^2\vartheta + B\cos\vartheta . \sin\vartheta + C\sin^2\vartheta};$$

das Quadrat des parallelen Halbdurchmessers des zweiten ist

$$r^2 = \frac{f'}{a\cos^2\vartheta + b\cos\vartheta . \sin\vartheta + c\sin^2\vartheta};$$

und das Verhältniss von $\frac{R^2}{r^2}$ kann somit von $\vartheta$ nicht unabhängig sein, wenn wir nicht haben

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

Zwei Kegelschnitte sind demnach ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen in beiden übereinstimmen oder nur durch einen constanten Factor verschieden sind.

238. Es ist offenbar, dass die Richtungen der Achsen solcher ähnlicher Kegelschnitte dieselben sein müssen, weil die grössten und kleinsten Durchmesser des einen parallel den grössten und kleinsten Durchmessern des andern sind. Wenn der Durchmesser des einen unendlich wird, so muss auch der parallele Durchmesser des andern unendlich werden, d. h. die Asymptoten von ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln sind parallel. Dasselbe folgt aus dem Resultat des letzten Artikels, weil (Art. 156) die Richtungen der Asymptoten vollständig durch die höchsten Glieder der Gleichung bestimmt sind.

Aehnliche Kegelschnitte haben dieselbe Excentricität, denn $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ muss $= \frac{m^2 a^2 - m^2 b^2}{m^2 a^2}$ sein. Aehnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte können also auch als solche definirt werden, deren Achsen parallel sind und welche dieselbe Excentricität haben.

Wenn zwei Hyperbeln parallele Asymptoten haben, so sind sie ähnlich, denn ihre Achsen müssen parallel sein, weil sie die Winkel zwischen den Asymptoten halbiren (Art. 156), und die Excentricität hängt nur von dem Winkel ab, den die Asymptoten einschliessen. (Art. 167).

239. Da die Excentricität aller Parabeln dieselbe, nämlich die Einheit ist, so sind alle Parabeln ähnlich und ähnlich gelegen, deren Achsen dieselbe Richtung haben. In der That, da die Gleichung einer Parabel auf ihren Scheitel bezogen

$$y^2 = px \text{ oder } \rho = \frac{p \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta},$$

ist, so steht jeder Radius vector der einen Parabel zu dem ihm parallelen der andern in dem constanten Verhältniss $\frac{p}{p'}$.

*Aufg. 1.* Wenn in einem durch den festen Punkt $O$ gezogenen Radius vector eines Kegelschnitts $OQ$ in einem constanten Verhältniss zu $OP$ genommen wird, den Ort von $Q$ zu bestimmen.

Wir haben in die Polargleichung nur $m\rho$ für $\rho$ zu substituiren, und der Ort wird als ein dem ersten Kegelschnitt ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt gefunden.

Der Punkt $O$ kann das Centrum der Aehnlichkeit beider Kegelschnitte genannt werden; und es ist offenbar (s. auch Art. 148) der Punkt, wo sich gemeinschaftliche Tangenten der zwei Kegelschnitte durchschneiden; weil, wenn die Radien vectoren $OP$, $OP'$ zum ersten Kegelschnitt gleich werden, auch $OQ$, $OQ'$, die Radien vectoren des andern, gleich werden müssen.

*Aufg.* 2. Wenn durch ein Centrum der Aehnlichkeit zweier ähnlicher Kegelschnitte ein Paar Radien vectoren gezogen werden, so sind die Verbindungssehnen ihrer Endpunkte entweder parallel oder sie durchschneiden sich in der Radicalachse der Kegelschnitte.

Diess wird genau wie in Art. 149 bewiesen.

*Aufg.* 3. Die dreien ähnlichen Kegelschnitten entsprechenden sechs Centra der Aehnlichkeit liegen zu dreien in geraden Linien. (Art. 150.)

*Aufg.* 4. Wenn eine gerade Linie zwei ähnliche und concentrische Kegelschnitte schneidet, so sind die zwischen den Kegelschnitten enthaltenen Abschnitte gleich. Jede Sehne des äussern Kegelschnitts, welche den innern berührt, wird im Berührungspunkte halbirt.

Dies wird in derselben Art bewiesen, wie die Sätze der Art. 198, 199 bewiesen wurden, welche specielle Fälle des gegenwärtigen Satzes sind; denn die Asymptoten einer Hyperbel können als ein zu ihr ähnlicher Kegelschnitt betrachtet werden, weil die höchsten Glieder in der Gleichung der Asymptoten dieselben, wie die in der Gleichung der Curve sind.

*Aufg.* 5. Wenn eine Tangente in $V$, dem Scheitel der innern von zwei concentrischen und ähnlichen Ellipsen, die äussere in den Punkten $T$ und $T'$ schneidet, so ist jede durch $V$ gezogene Sehne der innern die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äussern durch $T$ und $T'$.

*Aufg.* 6. Der Ort, welchen die Schwerpunkte aller der Dreiecke bestimmen, die durch die Brennpunkte und einen Punkt in der Peripherie eines Kegelschnitts gebildet werden, ist ein dem gegebenen ähnlicher und concentrischer Kegelschnitt.

240. Zwei Figuren sind ähnlich, obwohl nicht in ähnlicher Lage, wenn die proportionalen Radien einen constanten Winkel mit einander machen, anstatt parallel zu sein; so dass, wenn wir die eine der Figuren um diesen Winkel gedreht denken, sie beide dann ähnlich und ähnlich gelegen sein werden.

Die Bedingung zu finden, unter welcher die zwei Kegelschnitte

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = o$$

ähnlich sind, ohne in ähnlicher Lage zu sein.

Wir haben nur die erste Gleichung zu Achsen zu transformiren, welche mit den gegebenen irgend einen Winkel $\vartheta'$ machen und zu untersuchen, ob dem $\vartheta$ ein Werth beigelegt werden kann, welcher die neuen Coefficienten $A$, $B$, $C$ den alten $a$, $b$, $c$ proportional macht. Sei

$$A' = ma,\; B' = mb,\; C' = mc,$$

so sahen wir für rectanguläre Achsen im Artikel 157, dass die Grössen $B^2 - 4AC$ und $A + C$ durch Transformation der Coordinaten unverändert bleiben, und dass also

$$A + C = A' + C' = m(a + c),$$

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' = m^2(b^2 - 4ac).$$

Demnach ist die geforderte Bedingung

$$\frac{B^2 - 4AC}{(A + C)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(a + c)^2}.$$

Für schiefe Achsen findet man in derselben Art nach Artikel 158 die Bedingung der Aehnlichkeit

$$\frac{B^2 - 4AC}{(A + C - B\cos\omega)^2} = \frac{b^2 - 4ac}{(a + c - b\cos\omega)^2}.$$

Aus den Artikeln 76, 97 geht als die geometrische Bedeutung der gefundenen Bedingung hervor, dass der Winkel zwischen den reellen oder imaginären Asymptoten der einen Curve gleich dem Winkel ist, welcher von denen der andern gebildet wird.

## Die Berührung von Kegelschnitten.

241. Wir bewiesen im Artikel 15, dass zur Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Curven des $m^{ten}$ und $n^{ten}$ Grades eine Gleichung des $mn^{ten}$ Grades erhalten wird. Zwei Kegelschnitte schneiden einander daher im Allgemeinen in vier Punkten.

Wenn zwei von diesen Durchschnittspunkten zusammenfallen, so werden die Kegelschnitte als einander berührend bezeichnet und die gerade Linie, welche die zusammenfallenden Punkte verbindet, heisst die gemeinschaftliche Tangente.

Sind die Gleichungen der Kegelschnitte, bezogen auf ihre Tangente und Normale (Art. 182. Aufg. 2)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o,$$

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + E'y = o,$$

so ist die Gleichung der Linie $(LM)$, die die andern zwei Durchschnittspunkte verbindet, wie in Aufg. 2, Art. 182

$$(BA' - AB')x + (CA' - AC')y + (EA' - AE') = o.$$

Man bezeichnet diese Berührung als eine Berührung der ersten Ordnung. (Fig. 84.)

Die Berührung der Kegelschnitte ist aber offenbar eine engere, wenn drei ihrer Durchschnittspunkte zusammenfallen. In diesem Falle muss einer der Punkte $L$, $M$ mit $T$ zusammenfallen; die Linie $LM$ muss somit durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen und die Bedingung

$$EA' - AE' = o$$

muss erfüllt sein.

Fig. 84.

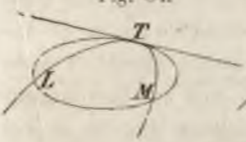



Fig. 85.

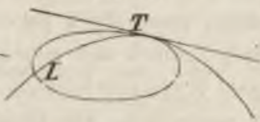
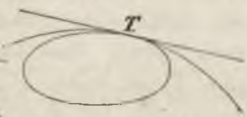



Fig. 86.




Dies liefert eine Berührung der zweiten Ordnung. (Fig. 85.)

Curven, welche eine höhere Berührung als der ersten Ordnung haben, heissen osculirende Curven und man erkennt, dass Kegelschnitte, welche osculiren, einander im Allgemeinen nur in einem andern Punkte schneiden.

Die Berührung zweier Kegelschnitte ist die möglichst engste, wenn sie vier aufeinanderfolgende Punkte gemeinschaftlich haben. In diesem Falle muss die Linie $LM$ mit der Tangente in $T\,(y = o)$ zusammenfallen, d. h. die zwei Bedingungen

$$EA' - AE' = o, \quad BA' - AB' = o$$

müssen erfüllt sein. Die Kegelschnitte haben nun — sagt man — eine Berührung der dritten Ordnung. (Fig. 86.) Und da zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier Punkte mit einander gemein haben können, so ist dies die höchste Ordnung der Berührung, welche zwischen zwei verschiedenen Kegelschnitten stattfinden kann. Wenn die Gleichung der einen Curve durch

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

repräsentirt ist, so muss die der andern:

$$x^2 + Bxy + C'y^2 + Ey = o$$

sein.

242. Sonach giebt es unendlich viele Kegelschnitte, welche in einem gegebenen Punkte eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt haben und erst durch eine weitere Bedingung wird der berührende Kegelschnitt völlig bestimmt. So z. B. ist die Parabel, die eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

hat, durch
$$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4} y^2 + Ey = o$$
repräsentirt.

Wir können keinen Kreis beschreiben, der eine Berührung der dritten Ordnung mit einem gegebenen Kegelschnitt besitzt, weil zwei Bedingungen erfüllt sein müssen, damit diese Gleichung einen Kreis repräsentire; oder in andern Worten, wir können durch vier aufeinanderfolgende Punkte eines Kegelschnitts keinen Kreis beschreiben, weil zur Bestimmung des Kreises drei Punkte hinreichen. Die Gleichung des durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gehenden Kreises kann man aber leicht finden.

Für die Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = o$$

und unter der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten ist die Gleichung eines die Curve berührenden Kreises

$$x^2 + 2xy \cos\omega + y^2 - 2r \sin\omega . y = o,$$

und die Bedingung, dass dieser Kreis osculirend sei (Art. 241), ist

$$E = 2Ar \sin\omega, \quad r = \frac{E}{2A \sin\omega}.$$

Ein solcher Kreis heisst der osculirende oder Krümmungskreis und die Grösse $r$ der Radius der Krümmung des Kegelschnitts im Punkte $T$.

243. Einen Ausdruck für den Krümmungs-Radius in einem Punkt der Ellipse zu finden.

Wenn man den Durchmesser, welcher dem gegebenen Punkte entspricht, durch $a'$ und den zu ihm conjugirten durch $b'$ bezeichnet und den letztern zur Achse der $x$ wählt, so ist

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse; verlegt man hierauf den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkte selbst, so dass der Durchmesser, welcher nach ihm hingeht, und die Tangente, welche in ihm die Curve berührt, zu Achsen werden, so entspricht dem die Substitution $y + a'$ für $y$ und die Gleichung wird somit

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{(y + a')^2}{a'^2} = 1$$

oder

$$\frac{x^2}{b'^2} + \frac{y^2}{a'^2} + \frac{2y}{a'} = 0.$$

Daraus entspringt für den Krümmungs-Radius der Ausdruck

$$r = \frac{b'^2}{a' \sin \omega};$$

und da $a' \sin \omega$ die vom Centrum der Curve auf die Tangente gefällte Senkrechte ist, nach Artikel 176

$$r = \frac{b'^2}{\frac{a\,b}{b'}} = \frac{b'^3}{a\,b}.$$

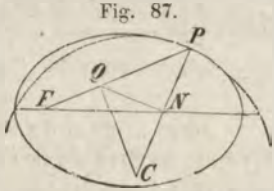
Dieser Ausdruck liefert eine einfache Construction für den Krümmungs-Radius, der einem beliebigen Punkte der Ellipse entspricht.

Wir zeigten im Artikel 182, dass die Länge der Normale $= \frac{bb'}{a}$ und dass $\cos \psi = \frac{b}{b'}$, wenn $\psi$ der vom Brennstrahl mit der Normale gebildete Winkel ist; dies gestaltet den Ausdruck für den Krümmungshalbmesser um in

$$R = \frac{N}{\cos^2 \psi}.$$

Wenn wir daher eine Senkrechte zur Normale in dem Punkte errichten, wo sie die Achse schneidet, (Fig. 87) und ferner im Punkt $Q$, in welchem diese Senkrechte den Brennstrahl trifft, $CQ$ senkrecht zu ihm bis zur Normale ziehen, so ist $C$ das Centrum der Krümmung und $CP$ der Krümmungs-Radius.

Fig. 87.




Eine andre Construction kann auf die Bemerkung gegründet werden, dass die Durchschnittssehnen eines Kreises mit einem Kegelschnitt mit der Achse des letztern gleiche Winkel bilden. Denn weil die Rechtecke unter den Segmenten der Sehnen gleich sind (Eukl. III, 35), so sind es auch die parallelen Durchmesser des

Kegelschnitts (Artikel 109) und dieselben machen also mit der Achse gleiche Winkel. (Art. 162.)

Nun ist in dem Falle des Krümmungskreises die Tangente in $T$ die eine und die Linie $TL$ die andre Durchschnittssehne; man hat daher nur $TL$ so zu ziehen, dass sie mit der Achse den nämlichen Winkel, wie mit der Tangente bildet; alsdann ist der durch die Punkte $P$ und $L$ beschriebene Kreis, welcher den Kegelschnitt in $T$ berührt, der Krümmungskreis.

Diese Construction zeigt, dass der in einem Scheitel der Curve osculirende Kreis eine Berührung der dritten Ordnung mit ihr hat.

*Aufg. 1.* Man soll unter Anwendung der Bezeichnungsweise des excentrischen Winkels die Bedingung aufstellen, unter welcher 4 Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in einem Kreise liegen.

Die Sehne, welche zwei der Punkte verbindet, muss mit einer Seite der Achse denselben Winkel machen, wie die die beiden andern verbindende Sehne mit der andern; die Sehnen sind durch

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)$$

repräsentirt, und man hat somit

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tan\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)=o,$$

d. i.
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=o,$$
oder
$$=2m\pi.$$

*Aufg. 2.* Bestimme die Coordinaten des Punktes, in welchem der osculirende Kreis den Kegelschnitt ferner schneidet.

Wir haben
$$\alpha=\beta=\gamma,$$
also
$$\delta=-3\alpha,$$
oder
$$X=\frac{4x'^3}{a^2}-3x',$$
und
$$Y=\frac{4y'^3}{b^2}-3y'.$$

*Aufg. 3.* Drei Punkte eines Kegelschnitts, deren osculirende Kreise durch einen gegebenen Punkt der Curve gehen, liegen in einem Kreise, welcher diesen Punkt enthält und bilden ein Dreieck, für welches das Centrum der Curve der Durchschnittspunkt der Seitenhalbirungs-Linien ist.

Aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $\delta$ der osculirenden Kreise folgt zur Bestimmung des Berührungspunktes

$$\alpha=-\frac{\delta}{3},$$

und da der sinus und cosinus von $\delta$ unverändert bleiben, wenn $\delta$ um $360^0$ vermehrt wird, so ergiebt sich ebenso

$$\alpha = -\frac{\delta}{3} + 120^0, \ \alpha = -\frac{\delta}{3} + 240^0.$$

Nach der ersten Aufgabe liegen diese drei Punkte in einem durch $\delta$ gehenden Kreise.

Wenn wir in der letzten Aufgabe $X$, $Y$ als gegeben voraussetzen, so ist, weil den $x'$, $y'$ bestimmenden cubischen Gleichungen die zweiten Glieder fehlen, die Summe der drei Werthe von $x$ und $y$ respective gleich, und daher ist nach der 4. Aufgabe des Art. 7 der Anfangspunkt der Coordinaten der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien der Seiten des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks. Wir erkennen auch, dass die Normalen in diesen Punkten die drei Höhen des Dreiecks sind und dass sie sich daher in einem Punkte schneiden.

244. **Den Krümmungs-Radius der Parabel zu bestimmen.**

Aus der auf einen Durchmesser und die Tangente bezogenen Gleichung der Parabel finden wir durch dieselbe Methode, wie in Artikel 243,

$$R = \frac{p'}{2 \sin \vartheta} = \frac{p'^{\frac{3}{2}}}{2 p^{\frac{1}{2}}}$$

(Art. 214.), oder weil (Art. 215, 216)

$$N = \frac{p'}{2} \sin \vartheta, \ R = \frac{N}{\sin^2 \vartheta} = \frac{N}{\cos^2 \psi};$$

die in dem letzten Artikel angegebene Construction bleibt daher auch für die Parabel gültig.

*Aufg. 1.* In allen Kegelschnitten ist der Krümmungs-Radius gleich dem Quotienten aus dem Cubus der Normale und dem Quadrat des Halbdurchmessers.

*Aufg. 2.* Drücke den Krümmungs-Radius einer Ellipse in Function des Winkels aus, welchen die Normale mit der Achse einschliesst.

*Aufg. 3.* Bestimme die Längen der Sehnen des Krümmungskreises, welche durch das Centrum oder den Brennpunkt eines Centralkegelschnitts gehen.

*Aufl.* $$\frac{2b'^2}{a'} \text{ und } \frac{2b'^2}{a}.$$

*Aufg. 4.* Die Brennpunktssehne des Krümmungskreises für einen Punkt im Kegelschnitt ist einer Brennpunkts-Sehne des Kegelschnitts gleich, welche der Tangente in dem Punkte parallel gezogen ist, *Aufg*, 5. In der Parabel ist die Brennpunkts-Sehne des Krümmungskreises dem Parameter des durch den Punkt gehenden Durchmessers gleich.

245. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums für einen Centralkegelschnitt zu bestimmen.

Sie werden gefunden, indem man von den Coordinaten des Punktes im Kegelschnitt die Projectionen des Krümmungshalbmessers auf die Coordinatenachsen abzieht. Nun ist offenbar, dass dieser Radius zu seiner Projection in demselben Verhältniss steht, wie die Normale zur Ordinate $y$. Wir erhalten daher die Projection des Krümmungsradius auf die Achse der $y$, indem wir den Radius $\frac{b'^2}{p}$ durch $\frac{y'}{N}$ multipliciren, $= \frac{b'^2 y'}{b^2}$; die Ordinate des Krümmungsmittelpunktes ist daher $= \frac{b^2 - b'^2}{b^2} y'$,

d. i. weil $$b'^2 = b^2 + \frac{c^2}{b^2} y'^2,$$

$$Y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y'^3.$$

In gleicher Art ergiebt sich seine Abscisse

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x'^3.$$

Wir würden dieselben Werthe erhalten haben, indem wir in Artikel 233, Aufg. 7, $\alpha = \beta = \gamma$ in die für die Coordinaten des Centrums erhaltenen Ausdrücke substituirten.

Wir bemerken ferner, dass das Centrum des einem Dreieck umschriebenen Kreises der Durchschnitt der Senkrechten ist, welche auf den Seiten in ihren Mittelpunkten errichtet werden; dass also, wenn das Dreieck durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gebildet wird, zwei seiner Seiten aufeinanderfolgende Tangenten der Curve und die Senkrechten zu ihnen die entsprechenden Normalen sind. Das Centrum der Krümmung irgend einer Curve ist daher der Durchschnittspunkt zweier aufeinanderfolgenden Normalen.

Wenn wir in der Aufg. 4 des Art. 182

$$x' = x'' = X, \quad y' = y'' = Y$$

einsetzen, so erhalten wir in der That dieselben Werthe, wie die eben bestimmten.

246. Die Coordinaten des Krümmungs-Centrums bei der Parabel zu bestimmen.

Die Projection des Krümmungshalbmessers auf die Achse der $y$ wird wie vorher durch Multiplication seiner Länge $\frac{N}{\sin^2\vartheta}$ mit $\frac{y'}{N}$ gefunden, und ist also $= \frac{y'}{\sin^2\vartheta}$; indem wir diese Grösse von $y'$ abziehen, erhalten wir die Ordinate

$$Y = -\frac{y'}{\tan^2\vartheta} = -\frac{4y'^3}{p^2}$$

(Art. 214). Ebenso ergiebt sich die Abscisse

$$X = x' + \frac{p}{2\sin^2\vartheta} = x' + \frac{p + 4x'}{2}.$$

Dieselben Werthe können aus der Auflösung der 9. Aufgabe des Art. 229 abgeleitet werden.

247. Die Evolute einer Curve ist der Ort der Krümmungs-Centra ihrer verschiedenen Punkte.

Um die Evolute eines Centralkegelschnitts zu finden, würden wir die Coordinaten $x', y'$ durch diejenigen $(x, y)$ des Krümmungsmittelpunktes ausdrücken und die erhaltenen Werthe in die Gleichung der Curve substituiren; wir erhielten so (indem wir $\frac{c^2}{a} = A$, $\frac{c^2}{b} = B$ schreiben)

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{B^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

Ebenso wird die Gleichung der Evolute der Parabel gefunden

$$27\,py^2 = 16\,(x - \tfrac{1}{2}p)^3;$$

man nennt diese Curve die semicubische oder auch die Neil'sche Parabel.

## Dreizehntes Kapitel.

# Die Methode des Unendlich-Kleinen, die Quadratur und Rectification der Kegelschnitte.

248. Die Differential-Rechnung erlaubt auf sehr einfache Weise die Bestimmung der Tangenten der Curven und die der Grösse ihrer Flächen und der Länge ihrer Bögen. Obgleich wir von ihrer Symbolik und ihren Grundbegriffen in diesem Werke weiterhin mehrfachen Gebrauch machen, so wollen wir doch einige der angedeuteten Fragen, insofern sie sich eben nur auf Kegelschnitte beziehen, hier zunächst ohne ihre directe Vermittelung behandeln, um erst so vorbereitet den Gebrauch der Differential- und Integral-Rechnung darzulegen.

Wir geben damit zugleich ihren analytischen Begriffen die geometrische Basis. Und die geometrische Methode, welche wir zu erläutern gedenken, besitzt in Bezug auf manche Fragen vor der Analysis den Vorzug der Einfachheit und Strenge; sie hat noch in neuester Zeit zu einzelnen schönen Ergebnissen geführt (vergleiche Artikel 263), welche bei der Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung nicht gefunden worden waren. Sie hat überdiess das grösste historische Interesse, denn sie giebt im Wesentlichen die Art und Weise, in welcher diese Probleme von den Geometern vor der Erfindung der Differential-Rechnung untersucht worden sind.

Wenn ein Polygon einer Curve eingeschrieben ist, so nähert sich augenscheinlich der Inhalt und Umfang des Polygons um so mehr der Gleichheit mit dem Inhalt und Umfang der Curve, je grösser die Zahl der Seiten des Polygons und je kleiner damit jede einzelne Seite desselben wird; gleichzeitig nähert sich jede Seite des Polygons mehr und mehr dem Zusammenfallen mit der Tangente der Curve in dem Punkte, in welchem sie dieselbe schneidet. Wenn die Zahl der Seiten unendlich gross und die Länge jeder einzelnen Seite unendlich klein geworden ist, so fällt das Polygon mit der Curve zusammen, und die Tangente derselben in jedem ihrer Punkte wird mit der geraden Verbindungs-Linie zweier unendlich nahe benachbarter Punkte in ihr identisch.

Ebenso nähert sich Inhalt und Umfang eines umschriebenen Polygons dem Inhalt und Umfang der Curve um so mehr, je grösser die Zahl seiner Seiten und je kleiner jede einzelne Seite wird; und gleichzeitig nähert sich der Durchschnittspunkt zweier benachbarter Seiten um so mehr dem Berührungspunkt einer jeden derselben. Man kann daher zur Untersuchung des Inhalts und Umfangs einer Curve für dieselbe ein eingeschriebenes oder umschriebenes Polygon substituiren, dessen Seitenanzahl unendlich gross und dessen Seiten unendlich klein sind, und man kann jede Tangente der Curve als die gerade Verbindungs-Linie zweier unendlich nahen Punkte der Curve, und jeden Punkt der Curve als den Durchschnittspunkt zweier unendlich nahen Tangenten derselben betrachten.

249. Die Richtung der Tangente in einem Punkte des Kreises zu bestimmen.

Wir denken ein eingeschriebenes reguläres Polygon. Auf jedes der gleichseitigen Dreiecke (Fig. 88), in welche es durch die nach seinen Ecken gehenden Radien zerlegt wird, lässt sich dann die Bemerkung anwenden, dass der Basiswinkel *OBA* um die Hälfte des Winkels an der Spitze kleiner ist als ein rechter Winkel. Wenn alsdann die Zahl der Seiten des Polygons als unendlich gross gedacht wird, so dass jede einzelne unendlich klein sein muss, so wird der Winkel an der Spitze jedes dieser Dreiecke kleiner als jeder angebbare Winkel, und die Tangente des Kreises bildet daher mit dem Radius des Berührungspunktes einen rechten Winkel. Es bietet sich häufig die Gelegenheit zur Anwendung eines Princips dar, welches hierin mit enthalten ist, nämlich, dass zwei unendlich nahe gerade Linien von gleicher Länge zu der geraden Linie rechtwinklich sind, welche ihre Endpunkte verbindet.

Fig. 88.


250. Die Umfänge zweier Kreise stehen in dem Verhältniss ihrer Radien.

Wenn reguläre Polygone von gleicher Anzahl der Seiten in beide Kreise eingeschrieben werden, so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke des einen mit denen des andern, dass ihre Basen $ab$ und $AB$ in dem Verhältniss der Radien beider Kreise stehen und daraus, dass die Umfänge beider Polygone und folglich auch die beider Kreise als die Summen solcher Seiten, wenn ihre Anzahl unendlich gross gedacht wird, in demselben Verhältniss stehen.

251. Der Inhalt eines Kreises ist dem Producte aus dem Halbmesser in den halben Umfang desselben gleich.

Denn der Inhalt jedes der Dreiecke $OAB$, welche in den vorigen Aufgaben betrachtet worden sind, ist das Product aus der Hälfte seiner Basis in die vom Centrum auf dieselbe gefällte Senkrechte; somit ist der Inhalt jedes der betrachteten regulären Polygone gleich der mit der senkrechten Entfernung einer Seite desselben multiplicirten halben Summe seiner Seiten. Mit der Vermehrung ihrer Anzahl nähert sich ohne Ende der Umfang des Polygons dem Umfang des Kreises und jene senkrechte Entfernung einer Seite dem Halbmesser des Kreises, so dass die Differenz zwischen beiden kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden kann. Demnach ist das ausgeprochene Resultat richtig oder der Inhalt eines Kreises wird durch $\pi r^2$ ausgedrückt.

252. Die Richtung der Tangente in einem Punkte der Ellipse zu bestimmen.

Man bezeichne durch $P$ und $P'$ (Fig. 89) zwei unendlich nahe Punkte der Curve, so dass man hat

$$FP + PF' = FP' + P'F'.$$

Fig. 89.

Nimmt man dann $FR = FP$ und $F'R' = F'P'$, so ist $P'R = PR'$. Die beiden Dreiecke $PRP'$ und $PR'P'$ besitzen die gemeinschaftliche Basis $PP'$, die gleichen Katheten $P'R$ und $PR'$ und nach dem Princip des Art. 249 die rechten Winkel $PRP'$ und $PR'P'$; in Folge dessen ist $\angle PP'R = \angle P'PR'$. Unter der Voraussetzung, welche wir gemacht haben, dass die Punkte $P$ und $P'$ unendlich nahe sind, ist $\angle TPF = \angle PP'F$, weil ihre Differenz unter jeden angebbaren Winkel herabgebracht werden kann; demnach hat man $\angle TPF = \angle P'PF'$, oder die Brennstrahlen des Berührungspunktes machen gleiche Winkel mit der Tangente.

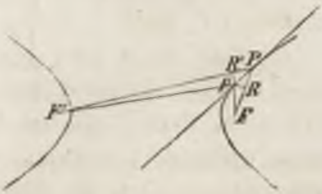
253. Man soll die Richtung der Tangente in einem Punkte der Hyperbel bestimmen.

Wir haben bei der nämlichen Construction wie vorher (Fig. 90)

$$F'P' - F'P = FP' - FP,$$

oder $$P'R = P'R'.$$

Fig. 90.

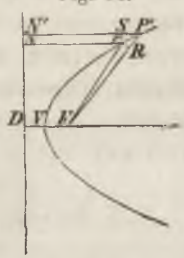


Demnach ist

$$\angle PP'R = \angle PP'R'$$

oder die Tangente ist die innere Halbirungs-Linie des Winkels zwischen den Brennstrahlen des Berührungspunktes. In derselben Art bestimmen wir die Richtung der Tangente in einem Punkte der Parabel (Fig. 91); denn wir haben

Fig. 91.



$$FP = PN \text{ und } FP' = P'N';$$

also $$P'R = P'S$$

oder $$\angle NP'P = \angle FP'P.$$

Die Tangente halbirt daher den Winkel $FPN$, welchen der Brennstrahl des Berührungspunktes mit der durch ihn gezogenen Parallellinie zur Achse der Parabel bildet.

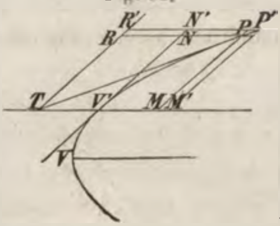
254. Man soll den Inhalt des parabolischen Sectors $FVP$ bestimmen (Fig. 91).

Weil $PS = PR$ und $PN = FP$ ist, so ist die Fläche des Dreiecks $FPR$ die Hälfte des Parallelogramms $PSNN'$. Wenn wir eine Anzahl von Punkten $P'$, $P''$ u. s. w. zwischen $V$ und $P$ nehmen, so wird die Summe aller der entsprechenden Parallelogramme $PSNN'$ u. s. w. der Gleichheit mit dem Inhalte der Fläche $DVPN$ um so mehr genähert, je näher die einzelnen Punkte $P$ einander sind; ebenso die Summe aller Dreiecke $FPR$ der Gleichheit mit dem Inhalte der Fläche des Sectors $VFP$. Demnach ist der Inhalt des Sectors $PFV$ die Hälfte des Inhalts von $DVPN$ und somit ein Drittheil des Vierecks $DFPN$.

Durch analoge Betrachtungen bestimmt man den **Inhalt des durch eine beliebige gerade Linie abgeschnittenen Segments einer Parabel.**

Man zieht den Durchmesser der Parabel, welcher diese gerade Linie halbirt; dann ist in der Figur 92 das Parallelogramm von der Diagonale $PR'$ dem Parallelogramm von der Diagonale $PM'$ flächengleich, wie aus ihrer Beziehung zu dem Parallelogramm $TM'PR'$ und seiner Diagonale $TP'$ hervorgeht. Die Seite $TM$ ist aber durch die Curve in $V$ halbirt, und das Parallelogramm von der Diagonale $PN'$ ist demnach die Hälfte von dem über $PR'$;

Fig. 92.



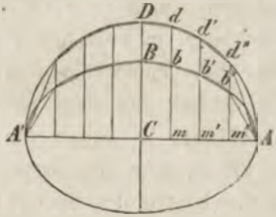

wenn wir daher eine Anzahl von Punkten $P, P', P''$ u. s. w. in der Curve wählen, so ist die Summe der Flächen aller Parallelogramme wie $PM'$ doppelt so gross, wie die Summe aller Parallelogramme wie $PN'$, und demnach zuletzt der Inhalt der Fläche $V'PM$ das Doppelte von dem Inhalt der Fläche $V'PN$, d. i. **der Inhalt des parabolischen Segments $V'PM$ steht zu dem Inhalt des Parallelogramms $V'NPM$ in dem Verhältniss von 2 : 3.**

255. **Der Inhalt einer Ellipse ist gleich demjenigen eines Kreises, dessen Halbmesser das geometrische Mittel zwischen den Halbachsen der Ellipse ist.**

Denn theilt man die Ellipse und den über ihrer grossen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreis durch Parallelen zur kleinen Achse in schmale Flächenstreifen, so ist wegen der Relationen (Fig. 93) $\quad mb : md = m'b' : m'd' = b : a,$

das Viereck $mbb'm'$ zu dem Viereck $mdd'm'$ auch in dem Verhältniss $b : a$, und demnach die Summe aller Vierecke der einen Reihe, d. h. das der Ellipse eingeschriebene Polygon $CBbb'b''A$, zu dem entsprechenden dem Kreis eingeschriebenen Polygon $CDdd'd''A$ in dem nämlichen Verhältniss. Diese Proportionalität besteht für jede Anzahl der Seiten, welche man den beiden Polygonen geben kann; lassen wir demnach diese Anzahl un-

Fig. 93.



begrenzt wachsen und gleichzeitig alle einzelnen Seiten unbegrenzt abnehmen, so erkennen wir, dass der Inhalt der Ellipse zu dem des Kreises in dem Verhältniss $b:a$ steht, so dass der Inhalt der Ellipse durch den Ausdruck $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi a b$ bestimmt wird.

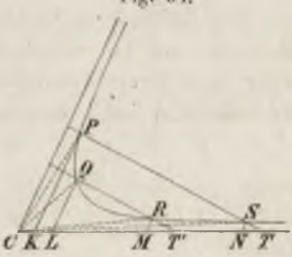
Man beweist durch dieselben Betrachtungen, dass die Flächen zweier Figuren, deren correspondirende Ordinaten zu einander in einem bestimmten Verhältniss stehen, das nämliche Verhältniss haben.

256. Jeder Durchmesser eines Kegelschnitts halbirt die Curve.

Die Richtigkeit des Satzes erhellt sofort aus der Betrachtung der Trapeze, in welche die dem Durchmesser entsprechenden Ordinaten die Fläche der Curve zerlegen; weil der Durchmesser alle ihm entsprechende Ordinaten halbirt, so halbirt er auch diese Trapeze und demnach die Curve, weil die Fläche derselben der Summe dieser Trapeze gleich ist, sobald man die Ordinaten als unendlich nahe benachbart voraussetzt.

257. Der Inhalt des Sectors einer Hyperbel, welcher durch die geraden Verbindungslinien zweier ihrer Punkte mit dem Centrum begrenzt wird, ist dem Inhalt des Segments gleich, welches durch Parallelen zu den Asymptoten von denselben Punkten aus bestimmt wird (Fig. 94).

Fig. 94.




Denn wegen der Gleichheit der Dreiecke $PKC$ und $QLC$ ist auch die Fläche $PQC$ gleich der Fläche $PQKL$.

Zwei beliebige Segmente $PQKL$ und $RSMN$ sind gleich, wenn

$$PK : QL = RM : SN.$$

Denn $PK : QL = CL : CK$, und nach Art. 199

$$CL = MT', \; CK = NT;$$

also $$RM : SN = MT' : NT,$$

somit $QR$ parallel zu $PT$.

Nun kann leicht gezeigt werden, dass die Sectoren $PCQ$ und $RCS$ einander gleich sind, weil der $PS$ und $QR$ halbirende Durchmesser sowohl den hyperbolischen Inhalt $PQRS$ als auch die Dreiecke $PCS$ und $QCR$ halbirt.

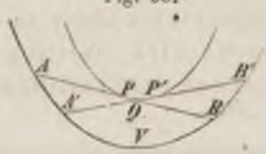
Setzen wir voraus, dass die Punkte $Q$ und $R$ zusammenfallen, so sehen wir, dass jeder Inhalt $PKNS$ halbirt werden kann, indem man die Ordinate $QL$ verzeichnet, welche das geometrische Mittel zwischen den Ordinaten seiner Endpunkte ist.

Und wenn eine Anzahl von Ordinaten bestimmt wird, deren Längen eine stetige geometrische Proportion bilden, so ist der von irgend zweien benachbarten unter ihnen begrenzte Inhalt von constanter Grösse.

258. Wenn zwei Kegelschnitte ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch sind, so schneidet jede Tangente des inneren von beiden ein Segment von constanter Fläche von dem äusseren ab.

In der 4. Aufgabe des Art. 239 ward bewiesen, dass eine solche Tangente im Berührungspunkte halbirt ist. Wenn wir demnach irgend zwei Tangenten dieser Art betrachten (Fig. 95), so ist

Fig. 95.




$$\angle AQA' = \angle BQB'$$

und je näher wir den Punkt $Q$ bei dem Punkte $P$ gelegen voraussetzen, desto näher kommen die Seiten $AQ$, $A'Q$ der Gleichheit mit den Seiten $BQ$, $B'Q$; daher werden die Dreiecke $AQA'$ und $BQB'$ inhaltsgleich, wenn wir die beiden Tangenten als unendlich nahe betrachten, und die Fläche $AVB$ ist der Fläche $A'VB'$ gleich. Weil endlich diese Fläche beim Uebergang von einer Tangente zur nächstbenachbarten unverändert bleibt, so bleibt sie es für jede beliebige Lage der begrenzenden Tangente.

Man kann in derselben Art den umgekehrten Satz beweisen, dass die Tangente einer Curve im Berührungspunkt halbirt werden muss, wenn sie in jeder ihrer Lagen eine constante Fläche von einer andern Curve abschneidet, und es gilt allgemein für jede Curve, dass der abgeschnittene Flächeninhalt constant ist, wenn die Tangente in jeder ihrer Lagen im Berührungspunkt halbirt wird.

Darnach lässt sich leicht die Aufgabe lösen: Man soll durch einen gegebenen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts eine gerade Linie so ziehen, dass sie den Minimal-Inhalt von demselben abschneide.

Wäre verlangt, dass die gesuchte gerade Linie einen gegebenen Inhalt abschneide, so hätte man durch den Punkt zu einem bestimmten ähnlichen und ähnlich gelegenen, concentrischen Kegelschnitt eine Tangente zu ziehen; mit dem abzuschneidenden Inhalt müsste die Entfernung zwischen beiden Kegelschnitten wachsen. Wenn dieser zweite innere Kegelschnitt durch den gegebenen Punkt selbst geht, so wird der abgeschnittene Inhalt am kleinsten, und weil dann die gerade Linie als Tangente der Curve in dem gegebenen Punkte halbirt wird, so hat man die gerade Linie, welche den Minimal-Inhalt abschneiden soll, nur so durch den gegebenen Punkt zu ziehen, dass sie in ihm halbirt wird.

Das nämliche Gesetz gilt für jede Curve.

Durch analoge Betrachtungen können die beiden folgenden Sätze leicht genug bewiesen werden: 1.) Wenn die Tangente $AB$ einer Curve einen Bogen von constanter Länge von einer anderen Curve abschneidet, so wird sie in ihrem Berührungspunkte so getheilt, dass ihre Abschnitte $AP$ und $BP$ in dem umgekehrten Verhältniss der Tangenten der letztern Curve in $A$ und $B$ stehen. 2.) Wenn die Tangente $AB$ von einer constanten Länge ist, und wenn die vom Durchschnittspunkt der in $A$ und $B$ an die äussere Curve gezogenen Tangenten auf $AB$ gefällte Senkrechte sie in $M$ trifft, so ist stets

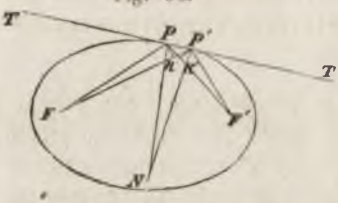
$$AP = MB.$$

259. Den Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte einer Ellipse zu bestimmen.

Weil der Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises der Durchschnittspunkt der auf seinen Seiten in den Mittelpunkten derselben errichteten Perpendikel ist, so ist das Centrum des durch drei aufeinanderfolgende Punkte einer Curve gehenden Kreises der Durchschnittspunkt zweier aufeinanderfolgenden Normalen der Curve.

Betrachten wir also zwei Dreiecke $FPF'$ und $FP'F'$ (Fig. 96) und bezeichnen die Halbirungslinien ihrer Winkel an der Spitze durch $PN$, $P'N$, so beweisen wir leicht elementar-geometrisch, dass $2\angle PNP' = \angle PFP' + \angle PF'P'$ ist.

Fig. 96.



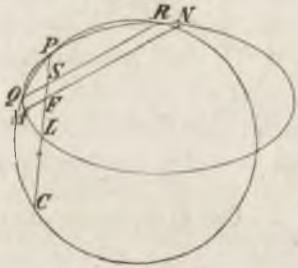

Weil nun der Bogen eines Kreises dem Radius desselben und der Grösse des Winkels proportional ist, welchen er am Centrum desselben spannt, so wird der Winkel $PNP'$ durch $\frac{PP'}{PN}$ gemessen, wenn wir den Bogen $PP'$ als Bogen des Kreises vom Centrum $N$ betrachten. Ebenso wird für
$$FR = FP,$$
$$\angle PFP' \text{ durch } \frac{PR}{FP}$$
gemessen, und wir erhalten
$$\frac{2 \, . \, PP'}{PN} = \frac{PR}{FP} + \frac{P'R'}{F'P'};$$
wenn wir den Winkel $PP'F$ durch $\vartheta$ bezeichnen, so ist
$$PR = P'R' = PP' \sin\vartheta,$$
und indem wir $PN = R$, $FP = \varrho$ und $F'P = \varrho$ setzen,
$$\frac{2}{R\sin\vartheta} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}.$$
Man erkennt daraus, *dass die Focalsehne der Krümmung für einen Punkt der Ellipse das Doppelte des harmonischen Mittels zwischen den Brennstrahlen desselben ist.*

Indem man für $\sin\vartheta$ den Werth $\frac{b}{b'}$, für $\varrho + \varrho'$ den Werth $2a$ und für $\varrho\varrho'$ den Werth $b'^2$ einsetzt, erhält man den bekannten Ausdruck
$$R = \frac{b'^3}{ab}.$$
Der Krümmungsradius der Hyperbel wird auf eine ganz ähnliche Weise ermittelt. In dem Falle der Parabel ist $\varrho'$ unendlich gross und daher
$$\frac{2}{R\sin\vartheta} = \frac{1}{\varrho}.$$

260. Ein interessantes Ergebniss in Bezug auf die Focalsehne der Krümmung eines Kegelschnitts erhalten wir durch die folgende einfache Betrachtung.

Wir ziehen in dem betrachteten Kegelschnitt eine Sehne $QR$ parallel zu der Tangente im Punkte $P$, beschreiben den durch die Punkte $P$, $Q$ und $R$ bestimmten Kreis und verlängern die Focalsehne $PL$ des Kegelschnitts, bis sie demselben zum zweiten Male in $C$ begegnet. (Fig. 97.) Dann ist nach einer Eigenschaft des Kreises

Fig. 97.




$$PS \,.\, SC = QS \,.\, SR,$$

und nach einer im Art. 195, Aufg. 2 gegebenen Eigenschaft der Kegelschnitte

$$PS \,.\, SL : QS \,.\, SR = PL : MN.$$

Daher ist für jeden so beschriebenen Kreis

$$SC : SL = MN : PL.$$

Da aber für den Krümmungskreis die Punkte $S$ und $P$ zusammenfallen, so ist für ihn speciell

$$PC : PL = MN : PL$$

oder

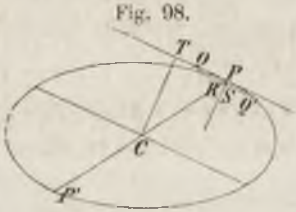
$$PC = MN,$$

d. i. **für einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts ist die Focalsehne der Krümmung derjenigen Focalsehne des Kegelschnitts gleich, welche der Tangente jenes Punktes parallel ist.** (Art. 244, Aufg. 4.)

261. Der Krümmungs-Radius eines Central-Kegelschnitts kann auch noch wie folgt gefunden werden:

Wenn $Q$ (Fig. 98) ein dem Punkte $P$ unendlich naher Punkt der Curve ist, und $QR$ eine Parallele zur Tangente der Curve in $P$ darstellt, welche die dem Punkte $P$ entsprechende Normale in $S$ schneidet, wenn man dann durch die Punkte $P$ und $Q$ einen

Fig. 98.




Kreis beschreibt, welcher die Tangente $PT$ in $P$ berührt, so ist $QS$ eine Ordinate des Kreises für den Durchmesser $PS$ desselben und daher das Rechteck aus diesem Durchmesser und dem Abschnitt $PS$ gleich dem Quadrat über der Sehne $PQ$, oder der Krümmungshalbmesser des Punktes $P$

$$= \frac{PQ^2}{2PS}.$$

Da aber $QR$ stets der Tangente parallel ist, so wird für unendlich nahe benachbarte Punkte $P$ und $Q$

$$PQ = QR\,,$$

und weil nach einer Eigenschaft der Ellipse unter der Voraussetzung, dass $a'$ und $b'$ den dem Punkte $P$ entsprechenden Durchmesser $PP'$ und seinen conjugirten bezeichnen,

$$b'^2 : a'^2 = QR^2 : PR \,.\, RP'$$

$$= QR^2 : 2a' \,.\, PR$$

ist

$$QR^2 = \frac{2b'^2 \,.\, PR}{a'}.$$

Der Krümmungsradius ist demnach

$$= \frac{b'^2}{a'} \cdot \frac{PR}{PS}.$$

Das Verhältniss $\frac{PR}{PS}$ ist aber durch die Aehnlichkeit der Dreiecke $PRS$ und $CPT$ stets

$$= \frac{CP}{CT} = \frac{a'}{p}\,,$$

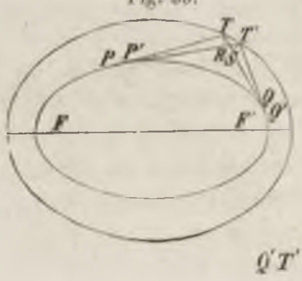
und daher der Krümmungs-Radius endlich

$$= \frac{b'^2}{p}.$$

Es ist nicht schwer, zu beweisen, dass im Durchschnittspunkt zweier confocalen Kegelschnitte das Centrum der Krümmung des einen stets der Pol seiner Tangente in Bezug auf den andern ist.

262. Wenn von einem beliebigen Punkte einer Ellipse an eine confocale Ellipse zwei Tangenten gezogen sind, so ist der Ueberschuss der Summe dieser Tangenten über den zwischen ihren Berührungspunkten enthaltenen Bogen der Ellipse constant.

Fig. 99.




Denn wenn wir einen dem ersten $T$ (Fig. 99) unendlich nahen Punkt $T'$ in der Curve wählen, und die Perpendikel $TR$, $T'S$ fällen, so ist

$$PT = PR = PP' + P'R,$$

weil $P'R$ als die Verlängerung der geraden Linie $PP'$ angesehen werden kann; ebenso

$$Q'T' = QQ' + QS.$$

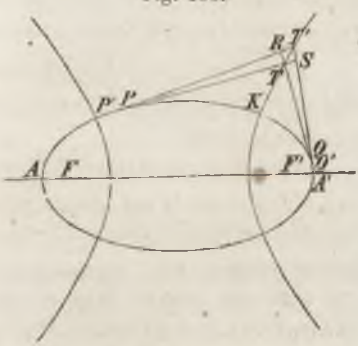
Wegen der Gleichheit der Winkel $TT'R$ und $T'TS$ (Art. 191) ist ferner $TS = T'R$ und daher

$$PT + TQ' = PT' + T'Q'.$$

Also $(PT + TQ) - (P'T' + T'Q') = PP' - QQ' = PQ - P'Q'$. Derselbe Satz gilt für jedes Paar von Curven, welche durch die Eigenschaft verbunden sind, dass die von einem Punkte der äusseren ausgehenden Tangenten $TP$, $TQ$ der innern mit der Tangente $TT'$ der ersteren in jenem Punkte gleiche Winkel bilden.

263. Wenn von einem beliebigen Punkte einer Hyperbel an eine mit ihr confocale Ellipse Tangenten gezogen werden, so ist die Differenz der Bögen $PK$, $QK$ immer gleich der Differenz der Tangenten $TP$ und $TQ$. (Fig. 100.)

Fig. 100.




Man erkennt genau wie vorher, dass

$$(TP' - PK) - (TP - PK) = TR$$

und

$$(T'Q' - Q'K) - (TQ - QK) = T'S = T'R$$

ist, (weil nach Art. 191 $TT'$ den Winkel $RTS$ halbirt).

Somit ist die Differenz zwischen den Ueberschüssen von $TP$ über $PK$ und von $TQ$ über $QK$ constant; und da sie in dem speciellen Falle, in welchem $T$ mit $K$ zusammenfällt, Null ist, weil beide Ueberschüsse selbst Null sind, so muss sie in jedem Falle Null sein, d. h. es ist stets

$$TP - PK = TQ - QK.$$

Der Satz von Fagnano, dass ein elliptischer Quadrant so getheilt werden kann, dass die Differenz seiner Theile der Differenz der Halbachsen der Ellipse gleich ist, folgt unmittelbar aus dem vorigen; denn man hat dazu nur in den Endpunkten der Achsen Tangenten an die Ellipse zu ziehen und durch ihren Durchschnittspunkt eine mit der Ellipse confocale Hyperbel zu legen, dann ist der Punkt $K$, in welchem sie die Ellipse schneidet, der gesuchte Theilpunkt. Seine Coordinaten sind

$$x^2 = \frac{a^3}{a+b},\; y^2 = \frac{b^3}{a+b}.$$

264. Wenn ein Polygon einem Kegelschnitt umschrieben ist und alle seine Eckpunkte bis auf einen sich in confocalen Kegelschnitten bewegen, so beschreibt auch der Ort dieses letzten Eckpunktes einen confocalen Kegelschnitt.

Wir bemerken zuerst, dass, wenn die Spitze $P$ eines einem Kegelschnitt umschriebenen Winkels $PTQ$ (Fig. 100) sich auf einem confocalen Kegelschnitt bewegt, unter der Voraussetzung, dass $a$ und $b$ die zu $TP$ und $TQ$ parallelen Durchmesser und $\alpha$ und $\beta$ die Winkel $TPT'$ und $TQ'T'$ bezeichnen, welche jeder der Schenkel jenes Winkels mit seiner nächstfolgenden Lage bildet, die Relation besteht $$a\alpha = b\beta.$$
Denn nach Art. 263 ist $$TR = T'S.$$

Ferner ist $$TR = TP.\alpha, \quad T'S = T'Q'.\beta$$
und $TP$ und $TQ$ sind den Durchmessern proportional, welchen sie parallel sind.

Wenn umgekehrt die Relation $a\alpha = b\beta$ erfüllt ist, so bewegt sich der Punkt $T$ auf einem confocalen Kegelschnitt; denn indem wir die Aufeinanderfolge der einzelnen Schritte des Beweises umkehren, zeigen wir, dass $TR = T'S$ ist, dass demnach $TT'$ mit $TP$ und $TQ$ gleiche Winkel macht und daher mit der Tangente des confocalen Kegelschnitts in $T$ zusammenfällt, dass also $T'$ in diesem Kegelschnitt liegt.

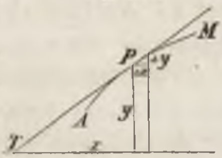
Wenn alsdann die den Seiten des Polygons parallelen Durchmesser durch $a$, $b$, $c$ u. s. w. bezeichnet werden, und $d$ den zur letzten Seite desselben parallelen Durchmesser ausdrückt, wenn ferner $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w., $\delta$ die dem Vorigen analog bezeichneten Winkel sind, so gelten die Relationen
$$a\alpha = b\beta,\ b\beta = c\gamma, \text{ u. s. w.},$$
weil die sämmtlichen Ecken des Polygons bis auf eine sich in confocalen Kegelschnitten bewegen. Aus dieser Kette von Relationen ergiebt sich aber schliesslich $a\alpha = d\delta$, welche anzeigt, dass die letzte Ecke desselben auch einen confocalen Kegelschnitt durchläuft.

265. An diese rein geometrischen Untersuchungen schliessen wir in möglichster Kürze die wesentlichsten Beispiele vom Gebrauch des Differential- und Integral-Calculs, soweit er sich auf die Theorie der Kegelschnitte bezieht. Wir beschrän-

ken uns dabei auf die Untersuchung über die Lage der Tangenten, die Bestimmung des Krümmungskreises und der Flächen und Bogenlängen. Wir stützen uns wesentlich auf den Gebrauch der rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten und wollen nur an einigen Stellen, wo es uns nützlich scheint, auch die Polar-Coordinaten benutzen. Die Kenntniss der Differential- und Integral-Rechnung selbst setzen wir dabei voraus und machen nur auf die grosse Einfachheit aufmerksam, mit welcher die hier gebrauchten Lehren derselben aus den vorhergehenden Untersuchungen über das Unendlichkleine hervorgehen.

266. Ist
$$f(x,y)=o$$
die Gleichung einer Curve $APM$ (Fig. 101) und bezeichnen $x$, $y$ die Coordinaten eines Punktes $P$ in ihr, so ist die Tangente $PT$ derselben in diesem Punkte, als die gerade Verbindungslinie desselben mit dem unendlich nahe gelegenen Punkte $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ in der Curve, durch die Bestimmung gegeben, dass

Fig. 101.




$$\tan PTX = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}}.$$

Werden durch $\xi$, $\eta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes in ihr ausgedrückt, so ist ihre Gleichung

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x),$$

oder
$$\frac{df(x,y)}{dx}(\xi - x) + \frac{df(x,y)}{dy}(\eta - y) = o.$$

Die Gleichung der Normale desselben Punktes ist demnach

$$\frac{df(x,y)}{dx}(\eta - y) - \frac{df(x,y)}{dy}(\xi - x) = o.$$

Für die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o$$

ist
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}$$

und daher die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}(\xi - x),$$

oder mit Hilfe der Gleichung des Kegelschnitts

$$(Bx + 2Cy + E)\eta + (2Ax + By + D)\xi + Dy + Ex + 2F = o.$$

Die Gleichung der Normale ist

$$(Bx + 2Cy + E)\xi - (2Ax + By + D)y + Dy + Ex + 2F = o.$$

Wir bemerken, dass die Gleichung der Tangente auch für schiefwinklige Parallel-Coordinaten dieselbe bleibt.

Wenn die Gleichungen der Curven in den möglichst einfachsten Formen vorausgesetzt werden, also die der Central-Kegelschnitte

in der Form $$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

und die der Parabel in der Form

$$y^2 = px,$$

so ist der Differential-Quotient respective

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2x}{a^2y} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}.$$

und die Gleichung der Tangente

$$b^2x\xi \pm a^2y\eta = a^2b^2 \text{ oder } 2\eta y = p(x + \xi).$$

Aus der ersteren Gleichung erhält man die Gleichung der Asymptoten der Hyperbel, wenn man darin an die Stelle von $\frac{\eta}{b}$ den aus der Gleichung der Curve entnommenen Werth

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\xi^2}{a^2} - 1\right)}$$

substituirt und darnach $\xi = \infty$ voraussetzt. Man erhält so

$$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{\xi^2}\right)} = \frac{a}{\xi},$$

und also $$\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = o,$$

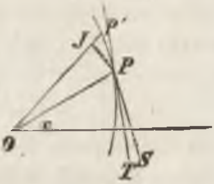
oder $$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

als die Gleichung der Asymptoten.

Die Längen der geradlinigen Strecken, welche in den vorhergehenden Kapiteln als Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale bezeichnet worden sind, können darnach leicht berechnet werden.

267. Beim Gebrauch der Polar-Coordinaten bestimmt sich der Winkel $OPT$ (Fig. 102), welchen die Tangente eines Punktes mit dem Radius vector desselben bildet, aus den Coordinaten $r$ und $\vartheta$ desselben durch die Relation

Fig. 102.



$$\tan OPT = \frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}.$$

Man kann sie leicht aus der Betrachtung des Unendlichkleinen ableiten; denn ist $P'$ ein dem Punkt $P$ nahe benachbarter Punkt, dessen Coordinaten demnach durch $\varrho + \varDelta\varrho$, $\vartheta + \varDelta\vartheta$ bezeichnet werden, und beschreibt man mit dem Halbmesser $OP$ den Kreisbogen $PJ$, so ist in dem Dreieck $P'PJ$

$$\frac{\sin JP'P}{\sin P'PJ} = \frac{PJ}{P'J} = \frac{PJ}{\text{arc.}PJ}\cdot\frac{\text{arc }PJ}{P'J} = \frac{PJ}{\text{arc.}PJ}\cdot\frac{\varrho\varDelta\vartheta}{\varDelta\varrho}.$$

Und wenn man voraussetzt, dass der Punkt $P'$ dem Punkt $P$ unendlich nahe sei, so wird

$$\angle JP'P = \angle OPT,\ \angle P'PJ = 90^0 - \angle OPT \text{ und } PJ = \text{arc. } PJ,$$

som $$\tan OPT = \frac{\varrho d\vartheta}{d\varrho}.$$

Man kann dieselbe Formel auch mit Hilfe der Coordinaten-Transformation ableiten, indem man die Anfangslage des Radius vector zur Achse der $x$ und den Pol zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt.

Wir haben im Art. 195 die Polargleichung der Centralkegelschnitte unter der Voraussetzung, dass der Brennpunkt zum Pol und die grosse Achse als die feste Anfangslage des Radius vector gewählt sei, in der Form

$$\varrho = \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{1 + e\cos\vartheta}$$

gegeben.

Aus derselben folgt

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{2}{p}\cdot\frac{(1 + e\cos\vartheta)^2}{e\sin\vartheta},$$

und daher $$\tan FPT = \frac{1 + e\cos\vartheta}{e\sin\vartheta}.$$

Für $e = 1$ gilt das Resultat für die Parabel, für $e = o$ für den Kreis.

268. Wir setzen voraus, dass man aus der Differential-Rechnung die Theorie der Berührungen der Curven kennt, wie man sie mittels des Satzes von Taylor zu entwickeln pflegt und fordern zur Vergleichung derselben mit der in den Artikeln 241 und 242 gegebenen Theorie der Berührungen der Kegelschnitte auf.

Wenn wir dort gezeigt haben, dass Kegelschnitte mit einander eine Berührung der ersten, der zweiten oder der dritten Ordnung haben können, indess ein Kreis im Allgemeinen nur eine Berührung der zweiten Ordnung mit einem Kegelschnitt haben kann, so bestätigt es diese Theorie; denn damit zwei Curven

$$y = f(x)\,,\; y' = \varphi(x)$$

eine Berührung der zweiten Ordnung mit einander haben, muss für den Berührungspunkt ausser der Gleichheit der Ordinaten der Curven die Gleichheit der ersten und zweiten Differential-Quotienten ihrer Gleichungen stattfinden. Die Curve, welche in einem gegebenen Punkte eine Berührung der zweiten Ordnung mit einem Kegelschnitt haben soll, ist sonach drei Bedingungs-Gleichungen unterworfen. Da die Gleichung eines Kreises nur drei unabhängige Constante enthält, nämlich die Coordinaten seines Mittelpunkts und seinen Halbmesser, so giebt es immer einen und nur einen solchen berührenden Kreis. Weil aber für eine Berührung der dritten Ordnung zu den vorigen Bedingungen noch die der Gleichheit der dritten Differential-Quotienten hinzutritt, so kann ein Kreis den Bedingungen einer Berührung der dritten Ordnung im Allgemeinen nicht genügen. Für die Scheitelpunkte der Curve findet aber eine solche allerdings statt.

Ist
$$y = f(x)$$
die Gleichung der Curve und
$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2.$$
die Gleichung des Kreises, welcher im Punkte $xy$ eine doppelte Berührung mit derselben hat, so gelten zur Bestimmung der Constanten $\xi$, $\eta$, $R$ derselben die Gleichungen

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

$$(x - \xi) + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = o,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = o.$$

Aus ihnen ergiebt sich

$$\eta - y = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \xi - x = \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

also

$$R^2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}, \text{ oder } R = \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

Durch diese Gleichungen sind der Krümmungsmittelpunkt und der Krümmungshalbmesser für einen beliebigen Punkt einer gegebenen Curve vollständig bestimmt.

Wendet man diese Ergebnisse auf die Mittelpunkts-Gleichung der Central-Kegelschnitte an

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

also

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

welches leicht in die früher entwickelten Ausdrücke überzuführen ist, für den Halbmesser des Krümmungskreises, und

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4}x^3 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b^2 - a^2}{b^4}y^3$$

für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes.

Man kann für eine beliebige Curve nach dem *geometrischen Ort aller ihrer Krümmungsmittelpunkte* fragen. Die Erörterungen des Artikels 259 zeigen, dass die Curve, welche dieser Ort repräsentirt, zugleich die *Enveloppe der Normalen der gegebenen Curve* ist, und es liegen somit in diesen beiden Auffassungen zweierlei Wege zu ihrer Untersuchung angedeutet. Wir erörtern im Sinne der Methode des Differential-Calculs nur die erstere an dieser Stelle, zur Ergänzung des Artikels 247, welcher bereits die *Evolute* der Kegelschnitte behandelte.

Um den Ort der Krümmungsmittelpunkte für eine gegebene Curve zu finden, hat man nur zwischen den Gleichungen zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=o,$$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=o$$

und der Gleichung der Curve

$$f(x,y)=o$$

die Veränderlichen $x$ und $y$ zu eliminiren; das Resultat der Elimination ist die Gleichung der Evolute.

Für die Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

erhält man $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$

und damit die Bedingungs-Gleichungen

$$a^4y^3+b^4x^2y-a^2b^4(y-\eta)=o,$$
$$a^2y(x-\xi)-b^2x(y-\eta)=o;$$

die Elimination liefert für $a^2-b^2=c^2$ die Gleichung der Evolute

in der Form $\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

Im Artikel 247 haben wir dieselbe Gleichung unmittelbar aus den Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes abgeleitet.

Die Betrachtung des Unendlichkleinen zeigt sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes, der eine wichtige Eigenschaft der Evoluten überhaupt ausspricht: Die Differenz zwischen irgend zwei Krümmungshalbmessern einer Curve ist dem Bogen der Evolute gleich, welcher zwischen den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten liegt.

269. Während in den bisher untersuchten Fragen die Differential-Rechnung allein zum Ziele führte, so muss sie in den Untersuchungen über Quadratur und Rectification der Curven mit der Integral-Rechnung verbunden werden. Die Betrachtungen der Differential-Rechnung führen nur zur Bestimmung des Flächen-Elements und des Bogen-Elements einer Curve; um daraus die Quadratur oder Rectification derselben zu erhalten, muss man eine Summirung dieser Elemente oder eine Integration vornehmen.

Unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten wird das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten, der Curve und der Achse der $x$ eingeschlossene Flächenelement durch

$$y\,dx$$

repräsentirt; ebenso das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abscissen, der Achse der $y$ und der Curve enthaltene durch

$$x\,dy.$$

Die Integration jenes Ausdrucks zwischen bestimmten Grenzen, d. i. die Summirung aller solcher Flächenelemente zwischen zwei bestimmten Ordinaten, liefert den Inhalt der Fläche, welche von der Abscissen-Achse, von zwei bestimmten Ordinaten und dem zwischen ihnen enthaltenen Bogen der Curve eingeschlossen ist; ebenso die Integration des zweiten Ausdrucks zwischen bestimmten Grenzen den Inhalt der Fläche, welche von der Ordinaten-Achse, von zwei bestimmten Abscissen und dem zwischen ihnen liegenden Curvenbogen enthalten ist. In jedem Falle ist

$$\int x\,dy + \int y\,dx = xy + c.$$

Weil der Inhalt des von zwei Punkten $x'y'$, $x''y''$ mit dem Anfangspunkt der Coordinaten bestimmten Dreiecks durch

$$\tfrac{1}{2}\left[x'(y'-y'') - y'(x'-x'')\right]$$

ausgedrückt wird, so ist er für zwei aufeinanderfolgende Punkte der Curve, d. h. für das von einem Bogenelement derselben mit dem Anfangspunkt der Coordinaten gebildete Dreieck

$$\tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Durch Transformation zu Polar-Coordinaten erhält man daraus den Inhalt eines Elementar-Dreiecks, d. h. den Inhalt des zwischen zwei aufeinander folgenden Radien vectoren und der Curve eingeschlossenen Dreiecks

$$= \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\vartheta,$$

wie auch aus der Betrachtung des Unendlichkleinen alsbald ersichtlich ist.

Wenn in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten und für die Integration des Flächenelements $y\,dx$ innerhalb der Grenzen, zwischen welchen man integrirt, die Ordinate $y$ das Zeichen wechselt, so muss man das Integral in zwei Theile zerlegen, welche durch die Ordinate $o$ oder $\infty$, bei welcher der Zeichenwechsel stattfindet, getrennt sind, um nicht die Differenz zweier Flächeninhalte zu bekommen, deren getrennte Werthe man natürlich zu wissen wünscht.

Die analoge Vorsicht ist in dem Falle der Polar-Coordinaten für die Durchgänge des Radius vector durch die Werthe Null und Unendlich zu beobachten.

Für das **Bogenelement** einer Curve $ds$ ergiebt sich beim Gebrauche rechtwinkliger Coordinaten der Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Daraus folgt durch Transformation oder durch directe Ableitung für Polar-Coordinaten

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2.$$

Wenn wir ferner durch $p$ die vom Anfangspunkt der Coordinaten auf eine Tangente der Curve gefällte Senkrechte bezeichnen, und sie durch den von ihr mit der Achse der $x$ eingeschlossenen Winkel $\vartheta$ ausgedrückt denken (vergl. Art. 179), so erhalten wir in dem durch zwei aufeinander folgende Senkrechte $m'$ der Tangente bestimmten Element

$$p\, d\vartheta$$

das Wachsthum der Summe der Tangente und des Bogens, jene von dem Fusspunkt der Senkrechten bis zum Berührungspunkt, dieser von einem beliebigen festen Punkte der Curve aus gemessen.

270. Wir geben zunächst einige Beispiele von der Quadratur der Curven in rechtwinkligen Coordinaten.

Man soll den Flächeninhalt eines Kreissegments bestimmen.

Die Gleichung des Kreises sei

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Das Flächenelement ist sodann

$$\sqrt{(a^2 - x^2)}\,.\,dx$$

und daher der Inhalt

$$\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = x\sqrt{(a^2 - x^2)} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$= x\sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \int dx \sqrt{(a^2 - x^2)}\,;$$

d. i. $$\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

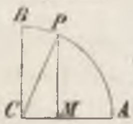
$$= \frac{x}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} + C.$$

Zwischen den Grenzen $x = + a$, $x = - a$ genommen, liefert diess den Inhalt des Halbkreises

$$= \frac{\pi a^2}{2}.$$

Man erkennt in jenem Ausdrucke leicht die Summe des Dreiecks $PCM$ (Fig. 103) und des Sectors $BCP$, denn jenes hat in der That zum Ausdruck seines Inhalts

Fig. 103.




$$x\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{2};$$

demnach ist der Sector

$$= \frac{a^2}{2}\, arc\, \sin \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\, arc\,.\, BM,$$

wie bekannt.

Man soll den Inhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bestimmen.

Das Element desselben ist

$$= \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}\,.\, dx,$$

und daher der Inhalt des zwischen den zur Abscisse Null und der Abscisse $x$ gehörigen Ordinaten gelegenen Flächenstücks

$$u = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx.$$

Für den über der grossen Achse der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreis ist die entsprechende Fläche

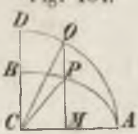
$$u' = \int_0^x \sqrt{(a^2 - x^2)}\, dx$$

und somit $\qquad u : u' = b : a$

(vergl. Art. 255). Daher ist der Inhalt der ganzen Ellipse zu dem des Kreises in demselben Verhältniss.

Dieselbe Figur (Fig. 104) lehrt leicht, dass die Dreiecke $CMP$ und $CMQ$ im Verhältniss $b : a$ stehen und daher wegen $\qquad u : u' = b : a$

Fig. 104.




$$\frac{u - CMP}{u' - CMQ} = \frac{b}{a}$$

oder

$$\frac{\text{Sector } CBP}{\text{Sector } CDQ} = \frac{b}{a},$$

eine Formel zur Berechnung eines elliptischen Sectors.

Aus derselben Betrachtung und der Eintheilung des Kreises in gleiche Sectoren ergiebt sich die Eintheilung der Ellipse in gleiche Sectoren.

271. Welches ist der Inhalt der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

Das Segment $AMP$ ist durch die Formel

$$u = \frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{(x^2 - a^2)}\,dx$$

gegeben.

Man erhält

$$\int\sqrt{(x^2 - a^2)}\,dx = x\sqrt{(x^2-a^2)} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

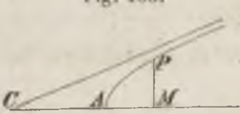
$$= x\sqrt{(x^2-a^2)} - \int\sqrt{(x^2-a^2)}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

somit

$$\int\sqrt{(x^2 - a^2)}\,dx = \frac{x\sqrt{(x^2 - a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{(x^2 - a^2)}\right) + C.$$

Also der Inhalt des hyperbolischen Segments (Fig. 105)

Fig. 105.




$$AMP = \frac{bx\sqrt{(x^2-a^2)}}{2a} - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right).$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Da $\frac{xy}{2}$ die Fläche des Dreiecks $CPM$ ist, so ist

$$\frac{ab}{2}.\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

die Fläche des Sectors $CAP$.

Für die gleichseitige Hyperbel, welche wir durch ihre Asymptotengleichung $xy = a^2$ gegeben denken, ist die Fläche von der Abscisse $x_0$ bis zur Abscisse $x$

$$u = a^2\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = a^2\log\frac{x}{x_0}.$$

Dieser Zusammenhang der Flächen der gleichseitigen Hyperbel mit den natürlichen Logarithmen ihrer Abscissen begründet die Benennung **hyperbolische Logarithmen.** (Vergl. Art. 257.)

272. Welches ist der Inhalt der durch die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = o$$

gegebenen Ellipse?

Wenn wir diese Gleichung für $y$ auflösen, so ergiebt sich ein Ausdruck von der Form

$$y = P \pm \sqrt{Q}.$$

Die Gleichung $$y = P$$

repräsentirt alsdann den Durchmesser, welcher die der Achse der $y$ parallelen Sehne halbirt und das Integral

$$\int P\,dx$$

den Inhalt des Flächenstücks, welches zwischen diesem Durchmesser, jener Achse und der Curve enthalten ist.

Ebenso repräsentirt $$\int (P + \sqrt{Q})\,dx$$

die zwischen dem oberen Zweig der Ellipse und der Achse enthaltene Fläche, und $$\int (P - \sqrt{Q})\,dx$$

die zwischen dem untern Zweig der Curve und der Achse enthaltene Fläche.

Daraus folgt, dass das Flächenelement der Ellipse selbst durch

$$2\sqrt{Q}\,dx$$

dargestellt wird und dass man die ganze Fläche derselben erhält, indem man zwischen denjenigen Werthen von $x$ als Grenzen integrirt, für welche $Q$ verschwindet.

Nun ist $$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\pi a^2}{2},$$

und $$\sqrt{(a + 2bx - cx^2)} = \sqrt{\left(\frac{ac + b^2}{c} - \frac{(cx - b)^2}{c}\right)},$$

somit das $$\int \sqrt{(a + 2bx - cx^2)}\,dx$$

zwischen den Grenzen, für welche das Radical verschwindet,

$$= \frac{\pi(ac + b^2)}{2c^{\frac{3}{2}}}.$$

Durch Vergleichung von $a + 2bx - cx^2$ mit $Q$ und Einführung der daraus entspringenden Werthe für $a$, $b$, $c$ in den vorigen Ausdruck erhält man endlich den fraglichen Inhalt

$$= \frac{\pi(AE^2 + CD^2 + FB^2 - ACF - 2BDE)}{(AC - B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den Kreis, bei welchem $A = C$, $B = o$ ist, liefert diess den Ausdruck

$$\frac{(D^2 + E^2 - AF)}{A^2} \cdot \pi,$$

welcher wegen

$$\frac{D}{A} = -a, \quad \frac{E}{A} = -b, \quad \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$$

in $\pi r^2$ übergeht.

273. Um ein Beispiel von der Anwendung der Polar-Coordinaten zu geben, bestimmen wir den Inhalt des Kreises

$$\varrho^2 - 2c\varrho \cos\vartheta + c^2 - r^2 = o.$$

Nehmen wir den Pol ausserhalb des Kreises gelegen an, so ist das Flächenelement

$$= \tfrac{1}{2} (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\, d\vartheta,$$

wenn $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die beiden dem nämlichen Werth von $\vartheta$ entsprechenden Werthe des Radius vector sind. Wegen

$$\varrho = c \cos\vartheta \pm \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2\vartheta)}$$

ist aber diess Flächenelement

$$= 2c \cos\vartheta \sqrt{(r^2 - c^2 \sin^2\vartheta)}\, d\vartheta.$$

Die Integration zwischen den Grenzen $c \sin\vartheta = \pm r$ giebt endlich den Inhalt $= \pi r^2$.

Wenn der Pol innerhalb des Kreises liegt, so ist das Flächenelement

$$= \tfrac{1}{2} (\varrho_1^2 + \varrho_2^2)\, d\vartheta,$$

oder durch Auswerthung

$$= (r^2 + c^2 \cos 2\vartheta)\, d\vartheta,$$

und die Integration zwischen den Grenzen $o$ und $\pi$ liefert $\pi r^2$, wie vorher.

274. Daran schliessen wir die Anwendung der im Art. 269 entwickelten Principien zur Rectification der Kegelschnitte.

1.) Rectification der Parabel. Weil für die Parabel $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$ ist, so wird das Bogenelement

$$ds^2 = dy^2 \left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)$$

oder

$$ds = \frac{dy}{p} \sqrt{(p^2 + 4y^2)}.$$

Messen wir den Bogen vom Scheitel der Curve an, so ist

$$s = \frac{1}{p} \int_o^y dy \sqrt{(p^2 + 4y^2)}.$$

Man hat aber

$$\int dy\sqrt{(4y^2+p^2)} = y\sqrt{(4y^2+p^2)} - \int\frac{4y^2\,dy}{\sqrt{(4y^2+p^2)}}$$

und $$\int\frac{4y^2\,dy}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} = \int dy\sqrt{(4y^2+p^2)} - p^2\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+p^2)}};$$

endlich $$\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} = \log\left(2y+\sqrt{4y^2+p^2}\right) + C.$$

Folglich:

$$\frac{1}{p}\int dy\sqrt{(4y^2+p^2)} = \frac{y\sqrt{4y^2+p^2}}{p} + \frac{p}{2}\log\left(2y+\sqrt{(4y^2+p^2)}\right) + C.$$

Weil das Integral für $y = o$ den Werth Null haben muss, ist

$$o = \frac{p}{2}\log p + C \text{ oder } C = -\frac{p}{2}\log p.$$

und daher

$$s = \frac{y\sqrt{(4y^2+p^2)}}{p} + \frac{p}{2}\log\left(\frac{2y+\sqrt{(4y^2+p^2)}}{p}\right).$$

Aus der Polargleichung der Parabel

$$\varrho\cos^2\tfrac{1}{2}\vartheta = m$$

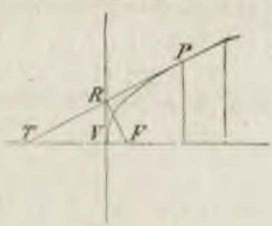
(der Winkel $\vartheta$ wird von der Seite $FV$ her gemessen, Fig. 106) folgt das Bogenelement $ds = \frac{m\,d\vartheta}{\cos^3\frac{1}{2}\vartheta}$,

und somit

$$s = \frac{m\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta} + \frac{m}{2}\int\frac{d\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{m\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta} + a\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{4}\right).$$

Der algebraische Theil dieses Integrals ist augenscheinlich $= PR$, weil $FV = m$ und $\angle RFV = \angle PFR = \frac{1}{2}\vartheta$ ist. Setzt man diesen Winkel $\frac{1}{2}\vartheta = \varphi$ und $FR = p$ so ist $p = \frac{m}{\cos\varphi}$ und $p\,d\varphi$ das Element der Differenz zwischen dem Bogen $PV$ und der Tangente $PR$; man kann daraus das nämliche Ergebniss wiedererhalten.

Fig. 106.




2.) Die Rectification der Ellipse.

Die Substitution $x = a\sin\varphi$ und $y = b\cos\varphi$ giebt für das Bogenelement der durch ihre Mittelpunktsgleichung repräsentirten Ellipse den Ausdruck

$$\sqrt{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi = a\sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)}\,d\varphi.$$

Das Integral $\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)}$,
welches den vom Endpunkt der kleinen Achse aus gemessenen Bogen auswerthet, ist eine transcendente Function, deren Werth nicht in endlicher Gestalt, sondern nur durch Reihenentwickelung angegeben werden kann; man bezeichnet sie als die elliptische Function der zweiten Art. Ihre Auswerthung kann und soll hier nicht näher angegeben werden.

Die in Artikel 269 erläuterte und soeben erinnerte Function $p\,d\vartheta$ liefert, weil $p^2 = a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta$
ist, genau denselben Ausdruck für das Element der Summe des Bogens und der Tangente vom Endpunkt der grossen Achse aus gezählt. Wenn wir also zwei Punkte $x'y'$ und $x''y''$ in der Curve so wählen, dass der Sinus des Winkels, welchen die Senkrechte zur Tangente im Punkte $x'y'$ mit der Achse der $x$ bildet, $= \frac{x''}{a}$ ist, so ist die Summe der Tangente und des Bogens vom Endpunkte der grossen Achse bis zum Punkte $x'y'$ gleich dem vom Endpunkte der kleinen Achse bis $x''y''$ gemessenen Bogen.

Aehnliche Folgerungen ergeben sich aus der Grundformel für die Beziehungen zwischen den elliptischen Functionen der zweiten Art $E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma$,
wo $\cos\sigma = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{(1 - c^2 \sin^2\sigma)}$
ist; es ergiebt sich daraus, was wir bereits rein geometrisch bewiesen, dass unendlich viele Paare elliptischer Bögen aufgefunden werden können, deren Differenz einer geraden Linie gleich ist. (Vergl. Art. 263.)

3.) Rectification der Hyperbel. Auch für die Hyperbel wird die Grösse $p\,d\vartheta = d\vartheta \sqrt{(a^2 - c^2 \sin^2\vartheta)}$,
nur mit dem Unterschiede, dass die Grösse
$$c^2 = a^2 + b^2$$
jetzt grösser ist als $a$, indess sie vorher kleiner war als $a$. Sie wird durch die Substitution $c \sin\vartheta = a \sin\varphi$ auf elliptische Functionen reducirt, denn es ist

$$\frac{a \cos^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{(e^2 - \sin^2\varphi)}} = a e \sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^2}\sin^2\varphi\right)} - \frac{a e\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^2}\sin^2\varphi\right)}}.$$

Demnach wird die Differenz zwischen Bogen und Tangente durch eine elliptische Function der ersten und eine der zweiten Art ausgedrückt, deren gemeinschaftlicher Modulus $= \frac{1}{e}$ ist. Die vollständigen Functionen geben die Differenz zwischen der Asymptote und dem unendlichen hyperbolischen Bogen.

Die Formel, welche drei elliptische Functionen mit gemeinschaftlichem Modulus vergleicht, erlaubt uns auf unendlich vielerlei Arten zwei hyperbolische Bögen zu bestimmen, deren Differenz eine algebraische Grösse ist.

Im Jahre 1780 bewiess Landen, dass der Bogen einer Hyperbel durch zwei elliptische Bögen ausgedrückt werden könne. Dies ist eine unmittelbare Folge der Reductionsformel von Lagrange:

$$b^2 F(c, \varphi) = 2E(c, \varphi) - (2 + 2c) E(c_1, \varphi_1) + 2c \sin \varphi,$$

wo
$$c = \frac{1 - b_1}{1 + b_1}, \tan(\varphi - \varphi_1) = b_1 \tan \varphi_1$$
ist.

---

## Vierzehntes Kapitel.

# Methoden der abgekürzten Bezeichnung. Die trimetrischen Coordinaten-Systeme und das Princip der Dualität.

---

275. Wir haben im Art. 15 gezeigt, dass wir eine Gleichung des $mn^{ten}$ Grades zur Bestimmung der Durchschnittspunkte zweier Curven des $m^{ten}$ und $n^{ten}$ Grades erhalten; und weil eine Gleichung des $mn^{ten}$ Grades immer $mn$ reelle oder imaginäre Wurzeln hat, so erkennen wir, dass eine Curve des $m^{ten}$ Grades eine Curve des $n^{ten}$ Grades in $mn$ reellen oder imaginären Punkten durchschneidet. Zwei Kegelschnitte $S = o$, $S' = o$ durchschneiden einander daher immer in vier reellen oder imaginären Punkten; und (Artikel 36) $S + kS' = o$ ist die Gleichung eines andern Kegelschnitts, der durch diese vier Durchschnittspunkte hindurchgeht.

276. Dies ist übrigens auch dann immer wahr, wenn eine oder beide Grössen $S$, $S'$ in Factoren zerfällbar sind. So ist, wenn $S'$ in Factoren zerfällbar ist, und das Paar der geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$ repräsentirt,

$$S + k\alpha\beta = o$$

offenbar durch die Coordinaten der Punkte befriedigt, in welchen die Linien $\alpha$ oder $\beta$ die Curve $S$ schneiden, und repräsentirt also einen Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte geht, in denen $S$ durch das Paar von geraden Linien geschnitten wird. Es ist daher die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die geraden Linien $\alpha$ und $\beta$ zu seinen Durchschnittssehnen mit $S$ hat. Wenn eine der Geraden $\alpha$ oder $\beta$ den Kegelschnitt $S$ nicht in reellen Punkten durchschneidet, so ist sie immer als eine Sehne des imaginären Durchschnitts zu betrachten und bewahrt manche wichtige Eigenschaften in Beziehung auf die beiden Curven, wie wir es früher in dem Falle des Kreises gesehen haben. (Art. 139.)

Wenn $S$ und $S'$ beide in Factoren zerfallen, so repräsentirt die Gleichung $$\alpha\gamma + k\beta\delta = o$$ den dem Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ umschriebenen Kegelschnitt. (Vergleiche Art. 132.) Es ist offenbar, dass im Vorhergehenden $\alpha$ nicht nothwendig eine gerade Linie bezeichnet, deren Gleichung auf die Form $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ reducirt ist, sondern dass auch $S + LM = o$ (Festsetzung Artikel 52) in gleicher Art einen Kegelschnitt repräsentirt, welcher durch die Punkte geht, in denen die geraden Linien $L$ und $M$ den Kegelschnitt $S$ durchschneiden u. s. w.

*Aufg. 1.* Welches ist die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch die Punkte geht, in welchen ein gegebener Kegelschnitt $S$ die Achsen schneidet?

Hier sind die Achsen $x = o$, $y = o$ die Durchschnittssehnen und die Gleichung muss daher von der Form sein

$$S + kxy = o,$$

wo $k$ unbestimmt ist. (Aufg. 1. Art. 111.)

*Aufg. 2.* Finde die Gleichung des Kegelschnitts, welcher durch fünf gegebene Punkte geht.

Nachdem man die Gleichungen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, den Seiten des durch vier der gegebenen Punkte gehenden Vierecks gebildet hat, weiss man, dass die Gleichung von der Form

$$\alpha\gamma = k\beta\delta$$

sein muss, und indem man in diese Gleichung die Coordinaten des fünften Punktes substituirt, erhält man eine lineare Gleichung zur Bestimmung von $k$.

*Aufg. 3.* Bilde die Gleichung des durch die Punkte (1, 2), (3, 5), (— 1, 4), (— 3, — 1), (— 4, 3) gehenden Kegelschnitts.

Indem wir den Kegelschnitt als einen dem aus den ersten vier Punkten gebildeten Viereck umschriebenen betrachten, erhalten wir seine Gleichung unter der Form

$$(3x - 2y + 1)(5x - 2y + 13) = k(x - 4y + 17)(3x - 4y + 5),$$

und da diese Gleichung überdiess durch die Coordinaten (— 4, 3) des fünften Punktes erfüllt werden muss, so ergiebt sich $k = -\frac{221}{19}$ und darnach durch Einsetzen dieses Werthes und Reduction

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = o$$

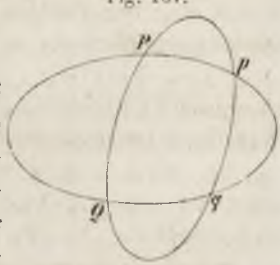
als die verlangte Gleichung.

277. Wir haben gesehen, dass die Gleichung

$$S + k\alpha\beta = o$$

einen durch die vier Punkte $P$, $Q$, $p$, $q$ gehenden Kegelschnitt (Fig. 107) repräsentirt, wo der Kegelschnitt $S$ durch die Geraden $\alpha$, $\beta$ geschnitten wird, und es ist offenbar, dass, je näher beisammen die Linien $\alpha$, $\beta$ sind, desto näher der Punkt $P$ dem $p$ und $Q$ dem $q$ ist. Setzen wir dann voraus, dass die Linien $\alpha$ und $\beta$ zusammenfallen, so fallen die Punkte $P$, $p$; $Q$, $q$ zusammen und der zweite Kegelschnitt berührt den ersten in den Punkten $P$ und $Q$. Wir lernen daraus, dass die Gleichung

Fig. 107.




$$S + k\alpha^2 = o$$

einen Kegelschnitt repräsentirt, der mit $S$ in der gemeinschaftlichen Sehne $\alpha$ eine doppelte Berührung hat. Ebenso repräsentirt $\alpha\gamma + k\beta^2 = o$ einen Kegelschnitt, der die Linien $\alpha$ und $\gamma$ zu Tangenten und $\beta$ zu ihrer Berührungssehne hat, wie wir im Art. 133 gesehen haben.

Die Gleichung $$S + L^2 = o$$
stellt einen Kegelschnitt dar, der mit $S$ in der Sehne $L$ eine doppelte Berührung hat; und $$LN = M^2$$
bezeichnet einen Kegelschnitt, zu welchem $L$ und $N$ Tangenten sind, während $M$ ihre Berührungssehne ist.

Wenn überdies die Linie $\alpha$ eine Tangente zu $S$ ist, so fallen die zwei Punkte $P$ und $Q$ zusammen und der Kegelschnitt $S + k\alpha^2$ hat mit $S$ vier aufeinanderfolgende Punkte gemein und besitzt daher mit ihm eine Berührung dritter Ordnung. So z. B. haben wir in Art. 244 gesehen, dass die Gleichungen zweier Kegelschnitte, die eine Berührung der dritten Ordnung in einem Punkte der Achse der $x$ miteinander haben, von der Form sind
$$S = o \text{ und } S + ky^2 = o.$$

Wir fügen als ein Beispiel der Uebung in dieser symbolischen Ausdrucksweise die folgende Betrachtung hinzu. Wenn
$$A = o,\ B = o,\ C = o,\ D = o,\ E = o,$$
die Gleichungen von fünf geraden Linien repräsentiren, so ist
$$AB = CD$$
die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch die von den Geraden $A$ und $B$ mit den Geraden $C$ und $D$ bestimmten Durchschnittspunkte geht; $AB = E^2$
ist die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die geraden Linien $A$ und $B$ in den Punkten berührt, in welchen sie von der Geraden $E$ geschnitten werden;
$$CD = E^2$$
ist ebenso die Gleichung eines Kegelschnitts, der die Linien $C$ und $D$ in ihren Durchschnittspunkten mit der Geraden $E$ berührt.

Da nun jede dieser Gleichungen die Consequenz der beiden andern ist, so schneiden sich diese drei Kegelschnitte in denselben vier Punkten.

Man denke nun zwei demselben Kegelschnitt $S = o$ eingeschriebene Dreiecke, deren Ecken $A$, $B$, $C$ und $a$, $b$, $c$ sein mögen. Wenn die Seiten $AB$ und $ab$ den Kegelschnitt $S' = o$ berühren, so berühren nach dem Vorigen $Aa$ und $Bb$ einen Kegelschnitt $U = o$, welcher durch die vier Punkte geht, welche den Kegelschnitten $S = o$, $S' = o$ gemeinschaftlich sind. Und wenn $BC$ und $bc$ einen Kegelschnitt $S'' = o$ berühren, welcher durch dieselben vier Punkte geht, so berühren $Bb$ und $Cc$ denselben Kegelschnitt $U = o$. Da endlich $Aa$ und $Cc$ den Kegelschnitt $U = o$ berühren, so berühren $AC$ und $ac$ einen Kegelschnitt $T = o$, welcher durch dieselben vier Punkte geht, in denen $S$ und $S'$ sich schneiden.

278. Die in den vorigen Artikeln gegebenen Gleichungen erfahren wichtige Modificationen, wenn irgend einer der in ihnen

auftretenden Linien in unendlicher Entfernung ist. Es ist in Art. 64 gezeigt worden, dass, wenn eine gerade Linie in unendlicher Entfernung gelegen ist, ihre Gleichung auf das constante Glied reducirt wird. Wenn wir in einer der vorhergehenden Gleichungen für eine der Grössen $\alpha$, $\beta$ u. s. w. eine Constante substituiren, so haben wir die Form, welche die Gleichung annimmt, wenn eine der geraden Linien $\alpha$, $\beta$ u. s. w. in einer unendlichen Entfernung ist.

Wenn wir demnach in der Gleichung

$$LN = M^2,$$

welche einen Kegelschnitt repräsentirt, der von den geraden Linien $L = o$ und $N = o$ in den Punkten berührt wird, die er mit der geraden Linie $M = o$ gemein hat, für $M$ eine Constante $m$ substituiren, so erhalten wir in der Gleichung

$$LN = m^2\cdot$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, der die geraden Linien $L = o$, $N = o$ in ihren unendlich entfernten Punkten berührt, d. h. der diese Linien zu Asymptoten hat. Wenn wir die Linien $L$ und $M$ als Achsen voraussetzen, so dass für $L = o$, $N = o$

$$x = o,\ y = o$$

zu substituiren sind,, so ergiebt sich die wohlbekannte Form der Gleichung eines Kegelschnitts in Bezug auf seine Asymptoten

$$xy = m^2.$$

(Art. 204.) In gleicher Weise bezeichnet

$$lN = M^2,$$

wo $l$ eine Constante ist, einen Kegelschnitt, zu welchem die Gerade $N = o$ eine Tangente ist und $l = o$, die unendlich entfernte gerade Linie, die andere. In dieser Gleichung bilden die höchsten Potenzen der Veränderlichen das vollkommene Quadrat $M^2$ und die Curve ist daher eine Parabel. Umgekehrt hat jede Parabel eine ihrer Tangenten in unendlicher Entfernung. In der That ist die Gleichung, welche die Richtung bestimmt, in welcher die unendlich entfernten Punkte einer Parabel zu suchen sind, ein vollkommenes Quadrat. (Art. 91.) Die zwei Punkte im Unendlichen der Curve fallen daher zusammen und die unendlich entfernte Gerade ist als eine Tangente derselben zu betrachten. (Art. 87.) Auch die Form der Gleichung der Parabel $px = y^2$, welche im XI. Kapitel besonders gebraucht worden ist, zeigt an, dass die gerade Linie im Unendlichen $p = o$ eine Tangente der

Curve, die Linie $x = o$ die andre und der Durchmesser $y = o$ die ihre Berührungspunkte verbindende gerade Linie ist; und allgemein bezeichnet die Gleichung

$$(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = o$$

eine Parabel, von welcher $Dx + Ey + F = o$ eine Tangente und $ax + by = o$ der Durchmesser durch den Berührungspunkt ist.

279. Auf dieselbe Weise schliesst man, dass die Gleichungen

$$S = o, \quad S + lM = o$$

(wo $l$ eine Constante ist) zwei Kegelschnitte repräsentiren, die einander in den zwei endlichen Punkten, welche die Gerade $M = o$ mit ihnen gemein hat, und überdiess in den zwei unendlich entfernten Punkten schneiden, in denen die Gerade $l = o$ sie trifft. In den beiden Gleichungen

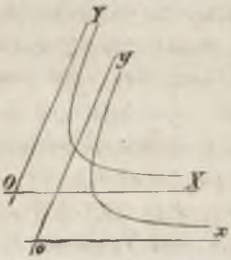
$$S = o, \quad S + lM = o$$

sind aber die Coefficienten von $x^2$, $xy$ und $y^2$ dieselben, und sie repräsentiren daher nach Art. 237 zwei ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte. Wir schliessen daraus, dass zwei ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte einander nur in zwei endlichen Punkten schneiden können, weil sie einander überdiess stets in zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten im Unendlichen schneiden.

280. Wir können zu demselben Schlusse auch in anderer Weise gelangen.

Erstens: Wenn die Curven Hyperbeln sind. Die Asymptoten ähnlicher und ähnlich liegender Hyperbeln sind parallel (Art. 238), d. h. sie schneiden einander in unendlicher Entfernung. Jede Asymptote schneidet aber ihre Curve selbst in ihrem unendlich entfernten Punkte; wir schliessen somit, dass ähnliche und ähnlich gelegene Hyperbeln einander in den zwei unendlich entfernten Punkten begegnen, in denen jede durch ihre Asymptoten geschnitten wird. (Fig. 108.)

Fig. 108.




Zweitens: Wenn die Curven Ellipsen sind. Ellipsen weichen von Hyperbeln nur darin ab, dass sie imaginäre anstatt der reellen Asymptoten haben. Die Lage der unendlich entfernten Punkte zweier ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen werden durch dieselbe Gleichung

$$(Ax^2 + Bxy + Cy = o)$$

(Art. 97 und 237) bestimmt. Obgleich nun die Wurzeln dieser Gleichung in beiden Fällen imaginär sind, so sind es doch in beiden Fällen dieselben imaginären Wurzeln; und wir schliessen daraus, dass zwei ähnliche Ellipsen durch dieselben zwei imaginären, unendlich entfernten Punkte gehen.

Drittens: Wenn die Curven Parabeln sind. Sie werden beide durch die unendlich entfernte gerade Linie berührt. Die Richtung, in welcher der unendlich entfernte Berührungspunkt liegt, ist dieselbe wie die des Durchmessers (Art. 95) und daher für zwei ähnlich gelegene Parabeln die nämliche. (Art. 239.) Also berühren einander zwei ähnlich gelegene Parabeln in ihrem unendlich entfernten Punkte.

281. Aus Art. 254 folgt auch in derselben Weise, dass die Gleichung $S + l^2 = o$, in welcher $l$ eine Constante ist, einen Kegelschnitt repräsentirt, der den Kegelschnitt $S$ in zwei unendlich entfernten Punkten berührt. Wenn aber die Gleichungen zweier Kegelschnitte nur im constanten Gliede differiren, so sind diese letztern, weil die Coordinaten des Centrums $F$ nicht enthalten (Art. 93), concentrisch; und weil die ersten drei Glieder in beiden Gleichungen übereinstimmen, einander ähnlich; die Kegelschnitte $S$ und $S + l^2$ sind daher ähnlich und concentrisch. Und wir lernen, dass ähnliche und concentrische Kegelschnitte als solche zu betrachten sind, die einander in zwei Punkten in unendlicher Entfernung berühren. Diess ist ausserdem deshalb evident, weil wir im letzten Artikel gezeigt haben, dass die beiden Curven durch dieselben zwei Punkte im Unendlichen gehen; denn weil sie dieselben reellen oder imaginären Asymptoten haben, so besitzen sie auch dieselben Tangenten in diesen Punkten.

Wenn die durch $S = o$ und $S + l^2 = o$ dargestellten Curven Parabeln sind, so haben sie in ihrem gemeinschaftlichen unendlich entfernten Punkt eine Berührung der dritten Ordnung, weil die unendlich entfernte gerade Linie beide berührt. Zwei Parabeln, deren Gleichungen nur im constanten Gliede verschieden sind, sind aber einander gleich; denn die Parabeln $y^2 = px$ und $y^2 = p(x+n)$ sind offenbar gleich, und wenn der Ursprung der Coordinaten nach irgend einem andern Punkte verlegt wird, so differiren die Gleichungen immer nur in dem constanten Glied. Wir haben überdiess im Art. 211 gesehen, dass der Ausdruck für den Parameter der Parabel das absolute Glied nicht enthält. Daher sind die Parabeln $S$ und $S + l^2$ einander gleich und wir lernen, dass zwei gleiche und ähnlich gelegene Parabeln als solche betrachtet werden können, die mit einander eine Berührung der dritten Ordnung im Unendlichen haben.

282. Weil alle Kreise als ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen zu betrachten sind, so folgt als ein specieller Fall des letzten Artikels, dass alle Kreise durch dieselben zwei imaginären Punkte im Unendlichen gehen, und dass concentrische Kreise einander in zwei imaginären Punkten in unendlicher Entfernung berühren. Darin erkennen wir den Grund, weshalb Kreise einander nicht in mehr als zwei endlichen Punkten schneiden können, und warum concentrische Kreise sich in keinem endlichen Punkte schneiden, obgleich zwei Curven des zweiten Grades im Allgemeinen vier Punkte mit einander gemein haben.

Im weitern Verfolg dieser Betrachtungen werden wir zeigen, dass die in Art. 138 u. f. begründeten Sätze in Bezug auf Kreise, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, nur specielle Fälle allgemeinerer Lehrsätze sind, in Bezug auf Kegelschnitte, welche dieselben vier Punkte enthalten.

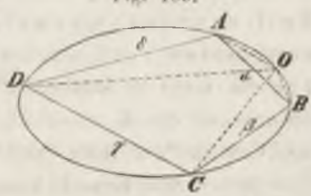
283. Wir bezeichnen ferner in dem Nächstfolgenden einige Schlüsse, welche unmittelbar aus der Interpretation der vorigen Gleichungen mit Hilfe des Art. 27 folgen. So drückt die Gleichung $\alpha\beta = k\gamma^2$ aus, dass das Product der Senkrechten von irgend einem Punkte eines Kegelschnitts auf zwei feste Tangenten desselben zu dem Quadrat der Senkrechten auf ihre Berührungssehne in einem constanten Verhältniss ist.

Die Gleichung $\alpha\gamma = k\beta\delta$,

auf gleiche Weise interpretirt, führt zu dem wichtigen Satz: **Das Product der Senkrechten von irgend einem Punkte eines Kegelschnitts auf zwei Gegenseiten eines demselben eingeschriebenen Vierecks ist zu dem Product der von ihm auf die beiden andern Seiten desselben gefällten Senkrechten in einem constanten Verhältniss.**

Aus dieser Eigenschaft erkennen wir sogleich, **dass das Doppelschnitts-Verhältniss eines Büschels, dessen Strahlen durch vier feste Punkte eines Kegelschnitts gehen, und dessen Scheitel ein veränderlicher Punkt desselben ist, constant bleibt,** während dieser letztere den Kegelschnitt beschreibt. Denn die Senkrechten sind (Fig. 109)

Fig. 109.




$$\alpha = \frac{OA \,.\, OB \,.\, \sin AOB}{AB},$$

$$\gamma = \frac{OC \,.\, OD \,.\, \sin COD}{CD}$$

u. s. w.

Wenn wir nun diese Werthe in die Gleichung

$$\alpha\gamma = k\beta\delta$$

substituiren, so erscheint das Product $OA \,.\, OB \,.\, OC \,.\, OD$ auf beiden Seiten der Gleichung und kann daher unterdrückt werden, so dass man erhält

$$\frac{\sin AOB \,.\, \sin COD}{\sin BOC \,.\, \sin AOD} = \frac{\sin AOB}{\sin AOD} : \frac{\sin COB}{\sin COD} = k \,.\, \frac{AB \,.\, CD}{BC \,.\, AD};$$

aber die rechte Seite dieser Gleichung ist constant, und der links stehende Ausdruck ist das anharmonische oder Doppelschnitts-Verhältniss des Büschels $OA$, $OB$, $OC$, $OD$.

Die Consequenzen dieses Lehrsatzes sind so zahlreich und wichtig, dass wir der ausführlicheren Entwickelung einiger von ihnen einen Abschnitt des nächsten Kapitels widmen wollen.

284. Wenn $S = o$ die Gleichung eines Kreises ist, so bezeichnet nach Art. 88 die Grösse $S$ das Quadrat der von irgend einem Punkte $xy$ an den Kreis gezogenen Tangente; demnach drückt

$$S - k\alpha\beta = o$$

(die Gleichung eines Kegelschnitts, der mit dem Kreise die Durchschnittssehnen $\alpha$ und $\beta$ hat) aus, dass der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat der von ihm an einen festen Kreis gezogenen Tangenten in constantem Verhältniss zu dem Product seiner Entfernungen von zwei festen geraden Linien steht, ein Kegelschnitt ist, welcher durch die vier Punkte geht, in denen die festen geraden Linien den Kreis durchschneiden.

Dieser Lehrsatz ist gleichmässig wahr, welches immer die Grösse des Kreises sei und ob die geraden Linien den Kreis in reellen oder imaginären Punkten schneiden, also auch, wenn der Kreis unendlich klein ist; demnach ist der Ort eines Punktes, für welchen das Quadrat der Entfernung von einem gegebenen festen Punkte zu dem Product seiner Entfernungen von zwei festen geraden Linien in einem constanten Verhältniss ist, ein Kegelschnitt, und die festen Linien können als Sehnen seines imaginären Durchschnitts mit einem unendlich kleinen Kreise betrachtet werden, dessen Centrum der feste Punkt ist.

285. Aehnliche Schlüsse können aus der Gleichung

$$S - k\alpha^2 = o$$

gezogen werden, in welcher $S$ einen Kreis repräsentirt. Wir lernen, dass der Ort eines Punktes, für welchen die von ihm ausgehende Tangente eines festen Kreises in constantem Verhältniss zu seiner Entfernung von einer festen Linie steht, ein Kegelschnitt ist, der den Kreis in den zwei Punkten berührt, wo die feste gerade Linie ihn schneidet. Oder umgekehrt, dass, wenn ein Kreis mit einem Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, die von irgend einem Punkt des Kegelschnitts zu ihm gezogene Tangente zu der Senkrechten vom Punkte auf die Berührungs-Sehne in einem constanten Verhältniss ist.

In dem speciellen Falle, wo der Kreis unendlich klein ist, erhalten wir die fundamentale Eigenschaft des Brennpunkts und der Directrix und schliessen daraus, dass der Brennpunkt eines Kegelschnitts als ein unendlich kleiner Kreis betrachtet werden kann, der den Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten in der Directrix berührt.

286. Wenn in die Gleichung eines Kegelschnitts die Coordinaten eines Punktes substituirt werden, so ist das Resultat der Substitution dem Rechteck proportional, welches die Segmente einer Sehne bilden, die durch den Punkt parallel einer gegebenen Linie gezogen wird*).

Denn nach Artikel 108 ist dies Rechteck

$$= \frac{F'}{A \cos^2\vartheta + B \cos\vartheta \sin\vartheta + C \sin^2\vartheta},$$

wenn man nach Art. 84 durch $F'$ das Resultat der Substitution der Coordinaten des Punktes in die Gleichung bezeichnet; so lange also der Winkel $\vartheta$ constant ist, ist dies Rechteck der Grösse $F'$ proportional. Demnach können wir die letztbewiesenen Sätze auf den Fall ausdehnen, wo $S$ irgend einen Kegelschnitt repräsentirt.

Z. B. Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben, so ist das Quadrat der Senkrechten von einem Punkte des einen auf die Berührungssehne zu dem Rechteck in einem constanten Verhältniss, welches aus den durch den andern Kegelschnitt bestimmten Segmenten der Senkrechten gebildet wird;

oder allgemein: Wenn eine gerade Linie von gegebener Richtung zwei Kegelschnitte in den Punkten $P$, $Q$, $p$, $q$ schneidet und ein Punkt $O$ in ihr so bestimmt wird, dass das Rechteck $OP \cdot OQ$ zu dem Rechteck $Op \cdot Oq$ in einem constanten Verhältniss ist, so ist der Ort von $O$ ein Kegelschnitt, welcher durch die Durchschnittspunkte der gegebenen Kegelschnitte hindurchgeht.

287. Wenn zwei Kegelschnitte jeder eine doppelte Berührung mit einem dritten Kegelschnitt haben, so gehen ihre Berührungssehnen mit dem dritten Kegelschnitt und ein Paar ihrer Durchschnittssehnen mit einander durch denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.

*) Dies gilt für Curven aller Grade.

Wenn wir die Gleichung des dritten Kegelschnitts durch $S = o$ darstellen, so sind die Gleichungen der beiden andern Kegelschnitte $S + L^2 = o$ und $S + M^2 = o$, und wir finden durch Subtraction dieser Gleichungen für die Gleichung der Durchschnitts-Sehnen

$$L^2 - M^2 = o.$$

Somit gehen die Durchschnitts-Sehnen $L - M = o$ und $L + M = o$ durch den Durchschnitt der Berührungs-Sehnen $L = o$, $M = o$ und bilden mit ihnen ein harmonisches Büschel. (Art. 55.)

Es ist wichtig, dass der Anfänger sich die Gewohnheit erwerbe, von der Zahl specieller Sätze Kenntniss zu nehmen, die oft in einer allgemeinen Anzeige eingeschlossen sind; so z. B. bleibt der gegenwärtige Lehrsatz wahr und wird in gleicher Art bewiesen, wenn der Kegelschnitt $S$ sich auf zwei gerade Linien reducirt, d. h. die Berührungs-Sehnen zweier Kegelschnitte mit ihren gemeinschaftlichen Tangenten gehen durch den Durchnittspunkt ihrer gemeinschaftlichen Sehnen.

Wenn ferner $S$ irgend einen Kegelschnitt darstellt, während die durch $S + L^2$, $S + M^2$ dargestellten Linien zweiter Ordnung sich beide auf Paare von geraden Linien reduciren, so bilden diese geraden Linien ein umschriebenes Viereck und die Durchschnitts-Sehnen $(L^2 - M^2)$ sind die Diagonalen dieses Vierecks, während die Berührungs-Sehnen $(L, M)$ offenbar die Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks sind, welches durch die Verbindung der Berührungspunkte gebildet wird. Also gehen die Diagonalen irgend eines eingeschriebenen und des entsprechenden umschriebenen Vierecks durch denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.

Der Inhalt dieses Artikels kann auch so ausgesprochen werden: Wenn ein Kegelschnitt durch zwei gegebene Punkte geht und mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, so geht die Berührungs-Sehne desselben mit dem ersten Kegelschnitt durch einen festen Punkt.

Denn setzen wir irgend einen der Kegelschnitte

$$S + L^2 = o$$

durch die zwei gegebenen Punkte als fest voraus, so ist der Durchschnitt seiner Berührungs-Sehne $(L)$ mit der Verbindungslinie der gegebenen Punkte ein Punkt, durch welchen nach dem gegenwärtigen Artikel jede andre Berührungs-Sehne gehen muss.

In derselben Art schliesst man: Sind zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnitts gegeben, so geht die Berührungs-Sehne durch einen festen Punkt in der Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte.

288. Wenn drei Kegelschnitte mit einem vierten Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, so gehen ihre sechs Durchschnitts-Sehnen zu dreien durch dieselben Punkte; sie bilden nämlich die Seiten und Diagonalen eines Vierecks.

Die Kegelschnitte können durch

$$S + L^2 = o \quad S + M^2 = o \quad S + N^2 = o$$

repräsentirt werden. Alsdann sind nach dem letzten Artikel die Berührungs-Sehnen durch

$$\begin{array}{lll} L - M = o & M - N = o & N - L = o \\ L + M = o & M + N = o & N - L = o \\ L + M = o & M - N = o & N + L = o \\ L - M = o & M + N = o & N + L = o \end{array}$$

dargestellt und der Satz erhellt ohne Weiteres aus dem Ueberblick dieser Gleichungen.

Wie im letzten Artikel können wir daraus specielle Lehrsätze ableiten, indem wir einen oder mehrere der Kegelschnitte in gerade Linien zerfallen lassen.

So z. B. bezeichnet der Kegelschnitt $S$, wenn er in ein Paar gerade Linien zerfällt, zwei gemeinschaftliche Tangenten zu den durch $S + M^2 = o$, $S + N^2 = o$ dargestellten Kegelschnitten; und wenn $L = o$ irgend eine durch den Durchschnitt dieser zwei gemeinsamen Tangenten gehende gerade Linie repräsentirt, so zerfällt der Kegelschnitt $S + L^2 = o$ auch in zwei gerade Linien und repräsentirt zwei Gerade, welche durch den Durchschnittspunkt dieser gemeinschaftlichen Tangenten gehen; d. h. wenn wir durch den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte ein Paar gerade Linien ziehen, so schneiden die die Endpunkte dieser Linien verbindenden Sehnen der Kegelschnitte einander in den gemeinschaftlichen Sehnen derselben. Dies ist die Erweiterung des in Artikel 149 bewiesenen Satzes für Kegelschnitte. Die Tangenten, welche in den Endpunkten dieser geraden Linien an die Kegelschnitte gelegt werden können, schneiden einander in den gemeinschaftlichen Sehnen.

289. Wenn die durch

$$S + L^2 = o,\ S + M^2 = o,\ S + N^2 = o$$

dargestellten Kegelschnitte sämmtlich in Paare von geraden Linien zerfallen, so bilden sie ein den Kegelschnitt $S = o$ umschriebenes Sechseck, die Durchschnittssehnen sind Diagonalen des Sechsecks und der Satz dieses Artikels lautet nach Brianchon: Die drei Gegen-Diagonalen eines Sechsecks, welches einem Kegelschnitt umschrieben ist, durchschneiden sich in einem Punkte.

Unter den Gegen-Diagonalen verstehen wir (unter der Voraussetzung, dass die Seiten des Sechsecks als 1, 2, 3, 4, 5, 6 numerirt sind) die geraden Linien, welche die Ecken (1, 2) mit (4, 5), (2, 3) mit (5, 6) und (3, 4) mit (6, 1) verbinden; indem wir die Ordnung verändern, in der die Seiten gewählt sind, finden wir, dass dieselben geraden Linien eine Anzahl von 60 verschiedenen Sechsecken bilden, für deren jedes der gegenwärtige Ausspruch wahr ist.

Wenn wir zwei Seiten des Sechsecks als unendlich nahe voraussetzen, so entspringt aus diesem Satze eine sehr einfache Construction zur Lösung der Aufgabe: Zu fünf gegebenen Tangenten eines Kegelschnitts den Berührungspunkt einer derselben zu bestimmen, — weil jede Tangente von einer unendlich nahe benachbarten Tangente in ihrem Berührungspunkt geschnitten wird. (Art. 99.)

290. Wenn drei Kegelschnitte eine allen gemeinschaftliche Sehne haben, so gehen drei andere gemeinschaftliche Sehnen derselben durch den nämlichen Punkt.

Sei die Gleichung des einen Kegelschnitts $S = o$ und die der gemeinschaftlichen Sehne $L = o$, so sind die Gleichungen der beiden andern Kegelschnitte von den Formen

$$S + LM = o \text{ und } S + LN = o.$$

Daraus entspringt als die Gleichung ihrer gemeinschaftlichen Sehnen
$$L(M - N) = o,$$
und hier ist $M - N = o$ eine durch den Punkt $(M, N)$ gehende gerade Linie.

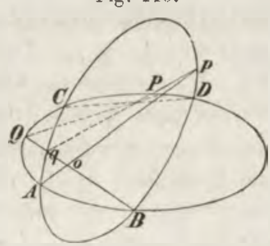
In Uebereinstimmung mit der Bemerkung des Art. 255 erkennen wir dies als eine Ausdehnung des Satzes vom Artikel 141, dass die Radical-Achsen dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden. Denn drei Kreise haben eine allen gemeinschaftliche Sehne (die unendlich entfernte gerade Linie), und die Radical-Achsen sind ihre andern gemeinsamen Sehnen.

Der Inhalt des Artikel 288 kann als eine weitere Verallgemeinerung desselben Satzes betrachtet werden, und man kann von drei Kegelschnitten, welche mit einem vierten Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben können, sagen, dass sie vier Radical-Centra besitzen, in deren jedem drei ihrer gemeinschaftlichen Sehnen sich schneiden.

Der Satz des gegenwärtigen Artikels kann endlich auch nach Analogie von Art. 141 so angezeigt werden: Wenn vier Punkte in einem Kegelschnitt gegeben sind, so geht seine Durchschnitts-Sehne mit einem festen durch zwei dieser Punkte gehenden Kegelschnitt stets durch einen festen Punkt.

Eine Reihe besonderer Schlüsse kann man aus dem Ergebniss des gegenwärtigen Artikels auch dadurch ziehen, dass man einen oder mehrere der Kegelschnitte als in zwei gerade Linien degenerirt voraussetzt. Wenn z. B. einer dieser Kegelschnitte in das Paar der geraden Linien $OA$, $OB$ zerfällt, so erhalten wir den Satz (Fig. 110): Wenn man durch einen der Durchschnittspunkte $A$ zweier Kegelschnitte eine gerade Linie zieht, welche dieselben in den Punkten $P$, $p$ schneidet und durch einen der andern Durchschnittspunkte $B$ eine gerade Linie, die mit ihnen die Punkte $Q$, $q$ gemein hat, so schneiden sich die Linien $PQ$, $pq$ in der andern Durchschnitts-Sehne $CD$.

Fig. 110.



Lassen wir jetzt die Punkte $A$, $B$ zusammenfallen, so berühren sich die zwei Kegelschnitte in $A$ und wir erhalten den Satz: Wenn zwei durch den Berührungspunkt zweier Kegelschnitte gezogene gerade Linien die Curven in den Punkten $PQ$, $pq$ schneiden, so begegnen sich die Sehnen $PQ$, $pq$ in der Durchschnittssehne der Kegelschnitte.

Dies ist ein specieller Fall eines in Artikel 288 gegebenen Satzes, weil der eine Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte unter der Voraussetzung, dass sie sich berühren, sich auf den Berührungspunkt reducirt. (Art. 151.)

291. Die Gleichung der einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte ($\alpha\gamma = k\beta\delta$) liefert uns einen Beweis des Pascal'schen Satzes, dass die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Sechsecks, welches in einen Kegelschnitt eingeschrieben ist, in einer geraden Linie liegen.

Wenn $abcdef$ die Ecken des Sechsecks sind und $ab = o$ die Gleichung der die Punkte $a, b$ verbindenden geraden Linie bezeichnet, so muss die Gleichung des Kegelschnitts, weil er dem Viereck $abcd$ umschrieben ist, in die Form

$$ab \, . \, cd - bc \, . \, ad = o$$

gebracht werden können. Weil er aber auch dem Viereck $defa$ umschrieben ist, so muss dieselbe Gleichung auch fähig sein, in der Form

$$de \, . \, fa - ef \, . \, ad = o$$

ausgedrückt zu werden. Aus der Identität dieser Ausdrücke schliessen wir

$$ab \, . \, cd - de \, . \, fa = (bc - ef)\, ad$$

und erkennen daraus, dass die linke Seite dieser Gleichung, welche nach ihrer Form eine Figur repräsentirt, die den aus den Linien $ab$, $de$, $cd$, $af$ gebildeten Viereck umschrieben ist, in Factoren zerfällt werden kann, welche daher, einzeln gleich Null gesetzt, die Diagonalen dieses Vierecks darstellen müssen; aber $ad = o$ ist offenbar die Diagonale, welche die Ecken $a$ und $d$ verbindet, daher muss $bc - ef = o$ die andre, d. h. die Verbindungslinie der Punkte $(ab, de)$ und $(cd, af)$ sein. Da sie aber nach der Form ihrer Gleichung eine durch den Punkt $(bc, ef)$ gehende gerade Linie bezeichnet, so ergiebt sich, dass diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen.

Wir werden im letzten Kapitel einen andern Beweis dieses wichtigen Satzes geben.

Indem wir zwei Ecken des Hexagons unendlich genähert voraussetzen, können wir zu fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnitts die Tangente in einem dieser Punkte construiren.

292. Wir können, wie in dem Fall des Satzes von Brianchon, eine Anzahl verschiedener Sätze erhalten, welche sich auf dieselben sechs Punkte beziehen, je nach den verschiedenen Ordnungen, in welchen wir diese zählen. So kann die Gleichung des Kegelschnitts, weil er dem Viereck $bcef$ umschrieben ist, in der Form

$$be \,.\, cf - bc \,.\, ef = o$$

geschrieben werden, und aus der Identificirung dieser Form mit der ersten in diesem Artikel gegebenen erhalten wir

$$ab \,.\, cd - be \,.\, cf = (ad - ef)\, bc;$$

woraus wir, wie vorher, schliessen, dass die drei Punkte $(de, cf)$ $(fa, be)$, $(ad, bc)$ in einer geraden Linie liegen, nämlich in der Geraden $ad - ef = o$.

In gleicher Art erfahren wir durch die Identificirung der zweiten und dritten Formen der Gleichung des Kegelschnitts, dass die drei Punkte $(de, cf)$, $(fa, be)$, $(ad, bc)$ in einer geraden Linie liegen, nämlich in derjenigen, welche durch $bc - ad = o$ repräsentirt ist.

Aber die drei geraden Linien

$$bc - ef = o,\; ef - ad = o,\; ad - bc = o$$

schneiden sich in einem Punkte (Art. 37), und wir erhalten so den Satz, dass die drei Pascal'schen geraden Linien, welche erhalten werden, indem man die Ecken des Sechsecks in den respectiven Ordnungen $abcdef$, $adcfeb$, $afcbed$ nimmt, einander in einem Punkte schneiden. *)

293. Im Artikel 61 zeigten wir, dass jede gerade Linie in Bezug auf drei feste gerade Linien in ihrer Ebene, welche durch die symbolischen Gleichungen

$$\alpha = o,\; \beta = o,\; \gamma = o$$

dargestellt sind, durch eine Gleichung von der Form

*) Für einige weitere Entwickelungen über diesen Gegenstand verweisen wir den Leser auf die Note am Ende dieses Bandes.

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

ausgedrückt werden könne.

Es ist sehr leicht, ebenso zu beweisen, dass jeder beliebige Kegelschnitt in der Ebene des durch jene drei geraden Linien gebildeten Fundamentaldreiecks durch die Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

repräsentirt werden kann; denn diese Gleichung ist vom zweiten Grade und enthält fünf unabhängige Constanten, welche wir, wie im Art. 83, so bestimmen können, dass die von der gegebenen Gleichung dargestellte Curve durch fünf bestimmte Punkte geht und daher mit einem gegebenen Kegelschnitt zusammenfällt. Unsere jetzige Gleichung ist ebenso wie die Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = o,$$

mit der sie gleichviel Constanten enthält, geeignet, jeden besonderen Kegelschnitt zu repräsentiren. Ueberhaupt kann die Gleichung einer jeden Curve irgend eines Grades als eine homogene Function der Veränderlichen $\alpha, \beta, \gamma$ dargestellt werden, weil sich leicht zeigen lässt, dass die Zahl der Glieder in der vollständigen Gleichung des $n$ten Grades zwischen zwei Veränlichen die nämliche ist, wie die Anzahl der Glieder in der homogenen Gleichung des $n$ten Grades zwischen drei Veränderlichen.

294. Wir können die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Cartesischen Coordinaten ebenso, wie es im Artikel 67 für die allgemeine Gleichung des ersten Grades geschah, durch die Einführung der Linear-Einheit $z$ und die Substitution von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für $x$ und $y$, homogen machen; die Uebereinstimmung der dadurch erhaltenen Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = o$$

mit der vorigen

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

ist offenbar, und wir erkennen, dass die erstere die Form ist, welche die letztere annimmt, wenn zwei der Fundamentallinien, nämlich $\alpha = o,\ \beta = o$ zu den Achsen der $x$ und der $y$ respective gewählt werden, indess die dritte $\gamma = o$ als in unendlicher Entfernung gelegen vorausgesetzt wird.

An diese Bemerkung knüpfen sich eine Reihe weiterer Ergebnisse, welche von Wichtigkeit sind. Indem wir in der Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

die Substitution $\gamma = o$ vollziehen, erhalten wir offenbar die Gleichung der beiden geraden Linien, welche die Durchschnittspunkte der durch $\gamma = o$ bezeichneten Seite des Fundamentaldreiecks mit dem Kegelschnitt mit dem dieser letztern Seite gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verbinden

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = o.$$

In derselben Art muss uns die Substitution $z = o$ in die erste Gleichung

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = o$$

in

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = o$$

die Gleichung der beiden geraden Linien liefern, welche den Durchschnittspunkt der geraden Linien $x = o$ und $y = o$, d. h. den Anfangspunkt der Coordinaten mit den Punkten der Curve verbinden, welche sie mit der unendlich entfernten geraden Linie gemein hat. Wir vergleeichen damit die Entwickelungen des Art. 89.

Wenn wir unsre allgemeine Gleichung in der Form

$$(A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2) + \gamma(D\alpha + E\beta + F\gamma) = o$$

schreiben, so beweist sie ebensowohl, dass die von ihr repräsentirte Curve durch die Durchschnittspunkte der geraden Linie $\gamma = o$ mit den geraden Linien, welche die Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = o$$

darstellt, hindurchgeht, als auch, dass sie die Durchschnittspunkte dieses nämlichen Linienpaares mit der geraden Linie

$$D\alpha + E\beta + F\gamma = o$$

enthält. Sonach bezeichnet diese letztere Gleichung die 4. Seite eines dem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks, dessen andre drei Seiten die Linie $\gamma = o$ und die beiden Geraden sind, welche die von dieser letzteren in dem Kegelschnitt bestimmten Punkte mit der ihr gegenüberliegenden Ecke des Fundamental-Dreiecks verbinden.

Ebenso ist $$Dx + Ey + F = o$$
die Gleichung der geraden Linie, welche die zwei Punkte eines Kegelschnitts verbindet, die derselbe in endlicher Entfernung mit den beiden geraden Linien gemein hat, welche vom Anfangspunkt der Coordinaten nach seinen unendlich entfernten Punkten gezogen sind.

Die Gleichung einer Curve vom $n$ten Grade kann geschrieben werden $\mu_n + \mu_{n-1} z + \mu_{n-2} z^2 + \mu_{n-3} z^3 + \ldots = o$, indem man durch die Symbole $\mu_n$, $\mu_{n-1}$ $\mu_{n-2}$ u. s. w., die Vereinigung der Glieder bezeichnet, welche vom $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten u. s. w. Grade in den Veränderlichen sind. Die Substitution

$$z = o$$

liefert dann in der Form

$$\mu_n = o$$

die Gleichung der geraden Linien, welche den Anfangspunkt der Coordinaten mit den Punkten verbinden, in denen die Curve von der unendlich entfernten geraden Linie geschnitten wird; die Richtungen, in denen diese Punkte der Curve liegen, findet man also einfach bestimmt durch die mit Null verglichene Summe der Glieder ihrer Gleichung, welche in Bezug auf die Veränderlichen vom höchsten Grade sind.

Wir sahen ferner im Artikel 91, dass die Achse der $x$ eine Curve zweiten Grades in einem unendlich entfernten Punkte schneidet, wenn in ihrer Gleichung $A = o$ ist; jetzt erhalten wir das nämliche Resultat, wenn wir in die allgemeine homogene Gleichung $y = o$ substituiren, denn die daraus hervorgehende Gleichung

$$Dxz + Fz^2 = o$$

sagt aus, dass die Achse die Curve nicht nur in dem endlichen Punkte schneidet, den sie mit der geraden Linie

$$Dx + Fz = o$$

gemein hat, sondern auch in dem unendlich entfernten Punkte, in welchem sie von der unendlich entfernten Graden $z = o$ getroffen wird.

Wenn ebensowohl $A = o$ als auch $D = o$ ist, so sind die Punkte, wo die Achse die Curve schneidet, durch die Gleichung $Fz^2 = o$ gegeben, d. h. die Achse begegnet der Curve in zwei zusammenfallenden Punkten in unendlicher Entfernung oder ist eine Asymptote der Curve.

295. Wir beginnen unsere Beispiele über den Gebrauch dieser punctuellen Dreiecks-Coordinaten mit Entwicklungen über die im Artikel 277 gegebene Gleichung

$$LM = R^2,$$

welche einen Kegelschnitt darstellt, der von den Geraden $L = o$

$M = o$ in den Punkten berührt wird, welche sie mit der geraden Linie $R = o$ gemein haben.

Wir betrachten die geraden Linien $L = o, M = o, R = o$ als die Fundamental-Linien und drücken jede mit dem Kegelschnitt verbundene gerade Linie durch sie aus. Wenn wir nämlich irgend einen Punkt des Kegelschnitts mit dem Eckpunkt des Fundamental-Dreiecks verbinden, in welchem die Seiten $L = o, R = o$ desselben sich schneiden, so kann die gerade Verbindungslinie durch

$$\mu L = R$$

repräsentirt werden. Durch Substitution in die Gleichung der Curve erhält man einerseits

$$M = \mu R,$$

d. i. die Gleichung der geraden Linie, welche den gewählten Punkt der Curve mit dem Eckpunkt

$$M = o,\ R = o$$

des Fundamental-Dreiecks verbindet, andrerseits

$$\mu^2 L = M,$$

d. i. die Gleichung der Verbindungslinie desselben Punktes mit dem durch $\qquad L = o,\ M = o$

bestimmten Eckpunkte.

Je zwei dieser drei Gleichungen

$$\mu L = R,\ M = \mu R,\ \mu^2 L = M$$

bestimmen den Punkt der Curve, den wir daher als den Punkt $\mu$ bezeichnen dürfen. (Vergleiche hierzu Art. 231.)

Nach Artikel 59 können wir nun die Gleichung der geraden Linie bilden, welche die Punkte $\mu$ und $\mu_1$ des gegebenen Kegelschnitts verbindet; sie ergiebt sich als

$$\mu \mu_1 L - (\mu + \mu_1) R + M = o,$$

eine Gleichung, welche ebensowohl durch die Bedingungen

$$\mu L = R,\quad \mu R = M,$$

die dem Punkt $\mu$ entsprechen, als durch die Bedingungen

$$\mu_1 L = R,\quad \mu_1 R = M,$$

welche dem Punkt $\mu_1$ entsprechen, erfüllt wird. Wenn $\mu$ und $\mu_1$ gleich gesetzt werden, so erhalten wir die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts im Punkte $\mu$

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o.$$

Wir schliessen daraus, dass alle die durch eine Gleichung von der Form $\qquad \mu^2 L - 2\mu R + M = o,$

eine Gleichung, in welcher eine unbestimmte Grösse $\mu$ im zweiten Grade enthalten ist, dargestellten geraden Linien einen Kegelschnitt berühren, welcher durch die Gleichung

$$LM = R^2$$

ausgedrückt wird.

296. **Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts durch gerade Linien mit einem fünften verbunden werden, so ist das Doppelschnitts-Verhältniss des entstehenden Strahlenbüschels für alle Lagen des fünften Punktes auf dem Kegelschnitt constant.**

Da man die Gleichung

$$\mu\mu_1 L - (\mu + \mu_1) R + M = o$$

in der Form $\mu_1 (\mu L - R) + (M - \mu R) = o$

schreiben kann, so sind die Gleichungen der vier geraden Linien, welche die festen Punkte $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ in unserem Kegelschnitt mit dem veränderlichen Punkte $\mu$ desselben verbinden, respective

$$\mu_1(\mu L - R) + (M - \mu R) = o,\ \mu_2(\mu L - R) + (M - \mu R) = o,$$
$$\mu_3(\mu L - R) + (M - \mu R) = o,\ \mu_4(\mu L - R) + (M - \mu R) = o,$$

und das anharmonische oder Doppelschnitts-Verhältniss des von ihnen gebildeten Büschels ist nach Art. 55

$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)\ (\mu_3 - \mu_4)}{(\mu_1 - \mu_3)\ (\mu_2 - \mu_4)} \text{ oder } \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_4 - \mu_3},$$

d. h. eine von der Lage des Punktes $\mu$ auf dem Kegelschnitt unabhängige Grösse.

Wir werden zur Abkürzung überall da, wo wir das anharmonische oder Doppelschnitt-Verhältniss des Büschels meinen, welches durch die geraden Verbindungslinien solcher vier festen Punkte eines Kegelschnitts mit einem fünften Punkte desselben gebildet wird, den Ausdruck gebrauchen: das anharmonische (Doppelschnitt-) Verhältniss von vier Punkten eines Kegelschnitts.

297. **Vier feste Tangenten eines Kegelschnitts schneiden eine fünfte Tangente desselben in Punkten, deren anharmonisches oder Doppelschnitt-Verhältniss constant ist, wie auch die letztere liege.**

Zum Beweise nehmen wir an, die vier festen Tangenten seien die in den Punkten $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ gezogenen und die veränderliche Tangente berühre den Kegelschnitt im Punkte $\mu$; das fragliche Doppelschnitt-Verhältniss ist dann das nämliche, wie das der vier geraden Linien, welche den Eckpunkt ($L=o$, $M=o$) des Fundamental-Dreiecks mit den vier Punkten verbinden, in denen die bewegliche Tangente von den vier festen Tangenten geschnitten wird.

Wir erhalten aber aus den Gleichungen zweier dieser Tangenten $\mu^2 L - 2\mu R + M = o$, $\mu_1^2 L - 2\mu_1 R + M = o$; die Gleichung der geraden Linie, welche ihren Durchschnittspunkt mit dem Punkte ($L=o, M=o$) verbindet, durch Elimination von $R$ zwischen denselben; sie ist also

$$\mu\mu_1 L - M = o,$$

und das fragliche Doppelschnitt-Verhältniss ist das der vier geraden Linien $\mu\mu_1 L - M = o$, $\mu\mu_2 L - M = o$, $\mu\mu_3 L - M = o$, $\mu\mu_4 L - M = o$, oder

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_4 - \mu_3},$$

d. i. unabhängig von $\mu$.

Wir sprechen daher in Zukunft in ähnlicher Weise abkürzend wie oben von dem anharmonischen oder Doppelschnitt-Verhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnitts.

Das Vorhergehende lehrt, dass das Doppelschnitt-Verhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnitts mit dem ihrer vier Berührungspunkte identisch ist.

298. Aus dem Umstande, dass die Gleichung der geraden Linie, welche den Punkt $\mu$ mit dem Eckpunkt ($L=o, M=o$) des Fundamentaldreiecks verbindet

$$\mu^2 L - M = o,$$

d. h. in Bezug auf $\mu$ rein quadratisch ist, schliessen wir, dass die Punkte $\mu$ und $-\mu$ immer in einer durch den Punkt ($L=o$, $M=o$) gehenden geraden Linie liegen müssen; dasselbe ergiebt sich auch aus der Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte $\mu\,\mu_1$, wenn wir darin $\mu_1 = -\mu$ substituiren.

In Verbindung mit der Eigenthümlichkeit des Doppelschnitt-Verhältnisses, wornach es sich nicht ändert, wenn die in dasselbe eingehenden Grössen $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$ ihre Vorzeichen wechseln, liefert dies den folgenden wichtigen Satz: W e n n d u r c h e i n e n b e l i e b i g e n P u n k t v i e r g e r a d e L i n i e n g e z o g e n w e r d e n, w e l c h e e i n e n K e g e l s c h n i t t i n P u n k t e n $\mu_1, -\mu_1, \mu_2, -\mu_2, \mu_3, -\mu_3, \mu_4, -\mu_4$ s c h n e i d e n, s o i s t d a s D o p p e l s c h n i t t-V e r h ä l t n i s s v o n i r g e n d v i e r d i e s e r P u n k t e, v o n d e n e n keine zwei derselben Transversale angehören, dem der entsprechenden vier übrigen gleich.

Die Gleichung $$LM = R^2$$
erlaubt uns auch die Untersuchung von Eigenschaften zweier Kegelschnitte bezüglich des Durchschnittspunktes ihrer gemeinsamen Tangenten. Die Gleichungen zweier solchen Kegelschnitte sind
$$LM - R^2 = o, \; LM - R'^2 = o,$$
wenn $$L = o, \; M = o$$
ihre gemeinschaftlichen Tangenten und
$$R = o, \; R_1 = o$$
die entsprechenden Berührungs-Sehnen darstellen.

Wenn wir nun einen Punkt des einen Kegelschnitts als demjenigen des andern entsprechend bezeichnen, mit welchem er in derselben durch den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten gehenden Geraden liegt, so erkennen wir, dass solchen Punkten dasselbe $\mu$ entspricht, aus dem Umstande, dass die Gleichung $$\mu^2 L - M = o,$$
welche ihre Verbindungslinie darstellt, weder $R$ noch $R'$ enthält. Wir wollen ferner Punkte als umgekehrt entsprechend bezeichnen, wenn $\mu$ für beide numerisch gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Darnach nennen wir die Sehne, welche zwei Punkte des einen Kegelschnitts verbindet, derjenigen Sehne des andern entsprechend, welche die entsprechenden Punkte desselben verbindet. Von solchen geraden Linien gilt der Satz:

Entsprechende gerade Linien bei zwei Kegelschnitten schneiden sich in einer der gemeinschaftlichen Sehnen beider Curven. (Art. 288.)

Die gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte
$$LM - R^2 = o, \; LM - R_1^2 = o$$
sind durch die Gleichung $$R^2 - R_1^2 = o$$
repräsentirt; sie sind also die beiden Geraden
$$R + R_1 = o. \; R - R_1 = o,$$
welche mit den beiden Berührungs-Sehnen der gemeinschaftlichen Tangenten ein harmonisches Büschel bilden. In der That schneiden sich die beiden geraden Linien
$$\mu\mu_1 L - (\mu + \mu_1) R + M = o,$$
$$\mu\mu_1 L - (\mu + \mu_1) R_1 + M = o,$$

als welche direct entsprechende Punkte beider Kegelschnitte verbinden, in der geraden Linie

$$R - R_1 = o$$

und die Veränderung der Zeichen von $\mu$ und $\mu_1$ in der einen dieser Gleichungen, als durch welche sie die umgekehrt entsprechenden Punkte verbindet, liefert

$$R + R_1 = o$$

als Gleichung für den Ort ihres Durchschnittspunktes.

Das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten des einen Kegelschnitts ist dem Doppelschnittverhältniss der vier entsprechenden Punkte des andern Kegelschnitts gleich. Dieser nützliche Satz folgt unmittelbar aus dem für das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten gewonnenen Ausdruck, durch die Bemerkung, dass entsprechende Punkte dasselbe $\mu$ haben.

299. Man soll die Gleichung der Polare eines Punktes finden.

Wir nehmen an, die Coordinaten des Punktes lieferten durch Substitution in die Gleichung einer durch ihn gehenden Tangente des Kegelschnitts die Relation

$$\mu^2 L_1 - 2\mu R_1 + M_1 = o.$$

Da nun für den Berührungspunkt die Bedingungen

$$\mu^2 = \frac{M}{L} \text{ und } \mu = \frac{R}{L}$$

erfüllt sind (Art. 295) so genügen die Coordinaten desselben der Gleichung $\quad ML_1 - 2RR_1 + M_1 L = o,$

welche somit die verlangte Gleichung der Polare ist.

Wenn wir einen Punkt durch die beiden Gleichungen

$$aL - R = o,\ bR - M = o$$

ausdrücken, so wird durch dasselbe Verfahren die Gleichung seiner Polare in der Form

$$abL - 2aR + M = o$$

gefunden.

300. Da jedem bestimmten $\mu$ ein bestimmter Punkt des Kegelschnitts entspricht, so liefert eine mathematische Beziehung zwischen den Grössen $\mu$, welche zwei verschiedenen Punkten entsprechen, Paare zusammengehöriger Punkte, welche Anlass geben, einer-

seits nach der Enveloppe der sie verbindenden Sehnen zu fragen, andrerseits den Ort des Durchschnittspunktes der ihnen entsprechenden Tangenten zu bestimmen. Einige einfache Fälle dieser allgemeinen Probleme sind erwähnenswerth.

Wenn z. B. das Product der beiden Grössen $\mu$ gegeben wäre, so dass
$$\mu\mu_1 = a,$$
so liegt nach Artikel 297 der Durchschnittspunkt der ihnen entsprechenden Tangenten in der geraden Linie
$$aL - M = o;$$
und indem man in die Gleichung der beide Punkte verbindenden Sehne $a$ für $\mu\mu_1$ einsetzt, erkennt man, dass diese Sehne stets durch den festen Punkt
$$aL + M = o, \; R = o$$
gehen muss.

Ueberhaupt geht die zwei Punkte $\mu, \mu_1$ verbindende Sehne
$$\mu\mu_1 L - (\mu + \mu_1) R + M = o$$
immer durch denselben Punkt, sobald
$$a\mu\mu_1 - b(\mu + \mu_1) + c = o$$
ist (Art. 50), wo $a$, $b$, $c$ Constanten sind; d. h. wenn
$$\mu_1 = \frac{b\mu - c}{a\mu - b}.$$
Der eben betrachtete Fall entspricht dem $b = o$.

Wenn das Verhältniss der Grössen $\mu$ gegeben ist, so dass
$$\mu_1 = k\mu,$$
so wird die Gleichung der Sehne, welche sie verbindet,
$$k\mu^2 L - (1 + k)\mu R + M = o;$$
diese Sehne berührt daher stets den Kegelschnitt
$$4kLM = (1 + k)^2 R^2. \quad \text{(Art. 295).}$$

In einer mehr symmetrischen Gestalt können wir dies Ergebniss aussprechen, wie folgt: Die Sehne, welche die Punkte $\mu \tan \psi$ und $\mu \operatorname{cotan} \psi$ verbindet, berührt stets den Kegelschnitt $\quad LM \sin^2 2\psi = R^2$ in dem Punkte $\mu$ dieses Kegelschnitts.

In derselben Art kann man zeigen, dass der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten in den Punkten $\mu \tan \psi$ und $\mu \operatorname{cotan} \psi$ der Kegelschnitt
$$LM = R^2 \sin^2 2\psi$$
ist.

301. Da der Ausdruck des Doppelschnittverhältnisses von vier Punkten eines Kegelschnitts unverändert bleibt (Art. 296), wenn jede der in denselben eingehenden Grössen $\mu$ durch $\tan\psi$ oder $\cotan\psi$ multiplicirt wird, so erhalten wir diesen wichtigen Satz: Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben, so ist das Doppelschnittverhältniss von einem der Punkte, in welchem vier Tangenten des einen den andern schneiden, dem Doppelschnittverhältniss der vier andern durch diese Tangenten bestimmten Schnittpunkte und dem Doppelschnittverhältniss ihrer vier Berührungspunkte gleich. Derselbe ist eine Erweiterung des im Artikel 297 enthaltenen ersten Satzes. Oder: Wenn man von vier Punkten des einen von zwei Kegelschnitten, die eine doppelte Berührung mit einander haben, Paare von Tangenten an den andern zieht, so ist das Doppelschnittverhältniss der einen Reihe der Berührungspunkte dem der andern Reihe dieser letztern gleich.

Wenn man in dem Ausdruck für das Doppelschnitt-Verhältniss von vier Punkten für jedes $\mu$ den Werth

$$\frac{a + b\mu}{c + d\mu},$$

wo $a, b, c, d$ constante Grössen sind, substituirt, so bleibt das Doppelschnittverhältniss ungestört, und es ist dies die allgemeinste Substitution, welche ohne Veränderung des Doppelschnittverhältnisses für $\mu$ vollzogen werden kann. Die Sehne, welche die Punkte

$$\mu, \frac{a + b\mu}{c + d\mu}$$

verbindet, umhüllt einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. Denn ihre Gleichung ist

$$\mu(a + b\mu) L - [(a + b\mu) + \mu(c + d\mu)] R + (c + d\mu) M = o,$$

oder

$$(bL - dR)\mu^2 + (aL - bR - cR + dM)\mu + cM - aR = o;$$

diese gerade Linie aber berührt stets einen Kegelschnitt, dessen Gleichung in der Form

$$4(bc - ad)(LM - R^2) + [aL + (b - c)R - dM]^2 = o$$

geschrieben werden kann, und der daher mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat. Für $b = -c$ reducirt sich wie in Art. 300 der Kegelschnitt auf einen Punkt.

Wenn drei Sehnen eines Kegelschnitts $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ gegeben sind, so ist die Enveloppe einer vierten Sehne $DD_1$, welche sich so bewegt, dass das Doppelschnitt-Verhältniss der vier Punkte $ABCD$ dem der Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ immer gleich bleibt, ein Kegelschnitt, der mit dem ersten eine doppelte Berührung hat.

302. Wir wollen hiernach ein Paar Beispiele geben von der Anwendung der vorigen Formeln zur Untersuchung von Aufgaben bezüglich der Lage von Linien. Wir unterdrücken einige Formeln, die sich auf die Grösse von Linien und Winkeln beziehen, deshalb, weil es, was diese betrifft, im Allgemeinen vortheilhafter ist, die gewöhnlichen rectangulären Coordinaten anzuwenden.

*Aufg. 1.* Ein Dreieck ist einem Kegelschnitt umschrieben, zwei seiner Ecken bewegen sich in festen geraden Linien, man soll den Ort der dritten Ecke bestimmen.

Wir wählen die beiden Tangenten des Kegelschnitts, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden festen geraden Linien gehen und die zugehörige Berührungssehne zu Fundamentallinien und drücken die Gleichungen der festen Geraden durch

$$aL - M = o, \quad bL - M = o,$$

die Gleichung des Kegelschnitts durch

$$LM - R^2 = o$$

aus.

Nach Artikel 300 muss aber für die Berührungspunkte zweier Tangenten, welche sich in der geraden Linie

$$aL - M = o$$

schneiden, die Relation $\qquad \mu\mu_1 = a$

bestehen, und wenn also die eine Seite des in der Aufgabe bezeichneten Dreiecks den Kegelschnitt im Punkte $\mu$ berührt, so müssen die beiden andern Seiten die Berührungspunkte $\frac{a}{\mu}$, $\frac{b}{\mu}$, haben und ihre Gleichungen daher sein

$$\frac{a^2}{\mu^2} L - 2\frac{a}{\mu} R + M = o, \quad \frac{b^2}{\mu^2} L - 2\frac{b}{\mu} R + M = o.$$

Aus denselben ergiebt sich durch Elimination von $\mu$ der Ort der dritten Ecke als durch

$$LM = \frac{4ab}{(a+b)^2} R^2$$

repräsentirt; er ist also ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen längs der Linie $R = o$ eine doppelte Berührung hat.

*Aufg.* 2. Die Enveloppe der Basis eines Dreiecks zu finden, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und von welchem zwei Seiten durch feste Punkte gehen.

Wir nehmen die gerade Verbindungslinie der festen Punkte zur Fundamentallinie $R = o$ und die ihr als Berührungssehne entsprechenden Tangenten des Kegelschnitts zu den beiden andern Fundamentallinien

$$L = o, \ M = o,$$

so dass die Gleichung des Kegelschnitts

$$LM = R^2$$

ist; dann können die Gleichungen der geraden Linien, welche die beiden festen Punkte der Aufgabe mit dem Eckpunkt ($L = o$, $M = o$) des Fundamentaldreiecks verbinden, durch

$$aL + M = o, \ bL + M = o$$

dargestellt werden.

Wir wissen aus Artikel 300, dass für die Endpunkte jeder Sehne, welche durch den festen Punkt

$$(aL + M = o, \ R = o)$$

geht, die Relation $$\mu \mu_1 = a$$
gelten muss; wenn also $\mu$ die Spitze des Dreiecks bezeichnet, so müssen $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{b}{\mu}$ dessen Basisecken sein, und die Gleichung der Basis ist daher nothwendig $$ab L - (a + b) \mu R + \mu^2 M = o;$$
nach Artikel 295 umhüllt dieselbe den Kegelschnitt

$$LM = \frac{(a + b)^2}{4ab} R^2,$$

der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung längs der Verbindungslinie der gegebenen Punkte hat.

*Aufg.* 3. Man soll in einen Kegelschnitt ein Dreieck einschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Wenn zwei der Punkte, wie im letzten Beispiele vorausgesetzt sind, so muss die Gleichung der Basis

$$ab L - (a + b) \mu R + \mu^2 M = o$$

sein. Damit diese Linie durch den festen Punkt

$$cL - R = o, \ dR - M = o$$

gehe, muss die Relation

$$ab - (a + b) \mu c + \mu^2 cd = o$$

erfüllt sein, welche hinreicht, $\mu$ zu bestimmen.

Da für den Punkt $\mu$ die Gleichungen gelten

$$\mu L = R, \ \mu^2 L = M,$$

so genügen seine Coordinaten der Gleichung

$$ab L - (a + b) cR + cd M = o,$$

und die Aufgabe nimmt somit zwei Auflösungen an, weil jeder der beiden Punkte, in welchen diese gerade Linie die gegebene Curve schneidet, zur Spitze des geforderten Dreiecks gewählt werden kann.

Obgleich die gegebene Auflösung algebraisch vollständig ist, hat sie doch den Mangel, dass sie nicht einfach genug zeigt, wie die gerade Linie geometrisch construirt werden kann, deren Gleichung so eben angegeben worden ist; es ist aber nichts weiter als eine nützliche Uebung im Gebrauch der vorhergehenden Formeln, die folgende Methode der Construction zu beweisen, welche wir überdies im folgenden Kapitel aus andern Betrachtungen abzuleiten gedenken: Man bilde das Dreieck, dessen Seiten die Polaren der drei gegebenen Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind, verbinde jeden dieser Punkte mit der Ecke des letztern Dreiecks, welche der zugehörigen Polare gegenüber liegt; die gerade Verbindungslinie der Punkte, in welcher zwei von diesen die Gegenseite des Polardreiecks schneiden, ist die verlangte Gerade.

Die drei gegebenen Punkte mögen respective bestimmt sein durch

$$aL + M = o,\ R = o;\ bL + M = o,\ R = o;\ cL - R = o,$$
$$dR - 2M = o;$$

ihre Polaren sind alsdann

$$aL - M = o,\ bL - M = o,\ cdL - 2cR + M = o.$$

Die drei geraden Verbindungslinien der Construction haben die Gleichungen

$$b\,(a + cd)\,L - 2c\,(a + b)\,R + (a + cd)\,M = o,$$
$$a\,(b + cd)\,L - 2c\,(a + b)\,R + (b + cd)\,M = o,$$
$$cdL - M = o.$$

Die gerade Linie, welche wir zu construiren wünschen, geht durch den Durchschnittspunkt der ersten von diesen Geraden mit der Linie

$$bL - M = o$$

und durch den der zweiten mit

$$aL - M = o.$$

*Aufg. 4.* Die Erzeugungs-Methode der Kegelschnitte von Mac-Laurin. Die drei Seiten eines Dreiecks drehen sich um feste Punkte, indess zwei seiner Ecken gerade Linien durchlaufen; alsdann beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt.

Das durch die gegebenen Punkte gebildete Dreieck sei das Fundamentaldreieck $L$, $M$, $N$, die zwei gegebenen geraden Linien seien durch die Gleichungen 1.) $L + aM + bN = o$,

2.) $L + a'M + b'N = o$,

und die Basis des veränderlichen Dreiecks durch die Gleichung

3.) $L = \mu M$

repräsentirt.

Wenn wir diesen Werth von $L$ in die Gleichung 1.) substituiren, so erhalten wir die Gleichung der geraden Verbindungslinie des Punktes (1, 3) mit dem Punkte $(M = o,\ N = o)$:

$$(\mu + a)\,M + bN = o.$$

Ebenso ergiebt sich die Gleichung der geraden Linie, welche den Punkt (2, 3) mit dem Punkt ($L = o$, $N = o$) verbindet:

$$(\mu + a')\, L + \mu b' N = o.$$

Und indem wir zwischen den beiden letzten Gleichungen $\mu$ eliminiren, erhalten wir die Gleichung des Ortes

$$a' L M = (a M + b N)(L + b' N).$$

Der Ort ist somit ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte

$$L = o,\ N = o;\ M = o,\ N = o;\ L = o,\ L + a M + b N = o;$$
$$M = o,\ L + a' M + b' N = o$$

geht.

*Aufg.* 5. Die Basis eines Dreiecks berührt einen gegebenen Kegelschnitt, ihre Endpunkte bewegen sich in zwei festen Tangenten desselben, während die beiden andern Seiten des Dreiecks durch feste Punkte gehen; welches ist der Ort seiner Spitze?

Wir repräsentiren die beiden festen Tangenten durch $L = o$, $M = o$ und den Kegelschnitt durch $L M = R^2$. Alsdann hat der Durchschnittspunkt der Linie $L = o$ mit irgend einer andern Tangente

$$\mu^2 L - 2 \mu R + M = o$$

seine Coordinaten $L$, $R$, $M$ respective zu den Grössen 0, 1, $2\mu$ proportional und die Gleichung der geraden Linie, welche diesen Punkt mit dem festen Punkt $L_1$, $M_1$, $R_1$ verbindet, ist nach Artikel 59

$$L M_1 - L_1 M = 2\mu (L R_1 - L_1 R)$$

Ebenso ist die Gleichung der Verbindungslinie des festen Punktes $L_2$, $M_2$, $R_2$ mit dem Punkte 2, $\mu$, $o$, in welchem dieselbe Tangente die gerade Linie $M = o$ schneidet,

$$2 (R M_2 - R_2 M) = \mu (L M_2 - L_2 M).$$

Durch Elimination von $\mu$ wird daher der Ort der Spitze gefunden als repräsentirt durch

$$(L M_1 - L_1 M)(L M_2 - L_2 M) = 4 (L R_1 - L_1 R)(R M_2 - R_2 M).$$

d. h. als ein durch die beiden festen Punkte gehender Kegelschnitt.

*Aufg.* 6. Wenn in dem letzten Beispiel die Endpunkte der Basis statt in zwei festen Tangenten des gegebenen Kegelschnitts allgemeiner in einem Kegelschnitt liegen, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat, so ist der Ort der Spitze unter der Voraussetzung zu finden, dass dieser Kegelschnitt auch die beiden festen Punkte enthalte.

Wir repräsentiren die beiden Kegelschnitte durch die Gleichungen

$$LM - R^2 = o, \quad LM - \frac{R^2}{\sin^2 2\varphi} = o;$$

eine Tangente des letzteren im Punkte $\mu$ schneidet nach Art. 300 den ersteren in den Punkten

$$\mu \tan \varphi \text{ und } \mu \operatorname{cotan} \varphi,$$

und wenn die festen Punkte durch $\mu_1$, $\mu_2$ gegeben sind, so sind die Gleichungen der Seiten

$$\mu\mu_1 \tan \varphi\, L - (\mu_1 + \mu \tan \varphi)\, R + M = o,$$
$$\mu\mu_2 \operatorname{cotan} \varphi\, L - (\mu_2 + \mu \operatorname{cotan} \varphi)\, R + M = o;$$

aus ihnen geht durch Elimination von $\mu$ die Gleichung des gesuchten Ortes hervor

$$(M - \mu_1 R)\,(\mu_2 L - R) = \tan^2\varphi\,(M - \mu_2 R)\,(\mu_1 L - R).$$

303. Eben so, wie wir in dem Vorigen die Gleichung

$$LM = R^2$$

näher untersucht haben, wollen wir nun die Gleichung

$$L^2 + M^2 - R^2 = o$$

etwas genauer betrachten. Zunächst gestattet auch sie die Bestimmung eines Punktes der Curve durch eine einzige Veränderliche; wir können voraussetzen,

$$L = R \cos \varphi, \quad M = R \sin \varphi,$$

denn durch diese Substitutionen wird der gegebenen Gleichung genügt; die Grösse $\varphi$ bestimmt einen Punkt der durch diese letztere Gleichung gegebenen Curve zweiter Ordnung.

Alsdann erhalten wir die Gleichung der Sehne, welche zwei Punkte der Curve $\varphi$ und $\varphi'$ verbindet, in der Form

$$L \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + M \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = R \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

(Vergleiche die Artikel 233, Aufg. 2 und 129.) Die Gleichung der Tangente im Punkte $\varphi$ hat demnach die Form

$$L \cos \varphi + M \sin \varphi = R.$$

304. Die eigenthümliche Beziehung, welche der durch die Gleichung $L^2 + M^2 = R^2$ dargestellte Kegelschnitt zu dem Fundamentaldreieck $L = o$, $M = o$, $R = o$ hat, drücken wir in dem Satze aus: In Bezug auf den durch die Gleichung

$$L^2 + M^2 - R^2 = o$$

dargestellten Kegelschnitt ist jede der geraden Linien $L = o$, $M = o$, $R = o$ die Polare des Punktes, in welchem die beiden andern sich schneiden. Denn diese Gleichung kann in jeder der Formen geschrieben werden

$$L^2 = R^2 - M^2, \qquad M^2 = R^2 - L^2, \qquad R^2 = M^2 + L^2,$$

oder

$$L^2 = (R+M)(R-M), M^2 = (R+L)(R-L), R^2 = (L+M\sqrt{-1})(L-M\sqrt{-1}),$$

Formen, durch welche die Interpretation der Gleichung $LM = R^2$ auf dieselbe übertragen wird. Nach ihr sagt die erste dieser Formen aus, dass die geraden Linien

$$R + M = o, \; R - M = o,$$

welche sich in der Ecke $R = o$, $M = o$ des Fundamentaldreiecks schneiden und den an dieser Ecke liegenden Winkel desselben halbiren, Tangenten des betrachteten Kegelschnitts sind, denen die gerade Linie $L = o$ als Berührungssehne entspricht; oder der Punkt $R = o$, $M = o$ ist der Pol der Linie $L = o$.

Ebenso lehrt die zweite Form, dass die geraden Linien

$$R + L = o, \; R - L = o$$

die der Berührungssehne $M = o$ entsprechenden Tangenten der Curve sind, d. i. dass der Punkt

$$R = o, \; L = o$$

der Pol der Geraden $M = o$ ist.

Für die dritte Form sind die imaginären geraden Linien

$$L + M\sqrt{-1} = o, \; L - M\sqrt{-1} = o,$$

welche sich in dem reellen Punkt $L = o$, $M = o$ durchschneiden, Tangenten und die Linie $R = o$ ist ihre Berührungssehne; der Punkt $L = o$, $M = o$ ist also noch immer der Pol der Geraden $R = o$, nur dass er innerhalb des Kegelschnitts liegt, sodass von ihm aus keine reellen Tangenten an denselben gezogen werden können.

Man erkennt in derselben Art, dass die Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = \gamma^2$$

einen Kegelschnitt ausdrückt, in Bezug auf welchen der Punkt $\alpha = o$, $\beta = o$ der Pol der geraden Linie $\gamma = o$ ist; denn die linke Seite dieser Gleichung kann in ein Product zweier linearen Factoren aufgelöst werden, welche zwei durch jenen Punkt gehende gerade Linien repräsentiren.

305. Wenn die Gleichung eines Kegelschnitts in Bezug auf zwei durch den Brennpunkt gelegte rechtwinklige Achsen $x = o$ und $y = o$ die Form

$$x^2 + y^2 = e^2\gamma^2$$

besitzt, in welcher $\gamma = o$ die Gleichung der Directrix bezeichnet, so erkennt man, dass diese Gleichung ein specieller Fall der von uns eben untersuchten allgemeinen Gleichung

$$L^2 + M^2 = R^2$$

ist. Deshalb gestattet uns diese Gleichung die allgemeinen Eigenschaften der Brennpunkte abzuleiten und führt uns leicht und schnell zu einer Definition derselben, welche das Wesen und die Charakteristik derselben deutlich ausdrückt.

Die Form der Gleichung

$$x^2 + y^2 = e^2\gamma^2$$

zeigt, dass der Brennpunkt $x = o$, $y = o$ der Pol der Directrix $\gamma = o$ ist und dass die Polare eines Punktes der Directrix senkrecht zu der geraden Linie ist, die ihn mit dem Brennpunkt verbindet (Art. 194); denn die gerade Linie $y = o$, die Polare des Punktes $x = o$, $\gamma = o$, ist zu der Linie $x = o$ senkrecht, als welche jede durch den Brennpunkt gezogene gerade Linie gewählt werden kann.

Die beiden durch die Gleichung $x^2 + y^2 = o$ dargestellten imaginären geraden Linien sind Tangenten, welche durch den Brennpunkt an die Curve gelegt sind, da diese Linien aber von der Lage der Directrix $\gamma = o$ offenbar völlig unabhängig sind, so erkennen wir, dass alle Kegelschnitte, welche denselben Brennpunkt haben, zwei durch diesen Brennpunkt gehende gemeinschaftliche imaginäre Tangenten besitzen. In Folge dessen können Kegelschnitte, welche beide Brennpunkte gemein haben, als demselben Viereck eingeschrieben betrachtet werden, denn sie haben vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten.

Die imaginären Tangenten

$$x^2 + y^2 = o$$

durch den Brennpunkt sind dieselben geraden Linien, welche nach den unendlich entfernten imaginären Punkten eines Kreises gezogen werden können. (Vergleiche Art. 282.) Wir erhalten dadurch diese allgemeine Definition der Brennpunkte, welche bei spätern Untersuchungen, insbesondere auch in der Theorie der algebraischen Curven höherer Ordnungen, von sehr nützlichem Gebrauch ist: Wenn man durch jeden der beiden unendlich entfernten imaginären Punkte in einem Kreise Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt legt, so bilden dieselben ein Viereck mit zwei reellen und zwei imaginären Eckpunkten; jene sind die Brennpunkte der Curve, und diese können als imaginäre Brennpunkte derselben bezeichnet werden.*)

306. Die durch den Punkt $\gamma = o$, $x = o$ an die Curve gezogenen Tangenten sind durch die Gleichungen

$$e\gamma + x = o,\; e\gamma - x = o$$

dargestellt und werden für die Parabel, für welche $e = 1$, $\gamma + x = o$, $\gamma - x = o$, zu den beiden Halbirungslinien des von den Geraden $\gamma = o$, $x = o$ gebildeten Winkels; wir schliessen daraus, dass die Tangenten, welche von einem Punkte der Directrix an eine Parabel gezogen werden können, rechtwinklig zu einander sind.

Die allgemeine Substitution, welche wir bei der Gleichung $L^2 + M^2 - R^2 = o$ benutzten, geht für die hier betrachtete Gleichung

$$x^2 + y^2 = e^2\gamma^2$$

in die folgende über

$$x = e\gamma \cos\varphi,\quad y = e\gamma \sin\varphi,$$

d. h

$$\frac{x}{y} = \tan\varphi,$$

so dass $\varphi$ den Winkel ausdrückt, welchen irgend ein Radius vector mit der Achse der $x$ einschliesst.

Darnach ist die Gleichung der Sehne, welche zwei Punkte $\varphi$ und $\varphi'$ verbindet,

$$x \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = e\gamma \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi').$$

Setzen wir voraus, dass diese Sehne vom Brennpunkte aus immer unter einem constanten Winkel gesehen werde, oder dass $\varphi - \varphi$ constant sei, so umhüllt sie nothwendig den Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 = e^2\gamma^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi'),$$

welcher mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Directrix gemeinschaftlich hat.

---

*) Man kann diese Definition auch so aussprechen: Wenn unter den Tangenten, die man von einem Punkte aus an eine Curve ziehen kann, wenigstens zwei sind, welche mit der Achse der $x$ und in Folge dessen mit einer beliebigen Geraden (Art. 41) Winkel bilden, deren Tangenten $\pm\sqrt{-1}$ sind, so ist dieser Punkt ein Brennpunkt der Curve.

307. Die gerade Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten, deren Berührungspunkte durch die Winkel $\varphi$, $\varphi'$ bestimmt sind, ergiebt sich durch die Subtraction der Gleichungen

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - e\gamma = o,$$
$$x \cos\varphi' + y \sin\varphi' - e\gamma = o$$

in der Form $x \sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') - y \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = o$; da dies die Gleichung einer geraden Linie ist, welche mit der Achse der $x$ einen Winkel $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ bildet, so halbirt sie den Winkel zwischen den Radien vectoren der Berührungspunkte.

Die gerade Linie, welche den Brennpunkt mit demjenigen Punkte verbindet, in welchem die Berührungssehne die Directrix schneidet, hat die Gleichung

$$x \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') + y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = o,$$

und ist somit zu der vorigen rechtwinklig. (Art. 194, Aufg. 2.)

Es ist leicht, mit diesen Formeln den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten zu finden, deren Berührungssehne vom Brennpunkte aus unter einem gegebenen Winkel $2\delta$ gesehen wird; eine Elimination, welche mit der in der 1. und 2. Aufgabe des Art. 129 übereinstimmt, liefert die Gleichung desselben

$$(x^2 + y^2) \cos^2\delta = e^2\gamma^2;$$

er ist also ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen den Brennpunkt und die Directrix gemein hat und dessen Excentricität $= \frac{e}{\cos\delta}$ ist.

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Parabel ist, so ist in unserm Falle auch der Winkel zwischen den Tangenten bestimmt, denn die Tangente $x\cos\varphi + y\sin\varphi - \gamma = o$ halbirt den von $x\cos\varphi + y\sin\varphi = o$ und $\gamma = o$ gebildeten Winkel; somit ist der Winkel zwischen den Tangenten die Hälfte des Winkels, welchen die geraden Linien

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = o \quad \text{und} \quad x\cos\varphi' + y\sin\varphi' = o$$

mit einander bilden, oder $= \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$, d. h. d e r v o n z w e i T a n g e n t e n e i n e r P a r a b e l g e b i l d e t e W i n k e l i s t d i e H ä l f t e d e s j e n i g e n, u n t e r w e l c h e m d i e z u g e h ö r i g e B e r ü h r u n g s s e h n e v o m B r e n n p u n k t a u s g e s e h e n w i r d, u n d d e r O r t d e s D u r c h s c h n i t t s p u n k t e s d e r T a n g e n t e n e i n e r P a r a b e l, d i e e i n e n g e g e b e n e n W i n k e l b i l d e n, i s t e i n e H yperbel, welche mit ihr Brennpunkt und Directrix gemein hat und deren Excentricität die Secante des gegebenen Winkels oder deren Asymptotenwinkel das Doppelte desselben ist. (Art. 167.)

308. Wir haben im Artikel 295 gesehen und mehrfache Anwendungen bereits davon gemacht, dass die durch die Gleichung

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

dargestellte gerade Linie stets die Curve

$$LM = R^2$$

berührt.

Wenn wir bemerken, dass die Gleichung

$$\mu\mu_1 L - (\mu + \mu_1) R + M = o$$

durch alle die Punkte erfüllt werden muss, welche den Gleichungen

$$\mu L - R = o\,, \quad \mu R - M = o,$$

oder denen $\mu_1 L - R = o\,, \quad \mu_1 R - M = o$

genügen, und dass sie daher die Gleichung einer Linie ist, welche durch die Punkte geht, in denen die Linien $\mu L - R = o$ und $\mu_1 L - R = o$ die durch

$$LM - R^2 = o$$

dargestellte Linie schneiden, so erkennen wir, dass die Linie

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

ganz allgemein die Linie

$$LM - R^2 = o$$

in den Punkten berührt, in denen diese letztere von $\mu L - R = o$ geschnitten wird, gleichviel, ob $L = o$, $M = o$, $R = o$ gerade Linien darstellen, oder nicht.

Aehnliche Bemerkungen lassen sich auf die Gleichung

$$L \cos\varphi + M \sin\varphi = R$$

anwenden, welche jedoch auf die vorige reducirt werden kann, indem man $\tan \frac{1}{2}\varphi = \mu$ substituirt; denn dann ist

$$\cos\varphi = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2\mu}{1 + \mu^2}$$

und durch die Einführung dieser Werthe erhalten wir eine Gleichung, in welche $\mu$ nur im zweiten Grade eingeht.

Wenn daher die Aufgabe gestellt ist, eine Curve zu bestimmen, die von einer veränderlichen Linie fortwährend berührt wird, so haben wir nur die Gleichung derselben so zu bilden, dass sie eine einzige unbestimmte Grösse enthält und wenn diese nur im zweiten Grade darin auftritt, so kann die Enveloppe stets wie oben gefunden werden. Wenn die veränderliche Linie zwei unbestimmte Grössen in ihrer Gleichung enthält, so kann die Enveloppe derselben in der nämlichen Art gefunden werden, vorausgesetzt, dass jene unbestimmten Grössen durch eine gegebene Relation vereinigt sind, weil mit Hilfe dieser letztern stets eine der beiden unbestimmten Grössen durch Elimination entfernt werden kann.

*Aufg. 1.* Man soll die Enveloppe einer geraden Linie bestimmen, die sich so bewegt, dass das Product ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten constant bleibt.

Wir wählen die Verbindungslinie der beiden festen Punkte und die in der Mitte derselben zu ihr errichtete Senkrechte zu Coordinatenachsen, so dass die festen Punkte durch $y = o$, $x = \pm c$ bestimmt sind; die veränderliche gerade Linie sei durch $y - mx + n = o$ dargestellt, so liefern die Bedingungen der Aufgabe die Relation

$$(n + mc)(n - mc) = b^2(1 + m^2),$$

oder

$$n^2 = b^2 + b^2 m^2 + c^2 m^2.$$

Aus der Gleichung der Geraden ist aber

$$n^2 = y^2 - 2mxy + m^2 x^2$$

und somit

$$m^2(x^2 - b^2 - c^2) - 2mxy + y^2 - b^2 = o.$$

Daraus ergiebt sich sofort die Gleichung der Enveloppe

$$x^2 y^2 = (x^2 - b^2 - c^2)(y^2 - b^2),$$

oder

$$\frac{x^2}{b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Aufg. 2.* Welches ist die Enveloppe einer geraden Linie, für welche die Summe der Quadrate der Senkrechten, die man von zwei festen Punkten aus auf sie fällen kann, stets dieselbe bleibt.

*Aufl.*
$$\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Aufg. 3.* Bestimme die Enveloppe unter der Voraussetzung, dass die Differenz der Quadrate dieser Senkrechten gegeben sei.

*Aufl.* Sie ist eine Parabel.

*Aufg. 4.* Um einen festen Punkt $O$ dreht sich eine gerade Linie $OP$ und schneidet eine feste gerade Linie in $P$; man soll die Enveloppe der geraden Linie $PQ$ finden, welche mit der drehenden Geraden den constanten Winkel $OPQ$ bildet.

Wir nehmen an, die Linie $OP$ bilde den Winkel $\vartheta$ mit der auf die feste gerade Linie gefällten Senkrechten und ihre Länge sei $= p \sec \vartheta$; die von $O$ auf $PQ$ gefällte Senkrechte bildet mit $OP$ den festen Winkel $\beta$ und hat daher die Länge $p \sec \vartheta . \cos \beta$. Da nun diese Senkrechte mit der erstern den Winkel $(\vartheta + \beta)$ bildet, so ist die Gleichung von $PQ$ unter der Voraussetzung, dass die feste gerade Linie zur Achse der $x$ erwählt sei,

$$x \cos (\vartheta + \beta) + y \sin (\vartheta + \beta) = p \sec \vartheta . \cos \beta,$$

oder

$$x \cos (2\vartheta + \beta) + y \sin (2\vartheta + \beta) = 2p \cos \beta - x \cos \beta - y \sin \beta,$$

eine Gleichung von der Form

$$L \cos \varphi + M \sin \varphi = R,$$

deren Enveloppe daher durch

$$x^2 + y^2 = (x \cos \beta + y \sin \beta - 2p \cos \beta)^2$$

repräsentirt wird; es ist die Gleichung einer Parabel, welche den Punkt $O$ zu ihrem Brennpunkt hat.

*Aufg. 5.* Die Enveloppe der Linie $\frac{A}{\mu} + \frac{B}{\mu} = 1$ zu finden, in welcher die unbestimmten Grössen durch die Relation

$$\mu + \mu_1 = C$$

verbunden sind.

Wir substituiren für $\mu_1$ $\quad C - \mu$

und entfernen die Brüche; darnach ergiebt sich die Gleichung der Enveloppe

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = o;$$

dieselbe ist mit der Form

$$\pm \sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm \sqrt{C} = o$$

äquivalent.

Wenn z. B. von einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten gegeben ist, so wird die Enveloppe der Basis durch die

Gleichung $\qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

mit der Bedingung $\qquad a + b = c$

bestimmt und ist daher durch

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2cx - 2cy + c^2 = o$$

repräsentirt; sie ist also eine Parabel, welche die Seiten $x = o$ und $y = o$ berührt.

Oder wenn zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse der Lage nach gegeben sind und ihre Grössen der Bedingung unterliegen, dass die Summe

ihrer Quadrate constant sei, so findet sich die Enveloppe derselben aus der Gleichung
$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$
mit der Bedingung $a'^2 + b'^2 = c^2$ und die Enveloppe hat die Gleichung
$$x \pm y \pm c = o,$$
d. h. alle diese Ellipsen berühren vier feste gerade Linien.

*Aufg.* 6. Wenn man zwischen den Gleichungen
$$\frac{\mu}{A} + \frac{\mu'}{B} + \frac{\mu''}{C} = o, \quad \sqrt{\mu a} + \sqrt{\mu' b} + \sqrt{\mu'' c} = o.$$
die Grösse $\mu''$ eliminirt, so enthält die resultirende Gleichung die Grösse $\frac{\mu}{\mu'}$, nur im zweiten Grade und die Enveloppe wird durch die Gleichung
$$Aa + Bb + Cc = o$$
ausgedrückt*).

Wenn z. B. der einem Dreieck umschriebene Kegelschnitt
$$\frac{\mu}{\alpha} + \frac{\mu'}{\beta} + \frac{\mu''}{\gamma} = o$$
(Art. 134) der Bedingung unterliegt, dass die in seiner Gleichung auftretenden Constanten durch die Relation
$$\sqrt{\mu a} + \sqrt{\mu' b} + \sqrt{\mu'' c} = o$$
verbunden sein müssen, so ist die Enveloppe aller so bestimmten Kegel schnitte die gerade Linie
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o.$$
Oder wenn in der Gleichung des einem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts
$$\sqrt{\mu\alpha} + \sqrt{\mu'\beta} + \sqrt{\mu''\gamma} = o$$
(Art. 136) die Constanten durch die Relation
$$\frac{\mu}{A} + \frac{\mu'}{B} + \frac{\mu''}{C} = o$$
vereinigt sind, so berührt derselbe stets die gerade Linie
$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o.$$

Wir haben in Artikel 268 gesehen, dass die Evolute einer Curve die Enveloppe ihrer Normalen ist. Es ist leicht, mit den dort gebrauchten Symbolen der Differential-Rechnung und dieser Untersuchung der geometrischen Theorie der Enveloppen das allgemeinere Verfahren zur Entwickelung ihrer Gleichung anzugeben. Wenn allgemein
$$L = o$$

*) Es lässt sich allgemein beweisen, dass den beiden Gleichungen
$$(\mu A)^m + (\mu' B)^m + (\mu'' C)^m = o,$$
$$(\mu a)^n + (\mu' b)^n + (\mu'' c)^n = o,$$
die Gleichung der Enveloppe
$$\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{b}{B}\right)^{\frac{mn}{m-n}} + \left(\frac{c}{C}\right)^{\frac{mn}{m-n}} = o$$
entspricht.

die Gleichung einer beweglichen Linie ist, in welcher also ein veränderlicher Parameter $l$ vorkommt, so wird eine benachbarte Lage derselben, welche einem Werthe $l + h$ dieses Parameters entspricht, nach dem Taylor'schen Satze durch die Gleichung

$$L + \frac{dL}{dl}\frac{h}{1} + \frac{d^2L}{dl^2}\frac{h^2}{1.2} \quad \ldots = o$$

repräsentirt. Denkt man $h$ ohne Ende abnehmend, und den Durchschnittspunkt zweier so bestimmten Linien gesucht, so bestimmt sich derselbe offenbar durch die Coexistenz der beiden Gleichungen

$$L = o, \quad \frac{dL}{dl} = o.$$

Wenn man zwischen ihnen jenen Parameter $l$ eliminirt, so erhält man die Gleichung der Enveloppe.

So fanden wir die Gleichung der Normale der Kegelschnitte (Artikel 181)

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2.$$

Durch die Substitution $x' = a \sin \varphi$, $y' = b \sin \varphi$, erhält sie die Form

$$\frac{a\,x}{\cos \varphi} - \frac{b\,y}{\sin \varphi} = c^2.$$

In ihr ist nur der Parameter $\varphi$ enthalten und demnach bestimmt sich aus ihr nach dem Vorigen die Gleichung der Evolute; sie ist dieselbe, die wir schon kennen.

309. Diese Principien erlauben uns die **Gleichung eines Kegelschnitts** zu schreiben, **der mit den beiden gegebenen Kegelschnitten** $S = o$ **und** $S' = o$ **eine doppelte Berührung** hat.

Wenn $E = o$ und $F = o$ die Durchschnitts-Sehnen derselben repräsentiren, so dass

$$S - S' = E\,F$$

ist, so ist die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher beide berührt

$$\mu^2E^2 - 2\mu\,(S + S') + F^2 = o;$$

denn wenn wir die Enveloppe dieses Kegelschnittes suchen, so ergiebt sich

$$E^2F^2 - (S + S')^2 = o$$

oder

$$4\,S\,S' = o$$

als ihre Gleichung; jeder dieser Kegelschnitte hat also mit den beiden gegebenen eine Doppelberührung.

Weil die Gleichung in Bezug auf die unbestimmte Grösse $\mu$ vom zweiten Grade ist, so erkennen wir, dass durch jeden Punkt zwei Kegelschnitte gelegt werden können, welche mit den gegebenen eine doppelte Berührung haben; und es ist leicht, zu beweisen, dass die eine ihrer Durchschnitts-Sehnen die gerade Linie ist, welche den gegebenen Punkt mit dem Punkte $E = o$, $F = o$ verbindet, die andre aber die vierte Harmonikale zu dieser Linie in Bezug auf jene beiden Geraden.

310. Die Gleichung eines Kegelschnitts, der mit zwei Kreisen eine doppelte Berührung hat, nimmt die einfachere Form an

$$\mu^2 - 2\mu(C + C') + (C - C')^2 = o.$$

Die Berührungs-Sehnen des Kegelschnitts mit diesen beiden Kreisen sind durch

$$C - C' + \mu = o \text{ und } C - C' - \mu = o$$

dargestellt, also zu einander parallel und von der Radical-Achse beider Kreise gleichweit entfernt. Man kann die gefundene Gleichung auch in der Form

$$\sqrt{C} \pm \sqrt{C'} = \sqrt{\mu}$$

schreiben und erhält dann durch ihre Interpretation den folgenden Satz: Der Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder Differenz der von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten constant ist, ist ein Kegelschnitt, der mit den beiden Kreisen eine doppelte Berührung hat.

Wenn wir die beiden Kreise als unendlich klein voraussetzen, so erhalten wir daraus die Fundamental-Eigenschaft der Brennpunkte des Kegelschnitts. (Vergleiche Art. 285.) Wenn $\mu$ dem zwischen beiden Kreisen enthaltenen Abschnitt in einer ihrer gemeinschaftlichen Tangenten gleich ist, so bezeichnet die Gleichung ein Paar der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise.

*Aufg. 1.* Die in den Artikeln 146, 147 gegebenen Aufgaben über die Bestimmung der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise nach dieser Methode zu lösen.

*Aufl.* von Aufg. 146: $\sqrt{C} + \sqrt{C'} = 4$ oder $= 2$.

„ „ „ 147: $\sqrt{C} + \sqrt{C'} = 1$ oder $= \sqrt{-80}$.

*Aufg. 2.* Drei Kreise sind gegeben; wir nennen $L, L'$ die gemeinschaftlichen Tangenten zu $C', C''$; $M, M'$ die zu

$C''$, $C$ und $N$, $N'$ die zu $C$, $C'$; wenn die drei Tangenten $L$, $M$, $N$ sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch $L'$, $M'$, $N'$ durch denselben Punkt.

Die Gleichungen der Paare gemeinschaftlicher Tangenten sind

$$\sqrt{C'} + \sqrt{C''} = t, \sqrt{C''} + \sqrt{C} = t', \sqrt{C} + \sqrt{C'} = t''.$$

Die Bedingung, unter welcher die drei ersten sich in einem Punkte schneiden, ist

$$t' \pm t = t'';$$

wenn diese Bedingung erfüllt ist, schneiden sich auch die drei letzten Tangenten in einem Punkte.

311. **Die Gleichung eines Kegelschnitts, der einem Viereck eingeschrieben ist**, ergiebt sich als ein specieller Fall des im Artikel 309 behandelten Satzes; sie ist

$$\mu^2 E^2 - 2\mu (AC + BD) + F^2 = o.$$

Darin sind $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$ die Seiten, $E = o$, $F = o$ die Diagonalen des Vierecks und man hat $AC - BD = EF$.

Diese Gleichung nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man sie in Gliedern aus den drei Diagonalen des Vierecks ausdrückt.

Wenn $L = o$, $M = o$, $N = o$ die Diagonalen des Vierecks ausdrücken, so sind

$$1.)\ L + M + N = o,\ 2.)\ M + N - L = o,\ 3.)\ N + L - M = o,$$
$$4.)\ L + M - N = o$$

die vier Seiten desselben; denn die Diagonale $L = o$ geht durch den Durchschnitt der Seiten 1, 2 und durch den von 3, 4; $M$ durch die Schnittpunkte von 1, 3 und von 2, 4 und $N$ durch diejenigen von 1, 4 und von 2, 3. Die Gleichung des die vier Seiten berührenden Kegelschnitts kann geschrieben werden

$$\mu^2 L^2 - \mu (L^2 + M^2 - N^2) + M^2 = o.$$

Derselbe berührt stets die durch die Gleichung

$$(L^2 + M^2 - N^2)^2 - 4L^2M^2 = (L + M + N)(M + N - L)(N + L - M)$$
$$(L + M - N) = o$$

dargestellten vier geraden Linien. Wenn man jene Gleichung des berührenden Kegelschnitts in der äquivalenten Form

$$L^2 = \frac{M^2}{\mu} + \frac{N^2}{1 - \mu}$$

schreibt, so erkennt man den engen Zusammenhang, welchen die allgemeine Lösung dieser Frage mit der durch die Entwicklungen der Artikel 303—305 enthüllten wahren Natur der Brennpunkte der Kegelschnitte hat.

*Aufg. 1.* Man soll die Gleichung des Kegelschnitts finden, welcher die vier Seiten des in der Aufg. 8 des Art. 34 behandelten Vierecks berührt.

In diesem Falle haben wir, wie leicht erkannt wird,

$$L = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)x,\ M = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)y,$$
$$N = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y - 2.$$

Die Gleichung des Kegelschnitts ist daher:

$$\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y - 2\right]^2$$
$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)^2\frac{x^2}{\mu} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)^2\frac{y^2}{1-\mu}.$$

*Aufg. 2.* Man soll den Ort der Mittelpunkte der dem selben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte bestimmen.

Der Mittelpunkt des Kegelschnitts, dessen Gleichung in der letzten Aufgabe entwickelt ward, bestimmt sich durch die Gleichungen

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y - 2\right] = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)^2\frac{x}{\mu},$$
$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y - 2\right] = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)^2\frac{y}{1-\mu}.$$

Durch Elimination von $\mu$ erhalten wir

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y - 2 = \frac{(a+a')^2}{aa'(a'-a)}x + \frac{(b+b')^2}{bb'(b'-b)}y.$$

oder

$$\frac{2x}{a-a'} + \frac{2y}{b-b'} = 1,$$

die Gleichung der geraden Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

312. Die vorhergehenden Entwicklungen haben den Gebrauch des Systems der Dreilinien-Coordinaten nach verschiedenen Seiten erläutert und die Vortheile anschaulich gemacht, welche mit demselben erreicht werden können; sie haben uns auch zu einer einfachen Behandlung von Problemen über die Enveloppen geführt, und es liegt nahe, die allgemeine Bemerkung hieran zu knüpfen, dass jede Curve ebensowohl als Enveloppe einer beweglichen geraden Linie, wie als Ort eines beweglichen Punktes angesehen werden kann.

Wenn man einen Punkt durch seine Coordinaten in einem trilinearen System bestimmt, so wird durch eine homogene Gleichung zwischen diesen Coordinaten ein geometrischer Ort von Punkten ausgedrückt, welcher für den Fall, dass jene Gleichung vom ersten Grade ist, eine gerade Linie, für jeden anderen Fall eine Curve und insbesondere für den Fall der Gleichung zweiten Grades ein Kegelschnitt ist. Iedes System zusammengehöriger Werthe der Veränderlichen bestimmt einen Punkt der Curve und man gelangt zur Bestimmung der Tangenten derselben, indem man jede Tangente als die gerade Verbindungslinie zweier unendlich nahe benachbarten Punkte der Curve auffasst. In diesem Sinne ward auch das allgemeine Problem von den Enveloppen gelöst.

Die analytische Geometrie vermag sich aber ganz ebenso direct der Auffassung einer Curve als der Envoloppe einer geraden Linie zu accommodiren, wie der bisher verfolgten als Ort eines Punktes. Wir erkennen zurückblickend das einfache Mittel dazu in der Verfolgung der Ideen, welche der Gegenstand der Entwicklungen der Artikel 70, 71 und 72 bildeten. Wenn in Bezug auf drei feste Fundamental-Punkte jede gerade Linie durch ihre Coordinaten bestimmt wird, so drückt jede Gleichung zwischen denselben die Enveloppe aller der geraden Linien aus, deren Coordinaten ihr genügen; die homogene Gleichung ersten Grades zwischen drei Veränderlichen repräsentirt darnach speciell einen Punkt.

313. Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen, welche wir in der Form

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

voraussetzen, bezeichnet, wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als die Coordinaten einer beliebigen geraden Linie betrachtet werden, einen Kegelschnitt. Denn sie enthält fünf unabhängige Constante und repräsentirt daher eine Curve, welche durch fünf Tangenten bestimmt wird; wir haben aber bereits in dem Satze von Brianchon (Art. 289) erkannt, dass und wie durch fünf Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist. Die Coefficienten der allgemeinen Gleichung können somit stets und immer nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass sie einen beliebigen gegebenen Kegelschnitt repräsentirt, und sie kann nur einen solchen repräsentiren. Die Bestimmung der gemeinschaftlichen Wurzeln $\left(\frac{x}{z}\right)_1$, $\left(\frac{y}{z}\right)_1$, $\left(\frac{x}{z}\right)_2$, $\left(\frac{y}{z}\right)_2$ der Gleichungen

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o,$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = o$$

führt, wie wir wissen in dem System der Dreilinien-Coordinaten zur Angabe derjenigen Punkte, welche dem von der ersten Gleichung dargestellten Kegelschnitt und der von der zweiten repräsentirten geraden Linie gemeinschaftlich sind; auf Grund der Anzahl dieser gemeinschaftlichen Punkte — ohne Rücksicht darauf, ob sie reelle und verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre Punkte seien — nur insofern dieselbe lediglich durch den Grad der Gleichung der Curve bestimmt wird, bezeichnen wir die Kegelschnitte als Curven zweiter Ordnung.

Wenn wir aber dieselbe algebraische Operation an jenen Gleichungen in der Voraussetzung vollziehen, dass die Veränderlichen derselben die Dreipunkt-Coordinaten gerader Linien bezeichnen, so ist ihr Sinn dahin zu interpretiren, dass die gemeinschaftlichen Wurzeln beider Gleichungen die Coordinaten derjenigen geraden Linien bezeichnen, welche sowohl der durch die erste als der durch die zweite Gleichung dargestellten Enveloppe angehören, d. i. die Coordinaten derjenigen Tangenten des Kegelschnitts, welche durch den von der zweiten Gleichung bezeichneten Punkt möglich sind. Da es solcher gemeinschaftlicher Wurzeln und mithin solcher Tangenten stets zwei giebt, so bezeichnen wir unter völligem Absehen von dem Umstande, dass dieselben ebensowohl reell und verschieden, als reell und gleich, und imaginär sein können, jede durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellte Enveloppe als eine Curve zweiter Klasse.*)

Wir brauchen die Bezeichnung Curve zweiten Grades hinfort nur da, wo eine Trennung beider Auffassungen als unnöthig oder unzweckmässig erscheint und behalten für solche Fälle zugleich die Collectiv-Bezeichnung Kegelschnitte bei.

Der Punkt und die gerade Linie erscheinen von diesem Gesichtspunkte aus als Enveloppe und Ort ersten Grades, und jene ist näher als von der ersten Klasse, dieser als von der ersten Ordnung zu bezeichnen.

---

*) Sind beide Gleichungen von höherem Grade, so bestimmt sich die Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Wurzeln, d. i. die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten der durch sie repräsentirten Curven durch das Product ihrer Grade. Zwei Curven zweiter Klasse haben somit vier gemeinschaftliche Tangenten.

314. Es ist ein specieller Fall des Vorigen, wenn wir das Resultat der Substitution $\gamma = o$
in die Gleichung
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o,$$
d. i. die Gleichung $A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = o$,
dahin interpretiren, dass sie die beiden Punkte bezeichnet, welche von den von der Ecke $\gamma = o$ des Fundamental-Dreiecks ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts in der gegenüberliegenden Seite desselben bestimmt werden.

Wenn wir ferner die allgemeine Gleichung in der Form
$$(A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2) + \gamma\,(D\alpha + E\beta + F\gamma) = o$$
schreiben, so zeigt sie offenbar, dass die von ihr repräsentirte Curve ebensowohl die geraden Verbindungslinien des Fundamental-Punktes $\gamma = o$ mit den beiden durch
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = o$$
dargestellten Punkten, als auch die geraden Verbindungslinien dieser letzteren Punkte mit dem Punkte $D\alpha + E\beta + F\gamma = o$ zu Tangenten hat. Es bezeichnet somit diese letztere Gleichung insbesondere die vierte Ecke eines dem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits, dessen andre Eckpunkte der Fundamental-Punkt $\gamma$ und diejenigen beiden Punkte sind, welche durch die von ihm ausgehenden Tangenten der Curve in der Gegenseite des Fundamental-Dreiecks bestimmt werden.

Die Curve zweiter Klasse degenerirt offenbar in zwei Enveloppen der ersten Klasse, wenn die allgemeine Gleichung, welche sie repräsentirt, in lineare Factoren zerfällt. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades
$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$
repräsentirt somit zwei Punkte, sobald die Bedingung
$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF = o$$
erfüllt ist.

315. Die Unterscheidung der individuellen Curven zweiten Grades kann in dem System der Dreipunkt-Coordinaten leicht und allgemein geschehen, und wir wollen die Art und Weise der Untersuchung einfach bezeichnen. Die Curve zweiten Grades ist eine Parabel, wenn die unendlich entfernte gerade Linie unter ihren Tangenten ist, d. h. wenn ihre Gleichung in Tangential-Coordi-

naten durch die Coordinaten der unendlich entfernten geraden Linie befriedigt wird. Die Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

wird aber durch die Coordinaten

$$\alpha = \beta = \gamma$$

dann befriedigt, wenn die Summe ihrer Coefficienten gleich Null ist. In Folge dessen repräsentirt z. B. die Gleichung

$$\alpha\beta = \gamma^2$$

eine Parabel.

Will man entscheiden, ob die obige allgemeine Gleichung eine Hyperbel oder eine Ellipse repräsentirt, so muss man bestimmen, ob die unendlich entfernte gerade Linie die Curve in reellen oder in imaginären Punkten schneidet. In derselben Weise, in welcher man bei dem Gebrauch des Dreilinien-Coordinaten-Systems, und bei dem der Cartesischen Coordinaten als eines speciellen Falles von diesem, verfährt, um die Bedingung auszudrücken, dass eine durch die allgemeine Gleichung ersten Grades dargestellte gerade Linie den durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades repräsentirten Kegelschnitt berührt (Art. 111), erhält man für das System der Dreipunkt-Coordinaten die Bedingung, unter welcher der Punkt $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ der Curve

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

angehört, in der Form

$$(E^2 - 4CF)l^2 + (D^2 - 4AF)m^2 + (B^2 - 4AC)n^2 + 2(2AE - BD)mn$$
$$+ 2(2CD - BE)nl + 2(2BF - DE)lm = o.$$

Liegt dieser Punkt in unendlicher Entfernung, so muss in seiner Gleichung die Coefficienten-Summe Null betragen, oder

$$n = -(l + m)$$

sein. Durch Substitution dieser Bedingung und Auflösung der eben gegebenen Gleichung für $l:m$ erhalten wir die unendlich entfernten Punkte der Curve und demnach in der Bedingung, unter welcher die gefundenen Wurzeln reell sind, die Bedingung, deren Erfüllung die Curve zu einer Hyperbel macht.

Dies Kennzeichen ergiebt sich durch eine einfache Entwicklung in folgender Form: Wenn die Coefficienten-Summe

$$A + B + C + D + E + F$$

und die Function

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4ACF$$

einerlei Vorzeichen besitzen, so ist die durch die allgemeine Gleichung repräsentirte Curve eine Hyperbel, für verschiedene Vorzeichen eine Ellipse. Die Identität der Coefficientensumme mit Null liefert die Parabel und die der letztern Function mit Null zwei Punkte.

316. Wir müssen bevor wir an weiteren Beispielen den Gebrauch dieses Coordinatensystems bei Curven zweiten Grades näher erläutern, eine Betrachtung nachholen, welche den an dem bezeichneten Orte (Art. 70 f.) gegebenen Abriss vervollständigt; es ist die Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen den drei Coordinaten einer beliebigen geraden Linie, oder ihrer Beziehung zum Fundamental-Dreieck, das Analogon der im Artikel 63 gegebenen Entwicklung. Wie an dem angeführten Orte, bietet uns die zu suchende Formel zugleich das Mittel dar, um allen Gleichungen, denen die homogene Form fehlt, dieselbe zu geben.

Wir wollen uns zunächst zur Untersuchung jener Relation der Cartesischen Coordinaten bedienen. Dazu setzen wir voraus, die gerade Linie sei durch

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta + p = o$$

repräsentirt und die Cartesichen Coordinaten der drei Fundamental-Punkte seien $x', y', x'', y'', x''', y'''$, die Dreipunkt-Coordinaten jener geraden Linie aber $\alpha, \beta, \gamma$.

Daraus entspringen die Relationen

$$x' \cos \vartheta + y' \sin \vartheta + p = \alpha,$$
$$x'' \cos \vartheta + y'' \sin \vartheta + p = \beta,$$
$$x''' \cos \vartheta + y''' \sin \vartheta + p = \gamma$$

und zur Erlangung der gewünschten Beziehung zwischen den Dreipunkt-Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ der geraden Linie und dem Fundamental-Dreieck haben wir aus ihnen nur die Grössen $p$ und $\vartheta$ zu eliminiren; wir multipliciren dazu die drei obigen Gleichungen respective mit $y'' - y'''$, $y''' - y'$, $y' - y''$ und erhalten durch Addition

$$[x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')] \cos \vartheta = \alpha (y'' - y''') + \beta (y''' - y') + \gamma (y' - y'').$$

Die entsprechende Multiplication mit $x'' - x'''$, $x''' - x'$, $x' - x''$ liefert ebenso

$$-[x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'')]\sin\vartheta = \alpha(x''-x''') + \beta(x'''-x') + \gamma(x'-x''),$$

und durch Quadriren und Addiren beider letzten Gleichungen erlangt man endlich die Elimination von $\vartheta$.

Wir bringen das Resultat in eine passendere Form, indem wir die Seitenlängen $a$, $b$, $c$ des Fundamental-Dreiecks und die Winkel $\varphi$, $\psi$, $\chi$ vorübergehend einführen, und die zu jenen Seiten gehörigen Höhen durch $p'$, $p''$, $p'''$ bezeichnen; denn damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x''-x''' &= a\cos\varphi, & y''-y''' &= a\sin\varphi, \\ x'''-x' &= b\cos\psi, & y'''-y' &= b\sin\psi, \\ x'-x'' &= c\cos\chi, & y'-y'' &= c\sin\chi, \end{aligned}$$

und

$$x'(y''-y''') + x''(y'''-y') + x'''(y'-y'') = ap' = bp'' = cp''' = M;$$

und dadurch

$$M^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + 2ab\,\alpha\beta\cos(\varphi-\psi) + 2\,bc\,\beta\gamma\cos(\psi-\chi) + 2\,ca\,\gamma\alpha\cos(\chi-\varphi),$$

d. i. wenn man die Winkel des Fundamental-Dreiecks durch $A$, $B$, $C$ bezeichnet und mit $M^2$ oder den entsprechenden Äquivalenten dividirt,

$$1 = \frac{\alpha^2}{p'^2} + \frac{\beta^2}{p''^2} + \frac{\gamma^2}{p'''^2} - \frac{2\alpha\beta\cos C}{p'p''} - \frac{2\beta\gamma\cos A}{p''p'''} - \frac{2\gamma\alpha\cos B}{p'''p'}.$$

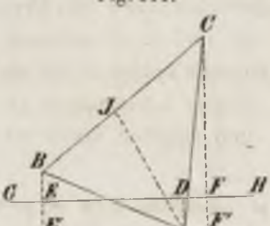
Wenn man dagegen die Winkel des Dreiecks durch seine Seiten ersetzt und den doppelten Inhalt des Dreiecks durch $M$ bezeichnet, so erhält man die Relation in der Form

$$M^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (b^2+c^2-a^2)\beta\gamma - (c^2+a^2-b^2)\gamma\alpha - (a^2+b^2-c^2)\alpha\beta.$$

Wir setzen die erste Form voraus und bezeichnen dieselbe symbolisch durch $\qquad 1 = \Omega.$

317. Man kann diese Relation auch ohne Vermittelung der Cartesischen Coordinaten direct mit Hilfe der Grundanschauungen des Dreipunkt-Coordinaten-Systems ableiten; dazu lassen wir in Figur 111 $ABC$ das Fundamentaldreieck, $GH$ die gerade Linie und $E'F'$ eine durch den Punkt $A$ gehende Parallele zu ihr, $AD$, $BE$, $CF$ die Coordinaten der ersteren sein, und bezeich-

Fig. 111.



nen die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ respective durch $c$, $a$, $b$, die Coordinaten $AD$, $BE$, $CF$ durch $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und den Winkel $DAJ$, (unter der Voraussetzung $\angle BAJ = \angle CAJ$) durch $\vartheta$.

Man hat dann

$$BE' = -(\beta + \alpha),\ CF' = -(\gamma + \alpha);$$

also $$\frac{BE'}{BA} = \sin BAE' = -\frac{\beta + \alpha}{c} = \cos BAD = \cos\left(\frac{A}{2} + \vartheta\right).$$

und $$\frac{CF'}{CA} = \sin CAF' = -\frac{\gamma + \alpha}{b} = \cos CAD = \cos\left(\frac{A}{2} - \vartheta\right).$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\cos\vartheta = -\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}\left(\frac{\beta + \alpha}{c} + \frac{\gamma + \alpha}{b}\right),$$

$$\sin\vartheta = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}\left(\frac{\beta + \alpha}{c} - \frac{\gamma + \alpha}{b}\right),$$

und durch Quadriren und Addiren endlich

$$\frac{1}{\sin^2 A}\left[\frac{(\beta + \alpha)^2}{c^2} + \frac{(\gamma + \alpha)^2}{b^2}\right] - \frac{2\cos A}{\sin^2 A}\cdot\frac{(\beta + \alpha)(\gamma + \alpha)}{b\,c} = 1,$$

oder

$$b^2(\beta + \alpha)^2 + c^2(\gamma + \alpha)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)(\beta + \alpha)(\gamma + \alpha) = M^2,$$

d. i.

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma - (c^2 + a^2 - b^2)\gamma\alpha$$
$$- (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta = M^2,$$

wie vorher.

318. Die im Vorigen entwickelte und durch

$$\Omega = 1$$

bezeichnete Relation erlaubt uns, alle nicht homogenen Gleichungen, als welche sich im allgemeinen auf die Form

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const.}$$

oder

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \text{const}) = o$$

bringen lassen, homogen zu machen. Wenn man nämlich einen Factor $z$ in dieselbe zur Erlangung der Homogeneität einführt, und ihn darnach mit Hilfe der Relation

$$z^2 = \Omega$$

eliminirt, so erhält man eine homogene Gleichung als das Ergebniss.

Wenn z. B. der Mittelpunkt eines Kreises durch die Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

repräsentirt und sein Halbmesser durch $r$ bezeichnet wird, so gilt für alle Tangenten desselben die Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = r(l + m + n).$$

Man macht sie homogen, indem man rechts den Factor $z = \Omega^{\frac{1}{2}}$ beifügt und erhält damit die Form

$$(l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = r^2(l + m + n)^2\Omega.$$

Wir bemerken, dass diese Gleichung durch die Elimination vom ersten in den zweiten Grad übergeführt worden ist und erkennen leicht, dass dies immer dann eintreten wird, wenn der Factor in irgend ein Glied der Gleichung im ersten oder allgemeiner überhaupt in einem ungeraden Grade einzuführen ist; denn dann muss man zur Herstellung der Homogeneität die Gleichung quadriren.

Dies Ergebniss ist wichtig, denn es zeigt an, dass Ordnung und Klasse einer Curve nicht zugleich durch den Grad ihrer allgemeinen Gleichung in nicht homogener Form angegeben werden; nur wenn die Constante allein in geraden Potenzen in der Gleichung auftritt, bleibt der Grad der Gleichung nach der Herstellung der Homogeneität derselbe wie vorher und die Curve ist von einerlei Ordnung und Klasse. Im Allgemeinen aber ist eine Curve der $n^{ten}$ Ordnung von der $2n^{ten}$ Klasse.

319. Wenn wir jetzt durch

$$S = o \text{ und } S' = o$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte als Curven zweiter Klasse repräsentiren, so ist jede Gleichung von der Form

$$S + kS' = o$$

die Gleichung eines dritten Kegelschnitts, welcher von den gemeinschaftlichen Tangenten der beiden ersteren berührt wird, oder welcher mit diesen Kegelschnitten dem nämlichen Vierseit eingeschrieben ist; denn die Coordinaten jeder der gemeinschaftlichen Tangenten erfüllen die letztere Gleichung, weil sie die beiden ersteren zu Identitäten machen.

In dieser allgemeinen Betrachtung sind als specielle Fälle die durch die Gleichungen

$$S + k\alpha\beta = o,$$
$$\alpha\gamma + k\beta\delta = o$$

gegebenen Formen enthalten, in denen wir beide Gleichungen des zweiten Grades $S = o$, $S' = o$ oder eine derselben als in lineare Factoren zerfällbar vorausgesetzt haben. Die erste bezeichnet einen Kegelschnitt, welcher demjenigen Vierseit eingeschrieben ist, das von den durch die Punkte $\alpha = o$, $\beta = o$ an den Kegelschnitt $S = o$ gelegten Tangenten gebildet wird; oder die Kegelschnitte

$$S = o \text{ und } S + k\alpha\beta = o$$

haben in den Punkten $\alpha = o$, $\beta = o$ die Durchschnittspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten.

Die zweite jener Gleichungen repräsentirt einen Kegelschnitt, welcher dem Vierseit eingeschrieben ist, dessen Eckpunkte durch die Gleichungen $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, $\delta = o$ ausgedrückt sind.

Wir können endlich die Voraussetzung machen, dass die Kegelschnittsgleichungen sich in vollkommene Quadrate auflösen, oder dass die zu interpretirenden Gleichungen die Formen

$$S + k\alpha^2 = o, \quad \alpha\gamma + k\beta^2 = o$$

annehmen. Alsdann fallen zwei von den Ecken jenes umschriebenen Vierseits zusammen und dasselbe reducirt sich auf ein Dreiseit, aus dem von jenem zweifachen Punkt ausgehenden Paar gemeinschaftlicher Tangenten und ihrer Berührungssehne. Die Gleichung

$$S + k\alpha^2 = o$$

bezeichnet einen Kegelschnitt, welcher mit dem Kegelschnitt

$$S = o$$

eine doppelte Berührung hat;

$$\alpha = o$$

repräsentirt den Durchschnittspunkt der entsprechenden gemeinschaftlichen Tangenten.

Ebenso wird durch die Gleichung

$$\alpha\gamma + k\beta^2 = o$$

ein Kegelschnitt ausgedrückt, welcher die geraden Verbindungslinien des Punktes $\beta = o$ mit den Punkten $\alpha = o$ und $\gamma = o$ in diesen letzteren Punkten berührt.

Wenn in der Gleichung $S + k\alpha^2 = o$ der durch $\alpha = o$ dargestellte Punkt dem Kegelschnitt $S = o$ selbst angehörig gedacht wird, so repräsentirt sie einen Kegelschnitt, der mit diesem erste-

ren vier aufeinanderfolgende Tangenten gemein hat, also eine Berührung der dritten Ordnung mit ihm besitzt. Macht man dieselbe Voraussetzung in der zweiten Gleichung, d. i. lässt man den Ausdruck $\beta$ mit einem der beiden Ausdrücke $\alpha$ oder $\gamma$ identisch werden, so zerfällt die Gleichung in die beiden Factoren vom ersten Grade
$$\alpha + k\beta = o, \ \beta = o,$$
d. i. sie repräsentirt ein Paar von Punkten.

320. Wir kehren nach diesen Betrachtungen noch einmal zu dem durch
$$\Omega = 1$$
repräsentirten Ausdruck zurück, um **die Frage zu beantworten, welche Bedeutung die Gleichung**
$$\Omega = o$$
**besitze.**

Diese Frage hat den nämlichen paradoxen Anschein, sie ist überhaupt das vollständige Analogon für das System der Dreipunkt-Coordinaten, zu der in Bezug auf das System der Dreilinien-Coordinaten im Artikel 65 aufgestellten und beantworteten nach der Bedeutung der Gleichung
$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o.$$
Wie diese keine endlich bestimmbaren Punkte darstellen kann, weil für jeden solchen Punkt der links stehende Ausdruck einen constanten aber von Null verschiedenen Werth hat, so kann auch die Gleichung
$$\Omega = o$$
keine endlich bestimmbaren Elemente bezeichnen, weil für jede angebbare gerade Linie die Function $\Omega$ den bestimmten und von Null verschiedenen Werth Eins hat. Während aber jene Gleichung in der allgemeinen Form der Gleichung des ersten Grades erschien, so hat diese die Form der Gleichung zweiten Grades und **muss demnach als eine Enveloppe zweiter Klasse betrachtet werden.**

Bei näherer Untersuchung erkennt man aber, dass die Gleichung
$$\frac{\alpha^2}{p'^2} + \frac{\beta^2}{p''^2} + \frac{\gamma^2}{p'''^2} - \frac{2\alpha\beta\cos C}{p'p''} - \frac{2\beta\gamma\cos A}{p''p'''} - \frac{2\gamma\alpha\cos B}{p'''p'} = o$$
in Factoren zerfällt; denn die Bedingung
$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - 4\,ACF - BDE = o$$
geht für sie in die Form
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$
über, welche eine Identität ist.

Repräsentiren wir nun die Factoren ersten Grades, in welche sie zerfällt, durch $\omega$, $\omega'$, so dass

$$\Omega = \omega . \omega'$$

und erinnern uns, (Art. 318), dass

$$\delta^2 = k^2 \Omega,$$

oder

$$\delta^2 = k^2 . \omega \omega'$$

die Gleichung eines Kreises vom Mittelpunkte

$$\delta = o$$

darstellt, so haben wir, weil diese Gleichung unter der Form

$$\alpha\gamma + k\beta^2 = o$$

erscheint, den Schluss zu ziehen, dass

$$\omega = o \text{ und } \omega' = o$$

die Gleichungen der Berührungspunkte sind, welche den vom Punkte $\delta = o$ ausgehenden Tangenten des Kreises angehören. Somit repräsentirt die paradoxe Gleichung

$$\Omega = o$$

oder

$$\text{const.} = o.$$

im System der Dreipunkt-Coordinaten die Vereinigung der beiden imaginären unendlich entfernten Kreispunkte.

Dies bezeichnet zugleich die wesentliche Verschiedenheit, welche zwischen diesem und dem Cartesischen Coordinaten-System stattfindet, und das letztere kann somit nicht als ein specieller Fall des Dreipunkt-Coordinaten-Systems betrachtet werden.

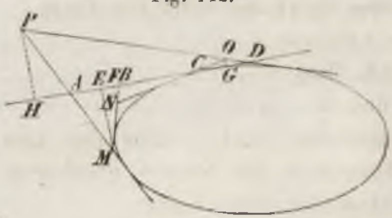
321. Die Gleichungen des Artikels 319 sind einer weiteren Interpretation fähig, wenn wir bemerken, dass die Coordinaten einer geraden Linie die senkrechten Entfernungen derselben von den Fundamental-Punkten bezeichnen. (Vergl. Art. 61 und 27.)

Die Gleichung $\alpha\gamma = k\beta\delta$

drückt alsdann eine Eigenschaft aller der dem Vierseit $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, $\delta = o$ eingeschriebenen Kegelschnitte aus, welche wir in den Satz formuliren: Für jeden einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt ist das Product der senkrechten Abstände einer beliebigen Tangente von zwei Gegenecken desselben zu dem Product der Abstände derselben Tangente von den andern Gegenecken in einem constanten Verhältniss.

Dieser Satz liefert sofort das Gesetz von der Unveränderlichkeit des Doppelschnittverhältnisses, welches von vier festen Tangenten eines Kegelschnittes in einer beweglichen fünften Tangente desselben bestimmt wird, wenn man nur die Figur desselben näher betrachtet und führt damit zu der allgemeinen Bestimmung eines Kegelschnitts aus fünf gegebenen Tangenten.

Fig. 112.




Wenn nämlich in der beistehenden Figur 112 die Ecken des umschriebenen Vierseits durch $M, N, O, P$, die Durchschnittspunkte seiner Seiten mit einer beliebigen fünften Tangente des Kegelschnitts durch $A, B, C, D$ und die Fusspunkte der von seinen Ecken $M, N, O, P$ auf diese letztere Tangente gefällten Perpendikel durch $E, F, G, H$ bezeichnet werden, so drückt die Relation

$$\frac{ME \cdot OG}{NF \cdot PH} = \text{const.}$$

den vorigen Satz aus, und indem man jedes dieser Perpendikel als Höhe eines Dreiecks betrachtet, welches die fünfte Tangente zur Basis hat, und sonach für dieselben die Substitutionen

$$ME = \frac{AB \cdot \sin ABM \cdot \sin BAM}{\sin AMB},$$

$$NF = \frac{BC \cdot \sin BCN \cdot \sin CBN}{\sin BNC},$$

u. s. w. macht, erhält man

$$\frac{ME \cdot OG}{NF \cdot PH} = \text{const.} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} \cdot \frac{\sin BNC \cdot \sin APD}{\sin AMB \cdot \sin COD},$$

d. i. weil die letzteren Winkel die unveränderlichen Winkel des Vierecks $MNOP$ sind,

$$\frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \text{const.}$$

322. Die Gleichung $\alpha\gamma = k\beta^2$ enthält, ebenso interpretirt, den folgenden Satz: Für alle Tangenten eines Kegelschnitts ist das Rechteck aus ihren senkrechten Entfernungen von zwei festen Punkten desselben in einem

unveränderlichen Verhältniss zu dem Quadrat ihres Abstandes vom Durchschnittspunkt seiner Tangenten in jenen Punkten.

Machen wir insbesondere $k = 1$,
so ist $$\alpha\gamma = \beta^2$$
die Gleichung einer Parabel (weil die Coefficienten-Summe derselben Null ist), und zeigt an, dass das Product der Abstände zweier Punkte der Curve von einer beliebigen Tangente derselben dem Quadrat des Abstandes dieser letzteren vom Durchschnitt der jenen Punkten entsprechenden Tangenten (oder vom Pol ihrer Verbindungs-Sehne) gleich ist.

Wir fügen dem einen andern speciellen Fall hinzu, welcher beachtenswerth ist. Wenn in der Gleichung
$$\alpha\gamma = k\beta\delta$$
zwei der Gegenecken des Vierecks z. B. $\beta = o$ und $\delta = o$ als mit den unendlich entfernten imaginären Kreispunkten zusammenfallend betrachtet werden, so dass ihre Gleichungen durch $\omega = o$, $\omega' = o$ repräsentirt sind, so hat man
$$\alpha\gamma = k . \omega . \omega' = \text{const.},$$
d. i. für alle Tangenten des Kegelschnitts ist das Rechteck ihrer Abstände von den zwei andern Gegenecken des umschriebenen Vierecks constant. Wir erkennen aber aus der im Art. 305 gegebenen allgemeinen Definition, dass diese Ecken die Brennpunkte des Kegelschnitts sein müssen und haben damit einen Satz über die Beziehungen der Brennpunkte zu den Tangenten des Kegelschnitts wiedergefunden, welcher schon früher (in Art. 188) gegeben worden ist.

Denken wir die reellen Ecken jenes umschriebenen Vierecks zusammenfallend, so erhalten wir
$$\alpha^2 = k . \omega . \omega' = \text{const.},$$
d. i. alle Tangenten des Kegelschnitts haben dann von diesem seinem Doppelbrennpunkte gleiche senkrechte Entfernung; der Kegelschnitt ist ein Kreis und der Punkt $\alpha = o$ sein Centrum.

323. Wir betrachten das System der Gleichungen
$$S = o, \; S + L^2 = o, \; S + M^2 = o,$$
unter denen die beiden letzten Kegelschnitte repräsentiren, welche mit dem ersten eine doppelte Berührung haben, der respective die

Punkte $L = o$ und $M = o$ als Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten entsprechen. Aus ihnen erhalten wir durch Subtraction die Gleichung $L^2 - M^2 = o$
als die Gleichung der Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten; wir erkennen daraus, dass diese Durchschnittspunkte selbst durch die Gleichungen $L + M = o, \; L - M = o$
dargestellt werden, d. i. dass sie mit den Punkten

$$L = o, \; M = o$$

in einer geraden Linie liegen und mit ihnen ein harmonisches System bilden (Art. 71.)

Setzen wir voraus, dass der Kegelschnitt $S = o$ auf zwei Punkte reducirt sei, so erhalten wir als einen speciellen Fall des Vorigen den Satz: Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte, welche die geraden Verbindungslinien zweier festen Punkte $L = o$, $M = o$ mit zweien andern festen Punkten in diesen letzteren berühren, schneiden sich in Punkten, welche mit den festen Punkten $L = o$, $M = o$ ein harmonisches System in gerader Linie bilden.

Wenn wir drei Kegelschnitte betrachten, deren Gleichungen von der Form $S + L^2 = o, \; S + M^2 = o, \; S + N^2 = o$
sind, d. i. welche mit dem Kegelschnitt $S = o$ je eine doppelte Berührung haben, welcher als Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten die Punkte

$$L = o, \; M = o, \; N = o$$

respective entsprechen, so erhalten wir aus den Gleichungen

$$L^2 - M^2 = o, \; M^2 - N^2 = o, \; N^2 - L^2 = o,$$

als welche die Paare der Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten dieser drei Kegelschnitte repräsentiren und den Gleichungen dieser Durchschnittspunkte selbst, nämlich

$$L - M = o, \; M - N = o, \; N - L = o;$$
$$L + M = o, \; M + N = o, \; N - L = o;$$
$$L + M = o, \; M - N = o, \; N + L = o;$$
$$L - M = o, \; M + N = o, \; N + L = o,$$

das Ergebniss, dass diese Punkte, deren in Allem sechs existiren, viermal zu je dreien in einer geraden Linie liegen.

324. Unter der Voraussetzung, dass

$$LM = R^2$$

die Gleichung eines Kegelschnitts ist, dem die Punkte

$$L = o, \quad M = o$$

angehören, und für welchen $R = o$ den Durchschnittspunkt der diesen letzteren entsprechenden Tangenten bezeichnet, kann jede Tangente der Curve durch eine einzige Veränderliche ausgedrückt werden; denn bezeichnen wir durch $\mu L = R$ die Gleichung des Punktes, in welchem eine solche die gerade Verbindungslinie der Punkte $L = o$, $R = o$ (d. i. die Tangente des Kegelschnitts in $L$) durchschneidet, so bezeichnen die Gleichungen

$$M = \mu R \text{ und } \mu^2 L = M$$

die Durchschnittspunkte dieser nämlichen Tangenten mit den geraden Verbindungslinien der Punkte

$$M = o, \; R = o \text{ und } L = o, \; M = o;$$

jene Tangente der Curve ist somit durch die einzige Veränderliche $\mu$ vollkommen bestimmt, weil ihre Schnittpunkte mit den Seiten des Fundamental-Dreiecks durch dieselbe bestimmt sind.

Betrachten wir zwei den Veränderlichen $\mu$ und $\mu'$ entsprechende Tangenten, so erhalten wir in der Gleichung

$$\mu\mu' L - (\mu + \mu') R + M = o,$$

als welche ebensowohl den Bedingungen

$$\mu L = R, \; \mu R = M,$$

als denen $\mu' L = R, \; \mu' R = M$

entspricht, die Gleichung ihres Durchschnittspunktes; und insofern $\mu = \mu'$, und der Durchschnittspunkt zweier zusammenfallenden Tangenten ein Punkt der Curve ist,

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

als die Gleichung eines beliebigen Punktes der Curve.

Wir kommen damit völlig auf die Entwicklungen der Artikel 295 bis 298 zurück und überlassen die fernere Fortführung derselben dem Leser.

Durch die Bemerkung, dass ein Punkt, in dessen Gleichung

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

eine unbestimmte Grösse im zweiten Grade enthalten ist, einen Kegelschnitt $LM = R^2$

durchläuft,*) knüpfen wir die Theorie der Oerter ebenso an das System der Dreipunkt-Coordinaten, wie wir in dem Früheren die Theorie der Enveloppen dem System der Dreilinien-Coordinaten angeschlossen haben. (Vergl. Art. 308 u. f.) Wir können endlich ganz ebenso, wie in Artikel 299, die Gleichug der Polare, die Gleichung des Pols einer beliebigen geraden Linie in Bezug auf den betrachteten Kegelschnitt ausdrücken. Wenn man durch die Substitution der Coordinaten dieser geraden Linie in die Gleichung eines ihrer Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitt die Gleichung

$$ML' - 2RR' + M'L = o$$

erhält, so muss dieselbe von den Coordinaten der beiden Tangenten befriedigt werden und ist deshalb die geforderte Gleichung des Pols jener geraden Linien.

325. Auch die Discussion der Gleichungsform

$$L^2 + M^2 - R^2 = o$$

bietet keinerlei Schwierigkeiten, aber auch keinerlei neue Ergebnisse dar.

Nach der Definition des Artikels 305 hängt die Zahl der Brennpunkte einer Curve wesentlich von der Klasse derselben ab und zwar in der einfachen Weise, dass die Zahl der reellen Brennpunkte mit der Klassenzahl übereinstimmt. Wenn wir durch

$$A + Bi = o$$

eine imaginäre Tangente der Curve von dem einen der beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte bezeichnen, so ist

$$A - Bi = o$$

der Ausdruck einer dem andern derartigen Punkte entsprechenden und beide haben den reellen Durchschnittspunkt

$$A = o,\ B = o;$$

in keiner von beiden kann ein zweiter reeller Punkt enthalten sein, weil eine gerade Linie mit zwei reellen Punkten nicht imaginär sein kann.

---

*) Wir erinnern, dass diese Gleichung die Bedingung ausdrückt, unter welcher die vorige Gleichung

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

gleiche Wurzeln hat.

Wenn man die Bedingung aufstellt, unter welcher die gerade Linie

$$x + yi = c$$

die Curve berührt, und die Constanten dem entsprechend bestimmt, so sind

$$x = a, \; y = b$$

die Coordinaten eines Brennpunktes, wenn unter den für $c$ gefundenen Werthen einer von der Form

$$a + b\sqrt{-1}$$

ist.

Die Zahl der endlichen Brennpunkte wird vermindert, wenn die unendlich entfernte gerade Linie die Curve berührt, weil die Zahl der von den imaginären unendlich entfernten Kreispunkten ausgehenden endlichen Tangenten dann um eine vermindert ist; der letzte Brennpunkt fällt mit dem Berührungspunkt zwischen der Curve und der unendlich entfernten geraden Linie zusammen. Die Parabel hat deswegen nur einen endlich angebbaren Brennpunkt.

Wenn die Curve die imaginären unendlich entfernten imaginären Kreispunkte enthält, so fallen zwei der reellen Brennpunkte derselben mit dem Pol der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf die Curve zusammen, weil zwei der von jenen Punkten ausgehenden Tangenten mit den Tangenten in denselben Punkten zusammenfallen. Daher fallen für den Kreis die Brennpunkte im Centrum zusammen.

326. Wir haben in dem Vorhergehenden vielfache Gelegenheit gehabt, zu sehen, wie die nämlichen Gleichungen bei dem Gebrauch des Dreipunkt-Coordinaten-Systems eine andre Interpretation erfahren, als in dem System der Dreilinien-Coordinaten; wir erblicken in ihnen jene doppelte Interpretation gleicher analytischer Facta, welche wir bereits im Artikel 72 in Aussicht nahmen, auf dem Gebiete der Kegelschnittstheorie.

Die Grundzüge des Zusammenhangs zwischen den durch solche doppelte Interpretation erhaltenen Sätzen, welche wir schon an jenem Orte bezeichneten, sind überall in dem Vorhergehenden deutlicher und vollständiger hervorgetreten; sie bilden das Princip der Reciprocität oder der Dualität*), welches bereits in

*) Dasselbe ist zuerst in wahrhaft allgemeinen Formen von Herrn Möbius vorgetragen worden. (Vergl. dessen Werk: Der Barycentrische Calcul. p. 433 u. f.

dem gleich ursprünglichen Charakter der Begriffe des Punktes und der geraden Linie seinen Grund hat. Seine Bedeutung in dem Gebiete der Theorie der Kegelschnitte erscheint durch das Vorige so hinreichend erläutert, dass wir nur noch zwei weitere Beispiele hinzufügen und dazu auf die Gruppe von Aufgaben im Artikel 302 hinweisen wollen, als welche sämmtlich ohne jede Veränderung des Rechnungswerkes neue den ersten dualistisch verbundene Sätze liefern, wenn man die analytischen Ausdrücke als auf das System der Dreipunkt-Coordinaten bezüglich interpretirt.

Wo in dem angeführten Artikel (Aufg. 1) der Ort der dritten Ecke eines Dreiecks gefunden wird, welches einem Kegelschnitt umschrieben ist und dessen zwei andere Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, nämlich als ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen in denjenigen Punkten eine doppelte Berührung hat, welche die von dem Durchschnittspunkt jener festen geraden Linien ausgehenden Tangenten in ihm bestimmen, da ergiebt sich durch die reciproke Interpretation aus derselben algebraischen Entwicklung die Enveloppe der dritten Seite eines Dreiecks, welches einem festen Kegelschnitt eingeschrieben ist und dessen beide erste Seiten sich um zwei feste Punkte drehen, als ein Kegelschnitt, der den gegebenen in denjenigen Punkten doppelt berührt, in denen die gerade Verbindungslinie der beiden festen Punkte ihn schneidet. Die besondere Auflösung der Aufgabe 2) in jenem Artikel wird daher durch das Princip der Dualität überflüssig gemacht.

Die Interpretation des Systems der Gleichungen

$$S - \alpha\beta = o, \quad S - \alpha\gamma = o, \quad \alpha(\beta - \gamma) = o$$

zeigt uns einerseits drei Kegelschnitte, welche zwei gemeinschaftliche Punkte haben und lehrt, dass ihre übrigen gemeinschaftlichen Sehnen sich in einem Punkt schneiden, andrerseits drei Kegelschnitte, welche zwei gemeinschaftliche Tangenten haben und lehrt, dass die drei Durchschnittspunkte der übrigen gemeinschaftlichen Tangenten in einer geraden Linie liegen.

Wir fügen dazu die Behandlung der Aufgabe: Man soll den Ort eines Punktes bestimmen, welcher den zwischen zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts enthaltenen Abschnitt einer veränderlichen Tangente desselben in einem gegebenen Verhältnisse theilt.

Wir beziehen den gegebenen Kegelschnitt auf das vom Durchschnittspunkt der beiden festen Tangenten $\gamma = o$ und von ihren Berührungspunkten $\alpha = o$, $\beta = o$ gebildete Fundamental-Dreieck, so dass
$$\alpha\beta = k\gamma^2$$
seine Gleichung ausdrückt.

Dann wird durch
$$\mu\alpha = k\gamma$$
der Punkt ausgedrückt, in welchem eine veränderliche Tangente des Kegelschnitts der festen Tangente $\alpha = o$, $\gamma = o$, und durch
$$\beta = k\mu\gamma$$
der Punkt, in welchem sie der festen Tangente $\beta = o$, $\gamma = o$ begegnet. Daraus ergiebt sich die Gleichung desjenigen Punktes, welcher die geradlinige zwischen den letztbezeichneten Punkten enthaltene Strecke in dem Verhältniss $m:n$ theilt, nach Art. 71 in der Form $\frac{n}{\mu - k}(\mu\alpha - k\gamma) + \frac{m}{1 - \mu k}(\beta - \mu k\gamma) = o$,
oder, indem man die Brüche entfernt und ordnet
$$k(n\alpha + m\gamma)\mu^2 - [n\alpha + m\beta + (m+n)k^2\gamma]\mu + (n\gamma + m\beta)k = o.$$
*Der Ort dieses Punktes ist nach der Anmerkung des Artikels 324 ein Kegelschnitt, dessen Gleichung ist*
$$4k^2(n\alpha + m\gamma)(n\gamma + m\beta) = [n\alpha + m\beta + (m+n)k^2\gamma].$$
Man erkennt aus derselben leicht seine Beziehung zu den Daten der Aufgabe.

Dieselbe analytische Untersuchung löst aber auch die zweite Aufgabe: *Man soll die Enveloppe einer geraden Linie bestimmen, welche den von zwei festen Punkten eines Kegelschnitts an einem veränderlichen Punkte desselben bestimmten Winkel in einem gegebenen Verhältniss der Sinus theilt.*

327. Die vorstehenden Entwicklungen erscheinen hinreichend, um das Princip der Dualität nach seinem Inhalt und seiner Bedeutung zur Anschauung zu bringen. Obgleich sie leicht beträchtlich weiter ausgedehnt werden könnten, so beschränken wir uns auf das Gegebene, weil wir es dem Leser überlassen wollen und können, dem einmal erkannten Princip überall nachzugehen und es so oft zur Anwendung zu bringen, dass ihm mit jedem Satze auch der dualistisch entsprechende Satz, wenn ein solcher existirt, gegenwärtig ist. In den Entwicklungen des folgenden Kapitels werden wir nur an wenigen Stellen auf die Interpretation

der Gleichungen nach den Grundgesetzen des Dreipunkt-Coordinaten-Systems oder auf die Behandlung der vorschwebenden Fragen in demselben eingehen, aber wir bezeichnen diese Untersuchung als eine nothwendige Ergänzung des Gegebenen.

---

## Fünfzehntes Kapitel.

# Die allgemeine homogene Gleichung des zweiten Grades mit drei Veränderlichen und die Algebra der linearen Transformationen.

328. Wir sahen, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades in punktuellen Dreiecks-Coordinaten

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha\gamma + E\beta\gamma + F\gamma^2 = o$$

ist und wollen sie jetzt der grössern Symmetrie wegen in der Form

$$a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 + 2b\beta\gamma + 2b'\gamma\alpha + 2b''\alpha\beta = o$$

schreiben.

Diese Gleichung ist offenbar mit der folgenden äquivalent

$$(a\alpha + b'\gamma + b''\beta)^2 + (aa' - b''^2)\beta^2 + 2(ab - b'b'')\beta\gamma + (aa'' - b'^2)\gamma^2 = o,$$

in welcher die letzten drei Glieder die Gleichung zweier geraden Linien durch den Punkt $\beta = o$, $\gamma = o$ repräsentiren; demnach ist

$$a\alpha + b'\gamma + b''\beta = o$$

die Berührungs-Sehne der zwei durch diesen Punkt gehenden Tangenten des Kegelschnitts, d. h. die **Polare des Punktes**

$$\beta = o, \quad \gamma = o.$$

In derselben Weise erkennen wir, dass die Polaren der Punkte

$$\gamma = o, \ \alpha = o \ \text{ und } \ \alpha = o, \ \beta = o$$

respective durch die Gleichungen

$$a'\beta + b\gamma + b''\alpha = o, \quad a''\gamma + b'\alpha + b\beta = o$$

repräsentirt sind.

Wir merken an, dass die Interpretation derselben Entwickelung nach dem System der Dreipunkt-Coordinaten in den Gleichungen

$$a\alpha + b'\gamma + b''\beta = o,$$
$$a'\beta + b\gamma + b''\alpha = o,$$
$$a''\gamma + b\beta + b'\alpha = o$$

die Pole der Seiten des Fundamentaldreiecks

$$\beta = o,\ \gamma = o,$$
$$\gamma = o,\ \alpha = o,$$
$$\alpha = o,\ \beta = o$$

erkennt.

329. Die Form der Gleichung, welche die von dem Punkte $\beta = o$, $\gamma = o$ ausgehenden Tangenten darstellt, leitet zu einer wichtigen Eigenschaft der Seiten eines umschriebenen Sechsecks und bietet damit ein nützliches Kennzeichen dar, um zu ermitteln, ob sechs gerade Linien einen Kegelschnitt berühren. Die Tangenten, welche respective von den Ecken des Fundamentaldreiecks ausgehen, sind ausgedrückt durch

$$(aa' - b''^2)\beta^2 + 2(ab - b'b'')\beta\gamma + (aa'' - b'^2)\gamma^2 = o,$$
$$(a'a'' - b^2)\gamma^2 + 2(a'b' - b''b)\gamma\alpha + (a'a - b''^2)\alpha^2 = o,$$
$$(a''a - b'^2)\alpha^2 + 2(a''b'' - bb')\alpha\beta + (a''a' - b^2)\beta^2 = o.$$

Wenn nun die Wurzeln der ersten Gleichung sind

$$\beta = k\gamma,\ \beta = k'\gamma,$$

so ist

$$kk' = \frac{aa'' - b'^2}{aa' - b''^2},$$

und die entsprechenden Grössen für die andern Gleichungen sind

$$\frac{a'a - b''^2}{a'a'' - b^2} \text{ und } \frac{a''a' - b^2}{a''a - b'^2},$$

so dass das Product derselben der Einheit gleich ist. Indem wir uns der Bedeutung des $k$ erinnern, wie sie im Art. 53 entwickelt ward, erkennen wir, dass für ein einem Kegelschnitt umschriebenes Sechseck, dessen Eckpunkte $A$, $F$, $B$, $D$, $C$, $E$ sind, die Relation

$$\frac{\sin EAB\,.\,\sin FAB\,.\,\sin FBC\,.\,\sin DBC\,.\,\sin DCA\,.\,\sin ECA}{\sin EAC\,.\,\sin FAC\,.\,\sin FBA\,.\,\sin DBA\,.\,\sin DCB\,.\,\sin ECB} = 1$$

gilt.

Durch die Substitution

$L\sqrt{(a'a'' - b^2)}$ für $\alpha$, $M\sqrt{(a''a - b'^2)}$ für $\beta$ und $N\sqrt{(aa' - b''^2)}$ für $\gamma$

gehen die Gleichungen der drei Paare gerader Linien in die Form über:

$$L^2 + M^2 - 2n'LM = o,$$
$$M^2 + N^2 - 2l'MN = o,$$
$$N^2 + L^2 - 2m'NL = o,$$

und wenn die Gleichungen dreier Paare von geraden Linien in diese Form gebracht werden können, so umhüllen sie alle denselben Kegelschnitt.

Wenn man diese Entwickelungen nach dem System der Dreipunkt-Coordinaten interpretirt, so liefern sie ein Kennzeichen für die Lage von sechs Punkten in einem Kegelschnitt; es ist die Relation von Carnot

$$\frac{Ac\,.\,Ac'\,.\,Ba\,.\,Ba'\,.\,Cb\,.\,Cb'}{Ab\,.\,Ab'\,.\,Bc\,.\,Bc'\,.\,Ca\,.\,Ca'} = 1,$$

in welcher $c, c'$; $a, a'$; $b, b'$ die auf den Seiten $AB$, $BC$, $CA$ des Fundamental-Dreiecks $ABC$ respective gelegenen Eckpunkte des eingeschriebenen Sechsecks sind, einerseits, und dieselben drei letzterhaltenen Gleichungen als Gleichungen dreier Punktepaare auf dem nämlichen Kegelschnitt andererseits.

330. Aus dem Artikel 328 ersehen wir, dass die Gleichung der Polare des Punktes $\beta = o$, $\gamma = o$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S = o$ durch die erste derivirte Gleichung von $S = o$, als eine Function von $\alpha$ betrachtet, dargestellt wird; in der Bezeichnung des Differential-Calculs schreiben wir diese derivirte Gleichung

$$\frac{dS}{d\alpha} = o.$$

Ebenso ist die Polare des Punktes $\alpha = o$, $\gamma = o$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S = o$ durch die erste derivirte Gleichung von $S = o$, als einer Function von $\beta$ oder durch $\frac{dS}{d\beta}$, und die Polare des Punktes $\alpha = o$, $\beta = o$ durch die erste derivirte Gleichung von $S = o$ als Function von $\gamma$ oder $\frac{dS}{d\gamma}$ repräsentirt, d. i. wenn die Gleichung eines Kegelschnitts in Gliedern der Gleichungen dreier geraden Linien ausgedrückt ist, so ist die Gleichung der Polare des Durchschnittspunktes von zweien dieser Geraden die erste Derivirte von der Gleichung des Kegelschnitts als einer Function der dritten geraden Linie.

Die früher gegebenen Gleichungen der Polaren sind specielle Fälle hiervon; z. B. die Gleichung der Polare des Coordinaten-Anfangspunktes in Bezug auf den Kegelschnitt

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxz + Eyz + Fz^2 = o,$$

nämlich

$$Dx + Ey + 2Fz = o,$$

die erste derivirte Gleichung der gegebenen nach der Veränderlichen $z$.

Wir erkennen ebenso, dass die früher gegebene Gleichung des Durchmessers, welcher die zur Achse der $x$ parallelen Sehnen halbirt, oder $2Ax + By + Dz = o,$ nichts anderes ist als

$$\frac{dS}{dx} = o,$$

und werden zeigen, dass dieser Durchmesser als die Polare des Punktes $z = o$, $x = o$ betrachtet werden kann, der in der Achse der $x$ in unendlicher Entfernung liegt.

*Aufg. 1.* Die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf diejenigen Kegelschnitte, welche durch dieselben vier festen Punkte gehen, geht stets durch einen festen Punkt. (Aufg. 3, Art. 111.)

Die Gleichung des Kegelschnitts muss von der Form

$$S + kS' = o$$

sein, wo $S = o$ und $S' = o$ irgend zwei der durch die vier Punkte gehenden Kegelschnitte repräsentiren. Die Polare eines Punktes $\beta = o$, $\gamma = o$ in Bezug auf ihn ist daher repräsentirt durch

$$\frac{d(S + kS')}{d\alpha} = o \text{ oder } \frac{dS}{d\alpha} + k\frac{dS'}{d\alpha} = o,$$

eine Gleichung, welche die unbestimmte Grösse $k$ nur im ersten Grade enthält und daher eine gerade Linie darstellt, die durch einen festen Punkt geht.

Wir können hier bemerken, dass die Achsen des Kegelschnitts

$$S + kS' = o$$

denen der Kegelschnitte $S = o$ und $S' = o$ parallel sind, wenn diese selbst unter einander parallel waren; denn sobald die Achsen von $S = o$ zu Coordinaten-Achsen gewählt werden, kann weder $S' = o$ noch auch

$$S + kS' = o$$

das Glied $xy$ enthalten.

Wäre $S' = o$ ein Kreis, so müssen folglich die Achsen von

$$S + kS' = o$$

denen von $S = o$ parallel sein, und wenn

$$S + kS' = o$$

sich auf ein Paar gerade Linien reducirt, so dass die Achsen dieses deformirten Kegelschnitts die beiden Halbirungslinien des von ihnen gebildeten Winkels sind, so erhalten wir den Satz, der im Art. 243 zur Construction des Krümmungskreises benutzt ward.

*Aufg.* 2. Welches ist der Ort des Pols einer geraden Linie $\gamma = o$ in Bezug auf alle die durch die nämlichen vier festen Punkte gehenden Kegelschnitte?

Wir haben $k$ zwischen den Gleichungen

$$\frac{dS}{d\alpha} + k\frac{dS'}{d\alpha} = o \text{ und } \frac{dS}{d\beta} + k\frac{dS'}{d\beta} = o$$

zu eliminiren, und erhalten als Gleichung des gesuchten Ortes

$$\frac{dS}{d\alpha} \cdot \frac{dS'}{d\beta} - \frac{dS}{d\beta} \cdot \frac{dS'}{d\alpha} = o,$$

die Gleichung eines Kegelschnitts. Wenn wir die gegebene gerade Linie in unendlicher Entfernung voraussetzen, so repräsentirt diese Gleichung den Ort der Centra für alle Kegelschnitte der Aufgabe. (Aufg. 4, Art. 111.)

*Aufg.* 3. Wenn zur Bestimmung eines Kegelschnitts zwei Punkte und zwei Tangenten desselben gegeben sind, so berührt die Polare eines festen Punktes in Bezug auf denselben einen Kegelschnitt.

Wir nehmen an, $L = o$, $M = o$ seien die Gleichungen der zwei gegebenen Tangenten, $R = o$ repräsentire die Gleichung der geraden Linie, welche die beiden festen Punkte verbindet, und

$$LM - N^2 = o$$

einen der Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen. Dann ist die Gleichung irgend eines andern unter diesen Kegelschnitten nothwendig von der Form $$LM - (N + kR)^2 = o,$$

und die Gleichung der Polare somit

$$2k^2R\frac{dR}{d\alpha} + 2k \cdot \frac{d(NR)}{d\alpha} + \frac{d(N^2 - LM)}{d\alpha} = o,$$

und dieselbe muss stets einen Kegelschnitt berühren, weil sie die unbestimmte Grösse $k$ im zweiten Grade enthält.

In derselben Art kann bewiesen werden, dass der Ort des Pols einer gegebenen Geraden ein Kegelschnitt ist.

Allgemein, wenn die Gleichung eines Kegelschnitts eine unbestimmte Grösse im zweiten Grade enthält, so berührt die Polare eines festen Punktes einen Kegelschnitt; so ist z. B. der Ort der Centra aller der Kegelschnitte, welche mit zwei gegebenen Kegelschnitten eine doppelte Berührung haben, ein Kegelschnitt.

331. Man soll die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes $(\alpha', \beta', \gamma')$ in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt finden.

Wir können die verlangte Gleichung durch eine ähnliche Methode erhalten, wie sie im Artikel 107 angewendet worden ist. Wenn $\alpha'$, $\alpha''$ die Längen der von zwei Punkten auf eine gegebene gerade Linie gefällten Senkrechten sind, so ist

$$\frac{l\alpha'' + m\alpha'}{l + m}$$

die Länge der Senkrechten, die man auf diese Linie von dem Punkte aus fällt, welcher die gerade Strecke zwischen den gegebenen Punkten im Verhältniss $l : m$ theilt.

Weil aber die Gleichungen in den Coordinaten des dreieckigen Systems vollkommen homogen sind, so erleiden sie keine Veränderung, wenn die Coordinaten eines Punktes alle durch dieselbe Grösse multiplicirt oder dividirt werden, und wir können daher $l\alpha'' + m\alpha'$, $l\beta'' + m\beta'$, $l\gamma'' + m\gamma'$ als die Coordinaten des Punktes betrachten, welcher die Strecke zwischen den Punkten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ und $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ im Verhältniss $l : m$ theilt.

Wenn wir diese Werthe in die allgemeine Gleichung $S = o$ substituiren, so haben wir zur Bestimmung der Punkte, in welchen dieser Kegelschnitt durch die Verbindungslinie von $(\alpha', \beta', \gamma')$ mit $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ geschnitten wird, die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}
&l^2(a\alpha''^2 + a'\beta''^2 + a''\gamma''^2 + 2b\beta''\gamma'' + 2b'\gamma''\alpha'' + 2b''\alpha''\beta'') \\
&+ 2lm[(a\alpha'' + b'\gamma'' + b''\beta'')\alpha' + (a'\beta'' + b''\alpha'' + b\gamma'')\beta' + (a''\gamma'' + b\beta'' + b'\alpha'')\gamma'] \\
&+ m^2(a\alpha'^2 + a'\beta'^2 + a''\gamma'^2 + 2b\beta'\gamma' + 2b'\gamma'\alpha' + 2b''\alpha'\beta') = o.
\end{aligned}$$

Wenn der Punkt $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ in der Polare von $(\alpha', \beta', \gamma')$ liegen soll, so muss der Coefficient von $lm$ in dieser Gleichung verschwinden, weil in diesem Falle die Verbindungslinie dieser Punkte durch den Kegelschnitt harmonisch getheilt werden muss. Die Gleichung der Polare ist daher

$$(a\alpha + b'\gamma + b''\beta)\alpha' + (a'\beta + b\gamma + b''\alpha)\beta' + (a''\gamma + b\beta + b'\alpha)\gamma' = o,$$

welche wir nach dem Früheren kürzer schreiben können

$$\alpha'\frac{dS}{d\alpha} + \beta'\frac{dS}{d\beta} + \gamma'\frac{dS}{d\gamma} = o.$$

Wenn der Punkt $(\alpha', \beta', \gamma')$ der Curve selbst angehört, so repräsentirt diese Gleichung die Tangente desselben.

Dieselbe Gleichung bezeichnet im System der Dreipunkt-Coordinaten den Pol der geraden Linie $(\alpha', \beta', \gamma')$ in Bezug auf den durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellten Kegelschnitt. Wenn diese Coordinaten der Gleichung der Curve genügen, so ist sie die Gleichung des Berührungspunktes, welcher der durch sie bestimmten Tangente entspricht. Wenn sie der unendlich entfernten Linie angehören, so dass

$$\alpha' = \beta' = \gamma',$$

so wird die Gleichung des Pols derselben, d. i. die Gleichung des Mittelpunkts der Curve

$$\frac{dS}{d\alpha} + \frac{dS}{d\beta} + \frac{dS}{d\gamma} = o.$$

*Aufg. 1.* Man soll die Gleichung des Paares von Tangenten am Kegelschnitt $S = o$ angeben, deren Berührungspunkte in der geraden Linie $\gamma = o$ liegen.

In diesem Falle ist für jeden der Berührungspunkte die Coordinate $\gamma'$ gleich Null, und die Gleichung der Tangente wird daher für einen solchen Punkt

$$\alpha' \frac{dS}{d\alpha} + \beta' \frac{dS}{d\beta} = o.$$

Die Berührungspunkte selbst bestimmen sich durch die Substitution $\gamma = o$ in die allgemeine Gleichung aus

$$a\alpha'^2 + 2b''\alpha'\beta' + a'\beta'^2 = o,$$

und die Elimination von $\alpha'$, $\beta'$ zwischen diesen Gleichungen liefert die Gleichung des Tangentenpaares

$$a\left(\frac{dS}{d\beta}\right)^2 - 2b''\frac{dS}{d\beta}\cdot\frac{dS}{d\alpha} + a'\left(\frac{dS}{d\alpha}\right)^2 = o,$$

welche anzeigt, dass diese Tangenten sich in dem Pol der geraden Linie $\gamma = o$ durchschneiden.

Als ein specieller Fall hiervon ergiebt sich die Gleichung der Asymptoten eines Kegelschnitts aus seiner Cartesischen Gleichung in der Form

$$A\left(\frac{dS}{dy}\right)^2 - B\frac{dS}{dy}\frac{dS}{dx} + C\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = o,$$

weil die Asymptoten nichts Anderes sind, als das Paar der Tangenten in den Punkten der Curve, welche dieselbe mit der unendlich entfernten geraden Linie $z = o$ gemein hat.

Auch für die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts in Dreilinien-Coordinaten lässt sich die Gleichung seiner Asymptoten als der Tangenten seiner unendlich entfernten Punkte entwickeln. Wir bemerken nur, dass für den Kegelschnitt

$$2b\beta\gamma + 2b'\gamma\alpha + 2b''\alpha\beta = o$$

und die eine Asymptote $a\alpha + b\beta + c\gamma = o$

die andere gefunden wird, als repräsentirt durch

$$\frac{\sin^2 A}{a}\alpha + \frac{\sin^2 B}{b}\beta + \frac{\sin^2 C}{c}\gamma = o.$$

*Aufg.* 2. Die geraden Linien, welche die Eckpunkte eines Dreiecks mit den entsprechenden Eckpunkten desjenigen Dreiecks verbinden, welches ihm in Bezug auf einen Kegelschnitt conjugirt ist, schneiden sich in einem Punkte.

Wir verstehen unter dem conjugirten Dreieck hier wie in Aufg. 3, Art. 302 dasjenige, dessen Seiten die Polaren der Ecken des ersteren Dreiecks in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

Zu dem Beweis des obigen Satzes führt die Bemerkung, dass das aus der Substitution der Coordinaten irgend eines Punktes (1) in die Gleichung der Polare von (2) entspringende Resultat mit demjenigen übereinstimmen muss, welches sich aus der Substitution der Coordinaten von (2) in die Polare von (1) ergiebt. Bezeichnen wir dies Resultat durch $t'''$ und repräsentiren wir ebenso die Resultate der Substitution der Coordinaten von (2) in die Gleichung der Polare von (3) und der Coordinaten von (3) in die Gleichung der Polare von (1) respective durch $t'$ und $t''$; lassen wir endlich die Gleichungen der drei Polaren der Ecken des ersten Dreiecks durch

$$P' = o, \; P'' = o, \; P''' = o$$

bezeichnet sein, so können die Gleichungen der Verbindungslinien correspondirender Ecken beider Dreiecke wie folgt erhalten werden. Die Gleichung einer durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$P'' = o, \; P''' = o$$

gehenden Geraden ist von der Form

$$P'' = k P''',$$

und wenn diese Linie durch den Punkt (1) geht, so liefert die Substitution der Coordinaten dieses Punktes in diese Gleichung nach den vorigen Festsetzungen die zur Bestimmung von $k$ dienende Gleichung

$$t''' = k t''.$$

Demnach ist die Gleichung der betrachteten Geraden

$$t'' P'' = t''' P''.$$

Die nämlichen Schlüsse führen zu den Gleichungen der beiden andern Verbindungslinien correspondirender Ecken, und die blosse Ansicht der drei Gleichungen dieser Geraden

$$t' P' = t'' P'', \; t'' P'' = t''' P''', \; t''' P''' = t' P'$$

zeigt, dass sie sich in einem Punkte schneiden.

*Aufg.* 3. Die Durchschnittspunkte der correspondirenden Seiten zweier Dreiecke, welche in Bezug auf einen Kegelschnitt einander conjugirt sind, liegen in einer geraden Linie.

Nach Artikel 59 können wir die Gleichung der geraden Linie, welche die Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$ und $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ verbindet, in der Form

$$l P' + m P'' + n P''' = o$$

schreiben.

Wir erinnern, dass die Substitution der Coordinaten des ersten Punktes in die Gleichungen

$$P' = o,\ P'' = o,\ P''' = o$$

die Resultate $s', t''', t''$ liefert, während sich durch die Substitution der Coordinaten des zweiten Punktes $t''', s'', t'$ ergeben. Die Gleichung der Verbindungslinie ergiebt sich dadurch in der Form

$$(t't''' - s''t'')P' + (t''t''' - s't')P'' + (s's'' - t'''^2)P''' = o.$$

Ebenso erhalten wir die Gleichungen der andern Seiten des ersten Dreiecks in der Form

$$(t't'' - s'''t''')P' + (s's''' - t''^2)P'' + (t''t''' - s't')P''' = o,$$
$$(s''s''' - t'^2)\ P' + (t't'' - s'''t''')P'' + (t't''' - s''t'')P''' = o.$$

Die Durchschnittspunkte dieser Seiten des ersten mit den entsprechenden des zweiten Dreiecks liegen in der geraden Linie

$$\frac{P'}{t''t''' - s't'} + \frac{P''}{t't''' - s''t''} + \frac{P'''}{t't'' - s'''t'''} = o.$$

*Aufg. 4.* Das Doppelschnittsverhältniss von vier Punkten einer geraden Linie ist das nämliche, wie das ihrer vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Die Richtigkeit des Satzes ist augenscheinlich, wenn wir die Coordinaten der vier Punkte

$$l\alpha' + m\alpha'',\ l'\alpha' + m'\alpha'',\ l''\alpha' + m''\alpha'',\ l'''\alpha' + m'''\alpha''$$

mit den Gleichungen der vier Polaren zusammenstellen, als welche sind

$$lP' + mP'' = o,\ l'P' + m'P'' = o,\ l''P' + m''P'' = o,\ l'''P' + m'''P'' = o.$$

*Aufg. 5.* Man soll die Gleichung des Kegelschnitts $S = o$ durch die linearen Functionen $P', P'', P'''$ ausdrücken.

Aus den Grundsätzen des Gebrauchs dreiseitiger Punkt-Coordinaten ergiebt sich, dass die Gleichung des Kegelschnitts in der Form

$$AP'^2 + A'P''^2 + A''P'''^2 + 2BP''P''' + 2B'P'''P' + 2B''P'P'' = o$$

geschrieben werden kann. Wenn wir nun nach den im gegenwärtigen Artikel entwickelten Gesetzen die Gleichung der Polare des Punktes $(\alpha', \beta', \gamma')$ schreiben, dessen Coordinaten in diesem Systeme durch $s', t''', t''$ ausgedrückt sind, so ist dieselbe

$$(As' + B't'' + B''t''')P' + (A't''' + Bt'' + B''s')P''$$
$$+ (A''t'' + Bt''' + B's')P''' = o.$$

Damit diese Gleichung mit $P' = o$, welche die Polare des betrachteten Punktes darstellt, identisch werde, müssen die Bedingungen

$$A't''' + Bt'' + B''s' = o,\ A''t'' + Bt''' + B's' = o$$

erfüllt sein. Ebenso liefern die analogen Entwickelungen über die Polaren der andern beiden Eckpunkte die vier Bedingungsgleichungen

$$At''' + B't' + B''s'' = o,\ \ A''t' + Bs'' + B't''' = o,$$
$$At'' + B's''' + B''t' = o,\ \ A't' + Bs''' + B''t'' = o.$$

Diese sechs Bedingungsgleichungen reichen zur Bestimmung der sechs unbekannten Coefficienten $A$, $A'$, $A''$, $B$, $B'$, $B''$ aus, und durch Substitution ergiebt sich alsdann die Gleichung des Kegelschnitts in der verlangten Form wie folgt:

$$(s''s''' - t'^2)P'^2 + (s's''' - t''^2)P''^2 + (s's'' - t'''^2)P'''^2 + 2(t''t''' - s't')P''P'''$$
$$+ 2(t't''' - s''t'')P'P''' + 2(t't'' - s'''t''')P'P'' = o.$$

*Aufg.* 6. In einen Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma$ die Coordinaten der Spitze des Dreiecks sind, so finden wir, wie im Art. 107, die Coordinaten des Punktes, wo die gerade Verbindungslinie der Punkte $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ den Kegelschnitt ferner schneidet, indem wir in die Gleichung der Curve

$$l\alpha + m\alpha', \; l\beta + m\beta', \; l\gamma + n\gamma'$$

für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ substituiren; dies liefert, weil der Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ in der Curve ist $\quad 2lmP' + m^2 s' = o, \; \frac{m}{l} = -\frac{2P'}{s'}$,

so dass die Coordinaten des fraglichen Punktes sind

$$s'\alpha - 2P'\alpha', \; s'\beta - 2P'\beta', \; s'\gamma - 2P'\gamma'.$$

Wenn diese Werthe in die Ausdrücke $P'$, $P''$, $P'''$ substituirt werden, so giebt dies die Resultate

$$-P's', \; s'P'' - 2t'''P', \; s'P''' - 2t''P'.$$

Ebenso ergeben sich die Coordinaten des Punktes, in welchem die Verbindungslinie von $(\alpha, \beta, \gamma)$ mit $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ den Kegelschnitt ferner schneidet, in diesem System als

$$s''P' - 2t'''P'', \; -s''P'', \; s''P''' - 2t'P''.$$

Die Bedingung, unter welcher diese Punkte mit $(t'', t', s''')$ in einer geraden Linie liegen, ist

$$P'^2 s''(s'''t''' - t't'') + P''^2 s'(s'''t''' - t't'') + P'P''(4t't''t''' - 2s'''t'''^2 - s''t''^2 - s't'^2)$$
$$+ P'P'''s'(s''t'' - t't''') + P''P's''(s't' - t''t''') = o.$$

Die Spitze des verlangten Dreiecks wird somit als Durchschnitt des gegebenen Kegelschnitts mit einem andern bestimmt, aber die Lösung nimmt, wie wir schon nach dem Früheren vermuthen dürfen, eine einfachere Form an, wenn wir von der eben gefundenen Gleichung die mit $t'''$ multiplicirte in der letzten Aufgabe entwickelte Kegelschnittsgleichung subtrahiren; denn wir erhalten:

$$(P't' + P''t'' - P'''t''')[P'(t't''' - s''t'') + P''(t''t' - s't') + P'''(s's'' - t'''^2)] = o.$$

Aus der zweiten Aufgabe des gegenwärtigen Artikels erkennt man, dass der erste Factor in diesem Product dieselbe gerade Linie repräsentirt, welche in der Auflösung desselben Satzes in Artikel 302, Aufg. 3 beschrieben worden ist. Der zweite Factor ist für die geometrische Auflösung ohne Werth, denn er repräsentirt (vergl. Aufg. 3) die gerade Verbindungslinie der Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$; und obgleich jeder

der Punkte, in welchen diese Linie die Curve schneidet, die Bedingung erfüllt, welche wir analytisch ausgedrückt haben, nämlich, dass die Schnittpunkte der geraden Verbindungslinie desselben mit den Punkten $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ mit dem Kegelschnitt in einer durch den Punkt $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$ gehenden geraden Linie liegen, so können doch diese Linien, weil sie zusammenfallen, hier nicht Seiten eines Dreiecks sein.

*Aufg.* 7. Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben, so wird jede Tangente des einen im Berührungspunkt in den Punkten, in welchen sie den andern, und in dem Punkte, in welchem sie die Berührungssehne beider Kegelschnitte schneidet, harmonisch getheilt.

Wenn wir in der Gleichung

$$S + R^2 = o$$

die Ausdrücke $\quad l\alpha' + m\alpha'',\ l\beta' + m\beta'',\ l\gamma' + m\gamma''$

für $\alpha, \beta, \gamma$ substituiren, wobei wir voraussetzen, dass die Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ der Gleichung $S = o$ genügen, so erhalten wir

$$(lR' + mR'')^2 + 2lm\,t''' = o.$$

Wenn die Verbindungslinie der Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ den Kegelschnitt

$$S + R^2 = o$$

berühren soll, so muss diese Gleichung ein vollständiges Quadrat sein, und dies kann nur eintreten, wenn $t''' = -2R'R''$ ist; dadurch wird die Gleichung in

$$(lR' - mR'')^2 = o$$

übergeführt und der Satz ist damit bewiesen.

*Aufg.* 8. Die Mittelpunkte aller der demselben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte liegen in der geraden Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen dieses Vierecks verbindet.

Denn sind $\quad \alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \delta = o$

die Gleichungen seiner vier Ecken — wir gebrauchen Dreipunkt-Coordinaten — so ist die Gleichung des fraglichen Systems von Kegelschnitten

$$\alpha\gamma = k\beta\delta,$$

und daher die Gleichung des Centrums für einen unter ihnen

$$\alpha + \gamma = k(\beta + \delta).$$

Die Gleichung des Mittelpunktes der Diagonale $\alpha = o,\ \gamma = o$ ist aber

$$\alpha + \gamma = o,$$

und die des Mittelpunktes von $\beta = o,\ \delta = o$ oder

$$\beta = o,\ l\alpha + m\beta + n\gamma = o,$$

wo

$$l + m + n = 1$$

ist,

$$\beta + \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n} = o$$

Damit ist der Satz bewiesen. (Vergl. Art. 71, Aufg. 4.)

332. Wir haben bereits früher die Gleichung eines **Kegelschnitts gegeben, welcher einem Dreieck umschrieben ist**,

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = o$$

(Art. 134), und können genau in derselben Art, wie im Art. 135, beweisen, dass die Tangenten des Kegelschnitts in den Eckpunkten des Dreiecks durch

$$l\beta + m\alpha = o, \; m\gamma + n\beta = o, \; n\alpha + l\gamma = o$$

dargestellt sind, und dass die drei Punkte, in welchen dieselben die Gegenseiten des Dreiecks schneiden, in einer geraden Linie liegen, deren Gleichung

$$\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{\gamma}{n} = o$$

ist; sowie endlich, dass die Verbindungslinien der Eckpunkte mit den Gegenecken des umschriebenen Dreiecks, deren Gleichungen

$$\frac{\alpha}{l} - \frac{\beta}{m} = o, \; \frac{\beta}{m} - \frac{\gamma}{n} = o, \; \frac{\gamma}{n} - \frac{\alpha}{l} = o$$

sind, sich in einem Punkte durchschneiden.

**Man soll die Gleichung eines Kegelschnitts finden, welcher dem Dreieck $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ umschrieben ist und sein Centrum in dem Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$ hat.**

Die Polare eines beliebigen Punktes ist nach Art. 331

$$\alpha'(m\gamma + n\beta) + \beta'(n\alpha + l\gamma) + \gamma'(l\beta + m\alpha) = o.$$

Es wird nun offenbar in der Aufgabe gefordert, $l$, $m$, $n$ so zu bestimmen, dass diese Gleichung eine unendlich entfernte gerade Linie repräsentire. (Art. 100.)

Im Art. 65 fanden wir die Gleichung einer unendlich entfernten geraden Linie $\quad a\alpha + b\beta + c\gamma = o$,
wo durch $a$, $b$, $c$ die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks repräsentirt werden; um die gegenwärtige Gleichung auf diese Form zu bringen, hat man

$$l = \alpha'(b\beta' + c\gamma' - a\alpha'); \; m = \beta'(a\alpha' + c\gamma' - b\beta'); \; n = \gamma'(a\alpha' + b\beta' - c\gamma')$$

zu setzen. In der nämlichen Weise können wir $l$, $m$, $n$ so bestimmen, dass die Polare des Punktes $(\alpha', \beta', \gamma')$ eine gegebene gerade Linie $\quad A\alpha + B\beta + C\gamma = o$
wird, indem wir statt $a$, $b$, $c$ respective $A$, $B$, $C$ schreiben.

Wenn drei Punkte eines Kegelschnitts und eine vierte Bedingung gegeben sind, so liefert diese eine Relation zwischen $l, m, n,$ und indem man in diese Relation die eben gefundenen Werthe einsetzt, kann man den Ort der Centra des Kegelschnitts oder der Pole irgend einer gegebenen geraden Linie bestimmen. Wenn z. B. ein vierter Punkt des Kegelschnitts gegeben ist, so muss die Bedingung

$$\frac{l}{\alpha''} + \frac{m}{\beta''} + \frac{n}{\gamma''} = o$$

erfüllt sein und der Ort der Centra aller der einem Viereck umschriebenen Kegelschnitte ist durch

$$\frac{\alpha(b\beta + c\gamma - a\alpha)}{\alpha''} + \frac{\beta(a\alpha + c\gamma - b\beta)}{\beta''} + \frac{\gamma(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{\gamma''} = o$$

repräsentirt, d. h. er ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte des gegebenen Vierecks geht.

Wenn dagegen eine Tangente des Kegelschnitts gegeben wäre, so müsste man haben

$$\sqrt{lA} + \sqrt{mB} + \sqrt{nC} = o,$$

als die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt die gerade Linie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

berührt. (Art. 308, Aufg. 6.)

Aus drei Punkten und einer Tangente bestimmt sich daher der Ort des Centrums durch die Gleichung

$$\sqrt{[A\alpha(b\beta + c\gamma - a\alpha)]} + \sqrt{[B\beta(a\alpha + c\gamma - b\beta)]} + \sqrt{[C\gamma(b\beta + a\alpha - c\gamma)]} = o,$$

d. h. er ist eine Curve, die im Allgemeinen vom vierten Grade ist.

333. Die Gleichung eines in ein Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts kann in einer von den Formen (Art. 136)

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = o,$$

oder

$$l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 - 2mn\beta\gamma - 2nl\gamma\alpha - 2lm\alpha\beta = o$$

geschrieben werden.

Die Gründe des Artikels 137 beweisen, dass die geraden Linien $AD$, $BE$, $CF$ (Fig. 112, pag. 372), welche man von den Ecken des Dreiecks nach den Berührungspunkten des Kegelschnitts mit den respectiven Gegenseiten ziehen kann, sich in einem Punkte schneiden, und durch die Gleichungen

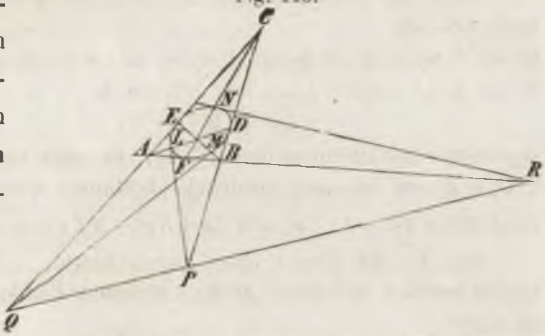
$$m\beta - n\gamma = o,\quad n\gamma - l\alpha = o,\quad l\alpha - m\beta = o$$

repräsentirt werden; dass die Tangenten des Kegelschnitts in den Punkten, welche diese Geraden ausser jenen Berührungs-Punkten der Dreiecksseiten noch mit ihm gemein haben,

$LP$, $MQ$, $NR$,

den Gleichungen

Fig. 113.




$$2m\beta + 2n\gamma - l\alpha = o,\quad 2n\gamma + 2l\alpha - m\beta = o,\quad 2l\alpha + 2m\beta - n\gamma = o$$

entsprechen und den entsprechenden Dreiecksseiten $BC$, $CA$, $AB$ in Punkten $P$, $Q$, $R$ einer geraden Linie begegnen, deren Gleichung

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

ist. Auch bilden die geraden Linien $CA$, $CF$, $CB$, $CR$ ein harmonisches Büschel, denn ihre Gleichungen sind respective

$$\beta = o,\quad l\alpha - m\beta = o,\quad \alpha = o,\quad l\alpha + m\beta = o.$$

Wenn man die Berührungspunkte bestimmt, welche der Kegelschnitt mit den Seiten des Dreiecks haben soll, z. B. durch die Gleichzeitigkeit der drei Paare von Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha &= o, & \beta - \gamma &= o, \\ \beta &= o, & \gamma - \alpha &= o, \\ \gamma &= o, & \alpha - \beta &= o, \end{aligned}$$

so dass sie den entwickelten Gesetzen genügen, so lässt sich die Gleichung des Kegelschnitts bestimmen. In dem gewählten Falle müssen die Bedingungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 - 2mn &= o, \\ n^2 + l^2 - 2nl &= o, \\ l^2 + m^2 - 2mn &= o, \end{aligned}$$

d. h.

$$l = m = n,$$

so dass die Gleichung des Kegelschnittes ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha - 2\alpha\beta = o.$$

Man soll die Gleichung eines Kegelschnitts finden, der dem Dreieck $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ eingeschrieben ist und dessen Centrum mit dem gegebenen Punkte $(\alpha', \beta', \gamma')$ zusammenfällt.

Die Polare eines Punktes in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist nach Art. 331

$$\alpha l(m\beta' + n\gamma' - l\alpha') + \beta m(l\alpha' + n\gamma' - m\beta') + \gamma n(l\alpha' + m\beta' - n\gamma') = o.$$

Wenn diese gerade Linie mit der durch

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = o$$

repräsentirten zusammenfallen soll, so müssen die Coefficienten $l, m, n$ durch folgende Ausdrücke bestimmt sein

$$l = L(M\beta' + N\gamma' - L\alpha');\, m = M(L\alpha' + N\gamma' - M\beta');\, n = N(L\alpha' + M\beta' - N\gamma').$$

Der Ort der Centra eines Kegelschnitts, welcher drei gerade Linien berührt und durch einen gegebenen Punkt $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ geht, ist durch

$$\sqrt{[a\alpha''(b\beta + c\gamma - a\alpha)]} + \sqrt{[b\beta''(a\alpha + c\gamma - b\beta)]} + \sqrt{[c\gamma''(a\alpha + b\beta - c\gamma)]} = o$$

dargestellt, d. i. ein Kegelschnitt, welcher die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks berührt, welches durch die drei gegebenen Tangenten gebildet wird.

Wenn der Kegelschnitt eine vierte gegebene Linie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

berührt, so muss nach Art. 308, Aufg. 6, die Relation gelten

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = o;$$

der Ort der Centra ist daher durch

$$\frac{a(b\beta + c\gamma - a\alpha)}{A} + \frac{b(a\alpha + c\gamma - b\beta)}{B} + \frac{c(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{C} = o$$

dargestellt, und ist also eine gerade Linie.

Wenn der einem Dreieck $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ umschriebene Kegelschnitt $\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = o$ einen demselben Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt

$$\sqrt{L\alpha} + \sqrt{M\beta} + \sqrt{N\gamma} = o$$

berühren soll, so muss nach der Anmerkung der Aufgabe 6 im Artikel 308 die Bedingung

$$(lL)^{\frac{1}{3}} + (mM)^{\frac{1}{3}} + (nN)^{\frac{1}{3}} = o$$

erfüllt sein; wir können auch ebenso den Ort des Centrums eines Kegelschnitts finden, der einem Dreieck eingeschrieben ist und einen demselben Dreieck umschriebenen Kegelschnitt berührt, oder umgekehrt.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher fünf gegebene gerade Linien berührt, kann auch leicht entwickelt werden; wenn diese geraden Linien durch

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ A\alpha + B\beta + C\gamma = o,\ A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = o,$$

dargestellt sind, so gelten die beiden Bedingungsgleichungen

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = o,\ \frac{l}{A'} + \frac{m}{B'} + \frac{n}{C'} = o$$

und wir können aus denselben $l : m$ und $l : n$ bestimmen.

*Aufg. 1.* Welches ist die Gleichung des Kegelschnitts, der die fünf geraden Linien

$$\alpha = o,\ \beta = o,\ \gamma = o,\ \alpha + \beta + \gamma = o,\ 2\alpha + \beta - \gamma = o$$

berührt?

Wir haben $l + m + n = o$ und $\frac{1}{2} l + m - n = o$.
Die geforderte Gleichung ist daher

$$2(-\alpha)^{\frac{1}{2}} + (3\beta)^{\frac{1}{2}} + (\gamma)^{\frac{1}{2}} = o.$$

*Aufg. 2.* Man soll die Gleichung des Kegelschnitts bestimmen, welcher die geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ in ihren Mittelpunkten berührt.

*Aufl.* $$(a\alpha)^{\frac{1}{2}} + (b\beta)^{\frac{1}{2}} + (c\gamma)^{\frac{1}{2}} = o.$$

*Aufg. 3.* Unter welcher Bedingung repräsentirt die Gleichung

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} = o$$

eine Parabel?

*Aufl.* Die Curve berührt die unendlich entfernte gerade Linie, wenn

$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = o$$

ist.

*Aufg. 4.* Den Ort des Brennpunkts einer Parabel zu finden, welche die drei geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ berührt.

Wenn die Coordinaten eines Brennpunktes in einem Kegelschnitt, der dem Fundamental-Dreieck eingeschrieben ist, $\alpha', \beta', \gamma'$ sind, so sind die geraden Linien, welche ihn mit den Ecken des Dreiecks verbinden, durch

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},\ \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha}$$

dargestellt; und weil die nach dem andern Brennpunkt gehenden Geraden mit den Seiten des Dreiecks dieselben Winkel bilden (Art. 191), so sind dieselben nach Art. 57

$$\alpha'\alpha = \beta'\beta,\ \beta'\beta = \gamma'\gamma,\ \gamma'\gamma = \alpha'\alpha,$$

und die Coordinaten des andern Brennpunkts sind

$$\frac{1}{\alpha'},\ \frac{1}{\beta'},\ \frac{1}{\gamma'}.$$

Wenn die Gleichung des durch den einen Brennpunkt beschriebenen Ortes gegeben ist, so können wir demnach ohne Weiteres die Gleichung des durch den andern beschriebenen Ortes angeben; wenn der zweite Brennpunkt im Unendlichen ist, d. h. wenn

$$\alpha''\sin A + \beta''\sin B + \gamma''\sin C = o,$$

so liegt der erste in dem Kreise

$$\frac{\sin A}{\alpha'} + \frac{\sin B}{\beta'} + \frac{\sin C}{\gamma'} = o.$$

Die Coordinaten des im Unendlichen gelegenen Brennpunkts einer Parabel sind $\frac{l}{\sin^2 A},\ \frac{m}{\sin^2 B},\ \frac{n}{\sin^2 C},$ denn diese Werthe genügen ebensowohl der Gleichung

$$\alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C = o,$$

als auch der andern

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = o.$$

In Folge dessen sind denn die Coordinaten des endlichen Brennpunktes

$$\frac{\sin^2 A}{l},\ \frac{\sin^2 B}{m},\ \frac{\sin^2 C}{n}.$$

*Aufg.* 5. Die Gleichung der Directrix dieser Parabel zu finden.

Indem wir nach Art. 331 die Gleichung der Polare des Punktes bilden, dessen Coordinaten so eben gegeben worden sind, finden wir

$$l\alpha(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A) + m\beta(\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B)$$
$$+ n\gamma(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) = o,$$

oder

$$l\alpha\ \sin B.\sin C.\cos A + m\beta.\ \sin C\sin A\cos B + n\gamma\sin A\sin B\cos C = o.$$

Indem man nach Aufgabe 3 für $n$ seinen Werth substituirt, erhält man die Gleichung

$$l\sin B\sin C(\alpha\cos A - \gamma\cos C) + m\sin C\sin A(\beta\cos B - \gamma\cos C) = o;$$

die Directrix geht also stets durch den Durchschnitt der Höhen des Dreiecks. (Vergl. Aufg. 3, Art. 56; Aufg. 2, Art. 229.)

Ueberall in den Betrachtungen der letzten Artikel kann an die Stelle des Dreilinien-Coordinaten-Systems das System der Dreipunkt-Coordinaten gesetzt werden. Dann ist

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = o$$

die Gleichung eines dem Dreieck $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ eingeschriebenen Kegelschnitts, und man erkennt z. B. sofort aus der Betrachtung der Coefficienten-Summe, dass die allgemeine Gleichung der einem Dreieck eingeschriebenen Parabel

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} = \frac{l+m}{\gamma}$$

sein muss.

Auch kann man aus jener leicht die Gleichung des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises ableiten und erhält sie in der Form

$$\beta\gamma \cot \tfrac{1}{2}A + \gamma\alpha \cot \tfrac{1}{2}B + \alpha\beta \cot \tfrac{1}{2}C = o.$$

Dagegen bezeichnet alsdann die Gleichung

$$\sqrt{(l\alpha)} + \sqrt{(m\beta)} + \sqrt{(n\gamma)} = o$$

allgemein einen dem Fundamental-Dreieck umschriebenen Kegelschnitt, und die Gleichungen

$$l\alpha - m\beta = o, \quad m\beta - n\gamma = o, \quad n\gamma - l\alpha = o$$

repräsentiren die Punkte, in welchen die Tangenten des Kegelschnitts in den Ecken des Fundamental-Dreiecks die Gegenseiten desselben schneiden.

Für den umschriebenen Kreis erhält man mit Hülfe dieser Bemerkung die Gleichung

$$\sin A \sqrt{\alpha} + \sin B \sqrt{\beta} + \sin C \sqrt{\gamma} = o.$$

Man kann aus diesen Gleichungen die der Mittelpunkte dieser Kreise und aus ihnen die Construction derselben mit Benutzung der Art. 67 und 70 leicht ableiten.

334. Die vorhergehenden Entwickelungen enthalten eine bedeutende Anzahl von Belegen für die grossen Vortheile, welche die Anwendung dreiseitiger Coordinaten der analytisch-geometrischen Untersuchung insbesondere dadurch gewährt, dass die durch sie erhaltenen Gleichungen homogen sind. Indem wir hier auf die Bedeutung dieses Umstandes und die Tragweite seiner Folgen näher eingehen, müssen wir, um uns zugleich in den Besitz des für solche Untersuchungen geeignetsten Algorithmus zu setzen, einige Betrachtungen einflechten, die zunächst rein algebraisch erscheinen; indess wird ihr geometrischer Sinn bald genug zu Tage treten.

Wir bezeichnen durch das Symbol $a_{r,s}$ eine mit den Indices $r$, $s$ veränderliche Grösse, und lassen die Indices alle ganzzahligen

Werthe von 1 bis $n$ durchlaufen, wo $n$ selbst eine ganze Zahl ist. Die algebraische Summe der $1 . 2 . 3 \ldots . n$ Producte jener Grössen, welche man erhält, indem man in dem Producte $a_{1,1} . a_{2,2} . a_{3,3} \ldots . a_{n,n}$ die zugehörigen Indices in allen möglichen Arten permutirt, und in welcher die Vorzeichen der einzelnen Producte nach einem gewissen Gesetz bestimmt werden, heisst die Determinante derselben; die einzelnen Grössen werden ihre Elemente genannt. Man kann dieselbe sonach durch

$$\Sigma(\pm a_{1,1} . a_{2,2} \ldots . a_{n,n})$$

bezeichnen, indem man $\Sigma$ als das Zeichen für eine Summe gleichartiger Grössen benutzt.

Eine solche Determinante besitzt augenscheinlich $n^2$ Elemente, und dieselben lassen sich nach der Uebereinstimmung der Indices in horizontale und verticale Reihen ordnen, so dass die bezeichnete Determinante in der folgenden Schreibweise eine vollständige Uebersicht ihrer Elemente darbietet:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3}, & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}, & \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma(\pm a_{1,1} . a_{2,2} . a_{3,3} \ldots . a_{n,n}).$$

Jedes der Producte, deren algebraische Summe die Determinante bildet, enthält nach der Definition aus jeder Verticalreihe und aus jeder Horizontalreihe dieser quadratischen Anordnung einen und nur einen Factor.

335. Wenn man das unter dem Summenzeichen stehende und dadurch zur Vertretung aller andern erwählte Product

$$a_{1,1} . a_{2,2} . a_{3,3} \ldots . a_{n,n}$$

als das erste Glied und als positiv bezeichnet, so erhält jedes andre Glied das positive oder negative Zeichen, je nachdem es aus diesem ersten durch eine gerade oder ungerade Zahl von Permutationen der Indices erhalten wird. Das Glied $a_{1,1} . a_{2,3} . a_{3,2} . a_{4,4}$ z. B. geht aus dem entsprechenden ersten durch eine einzige Permutation der Indices hervor und muss daher negativ gesetzt werden; das Glied $a_{1,4} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} \cdot a_{4,1}$ ist positiv, weil es aus dem ersten durch zweimalige Permutation der Indices erhalten wird. *Bei jeder Permutation der Indices wechselt das Zeichen*, und so ist das letzterwähnte Glied auch positiv, weil es aus dem Vorigen durch eine einzige Permutation abgeleitet werden kann.

Um statt der doppelten Indices einfache zu bekommen, kann man auch die Elemente derselben Horizontal- oder Verticalreihe durch übereinstimmende und von denen der andern abweichende Buchstaben unterscheiden und z. B. schreiben

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix} = \Sigma \pm A_1\, B_2\, C_3\, D_4.$$

Doch ist dies nicht immer zur Förderung der Klarheit geeignet.

Die ausführlichere Aufschreibung einer solchen Determinante hat vor der einfacheren und gedrängteren doch den wesentlichen Vorzug, dass man in ihr Veränderungen der einzelnen Elemente anschaulich verfolgen kann.

336. Diese Definitionen erlauben das auf die angegebene Art bezeichnete Aggregat, welches wir Determinante nennen, in voller Ausdehnung zu schreiben, z. B.

$$\Sigma \pm a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{2,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} + a_{3,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{2,3}$$
$$- a_{1,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{2,3} - a_{2,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{1,3}.$$

Die blosse Uebersicht dieser Entwicklung zeigt, dass dieselbe mit der folgenden identisch ist

$$a_{1,1}\,(a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,2} \cdot a_{2,2}) - a_{2,1}(a_{1,2} \cdot a_{3,3} - a_{3,2} \cdot a_{1,3})$$
$$+ a_{3,1}(a_{1,2} \cdot a_{2,3} - a_{2,2} \cdot a_{1,3}),$$

oder dass man hat:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,2}, & a_{2,3} \end{vmatrix}.$$

Es ergiebt sich aus dem Bildungsgesetz, dass darin eine allgemeine Regel enthalten ist, die wir dahin aussprechen können, *dass die Entwicklung einer Determinante der $n^{ten}$ Ordnung sich aus $n$ Producten aus je einem Gliede einer und derselben Reihe und einer Determinante aus den Gliedern aller der Horizontal- und Verticalreihen,* in denen jenes Glied nicht enthalten ist, zusammensetzt, und das von diesen ein jedes das positive oder negative Vorzeichen erhält, je nachdem die Indices seines ersten Factors beide zugleich oder nicht zugleich gerade oder ungerade sind.

Nach derselben kann jede Determinante leicht entwickelt werden, z. B.

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3.$$

Man sieht, dass die hier gewählte Determinante den Flächeninhalt eines Dreiecks darstellt, sobald ihre Elemente $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ die Cartesischen Coordinaten seiner Eckpunkte repräsentiren.

Wenn dagegen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Coordinaten dreier Punkte in einem System dreiseitiger Punkt-Coordinaten darstellen, so drückt die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} = o,$$

oder $$\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2, & \gamma_2 \\ \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1, & \gamma_1 \\ \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1, & \gamma_1 \\ \beta_2, & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = o$$

aus, dass diese drei Punkte in einer und derselben geraden Linie liegen; wären dieselben Elemente die Coordinaten dreier geraden Linien in einem System dreipunktiger Linien-Coordinaten, so sagt die nämliche Bedingung, dass diese geraden Linien durch einen und denselben Punkt gehen.

337. Wir treten solchen geometrischen Anwendungen, die zunächst nur noch in der Art merkwürdiger oder unerwarteter Uebereinstimmungen erscheinen könnten, um Vieles näher, indem wir von der rein formalen Definition, mit der wir begonnen haben, zur Betrachtung einer Hauptquelle solcher Formen übergehen; diese ist die Elimination.

Das Resultat der Elimination von $n$ Veränderlichen zwischen $n$ linearen und homogenen Gleichungen heisst die Determinante dieses Systems von Gleichungen*).

Wir beweisen die Identität der so definirten Determinanten mit den aus den vorigen Erklärungen hervorgehenden durch eine Reihe von Beispielen.

Aus den beiden Gleichungen

$$A_1 x + B_1 y = o,$$
$$A_2 x + B_2 y = o$$

eliminiren wir die Veränderlichen z. B. dadurch, dass wir die erste Gleichung mit $B_2$, die zweite mit $B_1$ multipliciren und das letztere Product vom erstern abziehen; nach Unterdrückung des gemeinsamen Factors $x$ erhalten wir

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = o.$$

Die Elimination zwischen den Gleichungen

$$A_1 x + A_2 y = o,$$
$$B_1 x + B_2 y = o$$

liefert dasselbe Resultat.

Wenn man die dreigliederigen Gleichungen

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = o,$$
$$B_1 x + B_2 y + B_3 z = o$$

hat, so vollzieht man die Elimination, indem man $x$ und $y$ zuerst durch $z$ ausdrückt und die erhaltenen Werthe in die Original-Gleichungen einsetzt.

Die Multiplication der ersten Gleichung mit $B_2$, der zweiten mit $A_2$ und die dann vollzogene Subtraction eliminirt $y$, und liefert

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A_3, & B_3 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} z = o.$$

---

*) In dieser Form von Resultaten der Elimination hat Leibnitz die Determinanten zuerst angewandt (1693); als ihr zweiter Erfinder ist Cramer (1750) zu bezeichnen. Der Name Determinante ist zuerst von Gauss und Cauchy gebraucht worden.

Zahlreiche historische Notizen findet man in dem vortrefflichen Buche: Theorie und Anwendung der Determinanten. Von Dr. R. Baltzer. Leipzig 1857.

Wir nennen sonst noch die ausgezeichnete Arbeit: *Théorie des Déterminants etc. Par le Dr. F. Brioschi*, vom Jahre 1854, die in der mehrfach bereicherten französischen Uebersetzung von Dr. Combescure (Paris 1856) im Folgenden an einigen Stellen benutzt ist.

Durch Multiplication der ersten Gleichung mit $B_1$, der zweiten mit $A_1$ und nachherige Subtraction eliminiren wir $x$ und erhalten

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} z = o.$$

Durch die Substitution der aus beiden Gleichungen erhaltenen Werthe von $x$ und $y$ in die gegebenen Gleichungen ergeben sich die Identitäten

$$A_1 \begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} A_3, & B_3 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = o,$$

$$B_1 \begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} + B_2 \begin{vmatrix} A_3, & B_3 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = o.$$

In derselben Weise findet man:

$$A_1 \begin{vmatrix} B_2, & C_2 \\ B_1, & C_1 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} C_2, & A_2 \\ C_1, & A_1 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} = o,$$

$$A_2 \begin{vmatrix} B_2, & C_2 \\ B_1, & C_1 \end{vmatrix} + B_2 \begin{vmatrix} C_2, & A_2 \\ C_1, & A_1 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} = o.$$

338. Darnach kann die Elimination zwischen den Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1z = o,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = o,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z = o$$

vollzogen werden, indem man die erste mit

$$\begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix},$$

die zweite mit
$$\begin{vmatrix} A_3, & B_3 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix},$$

die dritte mit
$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}$$

multiplicirt und die Producte addirt; denn die Coefficienten von $x$ und $y$ verschwinden nach dem Vorigen, und man erhält

$$C_1 \begin{vmatrix} A_2, & B_2 \\ A_3, & B_3 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_3, & B_3 \\ A_1, & B_1 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} = o$$

oder

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = o.$$

Diese Determinante kann auch in den Formen

$$A_1 \begin{vmatrix} B_2, C_2 \\ B_3, C_3 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} B_3, C_3 \\ B_1, C_1 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} B_1, C_1 \\ B_2, C_2 \end{vmatrix} =$$

$$B_1 \begin{vmatrix} C_2, A_2 \\ C_3, A_3 \end{vmatrix} + B_2 \begin{vmatrix} C_3, A_3 \\ C_1, A_1 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} C_1, A_1 \\ C_2, A_2 \end{vmatrix} = o$$

geschrieben werden.

Ueberhaupt ist das Resultat der Elimination aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1\omega + \ldots &= o, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2\omega + \ldots &= o, \\ &\vdots \\ A_nx + B_ny + C_nz + D_n\omega + \ldots &= o \end{aligned}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & B_2, & C_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & C_3, & \ldots \\ \vdots \\ A_n, & B_n, & C_n, & \ldots \end{vmatrix} = o.$$

339. Die Vergleichung der vorher bezeichneten Formen der Determinante, welche wir durch die Elimination zwischen Gleichungen mit drei Veränderlichen erhielten, zeigt, dass

$$\begin{vmatrix} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix}$$

ist.

Dass dies ganz allgemein richtig ist, d. h. dass eine Determinante ihren Werth nicht ändert, wenn man ihre Verticalreihen zu Horizontalreihen macht und umgekehrt, geht aus dem Bildungsgesetz der Determinanten bereits hervor.

Wir knüpfen daran eine Bemerkung in Betreff der Zeichen der Determinanten; sie ist in den folgenden Formeln ausgesprochen:

$$\begin{vmatrix} a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_1, b_1, c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_1, c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_3, b_3, c_3 \\ a_2, b_2, c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_3, c_3 \\ b_2, c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_1, c_1 \\ b_3, c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_2, c_2 \\ b_1, c_1 \end{vmatrix}.$$

Wenn irgend zwei Reihen in einer Determinante mit einander vertauscht werden, so wechselt sie ihr Vorzeichen.

Wenn zwei Reihen identisch sind, so ist der Werth der Determinante Null; denn die Vertauschung dieser Reihen müsste nach dem Vorigen den Wechsel des Zeichens hervorrufen, indess doch die Vertauschung zweier identischen Reihen unmöglich den Werth der Determinante verändern kann; derselbe muss somit Null sein.

Der Satz von Pascal kann sehr leicht durch die Betrachtung der Determinanten bewiesen werden. In der That, sei $ABCDEF$ das eingeschriebene Sechseck, betrachte man das Dreieck $ACE$ als Fundamental-Dreieck und repräsentire seine Seiten $AC$, $CE$, $EA$ respective durch $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$,
so kann man die Seiten des Sechsecks durch die folgenden Gleichungen repräsentiren

$$\begin{array}{ll} AB \text{ durch } \alpha = c_1\gamma, & BC \text{ durch } \alpha = b_1\beta, \\ CD \text{ durch } \beta = a_2\alpha, & DE \text{ durch } \beta = c_2\gamma, \\ EF \text{ durch } \gamma = b_3\beta, & FA \text{ durch } \gamma = a_3\alpha. \end{array}$$

Alsdann ist die Gleichung eines durch $A$, $C$, $E$ gehenden Kegelschnitts von der Form

$$\frac{l}{\alpha} + \frac{m}{\beta} + \frac{n}{\gamma} = o,$$

und damit derselbe durch $B$, $D$ und $F$ gehe, müssen die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} l + mb_1 + nc_1 &= o, \\ la_2 + m + nc_2 &= o, \\ la_3 + mb_3 + n &= o \end{aligned}$$

erfüllt sein; die sechs Punkte liegen also in einem Kegelschnitt, wenn

$$\begin{vmatrix} 1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & 1, & c_2 \\ a_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix} = o$$

ist.

Wenn die Durchschnittspunkte von $AB$ und $DE$, $BC$ und $EF$ und von $CD$ und $FA$, in einer und derselben geraden Linie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o$$

liegen sollen, so müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} Ac_1 + Bc_2 + C\ \ &= o, \\ Ab_1 + B\ \ + Cb_3 &= o, \\ A\ \ + Ba_2 + Ca_3 &= o \end{aligned}$$

erfüllt sein, oder dies geschieht unter derselben Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & 1, & c_2 \\ a_3, & b_3, & 1 \end{vmatrix} = o,$$

unter welcher die sechs Punkte $A, B, C, D, E, F$ in einem Kegelschnitt liegen.

340. Aus der Definition ergiebt sich auch die folgende Eigenschaft der Determinanten: Wenn man in einer Determinante alle Elemente einer Reihe mit demselben Factor multiplicirt, so ist die Determinante selbst mit diesem Factor multiplicirt; denn jedes Glied ihrer Entwicklung enthält jenen Factor und enthält ihn nur einmal.

Aus demselben Grunde kann eine Determinante als die Summe zweier andern Determinanten angesehen werden, sobald die Elemente einer Reihe alle als Summen zweier andern erscheinen; d. h.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1, & b_1+\beta_1, & c_1+\gamma_1 \\ a_2 & , b_2 & , c_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix},$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1, & b_1+\beta_1, & c_1+\gamma_1 \\ a_2+\alpha_2, & b_2+\beta_2, & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & , b_1 & , c_1 \\ a_2+\alpha_2, & b_2+\beta_2, & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_1 & , \beta_1 & , \gamma_1 \\ a_2+\alpha_2, & b_2+\beta_2, & c_2+\gamma_2 \\ a_3 & , b_3 & , c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Man sieht leicht, welch ungemeiner Reichthum von statthaften Umformungen daraus hervorgeht. Einen besonders erwähnenswerthen Fall bezeichnen wir durch das folgende Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+\alpha b_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+\alpha b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\alpha b_1+\beta c_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+\alpha b_2+\beta c_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+\alpha b_3+\beta c_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

341. In der Aufgabe des Art. 31 haben wir den Satz angeführt: **Wenn eine gerade Linie sich um einen festen Punkt $O$ dreht, und die Schenkel eines festen Winkels vom Scheitel $A$ in den Punkten $B$, $C$ schneidet, so ist die Summe der reciproken Werthe der Flächenzahlen der Dreiecke $OBA$, $OCA$ constant.**

Der Beweis dieses Satzes kann durch die Betrachtung der Determinanten geliefert werden. Wir nehmen an, $x_1$, $y_1$, $z_1$ seien die Coordinaten des Punktes $A$, $x_2$, $y_2$, $z_2$ die des Punktes $O$; alsdann sind die der Punkte $B$ und $C$ von der Form

$$x_3 = x_1 + \alpha a, \quad y_3 = y_1 + \alpha b;$$
$$x_4 = x_1 + \beta c, \quad y_4 = y_1 + \beta d,$$

wenn $a$, $b$, $c$, $d$ gegebene Grössen, $\alpha$, $\beta$ aber unbestimmte Coefficienten sind, welche der die Punkte $B$, $C$ bestimmenden Transversale entsprechen.

Dann ist

$$2\varDelta ABO = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y^2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_1 & , y_1 \\ 1, & x_2 & , y_2 \\ 1, & x_1 + \alpha a, & y_1 + \alpha b \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ a & , b \end{vmatrix};$$

und ebenso

$$2\varDelta ACO = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_4, & y_4 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_1 & , y_1 \\ 1, & x_1 + \beta c, & y_1 + \beta d \\ 1, & x_2 & , y_2 \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ c & , d \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varDelta ABO} + \frac{1}{\varDelta ACO}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ \alpha a - \beta c, & \alpha b - \beta d \end{vmatrix}}{\alpha\beta \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ a & , b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ c & , d \end{vmatrix}}.$$

Da aber die drei Punkte $B$, $C$, $O$ in einer geraden Linie liegen, so hat man

$$\begin{vmatrix} 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \\ 1, & x_4, & y_4 \end{vmatrix} = o.$$

und somit

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ \alpha a - \beta c, & \alpha b - \beta d \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} b, & a \\ d, & c \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 + \alpha a, & y_1 - y_2 + \alpha b \\ x_1 - x_2 + \beta c, & y_1 - y_2 + \beta d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + \alpha a - \beta c, & y_1 - y_2 + \alpha b - \beta d \\ x_1 - x_2 + \beta c, & y_1 - y_2 + \beta d \end{vmatrix}$$

folglich $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varDelta AOB}+\frac{1}{\varDelta AOC}\right)=\dfrac{\begin{vmatrix} b, & a \\ d, & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ a\ , & b \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2 \\ c\ , & d \end{vmatrix}}$,

ein von den unbestimmten, durch die Drehung der Transversalen veränderlichen Grössen $\alpha$, $\beta$, unabhängiger Ausdruck.

342. Auch die Resultate der Elimination zwischen Gleichungen höherer Grade können in der Form von Determinanten ausgedrückt werden. Man weiss, dass ein solches Eliminations-Resultat die Bedingung liefert, unter welcher die Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Wenn dies der Fall ist, so muss unter den Resultaten der Substitution der aus der einen Gleichung erhaltenen Wurzelwerthe in die andere eines mit Null identisch und somit das Product aller dieser Substitutions-Resultate selbst Null sein. Das bezeichnete Product kann aber als eine symmetrische Function der Wurzeln der ersten Gleichung durch die Coefficienten derselben ausgedrückt werden und erscheint alsdann als das Resultat der Elimination zwischen beiden Gleichungen. Hat man z. B. die beiden Gleichungen

$$ax^2+bxy+cy^2=o,\ a'x^2+b'xy+c'y^2=o,$$

und sind $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der ersten Gleichung, so ist das Product der Substitutions-Resultate derselben in die zweite Gleichung

$$(a'\alpha^2+b'\alpha+c')(a'\beta^2+b'\beta+c')=a'^2\alpha^2\beta^2+a'b'\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ +b'^2\alpha\beta+a'c'(\alpha^2+\beta^2)+b'c'(\alpha+\beta)+c'^2.$$

Aber es ist $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, also nach einer einfachen Umformung:

$$(a'c-ac')^2+(a'b-ab')(bc'-b'c)=o.$$

Dies ist identisch mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & o \\ o, & a, & b, & c \\ a', & b', & c', & o \\ o, & a', & b', & c' \end{vmatrix}=o.$$

Euler gab *) ein Verfahren, durch welches die Eliminations-Resul-

*) Histoire de l'Acad. de Berlin. 1794. p. 96.

tante zwischen zwei Gleichungen vom $m^{ten}$ und $n^{ten}$ Grade leicht erhalten werden kann. Es ist in dem folgenden Raisonnement niedergelegt: Wenn die beiden Gleichungen, in ihre durch die Wurzeln bestimmten binomischen Factoren zerlegt gedacht, einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so muss das nämliche Resultat erhalten werden, wenn wir die erste Gleichung mit den übrigen $(n-1)$ Factoren der zweiten und die zweite mit den übrigen $(m-1)$ Factoren der ersten multipliciren. Das Product jener Factoren ist eine Function des $(n-1)^{ten}$ Grades und die Multiplication mit ihr führt daher $n$ neue Constanten in die Rechnung ein; das Product dieser letzteren Factoren ist eine Function $(m-1)^{ten}$ Grades, durch welche $m$ Constanten eintreten; die Ergebnisse beider Multiplicationen sind vom $(m+n-1)^{ten}$ Grade, und wenn wir beide Glied für Glied vergleichen, so erhalten wir $(m+n)$ Gleichungen, aus denen wir die $(m+n)$ neu eingeführten Constanten eliminiren können. Das Resultat der Elimination zwischen diesen $(m+n)$ Gleichungen ersten Grades ist mit dem identisch, welches man durch die Elimination zwischen den beiden gegebenen Gleichungen erhält und es erscheint in Form einer Determinante. Wir wählen als Beispiel die Gleichungen

$$ax^2+bxy+cy^2=o,\ a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+d'y^3=o.$$

Die Multiplication derselben mit

$$Ax^2+Bxy+Cy^2 \text{ und } A'x+B'y$$

liefert durch Vergleichung der entsprechenden Glieder die Bedingungen

$$\begin{array}{lllr} Aa & & -A'a' & =o, \\ Ab+Ba & & -A'b'-B'a' & =o, \\ Ac+Bb+Ca & & -A'c'-B'b' & =o, \\ & Bc+Cb & -A'd'-B'c' & =o, \\ & Cc & -B'd' & =o, \end{array}$$

und die Elimination der fremden Coefficienten $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ zwischen diesen giebt

$$\begin{vmatrix} a, & o, & o, & a', & o \\ b, & a, & o, & b', & a' \\ c, & b, & a, & c', & b' \\ o, & c, & b, & d', & c' \\ o, & o, & c, & o, & d' \end{vmatrix} = o.$$

343. Bézout's gleichzeitige Methode*) lässt sich aus folgendem Beispiel erkennen. Um die Elimination zwischen den Gleichungen

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = o,\quad a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 = o$$

auszuführen, multipliciren wir die erste mit $a_1$, die zweite mit $a$, und entfernen durch Subtraction das erste Glied; das durch $y$ theilbare Resultat ist

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a, & c \\ a', & c' \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} a, & d \\ a', & d' \end{vmatrix} y^2 = o.$$

Durch Multiplication der ersten Gleichung mit $a'x + b'y$ und der zweiten mit $ax + by$ erhalten wir ebenso ein durch $y^2$ theilbares Resultat und daraus

$$\begin{vmatrix} a, & c \\ a', & c' \end{vmatrix} x^2 + \left\{ \begin{vmatrix} a, & d \\ a', & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix} \right\} xy + \begin{vmatrix} b, & d \\ b', & d' \end{vmatrix} y^2 = o.$$

Endlich multipliciren wir die erste Gleichung mit

$$a'x^2 + b'xy + c'y^2$$

und die zweite mit $\quad ax^2 + bxy + cy^2$,

und erhalten ebenso wie vorher

$$\begin{vmatrix} a, & d \\ a', & d' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} b, & d \\ b', & d' \end{vmatrix} xy + \begin{vmatrix} c, & d \\ c', & d' \end{vmatrix} y^2 = o.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich die Grössen

$$x^2,\ xy,\ y^2$$

linear eliminiren, und wir erhalten eine Determinante, deren Elemente selbst Determinanten sind und deren entwickelte Form ist:

$$\begin{vmatrix} ab' - a'b, & ac' - a'c, & ad' - a'd \\ ac' - a'c, & ad' - a'd + bc' - b'c, & bd' - b'd \\ ad' - a'd, & bd' - b'd, & cd' - c'd \end{vmatrix} = o.$$

344. Endlich erwähnen wir die Gestalt, welche M. Sylvester**) dem Verfahren der Elimination gegeben hat. Man multiplicirt die Gleichung des $m^{ten}$ Grades mit

$$x^{n-1},\ x^{n-2}y,\ x^{n-3}y^2$$

u. s. w., und die des $n^{ten}$ mit

$$x^{m-1},\ x^{m-2}y,\ x^{m-3}y^2$$

u. s. w., und erhält so $(m + n)$ Gleichungen, aus denen die Grössen $\quad x^{m+n-1},\ x^{m+n-2}y$

*) Histoire de l'Acad. de Paris. 1764. p. 298.

**) Philosoph. Mag. 1840.

u. s. w. linear eliminirt werden können. Das Eliminationsresultat enthält dann keine der Veränderlichen mehr und ist auch das der gegebenen Gleichungen.

So liefern die cubischen Gleichungen

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = o,\quad a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 = o$$

die folgende Reihe von sechs Gleichungen

$$\begin{array}{l}
ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 = o, \\
\qquad ax^4y + bx^3y^2 + cx^2y^3 + dxy^4 = o, \\
\qquad\qquad ax^3y^2 + bx^2y^3 + cxy^4 + dy^5 = o, \\
a'x + b'x^4y + c'x^3y^2 + d'x^2y^3 = o, \\
\qquad a'x^4y + b'x^3y^2 + c'x^2y^3 + d'xy^4 = o, \\
\qquad\qquad a'x^3y^2 + b'x^2y^3 + c'xy^4 + dy^5 = o.
\end{array}$$

Die Elimination liefert alsdann die Determinante

$$\begin{vmatrix}
a, & b, & c, & d, & o, & o \\
o, & a, & b, & c, & d, & o \\
o, & o, & a, & b, & c, & d \\
a', & b', & c', & d', & o, & o \\
o, & a', & b', & c', & d', & o \\
o, & o, & a', & b', & c', & d'
\end{vmatrix} = o.$$

Wie die Determinantenform auf das Problem der Elimination aus Gleichungen höherer Grade mit drei Veränderlichen angewendet wird, mag hier zunächst ununtersucht bleiben.

345. Wir schliessen daran die wichtigste aller Eigenschaften der Determinanten in dem Satze: das Product zweier Determinanten ist eine Determinante, welche die Summe der Producte aus den Elementen einer Reihe der einen in die entsprechenden Elemente einer Reihe der andern zu ihren Elementen hat; d. i.

$$\begin{vmatrix}
a_1, & b_1, & c_1 \\
a_2, & b_2, & c_2 \\
a_3, & b_3, & c_3
\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\
\alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\
\alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3
\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\
a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\
a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3
\end{vmatrix}.$$

Um diesen Satz sogleich in seiner ganzen Wichtigkeit zu erkennen, beweisen wir ihn aus den Betrachtungen der Elimination und leiten damit zugleich die Ausdrucksweise desselben ab, welche der geometrischen Anwendung am nächsten steht. Der Beweis des gewählten speciellen Falles ist allgemein anwendbar. Die Determinante, welche wir als das Product der beiden ersteren bezeichnet haben, ist das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen

$$\begin{aligned}(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)x &+ (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2)y \\ &+ (a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3)z = o, \\ (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1)x &+ (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)y \\ &+ (a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3)z = o, \\ (a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)x &+ (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2)y \\ &+ (a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3)z = o.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können durch die Substitutionen

$$\begin{aligned}\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z &= X, \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z &= Y, \\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z &= Z\end{aligned}$$

in der Form

$$\begin{aligned}a_1 X + b_1 Y + c_1 Z &= o, \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z &= o, \\ a_3 X + b_3 Y + c_3 Z &= o\end{aligned}$$

geschrieben werden; aus diesen erhalten wir aber durch Elimination die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = o$$

und erkennen, dass dieselbe ein Factor in dem Resultate der Elimination aus den gegebenen Gleichungen sein muss. Dasjenige System von Werthen der Veränderlichen $x, y, z$, welches den Gleichungen

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o$$

gleichzeitig genügt, würde aber augenscheinlich die drei gegebenen Gleichungen auch befriedigen, und es muss daher die Determinante der Substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

auch ein Factor der Determinante der gegebenen Gleichungen sein

Und wenn man endlich beachtet, dass jedes Glied der erstgenannten Determinante vom dritten Grade in den Elementen ist, ebenso wie jedes der zweiten, dass aber jedes Glied in der Determinante des gegebenen Systems vom sechsten Grade in den Elementen $a_1$, $\alpha_1$, $a_2$, $\alpha_2$ u. s. w. ist, so kann diese nur das Product jener beiden ohne Einmischung eines fremden Factors sein.

Der Beweis lässt sich auch auf die Betrachtungen des Artikels 340 gründen, aber in der hier gegebenen Form erlaubt er uns, den Satz von der Multiplication der Determinanten in der folgenden wichtigen Form auszudrücken:

Wenn ein System von linearen Gleichungen
$a_1X+b_1Y+c_1Z=o,\ a_2X+b_2Y+c_2Z=o,\ a_3X+b_3Y+c_3Z=o$
durch die Substitutionen
$X=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z,\ Y=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z,\ Z=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z$
transformirt wird, so ist die Determinante des transformirten Systems das Product aus der Determinante des Originalsystems in die Determinante der Transformation. Man pflegt diese letztere den Modulus der Transformation zu nennen.

346. Wir erwähnen die zunächstliegende geometrische Bedeutung des Vorhergehenden.

Wenn drei gerade Linien sich in demselben Punkte schneiden, so müssen ihre Gleichungen so beschaffen sein, dass dieselben zusammengehörigen Werthe der Veränderlichen als Coordinaten jenes Punktes allen drei Gleichungen genügen. Dies geschieht nur dann, wenn das durch die Elimination der Veränderlichen erhaltene Ergebniss durch die Coefficienten der Gleichung bewährt ist. Sind die Gleichungen der geraden Linie in Cartesischen Coordinaten gegeben, so ergiebt sich diese Bedingung, indem man aus den beiden ersten Gleichungen die Coordinaten des Durchschnittspunktes ableitet und die erhaltenen Werthe an Stelle der Veränderlichen in die dritte Gleichung substituirt. (Siehe Artikel 34, vergl. Artikel 30). Sind die Gleichungen der geraden Linien in punktuellen Dreiseits-Coordinaten gegeben, also homogene Gleichungen zwischen drei Veränderlichen, so liefert die Elimination der Veränderlichen die fragliche Bedingung. In beiden Fällen muss die Determinante des Systems von Gleichungen gleich Null sein, wenn die geraden Linien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben sollen.

Ganz das Nämliche gilt von der Frage nach der Bedingung, unter welcher drei Punkte in einer geraden Linie liegen, wenn man lineare Dreiecks-Coordinaten angewendet hat.

Auch bei diesen einfachsten Problemen der analytischen Geometrie hat der Satz von der Multiplication der Determinanten schon seine Bedeutung. Dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden, oder dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen, ist eine Eigenschaft der von jenen Geraden oder Punkten gebildeten Figur, welche von der Lage des Coordinatensystems völlig unabhängig ist; wenn das Vorhandensein dieser Eigenschaft durch die Identität irgend einer Function der in den Gleichungen jener geraden Linien oder Punkte auftretenden Constanten mit Null angezeigt wird, so muss diese Identität auch nach jeder beliebigen Coordinaten-Transformation noch fortbestehen. Die allgemeine Coordinaten-Transformation entspricht aber genau einem speciellen Falle von dem, was man sonst eine lineare Substitution nennt, d. h. der Substitution von Werthen von der Form

$$X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad Y = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad Z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

an Stelle der ursprünglichen Variabeln $X$, $Y$, $Z$. (Vergl. Artikel 9, 10). Da nun die Determinante der transformirten Gleichungen das Product ist aus der Determinante der ursprünglichen Gleichungen und der Determinante der Substitution, so ist sie stets mit jener zugleich Null und die Uebereinstimmung des analytischen Ergebnisses mit dem geometrischen Sinn desselben ist offenbar.

347. Wir verweilen einen Augenblick bei derjenigen speciellen Form der linearen Substitution, welche mit der Transformation der Coordinaten gleichbedeutend ist.

Wenn wir beide Systeme als rechtwinklig und als vom nämlichen Anfangspunkte voraussetzen, sodass die Achsen des einen als $Ox$, $Oy$, die des andern als $OX$, $OY$ bezeichnet werden mögen, so lassen sich die Transformations-Formeln in der Form schreiben

$$x = X \cos xOX + Y \cos xOY,$$
$$y = X \cos yOX + Y \cos yOY.$$

Dabei unterscheiden wir, ob die Winkel beider Achsen-Systeme durch Drehungen von einerlei oder zweierlei Sinn erzeugt sind und setzen für den ersteren Fall:

$$xOY = xOX + XOY,\ yOX = yOx + xOX,$$
$$yOY = yOx + xOX + XOY;$$

und wegen $\qquad xOy = 90^0 = XOY$

$$\cos xOY = -\sin xOX,\ \cos yOX = \sin xOX,\ \cos yOY = \cos xOX.$$

Dagegen ist für den zweiten Fall oder

$$xOy = 90^0,\ XOY = -90^0,$$
$$\cos xOY = \sin xOX,\ \cos yOX = \sin xOX,\ \cos yOY = -\cos xOX.$$

Beim Uebergang zu einem System von gleichem Drehungssinne ist daher eine Substitution von den Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xOX, & -\sin xOX \\ \sin xOX, & \cos xOX, \end{matrix}$$

beim Uebergang zu einem System von entgegengesetztem Drehungssinne aber die Substitution von den Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xOX, & \sin xOX, \\ \sin xOX, & -\cos xOX \end{matrix}$$

zu machen; die Determinante jener Substitution ist $+1$, die dieser letzteren $-1$.

Die Coordinaten-Transformationen rechtwinkliger Cartesischer Systeme sind also gleichbedeutend mit linearen Substitutionen, deren Determinante $= \pm 1$ ist, oder für welche das Quadrat der Determinante der positiven Einheit gleich ist.

348. Wir wissen, dass eine solche Substitution die Eigenschaft haben muss, dass die Summe der Quadrate der alten Veränderlichen von der Summe der Quadrate der neuen Veränderlichen nicht abweicht. (Art. 10, Aufg. 5.) Man kann ebenso wohl diese Eigenschaft aus jener vorherangegebenen als umgekehrt jene aus dieser ableiten; man hat die durch dieselben ausgezeichnete Substitution als eine orthogonale bezeichnet und darf sie auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen übertragen.

Wenn nämlich eine Function der Veränderlichen $X, Y, Z$ durch die Substitution
$$X = a_1x + b_1y + c_1z + \ldots.$$
$$Y = a_2x + b_2y + c_2z + \ldots.$$
$$Z = a_3x + b_3y + c_3z + \ldots.$$
u. s. w. transformirt, so dass
$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = X^2 + Y^2 + Z^2 \ldots$$
ist,

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften:

$$\begin{array}{l}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \qquad = 1, \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots \qquad = 1, \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots \qquad = 1, \\
\vdots \\
\dots\dots\dots\dots\dots ; \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots = 0, \\
a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots = 0, \\
b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + \dots = 0, \\
\vdots \\
\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}$$

weil

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 + \dots = {} & X^2 + Y^2 + Z^2 + \dots \\
= {} & (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \dots)^2 \\
& + (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \dots)^2 + \dots \\
= {} & x^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots) + y^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots) + \dots \\
& + 2xy (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots) + \dots
\end{aligned}$$

ist.

Das Quadrat der Determinante einer solchen Substitution ist $= 1$, weil

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \dots \\ a_2, & b_2, & c_2, & \dots \\ a_3, & b_3, & c_3, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \dots \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \dots \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

ist, wenn man setzt

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \qquad , \\
\alpha_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots , \\
\alpha_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots , \\
\vdots \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\beta_1 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + \dots , \\
\beta_2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots \qquad , \\
\beta_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + \dots , \\
\vdots \\
\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \ldots, \\
\gamma_2 &= c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 + \ldots, \\
\gamma_3 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots \quad, \\
&\vdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

u. s. w.

In Folge des Vorhergehenden reducirt sich aber die letzte Determinante auf ihr Anfangsglied

$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots . = 1,$$

weil alle die Glieder derselben auf der einen Seite der Diagonalreihe $\alpha_2, \alpha_3, \beta_3$, u. s. w. verschwinden.

Ueberdies genügen die Coefficienten jener Substitution auch den Identitäten

$$\begin{aligned}
a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + \ldots \quad &= 1, \\
a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + \ldots \quad &= 1, \\
&\vdots \\
a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + \ldots &= 0, \\
a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 + \ldots &= 0, \\
a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 + \ldots &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

u. s. w., doch sind sie durch das Vorige schon genugsam charakterisirt.

Die $n^2$ Coefficienten einer solchen Substitution sind durch

$$n + \frac{n(n-1)}{2}$$

Bedingungsgleichungen verbunden und können daher als Functionen von $\quad n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$

unbestimmten Grössen angesehen werden.

349. Die Anwendung, die wir zunächst beifügen, knüpft an die Aufgabe 6 des Artikels 233 an.

Wenn $x'y', x''y'', x'''y'''$ die Coordinaten dreier Punkte einer Ellipse sind, so kann der Inhalt des von ihnen gebildeten Dreiecks durch die Halbachsen der Ellipse und die den Seiten des Dreiecks parallelen Halbdurchmesser derselben ausgedrückt werden, wie folgt: Wir setzen

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = A, \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 = C, \quad \frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} - 1 = F,$$

$$\frac{x''x'''}{a^2} + \frac{y''y'''}{b^2} - 1 = E, \quad \frac{x'x'''}{a^2} + \frac{y'y'''}{b^2} - 1 = D, \quad \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} = B.$$

Bezeichnen wir sodann den Inhalt des Dreiecks durch $M$, so kann derselbe ebensowohl durch die Determinante

$$\pm \frac{a\,b}{2} \begin{vmatrix} \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & 1 \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & 1 \\ \frac{x'''}{a}, & \frac{y'''}{b}, & 1 \end{vmatrix} = M,$$

als durch die andere

$$\mp \frac{a\,b}{2} \begin{vmatrix} \frac{x'}{a}, & \frac{y'}{b}, & -1 \\ \frac{x''}{a}, & \frac{y''}{b}, & -1 \\ \frac{x'''}{a}, & \frac{y'''}{b}, & -1 \end{vmatrix} = M$$

ausgedrückt werden. (Vergl. Art. 31.)

Wenn wir nach der allgemeinen Multiplicationsregel das Product dieser Determinanten bilden, so erhalten wir mit Hilfe der obigen Symbole

$$\frac{a^2 b^2}{4} \begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} = M^2,$$

und durch Entwicklung

$$M = \frac{a\,b}{2} \left(A E^2 + C D^2 + F B^2 - 2 B D E - A C F\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ist das Dreieck der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eingeschrieben, so ist

$$A = 0, \quad C = 0, \quad F = 0$$

und die Grössen $B$, $D$, $E$ lassen sich wie folgt ausdrücken: Wir nennen $g, h, k$ die Seiten des Dreiecks und $G, H, K$ die ihnen respective parallelen Halbdurchmesser der Ellipse; dann ist

$$-2E = \frac{(x''-x''')^2}{a^2} + \frac{(y''-y''')^2}{b^2} = \frac{g^2}{G^2},$$

$$-2D = \frac{(x'-x''')^2}{a^2} + \frac{(y'-y''')^2}{b^2} = \frac{h^2}{H^2},$$

$$-2B = \frac{(x'-x'')^2}{a^2} + \frac{(y'-y'')^2}{b^2} = \frac{k^2}{K^2};$$

somit
$$M = \tfrac{1}{4}\, ab \cdot \frac{ghk}{GHK},$$

welcher Ausdruck, wie man leicht sieht, sofort aus den Gleichungen jener Aufgabe über den Halbmesser des umschriebenen Kreises unsres Dreiecks hervorgeht.

350. Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf solche Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte gehen und eine gegebene gerade Linie berühren. Wir lassen die Coordinaten der Punkte durch $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$ und die laufenden Coordinaten durch $x, y, z$ bezeichnet sein und setzen

$$\begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma \\ a, b, c \end{vmatrix} = u, \quad \begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \end{vmatrix} . s = v, \quad \begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ a, b, c \end{vmatrix} = w,$$

indem wir $a, b, c, s$ als willkürliche Coefficienten betrachten. Alsdann ist

$$uw - v^2 = o$$

die Gleichung eines Kegelschnittts, welcher durch die zwei gegebenen Punkte geht, weil jede der durch $u, v$ $w$ bezeichneten Determinanten durch die Voraussetzung

$$x = \alpha, \ y = \beta, \ z = \gamma$$

ebensowohl, als durch

$$x = \alpha', \ y = \beta', \ z = \gamma'$$

mit Null identisch wird. Wir bezeichnen ferner durch

$$lx + my + nz = o$$

die gegebene gerade Linie.

Aus den Gesetzen der Determinanten ergiebt sich die Identität

$$\begin{vmatrix} lx + my + nz, & x, & y, & z \\ l\alpha + m\beta + n\gamma, & \alpha, & \beta, & \gamma \\ l\alpha' + m\beta' + n\gamma', & \alpha', & \beta', & \gamma' \\ la + mb + nc, & a, & b, & c \end{vmatrix} s = o.$$

Wir denken diese Determinante nach den Gliedern der ersten Verticalreihe zerlegt und bringen dadurch und mit Hilfe der Substitutionen

$$\begin{vmatrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ a, b, c \end{vmatrix} = D,$$

$$\begin{aligned} (l\alpha' + m\beta' + n\gamma')s &= A, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma &= -B, \\ (l\alpha + m\beta + n\gamma)s &= -C, \end{aligned}$$

die vorige Identität in die Form

$$(lx + my + nz)Ds + Au + Bv + Cw = o.$$

Aus derselben schliessen wir, dass

$$lx + my + nz = o$$

mit

$$Au + Bv + Cw = o$$

identisch, ist und drücken nun die Bedingung aus, unter welcher die durch die letztere dargestellte gerade Linie den Kegelschnitt

$$uw - v^2 = o$$

berührt.

Die gemeinschaftlichen Punkte der beiden bezeichneten Oerter befriedigen die Gleichung

$$Au + Cw + B\sqrt{(uw)} = o$$

oder

$$(Au + Cw)^2 - B^2uw = o,$$

und damit dieselbe gleiche Wurzeln habe, muss

$$B^2 = 4AC$$

und in Folge dessen auch

$$B^2v^2 = 4ACuw$$

sein.

Durch

$$-Bv = (lx + my + nz)Ds + Au + Cw$$

erhält man

$$[Au + Cw + (lx + my + uz)Ds]^2 = 4ACuw$$

und daraus

$$[\sqrt{(Au)} + \sqrt{(Cw)}]^2 + (lx + my + nz)Ds = o,$$

oder

$$\sqrt{(Au)} + \sqrt{(Cw)} + \sqrt{(lx + my + nz)} \cdot \sqrt{(Ds)} \cdot \sqrt{-1} = o.$$

Wenn wir hierin die Werthe von $A, C, D, u, w$ einsetzen und den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{s}$ unterdrücken, so wird die Gleichung des Kegelschnitts

$$\sqrt{(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(l\alpha + m\beta + n\gamma)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(lx + my + nz)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)} = o.$$

In dieser Form ist die Gleichung völlig symmetrisch zu den Identitäten

$$lx + my + nz = o.$$

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \end{vmatrix} = o, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix} = o,$$

welche drei gerade Linien repräsentiren.

351. Wenn man verlangt, dass der gesuchte Kegelschnitt die zwei Punkte $\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha', \beta', \gamma'$ enthalten und die drei geraden Linien

$$l_1x + m_1y + n_1z = o,\ l_2x + m_2y + n_2z = o,\ l_3x + m_3y + n_3z = o$$

berühren soll, so müssen die drei Gleichungen

$$\sqrt{(l_1\alpha' + m_1\beta' + n_1\gamma')}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(l_1x + m_1y + n_1z)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \end{vmatrix}\right)} = o.$$

$$\sqrt{(l_2\alpha' + m_2\beta' + n_2\gamma')}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha, \beta, \gamma \\ a, b, c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} x, y, z \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ a, b, c \end{vmatrix}\right)}$$

$$+ i\sqrt{(l_2x + m_2y + n_2z)}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma' \\ a, b, c \end{vmatrix}\right)} = o, \text{ usw.,}$$

welche man erhält, indem man $l_1, m_1, n_1$; $l_2, m_2, n_2$; $l_3, m_3, n_3$ nach einander an die Stelle von $l, m, n$ treten lässt, mit einander identisch sein, weil sie alle den gesuchten Kegelschnitt repräsentiren sollen. Die Bedingung dieser Identität wird durch Elimination von $a, b, c$ aus denselben erhalten und ist

$$\begin{vmatrix} \sqrt{(l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma)}, & \sqrt{(l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma)}, & \sqrt{(l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma)} \\ \sqrt{(l_1\alpha' + m_1\beta' + n_1\gamma')}, & \sqrt{(l_2\alpha' + m_2\beta' + n_2\gamma')}, & \sqrt{(l_3\alpha' + m_3\beta' + n_3\gamma')} \\ \sqrt{(l_1x + m_1y + n_1z)} & \sqrt{(l_2x + m_2y + n_2z)}, & \sqrt{(l_3x + m_3y + n_3z)} \end{vmatrix} = o,$$

d. i. die Gleichung des verlangten Kegelschnitts.

Wenn man dagegen die Bedingung verlangt, unter welcher derselbe Kegelschnitt durch die zwei Punkte $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ geht und die vier geraden Linien

$$l_1x + m_1y + n_1z = o, \quad l_2x + m_2y + n_2z = o,$$
$$l_3x + m_3y + n_3z = o, \quad l_4x + m_4y + n_4z = o$$

berührt, so kann man auf eine Gleichungsform zurückgehen, welche noch die unbestimmte Constante $s$ enthält, um dann vier Bedingungsgleichungen zur Elimination der vier Constanten $a, b, c, s$ aufstellen zu können. Wir erhalten eine solche aus

$$B^2 = 4AC$$

durch Wurzelausziehung in der Form

$$B = 2\sqrt{(AC)}$$

oder

$$-B + 2\sqrt{(AC)} = o,$$

und durch Einsetzen der Werthe von $A, B, C$

$$la + mb + nc + 2is\sqrt{(l\alpha + m\beta + n\gamma)(l\alpha' + m\beta' + n\gamma')} = o.$$

Indem wir in dieser Gleichung $l, m, n$ nach einander in $l_1$, $m_1, n_1$; $l_2, m_2, n_2$; $l_3, m_3, n_3$; $l_4, m_4, n_4$ überführen und aus den so erhaltenen vier Bedingungsgleichungen die Grössen $a, b, c, s$ eliminiren, finden wir

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1, & \sqrt{(l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma)(l_1\alpha' + m_1\beta' + n_1\gamma')} \\ l_2, & m_2, & n_2, & \sqrt{(l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma)(l_2\alpha' + m_2\beta' + n_2\gamma')} \\ l_3, & m_3, & n_3, & \sqrt{(l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma)(l_3\alpha' + m_3\beta' + n_3\gamma')} \\ l_4, & m_4, & n_4, & \sqrt{(l_4\alpha + m_4\beta + n_4\gamma)(l_4\alpha' + m_4\beta' + n_4\gamma')} \end{vmatrix} = o$$

als die verlangte Bedingung.

352. Offenbar sind die vorhergehenden Entwicklungen direct auf Kreise anwendbar, als auf Kegelschnitte, welche durch dieselben zwei imaginären Punkte im Unendlichen gehen. In Erinnerung an die Bestimmungsweise dieser letzteren erhält man sofort als die Gleichung des Kreises, der die drei geraden Linien

$$Ax + By + C = o,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = o,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = o$$

berührt:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{(Ax + By + C)}, & \sqrt{(A_1x + B_1y + C_1)}, & \sqrt{(A_2x + B_2y + C_2)} \\ \sqrt{(A + Bi)}, & \sqrt{(A_1 + B_1i)}, & \sqrt{(A_2 + B_2i)} \\ \sqrt{(A - Bi)}, & \sqrt{(A_1 - B_1i)}, & \sqrt{(A_2 - B_2i)} \end{vmatrix} = o;$$

und als die Bedingung, unter welcher das von den vier geraden Linien

$$Ax + By + C = o,$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = o,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = o,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = o$$

gebildete Viereck einem Kreise umschrieben ist:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & \sqrt{(A^2 + B^2)} \\ A_1, & B_1, & C_1, & \sqrt{(A_1^2 + B_1^2)} \\ A_2, & B_2, & C_2, & \sqrt{(A_2^2 + B_2^2)} \\ A_3, & B_3, & C_3, & \sqrt{(A_3^2 + B_3^2)} \end{vmatrix} = o.$$

353. Dass ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte gehe, ist ein specieller Fall von der doppelten Berührung desselben mit einem gegebenen Kegelschnitt.

Man kann demnach einem Kegelschnitt die Bedingung auferlegen, dass er durch vier feste Punkte gehe und einen gegebenen Kegelschnitt berühre. Die festen Punkte mögen als Durchschnitte zweier gegebenen Kegelschnitte angesehen werden, deren Gleichungen

$$S = o, \; S_1 = o$$

sind. Jeder Kegelschnitt, welcher durch ihre Durchschnittspunkte geht, ist unter der Form

$$S + kS_1 = o$$

dargestellt und der Coefficient $k$ durch die Bedingung zu bestimmen, dass der gesuchte Kegelschnitt den durch die Gleichung

$$S_2 = o$$

repräsentirten berühre.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Berührungspunktes durch $\xi$, $\eta$, $\zeta$, indess die laufenden Coordinaten $x$, $y$, $z$ sein mögen, so ist die Tangente des Kegelschnitts

$$S_2 = o$$

in diesem Punkte zugleich auch die Tangente des Kegelschnitts

$$S + kS_1 = o$$

in demselben Punkte, d. h. sie ist in Bezug auf beide Kegelschnitte die Polare jenes Punktes, Da wir wissen, dass die Polaren eines Punktes in Bezug auf alle diejenigen Kegelschnitte, welche durch dieselben vier Punkte gehen (Artikel 330, Aufg. 1), sich in einem und demselben Punkte schneiden, so geht jene Tangente durch den Punkt, in welchem die Polaren ihres Berührungspunktes in Bezug auf die beiden Kegelschnitte

$$S = o, \; S_1 = o$$

sich schneiden. Der fragliche Berührungspunkt ist demnach einer von den Punkten, für welche die Polaren in Bezug auf die drei Kegelschnitte

$$S = o, \; S_1 = o, \; S_2 = o$$

sich in einem Punkte durchschneiden, und wenn wir den Ort solcher Punkte suchen, so bestimmt derselbe in den drei Kegelschnitten zugleich diejenigen Punkte, in welchen jeder derselben von denjenigen Kegelschnitten berührt wird, die zugleich mit den beiden andern durch dieselben vier Punkte gehen. Die Polaren eines Punktes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in Bezug auf die drei Kegelschnitte

$$S = o, \; S_1 = o, \; S_2 = o$$

sind aber nach Artikel 331 durch die Gleichungen

$$\xi \frac{dS}{dx} + \eta \frac{dS}{dy} + \zeta \frac{dS}{dz} = o,$$
$$\xi \frac{dS_1}{dx} + \eta \frac{dS_1}{dy} + \zeta \frac{dS_1}{dz} = o,$$
$$\xi \frac{dS_2}{dx} + \eta \frac{dS_2}{dy} + \zeta \frac{dS_2}{dz} = o$$

dargestellt. Damit dieselben durch den nämlichen Punkt gehen, muss die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dS_2}{dx}, & \frac{dS_2}{dy}, & \frac{dS_2}{dz} \end{vmatrix} = o$$

erfüllt sein, und diese oder

$$\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS_1}{dy}\cdot\frac{dS_2}{dz} - \frac{dS_2}{dy}\cdot\frac{dS_1}{dz}\right) + \frac{dS}{dy}\left(\frac{dS_1}{dz}\cdot\frac{dS_2}{dx} - \frac{dS_2}{dz}\cdot\frac{dS_1}{dx}\right)$$
$$+ \frac{dS}{dz}\left(\frac{dS_1}{dx}\cdot\frac{dS_2}{dy} - \frac{dS_2}{dx}\cdot\frac{dS_1}{dy}\right) = o$$

ist daher die Gleichung des fraglichen Ortes. Die Symmetrie derselben zeigt, dass sie die allgemeine Auflösung des Problems enthält: Man soll zu drei gegebenen Kegelschnitten diejenigen andern Kegelschnitte bestimmen, welche mit zweien der erstern dieselben Durchschnittspunkte haben und den jedesmaligen dritten berühren. Sie ist vom dritten Grade und man erkennt daraus, dass es für jede Gruppe von vier festen Punkten sechs Kegelschnitte giebt, welche sie enthalten und zugleich einen gegebenen Kegelschnitt berühren; jeder der sechs Punkte, welche dieser dritte Kegelschnitt mit der durch unsre Gleichung dargestellten Curve dritten Grades gemein hat, bestimmt einen der Kegelschnitte, welche der Aufgabe entsprechen.

354. Diese Curve des dritten Grades geht auch durch die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und der Diagonalen der Vierecke, welche je zweien der gegebenen Kegelschnitte zugleich eingeschrieben sind.

Denn diese Punkte sind durch die gleichzeitige Existenz der Gleichungen

$$\frac{dS}{dx} + k\frac{dS_1}{dx} = o,$$
$$\frac{dS}{dy} + k\frac{dS_1}{dy} = o,$$
$$\frac{dS}{dz} + k\frac{dS_1}{dz} = o$$

bestimmt. Unter dieser Voraussetzung ist aber die allgemeine Gleichung bewährt, wie wir aus ihrer Darstellung in Form einer Determinante durch die Bemerkung erkennen, dass in jeder Determinante die mit irgend einer Constanten multiplicirten Elemente der zweiten Reihe den correspondirenden der ersten hinzugefügt werden können, ohne ihren Werth zu ändern.

Wenn unter den vier Punkten, welche die drei Kegelschnitte

$$S = o,\ S_1 = o,\ S_2 = o$$

paarweise gemeinschaftlich haben, zwei sind, welche allen dreien zugleich angehören, so muss die gerade Verbindungslinie derselben dem von uns untersuchten Orte angehören, sodass derselbe in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfällt. Denn für jeden Punkt dieser geraden Linie ist der ihm conjugirte vierte harmonische Punkt in Bezug auf die Strecke zwischen jenen beiden Punkten der Convergenzpunkt der ihm entsprechenden Polaren in Bezug auf die bezeichneten Kegelschnitte. Es kann endlich auch geschehen, dass der untersuchte Ort in drei gerade Linien übergeht. In welcher Beziehung alsdann die drei Kegelschnitte

$$S = o,\ S_1 = o,\ S_2 = o$$

zu einander stehen müssen, werden wir weiter unten erkennen. Nach dem Vorigen müssen wir schon hier schliessen, dass die drei geraden Linien die Seiten des Dreiecks sein werden, welches die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und der Diagonalen des Vierecks der gemeinschaftlichen Punkte zu Ecken hat.

Das erstere ist der Fall, wenn die drei Kegelschnitte Kreise sind, denn solche haben die mehr erwähnten zwei imaginären Punkte im Unendlichen gemein. Wir wollen diese Bemerkung alsbald weiter verfolgen und zuvor nur noch anführen, wie auch durch die Voraussetzung der untersuchte Ort in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt zerfällt, dass einer der gegebenen Kegelschnitte sich in eine gerade Linie $L = o$ deformire oder dass z. B.

$$S_1 = o \text{ in } L^2 = o$$

übergehe. Denn alsdann ist $L = o$ ein Factor in der oben entwickelten Gleichung vom dritten Grade. Diese Voraussetzung entspricht dem Falle, dass zwei der gegebenen Kegelschnitte unter sich und mit dem gesuchten eine doppelte Berührung haben, indess dieser letztere zugleich einen gegebenen dritten Kegelschnitt berührt.

355. Wenn drei Kreise gegeben sind und man verlangt den Ort desjenigen Punktes zu bestimmen, dessen Polaren in Bezug auf dieselben in einem Punkte convergiren, oder, was nach dem Vorigen dasselbe sagt, den Ort der Punkte zu finden, in denen jeder dieser Kreise von denjenigen Kreisen berührt wird, welche mit den beiden andern die nämliche Chordale haben, so muss dieselbe allgemeine Gleichung, welche wir im vorigen Artikel entwickelten, die Antwort enthalten. Wir haben bereits bemerkt, dass die gerade Verbindungslinie des allen drei Kegelschnitten gemeinsamen Punktpaares, d. h. im jetzigen Falle die unendlich entfernte gerade Linie, dem fraglichen Orte angehört und sehen leicht, wie jeder ihrer Punkte wirklich die Eigenschaft besitzt, dass seine Polaren in Bezug auf die gegebenen Kegelschnitte in demjenigen andern Punkte in ihr convergiren, welcher dem ersten in Bezug auf jene beiden festen Punkte harmonisch conjugirt ist. Dass die gefundenen Kegelschnitte in dem jetzt betrachteten Falle Kreise sein müssen, liegt darin begründet, dass sie durch die nämlichen zwei unendlich entfernten imaginären Punkte gehen müssen, welche den gegebenen Kreisen gemeinschaftlich sind. Wir fügen aber hinzu, dass auch die Curve zweiten Grades, welche mit der gemeinschaftlichen Sehne der gegebenen Kegelschnitte zusammen den Ort ausmacht, welchen die allgemeine Gleichung des dritten Grades im vorigen Artikel repräsentirt, ein Kreis sein muss, weil auch sie durch die den gegebenen Kegelschnitten gemeinsamen Punkte hindurchgeht.

356. Und indem wir ferner bemerken, dass dieser Kreis derjenige ist, welchen man*) in Bezug auf die drei gegebenen Kreise den Orthogonal-Kreis genannt hat, gewinnen wir ein neues gewissermassen mehr elementares Feld für unsre Betrachtungen. Bekanntlich ist der Mittelpunkt des Orthogonal-Kreises das Radical-Centrum oder der Chordal-Punkt der drei Kreise und sein Halbmesser die Länge der von da aus an dieselben zu ziehenden Tangenten. Wir beweisen zur Ergänzung des Vorhergehenden von ihm den Satz: Wenn

$$U_1 = o, \; U_2 = o, \; U_3 = o$$

die homogenen Gleichungen von drei gegebenen Kreisen sind, so ist die Gleichung ihres Orthogonal-Kreises durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx}, & \frac{dU_1}{dy}, & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx}, & \frac{dU_2}{dy}, & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx}, & \frac{dU_3}{dy}, & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = o$$

repräsentirt.

Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig durchschneiden, so ist ihre gemeinschaftliche Sehne in Bezug auf jeden von ihnen die Polare vom Mittelpunkte des andern. Um diese Eigenschaft analytisch auszudrücken, setzen wir voraus, dass die Gleichungen der drei Kreise $U_1 = o, \; U_2 = o, \; U_3 = o$ durch die Substitutionen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für $x$ und $y$ homogen gemacht worden seien, und dass die Coordinaten ihrer Mittelpunkte respective durch $\frac{D_1}{A_1}, \frac{E_1}{A_1}; \; \frac{D_2}{A_2}, \frac{E_2}{A_2}; \; \frac{D_3}{A_3}, \frac{E_3}{A_3}$, die Coordinaten des Mittelpunkts des Orthogonalkreises aber durch

$$\frac{D}{A}, \frac{E}{A}$$

repräsentirt werden, indess die Gleichung desselben durch

$$U = o$$

dargestellt sei.

*) Vergl. Plücker's Anal. geom. Entwickelungen. Bd. I. p. 56, 107 u. f.

Alsdann ist die Gleichung der Polare des Punktes $\left(\frac{D}{A}, \frac{E}{A}\right)$ in Bezug auf den Kreis $U_1 = o$

$$D \frac{dU_1}{dx} + E \frac{dU_1}{dy} + A \frac{dU_1}{dz} = o,$$

und die Gleichung der Polare des Punktes $\left(\frac{D_1}{A_1}, \frac{E_1}{A_1}\right)$ in Bezug auf den Kreis $U = o$

$$D_1 \frac{dU}{dx} + A_1 \frac{dU}{dy} + E_1 \frac{dU}{dz} = o.$$

Wir haben die Bedingung auszudrücken, unter welcher diese beiden Gleichungen dieselbe gerade Linie repräsentiren; dazu denken wir uns die Gleichungen der beiden Kreise $U = o$, $U_1 = o$ in der Form

$$A(x^2 + y^2) - 2Dxz - 2Eyz + Fz^2 = o,$$
$$A_1(x^2 + y^2) - 2D_1xz - 2E_1yz + F_1z^2 = o$$

gegeben, und in analoger Weise die der beiden andern Kreise

$$U_2 = o, \ U_3 = o,$$

welche zunächst nicht in Betracht kommen.

Die damit vorgenommene Entwicklung liefert die Bedingungsgleichung in der Form

$$AF_1 - 2DD_1 - 2EE_1 + A_1F = o.$$

Ebenso erhält man aus den Gleichungen der beiden andern Kreise $U_2 = o$, $U_3 = o$ durch Aufstellung derselben Beziehung zum Orthogonal-Kreis $U = o$ die Gleichungen

$$AF_2 - 2DD_2 - 2EE_2 + A_2F = o,$$
$$AF_3 - 2DD_3 - 2EE_3 + A_3F = o.$$

357. Zwischen diesen drei Gleichungen und der Gleichung des Orthogonal-Kreises selbst

$$A(x^2 + y^2) - 2Dxz - 2Eyz + Fz^2 = o$$

kann man die Constanten $A, D, E, F$ in seiner Gleichung eliminiren und erhält dadurch dieselbe in der Form

$$\begin{vmatrix} F_1 & , D_1, & E_1, & A_1 \\ F_2 & , D_2, & E_2, & A_2 \\ F_3 & , D_3, & E_3, & A_3 \\ x^2+y^2, & xz, & yz, & z^2 \end{vmatrix} = o.$$

Diese Determinante ist aber mit der folgenden identisch

$$\begin{vmatrix} F_1z - D_1x - E_1y, & D_1z - A_1x, & E_1z - A_1y, & A_1 \\ F_2z - D_2x - E_2y, & D_2z - A_2x, & E_2z - A_2y, & A_2 \\ F_3z - D_3x - E_3y, & D_3z - A_3x, & E_3z - A_3y, & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix},$$

denn man kann sie aus ihr herleiten, indem man die Elemente der verschiedenen Reihen mit $x$, $y$ oder $z$ multiplicirt und mit den Elementen der einen Reihe die von einer oder zwei andern Reihen verbindet.*)

Man muss jedoch bemerken, dass man bei dieser Transformation den Factor $z^3$ in alle Glieder der Gleichung eingeführt hat; wir kommen nachher darauf zurück.

Zunächst kann die vorige Determinante in der Form geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dz}, & \frac{dU_1}{dx}, & \frac{dU_1}{dy}, & A_1 \\ \frac{dU_2}{dz}, & \frac{dU_2}{dx}, & \frac{dU_2}{dy}, & A_2 \\ \frac{dU_3}{dz}, & \frac{dU_3}{dx}, & \frac{dU_3}{dy}, & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix}$$

und diese ist mit

$$z^2 . \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx}, & \frac{dU_1}{dy}, & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx}, & \frac{dU_2}{dy}, & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx}, & \frac{dU_3}{dy}, & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix}$$

identisch, so dass wir mit Unterdrückung des Factors $z^2$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx}, & \frac{dU_1}{dy}, & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx}, & \frac{dU_2}{dy}, & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx}, & \frac{dU_3}{dy}, & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Man schreibe in der untern Horizontalreihe an Stelle der Elemente

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & z^2 \\ x^2z + y^2z - x^2z - y^2z, & x^2z - x^2z, & y^2z - y^2z, & z^2 \end{array}$$

und zerlege die dann erscheinende Determinante in ihre einzelnen Partial-Determinanten; man findet, dass sie alle bis auf die Vorige verschwinden.

erhalten, welche der Satz aufstellte. Sie ist die Gleichung des Orthogonal-Kreises. Der noch in ihr enthaltene Factor $z = o$ bedeutet nach den Voraussetzungen, die wir bei der Entwicklung gemacht haben, die unendlich entfernte gerade Linie, und wir wissen aus den vorherigen Entwicklungen, in welcher Weise und unter welchem Gesichtspunkte sie mit dem Orthogonal-Kreis zu einem geometrischen Orte zusammengehört.

358. Wir knüpfen daran noch die kurze *Erörterung einer doppelten Interpretation, deren die Gleichung des Orthogonal-Kreises nach dem Vorigen fähig ist.*

Durch die Entwicklung der partiellen Differentiale erhält sie die Form

$$\begin{vmatrix} A_1x - D_1z, & A_1y - E_1z, & -D_1x - E_1y + F_1z \\ A_2x - D_2z, & A_2y - E_2z, & -D_2x - E_2y + F_2z \\ A_3x - D_3z, & A_3y - E_3z, & -D_3x - E_3y + F_3z \end{vmatrix} = o,$$

die wir schon im vorigen Artikel gefunden haben; durch Auflösung derselben ergiebt sich das Aggregat

$$\begin{aligned} &(F_1z - D_1x - E_1y)[(A_2y - E_2z)(A_3x - D_3z) - (A_3y - E_3z)(A_2x - D_2z)] + \\ &(F_2z - D_2x - E_2y)[(A_3y - E_3z)(A_1x - D_1z) - (A_1y - E_1z)(A_3x - D_3z)] + \\ &(F_3z - D_3x - E_3y)[(A_1y - E_1z)(A_2x - D_2z) - (A_2y - E_2z)(A_1x - D_1z)] = o. \end{aligned}$$

In demselben besteht jedes Glied aus zwei Factoren, deren einer die Polare des Ursprungs der Coordinaten in Bezug auf den einen Kreis, deren andrer die Central-Linie der beiden andern Kreise darstellt.

Wenn daher die Symbole

$$l = o, \; m = o, \; n = o$$

die Gleichungen dieser Central-Linie und die andern

$$\lambda = o, \; \mu = o, \; \nu = o$$

die Gleichungen jener correspondirenden Polaren repräsentiren, so kann die Gleichung des Orthogona-Kreises in der Form

$$l\lambda + m\mu + n\nu = o$$

geschrieben werden.

Wenn man endlich in der eben betrachteten Determinante den mit $z$ multiplicirten Elementen der dritten Verticalreihe die mit $x$ und $y$ respective multiplicirten der ersten und zweiten hinzufügt, welches ohne Veränderung ihres Werthes geschehen kann, so erhält man in der dritten Verticalreihe die linken Seiten der

Gleichungen der Kreise selbst; bedenkt man nun, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 x - D_1 z, & A_1 y - E_1 z \\ A_2 x - D_2 z, & A_2 y - E_2 z \end{vmatrix}$$

den doppelten Inhalt des Dreiecks repräsentirt, welches von den Mittelpunkten des ersten und zweiten Kreises mit dem Punkte $(x, y, z)$ gebildet wird, und dass das Substitutions-Resultat der Coordinaten eines Punktes in die Gleichung eines Kreises das Quadrat der Tangente ausdrückt, die man von demselben an den Kreis ziehen kann, so ergiebt sich eine neue Form und Interpretation der Gleichung des Orthogonal-Kreises. Bezeichnen wir nämlich die Längen der Tangenten, die man von einem Punkte des Orthogonal-Kreises an die gegebenen Kreise

$$U_1 = o, \; U_2 = o, \; U_3 = o$$

ziehen kann, durch $a$, $b$, $c$ und die Inhalte der Dreiecke, welche diesen Punkt zur Spitze und die Central-Linien der Kreise

$$U_2 = o, \; U_3 = o; \; U_3 = o, \; U_1 = o; \; U_1 = o, \; U_2 = o$$

respective zur Basis haben, durch $a'$, $b'$, $c'$, so gilt für jeden Punkt des Orthogomal-Kreises die geometrische Relation

$$a^2 . a' + b^2 . b' + c^2 . c' = o.$$

359. Wir beschliessen diese Untersuchung mit einer allgemeinen Bemerkung. Die Function

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dS_2}{dx}, & \frac{dS_2}{dy}, & \frac{dS_2}{dz} \end{vmatrix},$$

welche mit Null verglichen den untersuchten Ort repräsentirt, würde durch eine beliebige lineare Transformation nicht geändert werden; denn es träte zu ihr nur die Determinante der Substitution als ein Factor hinzu, welches die Identität mit Null nicht aufheben kann. Wir beweisen dies kurz wie folgt: Wenn in den Gleichungen $S = o$, $S_1 = o$, $S_2 = o$ die Veränderlichen $x, y, z$ durch die Werthe

$$x = a\xi + b\eta + c\zeta, \; y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \; z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta$$

ersetzt werden, so gehen die Differentiale, welche die Determinante bilden, in folgende über

$$\frac{dS}{d\xi}=a\frac{dS}{dx}+a'\frac{dS}{dy}+a''\frac{dS}{dz},\quad \frac{dS}{d\eta}=b\frac{dS}{dx}+b'\frac{dS}{dy}+b''\frac{dS}{dz},$$

$$\frac{dS}{d\zeta}=c\frac{dS}{dx}+c'\frac{dS}{dy}+c''\frac{dS}{dz},$$

mit entsprechenden Werthen für die von $S_1$, $S_2$. In Folge dessen ist nacn dem Multiplications-Theorem der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{d\xi}, & \frac{dS}{d\eta}, & \frac{dS}{d\zeta} \\ \frac{dS_1}{d\xi}, & \frac{dS_1}{d\eta}, & \frac{dS_1}{d\zeta} \\ \frac{dS_2}{d\xi}, & \frac{dS_2}{d\eta}, & \frac{dS_2}{d\zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dS_2}{dx}, & \frac{dS_2}{dy}, & \frac{dS_2}{dz} \end{vmatrix}.$$

Wir haben also in dieser Gleichung eine solche Function der Coefficienten und der Veränderlichen der gegebenen Functionen, welche durch eine lineare Substitution nicht anders als durch Hinzutreten der Determinante dieser letzteren als Factor verändert wird und erkennen darin die geometrische, von der Lage des Coordinatensystems vollkommen unabhängige Zusammengehörigkeit der gegebenen Curven mit der durch unsre Function dargestellten Curve ausgedrückt.

Die Functionen solcher Natur hat man nach Iacobi als Functional-Determinanten bezeichnet; Mr. Sylvester hat ihnen neuerdings den Namen Covarianten beigelegt, welcher augenscheinlich ihre wesentliche Eigenthümlichkeit sehr wohl bezeichnet. Man kann darnach sagen, dass die Gleichung des Orthogonal-Kreises eine Covariante von den Gleichungen der drei gegebenen Kreise ist. Covarianten repräsentiren überhaupt andre Curven, welche mit den gegebenen eine von der Wahl der Coordinaten-Achsen unabhängige Relation haben. Wir werden deshalb in weiteren allgemeinen Untersuchungen denselben oft begegnen.

360. Die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit eine Gleichung des zweiten Grades zwei gerade Linien darstellt, wird als die Discriminante dieser Gleichung bezeichnet.

Wir finden jene Bedingung durch folgende Betrachtungen. Wenn ein Kegelschnitt in zwei gerade Linien zerfällt, so geht die in Bezug auf ihn genommene Polare jedes Punktes durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden, sie ist die vierte Harmonikale zu ihnen und der geraden Linie, welche ihren Durchschnittspunkt und den gegebenen Punkt verbindet. Die durch

$$\alpha' \frac{dS}{d\alpha} + \beta' \frac{dS}{d\beta} + \gamma' \frac{dS}{d\gamma} = o$$

dargestellte gerade Linie geht aber nur dann stets durch einen festen Punkt, wenn die Gleichungen

$$\frac{dS}{d\alpha} = o, \frac{dS}{d\beta} = o, \frac{dS}{d\gamma} = o$$

gerade Linien repräsentiren, die sich in einem Punkte schneiden; wir bemerken, dass es die Polaren von den Eckpunkten des Fundamental-Dreiecks sind, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden. Wenn wir daher die Bedingung bilden, unter welcher die Gleichungen

$$a\alpha + b''\beta + b'\gamma = o, \; a'\beta + b\gamma + b''\alpha = o, \; a''\gamma + b'\alpha + b\beta = o$$

gerade Linien darstellen, die durch einen und denselben Punkt gehen, indem wir die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ zwischen diesen Gleichungen eliminiren, so erhalten wir die Discriminante der gegebenen Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{vmatrix} = o,$$

oder $$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' = o,$$

wenn wir die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts in der Form des Artikel 328 voraussetzen. Für die sonst gebrauchte allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = o$$

ergiebt sich die Discriminante als das Resultat der Elimination zwischen den Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax + By + Dz &= o, \\ Bx + Cy + Ez &= o, \\ Dx + Ey + Fz &= o \end{aligned}$$

in der Form

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} = o$$

oder $$AE^2 + CD^2 + FB^2 - 2BDE - ACF = o.$$

(Vergleiche Art. 78, 79, 156.)

361. Rein algebraisch definirt man die Discriminante als die Bedingung, unter welcher eine Gleichung gleiche Wurzeln besitzt. Wenn man die Gleichung durch Einführung einer neuen Veränderlichen homogen macht, so wird diese Bedingung für die Existenz gleicher Wurzeln durch Elimination von $x$ und $y$ zwischen den derivirten Gleichungen

$$\frac{dS}{dx}=o, \quad \frac{dS}{dy}=o$$

gefunden.

Die Discriminante einer gegebenen homogenen Function einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen wird erhalten, indem man dieselbe nach einander in Bezug auf alle diese Veränderlichen differentiirt und zwischen den resultirenden Gleichungen die Veränderlichen eliminirt. Die geometrische Bedeutung verbleibt dem allgemeinen Falle bei drei und vier Veränderlichen; die Identität der Discriminante mit Null zeigt das Vorhandensein eines Doppelpunktes an.

In Folge ihrer Bildung ebensowohl als in Folge dieser ihrer geometrischen Bedeutung besitzt die Discriminante den Charakter der Unveränderlichkeit allen linearen Transformationen gegenüber. Wenn die zu vollziehende lineare Substitution ist

$$x=a_1 X+b_1 Y+c_1 Z,\ y=a_2 X+b_2 Y+c_2 Z,\ z=a_3 X+b_3 Y+c_3 Z,$$

so ist die Bedingung, unter welcher die transformirte Gleichung zwei gerade Linien darstellt durch die entsprechend gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} Aa_1+Ba_2+Da_3, & Ab_1+Bb_2+Db_3, & Ac_1+Bc_2+Dc_3 \\ Ba_1+Ca_2+Ea_3, & Bb_1+Cb_2+Eb_3, & Bc_1+Cc_2+Ec_3 \\ Da_1+Ea_2+Fa_3, & Db_1+Eb_2+Fb_3, & Dc_1+Ec_2+Fc_3 \end{vmatrix}=o$$

ausgedrückt, und das Multiplications-Theorem der Determinanten zeigt sogleich, dass dieselbe mit dem Producte

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

identisch und also gleich Null ist, wenn der erste Factor desselben Null ist.

362. Aus den Gleichungen zweier Kegelschnitte

$$a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 + 2b\beta\gamma + 2b'\gamma\alpha + 2b''\alpha\beta = o,$$
$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = o,$$

welche wir in gewohnter Weise durch die Symbole

$$S = o, \ S_1 = o$$

vertreten wollen, können wir die Gleichungen ihrer Durchschnittssehnen bilden, indem wir die Discriminante von $kS + S_1 = o$ aufsuchen; dieselbe wird augenscheinlich gefunden, indem wir in die Discriminante von $S = o$ für $a, b, a'$ u. s. w. die Werthe $ka + A$, $kb + B$, $ka' + A'$, u. s. w. substituiren. Die Vergleichung des so erhaltenen Ausdrucks mit Null liefert für die Bestimmung von $k$ eine cubische Gleichung, wie es aus geometrischen Gründen der Fall sein muss; denn es können durch die vier Durchschnittspunkte $A, B, C, D$ beider Curven drei Paare von geraden Linien $AB, CD$; $AC, BD$; $AD, BC$ gezogen werden, deren jedes einen der Kegelschnitte $kS + S_1 = o$ repräsentirt. Wenn wir die Wurzeln jener cubischen Gleichung durch $k', k''$, $k'''$ ausdrücken, so sind die Gleichungen dieser drei Paare von geraden Linien

$$S_1 + k'S = o, \ S_1 + k''S = o, \ S_1 + k'''S = o.$$

Die besprochene cubische Gleichung ist aber

$$k^3(ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'') + k^2[A(b^2 - a'a'') + A'(b'^2 - a''a) + A''(b''^2 - aa') + 2B(ab - b'b'') + 2B'(a'b' - b''b) + 2B''(a''b'' - bb')] + k[a(B^2 - A'A'') + a'(B'^2 - A''A) + a''(B''^2 - AA') + 2b(AB - B'B'') + 2b'(A'B' - B''B) + 2b''(A''B'' - BB')] + (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') = o.$$

Die Coefficienten derselben sind von einer charakteristischen Symmetrie der Form; wenn wir die Discriminante von $S = o$ durch $\Delta$ und die von $S_1 = o$ durch $\Delta_1$ bezeichnen, so ist offenbar das absolute Glied unserer Gleichung mit $\Delta_1$ und der Coefficient von $k_3$ mit $\Delta$ identisch; dagegen ist der Coefficient von $k^2$

$$A\frac{d\Delta}{da} + A'\frac{d\Delta}{da'} + A''\frac{d\Delta}{da''} + B\frac{d\Delta}{db} + B'\frac{d\Delta}{db'} + B''\frac{d\Delta}{db''},$$

und der von $k$ gleichermassen

$$a\frac{d\Delta}{dA} + a'\frac{d\Delta}{dA'} + a''\frac{d\Delta}{dA''} + b\frac{d\Delta}{dB} + b'\frac{d\Delta}{dB'} + b''\frac{d\Delta}{dB''},$$

wie es auch aus der Entstehung der Gleichung mit Hilfe des Taylor'schen Satzes abgeleitet werden kann. Wir wollen diese beiden Functionen durch die Symbole $\Theta$ und $\Theta_1$ abkürzend bezeichnen, so dass die obige cubische Gleichung in der Form

$$k^3 . \Delta + k^2 . \Theta + k . \Theta_1 , + \Delta_1 = o$$

zu schreiben ist.

363. Aus der Natur der Bedeutung, welche diese Gleichung besitzt, folgt, dass die Coefficienten $\Delta$, $\Theta$, $\Theta_1$, $\Delta_1$ in derselben ihr gegenseitiges Verhältniss durch keine Transformation der Coordinaten verändern können; denn die Werthe von $k$, für welche $kS + S_1 = o$ ein Paar gerade Linien darstellt, können nicht von der Lage der Coordinaten-Achsen abhängig sein. Man bezeichnet jene Coefficienten deshalb als Invarianten, indem man als eine Invariante jede Verbindung aus den Coefficienten einer gegebenen Function benennt, welche der entsprechenden Verbindung aus den Coefficienten der durch eine beliebige lineare Substitution transformirten Function entweder gleich ist oder welche von dieser nur durch den als Factor hinzutretenden Modulus der Transformation abweicht.*)

Wir wenden diese Betrachtung auf die Frage nach dem Dreieck an, welches gleichzeitig dem Kegelschnitt $S = o$ eingeschrieben und dem Kegelschnitt $S_1 = o$ umgeschrieben ist. Wenn es ein solches Dreieck giebt, und

$$x = o, \ y = o, \ z = o$$

die Gleichungen seiner Seiten repräsentiren, so muss man die Gleichungen

$$S = o, \ S_1 = o$$

in die Formen

$$2 (xy + yz + zx) = o,$$

(Artikel 332) und

$$l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 - 2lmxy - 2mnyz - 2nlzx = o$$

(Art. 333) bringen können. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} \Delta &= 2, \\ \Theta &= -(l + m + n)^2, \\ \Theta_1 &= 4lmn\,(l + m + n), \\ \Delta_1 &= -4l^2 m^2 n^2. \end{aligned}$$

Es besteht somit die Relation

$$\Theta_1^2 = 4\,\Theta\,\Delta_1.$$

---

*) Sie hat sonst den Namen Formen-Determinante erhalten.

Dieselbe muss, der vorhin erwähnten Natur der darin auftretenden Factoren nach, von den gewählten Fundamental-Linien unabhängig sein und drückt daher ganz allgemein die **Bedingung** aus, **welche für das gleichzeitig ein- und umgeschriebene Dreieck erfüllt sein muss.** In entwickelter Form und für die allgemeinen Gleichungen lautet sie wie folgt:

$$[a(B^2 - A'A'') + a'(B'^2 - A''A) + a''(B''^2 - AA') + 2b(AB - B'B'') + 2b'(A'B' - B''B) + 2b''(A''B'' - BB')]^2 = 4(AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'')[A(b^2 - a'a'') + A'(b'^2 - a''a) + A''(b''^2 - aa') + 2B(ab - b'b'') + 2B'(a'b' - b''b) + 2B''(a''b'' - bb')].$$

364. **Die Bedingung zu finden, unter welcher zwei Kegelschnitte $S = o$, $S_1 = o$ einander berühren.**

Wenn von den vier Durchschnittspunkten zweier Kegelschnitte zwei, $A$, $B$, zusammenfallen, so ist das Paar gerader Linien $AC$, $BD$ mit dem andern Paar $BC$, $AD$ identisch und in diesem Falle muss daher die im vorigen Artikel betrachtete cubische Gleichung in $k$ ein Paar gleiche Wurzeln haben. Die Bedingung dafür ist das Verschwinden ihrer Discriminante. Um dieselbe zu bilden, machen wir die Gleichung durch die Substitution $k = \frac{x}{y}$ homogen und eliminiren die Veränderlichen zwischen den beiden partiellen Differentialen derselben, nämlich

$$3\Delta_1 x^2 + 2\Theta xy + \Theta_1 y^2 = o,$$
$$\Theta x^2 + 2\Theta_1 xy + 3\Delta_1 y^2 = o.$$

Dazu multipliciren wir jede dieser Gleichungen mit $x$ und $y$ und erhalten

$$\begin{array}{llll} 3\Delta x^3 + 2\Theta x^2 y + \Theta_1 x y^2 & & = o, \\ & 3\Delta x^2 y + 2\Theta x y^2 + \Theta_1 y^3 & = o, \\ \Theta x^3 + 2\Theta_1 x^2 y + 3\Delta_1 x y^2 & & = o, \\ & \Theta x^2 y + 2\Theta_1 x y^2 + 3\Delta_1 y^3 & = o; \end{array}$$

daraus aber durch Elimination die Determinante

$$\begin{vmatrix} 3\Delta, & 2\Theta, & \Theta_1, & 0 \\ 0, & 3\Delta, & 2\Theta, & \Theta_1 \\ \Theta, & 2\Theta_1, & 3\Delta_1, & 0 \\ 0, & \Theta, & 2\Theta_1, & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = o.$$

Indem man sie entwickelt, erhält man

$$\Theta^2\,\Theta_1^2 + 18\,\Delta\,\Delta_1\,\Theta\,\Theta_1 = 4\,\Delta\,\Theta_1^3 + 27\,\Delta^2\,\Delta_1^2 + 4\,\Delta_1\,\Theta^3.$$

Wenn in diesem Ausdruck an Stelle der Grössen $\Delta$, $\Delta_1$, $\Theta$, $\Theta_1$ ihre Werthe aus den Coefficienten der Gleichungen beider Kegelschnitte eingesetzt werden, so ist die entstehende Bedingungsgleichung in diesen Coefficienten vom sechsten Grade, und wir schliessen daraus, dass die Aufgabe „durch vier Punkte einen Kegelschnitt zu beschreiben, der einen gegebenen Kegelschnitt berührt“, im Allgemeinen sechs Auflösungen annimmt. (Vgl. Art. 353 f.)

Wenn einer der beiden Kegelschnitte $S = o$, $S_1 = o$, in zwei gerade Linien zerfällt, so ist nothwendig eine der Wurzeln der Gleichung

$$\Delta k^3 + \Theta k^2 + \Theta_1 k + \Delta_1 = o$$

mit Null identisch und daher

$$\Delta_1 = o.$$

Die vorher erhaltene allgemeine Bedingung geht daher in

$$\Theta^2 = 4\,\Delta\,\Theta_1$$

über. Diese Gleichung, welche auch die Bedingung ist, unter welcher die Gleichung

$$\Delta k^2 + \Theta k + \Theta_1 = o$$

gleiche Wurzeln hat, zeigt also an, dass eine jener beiden geraden Linien, welche die Gleichung $S_1 = o$ nach der Voraussetzung repräsentirt, den Kegelschnitt $S = o$ berühre.

*Aufg. 1.* Welches ist die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit zwei Kreise sich berühren?

*Aufg. 2.* Beweise, dass der Kreis, welcher durch die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks geht, jeden der vier Kreise berührt, welche demselben Dreieck innerlich und äusserlich eingeschrieben werden können.

365. Unter welcher Bedingung berührt die gerade Linie $\quad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$
den Kegelschnitt $\quad S = o$?

Zur Beantwortung der Frage bilden wir von der Gleichung

$$kS + (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = o,$$

d. h. von der Gleichung des Kegelschnittes, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung besitzt, für die die gegebene gerade Linie die Berührungssehne ist, die Discriminante. Sie wird in der Form

$$\Delta k^3 + \left[ l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{da'} + n^2 \frac{d\Delta}{da''} + mn \frac{d\Delta}{db} + nl \frac{d\Delta}{db'} + lm \frac{d\Delta}{db''} \right] k^2$$

gefunden, denn der Coefficient von $k$ und das absolute Glied verschwinden, wie man leicht aus geometrischen Gründen erkennt. Wenn $S_1$ in zwei verschiedene lineare Factoren zerfällt, so ist einer der Werthe von $k$ gleich Null und das absolute Glied mangelt der allgemeinen Gleichung, welche dasselbe bestimmt; wenn zudem die beiden linearen Factoren identisch sind, wie jetzt vorausgesetzt wird, so muss noch eine zweite Wurzel der Gleichung gleich Null sein und folglich der Coefficient von $k$ verschwinden. Wenn im ersten Falle die beiden durch $S_1 = o$ dargestellten geraden Linien als das Paar $AC$, $BD$ betrachtet werden, so repräsentirt dieselbe Gleichung, wenn sie ein vollständiges Quadrat ist, zugleich das andere Paar $AD$, $BC$.

Daher ist die obige Gleichung zur Bestimmung von $k$ zu gebrauchen; man erhält aus ihr

$$k = -\frac{l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{da'} + \ldots}{\Delta}$$

und durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung

$$kS + (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = o$$

$$\left( l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{da'} + n^2 \frac{d\Delta}{da''} + mn \frac{d\Delta}{db} + nl \frac{d\Delta}{db'} + lm \frac{d\Delta}{db''} \right) S - \Delta (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 = o$$

als die Gleichung des Tangentenpaares, welches die gerade Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

zur Berührungssehne hat.

Setzen wir aber endlich voraus, dass die durch

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

dargestellte gerade Linie den Kegelschnitt $S = o$ selbst berühre, so fällt auch das Tangentenpaar $AB$, $CD$ mit ihr oder mit $S' = o$ zusammen, und alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung sind Null, so dass dieselbe durch $k^3$ dividirt werden kann. So erhalten wir die nämliche Bedingung wie im Art. 111, als unter welcher die gerade Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

den Kegelschnitt $S = o$ berührt, in der neuen Form

$$l^2 \frac{d\Delta}{da} + m^2 \frac{d\Delta}{da'} + n^2 \frac{d\Delta}{da''} + mn \frac{d\Delta}{db} + nl \frac{d\Delta}{db'} + lm \frac{d\Delta}{db''} = o,$$

oder nach den Coefficienten entwickelt

$$l^2(b^2 - a'a'') + m^2(b'^2 - a''a) + n^2(b''^2 - aa') + 2mn(ab - b'b'')$$
$$+ 2nl(a'b' - b''b) + 2lm(a''b'' - bb') = o,$$

für welche wir abkürzend das Symbol

$$\Theta = o$$

eingeführt haben.

366. Man kann diese Bedingung auch in der Form einer Determinante erhalten, wie folgt: Ist $(\alpha, \beta, \gamma)$ der Berührungspunkt der Tangente, so ist die Gleichung seiner Polare durch

$$2\alpha_1(a\alpha + b'\gamma + b''\beta) + 2\beta_1(a'\beta + b\gamma + b''\alpha) + 2\gamma_1(a''\gamma + b\beta + b'\alpha) = o$$

repräsentirt, und die Bedingungen, unter welchen diese mit der geraden Linie $\qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$

selbst zusammenfällt, sind

$$2a\alpha_1 + 2b''\beta_1 + 2b'\gamma_1 - l = o,$$
$$2b''\alpha_1 + 2a'\beta_1 + 2b\gamma_1 - m = o,$$
$$2b'\alpha_1 + 2b\beta_1 + 2a''\gamma_1 - n = o;$$

fügen wir diesen noch die Bedingung

$$l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 = o$$

hinzu, welche erfüllt sein muss, weil der Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ auch der gegebenen geraden Linie angehört, so können wir die Coordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ linear eliminiren und erhalten die fragliche Bedingung in der Form

$$\begin{vmatrix} a, & b'', & b', & l \\ b'', & a', & b, & m \\ b', & b, & a'', & n \\ l, & m, & n, & o \end{vmatrix} = o.$$

Ihre Entwickelung zeigt sie mit dem obigen Ergebniss identisch.

Wenn der Kegelschnitt $S + kS_1 = o$ die gerade Linie $\qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = o$

berühren soll, so wird die Bedingung, unter welcher dies allein stattfindet, durch die Substitution von $ka + A$, $kb + B$ u. s. w. für $a$, $b$ u. s. w. in

$$\Theta = o$$

erhalten. Da das Resultat die unbestimmte Grösse $k$ im zweiten Grade enthält, so erkennen wir, dass die Aufgabe, „einen Kegelschnitt zu beschreiben, der durch vier Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt", zwei Auflösungen annimmt.

*Aufg.* Unter welcher Bedingung berührt die gerade Linie $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ den Kegelschnitt $S + (l'\alpha + m'\beta + n'\gamma)^2 = o$?

*Aufl.* Die Bedingung ist $\Theta + K = o$, wenn wir durch $K$ das Resultat bezeichnen, welches man durch die Substitution von

$$mn' - nm', \; nl' - l'n, \; lm' - ml'$$

für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in $S$ erhält.

367. Man soll die Coordinaten des Pols der geraden Linie $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ in Bezug auf den Kegelschnitt $S = o$ bestimmen.

Wenn diese Coordinaten durch $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ bezeichnet werden, so muss die Function

$$\alpha' \frac{dS}{d\alpha} + \beta' \frac{dS}{d\beta} + \gamma' \frac{dS}{d\gamma} \text{ mit}$$

mit

$$l\alpha + m\beta + n\gamma$$

identisch sein. Man erhält daraus die Bedingungen

$$a\alpha_1 + b''\beta_1 + b'\gamma_1 = l,$$
$$b''\alpha_1 + a'\beta_1 + b\gamma_1 = m,$$
$$b'\alpha_1 + b\beta_1 + a''\gamma_1 = n$$

und durch diese $\alpha_1$ proportional zu

$$l(b^2 - a'a'') + m(a''b'' - bb') + n(a'b' - b''b),$$

u. s. w.; Werthe, welche in der Form

$$\alpha_1 = \frac{d\Theta}{dl}, \; \beta_1 = \frac{d\Theta}{dm}, \; \gamma_1 = \frac{d\Theta}{dn}$$

geschrieben werden können.

368. Wir kehren von diesen allgemeinen Betrachtungen zu einigen einfachen Anmerkungen über die Discriminante eines einzelnen Kegelschnitts zurück, welche nur Früheres unter allgemeinerem Gesichtspunkt wiederholen sollen.

Wenn wir die Discriminante

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}$$

(Vgl. Art. 360) aus ihren Partial-Determinanten zusammensetzen, so nimmt sie die Formen

$$F(B^2 - AC) + E(AE - BD) + D(CD - BE),$$

oder $$C(D^2 - AF) + E(AE - BD) + B(BF - DE) \text{ an.}$$

In der ersteren begegnet uns die Grösse $(B^2 - AC)$, von deren Werth nach dem Früheren (Vergl. Art. 90) die Gattung des Kegelschnitts abhängt, welchen die allgemeine Gleichung darstellt. Die beiden andern in Parenthese stehenden Binome der ersten Entwicklung sind die Zähler in den Werthen der Mittelpunkts-Coordinaten der Curve. Wir zeigten in den Art. 157—159, dass die erstere Grösse bei einer Coordinaten-Transformation ungeändert bleibt und erkennen jetzt, dass dies wieder aus dem allgemeinen Grunde der Fall war, weil sie eine, von der Lage des Achsen-Systems, auf welches man sie bezieht, unabhängige Eigenschaft des Kegelschnitts ausdrückt, nämlich das Vorhandensein von reellen und verschiedenen oder von zusammenfallenden Punkten in unendlicher Entfernung, oder das Imaginärsein der unendlich entfernten Punkte. Sie gehört daher gegenüber den besonderen linearen Transformationen, welche eine Aenderung des Coordinaten-Systems ausdrücken, zu der Klasse der Invarianten. (Vgl. Art. 304.)

Wenn wir die Discriminante wie früher durch $\Delta$ und diese Invariante durch $\triangle$, endlich die andere Partial-Determinante von analoger Form durch $\delta$ bezeichnen, so lässt sich die vollständige Classification der Curven zweiter Ordnung einfach durch folgende Tabelle ausdrücken:

$\triangle > o$, **Elliptische Formen.**

- $\Delta < o$, Reelle Ellipse.
- $\Delta = o$, Punkt; zwei sich schneidende imaginäre Gerade.
- $\Delta > o$, Imaginäre Ellipse.

$\triangle = o$, **Parabolische Formen.**

- $\Delta < o$, Parabel.
- $\Delta = o$, Zwei parellele Gerade, $\left\{\begin{array}{l}\text{reell für } \delta < o,\\ \text{zusammenfallend für } \delta = o,\\ \text{imaginär für } \delta > o.\end{array}\right.$
- $\Delta > o$, Parabel.

$\triangle < o$, **Hyperbolische Formen.**

- $\Delta < o$, Hyperbel.
- $\Delta = o$, Zwei sich schneidende Gerade.
- $\Delta > o$, Hyperbel.

369. Einige weitere Betrachtungen knüpfen wir an den Umstand an, der so oft in den früheren Entwickelungen bemerklich ward, dass nämlich die zweckmässige Wahl der Coordinaten-Achsen der geometrischen Untersuchung grossen Vorschub leistet. In der That, die einer gestellten Frage als Antwort entsprechende Gleichung, die Gleichung einer Curve, kann dadurch auf ihre einfachste Form gebracht und beweglicher und brauchbarer gemacht werden als sie sonst ist; wir brauchen nur an die Vortheile zu erinnern, welche die Anwendung der auf die Achsen bezogenen Gleichung für die Untersuchung der Ellipse und der Hyperpel mit sich brachte. Wir erinnern gleichzeitig an die allgemeine Eigenschaft der Kegelschnittsgleichung, aus welcher dies als ein specieller Fall hervorgeht; wenn wir ein Dreieck zum Fundamentaldreieck wählten, welches sich selbst conjugirt ist, d. h. in welchem jeder Eckpunkt der Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so reducirte sich die allgemeine homogene Gleichung desselben auf die Form

$$L^2 + M^2 = R^2 \text{ (Art. 303 f.).}$$

Wir erkennen diese jetzt als mit der allgemeinen Form der Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte

$$Ax^2 + Cy^2 = F$$

identisch, welche durch die Substitution von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ für $x$ und $y$ in die Form $$Ax^2 + Cy^2 = Fz^2$$
übergeht, und bemerken, dass diese Uebereinstimmung der Form deshalb stattfindet, weil zwei conjugirte Durchmesser der Curve zusammen mit der unendlich entfernten geraden Linie auch ein Dreieck bilden, welches sich selbst conjugirt ist; denn diese Letztere ist die Polare des Mittelpunktes und der unendlich entfernte Punkt des einen Durchmessers hat den andern Durchmesser zu seiner Polare.

370. Es giebt für jeden Kegelschnitt unzählig viele sich selbst conjugirte Dreiecke. Man kann dies ebenso, wie aus dem Vorigen geometrisch, auch analytisch aus der Theorie der linearen Transformationen schliessen; denn wenn es sich darum handelt, die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = o$$

in die Form $$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = o$$

zu bringen, so muss dies, wenn es überhaupt möglich ist, durch eine Coordinaten-Transformation, d. h. mittelst einer linearen Substitution vollzogen werden können. Die allgemeine Form einer solchen Substitution ist

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \quad Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z.$$

Ob die transformirte Form mit der ursprünglichen identisch gemacht werden kann, ist offenbar eine Frage, die nur von der Möglichkeit abhängt, die entsprechenden Coefficienten zwischen der Entwicklung von

$$a(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + b(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + c(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2 = o$$

und der ursprünglichen Gleichung zu identificiren; die Zahl der daraus entspringenden Bedingungsgleichungen kann sechs nicht überschreiten, und es bleibt daher ein Ueberschuss willkürlicher Constanten in der Transformation, auch mit Berücksichtigung der Bedingung, welche für die Coefficienten jener linearen Substitution erfüllt sein muss, wenn sie eine Coordinaten-Transformation ersetzen soll. Die Zählung der Constanten zeigt auch, dass es für alle die durch die Gleichung

$$S + k S_1 = o$$

repräsentirten Kegelschnitte ein Dreieck giebt, welches sich selbst conjugirt ist.

Die Beziehung auf dies Dreieck gewährt der Untersuchung jenes Systems den Vortheil, dass die Gleichung aller ihm angehörigen individuellen Kegelschnitte in der einfachsten Form erscheinen. Es ist das Dreieck, welches die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und den Durchschnittspunkt der Diagonalen des zur Basis dienenden Vierecks zu Ecken hat. Seine Seiten sind die Orte der Durchschnittspunkte correspondirender Strahlen der beiden Büschel von gleichem Doppelschnittsverhältniss, welche von den Tangenten der Kegelschnitte des Systems in je zwei Ecken des Vierecks gebildet werden.

Wenn man die Gleichung $S + k S_1 = o$ als die Gleichung aller der Kegelschnitte ansieht, welche dieselben vier geraden Linien berühren, oder wenn man die Interpretations-Methode der trimetrischen Linien-Coordinaten anwendet, so existirt ein sich selbst conjugirtes Dreiseit; die Seiten desselben sind die

Diagonalen des gemeinschaftlich umschriebenen Vierseits und zugleich die Enveloppen der Verbindungslinie correspondirender Punkte der beiden Reihen von gleichem Doppelschnittverhältniss, welche von den den Seiten des Vierecks angehörenden Punkten der Kegelschnitte des Systems gebildet werden.

Wenn das gemeinschaftliche ein- oder umschriebene Viereck sich auf ein Punkte- oder ein Tangenten-Paar reducirt, d. i. wenn die betrachteten Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einander haben, so ist das gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck und Dreiseit unbestimmt; denn für jenes ist nur der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten als eine Ecke und ihre Berührungssehne als eine Seite anzunehmen, während die Lage der beiden dieser Seite angehörigen Ecken in ihr unbestimmt ist; für dieses ist nur der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten als eine Ecke und die Berührungssehne als die gegenüberliegende Seite anzunehmen, während die Lage der beiden von jener Ecke ausgehenden Seiten unbestimmt ist, wenn auch natürlich immer durch die Beziehung der harmonischen Theilung gebunden.

Sind unter den gemeinschaftlichen Punkten oder Tangenten der Kegelschnitte drei zusammenfallende, so dass die Kegelschnitte eine Berührung zweiter Ordnung besitzen, so ist das gemeinschaftliche conjugirte Dreieck auf einen Punkt, den Berührungspunkt, und das gemeinschaftliche conjugirte Dreiseit auf eine Gerade, die dreifache Tangente reducirt; ebenso bei der Berührung dritter Ordnung.

371. Der analytische Charakter einer Coordinaten-Transformation in trimetrischen Coordinaten ist leicht zu bezeichnen.

Wenn die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos \alpha' + y \sin \alpha' - p' = o$$

in die Form

$$lL + mM + nN = o.$$

gebracht werden soll, und

$$L = x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1,$$
$$M = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2,$$
$$N = x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3$$

sind, so müssen die Coefficienten $l, m, n$ von den Formen

$$l = \frac{\xi_1 \sin A}{\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \sin\alpha_1, & -p_1 \\ \cos\alpha_2, & \sin\alpha_2, & -p_2 \\ \cos\alpha_3, & \sin\alpha_3, & -p_3 \end{vmatrix}},$$

$$m = \frac{\xi_2 \sin B}{\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \sin\alpha_1, & -p_1 \\ \cos\alpha_2, & \sin\alpha_2, & -p_2 \\ \cos\alpha_3, & \sin\alpha_3, & -p_3 \end{vmatrix}},$$

$$n = \frac{\xi_3 \sin C}{\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \sin\alpha_1, & -p_1 \\ \cos\alpha_2, & \sin\alpha_2, & -p_2 \\ \cos\alpha_3, & \sin\alpha_3, & -p_3 \end{vmatrix}}$$

sein, wenn man durch $A, B, C$ die Winkel des Dreiecks $L = o$, $M = o$, $N = o$ an den Ecken $M = o$, $N = o$; $N = o$, $L = o$; $L = o$, $M = o$ respective und mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ die Längen der Perpendikel bezeichnet, welche von denselben Eckpunkten auf die gerade Linie $$x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = o$$ gefällt werden.

Führt man noch zwei solche gerade Linien

$$x \cos\alpha'' + y \sin\alpha'' - p'' = o,$$
$$x \cos\alpha''' + y \sin\alpha''' - p''' = o$$

ein und bezeichnet die entsprechenden Coefficienten durch

$$l_1, m_1, n_1 \text{ und } l_2, m_2, n_2$$

respective, so erhält man dieselben proportional den Dreilinien-Coordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3$; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ der Ecken $M = o$, $N = o$; $N = o$, $L = o$; $L = o$, $M = o$ in Bezug auf das von diesen drei geraden Linien gebildete Fundamental-Dreieck.

Wenn die Gleichung $\varphi(x', y', z') = o$ in die neue Gleichung

$$\varphi(a_1 x + b_1 y + c_1,\ a_2 x + b_2 y + c_2,\ a_3 x + b_3 y + c_3) = o$$

transformirt wird, wo die Grössen $a_1, a_2, a_3$; $b_1, b_2, b_3$; $c_1, c_2, c_3$ respective die Dreilinien-Coordinaten der Punkte $(y, z)$, $(z, x)$, $(x, y)$ in Bezug auf das Fundamental-Dreieck $x_1 = o$, $y_1 = o$, $z_1 = o$ sind, so kann die Entwicklung mit Hilfe des Taylor'schen Satzes vollzogen werden. Wir bezeichnen zur Abkürzung wie folgt:

$$\underset{a\,b}{\triangle} = a_1 \frac{d S_b}{d b_1} + a_2 \frac{d S_b}{d b_2} + a_3 \frac{d S_b}{d b_3},$$
$$S_b = \varphi(b_1 b_2 b_3).$$

und können dann die Entwicklung unter der Voraussetzung, dass $S = o$ die allgemeine Gleichung des zweiten Grades repräsentirt, schreiben wie folgt:

$$S_a x^2 + S_b y^2 + S_c z^2 + \underset{ab}{\triangle} xy + \underset{bc}{\triangle} yz + \underset{ca}{\triangle} zx = o.$$

Darin sind nach den Definitionen

$$S_a = Aa_1^2 + 2Ba_1a_2 + Ca_2^2 + 2Da_1a_3 + 2Ea_2a_3 + Fa_3^2.$$
$$S_b = Ab_1^2 + 2Bb_1b_2 + Cb_2^2 + 2Db_1b_3 + 2Eb_2b_3 + Fb_3^2.$$

u. s. w.

$$\underset{ab}{\triangle} = 2a_1(Ab_1 + Bb_2 + Db_3) + 2a_2(Bb_1 + Cb_2 + Eb_3') \\ + 2a_3(Db_1 + Eb_2 + Fb_3),$$
$$\underset{bc}{\triangle} = 2b_1(Ac_1 + Bc_2 + Dc_3) + 2b_2(Bc_1 + Cc_2 + Ec_3) \\ + 2b_1(Dc_3 + Ec_2 + Fc_3).$$

u. s. w.

Durch die besondere Wahl des neuen Fundamental-Dreiecks kann die transformirte Gleichung vereinfacht werden; wenn die Ecken des neuen Fundamental-Dreiecks in der Curve liegen, so werden

$$S_a = S_b = S_c = o,$$

und die Glieder, welche die Quadrate der Veränderlichen enthalten, verschwinden aus der Gleichung; in Folge dessen ist die allgemeine Gleichung der dem Fundamental-Dreieck umschriebenen Kegelschnitte

$$\underset{ab}{\triangle} xy + \underset{bc}{\triangle} yz + \underset{ca}{\triangle} zx = o.$$

Wenn jede der Seiten des Fundamental-Dreiecks die Polare der gegenüberliegenden Ecke desselben ist, so verschwinden in Folge der Relation

$$\underset{ab}{\triangle} = \underset{bc}{\triangle} = \underset{ca}{\triangle} = o$$

die Glieder, welche die Producte der Veränderlichen enthalten und die Gleichung des auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezogenen Kegelschnitts wird

$$S_a x^2 + S_b y^2 + S_c z^2 = o.$$

Auch kann man

$$S_b = S_c = o, \quad \underset{ab}{\triangle} = \underset{ac}{\triangle} = o$$

machen und die allgemeine Gleichung in der Form

$$S_a x^2 + \underset{bc}{\triangle} yz = o$$

erhalten.

In Rücksicht auf die im Anfang dieses Artikels gegebenen Entwickelungen kann man noch die Coefficienten

$$S_a,\ S_b,\ S_c,\ \underset{ab}{\triangle},\ \underset{bc}{\triangle},\ \underset{ca}{\triangle}$$

mit Hilfe der Bestimmungsstücke des neuen Fundamental-Dreiecks ausdrücken; wir dürfen dies dem Leser überlassen.

372. Es bedarf nur der Erinnerung an die Entwicklungen der Art. 362, um die folgenden Sätze zu beweisen: Die sechs Eckpunkte zweier Dreiecke, die sich selbst conjugirt sind, liegen in demselben Kegelschnitt — und: Die sechs Seiten zweier sich selbst conjugirten Dreiecke berühren denselben Kegelschnitt.

Im Art. 362 haben wir die Discriminante der Gleichung

$$kS + S_1 = o$$

entwickelt, d. h. die Bedingung, unter welcher diese Gleichung zwei gerade Linien repräsentirt. Diejenigen Werthe von $k$, welche der Bedingung genügen, dass jene Discriminante durch sie mit Null identisch würde, fanden wir nothwendig als von dem Coordinaten-System unabhängig, auf welches der Kegelschnitt $S = o$ bezogen wurde; sie müssen bei jeder Coordinaten-Transformation ungeändert bleiben, d. h. eine lineare Transformation stört das Verhältniss der Coefficienten von $k^3$, $k^2$, $k^1$ u. $k^0$ nicht, welche in der dort zur Bestimmung von $k$ erhaltenen cubischen Gleichung auftreten. Denken wir uns nun zwei Dreiecke, welche in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind und bezeichnen die Seiten des einen durch

$$x = o,\ y = o,\ z = o,$$

die des andern durch

$$u = o,\ v = o,\ w = o;$$

wobei wir voraussetzen, dass diese Symbole Constanten implicite enthalten, so kann die Gleichung des Kegelschnitts in den Formen

$$x^2 + y^2 + z^2 = o \text{ und } u^2 + v^2 + w^2 = o$$

ausgedrückt werden.

Die Gleichung eines andern Kegelschnitts ist, bezogen auf das erste Dreieck

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = o,$$

in Bezug auf das zweite aber

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = o.$$

Wir müssen also die Relation haben

$$Ax^2 + 2Bxy + \ldots + k(x^2 + y^2 + z^2) = au^2 + 2buv + \ldots + k(u^2 + v^2 + w^2),$$

und wenn wir die Discriminante von jeder der beiden Seiten dieser Gleichung bilden und die entsprechenden Coefficienten von $k$ vergleichen, so ergeben sich die beiden Bedingungsgleichungen

$$A + C + F = a + c + f,$$

$$(AC - B^2) + (CF - E^2) + (AF - D^2) = (ac - b^2) + (cf - e^2) + (af - d^2).$$

Wenn nun jener Kegelschnitt durch die drei Ecken des ersten Dreiecks und durch zwei von den Ecken des zweiten hindurch geht, so müssen die Coefficienten $A, C, F, a, c$ sämmtlich Null sein und daher nach der ersten Bedingungsgleichung auch

$$f = o,$$

d. h. derselbe Kegelschnitt geht auch durch die dritte Ecke des zweiten Dreiecks.

Und wenn ein Kegelschnitt die Seiten des ersten Dreiecks und zwei von den Seiten des zweiten berührt, so müssen von den sechs Gliedern der zweiten Bedingungsgleichung fünf identisch mit Null sein; es ergiebt sich daraus, dass auch das sechste den Werth Null haben muss, d. h. dass derselbe Kegelschnitt auch die dritte Seite des zweiten Dreiecks berührt. Deshalb schneiden sich dann auch die geraden Verbindungslinien der correspondirenden Ecken zweier solcher Dreiecke in einem Punkte und die correspondirenden Seiten in Punkten einer geraden Linie. (Vergl. Art. 331, Aufg. 2 u. 3.)

Man kann in derselben Art beweisen, dass wenn zwei Dreiecke demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind, ihre Seiten alle denselben Kegelschnitt berühren.

373. Wir haben im Art. 363 als ein Beispiel für den Gebrauch der Invarianten die Frage nach der Bedingung berührt, welche erfüllt sein muss, wenn ein Dreieck zugleich einem Kegelschnitt $S = o$ eingeschrieben und einem andern Kegelschnitt $S_1 = o$ umschrieben sein soll.

Man kann in derselben Art nach dem gleichzeitig ein- und umgeschriebenen Polygon fragen.

Beide Untersuchungen lassen sich behandeln als Schlussfragen der Aufgaben: Welches ist der von der dritten Ecke eines Dreiecks beschriebene Ort, dessen drei Seiten einen Kegelschnitt $S_1 = o$ berühren, während seine zwei ersten Ecken einen Kegelschnitt $S = o$ durchlaufen?

Welches ist der Ort, den die freie Ecke eines Polygons durchläuft, wenn seine Seiten sämmtlich einen Kegelschnitt $S_1 = o$ berühren, während alle seine übrigen Eckpunkte in einem Kegelschnitt $S = o$ liegen?

Ihre Erledigung findet sich augenscheinlich alsdann in der Antwort auf die Frage: Unter welcher Bedingung fällt der gefundene Ort mit dem Kegelschnitte $S = o$ zusammen?

Die zur Beantwortung nöthigen Operationen lassen sich, wenn man sich zunächst auf ein Dreieck beschränkt, auch so zusammenfassen: Man bildet die Gleichung des von einem beliebigen Punkte an den Kegelschnitt $S_1 = o$ gelegten Tangentenpaares, sodann die Gleichung eines der Paare von geraden Linien, welche von den Durchschnittspunkten dieser Tangenten mit dem Kegelschnitt $S = o$ bestimmt werden und drückt endlich die Bedingung aus, unter welcher eine dieser geraden Linien den Kegelschnitt $S_1 = o$ berührt.

Es hat keine Schwierigkeit, nach dem Vorangegangenen die bezeichneten Schritte nach einander auszuführen. Wir ziehen es aber vor, einen Weg einzuschlagen, welcher sich den erst gegebenen Andeutungen unmittelbarer anschliesst und namentlich geeignet scheint, die algebraische Methode recht deutlich vor Augen zu führen.

Wenn $x = o$, $y = o$, $z = o$ die Gleichungen von drei geraden Linien repräsentiren, so können die Gleichungen

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = o, \text{ oder } S = o,$$

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - ayz - bzx - cxy = o, \text{ oder } S_1 = o$$

zwei Kegelschnitte repräsentiren; der erste derselben ist dem aus den drei gegebenen geraden Linien gebildeten Dreieck umschrieben.

Man erhält aus beiden Gleichungen die dritte

$$wS - S_1 = yz(w\alpha + a) + zx(w\beta + b) + xy(w\gamma + c) - l^2x^2 - m^2y^2 - \\ - n^2z^2,$$

in welcher $w$ eine willkürliche Constante ist; sie repräsentirt einen Kegelschnitt, welcher durch die vier Durchschnittspunkte der Kegelschnitte $S = o$, $S_1 = o$ hindurch geht.

Wenn man die partiellen Differentialquotienten der Gleichung

$$wS - S_1 = o$$

nach $x$, $y$, $z$ nimmt, d. i.

$$z(w\beta + b) + y(w\gamma + c) - 2l^2 x = o,$$
$$x(w\gamma + c) + z(w\alpha + a) - 2m^2 y = o,$$
$$y(w\alpha + a) + x(w\beta + b) - 2n^2 z = o,$$

so fordert die Gleichzeitigkeit dieser Gleichungen, dass die Determinante derselben mit Null identisch sei. Diese Determinante, — sie ist die Discriminante der Function $w\,S - S_1$ —

$$\begin{vmatrix} -2l^2, & w\gamma + c, & w\beta + b \\ w\gamma + c, & -2m^2, & w\alpha + a \\ w\beta + b, & w\alpha + a, & -2n^2 \end{vmatrix}$$

ist in Bezug auf $w$ vom dritten Grade und man kann daher die fragliche Bedingung in der Form

$$a_0 w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = o$$

schreiben und hat für die hier eingeführten Constanten die Werthe

$a_0 = \alpha\beta\gamma,$ $(\varDelta)$ (Art. 362.)

$a_1 = l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 + n^2\gamma^2 + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta,$ $(\Theta)$

$a_2 = 2a\alpha l^2 + 2b\beta m^2 + 2c\gamma n^2 + \alpha bc + \beta ca + \gamma ab,$ $(\Theta_1)$

$a_3 = l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 + abc - 4l^2m^2n^2.$ $(\varDelta_1)$

374. Die Durchschnittspunkte der geraden Linie

$$x = o$$

mit dem Kegelschnitt

$$w\,S - S_1 = o$$

werden durch die Gleichung

$$m^2y^2 + n^2z^2 - yz(w + a) = o$$

bestimmt, und wenn die beiden Durchschnittspunkte, wie es für die Berührung sein muss, zusammenfallen sollen, so muss diese Gleichung ein vollständiges Quadrat sein, d. h. man muss haben

$$w = \frac{2mn - a}{\alpha}.$$

Wir wollen diesen speciellen Werth von $w$ durch $w_1$ bezeichnen, so dass

$$a = 2mn - \alpha w_1$$

ist.

Analoge besondere Werthe von $w$, welche wir durch $w_2$ und $w_3$ ausdrücken wollen, ergeben sich aus den Forderungen, dass die geraden Linien $y = o$, $z = o$ resp. die Kegelschnitte

$$w_2 S - S_1 = o, \quad w_3 S - S_1 = o$$

berühren sollen, und sie sind durch die Gleichungen

$$b = 2nl - \beta w_2,$$
$$c = 2lm - \gamma w_3$$

mit den Constanten verbunden. Das Dreieck der geraden Linien

$$x = o, \quad y = o, \quad z = o$$

ist dann dem Kegelschnitt $\quad S = o$

eingeschrieben und den Kegelschnitten

$$w_1 S - S_1 = o,$$
$$w_2 S - S_1 = o,$$
$$w_3 S - S_1 = o$$

umgeschrieben.

Wenn wir die vorher gefundenen Werthe von $a, b, c$ in die Coefficienten der Discriminante substituiren, so werden diese

$$a_0 = \alpha\beta\gamma, \quad a_1 = (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2 - \alpha\beta\gamma(w_1 + w_2 + w_3),$$
$$a_2 = 2(l\alpha + m\beta + n\gamma)(4lmn - l\alpha w_1 - m\beta w_2 - n\gamma w_3) + \alpha\beta\gamma(w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1),$$
$$a_3 = (4lmn - l\alpha w_1 - m\beta w_2 - n\gamma w_3)^2 - \alpha\beta\gamma w_1 w_2 w_3.$$

Wir vereinfachen sie und die folgenden Untersuchungen durch die Substitutionen

$$t = l\alpha + m\beta + n\gamma, \quad u = 4lmn - l\alpha w_1 - m\beta w_2 - n\gamma w_3, \quad v = lmn.$$

Wir betrachten diese drei Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ als die Wurzeln einer cubischen Gleichung und setzen demnach

$$w^3 + Aw^2 + Bw + C = o = (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3).$$

Dann gelten nach den Relationen zwischen den Coefficienten und Wurzeln der Gleichungen, welche man gewöhnlich Newton zuschreibt, die drei Bedingungen

$$t^2 = a_1 - a_0 A, \quad 2tu = a_2 - a_0 B, \quad u^2 = a_3 - a_0 C$$

und man erhält daraus

$$4(a_1 - a_0 A)(a_3 - a_0 C) = (a_2 - a_0 B)^2.$$

Aus jenen drei Bedingungsgleichungen ergiebt sich aber auch, indem man in der vorausgesetzten cubischen Gleichung die Coefficienten $A$, $B$, $C$ durch ihre Werthe in $t$, $u$, $a_0$, $a_1$ ... ersetzt,

$$t^2 w^2 + 2tuw + u^2 = (tw + u)^2 = a_0 w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3$$
$$= a_0 (w - w_1)(w - w_2)(w - w_3).$$

Man kann demnach schreiben

$$tw + u = \sqrt{a_0 w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3} = A_0 + A_1 w + A_2 w^2 + A_3 w^3 + \ldots$$
$$= \varphi(w),$$

und erhält

$$A_0^2 = a_3,$$
$$2A_0 A_1 = a_2,$$
$$A_1^2 + 2A_1 A_2 = a_1,$$
$$A_1^3 + 2A_1 A_2 + 2A_0 A_3 = a_0,$$
$$tw_1 + u = A_0 + A_1 w_1 + A_2 w_1^2 + A_3 w_1^3 + \ldots,$$
$$tw_2 + u = A_0 + A_1 w_2 + A_2 w_2^2 + A_2 w_2^3 + \ldots,$$
$$t = A_1 + A_2 (w_2 - w_1) + A_3 (w_2^2 - w_1 w_2 + w_1^2) + \ldots,$$
$$u = A_0 - w_1 w_2 P,$$

wenn

$$P = A_2 + A_3 (w_1 + w_2) + A_4 (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) + \ldots$$

gesetzt wird.

Aus $\quad u^2 = a_3 - a_0 C$

folgt $\quad u^2 = a_3 - a_0 w_1 w_2 w_3 = A_0^2 - 2A_0 w_1 w_2 P + w_1^2 w_2^2 P^2,$

$$a_0 b_1 w_2 = a_0 (A_0 - u).$$

Sonach ist

$$w_3 = \frac{a_3 - u^2}{a_0 w_1 w_2},$$

oder

$$w_3 = \frac{1}{a_0}(w_1 w_2 P^2 - 2A_0 P).$$

Wenn nun die Voraussetzungen

$$w_1 = w_2 = o$$

gemacht werden, oder wenn $a = 2mn$, $b = 2nl$ ist, so sind die geraden Linien $\quad x = o, y = o$

Tangenten des Kegelschnitts $S_1 = o$ und des Kegelschnitts

$$w_3 S - S_1 = o;$$

man findet aber zugleich wegen $P = A_2$

$$w_3 = -\frac{2A_0 A_2}{a_0} = \frac{a_2^2 - 4a_1 a_3}{4a_0 a_3}.$$

Die dritte Seite $z = o$ berührt also den Kegelschnitt

$$(a_2^2 - 4a_1 a_3) S - 4a_0 a_3 S_1 = o;$$

da dieser aber für

$$a_2^2 = 4a_1 a_3$$

sich auf den Kegelschnitt $S_1 = o$ reducirt, so sind die Bedingungen, unter welchen das Dreieck $x = o$, $y = o$, $z = o$ gleichzeitig dem Kegelschnitt $S = o$ eingeschrieben und dem Kegelschnitt $S_1 = 0$ umgeschrieben ist,

$$a = 2mn, \; b = 2nl, \; a_2^2 = 4a_1 a_3.$$

375. Wenn nun $w_1 = o$ ist und nicht zugleich $w_2 = o$, so wird

$$P = A_2 + A_3 w_2 + A_4 w_2^2 + \ldots..,$$

$x = o$ berührt den Kegelschnitt $S_1 = o$, und man hat die Relationen

$$a_0 w_3 = -2A_0 (A_2 + A_3 w_2 + A_4 w_2^2 + \ldots),$$

$$a_0 w_2^2 w_3 = -2A_0 (A_2 w_2^2 + A_3 w_2^3 + A_4 w_2^4 + \ldots)$$

$$= 2A_0 [A_0 + A_1 w_2 - (A_0 + A_1 w_2 + A_2 w_2^2 + \ldots)]$$

$$= 2A_0 [A_0 + A_1 w_2 - \varphi(w_2)],$$

also $$a_0 w_2^2 w_3 - 2A_0 (A_0 + A_1 w_2) = -2A_0 \varphi(w_2).$$

Daraus folgt

$$a_0^2 w_2^4 w_3^2 - 4a_0 A_0 w_2^2 w_3 (A_0 + A_1 w_2) =$$
$$4A_0^2 [[\varphi(w_2)]^2 - (A_0 + A_1 w_2)^2].$$

Da aber $$2A_0 A_1 = a_2, \; A_1^2 = \frac{a_2^2}{4a_3}$$

ist, so wird

$$\varphi(w_2)^2 - (A_0 + A_1 w_2)^2 = \frac{w_2^3}{4a_3} (4a_0 a_3 w_2 + 4a_1 a_3 - a_2^2).$$

Indem man substituirt und reducirt, erhält man

$$a_0^2 w_2^2 w_3^2 - 4a_0 a_3 w_3 - 2a_0 a_2 w_2 w_3 = 4a_0 a_3 w_2 + 4a_1 a_3 - a_2^2,$$

woraus für $w_2 = o$ wieder der Werth

$$w_3 = \frac{a_2^2 - 4a_1 a_3}{4a_0 a_3}$$

hervorgeht, wie oben.

Wenn nun $DEFG$ ein dem Kegelschnitt $S = o$ eingeschriebenes Viereck ist, dessen drei Seiten $DE$, $EF$, $FG$ zugleich den

Kegelschnitt $S_1 = o$ berühren, so muss die Seite $DF$ im Dreieck $DEF$ nach dem Vorhergehenden einen Kegelschnitt

$$pS - S_1 = o$$

berühren, wo

$$p = \frac{a_2^2 - 4a_1 a_3}{4a_0 a_3}$$

ist.

Ebenso ist im Dreieck $DFG$ die Seite $FG$ eine Tangente des Kegelschnitts $S = o$, die Seite $DF$ Tangente des Kegelschnitts

$$pS - S_1 = o$$

und somit die Seite $DG$ Tangente eines Kegelschnitts

$$w_3 S - S_1 = o,$$

in dessen Gleichung die Grösse $w_3$ aus der oben entwickelten Relation

$$a_0^2 w_2^2 w_3^2 - 4a_0 a_3 w_3 - 2a_0 a_2 w_2 w_3 = 4a_0 a_3 w_2 + 4a_1 a_3 - a_2^2$$

hervorgeht, wenn man darin den Werth von $p$ an die Stelle von $w_2$ setzt; somit ist

$$w_3 = \frac{16a_3(8a_0 a_3^2 + a_2^3 - 4a_1 a_2 a_3)}{(a_2^2 - 4a_1 a_3)^2},$$

d. h. der von der vierten Seite berührte Kegelschnitt hat die Gleichung

$$16a_3(8a_0 a_3^2 + a_2^3 - 4a_1 a_2 a_3)S - (a_2^2 - 4a_1 a_3)^2 S_1 = o,$$

und reducirt sich somit für

$$8a_0 a_3^2 + a_2^3 - 4a_1 a_2 a_3 = o$$

auf den Kegelschnitt

$$S_1 = o.$$

Hätte man ein Fünfeck $DEFGH$, dem Kegelschnitt $S = o$ eingeschrieben, dessen Seiten $DE$, $EF$, $FG$, $GH$ den Kegelschnitt $S_1 = o$ berühren, so ist die Seite $HD$ Tangente eines Kegelschnitts $w_5 S - S_1 = o$ und man hat die Grösse $w_5$ zu bestimmen.

Im Dreieck $DFG$ berührt $FG$ den Kegelschnitt $S_1 = o$ und man hat also zwischen $w_3$ und $w_4$ die Relation

$$a_0^2 w_3^2 w_4^2 - 4a_0 a_3 w_4 - 2a_0 a_2 w_3 w_4 = 4a_0 a_3 w_3 + 4a_1 a_3 - a_2^2.$$

Im Dreieck $DGH$ ist die Seite $GH$ ebenso Tangente des Kegelschnitts $S_1 = o$, und also

$$a_0^2 w_4^2 w_5^2 - 4a_0 a_3 w_5 - 2a_0 a_2 w_4 w_5 = 4a_0 a_3 w_4 + 4a_1 a_3 - a_2^2.$$

28 *

Durch Subtraction findet man

$$a_0^2 w_4^2 (w_5 + w_3) = 4 a_0 a_3 + 2 a_0 a_2 w_4,$$

und durch die erste Gleichung

$$a_0^2 w_5 w_4^2 w_3 = a_2^2 - 4 a_1 a_3 - 4 a_0 a_3 w_4,$$

$$w_5 = \frac{4 a_0 a_2 (p - w_4)}{a_0^2 w_3 w_4^2}.$$

Nun kennt man $w_3$ und $w_4$, folglich auch $w_5$. In derselben Weise wird die Auflösung auf Polygone von beliebig grosser Seitenzahl übertragen.

376. Um den Kreis derjenigen algebraischen Formen, welche in der Untersuchung der Kegelschnitte hervortreten und von wesentlichem Einfluss sind, vollständig zu umschreiben, haben wir dem Bisherigen noch eine Entwicklung anzuschliessen, deren geometrische Bedeutung im ersten Abschnitt des folgenden Kapitels hervortreten wird.

Wenn man in einer Determinante eine bestimmte Anzahl Zeilen und ebenso viele Reihen unterdrückt, so bleibt eine neue Determinante übrig, welche man als eine Partial-Determinante der gegebenen bezeichnet; man kann nach der Zahl der unterdrückten Zeilen und Reihen erste, zweite, dritte u. s. w. Partial-Determinanten unterscheiden.

Wir haben im Art. 336 gesehen, dass jede beliebige Determinante sich aus Producten von je einem Element einer bestimmten Reihe und einer Determinante aus den Elementen aller der Horizontal- und Vertical-Reihen, in denen jenes Element nicht enthalten ist, zusammensetzen lässt; die Determinanten, welche hier als Factoren zu den Elementen einer bestimmten Reihe hinzutraten, sind dieselben, welche wir jetzt als die Partial-Determinanten nach diesen Elementen zu bezeichnen haben.

Nach dem Bildungsgesetz der Determinanten und der Natur des Differentials kann man eine solche Partial-Determinante auch als den Differential-Quotienten der Original-Determinante bezeichnen, welcher in Bezug auf das Element derselben genommen ist, dem sie entspricht.

Es sind diese Partial-Determinanten, welche in der Auflösung von Systemen linearer Gleichungen eine entscheidende Rolle spieen; das System

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1w &= \xi, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2w &= \eta, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3w &= \zeta, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4w &= \omega \end{aligned}$$

z. B. wird aufgelöst, indem man mit den Partial-Determinanten von

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_3 \end{vmatrix},$$

welche respective den Elementen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ entsprechen, und die wir durch $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ bezeichnen mögen, die Gleichungen derselben der Reihe nach multiplicirt; durch Addition verschwinden die Coefficienten von $y$, $z$, $w$, während der Coefficient von $x$ die vollständige Determinante wird, welche vorher geschrieben worden ist; d. i. man erhält

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} x = A_1\xi + A_2\eta + A_3\zeta + A_4\omega,$$

und analog

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_2 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4 \end{vmatrix} y = B_1\xi + B_2\eta + B_3\zeta + B_4\omega$$

u. s. w., womit die Auflösung des Systems gegeben ist.

Wir haben nicht sowohl solche directe Anwendungen der Partial-Determinanten im Auge, als vielmehr den aus ihnen abgeleiteten Begriff einer D e t e r m i n a n t e  m i t  a d j u n g i r t e n  E l e m e n t e n. M a n  e r h ä l t  e i n e  s o l c h e  a l s  d i e  D e t e r m i n a n t e,  d e r e n  E l e m e n t e  d i e  P a r t i a l - D e t e r m i n a n t e n  d e r  E l e m e n t e  d e r  u r s p r ü n g l i c h e n  D e t e r m i n a n t e  s i n d.

Nach der vorigen Bezeichnung wäre die der vorhergehend geschriebenen Determinante entsprechende Determinante mit adjungirten Elementen

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & D_4 \end{vmatrix}.$$

Es ist eine der merkwürdigsten und nächstliegendsten Eigenschaften einer solchen Determinante mit adjungirten Elementen, dass sie, mit der Original-Determinante multiplicirt, eine Potenz dieser letzteren hervorbringt, und daher selbst einer Potenz derselben gleich ist; der Exponent dieser letztern ist um Eins kleiner als die Zahl der Reihen oder Zeilen der gegebenen Determinante.

Man gewinnt diese Eigenschaft ohne Weiteres aus der Anwendung der Multiplications-Regel des Art. 345.

377. In Rücksicht der linearen Transformationen gewinnen diese Determinanten mit adjungirten Elementen eine Bedeutung, indem man sie als Substitutions-Determinanten auffasst.

Wenn zwei Reihen von Veränderlichen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ in einer geometrischen Untersuchung auftreten und die eine Reihe $x, y, z$ durch die linearen Substitutionen

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z$$

transformirt wird, so dass

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

die Determinante der Substitution ist, während die zweite Reihe $\xi, \eta, \zeta$ durch die Substitutionen

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta, \ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta, \ A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta$$

transformirt wird, in welcher die Coefficienten die Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix}$$

d. i. die Partial-Determinanten der vorigen sind, so werden diese Substitutionen als reciproke bezeichnet.

Wenn in der Function $x\xi + y\eta + z\zeta$ die Veränderlichen $x, y, z$ und $\xi, \eta, \zeta$ durch reciproke Substitutionen linear transformirt werden, so bleibt dieselbe ungeändert.

Man erhält nämlich als den neuen Coefficienten von $x\xi$ die Grösse $A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3$, d. i. die Determinante $\Delta$ der Substitution, und ebenso dieselbe Determinante als Coefficienten von $y\eta$ und $z\zeta$; die Coefficienten aller übrigen Glieder verschwinden, wie z. B. der von $xy$, d. i.

$$B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3$$

u. s. w. In Folge dessen wird $x\xi + y\eta + z\zeta$ in $\Delta(x\xi + y\eta + z\zeta)$ transformirt.

378. Wir haben eine Covariante als eine abgeleitete Function der gegebenen definirt, welche ihre Beziehung zu der ursprünglichen Function unverändert beibehält, wenn beide durch dieselben linearen Substitutionen transformirt werden.

W e n n  a b e r  d i e  p r i m i t i v e  u n d  d i e  a b g e l e i t e t e  F u n c t i o n  i h r e  g e g e n s e i t i g e  R e l a t i o n  b e h a l t e n ,  w e n n  m a n  d i e  V e r ä n d e r l i c h e n  d u r c h  r e c i p r o k e  S u b s t i t u t i o n e n  t r a n s f o r m i r t ,  s o  w i r d  d i e  a b g e l e i t e t e  F u n c t i o n  a l s  e i n e  C o n t r a v a r i a n t e  d e r  p r i m i t i v e n  b e z e i c h n e t.

Ein derartiger Zusammenhang besteht zwischen den Functionen

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = o,$$

$$(a'a''-b^2)\xi^2 + (a''a-b'^2)\eta^2 + (aa'-b''^2)\zeta^2 + 2(b'b''-ab)\eta\zeta + 2(b''b-a'b')\zeta\xi$$
$$+ 2(bb'-a''b'')\xi\eta = o.$$

Als die geometrische Bedeutung dieses Zusammenhanges können wir hier nur erinnern, dass letztere Gleichung die Bedingung ist, unter welcher die gerade Linie

$$x\xi + y\eta + z\zeta = o$$

den durch die primitive Gleichung dargestellten Kegelschnitt berührt.

Ihre weitere Bedeutung werden wir im ersten Abschnitt des folgenden Kapitels erkennen, wo wir den Begriff einer zu einer gegebenen Curve Reciproken näher zu untersuchen gedenken. (Art. 400 u. folg.) Die Gleichung derselben ist immer eine Contravariante von der Gleichung der Curve.

Sie unterscheidet sich wesentlich von der Covariante, denn nach einer linearen Substitution erhält man eine andere reciproke Curve zu der nämlichen primitiven; sie ist eine Contravariante, eben weil sie die Bedingung darstellt, unter welcher die gerade Linie

$$x\xi + y\eta + z\zeta = o$$

den gegebenen Kegelschnitt berührt; denn da diese letztere Function durch reciproke Substitutionen ungeändert bleibt, so müssen wir dasselbe Resultat erhalten, sei es nun, dass wir $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in der Function

$$(a'a'' - b^2)\xi^2 + (a''a - b'^2)\eta^2 + \ldots$$

transformiren, oder dass wir direct die Bedingung bilden, unter welcher die gerade Linie $x\xi + y\eta + z\zeta = o$ den durch die transformirte Gleichung von $ax^2 + a'y^2 \ldots$ repräsentirten Kegelschnitt berührt.

Wir erinnern hier zunächst nur noch daran, dass eine Contravariante der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in Form einer Determinante geschrieben werden kann, nämlich (Art. 366.)

$$\begin{vmatrix} a, & b'', & b', & \xi \\ b'', & a', & b, & \eta \\ b', & b, & a'', & \zeta \\ \xi, & \eta, & \zeta, & o \end{vmatrix} = o.$$

Die Vergleichung mit Art. 360 lehrt, dass hier zur Discriminante der allgemeinen Gleichung nur noch die neuen Veränderlichen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und die Null als Elemente hinzutreten.

379. Wir haben in den vorhergehenden Entwicklungen die wesentlichsten Partien einer Algebra der linearen Transformationen in ihrer geometrischen Bedeutsamkeit, und so weit sie an den homogenen Gleichungen ersten und zweiten Grades mit drei Veränderlichen zur Erscheinung kommen, nach einander vorgeführt.

Indem wir zurückblicken, finden wir die Hauptgrundzüge einer analytisch-geometrischen Untersuchung der den Gleichungen beider ersten Grade entsprechenden Formen darin vereinigt. Wir haben in den Invarianten und der Discriminante Coefficienten-Verbindungen kennen gelernt, welche durch eine lineare Transformation nicht verändert wurden. Die Identität derselben mit Null war der analytische Ausdruck bestimmter charakteristischer Eigenschaften der durch die Gleichung repräsentirten geometrischen Form. In dem Umstande, dass eine lineare Transformation unter der Voraussetzung, die Substitutions-Determinante habe den Werth $\pm 1$, einer Coordinaten-Transformation äquivalent war, fanden wir für die Natur der so repräsentirten Eigenschaften die nähere Bezeichnung, dass sie von der Lage des Coordinatensystems unabhängig sind. In der Aufgabe, diejenigen Functionen der Coefficienten einer homogenen Form zu bestimmen, welche durch lineare Transformation nicht geändert werden, ist daher die Aufgabe der Entwicklung aller charakteristisch verschiedenen geometrischen Formen, welche jener algebraischen Form entsprechen, inbegriffen. Speciell fanden wir die Classification der Kegelschnitte von der gefundenen Invariante abhängen.

Wir haben in den Covarianten und zuletzt in den Contravarianten die Gleichungen andrer geometrischen Formen kennen gelernt, welche zu der primitiven in einer durch lineare Substitutionen unstörbaren Relation sind und wenigstens von den Covarianten erkannt, dass jene Unveränderlichkeit gegenüber der Wahl aller möglichen Coordinatensysteme stattfindet.

Wenn dies von den Contravarianten augenscheinlich nicht gilt, so ist es unsere nächste Aufgabe, dem geometrischen Sinne dieser algebraischen Zusammenhänge nachzuforschen; der erste Abschnitt des folgenden Kapitels führt zur Erledigung dieser Frage, soweit sie hier folgen kann.

Wenn aber die Transformation der Coordinaten nicht der allgemeinen linearen Substitution, sondern nur einer besondern Art einer solchen entspricht, so ergiebt sich daraus die andre Aufgabe, zu untersuchen, welchen geometrischen Sinn diese allgemeine lineare Substitution habe; es wird damit allen hierher gehörigen Ergebnissen und Begriffen ein neues weiteres und fruchtbares Feld der Anwendbarkeit erworben. Dieser Anforderung entspricht der dritte und letzte Abschnitt des folgenden Kapitels.

Wir werden Gelegenheit haben zu zeigen, wie auch die Entwicklungen des zweiten Abschnitts in diesem Kapitel, welche eine wichtige Klasse von Eigenschaften der Kegelschnitte in entsprechender Ausführlichkeit behandeln, zu diesen Begriffen und Ergebnissen in enger Beziehung stehen, und erkennen darin das Band, welches sie mit denen des vorhergehenden und denen des nachfolgenden Abschnitts verknüpft.

Endlich weisen gerade diese Entwicklungen am deutlichsten über die Theorie der Formen ersten und zweiten Grades hinaus. Dieselben allgemeinen Ideen müssen, das ist unzweifelhaft, auch die analytische Geometrie der Formen beherrschen, welche höheren Graden entsprechen als dem zweiten. In ihnen scheint die allgemeine Grundlage einer wahrhaften analytisch-geometrischen Untersuchung gegeben. Wenn aber die Beschränkung auf die

Formen der beiden ersten Grade, die wir uns hier aufzuerlegen hatten, manche Besonderheit im Gefolge hat, welche nur eben ihnen angehört, so ist damit hinreichend angedeutet, wie einer allgemeinen Untersuchung der höheren Graden der Gleichungen entsprechenden geometrischen Formen eine breitere wissenschaftliche Grundlage in der allgemeinen Algebra der linearen Transformation gegeben werden müsse.

---

## Sechszehntes Kapitel.

## Geometrische Methoden.

### I. Die Methode der reciproken Polaren*).

380. Wenn ein fester Kegelschnitt $\Sigma$ und eine beliebige Curve $S$ gegeben sind, so können wir eine andere Curve $s$ in folgender Art erzeugen: Wir ziehen irgend eine Tangente zu $S$ und nehmen ihren Pol in Bezug auf $\Sigma$. Der Ort dieses Pols ist eine Curve $s$, welche die Polar-Curve von $S$ in Bezug auf $\Sigma$ genannt wird. Der Kegelschnitt $\Sigma$, rücksichtlich dessen der Pol genommen ward, heisst der Hilfs-Kegelschnitt**).

Wir haben früher (Art. 227, Aufg. 21) ein wichtiges Beispiel von Polar-Curven untersucht und bewiesen, dass die Polar-Curve eines Kegelschnitts in Bezug auf einen andern Kegelschnitt eine Curve des zweiten Grades ist.

Um auszudrücken, dass ein Punkt der Pol einer geraden Linie in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma$ ist, wollen wir ihn kurz als den dieser Linie entsprechenden Punkt bezeichnen. Weil also die Erklärung des Zusammenhangs zwischen den beiden Curven $S$ und $s$ zeigt, wie jeder

*) M. Poncelet führte diese schöne Methode in die Wissenschaft ein; man findet seine Darstellung derselben im IV. Bande von Crelle's Journal.

**) Im Zusammenhange mit andern Betrachtungsweisen wird auch die Bezeichnung dieser Curve als Directrix der Reciprocität vielfach gebraucht.

Punkt der Curve $s$ der Pol einer Tangente der Curve $S$ in Bezug auf den Kegelschnitt ist, so können wir jetzt die gegenseitige Beziehung beider Curven dadurch ausdrücken, dass wir sagen, jeder Punkt von $s$ entspreche einer Tangente von $S$.

381. Der Durchschnittspunkt zweier Tangenten der Curve $S$ entspricht der Verbindungslinie der entsprechenden Punkte von $s$.

Dies folgt aus der Eigenschaft des Kegelschnitts $\Sigma$, nach welcher der Durchschnittspunkt zweier beliebigen geraden Linien der Pol der geraden Linie ist, welche die Pole jener geraden Linien verbindet. (Art. 103.)

Nehmen wir dabei an, dass die zwei Tangenten der Curve $S$, von welcher dieser Satz handelt, unendlich nahe sind, so dass ihr Durchschnittspunkt der Curve angehört, so sind die entsprechenden Punkte der Curve $s$ nothwendig auch unendlich nahe benachbart und ihre gerade Verbindungslinie ist eine Tangente dieser letzteren Curve. (Art. 99, 116.) Für diesen Fall geht daher der obige Satz in den folgenden über: Wenn eine Tangente der Curve $S$ einem Punkte der Curve $s$ entspricht, so entspricht dem Berührungspunkt jener Tangente in $S$ die Tangente dieses Punktes an $s$.

Man sieht daraus, dass die zwischen beiden Curven bestehende Beziehung reciprok ist, d. h. dass die Curve $S$ in derselben Art aus der Curve $s$ abgeleitet werden kann, in welcher diese Curve $s$ aus der Curve $S$ hervorging; darauf bezieht sich die Benennung solcher Curven als reciproke Polaren.

382. Auf Grund dieses Zusammenhangs können wir aus jedem Satze über die Lage von Linien oder Punkten in Bezug auf die Curve $S$ einen andern Satz ableiten, welcher von der Lage von Punkten oder Linien bezüglich der Curve $s$ handelt.

Wenn wir z. B. wissen, dass eine Anzahl von Punkten, welche mit der Figur $S$ verbunden sind, in einer geraden Linie liegen, so schliessen wir daraus, dass die entsprechenden mit der Figur $s$ verbundenen geraden Linien sich in einem Punkte schneiden (Art. 103), und umgekehrt: Wenn eine Anzahl von Punkten der Figur $S$ in einem

Kegelschnitt liegen, so müssen die entsprechenden geraden Linien der Figur $s$ die Polare dieses Kegelschnitts in Bezug auf den Kegelschnitt $\Sigma$ berühren; oder wenn allgemein der Ort eines zu $S$ gehörigen Punktes eine Curve $S_1$ ist, so ist die Enveloppe der entsprechenden zu $s$ gehörigen geraden Linie die reciproke Polare von $S_1$.

383. Der Grad der reciproken Polare einer Curve ist der Zahl von Tangenten gleich, welche von irgend einem Punkte an diese Curve gezogen werden können; nach dem in Art. 313 eingeführten Sprachgebrauch sagen wir, dass er ihrer Klasse gleich ist.

Denn der Grad der Curve $s$ ist mit der Anzahl von Punkten identisch, in denen eine gerade Linie diese Curve schneidet; und einer Anzahl von Punkten der Curve $s$, die in einer geraden Linie liegen, entspricht die nämliche Anzahl von Tangenten der Curve $S$, welche durch den dieser Linie entsprechenden Punkt gehen.

Wenn also $S$ ein Kegelschnitt ist, an welchen, wie wi wissen, von einem Punkte aus zwei und nur zwei reelle oder imaginäre Tangenten gezogen werden können, so schneidet eine gerade Linie die Curve $s$ in zwei und nur in zwei reellen oder imaginären Punkten, und wir erkennen auch so, unabhängig von dem im Art. 227 gegebenen Beweise, dass die Reciproke eines Kegelschnitts eine Curve zweiten Grades ist.

384. Wir wollen die Art der Ableitung eines Satzes aus einem andern nach dieser Methode für den Fall durch Beispiele näher erläutern, wo die Curven $S$ und $s$ Kegelschnitte sind.

Aus Art. 291 kennen wir den Satz: Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt $S$ eingeschrieben ist, so sind die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten $A$ und $D$, $B$ und $E$, $C$ und $F$ in derselben geraden Linie. Nach dem Vorigen schliessen wir daraus, dass in einem Sechseck, welches dem Kegelschnitte $s$ umschrieben ist, die Verbindungslinien der Gegenecken $a$ und $d$, $b$ und $e$, $c$ und $f$ sich in einem Punkte schneiden. (Art. 289.) Wir erkennen also, dass die Sätze von Pascal und Brianchon zu-einander reciprok sind; und in der That ist der Letztere auf diese Weise zuerst erhalten worden.

Um dem Leser möglichst einfach Gelegenheit zur eigenen Uebung in der Anwendung dieser Methode zu bieten, wollen wir eine Anzahl von Sätzen mit Danebenstellung ihrer reciproken Sätze anführen. Der Leser möge zuerst sorgfältig die Beweisgründe aufsuchen und prüfen, durch welche der eine aus dem andern hervorgeht und dann versuchen, bei andern Beispielen die reciproken Sätze selbst aufzustellen, ohne sie vorher in der hier gegebenen Fassung zu lesen. Er wird zuletzt finden, dass die zur Bildung des reciproken Satzes führende Operation auf einen fast mechanischen Prozess sich reducirt, dessen wesentlichstes Stück die Vertauschung der Worte „Punkt“ und „gerade Linie“, „eingeschrieben“ und „umschrieben“, „Ort“ und „Enveloppe“, u. s. w. ist.

| | |
|---|---|
| Wenn zwei Ecken eines Dreiecks sich in festen geraden Linien bewegen, während die Seiten sich um feste Punkte drehen, so ist der von seiner dritten Ecke durchlaufene Ort ein Kegelschnitt. (Aufg. 4, Art. 302.) | Wenn zwei Seiten eines Dreiecks durch feste Punkte gehen, während die Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, so ist die Enveloppe der dritten Seite ein Kegelschnitt. |
| Der vom dritten Eckpunkt durchlaufene Ort wird zu einer geraden Linie, wenn die Punkte, um welche die Seiten sich drehen, in einer geraden Linie liegen. (Aufg. 5, Art. 47.) | Die Enveloppe der dritten Seite wird ein Punkt, wenn die von den Eckpunkten des Dreiecks durchlaufenen geraden Linien sich in einem Punkte schneiden. |
| In welchem andern Falle ausser diesem wird der Ort der dritten Ecke eine gerade Linie? (Aufg. 6, Art. 47.) | In welchem andern Falle ausser diesem geht die dritte Seite durch einen festen Punkt? (Aufg. 3, Art. 49.) |

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so berühren sich ihre reciproken Curven ebenfalls; denn das erste Paar hat einen Punkt und die ihm angehörige Tangente gemein, demnach ist dem zweiten die entsprechende Tangente und der zugehörige Berührungspunkt gemein. Ebenso haben die Reciproken zweier Kegelschnitte eine doppelte Berührung, wenn diese selbst eine solche doppelte Berührung besitzen.

| | |
|---|---|
| Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt umschrieben ist und zwei seiner Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, so ist der Ort der | Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, und zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, so ist die Enveloppe der dritten |

dritten Ecke ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. (Aufgabe 1, Art. 302.)

Seite ein Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat. (Aufg. 2, Art. 302.) Vergl. Art. 326.

385. Wir zeigten im Art. 381, dass, wenn die Tangenten $pt$, $p't$ der Curve $s$ den Punkten $P$, $P'$ der Curve $S$ entsprechen, auch die Tangenten der Curve $S$ in den Punkten $P$, $P'$ den Berührungspunkten $p$, $p'$ der Tangenten $pt$, $p't$ der Curve $s$ entsprechen müssen; in Folge dessen entspricht der Durchschnittspunkt $Q$ dieser Tangenten der Berührungssehne $pp'$, und wir erkennen daraus, dass einem Punkte $Q$ und seiner Polare $PP'$ in Bezug auf die Curve $S$ eine gerade Linie $pp'$ und ihr Pol $q$ in Bezug auf die Curve $s$ entspricht.

Wenn zwei Punkte eines Kegelschnitts und zwei seiner Tangenten gegeben sind, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte dieser letzteren durch einen festen Punkt. (Art. 287.)

Wenn zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so bewegt sich der Durchschnittspunkt der diesen letzteren angehörigen Tangenten desselben in einer geraden Linie.

Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf alle durch vier gegebene Punkte möglichen Kegelschnitte gehen durch einen und denselben Punkt. (Art. 111, Aufg. 3.)

Die Pole einer festen geraden Linie in Bezug auf alle die mit den nämlichen vier Tangenten möglichen Kegelschnitte liegen in derselben geraden Linie.

Der Ort des Pols einer festen geraden Linie in Bezug auf alle die dem nämlichen Viereck umschriebenen Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt. (Art. 330, Aufg. 2.)

Die Enveloppe der Polare eines festen Punktes in Bezug auf alle die dem nämlichen Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt.

Die geraden Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Gegenecken des Dreiecks verbinden, welches als sein Polar-Dreieck in Bezug auf einen Kegelschnitt zu betrachten ist, schneiden sich in einem Punkte. (Art. 331, Aufg. 2.)

Die Punkte, in welchen die Seiten eines Dreiecks von den Gegenseiten des Dreiecks geschnitten werden, das als sein Polar-Dreieck in Bezug auf einen Kegelschnitt erscheint, liegen in einer geraden Linie.

In einen Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. (Art. 331, Aufg. 6.)

Um einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken in drei gegebenen geraden Linien liegen.

386. Für den Fall zweier Kegelschnitte $S$, $S'$ und der reciproken Kegelschnitte $s$, $s'$ erkennen wir, dass jedem Punkte, wel-

cher den Curven $S$ und $S'$ gemeinschaftlich ist, eine Tangente entspricht, welche den Curven $s$ und $s'$ gemeinschaftlich angehört, und ebenso einer Durchschnittssehne von $S$ und $S'$ ein Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten von $s$ und $s'$.

Wenn drei Kegelschnitte zwei Punkte und somit eine Sehne gemein haben, so schneiden sich ihre drei anderen gemeinschaftlichen Sehnen in einem Punkte. (Art. 290.)

Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten besitzen, so liegen die Durchschnittspunkte der andern drei Paare ihrer gemeinschaftlichen Tangenten in einer geraden Linie.

Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten besitzen, oder wenn jeder von ihnen eine doppelte Berührung mit einem vierten Kegelschnitt hat, so gehen ihre sechs Durchschnittssehnen zu dreien durch dieselben Punkte. (Art. 288.)

Wenn drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Punkte besitzen, oder wenn jeder von ihnen eine doppelte Berührung mit einem vierten Kegelschnitt hat, so liegen von den sechs Durchschnitts-Punkten der gemeinschaftlichen Tangenten drei und drei in derselben geraden Linie.

Oder: Drei Kegelschnitte, deren jeder mit einem vierten Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, können als solche betrachtet werden, welche vier Radical-Centra besitzen. (Art. 141.)

Oder: Drei Kegelschnitte, deren jeder mit einem vierten Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, können als solche betrachtet werden, welche vier Achsen der Aehnlichkeit besitzen. (Vgl. Art. 150.)

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so schneiden sich die Tangenten derselben, welche in den Endpunkten einer beliebigen, durch den Berührungspunkt gehenden Sehne an sie gelegt sind, in der gemeinschaftlichen Sehne beider Kegelschnitte.

Wenn zwei Kegelschnitte sich berühren, so geht die Verbindungslinie der Punkte derselben, in welchen die von einem beliebigen Punkte ihrer jenem Berührungspunkte entsprechenden gemeinschaftlichen Tangente an sie gezogenen Tangenten sie berühren, stets durch den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte.

Wenn man durch den Durchschnitts-Punkt gemeinschaftlicher Tangenten zweier Kegelschnitte zwei beliebige Sehnen zieht, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien ihrer Endpunkte in der einen oder andern von ihren gemeinschaftlichen Sehnen. (Art. 288.)

Wenn man in der gemeinschaftlichen Sehne zweer Kegelschnitte irgend zwei Punkte wählt und von ihnen an die Kegelschnitte Tangenten zieht, so gehen die Diagonalen der von ihnen gebildeten Vierecke durch den einen oder andern von den Durchschnittspunkten der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte.

Wenn jeder der zwei Kegelschnitte $A$ und $B$ mit einem dritten Kegelschnitt $S$ eine doppelte Berührung hat, so schneiden sich ihre Berührungssehnen mit demselben und ihre Durchschnittssehnen mit einander in einem Punkt und bilden ein harmonisches Büschel. (Art. 287.)

Wenn jeder der zwei Kegelschnitte $A$ und $B$ mit einem dritten Kegelschnitt $S$ eine doppelte Berührung hat, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer den Berührungspunkten mit $S$ entsprechenden Tangenten und die Durchschnittspunkte der Tangenten, welche $A$ und $B$ gemeinschaftlich sind, in einer und derselben geraden Linie und die erstern Punkte sind den letztern harmonisch conjugirt.

Wenn jeder von drei Kegelschnitten $A$, $B$, $C$ mit einem vierten $S$ eine doppelte Berührung hat, und wenn überdies die Kegelschnitte $A$ und $B$ beide den Kegelschnitt $C$ berühren, so schneiden sich die Tangenten in ihren Berührungspunkten in einer gemeinschaftlichen Sehne der Kegelschnitte $A$ und $B$.

Wenn jeder von drei Kegelschnitten $A$, $B$, $C$ mit einem vierten $S$ eine doppelte Berührung hat, und wenn die Kegelschnitte $A$ und $B$ überdies den Kegelschnitt $C$ berühren, so geht die gerade Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Durchschnitts-Punkt gemeinschaftlicher Tangenten der Kegelschnitte $A$ und $B$.

Man bemerkt leicht, dass die vorigen Sätze denen analog sind, welche in dem Art. 155 und den vorhergehenden Art. in der Theorie dreier Kreise aufgestellt und angewendet worden sind; jedem der dortigen Sätze entspricht ein Satz in der Theorie dreier Kegelschnitte, die in denselben vierten Kegelschnitt eingeschrieben sind. (Vergl. Art. 353.) Das Analogon der Aufgabe des Apollonius ist alsdann die Aufgabe: Zu drei Kegelschnitten, welche alle demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind, denjenigen vierten Kegelschnitt zu bestimmen, der sie alle berührt und gleichfalls demselben Kegelschnitt eingeschrieben ist. Die Untersuchung derselben ist eine sehr nützliche Uebung, die wir dem Leser empfehlen. Nur in dem Schlusse 5) des Art. 155 findet eine wesentliche Differenz statt, die daraus entspringt, dass die drei gegebenen Kegelschnitte nicht ein Radical-Centrum, sondern vier solche Punkte haben. In Folge dessen wird die Linie $a''b''$ nun construirt, indem man den Pol von $SS'S'$ mit irgend einem der vier Radical-Centra verbindet und das Problem nimmt demnach 32 Auflösungen an, statt der 8 im Falle dreier Kreise.

Wir fügen dem noch die Sätze hinzu, welche dem Schlusse 6) des Art. 155 entsprechen; sie sind:

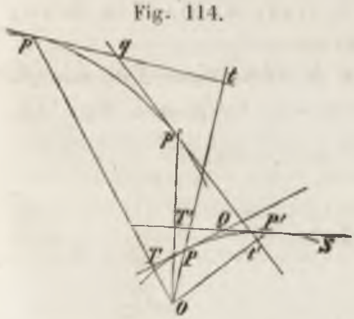
Die Berührungssehne des geforderten Kegelschnittes mit dem umschriebenen Kegelschnitt $S$ geht durch den Durchschnitt einer der Aehnlichkeits-Achsen der drei gegebenen Kegelschnitte mit der Polare eines ihrer Radical-Centra in Bezug auf den Kegelschnitt $S$.

Der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten des geforderten Kegelschnitts mit dem umschriebenen Kegelschnitt $S$ liegt in der geraden Verbindungslinie eines ihrer Radical-Centra mit dem Pol einer ihrer Aehnlichkeits-Achsen in Bezug auf den Kegelschnitt $S$.

387. Wir haben bisher den Hilfskegelschnitt $\Sigma$ als einen ganz beliebigen Kegelschnitt vorausgesetzt; es ist jedoch gebräuchlicher, diesen Hilfskegelschnitt einen Kreis sein zu lassen. Wir wollen in dem Folgenden diese besondere Annahme überall machen, so dass überall, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erwähnt ist, unter Polar-Curven solche Polaren gemeint sein sollen, welche mit Bezug auf eine kreisförmige Directrix gebildet sind.

Wir wissen aus Art. 117, dass die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis zu der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Centrum senkrecht ist, und dass das Product der Entfernungen dieses Punktes und seiner Polare vom Centrum dem Quadrat des Radius gleich ist. Auf Grund dieser Beziehung kann der gegenseitige Zusammenhang zwischen solchen Polar-Curven, die auf eine kreisförmige Directrix bezogen sind, wie folgt ausgedrückt werden: Wenn man von einem beliebigen festen Punkte $O$ (Fig. 114) auf jede Tangente der Curve $S$ eine Senkrechte $OT$ fällt, so ist der Ort eines Punktes $p$ in derselben, welcher so bestimmt wird, dass das Rechteck $OT \,.\, Op$ einer constanten Grösse $k^2$ gleich sei, die reciproke Polare der Curve $S$. Denn dies ist völlig gleichbedeutend mit dem Ausdrucke, nach welchem der Punkt $p$ der Pol der geraden Linie $PT$ in Bezug auf den festen Kreis ist, der den Punkt $O$ zum Centrum und die Länge $k$ zum Halbmesser hat.

Fig. 114.




Nach Art. 381 schliessen wir daraus, dass die Tangente $pt$ dem Berührungspunkt $P$ entspricht, d. h. dass die gerade Linie $OP$ zu $pt$ senkrecht und dass $OP.Ot = k^2$ ist.

Es ist leicht nachzuweisen, dass durch die Veränderung der Grösse $k$ die Form der Curve $s$ nicht geändert wird; da in den meisten Fällen nur in dieser letzteren das geometrische Interesse ruht, so kann man den zur Directrix gewählten Kreis ganz ausser Betracht lassen und $s$ als die reciproke Curve von $S$ in Bezug auf den Punkt $O$ bezeichnen. Alsdann nennen wir diesen Punkt den Ursprung der Reciprocität.

Die Vortheile, welche die Anwendung eines Kreises als Hilfskegelschnitt gewährt, entspringen aus den beiden folgenden Sätzen, die aus dem oben Gesagten hervorgehen und uns in den Stand setzen, nicht nur Sätze, welche sich allein auf die Lage beziehen, sondern auch solche Sätze durch diese Methode zu transformiren, welche die Grösse von Linien und Winkeln betreffen:

Die Entfernung eines Punktes $P$ vom Ursprung ist der reciproke Werth von der Entfernung der entsprechenden geraden Linie $pt$.

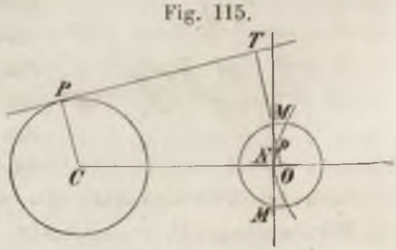
Der von irgend zwei geraden Linien $TQ$, $T'Q$ gebildete Winkel $TQT'$ ist dem Winkel $pOp'$ gleich, welcher am Ursprung durch die entsprechenden Punkte $p, p'$ bestimmt wird; denn $Op$ ist senkrecht zu $TQ$ und $Op'$ senkrecht zu $T'Q$.

Wir werden einige Beispiele von der Anwendung dieser Principien geben, nachdem wir vorher die folgende Aufgabe untersucht haben.

388. Die reciproke Polare eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis zu finden.

Die Aufgabe fordert, den Ort des Pols einer Tangente $PT$ des Kreises $C$ in Bezug auf den Kreis $O$ zu bestimmen. (Fig. 115.)

Fig. 115.




Sei $MN$ die Polare des Mittelpunktes $C$ in Bezug auf den Kreis $O$, so besteht, wenn wir die Punkte $C$ und $p$ und ihre Polaren $MN$ und $PT$ betrachten, nach Art. 127 die Relation

$$\frac{OC}{CP} = \frac{Op}{pN}$$

($N$ ist der Fusspunkt des von $p$ auf die Polare $MN$ gefällten Perpendikels); in dieser ist aber das erste Verhältniss constant, weil sowohl $OC$ als $CP$ constant sind. Es ist also die Entfernung des Punktes $p$ von dem Punkte $O$ zu seiner Entfernung von der Geraden $MN$ in dem constanten Verhältniss $OC : CP$, d. h. der Ort des Punktes $p$ ist ein Kegelschnitt, für welchen $O$ ein Brennpunkt und $MN$ die entsprechende Directrix und dessen Excentricität $OC : CP$ ist. Die Excentricität ist demnach grösser oder kleiner als Eins, je nachdem $O$ ausserhalb oder innerhalb des Kreises $C$ ist, und sie ist gleich Eins, wenn der Punkt $O$ in der Peripherie desselben liegt.

Die reciproke Polare eines Kreises ist ein Kegelschnitt, der den Ursprung zum Brennpunkt und die dem Centrum entsprechende gerade Linie zur Directrix hat, und welcher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem der Ursprung innerhalb oder ausserhalb des Kreises oder auf demselben liegt.

389. Hiernach machen wir zunächst von dem zweiten Satze des Art. 387 Gebrauch zur Ableitung einer Reihe von Eigenschaften, welche sich auf die Grösse von Winkeln beziehen.

Zwei Tangenten eines Kreises machen mit ihrer Berührungssehne gleiche Winkel.

Die gerade Linie, welche vom Brennpunkt eines Kegelschnitts nach dem Durchschnittspunkt zweier Tangenten desselben gezogen wird, halbirt den Winkel, welchen ihre Berührungssehne am Brennpunkt spannt. (Art. 193.)

Denn der Winkel zwischen einer Tangente $PQ$ und der Berührungssehne $PP'$ ist dem Winkel gleich, der am Brennpunkt von den entsprechenden Punkten $p$, $q$ gespannt wird; ebenso ist der Winkel $QP'P$ dem von $p'$ und $q$ am Brennpunkte gespannten Winkel gleich, und wegen $QPP' = QP'P$ ist daher $pOq = p'Oq$.

Jede Tangente eines Kreises ist senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Centrum.

Jeder Punkt eines Kegelschnitts fasst mit dem Durchschnittspunkt der ihm entsprechenden Tangente mit der Directrix am Brennpunkt einen rechten Winkel.

Wir erinnern dabei, dass die Directrix des Kegelschnitts dem Centrum des Kreises entspricht.

Jede gerade Linie ist senkrecht zu der geraden Verbindungslinie ihres Pols mit dem Centrum des Kreises.

Jeder Punkt fasst mit dem Durchschnittspunkt seiner Polare mit der Directrix einen rechten Winkel am Brennpunkt.

Die gerade Linie, welche einen Punkt mit dem Centrum eines Kreises verbindet, macht mit den durch diesen Punkt an den Kreis gezogenen Tangenten gleiche Winkel.

Wenn der Punkt, in welchem eine gerade Linie die Directrix schneidet, mit dem Brennpunkt verbunden wird, so halbirt die Verbindungslinie den Winkel zwischen den Radien vectoren der Punkte, in welchen die gegebene gerade Linie den Kegelschnitt schneidet.

Der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Tangenten eines Kreises, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

Die Enveloppe der Sehnen eines Kegelschnitts, welche einen gegebenen Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt von dem nämlichen Brennpunkt und derselben Directrix.

Die Enveloppe der Berührungssehnen derjenigen Tangenten eines Kreises, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden, ist ein concentrischer Kreis.

Der Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten eines Kegelschnitts, deren Berührungssehnen am Brennpunkt einen gegebenen Winkel spannen, ist ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkt und derselben Directrix.

Wenn man von einem festen Punkte an eine Reihe concentrischer Kreise Tangenten zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte ein durch den festen Punkt und das gemeinschaftliche Centrum gehender Kreis.

Wenn eine feste gerade Linie eine Reihe von Kegelschnitten schneidet, die denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix haben, so ist die Enveloppe der in den Durchschnittspunkten an diese Kegelschnitte gelegten Tangenten ein Kegelschnitt von demselben Brennpunkte, welcher sowohl die feste gerade Linie als die gemeinschaftliche Directrix berührt.

Wenn wir die gerade Linie in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ergiebt sich als ein specieller Fall des letzteren Satzes, dass die Enveloppe der Asymptoten aller derjenigen Hyperbeln, die denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix haben, eine Parabel ist, die denselben Brennpunkt hat und die gemeinschaftliche Directrix berührt.

Wenn durch einen Punkt eines Kreises zwei zu einander rechtwinklige Sehnen gezogen werden, so geht die Verbindungslinie ihrer Endpunkte durch das Centrum desselben.

Der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander rechtwinklig durchschneiden, ist die Directrix.

Wir sagen „eine Parabel“, weil die Polare des Kreises in Bezug auf den Punkt, von welchem die Sehnen ausgehen, als auf einen Punkt seiner Peripherie eine Parabel ist. (Art. 388.)

Die Enveloppe einer Sehne im Kreise, welche an einem gegebenen Punkte seiner Peripherie einen vorgeschriebenen Winkel spannt, ist ein concentrischer Kreis.

Der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangenten einer Parabel, welche einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist ein Kegelschnitt, der denselben Brennpunkt und dieselbe Directrix hat.

Wenn die Basis und der Winkel an der Spitze eines Dreiecks gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kreis, welcher durch die Endpunkte der Basis geht.

Wenn von einem Dreieck zwei Seiten nach ihrer Lage und der von der Basis an einem bestimmten Punkte gespannte Winkel gegeben sind, so ist die Enveloppe der Basis ein Kegelschnitt, von welchem dieser Punkt ein Brennpunkt ist und der die beiden gegebenen Seiten berührt.

Der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel, welche einander rechtwinklig schneiden, ist ein Kreis.

Die Enveloppe der Sehne eines Kegelschnitts, welche an einem gegebenen Punkte einen rechten Winkel spannt, ist ein Kegelschnitt, welcher diesen Punkt zum Brennpunkt hat.

Im Art. 134 bewiesen wir den Satz: W e n n  m a n  v o n  e i n e m  P u n k t  i n  d e r  P e r i p h e r i e  e i n e s  K r e i s e s  a u f  d i e  S e i t e n  e i n e s  i h m  e i n g e s c h r i e b e n e n  D r e i e c k s  P e r p e n d i k e l  f ä l l t,  s o  l i e g e n  i h r e  F u s s p u n k t e  i n  e i n e r  g e r a d e n  L i n i e.

Wenn wir jenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität wählen, so entspricht dem in den Kreis eingeschriebenen Dreieck ein Dreieck, welches einer Parabel umschrieben ist; es entspricht auch dem Fusspunkt der auf eine gerade Linie gefällten Senkrechten die durch den entsprechenden Punkt senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Ursprung gezogene Gerade, so dass wir den Satz erhalten: W e n n  w i r  d i e  E c k e n  e i n e s  D r e i e c k s,  w e l c h e s  e i n e r  P a r a b e l  u m s c h r i e b e n  i s t,  m i t  d e m  B r e n n p u n k t  d e r s e l b e n  v e r b i n d e n  u n d  i n  j e n e n

Eckpunkten auf diesen Verbindungslinien Senkrechte errichten, so gehen diese durch denselben Punkt. Wenn man daher über der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Brennpunkt als Durchmesser einen Kreis beschreibt, so geht derselbe durch die Ecken des umschriebenen Dreiecks. Und somit: Wenn drei Tangenten einer Parabel gegeben sind, so ist der Ort des Brennpunktes derselben ein Kreis, welcher dem von jenen gebildeten Dreieck umschrieben ist. (Art. 225.)

Der Ort des Fusspunktes der Senkrechten vom Brennpunkt einer Ellipse oder Hyperbel auf die Tangente derselben ist ein Kreis.

Wenn man von irgend einem Punkte aus nach einem Kreise gerade Linien zieht und in den Endpunkten derselben Senkrechte auf ihnen errichtet, so ist die Enveloppe dieser Letzteren ein Kegelschnitt, der den festen Punkt zu seinem Brennpunkt hat.

390. Nachdem wir im letzten Artikel die Methode, nach welcher auf Winkel bezügliche Sätze transformirt werden, hinreichend durch Beispiele erläutert haben, gehen wir dazu über, zu zeigen, in welcher Weise Sätze transformirt werden, in welchen die Grössen von durch den Ursprung gehenden geraden Linien auftreten. Solche Transformationen geschehen auf Grund des ersten Satzes im Artikel 387. Wir wählen als ein Beispiel den Satz, dass die Summe (oder die Differenz, wenn der Ursprung ausserhalb des Kreises liegt) der Senkrechten, die vom Ursprung auf ein Paar paralleler Tangenten eines Kreises gefällt werden können, constant und dem Durchmesser des Kreises gleich ist.

Nun entsprechen zwei parallelen Linien zwei Punkte in einer durch den Ursprung gehenden Geraden, und man erhält den Satz: Die Summe der reciproken Werthe der Segmente einer Focal-Sehne in der Ellipse ist constant.

Aus Artikel 195, Aufgabe 1, wissen wir, dass diese Summe dem reciproken Werth des Halbparameters der Ellipse gleich ist, und da das gegenwärtige Beispiel lehrt, dass dieselbe nur vom Durchmesser und nicht von der Lage des reciproken Kreises abhängig ist, so ist zu schliessen, dass die reciproken Curven gleicher Kreise in Bezug auf irgend einen Ursprung denselben Parameter haben.

Das Rechteck der Segmente jeder durch den Ursprung gezogenen Sehne eines Kreises ist constant.

Das Rechteck aus den Senkrechten, die man vom Brennpunkt auf zwei parallele Tangenten fällen kann, ist constant.

Daher ist mit der durch den Ursprung an einen Kreis zu ziehenden Tangente auch die conjugirte Achse der reciproken Hyperbel gegeben.

Der Satz, dass die Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den Brennpunkten constant ist, kann ausgedrückt werden, wie folgt:

Die Summe der Entfernungen des Brennpunktes von den Berührungspunkten paralleler Tangenten ist constant.

Die Summe der reciproken Werthe der Senkrechten, welche man von einem beliebigen Punkte aus auf solche zwei Tangenten eines Kreises fällen kann, deren Berührungssehne durch jenen Punkt geht, ist constant.

391. Mit Hilfe des in Artikel 127 gegebenen Satzes kann man diese Transformationen auch auf solche Sätze anwenden, welche sich auf die Grösse von geraden Linien beziehen, die nicht durch den Ursprung gehen.

So wissen wir z. B., dass das Product der Perpendikel, die man von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts auf das eine Paar der Gegenseiten eines in denselben eingeschriebenen Vierecks fällen kann, zu dem Product der von demselben Punkte auf das andre Paar der Gegenseiten zu fällenden Perpendikel in einem constanten Verhältniss ist. (Artikel 283.)

Die Relation

$$PA.PC = k.PB.PD,$$

welche diesen Satz ausdrückt, wenn $P$ der gedachte Punkt und $A$, $B$, $C$, $D$ die Fusspunkte der auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel in ihrer natürlichen Ordnung sind, kann aber in der Form

$$\frac{PA}{OP} \cdot \frac{PC}{OP} = k \cdot \frac{PB}{OP} \cdot \frac{PD}{OP}$$

geschrieben werden. Sind nun $a$, $b$, $c$, $d$ die den Seiten des Vierecks entsprechenden Punkte und bezeichnet $ap$ die Senkrechte, welche man von $a$ auf die dem Punkte $P$ entsprechende gerade Linie fällt, so gilt nach Artikel 127 die Relation

$$\frac{PA}{OP} = \frac{ap}{Oa};$$

ebenso für die andern Seiten.

Wegen der Unveränderlichkeit der Linien $Oa$, $Ob$, $Oc$, $Od$ schliessen wir daraus: Wenn ein festes Viereck einem Kegelschnitt umschrieben ist, so ist das Product der Perpendikel, die man von zweien seiner Gegenecken auf eine veränderliche Tangente desselben fällen kann, zu dem Producte der auf dieselbe Tangente von den andern Gegenecken gefällten Perpendikel in einem constanten Verhältniss.

Das Product der Perpendikel, die man von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts auf zwei feste Tangenten desselben fällt, ist zu dem Quadrat des von ihm auf ihre Berührungssehne gefällten Perpendikels in einem constanten Verhältniss.

Das Product der Perpendikel, die man von zwei festen Punkten eines Kegelschnittes auf eine beliebige Tangente desselben fällen kann, ist in einem constanten Verhältniss zu dem Quadrate des Perpendikels, welches vom Durchschnitt der in jenen Punkten an den Kegelschnitt gelegten Tangenten auf jene Tangente gefällt wird.

Wählte man bei dieser Transformation den Ursprung der Reciprocität in der Berührungssehne selbst, so ist der reciproke Satz wie folgt auszusprechen: Das Rechteck aus den Abschnitten, welche eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts in zwei parallelen festen Tangenten desselben bestimmt, ist constant.

In jedem Kegelschnitte ist das Product der Perpendikel, die man von zwei festen Punkten (den Brennpunkten) auf eine beliebige Tangente fällt, constant.

Das Quadrat des Radius vector von einem festen Punkte zu einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts ist zu dem Producte der Perpendikel in einem constanten Verhältniss, welche man von diesem Punkte des Kegelschnitts auf zwei feste gerade Linien fällen kann.

392. Manche auf Grössenverhältnisse bezügliche Sätze lassen sich auf solche über gerade Linien reduciren, welche in harmoni-

schem oder anharmonischem Verhältniss geschnitten werden, und ihre Transformation wird alsdann durch das folgende Princip ermöglicht: Vier Punkten in einer geraden Linie entsprechen vier gerade Linien, die durch einen Punkt gehen, (einer Reihe von vier Punkten ein Büschel von vier Strahlen) und das anharmonische oder Doppelschnitt-Verhältniss dieses Büschels ist dasselbe wie das jener vier Punkte. Man braucht zur Begründung desselben nur anzuführen, dass jeder Strahl des Büschels, welches durch den Ursprung und die gegebenen vier Punkte bestimmt wird, zu einer der entsprechenden Linien senkrecht ist.

Mit Hilfe dieses Princips lassen sich die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises ableiten.

Das Doppelschnittverhältniss des Büschels, welches durch die Verbindung von vier festen Punkten eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen fünften entsteht, ist constant.

Das Doppelschnittverhältniss der Punkte, in welchen vier feste Tangenten eines Kegelschnitts von einer veränderlichen fünften Tangente desselben geschnitten werden, ist constant.

Der erste dieser Sätze ist für den Kreis wahr, weil alle Winkel des Büschels constant sind, in Folge dessen ist der zweite für alle Kegelschnitte richtig. Der zweite Satz gilt für den Kreis, weil die von den vier Punkten am Centrum bestimmten Winkel constant sind; in Folge dessen ist der erste Satz für alle Kegelschnitte wahr.

Indem man die Winkel betrachtet, welche in der reciproken Figur den am Kreise vorhandenen constanten Winkeln entsprechen, erkennt man, dass die von den vier Punkten der veränderlichen Kegelschnittstangente am Brennpunkt bestimmten Winkel in dem einen Falle constant sind und das ferner die Winkel, welche von den Durchschnittspunkten der vier Strahlen des Büschels mit der Directrix am Brennpunkt gespannt werden, in dem andern Falle von constanter Grösse sind.

In derselben Art zeigt sich der Satz des Artikels 106 als der reciproke des im Artikel 104 gegebenen, und beide gelten für alle Kegelschnitte, weil sie zunächst für den Kreis wahr sind.

393. Das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten einer geraden Linie ist nicht die einzelne Relation über die Grösse von Linien, welche durch die an einem festen Punkt gemessenen Winkel ausgedrückt werden kann. Für jede Relation, welche durch die wie in Artikel 54 vollzogene Substitution des Ausdrucks

$$\frac{OA\,.\,OB\,.\,\sin AOB}{OP}$$

für jede in ihr vorkommende geradlinige Strecke $AB$ auf eine Relation zwischen den Sinus der an einen gegebenen Punkt $O$ gespannten Winkel reducirt werden kann, gilt, was von der Relation des Doppelschnittverhältnisses bewiesen ist, dass sie für die Schnittpunkte jeder beliebigen Transversale mit den geraden Linien $OA$, $OB$ . . . wahr ist, welche jene Punkte mit diesem gegebenen Punkt verbinden.

Indem man alsdann den gegebenen Punkt zum Ursprung der Reciprocität nimmt, kann ein reciproker Satz leicht abgeleitet werden.

So ist z. B. der folgende Satz, welchen man Carnot verdankt, eine unmittelbare Folge des Artikel 108: Wenn ein Kegelschnitt die Seiten $AB$, $BC$, $CA$ eines Dreiecks respective in den Punktepaaren $c, c'; a, a'; b, b'$ schneidet, so ist

$$\frac{Ac\,.\,Ac'\,.\,Ba\,.\,Ba'\,.\,Cb\,.\,Cb'}{Ab\,.\,Ab'\,.\,Bc\,.\,Bc'\,.\,Ca\,.\,Ca'} = 1.$$

Man sieht leicht, dass dieses Verhältniss die eben erwähnte Eigenschaft besitzt, überall kann man für die in ihm auftretenden geraden Strecken die Sinus der Winkel substituiren, welche die Endpunkte derselben an einem festen Punkte $O$ bestimmen. Wir können demnach den reciproken Satz bilden, und finden, dass es derselbe ist, welchen wir im Artikel 329 gegeben haben.

394. Nachdem wir gezeigt haben, wie zu speciellen Sätzen die reciproken zu bilden sind, fügen wir einige allgemeine Betrachtungen über reciproke Kegelschnitte hinzu.

Wir bewiesen im Artikel 388, dass die Reciproke eines Kreises eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem der Ursprung innerhalb oder ausserhalb des Kreises, oder auf demselben gewählt wird; wir dehnen zuerst diesen Schluss auf alle Kegelschnitte aus. Je näher eine gerade Linie oder ein Punkt dem Ursprung ist, desto weiter muss offenbar der entsprechende Punkt oder die entsprechende Linie von demselben sein; in Folge des Grundgesetzes, von welchem dieses Entsprechen beherrscht wird, entspricht jeder durch den Ursprung gehenden geraden Linie ein Punkt in unendlicher Entfernung und dem Ursprunge selbst eine gerade Linie, welche ganz in unendlicher Entfernung liegt. Demnach entsprechen den beiden durch den Ursprung an die Curve zu ziehenden Tangenten zwei unendlich entfernte Punkte der reciproken Curve. Wenn vom Ursprung aus zwei reelle Tangenten an die Curve gezogen werden können, so hat die reciproke Curve zwei reelle Punkte in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist eine Hyperbel; wenn die vom Ursprung an die Curve zu ziehenden Tangenten imaginär sind, so ist die reciproke Curve eine Ellipse; und wenn der Ursprung in der Curve liegt, so dass die von ihm aus zu ziehenden Tangenten zusammenfallen (Artikel 99), so fallen die unendlich entfernten Punkte der reciproken Curve zusammen, und dieselbe ist demnach eine Parabel. Da die unendlich entfernte gerade Linie dem Ursprung entspricht, so ist dieselbe, wenn der Ursprung der Curve angehört, nothwendig eine Tangente der reciproken Curve und wir gelangen auch so zu dem Satze des Artikels 278, nach welchem jede Parabel eine in unendlicher Entfernung gelegene Tangente hat.

Wir erkennen jetzt in dem Satze des Artikels 223 den reciproken von dem in der Aufgabe 2 des Artikel 182 gegebenen.

395. Den Berührungspunkten zweier durch den Ursprung gehender Tangenten entsprechen die Tangenten in den zwei unendlich entfernten Punkten der reciproken Curve, d. h. die Asymptoten derselben. Da die Excentricität der reciproken Hyperbel nur von dem durch ihre Asymptoten gebildeten Winkel abhängig ist, so wird sie durch den Winkel völlig bestimmt, welchen die vom Ursprung ausgehenden Tangenten der Original-Curve einschliessen.

Es entspricht ferner der Durchschnittspunkt der Asymptoten der reciproken Curve, d. i. ihr Centrum, der Berührungssehne der vom Ursprung an die Original-Curve gezogenen Tangenten. Wir sprechen nur einen speciellen Fall dieses Satzes aus, wenn wir sagen, dass dem Centrum eines Kreises die Directrix des reciproken Kegelschnitts entspricht, denn die Directrix ist die Polare des Ursprungs, und dieser ist der Brennpunkt des Kegelschnitts.

Wir können in derselben Art die Achsen der reciproken Curven ermitteln, denn sie sind nothwendig diejenigen geraden Linien, welche durch sein Centrum parallel der inneren und äusseren Halbirungslinie des Winkels gezogen werden, den die vom Ursprung ausgehenden Tangenten bilden. Man kann dies mit Hilfe des im Artikel 191 gegebenen Satzes ausdrücken, indem man sagt: Wenn durch den Ursprung ein Kegelschnitt gelegt wird, der mit dem gegebenen confocal ist, so sind die Tangente und Normale dieses letzteren, welche durch den Ursprung gelegt werden können, den Achsen des reciproken Kegelschnitts parallel.

Diese letztere Ausdrucksweise besitzt den Vorzug, dass sie auch für einen in der Curve gelegenen Ursprung noch gültig ist.

396. Zu zwei gegebenen Kreisen lässt sich stets ein Punkt finden, für welchen als Ursprung die reciproken Curven derselben confocale Kegelschnitte werden. Denn da die Reciproken aller Kreise einen gemeinschaftlichen Brennpunkt im Ursprung haben müssen, so werden sie confocale Kegelschnitte, wenn sie überdies einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, d. h. wenn die Polare des Ursprungs in Bezug auf beide Kreise die nämliche ist, oder wenn derselbe einer der beiden Punkte ist, welche im Artikel 144 bestimmt und als Grenzpunkte bezeichnet wurden. Wenn ein derartiges System von Kreisen wie das im Artikel 142 betrachtete, gegeben ist, so bilden ihre reciproken Curven in Bezug auf einen dieser Grenzpunkte ein System confocaler Kegelschnitte.*)

*) Wir hätten dies auch daraus schliessen können, dass jenes System von Kreisen nur ein specieller Fall von dem System von Kegelschnitten ist, welche demselben Viereck umschrieben sind; indess confocale Kegelschnitte als solche betrachtet werden müssen, die demselben Vierseit eingeschrieben sind.

In Folge dessen können Sätze über confocale Kegelschnitte stets in solche transformirt werden, welche sich auf ein derartiges System von Kreisen beziehen; es correspondirt z. B. der Satz des Artikel 189 mit dem folgenden: Die gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise spannt an jedem der Grenzpunkte einen rechten Winkel. Der Satz des Artikel 191 entspricht dem Nachstehenden: Wenn eine gerade Linie zwei Kreise schneidet, so werden ihre zwischen diesen Kreisen gelegenen Abschnitte von beiden Grenzpunkten aus unter gleichen Winkeln gesehen. Oder in Bezug auf die Aufgabe 3 des Artikel 228: Ein fester Punkt und derjenige andre feste Punkt, durch welchen (Artikel 143) seine Polare gehen muss, bestimmen an den Grenzpunkten einen rechten Winkel.

Wir bemerken hier, dass die Methode der reciproken Polaren eine einfache Auflösung der Apollonischen Aufgabe darbietet: Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher zwei gegebene Kreise berührt, (wir wollen dieselben durch (1), (2) bezeichnen) ist offenbar eine Hyperbel, welche die Centra dieser Kreise zu Brennpunkten hat, weil die Aufgabe sich sogleich auf diese andere reducirt: Man soll den Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmen, für welches die Basis und die Differenz der Seiten gegeben ist. In Folge dessen muss (Artikel 388) die Polare des Centrums in Bezug auf einen der gegebenen Kreise immer einen Kreis berühren, welcher leicht construirt werden kann. Ebenso muss die Polare des Centrums für einen unter denjenigen Kreisen, welche die Kreise (1) und (3) zugleich berühren, auch einen gegebenen Kreis berühren. Wenn wir daher zu den zwei so bestimmten Kreisen eine gemeinschaftliche Tangente ziehen und den Pol derselben in Bezug auf den Kreis (1) nehmen, so ist mit ihm das Centrum des die drei Kreise berührenden Kreises gefunden.

397. Wenn zwei beliebige Kegelschnitte gegeben sind, so existiren drei Punkte, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Reciproken jener ersteren, welche entstehen, wenn man jeden derselben als Ursprung

betrachtet, concentrisch sind; denn es giebt drei Punkte, deren Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselben sind; es sind die Durchschnittspunkte der Paare der Gegenseiten und des Paars der Diagonalen in demjenigen Viereck, welches beiden Kegelschnitten zugleich eingeschrieben ist. In der 1. Aufgabe des Artikel 106 sind sie mit $E$, $F$, $O$ bezeichnet. Diese drei Punkte sind auch dann reell, wenn die Durchschnittspunkte der Kegelschnitte imaginär sind. (Wir erinnern an das sich selbst conjugirte Dreieck im Artikel 370.)

398. Man soll die Gleichung der reciproken Curve eines Kegelschnitts in Bezug auf sein Centrum als Ursprung finden.

Wir benutzen das Ergebniss des Artikel 179, nach welchem die vom Centrum auf die Tangente gefällte Senkrechte mittels des von ihr mit den Achsen gebildeten Winkels durch die Formel

$$p^2 = a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta$$

ausgedrückt wird.

Daraus ergiebt sich unmittelbar die Polar-Gleichung der reciproken Curve in der Form

$$\frac{k^4}{\varrho^2} = a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta,$$

und demnach

$$\frac{a^2x^2}{k^4} + \frac{b^2y^2}{k^4} = 1.$$

Die reciproke Curve ist daher ein concentrischer Kegelschnitt, dessen Achsen die reciproken Werthe von denen des gegebenen Kegelschnittes haben.

399. Man soll die Gleichung der reciproken Curve eines Kegelschnitts mit Bezug auf einen Punkt $(x' y')$ als Ursprung finden.

Die Länge der Senkrechten von diesem Punkte auf die Tangente des Kegelschnittes ist nach demselben Artikel 179:

$$p = \frac{k^2}{\varrho} = \sqrt{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)} - x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta;$$

und demnach die Gleichung der reciproken Curve

$$(xx' + yy' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

400. Wir setzen an Stelle der Mittelpunktsgleichung die allgemeine Gleichung des Kegelschnitts

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = o,$$

und nehmen der Symmetrie wegen $k^2 = -z^2$, um die reciproke Curve in Bezug auf $x^2 + y^2 + z^2 = o$ zu suchen. Wir finden sie durch die Bemerkung, dass die Polare eines Punktes der reciproken Curve in Bezug auf diese Directrix die gegebene Curve berühren muss. Die Gleichung der bezeichneten Polare ist:

$$xx' + yy' + zz' = o,$$

und die Bedingung, unter welcher dieselbe den gegebenen Kegelschnitt berührt, d. h. die Gleichung der reciproken Curve, ist nach Artikel 111

$$(a'a'' - b^2)x^2 + (a''a - b'^2)y^2 + (aa' - b''^2)z^2 + 2(b'b'' - ab)yz$$
$$+ 2(b''b - a'b')zx + 2(bb' - a''b'')xy = o.$$

Wir haben im Artikel 365 gesehen, dass die Coefficienten in dieser Gleichung mit $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Delta}{da'}$, u. s. w. identisch sind. Wir wollen dieselben weiterhin durch die Abkürzungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ bezeichnen. Aus dieser Gleichung, welche wir durch das Symbol $\Sigma$ bezeichnen wollen, können die früher geometrisch erhaltenen Eigenschaften, wie z. B. dass der Ursprung der reciproken Curve angehört, wenn die ursprüngliche Curve eine Parabel ist u. s. w. ohne Schwierigkeit abgeleitet werden.

Wir fügen die Bemerkung hinzu, dass die allgemeine Gleichung der reciproken Curve auch in Form einer Determinante ausgedrückt werden kann, wie folgt. Wir bezeichnen die allgemeine Gleichung des gegebenen Kegelschnitts in der gegebenen Form durch $S = o$ und gebrauchen die Symbole der partiellen Differential-Quotienten wie früher; alsdann ist, wie aus sehr einfachen Betrachtungen sich ergiebt, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & b'', & b', & \frac{dS}{dx} \\ b'', & a', & b, & \frac{dS}{dy} \\ b', & b, & a'', & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz}, & o \end{vmatrix} = o$$

die verlangte Form.

Wenn der gegebene Kegelschnitt auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezogen ist, so treten an die Stelle der partiellen Differentiale einfach die Variabeln $x, y, z$ selbst. (Vgl. Art. 378.)

*Aufg. 1.* Die Gleichung der reciproken Curve von der Reciproken eines Kegelschnitts zu finden.

Natürlich muss dieselbe die gegebene Curve selbst sein; ihre Gleichung ist nach dem Vorigen

$$(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}^2)x^2 + (\mathfrak{A}''\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'^2)y^2 + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}''^2)z^2$$
$$+ 2(\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{B})yz + \ldots = o,$$

und die Identität derselben mit der ursprünglichen Gleichung erhellt aus dem Bestehen der folgenden Reihe von Identitäten, von welchem man sich leicht überzeugt:

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' - \mathfrak{B}^2 = \varDelta a,\ \mathfrak{A}''\mathfrak{A} - \mathfrak{B}'^2 = \varDelta a',\ \mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}''^2 = \varDelta a'';$$
$$\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'' - \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \varDelta b,\ \mathfrak{B}''\mathfrak{B} - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \varDelta b',\ \mathfrak{B}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}'' = \varDelta b'';$$

denn nach ihnen ist die Gleichung identisch mit

$$\varDelta S = o$$

und repräsentirt daher die ursprüngliche Curve. Die Discriminante der reciproken Curve ergiebt sich auf demselben Wege $= \varDelta^2$.

*Aufg. 2.* Man soll zu dem System der durch die nämlichen vier festen Punkte gehenden Kegelschnitte das reciproke System bestimmen.

Aus der Gleichung $S + kS_1 = o$,
welche einen beliebigen Kegelschnitt des ersten Systems repräsentirt, erkennen wir, dass die Gleichung der reciproken Curve erhalten werden muss, indem man in der Gleichung

$$\Sigma = o$$

an Stelle der Coefficienten $a, a', \ldots$ der Gleichung $S = o$ die aus ihnen und den Coefficienten $a_1, a_1', \ldots$ der Gleichung $S_1 = o$ zusammengesetzten Grössen

$$a + ka_1,\ a' + ka_1',\ a'' + ka_1'',\ b + kb_1,\ b' + kb_1',\ b'' + kb_1''$$

substituirt.

Wir schreiben das Resultat dieser Substitution in der Form

$$\Sigma + k\Phi + k^2\Sigma_1 = o,$$

indem wir durch $\Sigma$, $\Sigma_1$ die Gleichungen der Reciproken von $S$, $S_1$ bezeichnen, so dass $\Sigma_1$ aus $\Sigma$ erhalten wird, indem man die Coefficienten $a, a', a'', b$, u. s. w. in der erstern überall in $a_1, a_1', a_1'', b_1$, u. s. w. umwandelt; und indem wir

$$\Phi = (a'a_1'' + a''a_1' - 2bb_1)x^2 + (a''a_1 + aa_1'' - 2b'b_1')y^2$$
$$+ (aa_1' + a'a_1 - 2b''b_1'')z^2 + 2(b'b_1'' + b''b_1' - ab_1 - a_1b)yz$$
$$+ 2(b''b_1 + bb_1'' - a'b_1' - a_1'b')zx + 2(bb_1' + b'b_1 - a''b_1'' - a_1''b'')xy$$

setzen.

Da das Originalsystem der Kegelschnitte durch vier feste Punkte geht, so wird das System der Reciproken von vier festen geraden Linien berührt; und die Form der Gleichung

$$\Sigma + k\,\Phi + k^2\Sigma_1 = o$$

zeigt in der That, dass alle Kegelschnitte dieses Systems, welche durch die Aenderung des Coefficienten $k$ erhalten werden können, von dem durch die Gleichung

$$4\,\Sigma\,\Sigma_1 = \Phi^2$$

dargestellten Orte berührt werden. (Vergl. Artikel 295, 308.) Dies ist somit die Gleichung der vier geraden Linien, welche für die Kegelschnitte

$$\Sigma = o,\ \Sigma_1 = o$$

und ebenso für alle andern Kegelschnitte des reciproken Systems die gemeinschaftlichen Tangenten sind. Die Form dieser Gleichung liefert aber noch weitere Ergebnisse. (Vergl. Artikel 309 u. f.) Sie zeigt, dass der Kegelschnitt

$$\Phi = o$$

durch die vier Berührungspunkte des durch $4\,\Sigma\,\Sigma_1 = \Phi^2$ repräsentirten Ortes mit dem Kegelschnitt $\Sigma = o$ und ebenso durch die Berührungspunkte desselben Ortes mit dem Kegelschnitt $\Sigma_1 = o$ hindurchgeht. Demnach liegen die acht Berührungspunkte der Kegelschnitte $\Sigma = o$ und $\Sigma_1 = o$ mit ihren gemeinschaftlichen Tangenten auf einem und demselben Kegelschnitt

$$\Phi = o.$$

*Aufg. 3.* Man entwickle die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte $S = o$, $S_1 = o$.

Die Reciproken des Systems derjenigen Kegelschnitte, welche dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben, bilden ein System von Kegelschnitten durch vier feste Punkte und können durch die Gleichung

$$\Sigma + k\,\Sigma_1 = o$$

repräsentirt werden.

Indem man für dies letztere System die Gleichung der Reciproken bildet, erhält man $\quad \Delta S + kF + k^2 \Delta_1 S_1 = o,$

zu deren Verständniss nur bemerkt zu werden braucht, dass $F$ diejenige Form ist, welche $\Phi$ annimmt, wenn an die Stelle der Grössen $a$, $a'$, $a''$, $b$, u. s. w. die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$, u. s. w. gesetzt werden; also

$$\begin{aligned} F = {} & (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'' + \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1' - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)x^2 + (\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'' - 2\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1')y^2 \\ & + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1'')z^2 + 2(\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'' + \mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B})yz \\ & + 2(\mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1'' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}_1' - \mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}')zx \\ & + 2(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1' + \mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}''\mathfrak{B}_1'' - \mathfrak{A}_1''\mathfrak{B}'')xy \end{aligned}$$

Demnach ist die Gleichung der zu $S = o$, $S_1 = o$ gemeinschaftlichen Tangenten

$$F^2 = 4\,\Delta\,\Delta_1\,S\,S_1$$

und man erhält den vorhin ausgesprochenen Satz. Man sieht leicht, dass die Kegelschnitte

$$\Phi = o, \quad F = o$$

reciproke Polaren sind, und die nähere Erörterung dieses ihres gegenseitigen Verhältnisses ist eine nützliche Uebung.

Wir bemerken auch, dass die Functionen $F$ und $\Phi$ Covarianten der Functionen $\Sigma$ und $\Sigma_1$, $S$ und $S_1$ respective sind, oder dass ihre Beziehung zu diesen letzteren durch keine lineare Transformation geändert werden kann; dies ergiebt sich auch mit Nothwendigkeit aus der Art des geometrischen Zusammenhangs zwischen den durch sie und die ursprünglichen Gleichungen repräsentirten Curven.

*Aufg. 4.* Wenn $S = o$, $S_1 = o$, $F = o$ die im Vorhergehenden bestehenden Bedeutungen haben, so repräsentirt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz} \\ \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dF}{dx}, & \frac{dF}{dy}, & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix} = o$$

oder

$$\frac{dF}{dx}\left(\frac{dS}{dy}\frac{dS_1}{dz} - \frac{dS}{dz}\frac{dS_1}{dy}\right) + \frac{dF}{dy}\left(\frac{dS}{dz}\frac{dS_1}{dx} - \frac{dS}{dx}\frac{dS_1}{dz}\right) + \frac{dF}{dz}\left(\frac{dS}{dx}\frac{dS_1}{dy} - \frac{dS}{dy}\frac{dS_1}{dx}\right) = o.$$

die drei geraden Linien, welche in Bezug auf die Kegelschnitte $S = o$, $S_1 = o$ dieselben Pole haben.

Wir erinnern für diesen Satz zunächst an die Artikel 353, 354 und an Artikel 359, in welchem wir zeigten, dass die obige Determinante eine Covariante der drei gegebenen Functionen $S$, $S_1$, $F$ sei. Darnach bleibt nur übrig, zu beweisen, dass für irgend eine der Formen, welche diesen Gleichungen durch lineare Transformation gegeben werden können, der ausgesprochene Satz wahr ist; alsdann muss er für alle möglichen so zu erzeugenden Formen Gültigkeit haben. Wir wählen dazu die einfachste derselben, nämlich diejenigen, welche die Kegelschnittsgleichungen unter der Voraussetzung erhalten, dass das für $S$ und $S_1$ gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck (Vergl. über dessen Existenz Artikel 370, 397) zum Fundamental-Dreieck gewählt sei. Dann sind die Gleichungen

$$S = o, \quad S_1 = o$$

von den Formen

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = o, \quad a_1x^2 + a_1'y^2 + a_1''z^2 = o.$$

In Folge dessen erhalten die partiellen Differentialquotienten von $S$ und $S_1$ die möglichst einfachsten Werthe, die $b$ und somit auch die $\mathfrak{B}$ verschwinden aus der Entwicklung von $F$, und die $\mathfrak{A}$ in derselben nehmen die nachstehenden Werthe an:

$$\mathfrak{A} = a'a'',\ \mathfrak{A}' = a''a,\ \mathfrak{A}'' = aa',\ \mathfrak{A}_1 = a_1'a_1'',\ \mathfrak{A}_1' = a_1''a_1,\ \mathfrak{A}_1'' = a_1a_1';$$

in Folge dessen ist

$$F = aa_1x^2(a''a_1' + a'a_1'') + a'a_1'y^2(aa_1'' + a''a_1) + a''a_1''z^2(a'a_1 + aa_1')$$

und die obige Determinante geht in den Ausdruck

$$8xyz[aa_1(a'^2a_1''^2 - a''^2a_1'^2) + a'a_1'(a''^2a_1^2 - a^2a_1''^2) + a''a_1''(a^2a_1'^2 - a'^2a_1^2)] = o,$$

welcher sich durch Beseitigung der constanten Factoren auf

$$xyz = o,$$

d. i. die Gleichung des gemeinschaftlichen sich selbst conjugirten Dreiecks, reducirt.

Die Entwicklung von $F$ zeigt, dass auch dieser Kegelschnitt, welcher die acht Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten von $S$ und $S_1$ enthält, zu dem System der Kegelschnitte gehört, für welche das Dreieck $xyz = o$ das sich selbst conjugirte ist. Die Vierecke, welche er mit den beiden gegebenen Kegelschnitten bestimmt, haben in der That dieselben Durchschnittspunkte der Gegenseiten und Diagonalen, mit dem von $S$, $S_1$. Das Viereck der zu diesen letzteren gemeinschaftlichen Tangenten zeigt denselben Punkt als Durchschnitt der Diagonalen, aber die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten fallen nicht mit denen des ursprünglichen Vierecks zusammen, sondern theilen die zwischen ihnen enthaltene Strecke harmonisch. Wir werden auf den Kegelschnitt $F = o$, dessen Untersuchung viel Interesse darbietet, noch bei einer andern Gelegenheit zurückkommen.

*Aufg.* 5. Die Enveloppe eines Systems confocaler Kegelschnitte zu finden.

Die Gleichung eines solchen Systems ist

$$\frac{x^2}{a^2-k^2} + \frac{y^2}{b^2-k^2} = 1.$$

Die Reciproke desselben wird nach Artikel 398 durch

$$(a^2 - k^2)x^2 + (b^2 - k^2)y^2 = 1$$

dargestellt. Da diese Gleichung ein System von Kegelschnitten repräsentirt, welche durch die vier Durchschnittspunkte der zwei durch die Gleichungen

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 1 = o$$

und

$$x^2 + y^2 = o$$

dargestellten Paare gerader Linien hindurchgehen, so folgt daraus, dass das System confocaler Kegelschnitte vier feste gerade Linien berührt. Man findet dieselben, indem man die Gleichung des Systems ordnet, wie folgt:

$$(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + k^2(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) - k^4 = o.$$

Sie berühren demnach stets den durch die Gleichung

$$(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^2 + 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = o$$

dargestellten Ort, diese Gleichung ist aber mit der Folgenden äquivalent

$$[y^2 + (x - c)^2]\,[y^2 + (x + c)^2] = o$$

oder

$$[y + i(x - c)]\,[y - i(x - c)]\,[y + i(x + c)]\,[(y - i(x + c)] = o.$$

Sie zeigt in ihren linearen Factoren die vier umschriebenen geraden Linien an, in vollkommener Uebereinstimmung mit Artikel 305. Diese vier geraden Linien, deren je zwei von einem der imaginären Punkte im Unendlichen ausgehen, die wir als allen Kreisen gemeinschaftlich erkannt haben, bestimmen vier Durchschnittspunkte; aber nur zwei derselben sind reell, nämlich die zu den Paaren

$$y \pm i(x + c) = o \text{ und } y \pm i(x - c) = o$$

gehörigen. Jede der bezeichneten imaginären Tangenten kann nur einen reellen Punkt enthalten, enthielte sie deren zwei, so wäre sie selbst reell. In Folge dessen muss allgemein die Zahl der reellen Brennpunkte einer Curve mit der Zahl übereinstimmen, welche ihre Klasse bezeichnet. Diese Anzahl wird vermindert, wenn die unendlich entfernte gerade Linie die Curve berührt, denn dann kann man von jedem der imaginären Kreispunkte eine endliche Tangente weniger ziehen als vorher. Der dadurch verschwundene Brennpunkt ist der Berührungspunkt der Curve mit der unendlich entfernten geraden Linie. Also bei der Parabel.

Wenn die Curve die beiden imaginären Kreispunkte selbst enthält, so fallen in den entsprechenden Tangenten je zwei der Tangenten zusammen, welche die Bestimmung der Brennpunkte liefern. In Folge dessen fallen zwei Brennpunkte zusammen. Also beim Kreis. (Art. 325.)

*Aufg.* 6. Die Gleichung des Tangentenpaares, welches von einem Punkte $(x', y', z)$ an den Kegelschnitt $S = o$ gelegt werden kann, ergiebt sich durch die Substitution von $yz' - y'z$, $zx' - z'x$, $xy' - x'y$ für $x$, $y$, $z$ in die Gleichung der reciproken Curve.

Jeder Punkt in einer der von $(x', y', z')$ ausgehenden Tangenten besitzt offenbar die Eigenschaft, dass die gerade Linie, welche ihn mit $(x', y', z')$ verbindet, die Curve berührt. Man hat also, um die Gleichung dieser Tangenten zu finden, nur die Bedingung auszudrücken, welche erfüllt sein muss, damit die gerade Linie

$$x(y'z'' - y''z') + y(z'x'' - z''x') + z(x'y'' - x''y') = o$$

die Curve berühre, und in derselben $x''$, $y''$, $z''$ als Veränderliche zu betrachten. (Artikel 111.)

Wir finden dieselbe durch die Substitution von

$$y'z'' - y''z', \; z'x'' - z''x', \; x'y'' - x''y'$$

an Stelle der Grössen $l$, $m$, $n$ in die Gleichung

$$l^2(b^2 - a'a'') + m^2(b'^2 - a''a) + n^2(b''^2 - aa') + 2mn(ab - b'b'') \\ + 2nl(a'b' - b''b) + 2lm(a''b'' - bb') = o,$$

welche im Artikel 365 gefunden ward. Indem wir aber erinnern (Artikel 400), dass die Coefficienten in der Bedingung, unter welcher eine gerade Linie die Curve berührt, identisch sind mit denen, welche in der Gleichung der reciproken Curve auftreten, entspringt daraus die Wahrheit des ausgesprochenen Satzes.

Wir vergleichen dies Ergebniss mit der in Artikel 107 entwickelten Form der Gleichung dieser Tangenten und leiten daraus die nachfolgenden Identitäten ab, welche leicht bewährt werden können:

$$(ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + \ldots)(ax'^2 + a'y'^2 + a''z'^2 + 2by'z' + \ldots) \\ -(axx' + a'yy' + \ldots)^2 = \mathfrak{A}(yz' - y'z)^2 + \mathfrak{A}'(zx' - z'x)^2 + \ldots.$$

und

$$(\mathfrak{A}x^2 + \ldots)(\mathfrak{A}x'^2 + \ldots) = (\mathfrak{A}xx' + \mathfrak{A}'yy' + \ldots)^2 = \Delta[a(yz' - y'z)^2 + \ldots].$$

*Aufg.* 7. Man soll beweisen, dass die Reciproken zweier Kegelschnitte, welche sich doppelt berühren, selbst eine doppelte Berührung haben.

Die reciproke Curve von

$$S + (lx + my + nz)^2 = o$$

ist nach Artikel 366 durch die Gleichung

$$\Sigma + [a(mz - ny)^2 + \ldots] = o$$

repräsentirt; da aber nach der vorigen Aufgabe

$$\Delta[a(mz - ny)^2 + \ldots] = \Sigma(\mathfrak{A}l^2 + \ldots) - (\mathfrak{A}lx + \ldots)^2$$

ist, so ist die reciproke Curve gegeben durch

$$[\Delta + (\mathfrak{A}l^2 + \ldots)]\,\Sigma - (\mathfrak{A}lx + \ldots)^2 = o,$$

eine Gleichung, deren Form augenblicklich anzeigt, dass diese Curve mit der Curve $\Sigma = o$ eine doppelte Berührung hat.

401. Die Reciproke einer Curve in Bezug auf den zum Ursprung genommenen Anfangspunkt der Coordinaten ist bekannt; man soll daraus die Gleichung ihrer einem beliebigen Punkte $(x'y')$ als Ursprung entsprechenden Reciproken ableiten.

Wenn die vom Anfangspunkt der Coordinaten auf eine gerade Linie gefällte Senkrechte $= P$ ist, so ist die Senkrechte vom Punkt $(x'y')$ auf dieselbe Gerade durch

$$P - x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta$$

repräsentirt. (Artikel 27.)

Die Polargleichung der reciproken Curve ist daher

$$\frac{k^2}{\varrho} = \frac{k^2}{R} - x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta;$$

daraus folgt

$$\frac{k^2}{R} = \frac{x'x + y'y + k^2}{\varrho} \text{ und } \frac{R\cos\vartheta}{k^2} = \frac{\varrho\cos\vartheta}{xx' + yy' + k^2}.$$

Wir müssen demnach in die Gleichung der auf den Coordinatenanfang bezüglichen reciproken Curve für $x$ und $y$ respective die Ausdrücke

$$\frac{k^2 x}{xx' + yy' + k^2}, \text{ und } \frac{k^2 y}{xx' + yy' + k^2}$$

substituiren, um die gesuchte Gleichung zu erhalten.

Das Ergebniss dieser Substitution kann in der folgenden Art einfach angezeigt werden: Sei die Gleichung der auf den Anfangspunkt der Coordinaten bezüglichen reciproken Curve

$$\mu_n + \mu_{n-1} + \mu_{n-2} + \ldots . = o.$$

(Vergl. Artikel 294.)

Dann ist die Gleichung der dem Punkt $(x'y')$ entsprechenden Reciproken

$$\mu_n + \mu_{n-1}\left(\frac{xx' + yy' + k^2}{k^2}\right) + \mu_{n-2}\left(\frac{xx' + yy' + k^2}{k^2}\right)^2 + \ldots . = o.$$

Sie ist offenbar mit der ersten von demselben Grade.

402. Ehe wir die Betrachtung der reciproken Polaren beschliessen, wollen wir noch auf eine Klasse von Sätzen aufmerksam machen, zu deren Transformation M. Chasles eine *Parabel statt eines Kreises als Hilfskegelschnitt zu nehmen vorgeschlagen hat.*

Wir haben im Artikel 213 bewiesen, dass der zwischen irgend zwei geraden Linien gelegene Abschnitt in der Achse der Parabel dem Abschnitt dieser letzteren gleich ist, welcher zwischen den von den Polen dieser geraden Linien auf die Achse gefällten Senkrechten liegt. Dies Princip ermöglicht uns die *Transformation von Sätzen, welche sich auf die Grösse von Linien beziehen, die einer festen Linie parallel gemessen sind.*

Wir geben von der Anwendung dieser Methode einige Beispiele und schicken dazu voraus, dass den zwei der Achse der als Directrix gewählten Parabel parallelen Tangenten die unendlich entfernten Punkte in der reciproken Curve entsprechen, und dass die Curve demnach eine Hyperbel oder Ellipse ist, jenachdem diese Tangenten reell oder imaginär sind; dass endlich die Curve eine Parabel ist, wenn diese Achse durch einen der unendlich entfernten Punkte der Original-Curve geht.

Jede veränderliche Tangente eines Kegelschnitts bestimmt in zwei festen parallelen Tangenten desselben Abschnitte, deren Rechteck von constanter Grösse ist.

Den Berührungspunkten der parallelen Tangenten entsprechen die Asymptoten der reciproken Hyperbel und ihren Durchschnittspunkten mit der beweglichen Tangente Parallelen zu den Asymptoten durch irgend einen Punkt der Curve. Wir schliessen daraus, dass die Asymptoten und die durch irgend einen Punkt der Curve zu ihnen gezogenen Parallelen in einer festen geraden Linie Abhchnitte bestimmen, deren Rechteck unveränderlich ist und erkennen, dass dies Ergebniss dem früher entwickelten Satze äquivalent ist: Das Rechteck aus den durch einen Punkt der Curve gezogenen Parallelen zu den Asymptoten ist constant.

Diejenigen Sehnen einer Hyperbel, welche von zwei festen Punkten derselben nach einem veränderlichen dritten Punkte gezogen werden, bestimmen einen Abschnitt von unveränderlicher Länge in der Asymptote.

Wenn eine beliebige Tangente einer Parabel zwei feste Tangenten derselben schneidet, so bestimmen die von ihren Endpunkten auf die Scheiteltangente der Parabel gefällten Perpendikel in dieser einen Abschnitt von constanter Länge.

Es ist offenbar, dass diese Methode der parabolischen Polaren in ihrer Anwendung beschränkter ist, als die der circularen Polaren, welche wir vorher entwickelten. Die Hilfsquellen dieser letzteren für die Transformation von Sätzen, welche sich auf die Grösse von Linien beziehen, hat M. Chasles vielleicht unterschätzt.

## II. Die harmonischen und anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte.

403. Die auf das harmonische und das anharmonische oder Doppelschnittverhältniss bezüglichen Eigenschaften der Kegelschnitte gestatten so zahlreiche Anwendungen in der Theorie dieser Curven, dass wir es nicht für unzweckmässig halten, an dieser Stelle

einige der Sätze näher zu entwickeln, welche in so grosser Anzahl in den allgemeinen Ausdrucksformen jener Eigenschaften entweder direct enthalten sind oder doch ohne Schwierigkeit aus denselben hervorgehen.*)

Die häufigsten Anwendungen machen wir von dem besonderen Falle, in welchem einer der vier Punkte der geraden Linie, deren Doppelschnittverhältniss wir untersuchen, in unendlicher Entfernung ist. Das Doppelschnittverhältniss der vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ d. i.

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$$

geht durch die Voraussetzung, dass der Punkt $D$ in unendlicher Entfernung liege, in das einfache Schnittverhältniss

$$-\frac{AB}{BC}$$

über, weil dadurch

$$\frac{AD}{DC} = -1$$

wird.

Wenn die Strecke $AC$ durch die Punkte $B$ und $D$ harmonisch getheilt wird, so ist das Doppelschnittverhältniss $= -1$, und unter der Voraussetzung, dass $D$ unendlich entfernt sei, wird

$$\frac{AB}{BC} = 1,$$

und $B$ ist der Mittelpunkt der Strecke $AC$.

Wir setzen voraus, dass der Leser mit der geometrischen Untersuchung dieser und anderer Fundamentalsätze betreffs der Doppelschnittverhältnisse und der harmonischen Theilung bekannt sei **).

---

*) Man vergleiche für diese Darstellung insbesondere auch die Noten zu M. Chasles's „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne.“ Uebersetzung von Sohnke, Note IX, X, XV, XVI.

**) Wir empfehlen dafür unter andern die Schriften: „Grundlinien der neueren Geometrie“ von Dr. B. Witzschel, „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie“ von Dr. Ch. Paulus, „Grundzüge einiger Theorien aus der neueren Geometrie“ von W. Blumberger.

401. Wir beginnen unsere Untersuchung mit dem Satze des Artikels 104: Wenn eine durch den Punkt $O$ gezogene gerade Linie einen Kegelschnitt in den Punkten $R'$ und $R''$ und die Polare von $O$ in Bezug auf denselben in $R$ schneidet, so sind die vier Punkte $OR'RR''$ harmonische Theilpunkte.

1.) Vorausgesetzt, dass $R''$ in unendlicher Entfernung liegt, so muss die gerade Linie $OR$ in $R'$ halbirt werden, d. h. Wenn man durch einen festen Punkt zu einer Asymptote einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel eine parallele gerade Linie zieht, so wird der zwischen jenem Punkte und seiner Polare liegende Abschnitt derselben in der Curve halbirt.

2.) Unter der Voraussetzung, dass $R$ in unendlicher Entfernung liege, muss die Strecke $R'R''$ in $O$ halbirt werden; d. h. jede Sehne, welche durch einen Punkt parallel der Polare dieses Punktes gezogen ist, wird in diesem Punkte halbirt. Nimmt man hierbei ferner an, dass die Polare von $O$ unendlich entfernt sei, so muss jede durch diesen Punkt gehende Sehne die Polare desselben in unendlicher Entfernung schneiden und demnach in $O$ halbirt werden. Dieser Punkt ist also das Centrum und dasselbe kann somit als ein Punkt betrachtet werden, dessen Polare unendlich entfernt ist.

3.) Wird endlich der feste Punkt selbst in unendlicher Entfernung gedacht, so sind alle durch ihn gehende gerade Linien parallel und die entsprechenden Sehnen werden in der Polare des festen Punktes halbirt. Man schliesst daraus, dass jeder Durchmesser eines Kegelschnitts als die Polare des unendlich entfernten Punktes betrachtet werden kann, in welchem seine Ordinaten sich durchschneiden. Dies folgt auch aus der Gleichung der Polare eines Punktes: (Artikel 101.)

$$(2Ax + By + D) + (2Cy + Bx + E)\frac{y'}{x'} + \frac{Dx + Ey + 2F}{x'} = o.$$

Wenn wir darin den Punkt $(x'y')$ als den unendlich entfernten Punkt der geraden Linie $my = nx$ voraussetzen, so ist

$$\frac{y'}{x'} = \frac{n}{m}$$

und $x' = \infty$; die Gleichung der Polare wird somit

$$m(2Ax + By + D) + n(2Cy + Bx + E) = o,$$

d. i. die Gleichung eines zu

$$my = nx$$

conjugirten Durchmessers. (Artikel 94.)

405. Wir können ganz in der nämlichen Weise aus dem Satze eine Reihe specieller Sätze herleiten, nach welchem die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt, eine beliebige durch ihn gezogene Gerade und die gerade Linie, welche ihren Pol mit dem gegebenen Punkte verbindet, ein harmonisches Büschel bilden. (Art. 106.) Ist eine der durch den Punkt gezogenen Geraden ein Durchmesser des Kegelschnitts, so ist die andere parallel dem conjugirten Durchmesser, und da die Polare eines Punktes dem Durchmesser parallel ist, welcher zu dem durch den Punkt gehenden conjugirt ist, so erkennen wir, dass der zwischen jenen Tangenten gelegene Abschnitt einer Parallelen zur Polare des Punktes von dem nach dem Punkte gehenden Durchmesser halbirt wird. Denken wir den Punkt als mit dem Centrum des Kegelschnitts zusammenfallend, so sind die beiden Tangenten die Asymptoten desselben; d. i. die Asymptoten eines Kegelschnitts bilden mit einem beliebigen Paar conjugirter Durchmesser desselben ein harmonisches Büschel; und der Abschnitt einer Tangente, welcher zwischen den Asymptoten enthalten ist, wird durch die Curve halbirt. (Artikel 198.)

406. Die anharmonische Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts (Artikel 283, 296) giebt zu einer viel grössern Mannigfaltigkeit besonderer Sätze Veranlassung. Denn die vier Punkte der Curve können vollkommen beliebig gewählt werden, und man kann einen oder zwei von ihnen in unendlicher Entfernung voraussetzen; der fünfte Punkt $O$, welcher als der Scheitel des Büschels betrachtet wird, kann auch entweder in unendlicher Entfernung oder mit einem der ersten vier Punkte zusammenfallend gedacht werden, in dem letzteren Falle ist einer der Strahlen des Büschels die Tangente des Kegelschnitts in diesem Punkte. Endlich kann das

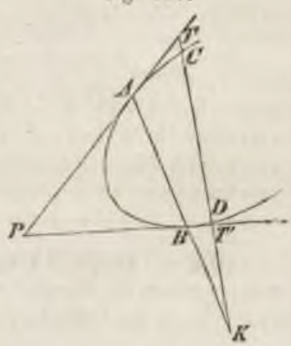
anharmonische oder Doppelschnittverhältniss des Büschels durch das der vier von seinen Strahlen in einer beliebigen geraden Transversale bestimmten Punkte gemessen und dadurch, dass man diese Transversale zu einem der Strahlen des Büschels parallel legt, auf ein einfaches Verhältniss reducirt werden.

Die folgenden Beispiele werden insbesondere in der Absicht gegeben, dem Leser Gelegenheit zur Uebung in der Herleitung der aus diesem Satze fliessenden Folgerungen zu gewähren. Wir geben deshalb nur die Punkte, durch welche das Büschel gelegt ist, die Transversal-Linie, auf der sein Doppelschnittverhältniss gemessen wird, und den resultirenden Satz an, und überlassen es dem Leser, die Art in welcher derselbe aus dem allgemeinen Satze hervorgeht, selbst genauer zu untersuchen.

Wir bezeichnen durch die Abkürzung $(O.ABCD)$ das Doppelschnittverhältniss des aus den vier Geraden $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ gebildeten Büschels und durch $(ABCD)$ das der vier eine geradlinige Reihe bildenden Punkte $A$, $B$, $C$, $D$.

*Aufg. 1.* $(A.ABCD) = (B.ABCD)$. (Fig. 116.)

Fig. 116.



Beide Doppelschnittverhältnisse werden in der geraden Linie $CD$ gemessen; wir bezeichnen die Schnittpunkte der in den Punkten $A$ und $B$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten mit der Linie $CD$ durch $T$, $T'$ und den Schnittpunkt der Sehne $AB$ mit $CD$ durch $K$. Darnach sind die Doppelschnittsverhältnisse:

$$(TKCD) = (KT'CD)$$

oder

$$\frac{TK}{KC}:\frac{TD}{DC} = \frac{KT'}{T'C}:\frac{KD}{DC}\text{*)}.$$

d. i. wenn eine Sehne $CD$ zwei Tangenten in $T$, $T'$ und ihre Berührungssehne in $K$ schneidet, so ist

$$KT.KD.TC = KT'.KC.TD.$$

*) Bei der Bildung der Doppelschnittverhältnisse muss man besonders darauf achten, die Punkte der Reihen in der Ordnung zu nehmen, in der sie sich entsprechen; darum steht links $K$ als der zweite, rechts als der erste Punkt, denn er entspricht im ersten Büschel dem zweiten Strahl $AB$, und im zweiten dem ersten Strahl $BA$.

*Aufg.* 2. Wenn $T$ und $T'$ zusammenfallen, so wird

$$TK = KT'$$

und
$$KD \,.\, TC = KC \,.\, TD$$

oder
$$\frac{CK}{KT} : \frac{CT}{TD} = -1,$$

d. i. jede durch den Durchschnittspunkt zweier Tangenten gezogene Sehne wird von der Curve und der Berührungssehne jener Tangenten harmonisch getheilt.

*Aufg.* 3. Wenn $T'$ unendlich entfernt gedacht, also die Sekante $CD$ parallel zu $PT'$ gezogen wird, so ist

$$TK^2 = TC \,.\, TD.$$

*Aufg.* 4. Ist einer der Punkte, welche die Basis des Büschels bilden, in unendlicher Entfernung, und wird das constante Doppelschnittverhältniss $(O \,.\, ABC\infty)$ in der Transversale $C\infty$ gemessen, so reducirt sich dasselbe auf das einfache Verhältniss $\frac{aC}{Cb}$, und wir schliessen daraus den folgenden Satz: Wenn zwei feste Punkte $A$, $B$ einer Hyperbel oder Parabel mit einem veränderlichen Punkt $O$ derselben Curve verbunden werden und die Verbindungslinien eine feste Parallele zu einer Asymptote (bei der Hyperbel) oder einem Durchmesser (bei der Parabel) in Punkten $a$ und $b$ schneiden, so ist das Verhältniss $aC:Cb$ oder das Verhältniss der von diesen bis zur Curve gemessenen Abschnitte constant.

*Aufg.* 5. Wenn man dasselbe Doppelschnittverhältniss auf einer andern Parallellinie misst, so erfährt man, dass die geraden Verbindungslinien von drei festen Punkten einer Parabel oder Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte derselben durch eine feste Parallele zu einer Asymptote oder einem Durchmesser in Punkten $a$, $b$, $c$ so geschnitten werden, dass $ab:ac$ constant ist.

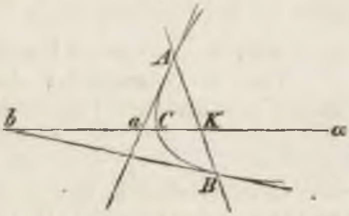
*Aufg.* 6. Setzen wir in der Aufgabe 4 voraus, dass die geraden Linien, welche die Punkte $A$, $B$ mit einem vierten $O'$ verbinden, den Strahl $C\infty$ in den Punkten $a'b'$ schneiden, so ist nothwendig

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{aC}{Ca'};$$

wird nun auch noch der Punkt $C$ in unendlicher Entfernung gedacht, so dass die Linie $C\infty$ eine Asymptote wird, so wird das Verhältniss $\frac{ab}{a'b'}$ der Einheit gleich und wir erhalten den Satz: Wenn in einer Hyperbel zwei feste Punkte mit einem veränderlichen Punkt verbunden werden, so bestimmen die Verbindungslinien in jeder Asymptote einen Abschnitt von unveränderlicher Länge. (Artikel 202, Aufgabe 1.)

*Aufg. 7.* $(A.ABC\infty) = (B.ABC\infty)$. (Fig. 117.)

Fig. 117.




Wir messen die entsprechenden Doppelschnittverhältnisse in der Linie $C\infty$ und bezeichnen die Schnittpunkte der Tangenten der Curve in $A$ und $B$ mit dieser Linie durch $a$ und $b$, sowie den Schnittpunkt derselben mit der entsprechenden Berührungssehne durch $K$: alsdann ist

$$\frac{aC}{KC} = \frac{KC}{bC}.$$

Oder: Wenn eine Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel oder zum Durchmesser einer Parabel zwei Tangenten und ihre Berührungssehne schneidet, so ist der Abschnitt zwischen Curve und Berührungssehne das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten von der Curve zu den Tangenten. Und umgekehrt: Wenn eine gerade Linie $ab$ von gleichbleibender Richtung die Seiten eines Dreiecks in den Punkten $a$, $b$, $K$ durchschneidet, und in ihr ein Punkt $C$ so bestimmt wird, dass stets

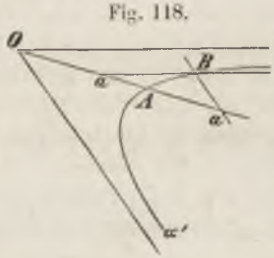
$$KC^2 = aC \,.\, bC,$$

so ist der Ort des Punktes $C$ eine Parabel, wenn $Cb$ der Halbirungslinie der Basis des Dreiecks parallel ist (Artikel 212); in jedem andern Falle aber eine Hyperbel, für welche $ab$ die Richtung einer Asymptote bestimmt.

*Aufg. 8.* Unter der Voraussetzung, dass zwei Punkte unendlich entfernt sind, hat man z. B.

$$(\infty \,.\, AB\infty\infty') = (\infty' \,.\, AB\infty\infty') \text{ (Fig. 118).}$$

Fig. 118.




Hier sind die geraden Linien $\infty\infty$, $\infty'\infty'$ die beiden Asymptoten, während die Gerade $\infty\infty'$ ganz in unendlicher Entfernung ist. Messen wir das Doppelschnittverhältniss auf dem Durchmesser $OA$ und setzen fest, dass die den Asymptoten parallelen geraden Linien denselben in $a$, $a'$ schneiden, so erhalten wir

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{Oa'}{OA};$$

d. i. Parallelen zu den Asymptoten, die durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel gezogen werden, bestimmen in einem Halbdurchmesser vom Centrum aus gemessene Segmente, welche diesen selbst zur mittleren geometrischen Proportionale haben.

Wenn daher umgekehrt durch einen festen Punkt $O$ eine gerade Linie gezogen wird, welche zwei festen vom Punkt $B$ ausgehenden Geraden in Punkten $a$, $a'$ begegnet, und wenn man in ihr einen Punkt $A$ so wählt, dass $OA$ das geometrische Mittel zwischen $Oa$ und $Oa'$ ist, so ist der Ort dieses Punktes eine Hyperbel, welche den Punkt $O$ zum Centrum hat und deren Asymptoten den Linien $Ba$ und $Ba'$ parallel laufen.

*Aufg.* 9. $(\infty . AB\infty\infty') = (\infty' . AB\infty\infty')$.

Unter der Voraussetzung, dass die Segmente in den Asymptoten gemessen seien und dass $O$ das Centrum bezeichne, erhalten wir

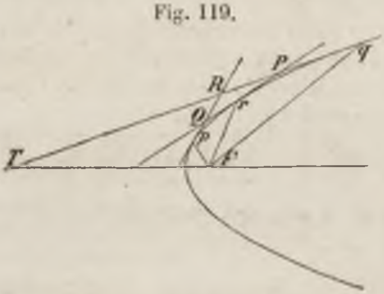
$$\frac{Oa}{Ob} = \frac{Ob'}{Oa'},$$

oder: D a s R e c h t e c k, w e l c h e s v o n d e n d u r c h e i n e n P u n k t d e r C u r v e g e z o g e n e n P a r a l l e l e n z u d e n A s y m p t o t e n g e b i l d e t w i r d, i s t c o n s t a n t.

407. Wir untersuchen hiernach einige besondere Fälle von dem Satze, in welchem die a n h a r m o n i s c h e E i g e n s c h a f t d e r T a n g e n t e n e i n e s K e g e l s c h n i t t s ausgesprochen ist. (Art. 297.)

*Aufg.* 1. Diese Eigenschaft nimmt eine besonders einfache Form für die Parabel dadurch an, dass diese Curve stets eine ganz in unendlicher Entfernung gelegene Tangente besitzt. (Art. 278.) In Folge dessen schneiden drei feste Tangenten einer Parabel eine beliebige vierte in Punkten $A$, $B$, $C$ so, dass das Verhältniss $AB : AC$ unveränderlich ist.

Fig. 119.

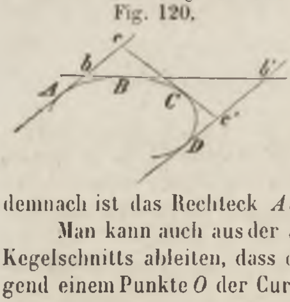



Wenn wir die veränderliche Tangente der Reihe nach mit jeder der gegebenen Tangenten zusammenfallen lassen, so erhalten wir den Satz

$$\frac{pQ}{Qr} = \frac{RP}{Pq} = \frac{Qr}{rP} \text{ (Fig. 119.)}.$$

*Aufg.* 2. Wir nehmen an, dass zwei von den vier festen Tangenten einer Ellipse oder Hyperbel mit einander parallel sind und lassen die veränderliche Tangente nach einander mit jeder dieser parallelen Tangenten zusammenfallen. Im ersten Falle ist das Verhältniss (Fig. 120)

Fig. 120.




$$\frac{Ab}{Ac},$$

und im zweiten

$$\frac{Dc'}{Db'};$$

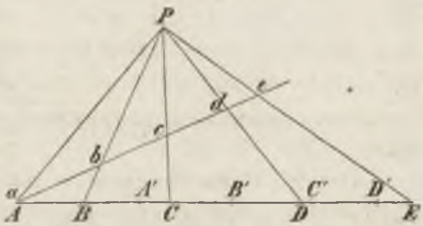
demnach ist das Rechteck $Ab . Db'$ constant.

Man kann auch aus der anharmonischen Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts ableiten, dass die Verbindungslinien der Punkte $A$, $D$ mit irgend einem Punkte $O$ der Curve die parallelen Tangenten in Punkten $b$, $b'$ schneiden, für welche das Rechteck $Ab . Db'$ gleichfalls constant ist

408. Wenn in einer geraden Linie das System der Punkte $A, B, C, D, E$ und in derselben oder in einer andern geraden Linie das zweite System $A', B', C', D', E'$, gegeben ist, dessen Punkte als denen des ersten, einer einem, entsprechend angesehen werden, so heissen beide Systeme projectivisch, so bald das Doppelschnittverhältniss von irgend vier Punkten des ersten Systems dem gleichgebildeten Doppelschnittverhältniss der entsprechenden vier Punkte des zweiten gleich ist.

Indem wir z. B. die Punkte $A, B, C \ldots$ mit einem beliebigen Punkte $P$ verbinden und das so gebildete Büschel durch irgend eine Transversale schneiden, erhalten wir auf dieser ein System von Punkten $a, b, c \ldots$ welches dem gegebenen projectivisch ist. In der Figur ist die Transversale durch den Punkt $A$ gezogen, so dass $A$ und $a$ zusammenfallen. (Fig. 121.) Es ist immer möglich, ein projectivisches System zu einem gegebenen so zu construiren, dass drei beliebige Punkte $A', B', C'$ den drei Punkten $A, B, C$ des gegebenen Systems entsprechen; zu diesem Zwecke legen wir durch $A$ eine beliebige gerade Linie, welche mit $AB$ einen Winkel bildet, tragen auf ihr vom Punkte $Aa$ aus die Längen

Fig. 121.




$$ab = A'B', \; ac = A'C'$$

ab und ziehen die Verbindungslinien $bB$, $cC$; sie bestimmen einen Punkt $P$, durch dessen Verbindung mit den Punkten $D, E$ u. s. w. wir die entsprechenden Punkte $d, e$ u. s. w. erhalten. Wenn wir sodann endlich $C'D' = cd$, $D'E' = de$ u. s. w. machen, so erhalten wir ein dem System $ABCDE$ projectivisches System $A'B'C'D'E'$.

409. Wenn zwei projectivische Systeme in derselben geraden Linie liegen, so hat im Allgemeinen ein Punkt nicht den nämlichen zweiten Punkt zu seinem entsprechenden, wenn man ihn als dem ersten und wenn man ihn als dem zweiten System angehörig betrachtet. Construirt man z. B. in der vorigen Figur zu dem Punkte $A'$, indem man ihn als dem ersten System angehörig be-

trachtet, den correspondirenden Punkt, wie vorhin, so fällt derselbe im Allgemeinen nicht mit $A$ zusammen.

Entsprechen aber die Punkte $A$, $A'$ einander wirklich in der Art gegenseitig, dass es für dies Entsprechen gleichgültig ist, ob man den Punkt $A$ als dem ersten oder dem zweiten System angehörig betrachtet, dann entsprechen alle entsprechenden Punkte einander auf die nämliche Weise und man sagt von den beiden Punktereihen, dass sie ein System in Involution bilden.

Unter der Voraussetzung z. B. das die Punkte $ABB'A'$ des ersten Systems den Punkten $A'B'bA$ des zweiten entsprechen, müssen die Punkte $b$ und $B$ zusammenfallen. Denn wir haben

$$(ABB'A') = (A'B'bA),$$

oder

$$\frac{AB}{BB'} : \frac{AA'}{A'B'} = \frac{A'B'}{B'b} : \frac{A'A}{Ab},$$

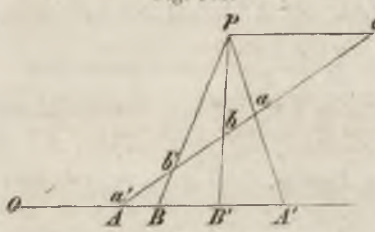
d. i.

$$AB : BB' = Ab : B'b.$$

Die gerade Strecke $AB$ wird also in $b$ und in $B$ in demselben Verhältniss geschnitten, und demnach müssen $b$ und $B$ zusammenfallen.

410. Zwei Punktepaare $AA'$, $BB'$ bestimmen ein involutorisches System. (Fig. 122.)

Fig. 122.




Es ist in der That nur ein specieller Fall des Artikel 408, ein zu dem System $AA'BB'CD\ldots$ projectivisches System so zu bestimmen, dass die Punkte $A$, $A'$, $B$ den Punkten $A'$, $A$, $B'$ entsprechen; wir ziehen durch $A$ eine beliebige gerade Linie, tragen auf ihr von $A$ ($a'$) aus $a'a = A'A$, $a'b' = A'B'$ ab, ziehen $A'a$, $Bb'$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte $P$, und indem wir dann den Punkt $P$ mit $B'$, $C$, $D$ .... verbinden, bestimmen wir die entsprechenden Punkte des zweiten Systems.

Wir bezeichnen die Punkte $A$, $A'$ als einander conjugirt.

411. Aus der Identität ihrer Doppelschnittverhältnisse lassen sich die verschiedenen Relationen der Segmente zwischen drei involutorischen Punkte-Paaren leicht ableiten; wir empfehlen diese Ableitung dem Leser.

Aus $(ABCA') = (A'B'C'A)$ folgt

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AA'}{A'C} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'A}{AC'}$$

oder $$AB . A'C . B'C' = A'B' . AC' . BC.$$

Die Entwicklung dieser Relationen bietet im Allgemeinen keine Schwierigkeit dar, und wir verweilen deshalb nur noch bei dem besondern Falle, wo für einen der Punkte der conjugirte Punkt in unendlicher Entfernung liegt. Einen solchen Punkt erhalten wir, indem wir $Po$ parallel $AB$ ziehen, bis es $a'b'$ in $o$ schneidet und alsdann $A'O = a'o$ abtragen. Der conjugirte Punkt von $O$ liegt in unendlicher Entfernung und $O$ selbst heisst das **Centrum** des involutorischen Systems.

In diesem Falle nimmt die Relation der Segmente eine besonders einfache Form an; denn es ist

$$(ABOO') = (A'B'O'O)$$

oder $$\frac{AO}{OB} : \frac{AO'}{O'B} = \frac{A'O'}{O'B'} : \frac{A'O}{OB'};$$

liegt nun $O'$ in unendlicher Entfernung, so geht dies in

$$\frac{AO}{OB} = \frac{OB'}{A'O}$$

oder $$AO . A'O = BO . B'O$$

über, d. h. **das Product der Entfernungen irgend zweier conjugirten Punkte vom Centrum der Involution ist constant.**

Offenbar erlaubt die in diesem Artikel gegebene Construction, **das Centrum zu finden, wenn zwei Paare conjugirter Punkte eines involutorischen Systems gegeben sind.**

412. Man kann die Erklärung involutorischer Systeme ganz auf die eben bewiesene Eigenschaft derselben gründen und sie als Punktereihen definiren, für welche

$$OA . OA' = OB . OB' = OC . OC' = \ldots c^2$$

ist; denn es ist leicht aus dieser Relation abzuleiten, dass das Doppelschnittverhältniss von irgend vier Punkten des Systems dem ihrer vier conjugirten Punkte gleich ist. Das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten, deren Entfernungen vom Centrum $r, r', r'', r'''$ sind, ist durch

$$\frac{r - r'}{r' - r''} : \frac{r - r''}{r'' - r'''}$$

ausgedrückt, und diese Function bleibt augenscheinlich ungeändert, wenn man an Stelle der Abstände $r, r'$ ihren reciproken Werth setzt, oder

$$\frac{r-r'}{r'-r''}:\frac{r-r''}{r''-r'''}=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}}:\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r''}}{\frac{1}{r''}-\frac{1}{r'''}}.$$

413. **Ein Punkt, welcher mit seinem conjugirten zusammenfällt, ist ein Brennpunkt des involutorischen Systems** genannt worden.

Es giebt offenbar zwei solche Punkte, welche vom Centrum gleich weit entfernt sind, und ihr Abstand von demselben $OF$ ist durch die Gleichung

$$OF^2 = OA.OA'$$

bestimmt.

Wenn $A$ und $A'$ beide auf derselben Seite des Centrums liegen, so ist $OA.OA' = +c^2 = OF^2$ und die **Brennpunkte sind reell**; wenn aber $A$ und $A'$ auf verschiedenen Seiten des Centrums liegen, so ist $OF^2 = -c^2$ und die **Brennpunkte sind imaginär**.

**Zwei conjugirte Punkte einer Involution bilden mit den Brennpunkten derselben vier Punkte einer harmonischen Theilung**; denn die Relation

$$(AFF'A') = (A'FF'A)$$

giebt

$$\frac{AF}{FF'}:\frac{AA'}{A'F'}=\frac{A'F}{FF'}:\frac{A'A}{AF'},$$

oder

$$\frac{AF}{A'F}=\frac{AF'}{A'F'},$$

d. i. **die Entfernung der Brennpunkte wird durch die conjugirten Punkte** $A$ **und** $A'$ **innerlich und äusserlich in demselben Verhältniss getheilt.**

Zusatz. Wenn ein Brennpunkt unendlich entfernt ist, so halbirt der andre Brennpunkt die Entfernung zwischen je zwei conjugirten Punkten und **die Entfernung** $AB$ **zwischen irgend zwei Punkten ist der Entfernung** $A'B'$ **zwischen den conjugirten Punkten gleich.** Alsdann liegt auch das Centrum unendlich entfernt.

414. Aus drei gegebenen Punkte-Paaren des Systems können wir die Brennpunkte bestimmen, entweder, indem wir zuerst das Centrum bestimmen, wie in Art. 411, oder direct, wie folgt: Weil ein Brennpunkt sich selbst conjugirt ist, so haben wir

$$(AFBA') = (A'FB'A),$$

oder

$$\frac{AF}{FA}:\frac{AB}{BA'} = \frac{A'F}{FA}:\frac{A'B'}{B'A},$$

$$\frac{AF^2}{AF'^2} = \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'}.$$

Wenn man den Brennpunkt als einen Theilpunkt der Strecke $AA'$ betrachtet, so ist hierdurch das entsprechende Theilungsverhältniss bestimmt und der Punkt kann construirt werden.

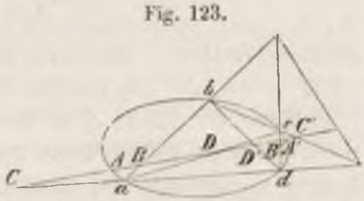
Es ist von Wichtigkeit, zu bemerken, dass die Relationen zwischen den von sechs involutorischen Punkten gebildeten Segmenten von der im Art. 393 bezeichneten Klasse sind, nämlich von der Klasse derjenigen, welche sich unmittelbar auf die Sinus der Winkel übertragen, die an einem beliebig gewählten Punkt durch die nach den einzelnen Punkten des involutorischen Systems gehenden Strahlen gebildet werden.

In Folge dessen wird ein Strahlenbüschel von beliebigem Scheitel, dessen Basis eine involutorische Punktereihe ist, von jeder Transversale in Punkten geschnitten, welche ein System in Involution bilden.

Und das reciproke System von sechs Punkten in Involution ist ein involutorisches Büschel.

415. Die wichtigste Anwendung dieser Principien in der Theorie der Kegelschnitte ist die folgende. (Fig. 123.)

Fig. 123.



Wenn ein Viereck $abcd$ in einen Kegelschnitt eingeschrieben ist und eine beliebige Transversale den Kegelschnitt in $A$, $A'$, die Seiten $ab$, $cd$ in $B$, $B'$ und die Seiten $ad$, $bc$ in $C$, $C'$ schneidet, so sind die Punkte $AA'BB'CC'$ in Involution; denn nach der anharmonischen Eigenschaft der Punkte eines Kegelschnitts ist

$$(a.AdbA') = (c.AdbA')$$

und indem man die Doppelschnittverhältnisse dieser Strahlenbüschel auf der Transversale $AA'$ misst,

$$(ACBA') = (AB'C'A') = (A'C\,B'A).$$

Da ein System von Punkten in Involution durch zwei Paare von conjugirten Punkten $BB'$, $CC'$ bestimmt ist, so gehören die Punkte $EE'$, in welchen ein beliebiger anderer durch die vier Punkte $a, b, c, d$ gehende Kegelschnitt die Transversale schneidet, demselben involutorischen System an; d. h. das System von Kegelschnitten, welche demselben Viereck umschrieben sind, bestimmt in einer beliebigen Transversale ein System von Punkten in Involution.

Und wenn ein System von Kegelschnitten demselben Viereck eingeschrieben ist, so bilden die Paare der Tangenten, welche von einem beliebigen Punkte aus an dieselben gezogen werden können, die conjugirten Strahlenpaare eines involutorischen Büschels.

416. Da die Diagonalen $ac$, $bd$ auch als einer der Kegelschnitte erscheinen, welche durch die gedachten vier Punkte gehen, so ergiebt sich als ein specieller Fall des vorigen Satzes, dass das System der Schnittpunkte $BB'$, $CC'$, $DD'$, welche die vier Seiten und die beiden Diagonalen eines Vierecks in einer beliebigen Transversale bestimmen, in Involution ist.

Diese Eigenschaft gestattet uns, aus zwei gegebenen Punkte-Paaren $BB'$, $DD'$ ein involutorisches System zu bestimmen, d. h. zu einem gegebenen Punkt $C$ desselben den conjugirten Punkt $C'$ zu construiren. Wir wählen zu dem Ende einen beliebigen Punkt $a$ und ziehen die geraden Linien $aB$, $aD$, $aC$; construiren wir nun ein Dreieck $bcd$, dessen Ecken in diesen geraden Linien liegen, während zwei seiner Seiten durch die Punkte $B'$, $D'$ gehen, so bestimmt die dritte Seite den gesuchten zu $C$ conjugirten Punkt $C'$. Man kann den Punkt $a$ als unendlich entfernt voraussetzen oder die geraden Linien $aB$, $aD$, $aC$ parallel machen.

Wenn der Punkt $C$ in unendlicher Entfernung vorausgesetzt wird, so liefert die nämliche Construction das Centrum. Die einfachste Construction für diesen Fall ist aber diese: Man ziehe durch die Punkte $B$, $D$ ein Paar von Parallel-Linien $Bb$, $Dc$ und durch die Punkte $B'$, $D'$ ein anderes Paar Parallelen $D'b$, $B'c$; die gerade Linie $bc$ bestimmt das Centrum des Systems.

*Aufg. 1.* Wenn drei Kegelschnitte demselben Viereck umschrieben sind, so wird jede Tangente, welche zweien unter ihnen gemeinschaftlich ist, durch den dritten harmonisch getheilt.

Denn die Berührungspunkte einer solchen Tangente sind die Brennpunkte des involutorischen Systems, welches in ihr durch die Kegelschnitte bestimmt wird.

*Aufg. 2.* Wenn wir durch den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte eine Tangente zu einem derselben legen, so wird dieselbe durch den andern harmonisch getheilt.

Denn in diesem Falle decken sich in jenem Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Sehnen ebenso wie im Berührungspunkt der bezeichneten Tangente zwei conjugirte Paare, und der Satz spricht nur die harmonische Theilung der Brennpunkts-Distanz durch ein Paar conjugirte Punkte aus.

*Aufg. 3.* Wenn zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben, oder wenn eine Berührung der dritten Ordnung zwischen ihnen besteht, so wird jede Tangente des einen in den Punkten, wo sie den andern Kegelschnitt und die Berührungssehne schneidet, harmonisch getheilt.

Die Berührungssehne ist durch das Zusammenfallen der gemeinschaftlichen Sehnen entstanden und bestimmt somit in der schneidenden Geraden einen Brennpunkt.

*Aufg. 4.* Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher durch vier Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ geht und eine gegebene gerade Linie berührt.

Der Berührungspunkt muss einer der Brennpunkte des involutorischen Systems $B, B', C, C'$ sein, welches durch die Paare der Gegenseiten und der Diagonalen jenes Vierecks in der gegebenen geraden Linie bestimmt wird; nach Artikel 413 bestimmen sich dieselben. Das Problem gestattet demnach zwei Auflösungen.

*Aufg. 5.* Wenn eine Parallele zu einer Asymptote die Curve in $C$ und ein ihr umschriebenes Viereck in den Punkten $a$, $b$, $c$, $d$ schneidet, so ist

$$Ca \,.\, Cc = Cb \,.\, Cd;$$

denn $C$ ist das Centrum des Systems.

*Aufg. 6.* Die Aufgaben des Artikel 406 als Fälle der Involution zu lösen.

Wir bemerken, dass in der ersten Aufgabe $K'$, in der zweiten $T$ ein Brennpunkt, in der dritten $T$ das Centrum ist, u. s. w.

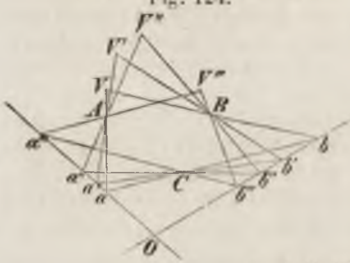
*Aufg.* 7. Die auf einer beliebigen geraden Linie zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten gelegenen Abschnitte sind gleich.

Denn in diesem Falle ist einer der Brennpunkte des Systems in unendlicher Entfernung.

417. Wir schliessen daran in dem Folgenden einige Beispiele von Aufgaben, welche mit Hilfe der anharmonischen Eigenschaften besonders leicht gelöst werden können.

*Aufg.* 1. Die Methode der Generation der Kegelschnitte von Mac-Laurin zu beweisen; (Artikel 302, Aufgabe 4) d. i. den Ort der Spitze $V$ eines Dreiecks zu finden, dessen Seiten durch die festen Punkte $A$, $B$, $C$ gehen und dessen Basisecken sich in den festen geraden Linien $Oa$, $Ob$ bewegen. (Fig. 124.)

Fig. 124.




Wir lassen vier Lagen des veränderlichen Dreiecks
$abV$, $a'b'V'$, $a''b''V''$, $a'''b'''V'''$
verzeichnet sein und erkennen zunächst wegen der Identität der Büschel $(C.aa'a''a''')$ und $(C.bb'b''b''')$, dass

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''')$$

und somit
$$(A.aa'a''a''') = (B.bb'b''b'''),$$
oder
$$(A.VV'V''V''') = (B.VV'V''V''').$$

Deshalb liegen die Punkte $A$, $B$, $V$, $V'$, $V''$, $V'''$ in demselben Kegelschnitt. Wenn die ersten drei Dreiecke fest sind, so ist der Ort der Ecke $V'''$ der durch die Punkte $A$, $B$, $V$, $V'$, $V''$ gehende Kegelschnitt.

*Aufg* 2. M. Chasles hat darauf aufmerksam gemacht, dass derselbe Beweis noch anwendbar ist, wenn die Seite $ab$ statt durch einen festen Punkt $C$ zu gehen, einen festen Kegelschnitt berühre, für welchen die geraden Linien $Oa$ und $Ob$ Tangenten sind. Alsdann schneiden vier Lagen der Basis des Dreiecks die Geraden $Oa$, $Ob$ sodass

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''').$$

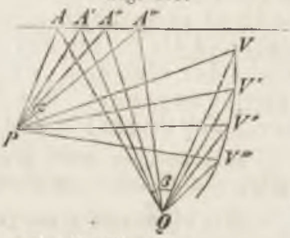
(Artikel 297.)

Der Rest des Beweises bleibt wie vorher.

*Aufg.* 3. Die Methode der Generation der Kegelschnitte von Newton zu beweisen.

Diese Methode besteht in Folgendem: Zwei Winkel von constanter Grösse drehen sich um ihre festen Scheitelpunkte $P$, $Q$, der Durchschnitt von zweien ihrer Schenkel durchläuft eine gerade Linie $AA'$; alsdann ist der Ort des Durchschnittspunktes $V$ ihrer andern Schenkel ein Kegelschnitt, welcher durch die beiden Punkte $P$ und $Q$ hindurchgeht. (Fig. 125.)

Fig. 125.




Wir setzen, wie es die Figur zeigt, vier Lagen dieser Winkel voraus, und haben alsdann

$$(P.AA'A''A''') = (Q.AA'A''A''');$$

es ist aber

$$(P.AA'A''A''') = (P.VV'V''V''')$$

und
$$(Q.AA'A''A''') = (Q.VV'V''V'''),$$

weil die Winkel der beiden Strahlenbüschel dieselben sind; in Folge dessen ist

$$(P.VV'V''V''') = (Q.VV'V''V''')$$

und demnach der Ort von $V'''$ wie vorher ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte $P$, $Q$, $V$, $V'$, $V''$ hindurchgeht.

*Aufg. 4.* M. Chasles hat auch diese Methode dadurch erweitert, dass er den Punkt $A$ anstatt in einer geraden Linie in einem durch die Punkte $P$ und $Q$ gehenden Kegelschnitt bewegt denkt; denn auch dann ist immer

$$(P.AA'A''A''') = (Q.AA'A''A''').$$

*Aufg. 5.* Der Beweis bleibt derselbe, wenn anstatt der Unveränderlichkeit der Winkel $APV$, $AQV$ festgesetzt wäre, dass dieselben in festen geraden Linien constante Abschnitte bestimmen, denn auch dann gälte die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse

$$(P.AA'A''A''') = (P.VV'V''V'''),$$

weil beide Büschel in einer festen geraden Linie Abschnitte von derselben Länge bestimmen.

Wenn die Basis eines Dreiecks und der von den Seiten desselben in einer festen geraden Linie bestimmte Abschnitt gegeben sind, so ist der Ort der Spitze ein Kegelschnitt.

*Aufg. 6.* Endlich kann auch die Erzeugungsweise der Aufgabe 1 noch dadurch verallgemeinert werden, dass wir die Endpunkte der geraden Linie $ab$ als in einem durch die Punkte $AB$ gehenden Kegelschnitt bewegt voraussetzen; denn wenn wir vier Lagen des Dreiecks betrachten, so ist nach Artikel 297

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''');$$

also

$$(A.aa'a''a''') = (B.bb'b''b''')$$

und der Rest des Beweises verläuft wie vorher.

*Aufg. 7.* Die Basis eines Dreiecks geht durch den Punkt $C$, den Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte, der eine Endpunkt der Basis $ab$ liegt in dem einen, der andere im andern Kegelschnitt, während die Seiten durch die festen Punkte $A$, $B$ gehen, von denen der eine dem ersten, der andere dem zweiten Kegelschnitt angehört. Der Ort der Spitze des Dreiecks ist ein durch die Punkte $A$ und $B$ gehender Kegelschnitt.

Zum Beweise wird genau dasselbe Verfahren eingeschlagen, wie vorher und derselbe stützt sich allein auf den letzten Satz des Art. 298.

Wir können dabei anmerken, dass eben dieser Satz einen einfachen geometrischen Beweis erlaubt; denn vorausgesetzt, dass die Punkte des Büschels $(O.ABCD)$ denen des Büschels $(o.abcd)$ entsprechen, so schneiden sich die Strahlen $OA$, $oa$ in einem Punkte $r$ von einer der gemeinschaftlichen Sehnen der Kegelschnitte, ebenso die Strahlen $OB$, $ob$ in dem Punkte $r'$ derselben Sehne u. s. w.; demnach wird das Doppelschnittverhältniss beider Büschel durch das der vier Punkte $r, r', r'', r'''$ gemessen.

*Aufg. 8.* In der Aufgabe 6 darf vorausgesetzt werden, dass die Basis, statt durch einen festen Punkt zu gehen, stets Tangente eines Kegelschnitts sei, der mit dem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

*Aufg. 9.* Wenn ein Polygon, dessen Seiten bis auf eine durch feste Punkte gehen, einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so umhüllt diese letztere Seite einen Kegelschnitt, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

Denn wenn durch $a$, $b$, $c$ u. s. w. die Ecken des Polygons und durch beigefügte Indices die auf einander folgenden Lagen derselben bezeichnet werden, so gilt für vier solche Lagen die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse

$$(aa'a''a''') = (bb'b''b''') = (cc'c''c'''),$$

u. s. w.

Die Aufgabe ist dadurch auf die des Artikel 301 reducirt: Man soll zu drei Paaren von Punkten eines Kegelschnittes $a, a', a'', d, d', d''$ ein viertes Paar $a''', d'''$ so bestimmen, dass

$$(aa'a''a''') = (dd'd''d''').$$

*Aufg. 10.* Man soll in einen Kegelschnitt ein Polygon einschreiben, dessen Seiten alle durch feste Punkte gehen.

Wenn wir einen Punkt $a$ auf dem Kegelschnitt willkürlich als die erste Ecke des Polygons wählen und dasselbe verzeichnen, so fällt im Allgemeinen der Punkt $z$, in welchem seine letzte Seite den Kegelschnitt schneidet, nicht mit dem Punkte $a$ zusammen. Vier derartige Versuche zur Verzeichnung des Polygons liefern die Punktepaare $az$, $a'z'$, $a''z''$, $a'''z'''$ und die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse

$$(aa'a''a''') = (zz'z''z''').$$

Wenn der letzte dieser Versuche gelungen wäre, so fielen $a'''$ und $z'''$ in einen Punkt zusammen und die Aufgabe reducirt sich somit auf diese andere: Zu drei Punktepaaren $aa'a''$, $zz'z''$ in einem Kegelschnitt einen Punkt $K$ so zu bestimmen, dass

$$(Kaa'a'') = (Kzz'z'').$$

Diese Aufgabe erhält aber ihre Auflösung durch folgende Betrachtungen: Wenn $az''$, $a'z$, $a''z'$ die Ecken eines eingeschriebenen Sechsecks sind (wir setzen voraus in der hier gegebenen Ordnung, so dass $a$, $z$, $a'$, $z'$, $a''$, $z''$ die gegenüberliegenden Ecken sind), so kann jeder der Punkte, in welchen die gerade Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten dieses Sechsecks den Kegelschnitt schneidet, als einer der gesuchten Punkte $K$ betrachtet werden. Der Blick auf die Figur 126, in welcher die Ecken $a$, $z''$, $a'$, $z$, $a''$, $z'$ respective durch $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ bezeichnet sind, und für welche daher die Pascal'sche Linie durch $LMN$ repräsentirt ist, zeigt dass die Punktreihe $KPNL$ ($P$ ist der Durchschnittspunkt der Pascal'schen Linie mit der Diagonale $AD$) ebensowohl das Doppelschnittverhältniss des Büschels $(D.KACE)$ als auch das des andern Büschels $(A.KDFB)$ misst, dass somit

Fig. 126.


$$(KACE) = (KDFB) \text{ ist,}$$

wie es die Aufgabe fordert. Diese Construction des eingeschriebenen Polygons verdankt man M. Poncelet (Traité des Propr. Proj. p. 351). Der hier gegebene Beweis zeigt zugleich, dass die Poncelet'sche Construction auch die Aufgabe auflöst: Man soll in einen Kegelschnitt ein Viereck einschreiben, dessen Seiten sämmtlich einen Kegelschnitt berühren, der mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat; und dass endlich alle die von den einzelnen Seiten berührten Kegelschnitte verschieden sein können.

Aus der letzten Aufgabe ist bekannt, dass $K$ für einen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat, einer der Berührungspunkte ist, sobald die geraden Linien $az$, $a'z'$, $a''z''$ Tangenten desselben sind; demnach ist im Vorigen zugleich die Auflösung der Aufgabe enthalten: Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher drei gegebene gerade Linien berührt und überdies mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat.

*Aufg. 11.* Die anharmonische Eigenschaft von fünf Punkten eines Kegelschnitts bietet einen einfachen Beweis dar für den Satz vom Pascal'schen Sechseck.

In der Figur der vorigen Aufgabe ist

$$(E.CDFB) = (A.CDFB).$$

Wir messen diese gleichen Doppelschnittverhältnisse respective in den geraden Linie $BC$ und $CD$ und erhalten

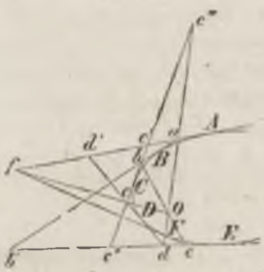
$$(CRMB) = (CDNS);$$

bilden wir dann mit diesen beiden Punktreihen von dem Punkte $L$ als Scheitel zwei Strahlenbüschel, so haben dieselben drei gemeinschaftliche Strahlen $CL$, $DE$, $AB$ und müssen somit wegen der Gleichheit ihrer Doppelschnittverhältnisse auch den vierten Strahl gemeinschaftlich haben, d. h. $NL$, $LM$ bilden eine gerade Linie.

*Aufg. 12.* Ganz ebenso ergiebt sich aus der anharmonischen Eigenschaft von fünf Tangenten eines Kegelschnitts der Beweis des Satzes von Brianchon.

Wir bezeichnen die Berührungspunkte der sechs Tangenten des Brianchon'schen Satzes durch $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ (Fig. 127) und die Durchschnittspunkte der aufeinanderfolgenden unter ihnen oder die Ecken des umschriebenen Sechsecks durch $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$; alsdann sind $ad$, $be$, $cf$ die Verbindungslinien der Gegenecken, und man hat zu beweisen, dass die beiden letzteren der ersteren in demselben Punkte $O$ begegnen.

Fig. 127.



Dazu betrachten wir die Tangenten in $A$ und $E$ als von den vier andern geschnitten, so dass

$$(ac'd'f) = (b'c''de)$$

ist; indem wir alsdann die Punkte der ersten Reihe mit $c$ und die der zweiten mit $b$ verbinden, erhalten wir

$$(c.ac'd'f) = (b.b'c''de);$$

schneiden wir endlich diese beiden Strahlenbüschel durch die Transversale $ad$, und bezeichnen den Punkt, in welchem der Strahl $be$ des zweiten Büschels ihr begegnet, durch $O$, den Punkt, in welchem der Strahl $cf$ des ersten sie trifft, durch $O'$, so ist

$$(ac'''dO') = (ac'''dO);$$

d. h. $O$ fällt mit $O'$ zusammen.

Unter den speciellen Fällen dieses Satzes bemerken wir einen bekannten Satz über die Parabel, nämlich, dass die Höhenperpendikel eines der Parabel umschriebenen Dreiecks sich in der Directrix schneiden. (Artikel 229, Aufgabe 2.) Bezeichnen wir durch $t_1$, $t_2$, $t_3$ die drei Tangenten der Parabel, welche das Dreieck bilden, und durch $t'_1$, $t'_2$, $t'_3$ die drei dazu rechtwinkligen Tangenten derselben, welche bekanntlich die ersteren in der Directrix durchschneiden (Artikel 223), so ist durch fünf dieser Tangenten und die unendlich entfernte gerade Linie ein Sechseck $t_1\ t_2\ t_3\ t'_3 \infty t'_1$ gebildet, in welchem die Gegenecken durch $t_1 t_2$, $t'_3 \infty$; $t_2 t_3$, $\infty t'_1$ und $t_3 t'_3$, $t_1 t'_1$ bezeichnet werden können. Die drei Gegen-Diagonalen, die sich in einem Punkte schneiden müssen, sind sonach die Senkrechte vom Durchschnittspunkte der Tangenten $t_1$ und $t_2$ auf die Tangente $t_3$, die Senkrechte vom Durchschnittspunkt von $t_2$ und $t_3$ auf $t_1$ und die Directrix, nämlich die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte zweier Paare von aufeinander rechtwinkligen Tangenten.

*Aufg. 13.* Aus dem Pascal'schen Satze erhält man leicht die von Mac-Laurin gegebene Methode zur Erzeugung der Kegelschnitte. Denn wenn wir die fünf Punkte $A, B, C, D, E$ als gegeben und den Punkt $F$ als veränderlich voraussetzen, so ist $F$ die Spitze eines Dreiecks $FMN$ (Fig. 126), dessen Seiten durch die festen Punkte $L$, $A$, $E$ gehen, und dessen Basisecken sich in den festen geraden Linien $CD$, $CB$ bewegen. Wir erkennen daraus, dass wir aus fünf Punkten eines Kegelschnitts so viele andre Punkte desselben bestimmen können als wir wünschen.

Durch dieselbe Construction lässt sich aus fünf Punkten eines Kegelschnitts $A, B, C, D, E$ der Punkt $F$ bestimmen, in welchem eine beliebige durch einen jener Punkte gezogene Gerade $AN$ den Kegelschnitt ferner schneidet. Und wenn man diese gerade Linie nach einander zu den Sehnen $BC$, $BD$ des Kegelschnitts parallel sein lässt, so ergeben sich durch die Bestimmung ihrer ferneren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt zwei Paare paralleler Sehnen, und man erhält daraus nach der Bemerkung des Artikels 94 sein Centrum.

*Aufg. 14.* Vier Punkte $A$, $D$, $F$, $B$ eines Kegelschnitts und zwei feste gerade Linien durch einen derselben $DC$, $DE$ sind gegeben; man soll die Enveloppe der geraden Linie $CE$ finden, welche die zweiten Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitt verbindet.

Die Ecken des Dreiecks $C$, $E$, $M$ bewegen sich in festen geraden Linien $DC$, $DE$, $NL$, und zwei seiner Seiten gehen durch die festen Punkte $B$, $F$; in Folge dessen und durch Anwendung der Methode der reciproken Polaren auf die Mac-Laurin'sche Erzeugungsweise der Kegelschnitte erkennt man, dass die dritte Seite einen Kegelschnitt umhüllt, welcher jede der geraden Linien $DC$, $DE$ berührt.

*Aufg. 15.* Vier Punkte $A, B, D, E$ eines Kegelschnitts sind gegeben; durch zwei derselben werden feste gerade Linien $AF$, $CD$ gezogen und die Punkte $C$, $F$ bestimmt, in welchen dieselben dem Kegelschnitt ferner begegnen. Die gerade Verbindungslinie dieser Punkte geht stets durch den nämlichen festen Punkt.

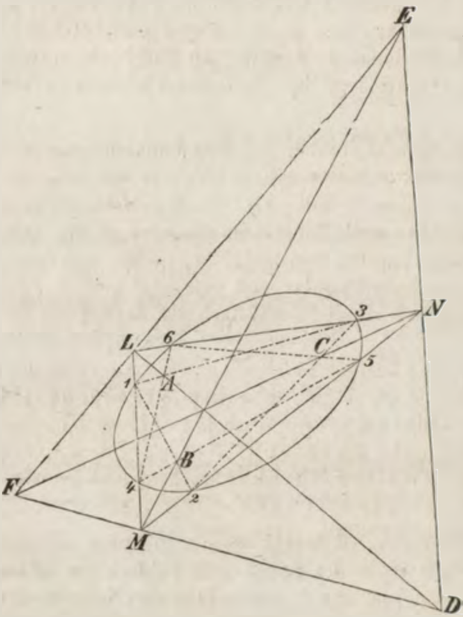
Denn von dem Dreieck $CFM$ gehen zwei Seiten durch die festen Punkte $B, E$, während seine Ecken sich in den festen geraden Linien $AF$, $CD$, $NL$ bewegen, welche sich in einem Punkte schneiden; somit geht (nach Art. 384) die dritte Seite $CF$ durch einen festen Punkt.

Wir werden in dem der Methode der Projectionen gewidmeten Abschnitt die letzten beiden Sätze als aus andern wohlbekannten Sätzen hervorgehend erkennen.

*Aufg. 16.* In einen Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen. (Fig. 128.)

Dies ist zwar nur ein specieller Fall der Aufgabe 10, aber wir beabsichtigen an dieser Stelle einen geometrischen Beweis der im Artikel 302, (Aufg. 3) gegebenen Construction zu liefern.

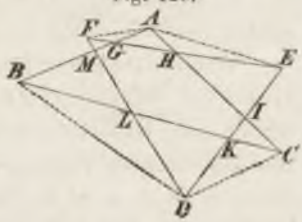
Fig. 128.




Wenn wir das Viereck betrachten, von welchem die Punkte $E$, $L$, $N$ Ecken und die Punkte $D$, $F$ die Durchschnitts-Punkte der Gegenseiten sind, so bilden nach den harmonischen Eigenschaften des Vierecks die Linien $ML$, $ME$, $MN$, $MD$ ein harmonisches Büschel, und die gerade Linie $B\,1$ wird demnach in den Punkten harmonisch getheilt, in welchen diese vier Geraden ihr begegnen. Da aber der Punkt $B$ der Pol von $MD$ ist, so ist $B1$ auch in den Punkten harmonisch getheilt, welche sie mit dem Kegelschnitt und mit der geraden Linie $MD$ gemein hat; daraus ergiebt sich, dass die geraden Linien $B\,1$ und $MN$ sich im Kegelschnitt durchschneiden müssen oder dass die Punkte 1, 2, $B$ in derselben geraden Linie liegen. Ebenso zeigt man, dass die gerade Linie 1, 3 durch $A$ und dass die gerade Linie 3, 2 durch $C$ geht.

*Aufg. 17.* Die Gesetze der Doppelschnittverhältnisse von Punkten und Tangenten eines Kegelschnitts liefern einen sehr einfachen Beweis des Satzes, dass die Ecken zweier demselben Kegelschnitt umschriebener Dreiecke $ABC$, $DEF$ in einem und demselben Kegelschnitt liegen. (Fig. 129.)

Fig. 129.



Denn nach der Unveränderlichkeit des Doppelschnittverhältnisses von vier Tangenten bestimmen die geraden Linien $AB$, $AC$, $DE$, $DF$ in den andern $BC$ und $EF$ Punktreihen $B, C, K, L$ und $G, H, E, F$ von gleichem Doppelschnittverhältniss, d. i. man hat

$$\frac{BC}{CK} : \frac{BL}{LK} = \frac{GH}{HE} : \frac{GF}{FE}.$$

In Folge dessen ist auch

$$\frac{\sin BDC}{\sin CDK} : \frac{\sin BDL}{\sin LDK} = \frac{\sin GAH}{\sin HAE} : \frac{\sin GAF}{\sin FAE},$$

oder

$$\frac{\sin BDC}{\sin CDE} : \frac{\sin BDF}{\sin FDE} = \frac{\sin BAC}{\sin CAE} : \frac{\sin BAF}{\sin FAE},$$

und somit die Doppelschnittverhältnisse

$$(D.BCEF) \text{ und } (A.BCEF)$$

einander gleich, womit der Satz bewiesen ist.

418. In der 4. Aufg. des Art. 331 ist bewiesen worden, dass das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten einer geraden Linie dem Doppelschnittverhältniss ihrer in Bezug auf einen Kegelschnitt genommenen Polaren gleich ist. Ein specieller Fall dieses Satzes ist es, dass das Doppelschnittsverhältniss von vier beliebigen Durchmessern dem ihrer conjugirten gleich ist. Wir können denselben auch direct durch die Bemerkung beweisen, dass das Doppelschnittsverhältniss von vier beliebigen von einem Punkt in der Curve ausgehenden Sehnen mit dem der Supplementar-Sehnen übereinstimmt. (Art. 180.)

Man soll den Ort der Centra für alle die dem nämlichen Viereck umschriebenen Kegelschnitte finden. Wenn man die Durchmesser eines solchen Kegelschnitts gezogen denkt, welche die Seiten des Vierecks halbiren, so ist ihr Doppelschnittverhältniss dem ihrer vier conjugirten Durchmesser gleich, und da das Letztere bekannt ist, weil diese conjugirten Durchmesser den vier Seiten des Vierecks parallel sind, so ist der gesuchte Ort ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte dieser Seiten geht. Wenn man sodann die speciellen Fälle betrachtet, in denen der Kegelschnitt in zwei gerade

Linien degenerirt, so erkennt man den Durchschnittspunkt der Diagonalen und die Durchschnittspunkte der Gegenseiten als Punkte des fraglichen Ortes; sie liegen deshalb in einem durch die Mittelpunkte der Seiten und Diagonalen gehenden Kegelschnitt.

Wenn das gegebene Viereck einen einspringenden Winkel besitzt, so erkennt man zunächst, dass der umschriebene Kegelschnitt eine Hyperbel sein muss, da ein solches Viereck nicht in eine geschlossene Figur von der Gestalt der Ellipse oder Parabel eingeschrieben worden. Man schliesst sodann, dass der Ort der Centra in diesem Falle eine Ellipse ist, weil das Centrum einer Hyperbel nie unendlich entfernt sein kann.

Ist das Viereck ohne einspringenden Winkel, so können denselben im Allgemeinen zwei Parabeln umschrieben werden, weil nach Artikel 278 die Bestimmung derselben ein specieller Fall der Aufg. 4. des Art. 446 ist. Der Ort der Centra ist in diesem Falle eine Hyperbel, deren Asymptoten den Durchmessern dieser beiden Parabeln parallel sind. Der Ort der Centra ist endlich eine Parabel, wenn einer der gegebenen Punkte in unendlicher Entfernung ist, d. h. wenn gefordert wird, den Ort der Centra derjenigen Kegelschnitte zu finden, welche durch drei gegebene Punkte gehen und eine gegebene gerade Linie zur Asymptote haben.

Durch dieselben Betrachtungen kann man beweisen, dass der Ort des Pols einer gegebenen geraden Linie in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems ein Kegelschnitt ist.

419. Wir haben im Vorigen an dem Beispiel des Pascal'schen und Brianchon'schen Satzes bereits erläutert, wie solche Sätze, welche in der Beziehung der Reciprocität zu einander stehen, in ganz analoger Weise aus der anharmonischen Eigenschaft der Punkte und der Tangenten der Kegelschnitte abgeleitet werden können, und wir empfehlen hier dem Leser, die sämmtlichen reciproken Sätze der in den vorigen Artikeln enthaltenen zu bilden und sie mit Hilfe der anharmonischen Eigenschaft der Tangenten eines Kegelschnitts zu beweisen. Wir fügen dafür ein weiteres Beispiel hinzu.

Eine Transversale, welche sich um einen festen Punkt $P$ dreht, schneidet zwei feste gerade Linien $OA$, $OB$ in Punkten $A$, $B$ und man trägt von diesen die gegebenen Längen $AC, BD$ in denselben ab; welches ist die Enveloppe der geraden Linie $CD$?

Vier beliebige Lagen der Transversale liefern die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse

$$(AA'A''A''') = (BB'B''B''');$$

man hat aber

$$(AA'A''A''') = (CC'C''C''') \text{ und } (BB'B''B''') = (DD'D''D'''),$$

somit schneiden die vier geraden Linien $CD$, $C'D'$, $C''D''$, $C'''D'''$ die festen Geraden $OA$, $OB$ so, dass

$$(CC'C''C''') = (DD'D''D''') \text{ ist},$$

und ihre Enveloppe ist daher ein Kegelschnitt, welcher $OA$ und $OB$ berührt.

420. Wenn in dieser Weise die Enveloppe einer beweglichen geraden Linie als ein Kegelschnitt erkannt ist, so ist es nützlich, anzumerken, ob jene bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen ganz in unendlicher Entfernung sein kann; denn sobald dies der Fall ist, muss die Enveloppe derselben eine Parabel sein. (Art. 278.)

So kann in dem Beispiele des vorigen Artikels die gerade Linie $CD$ in keiner ihrer Lagen in unendlicher Entfernung sein. ohne dass es zugleich die drehende Transversale in der entsprechenden Lage wäre; dies erfordert aber, dass der Punkt $P$ unendlich entfernt sei. Wenn also in jener Aufgabe die Transversale anstatt durch einen festen Punkt zu gehen, einer festen geraden Linie parallel ist, so wird die Enveloppe zu einer Parabel.

Ganz in analoger Weise kann oft die geometrische Natur des von einem beweglichen Punkte durchlaufenen Ortes durch die Betrachtung besonderer Lagen dieses Punktes erkannt werden, wie es das Beispiel des Artikels 418 sehr deutlich zeigt.

421. Wenn drei Punkte in einer geraden Linie $a, b, c$ und drei Punkte in einer andern geraden Linie $A, B, C$ als ihnen entsprechend gegeben sind, und die Punkte $d$ in der ersten und $D$ in der zweiten geraden Linie so bestimmt werden, dass stets

$$(abcd) = (ABCD)$$

ist, so folgt aus den vorhergehenden Artikeln, dass die Enveloppe von $dD$ ein Kegelschnitt ist, und dass die geraden Linien $pd$, $PD$, welche die Punkte $dD$ mit zwei festen Punkten respective verbinden, sich in einem Kegelschnitt durchschneiden, welcher durch diese Punkte geht.*) Wir wollen die allgemeinste Relation zwischen den Abmessungen der Punkte $d$ und $D$ untersuchen, für welche dies noch der Fall ist. Wenn wir die Entfernungen der Punkte $a, b, c, d$ von einem festen Punkte $o$ in derselben Linie durch $r, r', r'', r'''$ und die Entfernungen der Punkte $A, B, C, D$ von dem festen Punkte $O$ ihrer geraden Verbindungslinie durch $R, R', R'', R'''$ bezeichnen, so ist

$$\frac{r-r'}{r'-r'''}:\frac{r-r''}{r''-r'''}=\frac{R-R'}{R'-R'''}:\frac{R-R''}{R''-R'''}.$$

Denken wir nun die Punkte $abc$, $ABC$ als fest und nur $d, D$ als veränderlich, so sind $r_,', r'', r''', R', R'', R'''$ constante Grössen und die aufgestellte Relation, welche die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse ausdrückt, geht in die Form

$$kRr + lR + mr + n = o$$

über. (Vergl. Art. 301.)

Sie ist in Bezug auf jede der beiden Veränderlichen $r$ und $R$ vom ersten Grade und hat die allgemeinste Form, welche mit dieser Bedingung vereinigt werden kann; sie enthält drei unabhängige Constanten und ist demnach die allgemeinste Relation, welche zwischen $od$ und $OD$ stattfinden muss, damit die gerade Linie $dD$ einen Kegelschnitt umhülle, welcher die festen Geraden $od$, $OD$ berührt.

Wenn man durch $r, R$ statt der Segmente, welche die veränderlichen Punkte $d, D$ mit den festen Anfangspunkten $o, O$ bestimmen, die Sinus der Winkel bezeichnet, welche zwei beweg-

*) Wir sahen im Artikel 273, dass die Enveloppe von $dD$ auch dann für $(abcd) = (ABCD)$ ein Kegelschnitt ist, wenn die Punkte $a, b, c, d, A, B, C, D$ demselben Kegelschnitt angehören, und dass der Durchschnitt der geraden Linien $PD, pd$ einen Kegelschnitt beschreibt, wenn $p, P$ in jenem Kegelschnitt liegen.

Wenn wir ferner fanden, dass für zwei Kegelschnitte, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, vier beliebige Tangenten des einen den andern so schneiden, dass

$$(abcd) = (ABCD)$$

ist, so ist doch die Umkehrung dieses Ergebnisses, dass die Enveloppe von $dD$ ein Kegelschnitt sei, sobald die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse stattfindet, nur dann richtig, wenn die Punkte $A, B, C, a, b, c$ so gewählt sind, dass die geraden Linien $Aa$, $Bb$, $Cc$ einen und denselben Kegelschnitt berühren, welcher mit beiden gegebenen Kegelschnitten eine doppelte Berührung hat.

liche Strahlen mit zwei festen geraden Linien respective bilden, so drückt dieselbe Gleichung die allgemeinste Relation aus, welche von diesen Veränderlichen erfüllt sein muss, damit der Durchschnittspunkt der beiden beweglichen Strahlen einen Kegelschnitt beschreibe, welcher durch die Scheitelpunkte beider Büschel hindurchgeht.*)

422. Die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bx + C = o$$

oder in homogener Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o$$

repräsentirt zwei Punkte einer geraden Linie, sobald man durch ihre Wurzelwerthe $x = \alpha$, $x = \alpha'$ (oder $\frac{x}{y} = \alpha$, $\frac{x}{y} = \alpha'$) die Abstände derselben von einem festen Anfangspunkte in ihr ausdrückt. Man sieht leicht genug, dass jede Gleichung, sei sie nun vollständig mit einer oder homogen mit zwei Veränderlichen, in dieser Weise eine mit ihrem Grade übereinstimmende Anzahl von Punkten in gerader Linie repräsentirt, und dass ein Strahlenbüschel dadurch dargestellt wird, wenn dieselben Wurzeln die Richtungscoefficienten von geraden Linien bedeuten, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogen sind. Wir betrachten nur die einfachsten Fälle der geradlinigen Punktereihen.

---

*) M. Chasles hat diese Relation in abweichender Form gegeben: Wenn zwei beliebige Punkte $e$ und $E$ gegeben sind, so umhüllt $dD$ einen Kegelschnitt, sobald

$$\lambda . \frac{ed}{od} + \mu . \frac{ED}{OD} = 1 \text{ ist.}$$

Diese Relation kommt auf die frühere Form zurück, wenn man die Abstände $eo$ und $EO$ durch $a, A$ bezeichnet, denn sie wird dann

$$\lambda . \frac{r-a}{r} + \mu \frac{R-A}{R} = 1.$$

H. Steiner hat zwei Punktereihen oder Strahlenbüschel, welche durch Bewegung zweier Punkte oder Strahlen erzeugt werden, für welche stets diese Relationen gelten, als projectivische Elementar-Gebilde bezeichnet. Vergl. das Werk: Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten u.s.w. von Jac. Steiner. 1832.

Wir erkennen zuerst, dass die durch
$$Ax^2 + 2Bx + C = o$$
dargestellten beiden Punkte zusammenfallen, wenn
$$AC - B^2 = o$$
ist, und bemerken, dass die Grösse $(AC - B^2)$ die Discriminante der gegebenen Gleichung ist.

Betrachten wir alsdann zwei derartige Punktepaare in derselben geraden Linie, wie sie die Gleichungen
$$Ax^2 + 2Bx + C = o \text{ und } A'x^2 + 2B'x + C' = o$$
darstellen und bezeichnen die Wurzeln der ersten Gleichung durch $\alpha$, $\alpha'$ und die der zweiten durch $\beta$, $\beta'$, so ist das Doppelschnittverhältniss der durch jene vier Punkte bestimmten Reihe
$$\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \beta_1} : \frac{\beta - \alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1} = m.$$

Die Einführung der Werthe der Wurzeln und eine leichte Entwicklung führt zu dem Ergebniss
$$\frac{(2BB' - AC' - A'C)^2}{4(B^2 - AC)(B'^2 - A'C')} = \frac{1 + m}{1 - m},$$
d. h. der Quotient der beiden auf der linken Seite der Gleichung stehenden Coefficientenverbindungen muss einen bestimmten aus dem vorgeschriebenen Doppelschnittverhältniss einfach hervorgehenden Werth haben, wenn die Reihe der vier Punkte jenes Doppelschnittverhältniss selbst besitzen soll. In den im Nenner auftretenden Functionen der Coefficienten erkennen wir die Discriminanten der gegebenen Gleichungen; der Zähler ist eine Invariante dieser letzteren, denn man kann leicht nachweisen, dass diese Function durch eine lineare Transformation der ursprünglichen Gleichungen nur mit einem Factor behaftet wird, der mit dem Quadrat der Substitutions-Determinante identisch ist. In der That, substituiren wir in
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = o, \; a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = o$$
für $x$ und $y$ die Werthe
$$(\alpha_1 x + \beta_1 y), \; (\alpha_2 x + \beta_2 y),$$
so dass dieselben in
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o, \; A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = o$$
übergehen, wenn wir durch $A$, $B$, $C$ die folgenden Coefficienten-

Verbindungen der ersten Gleichung und durch $A'$, $B'$, $C'$ ihre entsprechenden aus der zweiten Gleichung bezeichnen:

$$A = a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2,\ C = a\beta_1^2 + 2b\beta_1\beta_2 + c\beta_2^2,$$
$$B = a\alpha_1\beta_1 + b(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + c\alpha_2\beta_2,$$

so findet man leicht bestätigt, dass die Identität

$$2BB' - AC' - A'C = (2bb' - ac' - a'c)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$$

besteht.

Indem wir zu jenem Ausdruck für das Verhältniss $\frac{1+m}{1-m}$ zurückkehren, finden wir, dass dem Werthe $m = -1$ die Bedingung

$$2BB' - AC' - A'C = 0$$

entspricht.

Die vier Punkte bilden also ein harmonisches System, wenn die eben betrachtete Invariante ihrer Gleichungen den Werth Null besitzt. Unter der Voraussetzung homogener Gleichungen mit zwei Veränderlichen $x$ und $y$ und mit dem Gebrauch der Symbole $S_1$ und $S_2$ für dieselben lässt sich diese Invariante und die Bedingung der harmonischen Theilung schreiben wie folgt:

$$\frac{d^2S_1}{dx^2}\cdot\frac{d^2S_2}{dy^2} - 2\frac{d^2S_1}{dx\,dy}\cdot\frac{d^2S_2}{dx\,dy} + \frac{d^2S_1}{dy^2}\cdot\frac{d^2S_2}{dx^2} = 0,$$

oder unter Anwendung einer bekannten Symbolik

$$\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)^2 S_1 S_2 = 0.$$

Alles dies aber lehrt uns, dass die Relationen des Doppelschnittverhältnisses und der harmonischen Theilung durch lineare Transformation nicht gestört werden, wie es geometrisch evident ist.

423. Wir erkennen leicht, dass es mit den Relationen der Involution ganz ebenso ist. Drei Punktepaare sind in Involution, wenn die sie repräsentirenden Gleichungen von der Form

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0,\ A'x^2 + 2B'x + C' = 0,$$
$$Ax^2 + 2Bx + C + l(A'x^2 + 2B'x + C') = 0$$

sind; denn, unter der Voraussetzung, dass die durch die ersten beiden Gleichungen bestimmten Punktepaare die Punkte als Brennpunkte des Systems ergeben, welche die Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = o$$

darstellt, so müssen nach dem Vorigen die Relationen

$$aC + cA - 2bB = o, \quad aC' + cA' - 2bB' = o$$

bestehen, weil die Brennpunkte mit jedem der beiden bezeichneten Punktepaare ein harmonisches System bilden müssen. Da aber aus diesen beiden Bedingungen die neue Identität

$$a(C + lC') + c(A + lA') - 2b(B + lB') = o$$

hervorgeht, welche anzeigt, dass auch das dritte System von Punkten mit den Brennpunkten eine harmonische Theilung bestimmt, so sind die drei durch jene Gleichungen repräsentirten Punktepaare in Involution.

Wenn man durch die Bedingungsgleichungen

$$aC + cA - 2bB = o, \quad aC' + cA' - 2bB' = o$$

und durch die Gleichung der Brennpunkte

$$ax^2 + 2bx + c = o$$

die Grössen $a, b, c$ eliminirt, so erhält man zur Bestimmung der Brennpunkte des involutorischen Systems die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x^2, & x, & 1 \\ C, & -B, & A \\ C', & -B', & A' \end{vmatrix} = o$$

oder

$$x^2(AB' - A'B) + x(AC' - A'C) + (BC' - B'C) = o.$$

Waren die Gleichungen in homogener Form gegeben und durch die Symbole $S_1$, $S_2$ bezeichnet wie folgt:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o = S_1, \quad A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = o = S_2,$$

so kann diese die Brennpunkte bestimmende Gleichung in der Form

$$\begin{vmatrix} \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_2}{dx} \\ \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_2}{dy} \end{vmatrix} = o$$

oder $$\frac{dS_1}{dx} \cdot \frac{dS_2}{dy} - \frac{dS_1}{dy} \cdot \frac{dS_2}{dx} = o$$

geschrieben werden.

Wir wissen nach dem Früheren, dass sie eine Covariante der gegebenen beiden Gleichungen ist.

Das Centrum des involutorischen Systems wird gefunden, wenn man die Gleichung

$$S_1 + lS_2 = o,$$

welche ein Paar conjugirter Punkte darstellt, so bestimmt, dass eine ihrer Wurzeln unendlich gross wird; wir wissen (Art. 86), dass dies der Fall ist, wenn der Coefficient von $x^2$ gleich Null wird, d. h. das Centrum der Involution ist durch die Gleichung

$$2(BA' - B'A)x + (CA' - C'A) = o$$

bestimmt; denn jene Bedingung liefert

$$l = -\frac{A}{A'}.$$

424. Wir fügen dem Vorigen eine andre Ausdrucksweise der involutorischen Relation bei, welche bemerkenswerth erscheint.

Wir setzen drei Punktepaare $A, A_1, B, B_1, C, C_1$ voraus, so dass die Bedingung der Involution in der Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse

$$(ABCA') = (A'B'C'A)$$

besteht, d. i.

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AA'}{A'C} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'A}{AC'},$$

oder

$$AB.CA'.B'C' = A'B'.C'A.BC.$$

Sind dann jene Punktepaare durch ihre Abstände $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$ von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte gegeben, so wird diese Bedingung in die Form

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha_1)(\beta_1 - \gamma_1) + (\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_1 - \alpha)(\beta - \gamma) = o$$

übergeführt und ist identisch mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha + \alpha_1, & \alpha\alpha_1 \\ 1, & \beta + \beta_1, & \beta\beta_1 \\ 1, & \gamma + \gamma_1, & \gamma\gamma_1 \end{vmatrix} = o.$$

Wenn wir endlich jene Punktepaare respective durch die Gleichungen

$$Ax^2 + 2Bx + C = o, \; A_1x^2 + 2B_1x + C_1 = o, \; A_2x^2 + 2B_2x + C_2 = o$$

repräsentiren, so gelten die Identitäten

$$\alpha + \alpha_1 = -\frac{2B}{A},\ \alpha\alpha_1 = \frac{C}{A},$$

$$\beta + \beta_1 = -\frac{2B_1}{A_1},\ \beta\beta_1 = \frac{C_1}{A_1},$$

$$\gamma + \gamma_1 = -\frac{2B_2}{A_2},\ \gamma\gamma_1 = \frac{C_2}{A_2},$$

und die Bedingung der Involution nimmt die Form

$$\begin{vmatrix} A, & 2B, & C \\ A_1, & 2B_1, & C_1 \\ A_2, & 2B_2, & C_2 \end{vmatrix} = o$$

an.

425. Wir haben im Artikel 421 gezeigt, dass die allgemeinste Relation des ersten Grades zwischen den veränderlichen Entfernungen $R$ und $r$ zweier in geraden Linien beweglichen Punkte von den entsprechenden festen Punkten $O, o$, nämlich

$$kRr + lR + mr + n = o,$$

eben die Bedingung ist, unter welchen die beweglichen Punkte Reihen von gleichem Doppelschnittverhältniss beschreiben.

Wir können jetzt hinzufügen, dass für die Voraussetzung, dass beide Punktereihen in derselben geraden Linie liegen, und die festen Anfangspunkte $O$ und $o$ zusammenfallen, die Bedingung

$$l = m$$

genügt, damit dieselbe Gleichung die involutorische Beziehung beider Reihen ausdrücke; es erhellt dies einfach aus der Bemerkung, dass in der Gleichung

$$kRr + l(R + r) + n = o$$

die Grössen $R$ und $r$ in ganz gleicher Weise auftreten, so dass ihre Vertauschung die Gleichung nicht stört, welches augenscheinlich mit der in Artikel 409 als fundamental bezeichneten Eigenschaft involutorischer Systeme zusammenfällt.

Die allgemeine Gestalt dieser Relationen erlaubt uns, auf die Existenz von Punktereihe oder Strahlenbüscheln von gleichem Doppelschnittverhältniss oder in Involution in einer ebenso einfachen als allgemeinen Weise zu schliessen, die wir folgendermassen bezeichnen können.

Wenn in einer Aufgabe von rein algebraischer

Natur, d. h. in welche keinerlei Transcendenten bestimmend eingehen, geradlinige Punktereihen oder punktuelle Strahlenbüschel in solcher Weise entsprechend auftreten, dass jedem Elemente der einen Reihe ein und nur ein Element der andern Reihe entspricht und umgekehrt, so findet dies Entsprechen nach gleichen Doppelschnittverhältnissen statt.

Und: Wenn in einer Aufgabe von rein algebraischer Natur zwei geradlinige Punktereihen oder Strahlenbüschel in der Art entsprechend auftreten, dass jedem Element der ersten Reihe nur ein Element der zweiten entspricht, aber jedem Element der zweiten Reihe zwei Elemente der ersten in völlig gleicher Weise correspondiren, so sind diese Paare von Elementen in Involution und entsprechen den Elementen der ersten Reihe nach gleichem Doppelschnittsverhältniss.

Dabei bezeichnen wir als das Doppelschnittsverhältniss von vier involutorischen Segmenten das Doppelschnittverhältniss der vier Punkte, welche einem beliebigen festen Punkte ihrer Geraden in Bezug auf sie conjugirt harmonisch sind, ein Doppelschnittverhältniss, welches nach dem ersten der eben ausgesprochenen Sätze unveränderlich sein muss. Man kann demnach das Doppelschnittverhältniss der vier Mittelpunkte der Segmente statt dessen nehmen.

Die Form dieser Sätze verleiht ihnen eine ungemeine Tragweite und macht sie sehr brauchbar. Wir wollen die Art ihrer Verwendung in einigen Beispielen andeuten, die theilweis wenigstens neue Ergebnisse liefern. Unmittelbar ergiebt sich aus dem ersten Satze die Unveränderlichkeit der Doppelschnittverhältnisse, welche wir in den Artikeln 296, 297 als das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten und als das von vier Tangenten eines Kegelschnitts bezeichnet haben.

Andrerseits lehrt der zweite Satz die Existenz von Involutionen in folgenden einfachen Fällen erkennen: 1) Man denke einen Kegelschnitt, eine feste Tangente desselben und eine beliebige feste Gerade in seiner Ebene; die von jedem Punkte dieser letzteren an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten bestimmen in der bezeichneten festen Tangente desselben Segmente, welche in Involution sind und der Reihe der Punkte jener Geraden nach gleichem Doppelschnittverhältniss entsprechen.

2) Wenn man von einem festen Punkte aus nach einem gegebenen Kegelschnitt Transversalen zieht und die Schnittpunkte derselben mit einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts durch gerade Linien verbindet, so bilden die Paare dieser Verbindungslinien ein involutorisches System und entsprechen dem Büschel jener Transversalen nach gleichem Doppelschnittverhältniss. Wollte man dabei den Scheitel des zweiten Büschels nicht auf dem Kegelschnitte wählen, so entspräche jedem Strahlenpaare desselben ausser der hier bezeichneten ersten Transversale noch eine zweite und das gegenseitige Entsprechen wäre nicht dem allgemeinen Satze gemäss.

Für das System der durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte erkennt man ebenso leicht die Richtigkeit folgender Schlüsse: Jede durch einen dieser Punkte gehende Transversale schneidet die Kegelschnitte des Systems in einer Punktereihe und die auf verschiedenen Transversalen so bestimmten Punktereihen entsprechen sich nach gleichem Doppelschnittverhältniss.

Die Polaren eines beliebigen Punktes in der Ebene der Figur in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems bilden ein Strahlenbüschel, und die zu verschiedenen Punkten der Ebene so gehörenden Büschel der Polaren entsprechen sich nach gleichem Doppelschnittverhältniss; denn jedes beliebige Paar von Transversalen muss durch das System dieser Polaren in Punktereihen geschnitten werden, die sich nach gleichem Doppelschnittverhältniss entsprechen, welches nur dann für alle Transversalen zugleich möglich ist, wenn die Polaren ein Strahlenbüschel bilden.

Man kann von dem durch diesen Satz eröffneten Gesichtspunkte aus von einem Büschel von Kegelschnitten sprechen, welches einem andern Büschel von Kegelschnitten, Strahlenbüschel oder einer geradlinigen Punktereihe nach gleichem Doppelschnittverhältniss entspricht.

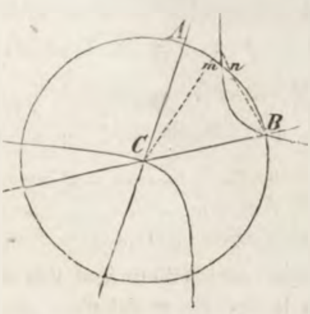
Wenn man das System dieser demselben Viereck umschriebenen Kegelschnitte durch zwei Transversalen schneidet, deren erste durch eine Ecke des Vierecks hindurchgeht, während die zweite völlig willkürlich gezogen ist, so bestimmen jene Kegelschnitte auf der ersten eine Punktereihe, auf der zweiten eine

Reihe von Punktepaaren; es entspricht jedem Punkte der ersten gleichmässig ein Paar von Punkten in der zweiten und jedem Punkte der zweiten nur ein Punkt in der ersten; demnach bilden jene Punktepaare eine Involution und entsprechen den Punkten der bezeichneten Reihe nach gleichem Doppelschnittverhältniss. In Folge dessen erzeugt man einen Kegelschnitt durch Umhüllung, indem man jeden Punkt dieser Reihe mit den Endpunkten des im involutorischen System ihm entsprechenden Segments durch gerade Linien verbindet. Ebenso bestimmen die dem nämlichen Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte mit jedem Punkte ihrer Ebene ein involutorisches Tangentenbüschel.

Dagegen bestimmen alle Kegelschnitte, die demselben Viereck umschrieben sind, involutorische Tangentenbüschel nur mit denjenigen Punkten, welche in den Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks liegen, und die demselben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte bestimmen involutorische Punktereihen nur auf den Transversalen, welche durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen jenes Vierecks gehen.

*Die Hyperbel, welche in Art. 227 Aufg. 13 als zur Theilung eines Winkels in drei gleiche Theile führend bezeichnet wurde*, ergiebt sich leicht nach demselben Princip. Wenn vom Scheitel des Winkels $C$ aus ein Kreis beschrieben ist, der auf den Schenkeln des Winkels die Punkte $A$, $B$ bestimmt, so kann man auf demselben von $A$ und $B$ aus Theilungen $Am$, $Am'$, $Am''$, $Am'''$ ...., $Bn$, $Bn'$, $Bn''$, $Bn'''$ auftragen, jene von $A$ gegen $B$, diese von $B$ gegen $A$, und so dass die entsprechenden Längen $Am$, $Bn$; $Am'$, $Bn'$ u. s. w. stets im Verhältniss 1 : 2 stehen. (Fig. 130.) Denkt man die Theilpunkte $m$ mit $C$, die Theilpunkte $n$ mit $B$ durch gerade Linien verbunden, so entstehen zwei Strahlenbüschel von gleichem Doppelschnittverhältniss; vom Durchschnitt ihrer entsprechenden Strahlen wird eine durch $B$ und $C$ gehende Hyperbel beschrieben, welche in ihren drei übrigen Schnittpunkten mit dem Kreise die Theilpunkte des Bogens $AB$ nach der Forderung der Aufgabe bestimmt.

Fig. 130.



Diese Construction ist vielfachen Modificationen fähig durch die Freiheit, die man in der Wahl der Centra der beiden erzeugenden Strahlenbüschel hat; wir überlassen die Discussion derselben dem Leser.

Die angeführten Beispiele mögen hinreichen, um die Handhabung der ausgesprochenen Sätze zu erläutern.

426. Wir schliessen dem Vorigen einige Aufgaben an, in welchen die vorhergegangenen analytischen Ergebnisse verschiedentlich benutzt werden.

Wenn man in einer geraden Linie vier Punkte hat, und zu den drei Gruppen von Punkte-Paaren, welche aus ihnen gebildet werden können, diejenigen drei Punkte-Paare bestimmt, von denen jedes mit zweien der gegebenen Paare harmonisch ist, so bilden je zwei Paare dieser letzteren immer ein harmonisches System.

Denn bezeichnen wir die vier gegebenen Punkte durch $A, B$; $C, D$, ferner durch $E, F$ die beiden Punkte, welche den Paaren $A, B$; $C, D$, durch $G$ und $H$ die, welche den Paaren $A, C$; $B, D$ und durch $I$ und $K$ die, welche den Paaren $A, D$; $B, C$ gleichzeitig harmonisch sind, bezeichnen wir ferner durch die entsprechenden kleinen Buchstaben die Entfernungen dieser Punkte von einem festen Anfangspunkte in ihrer Graden, also

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c,$$

u. s. w. und betrachten wir nun die zwei Paare $E, F$; $G, H$. Die Bedingungen der Aufgabe fliessen leicht genug aus dem Werthe des harmonischen Verhältnisses von vier Punkten, z. B.

$$\frac{a-e}{e-b} : \frac{a-f}{f-b} = -1,$$

welches giebt

$$2(ab + ef) = (a + b)(e + f);$$

ebenso ergeben sich den Bedingungen der Aufgabe gemäss

$$2(ac + gh) = (a + c)(g + h),$$
$$2(cd + ef) = (c + d)(e + f),$$
$$2(bd + gh) = (b + d)(g + h).$$

Die Elimination von $a$ zwischen den zwei ersten und von $d$ zwischen den zwei letzten Gleichungen liefert die Resultate

$$2(g+h)(bc+ef)+2(e+f)(gh-bc)+(c-b)(g+h)(e+f)-4cgh$$
$$+4bef=o.$$
$$2(g+h)(bc+ef)+2(e+f)(gh-bc)+(b-c)(g+h)(e+f)-4bgh$$
$$+4cef=o.$$

Die Subtraction dieser Gleichungen giebt nach der Division mit $2(b-c)$

$$(g+h)(e+f)=2(gh+ef),$$

d. h. die vier Punkte $e, f, g, h$ bilden ein harmonisches System. Für die andern Paare ergiebt sich der Beweis ganz ebenso. Man hat in dieser Reihe von Punkten sechs involutorische Systeme, wie z. B. $A, B, C, D, G, H$; $A, B, C, D, I, K$ u. s. w.

427. Welches ist der Ort derjenigen Punkte, deren Verbindungslinien mit sechs festen Punkten in einer Ebene ein involutorisches Büschel bilden?

Wir haben zur Beantwortung dieser Frage nur die Bedingung auszudrücken, unter welcher die geraden Verbindungslinien dieser durch ihre Coordinaten $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; ..... $x_6, y_6$ gegebenen Punkte mit dem Punkt $x, y$ von irgend einer Transversale in einer involutorischen Punktereihe geschnitten werden. Wir wählen z. B. als solche Transversale die Abscissenachse und bezeichnen die Abstände der Schnittpunkte der einzelnen Strahlen des Büschels vom Anfangspunkt der Coordinaten respective durch $a_1, a_2, \ldots a_6$. Dann wird nach dem Vorigen die Involution durch die Relation

$$(a_1-a_4)(a_3-a_6)(a_5-a_2)+(a_2-a_3)(a_4-a_5)(a_6-a_1)=o$$

ausgedrückt, und wir haben die in ihr auftretenden Abschnitte durch die Coordinaten der Punkte zu ersetzen. Die gerade Linie, welche den Punkt $x_1, y_1$ mit $x, y$ und $a_1, o$ verbindet, ist durch

$$a_1(y_1-y)=xy_1-x_1y$$

repräsentirt, und somit

$$a_1=\frac{xy_1-x_1y}{y_1-y};$$

ebenso

$$a_2=\frac{xy_2-x_2y}{y_2-y},$$

u. s. w.

Daraus folgt

$$a_1-a_4=\frac{(xy_1-x_1y)(y_4-y)-(xy_4-x_4y)(y_1-y)}{(y_1-y)(y_4-y)},$$

welches in der Determinantenform

$$\frac{y}{(y_1 - y)(y_4 - y)} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_4, & y_4 \\ 1, & x_1, & y_1 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann.

Durch Bildung und Substitution der entsprechenden Werthe geht die obige Bedingungsgleichung der Involution in die folgende über:

$$\begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_4, & y_4 \\ 1, x_1, & y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_6, & y_6 \\ 1, x_3, & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_2, & y_2 \\ 1, x_5, & y_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_3, & y_3 \\ 1, x_2, & y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_4, & y_4 \\ 1, x_5, & y_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, x, & y \\ 1, x_1, & y_1 \\ 1, x_6, & y_6 \end{vmatrix} = o.$$

Man sieht, der fragliche Ort ist eine durch die gegebenen sechs Punkte gehende Curve dritter Ordnung.

428. Wenn wir die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ eines Dreiecks durch die Gleichungen

$$\alpha = o, \ \beta = o, \ \gamma = o$$

repräsentiren und demnach in

$$\alpha - \beta = o, \ \beta - \gamma = o, \ \gamma - \alpha = o$$

die Gleichungen der geraden Verbindungslinien eines Punktes $D$ seiner Ebene mit den Eckpunkten $C$, $A$, $B$ desselben ausdrücken, wenn wir ferner die Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit den entsprechenden Dreiecksseiten $a$, $b$, $c$ bestimmen und eine beliebige gerade Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

ziehen, welche den Seiten des Dreiecks $BC$, $CA$, $AB$ in den Punkten $a_1$, $b_1$, $c_1$ begegnet, so lässt sich immer eine zweite gerade Linie

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = o$$

so bestimmen, dass ihre Durchschnittspunkte $a_2$, $b_2$, $c_2$ mit den Seiten des Dreiecks mit jener und den Punkten $\alpha, \beta, \gamma$ eine Involution bestimmen, für welche die Eckpunkte des Dreiecks $A$, $B$, $C$ die Brennpunkte sind.

Wir beweisen dies und bestimmen zugleich die gerade Linie, deren Existenz der Satz behauptet, indem wir den Punkt $D$ als Scheitel von Strahlenbüscheln betrachten, welche durch die bezeichneten Punkte bestimmt werden, und für diese unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Dreiecks-Ecken als Brennpunkte die Bedingungen der Involution aufstellen. Eines dieser Büschel hat die Strahlen $Da_1$, $Da_2$, $Da$, $DB$, $DC$, die beiden letzteren als Brennstrahlen, und dieselben sind durch die Gleichungen

$$n(\gamma - \alpha) - m(\alpha - \beta) = o, \; n_1(\gamma - \alpha) - m_1(\alpha - \beta) = o,$$
$$(\gamma - \alpha) - (\alpha - \beta) = o, \; \gamma - \alpha = o, \; \alpha - \beta = o$$

dargestellt.

Demnach ist das Doppelschnittverhältniss der Strahlen $DB$, $DC$, $Da$, $Da_1$ durch

$$\frac{n}{m}$$

und das der Strahlen $DC$, $DB$, $Da$, $Da_2$ durch

$$\frac{m_1}{n_1}.$$

dargestellt, und es findet der ausgesprochene involutorische Zusammenhang statt, wenn man hat:

$$m m_1 = n n_1$$

Auf den beiden andern Dreiecksseiten ergeben sich durch die ganz analogen Betrachtungen die entsprechenden Bedingungen

$$n n_1 = l l_1 \text{ und } l l_1 = m m_1,$$

und der geraden Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

entspricht somit nach den Forderungen der Aufgabe die gerade Linie, welche durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{l} + \frac{\beta}{m} + \frac{n}{\gamma} = o$$

repräsentirt wird.

429. Man kann diesen Satz und seinen Beweis durch sehr einfache Betrachtungen, welche wieder mit den von uns viel gebrauchten Mitteln sehr leicht auf ihren analytischen Ausdruck zu bringen sind, auf den Satz von Desargues über die Involution bei dem einem Viereck umschriebenen Kegelschnitt (Art. 415.) zurückführen.

Wir behalten die vorigen Bezeichnungen bei und denken durch die Punkte $a$, $b$, $c$ den Kegelschnitt $S$ gelegt, welcher dem Dreieck $ABC$ eingeschrieben ist. Für die Existenz und Bestimmung dieses Kegelschnitts können wir zwar auf Art. 333 verweisen, wollen aber bemerken, dass man dieselbe auch wie folgt durch einige einfache Schlüsse an elementare Sätze anknüpfen kann: Sind $a'$, $b'$, $c'$ die in den Richtungen der Dreiecksseiten an $a$, $b$, $c$ unendlich nahen Punkte, so liegen die Eckpunkte der beiden Dreiecke $ABC$, $abc$ paarweise auf drei in einem Punkte $D$ zusammenlaufenden geraden Linien; in Folge dessen schneiden sich ihre entsprechenden Seiten $AB$ oder $cc'$ und $ab$, $AC$ oder $bb'$ und $ca$ und $BC$ oder $aa'$ und $bc$ in Punkten einer geraden Linie (Art. 60), und das Sechseck $aa'bb'cc'$ ist somit einem Kegelschnitt eingeschrieben.

Wenn man nun durch die Ecken des Dreiecks $ABC$ einen Kegelschnitt $S_1$ beschreibt, so besitzt derselbe mit dem betrachteten Kegelschnitt $S$ drei Systeme gemeinschaftlicher Sehnen — Gegenseitenpaare und Diagonalen des beiden zugleich eingeschriebenen Vierecks — von denen immer eines reell ist. Jedes dieser Systeme genügt dem Satze, welchen wir an die Spitze der Betrachtung stellten; denn ein solches System bildet mit den beiden Kegelschnitten $S$ und $S_1$ ein System von Kegelschnitten, welche demselben Viereck umschrieben sind. Jede Transversale, folglich auch z. B. jede Seite des Dreiecks $ABC$ schneidet dasselbe demnach in sechs involutorischen Punkten, und da in $a$, $b$, $c$ je ein Paar von conjugirten Punkten zusammenfallen, so sind diese die Brennpunkte der drei Involutionen.

Da der Kegelschnitt $S_1$, als nur dem Dreieck $ABC$ umschrieben, unbestimmt ist, so hat die Aufgabe der Construction solcher Geraden unendlich viele Auflösungen; eine der beiden geraden Linien kann willkürlich festgesetzt werden, dann ist der Kegelschnitt $S_1$ durch die Ecken des Dreiecks und die beiden Punkte bestimmt, welche jene gerade Linie mit dem Kegelschnitt $S$ gemein hat.

Gäbe man den Punkt, in welchem die beiden zu construirenden Geraden sich schneiden, so bestimmt sich die Aufgabe durch die Bemerkung, dass dieser Punkt eine der Ecken des sich selbst conjugirten Dreiecks sein muss, welches beide Kegelschnitte besitzen, und dass er demnach in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare hat.

430. Man soll die Bedingung entwickeln, unter welcher die gerade Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

von den Kegelschnitten $S_1 = o$, $S_2 = o$ in vier harmonischen Punkten geschnitten wird und die Enveloppe dieser Geraden angeben.

Wir bestimmen die der geraden Linie

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = o$$

und dem Kegelschnitt $S_1 = o$ gemeinschaftlichen Punkte, indem wir zwischen beiden Gleichungen $\gamma$ eliminiren; daraus entspringt eine in $\alpha$ und $\beta$ homogene Gleichung $T_1 = o$ und es ist demnach

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = \frac{dS_1}{d\alpha} - \frac{l}{n}\frac{dS_1}{d\gamma}, \quad \frac{dT_1}{d\beta} = \frac{dS_1}{d\beta} - \frac{m}{n}\frac{dS_1}{d\gamma}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{dT_2}{d\alpha} = \frac{dS_2}{d\alpha} - \frac{l}{n}\frac{dS_2}{d\gamma}, \quad \frac{dT_2}{d\beta} = \frac{dS_2}{d\beta} - \frac{m}{n}\frac{dS_2}{d\gamma}.$$

Folglich ist

$$n\left(\frac{dT_1}{d\alpha}\frac{dT_2}{d\beta} - \frac{dT_2}{d\alpha}\frac{dT_1}{d\beta}\right) = l\left(\frac{dS_1}{d\beta}\frac{dS_2}{d\gamma} - \frac{dS_2}{d\beta}\frac{dS_1}{d\gamma}\right)$$
$$+ m\left(\frac{dS_1}{d\gamma}\frac{dS_2}{d\alpha} - \frac{dS_2}{d\gamma}\frac{dS_1}{d\alpha}\right) + n\left(\frac{dS_1}{d\alpha}\frac{dS_2}{d\beta} - \frac{dS_2}{d\alpha}\frac{dS_1}{d\beta}\right).$$

Die gesuchte Bedingung kann demgemäss in der Form

$$\left[l\left(\frac{d}{d\beta_1}\cdot\frac{d}{d\gamma_2} - \frac{d}{d\beta_2}\cdot\frac{d}{d\gamma_1}\right) + m\left(\frac{d}{d\gamma_1}\frac{d}{d\alpha_2} - \frac{d}{d\gamma_2}\frac{d}{d\alpha_1}\right)\right.$$
$$\left. + n\left(\frac{d}{d\alpha_1}\cdot\frac{d}{d\beta_2} - \frac{d}{d\alpha_2}\cdot\frac{d}{d\beta_1}\right)\right]^2 S_1 S_2 = o$$

geschrieben werden, und wenn man diese symbolische Gleichung entwickelt, indem man die Kegelschnittsgleichungen $S_1 = o$, $S_2 = o$ in der allgemeinen Form

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = o,$$
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = o$$

gegeben voraussetzt, so findet man

$$l^2(a'A'' + A'a'' - 2bB) + m^2(a''A + A''a - 2b'B') + n^2(aA' + Aa' - 2b''B'')$$
$$+ 2mn(b'B'' + b''B' - aB - Ab) + 2nl(b''B + bB'' - a'B' - A'b')$$
$$+ lm(bB' + b'B - a''B'' - A''b) = o.$$

Sonach sind die Grössen $l, m, n$ durch eine Relation des zweiten Grades mit einander verbunden, und die gerade Linie $l\alpha + m\beta + n\gamma = o$ umhüllt demnach unter der geforderten Bedingung einen Kegelschnitt. Die Gleichung desselben wird gefunden, indem man die reciproke Polare des Kegelschnitts $\Phi = o$ bildet, welcher in der 2. Aufg. des Art. 400 betrachtet wurde; sie ist

$$\Theta' S_1 + \Theta S_2 - F = o.$$

431. **Welches ist der Ort derjenigen Punkte, für die das Büschel der von ihnen an die Kegelschnitte $S_1 = o$, $S_2 = o$ gelegten Tangenten ein harmonisches Büschel ist?**

Die Gleichung der geraden Linie, welche einen festen Punkt $\alpha, \beta, \gamma$ mit dem Punkte $x', y', z'$ verbindet, ist bekanntlich

$$x(\beta z' - \gamma y') + y(\gamma x' - \alpha z') + z(\alpha y' - \beta x') = o.$$

Wir haben früher (Art. 365) die Bedingung aufgestellt, unter welcher die gerade Linie $lx + my + nz = o$ den Kegelschnitt $S_1 = o$ berührt und brauchen jetzt nur in dieselbe an Stelle der Grössen $l, m, n$ die Binome $\beta z' - \gamma y'$, $\gamma x' - \alpha z'$, $\alpha y' - \beta x'$ zu setzen, um die Gleichung des Tangentenpaares zu erhalten, welches vom Punkt $\alpha, \beta, \gamma$ an den Kegelschnitt $S_1 = o$ geht. (Vergl. auch Art. 400, Aufg. 6.) In Art. 365 ist jene Gleichung durch das Symbol $\Theta$ bezeichnet worden; wir wollen durch $\Theta'$ und $\Theta''$ das, was dieser Ausdruck für die beiden Kegelschnitte $S_1 = o$, $S_2 = o$ resp. wird, und durch $\Theta_1$ und $\Theta_2$ das bezeichnen, was aus derselben durch die vorerwähnte Substitution und respective mit den Coefficienten der Kegelschnittsgleichungen $S_1 = o$, $S_2 = o$ wird.

Alsdann hat man die Gleichungen

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = \gamma \frac{d\Theta'}{dm} - \beta \frac{d\Theta'}{dn}, \quad \frac{d\Theta_1}{dy} = \alpha \frac{d\Theta'}{dn} - \gamma \frac{d\Theta'}{dl};$$

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = \gamma \frac{d\Theta''}{dm} - \beta \frac{d\Theta'}{dn}, \quad \frac{d\Theta_2}{dy} = \alpha \frac{d\Theta''}{dn} - \gamma \frac{d\Theta''}{dl}.$$

und demgemäss

$$\gamma\left(\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}\right)\Theta_1\,\Theta_2 = \left[\alpha\left(\frac{d}{dm_1}\frac{d}{dn_2} - \frac{d}{dm_2}\frac{d}{dn_1}\right)\right.$$
$$\left. + \beta\left(\frac{d}{dn_1}\frac{d}{dl_2} - \frac{d}{dn_2}\frac{d}{dl_1}\right) + \gamma\left(\frac{d}{dl_1}\frac{d}{dm_2} - \frac{d}{dl_2}\frac{d}{dm_1}\right)\right]^2 \Theta'\,\Theta''.$$

Mit Hilfe der im Art. 400 eingeführten Abkürzungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$ u. s. w. für die Grössen $a'a'' - b^2$, $a''a - b'^2$, $aa' - b''^2$ $b'b'' - ab$ u. s. w., und von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_1''$ $\mathfrak{B}_1$ u. s. w. für die entsprechenden Coefficientenverbindungen der Gleichung des zweiten Kegelschnittes erhalten wir endlich für die **Gleichung des Ortes der Punkte, an welchen die Tangenten der Kegelschnitte $S_1 = o$, $S_2 = o$ harmonische Büschel bilden,**

$$\alpha^2(\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'' + \mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}'' - 2\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1) + \beta^2(\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1') + \ldots = o$$

oder

$$F = o.$$

Wir geben dieselbe Untersuchung in einer einfacheren Form, indem wir voraussetzen, dass beide Kegelschnitte auf das gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck bezogen seien; alsdann erscheinen bekanntlich ihre Gleichungen in der canonischen Form

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = o, \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = o,$$

die Grössen $b, b', b'', B, B', B''$ und die aus ihnen abgeleiteten $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_1''$ verschwinden, während $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_1''$ sich auf die einfachen Formen $a'a'', a''a, aa', A'A'', A''A, AA'$ reduciren. Man kann die in der vorigen Entwicklung dadurch eintretenden Vereinfachungen leicht übersehen.

Nach Art. 107 kann aber die Gleichung der von einem Punkte $x', y', z'$ an einen jener Kegelschnitte gezogenen Tangenten durch

$$(ax^2 + a'y^2 + a''z^2)(ax'^2 + a'y'^2 + a''z'^2) = (axx' + a'yy' + a''zz')^2$$

ausgedrückt werden; dem andern Kegelschnitt entspricht die ganz ebenso gebildete Gleichung

$$(Ax^2 + A'y^2 + A''z^2)(Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2) = (Axx' + A'yy' + A''zz')^2.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $z = o$, so bildet man die Gleichungen der zwei Punktepaare, welche jene Tangenten in der durch $z = o$ ausgedrückten Seite des Fundamental-Dreiecks bestimmen, und hat die Bedingung aufzustellen, unter welcher diese vier Punkte ein harmonisches System bilden, endlich aber in derselben $x', y'\, z'$ als veränderliche Grössen zu betrachten. Jene Gleichungen sind

$$a(a'y'^2 + a''z'^2)x^2 - 2aa'x'y'xy + a'(ax'^2 + a''z'^2)y^2 = o,$$
$$A(A'y'^2 + A''z'^2)x^2 - 2AA'x'y'xy + A'(Ax'^2 + A''z'^2)y^2 = o;$$

für die geforderte Bedingung erhält man daher:

$$aA'(a'y^2 + a''z^2)(Ax^2 + A''z^2) + a'A(ax^2 + a''z^2)(A'y^2 + A''z^2) = 2aa'AA'x^2y^2,$$

oder

$$aA(a'A'' + a''A')x^2 + a'A'(aA'' + a''A)y^2 + a''A''(aA' + a'A)z^2 = o.$$

Man erkennt die Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Form, welche wir der Gleichung $F = o$ in der Aufg. 4 des Art. 400 gegeben haben. Jener Kegelschnitt $F = o$, welcher durch die acht Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte geht, und von dessen interessanten Beziehungen zu den gegebenen Kegelschnitten wir schon mehrfach gesprochen haben, ist also auch der Ort derjenigen Punkte, für welche die Tangenten an die gegebenen Kegelschnitte ein harmonisches Büschel bilden.

Man kann durch ähnliche Betrachtungen finden, dass die Gleichung
$$F^2 = k S_1 S_2$$
den Ort derjenigen Punkte darstellt, welchen Tangentenbüschel von gegebenem unveränderlichen Doppelschnittverhältniss entsprechen; dieser Ort ist somit eine Curve vierten Grades.

Wir können hier nur andeuten, dass für ein System dreier Kegelschnitte sich analoge Fragen über involutorische Punktereihen und Strahlenbüschel stellen lassen, nämlich: Welches ist die Bedingung, unter der eine gerade Linie drei gegebene Kegelschnitte in Punkten eines involutorischen Systems schneidet, und welches ist die Enveloppe der so bestimmten Geraden? Und: Welches ist der Ort derjenigen Punkte, für die die drei Paare der an jene Kegelschnitte gelegten Tangenten ein involutorisches Büschel bilden?

Auch für diese Fragen liefert die Algebra der linearen Transformationen die allgemeinen und einfachen Antworten, aber sie führen in dieser wie in der Geometrie über den zweiten Grad hinaus, indem sie eine Curve dritter Klasse und eine Curve dritter Ordnung liefern, und es muss hier somit bei dieser Andeutung bewenden. Wir bemerken nur, dass die Frage nach der Enveloppe der involutorisch geschnittenen Geraden eine Contravariante der gegebenen Kegelschnitte als Antwort bringt, und dass beide Untersuchungen für die Theorie der Curven dritter Ordnung und Klasse von grosser Wichtigkeit sind.

## III. Die Methode der Projectionen*) und die geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades**).

432. Wir haben schon mehrmals Gelegenheit gehabt, die Vortheile anzudeuten, welche oftmals durch die Deduction der

*) Diese Methode ist M. Poncelet's Erfindung. Siehe dessen: Traité des Propriétés projectives 1822; ein Werk, dessen Studium wir durch den hier gegebenen Abriss zu befördern wünschen.

**) Die Theorie der geometrischen Verwandtschaften in ihrer Allgemeinheit ist die Schöpfung des Herrn Möbius; siehe dessen barycentrischen speciellen Satze erlangt werden, die in einem allgemeineren Theorem enthalten sind; in dem Folgenden beabsichtigen wir aber eine Methode in aller Kürze darzulegen, welche uns den andern viel wichtigeren Dienst leistet, uns erkennen zu lassen, welcher allgemeine Satz einem gegebenen speciellen entspricht und jenen aus diesem abzuleiten.

Man kann zweifeln, ob die Methode der Projectionen in einem Abriss der analytischen Planimetrie Aufnahme finden dürfe, weil sie einige Kenntnisse aus der Geometrie dreier Dimensionen voraussetzt; es ist die Idee der geometrischen Verwandtschaften, welche diesen Zweifel endgültig zu beseitigen vermag; zunächst halten wir ihre Darlegung an diesem Orte deshalb für unverfänglich, weil nur einige der einfachsten Sätze aus der Geometrie des Raums zu ihrer Begründung erforderlich sind, und die Anwendungen der Methode selbst keinerlei weitere Entwicklungen stereometrischer Art bedingen.

Diese Begründung aber kann Niemandem eine Schwierigkeit darbieten, der die Elemente der räumlichen Geometrie auch nur bis zur Theorie der dreiseitigen Ecke oder der sphärischen Trigonometrie sich zu eigen gemacht hat.

433. Wenn alle Punkte einer Figur mit irgend einem festen Punkte im Raume ($O$) durch gerade Linien verbunden werden, so bestimmen diese Linien einen Kegel, als dessen Spitze der Punkt $O$ bezeichnet wird; die Durchschnittslinie dieses Kegels mit einer beliebigen Ebene bildet eine Figur, die man die Projection der gegebenen Figur auf die Ebene nennt. Die Ebene, durch welche der Kegel so geschnitten wird, heisst die Projectionsebene. Man bezeichnet den Kegel dann auch als den projicirenden Kegel und seine Spitze als das Centrum der Projection. Jedem Punkte in der einen Figur entspricht ein Punkt in der andern. Denn wenn ein beliebiger Punkt $A$ mit der Spitze $O$ durch eine gerade Linie verbunden wird, so ist der Punkt $a$, in welchem diese die Projectionsebene durchschneidet, die Projection des gegebenen Punktes $A$ auf diese Ebene.

---

Calcul 1828. Für die analytische Ausbildung derselben nennen wir das Werk von M. Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen u. s. w. 1833.

Eine gerade Linie wird immer als gerade Linie projicirt. Denn indem man alle Punkte der geraden Linie mit dem Centrum der Projection durch gerade Linien verbindet, erhält man eine Ebene, welche durch ihren Durchschnitt mit der Projectionsebene die Projection der gegebenen Geraden bestimmt. Diese Ebene wird als die projicirende Ebene der geraden Linie bezeichnet. Wenn irgend eine Anzahl von Punkten in der einen Figur in gerader Linie liegen, so liegen auch die entsprechenden Punkte der andern Figur in einer geraden Linie; wenn eine Anzahl gerader Linien in der einen Figur durch denselben Punkt hindurchgehen, so schneiden sich auch die entsprechenden geraden Linien der andern in einem Punkte, nämlich dem entsprechenden Punkte jenes ersteren.

431. Jede ebene Curve wird in eine andere Curve desselben Grades projicirt.

Denn wenn die gegebene Curve durch eine gerade Linie in einer Anzahl von Punkten $A, B, C, D \ldots$ geschnitten wird, so wird ihre Projection durch die Projection der geraden Linie in den entsprechenden Punkten $a, b, c, d \ldots$ geschnitten, deren Anzahl mit derjenigen der ersteren übereinstimmen muss. Aber der Grad einer Curve wird durch die Zahl von Punkten geometrisch bestimmt, welche sie mit einer geraden Linie gemein haben kann.

Wir brauchen nur anzudeuten, dass auch die Klasse einer Curve durch Projection nicht geändert werden kann.

Wenn unter den Punkten, welche die Curve mit einer geraden Linie, oder unter den Tangenten, welche sie mit einem Punkte gemein hat, neben reellen auch imaginäre sind, so bleibt die Zahl der reellen und imaginären Punkte und Tangenten durch Projection ungeändert.

Wenn zwei Curven sich durchschneiden, so schneiden sich ihre Projectionen in derselben Anzahl von Punkten, und die Zahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven bleibt in der Projection derselben gleichfalls ungeändert. Reellen Durchschnittspunkten und gemeinsamen Tangenten entsprechen reelle, imaginären aber imaginäre.

Jede Tangente der einen Curve wird in eine Tangente der andern Curve projicirt. Denn jede gerade Linie zwischen den Punkten $A, B$ der einen Curve wird als eine gerade Linie $ab$ projicirt, welche die entsprechenden Punkte ihrer Projection mit einander verbindet. Wenn aber die Punkte $A, B$ in einen einzigen Punkt zusammenfallen, so fallen auch $a, b$ zusammen und die gerade Linie $ab$ ist eine Tangente der Projection der Curve.

Wenn zwei Curven einander in einer Anzahl von Punkten berühren, so berühren ihre Projectionen einander in ebenso viel, nämlich in den entsprechenden Punkten.

435. Wenn eine durch das Centrum der Projection parallel zur Projectionsebene gelegte Ebene die Ebene des Originalsystems in einer geraden Linie $AB$ durchneidet, so projicirt sich jedes Büschel geradliniger Strahlen im Originalsystem, welches seinen Scheitel in dieser geraden Linie $AB$ hat, in ein System von Parallellinien in der Projectionsebene. Denn eine gerade Linie, welche vom Centrum der Projection nach einem beliebigen Punkte jener Geraden $AB$ gezogen wird, begegnet der Projectionsebene erst in unendlicher Entfernung, und insofern jener Punkt Durchschnittspunkt von zwei oder mehreren geraden Linien ist, müssen sich diese als solche gerade Linien projiciren, deren gemeinschaftlicher Punkt in unendlicher Entfernung liegt.

Umgekehrt wird jedes System von parallelen geraden Linien in der Originalebene in ein solches Büschel gerader Linien projicirt, welches seinen Scheitel in einem Punkte der geraden Linie $DF$ hat, in der eine durch das Centrum der Projection parallel zur Originalebene gelegte Ebene die Projectionsebene schneidet.

So führt uns die Methode der Projectionen ganz naturgemäss zu dem Schlusse, dass ein beliebiges System von Parallellinien als ein durch einen unendlich entfernten Punkt gehendes Büschel betrachtet werden kann, denn die Projectionen solcher geraden Linien auf eine beliebige Ebene gehen durch einen und denselben endlich entfernten Punkt; sie lehrt uns ebenso, dass alle unendlich entfernten Punkte in einer Ebene als in einer geraden Linie gelegen angesehen werden können, denn wir haben gezeigt, dass die Projectionen aller der Punkte, in welchen Parallellinien sich schneiden, in der geraden Linie *DF* in der Projectionsebene liegen; wir hätten das Nämliche auch aus dem Umstande schliessen können, dass jede gerade Linie nur einen Punkt in unendlicher Entfernung haben kann — wir schliessen uns dem üblichen Sprachgebrauch genau an, indem wir denselben als ihre Richtung bezeichnen — und dass somit die unendlich entfernten Punkte einer Ebene nur eine Linie ersten Grades, d. h. eine gerade Linie bilden können.

Wir bemerken endlich, dass die Durchschnittlinie der Projectionsebene mit der Ebene der Figur zugleich der Ort der Durchschnittspunkte der geraden Linien der Figur mit ihren respectiven Projectionen ist.

436. Wenn irgend eine Eigenschaft, die sich nicht auf die Grösse von geradlinigen Strecken oder von Winkeln, sondern nur auf die Lage gerader Linien als durch gewisse Punkte gehend oder gewisse Curven berührend, oder auf die Lage von Punkten u. s. w. bezieht, für eine gegebene Curve wahr ist, so bleibt diese Eigenschaft für alle die Curven gültig, in welche die gegebene projicirt werden kann. Wir erkennen sofort als einen Satz dieser Art den folgenden: Wenn durch einen beliebigen festen Punkt in der Ebene eines Kreises eine Sehne gezogen wird, so schneiden sich die in den Endpunkten derselben an ihn gelegten Tangenten in einer festen geraden Linie.

Da wir nun beweisen werden, dass jede Curve des zweiten Grades in einen Kreis projicirt werden kann, so zeigt die Methode der Projectionen unmittelbar, dass die Eigenschaften der Pole und Polaren nicht nur für den Kreis, sondern auch für alle Kegelschnitte wahr sind.

Auch die Sätze von Pascal und Brianchon sind Eigenschaften derselben Art, und es ist daher hinreichend, sie für den Fall des Kreises zu beweisen, um zu wissen, dass sie für alle Kegelschnitte wahr sind.

437. Eigenschaften dieser Art, welche, wenn sie für irgend eine Figur wahr sind, auch für die Projection derselben gelten.

heissen *projectivische Eigenschaften*. Zu diesen Eigenschaften gehören ausser der Klasse derjenigen, welche im vorigen Artikel bezeichnet worden sind, auch einige solche, welche sich auf die Grösse geradliniger Strecken und Winkel beziehen; wir wissen z. B. dass das Doppelschnittverhältniss von vier Punkten in einer geraden Linie $(ABCD)$, da es durch das Doppelschnittverhältniss des Büschels $(O.\ ABCD)$ am Centrum der Projection gemessen wird, mit dem der vier Punkte $(abcd)$ übereinstimmen muss, in welchen dies Büschel durch eine beliebige Transversale geschnitten wird. *Doppelschnittverhältnisse werden durch Projection nicht geändert.*

Oder, wenn zwischen den durch eine beliebige Anzahl von Punkten in einer geraden Linie bestimmten geradlinigen Strecken eine Gleichung von der Form

$$AB \,.\, CD \,.\, EF + k \,.\, AC \,.\, BE \,.\, DF + l \,.\, AD \,.\, CE \,.\, BF + \ldots = o$$

besteht, in welcher jedes Glied die nämlichen Punkte nur in verschiedener Ordnung enthält, so ist diese Relation projectivisch. Denn nach Art. 354 kann man für $AB$

$$\frac{OA \,.\, OB \sin AOB}{OP},$$

und für die übrigen Strecken entsprechende Ausdrücke substituiren, und die Gleichung enthält nach dieser Substitution in allen Gliedern das Product $OA.\ OB.\ OC.\ OD.\ OE.\ OF$ im Zähler und die Grösse $OP^3$ im Nenner; durch Division mit diesen Factoren wird sie daher auf eine Relation zwischen den Sinus der am Punkte $O$ gebildeten Winkel zurückgeführt und ist demnach projectivisch.

Auch ist leicht zu erkennen, dass *die Punkte $A, B, C, D, E, F$ nicht in einer geraden Linie zu liegen brauchen, um diese Projectivität zu begründen*; wenn die Senkrechte $OP$ nicht für alle die in der Relation auftretenden Segmente die nämliche ist, so ist nur nöthig, dass dieselben so geordnet sind, dass in jedem Gliede der Gleichung im Nenner das nämliche Product solcher zugehörigen Perpendikel $OP.\ OP'.\ OP'' \ldots$ auftritt. Als ein Beispiel dieser Art erwähnen wir den Satz: *Wenn gerade Linien, welche von den Ecken eines Dreiecks $ABC$ nach demselben Punkte seiner Ebene gezogen werden, die Gegenseiten desselben in den Punkten $a, b, c$ durchschneiden, so ist $Ab.\ Bc.\ Ca = Ac.\ Ba.\ Cb$.*

Weil diese Relation von der eben besprochenen Art ist, so reicht es hin, sie für irgend eine Projection des Dreiecks $ABC$ zu beweisen; machen wir für dieselbe die Voraussetzung, dass der Punkt $C$ in unendlicher Entfernung projicirt sei, so werden die geraden Linien $AC$, $BC$, $Cc$ einander parallel und die Relation wird

$$Ab.Bc = Ac.Ba,$$

deren Wahrheit ohne Weiteres ersichtlich ist.

438. Offenbar reicht es zum Beweise solcher projectivischen Eigenschaften von Figuren hin, für die einfachste derjenigen Figuren den Beweis zu liefern, in welche die gegebene projicirt werden kann; z. B. was oft vorkommt, für eine solche, in welcher eine gewisse gerade Linie der Figur in unendlicher Entfernung erscheint.

Wenn z. B. gefordert wäre, die harmonischen Eigenschaften eines vollständigen Vierecks $ABCD$ zu untersuchen, dessen Gegenseitenpaare sich in $E$ und $F$ und dessen Diagonalen sich in $G$ durchschneiden, so verbinden wir alle Punkte dieser Figur mit dem zum Centrum der Projection gewählten Punkte $O$ im Raume durch gerade Linien und schneiden die Verbindungslinien durch eine zur Ebene $OEF$ parallele Ebene, so dass $EF$ in unendlicher Entfernung projicirt erscheint; die Projection $abcd$ des Vierecks ist dann ein Parallelogramm, weil die Durchschnittspunkte seiner Gegenseitenpaare in unendlicher Entfernung liegen. Jedes Viereck kann demnach in ein Parallelogramm projicirt werden. Da nun die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren, so bestimmen die Endpunkte, der Mittelpunkt und der unendlich entfernte Punkt einer jeden, als in welchem sie der geraden Linie $ef$ begegnet, eine harmonische Theilung, und man schliesst aus der projectivischen Natur dieser Relation, dass in jedem Viereck eine Diagonale ($AC$) durch die andre (in $G$) und durch die gerade Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der Gegenseiten ($E$, $F$) harmonisch getheilt wird.

Oder: Wenn zwei Dreiecke $ABC$, $A'B'C'$ so gelegen sind, dass die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten $AB$, $A'B'$; $BC$, $B'C'$; $CA$, $C'A'$ in einer geraden Linie liegen, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken $AA'$, $BB'$, $CC'$ in einem Punkte.

Der Satz bedarf keines Beweises mehr, wenn man, wie es seine projectivische Natur erlaubt, die Figur, auf welche er sich bezieht, so projicirt, dass die gerade Linie, in welcher die entsprechenden Seiten beider Dreiecke sich schneiden, in unendlicher Entfernung erscheint; denn er geht alsdann in den einfachen Ausdruck der Aehnlichkeit und ähnlichen Lage beider Dreiecke über: Wenn in zwei Dreiecken *abc*, *a′b′c′* die Seiten des einen den Seiten des andern parallel sind, so schneiden sich die geraden Verbindungslinien der entsprechenden Ecken in einem Punkte; welcher einfach aus der Bemerkung hervorgeht, dass die geraden Linien *aa′* und *bb′* beide die Linie *cc′* in dem nämlichen Verhältniss schneiden.

439. Ehe wir die Methode der Projectionen in Beispielen auf Curven des zweiten Grades anzuwenden gedenken, wollen wir, specieller als es in der Feststellung ihrer Grundsätze geschehen konnte, die Natur der von einer beliebigen Ebene in einem Kegel über circularer Basis gebildeten Schnittcurve untersuchen.

Wir haben bis jetzt nur gezeigt, dass die Projection eines Kreises eine Curve zweiten Grades sein müsse, und beabsichtigen nun zuerst, darzulegen, dass derselbe Kreis in einen Kegelschnitt von jeder der drei Hauptarten dieser Curven projicirt werden kann.

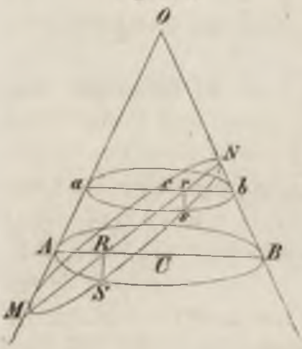
Dazu beweisen wir zuerst, dass jede Curve auf einer zu ihrer eignen Ebene parallelen Ebene als eine ähnliche Curve projicirt erscheint. Denn wenn wir in der Ebene der einen Curve einen Punkt $A$ und in der Ebene der andern Curve den entsprechenden Punkt $a$ annehmen und von ihnen nach einem beliebigen Paar anderer entsprechender Punkte $B$, $b$ Radien vectoren ziehen, so folgt aus den ähnlichen Dreiecken $OAB$ und $Oab$ die Verhältnissgleichheit $OA : Oa = AB : ab$, und weil jeder Radius vector der einen Curve zu dem entsprechenden Radius vector der andern in dem nämlichen constanten Verhältniss $OA : Oa$ steht und die entsprechenden Winkel übereinstimmen, so sind die beiden Curven ähnlich. (Art. 236.) Jeder über einer circularen Basis stehende Kegel wird durch eine Ebene, welche seiner Basis parallel ist, in einem Kreise geschnitten. Wenn wir die entsprechenden Punkte $A$, $a$ als die Mittelpunkte der beiden Curven denken, so beweist das Vorhergehende die gegenwärtige Behauptung.

440. **Jeder ebene Schnitt eines Kegels über kreisförmiger Basis ist eine Curve des zweiten Grades.**

Ein Kegel dieser Art oder ein Kegel des zweiten Grades heisst *gerade*, wenn die gerade Verbindungslinie seiner Spitze mit dem Centrum des Kreises, welcher ihm zur Basis dient, auf der Ebene dieses Kreises senkrecht ist; diese Linie selbst heisst alsdann die *Achse* des Kegels. Wenn dieselbe auf der Ebene der Basis nicht senkrecht steht, so wird der Kegel als *schief* bezeichnet.

Obgleich die Untersuchung der Schnitte des schiefen Kegels mit derjenigen der Schnitte des geraden Kegels vollkommen übereinstimmt, so wollen wir sie doch getrennt führen, um die Schwierigkeiten, welche in der richtigen Auffassung räumlicher Figuren liegen können, durch die vorherige Betrachtung der einfacheren Figur zu vermindern, welche dem Falle des geraden Kegels entspricht.

Fig. 131.




Man lege eine Ebene $OAB$ (Fig. 131) durch die Achse $OC$ des Kegels senkrecht zur Schnittebene und betrachte sie als die Ebene der Zeichnung; die Schnittebene $MSsN$ steht dann ebensowohl wie die Basisebene $ASB$ senkrecht zur Ebene der Zeichnung, und es ist ebenso mit der geraden Linie $RS$, in der sich beide letzt bezeichnete Ebenen schneiden.

Wir setzen alsdann zuerst voraus, dass die gerade Linie $MN$, in welcher die Schnittebene die Ebene $OAB$ schneidet, den beiden Seiten $OA$ und $OB$ auf derselben Seite des Scheitels begegnet, wie die Figur es angiebt. Durch irgend einen Punkt $s$ der Schnittcurve legen wir eine zur Basis parallele Ebene und erhalten dadurch nach Euklid III. 35 für das Quadrat der Ordinate des Kreises

$$RS^2 = AR \,.\, RB,$$

und ebenso

$$rs^2 = ar \,.\, rb.$$

Wenn man aber die ähnlichen Dreiecke $ARM$ und $arM$, $BRN$ und $brN$ betrachtet, so folgt

$$AR \,.\, RB : MR \,.\, RN = ar \,.\, rb : Mr \,.\, rN,$$

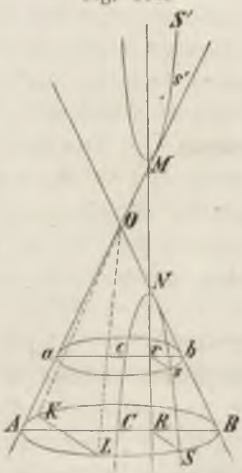
und damit

$$RS^2 : rs^2 = MR \,.\, RN : Mr \,.\, rN.$$

Die Schnittcurve $MSsN$ besitzt demnach die Eigenschaft, dass das Quadrat einer beliebigen Ordinate $rs$ zu dem Rechteck aus den von ihr in der Linie $MN$ bestimmten Abschnitten in dem constanten Verhältniss $RS^2 : MR.\, RN$ steht. Nach Art. 109 ist der betrachtete Kegelschnitt eine Ellipse, für welche $MN$ die Hauptachse ist und deren kleine Achse sich aus der Bemerkung bestimmt, dass ihr Quadrat zu $MN^2$ in dem gegebenen Verhältniss $RS^2 : MR.\, RN$ stehen muss.

Wir nehmen zweitens an (Fig. 132), eine der Seiten $OA$ werde von der geraden Linie $MN$ erst in der Verlängerung geschnitten. Der vorige Beweis bleibt völlig unverändert, nur in dem Endergebniss desselben tritt die Veränderung ein, dass nun das constante Verhältniss zwischen dem Quadrat der Ordinate $rs$ und dem Rechteck $Mr.rN$ aus den Abschnitten stattfindet, welche ein äusserer Theilpunkt in der Strecke $MN$ bestimmt. Die Schnittcurve ist in diesem Falle, wie leicht zu erkennen ist, eine Hyperbel, welche aus den beiden Aesten $NsS$ und $Ms'S'$ besteht.

Fig. 132.

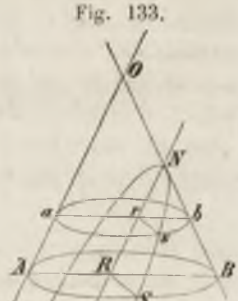


Wenn endlich drittens (Fig. 133) die gerade Linie $MN$ zu einer der Seiten parallel ist, so ist, wegen $AR = ar$ und $RB : rb = RN : rN$, das mit dem Rechteck $ar.rb$ gleiche Quadrat der Ordinate $rs$ zu der Abscisse $rN$ in dem constanten Verhältniss

$RS^2 : RN$ oder $AR.RB : RN$.

Demnach ist die Schnittcurve in diesem Falle eine Parabel*).

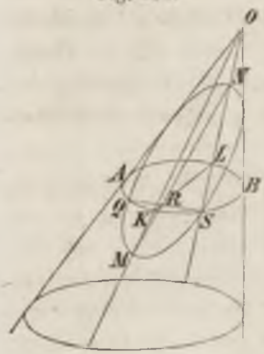
Fig. 133.



*) In der Geometrie der Alten betrachtete man bis auf Apollonius (250 v. Chr.) die Kegelschnitte nur am geraden Kegel und nur unter der Voraussetzung, dass die Schnittebene zu einer Kegelseite (der einen Seite des Ach-

441. Wir lassen hiernach den **Beweis für die Schnitte des schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis** folgen (Fig. 134).

Fig. 134.




Die Ebene der Zeichnung sei durch die Spitze des Kegels $O$ und den Mittelpunkt $C$ des Basiskreises senkrecht zur Ebene desselben gelegt; $QS$ sei die gerade Durchschnittslinie der Schnittebene mit der Ebene des Kreises $AQSB$; $LK$ der die Sehne $QS$ halbirende Durchmesser und $MN$ die gerade Linie, welche die durch ihn und die Kegelspitze gelegte Ebene mit der Schnittebene gemein hat. Mit diesen Voraussetzungen entwickelt sich der Beweis ganz wie vorher: Das Quadrat der Ordinate $RS$ ist dem Rechteck $LR.RK$ gleich, und wenn wir wie vorher eine zur Basis parallele Ebene einführen, so ist das Quadrat der ihr angehörigen Ordinate $rs$ gleich dem entsprechenden Rechteck $lr.rk$; wir beweisen sodann aus den ähnlichen Dreiecken $KRM$, $krM$ und $LRN$, $lrN$ in der Ebene $OLK$ ebenso wie in dem Falle des geraden Kegels, dass das Verhältniss der Quadrate $RS^2 : rs^2$ mit dem Verhältniss der Rechtecke identisch sei, welche aus den durch den Fusspunkt der Ordinate bestimmten Abschnitten von $MN$ gebildet werden; und dass demnach die Schnittcurve ein Kegelschnitt ist, für welchen $MN$ der die Sehne $QS$ halbirende Durchmesser ist, nämlich speciell eine Ellipse, wenn $MN$ die geraden Linien $OL$ und $OK$ auf derselben Seite der Kegelspitze schneidet, eine Hyperbel, wenn diese Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der Spitze liegen, und eine Parabel, wenn einer derselben unendlich entfernt ist.

---

sendreiecks) senkrecht sei, d. i. dass $MN$ senkrecht auf $OB$. Darnach wurdendie Kegelschnitte eingetheilt in Schnitte des rechtwinkligen, spitz- und stumpfwinkligen Kegels und nach Eutochius, dem Commentator des Apollinius wurde die Schnittcurve Parabel, Ellipse oder Hyperbel genannt, je nachdem und weil der Winkel des Kegels gleich, kleiner oder grösser als ein rechter Winkel war. Schon Archimedes kannte die Namen Parabel und Ellipse. Apollonius war es aber, welcher zuerst bewies, dass alle drei Kegelschnitte aus dem nämlichen Kegel geschnitten werden können und der, ebenso wie Pappus ihnen die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel aus dem im Artikel 196 angegebenen Grunde beilegte.

Die in dem Beweise gemachte Voraussetzung, dass die kreisförmige Basis reelle Punkte mit der Schnittcurve gemein habe, ist in jedem Falle statthaft, weil jeder der Kreise, welche die der Basis parallelen Ebenen in der Kegelfläche bestimmen, als Basis betrachtet werden kann.

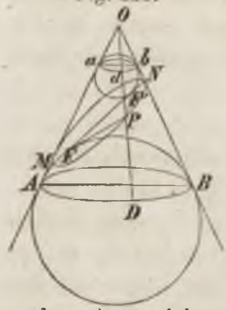
442. Wenn man die drei Kegelschnitte, Hyperbel, Parabel und Ellipse, als solche Curven zweiten Grades unterscheidet, welche respective zwei reelle, oder zwei zusammenfallende, oder endlich zwei imaginäre Punkte in unendlicher Entfernung haben, so unterscheidet und erkennt man sie am Kegel leicht durch die Bemerkung aus der Lage der Schnittebene, dass eine durch die Spitze des Kegels zur Schnittebene parallel gelegte Ebene im ersten Falle den Kegel in zwei reellen und verschiedenen Seiten, im letzten nur in der Spitze oder in zwei imaginären Seiten schneidet, während sie im zweiten Falle zwei zusammenfallende Seiten mit ihm gemein hat, oder ihn berührt. Wenn man sich durch den Mittelpunkt der Curve zu eben diesen Kegelseiten Parallelen gezogen denkt, so repräsentiren diese die reellen, imaginären oder im Unendlichen zusammenfallenden Asymptoten der Curve.

Durch die Bemerkung, dass die Tangenten des Kegelschnittes die Projectionen der Tangenten seiner kreisförmigen Basis sind oder die Durchschnittslinien der Tangentialebenen des Kegels mit der Schnittebene, übertragen sich diese Betrachtungen auf die Tangenten und harmoniren mit dem Theil der Kegelschnitts-Theorie, welcher diese Curven als Enveloppen oder als Curven zweiter Klasse betrachtet.

Für die Parabel erhält man z. B. auch auf diesem Wege, nämlich aus der Anwendung dieser Gesichtspunkte auf die Scheiteltangenten der Curve das Ergebniss, dass jede Parabel eine ganz in unendlicher Entfernung gelegene Tangente besitzt.

Es ist erwähnenswerth, dass auch die Brennpunkte und Directricen sich sehr einfach an die Betrachtung des geraden Kegels anknüpfen lassen. Es lassen sich in jeden geraden Kegel zwei Kugeln so einschreiben, dass sie zugleich die Schnittebene berühren; die Berührungspunkte sind die Brennpunkte und jedem entspricht als Directrix der Schnittcurve die gerade Linie, in welcher die Ebene des Berührungskreises der zugehörigen Kugel die Schnittebene durchschneidet. (Fig. 135.)

Fig. 135.



Wenn man einen beliebigen Punkt $P$ der Schnittcurve mit der Spitze des Kegels durch eine gerade Linie verbindet und die Durchschnittspunkte derselben mit den Ebenen der Berührungskreise durch $D$, $d$ bezeichnet, so hat man die Relationen

$$PD = PF, \quad Pd = PF',$$

und demnach

$$PF + PF' = Dd,$$

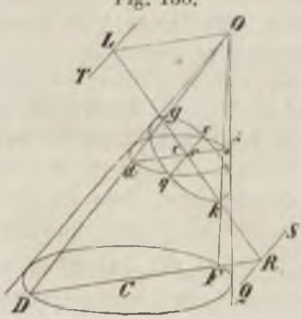
und es lässt sich sofort erkennen, dass diese constante Länge mit der grossen Achse $AB$ der Schnittcurve übereinstimmt. Der Punkt $R$, in welchem die geraden Linien $FF'$ und $AB$ bei genügender Verlängerung sich schneiden, ist ein Punkt der Directrix, oder der Polare des Brennpunktes, weil nach den Eigenschaften des Kreises die vier Punkte $N, F, M, R$ eine harmonische Theilung bilden.

Dieser Satz ist der Uebertragung auf den schiefen Kreiskegel und auf andere Oberflächen des zweiten Grades fähig.

Man kann leicht beweisen, dass der Parameter der Schnittcurve constant ist, solange ihre Ebene den nämlichen Abstand von der Kegelspitze besitzt.

443. Wenn $QS$ die Durchschnittslinie der Ebene eines beliebigen Kegelschnitts mit der Ebene eines kreisförmigen Schnitts bezeichnet, so ist das Rechteck $DR.\,RF$ der durch sie in dem ihr conjugirten Durchmesser des Kreises bestimmten Segmente zu dem Rechteck $gR.\,Rk$ der Segmente des ihr conjugirten Durchmessers des Kegelschnitts in dem nämlichen Verhältniss, wie das Quadrat des zu $QS$ parallelen Durchmessers des letzteren zu dem Quadrat dieses conjugirten Durchmessers $gk$. (Fig. 136.)

Fig. 136.



Dies ist in dem Falle, wo $QS$ den Kreis in reellen Punkten durchschneidet, bereits bewiesen worden, weil $rs^2 = dr.\,rf$ ist.

In dem Falle, in welchem die gerade Linie $QS$ die Curve nicht schneidet, bemerken wir zunächt, dass die in dem Kreise wie in dem anderen Kegelschnitt zu $QS$ conjugirten Durchmesser in demselben Punkte $R$ mit $QS$ zusammentreffen müssen, weil nach Art. 439 der Durchmesser $df$, welcher die zu $qs$ parallelen Sehnen irgend eines kreisförmigen Schnittes halbirt, in einen Durchmesser projicirt wird, welcher die gleichgerichteten Sehnen eines parallelen Schnittes halbirt; die Mittelpunkte aller zu $qs$ parallelen Sehnen liegen demnach in der Ebene $Odf$, und demgemäss muss der zu $QS$ conjugirte Durchmesser der Schnittcurve $gqks$ die Linie $gk$ sein, in welcher die Ebene derselben von der Ebene $Odf$ geschnitten wird; also durchschneiden sich die Graden $DF$ und $gk$ in dem Punkte $R$, in welchem die Ebene $Odf$ die Linie $QS$ trifft.

Es ist somit bewiesen, dass die geraden Linien $gk, df, DF$ in einer und derselben durch die Spitze des Kegels gehenden Ebene liegen, oder dass die Punkte $D, d$ Projectionen des Punktes $g$ sind, d. i. in derselben durch die Spitze gehenden geraden Linie liegen. Dann liefern ähnliche Dreiecke wie in Art. 440 die Relation

$$dr.rf : DR.RF = gr.rk : gR \, . \, Rk;$$

und da die Rechtecke $dr.rf$ und $gr.rk$ zu einander in dem Verhältnisse der Quadrate der parallelen Halbdurchmesser stehen, so sind die Rechtecke $DR.RF$ und $gR.Rk$ in demselben Verhältniss.

444. Wenn man durch die Spitze des Kegels parallel zur Ebene der kreisförmigen Basis eine Ebene legt, welche die Schnittebene in der geraden Linie $TL$ durchschneidet, so folgt als ein specieller Fall des Vorigen, dass $gL.Lk : OL^2$ in dem Verhältniss der Quadrate der parallelen Durchmesser des Schnittes sind.

Wir schliessen daraus, dass es eine unbestimmte Aufgabe ist, zu einem gegebenen Kegelschnitt und einer geraden Linie $TL$ in seiner Ebene die Spitze $O$ eines Kegels, der den ersteren zur Leitcurve hat, so zu bestimmen, dass der von einer zu $OTL$ parallelen Ebene in ihm bestimmte Schnitt ein Kreis sei. Denn wenn wir den zu der geraden Linie $TL$ conjugirten Durchmesser der Schnittcurve ziehen, so ist die Entfernung des Punktes $L$ von der Spitze des Kegels durch das Vorhergehende bestimmt, und $OL$ muss in der zu $TL$ normalen Ebene liegen, weil sie dem Durchmesser eines zu $TL$ normalen Kreises parallel ist; die Spitze $O$ kann demnach in jedem Punkte eines gewissen Kreises in einer zu $TL$ senkrechten Ebene genommen werden.

Ein Kegelschnitt kann immer in der Art in einen Kreis projicirt werden, dass eine in seiner Ebene beliebig gewählte gerade Linie $TL$, welche ihn nicht schneidet, in unendlicher Entfernung projicirt wird. Man hat dazu die Spitze $O$ des projicirenden Kegels nur so zu wählen, dass die Ebene $OTL$ zu den Ebenen der kreisförmigen Schnitte parallel ist; jede der zu $OTL$ parallelen Ebenen erfüllt dann als Projectionsebene die vorgeschriebenen Bedingungen.

445. Wenn ein Kegelschnitt und ein Punkt in seiner Ebene gegeben ist, so kann man den ersteren in einen Kreis projiciren, für welchen die Projection dieses Punktes das Centrum ist; denn wir haben ihn nur so zu projiciren, dass die Projection der Polare jenes Punktes in unendlicher Entfernung erscheint.

Zwei beliebige Kegelschnitte können so projicirt werden, dass beide sich als Kreise darstellen; denn wenn wir den einen derselben so in einen Kreis projiciren, dass eine seiner Durchschnittssehnen mit dem andern in unendlicher Entfernung projicirt wird, so muss die Projection des zweiten Kegelschnitts auch ein Kreis werden, weil sie mit dem ersten durch dieselben unendlich entfernten Punkte gehen muss.

Zwei Kegelschnitte, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, können in concentrische Kreise projicirt werden. Dazu projicirt man den einen derselben so in einen Kreis, dass die Berührungssehne mit dem andern in unendliche Entfernung fällt. (Art. 282.)

Genau gesprochen, sind alle diese Projectionen nur darstellbar, wenn die in unendlicher Entfernung projicirte gerade Linie keine reellen Punkte mit dem Kegelschnitt gemein hat; aber man erkennt in allen Anwendungen der Methode die daraus scheinbar entspringende Beschränkung als überflüssig. Eine projectivische Eigenschaft, welche für irgend eine Lage der Figur bewiesen ist, kann zwar für eine andre Lage derselben, in welcher gewisse in ihr auftretende Linien imaginär werden, ohne Sinn scheinen, aber nie falsch werden. Obgleich also z. B. die Methode der Projection in concentrische Kreise direct nur zum Beweis von Eigenschaften solcher Kegelschnitte führt, die mit einander eine doppelte Berührung in einer imaginären Berührungssehne haben, so halten wir es doch für überflüssig, einen unabhängigen Beweis derselben für den Fall zu suchen, in welchem die Berührungssehne reell ist.

446. Wir geben nun einige Beispiele zu der Art und Weise, durch welche Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kreises oder aus andern speciellern Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet werden.

*Aufg. 1.* Jede durch einen festen Punkt gezogene gerade Linie wird von einem Kegelschnitt und von seiner in Bezug auf diesen genommenen Polare harmonisch getheilt.

Es reicht hin, zu bemerken, dass diese Eigenschaft ebenso wie ihre Reciproke projectivische Eigenschaften sind, und dass sie für den Kreis Gültigkeit haben; in Folge dessen sind sie nothwendig für alle Kegelschnitte wahr. Alle Eigenschaften der Kreise, die von der Theorie der Pole und Polare abhängen, gelten für Kegelschnitte überhaupt.

*Aufg. 2.* Die anharmonischen Eigenschaften der Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts sind projectivischer Natur; sie gelten für alle Kegelschnitte, wenn sie für den Kreis bewiesen sind. Alle Eigenschaften des Kreises, welche aus ihnen hervorgehen, sind gleichmässig für alle Kegelschnitte wahr.

Die Sätze von Pascal und Brianchon brauchen nur für den Kreis bewiesen zu werden, um allgemein gültig zu sein; die Pascal'sche Linie wird in unendlicher Entfernung, der Brianchon'sche Punkt als Mittelpunkt des Kreises projicirt, in welchen man den gegebenen Kegelschnitt überführt. Beide Sätze nehmen eine so elementare Gestalt an, dass sie des Beweises kaum noch bedürfen: Wenn in einem dem Kreise eingeschriebenen Sechseck zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, so sind es auch die dritten. Wenn in einem, einem Kreise umschriebenen Sechseck, zwei Paare von Gegenecken in je einem Durchmesser liegen, so ist dies auch für das dritte Paar der Fall.

*Aufg. 3.* Der Satz von Carnot, dass für die Punkte, in welchen ein Kegelschnitt die Seiten eines Dreiecks schneidet, die Relation

$$Ab \cdot Ab' \cdot Bc \cdot Bc' \cdot Ca \cdot Ca' = Ac \cdot Ac' \cdot Ba \cdot Ba' \cdot Cb \cdot Cb'$$

gilt, ist eine projectivische Eigenschaft und braucht nur für den Fall des Kreises bewiesen zu werden, in welchem er deshalb evident ist, weil

$$Ab \,.\, Ab' = Ac \,.\, Ac'$$

u. s. w.

Der Satz gilt ebenso und wird in derselben Art bewiesen für ein beliebiges Polygon.

*Aufg. 4.* Aus diesem Carnot'schen Satze können die Eigenschaften des Artikel 108 leicht abgeleitet werden; denn wenn wir den Punkt $C$ in unendlicher Entfernung voraussetzen, so ist

$$\frac{Ab \,.\, Ab'}{Ac \,.\, Ac'} = \frac{Ba \,.\, Ba'}{Bc \,.\, Bc'},$$

unter der Voraussetzung, dass die gerade Linie $Ab$ zu $Ba$ parallel ist.

*Aufg. 5.* In zwei concentrischen Kreisen wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührungspunkte halbirt.

In zwei Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, wird jede Sehne des einen, welche den andern berührt, im Berührungspunkt und im Durchschnittspunkt mit der Berührungssehne harmonisch getheilt. (Aufg. 3, Art. 416.)

Die unendlich entfernte gerade Linie des ersten Falles wird als Berührungssehne der Kegelschnitte des zweiten Falles projicirt. (Aufgabe 4, Artikel 239 ist ein specieller Fall dieses Satzes.)

*Aufg. 6.* Wenn drei concentrische Kreise gegeben sind, so wird jede Tangente des einen von den beiden andern in Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniss constant ist.

Wenn drei Kegelschnitte einander in den nämlichen beiden Punkten berühren, so wird jede Tangente des einen von den andern beiden in vier Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniss constant ist.

Der erste Satz ist wegen der Unveränderlichkeit der vier Segmente evident; der zweite kann als eine Erweiterung der anharmonischen Eigenschaft der Tangenten eines Kegelschnitts betrachtet werden.

In derselben Weise können die Sätze des Artikel 301 in Bezug auf anharmonische Verhältnisse in Kegelschnitten, welche sich doppelt berühren, unmittelbar bewiesen werden, indem man die Kegelschnitte als concentrische Kreise projicirt.

*Aufg. 7.* Wenn ein Dreieck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist und zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen, so soll man die Enveloppe der dritten Seite bestimmen (Artikel 302, Aufgabe 2).

Wenn wir die gerade Verbindungslinie der festen Punkte in unendlicher Entfernung und zugleich den Kegelschnitt in einen Kreis projiciren, so verwandelt sich die Aufgabe in diese: Ein Dreieck ist einem Kreise eingeschrieben und zwei seiner Seiten sind festen geraden Linien parallel; man soll die Enveloppe der dritten Seite bestimmen.

Diese Enveloppe ist ein concentrischer Kreis, weil der Winkel an der Spitze des Dreiecks gegeben ist, und die Enveloppe ist demnach im allgemeinen Fall ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung in den beiden Punkten hat, welche in der geraden Verbindungslinie der gegebenen Punkte liegen.

*Aufg. 8.* Die projectivischen Eigenschaften des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks zu untersuchen.

Nach den gegebenen allgemeinen Entwickelungen kann der Kegelschnitt in einen Kreis und zugleich das Viereck in ein Parallelogramm projicirt werden. Für ein in einen Kreis eingeschriebenes Parallelogramm ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen im Centrum des Kreises; demnach ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks der Pol der geraden Linie, welche die Durchschnittspunkte der Gegenseiten desselben verbindet.

Für das dem Kreis eingeschriebene Parallelogramm liefern die in seinen Eckpunkten an den Kreis gelegten Tangenten ein Viereck, dessen Diagonalen sich auch im Mittelpunkte des Kreises schneiden, indem sie zugleich die von den Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks gebildeten Winkel halbiren; in Folge dessen gehen die Diagonalen des in einen Kegelschnitt eingeschriebenen und des entsprechenden umschriebenen Vierecks durch denselben Punkt und bilden ein harmonisches Büschel.

*Aufg. 9.* Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen Vierecks hindurchgeht.

Wenn vier Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer festen geraden Linie ein Kegelschnitt, welcher zu den Endpunkten jeder Seite und dem Schnittpunkt der gegebenen geraden Linie mit derselben in ihr den vierten harmonischen Punkt bestimmt.

*Aufg. 10.* Der Ort der Punkte, in welchen alle parallelen Sehnen eines Kreises in einem gegebenen Verhältniss getheilt werden, ist eine Ellipse, welche mit dem Kreise eine doppelte Berührung besitzt (Artikel 163.).

Wenn man durch einen festen Punkt $O$ eine beliebige gerade Linie zieht, welche mit einem festen Kegelschnitt die Punkte $A$, $B$ gemein hat, und in ihr einen Punkt $P$ so wählt, dass das Doppelschnittverhältniss der vier Punkte $O$, $A$, $B$, $P$ unveränderlich ist, so ist der Ort des Punktes $P$ ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte Berührung hat.

447. **Mit Hilfe der im Art. 305 gegebenen allgemeinen Definition der Brennpunkte können Eigenschaften derselben projectivisch auf ihren allgemeinen Ausdruck gebracht werden.**

*Aufg. 1.* Wenn ein Kreis zwei gegebene Kreise stets berührt, so ist der Ort seines Centrums eine Hyperbel, welche die Centra der gegebenen Kreise zu Brennpunkten hat.

Wenn ein Kegelschnitt durch zwei feste Punkte geht und zwei feste Kegelschnitte stets berührt, welche auch durch diese Punkte gehen, so ist der Ort des Pols der geraden Verbindungslinie dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem Viereck eingeschrieben ist, das von den geraden Verbindungslinien der gegebenen Punkte mit den in Bezug auf die beiden gegebenen Kegelschnitte genommenen Polen ihrer Verbindungslinie gebildet wird.

Dies Beispiel ist besonderer Aufmerksamkeit deshalb werth, weil es gleichzeitig die folgenden verschiedenen Principien zur Anwendung bringt: Dass alle Kreise durch zwei feste Punkte in unendlicher Entfernung gehen; dass das Centrum der Pol ihrer Verbindungslinie ist; dass ein Brennpunkt als der Durchschnitt der von ihnen ausgehenden Tangenten der Curve betrachtet werden muss; und dass wir zur Ausdehnung unserer Schlüsse von imaginären auf reelle Punkte berechtigt sind.

*Aufg. 2.* Wenn von einem Kegelschnitt der Brennpunkt und zwei Punkte der Peripherie gegeben sind, so liegt der Durchschnitt der in diesen Punkten an ihn gezogenen Tangenten in einer festen geraden Linie.

Wenn zwei Tangenten und zwei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so liegt der Durchschnittspunkt der in diesen Punkten an ihn zu ziehenden Tangenten in einer festen geraden Linie.

*Aufg. 3.* Wenn ein Brennpunkt und zwei Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines anderen Brennpunktes eine gerade Linie.

Wenn vier Tangenten und je ein fester Punkt in zweien derselben gegeben sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes der von diesen an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten eine gerade Linie.

Denn die zwei unendlich entfernten Punkte eines Kreises liegen jeder in einer der vom ersten Brennpunkt ausgehenden Tangenten, und die von ihnen ausgehenden beiden andern Tangenten des Kegelschnitts schneiden sich im andern Brennpunkte.

*Aufg. 4.* Wenn für eine Parabel drei Tangenten gegeben sind, so ist

Wenn vier feste Tangenten eines Kegelschnitts und zwei feste Punkte der Ort des Brennpunkts derselben der ihrem Dreieck umschriebene Kreis.

in einer derselben gegeben sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten, welche von diesen letztern an den Kegelschnitt ferner gelegt werden können, ein Kegelschnitt, welcher durch die zwei festen Punkte geht und dem von den übrigen drei festen Tangenten gebildeten Dreieck umschrieben ist.

Denn die Parabel hat eine ihrer Tangenten ganz in unendlicher Entfernung und die beiden Punkte, welche allen Kreisen gemeinschaftlich sind, liegen in dieser Tangente.

*Aufg.* 5. Der Ort des Centrums für einen Kreis, welcher durch einen festen Punkt geht und eine feste gerade Linie berührt, ist eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkt hat.

Wenn eine Tangente und drei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten in irgend zweien dieser Punkte ein Kegelschnitt, welcher dem von ihnen gebildeten Dreieck eingeschrieben ist.

*Aufg.* 6. Wenn vier Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort seines Centrums die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks verbindet.

Wenn vier Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, so ist der Ort des Pols einer geraden Linie die gerade Verbindungslinie der Punkte, welche mit den Schnittpunkten der ersteren in den Diagonalen diese selbst harmonisch theilen.

Aus unserer Definition der Brennpunkte ergiebt sich, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt zweier Kegelschnitte als der Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten derselben angesehen werden muss und demnach die im Artikel 288 entwickelten Eigenschaften eines solchen besitzt.

Wenn zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt und die zugehörige Directrix gemeinschaftlich haben, so müssen sie als solche Kegelschnitte betrachtet werden, die eine doppelte Berührung mit einander haben und können daher als concentrische Kreise projicirt werden.

448. Wir richten hiernach unsre Aufmerksamkeit auf **projectivische Relationen, welche die Grösse von Winkeln betreffen.**

Winkel, welche in der gegebenen Figur constant sind, sind es in einer Projection derselben im Allgemeinen nicht, und es bedarf daher einer besondern Untersuchung der Gesetze, nach welchen derartige Eigenschaften projectivisch zu generalisiren sind.

Um nicht auf besondre Fälle eingeschränkt zu sein, wie z. B. auf die Relationen von Winkeln am Brennpunkte, welche allerdings sehr leicht aus den Relationen entsprechender Winkeln am Kreise hergeleitet werden können, geben wir im Folgenden eine allgemeine Theorie der Projectionen von Winkeln.

Wir beginnen mit dem Fall des rechten Winkels.

Wenn $x = o$, $y = o$ die Gleichungen zweier zu einander rechtwinkligen geraden Linien darstellen, so sind die Richtungen der unendlich entfernten Punkte jedes Kreises durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = o$$

oder durch

$$x + y\sqrt{-1} = o, \quad x - y\sqrt{-1} = o$$

bestimmt. Diese vier geraden Linien bilden demnach nach Art. 55 ein harmonisches Büschel. Wir ziehen daraus den folgenden Schluss: Wenn vier Punkte $A, B, C, D$ eine gerade Linie harmonisch theilen und durch eine reelle oder imaginäre Projection so projicirt werden, dass die Punkte $A$ und $C$, die wir als reell oder als imaginär denken dürfen, mit den zwei imaginären unendlich entfernten Punkten eines Kreises zusammenfallen, so projiciren sich gleichzeitig beliebige durch die Punkte $B$ und $D$ gehende gerade Linien als die Schenkel eines rechten Winkels. Und umgekehrt: Wenn zwei gerade Linien zu einander rechtwinklig sind, so werden sie als gerade Linien projicirt, welche die Verbindungslinie der beiden festen Punkte harmonisch theilen, die als die Projectionen der imaginären unendlich entfernten Punkte eines Kreises erscheinen.

*Aufg. 1.* Die Tangente eines Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes.

Jede Sehne eines Kegelschnitts wird durch eine Tangente desselben und durch die gerade Verbindungslinie ihres Berührungspunktes mit dem Pol der gegebenen Sehne harmonisch getheilt (Art. 104.).

Denn sobald wir die Sehne des Kegelschnitts als in die unendlich entfernte gerade Linie in der Ebene eines Kreises projicirt voraussetzen, so erscheinen die Punkte, in welchen dieselbe den Kegelschnitt schneidet, als die unendlich entfernten imaginären Punkte des Kreises; gleichzeitig wird der Pol der Sehne im Centrum des Kreises projicirt.

*Aufg.* 2. Jede durch den Brennpunkt eines Kegelschnitts gehende gerade Linie ist rechtwinklig zu der geraden Verbindungslinie ihres Pols mit dem Brennpunkte. (Artikel 194.)

Jede gerade Linie durch einen festen Punkt bildet mit den beiden von ihm ausgehenden Tangenten eines Kegelschnitts und der Verbindungslinie desselben mit ihrem eigenen Pol in Bezug auf diesen ein harmonisches Büschel. (Art. 106.)

Dass der erste dieser Sätze ein specieller Fall des zweiten ist, erhellt aus der Bemerkung, dass die vom Brennpunkt ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts die geraden Verbindungslinien des Brennpunktes mit den imaginären unendlich entfernten Punkten im Kreise sind.

*Aufg.* 3. Nach der Aufgabe 6 des vorigen Artikels können wir den Ort des Pols einer geraden Linie in Bezug auf ein System confocaler Kegelschnitte bestimmen; denn die Brennpunkte bestimmen, heisst ein dem Kegelschnitt umschriebenes Viereck angeben, welches die gerade Verbindungslinie der Brennpunkte zu einer Diagonale hat. In Folge dessen ist der vierte harmonische Punkt zu demjenigen, wo die gegebene gerade Linie die zwischen den Brennpunkten enthaltene gerade Strecke schneidet, ein Punkt des gesuchten Ortes. Die andere Diagonale ist die unendlich entfernte gerade Linie und ihre Endpunkte sind die imaginären unendlich entfernten Kreispunkte; demnach ist der gesuchte Ort zur gegebenen geraden Linie rechtwinklig und somit vollkommen bestimmt.

*Aufg.* 4. Zwei confocale Kegelschnitte schneiden einander unter rechten Winkeln.

Wenn zwei Kegelschnitte demselben Viereck eingeschrieben sind, so theilen die beiden in jedem ihrer Durchschnittspunkte zu ziehenden Tangenten derselben jede Diagonale des umschriebenen Vierecks harmonisch.

Wir bemerken, dass der letztere Satz ein Fall von dem reciproken Satze zur Aufgabe 1, des Artikel 416 ist.

*Aufg.* 5. Der Ort des Durchschnittspunkts solcher Tangentenpaare eines Central-Kegelschnitts, welche sich rechtwinklig durchschneiden, ist ein Kreis.

Wenn man von zwei Punkten $B$, $D$, welche eine gegebene gerade Strecke $AC$ harmonisch theilen, Tangenten an einen Kegelschnitt construirt, so ist der Ort ihres Durchschnittspunktes ein durch die Punkte $A$, $C$ gehender Kegelschnitt.

Nach dem Satze des Artikel 106 kann der gegenwärtige auch ausgesprochen werden, wie folgt: Der Ort eines Punktes $O$, für welchen die gerade Linie, welche ihn mit dem Pol der festen geraden Linie $AO$ verbindet, durch den festen Punkt $C$ geht, ist ein durch die Punkte $A$ und $C$ gehender Kegelschnitt. Alsdann ist seine Richtigkeit direct daraus ersichtlich, dass wir das Doppelschnittverhältniss des von vier beliebigen Lagen der geraden Linie $CO$ gebildeten Büschels als mit dem des Büschels übereinstimmend erkennen, welches die vier entsprechenden Lagen von $AO$ bilden.

*Aufg. 6.* Der Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten einer Parabel, die einander rechtwinklig durchschneiden, ist die Directrix.

Unter der Voraussetzung, dass in dem vorhergehenden allgemeinen Satze die gerade Linie $AC$ den gegebenen Kegelschnitt berührt, wird der Ort des Punktes $O$ die gerade Linie, welche die Berührungspunkte der von $A$ und $C$ ausgehenden Tangenten des Kegelschnitts verbindet.

*Aufg. 7.* Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander gezogen werden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte in der Curve verbindet, stets durch einen festen Punkt. (Artikel 182, Aufgabe 2.)

Wenn durch einen beliebigen Punkt eines Kegelschnitts ein harmonisches Büschel gelegt wird, in welchem zwei Strahlen unveränderlich sind, so geht die die Endpunkte der jedesmaligen beiden andern Strahlen verbindende Sehne stets durch einen festen Punkt.

Dasselbe Ergebniss lautet, in andern Worten ausgedrückt, wie folgt: Wenn zwei Punkte $a$, $c$ eines Kegelschnitts und ein harmonisches Verhältniss $(abcd)$ gegeben sind, so geht die gerade Linie $bd$ stets durch einen festen Punkt, nämlich durch den Durchschnittspunkt der Tangenten des Kegelschnitts in $a$ und $c$.

Und in dieser Form wird die Wahrheit des Satzes direct erkannt, wenn man bemerkt, dass die Tangente des Kegelschnitts im Punkte $a$ die gerade Linie $bd$ in dem vierten harmonischen Punkte zu dem Punkt $K$ schneiden muss, welchen $ac$ mit ihr gemein hat, weil $(a . abcd)$ ein harmonisches Büschel ist; und dass das Nämliche von der Tangente in $c$ gilt, dass somit diese Tangenten $bd$ in demselben Punkte schneiden müssen.

Als ein specieller Fall dieses Satzes erscheint der folgende: Wenn durch einen festen Punkt eines Kegelschnitts zwei gerade Linien so gezogen werden, dass sie mit einer festen geraden Linie gleiche Winkel bilden, so geht die Sehne, welche ihre Endpunkte verbindet, durch einen festen Punkt.

449. Ein System gerader Linien, welche paarweise durch einen festen Punkt so gezogen sind, dass die

Geraden desselben Paares mit einer festen Linie gleiche Winkel bilden, schneidet die unendlich entfernte gerade Linie in einem System involutorischer Punkte, welchem die beiden imaginären unendlich entfernten Kreispunkte als ein Paar conjugirter Punkte angehören.

Denn sie schneiden jede gerade Linie in einem System involutorischer Punkte, welches die Punkte zu Brennpunkten hat, in welchen die gerade Linie von der gemeinschaftlichen inneren und äussern Halbirungslinie der von den Paaren der geraden Linien gebildeten Winkel geschnitten ward. Die erwähnten imaginären Punkte der unendlich entfernten geraden Linie gehören zu dem System, weil die von ihnen begrenzte Strecke durch diese Winkelhalbirungslinien auch harmonisch getheit wird.

Die von einem beliebigen Punkt zu einem System confocaler Kegelschnitte gezogenen Tangenten machen mit zwei festen geraden Linien gleiche Winkel. (Artikel 191.)

Die von einem beliebigen Punkte zu einem System von demselben Viereck eingeschriebenen Kegelschnitten gezogenen Tangenten schneiden jede Diagonale des Vierecks in einem System involutorischer Punkte, welchem die Endpunkte der Diagonale als ein Paar conjugirte Punkte angehören. (Art. 415.)

450. Zwei von einem festen Punkte ausgehende gerade Linien, welche mit einander einen constanten Winkel bilden, schneiden die gerade Verbindungslinie der zwei unendlich entfernten imaginären Punkte eines Kreises immer so, dass das Doppelschnittverhältniss der vier Punkte constant ist.

Denn, wenn $x = o, y = o$ zwei gerade Linien darstellen, welche den Winkel $\vartheta$ mit einander bilden, so sind die Richtungen der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\vartheta = o$$

bestimmt; und indem man diese Gleichung in Factoren zerlegt, findet man, dass das Doppelschnittverhältniss der vier Linien constant ist, so lange $\vartheta$ unverändert bleibt.

*Aufg. 1.* Der in demselbem Segment eines Kreises enthaltene Winkel ist constant.

Dieser Satz ist, wie der gegenwärtige Artikel lehrt, die von der anharmonischen Eigenschaft von vier Punkten eines Kreises angenommene Form für den Fall, wo zwei dieser Punkte in unendlicher Entfernung sind.

*Aufg.* 2. Die Enveloppe derjenigen Sehnen eines Kegelschnitts, welche einen constanten Winkel am Brennpunkt spannen, ist ein Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen Brennpunkt und Directrix gemein hat.

Wenn die von dem Punkte $O$ gezogenen Tangenten mit dem Kegelschnitt die Punkte $T$, $T'$ gemein haben, und zwei Punkte $A$ und $B$ in demselben so gewählt werden, dass das Doppelschnittverhältniss $(O.ATBT')$ constant ist, so ist die Enveloppe der Sehne $AB$ ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in den Punkten $T$, $T'$ berührt.

*Aufg.* 3. Der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Tangenten einer Parabel, die einander unter gegebenem Winkel schneiden, ist eine Hyperbel, die mit der Parabel den Brennpunkt und die Directrix gemein hat.

Wenn in der Aufg. 6 des Art. 448 die Punkte $B$, $D$ so gewählt werden, dass das Doppelschnittverhältniss $(ABCD)$ constant ist, so ist der Ort des Punktes $O$ ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in denselben Punkten mit den von $A$ und $C$ aus gezogenen Tangenten berührt.

*Aufg.* 4. Wenn durch den Brennpunkt eines Kegelschnitts eine Linie gezogen wird, welche mit irgend einer Tangente desselben einen gegebenen Winkel einschliesst, so ist der Ort des Punktes, in welchem sie dieselbe schneidet, ein Kreis.

Wenn eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts zwei feste Tangenten in $T$, $T'$ und eine feste gerade Linie in $M$ schneidet, und ein Punkt $P$ in ihr so bestimmt wird, dass das Doppelschnittverhältniss $(PTMT')$ constant ist, so ist der Ort des Punktes $P$ ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte geht, in denen die festen Tangenten die feste gerade Linie schneiden.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist der folgende: Der Ort des Punktes, in welchem der von zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts in einer veränderlichen Tangente desselben bestimmte Abschnitt in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den festen Tangenten parallel sind.

*Aufg.* 5. Wenn von einem festen Punkt $O$ die gerade Linie gezogen wird, welche einen gegebenen Kreis im Punkte $P$ schneidet, und an sie der constante Winkel $TPO$ angetragen wird, so ist die Enveloppe des

Wenn das Doppelschnittverhältniss eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und der Scheitel desselben sich auf einem durch zwei dieser Punkte gehenden gegebenen neuen Schenkels $TP$ ein Kegelschnitt, welcher den Punkt $O$ zum Brennpunkt hat.

Kegelschnitt bewegt, so umhüllt der vierte Strahl desselben einen Kegelschnitt, welcher die geraden Verbindungslinien dieser zwei Punkte mit dem dritten festen Punkt berührt.

Als ein specieller Fall dieses Satzes ergiebt sich der folgende: Wenn zwei feste Punkte $A$ und $B$ eines Kegelschnitts mit einem veränderlichen Punkte $P$ desselben durch gerade Linien verbunden werden, und der von den Verbindungslinien in einer festen Geraden bestimmte Abschnitt in dem Punkte $M$ in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, so ist die Enveloppe der geraden Linie $PM$ ein Kegelschnitt, welcher die durch $A$ und $B$ gezogenen Parallelen zu der festen geraden Linie berührt.

*Aufg.* 6. Wenn man an die um den festen Punkt $O$ sich drehende gerade Linie $OP$ in ihrem Durchschnittspunkt $P$ mit einer festen geraden Linie den constanten Winkel $TPO$ anträgt, so ist die Enveloppe seines neuen Schenkels $PT$ eine Parabel, welche den Punkt $O$ zum Brennpunkt hat.

Wenn das Doppelschnittverhältniss eines Büschels, von welchem drei Strahlen durch feste Punkte gehen, gegeben ist, und sein Scheitel sich längs einer festen geraden Linie bewegt, so ist die Enveloppe des vierten Strahls ein Kegelschnitt, welcher die drei Seiten des von den gegebenen Punkten gebildeten Dreiecks berührt.*)

---

*) Die Methode der Projectionen kann auch zur Ableitung der Eigenschaften ebener Curven aus Eigenschaften anderer nicht ebener Curven angewendet werden, z. B. von Curven auf einer Kugeloberfläche. So können die Eigenschaften der am Brennpunkte eines Kegelschnitts gespannten Winkel aus den Eigenschaften von Kreisen auf einer Kugeloberfläche abgeleitet werden, indem man sich auf das folgende Princip stützt: Der Ort der Spitzen aller der geraden Kegel, aus welchen eine gegebene Ellipse geschnitten werden kann, ist eine Hyperbel, welche die Brennpunkte der Ellipse zu Scheiteln und ihre Scheitel zu Brennpunkten hat und deren Ebene auf der Ebene der Ellipse rechtwinklig steht. Dasselbe wird sehr leicht im Anschluss an Art. 442 bewiesen, und man erkennt zugleich, dass analoge Sätze für die Parabel und Hyperbel existiren.

Die Anwendung des Princips geschieht dann z. B. in folgender Weise: Man weiss, dass für einen festen Punkt $P$ in der Kugeloberfläche und einen beliebigen festen Kreis auf der Kugel die Relation

$$\tan \tfrac{1}{2} AP \,.\, \tan \tfrac{1}{2} BP = \text{const.}$$

besteht, wenn $A$ und $P$ die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit einem durch den Punkt $P$ gehenden grössten Kreise der Kugel bezeichnen.

Nehmen wir nun einen Kegel, dessen Basis der erstere Kreis und dessen Spitze das Centrum der Kugel ist, und denken ihn durch eine beliebige Ebene geschnitten; so erhalten wir den Satz: Wenn man durch einen

451. Wir schliessen dem Vorigen, welches wir für ausreichend zur Erläuterung des Gebrauchs halten, den man von der Methode der Centralprojection in geometrischen Untersuchungen machen kann, einen kurzen Abriss von den entsprechenden Gesetzen der Methode der Orthogonalprojection an.

Die Orthogonalprojection einer gegebenen Figur wird von den Fusspunkten aller der Perpendikel gebildet, welche man von den Punkten derselben auf eine beliebige feste Ebene fällen kann; sie ist daher der gerade Schnitt eines Cylinders, welcher die gegebene Figur zur Leitlinie hat.

Geradlinige Strecken von gleicher Richtung sind zu ihren Orthogonalprojectionen auf eine beliebige Ebene in constantem Verhältniss.

Denn dieses Verhältniss wird durch den Cosinus des Winkels ausgedrückt, welchen die gerade Linie mit ihrer Projection einschliesst und wegen des Parallelismus der bezeichneten Geraden und des daraus folgenden Parallelismus ihrer Projectionen ist dieser Winkel stets von derselben Grösse.

Alle geradlinigen Strecken, deren Richtung mit derjenigen der geraden Durchschnittslinie zwischen der Ebene der Figur und der Projectionsebene übereinstimmt, sind ihren Orthogonalprojectionen gleich.

Da die Durchschnittslinie beider Ebenen selbst durch die Projection nicht geändert wird, so kann auch keine ihr parallele gerade Linie geändert werden.

Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur in einer gegebenen Ebene steht zu dem Flächeninhalt ihrer Orthogonalprojection in einer andern gegebenen Ebene in einem constanten Verhältniss.

---

Punkt $p$ in der Ebene eines Kegelschnitts eine gerade Linie zieht, welche den letzteren in den Punkten $a$, $b$ schneidet, so ist das Product der Tangenten von den Hälften der Winkel, welche $ap$, $bp$ an der Spitze des Kegels spannen, constant. Da nun diese Eigenschaft für die Spitze jedes geraden Kegels gelten muss, aus welchem der gedachte Kegelschnitt geschnitten werden kann, und da der Brennpunkt des letzteren ein Punkt in dem Orte dieser Spitzen ist, so erhält man für den Brennpunkt die Relation

$$\tan \tfrac{1}{2}\, a f p \cdot \tan \tfrac{1}{2}\, b f p = \text{const.}$$

(Vergl. Art. 228, Aufg. 6.)

Setzen wir die Ordinaten der Figur und ihrer Projection rechtwinklig zur Durchschnittslinie ihrer Ebenen voraus, so setzen sich beide Flächen aus Parallelstreifen von gleicher Breite zusammen, deren Höhen in dem constanten Verhältnisse vom Cosinus des Winkels beider Ebenen zur Einheit stehen; demgemäss sind die Flächen beider Figuren in demselben Verhältniss. (Vergl. Artikel 255.)

Jede Ellipse kann orthogonal in einen Kreis projicirt werden.

Wir wählen die Projectionsebene so, dass ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der gegebenen Ellipse der kleinen Achse dieser letzteren parallel ist und zugleich so, dass der Cosinus des von beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dem Verhältniss $b:a$ der kleinen Achse zur grossen gleich ist; alsdann bleiben alle zur kleinen Achse parallelen Sehnen der Ellipse unverändert in der Projection, während alle der grossen Achse parallelen Sehnen in dem Verhältniss $b:a$ verkürzt werden; in Folge dessen wird die Projection ein Kreis vom Radius $b$. (Artikel 163.)

452. Um ein Beispiel von dem Nutzen dieser Principien zu geben, wollen wir dieselben zur Untersuchung des Ausdrucks anwenden, welchen wir im Artikel 233 (Aufgabe 6) für den Radius des Kreises gegeben haben, der einem in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck umschrieben ist.

Nach der Elementar-Geometrie gilt die Relation

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\varDelta},$$

wenn $R$ diesen Halbmesser, $\varDelta$ den Flächeninhalt des Dreiecks, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Seitenlängen desselben bezeichnen.

Projiciren wir dann die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $b$, so gilt, weil dieser Kreis als der umschriebene Kreis des projicirten Dreiecks erscheint, die Relation

$$b = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{4\varDelta'}.$$

Wenn wir nun die den Seiten des Dreiecks parallelen Halbdurchmesser der Ellipse durch $b'$, $b''$, $b'''$ bezeichnen, so gelten nach dem Satze, dass parallele Linien in constantem Verhältniss zu ihren Projectionen stehen, die Proportionen

$$\alpha' : \alpha = b : b',$$
$$\beta' : \beta = b : b'',$$
$$\gamma' : \gamma = b : b'''.$$

Es ist ferner $A'$ der Inhalt des Kreises vom Halbmesser $b$, also $= \pi b^2$, und $A$ der Inhalt der Ellipse von den Halbachsen $a$ und $b$, also $= \pi a b$; demnach

$$A' : A = b : a.$$

Alles dies giebt die Relation

$$b : R = \frac{\alpha' \beta' \gamma'}{4A'} : \frac{\alpha \beta \gamma}{4A} = a b^2 : b' b'' b''',$$

d. i.
$$R = \frac{b' b'' b'''}{a b}.$$

453. Nach diesen Anwendungen, welche Art und Brauchbarkeit der Methode der Projectionen hinreichend erläutern, wollen wir in möglichster Kürze die analytischen Gesichtspunkte entwickeln, unter welchen dieselbe betrachtet werden kann. Wir befreien dieselbe dadurch zugleich von der bei der Methode der Projectionen selbst unumgänglichen Vermittelung durch Vorstellungen aus der Geometrie des Raumes, deren Fremdartigkeit nur über dem hohen Grade ihrer Einfachheit und Klarheit übersehen werden kann, und erheben sie zu einem höheren Grade der Allgemeinheit.

Die Charakteristik zweier ebenen Systeme, welche als Originalsystem und als Projection desselben erscheinen können, ist bereits völlig streng durch die einzige Bedingung gegeben, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern und jeder geraden Linie des einen Systems eine gerade Linie des andern entsprechen muss. Die übrigen Eigenschaften, welche die Beziehung der beiden Systeme auf einander in den vorhergehenden Entwicklungen vervollständigen, als da sind: Das Convergiren der geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkte, dem Centrum der Projection, und das Durchschneiden entsprechender gerader Linien in einer Geraden, der Durchschnittslinie der Projectionsebene mit der Ebene der Originalfigur, gehören nicht sowohl der Natur der beiden Systeme selbst als vielmehr derjenigen gegenseitigen Lage derselben an, welche die Entstehung durch Centralprojection voraussetzt. Indem wir von derselben absehen, können wir beide

Systeme, wie es uns gefällt, als in verschiedenen Ebenen oder in derselben Ebene liegend betrachten. Wir bezeichnen sie wegen des Zusammenhangs, in welchem sie Punkt für Punkt mit einander stehen, als geometrisch verwandt und wegen der speciellen im Vorigen bezeichneten Natur dieses Zusammenhangs als collinear verwandt oder in der Verwandtschaft der Collineation stehend.

Darnach ziehen wir die gegenseitige Lage der beiden Systeme nur noch zu dem Zwecke in Betracht, um zu zeigen, dass auch zwei collinear verwandte Systeme in derselben Ebene immer in eine solche Lage gegen einander gebracht werden können, dass die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkte zusammenlaufen und die entsprechenden geraden Linien sich in Punkten einer Geraden durchschneiden; wir werden diese Lage als die perspectivische bezeichnen.

Es ist augenscheinlich, dass in der Beziehung einer Curve oder eines beliebigen ebenen Systems zu ihrer reciproken Polare oder zu dem polar-reciproken System auch eine derartige geometrische Verwandtschaft ausgesprochen ist; die charakteristische Eigenthümlichkeit derselben besteht darin, dass jedem Punkte des einen Systems eine und nur eine gerade Linie des andern und jeder geraden Linie des einen ein und nur ein Punkt des andern entspricht. In der Beziehung beider Systeme auf den nämlichen Kegelschnitt, als in Bezug auf welchen ein Punkt des einen und die entsprechende gerade Linie des andern als Pol und Polare zusammengehören, erkennen wir den Ausdruck einer besondern gegenseitigen Lage beider in derselben Ebene gedachten Systeme. Wir behalten für die entsprechenden Elemente des ersten Grades in solchem System die Benennungen Pol und Polare bei und bezeichnen die so definirte geometrische Verwandtschaft als die der Reciprocität.

454. Die allgemeine Idee der Verwandtschaft zweier geometrischen Systeme gewinnt analytische Gestalt, indem man aus den Gleichungen, welche die geometrischen Gebilde des ersten Systems repräsentiren, durch die Substitution von bestimmten Functionen $\xi, \eta, \zeta$ für die Veränderlichen $x, y, z$ derselben aus jenen die Gleichungen der entsprechenden Gebilde des verwandten Systems hervorgehen lässt. Die Art dieser Functionen $\xi, \eta, \zeta$ von $x, y, z$

bestimmt die specielle Art der Verwandtschaft, in welcher beide Systeme stehen. Die Verwandtschaft ist vom ersten Grade, so lange diese Functionen in Bezug auf $x, y, z$ vom ersten Grade sind. Wenn wir uns für die analytische Ausdrucksweise beider Systeme gleichzeitig des trimetrischen Punkt-Coordinaten-Systems oder ebenso gleichzeitig des trimetrischen Linear-Coordinaten-Systems bedienen, so dass den geraden Linien oder Punkten

$$x=o,\ y=o,\ z=o$$

die geraden Linien oder Punkte

$$\xi=ax+by+cz=o,\ \eta=a'x+b'y+c'z=o,\ \zeta=a''x+b''y+c''z=o$$

entsprechen, so haben wir den analytischen Ausdruck der Collineation gefunden. Wenn wir dagegen den analytischen Ausdruck des ersten Systems in trimetrischen Punkt-Coordinaten $x, y, z$ gegeben denken und die durch die nämliche Substitution erhaltene Gleichung des andern Systems nach den Gesetzen der trimetrischen Linear-Coordinaten interpretiren, so entspricht jedem Punkte des einen Systems eine gerade Linie des andern und der geraden Verbindungslinie zweier Punkte des einen Systems der Durchschnittspunkt der entsprechenden geraden Linien des andern; wir haben damit den analytischen Ausdruck der Reciprocität gegeben. Man sieht daraus, dass diese geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades dem entsprechen, was man allgemein eine lineare Substitution nennt, und dass zwei verschiedene Verwandtschaften aus derselben Substitution nach dem in den beiden trimetrischen Coordinaten-Systemen niedergelegten Princip der Dualität hervorgehen. Wir haben früher gesehen, dass einer bestimmten speciellen Art der linearen Substitution die Transformation der Coordinaten entsprach; und wir erkennen leicht, dass das ursprüngliche und das transformirte System auch als geometrisch verwandt betrachtet werden können; sie stehen in der einfachsten geometrischen Verwandtschaft des ersten Grades, in der der Congruenz. Auch die Beziehung zweier Figuren, welche wir als Aehnlichkeit bezeichnen, ist unter diesem Gesichtspunkt natürlich mit enthalten.

Ob die beiden Systeme in derselben Ebene liegen oder nicht, ist gleichgültig, so lange es sich nur um die Abhängigkeit der Gestalt des einen von der des andern handelt. Wir sehen zunächst von einer Bestimmung darüber ab. Für die Betrachtung ihrer gemeinschaftlichen Elemente setzen wir sie jedoch nachher als in derselben Ebene gelegen voraus.

455. Dem allgemeinen analytischen Ausdruck der beiden Verwandtschaften des ersten Grades gehören acht unabhängige Constante an; denn jede der Substitutionen führt neun solche Constanten in die Gleichungen der Systeme ein; unter diesen kann aber eine als die Einheit gedacht werden, oder man kann bemerken, dass die Division einer Gleichung durch eine Constante die von ihr dargestellte Curve nicht ändert. Diese acht Constanten können durch vier Paare zusammengehöriger Elemente beider Systeme, welche von einander unabhängig sind, bestimmt werden; demgemäss ist eine Collineation durch vier Punkte des einen Systems, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, und die vier entsprechenden Punkte des andern und eine Reciprocität durch vier Punkte des einen — unter derselben Beschränkung — und die entsprechenden vier geraden Linien des andern Systems bestimmt; oder zwei Systeme in der Verwandtschaft des ersten Grades sind vollkommen bestimmt, wenn das eine und vier Elemente des andern gegeben sind, welche bestimmten vier Elementen des ersten entsprechen. Die allgemeine Eigenthümlichkeit der linearen Substitutionen, dass sie den Grad der Gleichung nicht ändern, in welcher sie vollzogen werden, drückt für die Verwandschaft der Collineation aus, dass jede Curve des einen Systems mit der entsprechenden Curve des andern von demselben Grade ist, oder dass entsprechende Curven beider Systeme die nämliche Anzahl Punkte mit einer geraden Linie gemein haben; und für die Verwandtschaft der Reciprocität, dass der Grad jeder Curve des einen Systems mit der Klasse der entsprechenden Curve des andern übereinstimmt, d. i. dass die Curve des einen Systems mit einer geraden Linie ebenso viel gemeinschaftliche Punkte als die entsprechende Curve des andern mit einem Punkte gemeinschaftliche Tangenten besitzt.

Die metrischen Verhältnisse aller der Systeme, welche in einer Verwandtschaft des ersten Grades zu einander stehen, werden durch dies Gesetz regiert: Die Doppelschnittverhältnisse geradliniger Punktereihen und Strahlenbüschel, welche sich in beiden verwandten Systemen entsprechen, sind einander gleich Denn das Doppelschnittverhältniss des Büschels oder der Reihe, welche durch die vier Gleichungen

$$L - a\,M = o,\quad L - b\,M = o,\quad L - c\,M = o,\quad L - d\,M = o$$

repräsentirt ist, wird durch

$$\frac{a-b}{b-d} : \frac{a-c}{c-d}$$

ausgedrückt. Wenn man aber durch $\lambda$ und $\mu$ die Ausdrücke bezeichnet, in welche $L$ und $M$ durch die Einführung von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ an Stelle von $x$, $y$, $z$ übergehen, so sind die entsprechenden Elemente des zweiten Systems durch die Gleichungen

$$\lambda - a\,\mu = o,\quad \lambda - b\,\mu = o,\quad \lambda - c\,\mu = o,\quad \lambda - d\,\mu = o$$

repräsentirt, und ihr Doppelschnittverhältniss ist das nämliche, wie vorhin, gleichviel, ob sie, wie bei der Collineation, wieder ein Büschel oder eine Reihe oder, wie bei der Reciprocität, eine Reihe oder ein Büschel bezeichnen.

456. Wir wollen hiernach zuerst die Verwandtschaft der Collineation einer näheren Untersuchung unterwerfen und setzen dabei voraus, dass beide Systeme in derselben Ebene enthalten sind.

Jede gerade Linie dieser Ebene kann als jedem der beiden verwandten Systeme angehörig betrachtet werden; in jedem Falle entspricht ihr eine gerade Linie des andern Systems und diese beiden geraden Linien sind im Allgemeinen von einander verschieden; so entspicht der Geraden $\xi = o$ des zweiten Systems die gerade Linie $x = o$ des ersten: wenn aber die gerade Linie $\xi = o$ als dem ersten System angehörig betrachtet wird, so muss sie unter der allgemeinen Form

$$ax + by + cz = o$$

erscheinen, und es entspricht ihr im zweiten System die gerade Linie

$$a\xi + b\eta + c\zeta = o,$$

welche im Allgemeinen von der Linie $x = o$ verschieden sein wird.

Man kann die gerade Linie des zweiten Systems, welche einer gegebenen Geraden des ersten entspricht, und umgekehrt, leicht durch eine geometrische Construction bestimmen, welche hier entwickelt werden mag.

Vorausgesetzt, dass die gerade Linie des ersten Systems durch den Punkt $x = o, y = o$ geht, oder in der Form $Ax + By = o$ ausgedrückt ist, so wird die entsprechende gerade Linie, als durch den Punkt $\xi = o$, $\eta = o$ gehend, in der Form $A\xi + B\eta = o$ ausgedrückt sein. Für den Ort des Durchschnittspunktes solcher entsprechenden Geraden gilt die Relation

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{A}{B},$$

und derselbe ist demnach ein Kegelschnitt von der Gleichung

$$x\eta = \xi y,$$

welchem somit die Punkte angehören, in denen die geraden Linien $x = o$, $\eta = o$ von den geraden Linien $\xi = o$, $y = o$ geschnitten werden. Dieser Kegelschnitt ist als bekannt anzusehen. Alsdann wird die gerade Linie, welche im zweiten System einer durch den Punkt $x = o, y = o$ gehenden im ersten entspricht, gefunden, indem man den Punkt $\xi = o$, $\eta = o$ mit demjenigen Punkte verbindet, welchen jene Gerade mit dem bezeichneten Kegelschnitt gemein hat. Ausser demselben existiren noch zwei analoge Kegelschnitte, welche durch die Gleichungen

$$y\zeta = \eta z \text{ und } z\xi = \zeta x$$

repräsentirt werden. und welche in gleicher Weise zur Construction der durch die Punkte $y = o$, $z = o$ und $\eta = o$, $\zeta = o$, und die Punkte $z = o$, $x = o$ und $\zeta = o$, $\xi = o$ gehenden entsprechenden geraden Linien dienen. Alle diese Constructionen sind bestimmt, weil der Punkt, von welchem die ursprüngliche gerade Linie ausgeht, ebenso wie der, durch welchen die entsprechende des andern Systems gehen muss, auf dem zugehörigen Kegelschnitt selbst liegen und daher nur einen neuen Durchschnittspunkt mit demselben bestimmen.

Durch dieselben bestimmt sich aber leicht zu jedem Punkte des einen Systems der entsprechende des andern; denn wenn man den ersteren mit zweien der Ecken des Fundamental-Dreiecks durch gerade Linien verbindet und nach dem Vorigen die entsprechenden geraden Linien des zweiten Systems construirt, so erhält man im Durchschnittspunkte derselben den entsprechenden Punkt des gegebenen.

Die Forderung, die gerade Linie des zweiten Systems zu construiren, welche einer gegebenen des ersten entspricht, reducirt sich auf die Construction der entsprechenden Punkte zu zwei ge-

35*

gebenen, und man kann dieselben zur Vereinfachung des Verfahrens in einer der Fundamental-Linien $x = o$, $y = o$, $z = o$ wählen.

457. Diese drei Kegelschnitte

$$x\eta - \xi y = o, \; y\zeta - \eta z = o, \; z\xi - \zeta x = o$$

haben drei gemeinschaftliche Punkte; denn aus je zweien dieser Gleichungen geht die jedesmalige dritte hervor und es existiren drei Durchschnittspunkte, nämlich die Punkte

$$x = o, \xi = o; \quad y = o, \eta = o; \quad z = o, \zeta = o,$$

welche nur je zweien derselben gemeinschaftlich sind; in Folge dessen müssen nothwendig die drei übrigen allen drei Kegelschnitten zugleich angehören.

Nach der vorigen Construction entspricht der geraden Linie, welche einen dieser Punkte mit $x = o$, $y = o$ verbindet, die andre, welche ihn mit $\xi = o$, $\eta = o$, und der Geraden, die ihn mit $x = o$, $z = o$ verbindet, die, welche von ihm nach $\xi = o$, $\zeta = o$ gezogen wird; somit fallen diese drei Punkte mit ihren entsprechenden zusammen oder sind für beide collineare Systeme dieselben. Das nämliche gilt von den geraden Verbindungslinien dieser Punkte.

458, Wenn $a = o$, $b = o$, $c = o$ drei gerade Linien des einen Systems und $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ die entsprechenden geraden Linien des andern Systems sind, so entspricht einer beliebigen geraden Linie

$$Aa + Bb + Cc = o$$

die gerade Linie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o.$$

Denn sei

$$\begin{aligned} a &= Lx + My + Nz, & \alpha &= L\xi + M\eta + N\zeta, \\ b &= L'x + M'y + N'z, & \beta &= L'\xi + M'\eta + N'\zeta, \\ c &= L''x + M''y + N''z, & \gamma &= L''\xi + M''\eta + N''\zeta, \end{aligned}$$

so haben nothwendig die Gleichungen, welche $x, y, z$ in Gliedern von $a, b, c$, und $\xi, \eta, \zeta$ in Gliedern von $\alpha, \beta, \gamma$ ausdrücken, dieselben Coefficienten. Wenn daher die Gleichung einer beliebigen Curve aus einer Function von $x, y, z$ in eine Function von $a, b, c$ transformirt wird, so erhält die Gleichung der entsprechenden Curve die nämlichen Coefficienten, wenn man sie gleichzeitig aus einer Function von $\xi, \eta, \zeta$ in eine solche von $\alpha, \beta, \gamma$ transformirt.

Wenn demnach endlich die drei geraden Linien $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$ die im vorigen Artikel bezeichneten sind, welche in beiden Systemen sich selbst entsprechen, so erhält man als die Gleichung der Curve des zweiten Systems, welche der durch

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = o$$

repräsentirten entspricht,

$$\varphi(l\alpha, m\beta, n\gamma) = o.$$

459. Die Methode der Projectionen ist, wie wir bereits bemerkt haben, ein specieller Fall dieser collinearen Transformation; er ist durch eine Beziehung der gegenseitigen Lage beider Systeme ausgezeichnet, welche wir hier kurz wiederholen: Die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Systeme gehen durch einen festen Punkt, die Spitze des projicirenden Kegels, und je zwei entsprechende gerade Linien begegnen sich in einer festen geraden Linie, derjenigen, in welcher die Ebenen beider Systeme sich schneiden.

Wenn eine dieser Ebenen durch Drehung um diese letztere gerade Linie zum Zusammenfallen mit der andern gebracht wird, so behalten auch am Ende dieser Bewegung beide Systeme die Eigenschaft, dass die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen; denn wenn wir die durch drei Paare entsprechender Punkte gebildeten Dreiecke betrachten, so müssen die correspondirenden Ecken in drei von dem nämlichen Punkte ausgehenden geraden Linien liegen, weil die correspondirenden Seiten sich in Punkten einer geraden Linie durchschneiden.

Wir wollen diesen Punkt das Centrum und die gerade Linie die Achse der Collineation nennen und die beiden Systeme selbst als central-collinear bezeichnen. Es ist leicht, die allgemeinen Gleichungen eines solchen Systems zu bilden; sei

$$ax + by + cz = o,$$

die Gleichung der Collineationsachse, so müssen die Gleichungen der geraden Linien $\xi = o$, $\eta = o$, $\zeta = o$, welche denen $x = o$, $y = o$, $z = o$, entsprechen, von der Form

$$\xi = a'x + by + cz = o,$$
$$\eta = ax + b'y + cz = o,$$
$$\zeta = ax + by + c'z = o$$

sein.

Das System dieser Gleichungen enthält nur fünf unabhängige Constante, drei weniger als in dem allgemeinen Fall der Collineation.

Indem man nacheinander je zwei dieser Gleichungen von einander subtrahirt, erhält man in der Relation

$$(a - a')x = (b - b')y = (c - c')z$$

die **Gleichungen, welche das Collineations-Centrum bestimmen.**

460. In folgender Art erhalten wir endlich die **einfachsten Gleichungen der perspectivischen Transformation**: Jede durch das Collineations-Centrum gehende gerade Linie entspricht sich selbst, weil irgend zwei Punkte in ihr zweien andern Punkten in derselben Geraden entsprechen. Wenn somit das Centrum der Collineation als der Punkt $x = o$, $y = o$ betrachtet wird, so bleiben die beiden geraden Linien $x = o$, $y = o$ bei der Transformation ungeändert, ebenso jede andre durch diesen Punkt gehende gerade Linie $Ax + By = o$;
jeder andern geraden Linie

$$Ax + By + Cz = o$$

entspricht die gerade Linie

$$Ax + By + C\zeta = o.$$

Beide durchschneiden sich in der geraden Linie

$$z - \zeta = o,$$

welche die **Collineations-Achse** darstellt.

461. **Wenn umgekehrt zwei in der Verwandtschaft der Collineation stehende Systeme in derselben Ebene eine solche gegenseitige Lage haben, dass die entsprechenden geraden Linien beider Systeme sich in einer festen geradlinigen Achse schneiden, so kann stets das eine als die perspectivische Projection des andern betrachtet werden.** Denn wenn drei Paare entsprechender geraden Linien als die Seiten zweier entsprechenden Dreiecke $ABC$, $abc$ betrachtet werden, welche sich in den Punkten $L$, $M$, $N$ der Achse schneiden, so müssen bei jeder Drehung der Ebene des einen Systems um diese Achse $Aa$, $Bb$ sich durchschneiden, weil sie in der nämlichen durch die geraden Linien $AB$ und $ab$ bestimmten Ebene liegen; das nämliche gilt von $Bb$ und $Cc$, und von $Cc$ und $Aa$. Auch nach der Theorie der Transversalen gelangt man zu dem Schlusse, dass die geraden Linien $Bb$ und $Cc$ die

Linie $Aa$ in demselben Punkte schneiden müssen, weil sie die in ihr bestimmte Strecke in demselben Verhältniss theilen.

462. In dieser besonderen Lage besitzen die collinear-verwandten Systeme eine fernere Eigenschaft, welche für ihre Construction von besonderem Vortheil ist. Man erkennt dieselbe, indem man in dem einen System ein System von parallelen Linien betrachtet, wie ein solches allgemein durch Gleichungen von der Form

$$A\xi + B\eta + C\zeta = o$$

und $$(A + k \sin \alpha)\xi + (B + k \sin \beta)\eta + (C + k \sin \gamma)\zeta = o$$

ausgedrückt wird, und die Gleichungen der entsprechenden geraden Linien im andern System entwickelt. Die Subtraction ihrer Gleichungen liefert als Ausdruck des Orts ihres Durchschnittspunktes eine lineare Gleichung, in welcher $A$, $B$, $C$ und $k$, die die Richtung des Systems von Parallelen und den Abstand der zwei betrachteten Elemente desselben bestimmenden Constanten nicht mehr auftreten. Diese Gleichung repräsentirt somit eine feste gerade Linie des Systems, in welcher die Scheitel aller der Strahlenbüschel liegen, welche den möglichen verschiedenen Parallelen-Gruppen des andern Systems correspondiren; man kann sagen, eine gerade Linie, in welcher jeder Punkt einem bestimmten unendlich entfernten Punkte des andern Systems entspricht, nämlich demjenigen, wie leicht zu erkennen ist, welcher der vom Collineations-Centrum nach jenem selbst gezogenen geraden Linie angehört. Wir erhalten auf analytischem Wege das Ergebniss wieder, welches wir im Art. 435 aussprachen, dass die unendlich entfernten Punkte einer Ebene als in einer geraden Linie liegend angesehen werden müssen. Eine solche gerade Linie, welche der unendlich entfernten geraden Linie des andern Systems entspricht, ist in jedem der beiden ebenen Systeme vorhanden, und man bezeichnet sie als die Gegenachse oder den Horizont ihres Systems. Die Form ihrer Gleichung zeigt, dass sie der Collineationsachse parallel ist. Sie sind jene beiden geraden Linien in der Methode der Projectionen (Art. 435), welche aus dem Durchschnitt der Projectionsebene und der Originalebene mit den beiden Ebenen hervorgehen, die man durch das Centrum der Projection parallel zur Ebene des Originalsystems und zur Projectionsebene legen kann.

463. Die Eigenschaften dieser geraden Linien führen im Verein mit denen des Centrums und der Collineations-Achse zu der einfachsten Construction central-collinearer Systeme. Zu einem Punkte $a$ des einen Systems bestimmt sich der entsprechende Punkt $a'$ des andern mit Hilfe der Gegenachse dieses letzteren, der Collineations-Achse und des Collineations-Centrums, wie folgt: Man verbindet den Punkt $a$ mit dem Centrum $C$ durch eine gerade Linie, zieht durch $a$ eine beliebige andre gerade Linie bis zur Collineations-Achse in $g$, und durch das Centrum eine zu ihr parallele Gerade bis zur Gegen-Achse in $h$; der Durchschnittspunkt der geraden Linien $gh$ und $Ca$ ist der gesuchte entsprechende Punkt $a'$.

Wie diese Construction einerseits aus den vorher entwickelten analytischen Ergebnissen hervorgeht, so stimmt sie andrerseits vollständig mit derjenigen überein, durch welche in der darstellenden Geometrie die Perspective eines ebenen Systems bestimmt wird. *)

464. Auf den ersten Blick konnte es scheinen, als wenn die allgemeine Methode der collinearen Transformation, auf Grund des Ueberschusses von drei Constanten, welche ihre allgemeinen Gleichungen vor denen der projectivischen Transformation voraushaben, ein wirksameres und kräftigeres Untersuchungsmittel sein müsse als diese letztere; als wenn ihr Gebrauch zur Ableitung von noch allgemeineren Sätzen aus bereits bekannten führen müsse, als die Methode der Projection.

Das Vorhergehende hat diesen Ueberschuss von unabhängigen Constanten bereits als einen nicht sowohl dem formalen Zusammenhang beider Systeme als vielmehr dem ihrer gegenseitigen

---

*) Wir bemerken hier, dass die im Artikel 298 entwickelte Art des gegenseitigen Entsprechens zweier Kegelschnitte eine Central-Collineation ist, bei welcher der Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten (der inneren oder äusseren) das Centrum und die gemeinschaftliche Sehne beider Kegelschnitte die Collineations-Achse ist. Die Gegen-Achsen gehen durch diejenigen Punkte, in welchen die Berührungssehne des umschriebenen Winkels in der einen Curve durch eine vom Centrum ausgehende Parallele zur Berührungssehne desselben Winkels in der andern Curve geschnitten wird. Die Collineationsachse ist für Kegelschnitte das, was die Chordale für Kreise ist. Man gelangt durch lineare Constructionen vom Centrum zur Achse der Collineation und umgekehrt.

Lage zukommenden angezeigt. Wir fügen jetzt den geometrischen und den analytischen Beweis davon hinzu, dass in der That diese scheinbar grössere Allgemeinheit nur in der Unabhängigkeit der gegenseitigen Lage beider Systeme besteht.

Durch eine Drehung um einen gegebenen Winkel und durch Parallelverschiebung in einer bestimmten Richtung und um eine bestimmte Länge kann jedes System, welches einem gegebenen im Allgemeinen collinear-verwandt ist, mit diesem in die central-collineare Lage gebracht werden, welche projectivischer Transformation entspricht. Der Bestimmung jenes Winkels und dieser Richtung und Länge entsprechen eben jene drei überschüssigen Constanten.

465. Wir beweisen dies zuerst geometrisch.

Wenn ein ebenes System in einer bestimmten Richtung parallel mit sich selbst, also ohne jede Drehung, bewegt wird, so bleiben alle unendlich entfernten Punkte desselben unverändert, weil die am Ende der Bewegung von allen geraden Linien des Systems eingenommenen Lagen denen parallel sind, welche sie vor Beginn derselben besassen.

Wenn dasselbe System um irgend einen festen Punkt gedreht wird, so verbleibt wenigstens jeder unendlich entfernte Punkt desselben in unendlicher Entfernung, obgleich er seinen Ort in der unendlich entfernten geraden Linie verändert; denn ein System von Parallellinien bleibt auch nach Beendigung der Drehung noch ein solches. Während aber im Allgemeinen die Punkte dieser unendlich entfernten geraden Linie ihren Ort in derselben verändern, bleiben die beiden ihr angehörigen imaginären Kreispunkte allein unverändert, weil jeder Kreis des Systems auch nach der Drehung ein Kreis bleibt.

Wenn daher gefordert wird, von zwei collinearen Figuren die eine so zu bewegen, dass sie in die projectivische oder central-collineare Lage zur andern kommt, so muss, weil keine Bewegung die Lage der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte $\omega, \omega'$ ändern kann, das Centrum der Collineation nothwendig der Punkt sein, in welchem die Verbindungslinien derselben mit den ihnen entsprechenden Punkten $o, o'$ der andern Figur sich schneiden; wir bezeichnen diesen Durchschnittspunkt der geraden Linien $\omega o$, $\omega' o'$ mit $\lambda$, und denjenigen, welcher in der ersten Figur ihm entspricht, durch $l$; bringen wir dann $l$ zum Zusammenfallen mit $\lambda$ und drehen die erste Figur so um $l$, dass zwei correspondirende Punkte $m$ und $\mu$ mit $l$ in eine gerade Linie fallen, so kommen dadurch beide Figuren in die central-collineare perspectivische Lage, d. h. jedes andre Paar correspondirender Punkte $n, \nu$ liegt auch mit $l$ in einer geraden Linie. Dies geht einfach aus der Nothwendigkeit hervor, dass die Doppelschnittverhältnisse der beiden Strahlenbüschel

$$(l\,.\,\omega\omega'\mu\nu) \text{ und } (l\,.\,oo'mn),$$

welche drei correspondirende gemeinschaftliche Strahlenpaare haben, einander gleich sein müssen.

466. Der Wichtigkeit dieses Satzes wegen beweisen wir ihn im Anschluss an die vorige geometrische Entwicklung auch analytisch. Dazu ist nur nöthig, den analytischen Ausdruck des Punktes $l$ zu entwickeln, welcher zum Centrum der Collineation zu nehmen ist.

Die gerade Linie $o\omega$ verbindet die Punkte

$$x + y\sqrt{-1} = o,\ z = o$$

und

$$ax + by + cz + (a_1x + b_1y + c_1z)\sqrt{-1} = o,\ a_2x + b_2y + c_2z = o,$$

und ihre Gleichung ist demnach

$$(b_2 - a_2\sqrt{-1})\,[(ax + by + cz) + (a_1x + b_1y + c_1z)\sqrt{-1}]$$
$$- [a_1 + b + (b_1 - a)\sqrt{-1}]\,(a_2x + b_2y + c_2z) = o,$$

oder

$$(ab_2 - a_2b)x + (a_2b_1 - a_1b_2)y + [(cb_2 - c_2b) + (c_1a_2 - c_2a_1)]z$$
$$+ \sqrt{-1}\,[(a_1b_2 - a_2b_1)x + (ab_2 - a_2b)y + (c_1b_2 - c_2b_1)z$$
$$+ (ac_2 - a_2c)z] = o.$$

Die Gleichung der geraden Linie $o'\omega'$ unterscheidet sich von ihr lediglich durch das Vorzeichen des mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theils.

Der verlangte Punkt ist demnach der Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien, welche durch die getrennte Vergleichung des reellen und imaginären Theils dieser Gleichung mit Null repräsentirt werden. Er ist also stets ein reeller und bestimmter Punkt.

467. Auf die besonderen Fälle der collinearen Verwandtschaft ebener Systeme näher einzugehen, erscheint uns unnöthig; wir überlassen die specielle Entwicklung dem Leser und erwähnen nur die Namen und charakteristischen Merkmale derjenigen unter ihnen, welche nicht, wie Aehnlichkeit und Congruenz, der Elementar-Geometrie angehören. Es ist die Affinität, derjenige specielle Fall der Collineation, für welchen der unendlich entfernten geraden Linie des einen Systems die unendlich entfernte gerade Linie des andern Systems entspricht, für welche das Collineations-Centrum in unendlicher Entfernung liegt und in Folge dessen die Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse entsprechender Punktereihen auf entsprechenden geraden Linien in Gleichheit der einfachen Schnittverhältnisse übergeht; für welchen endlich entsprechende Flächen beider Figuren in constantem Verhältniss stehen, — und die Flächengleichheit, derjenige specielle Fall der vorigen, für welchen dies constante Verhältniss der entsprechenden Flächen der Einheit gleich ist.

Und wir fügen hinzu, dass diese Verwandtschaften alle der Methode der Projectionen angehören, welche nur eine besondere Lage der verwandten Systeme voraussetzt. Affinität und Flächengleichheit entsprechen der Orthogonalprojection ebenso wie Collineation und Aehnlichkeit der Centralprojection; die Congruenz gehört endlich als der speciellste Fall beiden Projectionsmethoden an. Wir bezeichnen die Entwicklung dieser Verhältnisse als einen fruchtbaren Uebungsstoff.

468. In möglichst analoger Weise untersuchen wir nun im Folgenden die Verwandtschaft der Reciprocität. Wir wollen dabei das trimetrische Punkt-Coordinaten-System allein anwenden und von der doppelten Interpretation der Gleichungen, wie wir sie im Art. 454 andeuteten, abstrahiren. Dann wird die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche dem gegebenen Punkte $x', y', z'$ entspricht, in der Form

$$(a_1 x' + b_1 y' + c_1 z')\, x + (a_2 x' + b_2 y' + c_2 z')\, y + (a_3 x' + b_3 y' + c_3 z')\, z = o$$

gefunden; denn die von den Fundamental-Punkten auf diese gerade Linie gefällten Perpendikel sind den senkrechten Abständen des entsprechenden Punktes von drei festen geraden Linien proportional.

Diese Gleichung enthält acht unabhängige Constante, wie wir schon früher von der allgemeinen Gleichung der Reciprocität erwähnt haben.

Wenn beide Systeme in derselben Ebene liegen, wie wir voraussetzen, so entspricht doch im Allgemeinen jedem Punkte dieser Ebene eine andere gerade Linie, je nachdem man ihn als dem ersten oder zweiten System angehörig betrachtet; wir brauchen nur den Punkt $x, y, z$ der vorigen Entwicklung als fest und den Punkt $x', y', z'$ als veränderlich zu betrachten, um durch eine blosse veränderte Ordnung der vorigen Gleichung und den Wechsel der Indices der Veränderlichen die Form

$$(a_1x' + a_2y' + a_3z')x + (b_1x' + b_2y' + b_3z')y + (c_1x' + c_2y' + c_3z')z = o$$

zu erhalten, als die Gleichung der geraden Linie des ersten Systems, welche einem Punkte des zweiten entspricht.

Im Falle der reciproken Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt entspricht einem beliebigen Punkte die nämliche gerade Linie, ob man ihn als zum ersten oder zweiten System gehörig betrachtet. In der That werden die beiden vorigen Gleichungen äquivalent, wenn

$$a_2 = b_1, \quad b_3 = c_2, \quad c_1 = a_3$$

ist; alsdann enthalten sie nur noch fünf unabhängige Constante und drücken die Beziehung von Pol und Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt aus.

469. Um eine geometrische Construction zu entwickeln, welche von einem gegebenen Punkte zur entsprechenden geraden Linie führt und umgekehrt, untersuchen wir zuerst den Ort der Punkte, welche in ihren Polaren liegen. Die Gleichung desselben ist offenbar

$$a_1x^2 + (a_2 + b_1)xy + b_2y^2 + (b_3 + c_2)yz + (a_3 + c_1)xz + c_3z^2 = o$$

und soll durch $U = o$ abkürzend bezeichnet und als Pol-Kegelschnitt benannt werden. Dieser Kegelschnitt wird ebensowohl erhalten, wenn wir den Punkt als zum ersten, als wenn wir ihn als zum zweiten System gehörig betrachten. Wir suchen demnächst die Enveloppe derjenigen geraden Linien, welche durch ihre Pole hindurchgehen; wenn $x', y', z'$ ein Punkt in dem eben betrachteten Kegelschnitt ist, so ist die Enveloppe der geraden Linie $$ux' + vy' + wz' = o$$

durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(b_3^2 + c_2^2 + 2b_3c_2 - 4b_2c_3)\,u^2 &+ (a_3^2 + c_1^2 + 2a_3c_1 - 4a_1c_3)\,v^2 \\ &+ (a_2^2 + b_1^2 + 2a_2b_1 - 4a_1b_2)\,w^2 \\ + (4a_1b_3 + 4a_1c_2 - 2a_2a_3 &- 2a_2c_1 - 2b_1a_3 - 2b_1c_1)\,vw \\ + (4b_2a_3 + 4b_2c_1 - 2a_2b_3 &- 2a_2c_2 - 2b_1b_3 - 2b_1c_2)\,uw \\ + (4a_2c_3 + 4b_1c_3 - 2c_1c_2 &- 2a_3b_3 - 2c_1b_3 - 2c_2a_3)\,uv = o\end{aligned}$$

ausgedrückt.

Die fragliche Enveloppe ist also ein Kegelschnitt, welcher derselbe bleibt, ob man die fragliche gerade Linie als dem ersten oder dem zweiten System angehörig betrachtet; wir nennen ihn den **Polar-Kegelschnitt.**

Vermittelst dieser beiden Hilfskegelschnitte construiren wir leicht **die Polare eines beliebigen Punktes im Pol-Kegelschnitt und den Pol einer beliebigen Tangente des Polar-Kegelschnitts.**

Jene wird erhalten, indem man die durch den Punkt gehenden Tangenten des Polar-Kegelschnitts verzeichnet; die eine ist die Polare des Punktes, wenn man ihn als dem ersten System angehörig betrachtet, die andre die ihm entsprechende Polare, insofern er als zum zweiten System gehörig angesehen wird.

Dieser wird gefunden, indem man die beiden Punkte bezeichnet, welche die gegebene Tangente mit dem Pol-Kegelschnitt gemein hat; denn einer von ihnen ist der Pol derselben, insofern sie dem ersten, der andere ihr Pol, insofern sie dem zweiten System angehört. Beide Constructionen folgen unmittelbar aus dem aufgestellten Begriff des einen und andern Hilfskegelschnittes.

470. **Alsdann wird die Polare eines beliebigen Punktes $O$ wie folgt gefunden:** Wir ziehen durch ihn die beiden Tangenten $OT_1$, $OT_2$ des Polar-Kegelschnitts und bestimmen deren Schnittpunkte $A_1$, $A_2$ und $B_1$, $B_2$ mit dem Pol-Kegelschnitt. Die geraden Linien $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ sind die beiden dem Punkte $O$ entsprechenden Geraden und zwar entspricht ihm $A_1\,B_1$ im ersten System, wenn $A_1$ der Punkt ist, welcher der Tangente $OT_1$ im ersten System entspricht, und $B_1$ der Punkt, welcher in gleicher Weise der Tangente $OT_2$ entspricht.

Um den Pol einer gegebenen geraden Linie zu finden, welche den Pol-Kegelschnitt in den Punkten $A$, $B$ schneidet, ziehen wir von diesen die Tangenten $AP_1$, $AP_2$ und $BQ_1$, $BQ_2$ an den Polar-Kegelschnitt; wenn dann $AP_1$, $BQ_1$ die geraden Linien des ersten Systems sind, welche den Punkten $A$, $B$ als Polaren entsprechen, so bezeichnet ihr Durchschnittspunkt denjenigen Punkt des ersten Systems, welcher der Pol der gegebenen geraden Linie ist; in derselben Art bestimmt der Durchschnittspunkt der geraden Linien $AP_2$ und $BQ_2$ den Pol von $AB$ im zweiten System.

Für die Voraussetzungen

$$a_2 = b_1, \; b_3 = c_2, \; c_1 = a_3$$

werden die beiden betrachteten Hilfskegelschnitte identisch und diese Constructionen reduciren sich auf die, welche in der Theorie der reciproken Polaren angegeben sind. Man hat diesen Kegelschnitt als die Directrix der Reciprocität bezeichnet. Die Polare eines in ihm liegenden Punktes ist die Tangente für diesen Punkt; die Polare eines beliebigen andern Punktes ist die gerade Verbindungslinie der Punkte, in welchen die von ihm ausgehenden Tangenten den bezeichneten Kegelschnitt berühren, und ist somit die nämliche gerade Linie, ob man den Punkt als zum ersten oder zweiten System gehörig betrachtet. Das Analoge gilt für den Pol einer beliebigen geraden Linie.

471. Aus diesen Ergebnissen ergiebt sich rein geometrisch, dass der Pol-Kegelschnitt und der Polar-Kegelschnitt eine doppelte Berührung mit einander haben. Denn für jeden Durchschnittspunkt dieser Kegelschnitte fallen beide Polaren mit der entsprechenden Tangente des Polar-Kegelschnitts zusammen; in Folge dessen müssen beide Pole dieser geraden Linie, d. i. die Punkte, welche sie mit dem Pol-Kegelschnitt gemein hat, zusammenfallen und man erkennt daraus, dass die Tangente des Polar-Kegelschnitts in einem seiner Durchschnittspunkte mit dem Pol-Kegelschnitt auch diesen letzteren berühren muss. Dasselbe Ergebniss erhält man auch analytisch; denn wenn man an Stelle von $u, v, w$ ihre Werthe in die allgemeine Gleichung des Polar-Kegelschnitts im letzten Artikel einsetzt, so kann man dieselbe in der Form schreiben

$$\begin{aligned}[x(a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 c_1 - a_1 c_2) + y(b_2 c_1 - b_1 c_2 + b_3 a_2 - b_2 a_3) \\ + z(c_3 a_2 - c_2 a_3 + c_1 b_3 - c_3 b_1)]^2 \\ + 4U[a_1(c_2 b_3 - c_3 b_2) + a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_2 c_1 - b_1 c_2)] = o,\end{aligned}$$

aus welcher augenscheinlich ist, dass er mit dem Kegelschnitt $U = o$ eine doppelte Berührung hat.

472. Andrerseits lehren diese Betrachtungen, dass es drei Punkte giebt, deren Polaren dieselben sind, ob man sie als dem einen oder dem andern System angehörig betrachtet. Solche Punkte sind die Berührungspunkte des Pol-Kegelschnitts mit dem Polar-Kegelschnitt, denn die gemeinschaftlichen Tangenten sind ihre Polaren, gleichviel zu welchem System man sie rechnet. Und zu ihnen kommt als ein dritter derartiger Punkt der Durchschnittspunkt dieser gemeinschaftlichen Tangenten, denn seine Polare ist in jedem Falle die Berührungssehne beider Kegelschnitte. Von diesen Punkten liegen die ersten beiden zugleich in ihren respectiven Polaren, der dritte nicht. Man kann sich auch analytisch von der Existenz und der Anzahl solcher Punkte überzeugen; denn angenommen, dass die Gleichungen der Polaren in den beiden Systemen durch

$$ux + vy + wz = o, \quad u_1x + v_1y + w_1z = o$$

repräsentirt sind, so genügen den Relationen

$$\frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1},$$

welche ihre Identität erfordert, aus denselben Gründen, wie im Art. 457, drei Punkte, welches die vorher bezeichneten sind.

473. Es ist wünschenwerth zu zeigen, dass die entwickelten Constructionen keine Zweideutigkeit enthalten, durch welche zweifelhaft bleiben müsste, welcher der zwei Pole einer gegebenen geraden Linie dem ersten und welcher dem zweiten System angehöre. Folgende Bemerkungen sind dazu geeignet. Zwei Kegelschnitte, welche eine doppelte Berührung besitzen, können stets als zwei ähnliche concentrische Kegelschnitte projicirt werden; es vereinfacht die Untersuchung, wenn wir sie als solche betrachten. Sind alsdann $A, B$ die beiden Pole einer beliebigen Tangente des Polar-Kegelschnitts und $A_1$, $B_1$, die einer andern eben solchen Tangente; alsdann gehört $A_1$ zum ersten System, weil $A$ mit $A_1$ und $B$ mit $B_1$ zusammenfällt, wenn man $AB$ durch stetige Fortbewegung längs des Polar-Kegelschnitts mit $A_1 B_1$ zur Deckung bringt. Die Unterscheidung zwischen den Punkten kann mit Hilfe dieses Satzes leicht gemacht werden; die geraden Linien $A_1 B$ und $AB_1$ sind in dem Falle concentrischer und ähnlicher Kegelschnitte parallel und durchschneiden sich in dem allgemeinen Falle, wie es die Methode der Projectionen zeigt, in der Berührungssehne der

Kegelschnitte. Und wenn wir demnach umgekehrt von zwei Punkten des Pol-Kegelschnitts Tangenten an den Polar-Kegelschnitt legen, so muss die Bezeichnung derselben als $oa_1$, $oa_2$, $pb_1$, $pb_2$ so geschehen, dass die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes von $oa_1$ und $pb_2$ mit dem von $oa_2$ und $pb_1$ durch den Pol der Berührungssehne der beiden Kegelschnitte geht.

474. Wir sind durch das Vorhergehende an mehreren Stellen schon zu dem Schlusse angeregt, dass das Mehr von drei Constanten in dem Falle der allgemeinen Verwandtschaft der Reciprocität gegen den Fall, welcher der Theorie der reciproken Polaren zu Grunde liegt, nur einer Lagenverschiedenheit beider Systeme in diesem und jenem Falle entsprechen möge. Das Folgende dient zur genauen Begründung desselben. In der That ist die allgemeine Polare $ux + vy + wz = o$ nur eine Projection der reciproken Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt

$$x\xi + y\eta + z\zeta = o,$$

und die Anwendung der allgemeinen Theorie der Reciprocität führt eben deshalb zu keinerlei Ergebnissen, die nicht auch durch die Theorie der reciproken Polaren im Verein mit der Methode der Projectionen erhalten werden könnten.

Wenn man verlangt, zwei Figuren, welche in der Verwandtschaft der Reciprocität stehen, in eine solche gegenseitige Lage zu bringen, dass die Polare jedes Punktes ihrer Ebene dieselbe bleibt, ob man ihn dem ersten oder zweiten System beizählen möge, so muss der erste Schritt sein, den Pol der unendlich entfernten geraden Linie in jedem System zu bestimmen, weil diese Gerade durch keine Lagenveränderung der Figur berührt wird. Man bringt dann beide Systeme in die gegenseitige Lage, dass diese Pole der unendlich entfernten geraden Linie in beiden sich decken; man sieht leicht, dass dieselben die Mittelpunkte des Pol- und des Polar-Kegelschnittes sind, und dass diese beiden Kegelschnitte dadurch ähnlich und concentrisch werden.

475. Wenn man hiernach das eine der beiden reciproken Systeme um das gemeinschaftliche Centrum $O$ dreht, so kann es dadurch zu dem andern in eine solche Lage gebracht werden, dass die Polare eines beliebigen unendlich entfernten Punktes $A$ in Bezug auf beide Systeme dieselbe gerade Linie $OB$ wird. Wäre dies vollzogen, so

würde die Polare $OD$ jedes andern unendlich entfernten Punktes $C$ für beide Systeme die nämliche sein; denn das Doppelschnittverhältniss der vier Punkte des ersten Systems $ABCD$ ist dem des entsprechenden Strahlenbüschels des zweiten Systems, nämlich $OB$, $OA$, $OD$, $OX$, gleich, und da drei Strahlen dieses Büschels den Punkten $B$, $A$, $D$ zugehören, so muss der vierte Strahl $OX$ mit $OC$ zusammenfallen, d. i. die Polare des Punktes $D$ ist die nämliche, ob man sie als dem ersten oder zweiten System angehörig betrachtet, und ebenso die Polare des Punktes $C$.

Da nun die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte bei jeder Drehung der Figur unverändert bleiben, so haben wir nur die Polaren eines dieser Punkte, die im Allgemeinen nicht durch denselben Punkt gehen werden, durch die Drehung des einen Systems um das Centrum zum Zusammenfallen zu bringen; dann fallen nach dem, was so eben bewiesen worden ist, die Polaren aller Punkte zusammen.

476. Man kann leicht einen Ausdruck zur Bestimmung des Winkels erhalten, um welchen das System zu diesem Zweck zu drehen ist. Denn die allgemeinen Gleichungen der beiden Polaren eines beliebigen Punktes unter der Voraussetzung der concentrischen Lage und bei der Wahl des Centrums zum Anfangspunkt der Coordinaten sind

$$(a_1 x' + b_1 y')x + (a_2 x' + b_2 y')y + c_3 = o,$$
$$(a_1 x' + a_2 y')x + (b_1 x' + b_2 y')y + c_3 = o.$$

In Folge dessen sind die Polaren des unendlich entfernten Punktes, für welchen $y' = x'\sqrt{-1}$ ist, durch

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1})x + (a_2 + b_2\sqrt{-1})y = o,$$
$$(a_1 + a_2\sqrt{-1})x + (b_1 + b_2\sqrt{-1})y = o$$

repräsentirt. Der Winkel, um welchen eine dieser geraden Linien gedreht werden muss, um mit der andern zusammenzufallen, ist die Differenz der Winkel, welche die Quotienten

$$-\frac{a_1 + b_1\sqrt{-1}}{a_2 + b_2\sqrt{-1}} \text{ und } -\frac{a_1 + a_2\sqrt{-1}}{b_1 + b_2\sqrt{-1}}$$

zu ihren trigonometrischen Tangenten haben. Dieser Winkel $\vartheta$ findet sich aber durch den Ausdruck

$$\tan\vartheta = \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2}$$

bestimmt.

Und wir gelangen durch eine Betrachtung anderer und mehr elementarer Art zu demselben Ergebniss. Wenn im Allgemeinen die dem Punkte $x'$, $y'$ des ersten Systems entsprechende gerade Linie des zweiten Systems durch

$$(a_1 x' + b_1 y')x + (a_2 x' + b_2 y')y + c_3 = o$$

dargestellt wird, so verändert sich diese Gleichung durch die Drehung des Systems um den Winkel $\vartheta$ in

$$(a_1 x' + b_1 y')(x \cos\vartheta - y \sin\vartheta) + (a_2 x' + b_2 y')(x \sin\vartheta + y \cos\vartheta) + c_3 = o,$$

oder

$$[(a_1 \cos\vartheta + a_2 \sin\vartheta)x' + (b_1 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta)y']x + [(a_2 \cos\vartheta - a_1 \sin\vartheta)x' + (b_2 \cos\vartheta - b_1 \sin\vartheta)y']y + c_3 = o.$$

Aber durch dieselbe Drehung des Achsensystems ändert sich die Gleichung der dem Punkt $x'$, $y'$ entsprechenden geraden Linie in die Form

$$[(a_1 \cos\vartheta + a_2 \sin\vartheta)x' + (a_2 \cos\vartheta - a_1 \sin\vartheta)y']x + [(b_1 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta)x' + (b_2 \cos\vartheta - b_1 \sin\vartheta)y']y + c_3 = o.$$

Und diese ist mit der vorigen nur dann identisch, wenn

$$b_1 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta = a_2 \cos\vartheta - a_1 \sin\vartheta$$

ist, d. i. wenn, wie vorher,

$$\tan\vartheta = \frac{a_2 - b_1}{a_1 + b_2}$$

ist.

477. Nachdem wir den allgemeinen Charakter der Methoden hinreichend erläutert haben, welche den Gegenstand dieses Kapitels bilden, wollen wir noch von mehreren unter den Principien, welche in ihnen hervortreten, einige Anwendungen machen, welche besonders geeignet scheinen, namentlich die generalisirende Kraft derselben und zugleich die enge Verbindung unter allen Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte und mit der algebraischen Methode der homogenen Gleichungen recht anschaulich zu machen.

Wir nehmen dazu unsern Ausgangspunkt von einem Satze über vier Normalen eines Kegelschnittes, welche sich in demselben Punkte schneiden. Sind $a, b, c, d$ die Fusspunkte solcher Normalen, und nimmt man den Pol $O$ der zwischen zweien $(a, b)$ derselben gezogenen Sehne des Kegelschnittes in Bezug auf diesen letzteren, so bestimmt sich durch ihn die die beiden andern Punkte $c, d$ enthaltende gerade Linie auf folgende Weise: Man fällt von dem bezeichneten Pol auf die Achsen des Kegelschnitts Perpendikel und trägt die Abschnitte, welche sie in diesen mit dem Centrum bestimmen, von demselben aus nach der entgegengesetzten Seite auf: die gerade Verbindungslinie der so erhaltenen Punkte geht auch durch die Punkte $c$, $d$.

Wir schliessen an denselben zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die Normalen der Curven überhaupt. Wenn $\alpha$ und $\beta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, $x$ und $y$ die ihres Berührungspunktes sind, so ist ihre Gleichung

$$(\alpha - x)\,dy - (\beta - y)\,dx = o,$$

und die der zugehörigen Normale

$$(\alpha - x)\,dx + (\beta - y)\,dy = o,$$

oder für die durch die Gleichung $S = o$ repräsentirte Curve zweiten Grades

$$(\alpha - x)\frac{dS}{dy} = \frac{dS}{dx}(\beta - y).$$

Betrachten wir $\alpha$, $\beta$ als constant, $x$, $y$ als veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Curve zweiten Grades dar, auf welcher die Fusspunkte der Normalen eines Kegelschnitts zu suchen sind, die von einem gewissen Punkte $\alpha$, $\beta$ ausgehen; sie sind die Durchschnittspunkte dieser Curve mit dem gegebenen Kegelschnitt, und es gehen daher durch jeden Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts vier Normalen desselben. Jedoch sind von diesen nur zwei reell, wenn der fragliche Punkt ausserhalb der Evolute der Curve liegt. Vier reelle Normalen giebt es nur für die innerhalb der Evolute liegenden Punkte. Zu demselben Schlusse kann man auch gelangen, wenn man die von einem unendlich entfernten Punkte ausgehenden Normalen untersucht; da sie eine gegebene Richtung haben, so sind ihrer zunächst ebenso viel als es Tangenten von der auf dieser senkrechten Richtung giebt; indem man aber bedenkt, dass eine Normale der Curve, die einem unendlich entfernten Punkte derselben entspricht, selbst ganz in unendlicher Entfernung liegen muss, so ergiebt sich, dass zu jenen zwei Normalen der vorigen Betrachtung die beiden den unendlich entfernten Punkten der Curve entsprechenden Normalen der Curve hinzuzufügen sind, so dass wir ebenfalls die Zahl vier als die der sämmtlichen Normalen erhalten. Wenn die unendlich entfernte gerade Linie die Curve selbst tangirt, so vermindert sich die Zahl der von einem ihrer Punkte ausgehenden Tangenten und damit die Zahl der Normalen um eine; in Folge dessen können nur drei Normalen einer Parabel von demselben ausgehen.

Wenn die unendlich entfernten imaginären Kreispunkte der Curve angehören, so vermindert sich die Zahl der Normalen um zwei, denn die Normalen dieser Punkte fallen mit den Tangenten derselben zusammen und gehen also nicht durch irgend einen andern unendlich entfernten Punkt. Man erkennt dies aus den Gleichungen dieser beiden zu einander rechtwinkligen Linien, welche

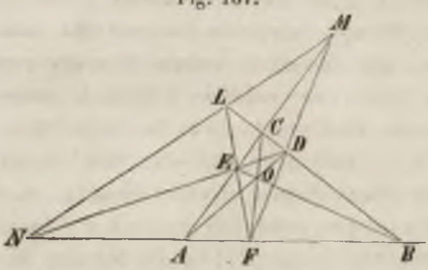
die Formen $$y = ix \text{ und } y = -\frac{1}{i}x$$

haben und daher identisch sind.

Man wird leicht sehen, wie die Construction des vorigen Satzes den hier ausgesprochenen Ergebnissen genügt, wie sie insbesondere für die Parabel den Fusspunkt der dritten Normale zu zwei gegebenen leicht genug bestimmt.

478. Es sind aber zwei verschiedene Partien dieses Satzes, welche der allgemeineren Gestaltung fähig sind: Einerseits der Begriff der Normale eines Kegelschnitts, andrerseits die Construction der geraden Linie $cd$ mit Hilfe der Achsen desselben. Betrachten wir zuerst die letztere, so lässt sich die gerade Linie $cd$ als die Polare oder Harmonikale des Pols von $ab$ in Bezug auf das Dreieck bezeichnen, welches von den Achsen des Kegelschnitts mit der unendlich entfernten geraden Linie gebildet wird. Die

Fig. 137.




Harmonikale eines Punktes $O$ in Bezug auf ein Dreieck $ABC$ ist diejenige gerade Linie $LMN$ (Fig. 137), welche in den Seiten des Dreiecks $BC$, $CA$, $AB$ die conjugirt harmonischen Punkte $L$, $M$, $N$ zu den Punkten $D$, $E$, $F$ bestimmt, die von den geraden Verbindungslinien des Punktes $O$ mit den Ecken des Dreiecks in ihnen bezeichnet werden. Sobald man eine der Seiten des Dreiecks in unendlicher Entfernung und den gegenüberliegenden Winkel desselben als einen rechten voraussetzt, geht diese allgemeine Construction in diejenige über, welche im vorhergehenden Satze vom Pol der Sehne $ab$ zu der geraden Linie $cd$ führte.

Die allgemeine Beziehung, in welcher das von den Achsen und der unendlich entfernten geraden Linie gebildete Dreieck zu dem gegebenen Kegelschnitt steht, ist aber die, dass es in Bezug auf ihn ein sich selbst conjugirtes Dreieck ist. Wenn man an Stelle desselben ein beliebiges anderes sich selbst conjugirtes Dreieck wählt, und in Bezug auf dasselbe die Polare oder Harmonikale des Punktes $O$ nach der allgemeinen Construction bestimmt, so hat man damit die allgemeine Gestalt des Zusammenhangs, welcher die Linie $cd$ mit dem Pol der Sehne $ab$ verbindet.

Andrerseits ist der Begriff der Normale einer Curve einer wesentlichen Erweiterung fähig. Die Normale und die Tangente der Curve sind rechtwinklig zu einander in demjenigen Punkte derselben, welchem sie entsprechen, und bestimmen in Folge dessen in der unendlich entfernten geraden Linie zwei Punkte, welche mit den beiden imaginären Kreispunkten in ihr ein harmonisches System bilden. Bei einer projectivischen Transformation verschwindet die Rechtwinkligkeit, und die allgemeine Relation der harmonischen Theilung tritt an ihre Stelle; Tangente und Normale projiciren sich als gerade Linien, welche in Bezug auf die geraden Verbindungslinien ihres Durchschnittspunktes mit den Projectionen der beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte harmonisch conjugirt sind. Dass die erste zugleich Tangente der projicirten Curve bleibt, ist selbstverständlich. Wir wollen die nach dieser allgemeinen Auffassung erhaltene gerade Linie die Quasi-Normale nennen. Wenn man zunächst diesen erweiterten Begriff mit dem Vorhergehenden verbindet, so erkennt man leicht, dass die Projectionen der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte einer Seite des sich selbst conjugirten Dreiecks angehören und dass sie mit den Endpunkten dieser Seite ein harmonisches System bilden müssen. Damit geht der Satz, welchen wir betrachten, in den folgenden über: Man hat zwei Punkte $a$, $b$ in einem Kegelschnitt und in einer der Seiten eines in Bezug auf ihn sich selbst conjugirten Dreiecks ein Paar feste Punkte $J$, $J'$, welche mit den Endpunkten derselben ein harmonisches System bilden. Verbindet man alsdann jeden der beiden Punkte $a$, $b$ mit diesen festen Punkten und bestimmt die vierte Harmonikale zu dem von diesen Verbindungslinien mit der zugehörigen Tangente gebildeten Büschel und den Schnittpunkt $O'$ der so erhaltenen beiden geraden Linien; bestimmt man endlich zu dem Durchschnittspunkt $O$ der Tangenten in $a$ und $b$ die Harmonikale $LMN$ in

Bezug auf das sich selbst conjugirte Dreieck, so schneidet diese letztere den Kegelschnitt in zwei Punkten *c* und *d*, für welche die vierten harmonischen Strahlen zu den von ihren Tangenten mit ihren geraden Verbindungslinien mit jenen festen Punkten *J*, *J'* gebildeten Systemen gleichfalls in dem Punkte *O'* zusammentreffen.

Aber auch dies ist noch nicht die allgemeinste Form des Satzes, denn die imaginären unendlich entfernten Kreispunkte repräsentiren einen Ort zweiter Klasse (Art. 320), und man kann daher an ihre Stelle einen Kegelschnitt setzen; alsdann sind die Tangente und die Quasi-Normale des gegebenen Kegelschnitts in Bezug auf diesen letzteren harmonisch conjugirt; ist die Tangente bekannt, so erhält man die Quasi-Normale als die Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem in Bezug auf diesen Kegelschnitt genommenen Pol der Tangente. Man erkennt jedoch leicht, dass nur ein solcher Kegelschnitt zur Vertretung dieser imaginären Kreispunkte geeignet ist, welcher mit dem gegebenen das in der vorigen Erweiterung betrachtete sich selbst conjugirte Dreieck gemeinschaftlich hat. (Vergl. Art. 370.)

479. Damit nimmt dann unser Satz die allgemeinste Gestalt an, deren er fähig scheint, ohne dass man den Begriff der Tangente aufgiebt, und lautet wie folgt: Wenn man für zwei Punkte *a*, *b* eines Kegelschnitts die Tangenten und ihren Durchschnittspunkt *O*, und die beiden geraden Linien, welche diesen Tangenten in Bezug auf einen gegebenen zweiten Kegelschnitt harmonisch conjugirt sind, und ihren Durchschnittspunkt *O'* bestimmt, wenn man sodann die Harmonikale des Punktes *O* in Bezug auf das sich selbst conjugirte Dreieck construirt, welches beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich ist, so gehen für die beiden Durchschnittspunkte *c*, *d* dieser letzteren geraden Linie mit dem ersten gegebenen Kegelschnitte diejenigen Geraden, welche den entsprechenden Tangenten in Bezug auf diesen zweiten Kegelschnitt harmonisch conjugirt sind, durch den nämlichen Punkt *O'*.

In dieser Gestalt wollen wir den Satz in möglichster Kürze analytisch beweisen und uns dabei der Vortheile bedienen, welche den Gebrauch der homogenen Gleichungen überhaupt und insbesondere der der kanonischen Form darbietet.

Ist das beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck zum Fundamental-Dreieck genommen, so dass seine Seiten durch die Gleichungen $x = o$, $y = o$, $z = o$ repräsentirt werden, so sind die Gleichungen der beiden Kegelschnitte in der Form $x^2 + y^2 + z^2 = o$, $ax^2 + by^2 + cz^2 = o$ zu nehmen; die letztere bezeichne den gegebenen Kegelschnitt, welchem die Punkte $a, b, c, d$ des Satzes angehören. Indem man bemerkt, dass zwei gerade Linien

$$Ax + By + Cz = o, \quad A'x + B'y + C'z = o$$

in Bezug auf den ersten Kegelschnitt harmonisch conjugirt sind, wenn die Relation

$$AA' + BB' + CC' = o$$

erfüllt ist, erhält man als die Gleichung der Quasi-Normale des gegebenen Kegelschnitts im Punkte $x, y, z$ leicht

$$\frac{x(b-c)}{x_1} + \frac{y(c-a)}{y_1} + \frac{z(a-b)}{z_1} = o.$$

Ebenso entsprechen den Normalen der Punkte $x_2, y_2, z_2$ und $x_3, y_3, z_3$ die Gleichungen

$$\frac{x(b-c)}{x_2} + \frac{y(c-a)}{y_2} + \frac{z(a-b)}{z_2} = o,$$

$$\frac{x(b-c)}{x_3} + \frac{y(c-a)}{y_3} + \frac{z(a-b)}{z_3} = o,$$

und die Bedingung, unter welcher diese drei Normalen sich in einem Punkte schneiden, ist

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{y_1}, & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2}, & \frac{1}{y_2}, & \frac{1}{z_2} \\ \frac{1}{x_3}, & \frac{1}{y_3}, & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = o.$$

Da aber diese drei Punkte auch dem gegebenen Kegelschnitt angehören und ihre Coordinaten somit seiner Gleichung genügen müssen, so ist auch

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & z_1^2 \\ x_2^2, & y_2^2, & z_2^2 \\ x_3^2, & y_3^2, & z_3^2 \end{vmatrix} = o.$$

Daraus folgt die Relation

$$x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1 = o,$$

weil

$$(x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1) \cdot \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & z_1^2 \\ x_2^2, & y_2^2, & z_2^2 \\ x_3^2, & y_3^2, & z_3^2 \end{vmatrix} + 2 x_1 y_1 z_1 \; x_2 y_2 z_2 \; x_3 y_3 z_3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{y_1}, & \frac{1}{z_1} \\ \frac{1}{x_2}, & \frac{1}{y_2}, & \frac{1}{z_2} \\ \frac{1}{x_3}, & \frac{1}{y_3}, & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix}$$

ist; der zweite Theil dieser Gleichung wird nach dem Vorigen gleich Null, und im ersten Theil derselben kann die Determinante nicht Null werden, weil die drei Punkte $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ auf einem Kegelschnitt liegen; in Folge dessen muss der erste Factor der linken Seite den Werth Null haben, wie wir angaben.

Nun hat die gerade Linie $ab$ oder $(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2)$ die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} = o,$$

und die Coordinaten ihres Pols in Bezug auf den Kegelschnitt

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = o$$

sind durch

$$\frac{1}{a}(y_1 z_2 - y_2 z_1) : \frac{1}{b}(z_1 x_2 - z_2 x_1) : \frac{1}{c}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

bestimmt, wofür man

$$\frac{1}{y_1 z_2 + y_2 z_1} : \frac{1}{z_1 x_2 + z_2 x_1} : \frac{1}{x_1 y_2 + x_2 y_1}$$

setzen kann, weil nach den Gleichungen

$$a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 = o, \; a x_2^2 + b y_2^2 + c z_2^2 = o$$

die Relation

$$a : b : c = (y_1^2 z_2^2 - y_2 z_1^2) : (z_1^2 x_2^2 - z_2^2 x_1^2) : (x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2)$$

bestehen muss.

Die Harmonikale dieses Pols $O$ in Bezug auf das Dreieck $x = o$, $y = o$, $z = o$ hat daher die Gleichung

$$x(y_1 z_2 + y_2 z_1) + y(z_1 x_2 + z_2 x_1) + z(x_1 y_2 + x_2 y_1) = o.$$

Wenn man in diese letztere an Stelle von $x, y, z$, die Werthe $x_3, y_3, z_3$ setzt, so geht sie in die oben gegebene Gleichung

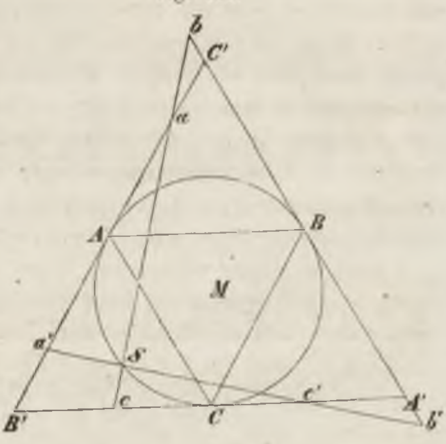
$$x_1 y_2 z_3 + x_1 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1 = o$$

über; wir schliessen daraus, dass sie den Punkt $c$ enthält, und beweisen durch Wiederholung derselben Betrachtung, dass ihr auch der Punkt $d$ angehört, für welchen die Quasi-Normale noch durch denselben Punkt geht.

Eine einfache Betrachtung der Figur des Satzes lehrt, dass die vier Punkte $a, b, c, d$ als Ecken eines dem gegebenen Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks betrachtet werden können, indess die vier entsprechenden Tangenten ein demselben Kegelschnitt umschriebenes Vierseit bilden, und dass die sechs Seiten des ersteren die Harmonikalen der sechs Ecken des andern in Bezug auf dasjenige Dreieck sind, welches zugleich für den gegebenen und denjenigen andern Kegelschnitt sich selbst conjugirt ist, in Bezug auf welchen die in einem und demselben Punkte zusammentreffenden Quasi-Normalen der vier Punkte $a, b, c, d$ genommen sind.

480. Ein ähnliches Beispiel bietet die Reihe der folgenden Sätze dar: Wenn man durch den Scheitel $S$ eines rechten Winkels einen Kreis beschreibt und drei Tangenten so an denselben zieht, dass die in jeder Tangente zwischen ihrem Berührungspunkt und den Schenkeln des rechten Winkels enthaltenen Segmente ($Aa, Aa'$ u.s.w.) von gleicher Länge sind, so bilden die drei Berührungspunkte ein gleichseitiges Dreieck $ABC$. (Fig. 138.)

Fig. 138.




Wir bezeichnen die Gesichtspunkte der Verallgemeinerung in diesem elementaren Satze wie folgt: Die drei Tangenten des Kreises bilden ein gleichseitiges Dreieck, für welches der Kreis nicht nur der eingeschriebene, sondern auch der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende ist; diese Mittelpunkte der Seiten sind den unendlich entfernten Punkten derselben in Bezug auf die Ecken des Dreiecks conjugirt harmonisch, und die unendlich entfernte gerade Linie ist die Harmonikale desjenigen Punktes, in welchem die von den Seitenmittelpunkten nach den Gegenecken des Dreiecks gezogenen Geraden sich schneiden, in Bezug auf das Dreieck. Jener Kreis ist ein Kegelschnitt, der durch zwei feste Punkte in dieser unendlich entfernten Geraden geht, die mit den in den Schenkeln des rechten Winkels gelegenen ein harmonisches System bilden; die unendlich entfernte Gerade ist die Polare jenes nämlichen Punktes in Bezug auf diesen Kreis.

Denken wir nun statt dieses dem gleichseitigen Dreieck eingeschriebenen Kreises einen Kegelschnitt, welcher einem beliebigen Dreieck $ABC$ eingeschrieben ist, so begegnen sich die Verbindungslinien seiner Berührungspunkte $D, E, F$ in den Seiten des Dreiecks mit den Gegenecken desselben in einem Punkte $O$, und die Harmonikale dieses Punktes in Bezug auf das Dreieck ist auch die Polare desselben in Bezug auf den Kegelschnitt. Sie hat mit dem Kegelschnitt zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein, und die beiden geraden Linien, welche an Stelle der Schenkel des rechten Winkels in jenem Satze treten, bestimmen nothwendig mit diesen in ihr ein harmonisches System. Wenn in jenem Satze die Schenkel des rechten Winkels in den Dreiecksseiten Punkte bestimmen, welche mit diesen denselben Mittelpunkt haben, nämlich den Berührungspunkt des eingeschriebenen Kreises, so bilden jetzt die Durchschnittspunkte der entsprechenden geraden Linie mit den Dreiecksseiten und die entsprechenden Ecken je ein involutorisches System, für welches der Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnitts ein Doppelpunkt ist. (Vergl. die Entwicklungen der Art. 428, 429.) Und so endigt die Reihe der Schlüsse in dieser allgemeinen Form in dem Satze, dass der Durchschnittspunkt zweier solchen geraden Linien jenem eingeschriebenen Kegelschnitte angehört.

Auch in dieser allgemeinen Figur bilden die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit einer der Dreiecksseiten ein harmonisches System mit den Punkten derselben, in welchen sie den Kegelschnitt berührt, und die Polare des Punktes $O$ schneidet; und auch hier liegen, wie in der Figur des elementaren Satzes, der Schnittpunkt jener Geraden auf dem eingeschriebenen Kegelschnitt und die Punkte, in welchen dieselben je eine Dreiecks-seite schneiden, in einem Kegelschnitt, welcher den entsprechenden Berührungspunkt des erstern zum Pol der geraden Linie hat, die wir als die Polare von $O$ bezeichnet haben, und welcher überdies durch dieselben zwei Punkte geht, in denen diese den eingeschriebenen Kegelschnitt schneidet.

Endlich aber können die beiden geraden Linien, die Schenkel des rechten Winkels, als ein Ort zweiten Grades angesehen und durch einen Kegelschnitt ersetzt werden; in der That liegen die drei Punktepaare in den Seiten des Dreiecks $ABC$, welche mit den Ecken desselben Involutionen bestimmen, denen der Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnitts als ein Doppelpunkt angehört, in einem Kegelschnitt; derselbe geht auch durch die beiden Punkte, welche die Polare von $O$ mit dem eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat. In Bezug auf diesen und den eingeschriebenen Kegelschnitt nimmt dann der bezeichnete Satz diese einfache Gestalt an: Für jede gerade Linie, welche mit diesen beiden Kegelschnitten eine harmonische Theilung bestimmt, liegt der in Bezug auf den letztbezeichneten Kegelschnitt genommene Pol in dem eingeschriebenen Kegelschnitt.

Nach dem Vorigen sind die Principien dieser Verallgemeinerung fest begründet, und es bedarf daher für die daraus gezogenen Schlüsse kaum eines ferneren Beweises, wenn auch ein solcher ohne Schwierigkeit zu geben wäre.

# Zusätze.

## I. Die trimetrischen Coordinaten-Systeme und der barycentrische Calcul.

Die beiden trimetrischen Coordinaten-Systeme, welche in den Artikeln 61 — 67 und 70, 71 (Kapitel IV) entwickelt und in den darnach folgenden Abschnitten des Textes vielfach gebraucht worden sind, auf welche auch die Entwickelungen der letzten Kapitel sich besonders direct anwenden, und die durch die ihnen eigene Homogeneität der Formen in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Betrachtung führen, sind einer statischen Begründung fähig, und das zweite derselben, welches wir als das System der Dreipunkt-Coordinaten bezeichnet haben, und welches auch das der Tangential-Coordinaten genannt werden kann, ist auf diesem Wege in seinem Werke „der barycentrische Calcul“ Leipzig, 1827, von Herrn Professor Möbius begründet worden.

Diese Begründung verlässt allerdings durch Einführung statischer Principien die reine Geometrie, aber sie steht ihr durch die ungemein einfache Natur derselben nahe genug; wenn ihr jedoch in dem Folgenden hier eine Stelle gewidmet wird, so geschieht dies nicht deshalb, sondern namentlich wegen ihrer historischen Bedeutung. Um dieselbe kurz auszudrücken, darf man wohl sagen, dass sie eine Epoche in der analytischen Geometrie bezeichnet. Als sie zuerst erschien, führte sie zwei neue bedeutende Gedanken auf einmal in die Wissenschaft ein, und lieferte zu beiden ein auserlesen vollendetes Beispiel.

Jede analytische Geometrie beschäftigt sich mit den in einem gewissen Coordinaten-Feld vorkommenden Formen; sie ist darnach analytische Planimetrie, oder analytische Sphärik u. s. w., oder allgemein analytische Geometrie des Raumes. Innerhalb dieses Feldes setzt sie jede geometrische Form aus gleichartigen Elementen zusammen, indem sie dieselben durch ein mathematisches Gesetz zu einer stetigen Reihe verbindet; sie ist in Folge dessen analytische Geometrie des Punktes, oder der geraden Linie, sie kann auch in dem Sinne analytische Planimetrie des Kreises sein, dass sie jede ebenflächige Form als durch eine stetige Reihung von Kreisen erzeugt ansieht; die Gleichung der Form drückt dann das Gesetz dieser Reihe aus; sie kann endlich auch eine analytische Sphärik des Punktes oder eine des Hauptkreises sein, und sie hat im Raume die Wahl, den Punkt, die gerade Linie oder die Ebene als Element zu betrachten. Sie bestimmt endlich dies Element innerhalb ihres Feldes durch eine gewisse durch Coordinaten vermittelte Beziehung zu gegebenen festen Elementen; darnach kann es so viele Coordinatensysteme des Punktes, der geraden Linie, des Kreises u. s. w. geben, als es Methoden giebt, einen Punkt, eine gerade Linie, einen Kreis durch Beziehung auf feste Elemente im Coordinaten-Feld zu bestimmen.

Seit Descartes bis auf die Erscheinung des barycentrischen Calculs hatte man das Coordinatensystem des Punktes mit zwei Coordinaten-Achsen und parallel zu denselben vom Punkte aus bis zu ihnen gemessenen geradlinigen Coordinaten und das sogenannte Polar-Coordinaten-System für die analytische Planimetrie allein benutzt; mit ihm wurden zur Durchbrechung dieser Schranken zwei grosse Schritte auf einmal gethan: An Stelle des Punktes trat als Element die gerade Linie, und die Coordinaten-Bestimmung brachte den völlig neuen Gedanken, statt zweier Coordinaten-Achsen drei Fundamental-Punkte zu benutzen.

Der letztere Gedanke der Aenderung der Coordinaten-Bestimmung, der Gedanke von der unbegrenzten Mannigfaltigkeit derselben, ist zugleich mit dem Namen Plücker ehrenvoll verknüpft, der ihn im Jahre 1828 im V. Bande des Crelle'schen Journals aussprach und durch ein neues Coordinatensystem exemplificirte, und durch welchen derselbe in dem System der analytischen Geometrie 1835 eine sehr allgemeine Form und Ausbildung erhielt.

Der erste gehört Herrn Möbius allein, und man weiss, wie er denselben auch auf das bis jetzt allein neben dem ebenen bearbeitete sphärische Feld übertragen hat, in seiner Abhandlung „Ueber die Grundformen der Linien der III. Ordnung“ und schon früher „Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik 1846.“

Der geometrische Kern der Methode des Herrn Möbius kann wie folgt ausgesprochen werden: Wenn man von drei Fundamental-Punkten aus bis zu einer beliebigen geraden Linie Parallelen zieht, so haben diese für dieselbe Gerade constante von ihrer Richtung völlig unabhängige Verhältnisse; zwei gegebene Verhältnisse zwischen ihnen bestimmen eine gerade Linie und sind die Coordinaten derselben; jede Gleichung zwischen diesen als Veränderliche betrachteten Coordinaten repräsentirt eine Reihe von geraden Linien, deren Coordinaten dem durch sie ausgedrückten Gesetz genügen, d. h. sie repräsentirt einen durch dieselben umhüllten Ort; dieser ist in dem speciellen Falle, wo die gedachte Gleichung vom ersten Grade ist, ein Punkt.

So ist das System des barycentrischen Calculs mit dem der Dreipunkt-Coordinaten in dem vorliegenden Werke identisch, und deshalb und dieser seiner historischen Bedeutung wegen mag man hier nicht ungern die statische Begründung kurz angegeben finden; man wird sie mit Vergnügen durch die statische Begründung des Dreilinien-Coordinaten-Systems ergänzt sehen. Ich gebe die Letztere zuerst.*)

*) Das Folgende ist Auszug aus einem Briefe des Herrn Prof. Möbius an den Herausgeber.

„Ist $\alpha$ eine gerade Linie von unbestimmter Länge, aber bestimmter Lage und Richtung, und $l$ irgend eine positive oder negative Zahl, so soll unter $l\alpha$ eine Kraft verstanden werden, deren Intensität, nach Festsetzung einer gewissen Intensität als Einheit, $= l$ ist, und welche in der Geraden $\alpha$ wirkend, entweder die bestimmte Richtung von $\alpha$ oder die entgegengesetzte hat, je nachdem $l$ positiv oder negativ ist. Bedeuten Aehnliches die Ausdrücke $m\beta$, $n\gamma$, u. s. w. $r\varrho$, so soll die Gleichung

$$l\alpha + m\beta = r\varrho$$

anzeigen, dass die Kraft $r\varrho$ die Resultante der Kräfte $l\alpha$ und $m\beta$ ist, und damit zugleich, dass die Geraden $\alpha$ und $\beta$ in einer Ebene liegen, indem sonst eine Resultante nicht Statt haben könnte. Nächstdem liegt auch $\varrho$ in derselben Ebene, und es verhalten sich, wie aus der Statik bekannt ist: $l:m:r = \sin\beta\varrho : \sin\varrho\alpha : \sin\alpha\beta$.

Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ drei ein Dreieck bildende Gerade, so ist

$$l\alpha + m\beta + n\gamma$$

der Ausdruck einer in der Ebene des Dreiecks wirkenden Kraft; und umgekehrt lässt sich leicht zeigen, dass jede Kraft in der Ebene des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ einen Ausdruck von der Form

$$l\alpha + m\beta + n\gamma$$

hat; oder kürzer und rein geometrisch: $l\alpha + m\beta + n\gamma$ ist der Ausdruck einer Geraden in der Ebene des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$, und umgekehrt.

Sind $\varrho$ und $\sigma$ zwei Gerade der Ebene, so ist $\varrho + x\sigma$ der Ausdruck einer durch den Punkt $\varrho\sigma$, d. i. durch den Durchschnitt von $\sigma$ mit $\varrho$ gehenden Geraden derselben Ebene, und zwar jeder beliebigen durch $\varrho\sigma$ gehenden Geraden dieser Ebene, wenn es freisteht, dem $x$ jeden beliebigen Werth zu geben. Man kann daher den Ausdruck $\varrho + x\sigma$ mit der Variabeln $x$ auch als den Ausdruck des Punktes $\varrho\sigma$ betrachten.

Der gegenseitige Durchschnitt der zwei Geraden

$$l\alpha + m\beta + n\gamma \text{ und } l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma$$

wird hiernach sein

$$(l + l_1 x)\,\alpha + (m + m_1 x)\,\beta + (n + n_1 x)\gamma.$$

Der Ausdruck $\qquad lx\alpha + my\beta + nz\gamma$

mit den drei Variabeln $x$, $y$, $z$ gehört gleichfalls einem Punkte der Ebene $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ an, wenn zwischen $x, y, z$ eine Gleichung von der Form

$$fx + gy + hz = o$$

besteht.

Denn setzen wir der Einfachheit willen, die Gleichung sei

$$x + y + z = o,$$

so wird der Ausdruck nach Elimination von $z$

$$lx\alpha + my\beta - n(x + y)\gamma = y(m\beta - n\gamma) - x(n\gamma - l\alpha) \equiv$$

dem Durchschnittspunkte der Geraden $m\beta - n\gamma$ und $n\gamma - l\alpha$.

Nennen wir diesen Punkt $O$, die Punkte $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ respective $A$, $B$, $C$, so geht die Gerade $m\beta - n\gamma$ durch $O$, aber auch durch $\beta\gamma$ oder $A$; $m\beta - n\gamma$ ist also der Ausdruck der Geraden $OA$. Und auf gleiche Weise werden durch $n\gamma - l\alpha$ und $l\alpha - m\beta$ die Geraden $OB$ $OC$ ausgedrückt.

Sei $OA.BC = D$, und $OB.CA = E$. Weil von $OA$ und $BC$ die Ausdrücke $m\beta - n\gamma$ und $\alpha$ sind, so ist von $D$ der Ausdruck

$$x\alpha + m\beta - n\gamma \; . \; . \; . \; . \; (\delta),$$

und ebenso, weil $OB \equiv n\gamma - l\alpha$, und $CA \equiv \beta$, so ist

$$E \equiv l\alpha + y\beta - n\gamma \; . \; . \; . \; (\varepsilon).$$

Nun wird durch ($\delta$) jede durch $D$ gehende Gerade und durch ($\varepsilon$) jede durch $E$ gehende ausgedrückt; für die durch $D$ und $E$ zugleich gehende Gerade müssen daher die Ausdrücke ($\delta$) und ($\varepsilon$) identisch sein, also

$$x : m : -n = l : y : -n,$$

also $$x = l, \; y = m,$$

folglich $$DE \equiv l\alpha + m\beta - n\gamma.$$

Sei noch $DE.AB = N$, so wird $N \equiv l\alpha + m\beta - n\gamma + u\gamma$, oder wenn man die Variabele $u - n = z$ setzt,

$$N \equiv l\alpha + m\beta + z\gamma.$$

Ebenso hat man, wenn

$$OC.AB = F \text{ und } EF.BC = L, \; FD.CA = M$$

gesetzt wird, $$L \equiv x\alpha + m\beta + n\gamma,$$

$$M \equiv l\alpha + y\beta + n\gamma.$$

Für die Gerade $LM$ müssen sich $x : m : n = l : y : n$ verhalten, also

$$x = l, \; y = m$$

und $$LM \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma;$$

ebenso findet man $$NL \equiv l\alpha + m\beta + n\gamma;$$

die Geraden $LM$ und $NL$ sind folglich identisch, oder $L$, $M$, $N$ liegen in einer Geraden $$l\alpha + m\beta + n\gamma,$$

weil die Ausdrücke dieser Punkte dadurch, dass man $x = l$, $y = m$, $z = n$ setzt, in $l\alpha + m\beta + n\gamma$ übergehen.

Rein geometrisch könnte man die Grundformel

$$l\alpha + m\beta = r\varrho$$

also erklären: $l\alpha$ bedeutet eine Linie, welche die durch $\alpha$ bestimmte Lage und Richtung und eine durch die Zahl $l$ bestimmte Länge hat. Werde diese Linie durch $AB$ dargestellt, wo $A$ und $B$ ihre beiden Endpunkte bezeichnen; ebenso $m\beta$ durch $CD$ und $r\varrho$ durch $RS$. Statt voriger Formel könnte daher geschrieben werden

$$AB + CD = RS,$$

wobei die *conditio sine qua non* ist, dass alle drei Linien in einer Ebene liegen.

Letztere Formel hätte man aber als abgekürzten Ausdruck von

$$OAB + OCD = ORS$$

zu betrachten, worin $O$ einen beliebigen Punkt der Ebene, $OAB$ die Fläche des Dreiecks, dessen Spitzen $O$, $A$, $B$ sind, bezeichnet, u. s. w. Die Fläche $OAB$ wäre positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Aufeinanderfolge der Ecken $O$, $A$, $B$ im Umfange für ein im Innern der Fläche stehendes Auge von links nach rechts oder von rechts nach links geschieht.

Die Gleichung $\quad OAB + OCD = ORS$

kann nicht anders bestehen, als wenn $AB$, $CD$, $RS$ sich in einem Punkte schneiden, und wenn sich ein Parallelogramm $FGHI$ construiren lässt, von welchem $FG$, $FI$, $FH$ respective gleich und gleich gerichtet mit $AB$, $CD$, $RS$ sind."

Hiernach stehe die statische Begründung des Systems der dreipunktigen Linien-Coordinaten mit Benutzung der Artikel des barycentrischen Calculs.

Wenn man durch zwei Punkte $A$ und $B$ Parallel-Linien $AA'$ und $BB'$ gezogen hat, und wenn durch $a$ und $b$ zwei Zahlen von gegebenem Verhältniss bezeichnet werden, deren Summe nicht Null ist, so können jene Parallelen durch eine dritte Gerade $A'B'$ so geschnitten werden, dass $\quad a.AA' + b.BB' = o$

ist. Dazu hat man $AB$ in $F$ so zu theilen, dass

$$AF:FB = b:a$$

ist, und die Gerade $A'B'$ nur durch $F$ zu ziehen; jede durch $F$ gehende Gerade, welche die Parallelen schneidet, und keine andere, hat die geforderte Eigenschaft.

Für jede nicht durch $F$ gehende Gerade $A''B''$, die von einer durch $F$ gehenden Parallelen zu $AA''$, $BB''$ in $F''$ getroffen wird, hat man

$$a.AA'' + b.BB'' = (a + b)\, FF'', \text{ statt } = o.$$

Die Lage des Punktes $F$ in der Geraden $AB$ hängt nur ab von dem Verhältniss der Zahlen $a$ und $b$, keineswegs von dem Winkel, welchen die gewählten Parallelen mit $AB$ bilden; er ist, statisch gesprochen, der Angriffspunkt der Mittelkraft paralleler Kräfte, welche in $A$ und $B$ angreifen und deren Intensitäten sich wie $a:b$ verhalten. Man kann ihn als den Schwerpunkt der Punkte $A$ und $B$ mit den respectiven Coefficienten $a$ und $b$ bezeichnen.

Wenn durch drei gegebene Punkte $A$, $B$, $C$ in beliebiger Richtung Parallelen $AA'$, $BB'$, $CC'$ gezogen werden und $a$, $b$, $c$ drei Zahlen bezeichnen, welche in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen, und deren Summe nicht Null ist, so kann man jene Parallelen stets durch eine Ebene so in den Punkten $A'$, $B'$, $C'$ schneiden, dass

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' = o$$

ist.

Man verbinde beliebige zwei der gegebenen Punkte z. B. $A$, $B$ durch eine Gerade, und theile diese in $F$ so, dass $BF:FA = a:b$ ist, ziehe sodann $FC$ und nehme darin den Punkt $O$ so an, dass

$$CO:OF = (a+b):c$$

ist. Dann hat jede durch den Punkt $O$ gelegte Ebene und keine andere die verlangte Eigenschaft. Für jede nicht durch $O$ gehende Ebene, welche die durch $A$, $B$, $C$, $O$ gezogenen Parallelen in $A''$, $B''$, $C''$, $O''$ schneidet, ist

$$a.AA'' + b.BB'' + c.CC'' = (a+b+c).OO'',$$

anstatt $= o$.

Die Lage des Punktes $O$ hängt nur ab von der Lage der Punkte $A$, $B$, $C$ und den Verhältnissen ihrer Coefficienten $a$, $b$, $c$; denkt man in $A$, $B$, $C$ parallele Kräfte von beliebiger Richtung mit Intensitäten wirkend, welche den Zahlen $a$, $b$, $c$ proportional sind, so ist $O$ der Angriffspunkt der Mittelkraft, und wenn jene Kräfte als Schwerkräfte gedacht werden, der Schwerpunkt des Systems der Punkte $A$, $B$, $C$ mit den respectiven Coefficienten $a$, $b$, $c$.

Ganz allgemein: Ist eine beliebige Anzahl von Punkten $A$, $B$, $C$, ... $N$ mit respectiven Coefficienten $a$, $b$, $c$ ... $n$ gegeben, deren Summe nicht $= o$ ist, so kann stets ein Punkt $S$ und nur einer — der Schwerpunkt — von der Beschaffenheit gefunden werden, dass, wenn man durch die gegebenen Punkte und den Punkt $S$ nach einer beliebigen Richtung Parallelen zieht und diese mit einer willkürlich gelegten Ebene schneidet, welches respective in $A'$, $B'$, $C'$ ... $N'$, $S'$ geschehe, immer

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \ldots + n.NN' = (a+b+c+\ldots+n)SS',$$

und folglich, wenn die Ebene durch $S$ selbst geht,

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \ldots + n.NN' = o$$

ist.

Wenn die Summe der den Punkten zugehörigen Coefficienten gleich Null ist, so kann das System keinen construirbaren Schwerpunkt haben; man erkennt, dass er in unendlicher Entfernung liegt, indem man bedenkt, dass ein Punkt des Systems mit dem Schwerpunkt aller übrigen zusammen ihn bestimmen muss, und dass folglich die Bedingung

$$a.AA' - a.TT' = o$$

erfüllt sein muss, und somit jede zu $AT$ parallele Ebene durch den fraglichen Punkt gehen wird.

Eine Formel wie

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \ldots + n.NN' = (a+b+c+\ldots+n)SS'$$

kann man in der abgekürzten Form

$$aA + bB + cC + \ldots + nN = (a+b+c+\ldots+n)S$$

schreiben, wenn man unter $A$, $B$, $C$ ... $N$, $S$ nicht nur die Punkte, sondern zugleich die ihnen entsprechenden Abschnitte auf den Parallelen versteht; und wenn man die Gleichheit der Coefficientensummen auf beiden Seiten, die sich aus der Natur des Schwerpunkts ergiebt, als selbstverständlich bei Seite lässt, aber die dann sich ergebende Gleichheit statt durch = durch ≡ andeutet,

$$aA + bB + cC + \dots + nN \equiv S.$$

Man sieht leicht, dass nur die Voraussetzung, die Schnittebene gehe durch den Punkt $S$ selbst, d. h. $SS_1 = o$ nöthig ist, um in

$$aA + bB + cC = o,$$

wobei jede Rücksicht auf die Coefficienten-Summe wegfällt, die Gleichung als Ausdruck des Schwerpunktes $S$ für drei gegebene Punkte $A$, $B$, $C$ zu erhalten, welche wir in dem trimetrischen Linien-Coordinaten-System gebraucht haben. Dass die Bedeutung der Coefficienten, mit derjenigen der Coefficienten in diesem System völlig übereinstimmt, zeigt die im Vorigen angegebene Construction des Schwerpunktes der in $A$, $B$, $C$ wirkenden Schwerkräfte $a$, $b$, $c$.

Damit stimmen auch alle weiteren Consequenzen des barycentrischen Calculs überein.

Wenn speciell $aA + bB \equiv C$ ist, so liegt $C$ mit $A$ und $B$ in derselben geraden Linie und es besteht die Proportion

$$a:b = BC:CA.$$

Wenn $aA + bB + cC \equiv D$ ist und $A$, $B$, $C$ nicht in einer Geraden liegen, so liegt $D$ mit $A$, $B$, $C$ in einer Ebene und die Dreiecksflächen

$$DBC,\ DCA,\ DAB$$

sind respective den Coefficienten $a$, $b$, $c$ proportional.

Darnach gestaltet sich dann die Bestimmung eines Punktes in einer Ebene folgendermassen: In Bezug auf das von den drei Fundamental-Punkten gebildete Fundamental-Dreieck $ABC$ entspricht bestimmten zwei in $a:b:c$ liegenden Verhältnissen ein bestimmter Punkt $P$, und

$$aA + bB + cC \equiv P$$

ist der Ausdruck dieses Punktes; und umgekehrt entsprechen jedem Punkte in der Ebene des Fundamental-Dreiecks ganz bestimmte Verhältnisse $a:b$ und $a:c$.

Es ist leicht, aus diesen Begriffen auch den Ausdruck einer geraden Linie herzuleiten; denn für zwei Punkte $D$ und $E$, deren Ausdrücke in Bezug auf das Fundamental-Dreieck $ABC$ durch

$$dD = aA + bB + cC,\quad eE = a'A + b'B + c'C$$

repräsentirt sind, wird durch

$$D + xE$$

jeder Punkt in ihrer geraden Verbindungslinie ausgedrückt, wenn $x$ alle möglichen Werthe annimmt; eben dieser Ausdruck kann deshalb als Ausdruck der geraden Linie $DE$ selbst bezeichnet werden. Mit der Substitution

$$x = y\,\frac{c}{d}$$

kann man jenem Ausdrucke die Formen

$$D + xEdD + ycE = (a + a'y)A + (b + b'y)B + (c + c'y)C$$

geben.

Der letztere Ausdruck repräsentirt eine beliebige Gerade in der Ebene des Fundamental-Dreiecks.

Die Durchschnittspunkte derselben mit den Seiten des Fundamental-Dreiecks lassen sich leicht bestimmen, wenn man bedenkt, dass für einen solchen Punkt immer einer der Coefficienten der Gleichung mit Null identisch werden muss, nämlich der Coefficient derjenigen Ecke, durch welche die betreffende Seite nicht geht; so ist für den Durchschnitt der Geraden mit $AB$, $BC$, $CA$ respective

$$c + c'y = o\text{, also } y = -\frac{c}{c'}\text{, oder } a + a'y = o\text{, also } y = -\frac{a}{a'}\text{,}$$

$$\text{oder } b + b'y = o\text{, also } y = -\frac{b}{b'}\text{,}$$

so dass die Ausdrücke der Schnittpunkte die Formen

$$(bc' - b'c)\,C - (ac' - a'c)\,A,$$
$$(ca' - c'a)\,A - (ba' - b'a)\,B,$$
$$(ab' - a'b)\,B - (cb' - c'b)\,C$$

annehmen.

Der unendlich entfernte Punkt der Geraden zeigt das Theilungsverhältniss — 1 und wird somit durch $D - E$ ausgedrückt, d. i. durch

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} - \frac{a'A + b'B + c'C}{a' + b' + c'}\,.$$

Es ist in diesem wie in dem andern Coordinatensystem sehr leicht, eine Coordinaten-Transformation vorzunehmen; der Uebergang von dem Fundamental-Dreieck $ABC$ zu dem neuen $A'B'C'$ wird einfach dadurch vollzogen, dass man aus den Ausdrücken der Punkte $A'$, $B'$, $C'$ die der Punkte $A, B, C$ ableitet und sie in die Ausdrücke der betrachteten geometrischen Formen an Stelle der Ausdrücke dieser Punkte substituirt.

Die Uebertragung derselben Grundgedanken auf die analytische Sphärik geschieht endlich nach folgenden Grundzügen: Sind $A$, $B$, $C$ drei Punkte auf der Kugelfläche, welche nicht in einem Hauptkreise liegen, so wird in Bezug auf sie jeder vierte Punkt der Fläche durch eine Gleichung $$aA + bB + cC = pP$$ ausgedrückt. Sie bedeutet, dass drei auf den Kugelmittelpunkt $O$ wirkende Kräfte, deren Richtungen $OA$, $OB$, $OC$ und deren Intensitäten $a$, $b$, $c$ sind, zu ihrer Resultanten eine Kraft haben, deren Richtung $OP$ und deren Intensität $= p$ ist.

Ebenso wie die Coefficienten in der Cartesischen Gleichung einer geraden Linie als die Coordinaten dieser letztern bezeichnet werden können, so kann man auch hier die Coefficienten $a$, $b$, $c$ aus dem Ausdruck des Punktes als die Coordinaten desselben ansehen.

## II. Ueber das Pascal'sche Sechseck. (Art. 291.)

H. Steiner war es, der zuerst die Aufmerksamkeit der Geometer auf die vollständige Figur lenkte, welche erhalten wird, wenn man sechs Punkte eines Kegelschnitts auf jede mögliche Art mit einander verbindet und für jedes der entstehenden Sechsecke die Pascal'sche Linie construirt. (Gergonne's Annales t. XVIII. p. 319. 1827.) Die von ihm gegebenen Sätze wurden von H. Plücker berichtigt und ergänzt (Crelle's Journal Bd. V. p. 268. 1829), und das interessante System hat später noch durch H. Hesse (Crelle's Journal Bd. XXIV und XLI), Mr. Cayley (Crelle's Journal Bd. XLI) und Mr. Kirkmann (Cambridge and Dublin Math. Journ. Vol. V. 1850) neue Untersuchungen erfahren, welche zu bisher unbekannten Sätzen geführt haben.

Wir beabsichtigen hier einen kurzen Abriss der wichtigsten unter diesen Sätzen zu geben und die Methode ihrer Entwicklung darzulegen. Sie gehen grossen Theils aus den einfachsten Grundsätzen der Combinations-Lehre und aus der Anwendung der folgenden elementaren Sätze und ihrer reciproken hervor: Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte ihrer entsprechenden Seiten in einer geraden Linie. Indem wir jenen Durchschnittspunkt der geraden Verbindungslinien entsprechender Ecken den Central-Punkt und diese gerade Linie der Durchschnittspunkte entsprechender Seiten die Achse nennen, sprechen wir den zweiten Satz aus, wie folgt: Wenn die Durchschnittspunkte der Gegenseiten von drei Dreiecken für jedes Paar derselben die nämlichen drei Punkte einer geraden Linie sind, so liegen die drei Central-Punkte derselben in einer geraden Linie.

Wir bezeichnen die sechs Punkte des Kegelschnitts durch $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ und nennen sie die Punkte $P$. Sie können durch fünfzehn gerade Linien $ab$, $ac$, $ad$ u. s. w. vereinigt werden, welche wir als die Linien $C$ bezeichnen wollen. Jede derselben wird von den vierzehn anderen geschnitten und zwar durch vier von ihnen in jedem der beiden Eckpunkte des Sechsecks, welche sie verbindet, demnach durch die sechs übrigen in Punkten, welche von diesen, den Punkten $P$, verschieden sind. Wir können sie als Punkte $ab$, $cd$; $ac$, $bd$ u. s. w. bezeichnen, sie sollen aber kurz die Punkte $p$ heissen. Es giebt fünfundvierzig solcher Punkte, denn in jeder der fünfzehn Linien $C$ sind ihrer sechs enthalten und durch jeden von ihnen gehen zwei der Linien $C$.

Wenn wir die Ecken des Sechsecks in der Ordnung $abcdef$ nehmen, so sagt der Satz von Pascal, dass die drei Punkte $p$, welche wir näher durch $(ab, de)$, $(cd, fa)$, $(bc, cf)$ bezeichnen, in einer geraden Linie liegen; wir wollen dieselbe als die Pascal'sche Linie $abcdef$ oder als die Linie $\left\{\begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \end{matrix}\right\}$ bezeichnen, und bemerken, dass die letztere Ausdrucksweise den Vorzug verdient, weil sie die Punkte deutlicher anzeigt, durch welche die Pascal'sche Linie geht.

Durch jeden Punkt $p$ können vier Pascal'sche Linien gezogen werden; der Punkt $(ab, de)$ liegt z. B. in den vier Linien $abcdef$, $abfdec$, $abcedf$, $abfedc$ oder in

$$\left\{\begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ab.fd.ec \\ de.ca.bf \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ab.ce.df \\ de.fa.bc \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ab.fe.dc \\ de.ca.bf \end{matrix}\right\}.$$

Wir finden daraus die Gesammtzahl der Pascal'schen Linien, indem wir die Zahl der Punkte $p$ mit 4 multipliciren und durch 3 dividiren, weil jede derselben drei Punkte $p$ enthält. Demnach ist die Zahl der Pascal'schen Linien $= 60$, was wir auch durch die Bemerkung erkannt haben würden, dass die sechs Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ 120 Permutationen gestatten, von denen je zwei mit genau umgekehrter Reihenfolge der Elemente wie $abcdef$ und $fedcba$ nur ein Sechseck repräsentiren.

Betrachten wir nun die Dreiecke, deren Seiten sind

$$\begin{matrix} ab, cd, ef, & (1) \\ de, fa, bc, & (2) \\ ef, bc, ad, & (3) \end{matrix}$$

so liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten von 1 und 2 in derselben Pascal'schen Linie

$$\left\{\begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \end{matrix}\right\},$$

und die Verbindungslinien entsprechender Ecken schneiden einander daher in einem Punkte; diese Verbindungslinien sind aber die drei Pascal'schen Linien

$$\left\{\begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} cd.fa.be \\ ef.bc.ad \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ef.bc.ad \\ ab.de.cf \end{matrix}\right\}.$$

Darin ist der erste Satz des II. Steiner enthalten: Die Pascal'schen Linien von drei Sechsecken, welche, paarweise genommen, drei nicht auf einanderfolgende Seiten gemeinschaftlich haben, schneiden sich in einem Punkte. Wir nennen ihn den Punkt $g$ und bezeichnen ihn durch

$$\left\{\begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \\ ef.bc.ad \end{matrix}\right\}.$$

Diese Bezeichnung lehrt, dass in jeder der Pascal'schen Linien nur ein Punkt $g$ liegt; denn wenn die Pascal'sche Linie

$$\left\{\begin{matrix} ab.de.cf \\ cd.fa.be \end{matrix}\right\}$$

gegeben ist, so erhält man den entsprechenden Punkt $g$, indem man unter jede ihrer verticalen Reihen noch die beiden Buchstaben setzt, welche sie bisher nicht enthält. Da nun in jedem Punkte $g$ drei Pascal'sche Linien zusammentreffen, so ist die Zahl dieser Punkte 20. Wenn man von den vorher bezeichneten Dreiecken die Paare 2, 3 und 1, 3 in derselben Weise betrachtet, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken in allen Fällen dieselben, und nach dem reciproken Satz des im Anfang dieser Note ausgesprochenen zweiten Hilfssatzes müssen daher die drei Achsen derselben sich in einem Punkte schneiden. Allein derselbe ist einer der Punkte $g$, nämlich der Punkt

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,cd.\,ef \\ de.\,fa.\,bc \\ cf.\,be.\,ad \end{matrix}\right\},$$

und diese Betrachtung führt uns daher zu keinem neuen Ergebniss.

Betrachten wir sodann die Dreiecke

$$ab, \qquad cd, \qquad ef; \qquad (1)$$

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,ce.\,df \\ de.\,bf.\,ac \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} cd.\,bf.\,ae \\ af.\,ce.\,bd \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ef.\,bd.\,ac \\ bc.\,ae.\,df \end{matrix}\right\}; \qquad (4)$$

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,ce.\,df \\ cf.\,bd.\,ae \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} cd.\,bf.\,ae \\ be.\,ac.\,df \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ef.\,bd.\,ac \\ ad.\,ce.\,bf \end{matrix}\right\}. \qquad (5)$$

Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten von 1 und 4 sind drei in derselben Pascal'schen Linie liegende Punkte, und die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken schneiden sich daher in einem Punkte. Diese Geraden sind aber die drei Pascal'schen Linien

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,ce.\,df \\ cd.\,bf.\,ae \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} cd.\,bf.\,ae \\ ef.\,ac.\,bd \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ef.\,ac.\,bd \\ ab.\,df.\,ce \end{matrix}\right\}.$$

Wir bezeichnen den Punkt, in welchem sie sich schneiden, als den Punkt $h$, und drücken ihn durch

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,ce.\,df \\ cd.\,bf.\,ae \\ ef.\,ac.\,bd \end{matrix}\right\}$$

aus. Man sieht aus dieser Bezeichnung, dass die Punkte $h$ sich von den Punkten $g$ wesentlich dadurch unterscheiden, dass nur eine der Verticalreihen die sechs Buchstaben *abcdef* ohne Unterdrückung und Wiederholung enthält. Man erkennt leicht, dass in jeder Pascal'schen Linie drei Punkte $h$ liegen, nämlich in der Linie

$$\left\{\begin{matrix} ab.\,cd.\,ef \\ de.\,af.\,bc \end{matrix}\right\}$$

die drei Punkte

$$\left\{\begin{matrix} \overline{ab}.\,cd.\,ef \\ de.\,af.\,bc \\ cf.\,bd.\,ae \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ab.\,\overline{cd}.\,ef \\ de.\,af.\,bc \\ ac.\,be.\,df \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} ab.\,cd.\,\overline{ef} \\ de.\,af.\,bc \\ bf.\,ce.\,ad \end{matrix}\right\}.$$

Wir haben die vollständigen Verticalreihen in diesen Symbolen durch einen übergesetzten wagrechten Strich bezeichnet. Dies giebt den Satz von Mr. Kirkmann: Die Pascal'schen Linien durchschneiden sich zu dreien nicht nur in den zwanzig Steiner'schen Punkten $g$, sondern auch in sechzig andern Punkten $h$.

Der im Art. 292 gegebene Beweis des Steiner'schen Satzes lässt sich auch auf diesen Satz anwenden.

Betrachten wir ebenso die Dreiecke 1 und 5, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken dieselben wie für 1 und 4 und die entsprechenden Seiten durchschneiden sich daher in einer geraden Linie, welche offenbar eine Pascal'sche Linie ist.

Ebenso liegen die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten der Dreiecke 4 und 5 in einer geraden Linie; es sind die drei Punkte $h$

$$\left\{\begin{matrix} \overline{ab}\,.\,ce\,.\,df \\ de\,.\,bf\,.\,ac \\ cf\,.\,ae\,.\,bd \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} ac\,.\,\overline{cd}\,.\,bf \\ bd\,.\,af\,.\,ce \\ ac\,.\,be\,.\,df \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} ac\,.\,bd\,.\,\overline{ef} \\ df\,.\,ae\,.\,bc \\ ce\,.\,bf\,.\,ad \end{matrix}\right\}.$$

Ueberdies muss die Achse der Dreiecke 4 und 5 durch denselben Punkt gehen, in welchem die Achsen der Dreiecke 1, 4 und 1, 5 sich schneiden, nämlich durch den Punkt $g$

$$\left\{\begin{matrix} ab\,.\,cd\,.\,ef \\ de\,.\,af\,.\,bc \\ cf\,.\,be\,.\,ad \end{matrix}\right\}.$$

Man sieht, dieser Punkt $g$ ist derjenige, welchen man durch die Vereinigung der vollständigen Verticalreihen der drei Punkte $h$ erhält, welchen er entspricht. Wir erhalten so den von Mr. Cayley und Salmon gefundenen Satz: Es existiren in dem betrachteten System zwanzig gerade Linien $x$, deren jede durch drei Punkte $g$ und einen Punkt $h$ hindurchgeht.

Nehmen wir ferner drei Pascal'sche Linien, welche sich in einem Punkte $h$ schneiden, z. B.

$$\left\{\begin{matrix} ab\,.\,ce\,.\,df \\ de\,.\,bf\,.\,ac \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} de\,.\,bf\,.\,ac \\ cf\,.\,ae\,.\,bd \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} cf\,.\,ae\,.\,bd \\ ab\,.\,df\,.\,ce \end{matrix}\right\},$$

so können wir, indem wir in jeder von ihnen einen Punkt $p$ nehmen, ein Dreieck bilden, dessen Ecken sind.

$$(df,\ ac),\ (bf,\ ae),\ (bd,\ ce),$$

und welches daher die Linien

$$\left\{\begin{matrix} ac\,.\,bf\,.\,de \\ df\,.\,ae\,.\,cb \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} bf\,.\,ce\,.\,ad \\ ae\,.\,bd\,.\,cf \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} bd\,.\,ac\,.\,ef \\ ce\,.\,df\,.\,ab \end{matrix}\right\}$$

zu Seiten hat.

Ferner können wir in jeder dieser Seiten einen Punkt $h$ nehmen, indem wir unter jede der obigen Pascal'schen Linien $af\,.\,cd\,.\,be$ setzen, und so ein Dreieck bilden, dessen Seiten sind

$$\left\{\begin{matrix} ac\,.\,bf\,.\,de \\ be\,.\,cd\,.\,af \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} cf\,.\,ae\,.\,bd \\ be\,.\,cd\,.\,af \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} df\,.\,ab\,.\,ce \\ be\,.\,cd\,.\,af \end{matrix}\right\}.$$

Die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten dieser Dreiecke, welche daher in einer geraden Linie liegen müssen, sind die drei Punkte $g$

$$\begin{Bmatrix} bc.\,cd.\,af \\ ac.\,bf.\,de \\ df.\,ae.\,bc \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} bc.\,cd.\,af \\ cf.\,ae.\,bd \\ ad.\,bf.\,ce \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} bc.\,cd.\,af \\ df.\,ab.\,ce \\ ac.\,ef.\,bd \end{Bmatrix}.$$

Wir stellen zu denselben einen vierten Punkt $g$

$$\begin{Bmatrix} bc.\,cd.\,af \\ cf.\,ab.\,de \\ ad.\,ef.\,bc \end{Bmatrix},$$

von welchem die Symmetrie der Bezeichnung lehrt, dass er in derselben geraden Linie liegen muss. Es sind diese vier Punkte alle die Punkte $g$, in welche die Reihe $bc.\ cd.\ af$ eingehen kann.

Man kann aber fünfzehn verschiedene Producte von der Form $bc.\,cd.\,af$ aus den Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ bilden und erhält somit den Satz des H. Steiner: Die Punkte $g$ liegen zu vieren in fünfzehn geraden Linien $J$. Durch jeden Punkt $g$ gehen ausser den drei Pascal'schen Linien noch überdies drei der Geraden $J$. Das Bisherige scheint genügend, um die zur Untersuchung dieses Systems geeignete Methode zu bezeichnen, und zur ferneren Beschäftigung mit demselben, als welche leicht zu mannichfachen neuen Sätzen führen würde, anzuleiten.

Wir führen deshalb nur noch eine Reihe anderer Sätze, welche von den genannten Forschern, insbesondere von Mr. Kirkmann, gefunden worden sind, historisch an.

Die zwanzig geraden Linien $x$ gehen zu vieren durch fünfzehn Punkte $g$. Die vier geraden Linien $x$, deren Punkte $g$ in der vorhergehenden Bezeichnung eine gemeinschaftliche Verticalreihe haben, gehen durch denselben Punkt.

Es existiren sechzig gerade Linien $J$, deren jede durch einen Punkt $p$ und zwei Punkte $h$ geht. Diese geraden Linien gehen zu dreien durch sechzig Punkte $j$, von denen je drei in einer Linie $x$ liegen.

Mr. Kirkmann hat den Durchschnitt der Pascal'schen Linien für je zwei solche Sechsecke, welche wie die beiden $abcdef$ und $abcfed$ vier gemeinschaftliche Seiten haben, ohne dass ein Paar gegenüberliegende Seiten für beide dieselben wären, als einen Punkt $m$, und für solche zwei Sechsecke, welche drei gemeinschaftliche Seiten haben, von denen ein Paar anstossende Seiten sind, wie z. B. $abcdef$ und $abcefd$, als einen Punkt $r$ bezeichnet. In Bezug auf diese Punkte gelten dann die Sätze: Die neunzig Punkte $m$ liegen zu dreien in sechzig geraden Linien $M$.

Es giebt sechzig gerade Linien $R$, deren jede sechs Punkte $r$ und überdies einen der sechs Punkte $P$ enthält; dieselben gehen zu dreien durch zwanzig Punkte $q$.

Es existiren neunzig gerade Linien $K$, deren jede zwei Punkte $h$ und einen Punkt $p$ enthält.

Wir fügen dem einen Satz von H. Hesse hinzu, welcher sich auf die geraden Linien $J$ des Steiner'schen Satzes und die Punkte $g$ bezieht.

Man denke drei der geraden Linien $J$ und den Punkt $g$, in welchem sie sich schneiden, und bezeichne durch $g_1, g_2, g_3; g_1', g_2', g_3'; g_1'', g_2'', g_3''$ die andern drei Punkte $g$, welche auf jeder derselben noch ferner liegen. Betrachtet man die Punkte $g_1, g_2, g_3; g_1', g_2', g_3'; g_1'', g_2'', g_3''$ als Eckpunkte von drei Dreiecken, so geben die Durchschnittspunkte der homologen Seiten jedes Paares dieser Dreiecke drei Punkte $g$, welche derselben Geraden $J$ angehören; die drei so erhaltenen geraden Linien $J$ treffen in demselben Punkte $g'$ zusammen, welcher mit dem gegebenen Punkte $g$ dem Kegelschnitt conjugirt ist. Die Gesammtfigur enthält fünfzehn gerade Linien, nämlich die drei gegebenen Geraden $J$, die neun Dreiecksseiten und die drei daraus abgeleiteten Geraden $J$; und zwanzig Punkte $g$, nämlich zehn gegebene und zehn abgeleitete; diese zwanzig Punkte lassen sich in zehn Paare so vertheilen, dass die Punkte jedes Paares in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt conjugirt sind.

Mit einigen weiteren Sätzen wollen wir endlich noch eine andere Richtung andeuten, in welcher das System des Pascal'schen Satzes von Interesse ist. Die Pascal'schen Linien dreier Sechsecke wie

$$abcdef, \quad abdcfe, \quad abefdc,$$

welche die Seiten $ab$, $cd$, $ef$ gemein haben, die einander nicht benachbart sind, bilden mit diesen ein neues Sechseck, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist. Die Pascal'schen Linien dieser Sechsecke werden nach unserer Bezeichnung durch

$$\left\{\begin{matrix} ab.cd.ef \\ de.fa.bc \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ab.dc.fe \\ cf.ea.bd \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ab.ef.dc \\ fd.ca.be \end{matrix}\right\}$$

ausgedrückt. Nennen wir sie die Linien 1, 2, 3, so bilden die Geraden 1, $ab$, 2, $ef$, 3, $cd$ das Sechseck, von welchem der Satz spricht; in demselben ist der Durchschnittspunkt der Seiten 1 und $ef$ der nämliche, wie der von $ef$ mit $bc$, der Durchschnitt von 2 und $cd$ derselbe, wie der von $cd$ mit $ae$, und der von 3 mit $ab$ derselbe mit dem von $ab$ und $df$. Diese drei letztern Punkte sind aber die Punkte der Pascal'schen Linie für das Sechseck $abcdfe$, und der Satz ist bewiesen. Der betrachtete Kegelschnitt ist von dem gegebenen verschieden, aber er besitzt mit ihm die letzterwähnte Pascal'sche Linie gemeinschaftlich.

Wenn ein Sechseck einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, so sind die sechs Durchschnittspunkte derjenigen Seiten desselben, die weder aufeinanderfolgend noch entgegengesetzt liegen, die Eckpunkte eines Sechsecks, welches einem andern Kegelschnitt umschrieben ist.

Wenn von zwei Sechsecken das eine einem Kegelschnitt $S$ eingeschrieben und das andre demselben Kegelschnitt so umschrieben ist, dass die Berührungspunkte seiner Seiten mit den Eckpunkten des ersteren zusammenfallen, wenn man in dem ersteren die Seiten, welche weder aufeinanderfolgen noch entgegengesetzt sind, bis zum Durchschnitt verlängert, und im zweiten die Ecken, von denen das Gleiche gilt, durch gerade Linien verbindet, so erhält man einerseits die Eckpunkte eines Sechsecks, welches einem neuen Kegelschnitt $\Sigma_1$ umschrieben ist, und andrerseits die Seiten eines Sechsecks, welches einem zweiten neuen Kegelschnitt $\Sigma_2$ eingeschrieben ist; der Brianchon'sche Punkt jenes und die Pascal'sche Gerade dieses Sechsecks sind Pol und Polare bezüglich des gegebenen Kegelschnitts $S$, und beide Sechsecke sind in Bezug auf diesen nämlichen Kegelschnitt polar-reciprok.

## III. Ueber die allgemeine Aufgabe, einen Kegelschnitt nach gegebenen Bedingungen zu beschreiben.

Wir sahen, dass fünf Bedingungen einen Kegelschnitt bestimmen, und können daher im Allgemeinen einen Kegelschnitt beschreiben, wenn $m$ Punkte und $n$ Tangenten desselben gegeben sind, und $m + n = 5$ ist. Es wird kaum nöthig sein, dabei auf diejenigen speciellen Fälle besonders aufmerksam zu machen, in denen eins dieser Bestimmungs-Elemente oder mehrere derselben in unendlicher Entfernung sind; wir machen nur einzelne darauf bezügliche Bemerkungen. Wenn eine Parallele zu einer Asymptote gegeben ist, so ist dies einer Bedingung äquivalent, denn mit ihr ist ein Punkt der Curve, nämlich der unendlich entfernte Punkt der Geraden, gegeben. Die in Art. 417, Aufg. 13 gegebene Construction eines Kegelschnitts aus fünf Punkten überträgt sich ohne weiteres auf diesen Fall, indem man den Punkt $E$ als unendlich entfernt und die geraden Linien $DE$, $ME$ daher als parallel einer gegebenen geraden Linie betrachtet.

Eine Asymptote der Curve ist zwei Bedingungen äquivalent, weil mit ihr eine Tangente und der zugehörige Berührungspunkt gegeben ist. Die Bestimmung, dass die Curve eine Parabel sein soll, ist einer Bedingung äquivalent, weil die unendlich entfernte gerade Linie in diesem Falle als eine Tangente gegeben ist; dagegen wiegt die Bezeichnung der Curve als Kreis zwei Bedingungen auf, denn es sind zwei bestimmte Punkte in unendlicher Entfernung, durch welche die Curve gehen muss. Ein Brennpunkt der Curve ist zwei Bedingungen äquivalent, denn er bestimmt zwei Tangenten der Curve. Dass ein Brennpunkt mit drei andern Bedingungen zusammen einen Kegelschnitt bestimme, erhellt auch daraus, dass die reciproke Construction, wenn man jenen Brennpunkt als Pol nimmt, einen Kreis zu bestimmen verlangt, für welchen drei Bedingungen gegeben sind; wenn man von der durch die Elementar-Geometrie erhaltenen Auflösung dieser Aufgabe die reciproke Figur bildet, so hat man die Auflösung der betrachteten Frage. Auch die Angabe des Pols einer geraden Linie in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt ist zwei Bedingungen äquivalent, denn drei weitere Bedingungen würden die Curve bestimmen. Ist nämlich $P$ (in Fig. 43) der Pol von $R' R''$ und $T$ ein Punkt der Curve, so ist $T'$, der vierte harmonische Punkt zu den Punkten $P, T, R$, auch ein Punkt der Curve; oder wenn $OT$ eine Tangente ist, so muss auch $OT'$, die vierte Harmonikale zu $OP$, $OR'$, $OT$ eine Tangente sein. Wenn also ausser einer geraden Linie und ihrem Pol drei Punkte oder drei Tangenten der Curve gegeben sind, so können drei weitere Punkte oder Tangenten gefunden werden, und die Curve ist bestimmt. Die Bestimmung des Centrums, als des Pols der unendlich entfernten geraden Linie, ist zwei Bedingungen äquivalent.

Die Angabe eines Punktes in der Polare eines gegebenen Punktes ist einer Bedingung äquivalent; z. B. bedeutet die Bezeichnung der Curve als gleichseitige Hyperbel, dass jeder der unendlich entfernten imaginären Kreispunkte in der Polare des andern in Bezug auf die Curve liegt.

Wenn diese Bemerkungen namentlich der Zurückführung besonderer Fälle auf die allgemeinen Bestimmungen gelten, so sollen nun die letzteren selbst, nämlich die Bestimmung des Kegelschnitts aus fünf Punkten, oder aus fünf Tangenten, aus vier Punkten und einer Tangente, oder aus vier Tangenten und einem Punkte, und aus drei Punkten und zwei Tangenten, oder drei Tangenten und zwei Punkten kurz betrachtet werden.

Fünf Punkte. Wir haben bereits in der Aufgabe des Art. 417 gezeigt, wie man aus fünf gegebenen Punkten beliebig viele andre Punkte der Curve durch lineare Construction finden kann. Man kann auch die Polare eines beliebigen Punktes oder den Pol einer beliebigen geraden Linie in Bezug auf den Kegelschnitt bestimmen, weil die im Art. 106 in der Aufg. 2. mitgetheilte Construction nach dem Vorigen leicht ausgeführt werden kann; man sieht, dass dies zur Bestimmung des Centrums führt.

Fünf Tangenten. Man benutzt entweder die reciproken Constructionen der vorher angegebenen, oder man reducirt die Aufgabe auf die vorige, indem man, wie in Art. 289 angedeutet ward, die Berührungspunkte der Tangenten bestimmt.

Man kann auch die Gattung der Curven leicht bestimmen; denn die von den fünf Punkten $a, b, c, d, e$ bestimmten Strahlenbüschel $(a. cde)$ und $(b. cde)$ sind von gleichem Doppelschnittsverhältniss, und wenn man sie als an dem nämlichen Scheitel verzeichnet denkt, so bestimmen die Doppelstrahlen derselben, d. h. diejenigen Strahlen, welche sich selbst correspondiren, die Richtungen der unendlich entfernten Punkte des Kegelschnitts; sind sie reell und verschieden, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten ihnen parallel sind; fallen sie zusammen, so ist der Kegelschnitt eine Parabel, und wenn sie imaginär sind, eine Ellipse. Man sieht leicht, wie dadurch und durch das Centrum auch die Achsen sich ergeben.

Man kann auch diese Constructionen auf die involutorischen Eigenschaften der ein- und umgeschriebenen Vierecke zurückführen; wir deuten dies für den Fall von fünf Tangenten an: Vier der gegebenen Tangenten bilden ein umschriebenes Viereck; wenn man in der fünften Tangente einen Punkt beliebig wählt, so ist die von ihm ausgehende zweite Tangente des Kegelschnitts als der sechste Strahl einer Involution bestimmt, welche von den vier Verbindungslinien jenes Punktes mit den Ecken des bezeichneten Vierecks und der fünften Tangente selbst gebildet wird.

Vier Punkte und eine Tangente. Wir haben eine Methode zur Auflösung dieser Aufgabe bereits im Art. 416 bezeichnet und erinnern, dass der Berührungspunkt der gegebenen Tangente, dessen Bestimmung die Aufgabe lösen würde, Brennpunkt einer Involution ist, welche von den Gegenseitenpaaren des gegebenen Vierecks in ihr bestimmt wird. Die Aufgabe hat zwei Auflösungen, eine Construction durch lineare Operationen allein ist nicht zu erwarten.

Man kann Carnot's Satz über den Durchschnitt eines Kegelschnitts mit einem Dreieck $ABC$ benutzen, nach welchem für die von den Paaren der Durchschnittspunkte seiner Seiten und den Ecken bestimmten Segmente die Relation

$$Ac \,.\, Ac' \,.\, Ba \,.\, Ba' \,.\, Cb \,.\, Cb' = Ab \,.\, Ab' \,.\, Bc \,.\, Bc' \,.\, Ca \,.\, Ca'$$

besteht; sind $a, a', b, b'$ die gegebenen Punkte, und ist $AB$ die gegebene Tangente, so fallen $cc'$ zusammen und die bezeichnete Relation bestimmt den Werth $Ac^2 : Bc^2$, da alle andern Segmente bekannt sind.

Man kann endlich bemerken, dass durch die vier gegebenen Punkte des Kegelschnitts auch die Bestimmung dreier Punkte und ihrer Polaren schon mit erfolgt ist, nämlich nach Art. 397, der Durchschnittspunkte der Diagonalen und Gegenseiten des von jenen gebildeten Vierecks, welche in Bezug auf alle diesem Viereck umschriebene Kegelschnitte das gemeinschaftliche sich selbst conjugirte Dreieck bilden. Man erhält dadurch aus der einen gegebenen Tangente drei andre Tangenten unmittelbar und hat sodann vier Punkte und vier Tangenten.

Vier Tangenten und ein Punkt. Die reciproken Constructionen von denen der vorigen Aufgabe führen zum Ziel; insbesondere bemerken wir, dass vier Tangenten auch drei Punkte bestimmen, deren Polaren in Bezug auf die Curve bekannt sind. (Art. 106.)

Drei Punkte und zwei Tangenten. Wir ziehen aus Art. 416 den Schluss, dass die beiden Punkte, in welchen eine beliebige gerade Linie einen Kegelschnitt, und die beiden, in denen sie zwei seiner Tangenten schneidet, einem involutorischen System angehören, für welches der Punkt, in dem sie die Berührungssehne der beiden Tangenten schneidet, einer der Brennpunkte ist. Wenn daher die Verbindungslinie von zweien unter den festen Punkten $a$, $b$ die beiden gegebenen Tangenten in $A$, $B$ schneidet, so geht die Berührungssehne dieser Tangenten durch den einen oder andern der festen Punkte $F$, $F'$, welche die Brennpunkte des Systems $(a, b, A, B)$ bezeichnen. (Vgl. Art. 287.) Das Analoge gilt von der andern geraden Linie $a$, $c$; die Brennpunkte $G$, $G'$ des involutorischen Systems, welches durch $a$, $c$ und durch die Durchschnittspunkte $A'$, $B'$ der geraden Linie $ac$ mit jenen gegebenen Tangenten bestimmt ist, gehören der Berührungssehne derselben nothwendig an; demnach ist dieselbe eine der vier geraden Linien $FG$, $F'G$, $F'G'$, $FG'$, und die Aufgabe besitzt im Allgemeinen vier Auflösungen.

Wenn eine der gegebenen Tangenten unendlich entfernt gedacht wird, so dass der Kegelschnitt eine Parabel ist, so ist die Berührungssehne ein Durchmesser der Curve und die vier Auflösungen liefern die Lage der Achsen der vier Parabeln, welche der Aufgabe entsprechen.

Zwei Punkte und drei Tangenten. Es kann einerseits die Bemerkung zum Ziele führen, dass das von den Berührungssehnen der drei Tangenten gebildete Dreieck seine Ecken ebensowohl je eine in einer der gegebenen Tangenten haben muss, als seine Seiten jede durch einen festen Punkt gehen müssen, welcher in der geraden Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegt; denn dadurch kann dies Dreieck construirt werden.

Andrerseits kann man den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten des Kegelschnitts in den gegebenen Punkten und damit diese Tangenten selbst durch die reciproke Construction der vorhergehenden bestimmen.

Wenn von einem Kegelschnitt zwei Punkte oder zwei Tangenten gegeben sind, so ist dies ein specieller Fall von der Bestimmung, dass derselbe mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung habe. Die Auflösung der Aufgabe: Einen Kegelschnitt zu beschreiben, für welchen drei Punkte oder drei Tangenten gegeben sind und welcher mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung hat, — ist bereits im Art. 417 Aufg. 10 gegeben worden. Ebenso enthält der Art. 309 bereits die Construction eines Kegelschnitts, welcher mit zwei gegebenen Kegelschnitten eine doppelte Berührung hat, und überdies durch einen gegebenen Punkt geht, oder eine gegebene gerade Linie berührt.

Für die Bestimmung eines Kegelschnitts, welcher mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte und mit drei andern festen Kegelschnitten je eine einfache Berührung hat, verweisen wir auf Art. 386.

Endlich hat die Aufgabe: Einen Kegelschnitt durch vier gegebene Punkte zu legen, der zugleich einen gegebenen Kegelschnitt berührt, — eine besonders ausführliche Behandlung gefunden, welche dem vielseitigen Interesse, das sie darbietet, einigermassen gerecht worden sein mag. Die Bestimmung der Berührungspunkte auf dem festen Kegelschnitt führte auf einen Ort dritten Grades; sechs Auflösungen genügen im Allgemeinen der Aufgabe. Wir bestimmten die vier Punkte als die Durchschnittspunkte zweier festen Kegelschnitte, so dass die Aufgabe die Bestimmung eines Kegelschnitts fordert, der mit zwei andern dieselben Durchschnittspunkte hat und einen dritten festen Kegelschnitt berührt. Wir sahen insbesondre, dass dieser Ort sich für drei Kreise auf einen Kreis — den Orthogonalkreis — und die unendlich entfernte gerade Linie, überhaupt für Kegelschnitte, welche durch dieselben zwei festen Punkte gehen, auf die sie verbindende Sehne und einen Kegelschnitt reducirt.

Wir fügen dazu die Bemerkung, dass der Ort des dritten Grades auch dann in eine gerade Linie und einen Kegelschnitt degenerirt, wenn der eine der beiden festen dem gegebenen Viereck umschriebenen Kegelschnitte auf eine gerade Linie reducirt ist, d. h. wenn seine Gleichung als ein vollkommenes Quadrat erscheint. Man kann also einen Kegelschnitt construiren, der einen gegebenen Kegelschnitt in zwei bestimmten Punkten und überdies einen andern Kegelschnitt berührt.

Wenn von den gegebenen Elementen einige imaginär sind, so erfahren die Constructions-Methoden Abänderungen, welche indess nicht wesentlich sind. Vier imaginäre Punkte werden durch zwei Kegelschnitte oder durch einen Kegelschnitt und durch zwei gerade Linien — welche den andern vertreten — bestimmt, und wenn z. B. die Gegenseiten des Vierecks involutorische Punktepaare lieferten, so thun die beiden Kegelschnitte jetzt dasselbe.

Wir haben hier überall nur Punkte oder Tangenten als gegebene Elemente vorausgesetzt, weil sie die wahrhaft ursprünglichen Elemente der Curven überhaupt sind; die einleitenden Bemerkungen dieser Note haben gezeigt, wie die Angabe der Brennpunkte, des Centrums, der Asymptoten, die Festsetzung eines Pols und seiner Polare etc. darauf zurückgeführt werden können. Man kann unter die Bestimmungsstücke eines Kegelschnitts endlich N o r m a l e n desselben aufnehmen und nach der Zahl und Art der sich ergebenden Auflösungen fragen. Die Art, wie wir in den Schlussartikeln des Textes den Begriff der Normale generalisirt haben, zeigt, ebenso wie andere naheliegende Betrachtungen, das mindere Gewicht, welches eine Normale als Bestimmungs-Element erhalten muss; eine grössere Zahl der Auflösungen ist die naturgemässe Folge davon. Wir geben eine einfache Anschauung von dem Falle der Bestimmung durch vier Punkte und eine Normale.

Die Normale bestimmt die Richtung oder den unendlich entfernten Punkt der zugehörigen Tangenten.

Wir denken daher das Büschel der durch die vier festen Punkte gehenden Kegelschnitte und das ihrer von willkürlich gewählten Punkten ausgehenden Tangenten; jede dieser Tangenten berührt zwei Kegelschnitte des bezeichneten Systems, weil der Bestimmung eines Kegelschnitts durch vier Punkte und eine Tangente zwei Auflösungen entsprechen; einer der Kegelschnitte des Systems geht zudem durch den gewählten fünften Punkt selbst und es muss somit der geometrische Ort der Berührungspunkte jenes Tangentenbüschels mit dem System der durch die vier Punkte gehenden Kegelschnitte eine Curve 3. Ordnung sein, der der Scheitel des Tangentenbüschels angehört, und welche nach dem Früheren construirt werden kann. Lässt man diesen Scheitel unendlich entfernt sein, so übertragen sich die vorigen Betrachtungen auf ein Büschel paralleler Tangenten, und wenn man seine Richtung zu der der gegebenen Normale senkrecht sein lässt, so giebt die entsprechende Curve dritter Ordnung in der gegebenen Normale die ihr zugehörigen Fusspunkte an, und jeder derselben bestimmt mit den vier gegebenen festen Punkten einen der Kegelschnitte, welche man sucht; sonach entsprechen der Aufgabe drei Auflösungen. Ebenso viele entsprechen der Aufgabe, einen Kegelschnitt durch vier Tangenten und eine Normale zu bestimmen und man erhält sie durch ähnliche Betrachtungen. Die Bestimmung eines Kegelschnitts durch drei Punkte, eine Tangente und eine Normale liefert (ebenso wie die durch drei Tangenten, einen Punkt und eine Normale) sechs Auflösungen, und die Bestimmung durch drei Punkte und zwei Normalen liefert deren neun. Für jene betrachtet man das Büschel von geraden Linien, welches zu der gegebenen Normale senkrecht ist und erhält auf jedem Strahl desselben vier Berührungspunkte, weil durch drei Punkte und zwei Tangenten vier verschiedene Kegelschnitte bestimmt sind; ausserdem gehen aber durch den Scheitel des Büschels und die drei gegebenen Punkte zwei Kegelschnitte, welche die gegebene Tangente berühren, so dass also jedem Strahl des Büschels sechs verschiedene Kegelschnitte entsprechen, und der Ort der Berührungspunkte zwischen diesen Strahlen und dem System der Kegelschnitte eine Curve sechster Ordnung ist, welche in dem unendlich entfernten Scheitel des Büschels einen Doppelpunkt hat. Die sechs Schnittpunkte dieses Ortes mit der gegebenen Normale liefern die sechs Auflösungen. Für den zweiten Fall betrachten wir das Büschel von Parallelen, welches zu einer der Normalen senkrecht ist; jedem Strahl desselben entsprechen sechs ihn bezeichnende Kegelschnitte, welche durch die drei gegebenen Punkte gehen, und denen die andere Normale angehört, und man kann ausserdem durch die drei Punkte und den Scheitel des Büschels drei Kegelschnitte legen, welchen diese zweite Normale angehört; in Folge dessen ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der Kegelschnitte, welche durch die drei Punkte, die zweite Normale und je einen Strahl des zur ersten Normale senkrechten Büschels als Tangente bestimmt sind, mit diesem Tangentenbüschel eine Curve vom neunten Grade, welche im unendlich entfernten Scheitel des Büschels einen dreifachen Punkt hat.

Analoge Betrachtungen zeigen, dass die Bestimmung durch zwei Punkte, zwei Tangenten und eine Normale acht, die durch zwei Punkte, eine Tangente und zwei Normalen, und die durch einen Punkt, zwei Tangenten und zwei Normalen vierzehn, die durch zwei Punkte oder zwei Tangenten und drei Normalen dreiundzwanzig Auflösungen giebt. Endlich entsprechen der Bestimmung durch eine Tangente, einen Punkt und drei Normalen achtundzwanzig, der Bestimmung durch einen Punkt oder eine Tangente und vier Normalen einundfünfzig und der Bestimmung durch fünf Normalen hundertundzwei Auflösungen. (Man vergleiche eine Note von H. Steiner in Crelle's Journ. Bd. LV. 377, und die darauf bezügliche von M. E. de Jonquières in Liouville's Journal 1859. p. 49.)

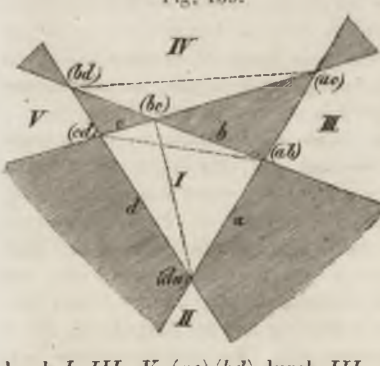
# IV. Ueber das System der demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte.

Das System der durch vier feste gerade Linien berührten Kegelschnitte bildet einen interessanten Cyclus, dessen Ueberblick man sich, wie folgt, verschaffen kann:

Seien $a, b, c, d$ die vier festen geraden Linien, und bezeichnen wir durch $(ab)$, $(bc)$, $(cd)$, $(da)$, $(ac)$, $(bd)$ die sechs Durchschnittspunte derselben, so können die drei Diagonalen des entstehenden vollständigen Vierseits durch $(ab)(cd)$, $(bc)(ad)$, $(ac)(bd)$ bezeichnet werden. In allem entstehen durch diese Linien elf Flächenräume in der Ebene der Figur, deren keiner einen andern überdeckt; von diesen sind acht unendlich, während die übrigen drei durch ein Viereck und zwei Dreiecke gegeben sind. Nur durch fünf von diesen Flächenstücken erstrecken sich die Kegelschnitte des Systems, in den übrigen sechs Flächen sind keine dem System angehörigen Punkte enthalten; diese sechs Flächenstücke sind die beiden Dreiecke $(bc)(cd)(db)$, $(ab)(bc)(ca)$, die Flächen der an den Ecken $(bd)$ und $(ac)$ ihnen entsprechenden Scheitelaussenwinkel, und die beiden gleichfalls unendlichen an den Seiten $d$ und $a$ anliegenden und respective durch die Nachbarseiten $a$ und $c$, $b$ und $d$ seitlich begrenzten Flächenstücke. Wenn man das Vierseit als durch den Durchschnitt zweier Winkel entstanden denkt, so enthält jeder derselben drei dieser Flächenstücke, deren zwei, das Dreieck und die einfache Winkelfläche auf der einen Seite der geschlossenen vierseitigen Figur liegen, während die dritte die andre Seite derselben bildet.

Für die Ausbreitung der Kegelschnitte des Systems bleiben demgemäss fünf Flächenstücke übrig, nämlich das geschlossene Vierseit, von den Ecken $(ab)(bc)(cd)(da)$, die Fläche des Scheitelwinkels an $(da)$, die zwei Flächen, welche an den Seiten $a$ und $d$ desselben anstossen und seitlich durch die andern $b$, $c$ begrenzt sind, endlich die von vier Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ begrenzte unendliche Fläche; wir bezeichnen diese fünf Flächen als $I, II, III, IV, V$. Die Figur zeigt sie deutlich und unterscheidet die sechs vorher erwähnten Flächenstücke einfach von ihnen durch Schraffur. (Fig. 139.)

Fig. 139.




Man sieht leicht, jede der drei Diagonalen des Vierseits geht durch drei der fünf dem System angehörigen Flächen, nämlich $(ab)$, $(cd)$ durch $I, III, V$, $(ac)(bd)$ durch $III, IV, V$ und $(bc)(da)$ durch $I, II, V$; jede Ecke des Vierecks gehört zu zweien derselben.

Demnach können alle Kegelschnitte des Systems in drei Gruppen geordnet werden, nämlich solche, welche allein im Raume *I*, solche, welche in den Räumen *II* und *IV*, und solche, welche in den Räumen *III* und *V* liegen. Wir betrachten sie nach einander.

1) Die Kegelschnitte im Raume *I*. Es sind Ellipsen. Die erste derselben ist die begrenzte gerade Linie $(ab)$ $(cd)$, als eine Ellipse von unendlich kurzer Nebenachse betrachtet; in der damit beginnenden Reihe der Ellipsen bemerken wir eine Drehung der Hauptachse aus der Lage $(ab)$ $(cd)$ gegen die Lage $(bc)$ $(da)$ hin und ein damit verbundenes anfängliches Wachsen, später wieder Abnehmen der kleinen Achse; in der begrenzten geraden Linie $(bc)$ $(da)$ endigt die Reihe der Ellipsen mit derjenigen, für welche wieder die Länge der kleinen Achse Null ist.

2) Die Kegelschnitte in den Räumen *II* und *IV*. Es sind Hyperbeln. Als erste Hyperbel erscheint die unendliche Strecke $(bc)$ $\infty$ $(da)$, welche die letzte Ellipse der vorigen Gruppe zur vollen unbegrenzten Geraden ergänzt. An sie schliessen sich Hyperbeln an, für deren jede ein Zweig in der Fläche *II*, der andere in der Fläche *IV* liegt, jener $(da)$ $(ab)$ und $(da)$ $(cd)$, dieser $(bc)$ $(ca)$ und $(cb)$ $(bd)$ berührend. Die Berührungspunkte des in *II* liegenden Zweiges mit den durch $(da)$ gehenden Seiten entfernen sich von $(da)$ mehr und mehr, und es schreitet dabei der auf $(ad)$ $(dc)$ gelegene schneller fort als der andere, so dass er in unendlicher Entfernung ankommt, während der Berührungspunkt mit der Seite $(da)$ $(ab)$ noch endlich angebbar ist. Dieser Lage entspricht eine Hyperbel, welche die Linie $(ad)$ $(dc)$ oder $d$ zur Asymptote hat. Der unendlich entfernte Punkt derselben liegt ebensowohl im Raume *II*, als im Raume *IV*, und wird hier von dem anderen Zweige derselben Hyperbel berührt, welcher auch die Seiten $b$ und $c$ berührt.

Auf diese folgt eine Reihe von Hyperbeln, für welche alle der dem Raume *II* entsprechende Zweig nur die Seite $a$ berührt, während der andere im Raume *IV* die übrigen drei Seiten $b$, $c$, $d$ berührt. Als Grenzfall entspricht dieser Reihe die Hyperbel, für welche der Berührungspunkt mit $a$ unendlich entfernt, für welche also $a$ eine Asymptote ist.

Daran schliesst sich eine Reihe von Hyperbeln, für deren jede der im Raume *II* liegende Zweig keine der beiden Seiten berührt, weil alle vier Seiten von dem im Raume *IV* liegenden Zweige berührt werden; jener erstere Zweig rückt weiter und weiter vom Punkte $(ad)$ weg und verschwindet in unendlicher Entfernung für den Grenzfall dieser Reihe, eine Parabel, welche, die vier Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ berührend, in ihrer endlichen Erstreckung ganz der Region *IV* angehört.

Diese Parabel führt zu den Kegelschnitten dieser Region über, welche Ellipsen sind, die die vier Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ berühren; die Reihe derselben endigt, nach einem ähnlichen Entwicklungsgange, wie er bei den Ellipsen des Raumes *I* stattfindet, mit der als eine Ellipse von unendlich kleiner Nebenachse zu betrachtenden begrenzten geraden Strecke $(ac)$ $(bd)$.

3) Die Kegelschnitte in den Räumen *III* und *V*. Sie sind Hyperbeln, deren einer Zweig im Raume *III*, der andere im Raume *V* enthalten ist. Als die erste derselben erscheint die unendliche Strecke $(ac)\infty(bd)$, welche die, die letzte Ellipse der Gruppe 2) repräsentirende begrenzte Strecke $(ac)$ $(bd)$ zur unendlichen Geraden ergänzt.

An dieselbe schliesst sich eine Reihe von Hyperbeln an, deren jede einen Zweig in dem Raume *III* hat, welcher die Linien $a$ und $c$, und einen Zweig in dem Raume *V*, welcher die Linien $b$ und $d$ berührt. Ihnen entspricht als Grenze diejenige Hyperbel, welche die Seite $c$ zur Asymptote hat.

Daran schliesst sich dann eine Reihe von Hyperbeln, für deren jede der im Raume *III* liegende Zweig nur die Seite $a$ berührt, während die drei andern Seiten $b$, $c$, $d$ sämmtlich von dem dem Raume *V* angehörenden Zweige berührt werden. Die Grenze dieser Reihe bildet diejenige Hyperbel, welche die Seite $b$ zur Asymptote hat.

Diese führt zu einer Reihe von Hyperbeln über, für deren jede der im Raume *III* liegende Zweig die Seiten $a$ und $b$ berührt, während für den im Raume *V* liegenden die beiden andern Seiten $c$ und $d$ Tangenten sind. Die letzte Hyperbel dieser Reihe ist die unbegrenzte Strecke $(ab)\infty(cd)$. Man sieht, sie ergänzt die erste Ellipse des ganzen Systems zur unbegrenzten Geraden $(ab)$ $(cd)$ und schliesst den Cyclus ab, so dass man, an jeder beliebigen Stelle beginnend, ihn ganz durchlaufen kann.

Wenn man zwei Gegenecken des Vierecks $(ab)(bc)(cd)(da)$ zusammenfallen lässt, z.B. $(ab)$, $(cd)$, indess die beiden übrigen unverändert bleiben, so bilden die benachbarten Seiten $(bc)$ $(cd)$, $(bc)$ $(ab)$ und $(ca)$ $(ab)$, $(ca)$ $(cd)$ zwei Paare zusammenfallender Tangenten für alle Kegelschnitte des Systems; ihre Durchschnittspunkte $(bc)$ und $(ac)$ sind die gemeinschaftlichen Berührungspunkte $B$ und $A$ aller dem System angehörigen Kegelschnitte mit den Seiten $BC$ und $AC$, den Doppelseiten des umschriebenen Vierseits.

Die gerade Linie $AB$, die Berührungssehne der gemeinschaftlichen Tangenten aller Kegelschnitte des Systems, kann als die Achse desselben und der ihr in Bezug auf alle diese Kegelschnitte als Pol entsprechende Punkt $C$ als der Pol des Systems bezeichnet werden.

Die Formenwandlung der diesem System angehörigen Kegelschnitte kann wie folgt überblickt werden: Wir betrachten als den ersten Kegelschnitt des Systems die begrenzte Strecke der Achse zwischen den Berührungspunkten der gemeinschaftlichen Tangenten; sie ist eine Ellipse von unendlich kleiner Nebenachse. Sie ist die erste einer Reihe von Ellipsen, welche sich mit drehender und dabei wachsender Hauptachse gegen die Grenzlage der in $A$, $B$ von den Linien $CA$, $CB$ berührten Parabel bewegen. An diese schliessen sich Hyperbeln, deren beide Zweige in demselben Winkelraum $ACB$, welchem die Ellipsen angehörten, und seinem Scheitelwinkelraum liegen; mit abnehmender Hauptachse nähern sich diese stetig und unbegrenzt dem Paar der geraden Linien $CA$, $CB$. Sie gehen endlich durch diese hindurch in Hyperbeln über, welche die Flächen der Nebenwinkel der bisher betrachteten bedecken und bei fortgesetzter Drehung der Hauptachse endlich in der unbegrenzten Strecke $A \infty C$ endigen, welche als eine Hyperbel von unendlich kleiner Nebenachse anzusehen ist. Man sieht, wie diese die erste Ellipse des Systems zur unbegrenzten geraden Linie $AC$ ergänzt und den Cyklus schliesst. (Vergl. zwei Noten von M. Cayley im III. Bde. des Quarterly Journ.)

Man erkennt wohl, wie dieser Cyklus in Allem sich als die Grenze des vorbetrachteten erweist; wie er sich von ihm wesentlich nur unterscheidet durch das Ausfallen der dort unter 1) betrachteten Reihe von Ellipsen, als der zwischen den Hyperbeln der Gruppe 3) und der Gruppe 2) inneliegenden Reihe, so dass diese beiden in eine nur durch das Paar der geraden Linien getheilte Gruppe zusammenfliessen.

Aber dies System ist zugleich der Grenzfall des andern Systems derjenigen Kegelschnitte, welche demselben Viereck *abcd* umschrieben sind; derselbe wird durch das Zusammenfallen zweier Paare benachbarter Ecken oder eines Paares Gegenseiten aus dem allgemeinen erhalten. Auch diesen Zusammenhang findet man in der Vergleichung des oben geschilderten Systems mit dem bezeichneten mehrseitig betrachteten (vergleiche z. B. die Paragraphen 252 — 257 des barycentrischen Calculs und den Aufsatz von A. Jacobi im 23. Bande von Crelle's Journal) System deutlich gezeichnet. Man weiss, dass für das letztere die beiden Fälle unterschieden werden müssen, in welchen einer der vier Punkte innerhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks liegt, und in welchem jeder derselben ausserhalb des Dreiecks der drei übrigen fällt; weiss, dass in jenem Falle nur Hyperbeln dem System angehören, indess in diesem neben Hyperbeln auch Ellipsen und unter den Uebergangsformen zwei Parabeln mit auftreten. Man sieht, dass der Grenzfall des Systems der sich doppelt berührenden Kegelschnitte, ebenso wie er in der Lage der vier Punkte den Uebergang bildet, auch in dem Vorkommen von nur einer aber stets einer Parabel diese Grenzstellung bezeichnet.

Wir haben in dem Vorigen überall reelle Bestimmungs-Elemente vorausgesetzt, und es bleibt demnach zu erinnern übrig, dass dieselben ganz oder theilweise auch imaginär sein können. Die vier geraden Linien des ersten Systems können als gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte gegeben und demnach alle vier, oder es können doch zwei von ihnen imaginär sein. Desgleichen die vier Punkte des letzten Systems. Man weiss, dass den aus jener Voraussetzung hervorgehenden Systemen die Systeme der confocalen Kegelschnitte und den aus dieser letztern entspringenden die der Kreise mit gemeinschaftlicher Radical-Achse beispielsweise entsprechen.

In dem Grenzfall der sich doppelt berührenden Kegelschnitte können die gemeinschaftlichen Tangenten und demgemäss ihre Berührungspunkte imaginär sein, während der Pol und die Achse reell bleiben müssen. Das System concentrischer Kreise bildet einen sehr speciellen Fall davon. Die

38*

Bestimmung des allgemeinen Falles kann man vollzogen setzen durch einen Kegelschnitt, eine gerade Linie, die keine reellen Punkte mit ihm gemein hat und den in Bezug auf jenen Kegelschnitt genommenen Pol derselben; dieser Kegelschnitt gehört selbst dem System an, welches durch diesen Pol und jene geradlinige Achse bestimmt ist.

Mit einer unendlich wenig vom Pol abweichenden Ellipse beginnt das System; seine Kegelschnitte nähern sich, durch Ellipsen fortschreitend, unbegrenzt einer Parabel und gehen durch diese hindurch zu Hyperbeln über, deren letzte unendlich wenig von der Achse abweicht. Jene Ellipsen und die Parabel liegen sämmtlich auf der nämlichen Seite der Achse, diese Hyperbeln haben zu beiden Seiten derselben je einen Zweig. Jene unendlich schmale Ellipse hat in der Achse eine von imaginären Punkten begrenzte Strecke bestimmt, welche die letzte einer Reihe von imaginären Hyperbeln als eine unbegrenzte Strecke zur unendlichen Geraden ergänzt. Durch diese imaginäre Reihe, welche mit dem Paare der imaginären gemeinschaftlichen Tangenten endigt oder beginnt, wird der Kreislauf der Formen hier beschlossen.

## V. Ueber die Bestimmung der Asymptoten eines Kegelschnitts aus seiner allgemeinen Gleichung.

Wir setzen die allgemeine Gleichung in der Form

$$a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 + 2b\beta\gamma + 2b'\gamma\alpha + 2b''\alpha\beta = o$$

voraus und repräsentiren sie durch

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = o;$$

dagegen mag $f(\alpha, \beta, \gamma) = o$

die Gleichung der Asymptoten darstellen, die wir suchen.

Die Asymptoten des gegebenen Kegelschnitts können als ein zweiter Kegelschnitt betrachtet werden, der mit jenem in der unendlich entfernten geraden Linie eine doppelte Berührung hat; daher muss ihre Gleichung unter der allgemeinen Form

$$F(\alpha, \beta, \gamma) + k(\alpha + \beta + \gamma)^2 = o$$

mit enthalten sein.

Unter allen in dieser Form enthaltenen Curven ist sie dadurch ausgezeichnet, dass ihr Centrum in ihr selbst liegt.

Nun ist das Centrum einer Curve

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = o$$

durch die Gleichungen

$$\frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\alpha} = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\beta} = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\gamma}$$

bestimmt, und man erhält daher zu seiner Bestimmung die drei Gleichungen

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma)}{d\alpha} = \frac{dF(\alpha,\beta,\gamma)}{d\beta} = \frac{dF(\alpha,\beta,\gamma)}{d\gamma} = -2k(\alpha+\beta+\gamma),$$

oder durch Entwicklung

$$\begin{aligned}(a+k)\,\alpha + (b''+k)\,\beta + (b'+k)\,\gamma &= o,\\ (b''+k)\,\alpha + (a'+k)\,\beta + (b+k)\,\gamma &= o,\\ (b'+k)\,\alpha + (b+k)\,\beta + (a''+k)\,\gamma &= o.\end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich zur Bestimmung von $k$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a+k, & b''+k, & b'+k \\ b''+k, & a'+k, & b+k \\ b'+k, & b+k, & a''+k \end{vmatrix} = o.$$

Indem man diese Determinante in ihre Partial-Determinanten zerlegt, reducirt sie sich auf eine Bestimmungsgleichung ersten Grades

$$-k\left\{\begin{vmatrix} a, & b'', & 1 \\ b'', & a', & 1 \\ b', & b, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & 1, & b' \\ b'', & 1, & b \\ b', & 1, & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1, & b'', & b' \\ 1, & a', & b \\ 1, & b, & a'' \end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{vmatrix}.$$

Damit ist die Gleichung der Asymptoten bestimmt.

Für $b = b' = b'' = o$, d. h. für den auf ein sich selbst conjugirtes Dreieck bezogenen Kegelschnitt, hat man

$$k = -\frac{aa'a''}{aa' + a'a'' + a''a},$$

und damit die Gleichung der Asymptoten:

$$(a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2)(aa' + a'a'' + a''a) - (\alpha+\beta+\gamma)^2 aa'a'' = o.$$

Für einen dem Fundamental-Dreieck umschriebenen Kegelschnitt oder

$$a = a' = a'' = o$$

hat man dagegen

$$k = \frac{2bb'b''}{b^2 + b'^2 + b''^2 - 2(bb' + b'b'' + b''b)}$$

und damit

$$(b\beta\gamma + b'\gamma\alpha + b''\alpha\beta)\,[b^2 + b'^2 + b''^2 - 2(bb' + b'b'' + b''b)] \\ + 2bb'b''(\alpha+\beta+\gamma)^2 = o$$

als die Gleichung der Asymptoten.

Man bemerkt endlich, dass die allgemeine Gleichung der Asymptoten für die Werthe

$$aa' = b''^2,\ a'a'' = b^2,\ a''a = b'^2$$

zu einer identischen Gleichung wird, und findet leicht, dass alsdann auch die dreireihige Determinante im Zähler des allgemeinen Werthes von $k$ gleich Null wird; das Verschwinden dieser Determinante, als welche mit der Discriminante der allgemeinen Gleichung identisch ist, zeigt an, dass dies für den in zwei gerade Linien deformirten Kegelschnitt der Fall sei. In der That kann jedes Paar mit denselben paralleler Linien als das Asymptoten-Paar eines solchen Kegelschnitts angesehen werden.

## VI. Zur geometrischen Bedeutung der Discriminante.

Im Art. 295 ist gezeigt worden, dass alle die durch eine Gleichung von der Form $\mu^2 L - 2\mu R + M = o$ dargestellten geraden Linien einen Kegelschnitt

$$LM = R^2$$

berühren, und im Art. 324 wurde hinzugefügt, dass die durch die nämliche erste Gleichung repräsentirten Punkte dem durch die zweite dargestellten Kegelschnitt angehören, wenn man statt des Systems der dreiseitigen Punkt-Coordinaten das der dreieckigen Linien-Coordinaten voraussetzt; gleichzeitig ward bemerkt, dass die Gleichung

$$LM = R^2$$

die Bedingung ausdrückt, unter welcher die Gleichung

$$\mu^2 L - 2\mu R + M = o$$

gleiche Wurzeln hat, und man sieht darnach in Erinnerung an Art. 360, 361, dass für alle die durch eine Gleichung mit veränderlichem Parameter dargestellten geraden Linien oder Punkte die mit Null verglichene Discriminante ihrer Gleichung respective die Enveloppe oder den Ort repräsentirt.

Es soll in dem Folgenden speciell zu dieser Verbindung des Problems der Enveloppen mit dem System der dreiseitigen oder der Cartesischen Punkt-Coordinaten durch die Discriminante ein anregender Beitrag geliefert werden.

Wenn $$y = f(x)$$ die Gleichung einer Curve ist, so wird bekanntlich durch

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

die Gleichung ihrer Normale im Punkte $x, y$ repräsentirt. Die Einführung des aus der ersten Gleichung hervorgehenden Werthes von $\frac{dx}{dy}$ in die zweite und der Ersatz der einen Veränderlichen $x$ durch die andere $y$ oder umgekehrt liefert eine Gleichung, welche durch die Unbestimmtheit der darin noch enthaltenen Veränderlichen alle Normalen der Curve $y = f(x)$ repräsentirt, und von der man durch die Vergleichung ihrer Discriminante mit Null zur Gleichung der Enveloppe jener Normalen, d. i. der Evolute der Curve übergeht.

Für die Parabel $$y^2 = px$$ ist z. B. $$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p},$$ also

$$Y - y = -\frac{2y}{p}\left(X - \frac{y^2}{p}\right), \text{ oder } p^2 Y - p^2 y = -2yX + 2y^3,$$

und geordnet $$y^3 - \frac{p(2X-p)}{2}\, y - p^2 \frac{Y}{2} = o,$$
die Gleichung der Normalen.

Wenn man ihre Discriminante bildet und sie mit Null vergleicht, so erhält man die Gleichung ihrer Evolute.

Dazu vergleichen wir sie mit der entsprechenden homogenen Form
$$Ay^3 + 3Bxy^2 + 3Cx^2y + Dx^3 = o$$
und setzen die Werthe
$$A = 1,\ B = o,\ C = -\frac{p(2X-p)}{6},\ D = -\frac{p^2 Y}{2}$$
in die Discriminante jener Form
$$A^2D^2 - B^2C^2 + 4(AC^3 + DB^3) - 6ABCD$$
ein; daraus ergiebt sich
$$\frac{p^4 Y^2}{4} - \frac{p^3(2X-p)^3}{54} = o,$$
oder
$$y^2 = \frac{2(2X-p)^3}{27p},$$
als Gleichung der Parabel-Evolute.

Für die Ellipse ist
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x},$$
und die Gleichung der Normale
$$b^2 Yy - a^2 Xx + (a^2 - b^2)xy = o.$$

Um die durch die Substitution
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$
eintretende Irrationalität zu umgehen, setzen wir wie im Art. 231
$$x = a \cos\varphi,\ y = b \sin\varphi,$$
darnach aber $$\tan\frac{\varphi}{2} = u,$$
so dass $$\cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin\varphi = \frac{2u}{1+u^2}$$
wird. (Art. 308.)

Dies giebt
$$bY\cos\varphi - aX\sin\varphi + (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi = o,$$
$$bY(1-u^4) - 2aXu(1+u^2) + 2(a^2-b^2)\,u(1-u^2) = o.$$
d. i.
$$u^4 bY + 4u^3\frac{aX + (a^2-b^2)}{2} + 4u\frac{aX - (a^2-b^2)}{2} - bY = o,$$
und durch Vergleichung mit der entsprechenden homogenen Form
$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = o$$

und deren Discriminante wegen

$$A = bY,\ B = \frac{aX + (a^2 - b^2)}{2},\ C = o,\ D = \frac{aX - (a^2 - b^2)}{2},\ E = -bY$$

die Gleichung

$$-[a^2X^2 - (a^2 - b^2)^2 + b^2Y^2]^3$$
$$-27b^2Y^2\Big[\Big(\frac{aX + (a^2 - b^2)}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{aX - (a^2 - b^2)}{2}\Big)^2\Big]^2 = o$$

als Gleichung der Evolute. Sie reducirt sich nach einander auf

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^2,$$

und
$$a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Wir erinnern hiernach unter andern Enveloppen an diejenigen, welche durch die Normalen erzeugt wurden, die man in den Punkten einer festen geraden oder krummen Linie auf den von einem festen Punkte aus nach ihnen gezogenen Radien vectoren errichten kann; wir haben im Artikel 222 die Parabel und in dem Artikel 192 die Ellipse und Hyperbel als Enveloppen dieser Art erkannt, welche respective der geraden Linie und dem Kreise entsprechen.

Es ist leicht, diese Resultate analog dem Vorhergehenden an den Begriff der Discriminante anzuschliessen.

Wenn
$$Y - y = m(X - x)$$

die Gleichung der geraden Linie repräsentirt, deren Enveloppe wir suchen, so ist

$$Y' = -\frac{1}{m}X'$$

die Gleichung der durch den Anfangspunkt der Coordinaten zu ihr gelegten Normalen, und zur Bestimmung des Fusspunktes der letzteren in ihr ergiebt sich aus

$$X = X',\ Y = Y'$$
$$X = \frac{m(mx - y)}{1 + m^2},\ Y = -\frac{mx - y}{1 + m^2}.$$

Wenn dieser Punkt die durch

$$Y = f(X)$$

repräsentirte Linie durchläuft, so gilt die allgemeine Relation

$$-\frac{mx - y}{1 + m^2} = f\left(\frac{m(mx - y)}{1 + m^2}\right),$$

und die mit Null verglichene Discriminante derselben liefert die Gleichung der Enveloppe der betrachteten Geraden.

So z. B. für
$$Y = f(X) = aX + b$$
$$-\frac{mx - y}{1 + m^2} = am\frac{mx - y}{1 + m^2} + b,$$

oder

$$(ax + b)m^2 - (ay - x)m + b - y = o.$$

Die Discriminante der entsprechenden homogenen Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o$$

ist $B^2 - AC$, und liefert für

$$A = ax + b,\ B = -\frac{ay - x}{2},\ C = b - y$$

$$(ay - x)^2 - 4(ax + b)(b - y) = o,$$

die Gleichung einer Parabel als die der gesuchten Enveloppe.

In ganz analoger Weise lässt sich die Entwickelung für den Kreis vollziehen, und es sind dabei die Substitutionen des Art. 129 von wesentlichem Vortheil.

Derselben Richtung von Anwendungen der Discriminante gehört endlich auch der Beweis des Satzes an, dass der geometrische Ort der Projection des Centrums einer Hyperbel oder Ellipse auf ihre Tangenten durch die Gleichung

$$(X^2 + Y^2)^2 = a^2 X^2 \mp b^2 Y^2$$

dargestellt wird.

Denn man bewährt ihn, indem man die Enveloppe der Normalen sucht, die auf den vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgehenden Radien vectoren der Curve in den Punkten derselben errichtet werden.

Mit der allgemeinen Relation

$$-\frac{mx - y}{1 + m^2} = f\left(\frac{m(mx - y)}{1 + m^2}\right)$$

verglichen, liefert nämlich die vorige Gleichung als die Gleichung der Normalen die folgende:

$$\frac{(mx - y)^4}{(1 + m^2)^2} = \frac{(mx - y)^2 (a^2 \mp b^2 m^2)}{(1 + m^2)^2},$$

oder $$(mx - y)^2 = a^2 \mp b^2 m^2,$$

und nach $m$ geordnet,

$$m^2 (x^2 \pm b^2) - 2mxy + y^2 - a^2 = o.$$

Dieselbe fällt unter die allgemeine Form

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o,$$

und ihre Discriminante ist nach dem Werthe

$$B^2 - AC$$

und $$A = x^2 \pm b^2,\ B = -m,\ C = y^2 - a^2$$

zu bestimmen und liefert die Gleichung

$$x^2 y^2 = (x^2 \pm b^2)(y^2 - a^2)$$

oder $$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ebenso wird für $$Y^2 = aX$$

$$\left(\frac{mx - y}{1 + m^2}\right)^2 = am \left(\frac{mx - y}{1 + m^2}\right),$$

oder $$am^3 + (a - x)m + y = o.$$

und durch die Discriminante wie oben

$$y^2 = \frac{4(a-x)^3}{27a},$$

die **Cubische Parabel** als die Fusspunkten-Curve.

Eine andere Richtung des Gebrauchs der Discriminante erläutern wir nach dem schon früher Gesagten noch durch das folgende Beispiel.

**In den Art. 362 — 366 haben wir die wesentlichsten permanenten Relationen zweier Kegelschnitte**

$$S = o, \; S_1 = o$$

**zu einander auf die Discriminante von**

$$kS + S_1 = o$$

**zurückgeführt,** welche wir in der Form

$$k.^3 \Delta + k.^2 \Theta + k.\Theta_1 + \Delta_1 = o$$

schrieben.

Wir bezeichneten ihre Coefficienten als Invarianten und erinnern, dass $\Delta$ und $\Delta_1$ speciell die Discriminanten der Formen $S$ und $S_1$ ausdrückten.

Die Bedeutung der Grössen $\Theta$ und $\Theta_1$ kann aus dieser ihrer Natur als Invarianten leicht erkannt werden. Denn das erstere Symbol vertritt den aus den Coefficienten der Kegelschnitts-Gleichungen gebildeten Ausdruck

$$A(b^2 - a'a'') + A'(b'^2 - a''a) + A''(b''^2 - aa') + 2B(ab - b'b'') \\ + 2B'(a'b' - b''b) + 2B''(a''b'' - bb').$$

Unter der Voraussetzung aber, dass die beiden Kegelschnittsgleichungen in den Formen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = o,$$
$$2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = o$$

gegeben wären, dass also

$$b = b' = b'' = o, \; A = A' = A'' = o$$

ist, wird dieser Ausdruck mit Null identisch, und man hat also

$$\Theta = o.$$

Jene Form setzt aber voraus, dass das Fundamental-Dreieck dem ersten Kegelschnitt conjugirt und dem zweiten eingeschrieben ist; **$\Theta = o$ ist folglich die allgemeine Bedingung, unter welcher der zweite Kegelschnitt einem sich selbst conjugirten Dreieck des ersten umschrieben ist.**

Ebenso erkennt man in

$$\Theta_1 = o$$

**die Bedingung, unter welcher der zweite Kegelschnitt einem sich selbst conjugirten Dreieck des ersten eingeschrieben ist.**

Denkt man nun eine Ellipse und einen Kreis, repräsentirt durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ und } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

so gewinnen diese Bedingungen besonders einfache Gestalt, und wenigstens die erste ist einer überraschenden Interpretation fähig.

Die Discriminante von

$$k\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2] + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = o,$$

oder von

$$x^2\left(k + \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(k + \frac{1}{b^2}\right) - 2k\alpha x - 2k\beta y + k(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - 1 = o$$

ist

$$k.^3\, r^2 + k.^2\, \frac{a^2b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2} + k\,.\,\frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 b^2},$$

und man hat also hier für

$$\Theta = o$$

den Ausdruck

$$a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = o,$$

oder

$$a^2 + b^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$$

Darin erkennt man augenblicklich den Satz: Die Länge der Tangente, welche man vom Centrum einer Ellipse an den umschriebenen Kreis eines in Bezug auf sie sich selbst conjugirten Dreiecks ziehen kann, ist der Länge der Sehne des elliptischen Quadranten gleich.

Dieser Satz ward als eine Aufgabe im Juniheft 1860 von Terquem's Annalen von M. Faure ausgesprochen. Man sieht, er bezeichnet auch eine der allgemeinen unveränderlichen Relationen zweier Kegelschnitte, welche in den Invarianten der Discriminante enthalten sind und aus ihnen entwickelt werden können.

Als Folgen dieser Entwickelung ergeben sich noch die nachstehenden beiden Sätze:

Für $a^2 = - b^2$, d. i. für die gleichseitige Hyperbel an Stelle der Ellipse, geht der Ausdruck von $\Theta_1$ oder

$$\frac{a^2 b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2}$$

in

$$\frac{a^2 - (\alpha^2 - \beta^2)}{a^2}$$

über, d. h. man hat

$$\Theta_1 = o \text{ für } \alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$

oder der Mittelpunkt des Kreises, der einem in Bezug auf die gleichseitige Hyperbel sich selbst conjugirten Dreieck eingeschrieben ist, liegt in der Curve.

Durch dieselbe Substitution wird

$$\Theta = \frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2}$$

zu
$$\Theta = \frac{r^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{a^2 b^2},$$

und also $\qquad \Theta = o$ für $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$,

d. h. der Kreis, welcher einem in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel sich selbst conjugirten Dreieck umschrieben ist, geht durch den Mittelpunkt derselben.

Vergleiche die Aufgabe 2) im Art. 230.

Für die Parabel, deren Gleichung wir in der Form

$$y^2 = 4m(x + m)$$

voraussetzen mögen, nimmt die betrachtete Discriminante die folgende Gestalt an:

$$4m^2 + 4k\alpha m + k^2[\alpha^2 + 4\alpha m + 4m^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)] + k^3\gamma^2.$$

Man hat sonach $\qquad \Theta = 4\alpha m$,

und somit $\qquad$ für $\Theta = o$ auch $\alpha = o$,

d. i. das Centrum des Kreises, welcher einem in Bezug auf eine Parabel sich selbst conjugirten Dreieck umschrieben ist, liegt in der Directrix derselben.

Und ebenso $\qquad \Theta_1 = (\alpha + 2m)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$,

oder für $\qquad \Theta_1 = o$, $(\alpha + 2m)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)$,

ein Ergebniss, welches sich gleichfalls leicht in Form eines Satzes aussprechen lässt.

Für den Kreis endlich finden wir durch Entwickelung der Discriminante von

$$x^2 + y^2 - r^2 + k[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \varrho^2]$$

die Ergebnisse $\qquad \Theta = 2r^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2)$,

und $\qquad \Theta_1 = r^2 + \varrho^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2)$,

d. i. für den umschriebenen Kreis des sich selbst conjugirten Dreiecks

$$2r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2,$$

und für den eingeschriebenen Kreis

$$r^2 + \varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2,$$

gleichfalls der Deutung leicht fähige Ergebnisse.

Endlich knüpfen wir diese Entwickelungen an die erste Betrachtung dieses Zusatzes, indem wir bemerken, dass die Discriminante der Gleichung

$$k^3 . r^2 + k^2 . \frac{a^2b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2} + k . \frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 b^2} = o$$

(in Bezug auf die Veränderliche $k$) die Gleichung der zur betrachteten Ellipse parallelen Curve liefert, d. i. die Gleichung der Curve, deren auf den Normalen der Ellipse gemessener Abstand von dieser letzteren unveränderlich und $= r$ ist.

---

# Quellen-Nachweis.

Art. 131. Der Satz der Aufgabe 7) ist dem Cambridge Math. Journal (Bd. I. p. 169) entlehnt.

„ 136. Die hier mitgetheilte Methode rührt von Hart her.

„ 137. Die Entwickelung der Bedingungen, unter welchen die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades in Dreipunkt-Coordinaten einen Kreis repräsentirt, gab Ferrers im II. Bde. des Quarterly Journal, p. 267.

„ 159. Die hier mitgetheilte Methode des Beweises für die Unveränderlichkeit von $\frac{B^2 - 4AC}{\sin^2 \omega}$, etc. ward von Boole im Cambridge and Dublin Math. Journal (Bd. III, p. 106) mitgetheilt.

„ 194. Die in den Aufgaben 3 — 7 enthaltenen Sätze wurden von W. D. Sadleir dem Verfasser mitgetheilt.

„ 228. Der in der 4. Aufgabe dieses Art. gegebene Ausdruck der Tangente eines Kegelschnitts ist zuerst von Davies im Philosoph. Magas. 1842, p. 192 mitgetheilt worden; der ebenda in der 5. Aufg. benutzte Ausdruck für die zwei Punkte eines Kegelschnitts verbindende Sehne rührt von Frost her. (Cambridge and Dublin Math. Journ. Bd. I, p. 68.) Man findet Anwendungen desselben auch in einer Abhandlung von Hittorf in Crelle's Journ. (Bd. XXXVIII, p. 89.) In demselben Artikel giebt endlich die Aufgabe 6) einen Satz von Mac-Cullagh mit dem geometrischen Beweis desselben.

„ 229. Der Satz der Aufgabe 2) ist von Steiner (Gergonne's Annales Bd. XIX, p. 59) und der der Aufg. 3) von Gregory (Cambr. and Dublin Math. Journ. Bd. II, p. 16) gegeben worden.

„ 230. Der Satz der Aufg. 1) wurde von Brianchon und Poncelet in Gergonne's Annales Bd. XI, p. 205 gegeben; ebenda der in der Aufgabe 2) enthaltene, p. 210.

„ 231. Die Methode dieses Artikels, die hier als ein vorbereitender specieller Fall der allgemeinen Methoden des XIV. Kapitels gegeben ist, ward schon früher von O'Brien im IV. Bd. des Cambridge and Dublin Math. Journ., p. 99 empfohlen.

„ 233. Für die in der 6. Aufgabe gegebenen Ausdrücke des Halbmessers des einem Dreieck im Kegelschnitt umschriebenen Kreises vergleiche man die Abhandlung von Mac-Cullagh in den Dublin Exam. Papers 1836, u. Crelle's Journ. Bd. XL, p. 31.

Art. 235. Vergleiche eine Abhandlung von Turner im Cambridge and Dublin Matth. Journal Bd. I. p. 122.

„ 243. Für die Sätze in den Aufgaben 1) und 3) vergleiche man die Arbeiten von Steiner (Crelle's Journ. Bd. XXXII, p. 300, und von Joachimsthal (Crelle's Journ. Bd. XXXVI, p. 95).

„ 262. 263. Die Sätze dieser Artikel rühren von Graves (siehe seine Uebersetzung der Abhandlung von Chasles: Memoir on Cones and Spherical Conics, p. 77) und Mac-Cullagh her (Dublin. Exam. Papers, 1841, p. 41, 1842, p. 68, 83).

„ 264. Der hier mitgetheilte Beweis ist einer Abhandlung von Hart im IV. Bd. des Cambridge and Dublin Math. Journ. p. 193 entnommen.

„ 267. Das am Schlusse des Artikels gegebene Beispiel ist von Hart (Quarterly Journ. Bd. II. p. 143).

„ 301. Der Satz des Artikels ist von Townsend auf rein geometrischem Wege gefunden worden.

„ 308. Die Aufg. 6) ist Hearn's „Researches on Conic Sections“ entlehnt.

„ 317. Die Entwickelung dieses Artikels ward nach Ferrers (Quarterly Journ. Bd. II, p. 120) gegeben.

„ 332. Die Gleichung des einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts ward wohl zuerst von Bobillier in Gergonne's Annal. XVIII, p. 320 discutirt. Die Methode zur Bestimmung des Ortes der Centra von Kegelschnitten, welche gewissen Bedingungen unterworfen sind, ist entlehnt aus Hearn's „Researches on Conic Sections.“

„ 341. Für den hier mitgetheilten Beweis vergleiche man Cremona's Note im XVI. Bd. von Terquem's „Nouvelles Annales“ p. 79.

„ 349. Der hier gegebene Beweis ist von Joachimsthal in Crelle's Journ. Bd. XL, p. 30 entwickelt worden.

„ 350. Für die hier gegebenen Entwickelungen vergleiche man Cayley's Abhandlung, Quarterly Journ. Bd. II, p. 44.

„ 358. Die beiden hier entwickelten besonderen Formen von der Gleichung des Orthogonal-Kreises rühren von Brioschi und Faure her. (Nouv. Annales, Bd. XV, p. 463; Bd. XVIII, p. 241.) Uebrigens steht die Theorie des Orthogonal-Kreises durch ihre allgemeine Anwendung auf drei Kegelschnitte und als Untersuchung des Ortes der Punkte, deren drei Polaren in Bezug auf dieselben in einem Punkte zusammentreffen, in engem Zusammenhang mit den von Hesse in der Abhandlung „Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung“ (Crelle's Journ. Bd. XXXVIII) gegebenen Entwickelungen.

„ 362. Die Schlussgleichung dieses Artikels findet sich wohl zuerst in dem Werke von Lamé: Examen des différentes méthodes employées pour résoudre des problèmes de Géométrie. Paris 1818.

Art. 364. Der Satz über den durch die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks gehenden Kreis ward zuerst von M. Terquem im I. Bde. seiner Nouv. Annales de Math. p. 196 gegeben, aber neuerdings durch Hart und Salmon wiedergefunden und durch sie und W. R. Hamilton in eigenthümlicher Art bewiesen. Siehe Quarterly Journal of pure and applied Mathem. Bd. IV, p. 152—154.

„ 375. Man vergleiche eine Darstellung dieser Resultate durch Cayley in dem Jahrgang 1857 des Philos. Magasin, und die Abhandlung von Brioschi in den Annali di Math. von B. Tortolini 1857. In der angeführten Abhandlung hat Cayley wie früher schon Jacobi diese Frage der Theorie der elliptischen Functionen angeschlossen und ihre Lösung in Determinanten-Form gegeben.

„ 386. Cayley hat im XXXIX. Bde. von Crelle's Journ. die Aufgabe des Apollonius für Kegelschnitte gelöst.

„ 396. Die Auflösung der Appollonischen Aufgabe ist Gergonne's Annalen entnommen.

„ 417. Die Bemerkung, dass der Satz von den Höhen-Perpendikeln des einer Parabel umschriebenen Dreiecks ein specieller Fall des Satzes von Brianchon ist, stammt von Moore und ward mir durch den Verfasser dieses Werkes mitgetheilt.

„ 428. Die Entwickelungen dieses Artikels beziehen sich auf einen Satz von Cayley; siehe Nouv. Annales Bd. XVI, p. 126.

„ 433 etc. Der Herausgeber hat im Osterprogramm der Gewerbschule zu Chemnitz (1860) in einer Abhandlung: „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft“ die darstellend geometrische Methode in entsprechender Weise begründet und entwickelt.

„ 453 etc. Man vergleiche mit dieser Behandlung der geometrischen Verwandtschaften die von Plücker im §. 3 des „System der analytischen Geometrie“ gegebene.

„ 477—79. Diese Entwickelungen beziehen sich auf einen Satz von Joachimsthal (Crelle's Journ. Bd. XXVI und XXXVIII) und seine Erweiterung durch Cayley. (Crelle's Journ. Bd. LVI, p. 182.)

„ 480 Die hier gegebene Satz ist die Erweiterung eines Satzes von Pollock im III. Bd. des Quarterly Journ. Vergleiche Noten von Cayley und Ferrers ebendaselbst.

# Druckfehler-Verzeichniss.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Seite | 6 | Zeile 15 | v. o. | $y = \frac{my'' + ny'}{m + n}$ statt $y = \frac{my'' + my'}{m + n}$. |
| „ | 12 | „ 7 | v. u. | $x = \alpha_1$ statt $\alpha = \alpha$. |
| „ | 26 | „ 1 | v. o. | $x'y'$ statt $x'y$. |
| „ | 27. | Die Anmerkung gehört zu Art. 30. | | |
| „ | 28 | Zeile 2 | v. u. | $x$ und $y$ statt $y$ und $y$. |
| „ | 30 | „ 21 | v. o. | $\frac{5}{2}$ statt 5. |
| „ | 31 | „ 8 | v. o. | derselben statt desselben. |
| „ | 38 | „ 1 | v. u. | tan $(\varphi - \psi)$ statt tan $- (\varphi\ \psi)$. |
| „ | 64 | „ 19 | v. o. | $OA.OP.OP'.OB\ldots$ statt $OA.OP.OP.OB\ldots$ |
| „ | 94 | „ 8 | v. o. | ergiebt sich auf statt ergiebt auf. |
| „ | 103 | „ 6 | v. o. | letzten statt letztern. Am Ende; statt. |
| „ | 105 | „ 1 | v. u. | $Cy_2^2$ statt $C_2y_2$. Am Ende, statt. |
| „ | 107 | „ 21 | v. o. | Linien statt Linie. |
| „ | 109 | „ 13 | v. u. | Das Komma muss wegfallen. |
| „ | 111 | „ 2 | v. u. | $2Cy$ statt $2Cx$. |
| „ | 115 | „ 14 | v. u. | halbiren statt halbirt. |
| „ | 118 | „ 4 | v. u. | Dass statt erst. |
| „ | 124 | „ 18 | v. u. | 104 statt 102. |
| „ | 126 | „ 2 | v. o. | $OR'.OR'$ statt $OR'.OR'$. |
| „ | 128 | „ 13 | v. u. | $2a^2by$ statt $a^2by$. |
| „ | 129 | „ 14 | v. o. | $-2aa'y^2$ statt $+2aa'y^2$ und $-aa'(b+b')y$ statt $+aa'(b+,b)y$. |
| „ | 135 | „ 13 | v. o. | $-2ax$ statt $=2ax$. |
| „ | 138 | „ 10 | v. u. | $-xy' = o$ statt $-x'y - o$. |
| „ | 142 | „ 16 | v. u. | $-y'''$ statt $-y''$. |
| „ | 150 | „ 3 | v. u. | $BQ$ statt $PQ$. |
| „ | 151 | „ 20 | v. u. | $+yy'''$ statt $-yy'''$ |
| „ | 152 | „ 14 | v. o. | $x(x' + x'') + \ldots$ statt $x(x' + x') + \ldots$ |
| „ | 156 | „ 1 | v. o. | in der Peripherie statt in den Peripherien. |
| „ | 167 | „ 3 | v. o. | $-\frac{25}{16}$ statt $-\frac{25}{6}$. |
| „ | 171 | „ 6 | v. o. | $\frac{x' - a}{r}$ statt $\frac{x' - \alpha}{r}$. |
| „ | 188 | „ 15 | v. o. | $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ statt $y = \frac{a}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)}$. |
| „ | 189 | „ 1 | v. o. | desselben statt derselben. |
| „ | 197 | „ 1 | v. u. | $= \frac{b^2 x'^2}{a^2} + \ldots$ statt $\frac{b' x'^2}{a^2} + \ldots$ |
| „ | 202 | „ 22 | v. o. | ihnen statt ihm. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 204 | Zeile | 9 | v. u. | $-\frac{b^2 y'}{Y'} =$ statt $-\frac{b^2 y'}{Y''} =$ . |
| „ | 205 | „ | 10 | v. o. | von der der Curve statt von der Curve. |
| „ | 206 | „ | 9 | v. o. | $y = \frac{(b^2 - a^2) y' y'' Y}{b^4}$ statt $x = \frac{(b^2 - a^2) y' y'' Y}{b^4}$. |
| „ | — | „ | 14 | v. o. | beiden Seiten statt beiden Punkten. |
| „ | 210 | „ | 5 | v. o. | $= \frac{1 - \frac{c x'}{a^2}}{V}$ statt $= \frac{1 - \frac{c x'}{\alpha^2}}{V}$ . |
| „ | 215 | „ | 11 | v. u. | $T$ statt $F$. |
| „ | 240 | „ | 1 | v. o. | Eckpunkt statt Endpunkt. |
| „ | 245 | „ | 15 | v. u. | $x = \frac{c^3(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}$ statt $x = \frac{c^2(b^2 - \beta^2)}{a^2(b^2 + e^2\beta^2)}$ . Ebenso Zeile 5 v. u. |
| „ | 250 | „ | 9 | v. u. | der Sinus statt des Sinus. |
| „ | 252 | „ | 4 | v. o. | in denen statt indem. |
| „ | 256 | „ | 17 | v. u. | $= \frac{y'}{x' + c}$ statt $= \frac{y'}{x' + c'}$. |
| „ | 262 | „ | 2 | v. o. | $\vartheta$ statt $\vartheta'$. |
| „ | 266 | „ | 7 | v. o. | $T$ statt $P$. |
| „ | 267 | „ | 18 | v. u. | (Art. 214, 215) statt (Art. 215, 216). |
| „ | 269 | „ | 3 | v. u. | $16(x - \frac{1}{2}p)^3$ statt $16(x - \frac{1}{2}p)^2$. |
| „ | 278 | „ | 15 | v. u. | $F'P = \varrho'$ statt $F'P = \varrho$. |
| „ | 285 | „ | 17 | v. o. | somit statt som. |
| „ | 294 | „ | 1 | v. u. | $s = \frac{1}{p}\int_o^y \dots$ statt $y = \frac{1}{p}\int^y \dots$ |
| „ | 305 | „ | 5 | v. u. | letzten statt nächsten. |
| „ | 305 | „ | 3 | v. u. | Art. 118 statt Art. 88. |
| „ | 323 | „ | 6 | v. o. | von vieren statt von einem. |
| „ | 326 | „ | 12 | v. u. | welchen statt welcher. |
| „ | — | „ | 13 | v. o. | Gegenseiten statt Gegenseite. |
| „ | 331 | „ | 11 | v. u. | $\varphi - \varphi'$ statt $\varphi - \varphi$. |
| „ | 340 | „ | 15 | v. u. | $= \frac{(a + a')^2}{a a'(a' - a)} x + \dots$ statt $\frac{(a \quad a')^2}{a a'(a' - a)} x + \dots$ |
| „ | 346 | „ | 17 | v. u. | $\frac{\beta^2}{p''^2} + \frac{\gamma^2}{p'''^2} - \dots$ statt $\frac{\beta^2}{p''^2} \quad \frac{\gamma^2}{p'''^2} - \dots$ . |
| „ | 354 | „ | 1 | v. o. | $L = o$ statt $L = n$. |
| „ | 357 | „ | 18 | v. o. | entfernten Kreispunkte statt entfernten imaginären Kreispunkte. |
| „ | 359 | „ | 19 | v. o. | $(m + n) k^2 \gamma]^2$ statt $(m + n) k^2 \gamma]$. |
| „ | 360 | „ | 12 | v. u. | $+ (a a' - b''^2)\beta^2 + \dots$ statt $+ (a a' - b^2)\beta^2 + \dots$ |
| „ | 368 | „ | 2 | v. u. | $+ B'' s'' = o$ statt $+ B'' s = o$. |
| „ | 369 | „ | 4 | v. u. | Problems statt Satzes. |
| „ | 373 | „ | 4 | v. u. | $-2lm = o$ statt $-2mn = o$. |
| „ | 375 | „ | 2 | v. u. | $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ statt $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha}$. |
| „ | 379 | „ | 12 | v. u. | $- a_{33} . a_{23}) - \dots$ statt $- a_{32} . a_{22}) - \dots$ |
| „ | 386 | „ | 17 | v. o. | in der Determinante $x_2, y_2$ statt $x_2, y^2$. |
| „ | 389 | „ | 2 | v. u. | 1794 statt 1764. |
| „ | 408 | „ | 6 | v. o. | $A_1$ und $E_1$ sind zu vertauschen. |
| „ | 410 | „ | 11 | v. u. | Linien statt Linie. |
| „ | 415 | „ | 3 | v. u. | überall $d\Delta_1$ statt $d\Delta$. |
| „ | 426 | „ | 21 | v. u. | $\alpha'$ und $p'$ statt $\alpha_1$ und $p_1$. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 437 | Zeile | 9 | v. o. | $d_1$ statt $d_3$. |
| „ | — | „ | 23 | v. o. | $d_3$ statt $d_2$. |
| „ | 462 | „ | 3 | v. u. | $y'$ statt $y$. |
| „ | 480 | „ | 17 | v. o. | $AB'$ statt $AB$. |
| „ | 483 | „ | 7 | v. o. | $A'F^2$ statt $AF'^2$. |
| „ | 512 | „ | 8 | v. u. | $b'^2$ statt $b'_2$. |
| „ | 547 | „ | 12 | v. u. | sie daher statt daher. |
| „ | 566 | „ | 10 | v. o. | eine Enveloppe statt einen Ort. |