ZASADY

ARYTMETYKI

ZASADY

ARYTMETYKI.

Wolno drukować.

Dnia 1 *Maia. r.* 182.

KRUSZEWSKI. *V. R. S.*

Cenzor Dzieł Naukowych.

ZASADY ARYTMETYKI,

UŁOZONE PRZEZ

BYŁEGO PROFESSORA MATEMATYKI

w Szkole Departamentowéy.

W WARSZAWIE,

NAKŁADEM I DRUKIEM N. GLÜCKSBERGA,

KSIĘGARZA I TYPOGRAFA KROLEWSKIEGO UNIWERSYTETU.

1821.

DO CZYTELNIKA.

Zwyczaiem upowszechnione zostało i słusznie, aby piszący dla publicznego użytku wyłożył poprzedniczo w krótkości pobudki, zamiar i porządek iakiego się trzymał w swém pismie.

Abym się usprawiedliwił z tego wszystkiego powiem w ogólności, iż tylko w chęci przyniesienia korzyści uczącym się pracę moię przedsięwziąłem.

Co się tyczy zachowanego w dziele porządku przez który rozumiem układ rzeczy i sposób ich wykładu, wypada mi nieco obszerniéy się wytłumaczyć.

Przykładaiąc się z własnéy chęci do umieiętności Matematycznych, następnie pełniąc obowiązki nauczyciela Matematyki w szkole publicznéy, musiałem obeznawać się z Autorami wykładaiącemi ten przedmiot.

A że każdy z oddaiących się iakiéy nauce zwykł przywięzywać się do iednego Autora więcéy niż do innych, a nawet zdaie się powinien zawsze iednego szczególniéy wybrać sobie za przewodnika (wyiąwszy gdy sam sobie zupełnie nową otwiera drogę) dla tego i ia szczególniéy przywiązałem się do Autora dzieła *Traité élémentaire des mathématiques pures*, którym iest *Lemoine*.

Porządek więc iaki w niniéyszém pismie starałem się zachować, iest w ogóle odpowiadaiący zachowanemu w początkach arytmetyki obiętych w pomienionêm dziele. W szczegółach odstępowałem czasem od wspomnionego Autora, bo rozszerzaiąc teorye przez niego podane wypadała mi naturalnie tego potrzeba.

Sposób wykładu w poczatkowych xiążkach naukowych iest nader wielkiéy wagi. Nie tylko w nich rzecz, ale i sam sposób iéy wykładania powinien być pożyteczny. Jeżeli zaś która z naypotrzebniéyszych umieiętności zdolna iest wiecéy niż inne połączać w sobie te korzyści, to zapewne Arytmetyka.

Wszakże sławni w starożytności mędrcy oddawali iuż téy nauce szczególne zalety. W rzeczy saméy, iako pierwsza z części matematyki, pierwszy ma wpływ na wczesne rozwiianie i kształcenie władz rozumu. Więcéy powiem, iest nauką przekonywaiącą naymocniéy o iego sile i sposobach. Sam układ liczenia naszego nie iestże dostatecznym tego dowodem (1)? W arytmetyce zaczynamy obeznawać się z drogą postępowania rozumu ludzkiego. W niéyto zaczynamy uczyć się iak z danych wiądomych dochodzić niewiadomych. *Kondyllak* pisząc *ięzyk rachunków* (*La langue des calculs*) nie co innego okazać miał zamiar, a *Pestalocy* wydaiąc *rachunki stosunków* słusznie miałby sobie za krzywdę gdyby sądzono że iego praca ma tylko służyć do nauki rachunków. Sposoby których ci uczeni użyli w swoich dzieł wykładzie, każdemu szczególną zapewniaią wartość.

Przeięty prawdą że sposoby są istotnemi narzędziami umieiętności, że dla samych uczących są tém, czém są ci dla uczniów, pilnuiąc moiego wzoru starałem się, ażeby praca moia i z téy strony była użyteczną.

A iako był czas w którym niedokładną naukę arytmetyki źle wykładano i nadszedł późniéyszy

(1) Teraźniéysze urządzenia edukacyyne w Prusach słusznie zalecaią, aby Nauczyciele w początkowych klassach, tak zwanych szkół uczonych, wykładali różne systemata liczenia.

w którym ią lepiéy wykładać zaczęto, poprawiwszy sposoby iéy uczenia; tak i teraz spodziewać się ieszcze należy czasu w którym te sposoby więcéy prostowane i do wyższéy coraz doskonałości doprowadzane będą. Słusznie napisał ieden z uczonych zeszłego wieku: że umieiętności doskonalić się będą w miarę doskonalenia się sposobów ich wykładania (2).

Niezaprzeczenie korzystna iest gdy uczący się sam wiele rzeczy dochodzi, i gdy sama nauka nastręcza mu rozmaite w téy mierze ćwiczenia. Z tych to względów, szczególniéy umieiętności matematyczne maią nad innemi pierwszeństwo.

Gdy iednak wszelkie prawidła nauki powinny być iasne i dokładne, chciałem i ia to zachować, zostawiaiąc uczącemu się wprawę i przyiemność rozwięzywania stosownych zagadnień umieszczanych po każdéy teoryi dla łączenia iéy z praktyką.

Podawane zagadnienia stosowałem do różnych przypadków zachodzić mogących w właściwych rachunkach, zachowuiąc potrzebne stopniowanie od łatwiéyszych do trudniéyszych. Nie mogą przecież i zawikłańsze mieć żadnéy trudności dla tych którzy dobrze zrozumieią poprzedzaiące zasady i mieć będą przytomnym w umyśle stan podanego zagadnienia czyli wszystkie iego dane warunki.

---

(2) *Kondyllak* myśl tę wyrażoną na wielu mieyscach w swych dziełach rozwinął, szczególniéy w xiążce ostatniéy dzieła: *Cours d'Etudes* gdzie mówi o początku i wzroście wielu nauk i umieiętności. Są tam w rozdz: VI. słowa iego. *Les sciences doivent leurs progrès aux méthodes rendues plus simples, et si elles en ont fait de si lents pendant plusieurs siècles, c'est que rien n'est si difficile que de simplifier.* Lecz mianowicie co do Arytmetyki okazał nader iasno tę prawdę w dziele *La langue des calculs.*

Na końcu dzieła umieściłem wypadki z rozwiązań wykonywaiąc w niektórych całą robotę, a w innych wskazuiąc tylko drogę postępowania.

Przyłączyłem także wiadomość o układzie nowych miar francuzkich, tablice metrologiczne miar, wag i monet niektórych kraiów i miast Europeyskich, tudzież stosunki zbliżone polskich miar nowych z dawnemi.

Jeżeli użyłem niektórych wyrazów nowszych, to iedynie z tych powodów dla których iuż gdzie indziéy ich użyto. Nie masz tu bowiem żadnego któryby się nie znaydował iuż w iakiéy arytmetyce polskiéy. Takiemi są szczególnie nazwiska *stosunków różnicowych i ilorazowych* zamiast dawniéyszych i nawet dosyć upowszechnionych nazwisk *stosunków arytmetycznych i ieometrycznych.* Lecz skoro nowsze wyrazy oddaią rzecz właściwiéy, wypada ich używać, a skoro będą używane w krótce przestaną razić nowością. Z resztą szedłem tu za przykładem nayznakomitszych matematyków teraźniéyszych (3).

W ogólności obszerniéy między innemi wyłożyłem teoryą wspomnionych stosunków i proporcyy. Jest ona bowiem zasadą nayważniéyszych reguł arytmetycznych iako i wszystkich znaiomości potrzebnych tym którzy chcą zgłębiać umieiętności matematyczne.

Jeżeli praca moia przydatna mi dawniéy w obowiązkach powołania Nauczycielskiego, choć w części i teraz odpowie swoiemu celowi, będzie to dla mnie zupełną nagrodą.

(3) Obacz. *Traite éélmentaire d'Arithmétique à l'usage des l'école centrale des quatre - Nations par Lacroix. Paris* 1813. *karta* 105; tudzież *Arithmétique d'Emile par Em. Develey, Ouvrage que le Conseil d'Jnstruction publique, établi près le Ministre de l'Jnterieur à Paris, a mis dans la liste des livres Elémentaires* Paris, 1802. Karta 468. Nota XIV.

ZASADY ARYTMETYKI.

O Liczeniu.

1. Człowiek ma w rozumie swoim władze za pomocą których może otaczaiące go przedmioty rozróżniać, liczyć i porządkować. Może z mnóstwa ich ieden wybierać, i to właśnie prowadzi go do poięcia iedności.

2. Mnóstwo nazywamy w ogólności liczbą. Kilka lub kilkanaście groszy równie iak kilka lub kilkanaście złotych składaią liczbę. Nie mogę iednak policzyć ich razem bo są rzeczami odmiennego gatunku. Lecz gdy oba gatunki mogę uważać pod iednym względem i podciągnąć pod iedno nazwisko sztuki monety lub metalu, natenczas mogę ie razem policzyć.

3. Przez liczenie można rozumieć zbieranie iedności dla poznania liczby czyli mnóstwa, lecz zwykle przez *liczenie* (numeratio) rozumie się sztuka wyrażania iakiéykolwiek liczby przez znaki umówione i wysłowiania każdéy liczby temi znakami wyrażonéy.

4. Ponieważ każda liczba iakkolwiekbądź wielka lub mała złożona iest z iedności, każda więc da się powiększyć albo zmniéyszyć doliczaiąc do niéy albo odliczaiąc od niéy te iedności, co nazywamy *rachunkiem* (calculus).

5. Nauka o liczbach obeymuiąca naukę liczenia i rachunku nazywa się *Arytmetyką.*

6. Powiedzieliśmy wyżéy (nº 2) co rozumiemy w ogólności przez liczbę. Właściwie *liczba iest zbiorem wielu iedności tegoż samego gatunku, a iedność iest ilość czyli wielkość do któréy przyrównywamy wielkości tegoż samego gatunku*, to iest, ilość wzięta (nayczęściéy dowolnie) za wyraz porównania czyli miarę wielkości iednego gatunku. Tak gdy mówię: ten papier iest na dziesięć złotych; dziesięć iest liczbą względem złotego który w tym przykładzie iest iednością do któréy przyrównywam wartość tego papieru, a ta liczba iest zbiorem dziesięciu iedności złotych: pewne ciało waży pięć funtów; pięć iest liczbą, funt iednością, to iest ilością do któréy przyrównywam ciężar tego ciała.

7. O ilości uważanéy bezwzględnie nie można mówić że iest wielka lub mała. Wyrazy *wielki*, *mały* daią się domyślać porównania. I tak ieżeli kilka wielkości iednego gatunku np. kilka długości odnosiemy do iednéy dowolnie wziętéy czyli z nią porównywamy, natenczas twierdzić możemy iż iedna z nich iest większa lub mniéysza od innych.

8. Ilość do któréy przyrównywamy wielkości iednegoż gatunku nie uważa się za podzieloną dopóki ią uważamy za iedność; lecz dla tego niemniey iest podzielną, i ma koniecznie części względem których staie się liczbą. Tak złoty wzięty za iedność, można rozdzielić na dziesięć części równych, i ten staie się natenczas liczbą uformowaną przez zbiór tych dziesięciu części z których każda iest iednością. Chcąc oznaczyć ciężar ciała ważącego pięć funtów mógłbym wziąć za iedność wagę mniéyszą od funta, a natenczas ciężar ciała byłby oznaczony przez liczbę większą niż pięć. (1)

---

(1) Wiele na tém zależy aby mieć zaraz w początkach jasne wyobrażenie *iedności*, która umysłowo uważana iest

9. Liczby zawieraiące wiele razy zupełnie iedność zowią się *liczby całkowite* czyli prosto *całkowite*; liczby zawieraiące tylko iednę lub wiele części iedności zowią się liczby *ułomkowe* czyli *ułomki*. Pięć, siedm, dziesięć złotych i t.d. są całkowite: pół, trzy czwarte, siedm dziesiątych części złotego i t. d. są ułomki.

10. Liczby całkowite i liczby ułomkowe są *mianowane* czyli *szczególne*, lub *niemianowane* czyli *ogólne*. Są mianowane gdy gatunek iedności iest oznaczony; są niemianowane gdy gatunek iedności nie iest oznaczony. Ośm złotych, sześć funtów, dziewięć dziesiątych złotego, są liczby mianowane: trzy, cztery, pięć razy, pół, trzy czwarte, są liczby niemianowane (1).

11. Oczywista iest rzecz iż liczb może bydź nieskończenie wiele, i że napróżnoby usiłowano wyrażać ie wszystkie przez tyleż odmiennych znaków; bo wielość tych znaków pociągnęłaby za sobą niemożność zatrzymania ich w pamięci. Trzeba było więc użyć innego sposobu, a ten którego użyto, iest równie prostym iak dowcipnym. Zależy on na używaniu nie wielu znakow rozmaicie kombinowanych.

12. Tych znaków ktore zowiemy *Cyframi* mamy tylko dziesięć, w przyiętym sposobie liczenia. Oto ich kształt i ważności:

---

właściwie spólną miarą liczb, uważana zaś zmysłowo we wszelkich miarach niczém innén nie iest, tylko ilością wziętą za wyraz porównania, a zatém iest zawsze ilością do któréy przyrównywamy wielkości iednegoż gatunku. Tu iest mieysce obeznania się z różnemi iednościami miar które dla ułatwienia czynności w Towarzystwie zwyczay i rządy ustaliły. *Obacz* Tablicę niektórych miar na początku położoną.

(1) Liczby ogólne zowią także *oderwanemi* (abstraits, numeri abstracti.)

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
zero, ieden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedm,
8. 9.
ośm, dziewięć,

Zero gdy iest samo nic nieznaczy: za pomocą zaś innych cyfer wyrażamy liczby od iednego aż do dziewięciu włącznie.

13, Liczby wyrażone przez iednę tylko z tych dziewięciu cyfer znaczenie maiących nazywaią się *liczby poiedyncze;* wszystkie inne nazywamy *liczbami złożonemi.*

14. Dla wyrażenia liczb złożonych zgodzono się 1od. aby z dziesięciu iedności zrobić tylko iednę *drugiego rzędu* którąby nazwano *dziesiątek.*
2re, aby rachować dziesiątki iak rachuią iedności, mówiąc, ieden dziesiątek, dwa dziesiątki, i tak następnie aż do dziewięć dziesiątków.
3ie ażeby użyć dla wyrażenia dziesiątków, tychże cyfer których używaią dla wyrażenia iedności; lecz żeby dla ich rozróżnienia położyć ie na drugiém mieyscu. Tak 10 oznacza ieden dziesiątek, czyli dziesięć; 20 dwa dziesiątki czyli dwadzieścia; 30 trzy dziesiątki czyli trzydzieści; 40 cztery dziesiątki czyli czterdzieści; 50 pięć dziesiątków czyli pięćdziesiąt; 60 sześć dziesiątków czyli sześćdziesiąt; 70 siedm dziesiątków czyli siedmdziesiąt; 80 ośm dziesiątków czyli ośmdziesiąt; 90 dziewięć dziesiątków czyli dziewięćdziesiąt.

Postępuiąc od dziesięciu do dwudziestu znayduiemy iedenaście, dwanaście, i t.d. dziewiętnaście. Nic zaś nie iest łatwieyszego iak wyrazić te liczby pośrednie. Bo iedenaście iest to samo co dziesięć i ieden, dwanaście iest to samo co dziesięć i dwa, i t.d. dziewiętnaście iest to samo co dziesięć i dziewięć. Napiszemy więc 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, gdzie widać iż 1 położony na drugiém mieyscu waży dziesięć.

Podług tego napiszemy bez trudności liczby zawarte między dwadzieścia i trzydzieści, między trzydzieści i czterdzieści, i tak następnie aż do dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięć dziesiątków i dziewięć iedności, co się napisze 99.

15. Zgodzono się także aby z dziesięciu dziesiątków zrobić iednę tylko *iedność trzeciego rzędu* którąby nazwano *sto*; i rachować sta iak rachuią dziesiątki i iedności, mówiąc: iedno sto, dwa sta, i t.d. aby używać tychże cyfer, lecz żeby ie rozróżnić kładąc ie na trzeciém mieyscu. Tak 100 znaczy iedno sto czyli sto; 200 dwa sta czyli dwieście; 300 trzy sta czyli trzysta; 400 cztery sta czyli czterysta; 500 pięć stów czyli pięćset; 600 sześć stów czyli sześć set; 700 siedm stów czyli siedmset; 800 ośm stów czyli ośmset; 900 dziewięć stów czyli dziewięćset.

Między sto i dwieście iest sto ieden, sto dwa, i t.d. sto dziewięćdziesiąt dziewięć. Dla wyrażenia tych liczb pośrednich, uważmy iż liczba naprzykład sto dziewięćdziesiąt dziewięć; waży iedno sto, dziewięć dziesiątków i dziewięć iedności: napiszemy więc 199.

Liczba sto ieden, która nic innego nie iest iak iedno sto, nic dziesiątków i iedna iedność, napisze się 101. Zero znaczy iż nie ma dziesiątków, a 1 położony na trzeciém mieyscu waży sto.

Między dwieście i trzysta, między trzysta i czterysta i t. d. znayduią się też same liczby co między sto i dwieście; napiszemy ie więc podobnież. Tak dla wyrażenia dziewięćset dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięć stów, dziewięć dziesiątków i dziewięć iedności, napiszemy 999.

16. Trzy cyfry tak położone nazywaią się *przedział iedności*. Trzy cyfry położone po lewéy stronie przedziału iedności, iak np. 954 729 składaią *przedział tysięcy*. Dla uformowania tego przedziału zgodzono się, aby z dziesięciu stów, zrobić tylko

iednę iedność tysięcy, z dziesięciu iedności tysięcy, ieden dziesiątek tysięcy, z dziesięciu dziesiątków tysięcy, iedno sto tysięcy.

W tym względzie każda cyfra znaczenie maiąca położona na pierwszém mieyscu po prawéy ręce wyraża iedności *poiedyncze*, położona zaś na innych mieyscach następuiących ku lewéy ręce, wyraża iedności *zbiorowe*.

Przez podobne postępowanie formuią *przedział miliionów*, *przedział biliionów*, *przedział tryliionów*, *kwadryliionów* i t. d. a wkażdym przedziale cyfra z prawéy strony będąca wyraża iedności, cyfra w środku dziesiątki, a cyfra z lewéy strony sta tego rzędu od którego się przedział nazywa.

Możnaby także było składać przedziały po dwie lub po cztery cyfry; lecz w pierwszym razie byłoby więcéy przedziałów w iakiéy liczbie danéy, wdrugim mniéy niż podług teraźnieyszego sposobu ich składania. Zważaiąc granice liczb iakie pospoliciéy w użyciu zachodzić mogą, łatwo widzieć iż wzięto środek wtéymierze przyzwoity.

Dla łatwieyszego ieszcze poznania rozmaitych rzędów i przedziałów liczb dosyć iest przypatrzyć się liczbie następuiącéy, która iest podzielona na przedziały, i pod każdą cyfrą podpisana iéy ważność z względu na mieysce które zaymuie:

Przedział:

tryliionów		*biliionów*			*miliionów*			*tysięcy*			*iedności*		
8	3	5	9	7	8	6	2	4	0	7	6	5	4
dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności

17. Podług tego widać iasno iż w cyfrach naszych trzeba rozróżnić dwie ważności; iednę nadaną przez

umowę ludów, a drugą przez mieysce na którém są położone. Pierwsza nazywa się ważność *bezwzględna*, druga ważność *mieyscowa*. W tém wyrażeniu 500, ważność bezwzględna cyfry 5 iest pięć, ważność iéy mieyscowa iest pięćset, to iest 5 iedności z których każda waży sto (1)

18. Łatwo iest teraz napisać cyframi iaką liczbę wymówioną albo napisaną głoskami, np. liczbę ośmset trzydzieści siedm milionów czterysta trzy tysiące dwadzieścia trzy. W saméy rzeczy przez proste wysłowienie widzę od razu 1^{od} iż mi trzeba trzech przedziałów; 2^{re} iż w przedziale tysięcy nie ma dziesiątków; ani stów w przedziale iedności, napiszę więc 837403023.

19. Aby wysłowić liczbę napisaną cyframi, trzeba postępuiąc od prawéy do lewéy ręki podzielić ią na przedziały, każdy o trzech cyfrach, wyiąwszy ostatni po lewéy ręce, który ich może zawierać dwie lub tylko iednę (2); potém wymawiać każdy przedział ieden po drugim, zaczynaiąc od przedziału naywyższego, i wyrażać ważność mieyscową cyfer tenże przedział składaiących, dołączaiąc nazwisko przedziału do nazwiska cyfry iedności, np. liczba następuiąca, 34|904|827|937 wysłowi się tak: trzydzieści cztery biliony, dziewięćset cztery miliony, ośm-

(1) Nader wiele ułatwi sobie rachunki ten, który się wcześnie wprawi w szybkie na pamięć przebieganie tych przedziałów od pierwszego do wyższych i wzaiemnie, ztąd bowiem zaraz będzie wiedział do którego rzędu należą a tém samém na którém mieyscu od iedności zacząwszy znayduią się sta, dziesiątki lub iedności iakiegokolwiek przedziału, np. dziesiątki bilionów są w 4ym przedziale na 2ém miéyscu, zatém na 11ém od iedności zacząwszy.

(2) Wprawiwszy się robiemy te przedziały myślą.

set dwadzieścia siedm tysięcy, dziewięćset trzydzieści siedm (1.)

20. Taką to drogą postąpiono chcąc pisać cyframi i wymówić słowami wszystkie o iakich pomyśléć można liczby naszego składu arytmetycznego rosnącego (échelle arithmétique ascendante); a zastanowiwszy się cokolwiek, postrzeżemy, iż podobnym zupełnie sposobem trzeba postąpić, chcąc pisać cyframi i wymawiać słowami wszystkie iakie bydź mogą liczby naszego składu arytmetycznego maleiącego (échelle arithmétique descendante).

W saméy rzeczy nic nie przeszkadza żebyśmy uważali iedność iako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda koniecznie dziesięć razy mniéysza od iedności, ważyć będzie *dziesiętną* (un dixième) téy iedności.

Możemy podobnież poymować iż dziesiętna iest złożona z dziesięciu cząstek równych, z których każda iako dziesięć razy mniéysza od dziesiętnéy, będzie sto razy mniéysza od iedności, i ztąd ią nazwiemy *setną*.

Podobnież będziemy uważać setną iako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda będąc dziesięć razy mniéyszą od setnéy, będzie sto razy mniéyszą od dziesiętnéy a tysiąc razy mniéyszą od iedności, i stąd ią nazwiemy *tysiączną*.

---

(1) Zamiast *dwieście tysięcy, trzysta tysięcy.... dziewięćset tysięcy* używamy w ięzyku naszym wyrażeń *dwakroć stotysięcy, trzykroć stotysięcy..... dziewięćkroć stotysięcy;* lecz ieżeli oprócz stów znayduią się dziesiątki i iedności tysięcy, wyrażenie to nie powinno się używać gdyż iest wątpliwém. I tak w naszym przykładzie, mówiąc: ośm kroć sto dwadzieścia siedm tysięcy rozumiećby można ośm razy 127 tysięcy, bo *kroć* znaczy *raz*.

Rozciągniemy bez trudności to rozumowanie do *dziesięciotysiącznych*, *stotysiącznych*, *miliionowych*, *dziesięciomiliionowych*, *stomiliionowych*, i t. d.

21. Więc iedność waży dziesięć dziesiętnych, sto setnych, tysiąc tysiącznych, dziesięć tysięcy dziesięć tysiącznych, i t. d.

Dziesiętna waży dziesięć setnych, sto tysiącznych, tysiąc dziesięciotysiącznych, i t. d.

Setna waży dziesięć tysiącznych, sto dziesięćtysiącznych, i t. d.

Tysiączna waży dziesięć dziesięćtysiącznych, i t. d.

22. To wszystko dobrze zrozumiawszy, mówię: 1^{od} cyfra położona na pierwszém mieyscu po lewéy stronie iedności ma ważność mieyscową dziesięć razy większą czyli wyraża dziesiątki; więc cyfra położona na pierwszém mieyscu po prawéy stronie iedności mieć będzie ważność mieyscową dziesięć razy mnieyszą czyli wyrazi dziesiętne.

2re. Cyfra położona na drugiém mieyscu po lewéy stronie iedności wyraża sta; więc cyfra położona na drugiém mieyscu po prawéy stronie iedności wyrazi setne.

3^{ie}. Cyfra położona na trzeciém mieyscu po lewéy stronie iedności wyraża tysiące; więc cyfra położona na trzeciém mieyscu po prawéy stronie iedności wyrazi tysiączne.

Znaydziemy podobnie że cyfra położona po prawéy stronie iedności wyraża na czwartém mieyscu dziesięćtysiączne, na piątém mieyscu setnetysiączne, na szóstém mieyscu miliionowe, na siódmém mieyscu dziesięciomiliionowe i t. d.

23. Niech będzie teraz zadano wyrazić w cyfrach liczbę sześć całych pięćset dwadzieścia cztery tysiącznych; napiszę 6,524 lub 6.524 rozróżniaiąc przez znak umówiony, to iest przecinek lub punkt, rzęd iedności. Cyfry położone po prawéy stronie przecin-

ka lub punktu nazywaią się *cyfry dziesiętne*, a ilości które one wystawuią nazywaią się *części dziesiętne*, lub prosto *dziesiętnę*.

Aby wyrazić cztery dziesięciotysiączne, napiszę 0,0004 kładąc zero na zastąpienie mieysca iedności, a po przecinku, zer trzy na mieysce dziesiętnych, setnych i tysiącznych, które się w podanéy liczbie nie znayduią.

24. Jeżeli idzie o wysłowienie w mowie liczby 7, 465? zamiast mówienia, siedm całych, cztery dziesiętnych, sześć setnych, pięć tysiącznych, powiem: siedm całych czterysta sześćdziesiąt pięć tysiącznych. Mógłbym też mówić siedm tysięcy czterysta sześćdziesiąt pięć tysiącznych. (nº 21).

25. Łatwo widzieć iż kładąc iedno lub więcéy zer po ostatniéy dziesiętnéy cyfrze liczby iakiéy, nie zmienia się wartość lecz tylko wyrażenie téy liczby. Tak 0,24 iest toż samo co 0,240; 0,2400; 0,24000, i t. d. liczba 2 iest równa 2,0; 2,00; 2,000; 2,000000; i t. d.

26. Lecz iest widoczna iż przeniesienie przecinka ważność liczb odmienia. Jeżeli cofasz przecinek o iedno, dwa, trzy, i t. d. miéysca ku lewéy ręce, liczba przez to staie się 10, 100, 1000, i t. d. razy mniéyszą, np. od liczby 945,8 iest dziesięć razy mniéysza liczba 94,58 a sto razy mniéysza 9,458 i t. d.

27. Przeciwnie, ieżeli posuwasz przecinek o iedno, dwa, trzy i t. d. miéysca ku prawéy ręce, liczba przez to staie się 10, 100, 1000, i t. d. razy większą. Tak od liczby 5,4271 iest dziesięć razy większa liczba 54,271 a sto razy większa 542,71 i t. d.

28. Jeżeli nie można posunąć lub cofnąć przecinka dla braku cyfer ważność maiących, nagradza się to zerami np. ażeby liczba 12,34 stała się 1000 razy

większą lub mnieyszą, trzeba napisać 12340 lub 0,01234 (1)

29. Podług tego wszystkiego co się dotąd powiedziało o wyrażeniu liczb w przyiętym składzie arytmetycznym bądź rosnącym bądź maleiącym, widać iż zupełny systemat naszego liczenia na téy się iedynie gruntuie zasadzie przyiętéy, *że w ciągu cyfer położonych iednych obok drugich, ważność każdéy z nich staie się postępnie dziesięć razy większą z mieysca na mieysce postępuiąc od prawéy ręki do lewéy.* Dla tego to nasza arytmetyka zowie się *dziesiętna* (decimalis albo denaria).

30. Możnaby było użyć mniéy lub więcéy znaków liczebnych i przypuścić iakiekolwiek inne prawo zwiększania się ważności mieyscowéy tych znaków; umówić się np. iżby idąc od prawéy ręki do lewéy, stawały się następnie za każdém mieyscem dwa razy, cztery razy, dwanaście razy większe i natenczas arytmetyka byłaby nazwana *dwóyna*, *czwórna*, *dwunastna* (binaria, quaternaria, duodenaria).

Lecz prawie wszystkie ludy znaiome przyięły arytmetykę dziesiętną, i łatwo poznaiemy iż ta zgoda nie może być skutkiem trafu. Zapewne ukształcenie ręki było powodem do obrania liczby dziesięć, którą każdy ma w swych palcach i znayduie ciągle przed oczyma, tak dalece, iż lud któryby miał dwa palce, cztery palce . . . . . dwanaście palcy, byłby podobno przyiął arytmetykę dwóyną, czwórną . . . . . dwunastną.

Nadto, arytmetyka dziesiętna przechodzi rzeczywiście wszystkie od niéy poniższe, w tém, że wyrażenie liczb iest w niéy prostsze. Powinna więc była być przeniesioną nad wszystkie od niéy poniższe.

---

(1) Zręczne tego przystosowania czynić można w nowych miarach dziesiętnych.

31. Lecz przyznać potrzeba iż arytmetyka zwyczayna, porównana z wyższemi ustępuie z wielu względów arytmetyce dwunastnéy. Ta z więcéy dwóma znakami któreby trzeba było wymyśléć dla wyrażenia dziesięciu i iedenastu każde przez iednę cyfrę, wyrażałaby liczby sposobem ieszcze prostszym; nadto, dwanaście może być podzielone zupełnie na dwie, na trzy, na cztery, na sześć części równych, gdy dziesięć może bydź tylko na dwie i na pięć; własność liczby dwunastu tak istotna dla ułatwienia rachunków i miar, iż ludzie nawet po przyięciu arytmetyki dziesiętnéy nie przestali używać układu dwunastnego rachuiąc przez tuziny, i tuziny tuzinów (1).

Jeżeli nie korzystano ze sposobu liczenia iaki się w ogólności zdziałał w układzie wag i miar, i nie poddano arytmetyki dwunastnéy w mieysce arytmetyki dziesiętnéy, to dla tego iż pożytki które pierwsza wystawia, byłyby przewyższone niedogodnościami iakieby pociągnęło przeyście z iednéy arytmetyki do drugiéy (2).

Zagadnienia.

32. I. Napisać cyframi 1^od trzy miliiony tysiąc siedm; 2^re cztery tryliiony pięćset trzynaście miliionów dziewięć tysięcy czterdzieści trzy; 3^ie pięć biliionów dwadzieścia cztery tysiące całych, czterysta trzy

(1) Słusznie *Newton* powiedział: iż życzyćby należało ażeby liczba 12 przyięta była za zasadę systematu liczenia. Systemat zaś arytmetyki dwóynéy (binaire) wynaleziony przez *Leibnitza* lubo ma szczególne dogodności został przecie sławniéyszy przez imię swego wynalazcy, niż iaką użyteczność rzeczywistą. —

(2) Uczeni mianowicie francuzi namyślali się nad wprowadzeniem systematu dwunastnego lecz niepodobieństwem już prawie byłoby odmienić arytmetykę ustną i pisaną *Ob.* wspomnioną wyżéy: *Arithm: d'Emile par Develey*, Karta 454. nota III.

dziesięciotysiącznych; 4[te] czterdzieści sześć łokci siedmset trzydzieści cztery tysiącznych?

II. Wysłowić liczbę 1) 1079088219; 2) 49703, 00349; 3) $90056\overset{\text{sąż.}}{,}738$?

III. Napisać cyframi liczbę *sto* w arytmetyce dwóynéy; toż w arytmetyce dwunastnéy?

IV. 1.) Wysłowić liczbę wyrażoną przez 7984 w systemacie dwunastnym; 2.) wzaiemnie liczbę 13492 napisać w arytmetyce dwunastnéy?

V. Jakże wysłowić liczbę 497345 która iest napisaną podług systematu dwunastnego? (1)

O Rachunku liczebnym.

33. Rachunek liczebny iest sztuka składania i rozkładania liczb przez działania regułom nieomylnym poddane.

34. Reguły wspieraią słabość rozumu ludzkiego podaiąc mu sposoby do doyścia następnie i po części do wypadków których nie może znaleźć od razu.

35. Pospolicie cztery liczemy głównych działań w rachunku; *dodawanie*, *odeymowanie*, *mnożenie i dzielenie*.

36. Dodawanie służy do połączenia wielu liczb w iednę która się nazywa *summą*.

Wiemy zaś iż nie można łączyć w iednę liczbę, liczb różnego gatunku np. łokci i stóp, (n° 2.) a tém bardziéy różnéy natury iako to łokci i złotych; dodawanie więc będąc właściwie skróconém policzaniem, nie może się odbywać tylko na ilościach iednorodnych (quantitates homogeneae) i iednogatunkowych.

---

(1) Trzy ostatnie zagadnienia nie powinnyby tu podług ścisłości należeć, wymagaią bowiem znaiomości dalszych działań arytmetycznych. Wszakże uczący się skoro postąpili nieco w rachunkach, łatwo ie zrozumieią.

37. Odeymowanie służy do znalezienia *różnicy* między dwoma liczbami, to iest, o ile iedna przewyższa drugą. (1)

Gdy zaś odeymowanie iest właściwie skróconém odliczaniem, więc liczba którą odeymuiemy i liczba od którey odeymuiemy powinny być istotnie iednéyże natury i gatunku, a zatém odeymowanie nie może się odbywać na ilościach różnorodnych (quantitates heterogeneae) i różnogatunkowych.

38. Mnożenie służy do wzięcia iakiéy liczby nazwanéy *mnożną* tyle razy ile oznacza inna liczba nazwana *mnożnikiem*, a wypadek z działania nazywa się *iloczyn* (2).

Jasna iest iż iloczyn składa się z mnożnego powtórzonego tyle razy ile iedność iest zawarta w mnożniku; więc mnożenie iest gatunkiem dodawania przez które przydaiemy iaką liczbę do siebie saméy tyle razy ile iedność iest zawarta w drugiéy.

Mnożna i mnożnik nazywaią się *czynnikami* iloczynu.

39. Dzielenie służy do znalezienia ile razy iaka liczba nazwana *podzielna* zawiera w sobie inną nazwaną *dzielnikiem* a wypadek z działania nazywa się dla tego *iloraz*.

Widoczna iest iż liczba iaka nie może się zawierać w drugiéy tylko tyle razy właśnie, ile razy może być od niéy odiętą; więc dzielenie iest gatunkiem odeymowania, które służy do znalezienia ile razy iaka liczba może być odiętą od drugiéy (3).

Wyłożone dopiero 4ch działań definicyie uczący się koniecznie dobrze poiąć i na pamięć umieć po-

---

(1) Nazywaią także wypadek z odeymowania *nadmiarem* lub *resztą*.

(2) Nazywaią też niektórzy iloczyn *mnogością*, a mnożną *mnożnym*.

(3) Z tego względu możnaby ie nazwać *odmnożeniem*.

winni, to im albowiem posłuży do rozpoznawania w podawanych zadaniach, gdzie i iak którego działania użyć maią, a naczém szczególniéy Nauka rachunków polega. Zastosowanie reguł nie ma trudności skoro się poymie definicyia i cel każdéy.

Wszystkie liczby mogą być poddane pod działania któreśmy tu opisali; wyłożemy zaś sposób odbywania ich nayprzód na liczbach całych i dziesiętnych; potém na ułomkach.

O Działaniach głównych arytmetyki na liczbach całych i dziesiętnych.

O dodawaniu liczb całych i dziesiętnych.

40. Jeżeli liczby które chcemy dodać są poiedyncze, summę ich znayduiemy natychmiast, a zatém nie masz reguły na odbywanie tego dodawania (nº 34). Widać np. od razu iż dodaiąc 4 do 5 iest 9 summą. Piszemy $4+5=9$ i wymawiamy 4 *więcéy* 5 *równe iest* 9; lub 4 i 5 czyni 9. Podobnież $6^{zł.}+8^{zł.}=14^{zł.}$ i t. d.

41. Nieco tylko wprawy potrzeba także, aby dodać za pomocą pamięci liczbę poiedynczą do liczby złożonéy. Tak znayduiemy bez trudności, iż $15+8=23$, iż $342^{zł.}+7^{zł.}=349^{zł.}$ i t. d.

42. Gdy liczby o których idzie dodanie są złożone, i gdy nie można widzieć od razu ich summy, sposób iéy znalezienia iest *wziąć oddzielnie summę wszystkich różnych części tych liczb.*

Niechby mi np. zadano dodać razem liczby 494, 2532 i 9043.

Dla znalezienia summy tych liczb piszę ie tak aby iedności były pod iednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, i t. d. i podkréślam ie liniyką;

$$
\begin{array}{r}
494 \\
2532 \\
9043 \\
\hline
12069
\end{array}
$$

Poczém zaczynaiąc od prawéy ręki z góry na dół, mówię: 4 i 2 czynią 6, i 3 czynią 9. Summa ta kolumny iedności może być wyrażoną przez iednę cyfrę piszę ią więc pod tąż kolumną.

Postępuię do kolumny dziesiątków, i mówię: 9 i 3 czynią 12, i 4 czynią 16, to iest, sześć iedności dziesiątków które piszę pod kolumną dziesiątków, i ieden dziesiątek dziesiątków czyli iedno sto które dodaię do kolumny stów bezpośrednie następuiącéy, mówiąc: 1 zatrzymany i 4 czyni 5, i 5 czyni 10, i 0 czyni także 10, to iest, ieden dziesiątek stów czyli tysiąc. Gdy tu nie ma iedności rzędu nad którym działam, zapełniam mieysce znakiem 0, a tysiąc zatrzymuię dla dodania go do następuiącéy kolumny tysięcy do któréy postępuię; mówię więc: 1 zatrzymany i 9 czynią 10, i 2 czynią 12 które piszę zarazem, ponieważ to iuż ostatnia iest kolumna. Tak summa szukana iest 12069.

43. Aby więc uskutecznić dodawanie liczb złożonych, *napisz liczby podane iedne pod drugiemi tak, aby iedności tegoż samego rzędu były w iednéyże kolumnie i podkréśl ie liniyką dla oddzielenia ich od summy któréy szukasz.*

Poczém *dodaway razem liczby każdéy kolumny zaczynaiąc od pierwszéy po prawéy ręce a postępuiąc następnie od iednéy kolumny do drugiéy która bezpośrednie następuie po lewéy ręce.*

Jeżeli summa kolumny nad którą działasz może bydź wyrażoną przez iednę cyfrę, napiszesz ią pod tą kolumną, ieżeli zaś nie może być wyrażoną tylko przez kilka cyfer, położysz pod tą kolumną tylko iedności iéy rzędu, lub w braku tych iedności położysz o, a zatrzymasz dziesiątki dla dodania ich do następuiącéy kolumny iako iedności tegoż rzędu co ona, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéy po lewéy ręce kolumny któréy summę napiszesz.

44. Niech będzie podane na drugi przykład dodać 0,7; 1,89 i 7,97.

Piszę te liczby tak, ażeby setne były pod setnemi, dziesiętne pod dziesiętnemi, i t. d.

$$\begin{array}{r} 0{,}7 \\ 1{,}89 \\ 7{,}97 \\ \hline 10{,}56 \end{array}$$

a podkréśliwszy ie liniyką, mówię zaczynaiąc od setnych: 9 i 7 czynią 16, to iest 6 setnych które piszę pod kolumną setnych, i dziesięć setnych, czyli iednę dziesiętną którą dodaię do kolumny dziesiętnych, mówiąc: 1 zatrzymany i 7 czynią 8, i 8 czynią 16, i 9 czynią 25; piszę tylko 5 pod kolumną dziesiętnych a zatrzymuię dwa dziesiątki dziesiętnych, czyli dwie iedności dla dodania ich do kolumny następuiącéy, która iest kolumną iedności.

Mówię więc: 2 zatrzymane i 0 czynią także 2, i 1 czynią 3, i 7, czynią 10, które piszę razem, ponieważ to iuż ostatnia iest kolumna. A tak summa szukana iest 10,56.

45. Znaydziemy przez podobne postępowanie iż summa liczb mianowanych 9478, zł. 3729 zł. i 47978 zł.
lok. lok.
iest 61185 zł. summa zaś liczb 45,08 i 37,4
3

łok. łok.
i 8,57 iest 91,05. Oto iest wzór tych dwóch działań.

zł.	łok.
9478	45,08
3729	37,4
47978	8,57
61185 zł.	91,05

46. Jasno tu widać, iż reguła ta iest nieomylna, bo przepisuie dodawać następnie wszystkie części liczb podanych: postępuiąc więc podług niéy znaydzie się summę szukaną która iest tylko zbiorem tych różnych części.

47. Chcąc się przekonać czyli niemasz omyłki w dodawaniu, naylepszą iest do tego probą *powtórzyc działanie postępuiąc zdołu do góry*. Widoczna iest iż powinna się znaleźć taż sama summa która się znalazła postępuiąc zgóry na dół.

Zagadnienia

48. I. Woiewództwo Krakowskie liczy ludności 384120, Sandomierskie 344347, Kaliskie 523014, Lubelskie 440643; iakaż iest ludność tych czterech Woiewództw?

II. Rachuią iż od stworzenia świata do potopu upłynęło lat 1656, od potopu do zbudowania Kościoła Salomonowego 1344, od zbudowania Kościoła Salomonowego do narodzenia Chrystusa Pana lat 1000, od téy epoki upłynęło iuż lat 1820; ileż podług tego upłynęło lat od stworzenia świata do początku roku teraźniéyszego 1821.

III. Znaleźć summę liczb: 90543,82; 5943,4324; 18265,783?

IV. Promień Kuli ziemskiéy czyli odległość iéy środka od powierzchni zawierać ma długości 3684275,0938 sążni polskich. *Lalande* przydał mu ieszcze długości 1491,5906 takichże sążni; iakąż mu więc długość przyznawał?

O odeymowaniu liczb całych i dziesiętnych,

49. Gdy liczba od którey mam odeymować i liczba którą mam odeymować, są poiedyncze, nie masz reguły na odbywanie tego odeymowania. Widać bowiem od razu iż odeymuiąc np. 4 od 6 zostaie 2 na resztę. Pisze się $6-4=2$, i mówi się 6 *mniey* 4 $=2$, lub 4 od 6 zostaie 2; podobnież 8zł. — 5zł.=3zł.

50. Trzeba też nieco tylko wprawy ażeby wziąć z pamięci różnicę liczby złożoney od liczby poiedynczey. Tak znaydzie się bez trudności iż $16-9=7$, iż 218zł. — 9zł.= 209 zł. i t. d. (1)

51. Gdy idzie o odeymowanie liczb złożonych których różnicy nie widać od razu, trzeba *wziąć w szczególności rożnicę wszystkich części tych dwóch liczb.*

Żądaią np. różnicy liczb 50387 i 34583.

Piszę te liczby tak, aby iedności były pod iednościami dziesiątki pod dziesiątkami, it. d. i podkréślam ie liniyką.

$$\begin{array}{r}50387\\34583\\\hline 15804\end{array}$$

Poczém mówię: 3 od 7 zostaie 4 które piszę pod kolumną iedności. Postępuię do kolumny dziesiątków, mówiąc: 8 od 8 zostaie o które piszę pod tąż kolumną, Postępuię do kolumny stów, mówiąc: 5 od 3 nie można; przydaię myślą dziesiątek do 3 co czyni 13 i mówię : 5 od 13 zostaie 8 które piszę pod

---

(1) Zwykle wymienia się wprzódy ilość od którey się ma odeymować np. różnica miedzy 8 i 5 iest 3.

kolumną stów. Postępuię do kolumny tysięcy i zwiększywszy cyfrę 4 iednością (1), mówię: 5 od 0 nie można; przydaię 10 do 0, co czyni także 10, i mówię: 5 od 10 zostaie 5 które piszę pod kolumną tysięcy. Nakoniec postępuię do kolumny dziesiątków tysięcy, i zwiększywszy cyfrę 3 iednością, mówię: 4 od 5 zostaie 1 który piszę pod tąż kolumną. A tak różnica żądana iest 15804.

52. Aby więc uskutecznić odéymowanie liczb złożonych, *napisz mniéyszą liczbę pod większą tak, aby iedności tegoż samego rzędu były w iednéyże kolumnie i podkréśl ie liniyką dla oddzielenia tych liczb od różnicy któréy szukasz.*

Poczém, *weź różnicę liczb każdéy kolumny, zaczynaiąc od pierwszéy po prawéy ręce, a postępuiąc od iednéy kolumny do drugiéy bezpośrednie następuiącéy, pisz za każdym razem resztę pod kolumną, z któréy taż reszta wypada.*

Jeżeli w liczbie wyższéy znayduie się cyfra równa odpowiadaiącéy cyfrze w liczbie niższéy i nie masz żadnéy różnicy, w tym razie dla ocalenia wartości innych znaków liczebnych zapełnisz miéysce znakiem 0.

Jeżeli zaś w liczbie wyższéy cyfra iaka mniéysza iest od odpowiadaiącéy w liczbie niższéy, natenczas aby można odeymowanie uskutecznić, potrzeba przydać myślą dziesiątek do téyże cyfry wyższéy, napisać pod liniyką nadmiar cyfry wyższéy tak zwiększonéy nad cyfrę niższą, odpowiadaiącą, a dla nagrodzenia zwiększyć iednością cyfrę niższą bezpośrednie po lewéy ręce następuiącą.

---

(1) Przydaiąc 10 do cyfry 3 położonéy na mieyscu stów, powiększam 10 stami czyli tysiącem liczbę 50387: lecz rachuiąc 5 zamiast 4 położonych na mieyscu tysiąców, powiększam tysiącem liczbę 34583, więc różnica liczb 50387 34583 zostaie taż sama.

53. Załóżmy sobie np. znaleźć różnicę liczb 9,147 i 7,958.

Dla znalezienia iéy, piszę te liczby tak aby iedności były pod iednościami, dziesiętne pod dziesiętnemi, i t. d. iak ie tu widzieć:

$$\begin{array}{r} 9,147 \\ 7,958 \\ \hline 1,189 \end{array}$$

i mówię: 8 od 7 nie można; 8 od 17 zostaie 9 które piszę pod kolumną tysiącznych. Postępuię do kolumny setnych i mówię: 6 od 4 nie można; 6 od 14 zostaie 8 które piszę pod kolumną setnych. Postępuię do kolumny dziesiętnych i mówię, 10 od 1 nie można; 10 od 11 zostaie 1 który piszę pod kolumną dziesiętnych. Nakoniec postępuię do kolumny iedności, i mówię: 8 od 9 zostaie 1 który piszę pod tąż kolumną. Tak więc różnica szukana iest 1,189.

54. Gdyby zamiast liczby 9,147 była podana 9,14; natenczas dopisałbym do niéy 0, i mówiłbym: 8 od 0 nie można; 8 od 10 zostaie 2 i t. d. w ogólności: gdy liczba odeymować się maiąca, ma kilka cyfer dziesiętnych więcéy niż liczba od któréy odeymować wypada, lub gdy ta ostatnia żadnéy nie ma cyfry dziesiętnéy, doda się do niéy tyle zer ile potrzeba do zrównania liczby cyfer dziesiętnych w obu liczbach, co ich wartości nie zmienia (nº 25), a po tém przygotowaniu postępuie się iak wyżéy wskazano.

55. Przez podobne postępowanie znaydzie się iż różnica liczb mianowanych 95381 zł. i 85792 zł. iest 9589; zł. i że różnica liczb 196,4 sąż. i 89,696 sąż. iest 106,704 sąż. Oto iest wzór tych dwóch działań.

$$\begin{array}{r} \text{zł.} \\ 95381 \\ 85792 \\ \hline 9589 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{sąż.} \\ 196,4 \\ 89,696 \\ \hline 106,704 \end{array}$$

56. Widoczna iż idąc za tą regułą, bierze się różnica wszystkich części liczb podanych, i że się powinna tém samém znaleźć różnica cała tych dwóch liczb.

57. W uskutecznieniu działania może się popełnić omyłka. Dla zapewnienia się więc o dokładności wypadku używaią *sprawdzenia*.

58. Dla sprawdzenia odeymowania *doday różnicę do liczby którą odeymowałeś, ieżeli odeymowanie było dobrze zrobione znaydziesz liczbę od któréy odeymowałeś.* Bo łącząc dwie części które składaią całość, musi się złożyć koniecznie taż całość.

Tak, dla sprawdzenia odeymowania pod nº 51. przydaię różnicę 15804 do liczby 34583 którą miałem odeymować a znalazłszy liczbę 50387 od któréy miałem odeymować, iestem pewny że się w działanie błąd nie wcisnął.

59. Wzaiemnie dla sprawdzenia dodawania, *odeymiy od summy znalezionéy, summy szczególne wszystkich kolumn; nic ci się nie zostanie ieżeli działanie dobrze było zrobione.* Bo odeymuiąc od iakiéy całości wszystkie części które ią składaią, nie powinno nic zostać z téyże całości.

Sprawdźmy tym sposobem dodawanie następuiące:

$$\begin{array}{r} 987 \\ 491 \\ 354 \\ \hline 1832 \end{array}$$

Biorę summę kolumny iedności, mówiąc: $7+1+4=12$ ażeby uskutecznić odeymowanie, przydaię myślą 10 do cyfry 2 całéy summy, co czyni 12, i mam $12-12=0$.

Postępuię do kolumny następuiącéy do któréy dla nagrodzenia przydaię 1, i liczba do odeymowania iest natenczas $1+8+9+5=23$. Aby odeymowanie wykonać przydaię 20 do cyfry 3 całkowitéy summy, co czyni 23, i mam $23-23=0$.

Nakoniec postępuię do ostatniéy kolumny do któréy dla nagrodzenia przydaię 2, i na ostatnią liczbę do odeymowania iest $2+9+4+3=18$, mam więc $18-18=0$, skąd wnoszę że dodawanie było dobrze zrobione.

60. W podanych dotąd przykładach odeymowania, liczba maiąca się odeymować była mniéysza lub tak wielka iak liczba od któréy się miało odeymować; lecz gdyby się trafiła większa, iak np. gdyby szło o odięcie od dziesięciu złotych które posiada pewny człowiek, piętnastu złotych które przegrał, iakżeby sobie trzeba postąpić? oto: zamiast odięcia 15 od 10, czego nie można wykonać, odeymiy 10 od 15; zostanie 5; poprzedź te liczbę znakiem — będziesz miał $10^{zł.}-15^{zł.}=-5^{zł.}$

Tak tedy gracz ma $5^{zł.}$ mniéy niżby mu potrzeba na zapłacenie summy przegranéy; innemi słowy, ma długu zł. 5. Dla zapewnienia się o tym wypadku doday do liczby $15^{zł.}$ któreś miał do odeymowania różnicę $-5^{zł.}$ a połączenie $15^{zł.}-5^{zł.}$ tych dwóch ilości, da $10^{zł.}$ co właśnie tak być powinno (nº 58).

61. W dodawaniu $15-5=10$ ta iest osobliwość iż summa może być mniéyszą od iednéy z liczb które ią swém połączeniem formuią. Zdaie się to zrazu zadziwiaiące, lecz nieco zastanowiwszy się widać że iest ściśle dokładném.

W saméy rzeczy, ieżeli łączę móy maiątek z twoim, widoczna iest iż nasz maiątek spólny będzie wyrażony przez summę iaka wypadnie z dodania naszych maiątków szczególnych.

Daymy teraz iż twóy maiątek wynosi $30000^{zł}$; móy niechby był $10000^{zł.}$ i niechbym był zadłużony na $15000^{zł.}$ wyrażenie naszego maiątku spólnego będzie $30000^{zł.}+10000^{zł.}-15000^{zł.}=25000^{zł}$, summa mnieysza niż 30000 zł. które posiadasz. Nie trzeba więc mięszać znaczeń słów *przydawać* i *powiększać*.

62. Wzaiemnie, *odeymować* nie iest to zawsze *zmnieyszać*, czyli co na iedno wychodzi, różnica może być większa niż liczba od którey się odeymowało. Bo gdyby się pytano o ile pewny człowiek maiący 12000 zł. maiątku iest bogatszym od innego: który nie ma maiątku lecz 4000 zł. długu, iasna iest iż nadmiar maiątku pierwszego będzie 12000 zł. które posiada, więcey summą wyrównywaiącą 4000 zł. długu które tamten winien, tak dalece iż różnica iest 16000 zł; liczba większa niż 12000 zł. którey się szukało nadmiaru nad 4000 zł. długu.

63. Łatwo tu iuż można sobie zrobić ogólne wyobrażenie ilości czyli wielkości *przydaynych i odiemnych*. Pierwsza iest wzięta w względzie pewnym; druga w względzie tamtemu przeciwnym. Np. ieżeli z mieysca w którém iestem, zamierzam sobie udać się na wschód; droga którą odbywam w tym kierunku iest przydayna względnie do mego celu; przeciwnie ieżeli, w zamiarze udania się na wschód, udaię się ku zachodowi, cała droga którą w tym razie odbywam, będzie odiemną względnie do mego celu.

Jlość przydayna albo nie iest poprzedzona żadnym znakiem, albo iest poprzedzona znakiem +; ieżeli zrobiłem 1000 sążni ku wschodowi z mieysca w którem zostawałem, droga moia wyrażona będzie przez 1000 lub +1000 sążni; ieżeli przeciwnie zrobiłem 1000 sążni drogi ku zachodowi, droga moia iest odiemna i wyrażenie iéy musi być poprzedzone znakiem —, wyrażę ią więc przez — 1000 sążni: iasna iest, iż dopóki zostaię w mieyscu, dopóty droga moia nie iest żadna i mogę ią wyrazić przez o. W tym to względzie otrzyma środek między ilościami przydaynemi i odiemnemi.

Zagadnienia.

64. I. Woiewództwo Mazowieckie zawiera ludności 675873, Woiewództwo zaś Płockie 406577; iakaż iest różnica ludności tych dwóch Woiewództw?

II. Naywyższa góra ziemska w Ameryce południowey Chimborako iest 20148 stóp paryzkich wysoka, naywyższa zaś w Europie Mont-blanc wysoka iest 14456 takichże stop; o ileż tamta iest wyższa?

III. Jeżeli proch wynaleziony został r. 1330. a sztuka drukarska r. 1440; o ileż lat wynalazek pierwszego poprzedził wynalazek drugiéy; a ile lat upłynęło w szczególności od każdego z tych wynalazków do roku teraźnieyszego 1821?

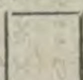
IV. Europę rachuią na 171396 mil kwadratowych (1) rozległą, Azyą zaś na 640087 mil kwadratowych. O ileż mil kwadratowych większa iest Azya od Europy?

V. Znaleźć różnicę miedzy 1) 3750,44 i 543,675; 2) 25 i 16,748; 3) 200,402 i 145,23?

O mnożeniu liczb całych i dziesiętnych.

65. Gdy mnożna i mnożnik są liczbami poiedynczemi, niemasz reguły na takie mnożenie. Każdy wie np. iż 2 rozmnożone przez 2, to iest 2 powtórzone 2 razy daią 4 na iloczyn. Pisze się 2×2, lub $2 . 2 = 4$, i wymawia się 2 *rozmnożone* przez $2 = 4$, lub 2 *razy* 2 iest 4. Wie się także iż $5 \times 1 = 5$, i że $7 \times 0 = 0$ (n° 38.)

(1) Powierzchnia zamknięta czterema liniiami prostemi równemi i w zeyściach swoich równo nachylonemi do siebie nazywa się *kwadratem*. Jeżeli iedna z tych liniy, które się zowią *bokami* kwadratu, ma łokieć długości, powierzchnia niemi obwiedziona zowie się *łokciem kwadratowym* ieżeli ma iednę stopę długości, *stopą kwadratową*, ieżeli milę, *milą kwadrarową* i t. d. dokladnieysze wyobrażenie kwadratu nabędzie się z jeometryi.



66. Tablica następuiąca zawiera iloczyny wszystkich liczb poiedynczych:

a b		
1 × 1 = 1	2 × 1 = 2	3 × 1 = 3
1 × 2 = 2	2 × 2 = 4	3 × 2 = 6
1 × 3 = 3	2 × 3 = 6	3 × 3 = 9
1 × 4 = 4	2 × 4 = 8	3 × 4 = 12
1 × 5 = 5	2 × 5 = 10	3 × 5 = 15
1 × 6 = 6	2 × 6 = 12	3 × 6 = 18
1 × 7 = 7	2 × 7 = 14	3 × 7 = 21
1 × 8 = 8	2 × 8 = 16	3 × 8 = 24
1 × 9 = 9	2 × 9 = 18	3 × 9 = 27
4 × 1 = 4	5 × 1 = 5	6 × 1 = 6
4 × 2 = 8	5 × 2 = 10	6 × 2 = 12
4 × 3 = 12	5 × 3 = 15	6 × 3 = 18
4 × 4 = 16	5 × 4 = 20	6 × 4 = 24
4 × 5 = 20	5 × 5 = 25	6 × 5 = 30
4 × 6 = 24	5 × 6 = 30	6 × 6 = 36
4 × 7 = 28	5 × 7 = 35	6 × 7 = 42
4 × 8 = 32	5 × 8 = 40	6 × 8 = 48
4 × 9 = 36	5 × 9 = 45	6 × 9 = 54
7 × 1 = 7	8 × 1 = 8	9 × 1 = 9
7 × 2 = 14	8 × 2 = 16	9 × 2 = 18
7 × 3 = 21	8 × 3 = 24	9 × 3 = 27
7 × 4 = 28	8 × 4 = 32	9 × 4 = 36
7 × 5 = 35	8 × 5 = 40	9 × 5 = 45
7 × 6 = 42	8 × 6 = 48	9 × 6 = 54
7 × 7 = 49	8 × 7 = 56	9 × 7 = 63
7 × 8 = 56	8 × 8 = 64	9 × 8 = 72
7 × 9 = 63	8 × 9 = 72	9 × 9 = 81

ważną zaś iest rzeczą,

ważną zaś iest rzeczą umieć ie na pamięć i dobrze się z niemi oswoić, chcąc z szybkością i dokładnością odbywać mnożenie (1)

67. Gdy mnożna iest złożona a mnożnik poiedynczy lub złożony, i nie widać od razu wypadku

(1) Dobra iest rzecz aby początkuiący maiąc sobie wskazany sposob robienia téy tablicy sami ią sobie porządnie układali rozciągaiąc ią daléy i do liczb złożonych. Układanie nawet podobnéy tablicy i innych działań głównych nie małą im korzyść w rachunkach zapewni. Przy tablicy odeymowania trzeba pamiętać na to co się powiedziało pod n. 60.

Wprawa rachowania z pamięci bardzo wiele przynosi korzyści, iuż to że ułatwia rachunki dalsze i trudniéysze na piśmie, iuż że zaostrza ciekawość, przyzwyczaia do uwagi i uczy rozumować. Życzyć należy aby w żadnym względzie zaniedbywaną nie była. Wiele w téy mierze zalet łączy metoda *Pestaloccego*. Aby mieć zastosowane do niéy ćwiczenie z podanéy tu tablicy mnożenia, dosyć iest odmienić mieysce dwóch pierwszych kolumn a, b, to iest drugą napisać na mieyscu pierwszéy a tę na mieyscu drugiéy. W téy zaś, liczbę do mnożenia wziętą nazywać połową, trzecią częścią lub czwartą i t. d. innéy. Tak mnożąc 6 nazywam ie połową dwunastu i mówię: raz połowa dwunastu iest sześć, dwa razy połowa dwunastu iest . . . i t. d. Można rownie nazwać to 6 trzecią częścią ośmnastu, czwartą, i t. d. Następnie można za każdym razem dodawać do wypadku lub od niego odeymować liczbę iaką stałą np. raz czwarta część 24ch więcéy 3 iest 9 i t. d. lub raz czwarta częśc 24ch mniéy 3 iest 3 i t. d. Można także liczbę stałą dodawaną lub odeymowaną nazwać połową lub trzecią i t. d. częścią innéy np. mnożąc 5 mogę zacząć: raz piąta część 25u więcéy czwarta część 12u iest 8 i t. d. lub, raz szosta część 30u mniéy trzecia część 9u iest 2 i t. d. Naostatek można ieszcze wyrażać iloczyn nie prosto iak wypada, lecz odnośnie do liczb innych np. czego iest połową, trzecią i t. d. częścią. I tak: raz piąta część 25u więcéy czwarta część 12u. iest połową 16u; dwa razy piąta część 25u więcéy czwarta część 12u iest połową 26u i t. d.

Jakożkolwiek rachunek podobny zdaie się zawikłany, mam iednak z doświadczenia, iż ucząc się go w porządku okaże się łatwym i nader korzystnym. —

mnożenia, *trzeba składać po części, iloczyn cały którego nie można znaleźć od razu.*

Dla znalezienia np. iloczynu z 7081 przez 4, piszę 4 pod 7081 i podkréślam ie liniyką;

$$\begin{array}{r} 7081 \\ 4 \\ \hline 28324 \end{array}$$

potém zaczynaiąc od prawéy ręki, mówię: 4 razy 1 iest 4 które piszę na mieyscu iedności.

Postępuię do cyfry następuiącéy i mówię: 4 razy 8 dziesiątków iest 32 dziesiątków. Piszę 2 iedności dziesiątków, a zatrzymuię 3 dziesiątki dziesiątków czyli 3 sta dla dodania ich do iloczynu następuiącego.

Mówię więc: 4 razy 0 stów iest 0 stów, i 3 sta które zatrzymałem iest także 3 sta które piszę na miéyscu stów.

Nakoniec przystępuię do ostatniéy cyfry mnożnego i mówię: 4 razy 7 tysięcy czyni 28 tysięcy które piszę zarazem.

68. W praktyce nie wysłowia się iedności iloczynów szczególnych i ia odtąd pomiiać ie będę dla krótkości.

69. Gdy więc idzie o rozmnożenie liczby złożonéy przez poiedynczą; *napisz mnożnik pod mnożnym, i podkréśliwszy liniyką aby czynniki były oddzielone od iloczynu całego szukanego, mnóż następnie przez mnożnik postępuiąc od prawéy ręki do lewéy, iedności różnych rzędów składaiących mnożny.*

Gdy iloczyn cyfry nad którą działasz może być wyrażony iednym znakiem, napiszesz go w iloczynie całym na mieyscu które zaymować powinien.

Gdy iloczyn nie może być wyrażony tylko przez kilka cyfer, napiszesz tylko iedności tegoż iloczynu, lub w braku ich napiszesz 0, zatrzymuiąc dziesiątki dla dodania do iloczynu następuiącego, *iako iedności tegoż co on rzędu, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéy po lewéy ręce cyfry któréy iloczyn napiszesz.*

70. Niechby się pytano o iloczyn 963 przez 658. Dla znalezienia go piszę mnożnik pod mnożnym tak, aby iedności iednakowego rzędu tych dwóch czynników były w kolumnach.

```
   963
   658
  ----
  7704
 4815
5778
------
633654
```

i podkréśliwszy liniyką mówię: 8 razy 3 iest 24; piszę 4 a zatrzymuię 2; 8 razy 6 iest 48, a zatrzymane 2 iest 50; piszę 0 a zatrzymuię 5; 8 razy 9 iest 72 a 5 zatrzymane iest 77 które piszę razem.

Przystępuię do 5 dziesiątków mnożnika mówiąc: 5 razy 3 iest 15; iasna iest iż to są 15 dziesiątków; piszę więc 5 na miéyscu dziesiątków, a zatrzymuię 1; 5 razy 6 iest 30 a 1 zatrzymany iest 31; piszę 1 a zatrzymuię 3; 5 razy 9 iest 45, a 3 zatrzymane iest 48, które piszę razem.

Nakoniec przystępuiąc do stów mnożnika mówię: 6 razy 3 iest 18; ten iloczyn wyraża oczywiście sta; piszę więc 8 na miéyscu stów a zatrzymuię 1; 6 razy 6 iest 36, a 1 zatrzymany iest 37; piszę 7 a zatrzymuię 3; 6 razy 9 iest 54, a 3 zatrzymane iest 57, które piszę razem. Dodaię iloczyny cząstkowe, i mam 633654 na iloczyn cały (1).

(1) Łatwo się tu okazuie iżby można zacząć działanie od cyfry naywyższego rzędu mnożnika np. mnożyć 10d mnożną przez 6 stów, potém przez 5 dziesiątków, nakoniec przez 8 iedności; tym sposobem iloczyn cząstkowy który

71. Aby więc rozmnożyć liczbę złożoną przez inną złożoną, *napisz mnożnik pod mnożnym tak aby iedności tegoż samego rzędu były w kolumnie i podkréśl.*

Mnóż następnie całego mnożnego przez każdą cyfrę mnożnika, postępuiąc od prawéy ręki do lewéy.

Układay rozmaite iloczyny cząstkowe iedne pod drugiemi tak, ażeby pierwsza cyfra po prawéy ręce każdego z tych iloczynów znaydowała się wprost pod tą przez którą mnożyłeś.

Doday wszystkie te iloczyny cząstkowe i będziesz miał iloczyn cały.

72. Reguła przepisana iest nieomylna. Bo mnożyć iednę liczbę przez drugą, iest to powtarzać pierwszą tyle razy ile iest iedności w całéy drugiéy. Że zaś podług reguły przepisanéy powtarza się mnożny tyle razy ile oznacza każda cyfra mnożnika; więc podług téy reguły powtarza się mnożny tyle razy ile iest iedności w całym mnożniku, a zatém znayduie się nieomylnie prawdziwy iloczyn.

73. Ażeby poznać czy nie masz omyłki w mnożeniu, *powtórz ie biorąc za mnożną, liczbę która była mnożnikiem w pierwszym razie, a za mnożnik liczbę która była mnożną.* Jloczyn powinien być ten sam. W saméy rzeczy iasna iest iż 6 razy 3 i 3 razy 6 daie zawsze iednakowy iloczyn 18.

74. Wypada tu nadto uważyć, iż trzy czynniki, cztéry, i t. d. rozmnożone przez siebie w iakimkolwiek

---

poprzedniczo wypadł trzeci byłby tu pierwszym a pierwszy trzecim, iak widać z wzoru działania. —

$$\begin{array}{r} 963 \\ 658 \\ \hline 5778 \\ 4815 \\ 7704 \\ \hline 633654 \end{array}$$

porządku, daią zawsze ten sam iloczyn np. $3\times4\times5=5\times3\times4=3\times5\times4=5\times4\times3$... i t. d. Aby tę prawdę okazać naocznie napiszmy np. 5 iedności w linii prostéy i powtórzmy to 4 razy; otrzymamy 4 razy 5 iedności.

1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,

Jeżeli zamiast rachowania liniy od lewéy ręki do prawéy, porachuiemy ie z góry na dół, znaydziemy 5 liniy każda po 4 iedności; więc 4 iedności powtórzone razy 5 daią ten sam iloczyn co 5 iedności powtórzone razy 4. Że zaś dla otrzymania iloczynu z więcéy czynników, nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa, ztąd łatwo widać iż porządek w ich mnożeniu iest dowolny.

75. Gdy mnożna i mnożnik iest zakończony zerami, skraca się działanie mnożąc tylko cyfry ważność maiące iedne przez drugie a dopisuiąc na końcu iloczynu tak znalezionego wszystkie zera któreśmy pominęli.

Tak dla znalezienia iloczynu z 369000 przez 8900, mnożę tylko 369 przez 89, i znalazłszy na iloczyn 32841, dopisuię pięć zer na końcu co mi daie 3284100000 na prawdziwy iloczyn szukany.

W saméy rzeczy, prawdziwy mnożny 369000 iest tysiąc razy większy niż 369, a prawdziwy mnożnik 8900 sto razy większy niż 89, więc prawdziwy iloczyn powinien być sto razy tysiąc razy, t. i. sto tysięcy razy większy niż 32841; trzeba więc 32841 sto tysięcy razy zwiększyć aby mieć prawdziwy iloczyn, a to nastąpi dopisuiąc pięć zer na końcu 32841.

Dla téyże przyczyny gdybym miał mnożyć 985 przez 10000, napisałbym 9850000.

76. Nakoniec, gdy się znayduią zera pośrednie w mnożniku, opuszczamy ie, biorąc tylko iloczyn mnożnego przez cyfrę ważność maiącą która bezpośrednio po lewéy ręce następuie, i pisząc pierwszą cyfrę tego iloczynu cząstkowego pod cyfrą przez którą mnożemy, iak to widać w następuiącym przykładzie.

$$\begin{array}{r} 397802 \\ 480003 \\ \hline 1193406 \\ 3182416 \\ 1591208 \\ \hline 190946153406 \end{array}$$

77. Podług tego co się iuż powiedziało, mnożenie liczb całkowitych nie może mieć trudności: lecz gdyby szło o mnożenie dziesiętnych, iakżeby sobie trzeba postąpić? oto: *nie uważaiąc na przecinek działay zupełnie iak gdyby szło o mnożenie liczb całkowitych i oddziel przecinkiem od prawéy ręki z iloczynu całego tyle cyfer dziesiętnych ile ich iest razem w obu czynnikach.*

Tak, aby rozmnożyć 1,9542 przez 3,94 działam iak gdybym miał 19542 mnożyć przez 394.

$$\begin{array}{r} 1{,}9542 \\ 3{,}94 \\ \hline 78168 \\ 175878 \\ 58626 \\ \hline 7{,}699548 \end{array}$$

Biorę iloczyny cząstkowe nie uważaiąc na przecinki które są w dwóch czynnikach; potém znalazłszy 7699548 na iloczyn cały, oddzielam z niego przecinkiem sześć cyfer dziesiętnych od prawéy ręki, i prawdziwy iloczyn iest 7,699548 to iest 7 całych 699548 milionowych.

W samey rzeczy mnożąc 19542 przez 394, mnożyłem liczbę dziesięć tysięcy razy większą niż 1,9542 przez liczbę sto razy większą niż 3,94; więc iloczyn znaleziony iest sto razy dziesięć tysięcy razy, t. i. milion razy większy niż prawdziwy iloczyn; więc aby mieć prawdziwy iloczyn, trzeba 7699548 milion razy zmnieyszyć, a to nastąpi oddzielaiąc sześć cyfer dziesiętnych (n^o 26) to iest tyle, ile ich iest razem w obu czynnikach; więc prawdziwy iloczyn iest 7,699548.

78. Gdyby się nie znaydowało w całym iloczynie tyle znaków ile iest cyfer dziesiętnych w obu razem czynnikach, trzeba położyć po lewey stronie tego iloczynu liczbę zer dostateczną (n^o 28), iak to widać w przykładzie następuiącym:

$$\begin{array}{r} 0,00029 \\ 0,018 \\ \hline 232 \\ 29 \\ \hline 0,00000522 \end{array}$$

79. Gdyby się miało mnożyć iaką liczbę np. 5,2439 przez 10, lub przez 100, lub i t. d. dosyć dla otrzymania iloczynu posunąć przecinek ku prawey ręce w mnożney o iedno, lub dwa, lub i t. d. mieysc. Tak $5,2439 \times 10 = 52,439$; $5,2439 \times 100 = 524,39$. i t. d.

Bo mnożyć przez 10 lub przez 100, iest to zwiększać mnożną 10 razy lub 100 razy. Że zaś, posuwaiąc przecinek o iedno lub dwa mieysca ku prawey ręce w mnożney zwiększa się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (n^o 26), więc tym sposobem znaydzie się prawdziwy iloczyn.

80. Gdy czynniki których szukamy iloczynu są liczbami mianowanemi, trzeba mieć baczność w rozeznawaniu tego który ma być wzięty za mnożny od tego który ma służyć za mnożnik; bo ten przezna-

czony iedynie do oznaczenia ile razy ma się wziąć mnożny, *powinien być uważany iako liczba ogólna*, a zatém iloczyn złożony z mnożnego wziętego tyle razy ile iest iedności w mnożniku będzie mieć iedności teyże natury co mnożny (1).

Podług téy uwagi, gdyby ci zadano znaleźć cenę $\overset{\text{łok.}}{549}$ po $\overset{\text{zł.}}{95,39}$ za łokieć, postrzeżesz natychmiast iż chcąc mieć złote w iloczynie, powinieneś wziąć $\overset{\text{zł.}}{95,39}$ za mnożny a mnożnik $\overset{\text{łok.}}{549}$ uważać iaką liczbę ogólną która oznacza iż mnożny powinien być wzięty $\overset{\text{łok.}}{549}$ razy, to iest tyle razy ile $\overset{\text{łok.}}{1}$ iest zawarty w $\overset{\text{łok.}}{549}$.

Nakoniec gdyby ci podano to zadanie: $\overset{\text{łok.}}{0,49}$ płótna kosztuie $\overset{\text{zł.}}{1}$, ileż będzie łokci tegoż płotna za $\overset{\text{zł.}}{57}$? Weźmiesz $\overset{\text{łok.}}{0,49}$ za mnożny; powtórzysz go tyle razy ile $\overset{\text{zł.}}{1}$ iest zawarty w $\overset{\text{zł.}}{57}$ t. i. 57 razy, a iloczyn znaleziony wyrażałby liczbę łokci. Oto iest wzór tych dwóch działań.

$$
\begin{array}{r}
\text{zł.} \\
95,39 \\
\text{łok.} \\
5,49 \\
\hline
85851 \\
38156 \\
47695 \\
\hline
\text{zł.} \\
52369,11
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\text{łok.} \\
0,49 \\
\text{zł.} \\
57 \\
\hline
343 \\
245 \\
\hline
\text{łok.} \\
27,93
\end{array}
$$

(1) Nie mówiemy; iż mnożnik powinien być *zawsze* uważany iako liczba ogólna, ani też że iloczyn mieć będzie *koniecznie* iedności teyże natury co mnożny, w jeometryi bowiem okazuią nam się przypadki gdzie mnożnik musi być

Zagadnienia.

81. I. 5250 czerw. zł. ileż czynią złotych, rachuiąc czerwony złoty po złotych 18?

II. Rok pospolity z 365 dni złożony ileż zawiera godzin, gdy na dzień rachuiemy godzin 24?

III. Rok astronomiczny zawiera 365 dni. 5 godz. 8 min. 49″. Gdy godzina zawiera 60 minut, minuta 60″, a dzień 24 godzin, ileż będzie sekund w 10 latach?

IV. Gdy łokieć pewnéy materyi kosztuie 38,4 zł. ileż zł. kosztować będzie 128,5 łok. téy materyi?

V. W mennicy Londyńskiéy pracuią na dzień 10 godzin. Każdy stępel wybiia 60 sztuk na minutę. Gdy więc 8 stępli razem biie, ileż na dzień wybiią?

VI. Rozmnożyć 1) 723,2879 przez 47000? 2) 0,0048 przez 0,026?

O dzieleniu liczb całych i dziesiętnych.

82. Gdy iest liczba poiedyncza do podzielenia przez poiedynczą, nie masz reguły na to działanie. Każdy wie np. iż 8 zawiera w sobie 4 dwa razy a zatém, że dzieląc 8 przez 4, iest dwa na iloraz. Pisze się $\frac{8}{4} = 2$ lub $8 : 4 = 2$ i wymawia się: 8 *podzielone przez* $4 = 2$, lub 8 *zawiera w sobie* 4 razy dwa.

83. Znayduie się także bez reguły iloraz z podzielenia liczby złożonéy z dwóch cyfer przez liczbę poiedynczą. Do tego potrzeba tylko wiedzieć iloczyny liczb poiedynczych; tak widać od razu iż $\frac{72}{9} = 8$, iż $\frac{42}{7} = 6$, i t. d.

---

mianowany, i natenczas iloczyn innéy będzie natury niż liczba mnożna; np. 3 łokcie liniiowe pomnożone przez 2 łok. lin. czynią 6 łokci kwadratowych. —

84. Ponieważ iloraz oznacza ile razy podzielna zawiera dzielnik (n° 39), iasna iest, iż podzielna składa się z dzielnika wziętego tyle razy ile iedności zawiera iloraz. Więc mnożąc dzielnik przez iloraz znaydzie się na iloczyn liczba równa podzielnéy, słowem; podzielna. Tak w przykładach powyższych, iest $4 \times 2 = 8$; $9 \times 8 = 72$; $7 \times 6 = 42$; a w tym $\frac{5}{5} = 1$, mnożąc dzielnik 5 przez iloraz 1 znayduie się podzielna 5.

85. Zdarza się często iż iloraz z podzielenia iednéy liczby przez drugą nie może być dokładnie wyrażony przez całkowitą; takim iest iloraz z podzielenia 11 przez 5. W saméy rzeczy iest on większy niż 2 a mniéyszy niż 3. W takim razie, *napisz na iloraz mniéyszą z dwóch liczb pomiędzy które wpada iloraz prawdziwy. Rozmnóż dzielnik przez tę liczbę; odeymiy od podzielnéy iloczyn z tego mnożenia i połóż różnicę po prawéy stronie ilorazu oznaczaiąc dzielenie iéy przez dzielnik.*

Tak w dzieleniu 11 przez 5, napisawszy 2 na iloraz, mówię: $5 \times 2 = 10$, 10 od 11 zostaie 1 który piszę po prawéy stronie 2, oznaczaiąc iż go trzeba podzielić przez 5, i mam $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$. Widać więc iż 11 iest złożone z iednéy części 10 dokładnie podzielnéy przez 5, i z reszty 1 któréy można tylko oznaczyć dzielenie przez 5.

86. Widoczna iż iloraz z 11 przez 5 mógłby także być wyrażony przez $\frac{11}{5}$ iak przez $2\frac{1}{5}$, ponieważ te dwa wyrażenia są równe. Wnieś z tego przykładu, iż kiedy iloraz z podzielenia iakiéy liczby przez drugą nie może być dokładnie wyrażony przez całkowitą, można go wyrazić oznaczaiąc dzielenie podzielnéy przez dzielnik. Sposób ten wyrażania ilorazu niedokładnego iest wygodnym, i staie się koniecznym gdy podzielna iest mniéysza od dzielnika. Gdybyś miał np. 6 podzielić przez 7, nie mógłbyś napisać na iloraz, tylko $\frac{6}{7}$

87. Jlość dokładnie to iest bez zostawienia reszty, podzielna przez drugą, iest *wielokrotną* względem drugiéy czyli *wielokrotnością* drugiéy; a ta iest *częścią wielokrotną* pierwszéy. Tak 8 iest wielokrotnością tak 4ch iako i 2ch, a 4 i 2 są częściami wielokrotnemi 8iu.

88. Wielokrotności z dwóch są liczbami *parzystemi* liczby zaś niepodzielne przez 2 zowią się *nieparzyste*.

Postrzegamy łatwo iż każda liczba zakończona przez 0, 2, 4, 6 lub 8 musi być parzystą.

89. Każda liczba nie maiąca innego dzielnika dokładnego tylko samą siebie i iedność nazywa się *liczbą pierwszą* lub *liczbą pierwotną*; 1, 2, 3, 5, 7, 11, i t. d. są liczby pierwotne (1).

90. Nakoniec kiedy dwie liczby które porównywamy iednę z drugą nie maią żadnego spólnego dzielnika dokładnego, tylko iedność, nazywaią ie liczby *pierwsze* lub *pierwotne między sobą*; tak 15 i 4 są liczby pierwotne między sobą.

91. Gdy podzielna iest złożona a dzielnik poiedynczy lub złożony, nie widać zaraz ile razy tenże zawiera się w podzielnéy, *trzeba więc po części szukać ilorazu którego zaraz znaleźć nie można.*

Aby podzielić n. p. 73648 przez 8, piszę te dwie liczby iak ie tu widzieć;

```
73648 | 8
72    | 9206
 16
 16
   48
   48
    0
```

Biorę za pierwszą podzielną cząstkową 73 tysiące

(1) Pożyteczną iest ażeby początkuiący układali sobie tablicę liczb pierwotnych od 1 do 100 np. lub do 200, lub daléy.

liczby podzielnéy 73648 (1), i mówię: 73 zawiera 8, razy 9; piszę 9 pod liniyką, i widać iasno iż te 9 powinny wyrażać tysiące (2). Potém mówię, $8 \times 9 = 72$ które odiąwszy od podzielnéy cząstkowéy 73, zostaie 1 tysiąc, obok którego spuszczam 6 stów podzielnéy (3), co mi daie 16 stów na drugą podzielną cząstkową. Mówię więc: $8 \times 2 = 16$ które odiąwszy od podzielnéy cząstkowéy 16, nie zostaie nic. Spuszczam 4 dziesiątki podzielnéy i mam trzecią podzielną cząstkową. Mówię 4 nie zawiera 8 ani razu; piszę w ilorazie o dla oznaczenia iż ten nie zawiera dziesiątków. Obok 4 spuszczam 8 iednośei na ostatnią podzielną cząstkową i mówię: 48 zawiera 8, razy 6; piszę więc w ilorazie cyfrę 6 która wyraża iedności, i mówię $8 \times 6 = 48$ które odiąwszy od podzielnéy cząstkowéy 48, zostaie o. Tak liczba 73648 zawiera 8 zupełnie 9206 razy.

92. Jeżeli więc idzie o podzielenie liczby złożonéy przez poiedynczą? *napisz dzielnik po prawéy stronie podzielnéy, oddzielaiąc ie liniyką, i pociągnąwszy drugą pod dzielnikiem, pisz pod nią cyfry ilorazu w miarę ich wynaydywania. Dla wynalezienia zaś ich, dziel następnie przez dzielnik wszystkie części podzielnéy, postępuiąc od lewéy ręki do prawéy dopóki podzielna nie będzie wyczerpana.*

Jeżeli w ciągu działania natrafisz na cząstkową podzielną niezawieraiącą dzielnika; natenczas przed

---

(1) Gdy pierwsza cyfra całéy podzielnéy zawiera dzielnik trzeba wziąć tę tylko cyfrę za podzielną cząstkową. —

(2) Jest pewna iż liczba 73 uważana sama, zawiera 8 tylko 9 razy z resztą 1; lecz uważana iako składaiąca część liczby 73648, waży 73 tysiące a zatém zawiera 8 dziewięć tysięcy razy i zostaie 1 tysiąc.

(3) Dla uniknienia wszelkiéy omylki trzeba naznaczyć punktem lub kréską, ostatnią cyfrę pierwszéy podzielnéy cząstkowéy tudzież każdą cyfrę spuszczoną.

przybraniem następuiącego znaku podzielnéy, napiszesz w ilorazie o dla oznaczenia iż iloraz nie zawiera iedności tego rzędu nad którym działasz.

93. Aby liczbę złożoną podzielić przez inną złożoną np. 151982 przez 495 układam podzielną i dzielnik iak w przykładzie poprzedzaiącym:

$$\begin{array}{r|l} 151982 & 495 \\ 1485 & 307\frac{17}{495} \\ \hline 3482 & \\ 3465 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

Poczém biorę za pierwszą podzielną cząstkową cztery cyfry 1519 podzielnéy, ponieważ trzy pierwsze nie zawieraią dzielnika (1). Szukam ile razy liczba 1519 zawiera 495 i dla większéy łatwości szukam tylko ile razy 15 stów podzielnéy cząstkowéy 1519 zawiera 4 sta dzielnika 495, mówiąc: 15 zawiera 4, razy 3, mnożę 495 przez 3; iloczyn znaleziony 1485 może być odięty od 1519 a zatém dzielnik iest zawarty 3 razy w podzielnéy cząstkowéy. Piszę więc w ilorazie cyfrę 3 która wyrażać będzie sta, ponieważ podzielna cząstkowa 1519 wyraża 1519 stów, i odeymuię 1485 od 1519 zostaie się 34.

Obok 34 spuszczam cyfrę 8 podzielnéy i mam 348 dziesiątków na drugą podzielną cząstkową. Że zaś liczba 348 nie zawiera 495; trzeba żebym położył o w ilorazie, dla oznaczenia iż ten nie zawiera dziesiątków.

Obok 348 spuszczam cyfrę 2 ostatnią podzielnéy; co mi daie 3482 iedności na ostatnią podzielną cząstkową. Zamiast uważania ile razy 3482 zawiera 495,

---

(1) Widoczna iest iż 151 uważane iako wyrażaiące 151 tysięcy nie zawiera 495 ani raz ieden w rzędzie tysięcy. Bo 495×1000 iest większe niż 151000.

uważam dla téyże przyczyny co wyżéy, ile razy 34 zawiera 4. Lecz nim napiszę 8 w ilorazie, mnożę 495 przez 8. Jloczyn znaleziony 3960 iest większy niż podzielna cząstkowa 3482; ta podzielna nie zawiera więc ośm razy dzielnika. Sprobuię 7 tymże sposobem, i widzę że iloczyn 3465 może być odięty od 3482. Piszę więc w ilorazie cyfrę 7 która wyraża widocznie iedności, i odeymuię 3465 od 3482; resztę 17 piszę po prawéy stronie ilorazu i oznaczam iéy dzielenie przez 495. Tak tedy liczba 151982 zawiera liczbę 495, razy 307 i z resztą 17.

94. Reguła przepisana iest nieomylna. Bo dzielić iednę liczbę przez drugą, iest to szukać ile razy pierwsza zawiera drugą. Że zaś idąc za regułą przepisaną, znayduie się ile razy każda część podzielnéy zawiera dzielnik, a tém samém ile razy każda podzielna zawiera dzielnik; więc reguła przepisana iest nieomylna.

95. Ażeby poznać czy nie zaszła omyłka w dzieleniu, *trzeba rozmnożyć dzielnik przez iloraz: ieżeli dzielenie które sprawdzić chcemy dobrze było odbyte, wypadnie podzielna* (nº 84). Gdy iest iaka reszta *trzeba ią złączyć z iloczynem dzielnika przez iloraz.* Bo, ieżeli prawda np. iż liczba 151982 zawiera 495, razy 307 z resztą 17, widoczna iż trzeba dla znalezienia 151982 dodać 17 do 151965 iloczynu z 495 przez 307.

96. Wzaiemnie, dzielenie służyć może do sprawdzenia mnożenia. Bo podzielna iest iloczynem którego dwoma czynnikami są dzielnik i iloraz. Więc *dzieląc iloczyn iakiego mnożenia przez ieden z iego czynników wzięty za dzielnik, będzie drugi czynnik na iloraz.*

97. Uważmy tu, iż gdy dla otrzymania iloczynu z wielu czynników nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa (nº 74) w iakimkolwiek

porządku, więc dzieląc iloczyn z wielu czynników przez którykolwiek z nich, wypadnie na iloraz iloczyn innych czynników.

98. Niekoniecznie potrzeba pisać pod każdą podzielną cząstkową iloczyn dzielnika przez każdą cyfrę położoną w ilorazie. Skraca się dzielenie czyniąc odeymowanie w miarę rozmnożenia każdéy cyfry dzielnika przez cyfrę wyrażaiącą ile razy dzielnik iest zawarty w podzielnéy cząstkowéy nad którą się działa.

Niech będzię np. 162832 do podzielenia przez 398.

$$\begin{array}{r|l} \dot{1}\dot{6}\dot{2}832 & 398 \\ \cline{2-2} 3632 & 409\frac{50}{398} \\ 50 & \end{array}$$

Biorę 1628 za pierwszą podzielną cząstkową i mówię: 16 zawiera 3, razy 5, doświadczam 5; i widzę iż iest za wielkie, i że podzielna cząstkowa 1628 zawiera 398 tylko 4 razy (1) Piszę więc 4 w ilorazie, i mnożę dzielnik przez 4, mówiąc: $4 \times 8 = 32$; 32 od 8 nie można: aby uskutecznić odeymowanie dodaię 30 do 8, co czyni 38, i mówię: 32 od 38 zostaie 6 które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéy stronie 1628, a zatrzymuię 3 dziesiątki aby ie dodać dla nagrodzenia iloczynowi dziesiątków które mieć będę mnożąc 9 dziesiątków dzielnika przez 4. Mówię więc: $4 \times 9 = 36$, a 3 zatrzymane $= 39$; 39

(1) Zamiast uważania ile razy liczba 16 zawiera 3, można tu uważać ile razy liczba 16 zawiera 4, ponieważ dzielnik 398 przystępuie bliżéy do 400 niż do 300: znaydzie się od razu 4 które iest prawdziwym ilorazem. Tak we wszystkich przypadkach gdzie druga cyfra dzielnika iest znacznie większa od pierwszéy, zamiast szukania ile razy taż zawiera się w podzielnéy odpowiadaiącéy szukać trzeba ile razy zawiera się zwiększona iednością. —

od 2 nie można; dodaię w myśli 40 do 2, co czyni 42, i mówię; 39 od 42 zostaie 3, które piszę pod 2, a zatrzymuię 4 aby ie dodać dla nagrodzenia do iloczynu stów które mieć będę mnożąc 3 sta dzielnika przez 4. Mówię więc: $4 \times 3 = 12$, a 4 zatrzymane $= 16$, 16 od 16 zostaie 0.

Obok reszty 36 spuszczam cyfrę 3 podzielnéy. Gdy podzielna cząstkowa 363 nie zawiera 398, piszę 0 w ilorazie, i spuszczam zaraz obok 363 ostatnią cyfrę podzielnéy co daie 3632 na ostatnią podzielną cząstkową. Rozpoznawszy iż ta podzielna cząstkowa zawiera dzielnik 398 tylko 9 razy, piszę 9 w ilorazie, i mnożę dzielnik mówiąc: $9 \times 8 = 72$; 72 od 2, nie można; przydaię 70 do 2, i mam 72. Mówię więc, 72 od 72 zostaie 0, które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéy ręce podzielnéy cząstkowéy 3632, i zatrzymuię 7 dziesiątków. Mnożę 9 dziesiątków przez dzielnik 9, mówiąc, $9 \times 9 = 81$ a 7 zatrzymane $= 88$; 88 od 3 nie można. Dodaię w myśli 90 do 3 co czyni 93, i mówię: 88 od 93 zostaie 5 które piszę pod dziesiątkami 3, a zatrzymuię 9. Mnożę 3 sta przez dzielnik 9 mówiąc: $9 \times 3 = 27$ a 9 zatrzymane $= 36$; 36 od 36 zostaie 0. Tak mam na iloraz 409 z resztą 50.

99. Zważmy tu dobrze iż za każdém dzieleniem cząstkowém nie można nigdy więcéy położyć iak 9 w ilorazie. Bo rząd iedności ilorazu każdego dzielenia cząstkowego iest koniecznie oznaczony rzędem iedności liczby podzielnéy cząstkowéy przyrównanym do rzędu iedności dzielnika. Że zaś, gdyby w iakiém dzieleniu cząstkowém położyło się tylko 10 w ilorazie, zupełnie iest widoczna iż ten iloraz byłby rzędu wyższego niż być powinien, to iest, zawierałby iedności wyższego rzędu niż ten nad którym się działa; więc w każdém dzieleniu cząstkowém nie można nigdy położyć więcéy iak 9 w ilorazie. I tak w przykładzie poprzedzaiącym gdy podzielna cząstkowa 363

wyrażaiąca dziesiątki nie zawierała dzielnika 398 ani razu w rzędzie dziesiątków, podzielna cząstkowa 3632 wyrażaiąca iedności, zawierać go musiała w rzędzie iedności, nie można było więc położyć w ilorazie większéy cyfry niż 9. Jakoż 50 reszta z tego dzielenia mnieysza niż dzielnik 398 iasno pokazuie, iż podzielna cząstkowa 3632 nie zawiera dzielnika 398 ani raz więcéy. Możnaby ieszcze krócéy okazać powyższą prawdę w ten sposób: gdy podzielna cząstkowa np: 363 nie zawiera dzielnika ani razu, taż podzielna przybraniem cyfry zwiększona dziesięć razy, nie może go zawierać więcéy nad 9 razy (1).

Tu się także okazuie że iloraz powinien mieć zawsze tyle cyfer więcéy iedną, ile zostaie cyfer w podzielnéy po pierwszém dzieleniu cząstkowém.

100. Gdy podzielna i dzielnik są zakończone przez zera, skraca się działanie opuszczaiąc w iednéy i w drugiéy liczbie tyle zer, ile ich iest na końcu liczby maiącéy ich mniéy, i dzieląc część pozostałą podzielnéy, przez część pozostałą dzielnika. Na przykład, gdybym miał 328400000 do podzielenia przez 8900, opuściłbym dwa zera w podzielnéy i dzielniku, potém dzieliłbym 3284000 część pozostałą podzielnéy, przez 89 część pozostałą dzielnika, i miałbym na iloraz 369000. W saméy rzeczy iasna iest iż 3284000 stów zawieraią 89 stów, zupełnie tyle razy ile 3284000 iedności zawieraią 89 iedności.

Gdyby dzielnik był 1 z zerami, dosyćby było aby mieć iloraz, wymazać na końcu podzielnéy tyle zer ile ich iest po iedności. Tak dla podzielenia 45000 przez

---

(1) Jeżeliby się w ciągu dzielenia znaydowała reszta większa od dzielnika, lub mu tylko równa, byłoby to dowodem iż dzielnik zawiera się ieszcze w podzielnéy, a zatém że cyfra położona w ilorazie iest za mała. Trzeba więc natenczas zwiększyć tęż cyfrę iedną, dwóma, i t.d. iednościami.

100, wymazuię dwa zera na końcu podzielnéy i mam na iloraz 450. Wsaméy rzeczy. $100 \times 450 = 45000$. Lecz gdyby nie było zer na końcu podzielnéy, natenczas aby mieć natychmiast iloraz, oddzieliłoby się po prawéy ręce podzielnéy tyle cyfer ile iest zer po iedności, i oznaczyłoby się że te cyfry maią być podzielone przez dzielnik. Tak, ieżeli iest 43649 do podzielenia przez 1000, iloraz będzie $43\frac{649}{1000}$.

101. Użyteczną iest często, poznać wszystkie dzielniki dokładne iakiéy liczby. Oto iest sposób ich znalezienia. Daymy iż żądaią wszystkich dzielnikòw liczby 84.

Dzielę następnie tę liczbę przez wszystkie liczby pierwotne 1, 2, 3, 5, 7, i t. d. nie przestaiąc dzielić przez iednakową liczbę dopóki można.

Tak dzieląc 84 przez 1, iloraz iest 84.

Dzielę 84 przez 2, i mam na iloraz 42

Nie przestaię dzielić przez 2, i widzę iż liczba 42 podzielona przaz 2 daie na iloraz 21 które iuż nie są podzielne przez 2.

Dzielę 21 przez 3, a iloraz 7 nie iest iuż podzielny ani przez 3 ani przaz 5.

Dzielę więc 7 przez 7; iloraz iest 1, i dzielenie przez liczby pierwotne iest iuż wyczerpane.

Dla obięcia iednym rzutem oka podzielnych i ilorazów które mi daią te rozmaite dzielniki, układam ie iak się tu widzieć daie:

Podzielne i ilorazy		Dzielniki
	84	1
	42	2
	21	2
	7	3
	1	7

102. Lecz iasna iest iż liczba 84 iest ieszcze podzielna przez wszystkie iloczyny dzielników pierwszych wziętych wszystkiemi sposoby po dwa, po trzy, i t. d.

Zróbmy więc te iloczyny przestaiąc na napisaniu po raz ieden tych które są te same.

Biorąc ie	Znaydziemy
1^{od} po dwa . . .	4, 6, 14, 21,
2^{re} po trzy . . .	12, 28, 42.
3^{ie} po cztery	84.

Wszystkie tedy dzielniki liczby 84 napisane każdy po razu, są 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

Krócey iest brać iloczyny dzielników pierwotnych w miarę ich wynaydywania.

Kładzie się tu tablica tego działania.

84	1
42	2
21	2, 4
7	3, 6, 12
1	7, 14, 28, 21, 42, 84 (1)

Tu iest mieysce wyłożyć względnie do dzielenia, niektóre zasady iakich znaydą się w ciągu częste przystosowania.

103. 1^{od} Jeżeli, nie zmieniaiąc dzielnika iakiego dzielenia, rozmnożemy podzielną przez iakąkolwiek

(1) Nie bezpożyteczną będzie aby uczący się układali sobie tablicę liczb nie pierwotnych rozkladaiąc ie na czynniki pierwotne np.

$4=2\times2$	$12=2\times2\times3$
$6=2\times3$	$14=2\times7$
$8=2\times2\times2$	$15=3\times5$
$9=3\times3$	$16=2\times2\times2\times2$
$10=2\times5$	$18=2\times3\times3$
	i t. d.

całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy większym ile iest iedności w liczbie przez którą rozmnożyliśmy podzielną. W samey rzeczy, widoczna iest iż np. podzielna rozmnożona przez 2 lub przez 3, stała się 2 razy lub 3 razy większą, a zatém zawiera tenże sam dzielnik dwa razy więcéy lub trzy razy więcéy.

104. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc podzielną iakiego dzielenia rozmnożemy dzielnik przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy mniéyszy ile iest iedności w liczbie przez którą rozmnożyliśmy dzielnik. Bo iasno iest iż dzielnik rozmnożony przez 2 lub przez 3, stał się 2 razy lub 3 razy większym, więc zawiera się wtéy samey podzielnéy dwa razy mniéy, lub trzy razy mniéy.

105. Więc *mnożąc podzielną i dzielnik iakiegokolwiek dzielenia przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

106 2re Jeżeli, nie zmieniaiąc dzielnika iakiego dzielenia, dzielemy podzielną przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz z podzielenia téy nowey podzielnéy przez dzielnik zachowany będzie tyle razy mniéyszy ile iest iedności w liczbie przez którą podzieliliśmy podzielną. W samey rzeczy, widać, iż podzielna podzielona np. przez 2 lub przez 3, staie się 2 razy lub 3 razy mniéyszą, a tém samém zawiera tenże sam dzielnik dwa razy mniéy lub trzy razy mniéy.

107. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc podzielną iakiego dzielenia, podzielemy dzielnik przez iakąkolwiek całkowitą iloraz z podzielnéy zachowanéy przez nowy dzielnik będzie tyle razy większy ile iest iedności w liczbie przez którą podzieliliśmy dzielnik. Bo iest iasna iż dzielnik podzielony przez 2 lub przez 3, staie się 2 razy, lub 3 razy mniéyszym; więc zawiera się w téy samey podzielnéy dwa razy więcéy lub trzy razy więcéy.

108. Więc *dzieląc podzielną i dzielnik iakiegokolwiek dzielenia, przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

Przeydźmy do dzielenia dziesiętnych.

109. Gdy masz dziesiętne do podzielenia, *nie uważaiąc na przecinek, działay zupełnie iak gdyby szło o podzielenie liczb całkowitych: lecz pamiętay oddzielić przecinkiem od prawéy ręki z ilorazu tyle cyfer dziesiętnych ile ich iest więcéy w podzielnéy niż w dzielniku.*

Tak aby podzielić 138,4968 przez 50,18 działam iak gdybym miał 1384968 do podzielenia przez 5018.

$$\begin{array}{r|l} \dot{1}\dot{3}\dot{8},4968 & 50,18 \\ \cline{2-2} 38\ 136 & 2,76 \\ 3\ 0108 & \\ 0 & \end{array}$$

Potém znalazłszy na iloraz 276, oddzielam przecinkiem 2 cyfry dziesiętne, i prawdziwy iloraz iest 2,76.

W saméy rzeczy, biorąc za podzielną 1384968, zamiast 138,4968 zwiększyłem tę podzielną, a tém samém i iloraz, dziesięćtysięcy razy (nº 103).

Że zaś biorąc za dzielnik 5018, zamiast 50,18 zwiększyłém dzielnik sto razy a zatém zmniéyszyłem iloraz iuż sto razy (nº 104): więc iloraz 276 iest ieszcze sto razy większy od prawdziwego. Więc aby mieć prawdziwy iloraz, trzeba zmniéyszyć 276 sto razy, a to nastąpi oddzielaiąc dwie cyfry dziesiętne, t. i. tyle ile ich iest więcéy w podzielnéy niż w dzielniku.

110. Gdyby się nie znaydowało w ilorazie tyle znaków ile iest cyfer dziesiętnych więcéy w podzielnéy niż w dzielniku, trzebaby położyć po lewéy

stronie ilorazu liczbę zer dostateczną (nº 28), iak to widać w przykładzie następuiącym, gdzie na iloraz wypada tylko cyfra 9.

$$0,000036 \left\{ \frac{0,004}{0,009} \right.$$

Dla téyże saméy przyczyny w przykładzie następuiącym dopisało się o po lewéy stronie dziesiętnych ilorazu:

$$\dot{0},\dot{2}\dot{9}\dot{7}06 \left\{ \frac{3}{0,09902} \right.$$

111. Lecz ieżeli się w dzielniku więcéy znayduie dziesiętnych niż w podzielnéy, natenczas trzeba dopisać do podzielnéy liczbę zer potrzebną do wyrównania liczbie cyfer dziesiętnych w dzielniku i nie uważaiąc na przecinek wykonywać działanie iak gdyby szło o podzielenie liczb całych (nº 105); np. ieżeli iest 46,8 do podzielenia przez 4,252; dopisuię do podzielnéy dwa zera i mam 46800 do podzielenia przez 4252, iloraz iest 11 z resztą 28.

112. Gdyby się miało iaką liczbę np 983, 7 do podzielenia przez 10, lub przez 100, lub i t. d. dosyć iest, dla otrzymania ilorazu cofnąć przecinek ku lewéy ręce w podzielnéy o iedno, o dwa, lub i t. d. miéysca np. 983, 7 : 10=98,37; 983, 7 : 100=9,837 i t.d.

W saméy rzeczy; dzielić przez 10 lub przez 100, iest to zmniéyszać podzielną 10 razy lub 100 razy. Że zaś cofaiąc przecinek o iedno lub dwa miéysca ku lewéy ręcé w podzielnéy, zmniéysza się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (nº 26); otrzymuie się więc tym sposobem prawdziwy iloraz. Tak, aby podzielić 43649 przez 1000, dosyć iest napisać 43, 649.

113. W przypadkach gdy nie można mieć ilorazu dokładnego, t. i. gdy się iaka reszta zostaie,

mogę za pomocą części dziesiętnych zbliżyć się do prawdziwego ilorazu aż do tak małych części dziesiętnych które iuż można zaniedbać bez znacznego uchybienia, czyli, co na iedno wychodzi, mogę dzielić mnieyszą liczbę przez większą.

Weźmy resztę z dzielenia (n° 98) gdzie zostało 50 do podzielenia przez 398

Mogę od razu do podzielnéy 50, sześć zer przypisać, ieżeli tylko do sześciu dziesiętnych chcę dzielenie posunąć, lub przypisywać zera w miarę potrzeby. Oto iest wzór tych dwóch działań.

50000000	398	500	398
1020	0,125628	1020	0,125628
2240		2240	
2500		2500	
1120		1120	
3240		3240	
56 . . . . . i t. d.		56 . . . . . i t. d.	

Iloraz więc przybliżony z 50 przez 398 iest 0,125628; lub 0,12562; lub 0,1256; lub, i t. d. podług potrzeby zatrzymania się przy 6téy, lub przy 5téy, lub przy 4téy, lub, i t. d. cyfrze dziesiętnéy; t. i. podług potrzeby zbliżenia ważności dziesiętnych mniéy niż o iednę miliionową, lub setną tysiączną lub dziesięciotysiączną, lub, i t. d. (1)

Rachunek ten którego zasada iest iasna (n° 103; 109) okaże nam się w nowéy postaci gdy mówić będziemy niżéy o zamianie ułomków zwyczaynych na dziesiętne i t. d. Zabawiliśmy się nad nim nieco dłużéy, bo nadto oswoić się z nim nie można.

---

(1) Tak, ważność liczby 0,125628 zbliżona mniéy niż o iednę setną np. iest 0,12; bo część zaniechana 0,005628 iest mnieysza niż 0,01.

114. Gdy podzielna i dzielnik są liczbami mianowanemi, odbywa się dzielenie iak gdyby te liczby były nie mianowane i szło o znalezienie ile razy iedna zawiera drugą, a natura iedności ilorazu iest oznaczona przez zadanie.

Gdyby się pytano np. ile razy $46^{\text{zł.}}$ zawieraią $23^{\text{zł.}}$ iloraz 2 iest liczbą niemianowaną (ogólną) która oznacza 2 razy.

Jeżeli idzie o podzielenie $46^{\text{zł.}}$ porówno między 23 osób? iloraz iest liczbą mianowaną oznaczaiącą iż każda osoba powinna mieć $2^{\text{zł.}}$ na swoią część.

Daymy iż trzeba rozwiązać zadanie następuiące: 23 łokci wstążki kosztuią $46^{\text{zł.}}$ iakaż cena łokcia? iloraz 2 iest liczbą mianowaną oznaczaiącą iż cena łokcia iest złotych 2.

Nakoniec, ieżeli chcę wiedzieć ile za $46^{\text{zł.}}$ będzie muru po $23^{\text{zł.}}$ sążeń rachuiąc? iloraz 2 iest liczbą mianowaną pokazuiącą iż będą $2^{\text{sąż.}}$ muru.

Podług tego łatwo znaydziesz, iż gdy 27 osób maią się dzielić porówno summą $\overset{\text{zł.}}{948,51}$; część każdéy osoby będzie $\overset{\text{zł.}}{35,13}$; i że gdy łokieć iakiéy materyi kosztuie $\overset{\text{zł.}}{29}$, za $\overset{\text{zł.}}{2099,6}$ będziesz miał $\overset{\text{łok.}}{72,4}$ téy materyi. Widać tu tablicę tych dwóch działan

$$
\begin{array}{r|l}
\overset{\text{....zł.}}{94851} & 27 \\
138 & \overset{\text{zł.}}{35,13} \\
35 & \\
81 & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
\overset{\text{..zł..}}{2099,6} & 29 \\
69 & \overset{\text{łok.}}{72,4} \\
116 & \\
0 &
\end{array}
$$

Zagadnienia.

zł.
115. I. Za 248 Korcy zboża dano 3472, po ileż płacono korzec?

II. Jest do podziału 1155 zł. na 195 ludzi, ileż się każdemu dostanie?

III. 55668 ℔ ileż czynią cetnarów?

zł.
IV. Łokieć pewnéy materyi kosztuie 27,5; ileż będzie łokci téy materyi za 990 zł?

V. Teraźniéysze Królestwo Polskie liczy ludności 3 540 981, zawiera zaś 2196 mil kwadratowych powierzchni: ileż mieszkańców wypada na milę kwadratową?

VI. Ogromny dług skarbu angielskiego wynosi 38 253 072 400 zł. Jeżeli na funt złota rachuiemy 100 czerw: zł: czyli 1800 zł. ileż funtów złota trzebaby na zaspokoienie wspomnionego długu?

VII. Podzielić 1) 0,000276 przez 0,06; 2) 0,3794 przez 7; 3) 586 przez 7,45?

VIII. Znaleźć wszystkich dzielników liczby 1) 360; 2) 1080?

Zagadnienia w które wchodzą poprzedzaiące działania połączone.

116. I. W Kaliszu rachuią ludności 9151, w Płocku 6164, w Lublinie 10638, w Warszawie 104346; o ileż więcéy iest ludności w Warszawie niż w trzech pierwszych miastach razem?

II. 1) 576 cet. 1 kam i 18 ℔ ileż uczyni funtów? 2) 84 sąż. 2 łok 1 st. ileż czynią stóp?

III. Kupiec prowadzący troiaki handel włożył w 1szy 12860 zł, w 2gi 15440, w 3ci 10680; zarobił zaś przez rok na 1szym 1688 zł, na 2gim 1858, lecz

zł.
na 3^{cim} stracił 226, i przytém wszystkiém poniosł ieszcze wydatku $354^{zł}$. Ileż na końcu tego roku mieć będzie maiątku?

IV. Kupił kto $64^{łok}$. sukna po 15 zł łokieć, przedał zaś łokieć po $19^{zł}$, lecz na miarze zginęło mu łokci 6. Ileż miał zysku lub straty?

V. Wyrachowano iż człowiek zwyczaynie oddychaiąc za każdym razem bierze w siebie powietrza 40 cali sześciennych (1), i że 136^{ta} część powietrza w płuca wciągnionego w nas zostaie. Oddycha zaś człowiek przez minutę pospolicie 20 razy.

Ileż w godzinie pozostaie w nim cali sześciennych powietrza?

VI. Wiedząc że w prowincyi ludnéy na 654840 dusz powiększyła się ludność przez dopiero skończone 15 lat o ósmą część dawniéyszéy liczby swoiéy, znaleźć iak wielkie iest to powiększenie, i iaka była ludność przed 15 laty?

VII. Jest w pewnym śpichrzu 840^{kor}. zboża z którego przedano: 1^{e} 145^{kor}. po $18^{zł}$, 2^{e} 234 po 17, 3^{e} 302 po 19, 4^{e} resztę korcy po $20^{zł}$; 1) ileż zebrano za wszystko?

2) gdyby powiedziano iż zboże będące w śpichrzu kosztowało po 16 zł. korzec, ileżby zarobiono przy wspomnionéy przedaży?

---

(1) Miéysce zamknięte sześcią kwadratami równemi i w zeyściach swoich czyli *krawędziach* równo nachylonemi do siebie, nazywa się *sześcianem*. Jeżeli krawędź sześcianu ma stopę długości, a zatém miéysce zamknięte iest sześcią stopami kwadratowemi, natenczas, miéysce to czyli obiętość zowie się *stopą sześcienną*, ieżeli krawędź ma cal 1, *calem sześciennym*, i t. d. Dokładniéysze wyobrażenie sześcianu nabędzie się w ieometryi.

VIII. Gdyby zboże do śpichrza skupowano częściami n. p. kupiono 1e 285 kor. po 17zł. 2e 436 po 16zł; i przedawano także częściami n. p. 1e 152kor, po 20zł, 2e 328 po 19, 3e resztę kor. po 21zł; ileż zarobiono?

IX. Jest do przewiezienia z iednego mieysca na drugie 5248cet. pewnego materyału którego biorą po 8cet na wóz parokonny. Od każdego zaś konia płacą tu po zł. 3. 1) Ileż wszystkie konie do tego przewiezienia razem użyte będą kosztować?

2) gdyby tu i każdy wóz do przewiezienia użyty kosztował np. zł: 2, a chcący przewieźć miałby iuż swoich wozów zaprzężnych 50, i prócz tego koni 38 których do tego przewiezienia chce użyć; ileż go ieszcze naiem wozów i koni będzie kosztować?

X. Jest do umundurowania 5 Kompaniy po 180 ludzi. Na każdego człowieka trzeba 4łok. sukna po zł: 9, krawcowi zaś od roboty każdego munduru zł: 5. 1) ileż podług tego zamierzone umundurowanie będzie kosztowało?

2) gdyby iuż było w magazynie 250 mundurów gotowych, i prócz tego 360łok sukna, ileżby wtenczas umundurowanie kosztowało?

O działaniach głównych arytmetyki z ułomkami zwyczaynemi.

Wiadomości poprzednicze.

117. Sposób odbywania 4ch głównych działań arytmetycznych z ułomkami, ścisły ma związek z wyrażeniem tego gatunku ilości. Nader zaś pro-

ste są zasady które nam posłużą do oznaczenia tego wyrażenia. W samey rzeczy, *ułomek iakikolwiek zawiera iednę lub wiele części iedności*, a iedność może być podzieloną na wiele gatunków części, równych n.p. na dwie połowy, trzy części, cztery ćwiartki, pięć części, i t. d. Wyrażenie więc ułomku powinno być takie, żeby dawało zarazem wyobrażenie liczby i gatunku części ten ułomek składaiących (1).

118. Dla dostąpienia tego, używamy dwóch liczb nazwanych *dwoma wyrazami* ułomku, które piszemy iednę nad drugą oddzielaiąc ie liniyką. Liczba wyższa oznacza ile ułomek zawiera części iedności i, nazywa się *licznik*; niższa oznacza gatunek tych części t. i. na ile części dzielemy iedność, i nazywa się *mianownik*. I tak w wyrażeniu $\frac{3}{10}$, licznik 3 oznacza iż ułomek zawiera trzy części iedności, a mianownik 10 oznacza iż to są dziesiąte. Wysłowia się ułomek $\frac{3}{10}$ mówiąc *trzy dziesiąte* (2); lecz możnaby także mówić *dziesiąta część trzech.* Bo widoczna iest, iż trzy dziesiąte np. łokcia iest zupełnie toż samo co dziesiąta część ze trzech łokci.

119. Łatwo tu postrzedz iż wyrażenie ułomkowe, nic innego nie iest tylko ilorazem oznaczonym dzielenia nie uskutecznionego, którego podzielna iest licznikiem ułomku, dzielnik zaś iest w nim mianownikiem.

120. Stąd, 1ᵒᵈ ieżeli nieodmieniaiąc mianownika ułomku rozmnożemy licznik przez iakąkolwiek

---

(1) Z podaney tu definicyi ułomku widać iasno, że i części dziesiętne o których wyżey mówiliśmy, uważać można za ułomki dziesiętne.

(2) Prócz ułomku $\frac{1}{2}$, który wymawia się pół, w pospolitém wysłowianiu wszystkich innych np. $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$, *iedna trzecia, cztery siodme*, domyśla się zawsze wyrazu *część, części*

całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy większy, ile było iedności w całkowitéy przez którą pomnożyliśmy licznik (n^o 103). Mnożąc np. licznik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2 będzie ułomek $\frac{2}{3}$ dwa razy większy niż $\frac{1}{3}$.

121. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc licznik ułomka, rozmnożemy mianownik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mniéyszy, ile było iedności w całkowitéy, przez którą pomnożyliśmy mianownik (n^o 104). Mnożąc np. mianownik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2 będzie ułomek $\frac{1}{6}$ dwa razy mniéyszy niż $\frac{1}{3}$.

122. Więc, *mnożąc oba wyrazy iakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność tego ułomku.* Tak mnożąc oba wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 2, lub przez 3, lub 4, i t. d. staie się on $\frac{2}{4}$ lub $\frac{3}{6}$, lub $\frac{4}{8}$, i t. d. i iest widoczna iż te nowe ułomki są wszystkie równe $\frac{1}{2}$.

123. 2^{re} ieżeli nie odmieniaiąc mianownika ułomku, podzielemy licznik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mniéyszy, ile było iedności w całkowitéy przez którą podzieliliśmy licznik (n^o 106). Dzieląc np. licznik ułomku $\frac{3}{4}$ przez 3 będzie ułomek $\frac{1}{4}$, ktory iest trzy razy mniéyszy niż $\frac{3}{4}$.

124. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc licznik ułomku, podzielemy mianownik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy większy, ile było iedności w całkowitéy przez którą podzieliliśmy mianownik (n^o 207). Dzieląc np. mianownik ułomku $\frac{1}{8}$ przez 4 będzie ułomek $\frac{1}{2}$, który iest cztery razy większy niż $\frac{1}{8}$.

125. Więc, *dzieląc oba wyrazy iakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność*

tego ułomku. Tak dzieląc przez 4 oba wyrazy ułomku $\frac{4}{8}$ staie się on ułomkiem $\frac{1}{2}$ który iest równy $\frac{4}{8}$.

126. Z tych prawd iako i z definicyi ułomku (nº 117; 118) łatwo widzieć iż za powiększeniem samego licznika wartość ułomku się zwiększa, iak za powiększeniem samego mianownika zmnieysza; tudzież, że z ułomków maiących iednakowe mianowniki ten iest większy którego licznik iest większym; a z maiących równe liczniki, ten iest większy którego mianownik iest mnieyszym.

127. Często iest potrzeba zamienić całkowitą na ułomek bez odmiany ważności téy całkowitéy i przywieśdź do iednakowych mianowników ułomki nie iednakowe mianowniki maiące, bez odmiany ważności tych ułomków.

128. Można zaraz wyrazić iakąkolwiek całkowitą w kształcie ułomku daiąc iéy 1 za mianownik. Tak $7 = \frac{7}{1}$; $9 = \frac{9}{1}$; i t.d. co iest widoczna.

Lecz ieżeli chcemy zamienić całkowitą na ułomek któryby miał mianownik dany, *trzeba ią rozmnożyć przez mianownik który iéy dać chcemy: iloczyn będzie licznikiem ułomku.* Tak aby zamienić 4 na ułomek maiący 2 za mianownik, mnożę 4 przez 2, co mi daie $\frac{8}{2}$. Aby 4 zamienić na ułomek maiący 3 za mianownik mnożę 4 przez 3, i mam ułomek $\frac{12}{3}$, i t. d.

Jasna iest iż, wyrażenia ułomkowe $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{3}$, są równe 4; bo uskuteczniaiąc oznaczone dzielenie, znaydziemy tęż samę całkowitość; nadto iest widoczna iż dla zamienienia 4 na ułomek, rozmnożyliśmy ie tylko i podzielili przez tęż samę liczbę, a to ich wartości odmienić nie może,

129. Ułomki które zawieraią całkowitość lub więcéy niż całkowitość nazywaią się *ułomki niewłaściwe*, te zaś które są mnieysze niż całkowitość nazywaią się *właściwemi.*

Ułomek staie się liczbą całkowitą licznikiem oznaczoną, skoro część całkowitości oznaczona mianownikiem wzięta będzie za iedność; np. $\frac{2}{3}$ sążnia, są 2 łokcie.

130. Aby sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki nie iednakowe mianowniki maiące: *trzeba rozmnożyć oba wyrazy każdego ułomku przez mianownik drugiego, ieżeli ich tylko dwa, a przez iloczyn mianowników innych, ieżeli ich iest więcéy iak dwa.*

Tak ażeby przywieśdź do iednakowego mianownika dwa ułomki $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$, mnożę przez 5 oba wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ co mi daie $\frac{5}{10}$; potém mnożę przez 2 oba wyrazy ułomku $\frac{3}{5}$ i mam $\frac{6}{10}$ Dwa ułomki zwrócone są więc $\frac{5}{10}$ i $\frac{6}{10}$.

Aby dać iednakowy mianownik ułomkom $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$; mnożę nayprzód oba wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 5×7, iloczyn mianowników dwóch innych, co daie $\frac{1 \times 5 \times 7}{2 \times 5 \times 7}$ czyli $\frac{35}{70}$.

Potém mnożę oba wyrazy ułomku $\frac{4}{5}$ przez 2×7, iloczyn mianowników innych, i mam $\frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 2 \times 7}$ czyli $\frac{56}{70}$.

Nakoniec, mnożę oba wyrazy ułomku $\frac{8}{7}$ przez 2×5 iloczyn mianowników innych i znayduię $\frac{3 \times 2 \times 5}{7 \times 2 \times 5}$ czyli $\frac{30}{70}$.

Ułomki zwrócone do iednakowego mianownika są więc: $\frac{35}{70}$, $\frac{56}{70}$, $\frac{30}{70}$.

131. Jasna iest iż ułomki zwrócone tęż samę maią ważność co i ułomki dane, ponieważ dla zwrócenia ich do iednakowego mianownika, rozmnożyliśmy

tylko oba wyrazy każdego ułomku przez tęż samę liczbę, co nie zmienia ważności ułomku (n° 122).

Niemniéy widoczna iż tym sposobem ułomki zwrócone mieć będą iednakowy mianownik, ponieważ mianownik każdego ułomku zwróconego iest iloczynem wszystkich mianowników ułomków danych (n° 74).

132. Wszystkie inne sposoby czyli raczéy skrócenia wyłożonego sposobu przyprowadzania ułomków do iednakowego mianownika gruntuią się na wskazanéy tu zasadzie. Tak, ieżeli mam dwa lub więcéy ułomków z których iednego mianownik iest wielokrotnością mianowników innych (n° 87), natenczas aby mieć iednakowe mianowniki dosyć iest pomnożyć oba wyrazy każdego ułomku którego mianownik iest częścią wielokrotną mianownika większego przez liczbę oznaczaiącą część wielokrotną; np. maiąc sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki $\frac{15}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$; uważam iż liczby 4, 3, 2, są częściami wielokrotnemi 12stu, pomnożywszy więc oba wyrazy ułomku $\frac{1}{4}$ przez 3, $\frac{2}{3}$ przez 4, a $\frac{1}{2}$ przez 6, otrzymam równe im ułomki $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{14}$, maiące iednakowy mianownik co i ułomek $\frac{5}{12}$.

133. Gdy znaczna iest liczba ułomków a w tych nie ma żadnego mianownika któryby w sobie zawierał mianowniki wszystkich innych ułomków podanych, natenczas aby sobie ułatwić sprowadzenie ich do iednakowego mianownika, trzeba *znaleźć naymniéyszą iak można liczbę którаby była dokładnie podzielną przez każdy mianownik.*

Jeżeli podane mianowniki są liczbami pierwotnemi między sobą, *iloczyn z rozmnożenia ich iedne przez drugie będzie naymniéyszą liczbą dokładnie podzielną przez każdy z mianowników* (n° 97).

Lecz ieżeli mianowniki nie są liczbami pierwotnemi między sobą, łatwo iest poznać iż dla znalezienia naymniéyszéy liczby dokładnie podzielnéy przez każdy z nich, dosyć iest wziąć iloczyn z ich czynnikow osobnych, opuszczaiąc w każdym mianowniku czynniki które są częściami wielokrotnemi czynników składaiących inne mianowniki: np. maiąc sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$; postrzegam naprzód iż 6 i 8 są częściami wielokrotnemi 24ch a 9 częścią wielokrotną 18u, opuszczam więc te mianowniki i tylko mi zostaią 24, 18, 5, Rozkładam te liczby na czynniki poiedyncze z których powstaią czynniki nie będące liczbami pierwotnemi, i mam (nº 101), $2\times2\times2\times3$, $2\times3\times3$, 1×5 czyli 8×3, 2×9, 5; opuszczaiąc znowu czynniki 3 i 2 które są częściami wielokrotnemi względem czynników 9 i 8, zostaie mi 8, 9, 5, i liczba naymnieysza dokładnie podzielna przez 6, 8, 24, 18, 9, 5, iest $8\times9\times5=360$. Tę liczbę maiąc, dzielę ią przez każdy z mianowników, a przez iloraz mnożę oba wyrazy ułomku którego mianownik był dzielnikiem, albo raczéy mnożę przez ten iloraz tylko liczników właściwych. Jloczyny wypadłe będą licznikami nowych ułomków zwróconych do iednakowego mianownika naymnieyszego ile być może, którym widocznie będzie liczba podzielna 360. A tak podane tu ułomki zwracaią się na ułomki: $\frac{300}{360}$, $\frac{315}{360}$, $\frac{165}{360}$, $\frac{100}{360}$, $\frac{160}{360}$, $\frac{144}{360}$.

134. Gdy ułomek iest wyrażony przez wielkie liczby, trudno iest dokładne o ważności iego mieć wyobrażenie. Pożyteczną więc iest rzeczą umieć wyrażać ułomki naymnieyszemi ile można liczbami. Sposób którego można użyć dla przywiedzenia ułomku do nayprostszego wyrażenia, iest, dzielić oba iego wyrazy przez 2, 3, 5, i t. d. ile to będzie można.

Podzielemy przez 2, gdy oba wyrazy ułomku będą parzyste, ponieważ każda liczba parzysta będąc wielokrotnością 2, iest podzielną przez 2. Tak $\frac{8}{32}$ iest podzielne przez 2, i zwraca się nayprzód na $\frac{4}{16}$, potém na $\frac{2}{8}$, a nakoniec na $\frac{1}{4}$.

Podzielemy przez 3 gdy summa cyfer licznika i summa cyfer mianownika uczyni każda 3 albo wielokrotność 3; ponieważ każda liczba którey summa cyfer czyni 3 albo wielokrotność 3, iest sama wielokrotnością 3ch, a zatém podzielną przez 3; np. oba wyrazy ułomku $\frac{15}{228}$ są podzielne przez 3 ponieważ 6 summa cyfer licznika iest wielokrotnością 3, iako i 12 summa cyfer mianownika. Ułomek więc zwróci się na $\frac{5}{76}$.

Liczba 9 ma tęż samę własność co liczba 3. Tak ułomek $\frac{81}{1089}$ w którym summa cyfer licznika czyni 9, a summa cyfer mianownika iest wielokrotnością 9, ma oba swe wyrazy podzielne przez 9 i zwraca się na $\frac{9}{121}$ (1).

Podzielemy przez 5, gdy oba wyrazy ułomku będą zakończone na 5, albo ieden na 5 a drugi na 0. Bo każda liczba zakończona na 5 albo na 0 iest wielokrotnością 5, a tém samém podzielną przez 5. Tak oba wyrazy ułomku $\frac{15}{25}$ są podzielne przez 5, i ułomek zwraca się na $\frac{3}{5}$ Podobnież ułomek $\frac{10}{15}$ na $\frac{2}{3}$. Gdyby oba wyrazy kończyły się na 0, trzeba ie podzielić przez 10. Tak $\frac{40}{50}$ zwraca się na $\frac{4}{5}$ (2).

---

(1) Podzieliwszy 10 przez 9 reszta iest 1; iest także 1 podzieliwszy 100, 1000, ...; więc dzieląc 20,200,2000..... reszta powinna być podwóyna czyli$=$2; dzieląc 30, 300, 3000...; będzie reszta 3, i t. d. Że zaś liczba np. 8753 może być rozłożoną na iedności, dziesiątki, i t. d.... 8000+700+50+3. dzieląc przez 9, reszty 8+7+5+3 czynią 23. Zatém reszta z $\frac{8753}{9}$ iest taż sama co z $\frac{23}{9}$ t. i. 5. Więc reszta z dzielenia liczby iakiéy przez 9 znayduie się dodaiąc wszystkie iéy cyfry iak gdyby wystawiały proste iedności, i odeymuiąc 9 tyle razy ile można; więc każda liczba którey summa cyfer iest 9 lub wielokrotnością 9, iest... i t. d.
Podobnież rozumowanie ściąga się do liczby 3.

(2) Pamiętać tu należy iż skoro liczba iaka daie się dzielić przez 2 np. i przez 3 w szczególności, da się oraz podzielić i przez 6, i t. d. (no 102).

135. Lecz aby zwrócić natychmiast ułomek do nayprostszego wyrażenia: *podziel oba wyrazy ułomku przez ich naywiększy spólny dzielnik, to iest przez naywiększą liczbę która ie obu dzielić może zupełnie.* Tak dzieląc oba wyrazy ułomku $\frac{8}{32}$ przez 8 które iest naywiększą liczbą mogącą dzielić zupełnie 8 i 32, wypadnie $\frac{1}{4}$ wyrażenie nayprostsze iakie można znaleźć zamiast $\frac{8}{32}$.

Są przypadki w których nie iest tak łatwo poznać naywiększy dzielnik spólny dwóm liczbom; sposób iego znalezienia okaże się nam przez przykład następuiący. Daymy iż chcąc zwrócić ułomek $\frac{45}{81}$ do nayprostszego wyrażenia, zakładam sobie znaleźć naywiększy spólny dzielnik obu wyrazów składaiących ten ułomek. Powiem nayprzód: ten naywiększy spólny dzielnik nie może być większy iak 45; zobaczmy czy 45 które się dokładnie dzieli przez siebie, dzieli dokładnie i 81; lecz ie dzieli z resztą 36; ułomek $\frac{45}{81}$ iest zatém równy $\frac{45}{45+36.}$

Teraz mówię: naywiększy spólny dzielnik nie może być większy iak 36, inaczéy część 36 nie byłaby dokładnie podzielną: doświadczam czyli 36 które się dzieli dokładnie przez siebie, dzieli także dokładnie i 45, lecz ie dzieli z resztą 9, ułomek więc $\frac{45}{45+36}$ zamienia się na $\frac{36+9}{36+9+36.}$

Uważam iż pod tym kształtem ułomek nie może mieć większego spólnego dzielnika iak 9, ponieważ 9 które się znayduie w obu wyrazach, nie mogłoby być dokładnie podzielone przez liczbę większą niż samo; doświadczam dzielenia, i postrzegam iż 9 dzieli dokładnie części ułomku: iest więc dzielnikiem spólnym licznika i mianownika; i widać łatwo postępuiąc naszą drogą iż iest naywiększym, ponieważ liczba większa niż 9 nie mogłaby dzielić dokładnie obu wyrazów ułomku $\frac{45}{81}$.

Kiedy się iuż znalazło naywiększy spólny dzielnik, nie pozostaie iak tylko podzielić nim oba wyrazy ułomku który zwrócić chcemy; tak dzieląc 45 i 81 przez 9, znaydzie się iż nayprostsze wyrażenie $\frac{45}{81}$ iest $\frac{5}{9}$.

136. Zastanawiaiąc się nad postępowaniem w tém działaniu, wniesiemy, iż aby znaleźć naywiększy spólny dzielnik czyli naywiększą miarę spólną dwóch liczb *trzeba dzielić większą przez mniéyszą. Jeżeli iloraz iest dokładnym t. i. bez zostawienia reszty, mniéysza liczba będzie naywiększym spólnym dzielnikiem.*

Jeżeli iloraz iest z resztą, trzeba podzielić mniéyszą liczbę która była dzielnikiem, przez tę resztę; która będzie naywiększym spólnym dzielnikiem, ieżeli się dzielenie wykona bez reszty; ieżeli iest reszta, trzeba dzielić pierwszą resztę przez drugą, i ciągnąć [illegible]éy działanie, póki się nie znaydzie iloraz bez reszty. Reszta dzieląca dokładnie poprzedzaiącą, będzie naywiększym spólnym dzielnikiem szukanym.

W takowém działaniu pisze się wygodnie każdą resztę po prawéy stronie dzielnika, aby natychmiast zaymowała mieysce właściwe w następuiącém dzieleniu. Tak np. dochodząc naywiększego spólnego dzielnika ułomku $\frac{651}{1364}$ pisze się:

$$1364 \;\left|\; \frac{651}{2} \;\right|\; \frac{62}{10} \;\left|\; \frac{31}{2} \right.$$

Naywiększym więc spólnym dzielnikiem danego ułomku iest 31. Podzieliwszy zatém przez niego oba wyrazy ułomku, wypadnie $\frac{21}{44}$ ułomek skrócony z ułomku danego (1).

137. Gdy ostatnia reszta iest iedność, iest to znakiem iż dwa wyrazy ułomku nie maią innego dzielnika spólnego iak iedność, czyli że są *pierwotnemi między sobą*, a zatém że ułomek nie może być skrócony (2). Przykł. ~~[illegible]~~ $\frac{25}{172}$

138. Naywiększego dzielnika spólnego więcéy niż dwóch liczb znaleźlibyśmy szukaiąc między naymniéyszą i nayblizéy większą naywiększéy miary spólnéy, między tą znalezioną i trzecią większą liczbą znowu podobnéy miary, i t. d.

Zrozumiawszy dobrze co się dotąd mówiło o wyrażeniu ułomków, póymie się iasno i łatwo dodawanie, odeymowanie, mnożenie i dzielenie tychże liczb.

Zagadnienia.

139. I. Który iest większy z dwóch ułomków 1) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}$? 2) $\frac{4}{5}$ i $\frac{13}{25}$? 3) $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$?

II. Sprowadzić do spólnego mianownika 1) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}$? 2) $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$?

III. Jakżeby sprowadzić do iednakowych liczników ułomki $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{4}$?

IV. Jakie iest wyrażenie nayprostsze ułomku 1) $\frac{3661}{11506}$? 2) $\frac{14349}{38264}$? 3) $\frac{29}{317}$?

---

(1) Ułomek ten = blisko $\frac{1}{2}$ iasna bowiem iż gdy licznik zawiera polowę liczby części mianownika, ułomek taki = pół całości, im zaś licznik przystępuie bliżéy liczbą części do mianownika, ułomek taki zbliża się tém więcéy do całości.

(2) Jeżeli * w szukaniu spólnego dzielnika dwòch liczb znaydziemy ~~na jaką resztę liczbę pierwotną, lub~~ postrzeżemy iż ~~wypadły dzielnik i podzielna~~ są pierwotnemi między sobą, będzie to iuż znakiem że dane liczby nie maią innego dzielnika spólnego iak 1.

F reszta która [illegible] dzielnikiem [illegible]

(*) że to nie iest prawda, widzieć można na 42 i 35

42 | 35 | 7
1 | 5

V. $\frac{6}{9}$ # ileż czyni talarów, złotych i groszy?

O dodawaniu Ułomków.

140. Nie można do siebie dodawać tylko ilości iednorodne (nº 36), mianownik zaś oznacza gatunek ułomku, ieżeli więc ułomki które trzeba do siebie dodać nie maią iednakowego gatunku części, odmienne maiąc mianowniki, trzeba ie nayprzód sprowadzić do iednakowego mianownika.

141. To założywszy, ażeby dodać razem ułomki: *weź summę wszystkich liczników, i day iéy mianownik spólny.*

Tak aby dodać ułomki $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{9}$ maiące iednakowy mianownik, biorę 14 summę liczników, 2, 5, 7; daię iéy mianownik spólny 9 i summa szukana iest $\frac{14}{9}$, która się zwraca, uskuteczniaiąc dzielenie, na $1\frac{5}{9}$.

Tym sposobem znaydziemy iż summa ułomków mianowanych $\frac{2}{5}$ zł. i $\frac{3}{5}$ zł. $=$ $\frac{5}{5}$ zł. $=$ 1 zł.

Aby mieć summę ułomków $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$ sprowadzam ie nayprzód do iednakowego mianownika i staią się $\frac{231}{385}$, $\frac{220}{385}$, $\frac{210}{385}$; dodaię potém ich liczniki 231, 220, 210, i pod summą 661 tych liczb piszę mianownik spólny 385. Summa więc trzech ułomków danych iest $\frac{661}{385}$, czyli uskuteczniaiąc dzielenie, $1\frac{276}{385}$.

Znaydziemy przez podobne działanie iż summa ułomków mianowanych $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, zł. $\frac{5}{6}$ zł. i $\frac{7}{9}$ zł. iest $\cancel{\frac{1236}{432}}$ zł. $\frac{103}{36}$
$= 2\frac{31}{36}$ zł.

142. Gdy znaczna iest liczba ułomków do dodania, natenczas można nie sprowadzać ich razem do iednakowego mianownika, lecz w miarę łatwości zwracania ich do tegoż po dwa, po trzy, i t. d. uskuteczniać ich dodawanie. Tak w poprzedzaiącém zagadnieniu: $\frac{1}{2}$ łatwo iest dodać do $\frac{5}{6}$, bo $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{5}{6}$

$=\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$ czyli 1 i $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ i $\frac{7}{9}=\frac{3}{9}$ i $\frac{7}{9}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$: $\frac{1}{9}$ i $\frac{3}{4}$ sprowadzam zwykłym sposobem do iednakowego mianownika i mam $\frac{4}{36}$ i $\frac{27}{36}=\frac{31}{36}$. Znalazłem więc że $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{9}=2\frac{31}{36}$ summa taż sama co wyżéy.

143. Jeżeli są całe połączone z ułomkami : *weź summę całych i doday ią do summy ułomków.*

Tak $7\frac{3}{4}+11\frac{2}{5}=7\frac{15}{20}+11\frac{8}{20}=18\frac{23}{20}=19\frac{3}{20}$.

Podobnie $\overset{\text{zł.}}{5}\frac{2}{3}+\overset{\text{zł.}}{7}\frac{4}{5}+\overset{\text{zł.}}{6}\frac{7}{8}=5\frac{80}{120}+7\frac{96}{120}+6\frac{105}{120}=18\frac{281}{120}=20\frac{41}{120}$ zł.

Zagadnienia.

144. I Jaka iest summa ułomków 1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$? 2) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{6}{17}, \frac{8}{15}$?

II. Kupiono cztery sztuki materyi 1^{sza} kosztuie $\overset{\text{zł.}}{324}\frac{5}{11}$; 2^{ga} $\overset{\text{zł.}}{298}\frac{1}{6}$; 3^{cia} $\overset{\text{zł.}}{198}\frac{4}{9}$, a 4^{ta} $\overset{\text{zł.}}{312}\frac{3}{4}$. Pytaią się o całą wartość tych czterech sztuk?

III. Ma powroźnik grubéy liny w 1^{ym} pęku $\overset{\text{sąż}}{82}\frac{2}{7}$; w 2^{im} $\overset{\text{sąż}}{35}\frac{3}{10}$; w 3^{im} $\overset{\text{sąż}}{14}\frac{5}{6}$; cieńszéy liny w 1^{ym} pęku $\overset{\text{sąż}}{15}\frac{3}{5}$; w 2^{im} $\overset{\text{sąż}}{28}\frac{1}{2}$; i ieszcze kawałek $\overset{\text{sąż}}{\frac{7}{12}}$. Wieleż ma sążni grubéy, wiele cienkiéy, a wiele razem całéy liny.

O odeymowaniu ułomków.

145. Nie można odeymować od siebie części różnorodnych (n° 37), więc ieżeli ułomki których szukamy różnicy maią odmienne mianowniki; trzeba ie przywieśdź do iednakowego mianownika.

146. To założywszy, ażeby odiąć ułomek od ułomku: *weź różnicę liczników i day iéy mianownik spólny.*

Tak ażeby odiąć ułomek $\frac{2}{7}$ od ułomku $\frac{5}{7}$, odeymuię 2 od 5, i daię reszcie 3 mianownik spólny 7, a różnica szukana iest $\frac{3}{7}$.

Podobnie $\frac{8}{9}$ ℔ $- \frac{3}{9}$ ℔ $= \frac{5}{9}$ ℔

Ażeby odiąć $\frac{3}{4}$ od $\frac{5}{6}$, zwracam te ułomki do spólnego mianownika, i staią się $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$; odeymuię 18 od 20, i pod resztą 2 piszę mianownik spólny 24. Więc $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

Znaydziemy przez podobne działanie iż ułomek mianowany $\frac{19}{21}$ ℔ przewyższa ułomek mianowany $\frac{23}{35}$ ℔ o $\frac{182}{735}$ ℔ czyli $\frac{26}{105}$ ℔.

147. Jeżeli są całe połączone z ułomkami: *weź różnicę ułomków i złącz ią z różnicą całych.*

Tak $17\frac{3}{4}-5\frac{6}{11}=17\frac{33}{44}-5\frac{24}{44}=12\frac{9}{44}$.
zł. zł. zł. zł. zł. zł.

Podobnież $7\frac{4}{6}-4\frac{1}{3}=7\frac{4}{6}-4\frac{2}{6}=3\frac{2}{6}=3\frac{1}{3}$

148. Gdy ułomek który mamy odiąć iest większy, lub gdy go trzeba odiąć od całkowitéy, natenczas aby odeymowanie uskutecznić bierzemy iedność od całkowitéy i zamieniamy ią na ułomek takiegoż gatunku części.

Tak ażeby odiąć $6\frac{3}{4}$ od $8\frac{1}{4}$, mówię $8=7+\frac{4}{4}$; więc $8\frac{1}{4}=7\frac{5}{4}$; że zaś $7\frac{5}{4}-6\frac{3}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$, a zatém różnica szukana iest $1\frac{1}{2}$.

zł. zł. zł. zł. zł. zł. zł.
Podobnież $7\frac{1}{8}-4\frac{2}{3}=7\frac{3}{24}-4\frac{16}{24}=6\frac{27}{24}-4\frac{16}{24}=2\frac{11}{24}$

Nakoniec, aby odiąć $\frac{2}{7}$ od 5, biorę z liczby całéy 5 iednę iedność którą obracam na siodme części, i mam $4\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=4\frac{5}{7}$.

zł. zł. zł.
Również $29-\frac{8}{17}=28\frac{9}{17}$

Zagadnienia.

149. I. Jaka iest różnica 1) między $\frac{23}{36}$ i $\frac{45}{72}$? 2)

między 21 i $19\frac{33}{49}$?

II. Jaka iest różnica między $\frac{12}{28}$ i $\frac{441}{1323}$?

III. Z pewnéy sztuki materyi trzymaiącéy $34\frac{4}{5}$ł. długości, oderznięto $27\frac{5}{6}$ł; ileż łokci pozostało reszty?

IV. Znaleźć rożnicę różnic między $\frac{9}{11}$ i $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{7}$ i $\frac{5}{12}$?

O Mnożeniu Ułomków

150. Aby rózmnożyć ułomek przez całkowitą: *rozmnóż licznik ułomku przez całkowitą i day iloczynowi mianownik ułomku.*

Na przykład, aby rozmnożyć $\frac{2}{11}$ przez 4, mnożę licznik 2 przez 4, a wypadłemu iloczynowi 8 daię mianownik ułomku 11; więc $\frac{2}{11}\times 4=\frac{8}{11}$.

W saméy rzeczy, rozmnożyć $\frac{2}{11}$ przez 4, iest to powtórzyć ułomek $\frac{2}{11}$ cztery razy, czyli zwiększyć go cztery razy.
Mnożąc zaś przez 4 licznik tego ułomku a nie odmieniaiąc mianownika, czynimy go cztery razy większym (nº 120) więc $\frac{2}{11}\times 4=\frac{8}{11}$.

Podobnież $\frac{3}{7}\times 2=\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{7}}$; $\frac{3}{4}\times 5=\overset{\text{zł.}}{\frac{15}{4}}=\overset{\text{zł.}}{3\frac{3}{4}}$.

151. Jeżeli trzeba liczbę całkowitą rozmnożyć przez ułomek; *rozmnóż całkowitą przez licznik ułomku, i day iloczynowi mianownik tegoż ułomku.*

Naprzykład, aby rozmnożyć 12 przez $\frac{2}{3}$ mnożę całkowitą 12 przez licznik 2, i daię iloczynowi 24 mianownik 3; więc $12\times\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8$; łatwo iest widzieć iż 8 iest rzeczywiście prawdziwym iloczynem. Bo iloczyn 24 z rozmnożenia 12 przez 2 iest trzy razy za wielki, gdyż nie trzeba było mnożyć 12 tylko przez trzecią część dwóch; więc ażeby zwrócić iloczyn 24 do prawdziwéy ważności, trzeba go trzy razy zmniéyszyć, a to nastąpi, gdy go podzielemy przez 3; więc $12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Nadto, iloczyn powinien zawierać mnożną tyle razy, ile mnożnik zawiera iedności; że zaś w tym przykładzie mnożnik zawiera tylko dwie trzecie części iedności, więc iloczyn z 12 przez $\frac{2}{3}$ powinien tylko zawierać dwie trzecie części mnożnéy 12; zatém $12 \times \frac{2}{3} = 8$.

Podobnie $25 \times \frac{5}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$.

Gdyby się pytano o cenę $\frac{4}{5}$ łok. iakiéy materyi któréy łokieć kosztuie 25zł.? iasna iest iż tu trzebaby powtórzyć 25zł. cztery piąte razy (nº 80), czyli pomnożyć 25zł. przez $\frac{4}{5}$. Że zaś 25zł. $\times \frac{4}{5} = \frac{100}{5}$zł. $= 20$zł. więc cena o którą pytaią, iest 20zł.

152. Aby rozmnożyć ułomek przez ułomek: *weź nayprzód iloczyn liczników, potém iloczyn mianowników, i day drugi iloczyn za mianownik pierwszemu.*

Na przykład, aby rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$, biorę iloczyn liczników który iest 6, biorę potém iloczyn mianowników który iest 35, i daię 35 za mianownik liczbie 6; więc $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

W saméy rzeczy, rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$, iest to powtórzyć $\frac{3}{7}$ dwie piąte razy, albo co iedno iest, piątą część dwóch razy. Mnożąc zaś $\frac{3}{7}$ przez 2 co daie $\frac{6}{7}$, powtórzyłem mnożnego dwa razy, zamiast powtórzenia piątą część dwóch razy; więc iloczyn $\frac{6}{7}$ iest pięć razy za wielki, zatém aby mieć prawdziwy iloczyn, trzeba $\frac{6}{7}$ pięć razy zmniéyszyć, a to nastąpi gdy pomnożę mianownik 7 przez 5 (nº 121). Więc $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

Gdyby się teraz pytano o cenę $\frac{12}{16}$ ℔ iakiego towaru, rachuiąc po $\frac{2}{3}$zł. funt, znaleźlibyśmy natychmiast iż cena szukana iest $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$zł.

153. Jeżeli mnożna i mnożnik maią liczby całkowite z ułomkami, trzeba w każdym czynniku zwrócić całkowite do mianownika ułomku przy nich będącego aby mieć tylko ułomek, a iuż nie będzie do mnożenia tylko ułomek przez ułomek. Naprzykład aby rozmnożyć $3\frac{1}{2}$ przez $4\frac{2}{3}$; mówię: $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$: więc $3\frac{1}{2}\times 4\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{14}{3}=\frac{98}{6}=16\frac{1}{3}$.

Podobnie, aby wiedzieć cenę $3\frac{1}{4}$lok iakiéy materyi, rachuiąc po $7\frac{1}{2}$zł. za łokieć; obracam $3\frac{1}{4}$lok na ułomek $\frac{13}{4}$łok, a $7\frac{1}{2}$zł. na ułomek $\frac{15}{2}$zł.; potém mnożę $\frac{15}{2}$zł. przez $\frac{13}{4}$, i mam na iloczyn $\frac{195}{8}$zł. $=24\frac{3}{8}$zł. Więc cena szukana iest $24\frac{3}{8}$zł.

154. Gdyby iednak w czynnikach, znaydowały się wielkie liczby całkowite np. gdyby $3175\frac{3}{4}$ wypadało rozmnożyć przez $2469\frac{1}{2}$, natenczas krócéy będzie rozmnożyć mnożną przez całkowite mnożnika, a potém przez iego ułomek. Oto iest wzór tego działania.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & a & b & \\
 & 3175 & \frac{3}{4} & \\
 & a' & b' & \\
 & 2469 & \frac{1}{2} & \\
\hline
a\times a'= & 7839075 & & \\
b\times a'= & .\ 1851 & \frac{3}{4} & \ldots\ \frac{6}{8} \\
a\times b'= & .\ 1587 & \frac{1}{2} & \ldots\ \frac{4}{8} \\
b\times b'= & .\ \ . & \frac{3}{8} & \ldots\ \frac{3}{8} \\
\hline
\text{Iloczyn cały} & 7842514 & \frac{5}{8} &
\end{array}
$$

Oznaczyliśmy tu czynniki i z pomnożenia ich wypadki głoskami, aby tém łatwiéy widzieć zkąd wypadły iloczyny cząstkowe których dodanie w iloczyn cały iest tu zawsze łatwe, bo, postępuiąc naszą drogą, mianownik ułomku w czwartym iloczynie cząstkowym będzie zawsze wielokrotny względem każdego mianownika w ułomkach dwóch poprzedzaiących iloczynów cząstkowych, a zatém dodanie ułomków odbywa się tu bardzo łatwo (nº 132).

155. W mnożeniu ułomków są przypadki w których znayduie się iloczyn sposobem nader łatwym. Oto z nich niektóre: 1e Jeżeli liczba przez którą trzeba mnożyć ułomek równa iest iego mianownikowi, iloczynem będzie licznik ułomku. Zadadzą ci np. rozmnożyć $\frac{6}{7}$ przez 7? uwolniy się od działania i napisz licznik 6 na iloczyn; bo iest widoczna iż $\frac{6 \times 7}{7} = 6 \times 1 = 6$.

2e Gdy masz ułomek mnożyć przez liczbę która dzieli zupełnie iego mianownik, zamiast pomnożenia licznika, podziel mianownik przez tę liczbę, wyydzie to na iedno (nº 124), a przyydziesz tym sposobem natychmiast do prostszego wyrażenia iloczynu. I tak aby rozmnożyć $\frac{5}{24}$ przez 3, zamiast mnożyć 5 przez 3, podzielę 24 przez 3, a wypadek $\frac{5}{8}$ iest iloczynem $\frac{5}{24} \times 3$ zwróconym do nayprostszego wyrażenia.

3e Jeżeli masz wiele ułomków mnożyć iedne przez drugie oznacz tylko mnożenie ich liczników i mnożenie ich mianowników: gubiąc potém czynniki spólne obu wyrazom ułomku iloczynu, będziesz go miał natychmiast zwrócony do nayprostszego wyrażenia. Tak $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{5}$ (1).

Oczywista iest iż gubiąc czynniki spólne obu wyrazom ułomka nie odmienia się bynaymniéy ważność iloczynu iaki ten ułomek wyraża, ponieważ

(1) Z tego i z innych przykładów łatwo się przekonać iak korzystną iest często, oznaczać tylko uskutecznienie działania, z tąd bowiem, nie uskuteczniaiąc go w zupełności, znaleźć można wypadek nawet w nayprostszém wyrażeniu.

się tylko dzieli oba wyrazy ułomku przez tęż samę ilość (n° 125).

Zagadnienia.

156. I. Gdy korzec iakiego zboża kosztuie $1\frac{1}{2}$#. ileż będą kosztować 27^{kor} czyli łaszt tego zboża?

II. Gdy funt pewnego towaru kosztuie $73^{zł.}$ ileż będzie kosztować $\frac{5}{7}$℔ tegoż towaru?

III. Pytaią się ile iest $\frac{6}{7}$ z 77?

IV. Jaki iest iloczyn 1) z $\frac{150}{347} \times \frac{79}{85}$? 2) z $\frac{69}{70} \times \frac{35}{9}$?

V. Znaleźć liczbę która podzielona przez 17 dałaby na iloraz $17\frac{2}{3}$?

VI. Ileż kosztuią $45\frac{3}{4}^{łok}$ np. sukna po $17\frac{2}{3}^{zł.}$?

VII. Jeżeli garniec iakiego napoiu kosztuie $2\frac{3}{5}^{zł.}$ ileżby go 18^{gar} czyli antał kosztowało?

VIII. Jakiż iloczyn ułomków $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{2}{\text{[illegible]}}$ następnie przez siebie rozmnożonych?

O dzieleniu ułomków.

157. Aby podzielić ułomek przez całkowitą: *rozmnóż mianownik ułomku przez całkowitą, i day iloczyn za mianownik licznikowi ułomku,*

Na przykład, aby podzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, mnożę mianownik 2 przez 3, i daię iloczyn 6 za mianownik licznikowi 1 ułomku danego. Więc $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$. Jasna iest iż ułomek $\frac{1}{6}$ iest prawdziwym ilorazem z podzielenia $\frac{1}{2}$ przez całkowitą 3. Bo dzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, iest to $\frac{1}{2}$ trzy raz zmnieyszyć, mnożąc zaś przez 3 mianownik ułomku $\frac{1}{2}$ zmnieyszamy go trzy razy (n° 121); więc $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Znaydziemy przez działanie zupełnie podobne, iż 7 osób maiąc porówno między siebie podzielić $\frac{5}{9}$, część każdéy będzie $\frac{5}{63}$

158. Gdy iest do podzielenia liczba całkowita przez ułomek: *trzeba podzielić całkowitą przez*

licznik ułomku, a iloraz rozmnożyć przez mianownik.

Na przykład, aby podzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, dzielę 6 przez 2, co daie $\frac{6}{2}$ na iloraz; ten mnożę przez 3, i mam $\frac{18}{2}$ (nº 150). Więc $6 : \frac{2}{3} = \frac{18}{2} = 9$.

W samey rzeczy, dzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, iest to szukać ile razy 6 zawiera $\frac{2}{3}$. Jest zaś widoczna iż 6 zawiera $\frac{2}{3}$ trzy razy więcey niż 2, ponieważ 2 iest trzy razy większe niż $\frac{2}{3}$; więc iloraz $\frac{6}{2}$ znaleziony z podzielenia 6 przez 2 iest trzy razy mnieyszy; więc aby go zwrócić do prawdziwey iego ważności, trzeba go trzy razy zwiększyć, a to nastąpi mnożąc go przez 3. Więc $6 : \frac{2}{3} = \frac{6}{2} \times 3 = \frac{18}{2} = 9$.

Nadto 6 zawiera $\frac{1}{3}$ ośmnaście razy; więc nie zawiera $\frac{2}{3}$ tylko 9 razy; więc znowu $6 : \frac{2}{3} = 9$.

Znaydziesz podobném zupełnie postępowaniem, iż dzieląc sztukę materyi 27$^{lok.}$ długą, na kawały długie po $\frac{3}{4}$$^{lok.}$ każdy, będzie 36 kawałów. Jakoż $27 : \frac{3}{4} = \frac{27}{3} \times 4 = \frac{108}{3} = 36$.

159. Aby podzielić ułomek przez ułomek: *rozmnóż mianownik ułomku podzielnego przez licznik ułomku dzielnika; rozmnóż potém licznik ułomku podzielnego przez mianownik ułomku dzielnika, i day pierwszy iloczyn za mianownik drugiemu.*

Na przykład, aby podzielić $\frac{2}{5}$ przez $\frac{3}{4}$ mnożę 5 przez 3, co mi daie iloczyn 15; potém mnożę 2 przez 4, i mam iloczyn 8. Daię pierwszy iloczyn 15 za mianownik drugiemu iloczynowi 8, i mam $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$.

W rzeczy samey gdybym miał $\frac{2}{5}$ do podzielenia przez 3, iloraz byłby $\frac{2}{15}$ (nº 157). Lecz ten iloraz iest cztery razy mnieyszy, ponieważ powinienem tylko dzielić przez czwartą część 3ch; więc aby zwrócić iloraz do iego prawdziwey ważności, trzeba go cztery razy zwiększyć; więc trzeba pomnożyć $\frac{2}{15}$ przez 4 co daie $\frac{8}{15}$; więc $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$.

Działaiąc podobnie znaydziemy iż gdy $\frac{3}{10}$ łok. np. wstążki kosztuie $\frac{6}{25}$ #, łokieć kosztuie $\frac{4}{5}$ #; bo $\frac{6}{25}$ #: $\frac{3}{10} = \frac{60}{75}$ #, $= \frac{4}{5}$ #.

160. Zastanawiaiąc się nieco nad postępowaniem któregośmy się trzymali aby podzielić całkowitą przez ułomek, i ułomek przez ułomek, widać iż otrzymalibyśmy też same wypadki mnożąc podzielną przez ułomek dzielący odwrócony. Bo $6 \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (nº 158), i $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$ (nº 159).

Stąd, aby podzielić liczbę iakąkolwiek całkowitą lub ułomkową przez ułomek, *dosyć ią rozmnożyć przez ten ułomek odwrócony.*

Uważmy tu że 1 podzielony przez ułomek, iest toż samo co tenże ułomek odwrócony np. $\frac{1}{\frac{2}{5}}$ czyli $1 : \frac{2}{5} = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

161. Jeżeli podzielna i dzielnik máią całe z ułomkami zwraca się każda całkowita do mianownika ułomku przy niéy będącego, a iuż nie będzie do podzielenia tylko ułomek przez ułomek.

Tak $4\frac{3}{5} : 6\frac{1}{3} = \frac{23}{5} : \frac{19}{3} = \frac{23}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{69}{95}$.

Toż, ieżeli wykopanie $3\frac{1}{5}$ sążni rowu kosztuie $19\frac{1}{4}$ zł. znaydziemy iż wykopanie sążnia rowu kosztuie $6\frac{1}{64}$ zł. Bo $19\frac{1}{4}$ zł. : $3\frac{1}{5} = \frac{77}{4}$ zł. : $\frac{16}{5} = \frac{77}{4}$ zł. $\times \frac{5}{16} = \frac{385}{64}$ zł. $= 6\frac{1}{64}$ zł.

162. Można iednak i nie zwracać podzielnéy na ułomek np. ieżeli sążeń pewnéy roboty kosztuie $5\frac{2}{3}$ zł. a pytaią się ile będzie sążni za $52\frac{3}{4}$ zł.? Obracam dzielnik $5\frac{2}{3}$ na ułomek który będzie $\frac{17}{3}$, mnożę teraz podzielną przez mianownik 3, co mi daie $156\frac{9}{4}$, zł. a podzieliwszy ten wypadek przez 17, mam $9\frac{21}{68}$ sąż. na iloraz.

163. W dzieleniu ułomków zdarzaią się często przypadki w których ma mieysce skrócenie działania. I tak 1e Jeżeli iest ułomek do podzielenia przez liczbę całkowitą która dzieli dokładnie licznik, natenczas podziel tylko licznik przez tę liczbę (nº 123), tym

10

sposobem znaydziesz zaraz proste wyrażenie ilorazu. Maiąc np. $\frac{15}{16}$ do podzielenia przez 5, podzielę tylko licznik 15 przez 5 i mieć będę $\frac{3}{16}$ iloraz w nayprostszém wyrażeniu.

2$^{\text{e}}$. Gdy licznik ułomku dzielnego iest wielokrotny względem licznika ułomku dzielącego, a mianownik pierwszego iest także wielokrotnym względem mianownika drugiego; w tym przypadku aby znaleźć natychmiast wyrażenie nayprostsze ilorazu, podziel licznik dzielnego przez licznik dzielnika a mianownik dzielnego przez mianownik dzielnika. Chcesz np. podzielić $\frac{27}{33}$ przez $\frac{9}{11}$? podziel 27 przez 9, i 33 przez 11, a iloraz z $\frac{27}{33} : \frac{9}{11}$ zwrócony do nayprostszego wyrażenia będzie $\frac{3}{3} = 1$. Bo w saméy rzeczy, $\frac{27}{33} : \frac{9}{11} = \frac{27}{33} \times \frac{11}{9} = \frac{297}{297} = 1$.

3$^{\text{ie}}$. Kiedy możesz podzielić przez iednakową liczbę liczniki albo mianowniki ułomków których szukasz ilorazu, nie trzeba tego zaniedbywać.

Jeżeli masz np. $\frac{8}{9}$ podzielić przez $\frac{4}{7}$; podziel 8 i 4 przez 4, i będziesz miał $\frac{2}{9} : \frac{1}{7} = \frac{14}{9}$. Bo $\frac{8}{9} : \frac{4}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{4} = \frac{4 \times 2}{9} \times \frac{7}{4} = \frac{4 \times 2 \times 7}{9 \times 4} = \frac{2 \times 7}{9} = \frac{14}{9}$.

Jeżeli iest $\frac{3}{49} : \frac{5}{14}$, podziel 49 i 14 przez 7, i będzie $\frac{3}{7} : \frac{5}{2} = \frac{6}{35}$. Bo $\frac{3}{49} : \frac{5}{14} = \frac{3}{49} \times \frac{14}{5} = \frac{3 \times 7 \times 2}{7 \times 7 \times 5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

Naostatek gdyby mi zadano podzielić $\frac{6}{35}$ przez $\frac{9}{28}$; widzę iż 6 i 9 są podzielne przez 3, a 35 i 28 przez 7. Dzielę więc 6 i 9 przez 3, a 35 i 28 przez 7 co mi daie $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$. Bo $\frac{6}{35} : \frac{9}{28} = \frac{6}{35} \times \frac{28}{19} = \frac{3 \times 2 \times 7 \times 4}{7 \times 5 \times 3 \times 3} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.

164. Uważmy tu iż gdy ułomek dzielący ma tenże mianownik co i ułomek podzielny, aby mieć iloraz trzeba tylko zgubić mianownik spólny, i oznaczyć dzielenie licznika ułomku podzielnego przez licznik ułomku dzielącego. Tak $\frac{10}{15} : \frac{11}{15} = \frac{10}{11}$.

Bo iest oczywista iż $\frac{10}{15}$ zawieraią $\frac{11}{15}$ zupełnie tak, iak $\frac{10}{15}$ zwiększone piętnaście razy czyli 10 całych zawieraią $\frac{11}{15}$ zwiększone piętnaście razy to iest 11 całych. Można więc dzielenie liczb ułomkowych zwrócić do dzielenia całkowitych lub dziesiętnych (n° 113) sprowadzaiąc pierwsze do iednakowego mianownika.

165. Dla sprawdzenia działań odbytych z ułomkami, trzeba użyć działań przeciwnych. J tak dodawanie i odeymowanie służą sobie wzaiemnie do sprawdzenia, toż samo iest z mnożeniem i dzieleniem.

166. Może się zdarzyć potrzeba poznania ważności pewnéy części ułomku, np. ważności $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$. To wyrażenie $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$ oznacza iż trzeba wziąć dwa razy trzecią część z $\frac{4}{5}$. Dzielę więc $\frac{4}{5}$ przez 3, i iest widoczna że iloraz $\frac{4}{15}$ iest trzecią częścią z $\frac{4}{5}$. Mnożę $\frac{4}{15}$ przez 2, a iloczyn $\frac{8}{15}$ iest ważnością $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$.

Toż, aby mieć $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$u z $\frac{2}{3}$; mówię: $\frac{5}{6}$ z $\frac{2}{3} = \frac{10}{18}$, zadanie więc zwraca się do wzięcia $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18}$; iest zaś $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18} = \frac{30}{72}$; więc $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$u z $\frac{1}{3} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

Zastanawiaiąc się nieco nad postępowaniem któregośmy użyli, widzieć łatwo iż dla znalezienia ważności *ułomka ułomków* (tak się nazywa gatunek liczb o których mowa) trzeba tylko wyznaczyć iloczyn wszystkich tych ułomków rozmnożonych iednych przez drugie, a to się czyni sposobem nader łatwym oznaczaiąc iloczyn wszystkich liczników, i dzieląc go przez iloczyn oznaczony wszystkich mianowników.

Tak $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ch $\frac{3}{4}$ z $\frac{4}{5}$zł. $= \frac{1\times2\times3\times4}{2\times3\times4\times5} = \frac{1}{5}$zł. znosząc czynniki spólne obu wyrazom ułomka. Wychodzi to więc na mnożenie i iest niém właściwie, choć się zdaie dzieleniem. Bo mnożenie przez ułomek ma za cel wzięcie z mnożnego części takiéy, iaka iest oznaczona przez ułomek; a dzielenie przez ułomek wskazuie nam ile razy tenże zawiera się w podzielnéy, gdybyśmy tu więc użyli dzielenia, wypadłoby wcale co innego. Z mnożenia przez ułomek właściwy wypada i wypadać musi naturalnie mniey (1); gdy tym czasem z dzielenia przez tenże ułomek koniecznie musi wypadać więcéy. Tak $\frac{2}{3}$ ze 100 czynią $66\frac{2}{3}$; kiedy $100 : \frac{2}{3} = 150$; $\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$, a $\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{3}{1} = 3$.

167. Wypada tu dodać uwagę podobną iak pod n° 61 i 62, iż wyraz *mnożyć* nie zawsze odpowiada wyrazowi i wyobrażeniu *powiększać*, podobnie iak wyraz *zawierać* nie zawsze bywa właściwie użytym w dzieleniu. Jasno iest bowiem iż podzielna nie zawiera dzielnika gdy iest mniéysza od niego. Przecież tak się mówić zwykło w dzieleniu, lecz to tylko przez nawyknienie do pospolitego sposobu mówienia który nie zawsze, iak widziemy, z dokładnością iest zgodny.

Zagadnienia.

168. I. Czterech studentów z równą prędkością zapisali w iednym czasie $\frac{2}{5}$ ryzy papieru, ileż każdy zapisał?

II. Za $76^{zł.}$ kupiono $4\frac{3}{4}^{łok.}$ np. Sukna, po czemuż łokieć?

III. Rzemieślnik pewny zrobił $\frac{3}{4}^{łok.}$ iakiéy roboty w $\frac{4}{5}^{godz.}$, ileż iéy zrobi w godzinę iednakowo zawsze robiąc?

IV. Przez iakąż liczbę trzeba podzielić $3\frac{2}{3}$ ażeby mieć na iloraz $8\frac{1}{4}$?

V. $9\frac{1}{4}^{sąż.}$ pewnego muru kosztuie $327\frac{9}{20}^{zł.}$, ileż tu kosztuie sążeń muru?

---

(1) Gdy mnożnik iest 1 natenczas wypada na iloczyn mnożna, podana (no. 38), lecz że ułomek właściwy mniéyszy iest niż 1, więc... i t. d. podobnież o dzieleniu mówić można. porówn. no. 151. i 158.

VI. Jakiż iest iloraz z podzielenia 1) $17\frac{3}{14}$ przez $8\frac{9}{10}$? 2) $\frac{45}{49}$ przez $\frac{15}{9}$?

VII. Czyli to samo iest $\frac{3}{4}$ z $\frac{9}{16}$, co i $\frac{9}{16}$ z $\frac{3}{4}$?

VIII. Znaleźć iloczyn z ułomków $\frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 14 \times 16}{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 9 \times 10 \times 15 \times 11}$?

IX. Pytaią się o liczbę która rozmnożona przez $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ z 7 daie iloczyn $50\frac{1}{2}$?

Zagadnienia w które wchodzą działania ułomków połączone.

169. Nie będzie rzeczą bezpożyteczną przytoczyć tu niektóre zagadnienia, które iuż za pomocą poprzedzaiącéy teoryi ułomków rozwiązać można, a które przecież mogą się zdawać dosyć zawikłanemi.

I. Znaleźć liczbę która dodana do swéy szóstéy części uczyni 27?

II. Znaleźć liczbę która zmniéyszona o swą czwartą część $=24$?

III. Jakaż iest liczba któréy połowa, trzecia część i czwarta czyni 26?

IV. Znaleźć liczbę z któréy odiąwszy iéy $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$ reszta iest 64?

V. Pewnéy sztuki drzewa iest $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ część całéy długości ukryta np. w wodzie, lecz z wierzchu ukazuie się $7\frac{1}{2}$ stóp, ileż cała sztuka ma długości?

VI. Pewien mówi, iż $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ części iego pieniędzy, uczyni $84^{zl.}$; ileż ma złotych?

VII. Znaleźć dwie liczby z których większa podzielona przez mniéyszą daie na iloraz $2\frac{1}{2}$; mniéysza zaś rozmnożona przez $1\frac{1}{2}$ daie iloczyn 12?

VIII. Są trzy fontanny z których 1^{a} napełnia pewną wannę w 6 godzinach, 2^{ga} napełnia też wannę w 2^{ch} ~~godzinach~~, a 3^{cia} w 3^{ch}; w iakimże czasie
dniach

napełnioną zostanie wanna gdy woda będzie wychodzić temi trzema razem fontannami?

IX. Sadzawka maiąca 3 kanały wypłynęłaby 1ym przez $3\frac{1}{2}$ dni, 2gim przez $2\frac{4}{5}$ dni, 3cim przez $4\frac{2}{3}$ dni. Otworzywszy razem te 3 kanały, za ileż dni wypłynie?

X. Okręt uszkodzony burzą przepuszcza wodę która w 18 godz: może napełnić spód iego. Zaczynaią wylewać wodę dwoma pompami, z których 1a wypróżniłaby część wspomnioną w 36 godz: a 2ga w 24ch. Gdy pompować zaczęto, było iuż wody $\frac{3}{8}$ obiętości spodniéy części okrętu. W iakimże czasie taż część będzie wypróżniona?

Umieiąc działania z ułomkami łatwo iest rozwiązać zawikłańsze zagadnienia niż były podane pod nº 116; i tak, weźmy zagadnienie położone tam pod liczbą IX i powiedzmy:

XI. Gdyby miano przewieźć 5248cet. o mil 14 wozami czterokonnemi biorąc na każdy wóz po 16,cet, i do każdego wozu potrzebowano 2ch. ludzi, t. i. iednego do samego wozu, drugiego do koni; chcący zaś przewieźć płaci od konia na milę po $\frac{3}{4}$zł., a od wozu na całą drogę po zł. $2\frac{1}{2}$, ludziom także na całą drogę po zł. $1\frac{1}{2}$ tym co przy wozach, a po $1\frac{4}{5}$ tym co przy koniach; ma zaś swoich wozów zaprzężnych 80, prócz tego koni 100, i ludzi 200 z których połowę do wozów, a drugą połowę do koni przeznacza; ileż go ieszcze kosztować będzie zamierzone przewiezienie na które wyznaczone iest 1560tal?

XII. Weźmy ieszcze przykład z pod nº 116 liczby X. Jest do umundurowania 5 kompaniy po 180 ludzi. Każdy 20ty człowiek iest sierżant. Na każdego trzeba $3\frac{1}{2}$łok. sukna, lecz dla prostych żołnierzy łokieć sukna po zł: $8\frac{2}{3}$, a dla sierżantów po zł: $10\frac{3}{4}$; toż po $4\frac{3}{4}$łok. płótna, dla prostych żołnierzy na $1\frac{1}{10}$zł. łokieć, a dla Sierżantów na $1\frac{3}{5}$zł. łokieć. Do każdego munduru sierżanta trzeba $1\frac{1}{3}$ łok. galonku po zł. $3\frac{1}{6}$. Do każdych trzech mundurów 4 tuziny guzików po zł. $1\frac{1}{4}$ tuzin. Jest zaś w magazynie gotowych iuż mundurów 250 dla prostych żołnierzy, a 25 dla Sierżantów; tudzież 468 łok. sukna na mundury dla piérwszych, a $14\frac{1}{2}$ łok. dla drugich; 986 łok. płótna dla pierwszych, a 60 łok. dla drugich. Krawcowi od roboty munduru, dła prostego żołnierza płaci się $4\frac{2}{5}$, zł. a dla Sierżanta $4\frac{5}{6}$ zł. Na takowe umundurowanie iest w Kassie 24000 zł. Jleż z tego fnnduszu zostanie, lub ile zabraknie?

O ułomkach ciągłych.

170. Nazywa się *ułomkiem ciągłym* wyrażenie złożone z liczby bądź skończonéy bądź nieskonczonéy ułomków szczególnych, z których każdy ma za mianownik zbiór z całéy i z ułomku. Takiém iest wyrażenie

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

171. Ułomki ciągłe służą do wystawienia sposobem przybliżaiącym i nie wielą liczbami, wartości ułomków nie daiących się w wyrażeniu zmniéyszyć, a wielkiemi liczbami wyrażonych. (1)

(1) Ułomki szczególne które wchodzą w wyrażenie ciągłe o którém mówiemy, możnaby nazwać ułomkami całkuiącemi (*fractions integrantes*), za ich bowiem pomocą możemy napowrót otrzymać ułomek podany.

172. Założmy sobie wyrazić tym sposobem ważność ułomku $\frac{100000}{314159}$. Dzieląc oba wyrazy tego ułomku przez licznik 100000, znaydziemy $\frac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$.

Podzielmy oba wyrazy części ułomkowéy w mianowniku będącéy przez licznik 14159, a ta część zamieni się na $\frac{1}{7+\frac{887}{14159}}$

Podzielmy znowu oba wyrazy ułomku będącego przy 7 przez licznik 887, a część ta ułomkowa staie się $\frac{1}{15+\frac{854}{887}}$

Podzielmy ieszcze oba wyrazy ułomku będącego przy 15 przez licznik 854, część ułomkowa za mienia się na $\frac{1}{1+\frac{33}{854}}$

Przez wszystkie te działania, ułomek $\frac{100000}{314159}$ znayduie się wyrażony przez ułomek ciągły $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+}}}}$

i t. d.

Oczywista iest iż biorąc pierwszy wyraz 3, pomiiaiąc ułomek przy nim będący, będzie się mieć $\frac{1}{3}$ za pierwszą ważność zbliżoną ze $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za wielką.

Jeżeli weźmiemy dwa pierwsze wyrazy ułomku ciągłego pomiiaiąc ułomek będący przy 7, będzie $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{22}{7}}=\frac{7}{22}$, ważność więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za mała iak łatwo widzieć.

Weźmy trzy pierwsze wyrazy ułomku ciągłego, pomiiaiąc ułomek będący przy 15 będzie $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{106}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{15}{106}}=\frac{1}{\frac{333}{106}}=\frac{106}{333}$, ważność ieszcze więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$ lecz nieco za wielka.

Nakoniec, weźmy cztery pierwsze wyrazy ułomku ciągłego, pomiiaiąc ułomek będący przy 1, będzie

$$\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{113}{16}}}=\frac{1}{3+\frac{16}{113}}=\frac{1}{\frac{355}{113}}=\frac{113}{365},$$

ważność ieszcze więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$ lecz nieco za mała (1)

Nie przestaiąc działać podobnie, znaydziemy nowe ważności na przemiany większe i mniéysze niż $\frac{100000}{314159}$, lecz zawsze coraz bliższe, tak dalece, iż za wzięciem na ostatku wszystkich wyrazów ułomka ciągłego (iak wtym przykładzie ośmiu wyrazów, bo w nim ósmy byłby iuż ostatni), prawdziwą ważność iego otrzymuiemy.

173. Widziemy tu, iż aby rozwinąć podany ułomek zwyczayny na szereg ułomków ciągłych, trzeba: *podzielić oba wyrazy ułomku podanego przez iego licznik; skoro dzielenie to odbywa się bez reszty, t. i. skoro licznik ułomku iest spólnym*

---

(1) Przyczyna nieròwności tych ułomków na przemiany większych i mniéyszych od ważności ułomku podanego łatwa iest do poięcia. Wynika ona z natury ułomków zwyczaynych z ułomkami ciągłemi skombinowanych. Tak w ułomku $\frac{1}{3}$ opuszczaiąc ułomek $\frac{1}{7}$ przy mianowniku 3 będący, robiemy ten mianownik mniéyszym niż być powinien a zatém wartość ułomku iest większa niż być powinna (n^o 126) W wyrażeniu $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}$ pomiiaiąc ułomek $\frac{1}{15}$ zwiększyliśmy wartość ułomku $\frac{1}{7}$ a tém samém powiększyliśmy mianownik 3, przez co wartość ułomku $\frac{1}{3}$ iest mniéysza niż być powinna, i t. d. o innych. Widocznie o tém przekonać się można zamieniaiąc znalezione ważności na wyrażenia dziesiętne.

dzielnikiem obu iego wyrazów, ułomek będzie zwrócony do nayprostszego wyrażenia i działanie iuż skończone. Jeżeli iest reszta, uważay ią iako licznik nowego ułomku towarzyszącego pierwszemu ilorazowi znalezionemu, który to licznik będzie miał za mianownik licznik ułomku podanego. Działay podobnie nad tym nowym ułomkiem, i nad ułomkami powstaiącemi w ciągu działania aż doydziesz do ostatniego ułomku maiącego za licznik iedność a za mianownik liczbę pierwotną; i natenczas działanie będzie skończone.

174. Można tu postrzedz *analogiią* czyli podobność zachodzącą między tém działaniem a sposobem znalezienia naywiększego dzielnika spólnego dwóch liczb danych. Nayprostsza tu nawet droga iest: dzielić mianownik przez licznik iak się powiedziało pod (n° 136); ilorazy ztąd wypadłe podług porządku będą mianownikami ciągu ułomków poiedynczych iedność za liczniki maiących, a których zbiór formuie ułomek ciągły równy ułomkowi podanemu.

Tym sposobem postępuiąc ułomek $\frac{535}{689}$ daie miéysce dzieleniu następuiącemu $\begin{array}{r|r|r|r|r|r} 689 & 535 & 154 & 73 & 8 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 9 & 8 \end{array}$

Ułomek więc ten daie się rozwinąć na ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{8}}}}}$$

a biorąc wyraz iego pierwszy, toż następnie dwa, trzy, cztery i pięć będziemy mieli ważności 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{66}{85}$, i $\frac{535}{689}$.

Zagadnienia.

175. I. Znaleźć za pomocą ułomków ciągłych wyrażenia prostsze ułomku 1) $\frac{531}{1278}$. ? 2) $\frac{1103}{887}$?

II. Wiedząc iż Europa zawiera 171397 mil kwadratowych, a Azyia 640086 mil kwadr: oznaczyć iaką iest częścią obszerność Europy względem obszerności Azyi (1)?

III. Wiedząc iż w prowincyi liczącéy 654886 dusz, powiększyła się ludność przez dopiero skończone 10 lat o 51372; iakąż iest częścią to powiększenie względem dawnéy ludności?

IV. Znaleźć ułomek z którego powstał ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

O zamianie ułomków zwyczaynych na dziesiętne i wzaiem. O ułomkach peryiodycznych.

176. Porównywaiąc rachunek ułomków zwyczaynych z rachunkiem dziesiętnych, widać że ostatni

(1) Zagadnienie to powinnoby właściwie tak być wysłowione: oznaczyć zbliżony *stosunek* obszerności Europy i t. d. lecz znaczenie wyrazu *stosunek* niżéy dopiero poznamy dokładnie.

dałeko iest prostszym i krótszym, a zatém że iest korzystniéy używać go zamiast rachunku rzeczonych ułomków. Idzie tu tylko o zamianę na dziesiętne wyrażeń ułomkowych nad którémi działać wypada.

Zamiana ta iest nader łatwa pamiętaiąc na to co się pod (n^o 113) powiedziało. I tak: daymy iż mam zamienić ułomek $\frac{3}{4}$ na dziesiętne. Przypisuię 0 do licznika, co mi daie 30, dzielę przez 4 licznik 30 większy dziesięć razy niż 3. Iloraz iest 7 i zostaie 2. Jasna iest iż iloraz 7 iest dziesięć razy za wielki; więc powinienem go dziesięć razy zmniéyszyć, co zrobię pisząc go po przecinku w ten sposob 0,7.

Teraz przypisuię 0 do 2, co zwiększa ieszcze dziesięć razy tę resztę pochodzącą z liczby iuż dziesięć razy zwiększonéy. Dzielę 20 przez 4, iloraz iest 5 bez reszty. Piszę go po prawéy stronie 7 aby go zwrócić do prawdziwéy iego wartości, i wnoszę iż ułomek $\frac{3}{4}$ iest zupełnie równy 0,75.

Znayduie się podobném postępowaniem iż $\frac{4}{5}$ łok zamieniaią się na 0,8 łok. bez reszty, i że $\frac{1}{2}$ Zł $=$ 0,5 zł.

177. W ogólności, można zamienić dokładnie na dziesiętne ułomek iakikolwiek, gdy mianownik tego ułomku zwrócony do naymniéyszych wyrazów, dzieli dokładnie licznik rozmnożony przez 10 lub przez 100, lub przez 1000, i t. d. co iest widoczna. Że zaś 10 nie ma innych dzielników dokładnych iak 2 i 5, zatém i wielokrotności z 10 nie mogą być podzielone dokładnie, tylko przez 2 i przez 5, albo przez iloczyny których obie liczby 5 i 2 są wyłącznie czynnikami, więc ułomek nie da się zwrócić dokładnie na dziesiętne, gdy mianownik będzie miał między swemi czynnikami insze liczby niż 2 i 5, albo niż iloczyny których 2 i 5, wzięte razem lub oddzielnie, będą wyłącznie czynnikami.

Tak ułomek $\frac{7}{15}$ nie może nigdy być zamieniony dokładnie na dziesiętne, z przyczyny 3 które iest iednym z czynników 15.

Lecz chociaż mieć nie można dokładnéy ważności tego gatunku ułomków, można się do niéy zbliżać coraz bardziéy posuwaiąc dzielenie coraz daléy. Naprzykład, znaydziemy iż zatrzymuiąc się przy trzech dziesiętnych, $\frac{2}{3}=0,666$ mniéy iak o iednę tysiączną, i że posuwaiąc dzielenie aż do piątéy dziesiętney $\frac{2}{3}=0,66666$ mniéy niż o iednę setną tysiączną zbliżone.

Znaydzie się podobném postępowaniem iż $\frac{5}{11}=$ $0,4545$ mniéy niż o iednę dziesięćtysiączną zbliżone.

Posuwaiąc daléy zamianę ułomku $\frac{2}{3}$ na dziesiętne, miałoby się zawsze tęż samę cyfrę 6 powtórzoną bez końca; a posuwaiąc zamianę ułomku $\frac{5}{11}$, liczba 45 wracałaby się ustawicznie. Widać więc iż niemożność zamienienia ściśle iakiego ułomku na dziesiętne, oznaymia się przez powrot ustawiczny téy saméy cyfry, lub przez powrót peryiodyczny tychże samych cyfer. Ułomek dziesiętny w tym razie nazywaią *nieskończony*.

178. Lubo w podobnym razie nie można poznać liczby cyfer peryiodu, iednak granice iéy można naznaczyć, gdyż liczba ta nie może przewyższać mianownika zmniéyszonégo iednością. Reszty bowiem z dzielenia liczby iednéy przez drugą, niemogą być tylko liczbami mniéyszemi niż dzielnik. Zamieniaiąc np. $\frac{5}{7}$ na dziesiętne:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline 10 & 0,714285 \\ \quad 30 & \\ \quad\ \ 20 & \\ \quad\quad 60 & \\ \quad\quad\ \ 40 & \\ \quad\quad\quad 50 & \end{array}$$

postrzegam że ostatnia reszta daie tęż samę podzielną od któréy zacząłem, zatém dzielenia następne dadzą też same cyfry w ilorazie. Powrót zaś tych cyfer nie może być późniéy iak za siodmém dzieleniem. Bo reszty liczb dzielnych przez 7 nie mogą być iak następuiące, 1, 2, 3, 4, 5, 6, a nigdy 7 która iest dzielnikiem. Gdyby zaś która z tych okazała się pierwéy, dałaby widzieć w ilorazie też same cyfry ieszcze pierwéy niż na miéyscu oznaczoném przez mianownik.

179. W ułomkach więc dziesiętnych nieskończonych znayduie się koniecznie iedna lub więcéy cyfer które się stale powtarzaią i które formuią tak nazwany *peryiod* ułomku. Same zaś wtedy ułomki zowią się z tego względu *peryiodyczne.*

Rozumie się samo przez się, że ułomek zwyczayny podany do zamienienia na dziesiętne powinien bydź zwrócony do swego nayprostszego wyrażenia.

180. Umieiąc zwracać ułomki zwyczayne na dziesiętne, obaczmy czyli z dziesiętnych nie można się wrócić do ułomków zwyczaynych.

Jasna iest nayprzód iż są ułomki dziesiętne, iak 0.7, 0.07, 0.007, i t. d. lub iak 0.3, 0.03, 0. 003, i t.d. które iuż nie mogą mieć mniéyszego mianownika, gdyż oba ich wyrazy nie maią żadnego dzielnika spólnego. Te ułomki więc nie mogą stracić piętna ułomków dziesiętnych, tylko staiąc się mniéy prostemi, trzeba natenczas przestać na napisaniu ich sposobem innych ułomków.

Tak $0,7=\frac{7}{10}$; $0,03=\frac{3}{100}$ i t.d.

181. Lecz gdy dwa wyrazy ułomku dziesiętnego skończonego maią iakikolwiek dzielnik spólny, widać zaraz iż ie można zwrócić do mniéyszego mianownika, i tém samém odiąć im kształt dziesiętny.

Na to, napisawszy ułomek dziesiętny sposobem ułomków zwyczaynych (co zawsze ma mieysce daiąc częściom dziesiętnym za mianownik liczbę oznaczoną ich nazwiskiem) podzieli się oba wyrazy przez ich naywiększy dzielnik spólny, a otrzymany ułomek zwyczayny będzie nayprostszym wyrażeniem ułomku podanego.

Tak $0,04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$; $0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, i t. d.

182. Co do ułomków dziesiętnych peryiodycznych, gdy te nie są czém inném tylko ułomkami zwyczaynemi nie mogącemi być dokładnie wyrażonemi przez dziesiętne, widoczna iest, iż będą zawsze zdolne przyiąć kształt zwyczayny który iest ich prawdziwym kształtem.

Zastanówmy się nayprzód nad temi, których peryiod zaczyna się od pierwszéy zaraz cyfry. Daymy np. iż żądaią zwrócić na ułomek zwyczayny, ułomek dziesiętny peryiodyczny 0, 3333 . . . . . pomnożywszy ten ułomek przez 10 będzie 3, 3333 . . . . (1), gdy od téy liczby odéymiemy ułomek podany.

$$\begin{array}{r} 3,3333\ldots \\ 0,3333\ldots \\ \hline 3,0000\ldots \end{array}$$

zostaie 3 całkowite, liczba dziewięć razy większa niż ułomek podany. Nakoniec podzieliwszy tę liczbę przez 9 będzie $\frac{3}{9}$ ułomek równy ułomkowi podanemu; tak iż $0,3333\ldots=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Tym sposobem postąpi się ile razy peryiod składać się będzie z iednéy cyfry, t. i. w tym razie dosyć iest wziąć peryiód i podzielić go przez 9.

---

(1) Niemożna się tu dziwić widząc w tym ułomku dziesiętnym ieszcze cztery cyfry pomimo posunienia przecinka o iedno mieysce ku prawéy ręce, w ułomku bowiem nieskończonym można przypuścić tyle cyfer ile się podoba.

Tak o, 6666 . . $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; o, 5555 . . $= \frac{5}{9}$, i t. d.

Gdyby peryiód był o dwóch cyfrach, natenczas aby go przeprowadzić na całkowite, trzeba rozmnożyć ułomek dany przez 100, a odiąwszy od pomnożnego sam ułomek dany, okaże się całkowitość oznaczona przez peryiod 99razy większa od tegoż ułomka: podzieliwszy ią więc przez 99 otrzyma się ważność szukana.

Tak ułomek o, 181818 . . . rozmnożony przez 100 daie, 18, 181818 . . . ; odiąwszy ułomek, zostaie 18, a podzieliwszy przez 99 znayduie się $\frac{18}{99} = \frac{2}{11} =$ o, 181818 . . .

Podobnież o, 272727 . . . daie nayprzód 27, 272727 . . . daléy 27, daléy $\frac{27}{99} = \frac{3}{11} =$ o, 272727 . . . ; o, 090909 . . . daie nayprzod 9, 090909 . . . , potém 9, potém $\frac{9}{99} = \frac{1}{11} =$ o, 090909 . . . i t. d.

Widać iż dosyć iest w tym razie wziąć peryiód i podzielić go przez 99.

Gdyby peryiód był o trzech cyfrach, trzebaby pomnożyć ułomek przez 1000, odiąć samże ułomek i podzielić całe przez 999; czyli prosto, wziąć peryiód i podzielić go przez 999 i tak daléy.

183. W ogólności, aby na ułomek zwyczayny zwrócić ułomek dziesiętny bezpośrednie peryiodyczny, trzeba podzielić iego peryiód przez liczbę wyrażoną przez tyle cyfer 9 obok siebie położonych, ile iest cyfer w peryiodzie.

184. Roztrząśniymy teraz przypadek w którymby się znaydowała iedna lub więcéy cyfer przed peryiodem.

Jasna iest, iż mnożąc natenczas ułomek przez 10, 100, 1000, i t. d. lub co na toż wychodzi, posuwaiąc przecinek o iedno, dwa, trzy i t. d. mieysca ku prawéy ręce, można przeprowadzić do rzędu całkowitych wszystkie cyfry któreby były przed peryiodem.

To uczyniwszy, wypadek będzie złożony z dwóch części, t. i. z całkowitéy i z ułomka dziesiętnego bezpośrednie peryiodycznego; lecz każda z tych części będzie tyle razy za wielka, ile było iedności w liczbie przez którą pomnożyliśmy dany ułomek. Podzieliwszy więc ważność każdéy z tych części przez liczbę która mnożyła i dodaiąc wypadki, otrzyma się ułomek szukany.

Gdyby podano np. ułomek o, 1666...., pomnożyłbym go przez 10, i miałbym 1, 666...$=1+$o,666...; szukaiąc natenczas ważności o, 666.. która iest $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, otrzymałbym $1+$o, 666...$=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$; lecz ważność ta iest 10 razy za wielka, bo iest ważnością ułomku podanego o, 1666.... rozmnożonego przez 10; podzieli się ią więc przez 10, i otrzyma: o, 1666... $=\frac{5}{3}:10=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Gdyby podano o, o8333...., rozmnożywszy przez 100 będzie 8, 333... $=8\frac{3}{9}=8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$; podzieliwszy przez 100, będzie $\frac{25}{300}=\frac{1}{12}=$o, o8333....

185. Więc aby zwrócić na ułomek zwyczayny, ułomek dziesiętny peryiodyczny którego peryiód nie zaczyna się od pierwszéy cyfry, trzeba 1e zwrócić peryiód na ułomek zwyczayny podług zasady poprzedzaiącéy iak gdyby się zaraz ten peryiod zaczynał; 2e dodać ułomek zwrócony do cyfer które będą przed peryiodem, iako wyrażaiących całkowite; 3e zwrócić całkowite do mianownika ułomku aby zrobić ze wszystkiego iednę tylko liczbę ułomkową; 4e podzielić tę liczbę ułomkową przez 1 z tyle zerami ile będzie cyfer przed peryiodem ułomku danego; 5e nakoniec, zwrócić nowy ułomek do naymnieyszych wyrazów.

Tak $0,041666\ldots$ daie 1e $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; 2e $41\frac{2}{3}$; 3e $\frac{125}{3}$; 4e $\frac{125}{3000}$; 5e $\frac{1}{24}=0,041666\ldots$

Podobnież $0,0208333\ldots$ daie nayprzód $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, potém $208\frac{1}{3}$, potém $\frac{625}{3}$, potém $\frac{625}{30000}$, nakoniec $\frac{1}{48}=0,0208333\ldots$; $0,0185185\ldots$ daie nayprzód $\frac{185}{999}=\frac{5}{27}$ daléy $\frac{5}{27}$, i daléy $\frac{5}{27}$, potém $\frac{5}{270}$, nakoniec $\frac{1}{54}=0,0185185\ldots$ i t. d.

186. Gdy peryiód nie zaraz się zaczyna, lub iest długi, np. $0,92857142\ 857\ldots$ natenczas dosyć iest wziąć sześć pierwszych cyfer dziesiętnych i dawszy im za mianownik tyleż razy napisaną liczbę 9, szukać za pomocą ułomków ciągłych nayprostszego wyrażenia.

J tak $\frac{928571}{999999}$ będzie równe $\frac{1}{1+\frac{1}{13}}=\frac{1}{\frac{14}{13}}=\frac{13}{14}$; z ułomku $0,4705882352941176\ 4705882\ldots$ wziąwszy $\frac{470588}{999999}$ będzie $\frac{1}{2+\frac{1}{8}}=\frac{1}{\frac{17}{8}}=\frac{8}{17}$.

187. Chcąc mieć ważność zbliżoną iakiego ułomku nieskończonego t. i. którego nie można zwrócić dokładnie na dziesiętne, i gdy nie ma potrzeby wielkiéy dokładności, przestaiemy na wzięciu dwóch lub trzech cyfer dziesiętnych opuszczaiąc inne (n° 113). Tak, aby mieć przez zbliżenie ważność $\frac{5}{12}$, wziąłbym trzy pierwsze cyfry z $0,416666\ldots$ Lecz gdy opuszczenie cyfer pominionych ściąga błąd mały, ważną iest rzeczą umieć rozróżniać przypadki w których błąd ten można uczynić mniéyszym. W opuszczaniu zaś cyfer iakiego wyrażenia dziesiętnego zdarzyć się może iż w cyfrach zaniechanych pierwsza po lewéy ręce będzie większa niż 5, albo równa 5, albo nakoniec mniéysza niż 5.

W pierwszym przypadku doday iedność do ostatniéy cyfry po prawéy stronie części zachowanéy, a błąd będzie mniéyszym. Tak $0,417$ lub $0,417000$

zbliża się więcéy do o, 416666..., niż o, 416 lub o, 416000.

W drugim przypadku można ieszcze przydać iedność. Tak opuszczaiąc trzy cyfry 527 z o, 78527, wezmę o, 79 za ważność zbliżoną téy ilości. Bo o, 79, różni się od o, 78527 nieco mniéy przewyższaiąc, niż się różni od niéy o, 78 niedochodząc. Lecz łatwo widzieć iż gdyby ostatnia cyfra była 5 i tę chciano opuścić, np. z liczby o, 785; błąd byłby iednakowy, czyliby napisano o, 78 czyli o, 79.

Nakoniec w trzecim przypadku nie trzeba dodawać iedności. Bo ieżli w wyrażeniu o,16249 zaniedbuię trzech cyfer 249, ilość o, 16 zbliża się więcéy ważnością do o, 16249 niż o,17 (1).

Zagadnienia.

188. I. Zamienić na dziesiętne ułomek $\frac{8}{15}$, toż $\frac{13}{21}$?

II. Jakiż iest ułomek zwyczayny który zamieniono na o, 15625?

III. Jakiemu ułomkowi odpowiada o, 565656....?

IV. Jakiż iest ułomek zwyczayny który zamieniono na o, 19444..., tudzież na o, 61111....?

V. Jakiż iest ułomek który zamieniono na o, 307692 307....?

VI. Pytaią się o ułomek którego ważność oznacza o, 78947368421....?

---

(1) Łatwo tu iest uczynić widocznemi prawdy dopiero wymienione, okazuiąc różnice między liczbami o których mowa.

O działaniach głównych z liczbami wielorakiemi czyli różnogatunkowemi.

189. *Liczba wieloraka* iest to liczba złożona z rozmaitych iedności które są częściami iednéyże iedności głównéy. Tak 6 sążni, 4 stopy, 5 cali, iest liczbą wieloraką w któréy sążeń iest iednością główną. Stopa która się zawiera 6 razy w sążniu, i cal który się zawiera 12 razy w stopie, nazywaią się *iednościami posiłkowemi* (*secondaires*) (1).

190. Nie wszystkie iedności główne iednakowo poddzielamy. Poddziały miar długości np. sążnia są inne od poddziałów miar wagi np. funta, a te, inne od poddziałów miar monet, miar czasu, i t. d. Dlatego dobrze iest obeznać się z położoną na początku téy xiążki małą tablicą liczb wielorakich, których iest u nas nayczęstsze użycie.

Kładziemy tu iednak niektóre ieszcze potrzebne wtéymierze wiadomości:

Długość z 15 stóp nazywa się *prętem*, a 10 prętów rachuią na 1 *sznur* mierniczy.

Na *milę* polską rachowano dawniéy 12500łok; podług teraźnieyszego zaś urządzenia miar zawierać powinna $14816\frac{147}{288}$ łokci nowych.

Morgiem nazywaią powierzchnią maiącą 3 sznury miernicze wzdłuż a 1 wszerz. 30 morgów idzie na *włókę*, a tych 3 na *łan*, lubo i włókę nazywaią także łanem.

---

(1) Scisle mówiąc każda liczba wieloraka iest summą, powiedzieliśmy bowiem iż liczba iest zbiorem iedności tegoż samego gatunku (no 6).

Miar tych używaią do mierzenia roli, łąk, lasu, i t. p.

Wielkie przestrzenie ziemi tudzież wody mierzą się przez *mile kwadratowe*.

Korzec iest miara do mierzenia rzeczy sypnych, dzieli się na 4 *ćwierci*, z których każda ma garcy 8. *Garniec* zaś miara używana i do ciał ciekłych dzieli się na 4 *kwarty*, a ta na 4 *kwaterki*. Podług nowego urządzenia miar, kwarta polska = zupełnie 1 litrowi nowéy miary francuzkiéy.

Na *beczkę* warszawskiéy miary rachowano dawniéy 72 garcy. *Półbeczek* więc miał garcy 36, a ćwierć beczki czyli *antał* 18 garcy.

Beczka pospolita miała garcy 27; teraz zawierać ma garcy nowych 25.

Na *łaszt* rachowano korcy 27. Lecz skoro łaszt u nas ma odpowiadać łasztowi gdańskiemu na który idzie 60 kor: gdańskich, tedy zawierać powinien
kor: pol:
22, 799; gdyby zaś łaszt polski miał być równy berlińskiemu na który rachuie się 72 kor: ber: natenczas
kor: pol:
musiałby zawierać 30, 785 (1).

Jednością zasadową monety polskiéy iest *złoty polski*. Sztuki większe srebrne bite są *dwuzłotowe* i *pięciozłotowe*, mniéysze zaś *dziesięciogroszowe* i *pięciogroszowe*. Złoto biią w sztukach po 25zł. i po 50zł.

Co do podziału czasu; *rok astronomiczny* składa się z 365 dni, 5 godz: 48' i 49''; *rok* zaś *pospolity* z 365 dni i godzin 5. Zamyka on 12 miesięcy, z których iedne maią po 30 drugie po 31 dni, wy-

---

(1) Obacz przy końcu tablice metrologiczne.

iąwszy miesiąc nazwany *Luty* który ma zwykle dni 28. Tydzień składa się z dni 7. Rok więc ma tygodni 52 i dzień 1 a czasem 2. Co 4 lata bowiem iest rok zwany *przestępny* i ten ma dni 366 (1); a to dla zrównania początku roku pospolitego z początkiem roku astronomicznego. W roku przestępnym mięsiąc Luty ma dni 29.

Dzień pospolity rachuie się od północy do północy.

Rzeczy które się rachować zwykły na sztuki, rachuią także na tuziny, kopy i t. d. *Tuzin* iest sztuk 12, *mendel* 15, *kopa* 60.

Wielki tuzin, czyli tuzin tuzinów zawiera sztuk 144.

Papier rachować się zwykł na bele, ryzy, i t. d. *Bela* = 10 ryz, *ryza* = 20 liber, *libra* papieru do pisania zamyka arkuszy 24, papieru zaś do druku, arkuszy 25.

O dodawaniu liczb wielorakich.

191. Dla odbycia tego działania *piszą się liczby podane iedne pod drugiemi tak, ażeby wszystkie iedności tegoż samego gatunku były w iednéyże kolumnie*; *a podkréśliwszy wszystko*, *zaczyna się dodawanie od iedności gatunku nayniższego*; *ieżeli summa ich nie składa iedności gatunku bezpośre-*

---

(1) Wyymnią się od tego lata kończące wieki, z których tylko 4ty iest przestępnym tak, iż w przeciągu 400 lat, iest tylko 97 przestępnych. Aby zaś poznać czyli podany rok iest przestępnym, dosyć iest daną liczbę lat podzielić przez 4: ieżeli dzielenie uskutecznia się bez reszty, tedy rok iest przestępnym, ieżeli zaś zostaie reszta, ta okazuie ile lat od ostatniego roku przestępnego upłynęło.

dnie wyższego, pisze się ią pod iednościami iéy gatunku, ieżeli zaś zawiera w sobie dosyć części dla złożenia iednéy lub więcéy iedności gatunku naybliżéy wyższego, natenczas pisze się pod tą kolumną tylko nadmiar tych iedności posiłkowych nad iedność lub liczbę iedności wyższego gatunku, które się zatrzymuie dla dodania ich do właściwéy kolumny, z którą postępuie się tymże samym sposobem.

Naprzykład, ażeby dodać liczby wielorakie: $237^{\text{zł.}}$ $12^{\text{gr.}}$ 2^{sz}; $28^{\text{zł.}}$ $5^{\text{gr.}}$ $1^{\text{sz.}}$ i $314^{\text{zł.}}$ $19^{\text{gr.}}$ $2^{\text{sz.}}$ piszę te liczby iedne pod drugiemi tak, aby iedności iednakowego gatunku były w iednéyże kolumnie:

$237^{\text{zł.}}$	$12^{\text{gr.}}$	$2^{\text{sz.}}$
28	5	1
314	19	2
$580^{\text{zł.}}$	$7^{\text{gr.}}$	$2^{\text{sz.}}$

biorę summę tych trzech liczb zaczynaiąc od kolumny szelągów: dodaię ią razem i mam szelągów 5, a że grosz zawiera w sobie szelągów 3, summa więc szelągów 5 czyni grosz 1 i szelągów 2; piszę 2 szelągi pod kolumną szelągów, a zatrzymuię grosz 1 dla dodania go do kolumny groszy.

Postępuiąc do kolumny groszy dodaię ią i mam razem z groszem 1 zatrzymanym z szelągów, 37 groszy; lecz że 37 gr: czynią złoty 1 i groszy 7; piszę 7 gr: pod kolumną groszy, a przenoszę złoty 1 do kolumny złotych, których summa znayduie się iak widzieliśmy w liczbach złożonych.

Podobnym sposobem działaiąc znaydziemy, iż summa $39^{\text{sąż}}$. 4^{st}. 6c 8^{l}. 1^{mmt}. i $28^{\text{sąż}}$. 3^{st}. 11c. 10^{l}. 1^{mmt}. iest $68^{\text{sąż}}$. 2^{st}. 6c. 7^{l}. 0^{mmt}.

192. W dodawaniu liczb wielorakich czas oznaczaiących zachodzi czasem okoliczność na którą wzgląd mieć wypada.

Np. Gdyby podano iż osoba A urodziła się d. 5 Lutego 1742 r. a przeżywszy 53 lat, 4 Miesiące, 9 dni umarła; i pytaią się kiedy to nastąpiło?

Uważam iż r. 1742 nie był ieszcze skończony, lecz 1741 i miesiąc 1 to iest Styczeń, i ieszcze dni 4, ponieważ 5ty dzień drugiego w roku miesiąca Lutego nie był ieszcze skończony kiedy pisano 5go Lutego.

Oznaczywszy więc czas urodzenia przez 1741 r. 1 miesiąc i 4 dni; gdyż tyle lat, i t. d. upłynęło do d. 5go Lutego 1742 r. od Narodzenia Chrystusa Pana, to iest od czasu od którego my lata rachuiemy,

napiszę	$1741^{\text{lat.}}$	$1^{\text{m}}.$	4^{dni}
	53	4	9
będzie	1794	5	13

Do dnia więc śmierci upłynęło od wspomnionéy Epoki 1794^{lat} 5^{m}. 13^{dni}. Ostatni dzień oznacza tu 14ty dzień 6go miesiąca po 1794 roku, to iest 14ty Czerwca 1795 r.

Zagadnienia.

193. I. $154^{\text{sąż}}.\ 3^{\text{st}}.\ 7^{\text{c}}.\ 9\tfrac{1}{2}^{\text{l}}$, $23^{\text{sąż}}.\ 2^{\text{st}}.\ 8^{\text{c}}\ 11\tfrac{1}{3}^{\text{l}}$, $132^{\text{sąż}}.\ 5^{\text{st}}.\ 10^{\text{c}}.\ 3\tfrac{5}{6}^{\text{l}}$. $0^{\text{sąż}}.\ 2^{\text{st}}.\ 7^{\text{c}}.\ 1^{\text{l}}$. ileż uczynią długości?

II. Jleż ważą razem $15^{\text{grzyw.}}\ 3^{\text{unc.}}\ 6^{\text{dr.}}\ 42$ grany, $217^{\text{grz.}}\ 7^{\text{unc.}}\ 7^{\text{dr.}}\ 60^{\text{gr.}}$, $41^{\text{grz.}}\ 6^{\text{unc.}}\ 5^{\text{dr.}}\ 17^{\text{gr.}}$, $4^{\text{grz.}}\ 5^{\text{unc.}}\ 6^{\text{dr.}}\ 10^{\text{gr.}}$?

III. Dodawszy $2^{\text{dni}}\ 10^{\text{god.}}\ 42$ min. $54''$, $5^{\text{d}}.\ 9^{\text{god.}}\ 17'\ 19''$, i $0^{\text{d}}.\ 21^{\text{god.}}\ 3'\ 48''$ iakaż będzie summa?

IV. Pewien włożył w szkatułkę raz $8^{Zł}$. 12^{gr}.; 2gi raz 6# $4^{Zł}$. 20^{gr}., 3ci raz $2^{tal.}$ $1^{Zł}$., naostatek przyłożywszy 7# $2^{tal.}$ $2^{Zł}$. i 4^{gr}. chce wiedzieć ile ma razem?

V. Osoba B urodziła się 16 Września 1765 r. Osoba A iest 7 lat 5 miesięcy 23 dni młodsza; kiedyż się urodziła?

O odeymowaniu liczb wielorakich.

194. Chcąc odiąć liczbę wieloraką od innéy; *pisze się liczba mniéysza pod większą tak, aby iedności tegoż samego gatunku były w iednéyże kolumnie, i podkréśliwszy ie zaczyna się odeymowanie od iedności gatunku nayniższego. Jeżeli liczba niższa może być odiętą od liczby wyższéy, napisz resztę pod liniyką. Jeżeli zaś nie może być od niéy odiętą, natenczas aby uskutecznić odeymowanie przydasz myślą do liczby, od któréy odeymować nie możesz, iedność gatunku bezpośrednie wyższego zwróciwszy ią na gatunek o który idzie. Napiszesz teraz pod liniyką nadmiar liczby wyższéy tak zwiększonéy nad liczbę niższą odpowiadaiącą, a dla nagrodzenia zwiększysz iednoscią liczbę niższą następuiącego bezpośrednie po lewéy ręce gatunku.*

Na przykład, ażeby odiąć liczbę wieloraką $289^{Zł}$. $19^{gr.}$ $11^{den.}$ od $332^{Zł}$. $2^{gr.}$ $9^{den.}$ (1) piszę mniéyszą liczbę pod większą w ten sposób, aby iedności tegoż samego gatunku były w iednéyże kolumnie, i odeymuię wszystkie części liczby niższéy od wszystkich

(1) Wprowadziliśmy tu dla wprawy w rachunek [illegible]nary których liczono 6 na szeląg, lubo iuż teraz nie używaią ich w rachunku.

części odpowiadaiących liczby wyższéy zaczynaiąc od iedności nayniższego rzędu.

$$\begin{array}{rrr} 332^{Zł.} & 2^{gr} & 9^{de.} \\ 289 & 19 & 11 \\ \hline 42^{Zł} & 12^{gr} & 16^{de} \end{array}$$

Nie mogąc odiąć 11^{de} od 9^{de} przydaię myślą ieden grosz który ma 18^{de} do 9^{de}, co czyni 27^{de} od których odiąwszy 11 zostaie 16^{de}; zwiększywszy potém iednością 19^{gr} liczbę następuiącą bezpośrednie po lewéy ręce, mówię: 20^{gr} od 2^{gr} nie można; przydaię: 1 złoty, który ma 30^{gr}, do 2^{gr}, co czyni 32^{gr}, i mówię: 20 od 32 zostaie 12. Naostatek zwiększywszy iednością $289^{Zł}$, odeymuię 290 od 332 iak zwyczaynie i mam $42^{Zł}$. Tak tedy różnica szukana iest $42^{Zł}$ 12^{gr} 16^{de}

Znaydzie się podobnym sposobem iż różnica między $32^{sąż} 0^{st}. 2^{c}. 0l. 1^{mmt}$. i $19^{sąż}$ $4^{st}. 5^{c}. 10^{l}$. iest $12^{sąż}$ $1^{st}. 8^{c}. 2l. 1^{mmt}$.

195. Gdyby się pytano ile upłynęło lat, miesięcy i dni np. od d. 2^{go} Listop. 1775 roku do d. 6^{go} Kwietnia 1794 roku?

Napisawszy liczby przygotowane podług nº 192, iak następuie:

$$\begin{array}{rrr} 1793^{lat} & 3^{mce} & 5^{d.} \\ 1774 & 10 & 1. \\ \hline 18^{lat} & 5^{m.} & 4^{d.} \end{array}$$

idzie tylko wziąć ich różnicę. Ta okazuie że od 2^{go} Listop. 1775 r. do 6^{go} Kwiet. 1794 r. upłynęło lat 18, miesięcy 5 i d. 4.

Postępuiąc podobnie znaydziemy, iż ieżeli pewna osoba umarła 1818 r. 15^{go} Maia o godz. 5 rano, urodziła zaś się 1755 r. 28go Czerw. ogodz. 9 po południu, osoba ta żyła 62lat 8mcy 15dni 8god.

Zagadnienia.

196. I. Ma ktoś 8# 11Zł. i 23gr; ileż mu niedostaie do 10#?

II. Maiący zrobić 487sąż pewnéy roboty, zrobił iéy dopiero 319sąż. 4st. 3c. 10l. ileż ieszcze ma zrobić?

III. Od 32℔ 9unc 2dr 44gr odiąwszy 12℔ 12unc 5dr 12gr iakaż zostanie reszta?

IV. Pytaią, się o różnicę między 17dni 11god 47′ 5″ a 13dni 18god. 55′ 40″?

V. Jeżeli Kopernik urodził się, iak piszą, w roku 1473 dnia 19 Lutego po południu o godzinie 4 minucie 48; umarł zaś roku 1543 dnia 10 Czerwca, daymy iż o godzinie 4 po południu, iakże długo żył?

O mnożeniu liczb wielorakich.

197. Mmnożenie liczb wielorakich może być przywiedzione w ogólności do mnożenia ułomków, bo każdy czynnik składa się z iedności głównéy i z ułomków téyże iedności.

Na przykład: gdyby się pytano co ma kosztować 54sąż i 3st. iakiéy roboty rachuiąc po 42Zł. 18gr. i 2szl. sążeń? zamieniam mnożną 42Zł 18gr i 2sz. na szelągi, co czyni 3836sz; a że szeląg iest 90tą częścią złotego, więc mnożna może być oznaczona przez $\frac{3836}{90}$Zł; podobnież mnożnik 54sąż 3st. obrócony na stopy daie 327st.; że zaś stopa iest 6tą częścią sążnia, więc mnożnikiem będzie $\frac{327}{6}$sąż. A tak zagadnienie iest zwrócone do mnożenia $\frac{3836}{90}^{Zł}$. przez $\frac{327}{6}^{sąż}$. co czyni $\frac{1254372}{540}^{Zł}$. czyli $2322\frac{492}{540}^{Zł}$, a zwracaiąc ułomek na grosze a te na szelągi (n° 119) będzie, $2322^{Zł}$. 27^{gr} 1^{sz}.

Podobnież gdyby się pytano ilè kosztuie $38^{sąż}$. 4^{st}. 4^{c}. gdy sążeń iest po $48^{Zł}$. 28^{gr} 6^{de}? zamieniam oba czynniki na ułomki. A nayprzód co do mnożnego, $48^{Zł}$. i $28^{gr} = 48$ i $\frac{14}{5}^{Zł}$; 6^{de} są $\frac{1}{3}^{gr}$, a że grosz iest $\frac{1}{30}^{Zł}$, więc $\frac{1}{3}^{gr}$ iest $\frac{1}{90}^{Zł}$. (n° 166) Lecz $\frac{1}{90}$ i $\frac{14}{15} = \frac{1}{90}$ i $\frac{84}{90} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$; więc $48^{Zł}$. 28^{gr} $6^{de} = 48\frac{17}{18}^{Zł}$.

Co do mnożnika, $38^{sąż}$. $4^{st} = 38$ i $\frac{2}{3}^{sąż}$; 4^{c}. są $\frac{1}{3}^{st}$, a że stopa iest $\frac{1}{6}^{sąż}$, więc $\frac{1}{3}^{st}$. iest $\frac{1}{18}^{sąż}$; $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{18} = \frac{12}{18}$ i $\frac{1}{18} = \frac{13}{18}^{sąż}$. Zatém $38^{sąż}$ $4^{st}.4^{c} = 38\frac{13}{18}^{sąż}$. Zagadnienie więc zwrócone iest do pomnożenia $48\frac{17}{18}^{Zł}$. przez $38\frac{13}{18}^{sąż}$, czyli $\frac{881}{18}^{Zł} \times \frac{697}{18}$, co czyni $\frac{614057}{324}^{Zł}$, czyli uskuteczniaiąc dzielenie i zwracaiąc pozostałe ułomki na grosze i denary, będzie iloczyn cały $1895^{Zł}$. 7^{gr}. $2\frac{1}{3}^{de}$.

Gdyby się pytano ile za $48^{Zł}$. 28^{gr} 6^{de} będzie sążni, gdy za złoty iest $38^{sąż}$. 4^{st}. 4^{c}, a zatém gdyby trzeba było pomnożyć $38^{sąż}$. 4^{st}. 4^{c}. przez $48^{Zł}$. 28^{gr}. 6^{de} czyli $\frac{697}{18} \times \frac{881}{18}$, natenczas iloczyn $\frac{614057}{324}$ oznaczałby sążnie, a uskuteczniaiąc dzielenie, nie zaniedbuiąc oraz zwracać pozostałych ułomków na stopy i cale, znalazłby się iloczyn $1895^{sąż}$. 1^{st}. $5\frac{1}{9}^{c}$.

Podany sposób mnożenia rozciąga się do wszelkiego gatunku liczb wielorakich, lecz wymaga więcéy rachunku niż ten który zaraz wyłożemy, dla tego też nie będziemy się dłużéy zastanawiać nad nim.

198. Sposób drugi naywięcéy używany i prostszy w tych działaniach zależy na rozkładaniu liczb rozmaitego nazwiska na części wielokrotne (n° 87) względem iedności gatunku bezpośredni wyższego (1).

Na przykład, ażeby wiedzieć cenę $46\frac{3}{4}$ łok. iakiéy materyi po 26 Zł. 10 gr. 9 de łokieć, widzę iż trzeba powtórzyć cenę łokcia tyle razy ile 1 łokieć iest zawarty w $46\frac{3}{4}$ łok. Wezmę zaś $\frac{3}{4}$ mnożnego, albo biorąc nayprzód część czwartą i pisząc ią trzy razy, albo też biorąc iego połowę i znowu téy połowy połowę. Tak

	26 Zł.	10 gr	9 de
	$46\frac{3}{4}$		
1szy iloczyn cząstkowy	156	0	0
2gi . . .	1040	0	0
3ci . . .	15	10	0
4ty . . .	0	23	0
5ty . . .	13	5	$4\frac{1}{2}$
6ty . . .	6	17	$11\frac{1}{4}$
Iloczyn cały	1231 Zł	25 gr	$15\frac{3}{4}$ de

(1) Dla ułatwienia sobie działań w téy mierze, niech uczący się rozkładaią na części wielokrotne złoty, sążeń, funt, i t. p. zacząwszy od części naymnieyszéy np. grosza, cała; łuta, i t. p. I tak:
1 gr. iest 30tą częścią złotego
2 . są 15tą . .
3 . . 10tą . .
4 . . 10tą i 30tą albo 2 razy 15tą i t. d. Można i w ten sposób mieć ćwiczenie: z pewnéy liczby części uważać iaka ich liczba iest połową, 3cią, 4tą, i t. d. częścią względ-

Mnożę nayprzód całą mnożną przez 46. Zaczynam od mnożenia $26^{Zł}$ co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia 10^{gr} i mówię: gdybym miał złoty do pomnożenia przez 46, miałbym na iloczyn $46^{Zł}$; lecz 10^{gr} iest tylko trzecią częścią złotego, iloczyn więc 10^{gr} przez 46 będzie tylko trzecią częścią $46^{Zł}$; co mi daie 3^{ci} iloczyn cząstkowy. Postępuię do mnożenia 9^{de} przez 46, i widzę iż gdybym miał 1 grosz do pomnożenia przez 46, miałbym 46^{gr} na iloczyn. Że zaś 9^{de} czyni tylko połowę grosza, iloczyn więc tych 9^{de} przez 46 powinien uczynić tylko połowę 46^{gr} czyli 23^{gr}. co iest 4^{tym} iloczynem cząstkowym.

Pozostaie mi wziąć $26^{Zł}$. 10^{gr} 9^{de}, $\frac{3}{4}$ razy, czyli, co na iedno wychodzi, trzeba ażebym wziął $\frac{3}{4}$ z $26^{Zł}$ 10^{gr} 9^{de}. Dla większéy łatwości rozkładam $\frac{3}{4}$ na $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Za pół łokcia biorę połowę ceny łokcia, t. i. połowę $26^{Zł}$ 10^{gr} 9^{de} co mi daie 5^{ty} iloczyn cząstkowy. Nakoniec za $\frac{1}{4}$ które iest połową połowy, biorę połowę z $13^{Zł}$. 5^{gr} $4\frac{1}{2}^{de}$ co iest ceną półłokcia, i mam 6^{ty} i ostatni iloczyn cząstkowy. Dodaiąc wszystkie te iloczyny, znayduię $1231^{Zł}$ 25^{gr} $15\frac{3}{4}^{de}$. za cenę $46\frac{3}{4}^{łok}$ po $26^{Zł}$. 10^{gr} 9^{de}. łokieć.

199. Podobnież aby wiedzieć cenę $38^{sąż}$ $5^{st.}$ $8^{c.}$ gdy $48^{Zł}$ 28^{gr} 6^{de}. kosztuie sążeń, widzę iż powtarzaiąc $48^{Zł}$ 28^{gr} 6^{de}. tyle razy ile 1 sążeń zawarty iest w $38^{sąż}$ $5^{st.}$ $8^{c.}$ znaydę iloczyn szukany. Oto iest wzór działania:

---

dem ogółu: np. z 20 części 10 iest połową
5 czwartą
4 piątą częścią i t. d,
Z 15tu, 10 czyni dwie trzecie, 5 trzecią część, i t. d.

	$48^{zł}$	28^{gr}	6^{de}.
	$38^{sąż}$	$5^{st.}$	8^{c}.
1szy iloczyn cząstkowy	384	0	0
2gi . .	144	0	0
3ci . .	19	0	0
4ty . .	12	20	0
5ty . .	3	24	0
6ty . .	0	12	12
7my . .	24	14	3
8my . .	16	9	8
9ty . .	5	13	$2\frac{2}{3}$
Iloczyn cały	$1906^{zł}$	3^{gr}	$7\frac{2}{3}^{de}$.

Mnożę nayprzód całego mnożnego przez 38. Zaczynam od $48^{zł}$ co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia 28^{gr} i mówię: gdybym miał $1^{zł}$. do pomnożenia przez 38, miałbym na iloczyn $38^{zł}$, lęcz że 28^{gr} które rozkładam na 15^{gr} 10^{gr} i 3^{gr} ważą tylko połowę, trzecią część i dziesiątą złotego, więc aby mieć od razu w złotych iloczyn z 28^{gr} przez 38, biorę połowę, trzecią część i dziesiątą $38^{zł}$; co mi daie 3ci, 4ty i 5ty iloczyn cząstkowy.

Postępuię do mnożenia 6^{de} przez 38, i mówię: gdybym miał grosz do pomnożenia przez 38, iloczyn byłby 38^{gr}; lecz 6^{de} są tylko trzecią grosza, iloczyn więc z 6^{de} przez 38 zwrócony na grosze zawierać tylko będzie trzecią część 38^{gr}, co mi daie 6ty iloczyn cząstkowy.

Gdybym szukał ceny tylko $38^{sąż}$, działanie byłoby skończone, i pozostałoby iedynie wziąć summę wszystkich tych iloczynów szczególnych; lecz trzeba ieszcze znaleźć cenę $5^{st.}$ i 8^{c}.

Postrzegam iż 5st. rozłożone na 3st. i 2st, są połową i trzecią częścią sążnia, biorąc więc połowę i trzecią część 48Zł 28gr 6de. ceny sążnia, będę miał cenę pięciu stóp. Te dwa działania daią mi 7my i 8my iloczyn cząstkowy.

Nakoniec, za 8c. które są trzecią częścią dwóch stóp, będę miał trzecią część iloczynu, który znalazłem za 2st. i to iest 9ty iloczyn cząstkowy.

Dodaiąc wszystkie te iloczyny znaydzie się 1906Zł 3gr $7\frac{2}{3}$de. za cenę szukaną.

200. Gdyby się zaś pytano ile za 48Zł 28gr 6de. dostanie pewnego towaru rachuiąc za 1 złoty po 38sąż 5st. 8c? znaleźlibyśmy podobnie postępuiąc iż na iloczyn wypada 1906sąż 0st. $8\frac{2}{9}$c. Oto iest wzór tego działania:

	38sąż	5st.	8c.		
	48Zł	28gr	6de		
1szy iloczyn cząstko:	304	0	0		
2gi . .	152	0	0		
3ci . .	24	0	0	z rozmn: 3st przez 48	
4ty . .	16	0	0	.	2 .
5ty . .	5	2	0	.	8c .
6ty . .	19	2	10	z rozm: mnożnego pr.	15gr .
7my . .	12	5	$10\frac{2}{3}$		10
8my . .	3	5	$4\frac{2}{5}$		3
9ty . .	1	1	$9\frac{7}{15}$		1
10ty . .	0	2	$7\frac{7}{45}$		6de
Iloczyn cały	1906sąż	0st	$8\frac{2}{9}$c.		

Mnożę nayprzód całego mnożnego przez 48. Zaczynam od $38^{sąż}$. co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Aby 5^{st}. wziąć 48 razy rozkładam ie na 3^{st}. i 2^{st}., t. i. na pół i trzecią część sążnia, i mam zaraz połowę i trzecią część $48^{sąż}$. co mi daie 3ci i 4ty iloczyn cząstkowy. Przystępuię do mnożenia 8^{c} przez 48; a że 8^{c} iest $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ stopy więc będę miał $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ z 48^{st}. t. i. 24 i $8=32^{st}$. czyli $5^{sąż}$. i 2^{st}. co mi daie iloczyn 5ty.

Aby rozmnożyć $38^{sąż}$. 5^{st}. 8^{c}. przez 28gr, uważam iż te są połową, trzecią częścią i dziesiątą złotego, powinienem zatém wziąć połowę, trzecią część i dziesiątą mnożnego, co mi daie 6ty, 7my, i 8my iloczyn cząstkowy. Naostatek, aby pomnożyć mnożnego przez 6^{de}. uważam ilebym z niego mógł mieć za grosz 1, i dla tego biorę trzecią część 8go iloczynu cząstkowego, co mi daie 9ty iloczyn przybrany oznaczaiący iż za grosz miałbym $1^{sąż}$. 1^{st}. $9\frac{7}{15}^{c}$; więc za 6^{de}. które są trzecią częścią grosza, mieć będę tylko 2^{st}. $7\frac{7}{45}^{c}$. co mi daie ostatni iloczyn cząstkowy. Dodaiąc wszystkie te iloczyny znaydę $1906^{sąż}$. 0^{st}. $8\frac{2}{9}^{c}$. na iloczyn cały.

201. Widać z tego wszystkiego iż dla odbycia mnożenia z liczbami wielorakiemi za pomocą części wielokrotnych, trzeba umieć zwracać poddziały główney iedności czynnika iednego na różne części wielokrotne téyże iedności, i wziąć za każdą z nich części podobne z czynnika drugiego; *summa tych wszystkich części czyli iloczynów cząstkowych, będzie iloczynem całym szukanym.*

Postępowanie to wypływa widocznie z definicyi mnożenia (nº 38).

Zagadnienia.

202. I. Jleż będzie kosztować $0^{\text{sąż}}$. 5^{st}. 9^{c}. 10^{l}. rachuiąc po $0^{\text{Zł}}$ 19^{gr}. 11^{de}. sążeń?

II. Jleż za $22^{\text{Zł}}$. 18^{gr}. 9^{de}. dostanę pewnego towaru, rachuiąc za złoty $32^{\text{sąż}}$. 4^{st}. 4^{c}.?

III. Kiedy 12 sztuk czyli tuzin pewnego towaru kosztuie 8^{tal}. $4^{\text{Zł}}$. 12^{gr}., ileż będzie kosztować wielki tuzin czyli 12 tuzinów?

IV. Z maiących się płacić $50000^{\text{Zł}}$. np. podatku, potrącaią po 2^{gr}. i 6^{de}. na złotym; ileż potrącenie wynosi, a ile zapłacić istotnie trzeba?

V. Jeżeli w handlu morskim $1^{\text{Zł}}$. przynosi rocznie $22^{\text{Zł}}$. 20^{gr}. 10^{de}. ileż przyniosą na rok $669^{\text{Zł}}$. 4^{gr}. i 9^{de}.?

O dzieleniu liczb wielorakich.

203. Aby podzielić liczbę wieloraką przez inną, np. ażeby znaleźć cenę łokcia przypuszczaiąc że $46\frac{3}{4}^{\text{łok}}$. kosztowały $1231^{\text{Zł}}$. 25^{gr}. $15\frac{3}{4}^{\text{de}}$.; uważam iż cena łokcia zawiera się tyle razy w $1231^{\text{Zł}}$ 25^{gr}. $15\frac{3}{4}^{\text{de}}$. ile 1 łokieć w $46\frac{3}{4}^{\text{łok}}$. t. i. 46 i $\frac{3}{4}$ razy, czyli (zwracaiąc 46 do mianownika 4) $\frac{187}{4}$ razy; pozostaie więc tylko podzielić $1231^{\text{Zł}}$. 25^{gr}. $15\frac{3}{4}^{\text{de}}$. przez $\frac{187}{4}$; to się zwraca do pomnożenia $1231^{\text{Zł}}$. 25^{gr}. $15\frac{3}{4}^{\text{de}}$. przez $\frac{4}{187}$, co daie $\dfrac{4927^{\text{Zł}}.\ 13^{\text{gr}}.\ 9^{\text{de}}.}{187}$ Jloraz $26^{\text{Zł}}$. 10^{gr}. 9^{de}. który znayduię uskuteczniaiąc dzielenie, iest ceną łokcia.

Oto iest wzór skrócony działania w którém tylko reszty są oznaczone:

$$\begin{array}{l|l} \overset{..}{4927}\,\text{zł.}\quad \dot{1}\dot{3}\,\text{gr.}\quad 9\,\text{de.} & 187 \\ \underline{1187} & \overline{26^{\text{zł.}}\ 10^{\text{gr.}}\ 9^{\text{de.}}} \\ 65 = 1950\,\text{gr.} & \\ \quad 13 & \\ \hline 1963 & \\ 93 = 1674\,\text{de.} & \\ \quad 9 & \\ \hline 1683 & \\ 0 & \end{array}$$

Podobnież ażeby znaleźć cenę sążnia przypuszczaiąc iż $24^{\text{sąż.}}$ $2^{\text{st.}}$ $8^{\text{c.}}$ kosztowały $58^{\text{Zł.}}$ $20^{\text{gr.}}$ $12^{\text{de.}}$; uważam iż cena sążnia zawiera się tyle razy w $58^{\text{Zł.}}$ $20^{\text{gr.}}$ $12^{\text{de.}}$ ile 1 sążeń w $24^{\text{sąż.}}$ 2^{st} $8^{\text{c.}}$; więc podzieliwszy $24^{\text{sąż.}}$ $2^{\text{st.}}$ $8^{\text{c.}}$; przez 1 sążeń, trzeba dzielić $58^{\text{Zł.}}$ $20^{\text{gr.}}$ $12^{\text{de.}}$ przez iloraz z tego dzielenia wypadły.

Aby zaś dzielenie to uskutecznić, uważam iż zwracaiąc 1 sążeń na cale, mam $72^{\text{c.}}$; a zwracaiąc $24^{\text{sąż.}}$ $2^{\text{st.}}$ $8^{\text{c.}}$ na cale mam $1760^{\text{cal.}}$ Jloraz więc iłości $24^{\text{sąż.}}$ $2^{\text{st.}}$ $8^{\text{c.}}$ podzielonéy przez 1 sążeń iest ułomek ogólny $\frac{1760}{72}$.

Nie pozostaie iuż iak podzielić $58^{\text{Zł.}}$ $20^{\text{gr.}}$ $12^{\text{de.}}$ przez $\frac{1760}{72}$; to się zwraca do pomnożenia $58^{\text{Zł.}}$ $20^{\text{gr.}}$ $12^{\text{de.}}$ przez $\frac{72}{1760}$ co czyni $\frac{4225^{\text{Zł.}}\ 18^{\text{g.}}}{1760}$; iloraz $2^{\text{Zł.}}$ $12^{\text{gr.}}$ $\frac{27}{55}^{\text{de.}}$ który się znayduie uskuteczniaiąc dzielenie którego tu wzór widać, iest ceną sążnia.

$$\begin{array}{l|l} 4225^{\text{Zł.}}\quad 18^{\text{gr.}} & 1760 \\ 705 = 21150 & \overline{2^{\text{Zł.}}\ 12^{\text{gr.}}\ \frac{27}{55}\text{de.}} \\ \qquad\quad 18 & \\ \hline 21168 & \\ 3568 & \\ 48 = \frac{864}{1760}\text{de.} = \frac{27}{55} & \end{array}$$

204. Widać ztąd iż *dla odbywania podobnych działań, trzeba zwracać dzielnik do części iego naymnieyszego gatunku danego, potém mnożyć podzielną przez liczbę wyrażaiącą ile razy naymnieyszy gatunek dzielnika zawiera się w iego naywiększym danym gatunku, i odbywać dzielenie według praw wyżey przepisanych.*

Może tu mieć mieysce skrócenie, bo np. ułomek ogólny $\frac{1760}{72} = \frac{220}{9}$; dosyć więc rozmnożyć podzielną przez 9 a podzielić przez 220.

205. Wypada tu dodać uwagę, iż gdy dzielnik iest téyże natury co dzielny, a iloraz ma być ogólny, natenczas dzielny podobnież iak dzielnik musi być wyrażony w częściach naymnieyszego gatunku iego, inaczéy nie możnaby otrzymać ilorazu ogólnego.

Gdyby nawet iloraz miał być mianowany trzeba podobnie obie liczby przysposobić. W tym razie ieszcze szczególny wzgląd zachodzi, iż gdy reszta z dzielenia pozostała iest ułomkiem iedności gatunku ilorazu, chcąc więc dzielenie posunąć i otrzymać iloraz w częściach niższego gatunku iego, zwracać należy tę resztę na części gatunku bezpośrednie niższego i dzielić podług wskazanych prawideł. Np. gdyby się pytano ile za 7668$^{zł.}$ 11$^{gr.}$ 8$^{de.}$ będzie zrobione pewnéy roboty rachuiąc po 72$^{zł.}$ sążeń? iasna iest iż z natury zadania iloraz powinien być sążnie i części sążnia. Zwróci się więc dzielny i dzielnik na denary i będzie się mieć 4135166$^{de.}$ do podzielenia przez 38880$^{de.}$, co da na iloraz 106$^{sąż.}$ Reszta $\frac{13866}{38880}$ iest ułomkiem sążnia. Zwracam ią więc na stopy, cale, i t. d. i ciągnąc daléy dzielenie znayduię jeszcze na iloraz 2$^{st.}$ 1$^{c.}$ 8$\frac{2}{15}$$^{l.}$ Podobnie iuż robiliśmy pod n° 197 z ułomkiem złotego zamieniaiąc go na grosze i t. d.

206 Mnożenia i dzielenia liczb wielorakich można sprowadzić do mnożeń i dzieleń zwyczaynych z częściami dziesiętnemi, zamieniaiąc w liczbach danych różne poddziały iedności główney na części dziesiętne.

207. Aby zamienić liczbę wieloraką na ieden tylko gatunek iedności główney z częściami iéy dziesiętnemi, trzeba ią zamienić nayprzód na liczbę ułomkową (n° 197) a tę dopiero na dziesiętne (n° 177).

Wzaiemnie zaś, ażeby części dziesiętne iakiéy iedności główney zamienić na liczbę wieloraką dosyć iest zachować prawidła mnożenia dziesiętnych. Pytaią się np. $0^{sąż},65347$ ileż czyni stóp, cali i liniy? Mnożę dziesiętne przez 6 zwracaiąc sążeń na stopy, iloczyn iest $3^{st.},92082$; mnożę części dziesiętne stopy przez 12 zwracaiąc na cale, i mam $11^{c},04984$; mnożę części cala przez 12 zwracaiąc na linie, i mam $0^{l},59808$ równe prawie $\frac{3}{5}^{l}$, a zatém ważność dziesiętnych podanych dosyć dokładnie iest $0^{sąż}\ 3^{st.}\ 11^{c.}\ \frac{3}{5}^{l}$.

Podobnież postępuiąc znadziemy iż ieżeli rok Astronomiczny ma $365^{dn},24224$; tedy zawiera $365^{d}.\ 5^{g}.\ 48',\ 49''$ i nieco więcéy.

208. Widać tu iż gdybyśmy w naszych miarach i wagach mieli podział dziesiętny, rachunek liczb wielorakich w miarę zachowania tego podziału byłby ułatwiony.

209. Łatwo także widzieć iż dzielenie liczb wielorakich może być przywiedzione i do dzielenia ułomków (porówn: n° 197).

Co się tyczy proby czterech działań z liczbami wielorakiemi, ta odbywa się podobnie iak powiedziano wyżéy pod n° 165 o probie czterech działań z ułomkami zwyczaynemi. Co do mnożeń i dzieleń, gdy ie uskuteczniać można nie iednym sposobem, więc i te sposoby służyć sobie mogą wzaiemnie za probę.

Zagadnienia.

210. I. Za $57\frac{5}{8}$ łok. pewnego towaru zapłacono 237# 13 Zł. $18\frac{1}{2}$ gr.; po ileż płacono łokieć?

II. Rachuiąc czerwony złoty po Zł. 18 gr. 24, ileż trzeba czerw. zł. na spłacenie 2500 tal. 4 zł. 18 gr.?

III. Przedsięwzięto kopać kanał 8950 sąż. 3 st. 6 c. długi, szerokości miernéy wszędzie iednakowéy; kopią go na dzień 28 sąż. 4 st. 3 c; iest pytanie ile dni trzeba będzie na wykopanie całego kanału przypuszczaiąc iż gatunek ziemi w całéy iego rozciągłości iest iednakowy?

IV. Gdy za 7 grzywien 5 uncyy 6 drachm czystego srebra dano 115 tal. 3 zł. $4\frac{5}{16}$ gr., ileż kosztuie grzywna?

V. Wiadomo iż grzywna czystego srebra kosztowała 14 tal. 5 zł. 24 gr. Jest pytanie ile grzywien kupiono za 115 tal. 3 zł. $4\frac{5}{16}$ gr.?

O Formowaniu potęg i wyciąganiu pierwiastków.

211. Nazywamy *potęgami* iakiéy liczby, iloczyny téy liczby rozmnożonéy przez iedność albo przez nią samą pewną liczbę razy.

Jloczyn iakiéy liczby rozmnożonéy przez 1 nazywa się pierwszą potęgą téy liczby; 4×1 czyli 4, iest pierwszą potęgą z 4; ztąd każda liczba iest pierwszą swoią potęgą.

Jloczyn iakiéy liczby rozmnożonéy raz przez nią samą nazywa się drugą potęgą czyli *kwadratem* téy liczby: tak 3×3 czyli 9 iest kwadratem z 3.

Iloczyn iakiéy liczby rozmnożonéy dwa razy na-następnie przez nią samą, to iest, przez iéy kwadrat, nazywa się trzecią potęgą czyli *sześcianem* téy liczby: tak $4\times4\times4$ czyli $4\times16=64$, iest sześcianem z 4; i tak następnie co do czwartéy, piątéy i d. potęg.

212. Działanie które robiemy dla znalezienia pewnéy potęgi iakiéy liczby, nazywa się *formowanie téy potęgi* lub *wynoszenie do potęgi.* Oto mała tablica trzech pierwszych potęg liczb od 1 aż do 9.

Pierwsza potęga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ga pot: czy: kwad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3cia czyli sześcian	1	8	27	64	125	216	343	512	729 (1)

Postrzegamy iż druga, trzecia, i w ogólności wszystkie potęgi z 1 są 1: bo 1 rozmnożony przez siebie tyle razy ile zechcemy, nie może wydać tylko 1. Jedność sama ma tę własność.

213. Nazywa się *pierwiastkiem* potęgi, liczba która rozmnożona przez iedność albo przez siebie pewną liczbę razy wydała tę potęgę; pierwiastek pierwszy i potęga pierwsza są iednąż rzeczą.

Względnie do potęgi drugiéy liczba która ią wydała nazywa się pierwiastkiem drugim, pierwiastkiem kwadratowym, albo po prostu pierwiastkiem.

Względnie do potęgi trzeciéy, liczba która ią wydała, nazywa się pierwiastkiem trzecim, czyli pierwiastkiem sześciennym i tak następnie co do czwartéy, piątéy i d. potęg.

214. Działanie które robiemy dla znalezienia pierwiastku iakiéy potęgi nazywa się *wyciąganie pierwiastku.*

---

(1) Tablicę tę powinni uczący się umieć na pamięć. Mogą zaś sobie rozciągnąć ią i do następnych potęg. Można im tu zaraz okazać kwadrat i sześcian ieometryczny od których to figur potęgi maią nazwiska.

215. Formowanie potęg nie ma żadnéy trudności; idzie tylko o pomnożenie pewną liczbę razy przez siebie samą liczby z któréy chcemy uformować potęgę: tak mnożąc 12, raz przez 12, iloczyn 144 daie kwadrat z 12; mnożąc 144 przez 12 iloczyn 1728 daie sześcian z 12.

Także $0,3 \times 0,3 = 0,09$ iest kwadratem z 0,3; $0,09 \times 0,3 = 0,027$ iest sześcianem z 0,3

Podobnie $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ iest kwadratem z $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ iest sześcianem z $\frac{2}{3}$.

216. Widać iż dla uformowania rozmaitych potęg ułomków, trzeba wynieść licznik i mianownik do potęgi żądanéy: więc, ważność ułomku zmnieysza się w miarę im go wynosiemy do wyższych potęg, a to zmnieyszenie tém iest prędsze im mianownik iest większy od licznika.

217. Gdybyśmy iaką liczbę chcieli wynieść do potęgi piątéy, skraca się działanie mnożąc iéy kwadrat przez siebie, co da iuż czwartą potęgę, tę mnoży się ieszcze raz przez tęż liczbę, a będzie piąta potega; gdyby liczba podana miała być wyniesiona do potęgi szóstéy, dosyć iest iéy trzecią potęgę czyli sześcian rozmnożyć przez siebie; gdyby zaś liczbę iaką trzeba było wynieść do potęgi dziesiątéy, pomnożyłoby się iéy trzecią potęgę dwa razy następnie, przez siebie, coby iuż dało dziewiątą potęgę, i ieszcze raz przez tęż liczbę co uczyniłoby dziesiątą potęgę, i t. d.

218. Gdy chcemy oznaczyć wyniesienie iakiey liczby do potęgi danéy, piszemy z prawéy strony téy liczby nieco u góry cyfrę oznaczaiącą ile razy liczba dana ma być czynnikiem; np. chcąc oznaczyć 7 wyniesione do potęgi czwartéy, pisze się 7^4; $\frac{3}{5}$ do potęgi czwartéy oznaczemy $(\frac{3}{5})^4$. Liczba 4 zowie się *wykładnikiem.*

Wyciąganie pierwiastków wymaga reguł szczególnych. Wyłożemy ie nayprzód na pierwiastek kwadratowy, a następnie na sześcienny.

O wyciąganiu pierwiastków kwadratowych.

219. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z iakiéy liczby, iest to znaleźć liczbę która przez siebie rozmnożona wyda tę samę z któréy się ma wyciągnąć pierwiastek, ieżeli podana iest kwadratem zupełnym; lub ieżeli nim nie iest, wyda naywiększy kwadrat w niéy zawarty.

220. Gdy liczba dwoma tylko cyframi iest wyrażona, iéy pierwiastek ma tylko iednę: tak pierwiastek z 81 iest 9; pierwiastek z 99 iest ieszcze 9, które w liczbach całych zbliża się naywięcéy poniżéy pierwiastku prawdziwego z 99.

221. Aby wyciągnąć pierwiastek iakiéy liczby złożonéy z więcéy niż dwóch cyfer, uważam nayprzód iż każda liczba złożona z więcéy niż dwóch cyfer ma ich koniecznie więcéy niż iednę w swoim pierwiastku: np. 100, które iest naymnieysze z liczb o trzech cyfrach, ma ich dwie w swoim pierwiastku, który iest 10, więc każda liczba wyrażona więcéy niż dwoma cyframi, ma za pierwiastek liczbę złożoną z dziesiątków i iedności. Uważam także iż każda liczba złożona z więcey niż czterech cyfer, ma ich koniecznie więcéy niż dwie w swoim pierwiastku; bo 10000, które iest naymnieysze z liczb o pięciu cyfrach, ma za pierwiastek liczbę o trzech cyfrach która iest 100.

Więc, w ogólności, pierwiastek iakiéy liczby która ma więcéy niż dwie cyfry, będzie złożony z dziesiątków i iedności; dziesiątki będą czasem wyrażone kilką cyframi, lecz iedności zawsze tylko iedną (1).

---

(1) Widoczna iest iż iedności rzędów wyższych niż dziesiątki mogą być wyrażone przez iedności dziesiątków.

222. To założywszy, szukaymy iakie są części wchodzące w formowanie kwadratu liczby złożoney z dziesiątków i iedności, gdy ie poznamy, będzie nam łatwo odkryć pierwiastek iakieykolwiek liczby, albo przynaymniey naywiększego kwadratu w niey zawartego.

Zastanawiaiąc uwagę nad formowaniem kwadratu liczby złożoney z dziesiątków i iedności, iak n. p. z 34, widziemy, iż aby ią wynieść do kwadratu, mnoży się 1od 4 przez 4; 2re 3 przez 4; 3cie 4 przez 3 (czyli 3 przez 4); 4te 3 przez 3.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

Że zaś ostatnie działanie daie kwadrat dziesiątków; trzecie i drugie złączone daie dwa razy iloczyn dziesiątków przez iedności; a pierwsze daie kwadrat iedności: iest więc iasna iż kwadrat liczby złożoney z dziesiątków i iedności zawiera trzy części, to iest: 1od *kwadrat dziesiątków*, 2re *podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności*, 3cie *kwadrat iedności.*

223. Daymy iż trzeba wyciągnąć pierwiastek z 3364. Piszę tę liczbę iak ią tu widzieć;

$$\begin{array}{rr|l} 33 & 64 & 58 \\ \cline{3-3} 8 & 64 & 108 \\ & 0 & \end{array}$$

a że ma więcey niż dwie cyfry, pierwiastek iey będzie miał dziesiątki i iedności.

Nie znaiąc ich, wiem, iż 3364 zawiera kwadrat dziesiątków, podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

Kwadrat zaś dziesiątków iest liczbą stów, która maią dwa mieysca z prawey strony; więc oddzieliwszy kréską dwie cyfry w liczbie 3364, część z lewéy strony zawierać będzie kwadrat dziesiątków. Gdy część ta zawiera tylko dwie cyfry, widzę iż pierwiastek naywiększego kwadratu który ona zamyka nie może mieć tylko iednę cyfrę, i że ta iest 5.

Piszę ią w pierwiastku; odeymuie iéy kwadrat 25 od 33, reszta iest 8 obok któréy spuszczam przedział 64 i mam liczbę 864.

Odiąwszy iuż kwadrat dziesiątków od 3364, część pozostała 864 zawiera tylko podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

Podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, iest koniecznie liczbą dziesiątków, która powinna mieć iedno miéysce z prawéy strony (1); część 86 będzie więc zawierać podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności: dzieląc więc 86 przez podwóyność dziesiatków pierwiastka, wypadną na iloraz iedności pierwiastka (nº 96).

Piszę pod kréską 10 które iest podwóynością 5 dziesiątków. Iloraz liczby 86 podzielonéy przez 10 iest 8. Nim napiszę tę cyfrę w pierwiastku, doświadczam iéy sposobem następuiącym: piszę 8 obok 10, i mnożę 108 przez 8; tym sposobem robię zaraz podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności i kwadrat iedności. Jeżeli iloczyn z 108 przez 8 nie może być odięty od 864, wniosę iż 8 iest za wielkie i doświadczę cyfry bezpośrednie mniéyszéy; lecz widzę iż 864, będące tym iloczynem, może być odięte od 864; 8 więc iest prawdziwą liczbą iedności których szukam: piszę ią w pierwiastku, a że się nic nie zostaie po odięciu 864 od 864, liczba 58

(1) Dla tego w liczbie 864 znaczę sobie kropką cyfrę 6; to iest cyfrę przedostatnią.

iest pierwiastkiem dokładnym liczby 3364, która iest kwadratém zupełnym. Bo 58×58=3364.

224. Wypada z naszych działań, iż aby wyciągnąć pierwiastek z iakiéy liczby trzeba:

1od *Oddzielić dwie cyfry od prawéy ręki, wziąć kwadrat naywiększy zawarty w pierwszym przedziale od lewéy ręki, pierwiastek tego kwadratu napisać na miéyscu pierwiastka i kwadrat iego odiąć od tegoż przedziału.*

2re *Obok reszty spuścić następuiący przedział, naznaczyć punktem przedostatnią iego cyfrę iż iedności nie mogą składać dzielnego, i pozostułą część dzielić przez podwóyność znalezionych dziesiątków wziętą za dzielnik, iloraz który będzie liczbą iedności położyć obok dzielnika.*

3cie *Doświadczywszy go iż nie iest za wielki, napisać ten iloraz po prawéy stronie dziesiątków pierwiastka i rozmnożywszy przezeń powiększony iuż dzielnik, iloczyn wypadły który będzie zawierał podwóyność dziesiątków przez iedności i kwadrat iedności, odiąć od liczby z reszty, poprzedzaiącego i całego przedziału uformowanéy.*

Gdy nie masz reszty, liczba podana iest kwadratem zupełnym, ieżeli iest reszta; będzie ona nadmiarem liczby podanéy nad kwadrat liczby całéy napisanéy w pierwiastku.

225. Podług tego, wyciąganie pierwiastku liczby złożonéy z tyle cyfer ile zechcemy, nie ma iuż trudności: tak aby wyciągnąć pierwiastek z 49534, piszę tę liczbę iak ią tu widzieć:

4|9̇5|3̇4	222
9̇5	42
1134	442
250	

i postrzegam zaraz iż pierwiastek będzie złożony z dziesiątków i iedności. Oddzielam więc dwie cyfry od prawéy ręki, i kwadrat dziesiątków iest zawarty w części pozostałéy od lewéy ręki. Gdy ta część 495 ma więcéy niż dwie cyfry; pierwiastek iéy będzie złożony z dziesiątków i iedności; wyciągam ie nie uważaiąc na 34, to iest działam iak gdyby szło tylko o wzięcie pierwiastku z 495; ten pierwiastek który się znayduie iak się pokazało w przykładzie poprzedzaiącym, iest 22.

Spuściwszy obok reszty 11 przedział następuiący 34, co mi daie 1134, znaczę sobie punktem przedostatnią cyfrę i biorę 113 za podzielną; a uważaiąc 22 iako dziesiątki pierwiastka liczby podanéy 49534, podwaiam te 22 dziesiątki; co mi daie 44 za dzielnik; iloraz iest 2, które piszę obok 22 dziesiątków i obok ich podwóyności 44. Iloczyn liczby 442 przez 2 iest 884. Odeymuiąc go od 1134, zostaie się 250 na resztę i ta liczba iest nadmiarem kwadratu podanego nad kwadrat z 222.

Gdyby która podzielna nie zawierała właściwego dzielnika, natenczas napisałoby się zero w pierwiastku, tudzież obok dzielnika, który stałby się dzielnikiem następnym ieżeli się daléy ciągnąć ma działanie.

Widać z powyższego przykładu, iż iakkolwiek wielka byłaby liczba z któréy się ma wyciągać pierwiastek, znaydą się następnie cyfry tegoż pierwiastka przez wyciągania cząstkowe które się odbywaią koniecznie tym samym sposobem iak gdyby pierwiastek szukany miał tylko zawierać dwie cyfry.

226. Gdy iaka liczba nie iest kwadratem zupełnym, można za pomocą dziesiętnych przybliżyć prawdziwą wartość pierwiastka o tyle ile zechcemy. Na to trzeba przydać za przecinkiem z prawéy stro-

ny liczby danéy napisanym, liczbę zer podwóyną względem liczby cyfer dziesiętnych, które mieć chcemy w pierwiastku, potém wyciągnąć pierwiastek z liczby tak przygotowanéy nie maiąc uwagi na przecinek, nakoniec, oznaczyć w pierwiastku znalezionym liczbę cyfer dziesiętnych równą połowie liczby zer przypisanych do liczby danéy. Przydaiąc bowiem 2, 4, 6, i t. d. zer do liczby podanéy, powiększyliśmy ią sto, dziesięć tysięcy, milion i t. d. razy; a zatém z tak powiększonéy liczby otrzymany pierwiastek będzie 10, 100, 1000, i t. d. razy większy od pierwiastku szukanego. Dzieląc go więc przez 10, 100, 1000, i t. d. otrzymamy pierwiastek przez przybliżenie w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych, i t. d.

Tak, aby mieć pierwiastek z 964, zbliżony mniéy niż o iednę setną, piszę 964,0000; i wyciągam pierwiastek iak gdyby nie było przecinka, ten pierwiastek iest 3104, z resztą którą opuszczam. W tym kształcie iest on sto razy za wielki, ponieważ należy do liczby 10000 razy większéy niż liczba podana: aby go zwrócić do swéy prawdziwéy wartości, trzeba go sto razy zmnieyszyć; co się robi oddzielaiąc przecinkiem dwie cyfry z prawéy strony; pierwiastek więc z 964 zbliżony mniéy niż o iednę setną, iest 31,04. Aby się o tém przeświadczyć, dosyć iest przydać tylko iednę setną do pierwiastku znalezionego, to iest, wziąć za pierwiastek 31,05 iego kwadrat będzie większy niż 964. Oto iest wzór działania.

$$\begin{array}{r|l}
9|64|00|00 & 31,04 \\ \hline
64 & 61 \\
30000 & 62\ 04 \\
5184 &
\end{array}$$

227. Jeżeli są iuż dziesiętne w liczbie danéy do wyciągnienia pierwiastku zbliżonego, należy tylko przydać od prawéy ręki tyle zer ile trzeba do uczynienia w kwadracie przypuszczonym, liczby cyfer dziesiętnych parzystéy i podwóynéy, względem téy liczby dziesiętnych którą mieć chcemy w pierwiastku. Tak, aby wyciągnąć pierwiastek z 69, 3 zbliżony mniéy niż o iednę setną, napisze się 69,3000 i szukać trzeba pierwiastku iak gdyby była liczba 693000. Znalazłszy go, oddzieli się w nim dwie cyfry dziesiętne od prawéy ręki, i będzie 8,32 za pierwiastek z 69, 3 zbliżony mniéy niż o iednę setną.

228. Zachowuie się toż samo prawidło dla wyznaczenia pierwiastku liczb zawieraiących same tylko dziesiętne: Jeżeli idzie np. mieć pierwiastek z 0.469 przybliżony mniéy niż o iednę tysiączną napisze się nayprzód 0,469000 i wyciągnie potém pierwiastek iak gdyby była liczba 469000. Pierwiastek naywiększego kwadratu zawartego w téy liczbie iest 684. Pierwiastek więc z 0,469 zbliżony mniéy niż o iednę tysiączną, będzie 0,684.

229. Wyciągamy pierwiastek z ułomku biorąc pierwiastek licznika i pierwiastek mianownika. Tak pierwiastek z $\frac{4}{9}$ iest $\frac{2}{3}$.

Dziesiętne nastręczaią sposób naywygodniéyszy i nayprostszy do znalezienia, przez przybliżenie, pierwiastku ułomka gdy ten nie iest zupełnym kwadratem dla niewymierności iednego z swych wyrazów lub obudwu. W iednym iako i drugim przypadku, zaczyna się od zamiany ułomku podanego na dziesiętne tak, ażeby liczba wyrażaiąca ułomek zamieniony miała dwa razy tyle cyfer dziesiętnych ile ich mieć chcemy w pierwiastku. To przygotowanie uczyniwszy, będzie tylko szło, dla znalezienia pierwiastku szukanego, wyciągnąć go z wyrażenia dziesiętnego, na które zamieniliśmy ułomek podany.

Tak, aby znaleźć mniéy niż o iednę setną zbliżony pierwiastek ułomku $\frac{7}{9}$, zamieni się ułomek podany na ilość dziesiętną 0,7777 któréy pierwiastek 0,88 iest pierwiastkiem z $\frac{7}{9}$ przybliżonym mniéy niż o iednę setną.

Gdyby trzeba było wyciągnąć pierwiastek z liczby złożonéy z całości i z ułomku zwyczaynego, zamienia się ułomek na dziesiętne i wyciąga się pierwiastek podług (nº 227).

230 Tu nam się okazuie, iż gdy liczba nie iest kwadratem, nie możemy otrzymać iéy pierwiastka dokładnego lecz tylko przez przybliżenie. Pierwiastek natenczas zowie się *liczbą niespółmierną*. Bo choćbyśmy iak naydaléy posuwali wyciąganie iego za pomocą dziesiętnych, nie znaydziemy nigdy tak małych cząstek aby te służyły za spólną miarę i iedności i pierwiastkowi. W ogólności wszelkie ilości nie maiące spólnéy miary z iednością zowią się *niespółmierne* (incommensurabiles albo irrationales). Przeciwnie wszystkie inne *spółmiernemi* nazywamy (1).

231. Kiedy chcemy oznaczyć wyciąganie pierwiastku iakiéy liczby całkowitéy albo ułomkowéy, poprzedzamy tę liczbę znakiem $\sqrt{}$ który się wymawia *pierwiastek*. Tak aby oznaczyć wyciąganie pierwiastku

---

(1) Poznamy niżey znaczenie wyrazu *stosunek* a wtedy nam się wyiaśni, że wszelkich liczb całych lub ułomkowych maiących spólną miarę z iednością t. i. liczb *spółmiernych* może być dokładnie oznaczony stosunek z iednością; podobnego zaś stosunku co do liczb *niespółmiernych* oznaczyć nie można.

z 29, i pierwiastku z $\frac{3}{5}$, pisze się $\sqrt{29}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$ i wymawia się pierwiastek z 29; pierwiastek z $\frac{3}{5}$.

Zagadnienia.

232. I. Zrobić kwadrat 1) z 66342; 2) z 873,24; 3) z $\frac{635}{677}$?

II. Wyciągnąć pierwiastek 1) z 15625; 2) z 998001; 3) z 8116208 1?

III. Wyciągnąć pierwiastek przybliżony mniéy niż o iednę dziesiętną miliionową 1) z 2; 2) z 3; a mniéy niż o dziesięć tysiączną 3) z 1359,3969, 4) z $\frac{5}{7}$; 5) z $65\frac{43}{47}$?

IV. Dana liczba 4, znaleźć inną któréy różnica kwadratu z kwadratem danéy iest 48?

V. Dana iest liczba 6, znaleźć inną któréy kwadratu połowa rozmnożona przez kwadrat danéy wydaie iloczyn 25992?

VI. Daną liczbę 6 wynieść do potęgi 16?

O wyciąganiu pierwiastków sześciennych.

233. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z iakiéy liczby, iest to znaleźć liczbę która rozmnożona przez swóy kwadrat, wyda tęż samę z któréy się ma wyciągnąć pierwiastek, ieżeli podana iest sześcianem zupełnym; lub ieżeli nim nie iest, wyda naywiększy sześcian w niéy zawarty.

234. Jeżeli liczba podana nie ma więcéy nad trzy cyfry, iéy pierwiastek sześcienny będzie mieć tylko iednę; tak pierwiastek sześcienny z 729, iest 9; tenże z 999 iest ieszcze 9, które w liczbach całych zbliża się naywięcéy poniżéy prawdziwego pierwiastku sześciennego z 999.

16

235. Gdy liczba podana ma więcéy niż trzy cyfry, iéy pierwiastek sześcienny ma ich więcéy niż iednę: tak 1000, który iest naymniéyszą z liczb o czterech cyfrach, ma za pierwiastek sześcienny 10 które ma dwie cyfry. Podobnież liczba wyrażona więcéy niż sześcioma cyframi, ma ich więcéy niż dwie w swoim pierwiastku sześciennym. Tak 1000000, który iest naymniéyszy z liczb o siedmiu cyfrach, ma za pierwiastek sześcienny 100, które ma trzy cyfry.

Więc, w ogólności, pierwiastek sześcienny iakiéy liczby która ma więcéy niż trzy cyfry, będzie złożony z dziesiątków i iedności. Dziesiątki będą czasem wyrażone kilką cyframi, lecz iedności zawsze tylko iedną. Zważmy iak się te części znayduią skombinowane w formowaniu sześcianu.

236. Dla uformowania sześcianu iakiéy liczby złożonéy z dziesiątków i iedności, iak 34, trzeba mnożyć iéy kwadrat 1156 przez 34; czyli co na iedno wychodzi, trzeba mnożyć przez iedności i dziesiątki liczby 34, trzy części z których 1156 iest złożone; to iest: kwadrat dziesiątków, podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

A 1od kwadrat iedności rozmnożony przez iedności daie sześcian iedności.

2re podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności rozmnożony ieszcze przez iedności, wyda podwóyny iloczyn dziesiątków przez kwadrat iedności, czyli podwóyny kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki.

3cie kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności, wyda raz kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności.

4te kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki, wyda raz kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki.

5te Podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności rozmnożony przez dziesiątki, wyda podwóyny kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności.

6te Nakoniec, kwadrat dziesiątków rozmnożony przez dziesiątki, wyda sześcian dziesiątków.

Zbierzmy te różne iloczyny czyniąc tylko iednę summę z tych które są iednegoż gatunku; znaydziemy iż sześcian z 34, a zatém sześcian liczby złożoney z dziesiątków i iedności, zawiera cztéry części, to iest: 1od *sześcian dziesiątków*; 2re *potróyny kwadrat dziesiątków przez iedności*; 3cie *potróyny kwadrat iedności przez dziesiątki*; 4te *sześcian iedności.*

237. Zadaymy sobie teraz wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby n. p. 91125.

Że ta liczba złożona iest z więcéy niż trzech cyfer, pierwiastek iéy sześcienny będzie miał dziesiątki i iedności, a zatém liczba podana zawiera, sześcian dziesiątków, potróyny kwadrat dziesiątków przez iedności, potróyny kwadrat iedności przez dziesiątki, i sześcian iedności. Że zaś sześcian dziesiątków iest liczbą tysięcy, które maią trzy miéysca z prawéy strony, więc oddzieliwszy kréską trzy cyfry w liczbie 91125, część pozostała z lewéy strony zawierać będzie sześcian dziesiątków.

$$\begin{array}{r|l} 91|125 & 45 \\ \hline 27125 & 48 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 4800 \times 5 = & 24000 \\ 75 \times 40 = & 3000 \\ \text{sześcian z } 5 = & 125. \\ \hline \text{summa} & 27125. \end{array}$$

Naywiększy sześcian zawarty w 91 iest 64 którego pierwiastek iest 4; piszę go w pierwiastku i odeymuię iego sześcian 64 od 91; reszta iest 27, obok któréy spuszczam przedział następuiący 125, i mam liczbę 27125.

Lecz, odiąwszy sześcian dziesiątków z liczby podanéy; 27125 zawiera iuż tylko potróyny kwadrat dziesiątków przez iedności, potróyny kwadrat iedności przez dziesiątki, i sześcian iedności.

Pierwsza z tych części będąc liczbą stów ma koniecznie dwa mieysca od prawéy ręki (1); będzie się więc zawierać w 271. Dzielę 271 przez 48 które iest potróynością kwadratu z 4; iloraz 5 daie iedności pierwiastka.

Nim go napiszę doświadczam go pierwéy, mnożąc 1^{e} 4800 potróyność kwadratu dziesiątków przez tęż liczbę 5, iloczyn iest 24000.

2^{e} 75 potróyność kwadratu iedności przez 40, to iest przez dziesiątki, iloczyn iest 3000.

Nakoniec, biorę sześcian z 5 który iest 125. Jeżeli summa tych trzech iloczynów nie może być odiętą od 27125, wniosę ztąd iż 5 iest za wielkie, i doświadczę cyfry bezpośrednie niższéy; lecz postrzegam iż summa tych trzech iloczynów, to iest, 27125 może być odięta od 27125; 5 więc iest prawdziwą liczbą iedności których szukam, i piszę ie w pierwiastku.

A że się nic nie zostaie po odeymowaniu, 45 iest pierwiastkiem sześciennym liczby podanéy 91125, która iest sześcianem zupełnym. W samey rzeczy pomnożywszy 2025 kwadrat z 45, przez tęż liczbę

---

(1) Dla tego w liczbie 27125 znaczę sobie kropką cyfrę 1 to iest cyfrę trzecią od końca.

45, znaydzie się liczba podana 91125; czyli co na toż wychodzi $45 \times 45 \times 45 = 91125$.

238. Postępuiąc drogą naszych działań wypada, iż dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego z iakiéy liczby trzeba:

1od *Oddzielić trzy cyfry od prawéy ręki, wziąć naywiększy sześcian zawarty w pierwszym przedziale od lewéy ręki, pierwiastek tego sześcianu napisać na mieyscu pierwiastka, i sześcian iego odiąć od tegoż przedziału.*

2re *Obok reszty spuścić następuiący przedział, oznaczyć punktem trzecią od końca iego cyfrę, iż dziesiątki i iedności nie mogą składać dzielnego, i pozostałą część dzielić przez potróyny kwadrat dziesiątków pierwiastka wzięty za dzielnik, a iloraz który będzie liczbą iedności położyć obok dzielnika.*

3cie *Doświadczywszy go iż nie iest za wielki, napisać ten iloraz po prawéy stronie dziesiątków pierwiastka, i trzy iloczyny, to iest: potróyny kwadrat dziesiątków przez ten iloraz* (iedności), *potróyny kwadrat tego ilorazu przez dziesiątki, i sześcian z tegoż ilorazu dodane w summę, odiąć od liczby z reszty poprzedzaiącego i całego spuszczonego przedziału uformowanéy.*

Gdy nie masz reszty, liczba podana iest sześcianem zupełnym; ieżeli iest reszta, będzie ona nadmiarem liczby podanéy nad sześcian liczby całéy napisanéy w pierwiastku.

239. Podobnie się będzie postępować dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego iakiéykolwiek liczby złożonéy z tyle cyfer ile się podoba. Tak, aby

wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 126539137, piszę ią iak następuie:

$$\begin{array}{r|l} 126|539|137 & 502 \\ \hline 1539\,137 & 75 \\ 33\,129 & 7500 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 750000 \times 2 & = & 1500000 \\ 12 \times 500 & = & 6000 \\ \text{sześcian z } 2 & = \ldots & 8 \\ \hline \text{Summa} & & 1506008 \end{array}$$

i postrzegam zaraz, iż pierwiastek będzie złożony z dziesiątków i iedności. Oddzielam więc trzy cyfry od prawéy ręki. Sześcian dziesiątków iest zawarty w części pozostałéy od léwéy ręki, to iest w 126539. Gdy zaś ta liczba ma więcéy niż trzy cyfry, pierwiastek iéy, będzie złożony z dziesiątków i iedności: wyciągam ie nie uważaiąc 137, to iest, działam iak gdyby tylko szło o znalezienie pierwiastka sześciennego z 126539; ten pierwiastek iest 50, i zostaie 1539.

Obok 1539 spuszczam przedział 137, i mam liczbę 1539137. Znaczę sobie punktem trzecią od końca cyfrę i biorę 15391 za podzielną; a uważaiąc 50 iako dziesiątki pierwiastka całéy liczby 126539137, biorę za dzielnik 7500 potróyny kwadrat z 50; dzielę 15391 przez 7500; iloraz iest 2.

Pisząc 2 po 50, liczba ta staie się 50 dziesiątków czyli 500. Mnożę przez 2 potróyny kwadrat z 500, który iest 750000, iloczyn iest 1500000. Mnożę 12 potróyny kwadrat iedności przez 50 dziesiątków, iloczyn iest 6000.

Nakoniec sześcian liczby 2 iedności, iest 8, summa tych trzech iloczynów iest 1506008, które odeymuię od 1539137; a reszta 33129 iest nadmiarem liczby podanéy nad sześcian z 502.

Jasna więc iż iakkolwiek wielka byłaby liczba, znaydzie się łatwo iéy pierwiastek sześcienny, przez wyciągania cząstkowe, które się odbywaią iak gdyby pierwiastek miał tylko dwie cyfry zawierać.

240. Gdy liczba iaka nie iest sześcianem zupełnym, a chcemy przybliżyć za pomocą dziesiętnych prawdziwy pierwiastek sześcienny, przypisuie się za przecinkiem z prawéy strony téy liczby napisanym, trzy razy tyle zer ile chcemy mieć dziesiętnych w pierwiastku; potém wyciąga się pierwiastek z liczby tak przygotowanéy, iak gdyby to była liczba całkowita; nakoniec odcina się w pierwiastku znalezionym, liczba cyfer dziesiętnych równa trzeciéy części liczby zer, któreśmy przypisali do liczby danéy. Przydaiąc bowiem 3, 6, 9 i t. d. zer do liczby podanéy, zwiększamy ią tysiąc, miliion, biliion, i t. d. razy, a zatém z tak powiększonéy liczby otrzymany pierwiastek będzie 10, 100, 1000, i t. d. razy większy od pierwiastku szukanego. Dzieląc go więc przez 10, 100, 1000, i t. d. otrzymamy pierwiastek przez przybliżenie w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych, i t. d.

Tak, ażeby znaleźć pierwiastek sześcienny z 58 zbliżony mniéy niż o iednę setną, działam iak gdybym miał wziąć pierwiastek sześcienny z 58000000; ten pierwiastek iest 387 z resztą którą opuszczam. W tym kształcie, 387 iest sto razy za wielkie, ponieważ należy do liczby 1000000 razy większéy niż 58. Aby go zwrócić do prawdziwéy iego ważności, zmniéyszam go sto razy, odcinaiąc przecinkiem dwie cyfry z prawéy strony. Pierwiastek więc sześcienny z 58 zbliżony mniéy niż o iednę setną iest 3,87;

bo sześcian z 3,88 byłby iuż większy niż 58. Oto iest wzór działania:

$$\begin{array}{r|l}
58|000|000 & 3,87 \\ \cline{2-2}
31\,000 & 27 \\
3\,128000 & 4332 \\
39397 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
2700 \times 8 & = & 21600 \\
192 \times 30 & = & 5760 \\
8^3 & = & 512 \\ \hline
\text{summa} \ldots & & 27872
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcr}
433200 \times 7 & = & 3032400 \\
192 \times 380 & = & 55860 \\
7^3 & = & 343 \\ \hline
\text{summa} \ldots & & 3088603
\end{array}$$

241. Gdy są iuż dziesiętne w liczbie z którey chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny zbliżony, należy tylko przydać od prawéy ręki tyle zer ile potrzeba do uczynienia w sześcianie przypuszczonym, liczby cyfer dziesiętnych potróynéy względem liczby dziesiętnych którą miéć chcemy w pierwiastku. Tak, dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego z 19, 54 zbliżonego mniéy iak o iednę setną; napisze się 19,540000 i szukać się będzie ich pierwiastku, iak gdyby było 19540000. Znalazłszy go oddzieli się w nim dwie cyfry dziesiętne, i będzie 2,69 na pierwiastek sześcienny z 19,54 mniéy niż o iednę setną zbliżony.

242. Taż sama zasada służy do oznaczenia pierwiastku sześciennego liczb zawieraiących same tylko dziesiętne. Aby miéć n. p. pierwiastek sześcienny, z 0,6 zbliżony mniéy niż o iednę setną, napisze się 0,600000 i wyciągnie się z nich pierwiastek sześcienny iak gdyby była liczba 600000. Pierwiastek naywiększego sześcianu zawartego w téy liczbie iest 84;

pierwiastek więc sześcienny z 0,6 zbliżony mniéy niż o iednę setną, iest 0,84.

243. Wyciągamy pierwiastek sześcienny z ułomku biorąc pierwiastek sześcienny z licznika i pierwiastek sześcienny z mianownika. Tak pierwiastek sześcienny z $\frac{27}{64}$ iest $\frac{3}{4}$.

Kiedy potrzeba wyciągnąć przez przybliżenie pierwiastek sześcienny z ułomku który nie iest sześcianem zupełnym dla niewymierności iednego z swych wyrazów lub obudwu, zaczyna się od zamiany ułomku na dziesiętne tak, ażeby liczba wyrażaiąca ułomek zamieniony, miała trzy razy tyle dziesiętnych ile ich mieć chcemy w pierwiastku; nie będzie iuż więcéy szło dla znalezienia pierwiastku szukanego, iak tylko wyciągnąć go z ilości dziesiętnéy na którą zamieniliśmy ułomek podany. Tak aby mieć, mniéy iak o iedną setną zbliżony pierwiastek sześcienny z $\frac{4}{9}$, zamieni się ułomek podany na wyrażenie dziesiętne 0,444444444 którego pierwiastek sześcieny 0,763 iest pierwiastkiem z $\frac{4}{9}$ mniéy niż o iednę tysiączną zbliżonym.

Jeżeli idzie o wyciągnienie pierwiastku sześciennego z liczby całkowitéy połączonéy z ułomkiem zwyczaynym zamieni się ułomek na dziesiętne, i wyciąga się pierwiastek podług n° 341.

244. Widziemy tu iż co się wyżéy powiedziało (n° 230) o niespółmierności pierwiastków kwadratowych, zastosować należy i do pierwiastków sześciennych, a w ogólności i do pierwiastków innych potęg.

245. Gdy chcemy oznaczyć iż trzeba wyciągnąć pierwiastek sześcienny z iakiéy liczby całkowitéy lub ułomkowéy, poprzedzamy tę liczbę znakiem $\sqrt[3]{}$ Tak aby oznaczyć wyciąganie pierwiastku sześciennego z 125, toż z $\frac{5}{7}$, piszę się $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$. Wymawia się: pierwiastek sześcienny z 125; pierwiastek sześcienny z $\frac{5}{7}$.

246. Umieiąc wyciągać pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny, można wyciągnąć pierwiastek czwarty, pierwiastek szósty, pierwiastek ósmy, dziewiąty, dwunasty, szesnasty, ośmnasty, dwudziesty czwarty, i t. d. i w ogólności pierwiastek z liczby któréy wykładnik iest potęgą z 2, lub potęgą z 3; lub iloczynem potęgi z 2 przez potęgę z 3.

Otrzymuiemy pierwiastek czwarty przez dwa wyciągania następne pierwiastku kwadratowego; pierwiastek szósty, przez dwa wyciągania następne iedno pierwiastka kwadratowego, a drugie sześciennego; pierwiastek ósmy, przez trzy wyciągania następne pierwiastku kwadratowego; pierwiastek dziewiąty przez dwa wyciągania następne pierwiastku sześciennego; pierwiastek dwunasty, przez trzy wyciągania następne dwa pierwiastku kwadratowego, a iedno pierwiastku sześciennego, i t. d. (n° 217).

Naprzykład, niechby potrzeba było wyciągnąć pierwiastek czwarty, szósty i dwunasty z 4096; będzie

$\sqrt[4]{4096}=8$; ponieważ $\sqrt{4096}=64$, a $\sqrt{64}=8$.

$\sqrt[6]{4096}=4$; ponieważ $\sqrt{4096}=64$, a $\sqrt[3]{64}=4$.

$\sqrt[12]{4096}=2$ ponieważ $\sqrt{4096}=64$, $\sqrt{64}=8$, $\sqrt[3]{8}=2$.

Zobaczemy poniżéy iak za pomocą logarytmów można wyciągać pierwiastek piąty, siodmy, dziesiąty (1), i t. d.

Zagadnienia.

247. I. Zrobić sześcian 1) z 5208; 2) z 37,24; 3) z $\frac{84}{127}$?

(1) Z liczby z któréy się ma wyciągnąć pierwiastek dziesiąty, wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie iuż tylko potęga piąta, a zatém pozostaie tylko wyciągnąć pierwiastek piąty. Toż się rozumie i o innych potęgach których wykładniki nie są liczbami pierwotnemi.

II. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny 1) z 68099136; 2) z 20537900; 3) z 9790843852 9?

III. Wyciągnąć $\sqrt[3]{}$ przybliżony mniéy iak o iednę dziesiątą milionową 1) z 3; 2) z 4; a mniéy niż o iedną dziesiątą tysiączną; 3) z 48,5624; 4) z $\frac{7}{8}$ 5) z $29\frac{11}{13}$?

IV. Dana iest liczba 8, znaleźć inną któréy różnica sześcianu z sześcianem danéy iest 1216?

V. Dana iest liczba 9, znaleźć inną któréy sześcianu połowa podzielona przez sześcian danéy, wydaie iloraz 4?

VI. Wyciągnąć $\sqrt[16]{}$ z 152587890625?

O stosunkach, proporcyiach i postępach.

248. Nie można poznać wielkości iak tylko przez porównywanie. W arytmetyce porównywamy ie tylko tyle ile są wyrażone w liczbach. Każda nawet liczba iest oznaczeniem iakiegoś porównania.

249. Wypadek który znayduiemy porównywaiąc dwie ilości iednegoż gatunku nazywa się *stosunkiem*.

250. Można porównywać dwie ilości aby wiedzieć o ile iedna przewyższa drugą, lub ile razy iedna zawiera drugą. Tak mogę porównywać 4 do 8 ażeby wiedzieć o ile liczba 8 przewyższa 4, lub ile razy zawiera 4.

251. Dwie ilości które porównywamy nazywaią się *wyrazami* stosunku; wyraz który piszemy lub wymawiamy pierwszy nazywa się *poprzednikiem*, a drugi *następnikiem*.

252. Kiedy porównywamy dwie ilości, ażeby wiedzieć o ile iedna przewyższa drugą, stosunek zawisł na różnicy którą znayduiemy *odeymuiąc po-*

przednik od następnika i nazwiemy go *stosunkiem różnicowym*. Tak stosunek różnicowy między liczbami 4 i 6, który się pisze tak 4 · 6 iest 6—4=2; a stosunek 10 · 7 iest 7—10=—3. Możnaby odeymować następnik od poprzednika lecz zatrzymamy iednostaynie sposób pierwszy (1).

253. Więc, w każdym stosunku różnicowym, następnik równy iest summie z poprzednika i stosunku (n° 58) np. 6=4+2; 7=10—3.

254. Kiedy porównywamy dwie ilości, ażeby wiedzieć ile razy iedna zawiera drugą, stosunek zawisł na ilorazie który znayduiemy *dzieląc następnik przez poprzednik*, i nazwiemy go *stosunkiem ilorazowym* albo prosto *stosunkiem*.

Tak stosunek ilorazowy liczb 5 i 20, który się pisze 5 : 20 iest $\frac{20}{5}$=4; a stosunek 9 : 3 iest $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Możnaby dzielić poprzednik przez następnik, lecz zatrzymamy iednostaynie sposób pierwszy (2).

255. Więc, w każdym stosunku ilorazowym następnik równy iest iloczynowi z poprzednika i stosunku (n° 84) np. 20=5×4; 3=9×$\frac{1}{3}$.

256. Łatwo tu postrzedz że następnik i poprzednik iest to samo co podzielna i dzielnik, albo co licznik i mianownik; stosunek zaś to samo co iloraz

---

(1) Gdybyśmy tu brali różnicę między poprzednikiem i następnikiem, t. i. odeymowali następnik od poprzednika, natenczas za powiększeniem poprzednika lub zmnieyszeniem następnika stosunekby się powiększał, i przeciwnie; lecz podług nas zwiększa się za powiększeniem następnika lub zmnieyszeniem poprzednika, i. przeciwnie.

(2) Gdybyśmy tu dla znalezienia stosunku dzielili poprzednik przez następnik, tedy za powiększeniem poprzednika lub zmnieyszeniem następnika powiększałby się stosunek, i przeciwnie; lecz podług nas stosunek zwiększa się za powiększeniem następnika lub zmnieyszeniem poprzednika, i przeciwnie.

albo ważność ułomka. Jloraz więc, ułomek i stosunek iest tąż samą rzeczą lecz pod różnym względem.

257. Porównanie dwóch stosunków równych nazywa się *proporcyią*. Nazywamy *proporcyią różnicową*, ieżeli dwa stosunki są różnicowe; nazywamy zaś *proporcyią ilorazową* albo tylko *proporcyią* ieżeli stosunki są ilorazowe: np. stosunek różnicowy liczb 4 i 6, iest równy stosunkowi liczb 9 i 11, czyli co na iedno wychodzi $6-4=11-9$. Mogę więc mówić 4 iest do 6, iak 9 iest do 11, co się pisze sposobem następuiącym; $4 \cdot 6 : 9 \cdot 11$.

Podobnież $7-10=9-12$, więc $10 \cdot 7 : 12 \cdot 9$. Punkt będący między dwoma wyrazami każdego stosunku oznacza i wymawia się *iest do*, a dwa punkta albo też znak równości ($=$) znayduiące się między dwoma stosunkami oznaczaią i wymawiaią się *iak*.

Stosunek ilorazowy liczb 5 i 20, iest równy stosunkowi liczb 6 i 24; to iest iż $\frac{20}{5}=\frac{24}{6}$ powiem więc 5 iest do 20, iak 6 iest do 24, co się pisze tak; $5:20::6:24$. Podobnież $\frac{3}{9}=\frac{7}{21}$; więc $9:3::21:7$. Dwa punkta będące między dwoma wyrazami każdego stosunku oznaczaią i wymawiaią się *iest do*, a cztery punkta, albo też znak równości ($=$) znayduiące się między dwoma stosunkami oznaczaią, i wymawiaią się *iak*.

258. Ponieważ każdy stosunek składa się z dwóch wyrazów, iasna iest, iż proporcyia składa się z czterech, i że pierwszy i trzeci są poprzednikami, gdy drugi i czwarty, są następnikami.

259. Gdy w dwóch stosunkach ilorazowych pierwszy poprzednik iest do swego następnika iak drugi poprzednik iest do swego następnika mówi się *iż dwa ostatnie wyrazy są w stosunku prostym* dwóch pierwszych. Gdy zaś pierwszy poprzednik iest do swego następnika iak drugi następnik iest do swego po-

przednika, mówi się natenczas iż dwa ostatnie wyrazy są *w stosunku odwrotnym* dwóch pierwszych. Liczby 4, 8 są w stosunku prostym 3, 6; liczby 14, 7 są w stosunku odwrotnym 5, 10.

260. Nazywaią się *skrayne* pierwszy i ostatni wyraz proporcyi; drugi i trzeci nazywaią się *średniemi* (1).

261. Jeżeli drugi wyraz proporcyi będący następnikiem pierwszego stosunku, iest oraz poprzednikiem drugiego, proporcyia nazywa się *ciągła*, tak 3 · 5 : 5 · 7 iest proporcyią różnicową ciągłą która się pisze tak, $\div$ 3 · 5 · 7. Proporcyia 2 : 4 = 4 : 8 iest proporcyią ilorazową ciągłą która się pisze tak, $\div\!\div$ 2 : 4 : 8.

Znak $\div$ napisany przed proporcyią różnicową ciągłą, a znak $\div\!\div$ przed proporcyią ilorazową ciągłą, oznacza iż wymawiaiąc proporcyią, trzeba powtórzyć dwa razy wyraz w środku, który się nazywa *średni proporcyionalny* albo tylko średni (to iest: trzeba wymawiać proporcyią tak, iak gdyby była napisana w sposobie proporcyi zwyczaynéy). Wszystkie wyrazy proporcyią ciągłą składaiące nazywaią się *ciągło-proporcyionalne*.

262. Nazywa się *postępem różnicowym* ciąg wyrazów które wzięte następnie, maią między sobą iednakową różnicę; a nazywa się *postępem ilorazowym* ciąg wyrazów które podzielone następnie ieden przez drugi, daią ten sam iloraz.

Ciąg $\div$ 3 · 6 · 12 · 15, i t. d. iest postępem różnicowym. Różnica 3 znayduiąca się między wyrazami następnemi, nazywa się *stosunkiem postępu*.

Ciąg $\div\!\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32, i t. d. iest postępem ilorazowym. Iloraz znayduiący się z podzielenia wyrazów

---

(1) Gdy się mówi dla krótkości *skrayny*, *skrayne*; *średni średnie*; łatwo się domyśléć można *wyraz wyrazy*.

następnych ieden przez drugi, zowie *stosunkiem postępu.*

Znak $\div$ poprzedzaiący postęp różnicowy, i znak $\div\div$ poprzedzaiący postęp ilorazowy, oznaczaią iż wymawiaiąc postęp, trzeba powtórzyć dwa razy każdy wyraz, wyiąwszy pierwszy i ostatni.

263. Postępy mogą być *rosnące* albo *maleiące* (*wstępuiące* albo *sstępuiące*). Postęp iest rosnący, gdy wyrazy następuią zwiększaiąc się; postęp różnicowy i postęp ilorazowy wyżéy położone są rosnące.

Postęp iest maleiący, gdy wyrazy następuią zmniéyszaiąc się; np. $\div 19 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3$ iest postępem różnicowym maleiącym; $\div\div 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2$ iest postępem ilorazowym maleiącym. (1).

Wyłożemy tu własności szczególne proporcyy i postępów tak różnicowych iak i ilorazowych.

O własnościach proporcyy i postępów różnicowych.

264. *W każdéy proporcyi różnicowéy summa wyrazów skraynych iest równa summie średnich.*

Naprzykład, w proporcyi $4 \cdot 6 : 7 \cdot 9$; $4+9$ czyli 13 summa skraynych, $= 6+7$ czyli 13, summie średnich. W proporcyi $3 \cdot 1 : 7 \cdot 5$; $3+5$ czyli 8, summa skraynych, $= 1+7$ czyli 8 summie średnich.

Toż się rozumie o każdéy innéy proporcyi różnicowéy; bo w takiéy proporcyi każdy następnik iest równy summie z swego poprzednika i z różnicy spól-

(1) Jest ieszcze trzeci gatunek proporcyy i postępów które się zowią *harmoniczne*, lecz te mniéy rozciągłego będąc użytku nie zaymuią zwykle mieysca w pospolitych arytmetykach, i dla tego ie opuszczamy. Chcący poznać ie niech czyta między innemi. *Traité complet d'Arith. par Trincano.* Paris 1781 kar. 504.

néy; więc na miéysce każdego następnika można położyć summę z iego poprzednika i z różnicy spólnéy. Po takiéy zaś zamianie, summa skraynych i summa średnich znayduią się złożone z tychże samych ilości, któremi są dwa poprzedniki i stosunek spólny; więc obie te summy są równe (1) więc, *w każdéy proporcyi różnicowéy summa*, i t. d.

265. Więc 1od *w każdéy proporcyi różnicowéy ciągłey, summa skraynych iest równa podwóynemu średniemu.*

Bo np. gdy proporcyia różnicowa ciągła $\div 3 \cdot 7 \cdot 11$ iest taż sama co $3 \cdot 7 : 7 \cdot 11$, będzie na summę skraynych $11+3$ czyli $14=7+7$ czyli podwóyności z 7.

266. Więc 2re *łatwo iest poznać czwarty wyraz proporcyi różnicowéy którey trzy inne są znane.* Jeżeli wyraz którego szukamy iest skrayny, znaydziemy go odeymuiąc od summy średnich skrayny wiadomy; ieżeli wyraz którego szukamy iest średni, znaydziemy go odeymuiąc od summy skraynych średni wiadomy (2); np. ieżeli znamy trzy wyrazy 5, 7, 9,

---

(1) W proporcyi różnicowéy $4 \cdot 6 : 7 \cdot 9$, iest $6=4+2$ a $9=7+2$. Położywszy $4+2$ na miéyscu 6, i $7+2$ na mieyscu 9, proporcyia poprzedzaiąca zamienia się na tę $4 \cdot 4+2 : 7 \cdot 7+2$. Summa zaś $4+7+2$ skraynych, iest złożona z tychże ilości co summa $4+2+7$ średnich. W proporcyi $3 \cdot 1 : 7 \cdot 5$, iest $1=3-2$, a $5=7-2$, proporcyia więc zamienia się na $3 \cdot 3-2 : 7 \cdot 7-2$. Jest zaś summa $3+7-2$ skranych złożona z tychże samych ilości co summa $3-2+7$ średnich.

(2) Gdyby się od summy skraynych odiął ieden skrayny, otrzymałby się drugi skrayny na różnicę. Że zaś summa średnich iest zupełnie taż sama co summa skraynych, więc odeymuiąc od summy średnich skrayny wiadomy, znaydzie się skrayny szukany. Gdyby się od summy średnich odiął ieden średni, otrzymałby się na różnicę drugi średni. Że zaś summa skraynych iest zupełnie taż sama co summa średnich; więc, odeymuiąc od summy skraynych średni wiadomy, znaydzie się średni szukany.

proporcyi różnicowéy, a 5 iest iednym ze skraynych, szukam drugiego skraynego; dodaię średnie 7, 9, i od ich summy 16 odeymuię 5, reszta 11 będzie skraynym szukanym; tak iż proporcyia zupełna będzie 5 · 7 : 9 · 11, albo 11 · 7 : 9 · 5.

Gdy trzy wyrazy 3, 7, 9, proporcyi różnicowéy są dane, a 7 iest iednym średnim, ieżeli żądaią: drugiego średniego; dodam skrayne 3, 9, i od ich summy 12 odeymuię 7; reszta 5 będzie średnim żądanym; tak iż proporcyia zupełna będzie 3 · 5 : 7 · 9, albo 3 · 7 : 5 · 9.

267. Jeżeli idzie o wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy, iasna iest iż go znaydziemy *biorąc połowę skraynych*. Tak, ażeby znaleźć wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy któréy 4 i 8 są skraynemi, dodaię te dwie liczby, ich summa iest 12, któréy połowa 6 iest średnim szukanym. Proporcyia więc zupełna iest $\div$4 · 6 · 8, lub $\div$8 · 6 · 4.

268. *Ile razy cztery liczby iak* 6, 5, 4, 3, *są takie, iż summa skraynych iest równa summie średnich, takie cztery liczby składaią proporcyią różnicową.*

W saméy rzeczy, gdy $6+3=5+4$, będzie, odeymuiąc 3 z iednéy i z drugiéy strony, $6=5+4-3$; ieżeli w tym wypadku, odeymiemy 5 z iednéy i drugiéy strony, będzie $6-5=4-3$; więc 5 · 6 = 3 · 4 (n° 257). Więc *ile razy cztéry liczby* i t. d.

269. Więc 1od *ieżeli summa dwóch liczb iest równa summie dwóch innych, można wziąć dwie pierwsze za skrayne a dwie drugie za średnie wyrazy proporcyi różnicowéy.* Tak ztąd że $10+5=8+7$ wnoszę iż 10 · 8 : 7 · 5, lub 5 · 8 : 7 · 10.

Więc 2re *ieżeli cztéry liczby są w proporcyi różnicowéy, składać ią także będą, iakiekolwiek* *odmiany czynić z niemi będziemy, aby tylko była równość między iloczynem skraynych i iloczynem średnich.*

Tak ztąd że $8 \cdot 6 = 7 \cdot 5$; wnoszę iż

$$1^{e}\left\{\begin{array}{l} 8 \cdot 7 = 6 \cdot 5 \\ 7 \cdot 8 = 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 5 = 8 \cdot 6 \\ 5 \cdot 7 = 6 \cdot 8 \\ 5 \cdot 6 = 7 \cdot 8 \\ 6 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \\ 6 \cdot 8 = 5 \cdot 7 \end{array}\right. \qquad 2^{e}\left\{\begin{array}{l} 8+3 \cdot 6+3 = 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6 = 7+3 \cdot 5+3 \\ 8+3 \cdot 6 = 7+3 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6+3 = 7 \cdot 5+3 \\ 8-3 \cdot 6-3 = 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6 = 7-3 \cdot 5-3 \\ 8-3 \cdot 6 = 7-3 \cdot 3 \\ 8 \cdot 6-3 = 7 \cdot 5-3 \end{array}\right.$$

$$3^{e}\left\{\begin{array}{l} 8\times2 \cdot 7\times2 = 6\times2 \cdot 5\times2 \text{ czyli } 16 \cdot 14 = 12 \cdot 10. \\ \frac{8}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{2} \text{ czyli } 4 \cdot 3\frac{1}{2} = 3 \cdot 2\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Bo we wszystkich tych przykładach, summa skraynych równa iest summie średnich.

270. Nakoniec, ieżeli dodamy do siebie wyrazy odpowiadaiące dwóch lub więcéy proporcyy różnicowych, lub odeymiemy od siebie wyrazy odpowiadaiące dwóch takich proporcyy, summy lub reszty ztąd wypadłe będą także w proporcyi różnicowéy; n. p. maiąc dwie proporcyie różnicowe.

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 8 = 4 \cdot 7 \\ \text{i} \quad 1 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \\ \hline \end{array}$$

summy odpowiadaiących wyrazów są:

$$6 \cdot 10 = 7 \cdot 11$$

różnice zaś wyrazów odpowiadaiących są:

$$4 \cdot 6 = 1 \cdot 3$$

Widoczna zaś iż te summy i te różnice są w proporcyi różnicowéy.

Stosunki wypadaiące z dwóch lub więcéy stosunków różnicowych dodanych poprzednik do poprzednika i następnik do następnika, zowią się *stosunki różnicowe złożone.*

Przeydźmy do postępów różnicowych.

271. *W każdym postępie różnicowym, wyraz którykolwiek równy iest pierwszemu więcéy stosunek tyle razy wzięty, ile wyrazów poprzedza ten o który idzie.*

Bo postęp różnicowy iest ciągiem wyrazów które wzięte następnie maią między sobą iednakową różnicę, więc

1e drugi wyraz postępu równy iest summie pierwszego więcéy stosunek, to iest pierwszemu więcéy raz stosunek.

2e trzeci wyraz postępu równy iest summie drugiego więcéy stosunek; więc równy iest pierwszemu więcéy dwa razy stosunek.

3e czwarty wyraz postępu równy iest summie trzeciego więcéy stosunek; więc równy iest pierwszemu więcéy trzy razy stosunek, i tak daléy (1); więc w *każdym postępie różnicowym wyraz którykolwiek, i t. d.*

272. Więc, *w każdym postępie różnicowym który ma zero za pierwszy wyraz, wyraz którykolwiek równy iest stosunkowi wziętemu tyle razy ile wyrazów poprzedza ten, o który idzie.*

273. Prawidło ustanowione (nº 271) służy do włożenia między dwa wyrazy dane iakiéykolwiek li-

---

(1) W postępie rosnącym $\div$ 18 . 21 . 24 . 27 . 30, i t. d. iest 1e $21=18+3=18+$ raz $3=18+1\times 3$;
2e $24=21+3=18+2$ razy $3=18+2\times 3$, i t. d.
W postępie różnicowym maleiącym $\div$ 18 . 15 . 12 . 9 . 6, i t. d. iest 1e $15=18-3=18+1$ raz $-3=18+1\times -3$;
2e $12=15-3=18+2$ razy $-3=18+2\times -3$, i t. d.

czby wyrazów średnich, któreby były z danemi w postępie różnicowym.

Jeżeli idzie n. p. złączyć 11 i 19 przez trzy liczby któreby były w postępie różnicowym z 11 i 19, widzę iż ten postęp będzie złożony z pięciu wyrazów, i że znaiąc pierwszy pozostaie mi tylko do uformowania następnych znaleźć stosunek postępu. Wiem zaś iż piąty i ostatni wyraz 19 składa się z pierwszego wyrazu 11 więcéy 4 razy stosunek (n° 271); zatém ieżeli od 19 odeymę 11, reszta 8 składa się ze stosunku wziętego 4 razy. Więc ieżeli podzielę tę resztę przez 4, iloraz 2 iest stosunkiem postępu. Oznaczam więc zaraz średnie szukane. Pierwszy $= 11 + 2 = 13$; drugi $= 11 + (2 \times 2) = 15$; a trzeci $= 11 + (2 \times 3) = 17$.

Postęp więc różnicowy który te trzy wyrazy średnie formuią z 11 i 19, iest $\div 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19$.

274. W ogólności: *ażeby włożyć pomiędzy dwie liczby zadane pewną liczbę środków równoróżnicowych, potrzeba liczbę która ma być pierwszym wyrazem postępu odiąć od liczby która ma być ostatnim iego wyrazem i różnicę tę podzielić przez liczbę maiących się włożyć środków zwiększoną o 1, a iloraz wypadły będzie stosunkiem który maiąc można iuż łatwo złożyć postęp*, n. p. ażeby włożyć pomiędzy 0 i 1, dziewięć środków równoróżnicowych, gdy 0 ma być pierwszym wyrazem postępu a 1 ostatnim, będzie stosunek $= \frac{1}{10} - \frac{0}{} = \frac{1}{10}$; postęp więc wypadnie $\div 0 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 1$.

Widać tu iż między dwie liczby iakożkolwiek bliskie siebie można zawsze włożyć tyle środków równoróżnicowych ile się podoba.

275. *Summa wszystkich wyrazów iakiegokolwiek postępu różnicowego = połowie iloczynu z sum-*

my skraynych przez liczbę wyrazów, albo iloczynowi z połowy summy skraynych przez liczbę wyrazów, albo iloczynowi z summy skraynych przez połowę liczby wyrazów.

Bo, wziąwszy iakikolwiek postęp różnicowy n. p. ÷ 1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11, i wystawiwszy sobie że ten sam napisany iest odwrotnie, tak iż ostatni wyraz staiąc się pierwszym napisany iest pod pierwszym, przedostatni staiąc się drugim napisany iest pod drugim, i t. d. iak to tu widać:

$$\begin{array}{l} \div\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \\ \div\ 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \end{array}$$

ieżeli wtenczas dodamy wyrazy odpowiadaiące, znaydziemy wszędzie iednakową summę, to iest summę skraynych; co widoczna iest co do pierwszéy i ostatniéy summy: co zaś do innych łatwo postrzedz, iż iak drugi wyraz pierwszego postępu = wyrazowi pierwszemu *więcéy* stosunek, tak drugi wyraz drugiego postępu = pierwszemu swemu wyrazowi *mniéy* tenże stosunek, czyli że summa tych dwóch wyrazów = pierwszemu iednego postępu + stosunek i pierwszemu drugiego postępu — stosunek, to iest, pierwszemu iednego postępu + pierwszy drugiego postępu, czyli co na iednoż wychodzi, =dwom skraynym postępu danego.

Summa trzecich wyrazów równa będzie podobnie pierwszemu wyrazowi iednego postępu + dwa razy stosunek i pierwszemu drugiego postępu — dwa razy stosunek, czyli pierwszemu iednego postępu + pierwszy drugiego postępu, to iest, dwom skraynym postępu danego i t. d.

Powtarzaiąc więc summę skraynych postępu danego tyle razy ile iest w nim wyrazów, otrzyma się dwa razy summa wszystkich wyrazów postępu.

Więc, *summa wszystkich wyrazów iakiegokolwiek postępu różnicowego*, *i t. d.*

Tak summa wszystkich wyrazów postępu różnicowego $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 = \frac{3+27 \times 7}{2}$ czyli $\frac{30 \times 7}{2} = \frac{30}{2} \times 7 = 30 \times \frac{7}{2}$.

276. Poiąwszy dobrze poprzedzaiącą teoryą o postępach różnicowych łatwo będzie rozwiązać następuiące zagadnienia:

1e Znaiąc *skrayne* (1) i *summę wyrazów* postępu różnicowego, ażeby znaleźć *liczbę wyrazów*, trzeba podzielić ich summę przez połowę summy skraynych: n. p. gdy wiadome są skrayne 5 i 15 tudzież summa wyrazów 60; liczba wyrazów $= \frac{60}{10} = 6$.

277. 2e Znaiąc *skrayne* i *liczbę wyrazów*, ażeby znaleźć *stosunek*, trzeba wyraz pierwszy odiąć od ostatniego, a resztę podzielić przez liczbę wyrazów zmnieyszoną o 1; n. p gdy wiadome są skrayne 5 i 15, tudzież liczba wyrazów 6; stosunek będzie $= \frac{15-5}{6-1} = \frac{10}{5} = 2$ (porówn. n° 274). Wzaiemnie

278. 3e Znaiąc *skrayne* i *stosunek* postępu różnicowego, ażeby znaleźć *liczbę wyrazów*, trzeba odiąć wyraz pierwszy od ostatniego i podzielić resztę przez stosunek, a do ilorazu wypadłego dodać 1; n. p. gdy wiadome są skrayne 5 i 15, tudzież stosunek 2, liczba wyrazów będzie $\frac{15-5}{2} = \frac{10}{2} = 5$ powiększona o 1, to iest 6.

279. 4e Znaiąc *liczbę wyrazów*, *stosunek* i *wyraz ostatni*, ażeby znaleźć pierwszy, trzeba odiąć od ostatniego stosunek tyle razy wzięty ile iest wyrazów mniey iednym; n. p. gdy liczba wyrazów iest 6, stosunek 2, a wyraz ostatni 15; odeymuię od

(1) To iest wyrazy, pierwszy i ostatni postępu.

15 stosunek 2 pięć razy wzięty, to iest 10, i mam 5 na wyraz pierwszy postępu.

280. 5e Znaiąc *liczbę wyrazów*, ich *summę* i wyraz *ieden ze skraynych*, ażeby znaleźć *drugi skrayny*, trzeba podzielić summę przez połowę liczby wyrazów i odiąć od ilorazu skrayny wiadomy. Tak ieżeli liczba wyrazów iest 6, ich summa 60, a wyraz pierwszy postępu iest 5; ostatni $=\frac{60}{3}-5=20-5=15$.

Gdyby dany był ostatni wyraz 15; pierwszy byłby $=\frac{60}{3}-15=20-15=5$.

281. 6e Znaiąc *liczbę wyrazów*, ich *summę* i *stosunek*, oznaczyć każdy wyraz w szczególności? Wypada tu znaleźć nayprzód wyraz pierwszy. Podzieliwszy summę wyrazów przez połowę ich liczby, iloraz będzie summą skraynych. Że zaś ostatni wyraz = pierwszemu + stosunek tyle razy wzięty ile iest przed nim wyrazów, więc summa skraynych = podwóynemu pierwszemu + stosunek tyle razy wzięty, ile iest wyrazów mniey iednym. Więc ieżeli od znalezionéy summy skraynych odeymiemy ten iloczyn ostatni, a potém weźmiemy połowę reszty, ta będzie pierwszym wyrazem. Znaiąc wyraz pierwszy i stosunek łatwo iuż oznaczyć wszystkie wyrazy postępu; n. p. dana liczba wyrazów 6, ich summa 60, stosunek 2; będzie nayprzód $\frac{60}{3}=20$ summie skraynych; $20-(2\times5)=10$ podwóynemu piewszemu. Zatém pierwszy wyraz iest 5, który iuż maiąc łatwo iest złożyć cały postęp.

Zagadnienia.

282. I. Znaleźć czwarty wyraz proporcyi różnicowéy któréy wiadome są trzy $10\cdot8=15\cdot x$; tudzież $3\cdot x=6\cdot8$? (1)

(1) Ilości szukane niewiadome oznaczaią się pospolicie przez ostatnie głoski alfabetu, iako to: x, y, z.

II. Znaleźć wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny różnicowy do dwóch drugich $\div$ 24 · 36 · x; tudzież $\div$ 22 · 14 · x?

III. Znaleźć wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy któréy wiadome są skrayne $\div$ 12 · x · 6; tudzież $\div$ 5 · x · 17?

IV. Wynaleźć setny wyraz postępu $\div$ 1 · 4 · 7... i t. d. tudzież 25ty postępu $\div$ 82 · 79 · 76... i t. d.

V. Włożyć między 4 i 32 sześć środków równoróżnicowych; toż ośm środków między 45 i 9?

VI. Wieleż uderzeń zrobi młotek zegara godzinnego od godziny pierwszéy zrana, aż do 12téy południowéy włącznie? a ileż zrobi gdyby wciąż bił od pierwszéy do 24téy godziny?

VII. Ileż amb czyli połączeń 2ch liczb znayduie się w loteryi liczbowéy składaiącéy się z 90 numerów?

VIII. Pewny młodzieniec siedząc w kompanii, w odległości 6 sążni od końca szpaleru złożonego ze 100 drzew oddalonych o 3 sążnie od siebie, mówi: oto iest 100 iabłek które tu składam, założę się że w 2ch godzinach rozniosę te iabłka biorąc po iednemu i kładąc u spodu każdego drzewa. Jest pytanie czy ten młodzieniec mógł wygrać zakład?

IX. Ponieważ ciało spadaiąc przebiega w 1 sekundzie 15 stóp, w 2éy 3 razy 15, w 3ciéy 5 razy 15, i tak daléy, w postępie iloczynu z 15 × szereg liczb nieparzystych 1 · 3 · 5 i t. d. iakążby drogę przebiegło spadaiąc przez minutę?

X. Znaiąc powyższą prawdę; ieżeli kamień w studnią wpuszczony w 6″ spada do wody, iakże głęboka iest ta studnia?

XI. Grabarz maiący kopać studnią zgodził się tak: aby mu za pierwszy sążeń głębokości zapłacono zł. 3, za drugi zł. 5, za trzeci zł. 7, i tak daléy w postępie różnicowym. Stało się iż skończywszy robotę za ostatni sążeń wziął $41^{Zł}$; ileż sążni kopał?

2) gdyby maiąc kopać studnią na 20 sążni głęboką zgodził się od całéy roboty zł. 400, lecz zachorowawszy dnia osmego, nie mógł iuż kończyć roboty; ileż mu się za zrobioną iuż iéy część należy?

Dla większéy wprawy weźmy tu sobie zagadnienie które się da zastosować do różnych przypadków w rachunku postępów różnicowych:

XII. Zapłacono summę pewną w 12^{stu} ratach które się przewyższały porówno o 10^{tal} a z których

1) pierwsza była 100^{tal}. Jakaż była ostatnia rata i iaka cała summa wypłacona we wszystkich ratach? lub

2) z których ostatnia była 210^{tal}. Jakaż była pierwsza, i iaka summa wszystkich? lub

3) niewiadoma przewyżka rat, lecz pierwsza była 100 a ostatnia 210^{tal}. O ileż się przewyższały raty i iaka była cała summa? lub

4) niewiadoma liczba rat, lecz pierwsza była 100 a ostatnia 210^{tal}. Ileż było rat, i iaka cała summa? lub

5) wiadoma summa 1860^{tal} lecz niewiadoma liczba rat z których pierwsza była 100 ostatnia zaś 210^{tal}. Jakaż była liczba rat i ich różnica? lub

6) wiadoma taż summa i liczba rat 12 z których pierwsza była 100^{tal}. Jakaż była ostatnia rata i różnica rat? lub

7) wiadoma taż summa i liczba rat z których ostatnia była 210^{tal}. Jakaż była pierwsza rata i różnica stała? lub

8) wiadoma taż summa, liczba rat i ich różnica 10tal. Jakaż była pierwsza a iakaż ostatnia rata?

O własnościach proporcyi i postępów ilorazowych.

283. *W każdéy proporcyi ilorazowéy, iloczyn skraynych iest równy iloczynowi średnich.*

Naprzykład, w proporcyi $8:16=6:12$; 8×12 czyli 96 iloczyn skraynych, $=16\times6$ czyli 96 iloczynowi średnich; i w téy drugiéy, $15:5=6:2$; 15×2 czyli 30 iloczyn skraynych, $=5\times6$ czyli 30 iloczynowi średnich.

Taż sama własność ma mieysce we wszelkiéy innéy proporcyi ilorazowéy; bo w takiéy proporcyi każdy następnik iest równy iloczynowi z swego poprzednika przez spólny stosunek; więc na mieysce każdego następnika można położyć iego poprzednik rozmnożony przez spólny stosunek. Że zaś po téy zamianie, iloczyn skraynych i iloczyn średnich znayduią się złożone z tych samych czynników, którémi są dwa poprzedniki i spólny stosunek; więc te dwa iloczyny są równe (1); więc *w każdéy proporcyi ilorazowéy, iloczyn*, i t. d.

284 Więc 1° *W każdéy proporcyi ilorazowéy ciągłéy iloczyn skraynych iest równy kwadratowi średnich* Bo np. proporcyia ciągła $\div 4:6:9$ będąc ta sama co $4:6=6:9$, daie 4×9 czyli 36 iloczyn skraynych $=6\times6$ czyli 36, kwadratowi średniéy 6.

---

(1) Pierwsza proporcyia w któréy $16=8\times2$, i $12=6\times2$, staie się $8:8\times2=6:6\times2$. Jest zaś $8\times6\times2$ iloczyn skraynych złożony z tych samych czynników co iloczyn średnich $8\times2\times6$. Druga proporcya w któréy $5=15\times\frac{1}{3}$, i $2=6\times\frac{1}{3}$, staie się $15:15\times\frac{1}{3}=6:6\times\frac{1}{3}$. Jest zaś $15\times6\times\frac{1}{3}$ iloczyn skraynych z tych samych czynników złożony co iloczyn średnich $15\times\frac{1}{3}\times6$.

285. 2e *Łatwo iest znaleźć czwarty wyraz proporcyi ilorazowéy któréy trzy inne wiadome.* Jeżeli wyraz którego szukamy iest skrayny, podzielemy iloczyn średnich przez skrayny wiadomy; iloraz będzie skraynym szukanym: ieżeli wyraz niewiadomy iest średni, znaydziemy go dzieląc iloczyn skraynych przez średni wiadomy (1). Naprzykład, gdy trzy wyrazy 4, 8, 12, iakiéy proporcyi są dane, a 4 iest iednym ze skraynych; ieżeli żądaią drugiego skraynego, rozmnożę średnie 8 i 12 ieden przez drugi, i podzieliwszy przez 4 ich iloczyn 96, iloraz 24 będzie skraynym żądanym: tak iż proporcyia zupełna będzie $4 : 8 = 12 : 24$, lub $24 : 8 = 12 : 4$. Jeżeli znamy trzy wyrazy 5, 15, 21, proporcyi ilorazowéy, a 15 iest iednym ze średnich, szukaiąc drugiego średniego, rozmnożę skrayne 5 i 21 ieden przez drugi, i podzieliwszy przez 5 ich iloczyn 105, iloraz 7 będzie średnim szukanym; tak iż proporcyia zupełna będzie $5 : 7 = 15 : 21$, lub $5 : 15 = 7 : 21$.

286. Jeżeli idzie o wyraz średni proporcyi ciągłéy, znaydziemy go *biorąc pierwiastek z iloczynu skraynych.* Tak, ażeby znaleźć wyraz średni proporcyi ciągłéy któréy 4 i 9 są skraynemi, mnożę 4 przez 9, iloczyn iest 36, którego pierwiastek 6 iest średnim szukanym; tak iż proporcyia zupełna iest $\div 4 : 6 : 9$ lub $\div 9 : 6 : 4$.

---

(1) Dzieląc iloczyn skraynych przez ieden skrayny wypada na iloraz drugi skrayny. Że zaś iloczyn średnich iest zupełnie ten sam co iloczyn skraynych, więc dzieląc iloczyn średnich przez skrayny wiadomy, znaydzie się skrayny szukany. Dzieląc iloczyn średnich przez ieden średni wypada na iloraz drugi średni. Że zaś iloczyn skraynych iest zupełnie ten sam co iloczyn średnich, więc dzieląc iloczyn skraynych przez średni wiadomy, znaydzie się średni szukany.

287. *Ile razy cztery liczby iak* 10, 5, 8, 4, *są takie iż iloczyn skraynych równa się iloczynowi średnich, takie cztery liczby składaią proporcyią ilorazową.*

Bo gdy $5\times 8=4\times 10$, będzie, podzieliwszy przez 10 oba iloczyny, $\frac{5\times 8}{10}=4$; ieżeli teraz podzielemy przez 8 obie strony, będzie $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; więc $10:5=8:4$ (nº 257). Więc, *ile razy cztery liczby* i t. d.

288. Więc, 1e Gdy dwa iloczyny są równe, można z nich zawsze wyprowadzić proporcyią ilorazową, biorąc za skrayne dwa czynniki iednego z iloczynów a za średnie dwa czynniki drugiego iloczynu. Tak, stąd że $24\times 3=36\times 2$, wnoszę iż $24:36=2:3$, lub iż $2:3=24:36$.

289. Więc 2e Jeżeli cztery liczby są w proporcyi ilorazowéy, składać ią także będą, iakiekolwiek odmiany czynić z niemi będziemy, aby tylko była równość między iloczynem skraynych i iloczynem średnich.

Tak z tąd że $8:4=6:3$ wnoszę iż

$$1^e\left\{\begin{array}{l} 8:6=4:3\\ 6:8=3:4\\ 6:3=8:4\\ 3:6=4:8\\ 3:4=6:8\\ 4:3=8:6\\ 4:8=3:6 \end{array}\right. \qquad 2^e\left\{\begin{array}{l} 8\times 5:4\times 5=6:3\\ 8:4=6\times 5:3\times 5\\ 8\times 5:4=6\times 5:3\\ 8:4\times 5=6:3\times 5\\ \frac{8}{5}:\frac{4}{5}=6:3\\ 8:4=\frac{6}{5}:\frac{3}{5}\\ \frac{8}{5}:4=\frac{6}{5}:3\\ 8:\frac{4}{5}=6:\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

$$3^e\left\{\begin{array}{l} 8+4:4=6+3:3\\ 8-4:4=6-3:3\\ 8+4:8=6+3:6\\ 8-4:8=6-3:6 \end{array}\right.$$

$$4^e \begin{cases} 8+6 : 4+3 = 8 : 4 \\ 8-6 : 4-3 = 8 : 4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{matrix} 8+6 : 4+3 = 6 : 3 \\ 8-6 : 4-3 = 6 : 3 \end{matrix}$$

i t. d. (1)

Bo we wszystkich tych przykładach, iloczyn skraynych równa się iloczynowi średnich.

290. *W iakimkolwiek zbiorze stósunków ilorazowych równyc., summa wszystkich poprzedników iest do summy wszystkich następników, iak którykolwiek poprzednik iest do swego następnika, lub iak summa pewnéy liczby poprzedników, iest do summy takiéyże liczby odpowiadaiących następników.*

Niech będzie, na przykład, zbiór stosunków równych $2 : 4 = 3 : 6 = 5 : 10$ i t. d. będzie 1e $2+3+5 : 4+6+10 = 5 : 10$, lub $= 3 : 6$, lub nakoniec $= 2 : 4$.

Będzie 2e $2+3+5 : 4+6+10 = 2+3 : 4+6$, bo w każdéy z tych dwóch proporcyy, iloczyn skraynych iest równy iloczynowi średnich.

291. Widać, z téy samey przyczyny, iż *w iakimkolwiek zbiorze stosunków ilorazowych równych, summa iakiéykolwiek liczby poprzedników iest do summy takiéyże liczby odpowiadaiących następników, iak którykolwiek poprzednik iest do swego następnika, albo iak summa innéy iakiéykolwiek liczby poprzedników iest do summy takieyże liczby odpowiadaiących następników.*

292. *Jeżeli rozmnożemy lub podzielemy cztery wyrazy iakiéy proporcyi ilorazowéy przez cztery wyrazy iednéy lub kilku proporcyi ilorazowych, poprzednik przez poprzednik i następnik*

---

(1) Prawdy te lepiéy się będą pamiętać, skoro się ie ogólnie umie wysłowiać, a w co wprawiać się powinni poczynaiący.

przez następnik, iloczyny lub ilorazy stąd wypadaiące są w proporcyi. Bo proporcyia zawisła na równości dwóch stosunków. To założywszy, 1$^{\text{od}}$ rozmnóżmy porządkiem wyrazy iakiéy proporcyi np.

$$2 : 4 = 3 : 6.$$

przez wyrazy innéy proporcyi np.

$$5 : 15 = 7 : 21$$

Iloczyny odpowiadaiące są

$$10, 60, 21, 126.$$

Jest zaś stosunek 10 do 60 równy stosunkowi 21 do 126, ponieważ $\frac{60}{10} = \frac{126}{21}$; więc 1$^{\text{od}}$ iloczyny 10, 60, 21, 126 składaią proporcyią to iest ma się

$$10 : 60 = 21 : 126.$$

2$^{\text{e}}$ Podzielmy porządkiem wyrazy proporcyi

$$2 : 4 = 3 : 6:$$

przez wyrazy proporcyi

$$5 : 15 = 7 : 21.$$

Ilorazy ztąd wypadaiące są

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{3}{7}, \frac{6}{21}.$$

Jest zaś stosunek $\frac{2}{5}$ do $\frac{4}{15}$ równy stosunkowi $\frac{3}{7}$ do $\frac{6}{21}$; ponieważ $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{6}{21}}{\frac{3}{7}}$; więc, 2$^{\text{e}}$ ilorazy $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{3}{7}, \frac{6}{21}$, składaią proporcyią, to iest mam

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{15} = \frac{3}{7} : \frac{6}{21}.$$

A iako toż samo dowodzenie miałoby miéysce gdybyśmy mieli do pomnożenia lub podzielenia porządkiém cztery wyrazy iakiéy proporcyi przez wyrazy dwóch, lub trzech, lub i t. d. proporcyy, trzeba wnieść w ogólności, iż *mnożąc lub dzieląc porządkiem wyrazy iakiéy proporcyy przez wyrazy iednéy lub kilku proporcyy, iloczyny lub ilorazy będą w proporcyi.*

Stosunki wypadaiące z dwóch lub więcéy stosunków ilorazowych rozmnożonych poprzednik przez poprzednik i następnik przez następnik, nazywaią się stosunki ilorazowe złożone.

293. Więc *kwadraty*, *sześciany*, *i t. d. wyrazów proporcyi ilorazowéy są także w proporcyi*: bo te rozmaite potęgi są tylko iloczynami wyrazów proporcyy rozmnożonych porządkiem pewną liczbę razy przez siebie; tak stąd że 2 : 4=3 : 6 wniesie się.

1e że 4 : 16=9 : 36

2e że 8 : 64=27 : 216 i t. d.

Stosunki ilorazowe tak składane ze stosunków równych, nazywaią się *dwumnożne*, *tróymnożne*, i t. d.

294. Wzaiemnie *pierwiastki kwadratowe*, *sześcienne*; *i t. d. wyrazów proporcyi ilorazowéy są także w proporcyi*: bo gdyby pierwiastki nie składały proporcyi kiedy ią ich potęgi składaią, trzebaby przypuścić że dwa stosunki nierówne, rozmnożone porządkiem pewną liczbę razy przez siebie, wydałyby na iloczyny stosunki równe, co mieysca mieć niemoże. Tak stąd, że iest

$$4 : 16 = 9 : 36,$$

$$\text{i } 8 : 64 = 27 : 216, \text{ wniosę iż}$$

$$2 : 4 = 3 : 6.$$

Stosunki w iakich są między sobą pierwiastki kwadratowe, sześcienne, i t. d. wyrazów składaiących stosunki ilorazowe, nazywaią się względem tych ostatnich *dwudzielnemi*, *tróydzielnemi*, i t. d.

Przeydźmy do teoryi postępów ilorazowych.

295. *W każdym postępie ilorazowym, wyraz którykolwiek równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek wyniesiony do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów które poprzedzaią ten o który idzie.*

Bo postęp ilorazowy iest ciągiem wyrazów, które podzielone następnie ieden przez drugi, daią tenże sam iloraz. Więc 1e drugi wyraz postępu równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek.

2e trzeci wyraz postępu równy iest drugiemu romnożonemu przez stosunek, więc równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez drugą potęgę stosunku.

3e czwarty wyraz postępu równy iest trzeciemu rozmnożonemu przez stosunek; więc równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez trzecią potęgę stosunku; i tak daléy (1); więc, *w każdym postępie ilorazowym, wyraz którykolwiek*, i t. d.

296. Więc, *w każdym postępie ilorazowym którego pierwszym wyrazem iest* 1, *wyraz którykolwiek równa się stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów które poprzedzaią ten o który idzie.*

297. Zasada wyłożona (n° 295) służy do włożenia między dwa wyrazy dane iakiéykolwiek liczby wyrazów średnich któreby były z niemi w postępie ilorazowym.

Chcę np. złączyć 2 i 128 przez cztery liczby któreby były w postępie ilorazowym z 4 i 128. Jasna iest iż ten postęp będzie złożony z sześciu wyrazów, i że, znaiąc pierwszy, uformuię bez trudności następne, skoro wynaydę stosunek postępu. Że zaś szósty i ostatni wyraz 128 składa się z pierwszego wyrazu 2 rozmnożonego przez stosunek wyniesiony do potęgi piątéy (n° 295); zatém ieżeli podzielę 128 przez 2, iloraz 32 który znaydę będzie złożony z piątéy potęgi stosunku. Więc, ieżeli wyciągnę pierwiastek piąty z 32, ten pierwiastek który iest 2 będzie stosunkiem postępu (2). Przystępuię teraz

---

(1) W postępie rosnącynm $\div$ 32 : 64 : 128 : 256 : 512, i t. d. iest 1e $64=32\times2$, 2e $128=64\times2=32\times2\times2=32\times4$ które iest kwadratem z 2. 3e $156=128\times2=32\times2\times2\times2=32\times8$ które iest sześcianem z 2 i t.d. W postępie maleiącym $\div$ 32 : 16 : 8 : 4 : 2 i t.d. iest 1e $16=32\times\frac{1}{2}$, 2e $8=16\times\frac{1}{2}=32\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=32\times\frac{1}{4}$ ktore iest kwadratem z $\frac{1}{2}$, 3e $4=8\times\frac{1}{2}=32\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=32\times\frac{1}{8}$ które iest sześcianem z $\frac{1}{2}$, i t. d.

(2) Przypuszczam tu iż się umie na pamięć potęgi liczb poiedynczych wyższe od sześcianu.

do wyznaczenia średnich szukanych. Pierwszy $=4\times 2=8$; drugi $=4\times 4=16$; trzeci $=4\times 8=32$; czwarty $=4\times 16=64$. Postęp więc który te cztéry średnie formuią z 4 i 128 iest $\div\!\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128.

298. W ogólności, *ażeby włożyć pomiędzy dwie liczby dane pewną liczbę środków równoilorazowych, trzeba podzielić liczbę maiącą być wyrazem ostatnim przez liczbę maiącą być wyrazem pierwszym a z wypadłego ilorazu wyciągnąć pierwiastek stopnia oznaczonego liczbą maiących się włożyć środków zwiększoną o 1. Pierwiastek znaleziony będzie stosunkiem który maiąc łatwo iuż złożyć postęp.*

Tak maiąc włożyć pomiędzy dwie liczby 6 i 48 pięć środków ilorazowych, gdy 6 ma być pierwszym wyrazem postępu a 48 ostatnim, dzielę 48 przez 6, a z ilorazu 8 wyciągam $\sqrt[6]{}$. Pierwiastek ten iest: 1,41419.... Postęp więc szukany będzie $\div\!\div$ 6:8,48514 : 11,99960 : 16,96961 : 23,99825 : 33,93809 : 48 (2). Widać tu iż między dwie liczby iakiekolwiek można zawsze włożyć tyle środków równoilorazowych ile się podoba, bądź dokładnie bądź przez przybliżenie.

299. W wyłożonych dotąd własnościach stosunków, proporcyy i postępów różnicowych i ilorazowych porównywaiąc działania arytmetyczne między sobą, postrzegamy tę odpowiadaiącą sobie wzaiemność, iż co się otrzymuie w stosunkach różnicowych przez dodawanie, odeymowanie, mnożenie lub dzielenie liczb, toż samo otrzymuie się w stosunkach ilorazo-

(2) Przedostatni wyraz 33,93809 rozmnożony przez stosunek dałby wprawdzie tylko 47,99... z resztą którą pomiiam. Wyciąganie tu pierwiastków staie się działaniem dosyć trudném, lecz wkrótce zobaczemy iak za pomocą logarytmów może być nader łatwém.

wych przez mnożenie, dzielenie, wynoszenie do potęg lub wyciąganie pierwiastków; a zatém, że działanie dodawania lub odeymowania w stosunkach różnicowych ma sobie odpowiadaiące działanie mnożenia lub dzielenia w stosunkach ilorazowych, działaniom zaś mnożenia lub dzielenia w pierwszych, że odpowiadaią, działania wynoszenia do potęg lub wyciągania pierwiastków w drugich.

Wszystko to wypływa z natury tych stosunków; bo iako stosunek różnicowy znayduie się przez odeymowanie, a ilorazowy przez dzielenie, tak wszystko co się robi przez odeymowanie w stosunkach różnicowych powinno się robić przez dzielenie w ilorazowych; a zatém, wszystko co się robi przez dodawanie w pierwszych powinno się robić przez mnożenie w drugich; wszystko co się robi przez mnożenie w tamtych, powinno się w tych robić przez wynoszenie do potęg; nakoniec, wszystko co się robi przez dzielenie w iednych, powinno się robić przez wyciąganie pierwiastków w drugich.

Prawda ta okaże nam się w ciągu ieszcze iaśniéy.

300. Tak gdyby trzeba było wiedzieć iloczyn wszystkich wyrazów iakiego postępu ilorazowego, trzebaby iloczyn skraynych wynieść do potęgi oznaczonéy przez liczbę wyrazów postępu, i z téy potęgi wyciągnąć pierwiastek kwadratowy: n. p. w postępie $\div\!\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48$, iloczyn wszystkich wyrazów $=(3\times 48)^5$ czyli 144 wyniesione do potęgi piątéy, która tu iest 61917364224, a iéy pierwiastek kwadratowy $=$ 248832, i to iest iloczynem szukanym (1). Gdyby z iloczynu skraynych wypadło formować potęgę parzystą n. p. szóstą, ósmą, i t. d.

(1) Pomiiam tu okazanie téy prawdy nieco przydłuższe a daiące się wywieśdź rozumowaniem analogicznem rozumowaniu pod n° 275.

natenczas, ponieważ z niéy miałby się potém wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, oszczędza się pracy formuiąc tylko potęgę przez połowę mniéyszą, to iest trzecią, czwartą, i t. d. a ta byłaby iuż równą iloczynowi szukanemu.

301. Lecz tu bardziéy potrzeba iest wiedzieć iak się znayduie summa wyrazów iakiego postępu ilorazowego. Z tego zaś co się powiedziało pod n° 299 wynika, iż summa ta nie ma działania odpowiadaiącego w postępie różnicowym. Aby ią otrzymać, *trzeba ostatni wyraz pomnożyć przez stosunek, odiąć od tego iloczynu pierwszy wyraz i podzielić resztę przez stosunek zmniéyszony iednością.*

Bo wziąwszy n. p. postęp ∺1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128; rozmnóżmy iego wyrazy przez 2, będzie postęp∺2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, którego summa wyrazów iest oczywiście dwa razy większa od summy wyrazów pierwszego. Odiąwszy zatém pierwszy od drugiego, zostanie 256—1 na summę żądaną.

Gdybyśmy mieli postęp którego stosunek iest 3, n.p. ∺1:3:9:27:81:243, rozmno. go przez stos: będzie ∺3:9:27:81:243:729, postęp, którego summa wyrazów iest oczywiście trzy razy większa od summy wyrazów pierwszego. Odiąwszy więc pierwszy od drugiego, będzie 729—1 równać się ieszcze podwóynéy summie wyrazów postępu pierwszego. Zatém podzieliwszy 728 przez 2, to iest; przez stosunek zmniéyszony iednością, otrzyma się 364 summa szukana.

Gdyby stosunek był 4, znaleźlibyśmy przez rozumowanie podobne, iż aby mieć summę szukaną trzebaby pomnożyć przez 4 wyraz ostatni, odiąć od iloczynu wyraz pierwszy i podzielić resztę przez 3; a zatém słusznie się wnosi iż, *aby mieć summę wszy-*

stkich wyrazów iakiego postępu ilorazowego, trzeba, i t. d.

Tak summa wszystkich wyrazów postępu ilorazowego $\div\!\div$ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072 $=\frac{(3072\times4)-3}{4-1}=\frac{12288-3}{3}=\frac{12285}{3}=4095$.

Gdyby postęp był maleiący n. p. $\div\!\div$2187 : 729 : 243 : 81 : 27 : 9, którego stosunek iest $\frac{1}{3}$, zachodziłoby nieco trudności w znalezieniu summy iego wyrazów podług powyższego prawidła. Znaydziemy ią iednak łatwo, uważaiąc iakoby postęp był odwrotnie rosnący zacząwszy od ostatniego wyrazu aż do pierwszego którybyśmy uważali za ostatni: podany n. p. postęp uważaiąc iak gdyby był rosnący $\div\!\div$ 9 : 27 : . . . 2187, summa wyrazów iego $=\frac{(2187\times3)-9}{3-1}=\frac{6561-9}{2}=\frac{6552}{2}=3276$.

Zupełna teoryia o postępach tak różnicowych iak ilorazowych iedna z nayciekawszych i nayużyteczniéyszych w początkach Matematyki, wykłada się dopiero w Algiebrze z łatwością (1). Podałem tu tylko tyle o tém, ile umieścić osądziłem potrzebą w traktacie Arytmetyki systematycznym.

Zagadnienia.

302. Znaleźć czwarty wyraz proporcyi 4:12=6:x; tudzież 5:15=x:24?

II. Znaleźć wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny do dwóch drugich $\div\!\div$ 4:10:x; tudzież $\div\!\div$ 48:12:x?

III. Znaleźć wyraz średni proporcyi ciągłéy $\div\!\div$2:x:32; tudzież $\div\!\div$36:x:4?

---

(1) Ob. Algiebrę dla szkół Woiewódzkich, rozdział VII. i dalsze.

IV. Znaleźć wyraz 33ci postępu $\div\div 3:6:12\ldots$ i t. d. toż 8my postępu $\div\div 15309:5103:1701\ldots$ i t. d.

V. Pewny graiący o skwitowanie lub drugie tyle (à quitte ou double) przegrał dziesięć razy raz po razu. Przy zaczęciu téy gry winien był drugiemu zł. 3. Ileż stracił w ostatniéy przegranéy?

VI. Włożyć 1) pięć średnich proporcyionalnych między 4 i 2916; toż 2) siedm między 768 i 3?

VII. Pewny człowiek chce przedać swego konia za summę oznaczoną przez 32 gwoździe u podków. Żąda tylko szeląg za pierwszy gwóźdź, 2 szelągi za drugi, 4 za trzeci i t. d. za każdy gwóźdź dwa razy więcéy niż za poprzedzaiący. Jakaż będzie cena konia?

VIII. Gdyby iedno ziarno przenicy zasiane, 20 tylko ziarn każdego roku wydawało, ileż zboża z iednego ziarna za lat 10 mogłoby się rozmnożyć?

IX. *Sheram* ieden z królów Indyi tak był ucieszony z gry Szachów którą *Sessa* wynalazł, iż mu pozwolił żądać wszystkiego co mu się podoba za nagrodę, choćby i połowę iego królestwa. *Sessa* odpowiedział, iż byłby kontent gdyby dostał ziarno zboża za pierwszą przegródkę szachownicy, 2 za drugą, 4 za trzecią, i t. d. zawsze podwaiaiąc aż do sześćdziesiątéy czwartéy. Jakaż iest liczba ziarn zboża które *Sessa* miał odebrać?

X. Znaleźć iloczyn wyrazów postępu $\div\div 2:6:18\ldots 4374$ z ośmiu wyrazów złożonego?

O Regule trzech.

303. Własność proporcyi ilorazowéy o iakiéy wspomnieliśmy wyżéy (n° 283) obeymuie regułę którą dla iéy użyteczności *złotą* nazwano, a którą pospolicie *regułą trzech* zowiemy. Reguła trzech

zwraca się do znalezienia iednego wyrazu proporcyi ktoréy trzy inne wyrazy są wiadome.

Gdy wyraz szukany powiększa się albo zmnieysza iak i ten z którym on iest w związku, w tym przypadku mówiemy, iż *wyrazy odpowiadaiące są w stosunku prostym*. Jeżeli zaś wyraz szukany zwiększa się w miarę iak się zmnieysza ilość z którą iest w związku, albo gdy się zmnieysza w miarę iak się ta ilość powiększa, natenczas mówiemy, że *wyrazy odpowiadaiące są w stosunku odwrotnym* (nº 259).

Naprzykład gdy idzie o robotników i robotę iasna iest, iż robota iest w stosunku prostym liczby robotników, bo im więcéy robotników; tém więcéy będzie dokonanéy roboty, im mniéy robotników tém mniéy dokonanéy roboty. Lecz ieżeli idzie o trwanie roboty wyznaczonéy, iasna iż iest w stosunku odwrotnym robotników; bo im mniéy będzie robotników tém więcéy trzeba czasu, a im więcéy robotników tém mniéy czasu.

Można więc względnie do stosunku prostego lub odwrotnego wyrazów odpowiadaiących rozróżnić dwa gatunki reguły trzech; to iest, reguły trzech *prostéy* i reguły trzech *odwrotnéy*.

Reguła trzech iest *prosta*, gdy wyrazy odpowiadaiące idą od *więcéy* do *więcéy*, lub od *mniéy* do *mniéy*; iest *odwrotna*, gdy wyrazy odpowiadaiące idą od *więcéy* do *mniéy*, lub od *mniéy* do *więcéy*.

Reguła trzech bądź prosta, bądź odwrotna, może być *poiedyncza* albo *składana*; iest poiedyncza, gdy są tylko trzy wyrazy wiadome; iest składana, gdy ich iest więcéy niż trzy. Wszystko to wyiaśniemy w przykładach.

Przykład I. 25 robotników zrobiło 32 łokci pewnéy roboty; ileż iéy zrobi 50 robotników w tym samym czasie?

Widoczna tu iż im więcéy będzie robotników tém więcéy będzie roboty; wyrazy odpowiadaiące idą od więcéy do więcéy: reguła więc iest prosta, i zwraca się do znalezienia czwartego wyrazu proporcyi 25robot : 50robot, czyli $25:50=32:x^{\text{łok}}$. $x=\frac{32\times50}{25}=\frac{1600}{25}=64$ łokci.

W saméy rzeczy, ieżeli 25 robotników zrobiło 32 łokci roboty iakiéy, 50 robotników powinni iéy zrobić dwa razy więcéy, to iest 64 łokci w tym samym czasie (1).

Przykład II. Jeżeli 12 łokci iakiego sukna kosztowały 2400 zł. ileż będą kosztować 4 łokcie tegoż sukna?

Im mniéy będzie łokci tém mniéy będą kosztować: wyrazy odpowiadaiące idą od mniéy do mniéy, reguła więc iest prosta i zwraca się do znalezienia czwartego wyrazu proporcyi $12^{\text{łok}}: 4^{\text{łok}}$. czyli $3:1=2400:x^{\text{zł.}}=\frac{2400\times1}{3}=800^{\text{zł.}}$ Ta liczba iest wyrazem szukanym: bo gdy 12 łokci kosztowały 2400 zł. trzecia część 12 łokci powinna kosztować trzecią część 2400 zł.

304 *Przykład* III. Jeżeli 20 ludzi spotrzebowali pewny zapas żywności w 16 dniach, w ileżby dni, 40 ludzi tenże sam zapas spotrzebowali?

---

(1) W stosunku 25:50 można oba wyrazy podzielić przez 25 (n° 289) i byłoby $1:2=32:x=\frac{32\times2}{1}=64$ łokci. Nie należy zapominać o tém skracaniu gdzie go użyć można pamiętaiąc zawsze iż pierwszy z drugim lub z trzecim wyrazem daie się skracać.

Jm więcéy iest ludzi tém mniéy być musi dni; wyrazy odpowiadaiące idą od więcéy do mniéy; reguła więc trzech iest odwrotna, i zwraca się do znalezienia trzeciego wyrazu téy proporcyi $20^{\text{lud.}} : 40^{\text{lud}}$ czyli $1 : 2 = x : 16^{\text{dni}}$; więc $x = \frac{16 \times 1}{2} = 8^{\text{d}}$. W saméy rzeczy, dwa razy więcéy ludzi spotrzebuią tęż samę żywność w dwa razy krótszym czasie.

Przykład IV. Kupuię na podszewkę 8 łokci materyi szerokiéy na $\frac{2}{3}$ łokcia, ileżby mi potrzeba było łokci innéy materyi szerokiéy na $\frac{2}{9}$ łok na tęż podszewkę?

Im materyia iest węższa tém więcéy trzeba łokci: reguła więc iest odwrotna i zwraca się do znalezienia trzeciego wyrazu proporcyi $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = x : 8^{\text{łok}}$; więc $x = \frac{8 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{144}{6} = 24^{\text{łok}}$; co iest prawdziwa, ponieważ trzeba trzy razy więcéy łokci kiedy iest materyia trzy razy węższa.

305. W dwóch poprzedzaiących przykładach chcąc ażeby wyraz niewiadomy x był na końcu, trzeba odwrócić pierwsze stosunki, a będzie $2 : 1 = 16 : x$ czyli $1 : 1 = 8 : x$; toż $\frac{2}{9} : \frac{2}{3}$ czyli, rozmnożywszy oba wyrazy przez 3, $\frac{2}{3} : 2$, albo rozmnożywszy ie ieszcze przez 3, $2 : 6 = 8 : x$, i t. d.

306. *Przykład* V. 5 ludzi, pracuiąc przez 8 dni zrobili 42 łokci pewnéy roboty, ileż iéy zrobi 10 ludzi przez 16 dni?

Ta reguła trzech iest składana; widać bowiem, iż stosunek między łokciami roboty zależy od dwóch stosunków, t. i. od stosunku między liczbą ludzi pracuiących i między dniami roboty, i że powinien być równy stosunkowi złożonemu z tych obu.

Ażeby zrobić należycie to złożenie, biorę każdy z tych stosunków oddzielnie; i tak uważaiąc tylko stosunek ludzi, mówię: im więcéy ludzi tém więcéy zrobią, mam więc $5 : 10 = 42 : x = \frac{420}{5} =$ $84^{łok}$. Uważam teraz że im więcéy dni tém więcéy będzie roboty, mam więc $8 : 16$ czyli $1 : 2 = 84 : x = \frac{84 \times 2}{1} = 168^{łok}$.

307. Okazaliśmy wyżéy (nº 292) iż mnożąc porządkiem kilka proporcyy otrzymuie się proporcyia ze stosunków złożonych. Aby tu zastosować tę prawdę, weźmy dwie powyższe proporcyie nie szukając ważności x którą daie pierwsza; będziemy mieli.

$$\begin{array}{c} 5 : 10 = 42 : x \\ 8 : 16 = x : x' \\ \hline 5 \times 8 : 10 \times 16 = 42 \times x : x \times x' \end{array}$$

gdy x iest czynnikiem w obu wyrazach drugiego stosunku, można go wypuścić będzie więc

$5 \times 8 : 10 \times 16 = 42 : x$; więc $x = \frac{10 \times 16 \times 42}{5 \times 8} =$ $\frac{2 \times 2 \times 42}{1 \times 1} = 168$.

Można było zaraz skrócić stosunki w napisanych proporcyiach, i tak można było napisać . . ,

$$1 : 2 = 42 : x.$$

toż . . . $1 : 2 =$ i t. d.

308. W poprzedzaiącym przykładzie oba stosunki dane wpływały sposobem prostym na wypadek, lecz weźmy inny przykład: 24 robotników zrobiło 36 łokci pewnéy roboty w 14 dniach robiąc codziennie po 12 godzin; ileż trzeba robotników do zrobienia 30 łokci téyże roboty w 10 dniach gdy po 8 godzin na dzień robić będą?

Dla ułatwienia sobie poznania danych stosunków układam ie iak następuie:

$$\begin{array}{llll} 24^{\text{robot.}} & 36^{\text{łok}}. & 14^{\text{dni}} & 12^{\text{god.}} \\ x \ldots & 30 \ldots & 10 \ldots & 8 \ldots \end{array}$$

Widzę, że im mniéy łokci tém mniéy trzeba robotników; lecz im mniéy dni tém więcéy trzeba robotników dla dokonania oznaczonéy roboty, również im mniey godzin. Dwa więc ostatnie stosunki są odwrotne, a gdy czwarty wyraz ma być na końcu muszę ie odwrócić, piszę zatém

$$\begin{array}{rcl} 36 : 30 &=& 24 : x \\ 10 : 14 &=& x : x' \\ 8 : 12 &=& x' : x'' \end{array}$$

czyli skróciwszy stosunki

$$\left.\begin{array}{c} \cancel{6} : \cancel{5} \\ \cancel{5} : 7 \\ 4 : \cancel{6} \end{array}\right\} = 24 : x''$$

a gubiąc ieszcze czynniki spólne przekréślone tu w obu wyrazach pierwszego stosunku, będzie;

$$4 : 7 = 24 : x'' \text{ lub}$$
$$1 : 7 = 6 : x'' = \frac{6 \times 7}{1} = 42 \text{ robotników.}$$

Odbywana w ten sposób reguła służy do rozwiązywania z równą łatwością reguły trzech złożonéy z ilukolwiekbądź stosunków prostych lub odwrotnych, a przeto zadań z pozoru nayzawikłańszych. Na przykład

140 robotników których siłę oceniono na 10 stopni, pracuiąc 234 dni po $7\frac{1}{2}$ godz. codziennie, na ziemi twardéy na stopni 7, usypali groblę 450 sąż. długą, sążeń i 4 stopy wysoką a 3 sążnie i 2 stopy szeroką. Jakaż będzie długość grobli usypanéy przez 200 robotników maiących 11 stopni siły i pracuiących na ziemi 11 stopni twardéy, po $6\frac{1}{2}$ god. co dzień przez 378 dni. Grobla zaś ma być 2 sążnie 3 stopy wysoka, a 4 sążnie 1 stopa szeroka.

Ułożywszy porządkiem wszystkie dane iak następuie:

robot.	st.siły.	dni.		god.	sąż.dł.	sąż.st.wys.
140 ..	10 ...	234 ..	po ..	$7\frac{1}{2}$ ..	450 ..	1 .. 4 ...
200 ..	11 ...	378 ..		$6\frac{1}{2}$ ..	x ..	2 .. 3 ...

sąż. st.szer.	st.tward.
3 .. 2 ...	7.
4 .. 1 ...	11.

postrzegam, iż stosunek między sążniami długości zawisł od wszystkich innych zachodzących tu stosunków, bo z nich się składa. Napisawszy go z prawéy strony iak tu 450 : x, układam z lewéy strony stosunki odpowiadaiące, bacząc na to czy wpływaią na wyraz czwarty w względzie prostym lub odwrotnym, i wyrażam zaraz w liczbach iednogatunkowych te które były podane w liczbach wielorakich, iest więc:

$$\left.\begin{array}{r@{\;:\;}r} 140 & 200 \\ 10 & 11 \\ 234 & 378 \\ \frac{15}{2} & \frac{13}{2} \\ 15 & 10 \\ 25 & 20 \\ 11 & 7 \end{array}\right\} = 450 : \overset{\text{sąż.}}{x}$$

czyli skracaiąc wyrazy

$$\left.\begin{array}{r@{\;:\;}r} \cancel{7} & \cancel{10} \\ \cancel{10} & \cancel{11} \\ \cancel{13} & 21 \\ 15 & \cancel{13} \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ \cancel{11} & \cancel{7} \end{array}\right\} = 450 : \overset{\text{sąż.}}{x}$$

a gubiąc czynniki spólne poprzekréślane tu w ułożonych stosunkach; będzie

$$225 : 168 = 450 : x \quad \text{czyli}$$
$$1 : 168 = 2 : x = \frac{168 \times 2}{1} = 336^{\text{sąż}}.$$

309. Widziemy stąd iż wynalezienie wyrazu niewiadomego w regule trzech bądź poiedynczéy bądź złożonéy zwraca się zawsze do pomnożenia dwóch średnich i do podzielenia iloczynu przez wyraz skrayny, co się zawsze iednakim sposobem odbywa; ściśle więc mówiąc iest tylko ieden gatunek reguły trzech chociaż iest liczba prawie nieskończona zagadnień do których ią można stosować: takiemi są zagadnienia *procentu*, *odtrącania* i t.d. o których niżéy.

310. Czasem stosunki zachodzące w regule trzech składanéy nie są dane wyraźnie, wtenczas trzeba ie z warunków zagadnienia wyprowadzić i podług reguły ułożyć, np. 4 ludzi żyli za $60^{\text{zł}}$. przez 4 miesiące, gdyby żywność zdrożała o $\frac{1}{4}$ ceny ileż ludzi żyć będzie za $200^{\text{Zł}}$. przez 6 miesięcy?

Postrzegam iż za więcéy pieniędzy więcéy ludzi żyć może, lecz im dłuższy czas żyć maią, tém ich mniéy bydź musi, równie im żywność iest droższa. Stosunek zaś pierwszéy ceny żywności, do drugiéy iest iak $1 : \frac{5}{4}$.

Układam więc wyrazy iak następuie:

$$\left.\begin{array}{rcl} 60 & : & 200 \\ 6 & : & 4 \\ \frac{5}{4} & : & 1 \end{array}\right\} = 4 : x \quad \text{lud.}$$

Skracaiąc i uskuteczniaiąc znaydę $x = 7\frac{1}{9}$, to iest, iż żyć może 7 ludzi, i na 8^{go} zostaie $\frac{1}{9}$ téy kwoty którą na swoie wyżywienie przez 6 miesięcy wydaćby powinien, czyli ósmy ten człowiek mógłby żyć za tę kwotę $\frac{1}{9}$ sześciu miesięcy, zatém $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ iednego miesiąca, t. i. 20 dni.

311. Proba zagadnień rozwiązanych przez regułę trzech bądź poiedynczą bądź składaną, usku-

tecznić się może biorąc wyraz wynaleziony za wiadomy a wyraz ieden z wiadomych za niewiadomy.

312. Trzeba iednak zawsze być ostrożnym w układaniu reguły 3ch, czasem bowiem zagadnienia do których zdaie się łatwo ta reguła stosować, wcale przez nią rozwiązane być nie mogą. J tak gdyby zadano iż 100 żoł. uchodzą na 1 dzień 6 mil, ileż uydą na 1 dzień 1000 żołnierzy? Zastanowiwszy się widać łatwo iż 100, lub 1000, lub 2000 i t. d żołnierzy razem idąc tęż samą drogę odprawią co ieden żołnierz. Nie można tu więc ułożyć proporcyi 100 : 6 = 1000 : x; chyba, gdyby żołnierze byli w różnych mieyscach lub w różne mieysca iść mieli, a chciano wiedzieć summę drogi przez wszystkich odbytéy przypuszczaiąc każdemu iednakową prędkość.

Podobnież gdyby podano: iż kamień spadaiąc w 1 sekundzie przebiega 15 stóp; ileż przebieży spadaiąc przez 4 sek? Nie można tu ułożyć proporcyi. Wiemy bowiem z doświadczenia, iż ciało iakie spadaiąc przebiega w 2éy sek. 3 razy tyle co w pierwszéy, w 3éy sek: iuż 5 razy tyle co w piérwszéy, i t. d.

Są więc przypadki w których rachunek nie może być podciągnięty pod regułę 3ch lubo do niéy zdaie się należyć, gdyż nie zawsze wyraz szukany powiększa się lub zmniéysza w miarę iak się powiększa lub zmniéysza wyraz do którego on się odnosi i przeciwnie. Że zaś nie zawsze łatwo iest rozeznać podobne przypadki, naylepsza więc w téymierze reguła iest *gruntownie poiąć całe zadanie i to tylko rachować co się dobrze rozumie.*

Zagadnienia.

313. I. Za $40\frac{1}{2}$cet. pewnego towaru dano $68\frac{5}{9}$#; ileż będzie tego samego towaru za $45\frac{3}{4}$#?

II. Rzemieślnik robiący w 9 dniach $21,9^{\text{łok.}}$ pewnéy roboty, ileżby potrzebował czasu do zrobienia iéy $42,75^{\text{łok.}}$ przypuściwszy iżby robił zawsze iednakowym sposobem?

III. Pewna osoba uieżdzaiąc $7\frac{1}{2}$ mil na dzień, potrzebuie do odprawienia swéy drogi 20 dni; lecz chce odprawić tęż drogę w 12 dniach, ileż mil na dzień ma uieżdzać?

IV. Rachuiąc czerwony złoty po $18^{\text{Zł.}}$ trzeba na zapłacenie długu 324 czer. zł.; gdy na spłacenie tego długu oddano 300 czerw. zł. w złocie, po ileż złotych rachowano dukat?

V. Pewny gospodarz oddawszy na polu dziesięcinę ze swoich snopków, zwiózł ich 702 do stodoły. Jleż miał wszystkich snopków, a ile dziesięcina wynosiła?

VI. Pewne miasto miało utrzymywać 1000 żołnierzy przez 3 miesiące, a 500 przez 4 miesiące; późniéy przysłano rozkaz, ażeby wszyscy ci żołnierze iednakowy czas w témże mieście zostali, z zastrzeżeniem iednak, iżby miasto tyle tylko poniosło iak gdyby pierwszy rozkaz był uskuteczniony. Jakże długo pozostaną w mieście, oba te oddziały woyska?

VII. Zapłacono za $23^{\text{sąż.}}$ $5^{\text{st.}}$ $4^{\text{c.}}$ pewnéy roboty $43^{\text{Zł}}$ $10^{\text{gr.}}$ 12^{de}, ileżby trzeba zapłacić po téy saméy cenie za $77^{\text{sąż.}}$ $3^{\text{st.}}$ $8^{\text{c.}}$?

VIII. Ugodzono furmana do przewiezienia 50 cet. towaru o 28 mil, lecz że okazała się potrzeba aby umówioną liczbę cetnarów tylko o 22 mil przewiózł; ileż mu za to można ieszcze przyłożyć cetnarów towaru?

IX. 8 Ludzi z których każdy zrobił $3^{\text{łok.}}$ pewnéy roboty na dzień, zyskali razem $1500^{\text{Zł}}$ za dni

40; ileż 12 ludzi robiąc każdy na dzień po $4^{łok}$ téyże roboty zyskaią za dni 45?

X. Jleż robotników trzeba do wymurowania muru na $256^{stóp}$ długiego, $4\frac{1}{6}^{st.}$ szerokiego a $12\frac{1}{2}^{st.}$ wysokiego, gdy ten w tym samym czasie ma być wymurowany, w iakim 3 robotników wymurowali mur na $16^{st.}$ długi, $2\frac{1}{2}^{st.}$ szeroki, a $6\frac{1}{4}^{st.}$ wysoki?

XI. Pewny furman zgodził się na przewiezienie 30 beczek trunku o 20 mil za 100 tal. Jnnym razem przewieźć miał 70 beczek tegoż trunku o 30 mil; lecz że drogi były złe bardzo, podwyższył o $4^{tą}$ część cenę przewozu. Jleż mu teraz przypadało tal.?

XII. 20 Robotników przez 18 dni po $9^{god.}$ codzień robiąc wykopali $360^{sąż}$ rowu, $4\frac{2}{3}^{łok}$ szerokości $3\frac{2}{3}^{łok}$ głębokości i wzięli za tę robotę $190^{tal.}$ $4^{Zł}$. 24 $^{gr.}$; 54 robotników przez 60 dni po $10^{godz.}$ codzień robiąc, ileż wykopią sążni rowu na $7\frac{1}{2}^{łok}$ szerok: a na $2\frac{2}{5}^{łok}$. głębokości, i wieleż za tę robotę wezmą?

XIII. Funt ołowiu spadaiąc w 1 sekundzie przebiega 15 stóp; 100℔ ołowiu spadaiąc ileż w 1″ przebiegą?

XIV. Jeżeli ieden koń uciągnie 10 $^{cetn.}$ wieleż cetnarów uciągnie 12 koni przypuszczaiąc równie mocne konie i równie dobrą drogę?

O Regule-łańcuchowéy.

314. *Reguła łańcuchowa* iest tylko szczególnym gatunkiem reguły trzech składanéy. Dla tego zaś ią nazywaią łańcuchową że stosunki w nią wchodzące składaią nieiako ogniwa, znayduiemy tu bowiem stosunek między dwoma ilościami ze stosunku który ma iedna z tych dwóch do innéy, ta inna do trzeciéy, trzecia do czwartéy i t. d. aż do stosunku między iedną i drugą z dwóch wspomnionych.

Wiedząc np. że $22^{\text{łok}}$. polskich czynią $19^{\text{łok}}$. berlińskich, 19 zaś łok. berlin. idzie na $15^{\text{łok}}$. bawarsk. a $35^{\text{łok}}$. bawarskich na 51 Hamburskich; ieżeli chcę doyść wiele 50 $^{\text{łok}}$. polskich uczynią łokci Hamburskich? piszę proporcyie:

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{ł. pol.} & & \text{ł. ber.} & & \text{ł. pol.} & & \text{ł. ber.} & \\
22 & : & 19 & = & 50 & : & x & \\
\text{ł. ber.} & & \text{ł. baw.} & & \text{ł. ber.} & & \text{ł. baw.} & \\
19 & : & 15 & = & x & : & x' & (1) \\
\text{ł. baw.} & & \text{ł. hamb.} & & \text{ł. baw.} & & \text{ł. hamb.} & \\
35 & : & 51 & = & x' & : & x'' &
\end{array}$$

czyli, gubiąc czynniki spólne w ułożonych stosunkach i skracaiąc ie (n° 307) będzie

$$\left.\begin{array}{ccc} 22 & : & 3 \\ 7 & : & 51 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{ł pol.} & & \text{ł. hamb.} \\ 50 & : & x'' \end{array}$$

$$\text{zatém } 154 : 153 = \overset{\text{ł. pol.}}{50} : \overset{\text{ł. hamb.}}{x''}$$

$$\text{a więc } x'' = \tfrac{7650}{154} = 49{,}675 \text{ łok. hamb.}$$

Zachodziło tu pytanie, 50 łok. pol. ile uczynią łok. hambur. Liczby te można nazwać głównemi zagadnienia. Pierwszą nazwiemy *główną wiadomą*, drugą *główną niewiadomą*. Zważmy tu ieszcze, że między danemi muszą się znaleźć koniecznie dwie liczby inne tegoż samego gatunku, co wspomnione dopiero dwie liczby główne.

315. W układaniu stosunków trzeba na to pamiętać iż należy zaczynać od liczby tego gatunku co

(1) Napisaliśmy tu $\overset{\text{ł. pol.}}{22.} : \overset{\text{ł. ber.}}{19}$; wszakże widoczna iż w tym razie $\overset{\text{ł. pol.}}{22}$ wyrównywaią $\overset{\text{ł. baw.}}{15}$; można było więc prosto napisać stosunek 22 : 15.

główna wiadoma, a skończyć ostatni stosunek na liczbie tego gatunku co główna niewiadoma. Pośrednie zaś stosunki tak maią być ułożone aby ie zawsze ten gatunek liczb zaczynał, na iakim się kończył poprzedzaiący stosunek. Tym sposobem dane stosunki formuią proporcyie takie, iż wyraz niewiadomy pierwszéy staie się iednym z wiadomych w drugiéy, wyraz niewiadomy w drugiéy staie się iednym z wiadomych w trzeciéy i t. d.

316. Używa się téy reguły szczególniéy w zamianie miar, wag i pieniędzy iednego kraiu na drugie, w rachunkach wexlowych i t. p.

Wszakże zagadnienia tego gatunku gdy są pod ręką tablice porównania miar i wag mieysc rozmaitych, rozwięzuią się zaraz przez regułę 3ch poiedynczą.

I tak co do powyższego przykładu, ieżeli wiem że łokcie polskie maią się do hamburskich iak 190 : 189
ł. pol. ł. ham.
znaydę od razu przez proporcyią $190 : 189 = 50 : x$, że $x = 49{,}736$; odpowiedź różniąca się od pierwszéy tylko o 61 części tysiącznych, i to dla tego że stosunki w poprzedzaiącém zagadnieniu są wzięte przez przybliżenie.

317. Reguła łańcuchowa służy także do rozwiązania wielu zagadnień w rachunkach procentu, (o którym niżéy) w rachunkach mnożeń i dzieleń liczb wielorakich i t. d.

Przykład: 7 łokci pewnéy roboty kosztuie 13$^{\text{zł}}$; trzeba wiedzieć ile przypádnie zapłacić za 15 sążni téyże roboty? układam stosunki:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{sąż.} & & \text{łok.} \\ 1 & : & 3 \\ \text{łok.} & & \text{zł.} \\ 7 & : & 13 \end{array}\right\} = \overset{\text{sąż.}}{15} : \overset{\text{zł.}}{X}$$

$$7 : 39 = 15 : x = \frac{39 \times 15}{7} = 83\tfrac{4}{7}\text{zł.}$$

318. W regule łańcuchowéy a mianowicie w zagadnieniach podobnego rodzaju iak poprzedzaiące, to iest, w które wchodzą liczby wielorakie, trzeba się często domyślać stosunków pośrednich i dla dopełnienia warunków przepisanéy (nº 315) reguły przybierać podziały głównéy iedności. Tak, gdyby się pytano: po czemu wypada arkusz papieru do pisania kiedy 3 bele kosztuią 20 #? układam stosunki iak następuie:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{ark.} & & \text{libra} \\ 24 & : & 1 \\ \text{liber} & & \text{ryza} \\ 20 & : & 1 \\ \text{ryz} & & \text{bela} \\ 10 & : & 1 \\ \text{beł} & & \text{\#} \\ 3 & : & 20 \\ \text{\#} & & \text{zł.} \\ 1 & : & 18 \\ \text{zł.} & & \text{gr.} \\ 1 & : & 30 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{ark.} & & \text{gr.} \\ 1 & : & x \end{array}$$

czyli skróciwszy.. $4 : 3 = 1 : x$, które $= \frac{3}{4}$gr.

319. Niechby się spytano: na wiele tygodni wystarczy 5ciu ludziom pewna żywność gdy taż sama wystarcza 10ciu na dni 80? ułożywszy wyrazy:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{lud.} & & \text{dni} \\ 10 & : & 80 \\ \text{dni} & & \text{tyg.} \\ 7 & : & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{lud} & & \text{tyg.} \\ 5 & : & x \end{array}$$

wypada $7 : 8 = 5 ; x$, $x = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$dni co iest przeciw oczywistości, gdyż dwa razy mniéy ludziom, powinna wystarczyć taż sama żywność na 2 razy dłuższy czas.

Wnieśmy stąd, iż często zagadnienie zdaiące się być podobne do rozwiązania przez regułę łańcuchową, nie może być przez nią rozwiązane, co się zdarza gdy zachodzą stosunki odwrotne, i w ten czas zagadnienie rozwięzuie się za pomocą reguły trzech składaney, skoro tylko iest dostateczna liczba danych, co się z łatwością poznaie pisząc zadanie w sposób iak podaliśmy pod n° 308.

320. Uważmy tu iż gdy w regule trzech składaney a zatém i w łańcuchowéy dla znalezienia wyrazu niewiadomego trzeba iłoczyn średnich dzielić przez iloczyn skraynych wiadomych, gdybyśmy więc drugi stosunek proporcyi, w przykładzie pod n° 318, ark. gr.
1 : x napisali odwrócony nad stosunkami z lewéy strony, mielibyśmy tylko dwie kolumny stosunków

gr.	ark.
x	1
ark.	libr.
24	1
liber.	ryza
20	1
ryz.	bela
10	1
bel	#
3	20
#	zł.
1	18
zł.	gr.
1	30

tak, iż po skróceniu wedle prawideł, podzieliwszy iloczyn wypadły z wyrazów drugiéy kolumny przez iloczyn wypadły z wyrazów pierwszéy, znaleźlibyśmy tęż samę odpowiedź co i podług pierwszego układu naszego.

Taki sposób układania stosunków we dwie kolumny bądź w regule trzech składanéy bądź w łańcuchowéy zowie się po niemiecku *kettensatz* albo *reesiche Regel* od wynalazcy Holendra P. Rees. Wszakże sposób ten powszechnie w handlu używany i nawet podawany iako nie zawisły od reguły proporcyi, iest prawie zupełnie mechanicznym i podlega omyłkom zwłaszcza kiedy zachodzą stosunki odwrotne (nº 319) do których także chcą go rozciągać. Jest on pozornie łatwiéyszy i krótszy od rachunku za pomocą proporcyi, lecz i ten nie iest trudnym. Bo czego się uczymy na rozum, to równie staie się łatwém iak za wprawą w wykonaniu szybkiém. Nadto rachunek za pomocą proporcyi ćwiczy w myśleniu i do wprowadzenia w błąd iest prawie niepodobny. W nim to szczególniéy obeymuiemy razem całe zadanie, cel iego i wewnętrzny związek, poznaiemy czyli warunki dane są dostateczne lub nie; widziemy zaraz potrzebne ku rozwiązaniu działania i sposoby skrócenia drogi do celu którego z pewnością dostępuiemy.

321. Co się tycze proby zagadnień przez regułę łańcuchową rozwiązanych, ta uskutecznia się podobnie iak mówiliśmy pod nº 311.

Wspomnieliśmy wyżey (nº 316) o zamianie miar, wag, i t. d. za pomocą tablic ich porównania. Wypada tu powiedzieć o użyciu takowych tablic.

Gdy miary wielkości, wagi i monety w różnych kraiach a nawet i w znaczniéyszych miastach iednego kraju znayduią się rozmaite, przeto dla porównania ich między sobą musiano ie porównywać z pewną iaką tegoż rodzaiu miarą.

I tak do porównania miar liniiowych czyli długości używano prawie powszechnie dawnéy stopy paryskiéy czyli francuzkiéy podzielonéy na 144 lub 1440 cząstek równych nazwanych *liniiami*.

Do porównania powierzchni używano téyże stopy kwadratowéy; a do porównania obiętości, cala sześciennego téy stopy.

Do porównania wag używano grzywny kolońskiéy podzielonéy na 65536 cząstek równych (*Richtpfennig*), albo funta amszterdamskiego (*Troysgewicht*) podzielonego na 10240 części równych nazwanych *essami*, albo nakoniec dawnego funta paryskiego nazwanego wagą grzywny *poids de marc* dzielącego się na 9216 ziarn (*grains*).

Stosownie do tych podziałów miar uważano ile obranych części znaydowało się w stopach, łokciach, korcach, funtach i t. d. innych kraiów i układano tablice służące do poznania wzaiemnych stosunków między temiż miarami i do zamiany ich iedne na drugie.

322. Jakoż wiedząc iż iakich cząstek n. p. stopa francuska ma 144, takich stopa reńska zawiera 139,13; wiem iuż ich stosunek do siebie, to iest: że stopa paryska tak się ma do reńskiéy iak 144 : 139,13 czyli $\overset{\text{st. par.}}{1} : \overset{\text{st. reń.}}{1} = 14400 : 13913$.

Więc stopa paryska $= \frac{14400}{13913} = 1{,}035003$ stopy reńskiéy, a stopa reńska $= \frac{13913}{14400} = 0{,}96618$ stopy paryskiéy.

Skoro więc mamy stopy paryskie do zamienienia na reńskie, rozmnóżmy tylko 1,035003 przez liczbę stóp paryzkich a iloczyn będzie liczbą stóp reńskich. Wzaiemnie ieżelibyśmy mieli stopy reńskie zamienić na paryskie, rozmnożylibyśmy 0,96618 przez liczbę daną stóp reńskich a iloczyn byłby liczbą stóp paryskich.

Łatwo także iest poznać iż 13913 stóp paryskich wyrównywaią długości 14400 stóp reńskich: gdyż 14400 cząstek stopy paryskiéy wzięte 13913 razy, daią tęż samę długość, iak 13913 takichże cząstek stopy reńskiéy wzięte 14400 razy.

Maiąc więc tablice takiego porównania miar i wag w iakichkolwiek cząstkach równych wiedzieć zawsze możemy ile trzeba iednych miar na drugie, odwróciwszy tylko stosunek. J na tém to zależy użycie takowych tablic. Podobne umieściliśmy tu przy końcu, porównywaiąc miary i wagi z cząstkami nowych miar francuskich o których układzie przyłączamy także przy końcu rzecz osobną.

323. Jeżeli stosunek o iakim mówiemy, wyrażony iest wielkiemi liczbami, a nie idzie o zupełną ścisłość; można go bez znacznego uchybienia skrócić w wyrażeniu za pomocą sposobu podanego pod n° 173 znayduiąc n. p. że łokieć Lipski ma 565,2 a łokieć hamburski 572,97 milimetry; zmniéyszemy naprzód te liczby dzieląc ie przez 3, będzie stosunek łokcia lipskiego do łokcia hamburskiego = 1884 : 1909,9 czyli

l. lip. l. hamb. ... l. lip. ... l. hamb.

1 : 1 = 18840 : 19099; więc 1 $=\frac{18840}{19099}=$ 0,986439,

l. hamb. ... l: lips.

a wzaiemnie 1 $=\frac{19099}{18840}=$ 1,013747; łokci zaś lipsk. 19099 = 18840 hambur.

Maiąc więc n. p. 120 łok. lipsk. zamienić na łokcie hamburskie, zrobię proporcyią:

l. lips. l. hamb. l. lips. l. hamb.

19099 : 18840 = 120 : x : x znaydziemy = 118,37

Uważaiąc teraz stosunek 19099 : 18840 iako ułomek $\frac{18840}{19099}$ (n°256) szukam iego wyrażenia prostszego przestaiąc podług okoliczności na więcéy lub mniéy krótszém. I tak znaydę odpowiadaiące ułomki $\frac{72}{73}$, $\frac{73}{74}$, $\frac{218}{221}$, $\frac{291}{295}$, i t. d. Mogę więc za pierwszy stosunek wziąć 73 : 72, albo 74 : 73, lub też 221 do 218 i t. d. Wypadki zawsze będą te same w liczbach całych, i tylko w częściach setnych, tysiącznych i d.

mało odmienne. Równie otrzymalibyśmy tę samę odpowiedź gdybyśmy pomnożyli 0,986439 przez 120, to iest, części łokcia hamburskiego którym się równa łokieć lipski przez liczbę łokci lipskich.

Należy tu ieszcze uważać, iż znayduią się, tablice w których porównywaią ile iakich miar idzie na pewną obraną: natenczas oczywista iest iż porównanie będzie biorąc prosto liczby przy każdéy miarze napisane. N. p. ieżeli na 1000# bawarskich trzeba 1133,04 amszterdamskich, a 1195 berlińskich, widoczna iż 1133#,04 amszterd. = 1195# berlińsk. Wiedząc także iż na czystą grzywnę kolońską srebra rachuie się sztuk 86,688 iednozłotowych polskich a 42,55 szylingów angielskich, wniosę iż 86688 zł. pol. = 42550 szyling. angielskich.

324. Naostatek uczyniemy tu ieszcze uwagę iż w zamianie miar, pieniędzy, i t.p. z korzyścią użyć można ułomków złożonych czyli *ułomków z ułomków*.

Na przykład, rossyiski rubel srebrny waży $\frac{95}{2}$ sztywerów holend., sztywer waży $\frac{1}{20}$ zł. hol. ten iest $\frac{2}{5}$ tal. hol. ten zas waży $\frac{71}{50}$ tal. prask. który iest $\frac{1}{3}$ dukata wiedeńskiego; iakiż iest stosunek rubla do dukata wiedeńskiego?

Wysłowienie okazuie, iż rubel iest $\frac{95}{2}$ z $\frac{1}{20}$ z $\frac{2}{5}$ z $\frac{71}{50}$ z $\frac{1}{3}$ dukata wiedeńskiego: mnożąc te ułomki iedne przez drugie (nº 166) będzie ułomek $\frac{1349}{3000}$ na ważność rubla względem dukata wiedeńskiego.

Znaiąc tę ważność łatwo iest znaleźć ile iakakolwiek liczba rubli ważyć będzie dukatów wiedeńs.. Na to dosyć iest pomnożyć licznik znalezionego tu ułomku przez podaną liczbę rubli, a iloczyn podzielić przez mianownik; iloraz okaże liczbę dukatów szukaną. I tak n.p. 250 rubli ross. uczynią 112 i $\frac{5}{12}$ # wiedeńsk.

Jasna iest iż powyższe zagadnienie możnaby tak wysłowić: 2 ruble rossyiskie czynią 95 stywerów hollenderskich, tych 20 czyni 1 złoty holend. 5 zł. hollend. czynią 2 tal. hollend. tych zaś 50 czyni 71 tal. pruskich, których 3 idzie na dukat wiedeński; 250 rubli ross. ileż więc uczynią dukatów wiedeńskich?

Gdybyśmy tu ułożyli dane stosunki we dwie kolumny (n° 320) to iest, gdybyśmy pisali następnie mianowniki powyższych ułomków po lewéy stronie linii a liczniki po prawéy, nakoniec x położyli z lewéy a 250 z prawéy; znaleźlibyśmy ten sam wypadek.

To nas naprowadza na myśl że rachunek zwany *kettensatz* nie iest czém inném tylko rachunkiem za pomocą ułomków z ułomków. Oparty więc na ich teoryi może mieć tę pewność na któréy mu zbywa.

Zagadnienia.

325. I. Gdy 113 łok. berlińsk. czynią 120 łok. rossyysk. a 64 łok. rossyy: czynią 79 łok. pol. wieleż 50 łok. berl. uczynią łok. polskich?

II. 58 frydrychsdorów ileż uczynią dukatów w złocie, rachuiąc 16 tal. na 3 frydrychsdory a $12\frac{1}{2}$ tal. na 4# w złocie?

III. Jeżeli 86 łok. pol. czynią 97 łok. litewsk. 54 łok. litewsk. idzie na 59 rossyysk. 32 rossyysk. na 33 amszterd. tych 31 na 24 lipsk. tych 15 na 13 berlińsk. tych 7 na 6 wiedeńsk. tych 29 na 30 amszterd. tych 177 na 105 bawarskich; 128 łok. pol. ileż uczynią bawarskich?

IV. Jeżeli 13 tal. holendérsk. czyni 33 zł. reńskie, a 72 zł. reńskie idzie na 35 portugalskich *millerées*, tych zaś 7 na 34 liry florenckie, tych

35 na 27 franków francusk. tych 611 na 28 funtów szterlingów, tych 68 na 399 dukatow neapolitańsk. tych 55 na 59 rubli srebrnych rossyyskich; ileż 1222 tal. holend. uczynią srebrnych rubli rossyyskich?

V. Wieleż kosztuie 8℔ hamburskich pewnego towaru, gdy tegoż 3℔ berlińskie kosztuią $10^{zł}$?

VI. Ileż talarów kosztować będzie bela papieru do pisania, gdy arkusz kosztuie 2 szelągi?

VII. Ileż łutów pewnego towaru dostanie się za groszy 3, kiedy 5℔ tego towaru kosztuią 8^{tal}?

VIII. Jeżeli gdański ankier wina kosztuie 18^{tal}. po czemuż wypada przedawać nowy garniec warszawski chcąc mieć zysku 12# na 100, co się pisze tak, $12\frac{o}{o}$.

IX. Ileż trzeba zapłacić za 650 łok. sukna którego łokieć 1 ma się przedawać po 12 zł. z zarobkiem $20\frac{o}{o}$, lubo na swóy łokieć przedaiąc straci się 2 łok. na sto, albo $2\frac{o}{o}$?

X. Ileż zapłacić przypadnie za 240℔ pewnego towaru którego funt przedaiąc po zł. 1 gr. 12 chcą zarobić $12\frac{o}{o}$, lubo ważąc na swóy funt tracą $2\frac{1}{2}$℔ na $\frac{o}{o}$?

XI. 54 łok. lipsk. idzie na 53 łok. warsz. 180 zaś łok. lipsk. pewnéy materyi kosztowało 75# w złocie rachuiąc # po zł. 20. Po ileż zł. trzeba będzie przedawać łokieć polski téy materyi aby zarobić $15\frac{o}{o}$ mimo tego że w miarze straci się 2 łok. na $\frac{o}{o}$?

XII. Przyiaciele Platona wykupuiąc go z niewoli dali za niego 3000 drachm; ileż to czyni tal. wiedząc że 61 drachm czyni 64 franki, a 128 franków idzie zupełnie na 207 zł. pol?

XIII Mury Ateńskie do portu Falereyskiego miały długości 35 stadiów, a 40 do portu Pireyskiego. Mury te złączone były na końcach trzecim poiedynczym 60 stadiów długim. Uważaiąc te mury poiedynczo iakaż ich długość w milach ieograficznych rachuiąc na stadium 135 kroków których mila ma 6000?

XIV. Podług P. *Condamine* góra Chimborako wysoka iest na 3217 sążni paryskich (*toises*). Znaiąc z dołączonych przy końcu tablic metrologicznych stosunek miar francuskich z polskiemi, znaleźć ile ta wysokość czyni stóp polskich?

O Regule procentu.

326. *Reguła procentu* iest to reguła 3ch zastosowana do wyznaczenia *procentu* czyli kwoty należącéy się za pieniądze pod pewnemi warunkami pożyczone które zowiemy kapitałem, lub do wyznaczenia kapitału z wiadomego procentu i t. p. (1)

Przykład 1. Ileż przyniosą procentu na rok $3575^{Zł}$ rachuiąc po 5 od sta rocznie, to iest: iż $100^{Zł}$. przynoszą w roku $5^{Zł}$, co się pisze tak: $5\frac{0}{0}$.

Jasna iest że im więcéy kapitału, tém więcéy będzie procentu; iest więc proporcyia

	kap.		kap.	pro.	pro.
	100	:	3575	= 5	: x
czyli	20	:	3575	= 1	: x
czyli nakoniec.	4	:	715	= 1	: x a zatém

$x = \frac{715}{4} = 178\frac{3}{4}^{Zł}$.

Można ieszcze rozwiązać ten przykład uważaiąc iż 5 iest $\frac{1}{20}$ ze 100, a zatém procent od iakiéykolwiek summy na taką miarę. czyli iak zowią *stopę* pożyczonéy będzie, biorąc tylko z niéy $\frac{1}{20}$. I tak $\frac{1}{20}$ z $3575^{Zł}$. iest $178\frac{3}{4}^{Zł}$ wypadek zgodny z powyżéy znalezionym.

327. Gdyby się tu spytano ile podany kapitał przyniesie procentu w lat 3? oczywista iest, iżby

(1) Pożyczaiący komu pieniędzy nazywa się *Wierzycielem*, a ten co od niego pożycza *dłużnikiem*.

trzeba wziąć znaleziony procent roczny 3 razy i wypadłoby $536\frac{1}{4}$ zł.

Procent taki od którego się nie rachuie procentu nazywaią *prostym*, i aby go znaleźć z wielu lat od iakiego kapitału, mnoży się procent roczny przez liczbę lat; gdy zaś procent każdego roku przyłącza się do kapitału ażeby sam przynosił także procent na rok następuiący, natenczas mówiemy iż się rachuie *procent* od *procentu* i taki nazywaią *składanym*.

328. *Przykład* II. Gdyby kto na końcu roku odebrał 7208 zł. kapitału z procentem po $6\frac{0}{0}$, a pytaią się ile tu iest samego kapitału, a ile procentu? należy uważyć iż 106 zł kapitału, z rocznym procentem zawiera kapitału zł. 100, trzeba więc ułożyć proporcyią:

kap. z pr. kap. z pr. kap. kap.

106 : 7208 = 100 : x znaydziemy na odpowiedź 6800 zł. kapitału, które odięte od 7208 zł. pokażą procent 408 zł. Lub gdybyśmy ułożyli proporcyią

kap. z pr. kap. z pr. proc. proc.

106 : 7208 = 6 : x, znaleźlibyśmy na odpowiedź procent 408 zł. a te odięte od 7208 zł. okazałyby kapitał.

329. Gdyby kapitał był zmieszany z procentem kilkoletnim prostym, wzięlibyśmy za pierwszy wyraz proporcyi 100 zł. kapitału z procentem tyloletnim iaki podano w zagadnieniu, np. Gdyby odebrano 5880 zł. kapitału razem z procentem po $5\frac{0}{0}$ ośmioletnim, a pytaią się ile tu iest samego kapitału a ile procentu? skoro tu procent 8 letni od sta iest 40 zł,

kap. z pr. kap. z pr. kap. kap.

układam proporcyią 140 : 5880 = 100 : x, i znayduię na odpowiedź 4200 zł które odięte od 5880 zł pokażą procent ośmioletni 1680 zł.

kap. z pr. kap. z pr. proc. proc.
Gdybyśmy zaś ułożli 140 : 5880=40 : x
znalazłby się procent ośmioletni 1680^{zł}. iak wyżéy.

330. W regule procentu mogą zachodzić i odwrotne stosunki. Np. osoba A pożyczyła osobie B 488^{tal}. na 8 miesięcy bez procentu; na iak długi czas B może pożyczyć tamtéy 640^{tal}. także bez proc. chcąc iéy uczynność bez zobopolnéy krzywdy nagrodzić?

Uważam tu iż im więcéy ma nawzaiem osoba B pożyczyć osobie A, tém na krótszy czas to być powinno; ma zatém być wyraz 4^{ty} mniéyszy, a zatém układam proporcyią:

tal. tal. m. m.
640 : 488=8 : x. Skracaiąc i uskuteczniaiąc wypada $x=6\frac{1}{10}$ mcy.

331. Gdyby osoba A pożyczywszy osobie B 300^{tal}. po 2^{ch} miesiącach przydała 400^{tal}. po 6^{ciu} zaś odebrała 200^{tal}, naostatek po 8^{u} miesiącach, rachuiąc zawsze od daty pierwszéy pożyczki, odebrała wszystko; a teraz się pytaią na iak długi czas B może pożyczyć tamtéy 600^{tal}?

W tym przypadku trzeba obrachować zysk iaki osoba B miała z używania wspomnionych kwot odnosząc go do zysku z iednéy summy przez czas określony np. przez miesiąc. A nayprzód 300^{tal}. używała ona przez 2 miesiące, tyle więc niemi zyskuie iak przez miesiąc 2 razy większą summą t. i. 600 talarami. Od końca 2^{go} miesiąca do końca 6^{go} a zatém przez 4 miesiące używała 700^{tal}, tyle więc niemi zyskuie iak przez miesiąc 4 razy większą summą t. i. 2800 talarami. Od końca 6^{go} do końca 8^{go} mieśiąca t. i. przez 2 miesiące, miała tylko 500^{tal} z tych więc tyle ma zysku ile na 1 miesiąc z 2 razy większéy summy, to iest, z 1000^{tal}. Z wziętych więc różnemi czasy kwot od osoby A tyle zyskuie iak gdyby miała od niéy na miesiąc dane $600^{\text{tal.}}+2800^{\text{tal.}}+1000^{\text{tal.}}=4400^{\text{tal}}$. Zagadnienie więc zwraca się na gatunek poprzedzaiącego, idzie bowiem oto: iak długo osoba B może pożyczyć osobie A 600^{tal}, gdy od téy pożyczała na miesiąc 4400^{tal} bez procentu? Odpowiedź iest, na $7\frac{1}{3}$ miesięcy.

332. Nader często zachodzi w rachunku procentów reguła 3ch składana. Np. gdyby się pytano ile $2000^{\text{zł}}$ powinno przynieść procentu w 29 miesięcy rachuiąc rocznie po $5\frac{0}{0}$?

Widoczna iest że procent zwiększa się tu w stosunku kapitału i czasu, będzie więc

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{kap.} & & \text{kap.} \\ 100 & : & 2000 \\ \text{m.} & & \text{m.} \\ 12 & : & 29 \end{array}\right\} = 5 : x.$$

skracaiąc i uskuteczniaiąc wypada $x=241\frac{2}{3}^{\text{zł}}$.

Przeydźmy do zagadnień procentu złożonego.

333. *Przykład I.* Kapitał $1500^{\text{Zł}}$. ileż wyniesie po 3 latach rachuiąc po $20\frac{0}{0}$ z procentem od procentu? (1).

Możnaby tu nayprzód porachować od $1500^{\text{Zł}}$. procent roczny i ten przydawszy do nich uważać ie iako zwiększony na drugi rok kapitał, od którego znowu znaleziony procent dodać do tegoż kapitału, aby go mieć znowu zwiększony na rok 3ci; od tego zaś kapitału wzięty ieszcze procent roczny przydawszy do niego, znaleźlibyśmy odpowiedź $2592^{\text{Zł}}$. Wszakże podamy tu sposób dogodniéyszy.

---

(1) Procent w tym przykładzie wzięty tak wysoki nazywa się *lichwą* i iest prawem zakazany.

334. Znaydźmy ile kapitał $1^{\text{zł.}}$ wynosić będzie po 3^{ch} latach rachuiąc procent od procentu. Gdy procent iest $20\frac{0}{0}$, będzie rocznie od złotego iednego $\overset{\text{zł.}}{\frac{1}{5}}$; zatém $\overset{\text{zł.}}{1}$ wynosi po skończonym roku $\overset{\text{zł.}}{1 \times \frac{1}{5}}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5}}$ czyli $\frac{6}{5}$ części z $\overset{\text{zł.}}{1}$. A tak kapitał $\overset{\text{zł.}}{1}$ oddany na procent po $20\frac{0}{0}$ wynosi na końcu roku $\frac{6}{5}$ z $\overset{\text{zł.}}{1}$ t. i. $\frac{6}{5}$ tego co wynosił na początku roku. Widziemy więc iż *aby znaleźć ile iaka summa dana na podobny procent wynosi na końcu roku, dosyć iest pomnożyć ią przez* $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5}}$. Dane na procent $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5}}$ na drugi rok, wynoszą na końcu tegoż roku $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5} \times \frac{6}{5}}$; te $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5} \times \frac{6}{5}}$ dane na procent na 3 rok wynoszą na końcu tegoż roku $\overset{\text{zł.}}{\frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{1} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{1} \times \left(\frac{6}{5}\right)^3$ t. i. $\overset{\text{zł.}}{\frac{216}{125}}$.

335. Widoczny tu iest postęp zwiększania się kapitału, i łatwo wyprowadza się reguła ogólna, iż *aby otrzymać ważność kapitału* 1 *zł. po pewnéy liczbie lat, trzeba wziąć ułomek który wyraża ile* 1 *zł. wynosi na końcu roku i rozmnożyć kapitał* 1 *zł. przez ten ułomek ogólny wzięty tyle razy za czynnik, ile iest iedności w liczbie lat, czyli wyniesiony do potęgi oznaczonéy liczbą lat. Iloczyn będzie ważnością złotego po czasie danym. Aby więc znaleźć ważność iakiego kapitału po pewnéy liczbie lat, dosyć iest rozmnożyć ważność* 1 *zł. po tym czasie przez liczbę złotych kapitału.*

Rozwiążmy za pomocą tego sposobu przykład poprzedzaiący. Gdy $\overset{\text{zł.}}{1}$ po 3 latach wynosi $\overset{\text{zł.}}{\frac{216}{125}}$ (n° 334);

$\overset{\text{zł.}}{1500}$ wynosić będą po 2 latach 1500 razy $\overset{\text{zł.}}{\frac{216}{125}}$ t. i. $\overset{\text{zł.}}{2592}$.

336. *Przykład II.* Chcą wiedzieć ile wynosić będą $\overset{\text{zł.}}{1500}$ po 3 latach i 5 miesiącach, dane na podobny iak wyżéy procent?

Wiemy iuż ile dany kapitał wynosi po kilku latach (n° 335), trzeba tylko znaleźć zwiększenie iego w 5 miesiącach.

Procent od $\overset{\text{zł.}}{1}$ iest $\overset{\text{zł.}}{\frac{1}{5}}$ za 12 Mcy, a zatém $\overset{\text{zł.}}{\frac{1}{60}}$ za miesiąc a $\overset{\text{zł.}}{\frac{5}{60}}$ czyli $\frac{1}{12}$ za 5 mcy. Więc $\overset{\text{zł.}}{1}$ wynosi po 5 miesiącach $\overset{\text{zł.}}{1}+\overset{\text{zł.}}{\frac{1}{12}}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{\frac{13}{12}}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{1}\times\frac{13}{12}$. A zatém iakikolwiek kapitał dany podług warunków o iakich mowa zwiększa się na końcu 5 mcy $\frac{13}{12}$ razy. Że zaś $\overset{\text{zł.}}{1}$ po 3 latach wynosi $\overset{\text{zł.}}{\frac{216}{125}}$, więc $\overset{\text{zł.}}{1}$ po 3 latach i 5 miesiącach wynosi $\overset{\text{zł.}}{\frac{216}{125}}\times\frac{13}{12}$ t. i. $\frac{234}{125}$ (1); a zatém $\overset{\text{zł.}}{1500}$, wynosić będą 1500 razy $\overset{\text{zł}}{\frac{234}{125}}$ czyli $\overset{\text{zł.}}{2808}$.

337. Niechby odebrał kto $2592.^{\text{zł}}$. kapitału z 3 letnim procentem składanym po 20% a pytaią się iaki był iego kapitał pierwiastkowy?

Uważam tu, iż gdy podany kapitał w tym stanie iest iloczynem z ważności $1^{\text{zł.}}$ po danym czasie przez liczbę złotych kapitału pierwiastkowego (n° 335); ieżeli go więc podzielę przez ważność $1^{\text{zł.}}$ wziętą po tymże czasie, iloraz okaże liczbę złotych kapitału pierwiastkowego. J tak, ieżeli podzielę $2592^{\text{zł.}}$ przez

---

(1) Podzieliliśmy tu bowiem licznika 216 przez 12, a wypadek rozmnożyli przez 13.

ważność 1zł. po 3 latach która iest $\frac{216}{125}$ (n° 334), iloraz, $2592 \times \frac{125}{216}$ t. i. 1500 będzie liczbą złotych kapitału pierwiastkowego; zatém 2592zł. kapitału z 3 letnim procentem składanym po 20% daią 1500zł. kapitału pierwiastkowego.

Jeżeli w 3 lata i 5 miesięcy odebrano 2808zł. kapitału wraz z procentem składanym po 20%, a pytaią się o kapitał pierwiastkowy? Podzielę 2808zł. przez ważność 1zł. po tymże czasie która iest $\frac{234}{125}$ (n° 336); iloraz, $2808 \times \frac{125}{234}$ t. i. 1500zł. okazuie iż 2808zł. kapitału wraz z procentem składanym za 3 lata i 5 miesięcy, daią 1500zł. kapitału pierwiastkowego.

338. Użyty tu sposób mnożenia wartości 1zł. po danym czasie przez liczbę złotych kapitału pierwiastkowego dla znalezienia kapitału wraz z procentem składanym; i wzaiemnie, dzielenia kapitału złączonego z procentem składanym, przez wzmiankowaną wartość 1zł. dla znalezienia kapitału pierwiastkowego, może się wygodnie zastosować do zagadnień procentu prostego.

339. W tym razie nawet gdy od wielu różnych kapitałów przychodzi obrachowywać procent podług iednakowéy stopy, może mieć mieysce skrócenie następuiące: znaleźć 1od procent od 1zł. a następnie przez proste dodawanie albo mnożenie, procent od 2zł. od 3 it.d. aż do 9 włącznie np. ieżeli proc. od 1zł. 0,06

	zł.
1	0,06
2	0,12
3	0,18
4	0,24 itd.

aby wziąć procent roczny od 4223zł. dosyć iest wziąć podług téy tabelli procent od 4000zł. który będzie . . . . . 240zł. (n° 79)

od	200	12
od	20	1,2
od	3	0,18
	Summa	253, 38 czyli

zł. 253. gr. $10\frac{2}{5}$.

Co do zagadnień procentu złożonego, zobaczemy niżéy iak można ieszcze ułatwić ich rozwiązanie za pomocą logarytmów.

Zagadnienia.

340. I. Dano na procent 25000$^{\text{Zł.}}$ po 5$\frac{o}{o}$; ileż będzie procentu za rok?

II. Gdy iest procentu rocznego 1250$^{\text{Zł.}}$ biorąc po 6$\frac{o}{o}$, iakiż będzie kapitał?

III. Gdy od 25000$^{\text{Zł.}}$ iest rocznego procentu 1250$^{\text{Zł.}}$, po ileż brano od sta?

IV. Gdy odebrano w roku 26250$^{\text{Zł.}}$ kapitału z procentem po 5$\frac{o}{o}$; iakiż iest kapitał i iaki procent roczny?

V. 1) Kupił ktoś towaru za 4500$^{\text{Zł}}$, przedał go zaś za 6000 zł., ileż zarobił na $\frac{o}{o}$?

2) Wzaiemnie ieżeli kupił za 6000 zł, a przedał za 4500 zł. ile na $\frac{o}{o}$ stracił?

VI. Chcą posłać do Paryża wexel (1) na 2000 zł. Bankier daiący wexel żąda 2$\frac{o}{o}$. Ileż więc trzeba tu zapłacić Bankierowi?

---

(1) Wexlem nazywaią pismienne zobowiązanie się oddania iakiéy kwoty na czas oznaczony. Zobowiązanie się tém słowém oznaczone podług prawa ściśle dopełnione być musi pod osobistą odpowiedzialnością. Krótka ale dokładna nauka o wexlach znayduie się w *Conversations-Lexicon*. Berlin 1820.

VII. Dano na procent 36000 zł. po 7% ileż będzie prowizyi za lat 6, mcy 9 i dni 18?

VIII. Gdy procent iest 17136 zł. za lat 6, mcy 9 i dni 18 biorąc po 7%, iakiż iest kapitał?

IX. Gdy 36000 zł. w lat 6, mcy 9, dni 18, przyniosły procentu 17136 zł., po ileż brano od sta?

X. Gdy odebrano w 6 lat, 9 mcy, 18 dni 53136 zł. kapitału z procentem po 7%, iakiż iest kapitał i iaki procent?

Wysłowiam tu zagadnienia po prostu iednakowym sposobem a mógłbym i rozmaitym. Zagadnienie n. p. ostatniego gatunku może bydź tak wysłowione. Jakiż kapitał w 15 lat biorąc po 6% wypadnie na 2160 zł. nie rachuiąc procent od procentu? Wszakże iest pewna iż rzeczy dokładnie poznane ze strony z któréy widać nayblizszy między niemi związek, iakożkolwiek nam się potém nasuną, łatwiéy a nawet ogólniéy poznane być mogą, bo do pierwszych w związku o nich powziętych znaiomości odniesione będą. Wzwyczaiony prostym sposobem zagadnienia wysłowiać, i w znacznie zawikłanych prostuiąc wysłowienie znaydzie porządek, a następnie łatwo ie rozwiąże: często bowiem rozdrabniane bywaią okoliczności zadania, dla uczynienia go na pozór trudném i łączone nawet uwagi obce zagadnieniu arytmetycznie uważanemu, które aby z łatwością rozwiązać, trzeba od niego odłączyć to wszystko co istotnych iego warunków nie składa i przywieśdź do nayprostszego wysłowienia. Często także wysłowiaią zagadnienie iak nayzwięźléy pomiiaiąc nawet istotne warunki których się iednak po zastanowieniu nad wysławieniem domyśléć można.

XI. Jak długo być maią na procencie 36000 zł. aby po 7% przyniosły 17136 zł.?

XII. 36000zł. w 7 lat, 4 mce przyniosły 13200zł. procentu; 1) 27000zł. w 10 lat 5 mcy ileż *procentu* przyniosą? lub 2) żeby w 10 lat 5 mcy urosło procentu 14062$\frac{1}{2}$zł. iakiż ma być *kapitał*? lub 3) 27000zł. aby przyniosły 14062$\frac{1}{2}$zł. procentu *iakże długo* być maią na procencie?

XIII. Gdy pewny kapitał złączony z procentem prostym wynosił 2460zł. po 5 mcach, a 2592zł. po 16 mcach; iakiż iest sam kapitał i iaki procent od niego.

XIV. Osoba A pożyczyła osobie B 500# na 7 mcy bez procentu 1) na iak długo B może pożyczyć tamtéy 1166$\frac{2}{3}$ # także bez procentu, chcąc iéy uczynność bez zobopólnéy krzywdy nagrodzić? lub 2) iakąż kwotę B może pożyczyć osobie A na 3 miesiące aby wyrównać uczynność?

XV. Osoba A pożyczyła osobie B 500tal; po 5ciu mcach przydaie iéy 300tal, a po 7 mcach odbiera 400, po 10 mcach przykłada znowu 500tal, po 13 mcach rachuiąc zawsze od dnia pożyczki, odebrała wszystko; 1) na iak długo B może pożyczyć osobie A 800tal żeby iéy uczynność bez zobopólnéy krzywdy odsłużyć? 2) iakąż kwotę B może pożyczyć osobie A na 10$\frac{3}{4}$ mcy żeby odsłużyć iéy uczynność?

XVI. Osoba A pożyczyła osobie B 1800tal na 6 mcy, lecz nazaiutrz rozpoznawszy że iéy ta kwota na własne użycie prędzéy będzie potrzebna 1) żeby ią wcześniéy odebrać bez uszkodzenia zapewnionéy umową korzyści osobie B, przydaie iéy 900tal, iakże długo B obie te summy może zatrzymać? lub 2) aby ią za 4 mce odebrać, ileż musi przydać osobie B żeby zapewnionéy umową dla niéy korzyści dorównać?

XVII. Osoba A ma wypłacić osobie B 2400tal. po 8 mcach. Wypłaca zaś iéy po 3 mcach 900tal; iakże długo może resztę zatrzymać?

XVIII. 100000zł. kapitału za lat 5 po $5\frac{0}{0}$ rachuiąc procent od procentu, ileż przyniosą kapitału z procentem?

XIX. Jeżeli po pięciu latach odebrano kapitału $127628\frac{5}{32}$zł wraz z procentem składanym po $5\frac{0}{0}$; iakiż był pierwiastkowy kapitał?

XX. 1) 60000zł. kapitału ileż wyniesie po 4 latach i 4 mcach razem z procentem składanym po $8\frac{0}{0}$? i wzaiemnie 2) ieżeli po 4 latach 4 mcach odebrano kapitału wraz z procentem składanym po $8\frac{0}{0}$, $83806\frac{1874}{15625}$zł.; iakiż był kapitał pierwiastkowy?

O Regule odtrącania procentu.

341. Reguła odtrącania (*l'escompte, Rabattrechnung*) zawisła od reguły trzech iest działanie przez które znayduiemy to, czém trzeba zmnieyszyć iaką summę którą się przed terminem wypłaca.

Na przykład: pewny kupiec bierze towaru za 500zł. które się obowięzuie za rok wypłacić, z warunkiem iednak iż skoro prędzéy zapłaci, będzie mògł odtrącić $10\frac{0}{0}$ rocznie. Zdarza się iż w 3 lub 4 dni poténi chce zapłacić. Ileż tedy ma dać zamiast 500zł. któreby dał gdyby płacił w swoim terminie, t. i. za rok?

Mógłby kto mówić: że kiedy ze 100 wytrąca się 10; z 500 wytrąci się 50, a zatém że kupiec powinien teraz zapłacić 450zł.; co iednak byłoby z krzywdą wierzyciela a z zyskiem kupuiącego, bo ten odtrącaiąc dziś $10\frac{0}{0}$ od całego długu czyli kapitału, odtrącałby także procent i od 50zł. których nie daie.

Łatwo się tu przekonać o ile chybia rzetelności taki rachunek. Gdy bowiem 450zł. dodane na końcu roku do swego procentu który tu iest 45zł. uczyniłyby tylko $495^{zł.}$; $50^{zł}$ przyniosłszy przez rok $5^{zł.}$ zamieniłyby się na końcu roku na $55^{zł}$; $5^{zł.}$ więc iest tu stratą z iednéy a zyskiem z drugiéy strony. Nie iest to wprawdzie znaczne przy małéy summie, lecz tém być nie może przy wielkiéy.

Ażeby w tym rachunku zachować należną sprawiedliwość, zważyć potrzeba iż $500^{zł.}$ maiące być wypłacone po roku składaią się właśnie z kapitału i z procentu $10\frac{0}{0}$; zagadnienie więc to zwraca się do gatunku tego o iakim mówiliśmy pod n° 328 i proporcyią należy ułożyć:

$$110:100=500:x$$

czyli $11:10=500:x$, które $=454\frac{6}{11}$ zł.

Gdybyśmy ułożyli proporcyią

$$110:10=500:x$$

czyli $11:1=500:x$, x byłoby $=45\frac{5}{11}$ zł.

Nie trudno iest teraz przeświadczyć się o dokładności tego rachunku. Wziąwszy procent $10\frac{0}{0}$ osobno od każdego z tych wypadków, będzie procent od pierwszego $45\frac{5}{11}$ zł, od drugiego $4\frac{6}{11}$ zł; procenta te złączone w końcu roku z kwotami które ie wydaią, uczynią $500^{zł}$ i $50^{zł}$, po tyle też właśnie powyżsi kontraktuiący w końcu roku mieć powinni.

342. Gdyby się pytano ile osoba B maiąca za lat 4 oddać osobie A $2000^{zł.}$, ma iéy oddać zaraz wytrącaiąc sobie procent po $5\frac{1}{2}$ od sta?

Zastanowiwszy się postrzegam iż $2000^{zł}$ na końcu 4 lat oddane zawieraią razem kapitał i procent. Zagadnienie więc to wychodzi na zagadnienie pod n° 329, t. i. ażeby znaleźć kapitał który wzięty z procentem 4letnim czyni $2000^{zł}$. Wziąwszy zatém za pierwszy wyraz sto zł. kapitału z procentem 4 letnim który tu iest 22, będę miał proporcyią

$$122:2000=100:x,\ x=1639\tfrac{21}{61}^{zł}.$$

W ogólności: w każdém zagadnieniu tego gatunku trzeba uważać summę maiącą się spłacić po pewnym czasie iako kapitał złączony razem z procentem prostym lub składanym po tymże czasie, i stosownie do warunków podług nº 329 lub 337 zagadnienie rozwiązać.

343. Lecz nie tak iest łatwo wyrachować kwotę do spłacenia w czasie oznaczonym, gdyby summa częściami miała być przez znaczny przeciąg czasu spłacana. Naprzykład: gdyby osoba A miała wypłacać co rok osobie B $2000^{zł}$, a to przez lat 10; ileż ma dziś oddać wytrąciwszy sobie procent po $5\frac{0}{0}$?

Aby rozwiązać to zagadnienie trzeba nayprzód obrachować korzyść w końcu oznaczonego czasu zapewnioną iednéy i drugiéy osobie, a potém szukać kwot, które dziś wzięte wyrównywałyby tymże korzyściom w czasie oznaczonym.

Jeżeli uważemy rzecz ze strony osoby A, zastanówmy się, że ta maiąc wypłacać osobie B $2000^{zł}$ razy 10, co czyni $20000^{zł}$, ma zysk następuiący; pierwszych $2000^{zł}$ które w końcu roku pierwszego wypłaci, używać będzie rok 1; drugich $2000^{zł}$ które w końcu roku drugiego wypłaci, używałaby lat 2, i t. d.... ostatnich $2000^{zł}$ które w końcu roku dziesiątego wypłaci, używałaby lat 10. A że procent roczny od $2000^{zł}$ po $5\frac{0}{0}$ iest $100^{zł}$; więc osoba A miałaby ten procent od wypłaconéy summy pierwszéy, raz ieden, od drugiéy razy 2.. i t. d. od dziesiątéy razy 10. Idzie więc o zebranie tych procentów których liczba = summie wyrazów postępu różnicowego t. i. $= 1 + 10 \times 5 = 55$ (nº 275). Procent więc roczny od $2000^{zł}$ czyli zł. 100 wzięte razy 55 t. i. $5500^{zł}$ iest zyskiem iaki osoba A przez wspomnione wypłaty w końcu lat 10 ma sobie zapewniony. Jeżeli zatém osoba B chce dziś odebrać co iéy się słusznie należy a nie pozbawiać osoby A korzyści do iakiéy ona ma prawo, powinna iéy oddać taką summę któraby w lat 10 z procentem po 5$\frac{0}{0}$ urosła do 5500^{zł}. Powyższym więc rozbiorem zwrócone zostało zagadnienie do tego: iaki ma być kapitał ażeby w lat 10 z procentem po 5$\frac{0}{0}$ wyszedł ną 5500^{zł}?

Odpowiedź podług n° 329, znaydziemy przez proporcyią

$$\begin{array}{cccc} \text{k. z pr.} & \text{k.} & \text{k. z pr.} & \text{k.} \\ 150 : 100 & = & 5500 : x; & \end{array}$$

znalezione na czwarty wyraz 3666$\frac{2}{3}^{zł}$, odpowiadaią warunkom; bo od téy kwoty procent roczny 183$\frac{1}{3}$ wzięty razy 10 uczyni 1833$\frac{1}{3}^{zł}$ a te dodane do 3666$\frac{2}{3}^{zł}$ uczynią 5500^{zł}.

Gdybyśmy znalezioną część dla osoby A t. i. 3666 $\frac{2}{3}^{zł}$ odięli od kapitału 20000^{zł} który ma wypłacić osobie B w 10 latach, reszta 16333$\frac{1}{3}$ ^{zł} będzie kwotą iaką ma dzisiay wypłacić osobie B, i iaka odpowiada warunkom iak zaraz zobaczemy.

Jeżeli będziemy uważać rzecz ze strony osoby B, postrzeżemy, iż ta wziąwszy na końcu pierwszego roku pierwsze 2000^{zł} używać ich będzie do czasu ukończenia interesu lat 9, a zatém miałaby z nich procent razy 9; drugie 2000^{zł} któreby na końcu drugiego roku odebrała, przyniosłyby iéy procent razy 8... i t. d. ... przedostatnie 2000^{zł} które na końcu dziewiątego roku odbierze, przyniosłyby iéy tylko raz procent. Trzeba więc i tu znowu zebrać procentu których liczba = summie wyrazów postępu różnicowego t. i. $9+1 \times 4\frac{1}{2}=45$. Wziąwszy więc 100zł. 45 razy, będzie z samego procentu 4500zł. Że zaś osoba B odbiera nadto w tym czasie i kapitał który wynosi 20000zł., więc ogółem na końcu dziesiątego roku ma korzyści 24500zł. Powinna więc taką dziś wziąć summę, ażeby ta z procentem po $5\frac{o}{o}$ urosła za lat 10 na 24500zł. Summę tę podług powyższego znaydziemy $16333\frac{1}{3}$zł. Procent roczny od niéy po $5\frac{o}{o}$ który iest $816\frac{1}{3}$zł, weźmy dla sprawdzenia 10 razy, będzie procent 10 letni $8166\frac{2}{3}$zł. które dodane do $16333\frac{1}{3}$zł. czynią na końcu 10go roku 24500zł. iak to być powinno.

Gdyby się te wspomnione osoby umówiły na to, ażeby A wytrzymawszy zapewnioną sobie podług powyższych warunków korzyść, wypłaciła razem osobie B należącą kwotę; kiedyż to ma nastąpić?

Rozwiązalibyśmy zagadnienie obrachowawszy iak powyżéy, ile ma mieć korzyści, osoba A na końcu roku 10go, a natenczas zagadnienie zwraca się na następuiące: iak długo 20000zł. maią być na procencie po $5\frac{o}{o}$ aby przyniosły 5500zł.? odpowiedź znaydziemy podług no 340 zagad. XI. lat $5\frac{1}{2}$.

Łatwo się teraz przekonać znowu o słuszności tego rachunku i na stronę osoby B. Wiemy bowiem z powyższego, iż na końcu 10go roku powinna mieć korzyści z samego procentu 4500zł. Weźmy procent po $5\frac{o}{o}$ od 20000zł. przez lat $4\frac{1}{2}$ które są dopełnieniem oznaczonego czasu, procent ten iest zupełnie 4500zł..

344. Jeżeli na iednę rzecz trzy osoby A, B, C, złożyły swe podania: A n. p. chce dać 18200zł. zaraz; B 20000 zł. w tym sposobie, 4000 zaraz, a potém co rok po 4000 przez 4 lata; C 21000zł. zaraz, potém co rok po 3000 przez lat 6. Któreż podanie zyskowniéysze?

Jakożkolwiek zagadnienie to zdawałoby się tu należyć i w rzeczy saméy gdybyśmy wartość tych podań czyli kapitałów podług danych warunków chcieli zwrócić do wartości teraźniéyszéy, wypadałoby użyć wiadomości w tym rozdziale wskazanych. Lecz gdy tu idzie o proste tylko poznanie stosunku korzyści z iednéy strony, dosyć iest odnieść każde podanie do iednakowego czasu, iak tu do końca r. 6go, a łatwo zaraz wartość ich porównamy. Wziąwszy więc iakiś stały procent n. p. $5\frac{o}{o}$, znaydziemy że kapitały powyższe spłacone podług warunków w oznaczonym czasie przyniosą procenta następuiące: kapitał osoby A zł. 5460, osoby B 3600, osoby C 3150. Te złączone z właściwemi kapitałami okażą iż kap. 1szy na końcu 6go r. urośnie do 23660zł. 2gi do 23600 a 3ci do 24150. Trzecie więc podanie iest naywyższe a 2gie nayniższe.

Zagadnienia.

345. I. Osoba A winna zapłacić osobie B 16200zł. za rok bez procentu, ileżby teraz powinna zapłacić wytrąciwszy sobie procent roczny po $5\frac{o}{o}$?

II. Dowiaduie się ktoś że bankier odebrał assygnacyią na wypłacenie mu 3000zł. za 6 mcy, lecz że potrzebuie pieniędzy, udaie się do bankiera; ileż ten ma mu teraz zaraz wypłacić wytrącaiąc sobie $5\frac{o}{o}$ na rok?

III. Pewna osoba maiąca prawo odebrania od drugiéy zł 600 za 3 mce, żąda wypłacenia sobie zaraz z odtrąceniem procentu. Chcą iéy zapłacić tylko 564 zł. iakże wysoki odtrącaią procent?

IV. Pewna osoba daie na siebie kartę kupcowi na 2854zł. maiące się za rok wypłacić; lecz na końcu 7 mcy przychodzi uiścić się z długu. Kupiec zezwala na zmnieyszenie długu bo go przed terminem odbiera. Rachowano zaś procent w karcie po $6\frac{o}{o}$. Jest pytanie za iakąż summę powinien kupiec oddać kartę?

V. A ma wypłacić osobie B 45000$^{zł.}$ po 12 latach skończonych; 1) ileż dziś ma zapłacić wytrąciwszy sobie procent po $5\frac{o}{o}$? lub 2) zgadzaią się na to, żeby A po 4 latach wypłaciła dług; ileż iéy dać przypadnie gdy sobie wytrąci procent po $5\frac{o}{o}$?

VI. Toż samo co wyżéy zagadnienie tylko dodany warunek żeby mieć wzgląd na procent od procentu?

VII. Osoba A ma wypłacić osobie B 45000$^{zł.}$ w 15^{tu} po sobie idących latach, t. i. co rok po 3000 $^{zł.}$ lecz 1) chcąc się pozbyć tego długu i nie płacić 15 razy, pyta się ile ma dziś oddać wytrąciwszy sobie procent po $6\frac{o}{o}$? lub 2) obie przystaią na to żeby; osoba A razem te 45000$^{zł.}$ wypłaciła; kiedyż się to stać powinno? lub 3) obie zgodziły się na to żeby osoba A po pierwszych 3 latach cały dług wypłaciła; ileż na końcu 3 lat dać powinna wytrąciwszy sobie procent po $5\frac{o}{o}$?

Nayczęściéy iednak zdarzaią się nierówne kwoty i w nierównych terminach do wypłacenia n. p.

VIII. Ma ktoś 800^{tal} wypłacić w ten sposób; 300^{tal} po 4 mcach, 400^{tal} po 6, a 100^{tal} po 8, uważaiąc czas rachowany zawsze od zaczęcia umowy; lecz wolałby od razu dług zapłacić, co przyięto; kiedyż to ma nastąpić?

IX. Pewny kupiec winien za towary 3600$^{zł.}$ zapłacić w ten sposób: 600$^{zł.}$ zaraz, 800 za 3 mce, 200 za 8 mcy, a resztę w końcu roku, rachuiąc d . czasu zaciągnionego długu; lecz umawiaią się żeby dług razem był wypłacony, w iakimże czasie a wypłata nastąpi?

X. Dłużnik który winien 3000^{tal}. umówił się z wierzycielem, że 1500^{tal}. zapłaci mu za 2 lata, w rok potem 1000^{tal} a w rok ieszcze resztę; lecz na końcu pierwszego roku wierzyciel mu proponuie, iż ieżeli ze-chce wypłacić zaraz cały dług, gotow mu iest odtrącić procent po $8\frac{0}{0}$; dłużnik na to przystaie. Trzeba wiedzieć ile ma wypłacić?

XI. Pewny kupiec winien drugiemu za towary summę 6480^{tal}. które ma wypłacić w 4^{ch} ratach, t. i. czwartą część zaraz, $\frac{1}{8}$ po 3 mcach, $\frac{1}{3}$ po 6, a resztę w końcu roku; lecz 1) chce wszystko odrazu wypłacić; kiedyż to słusznie uiści? lub 2) przystaią oba ażeby dłużnik po 2^{ch} mcach cały dług spłacił; ileż wtedy ma dać wytrącaiąc sobie umówiony procent po $8\frac{0}{0}$?

XII. ma ktoś 1000^{zł}. w 3 terminach wypłacić, t. i. $\frac{1}{4}$ téy kwoty po 4 mcach, $\frac{1}{5}$ po 7 mcu a resztę na końcu roku rachuiąc czas od zawarcia umowy; lecz on płaci $\frac{1}{2}$ długu po 3^{ch} a $\frac{1}{8}$ po 5 mcach; pytam się iak długo reszty może ieszcze nie wypłacić?

XIII. Obowiązany płacić czynsz wieczny 4200^{zł}. od kapitału 42000^{zł}, chce się zbyć tak wielkiego ciężaru. Przyięto warunek ażeby w 2 latach zupełnie się wypłacił, to iest w 2 równych wypłatach na końcu każdego roku. Jakaż ma być każda wypłata maiąc wzgląd na procent od procentu?

XIV. Chcą podobnież umieszczony kapitał 3310^{zł}. spłacić w 3 równych wypłatach na końcu każdego roku; iakaż ma bydź każda wypłata?

XV. Proponuią pewnemu kupcowi 30 łokci materyi iednego gatunku na $\frac{9}{4}$ łok. szerok. za 720^{zł}. gotowizną; lub 50 łok. materyi drugiego gatunku na $\frac{5}{4}$ łok szerok. za 1200^{zł}. wypłacić się maiące za 2 lata. Gatunek 1^{széy} materyi ma się do gatunku 2^{éy} iak 16 : 15. Procent uważa się po $10\frac{0}{0}$ ze względem na procent od procentu. Trzeba wiedzieć które kupno zyskowniéysze dla kupca?

O Regule Spółki.

346. Gdy reguła 3ch służy do podzielenia zysku lub straty proporcyonalnie do wkładki każdego spólnika, natenczas ią nazywaią *regułą spółki.* Reguła ta służy w ogólności do podzielenia liczby iakiéy na części proporcyonalne liczbom danym.

Reguła spółki może być także poiedyncza albo składana; iest poiedyncza kiedy liczby do których maią być proporcyionalne części szukane wysłowionemi są prosto w zadaniu; iest składana gdy te liczby nie są prosto wysłowione lecz dopiero trzeba ie oznaczyć składaiąc zachodzące stosunki. Wyiaśniamy to w przykładach.

Przykład I. Dwie osoby składaią się: pierwsza daie 100zł, 2ga 200zł, zyskuią razem 150zł; ileż każdéy z zysku przypada?

Ponieważ iest widoczna iż każdy zysk szczególny powinien być proporcyionalny do każdéy wkładki szczególnéy, będzie więc proporcyia:

Pierwsza wkładka: pierwszego zysku = druga wkładka: drugiego zysku. Stąd (no 290) summa wkładek: summy zysków $=\left\{\begin{array}{l}\text{pierwsza wkładka : pierw. zysk.}\\ \text{druga wkładka: drug. zysku.}\end{array}\right.$

Reguła więc ta zwraca się do reguły trzech któréy pierwszy wyraz iest summą wkładek (czyli summą liczb podług których ma być podzielona liczba dana); Drugim wyrazem iest summa zysków lub strat (czyli liczba dana do rozdzielenia na części proporcyionalne);

Trzecim każda wkładka wszczególności (czyli liczba do któréy ma być proporcyionalna część odpowiadaiąca);

A czwartym będzie część każdego spólnika (czyli liczba szukana). Będzie więc

$$\begin{array}{l} 300 : 150 = \\ \text{lub} \quad 2 : 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 100 : x = \frac{100 \times 1}{2} = 50^{\text{zł.}} \\ 200 : y = \frac{200 \times 1}{1} = 100. \end{array} \right.$$

347. *Przykład* II. Trzy osoby A, B, C. składaią się do spólnego handlu. A daie $100^{\text{zł}}$ na 2 miesiące; B daie $200^{\text{zł}}$ na 4 mce; C daie $300^{\text{zł}}$. na 5 mcy. Zdarza się iż zyskuią razem $400^{\text{zł}}$; ileż każdéy przypada z zysku?

Jasna tu iest iż każda zyskać powinna w stosunku kapitału i czasu przez ktory zostaie w handlu iéy kapitał.

Reguła więc spółki w tym razie iest składana. Zamieniemy ią zaś na poiedynczą, iak powszsza, skoro zwróciemy używanie wkładek do iednakowego czasu (n° 331.), to iest skoro znaydziemy iakie powinny byé wkładki ażeby zostaiąc iednakowy czas w handlu, przyniosły zyski żądane, co się pospolicie wyraża: zwrócié wkładki do iednakowego czasu. Mówię zatém iż.

$100^{\text{zł}}$. przez 2 mce tyle zysku przyniosą, iak 2 razy 100 czyli 200 przez 1 miesiąc.

$200^{\text{zł}}$. przez 4 mce tyle zysku przyniosą, iak 4 razy 200 czyli 800 przez 1 miesiąc.

$300^{\text{zł}}$ przez 5 mcy tyle zysku przyniosą iak 5 razy 300 czyli 1500 przez 1 miesiąc.

Maiąc iuż wkładki do iednakowego czasu zwrócone, idzie tylko o rozwiązanie zagadnienia podług n° poprzedzaiącego. Piszę więc

$$2500 : 400 \left\{ \begin{array}{l} 200 : x \\ 800 : y \\ 1500 : z \end{array} \right.$$ czyli skracaiąc

$$25 : 400 \left\{ \begin{array}{l} 2 : x = \frac{16 \times 2}{1} = 32 \\ 8 : y = \frac{16 \times 8}{1} = 128 \\ 15 : z = \frac{16 \times 15}{1} = 240 \end{array} \right.$$
$$1 : 16$$

Weźmie zatém z spólnego zysku osoba A, $32^{zł}$; B, 128; C, 240.

348. Sprawdza się ta reguła biorąc summę zysków lub strat szczególnych; summa ta powinna być równa zyskowi całemu lub stracie całéy.

349 Gdyby w poprzedzaiącém zagadnieniu zamiast $400^{zł}$. zysku, dane było $400^{zł}$. straty do rozdzielenia między spólników; natenczas, lubo przyiętém iest zwykle między handluiącemi iż zarównie strata iak zysk dzielone są w prostym stosunku składanym z kapitału i z czasu, i podług tego wypadałoby na każdą osobę część straty iak wyżéy, azatém gdyby odbierali swe wkładki z handlu, wziełaby 1^{sza} $68^{zł}$, 2^{ga} 72, 3^{cia} tylko 60; iednakże zastanawiaiąc się postrzeżemy że gdy do spólnego handlu iedna osoba dwa razy więcéy daie i na dwa razy dłuższy czas niż druga, niemasz słusznéy przyczyny ażeby dlatego w razie straty ponosiła iéy cztery razy więcéy, t. i. ażeby strata miała być w stosunku prostym równie czasu iak iest kapitału. W takim więc razie, skoro spólna strata nie przenosi złożonego kapitału wypadałoby podług ścisłości ażeby się podzielili spòlnicy pozostałą massą kapitału w prostym stosunku składanym z szczególnych kapitałów i czasu. I tak w niniéyszym razie dostałaby osoba A $16^{zł}$; B, 64; C, 128.

350. Skoroby zaś strata przenosiła kapitał np. gdyby rzeczeni spólnicy zamiast $400^{zł}$. stracili 1000, i oprócz straty swoich kapitałów które wynoszą ra-

zem 600zł. obowiązani byli ieszcze ponieść i nadmiar straty t. i. 400zł. natenczas nadmiar ten mógłby być rozdzielony albo w stósunku prostym kapitałów podług tego miałaby dopłacić osoba A, $66\frac{2}{3}$zł; B, $133\frac{1}{3}$; C, 200; albo w stosunku prostym złożonym z kapitałów i czasu i w tym razie miałaby dopłacić osoba A, 32zł; B, 128; C, 240; albo nakoniec, co się zdaie naysłuszniéy, wypadałoby nad miar ten rozdzielić w stosunku prostym kapitałów lecz odwrotnym czasu. Trzebaby więc podzielić szczególne kapitały przez czasy a tak reguła spółki składana zwróci się na poiedynczą i będzie tylko szło o rozdzielenie 400zł. podług liczb $\frac{100}{2}$, $\frac{200}{4}$ i $\frac{300}{5}$ t i. podług liczb 50, 50 i 60. Zatém miałaby ieszcze dopłacić osoba A, 125zł; B, 125; C, 150 Wszakże rachunek w tym razie zawisł szczególnie od warunków umowy i zastósowanych do niéy okoliczności.

351. Gdyby spólnicy zmieniali swe wkładki dodaiąc do nich w różnych czasach, lub odéymuiąc iakie kwoty, np. gdyby się pytano: ile każda z dwóch osób A i B ma dostać zespólnego zysku 840tal. gdy w handel 10 mcy trwaiący 1sza włożyła 1od 550tal. lecz po 4 mcach przyłożyła 100tal, a po 6 mcach uięła 50tal; 2ga włożyła 1od 600tal. ale po 3 mcach uięła 150tal?

W tym razie zwrócilibyśmy wkładki szczególne do iednakowego czasu podług (nº 331) a zatém tylkoby szło o podzielenie 840tal. w stosunku prostym wkładek 6900tal osoby 1széy; 4950tal. 2éy; i znaieźlibyśmy część 1széy $489\frac{9}{79}$tal, 2éy $350\frac{70}{79}$tal.

352. Gdyby żądano podzielić 67250zł. pomiędzy trzy osoby tak, aby część czyli, dział 2ey była $\frac{2}{5}$ 1széy, a dział 3ciéy była $\frac{7}{8}$ 2éy?

Jest widoczna iż dział 3ciéy względem działu pierwszéy będzie $\frac{7}{8}$ z $\frac{2}{5}$, czyli $\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$ (nº 166).

Trzy więc działy szukane są między sobą iak liczby 1, $\frac{2}{5}$, i $\frac{7}{20}$; a zwracaiąc ie do iednakowego mianownika, znaydziemy $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$ i $\frac{7}{20}$. Będą zatém trzy liczby 20, 8 i 7 proporcyionalne danym pierwszym. Pozostaie więc tylko podzielić liczbę daną proporcyionalnie do liczb 20, 8 i 7. Co uskuteczniwszy podług prawideł poprzedzaiących, znaydziemy dział osoby 1széy $38428\frac{20}{35}$, 2éy $15371\frac{15}{30}$, 3éy 1345ozł.

353. Gdyby żądano podzielić daną kwotę na 3 części tak, ażeby 1sza była do 2éy $=5:4$, a 1sza do 3éy$=7:3$, trzebaby zrobić podobne iak wyżéy przygotowanie.

Widać tu łatwo iż część 2ga ma być $\frac{4}{5}$ pierwszéy, a część 3cia $\frac{3}{7}$ pierwszéy. Wyraziwszy więc pierwszą przez 1, 2ga będzie wyrażona przez $\frac{4}{5}$, a 3cia przez $\frac{3}{7}$. Zagadnienie więc zwraca się na gatunek poprzedzaiącego, i znaydziemy na odpowiedź że część 1sza iest $30176\frac{11}{39}$, 2ga $24141\frac{1}{39}$, 3cia $12932\frac{27}{39}$.

354. Skrócenie o którém mówiliśmy pod nº 339 daie się tu także korzystnie zastósować gdy do wielu szczególnych kapitałów czyli liczb zwłaszcza wielkich potrzebą szukać odpowiadaiących części. J tak znalazłszy np. że,

		zł.
1zł. ma odpowiadać.		0,03295
2	. . . .	0,06590
3	. . . .	0,09885
4	. . . .	0,13180 i t. d.

ieżeli mam znaleźć część odpowiadaiącą 34579 złotym,

	zł.
biorę podług téy tablicy na 30000zł.	988,5
na 4000	131,80 i t. d.

Dodawszy razem mieć będę liczbę odpowiadaiącą 34579 złotym.

Ponieważ dziesiętne mogą nie zawsze odpowiadać zupełnie pierwszéy iedności iak tu np. 1 złotemu, więc otrzymane tym sposobem wypadki mogą się czasem nie zgadzać z nayścisleyszém rachunkiem. Niezgadzanie się będzie tém bardziey nie znaczne, im pilniey pamiętać będziemy na to co się mówiło pod n° 113 i 187.

Zagadnienia.

355. I. Cztery osoby kładą w handel: A, 5600zł.; B, 4800; C, 6200; D, 5000; straciły razem 3400zł.; ileż każda straty poniesie?

II. Trzy osoby A, B, C, miały kapitału spólnego 36000zł.; dzieląc się zaś zyskiem proporcyionalnie do kapitałów swoich, A bierze 460zł. B 230, C 250. Jakiż każdey był kapitał?

III. Trzy osoby składaią towarzystwo, A daie 350#, B 200#; ileż ma włożyć C, ażeby wziąć w stosunku kapitału połowę zysku który ma być 1000zł. i ile każda z nich tegoż zysku dostanie?

IV. Pewny Artyllerzysta potrzebuie mieszaniny z 2ch części saletry, $1\frac{1}{3}$ siarki, 1 części węgli, a 4 prochu. Chcąc mieć 50℔ takiey mieszaniny ileż weźmie z każdego materyiału?

V. Do zrobienia białego szkła potrzebuią 3 części dziarnistego piasku, 1 część potażu, $\frac{1}{5}$ część kredy; ileż trzeba wziąć z każdego materyiału chcąc mieć massy 60 funtów?

VI. 4600 robotników 1) podzielono na 3 oddziały: w 1szym iest ich 2300, w 2gim 828, w 3cim 1472; wszyscy maią razem zrobić 10000 miar pewney roboty; ileż miar każdy oddział zrobi? lub 2) trzeba podzielić na 3 oddziały: 1szy ma zrobić 5000 miar pewney roboty, 2gi 1800, a 3ci 3200; iakże liczny powinien być każdy oddział, wszystkie inne okoliczności iednakowe przypuszczaiąc?

VII. W wielkich arsenałach rachuie się $101\frac{1}{2}$℔ materyiałów do prochu wchodzących na 100℔ prochu, t. i. $76\frac{1}{2}$℔ saletry, $12\frac{1}{2}$℔ siarki, i $12\frac{1}{2}$℔ węgli. Jeżeli trzeba zrobić 5000 cetn. prochu, ileż na to wyydzie każdego materyiału?

VIII. Trzech spólników wysłało statek ze zbożem na którém zarobili 1560tal. 1) iakiż ma być zysk 1szego który włożył w ten handel 840tal. na rok cały, 2go który włożył 630tal: na 6 mcy, 3go który włożył 540tal. na 3 mce?

2) Gdyby nie powiedziano ile zyskali, lecz tylko wiadomo było iż za cały kapitał kupili 700 kor. zboża które po 20zł. korzec przedali, ileż każdy wziął z zysku?

3) mogłoby też być iż kupili 1000kor. które przedali w 3ch partyiach: 1od 18 łasztów po 400zł.; 2re 300 kor. po $1\frac{1}{2}$zł.; 3ie resztę tak, iż na całym kapitale 10$\frac{0}{0}$ zyskali. Po ileż korzec z reszty przedawano, i ile każdy z zysku otrzymał?

IX. Włożył kto w handel 2500zł., po upłynieniu roku przyiaciel iego dołożył 2400zł:; wpół roku potém dołączył się do nich trzeci daiąc 2100zł. Nakoniec wpółroku ieszcze się dołączył 4ty daiąc 3600zł. Po upłynieniu 2ch lat rachuiąc od czasu połączenia się ich wszystkich, zyskali razem 4800zł. Jleż każdy z tego zysku dostanie?

X. Trzy osoby A, B, C, kładą w ieden handel tak: iż A daie 400#, B 500, C 700; lecz A po 4 mcach przykłada 300#, po 7 mcach rachuiąc czas zawsze od zaczęcia handlu, uymuie 150#, a po 9 mcach przydaie 250#.

B po 3 mcach po włożeniu swéy wkładki, uymuie 150#, po 5 mcach przykłada 220#, po 8 mcach przykłada ieszcze 140#, a po 10 mcach uymuie 300#.

C po 5 mcach uymuie 200#, po 7 mcach uymuie ieszcze 110#, a po 9 mcach przykłada 340#.

Po upłynieniu roku od czasu włożenia w handel ich pierwszych wkładek, zyskali razem 2400#. Jleż każda otrzyma z tego zysku?

XI. Trzech spólników stowarzyszonych prowadziło handel przez 15 miesięcy, na którym zyskali 100000zł. 1szy dał na początku 86000zł.; na końcu 4go mca dodał ieszcze ~~10000~~zł.; 2gi dał 60000 zł, w 6 mcy potém przydał 5000zł, a na początku 9 mca uiął 10000zł.; 3ci zaś wszedł do spółki na końcu 2go mca z kapitałem 100000. zł. W pierwszych 2 mcach ponieśli stratę 7300zł i ostatniego mca stracili znowu 2900zł. Trzeba rozdzielić zysk i stratę proporcyionalnie dla każdego spólnika.

XII. Cztery osoby A, B, C, D, należały do spólnego handlu.

A. dała 900# na 6 mcy i zyskała 18#;

B. dała 500# na 7 mcy lecz niewiadomo ile zyskała;

C. dała 800# niewiadomo na ile mcy, lecz $21\frac{1}{3}$#zyskała;

D. niewiadomo ile dała, lecz na 5 mcy i zyskała $11\frac{2}{3}$#.

Jakiż był zysk osoby B, na ile mcy dała osoba C, i iaka była wkładka osoby D?

XIII. Do wykopania rowu 15600sąż. długiego mają być użyci na szarwark włościanie 4ch wsi, 1sza odległa iest od mieysca pracy o $\frac{5}{4}$ mili, a ma dostawić 36 robotników; 2ga odległa od tegoż mieysca o $\frac{7}{4}$ mil a ma dostawić 25 robotników; 3cia odległa od tegoż mieysca o $\frac{10}{4}$ mil a ma dostawić 32 robotników; 4ta odległa o 2 mile a ma dostawić 48 robotników.

Jleż robotnicy każdéy wsi zosobna maią wykopać sążni wspomnionego rowu, przypuszczaiąc iż ten ma bydź wszędzie iednakowey obszerności i że ziemia przez całą iego długość zarówno iest twarda?

XIV. Pewny nie maiący familii zostawia 24000^{tal} które pomiędzy 3^{ch} swoich przyiacioł A, B, C, dzieli tak, ażeby się ich części miały do siebie iak $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$; iakaż iest część każdego?

XV. Gdyby chciano podzielić 24000$^{zł.}$ na cztery osoby A, B, C, D, w tym sposobie, ażeby części A i B miały się do siebie $= 3:4$; części B i C $= 5:6$; części zaś C i D $= 2:3$. Jleż każdéy przypadnie?

XVI. Oyciec zapisuie testamentem 360000 zł. maiątku dla 5^{u} synów z warunkiem aby się podzielili w odwrotnym stosunku lat wieku, t. i. im który młodszy tém więcéy ma dostać. Ma zaś naystarszy lat 30, 2^{gi} 20, 3^{ci} 18, 4^{ty} 12, a naymłodszy 10. Jleż każdy dostanie:

XVII. Maiątek kupca który z bankrutował wynosi ieszcze 75000 zł. Udowodnione zaś długi iego wierzycieli obrachowane wynoszą: 1^{go} zł. 82494, 2^{go} 66646, 3^{go} 53942, 4^{go} 49540, 5^{go} 44750, 6^{go} 12606, 7^{go} 7204, 8^{go} 1300, 9^{go} 518. Jleż każdemu wierzycielowi przypadnie z massy upadłego?

XVIII. Od dłużnika który zbankrutował należy się osobom A $40\frac{1}{2}$^{tal}. B $42\frac{3}{4}$, C $121\frac{5}{12}$, D 86, E $113\frac{5}{6}$, F $90\frac{1}{2}$. Maiątek upadłego po odciągnieniu prawnie zabezpieczonych długów i wydatków sądowych wynosi iuż tylko 165 tal. Jleż z téy summy dostanie każdy z pomienionych dłużników, ile straci i po wiele na $\frac{0}{0}$.

O Regule połączenia czyli mieszania.

(Regula alligationis, règle d'allige).

356. Reguła połączenia iest działanie służące do znalezienia średniéy ceny mieszaniny kilku gatunków

rzeczy których ilości i ceny szczególne są dane, lub do wyznaczenia w iakiéy ilości wziąć trzeba każdéy z rzeczy maiących wchodzić w mieszaninę skoro znamy ich ceny tudzież cenę mieszaniny. Obeymuie więc dwa gatunki zagadnień. (1).

Dla znalezienia ceny średniéy, kilku gatunków rzeczy których znamy liczbę i wartość, rozmnóż wartość rzeczy każdego gatunku przez liczbę tych rzeczy; doday wszystkie iloczyny i podziel summę przez liczbę całą rzeczy zmieszanych.

357. *Przykład I.* Zmieszano razem 15 butelek wina po $4^{zł.}$ butelka z 25 butelkami po $3^{zł.}$ i z 30 po $2^{zł.}$; pytaią się o cenę butelki mieszaniny?

15 butelek po	$4^{zł.}$ butelka, kosztuią		$4^{zł.} \times 15 = 60^{zł.}$
25 . . .	3		$3 \times 25 = 75$
30 . . .	2		$2 \times 30 = 60$
70			195

Liczba butelek iest 70, a summa iloczynów iest $195^{zł.}$ Dzielę więc $195^{zł.}$; iloraz $2\frac{11}{14}$zł. iest ceną butelki mieszaniny.

Można tu rozwiązanie zastosować do reguły 3ch w ten sposób: summa butelek, iest do summy cen, iak butelka mieszaniny, do ceny średniéy; czyli $70 : 195 = 1 : x$; $x = \frac{195 \times 1}{70} = 2\frac{11}{14}$zł. Widoczna iż proporcyia ta iest prawdziwa.

(1) Nie liczą więc do téy reguły tych zagadnień (któreby się zdawały do niéy należeć) gdzie idzie o wynalezienie ile do zrobienia pewnéy mieszaniny trzeba wziąć w szczególności z innych materyy których stosunki są dane, np. do dobrego prochu trzeba 16 części saletry, 3 węgla, 1 2 siarki; chcąc zrobić 1000 fun: prochu, ileż trzeba wziąć każdéy z tych materyy w szczególności? Podobne zagadnienia rozwięzuią się, iak widzieliśmy, przez regułę spółki.

Sprawdzamy rozwiązanie doświadczaiąc iż 70 butelek wina po $2\frac{11}{14}$zł., czynią też samę wartość co i summa wartości szczególnych 15 butelek wina po 4zł. 25 po 3zł. i 30 po 2zł. butelka.

358. Gdyby podane było zagadnienie: iż przedsięwzięto zmieszać troiakiego gatunku zboże, t. i. 48 kor. po 14zł., 68 po 16 i 86 po $15\frac{1}{2}$; dobroczynna zaś osoba ofiarowała do tego 60 kor. ażeby cena dla maiących kupować zboże zniżona była; po ileż korzec téy mieszaniny powinien być przedawany?

Znaleźlibyśmy cenę szukaną podzieliwszy summę wartości tego zboża 3093zł. przez liczbę korcy 262. Wypada na iloraz 11zł. $24\frac{21}{131}$gr. Może być zatém przedawany korzec po 11zł.; i 25gr. bez straty.

359. Używa się ieszcze reguły poprzedzaiącéy do wzięcia środka między wypadkami z doświadczenia lub postrzeżeń otrzymanemi a które nie zgadzaią się z sobą. Na przykład, gdyby szło o poznanie dokładne odległości dwóch punktów dosyć od siebie oddalonych, i z iakążkolwiek pilnością powtarzano wymiar, zaszły iednak uchybienia w mierzeniu, otrzymane bowiem wypadki nie zgadzaią się z sobą: dwa razy n. p. znaleziono 3794,48 sąż.; trzy inne pomiary dały 3795,27 sąż.; nakoniec w ostatniém mierzeniu otrzymano 3793,115 sąż.

Gdy te liczby nie zgadzaią się, oczywista iest iż w niektórych musi być błąd, a może i we wszystkich. Gdyby się było otrzymało za każdym razem prawdziwą miarę, summa wypadków byłaby równą sześć razy téy miarze. Widoczna zaś iż toż samo miałoby mieysce, gdyby wypadki otrzymane chybiały iedne przez nadmiar a drugie przez niedomiar tak, iżby nadmierzenie wypadłe z dodania nadmiarów wynagradzało niedomiar wypadków mniéyszych od prawdziwéy ważności; doszłoby się zatém do poznania téyże dzieląc summę wypadków przez ich liczbę.

Ten przypadek nadto iest szczególny ażeby sądzić iż często się trafia; lecz zdarza się prawie zawsze iż błędy w iednym względzie znoszą część innych w drugim, a pozostały rozdzielony zarówno na każdy wypadek iest tém mniéyszy im większa iest liczba wypadków.

Podług tych uwag działać się będzie tak:

weźmie się 2razy	3754, 48	czyli	sąż: 7588, 96
. . . . 3 . .	3795, 27	. . .	11385, 81
. . . . 1 . .	3793, 115	. . .	3793, 115

6 wypadk. daią wogóle sąż. 22767,885

Podzieliwszy 22767,885 przez 6 znaydzie się ważność średnia sąż. 3794, 647.

360. Gdyby podano iż pewna loteryia złożona iest z 10000 biletów czyli losów po 6zł. każdy; iest w niéy ieden los wielki na 9600zł., 2 po 4500zł., 4 po 1200zł, 8 po 600zł., 200 po 50zł. a 400 po 25zł.; pytaią się iaki ma zysk z téy loteryi zakładaiący ią, i iaka iest średnia cena biletu?

Obrachowawszy summę z wygrywaiących losów która tu iest 48200zł., summę zebraną za 10000 biletów po 6zł. która iest 60000zł., odięlibyśmy pierwszą od drugiéy; różnica ich 11800zł. okazuie zysk trzymaiącego loteryią. Aby zaś znaleźć tu średnią cenę rzetelną biletu, trzeba podzielić 48200zł. przez liczbę całą biletów 10000, czyli 482 przez 100, co daie 4zł. $24\frac{3}{5}$gr. na cenę średnią szukaną.

361. Z dwóch poprzedzaiących przykładów widać analogiią zachodzącą między regułą mieszania i

teoryią *rachunku prawdopodobieństwa* czyli domniemań (calcul des probabilités). Moglibyśmy tu posunąć daley wnioski z tego postrzeżenia, lecz gdy wspomniony rachunek zależy szczególniéy od wyższéy arytmetyki, i gdy przeznaczone są szczególne dzieła temu przedmiotowi który zaymował naypierwszych wieku naszego jeometrów; przeto wspomniemy tu tylko, iż teoryia *o środkach ciężkości* i *o równowadze między rozmaitemi siłami* które działaią na punkt ieden, odniesiona także byé może do tego pierwszego gatunku reguły połączenia.

Przeydźmy teraz do drugiego gatunku zagadnień téy reguły.

362. *Przykład I.* Z dwóch trunków z których garniec pierwszego kosztuie 11zł. a garniec drugiego 5zł., trzeba zrobić mieszaninę któréy garniec ma wypadać po 7zł., wieleż garcy wziąć należy z każdego gatunku dla zrobienia mieszaniny?

Układam ceny iak ie tu widać

$$7 \left\{ \begin{matrix} 11 & \ldots & 2 \\ 5 & \ldots & 4 \end{matrix} \right.$$

Biorę różnicę ceny wyższéy 11 z podaną ceną średnią 7, i piszę tę różnicę naprzeciw ceny niższéy 5. Biorę potém różnicę ceny średniéy 7 z ceną niższą 5 i umieszczam ią naprzeciw ceny wyższéy 11.

Wnoszę iż mieszaiąc 2 garce trunku po 11zł. z 4 garcami trunku po 5zł. będzie mieszanina po 7zł. garniec.

Przyczyna tego postępowania iest bardzo prosta. Jasna bowiem iest 1od iż powinno być wynagrodzenie między cenami wyższemi i niższemi nad cenę średnią; 2re iż aby to wynadgrodzenie miało mieysce, trzeba ażeby liczba rzeczy wziąć się maiących po cenie wyższey i liczba rzeczy po cenie niższéy, były w stosunku odwrotnym różnicy tychże cen z z ceną średnią. Widoczna zaś iż podług naszego postępowania ta proporcyia mieć będzie mieysce więc i t. d.

Zróbmy tu sobie tę ieszcze uwagę, iż gdy podług przykładu poprzedzaiącego ma wchodzić w mieszaninę 2 części droższego wina, a 4 tańszego, czyli co na toż samo wyydzie, 1 część droższego, a 2 części tańszego; więc w iakiéykolwiek ilości mieszaniny, proporcyią tę zachować należy. I tak chcąc mieć n.p. 1 tylko garniec mieszaniny trzebaby wziąć $\frac{1}{3}$ gar. z gatunku pierwszego a $\frac{2}{3}$ gar. drugiego.

363. Gdyby mieszanina miała się składać z wina którego garniec, 1^go^ kosztuie zł. 16, 2^go^ zł. 10, a 3^go^ zł. 9; chciano zaś otrzymać wino któregoby garniec wypadał po zł. 12, natenczas ułożywszy ceny iak następuie:

$$12\begin{cases}16 \;.\;.\;.\; 3+2=5\\ 10 \;.\;.\;.\; 4\\ 9 \;.\;.\;.\; 4\end{cases}$$

porównywam 16 i 9 z ceną średnią 12, i różnice wypadłe piszę na odwrót iak się wyżéy powiedziało. Porównywam daléy 16 i 10 ceny wyższą i niższą od ceny średniéy, z tąż ceną, i różnice piszę podobnież na odwrot. Dodawszy do siebie różnice 3 i 2 położone przy 16, wypadnie wziąć z wina na zł. 16 garcy 5, na zł. 10. gar. 4, na zł. 9 także garcy 4, a pomieszawszy razem wypadnie 13 gar. wina po zł. 12.

Gdyby w mieszaninę miało wchodzić cztery, pięć lub więcéy gatunków rzeczy rozmaitéy ceny, porównać ie trzeba podobnym sposobem koleyno po dwie, z ceną średnią, uważaiąc aby za każdym razem porównywać z sobą dwie tylko ceny t. i iednę wyższą drugą niższą od ceny średniéy.

Prawidło to zachować także należy skoro w zagadnieniu podane iest więcéy cen wyższych niżeli niższych od ceny średniéy, lub przeciwnie.

364. Wiemy (nº 362) iż znalazłszy ilość szczególnych gatunków wchodzić maiących w mieszaninę żądanéy ceny, do większéy ilości mieszaniny trzeba wziąć naturalnie więcéy każdego gatunku, a do mnieyszéy mniéy, zawsze iednak w stosunku znalezionym.

Równie iasna iż gdyby oznaczono ilość iednego gatunku maiącego wchodzić w mieszaninę, natenczas i do tego zastosowaćby się musiały ilości innych gatunków.

365. *Przykład.* Jest czworakiego gatunku towar, 1szego funt kosztuie 58zł.; 2go 49, 3go 28, a 4go 22; chcą zrobić mieszaninę funt po zł. 36, lecz w tę ma wchodzić tylko 12 ℔ pierwszego gatunku. Wieleż potrzeba zmieszać funtów trzech ostatnich gatunków?

Działam nayprzód iak gdyby ilość żadnego gatunku towaru nie była oznaczoną; i znayduię iż mieszaiąc 14 ℔ po zł. 58, z 8 ℔ po zł. 49, z 13 ℔ po zł. 28 i z 22 ℔ po zł. 22 miałbym towar po 36zł. funt. Oto iest wzór działania

$$36 \ldots \begin{cases} 58 \ldots 14 \\ 49 \ldots 8 \\ 28 \ldots 13 \\ 22 \ldots 22 \end{cases}$$

Lecz że ilość piewszego gatunku iest oznaczoną, mówię więc: ieżeli do 14 ℔ towaru po 58zł. powinienem wzięć 8 ℔ po 49zł. 13 ℔ po 28zł., i 22 ℔ po 22zł., do 12 ℔ towaru po 58zł. wieleż funtów potrzeba wziąć z każdego z 3ch gatunków ostatnich?

liczbę tych funtów znaydę przez regułę trzech następuiącą:

$$14:12 = \begin{cases} 8:x = 6\frac{6}{7} \\ 13:y = 11\frac{1}{7} \\ 22:z = 18\frac{6}{7} \text{ (1)} \end{cases}$$

Łatwo iest sprawdzić iż $6\frac{6}{7}$℔ towaru po 49zł. $11\frac{1}{7}$℔ po 28zł. i $18\frac{6}{4}$℔ po 22zł. zmieszane z 12℔ towaru po 58zł., dadzą towar którego funt przypadnie po 36zł.

366. Z tego co poprzedziło łatwo poiąć iż gdyby się pytano w iakiéy proporcyi trzeba zmieszać powyższe 4 gatunki aby mieć 100℔ towaru po 36zł. funt?

Trzebaby wziąć nayprzód różnice iak powyżéy i znalazłszy iż 14℔ towaru po 58zł. zmieszane z 8℔ po 49zł., z 13℔ po 28zł. i z 22℔ po 22zł. dadzą 57℔ towaru po 36zł. funt, ułożyć proporcyią.

$$57:100 = \begin{cases} 14:x=24\frac{32}{57} \\ 8:y=14\frac{2}{57} \\ 13:z=22\frac{46}{57} \\ 22:v=38\frac{34}{57} \end{cases}$$

A tak $24\frac{32}{57}$℔ towaru po 58zł. 14℔$\frac{2}{57}$ po 49zł. $22\frac{46}{57}$℔ po 28zł. i $38\frac{34}{58}$ po 22zł. zmieszane razem dadzą 100℔ towaru po 36zł. funt. Co łatwo sprawdzić.

367. Lecz gdyby maiąc mieszać te gatunki do 100℔ mieszaniny oznaczono ieszcze ilość iednego gatunku n. p. gdyby chciano wziąć z pierwszego 12 tylko ℔; natenczas trzeba nayprzód znaleźć cenę średnią po iakiéy ma wypadać funt mieszaniny z 3ch

(1) Widoczna iest iż proporcyie te nie są ułożone podług reguły spółki, skrócone iest tylko postępowanie, bo w 3ch proporcyiach ten sam iest pierwszy stosunek.

innych gatunków. To nastąpi, gdy od 3600zł. wartości 100℔ całey mieszaniny odeymę 696zł. wartość 12℔ po 58zł. i resztę 2904zł. podzielę przez 88℔ pozostałe od 100℔. Iloraz iest 33zł. A tak zagadnienie zwraca się iuż do podobnego iak w numerze poprzedzaiącym, i znaydzie się iż trzeba wziąć z każdego z 3ch gatunków towaru po $29\frac{1}{3}$℔.

Łatwo tu postrzedz iż w rozwiązaniu tego gatunku zagadnień reguły mieszania, skoro przez podane stosunki między gatunkami mieszać się maiącemi nie masz szczególnego określenia, można mieć także nieokreśloną liczbę odpowiedzi, a nawet liczba ta może być nieskończoną. Zagadnienia zaś w tych razach zowią się *zagadnienia nie wyznaczone.*

Teoryia reguły mieszania szczególniey iest użyteczna tym wszystkim którzy pracuią około złota i srebra. Kładziemy też w tey materyi naywięcey zagadnień (1).

Zagadnienia.

368. I. Pewny rzemieślnik zrobił do swoiey sztuki mieszaninę z kilku materyiałów które ważą

---

(1) Zwykle każdy z tych dwóch przednieyszych kruszców bywa zmieszany z podleyszym, iako to: złoto ze srebrem lub miedzią, srebro z miedzią. Sposób oznaczenia stopnia ich czystości należy do sztuki probierskiey. Tu tylko namieniemy, iż każda massa czyli sztuka srebra uważa się podzieloną na 16 równych części nazwanych *łutami*, a każda sztuka złota na 24 nazwanych *karatami.* Jeżeli kruszec zupełnie iest czysty, natenczas srebro zowie się 16to lutowe czyli 16tey proby, a złoto 24 karatowe; ieżeli zaś w pierwszym lub w drugim iest n. p. 4 części przymieszki, natenczas srebro zowie się 12ey proby a złoto 20sto karatowe, i t. p.

razem 98unc. kosztuią 158zł. Jest pytanie po ile wypada uncyia ażeby wiedzieć po czemu wypadać będzie sztuka podług ilości uncyy które w niéy będą?

II. Pewien złotnik ma troiakiéy proby srebro; iednego grzywien 200 po 74zł. drugiego 180 po 65zł, trzeciego 90 po zł. 58. Topi to srebro w iednę massę. Po ileż, iedna grzywna, wtedy przypadnie?

III. Zmieszano 7 łutów srebra 15éy proby z 5 łutami 13éy proby; iakiéyże próby iest mieszanina?

IV. W miesiącu *n* roku *n* była cena zboża w miastach pewnéy prowincyi następuiąca: w mieście *n* korzec żyta zł. $14\frac{2}{3}$; w *n* zł. 17; w *n* zł. $16\frac{1}{3}$; w *n* zł. $18\frac{1}{2}$; w *n* zł. 15; w *n* zł. $13\frac{3}{4}$; iakaż podług tego była w tym miesiącu średnia cena korca?

Maiąc zaś zebrane średnie ceny z miesięcy całego roku, łatwo iest znaleźć średnią cenę w tymże roku; bo trzeba tylko podzielić summę cen średnich z 12 mcy przez 12. maiąc znowu ceny średnie z pewnéy liczby lat, znaydziemy podobnie i średnią cenę w tychże latach.

Podobnież znayduie się średnia wysokość Barometru, Termometru i t. d. (1).

V. Ma ktoś 100 garcy pewnego likworu którego garniec po zł. 4; pytaią się ile ma przymieszać wody ażeby garniec mieszaniny wychodził tylko na $3\frac{7}{5}$?

VI. Maiący zboże dwoiakiego gatunku t. i. po 8 i po 14zł. korzec, chce ie mieszać tak, aby zmieszane mógł przedawać po 10zł. korzec; ileż ma mieszać z każdego gatunku?

VII. Maiący srébro 10éy proby, robić z niego każe złotnikowi naczynia lecz oraz podnieść do 12éy proby. Złotnik ma srebro naywyższéy proby

(1) Ob. Fizykę Bystrzyckiego kar. 171 Tom. 1. w Warszawie 1810.

16éy; ileż z tego srebra ma brać a żeby daiące się do roboty było proby 12éy?

VIII. Ze srebra 14 proby chcą mieć srebro 12 proby; ileż miedzi trzeba przymieszać? (miedź oznacza się tu przez o, bo zwykle żadnéy w tym razie nie daią iéy wartości).

IX. Pewnego towaru z 2ch gatunków zmieszanego kosztuie pewna miara zł. 60; lepszy z gatunków zmieszanych wart iest 75zł. a poślednieyszy 48zł. na tę samę miarę rachuiąc; w iakiéyże proporcyi są zmieszane?

X. Pewny złotnik ma dwie sztuki mieszaniny złota i srebra. Pierwsza sztuka na 100 grammach zawiera 95 złota a 5 srebra, 2ga na 100 gram. zawiera 85 złota a 15 srebra. chce on zrobić 3cią sztukę mieszaniny którąby zawierała na 100 grammach 90 złota a 10 srebra; po ileż na to wziąć powinien z 3ch pierwszych sztuk?

XI. Kupiec maiący 4 gatunki towaru z których 1szego funt po 30zł. 2go po 24zł. 3go po 12zł. a 4go po 16zł. Chce ie mieszać tak, ażeby mieszaniny po 15zł. funt mogł przedawać. Ileż ma wziąć z każdego gatunku towaru?

XII. Złotnik chcący zrobić sztukę która ma ważyć 24 grzywny srebra po 50zł. grzywna, ma srebro w 4 gatunkach, t. i. po 60zł. po 58, po 46 i po 21zł. grzywna; ileż ma wziąć z każdego gatunku, ażeby złożył 34 grzywny żądanéy wartości?

XIII. Na pewną sztukę maiącą być z czworakiego kruszcu ulaną i ważyć 3500tt trzeba przysposobić materyiał. Pierwszego kruszcu cetnar kosztuie 12tal. 2go 14tal. 3go 20tal. a 4go 30tal. Cały materyiał użyty razem nie ma więcéy kosztować iak 630tal; ileż ma się wziąć cetnarów z każdego kruszcu?

XIV. Pewny złotnik chce zrobić sztukę która ma ważyć 35 grzywien srebra po 25zł. ma zaś srebro w 4^{ch} gatunkach, t. i. po $30^{zł.}$ grzywna, po $29^{zł.}$ po 23 i po 21. Chce nadto ażeby z pierwszego gatunku wziąć tylko 10 grzywien; ileż ma wziąć każdego z 3^{ch} innych gatunków?

XV. Jest 4 gatunki towaru, pierwszego funt po 28^{gr}, 2^{go} po 24, 3^{go} po 15 a 4^{go} po 18. Chcą z tego zrobić mieszaninę po $22^{gr.}$ funt z warunkiem ażeby wziąć 3 razy więcéy gatunku 2^{go} niż 1^{szego}, a 2 razy więcéy gatunku 2^{go} niż 4^{go}; ileż trzeba wziąć każdego z tych gatunków towaru?

XI. Pewny złotnik ma zrobić srebrne naczynie ℔ i $28^{lut.}$ ważące, a to ze srebra $10^{téy}$ proby, lecz ma tylko $13^{téy}$ i 11 proby srebro; wieleż ma wziąć z każdego gatunku dla złożenia żądanéy proby?

O Regule fałszywego założenia.

369. *Reguła fałszywego założenia* służy do znalezienia liczby żądanéy za pomocą liczby przypuszczonéy którą poddaiemy warunkom danym a które nie mogą być iak w każdym rachunku, tylko stosunkami różnicowemi, albo ilorazowemi, albo kombinacyią obudwóch.

*Z*ałożenie wymaga czasem iednego przypuszczenia, czasem zaś dwóch. W pierwszym razie zowie się reguła założenia poiedynczego, a w drugim reguła założenia podwóynego. Zaczniymy od pierwszéy.

Przykład. Jakaż iest liczba któréy połowa, trzecia część i czwarta czynią 52?

Można tu przypuścić liczbę iakąkolwiek dowolnie, lecz rozwiązanie będzie tém łatwiéysze, im liczba ta będzie prostsza; biorę tu więc liczbę naymniéyszą daiącą się dzielić dokładnie na pół, na 3 i na 4 części. Taką iest 12; połowa iéy iest 6, trzecia część 4, a czwarta 3. Jest zas $6+4+3=13$, przypuszczenie więc moie iest fałszywe; lecz posłuży mi do znalezienia prawdziwéy liczby szukanéy; bo liczba 13 złożona iest z części liczby 12, iak liczba 52 z części liczby szukanéy: więc $13 : 12 = 52 : x = \frac{52 \times 12}{13} = 48$. W saméy rzeczy, połowa, trzecia część i czwarta 48iu.$=52$.

Widziemy stąd iż z liczbą przypuszczoną trzeba postępować tak, iakby się postępowało dla sprawdzenia z liczbą szukaną gdyby była wiadomą.

Jeżeli natrafiemy na liczbę szukaną, tedy zagadnienie będzie zaraz rozwiązane. Jeżeli wypada inna liczba, tedy wnioskuiemy podług reguły trzech; iak się ma wypadek : liczby przypuszczonéy = liczba podana : szukanéy.

370. Gdyby się pytano iaka liczba dodana do siebie, ze swoią połową i z trzecią częścią i ieszcze 5, czyni 56?

W tym razie liczbę 5 iako stałą ilość odiąwszy od 56, pozostałe 51 biorę do proporcyi, a wziąwszy iakąkolwiek liczbę, lecz naylepiéy ile można naymnieyszą, iakaby się dała na żądane części podzielić, iak tu np. 6, dodaię do nich drugie 6, potém 3 i 2, to iest połowę i trzecią część 6ciu. Summa tych części iest 17, miało zaś być 51; muszę więc ułożyć proporcyią

$17 : 51 = 6 : x$; $x = 18$ liczbie szukanéy.

Jakoż $18 + 18 + 9 + 6 + 5 = 56$ (1).

371. Trzech przyiaciół stawiwszy łącznie na loteryią wygrali 20000zł, które trzeba podzielić proporcyionalnie do ich wkładek, lecz te niewiadome. Wiadomo iest tylko iż stawka 2go iest podwóyna

---

(1) Widzieliśmy wyżéy (no 169) iż te przykłady możnaby iuż rozwiązać znaiąc teoryią ułomków, położyły się tu iednak gdyż podobne zagadnienia podciągaią zwykle pod regułę fałszywego założenia.

względem stawki 1szego, a stawka 3go iest podwóyna względem summy stawek 2ch pierwszych. Jakaż będzie część każdego?

Gdybym znał stawkę pierwszego łatwoby mi było oznaczyć stawkę 2go i 3go, lecz ponieważ stawka pierwszego iest mi niewiadoma, przypuszczam iż ta iest 1zł; stawka 2go będzie 2zł, a stawka 3go 6zł; Będę więc miał.

$$9 : 20000 = \left\{ \begin{array}{l} 1 : x = 2222\frac{2}{9}\text{zł.} \\ 2 : y = 4444\frac{4}{9} \\ 6 : z = 13333\frac{3}{9} \end{array} \right.$$

372. Trzeba podzielić 300zł na 3 osoby w ten sposób, ażeby 2ga miała 2 razy więcéy iak 1sza i nadto zł. 6, a 3cia żeby tyle miała ile obie pierwsze i nadto zł. 10?

Przypuszczaiąc iż część pierwszéy osoby iest 1zł, część 2éy będzie 2zł + 6 czyli 8zł, a część 3éy 1 + 8 + 10 = 19zł, Wideczna zaś iest iż nie można podzielić 300zł. proporcyionalnie do liczb 1, 8, 19, a to z przyczyny że w część 2éy osoby wchodzi liczba stała 6zł a w część 3ciéy liczba stała 6 + 10 czyli 16zł. Odiąć więc trzeba 6 + 16 czyli 22zł. od 300zł. a resztę 278zł. podzielić dopiero na 3 części tak, ażeby 2ga była podwóyną 1széy, a 3cia równa summie dwóch pierwszych, oto iest wzór działania:

$$\begin{array}{ll} 1\text{zł.} & 300\text{zł.} \\ 2 + 6\text{zł.} & \underline{\ \ 22\ \ } \\ \underline{3 + 6 + 10\text{ zł.}} & 278. \\ 6 + 22. & \end{array}$$

---

(1) Widzieliśmy wyżéy (no 169) iż te przykłady możnaby iuż rozwiązać znaiąc teoryią ułomków, położyły się tu iednak gdyż podobne zagadnienia podciągaią zwykle pod regułę fałszywego założenia.

$$6 : 278 = \begin{cases} 1 : x = 46\frac{1}{3} \\ 2 : y = 92\frac{2}{3} \\ 3 : z = 139 \end{cases}$$

Dodawszy teraz do części drugiéy osoby, zł. 6, a do części 3éy zł. 16; będzie część 1széy $46\frac{1}{3}$; część 2éy $98\frac{2}{3}$ a część 3éy 155zł.

373. Wzaiemnie gdyby części podziału miały być pewną ilością zmniéyszane np. gdyby chciano podzielić na 3 osoby 300zł. w ten sposób, ażeby 2ga miała 2 razy więcéy iak 1sza mniéy zł. 6, a 3cia tyle ile dwie pierwsze mniéy zł 10; naznaczywszy dział

osoby 1széy ... 1 zł.
będzie dział 2éy. 2 — 6zł.
dział zaś 3éy. 3 — 6 — 10zł.
6 — 22.

Dodałbym 22zł do 300zł a summę 322zł. które iuż równałyby się całym 6ciu częściom podzieliłbym podług prawideł, i miałbym na dział osoby 1széy $53\frac{2}{3}$, 2ey $107\frac{1}{3}$, 3éy 161zł. Odiąwszy teraz od działu 2éy zł. 6. a od działu 3éy zł 16, będzie dział 1széy $53\frac{2}{3}$, 2éy $101\frac{1}{3}$, 3éy 145zł.

Przeydźmy do zagadnień podwóynego założenia.

374. *Przykład* 1. Pewny strzelec obiecuie swemu przyiacielowi dać 10zł za każde chybienie zwierza; przyiaciel obiecuie z swéy strony płacić 8zł. za każde ubicie zwierzyny. Po dwunastu wystrzałach okazało się iż przyiaciel strzelca ma mu zapłacić 24zł. Jleż wystrzałów chybił strzelec?

Przypuszczam iż ich chybił 6; w tém przypuszczeniu powinienby zapłacić 60zł. a wziąć 48zł; więc daleki ieszcze od otrzymania 24zł. byłby obowiązany zapłacić 12zł. przypuszczenie więc moie iest fałszywe, i błąd móy iest o 36zł. mniéy, czyli — 36zł.

Przypuśćmy więc iż strzelec chybił 2 razy; w tym przypadku powinienby zapłacić 20zł a wziąć 80zł, a zatém zamiast 24zł. miałby 60zł; móy więc błąd iest o 36zł więcéy: układam dwie liczby przypuszczone i błędy odpowiadaiące tak:

$$6-36.$$
$$2+36$$

Mnożę drugi błąd przez pierwszą liczbę przypuszczoną . . . . . $36\times6=216$.
mnożę pierwszy błąd przez drugą liczbę przypuszczoną . . . . . $\underline{36\times2=\ 72}$
288

Dzielę summę iloczynów przez summę błędów i mam $\frac{288}{72}=4$; 4 iest liczbą szukaną.

375. Gdyby dwie liczby przypuszczone dały dwa błędy o mniéy, byłoby trzeba dzielić różnicę iloczynów przez różnicę błędów: tak znalazłszy przez pierwsze przypuszczenie iż strzelec nie chybił 6 razy, przypuszczam iż chybił 5 razy. W tém przypuszczeniu powinienby zapłacić 50zł. a wziąć 56zł. więc zamiast 24zł. wziąłby tylko 6zł; błąd więc iest o 18zł mniéy.

mam więc $6-36.$
$5-18.$

$$18\times6=108.$$
$$36\times5=180.$$

Różnica błędów$=36-18=18$; różnica iloczynów iest $180-108=72$; $\frac{72}{18}=4$, iak znaleźliśmy wyżéy.

376. Gdyby oba błędy były o więcéy, działanie odbywałoby się tym samym sposobem iak w przypadku dopiero poprzedzaiącym.

Okazanie zasad téy reguły należy iuż do Algiebry do któréy odsyłamy w téymierze. (1)

Nam'eniemy tu ieszcze, iż zagadnienia które się rozwięzuią za pomocą reguły założenia poiedynczego rozwiązać można i za pomocą reguły założenia podwóynego, ostatnia więc iest ogólniéysza. Wreszcie są zagadnienia które za pomocą tych reguł rozwięzuiemy iedynie dla krótszéy często drogi niż za pomocą innych reguł arytmetycznych.

Gdy teraz sposoby Algiebry są wydoskonalone, nie używaią iuż reguły dawniéy tak sławnéy. Zasługuie ona iednak być znaną tém bardziéy że postępowanie iéy stosowne do postępowania rozumu ludzkiego szukaiącego prawdy iest podobne postępowaniu algiebraicznemu. Słusznie nawet sądzić można, że raczéy Algiebra poczęła się z reguły fałszywego założenia, niżeli ta z tamtéy. Jstotna między niemi różnica iest, że w pierwszéy zamiast wiadomych i przypuszczanych dowolnie liczb kładą się głoski iako znaki ogólne i bez doświadczania, zaraz prawdziwy znayduie się wypadek. To właśnie naypierwszą wyższość nadaie Algiebrze nad tak sławną dawniéy regułą fałszywego założenia.

Zagadnienia.

377. I. Jakaż iest liczba która podzielona przez 7 a iloraz rozmnożony przez 15 daie na iloczyn 450?

II. Pewny spytany, wieleby miał lat, odpowiedział: gdyby do lat moich przydano ich połowę a z summy odięto część iéy 4ta, natenczas zostaie się 90, ilęż ma lat?

---

(1). *Ob*: Vollständige Anleitung zur Algebra von *Leonhard Euler*. St. Petersbourg 1770, 11 Theil 2 Abschnit. 2. cap.

III. Pewny zapisuie swóy maiątek 3m. przyiaciołom w ten sposób: 1szy ma wziąć trzecią część całego maiątku; 2gi dwie piąte, a 3ci 32000 Zł. pozostaiące po wzięciu 2ch pierwszych zapisów. Jakiż był maiątek zapisuiącego, i iaka część każdego z 2ch pierwszych legataryuszów?

IV. Jakaż iest liczba którey $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ równe są 500?

V. Trzy osoby maią 1000 zł. do podziału; 1sza ma wziąć część pewną, 2ga 2 razy tyle więcey 7zł, a 3cia tyle ile dwie pierwsze mniéy 5zł. Jakaż będzie część każdéy?

VI. Trzeba rozdzielić 6996o zł. między 5 osób tak, ażeby 2ga miała trzy razy więcéy niż pierwsza i nadto 540 zł; ażeby 3cia miała połowę tego co pierwsza i trzecią część co druga, mniéy 120 zł; 4ta żeby miała 2 razy tyle co 3cia i 360 zł; nakoniec 5ta żeby miała tyle co 1sza i 4ta; pytaią się ile każdéy przypadnie?

VII. Jakaż iest liczba która rozmnożona przez 3 a do połowy iloczynu, dodane iego $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{8}$ i nadto 25 uczynią 250?

VIII. Znaleźć dwie liczby takie iż dodawszy 11 do pierwszéy, summa byłaby poczwórna względem liczby drugiéy, dodawszy zaś też same 11 do liczby drugiéy, summa w tedy byłaby potróyną względem liczby pierwszéy?

IX. Przyiął ktoś rzemieślnika do pewnéy roboty, i umówił się z nim że za każdy dzień w który pracuie zapłaci mu zł. 5. a przeciwnie za każdy dzień w którym nie robi wytrąci mu zł. $1\frac{1}{2}$. Zdarza się iż rzemieślnik w 60 dni skończył swoie dzieło, lecz po porachunku dostał tylko 209 zł. Jleż dni robił, a ile próżnował?

X. Dwóch kupców sprowadzaią wino z pewnego portu. Dla 1szego kupca iest 20 beczek a dla 2go 64 beczek. Opłacaiąc cło i koszta sprowadzenia, 1szy dał 2 beczki wina, lecz mu zwrócono 40tal; 2gi dał 5 beczek i nadto 40tal; ileż warta iest beczka wina i po ile zapłacono od każdéy beczki?

XI. Kupiono ogród i znowu przedano, lecz ze stratą $18\frac{0}{0}$, przedano go zaś za 7298zł; Jakaż była cena pierwszego kupna ogrodu?

XII. Jakiż iest kapitał który złączony z 3 letnim po $4\frac{1}{3}$ od sta procentem czyni 7797zł?

XIII. Trzy osoby składaią towarzystwo 1sza daie 320#; 2ga 3cią część całéy składki, a 3cia czwartą część; iakaż iest wkładka każdéy osoby i części przypadaiące z zysku całego, który iest czerw. zł. 100?

XIV. Pewny kupiec kupił 12. sztuk towaru które kosztuią 96#; druga sztuka kosztuie o 1# więcéy niż 1sza, 3cia o 1# więcéy niż 2ga i t. d. zawsze więcéy o 1# aż do ostatniéy; ileż kosztowała pierwsza i wszystkie inne?

O Logarytmach.

378. *Logarytmy* są liczby w postępie różnicowym odpowiadaiące liczbom w postępie ilorazowym, np: w dwóch postępach następuiących:

$$\div\!\div\; 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : \text{i t. d.}$$
$$\div\; 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{i t. d.}$$

2 iest logarytmem 3ch, 4 iest logarytmem 9ciu, 6 iest logarytmem 27miu, i t. d.

379. Jasna iest iż liczba iakakolwiek może mieć nieskończoną liczbę logarytmów rozmaitych, ponieważ wyrazom iakiego postępu ilorazowego można uczynić odpowiadaiącemi wyrazy nieskończo-

néy liczby postępów różnicowych. — Lecz pierwsi układacze logarytmów obrali postęp dziesiętny ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : i t. d. i postęp liczb naturalnych ÷ 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · i t. d. (1) tak, iż 0, iest logarytmem iedności; 1 iest logarytmem 10ciu, 2 logarytmem 100u, i że w ogólności logarytm iakiéykolwiek liczby wyrażonéy przez 1 z tylu następnemi zerami ile się podoba, będzie miał zawsze tyle iedności ile iest zer po 1. Tak logarytm 100000cy iest 5, logarytm 1000000 iest 6, i t. d. Połączenie takie postępów oznaczonych nazywa się *układem* czyli *systematem logarytmów*.

380. Pierwszy z tych postępów może być wyrażony i tym sposobem ∺ $1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5$: i t. d. (218). Stąd się nam okazuie, iż logarytmy i wykładniki potęg powstaiących z liczby 10 są iedną i tą samą rzeczą. Bo gdy potęgi te rosną w postępie ilorazowym, wykładniki ich rosną w postępie różnicowym, podług ciągu liczb naturalnych 0, 1, 2, 3, 4, 5, i t. d.

Liczba stała 10 którą wynosiemy do różnych potęg nazywa się tu *zasadą* układu logarytmów (2)

381. W tablicach logarytmowych, logarytmy iści, 10ciu, 100u, 1000ca i t. d. to iest, 0, 1, 2, 3 i t. d. maią po sobie sześć lub siedm zer napisanych w kształcie dziesiętnych w ten sposób 0,000000; 1,000000; 2,000000; 3,000000, co nie zmienia bynaymniéy ważności tych logarytmów (no 25).

382. Nie iest dostateczną mieć logarytmy liczb, 1, 10, 100, 1000, 10000, i t. d. trzeba ieszcze mieć loga-

---

(1) Pierwszy iest zasadą przyiętego układu liczenia, a drugi iest nayprostszym ze wszystkich postępów różnicowych.

(2) Obacz Algiebrę dla Szkół Woiewódzkich Rozdział VIII.

rytmy liczb pośrzednich iakoto 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 11... 99; 101... i t. d. inaczey pożytki logarytmów byłyby mało znaczące. Jdzie więc o oznaczenie logarytmów liczb pośrednich postępu dziesiętnego.

383 Jasna iest iż logarytmy liczb zawartych między 1 i 10 w postępie ilorazowym dziesiętnym powinny być wieksze niż 0, które iest logarytmem iedności, a mnieysze niż 1, które iest logarytmem 10cin. Logarytmy więc tych liczb będą ułomkami. Wyrażono te ułomki przez dziesiętne.

384. Nie mniey widoczna iż logarytmy liczb zawartych między 10 i 100 będą wyrażone prze 1, i dziesiętne; iż logarytmy liczb zawartych między 100 i 1000 będą wyrażone przez 2 i dziesiętne, i tak daley.

385. Cyfra która się znayduie przed punktem lub przecinkiem oddzielaiącym całe od dziesiętnych, nazywa się *cechą* logarytmu. Tak cecha logarytmów liczb które są między 1, i 10 iest 0; cecha logarytmów liczb które są między 10 i 100, iest 1; i t. d. (1)

386. To założywszy, wystawmy sobie iż między wyrazy następne postępu dziesiętnego D wciśnięto pewną liczbę średnich, i podobnąż liczbę średnich między wyrazy następne postępu N liczb naturalnych. Widoczna iest iż wyrazy postępu N będą logarytmami wyrazów odpowiadaiących postępu D. Że zaś pomiędzy średniemi wciśnionemi między wyrazy następne postępu D, znaydą się które będą równe ieden 2om, drugi 3em, inny 5cin a inny 11u i t. d. więc będzie się mieć logarytmy 2ch, 3ch, 5ciu, 11u, i t. d. biorąc średnie które w postępie N, zaymuią też same

---

(1) Po tey definicyi, pamiętaiąc na to co się rzekło pod n. 379. z daney liczby ilukolwiek znakami wyrażoney poznamy zaraz iey logarytmu cechę, i naodwrot.

mieysca iakie zaymuią średnie wzięte za 2, 3, 5, 11, i t. d. w postępie D.

Dla obiaśnienia tego przykładem przypuśćmy iż idzie o znalezienie logarytmu 5ciu. Liczba ta zawiera się między 1 i 10, których logarytmy są 0,0000000 i 1,0000000. Oznaczam dla skrócenia 1 przez A, a 10. przez B; iasna iest iż wciskaiąc średnią proporcyionalną między A i B, średnia ta będzie równa, $\sqrt{A \times B} = \sqrt{1 \times 10} = 3{,}162277$. (n° 286.) wyciągaiąc pierwiastek zbliżony mniéy iako o iednę miliionową. Wystawiam tę średnią przez C. Jasna też iest iż wciskaiąc średnią między 0.0000000 i 1.0000000 będę miał logarytm C. Ta zaś średnia $= \frac{0.0000000 + 1.0000000}{2} =$ 0.5000000 (n°. 267.), zatém 0. 5000000 iest logarytmem liczby C.

Lecz liczba C iest mniéysza niż 5, więc 5 zawiera się między C mniéyszém niż 5, i B wiekszém, a zatém logarytm 5ciu, zawiera się między 0.5000000 i 1.0000000.

Przez podobne postępowanie szukam średniéy między C i B, i znayduię $\sqrt{B \times C} = 5{,}623413$ które wystawiam przez D i którego logarytm iest $\frac{0.5000000 + 1.0000000}{2} = 0.7500000$

Jest zaś, 5.623413 wieksze niż 5, więc 5 zawiera się między C i D, a zatém logarytm 5ciu zawiera się między 0.5000000 i 0. 7500000. Trzeba więc wcisnąć między C i D średnią E która będzie miała za logarytm średnią wciśnioną między 0.5000000 i 0.7500000, i nie przestawać tychże samych działań aż póki nakoniec doszedłszy do średniéy Z znaydzie się 5.000000 które mieć będzie za logarytm 0.6989700 mniéy niż o iednę dziesięć miliionową zbliżony. Można uważać drogę tych długich i mozolnych działań w tablicy następuiącéy która ich wypadki wskazuie.

		LICZBY.	LOGARYTMY.
	A	1. 000000	0. 0000000
	B	10. 000000	1. 0000000
$\sqrt{A \times B}$	C	3. 162277	0. 5000000
$\sqrt{B \times C}$	D	5. 623413	0. 7500000
$\sqrt{C \times D}$	E	4. 216964	0. 6250000
$\sqrt{D \times E}$	F	4. 869674	0. 6875000
$\sqrt{D \times F}$	G	5. 232991	0. 7187500
$\sqrt{F \times G}$	H	5. 048065	0. 7031250
$\sqrt{F \times H}$	I	4. 958069	0. 6953125
$\sqrt{H \times I}$	K	5. 002865	0. 6992187
$\sqrt{I \times K}$	L	4. 980416	0. 6972656
$\sqrt{K \times L}$	M	4. 991627	0. 6982421
$\sqrt{K \times M}$	N	4. 997242	0. 6987304
$\sqrt{K \times N}$	O	5. 000052	0. 6989745
$\sqrt{N \times O}$	P	4. 998647	0. 6988525
$\sqrt{O \times P}$	Q	4. 999350	0. 6989135
$\sqrt{O \times Q}$	R	4. 999701	0. 6989440
$\sqrt{O \times R}$	S	4. 999876	0. 6989592
$\sqrt{O \times S}$	T	5. 999963	0. 6989668
$\sqrt{O \times T}$	U	5. 000008	0. 6989707
$\sqrt{T \times U}$	W	4. 999984	0. 6989687
$\sqrt{U \times W}$	X	4. 999997	0. 6989697
$\sqrt{U \times X}$	Y	5. 000003	0. 6989702
$\sqrt{X \times Y}$	Z	5. 000000	0. 6989700

Niemniéy pracy kosztowało pierwszych układaczy logarytmów wynaleźć logarytmy 2ch, 3ch, i innych liczb *pierwotnych*, iak wynaleźć logarytm 5ciu. Lecz te raz oznaczywszy doszli postępowaniem nader prostém, iak się to niżéy okaże, do oznaczenia logarytmów liczb *niepierwotnych*, i ułożyli ie w tablicach. Ułożono zaś w nich tylko liczby całe i ich logarytmy; byłoby nader długo i całkiem niepożytecznie umieszczać w nich inne średnie wciskane między wyrazy postępu D i logarytmy tych średnich. Oto iest mała tablica która da wyobrażenie ułożenia liczb i ich logarytmów (1).

---

(1) Logarytmy w tèy tablicy obięte maią tylko sześć dziesiętnych, lecz to iest nader dostateczną.

LICZBY	LOGARYTMY.	LICZBY	LOGARYTMY.	LICZBY	LOGARYTMY.
1	0. 000000	37	1. 568202	73	1. 863323
2	0. 301030	38	1. 579784	74	1. 869232
3	0. 477121	39	1. 591065	75	1. 875061
4	0. 602060	40	1. 602060	76	1. 880814
5	0. 698970	41	1. 612784	77	1. 886491
6	0. 778151	42	1. 623249	78	1. 892095
7	0. 845098	43	1. 633468	79	1. 897627
8	0. 903090	44	1. 643453	80	1. 903090
9	0. 954243	45	1. 653213	81	1 908485
10	1. 000000	46	1. 662758	82	1. 913814
11	1. 041393	47	1. 672098	83	1. 919078
12	1. 079181	48	1. 681241	84	1. 924279
13	1. 113943	49	1. 690196	85	1. 929419
14	1. 146128	50	1. 698970	86	1. 934498
15	1. 176091	51	1. 707570	87	1. 939519
16	1. 204120	52	1. 716003	88	1. 944483
17	1. 230449	53	1. 724276	89	1. 949390
18	1. 255273	54	1. 732394	90	1. 954243
19	1. 278754	55	1. 740363	91	1. 959041
20	1. 301030	56	1. 748188	92	1. 963788
21	1. 322219	57	1. 755875	93	1. 968483
22	1. 342423	58	1. 763428	94	1. 973128
23	1. 361728	59	1. 770852	95	1. 977724
24	1. 380211	60	1. 778151	96	1. 982271
25	1. 397940	61	1. 785330	97	1. 986772
26	1. 414973	62	1. 792392	98	1. 991226
27	1. 431364	63	1. 799341	99	1. 995635
28	1. 447158	64	1. 806180	100	2. 000000
29	1. 462398	65	1. 812913	101	2. 004321
30	1. 477121	66	1. 819544	102	2. 008600
31	1. 491362	67	1. 826075	103	2. 012837
32	1. 505150	68	1. 832509	104	2. 017033
33	1. 518514	69	1. 838849	105	2. 021189
34	1. 531479	70	1. 845098	106	2. 025306
35	1. 544068	71	1. 851258	107	2. 029384
36	1. 556303	72	1. 857332	108	2. 033424

LICZBY	LOGARYTMY.	LICZBY	LOGARYTMY.	LICZBY	LOGARYTMY.
109	2. 037426	145	2. 161368	181	2. 257679
110	2. 041393	146	2. 164353	182	2. 260071
111	2. 045323	147	2. 167317	183	2. 262451
112	2. 049218	148	2. 170262	184	2. 264818
113	2. 053078	149	2. 173186	185	2. 267172
114	2. 056905	150	2. 176091	186	2. 269513
115	2. 060698	151	2. 178977	187	2. 271842
116	2. 064458	152	2. 181844	188	2. 274158
117	2. 068186	153	2. 184691	189	2. 276462
118	2. 071882	154	2. 187521	190	2. 278754
119	2. 075547	155	2. 190332	191	2. 281033
120	2. 079181	156	2. 193125	192	2. 283301
121	2. 082785	157	2. 195900	193	2. 285557
122	2. 086360	158	2. 198657	194	2. 287802
123	2. 089905	159	2. 201397	195	2. 290035
124	2. 093422	160	2. 204120	196	2. 292256
125	2. 096910	161	2. 206826	197	2. 294466
126	2. 100371	162	2. 209515	198	2. 296665
127	2. 103804	163	2. 212188	199	2. 298853
128	2. 107210	164	2. 214844	200	2. 301030
129	2. 110590	165	2. 217484	201	2. 303196
130	2. 113943	166	2. 220108	202	2. 305351
131	2. 117271	167	2. 222716	203	2. 307496
132	2. 120574	168	2. 225309	204	2. 309630
133	2. 123852	169	2. 227887	205	2. 311754
134	2. 127105	170	2. 230449	206	2. 313867
135	2. 130334	171	2. 232996	207	2. 315970
136	2. 133539	172	2. 235528	208	2. 318063
137	2. 136721	173	2. 238046	209	2. 320146
138	2. 139879	174	2. 240549	210	2. 322219
139	2. 143015	175	2. 243038	211	2. 324282
140	2. 146128	176	2. 245513	212	2. 326336
141	2. 149219	177	2. 247913	213	2. 328380
142	2. 152288	178	2. 250420	214	2. 330414
143	2. 155336	179	2. 252853	215	2. 332438
144	2. 158362	180	2. 255273	216	2. 334454

387. Użycie logarytmów zasadza się na własności i odpowiadalności postępu różnicowego i ilorazowego (n° 299). W samey rzeczy, 1°d w każdym postępie różnicowym który ma zero za pierwszy wyraz, a zatém w postępie (N) $\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . i t. d. wyraz którykolwiek równy iest stosunkowi wziętemu tyle razy ile iest wyrazów przed nim (n° 272). 2re W każdym postępie ilorazowym którego pierwszym wyrazem iest iedność, a zatém w postępie dziesiętnym (D) $\because$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : i t. d. wyraz którykolwiek iest równy stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy liczbę wyrazów przed nim (n° 296).

Więc, gdy dwa postępy N i D są ułożone tak iż wyrazy iednego odpowiadaią wyrazom drugiego każdy każdemu, stosunek postępu N. znaydzie się wzięty w którymkolwiek wyrazie tegoż postępu, zupełnie tyle razy, ile razy stosunek postępu D będzie czynnikiem w wyrazie odpowiadaiącym tegoż ostatniego postępu.

Idzie zatém, że dodawszy dwa wyrazy którekolwiek postępu N, i w tymże czasie rozmnożywszy dwa wyrazy odpowiadaiące postępu D, summa dwóch wyrazów dodanych i iloczyn dwóch wyrazów rozmnożonych będą dwóma wyrazami odpowiadaiącemi sobie w tych dwóch postępach.

Bo summa ta składa się ze stosunku wziętego tyle razy, ile razy iest wziętym tak w iednym z wyrazów dodanych iak w drugim, a iloczyn składa się ze stosunku wziętego za czynnika tyle razy ile razy iest wziętym tak w iednym z wyrazów rozmnożonych iak w drugim: więc, ponieważ dwa wyrazy dodane odpowiadaią dwóm wyrazom rozmnożonym, każdy każdemu, summa tamtych i iloczyn tych będą dwóma wyrazami odpowiadaiącemi sobie w tych dwóch postępach.

388. Więc, *summa logarytmów dwóch liczb odpowiada iloczynowi tych liczb*.

389. Wzaiemnie, *różnica logarytmów dwóch liczb odpowiada ilorazowi tych liczb.* W saméy rzeczy, gdy podzielna iest równa iloczynowi dzielnika przez iloraz, logarytm podzielnéy iest rowny summie logarytmów dzielnika i ilorazu: więc logarytm ilorazu równa się nadmiarowi logarytmu podzielnéy nad logarytm dzielnika.

390. To założywszy: wiemy iż dla wyniesienia iakiéy liczby do kwadratu mnożemy ią raz przez siebie; więc, dodaiąc do siebie logarytm iakiéy liczby, lub, co na toż wychodzi *podwaiaiąc logarytm iakiéy liczby, ma się logarytm iéy kwadratu.*

Dla wyniesienia liczby do sześcianu, mnożemy ią dwa razy następnie przez siebie Więc, dodaiąc dwa razy do siebie logarytm iakiéy liczby, czyli, co iest to samo, *potraiaiąc logarytm iakiéy liczby, ma się logarytm iéy sześcianu.* Podobnież co do 4éy, 5éy, i d. potęg.

391. Wzaiemnie, *biorąc połowę logarytmu iakiéy liczby ma się logarytm pierwiastka iéy kwadratowego; a biorąc trzecią część logarytmu iakiéy liczby, ma się logarytm pierwiastka iéy sześciennego.* Podobnież co do 4go, 5go i d. pierwiastków.

Otoż więc mnożenia zamienione w dodawania, dzielenia w odeymowania, formowanie potęg w proste mnożenia, a wyciąganie pierwiastków w proste rozdzielania.

Tak, aby rozmnożyć 24 przez 8, biorę logarytm 24ch, który iest 1.380211
do tego logarytmu dodaię logarytm 8iu 0.903090
summa iest 2.283301
szukam tego logarytmu w tablicach, i znayduię iż

odpowiada liczbie 192, która iest rzeczywiście iloczynem z 24 przez 8.

Gdyby liczba przez którą mnożemy była 10, 100, 1000, i t. d. nie szłoby dla znalezienia logarytmu iloczynu, tylko dodać 1, 2, 3, i t. d. iedności do cechy logarytmu liczby mnożnéy. n. p. aby rozmnożyć 49 przez 10 dodaię 1 do cechy logarytmu liczby 49, który iest 1.690196, a summa 2.690196 iest logarytmem iloczynu z 49 przez 10, to iest 490. Dodaiąc 2 do cechy logarytmu 1.690196, miałbym summę 3.690196, a ten logarytm iest logarytmem liczby 4900, która iest iloczynem z 49 przez 100.

Jasna iest iż mnożyć 49 przez 10 lub przez 100, iest to czynić tę liczbę 10 razy lub 100 razy większą. Że zaś, dodaiąc 1 lub 2 iedności do cechy logarytmu 49ciu czyniemy go należącym do liczby 10 razy lub 100 razy większéy; więc tym sposobem, ma się logarytm prawdziwego iloczynu.

392. Aby podzielić 174 przez 29; od logarytmu

174 który iest	2.240549
odeymuię logarytm 29ciu	1.462398
różnica iest	0.778151

szukam tego logarytmu w tablicach i znayduię iż odpowiada liczbie 6 która iest w saméy rzeczy ilorazem z 174 przez 29.

Ponieważ dodaiąc 1, 2, 3, i t. d. iedności do cechy logarytmu iakiéy liczby, ma się logarytm iéy iloczynu przez 10, 100, 1000, i t. d. iasna iest iż odeymuiąc 1, 2, 3, i t. d. iedności z cechy logarytmu iakiéy liczby, będzie się mieć logarytm iéy ilorazu przez 10, 100, 1000, i t. d.

393. Jeżeli idzie o wyniesienie liczby n. p. 13 do kwadratu? szukam w tablicach iéy logarytmu, znayduię 1.113943, podwaiam go; i mam logarytm

2. 227886, który w tablicach odpowiada liczbie 169, kwadratowi z 13 (1).

Podobnież dla podniesienia do sześcianu liczby 5, potraiam iéy logarytm 0,698970; ta potróyność iest 2. 096910; któréy odpowiada w tablicach liczba 125, sześcian z 5.

394. Dla znalezienia pierwiastku kwadratowego z 144, szukam w tablicach logarytmu téy liczby, i znayduię 2. 158362; biorę połowę tego logarytmu, i mam logarytm 1. 079181, któremu odpowiada liczba 12, pierwiastek kwadratowy z 144.

Również dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego z 27 biorę trzecią część z 1. 431364 logarytmu 27miu. Ta trzecia część iest 0. 477121, temu odpowiada liczba 3 która iest w saméy rzeczy pierwiastkiem z 27 (2).

395. Podług tego co poprzedziło, iasna iest iż dla odbycia reguły trzech przez logarytmy, trzeba,

---

(1) Zachodzi różnica o iedność między ostatnią cyfrą logarytmu 2. 227887 który w tablicach odpowiada 169ciu, i ostatnią cyfrą logarytmu 2. 227886 któryśmy otrzymali na wypadek. W tym przykładzie i we wszystkich podobnych, uważa się ta różnica za nic, ponieważ ostatnia cyfra po prawéy ręce logarytmów w tablicach nie iest zupełnie dokładną.

(2) Rozwiązanie przykładów tak prostych iak powyższe nie warte iest działania za pomocą logarytmów, bo więcéy pociąga zachodu niż zwyczayne sposoby. Lecz tu trzeba było przykładów, których się proba natychmiast zrobić mogła i do których nie potrzebowaliśmy obszerniéyszéy tablicy nad przyłączoną. Uczący się skoro ma pod ręką tablice zwyczayne, iako to: *Ulaka*, *Kalleta*, lub *Wegi*, może się przekonać naocznie o korzyści używania logarytmów, rozwięzuiąc podane niżéy zagadnienia. Z resztą kto ma potrzebę używania logarytmów, wprawą nabędzie wkrótce nałogu który mu w każdym razie da uczuć łatwość rachunku za ich pomocą.

ieżeli szukamy skraynego, dodać logarytmy wyrazów średnich i odiąć od summy logarytm skraynego wiadomego, reszta będzie logarytmem skraynego szukanego. Jeżeli zaś szukamy średniego, trzeba przeciwnie, dodać logarytmy skraynych i odiąć od ich summy logarytm średniego wiadomego, reszta będzie logarytmem średniego szukanego.

396. Tu poymuiemy ile po wynalezieniu logarytmów *liczb pierwotnych* ułatwione było wynalezienie logarytmów *liczb nie pierwotnych*, bo te muszą mieć za logarytmy summę logarytmów liczb pierwotnych które są ich czynnikami. Tak to rozum ludzki w samych wynalazkach znayduie sposoby ułatwiania ich sobie i doprowadzania do skutku.

Namienić tu ieszcze wypada iż są teraz nowe sposoby wynaydowania logarytmów liczb pierwotnych z zadziwiaiącą łatwością za pomocą algiebry, i ieżeli te sposoby odkryte zostały nieco zapóźno, posłużyły przynaymniéy do sprawdzenia bez pracy logarytmów liczb pierwotnych, a co nie pomału przyłożyło się do rozszerzenia użycia tablic iuż ułożonych, i do uproszczenia za ich pomocą wszelkich rachunków w których używaią logarytmów.

397 Widzieliśmy iż każde zagadnienie które za pomocą logarytmów rozwięzuiemy zaczyna się nayprzód od wzięcia odpowiadaiących danym liczbom logarytmów, a po odbyciu z temi stosownych działań, kończy się na znalezieniu liczb odpowiadaiących logarytmom wypadłym. Często zaś nie znayduią się w tablicach liczby których chcemy użyć logarytmów, lub przeciwnie, nie znayduią się logarytmy którym odpowiadaiące liczby poznać chcemy; przeto ważną iest rzeczą wiedzieć iak sobie w takich przypadkach postąpić należy.

398. Co do 1szego, niech będzie dane na pierwszy przykład oznaczyć logarytm liczby 627849.

Liczba ta przechodzi granice tablic nayobszernieyszych. Oddzielam kréską dwie ostatnie cyfry po prawéy ręce, i liczba ta staie się 6278,49. Logarytm części z lewéy ręki 6278 znayduie się w tablicach zwyczaynych. Szukam go i znayduię iż iest 3. 797821. Biorę różnicę (1) która iest między 3. 797890 logarytmem 6279ciu i 3. 797821 logarytmem 6278miu; różnica ta iest 0. 000069. Potém mówię: ieżeli na 1 różnicy między liczbami 6279 i 6278, mam 0.000069 różnicy między ich logarytmami, ileż na 0. 49 różnicy między liczbami 6278, 49 i 6278, będę miał różnicy między ich logarytmami?

Ta różnica będzie więc czwartym wyrazem reguły trzech następuiącéy, $1:0,49 = 0,000069:x =$ 0.0000338l, czyli 0.000034 (opuszczaiąc dwie ostatnie cyfry dziesiętne). Jeżeli dodamy tę liczbę do 3.797 821 logarytmu 6278iu, summa 3. 797855 będzie logarytmem 6278, 49ych. Więc, dodawszy do cechy, logarytm 5. 794855 stąd wypadły będzie logarytm 627849ciu które iest 100 razy większe niż 6278,49 (2).

Widoczna iest, iż gdyby cyfry oddzielone były zerami, trzebaby tylko dodać do cechy logarytmu pozostałéy z lewéy ręki części, tyle iedności ile się zer oddzieliło.

399. Jeżeli idzie o liczbę całą złączoną z ułomkiem, iak n. p. $9\frac{3}{4}$? zwracam całość do mianownika 4 ułomku, co mi daie $\frac{36}{4}$: liczba ta dodana do $\frac{3}{4}$ czyni $\frac{39}{4}$. Zatém $9\frac{3}{4}$ nie iest czém inném tylko ilorazem z 39 przez 4; logarytm więc $9\frac{3}{4}$ch iest równy

---

(1) Ta różnica znayduie się pospolicie w tablicach obok lub nad kolumną logarytmów.

(2) Ten sposob nie iest ścisły; lecz w zwyczaynèm użyciu wystarczaiący. Zależy on iak widać, na przypuszczeniu: że różnice liczb bardzo mało między sobą się różniących są prawie proporcyionalne różnicom między logarytmami tychże liczb.

różnicy logarytmu 39ciu i logarytmu 4ch. Logarytm

39ciu iest	1.591065
Logarytm 4ch	0.602060
Ich różnica	0.989005

Ten logarytm iest logarytmem $9\frac{3}{4}$ch.

Gdyby wyrazy ułomku wypadłego nie były obięte w tablicach, zaczęłoby się od wyznaczenia ich logarytmów, iakieśmy wyżéy wskazali, poczém wzięłoby się różnicę tych logarytmów, iak się dopiero powiedziało.

400. Jeżeli całość złączona iest z ułomkiem dziesiętnym; w tym przypadku bierze się logarytm téy liczby, iak gdyby nie było przecinka, A znalazłszy go bezpośrednio w tablicach, lub też sposobem podanym (n° 398) odetnie się z iego cechy tyle iedności ile było dziesiętnych w liczbie podanéy.

Przyczyna tego iest bardzo prosta, gubiąc przecinek uczyniło się liczbę 10 razy, 100 razy większą, podług tego iak była iedna dziesiętna, dwie dziesiętne; logarytm znaleziony należy więc do liczby dziesięć razy, sto razy większéy; zwróci się więc ten logarytm do prawdziwéy ważności, zmniéyszaiąc iego cechę iedną, dwóma, i w powszechności tylu iednościami ile było dziesiętnych w liczbie podanéy (n° 392).

401. Jeżeli trzeba znaleźć logarytm ułomku iak n. p. $\frac{4}{5}$?

Uważam iż gdy ułomek równy iest ilorazowi licznika przez mianownik, powinienbym dla otrzymania logarytmu tego ilorazu, odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika. Lecz że w ułomkach właściwych licznik iest mniéyszym od mianownika, a zatém logarytm licznika mniéyszym iest od logarytmu mianownika, nie można odiąć drugiego logarytmu od pierwszego; natenczas odeymuie się logarytm licznika od logarytmu mianownika, i poprzedza się resztę znakiem —; tak logarytm 5ciu

iest	0.698970
logarytm 4ch	0.602060
reszta iest	0.096910

ta poprzedzona znakiem — będzie logarytmem szukanym; logarytm więc $\frac{4}{5}$ch iest — 0.096810.

Skąd widać iż log. $\frac{4}{5}$ch i log. $\frac{5}{4}$ch różnią się tylko znakiem —.

Ten znak — oznacza iż logarytm poprzedzony od niego powinien być użyty w sposobie przeciwnym temu, iakiśmy oznaczyli na logarytmy całości, i całości z ułomkami złączonych.

Tak 1od aby pomnożyć iaką liczbę przez ułomek, odeymie się logarytm ułomku od logarytmu mnożnéy.

Gdyż aby pomnożyć przez ułomek, trzebaby dodać logarytm licznika, a odiąć logarytm mianownika; co iest to samo, odiąć nadmiar logarytmu mianownika nad logarytm licznika. Ta zaś różnica iest właśnie logarytmem ułomku: więc 1od aby pomnożyć iaką liczbę przez ułomek, trzeba odiąć iego logarytm od logarytmu mnożnéy.

2re Aby podzielić iaką liczbę przez ułomek, doda się logarytm ułomku do logarytmu podzielnéy.

Bo, aby podzielić przez ułomek, trzebaby dodać logarytm mianownika, a odiąć logarytm licznika; co iest właśnie to samo, dodać nadmiar logarytmu mianownika nad logarytm licznika. Ten zaś nadmiar iest logarytmem ułomku; więc 2re aby podzielić iaką liczbę przez ułomek, trzeba dodać logarytm ułomku do logarytmu podzielnéy.

402. Ażeby znaleźć logarytm ułomku dziesiętnego, szukać się będzie iego logarytmu iak gdyby to

była całość; znalazłszy go, weźmie się iego różnicę z liczbą iedności oznaczoną przez liczbę dziesiętnych ułomku, i poprzedzi się resztę znakiem —

Naprzykład, aby mieć logarytm 0.009ch, biorę log. 9ciu który iest 0.954243. Odeymuię go od 3,000000 które iest logarytmem 1000ca, i poprzedzam znakiem — różnicę 2.045757. Logarytm więc 3.009ch iest — 2.045757. W samey rzeczy, $0.009 = \frac{9}{1000}$; dla znalezienia zaś logarytmu $\frac{9}{1000}$ch, trzeba odiąć logarytm 9ciu od logarytmu 1000ca, i dać reszcie znak — (nº 401); więc logarytm 0.009 iest — 2.045757.

403. Zastanowiny się teraz co do 2go, iak sobie można poradzić w wyznaczeniu do iakiey liczby należy logarytm który się w tablicach nie znayduie, bądź że przechodzi granice tablic, bądź że wpada między dwa logarytmy tablic.

Nayprzód, ieżeli iest logarytm przechodzący granice tablic, zmnieyszemy iego cechę tylu iednościami ile potrzeba aby tak przygotowany nie przechodził iuż tablic.

Natenczas iedno z tego dwoyga; albo znaydziemy w tablicach wszystkie cyfry logarytmu, albo znaydziemy tylko pierwsze cyfry iego.

404. Jeżeli wszystkie cyfry logarytmu znayduią się w tablicach, liczba szukana będzie ta, która w tablicach znayduie się obok logarytmu o który idzie; lecz trzeba przydać do niey tyle zer, ile się uięło iedności cesze logarytmu podanego.

Naprzykład, uiąwszy 4 iedności z cechy logarytmu 6.225309, widzę iż log. pozostały 2.225309 znayduie się całkiem w tablicach, i że liczba iemu odpowiadaiąca iest 168. Będę więc miał liczbę szukaną przydawszy cztery zera do 168; tak 6.225309 iest logarytmem liczby 1680000.

405. Jeżeli pierwsze tylko cyfry logarytmu znayduią się w tablicach, postąpi się iak w przykładzie

następuiącym: niech idzie np. o wyznaczenie do iakiéy liczby należy log. 5.860412?

Uiąwszy dwie iedności cesze, znayduię iż log. pozostały 3.860412 wpada między logarytmy liczb 7251 i 7252. Liczba więc szukana będzie większa niż 7251 a mniéysza niż 7252; będzie więc równa 7251 więcéy ułomek który znaleźć trzeba.

Aby mieć ten ułomek, biorę różnicę logarytmów liczb 7252 i 7251. Różnica ta, iest 0.000060.

Potém biorę różnicę między 3.890412 logarytmem pozostałym, i 3.860398 logarytmem liczby mniéyszéy 7251; różnica ta iest 0.000014.

Nakoniec robię tę proporcyią 0.000060 : 0.000014 $= 1 : x$, czyli $60 : 14 = 1 : x = \frac{14}{60}$. Zatém ułomek $\frac{14}{60}$ iest tym który trzeba dodać do liczby 7251, aby mieć liczbę któréy odpowiada logarytm 3.860412. Ta liczba iest więc $7251\frac{14}{60}$; a gdy log. 5.860412 należy do liczby sto razy większéy, liczba szukana będzie liczbą $7251\frac{14}{60}$ sto razy zwiększoną czyli $725100\frac{1400}{60}$; to iest uskuteczniaiąc dzielenie 1400 przez 60, i zwracaiąc resztę na dziesiętne; 725123, 33 blisko.

Gdy logarytm podany wpada między dwa logarytmy tablic, ten przypadek wychodzi na poprzedzaiący; trzeba więc odbyć toż samo działanie, wyiąwszy że się nie będzie dopisywać zer do liczby znalezionéy, ponieważ nie uymowało się iedności od cechy logarytmu podanego.

406. Jeżeli log. którego liczbę wyznaczyć chcemy, wpada między dwa logarytmy należące do liczb małych, natenczas dobrze iest powiększyć iego cechę iedną, dwoma, lub trzema iednościami, ile tego dozwala obszerność tablic; wziąć liczbę nayblizéy odpowiadaiącą temu logarytmowi, i oddzielić przecinkiem tyle cyfer ile się przydało iedności do cechy.

Naprzykład, ieżeli mam log. o. 903854 który wpada między logarytmy liczb 8 i 9, przydaie trzy iedności do iego cechy, i szukam iakiéy liczbie odpowiada w tablicach log. wypadaiący 3. 903854. Wpada on między 8014 i 8015; biorę 8014 które iest liczbą naybliżey przystępuiącą do odpowiedzenia logarytmowi 3. 903854. Liczba więc szukana iest 8,014 zbliżone mniey iak o iednę tysiączną.

Jeżeli iest potrzeba większego ieszcze zbliżenia, użyie się sposobu wskazanego w nº 405.

407. Nakoniec, ażeby wiedzieć do iakiego ułomku należy log. odiemny (négatif) iak np. — 1. 255273; można szukać iakiéy liczbie odpowiada logarytm dodayny (positif) 1. 255273. Liczba ta iest 18; zatém — 1. 255273 odpowiada ułomkowi $\frac{1}{18}$.

408. Lecz iako się nie trafia zawsze iż się logarytm całkiem w tablicach znayduie, aby mieć w dziesiętnych ważność zbliżoną ułomku odpowiadaiącego logarytmowi odiemnemu, trzeba odiąć ten logarytm od 1, 2, 3, 4, i t. d. iedności, szukać do iakiéy liczby należy log. wypadły, i oddzielić przecinkiem, ku prawéy ręce liczby znalezionéy, tyle cyfer ile było iedności w liczbie od któréy się odięło log. podany.

Chcę wiedzieć np. iakiemu ułomkowi odpowiada log. odiemny — 1. 390883, odeymuię ten log. od 5 w ten sposób: 5. 000000

. . . . 1. 390883

. . . . 3. 609117

Logarytm pozostały wpada między logarytmy liczb 4065 i 4066. Ułomek więc szukany iest o. 04066.

Widać łatwo czemu się w tym przykładzie oddzieliło pięć dziesiętnych. Bo odeymuiąc od 5 logarytm podany, rozmnożyłem 100000 których logarytmem iest 5, przez ułomek do którego należy log. podany; czyli co na toż wychodzi, rozmnożyłem ułomek przez 100000. Więc log. wypadły należy do liczby 100000 razy większéy; aby więc zwrócić do prawdziwéy ważności liczbę znalezioną 4066, trzeba ią zwrócić na setne tysiączne; trzeba więc napisać 0.04066.

409. Dla skrócenia rachunków w pewnych przypadkach zamieniamy odeymowania logarytmów w dodawania, co się robi za pomocą *dopełnień arytmetycznych*.

Nazywa się *dopełnieniem arytmetycznem* różnica która się znayduie między iaką liczbą i iednością z tylu zerami ile iest cyfer w téy liczbie. Łatwo znayduiemy dopełnienie arytmetyczne iakiéy liczby np. 3728, uważaiąc cyfry które trzeba dodawać od lewéy ku prawéy ręce do każdéy z cyfer liczby 3728, aby każda summa czyniła 9, wyiąwszy ostatnią po prawéy ręce która powinna czynić 10. (1) Tak dopełnienie arytmetyczne liczby 3728 iest 6272.

410. Że za pomocą dopełnień arytmetycznych można zamienić zwyczayne odeymowanie w dodawanie, przekonamy się z następuiącego przykładu: daymy iż trzeba odiąć 3728 od 5246. Dodaię do 5246 dopełnienie arytmetyczne liczby 3728 które iest 6272 i mam na summę 11518 wypadek o 10000 większy od żądanego, gdyż zamiast odięcia wprost 3728, dodałem 10000 mniéy 3728, zrobiłem więc żądane odeymowanie ale oraz i powiększenie o 10000, t. i. o 1 dziesiątek względem naywyższéy cyfry w liczbie odeymować się maiącéy. Odiąwszy więc ten dziesiątek, iak tu 10000, mam 1518 różnicę szukaną (2).

---

(1) Łatwo iest widzieć iż się znayduie tym sposobem taż sama różnica, co i sposobem podanym pod n. 52.

(2) Gdybym za pomocą tego sposobu miał odiąć od iednéy liczby kilka liczb złożonych z iednakowéy liczby cyfer,

411. To założywszy, ieżeli w iakiém działaniu trzeba odiąć logarytm; zamiast go odiąć, dodamy iego dopełnienie arytmetyczne, a odeymiemy dziesiątek cesze summy wypadłéy.

Łatwo dać przyczynę tego sposobu, bo ieżeli n. p. zamiast odiąć od logarytmu 1. 176091 logarytm 0. 845098, przydaiemy dopełnienie iego arytmetyczne, to iest to samo iak gdyby się dodało 10. 000000 — 0. 845098; w tym zaś razie robi się w tymże samym czasie żądane odeymowanie, i powiększa się cechę wypadku iednym dziesiątkiem: trzeba więc odiąć ieden dziesiątek od 10. 330993, które iest summą logarytmu 1,176091 dodanego do 9,154902 dopełnienia arytmetycznego logarytmu 0,845098. Wypadek 0,330993 iest ten sam którybyśmy mieli biorąc nadmiar logarytmu 1,176091 nad logarytm . . . 0,845098

jak tu widać . . . 0,330993

412. Przystosuymy do przykładu co się dopiero powiedziało. Daymy iż żądaią czwartego wyrazu proporcyi następuiącéy, 9 : 27=33 : x. Działaiąc przez logarytmy trzeba wziąć summę logarytmów średnich, i odiąć od niéy logarytm skraynego wiadomego (n° 395). Zamiast odiąć ten log.

---

niąłbym z wypadku tyle iedności rzędu właściwego ile wziąłem dopełnień arytmetycznych; np. dodawszy do 4480456
dopełnienie arytmetyczne liczby 897523 które iest 102477
. . . . . 321702 678298
. . . . : 253456 746544

mam wypadek 6007775

który iest o 3000000 większy; powinien być więc 3007775. Jakoż otrzymałbym toż samo, odeymuiąc od 4480456 summę 3ch liczb powyższych.

dodam iego dopełnienie arytmetyczne iak następuie:

log. liczby 27 . . .	1,431364
log . 33 . . .	1,518514
dopełnienie arytm. logarytmu liczby 9	9,045757
summa . . .	11,995635

Wymazuię dziesiątek z cechy, i znayduię iż log. 1,995635 odpowiada w tablicach liczbie 99. mam więc proporcyią zupełną 9 : 27 = 33 : 99; która iest prawdziwa.

Przykład ten wystarcza aby dać poznać użycie dopełnień arytmetycznych, i ich użytku dla skracania rachunków w logarytmach zmieniaiąc odeymowania w dodawania.

Zagadnienia.

413. I. Maiąc dane logarytmy liczb 3,5 i 7, to iest: 0,477121, 0,698970, i 0,845098, wyznaczyć logarytmy liczb od 1 aż do 10?

II. Znaleźć log. liczby 1) 788873; 2) 4952,74; 3) $1528\frac{3}{5}$; 4) $\frac{7}{8}$?

III. Znaleźć liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 1) 7,9490727; 2) 6,725843; 3) 0,5432725; 4) —1,739362?

IV. Wynieść do potęgi piątéy 0,17?

V. Znaleźć iloraz zbliżony aż do dziesięciotysiącznych 1) z 17954 podzielonych przez 12826; 2) z $\frac{17}{23}$?

VI. Jakiż iest 1) $\sqrt{19881}$? 2) $\sqrt[3]{97666}$? 3) $\sqrt[4]{364}$? 4) $\sqrt[7]{5}$; 5) $\sqrt[5]{5736333}$; mniéy niż o iednę setną zbliżony?

VII. Znaleźć 1) stosunek postępu równoilorazowego którego 25 i 1166400 są skraynemi a który składa się z 5 wyrazów, 2) 4 średnie ilorazowe między $2\frac{2}{3}$ i $5\frac{3}{4}$?

VIII. 100000zł. kapitału po $5\frac{0}{0}$ ileż wynosi po 10 latach wraz z proc. składanym?

IX. Jeżeli po 10 latach odebrano kapitału 162889zł,473 wraz z procentem składanym po $5\frac{0}{0}$, iakiż był pierwiastkowy kapitał?

X. Oddano pewną kwotę pieniędzy na proc. po $5\frac{0}{0}$. Na końcu każdego r. dołączaią proc. do kapitału. Jest pytanie w iakim czasie kapitał zostanie podwoiony przez ciągłe dołączanie do niego procentu?

XI. Z beczki wina trzymaiącéy 200 garcy uciągnięto garniec za który dolano wody. Powtórzono to działanie z mieszaniną, i chcą go powtarzać aż do otrzymania tylko $\frac{4}{5}$ części wina w beczce; ileż razy maią powtórzyć działanie?

XII. Dzwon pewnego powietrzociągu iest 8 razy większy niż obiętość wnętrza pompy; pytaią się ile razy trzeba obrócić stępel, ażeby powietrze w dzwonie było 60 razy rzadsze niż w stanie naturalnym?

XIII. Wynaleźć 4ty wyraz proporcyi, $\sqrt{80000} : (1528\frac{4}{5})^4 = \frac{217}{3478} : x$?

XIV. Znaleźć ważność ułomka ułomków $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ciu z $\frac{4}{11}$, w ułomku zwyczaynym?

XV. Sądzący się bydź biegłym rachmistrzem rzekł do matematyka pokazuiąc mu kiesę luidorów: ieżeli zgadniesz przez twoie kombinacyie o ile iest więcéy w téy kiesie niż w tym worku pieniędzy który zawiera 3474zł. dam ci 100 luidorów; ieżeli zaś nie zgadniesz, dasz mi twóy teleskop.

O Układzie nowych miar francuzkich.

1. Potrzeba używania iednostaynych i stałych miar w społeczności, była powodem do ścisłych i mozolnych badań w celu ustanowienia *miary pierwotnéy* czyli *zasadniczéy* do któréyby wszelkie inne z łatwością można odnosić. Uczeni francuzcy starali się ile możności zadosyć uczynić wszelkim wtéymierze trudnym warunkom. Jak wielkie prace podięto nim tego dostąpiono nie iest tu mieysce ani szczupłość dzieła dozwala wymieniać. Odsyłamy raczéy do dzieł obszernie otem piszących, kładąc tu tylko same z tych prac wypadki (*résultats*).

2. Układ miar nowych wprowadzonych od r. 1795 i ustanowionych we Francyi nazywaią *systematem metrycznym*, gdyż wszystkie miary zawisły tu od *metra* który iest iednością miar długości. Że zaś miara ta zasadza się na rzeczywistey wielkości ziemi naszéy ztąd ią nazywaią naturalną.

3. Rozróżniaią ośm gatunków miar używanych w towarzystwie

1ᵉ miary liniiowe czyli długości których iednością iest *metr*.

2ᵉ miary kwadratowe czyli powierzchni których iednością iest *ar* (szczególniéy do mierzenia ziemi);

3ᵉ miary sześcienne czyli obiętości ciał stałych, których iednością iest *ster* (szczególniéy do mierzenia drzewa opałowego):

4ᵉ miary obiętości ciał ciekłych i sypnych których iednością iest *litr*;

5ᵉ miary ciężkości czyli wag których iednością iest *gram*;

6ᵉ miary wartości czyli monet których iednością est *frank*;

7[e] miary kątów których iednością iest *stopień*;
8[e] miary czasu których iednością iest *godzina*.

4. Mówić tu tylko będziemy o sześciu pierwszych gatunkach miar, odsyłaiąc do ieometryi co do kątów, a do mechaniki co do czasu.

5. Siedm iest wyrazów które dołączaią do iedności głównych dla uformowania miar po 10 razy większych i po 10 razy mniéyszych. Do powiększania użyto wyrazów greckich; do zmniéyszania łacińskich. Obięte są one w następuiącéy kolumnie ze swoiém znaczeniem.

Między *deka* i *deci* zostawiony iest odstęp dla umieszczenia iedności.

Myria . .	dziesięćtysięcy
Kilo . .	tysiąc
Hecto . .	sto
Deka . .	dziesięć
Metr, *Ar*, *Ster*, *Litr*,	*Gram*, *Frank*.
Deci . .	dziesiętna
Centi . .	setna
Milli . .	tysiączna

6. *Metr* iest dziesiąta milionowa część ćwierci *południka ziemskiego* (1) albo odległości *bieguna od równika*. Cały więc południk ma 40 milionów metrów. A że każdy okrąg dzielą podług nowego podziału na 400 części równych nazwanych *stopniami*, zatém 4[ta] część południka zawiera stopni 100; więc metr iest 100000[ną] częścią nowego stopnia południka.

metr.
metr$=1\frac{3}{4}$ łok. polsk. blisko, dokładnie zaś $7^{2}=$ 125 łok. pol.

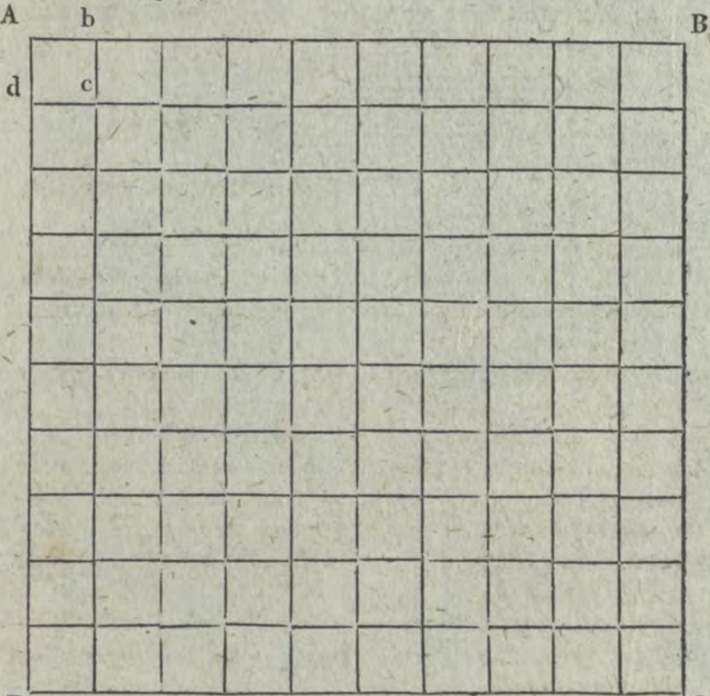
---

(1) Definicyie użytych tu wyrazów, iako to: *południk*, *biegun*, *równik*, należą do początków ieografii matematycznéy.

myriam.
myriametr$=1\frac{1}{5}$ mili polsk. blisko, dokładnie zaś 10$=$ 12,15 mil. polsk.

Na $4^{tą}$ część południka idzie 1000 myriametrów a 1215 mil polskich, na cały więc południk czyli okrąg ziemski 4000 myriametrów a 4860 mil polskich.

7. *Ar* iest dekametr kwadratowy t. i. kwadrat maiący w każdym boku dziesięć metrów, i zawiera sto metrów kwadratowych, iak to okazuie figura następuiąca.



Liniia AB$=$10 metrom, liniia AD$=$10 metrom, liniia Ab$=$1 metrowi toż samo liniia Ad; powierzchnia

Abcd iest metrem kwadratowym (1), dekametr więc kwadratowy zawiera sto metrów kwadratowych. Widać stąd, iż gdy wymiary iakiéy powierzchni są dziesięć razy większe albo mniéysze od wymiarów innéy, powierzchnia pierwszéy iest sto razy większa albo mniéysza od powierzchni drugiéy. *Deciar* nie iest w używaniu gdyż nie iest kwadratem, lecz *centiar* czyli metr kwadratowy; również *dekar* nie iest używany lecz *hektar* czyli hektometr kwadratowy. Używany iest także do wielkich powierzchni *myriar* czyli kilometr kwadratowy.

Centiar$=$5 pręcikom i 35 ławkom blisko, dokładnie
centiar. pręcikom.
zaś 2916$=$15625

ar$=$5 prętom i 35 pręcikom blisko, dokładnie
ar. prętom.
zaś 2916$=$15625

hektar$=$5 sznurom i 35 prętom blisko, dokładnie
hektar. sznurom.
zaś 2916$=$15625

8. *Ster* iest metr sześcienny, służy on szczególniéy do mierzenia drzewa na opał. Podziałów téy miary nie używaią.

Jest zaś ster$=$blisko 5téy części naszego sążnia sześciennego albo$=41\frac{19}{20}$ stop sześciennych.

9. *Litr* iest obiętość decimetru sześciennego, t. i. naczynia któreby miało decimetr wzdłuż, decimetr wszerz i decimetr wzwyż (2). Zobaczemy w artykule następuiącym że litr wody czystéy waży 1 kilogram. Litr używany iest w handlu rzeczy suchych i ciekłych w małéy ilości, *dekalitr* sczególniéy do zboża, *hektolitr* do rzeczy suchych i ciekłych w znacznéy ilości. Kilolitr i myrialitr iako bardzo wielkie nie używaią się.

---

(1) obacz przypisek pod n. 64.

(2) Obacz przypisek pod n. 116.

Litr=1 kwarcie polskiéy zupełnie
dekalitr=$2\frac{1}{2}$ garcom,
hektolitr=25 garcom.

10. *Gram* iest waga centymetru sześciennego wody dystylowanéy wziętéy w naywiększéy swoiéy gęstości (t. i. przy 4tym stopniu termometru na 100 części podzielonego *centigrade*). *Centimetr* sześcienny równa się obiętości iednego millilitra, więc mililitr wody dystylowanéy waży 1 *gram*, a zatém *litr* waży 1 kilogram. Kilogramu używaią iako funta metrycznego. Półkilogramu równa się używanemu w handlu funtowi (*livre*). Poddziały grama używane są szczególnie od chemików i w ogólności od trudniących się artykułami drogiemi. *Myriagram* używany iest w ciężarach znacznych, tudzież waga o 100 kilogramach iako cetnar metryczny, lub o 50 kilogramach iako pół cetnara metrycznego równaiącego się cetnarowi używanemu.

gram. granom — gram. granom
1=$22\frac{2}{3}$ blisko; dokładnie zaś 11=250

kilogr. funtom — kilogr. ℔
1=$2\frac{7}{15}$ blisko; dokładnie zaś 405504=1000000

myriagr. funt. — myriagr. ℔
1=$24\frac{5}{8}$ blisko; dokładnie zaś 405504=10000000.

11. *Frank* iest sztuka srebra ważąca 5 gramów zmieszana z $2\frac{1}{10}$ miedzi; zawiera więc 45 decygramów czystego srebra a 5 decygramów miedzi. Co do nazwisk poddziałów, nie mówią decifrank, centifrank lecz *decym*, *centym*. Wyższych także podziałów nie używaią. Kilogram monety srebrnéy ważyłby 200 franków.

frank — frank.
1 =1zł. 18gr blisko; dokładnie zaś 128=207zł.

12. Systemat metryczny z wielu względów m pierwszeństwo przed wszystkiemi dotąd używanem. systematami miar; lecz naywiększa dogodność iego iest ta, że podziały miar są w nim iednakowe i stosowne do systematu naszego liczenia (1). Rachunek więc z liczbami wielorakiemi nie ma tu miéysca, bo iest ten sam co rachunek liczb całych i dziesiętnych; zamiana miar wyższych na niższe i wzaiemnie, uskutecznia się iednym pociągiem pióra dopisuiąc zera lub przenosząc przecinek.

Na przykład, 504,35 metrów, czynią 50,435 dekametrów; 5,0435 hektometrów; 0,50435 kilometrów, a 5043,5 decimetrów; 50435 centimetrów; 504350 milimetrów, i t. d. podobnież i co do innych miar dziesiętnych.

Gdyby więc we wszelkich miarach używano podziałów dziesiętnych nie byłoby potrzeby używania ułomków zwyczaynych porówn: (n° 176; 208): Lecz nadto przyzwyczaieni iesteśmy brać $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ i t. p. części z całości których za pomocą dziesiętnych dokładnie oznaczyć nie można; i ta to iest podobno iedyna niedogodność którą systematowi metrycznemu słusznie zarzucić można. Życzyćby tu znowu wypadało ażeby podział dwunastny był zachowany, wszakże to nastąpić nie mogło, gdy podział miar nowych miał być stosowny do układu liczenia naszego.

Zważaiąc iednak iż miary iednego rodzaiu nie są iednostayne przynaymniéy w każdym w szczególności kraiu, lecz często różne w różnych iego prowincyiach, w różnych miastach iednéy prowincyi, a nawet w iednémże mieście, że się znayduią sto-

(1) A stąd że są iak naylatwiéysze do spamiętania, wiedać oczywiście.

py zwyczayne i szczególne, łokcie większe i mniéysze; słowem że na różne gatunki rzeczy które naturalnie powinny mieć iednę miarę, różne miary iuż pod różném iuż i pod iednakowém nazwiskiem są używane (1), gdy tak rozlicznych miar zważemy rozliczniéysze ieszcze podziały; nie można nie życzyć z uczonym Sniadeckim « ażeby wszystkie Rządy i « Narody poznały i przyięły wielkie dla Towarzy- « stwa dobrodzieystwo w ustanowieniu miar stałych « i iednostaynych » (2).

---

(1) Nie bez zastanowienia w miastach Européyskich osobliwie niemieckich znayduiemy łokcie inné do iedwabiu, inne do płótna a inne do wełny; z miar do ciał ciekłych inne do wina, inne do piwa, inne do oleiu i t. d. wagi także inne handlowe, inne menniczne, inne jubilerskie, a inne aptekarskie lubo te nie mniéy są handlowemi.

(2) Obacz *Jeografiią matematyczną Jana Sniadeckiego* Rozdział III. § 52 *ustanowienie miar i wag powszechnych* Edycyia trzecia w Wilnie 1818 r. karta 168.

STOSUNKI ZBLIZONE

POLSKICH MIAR-NOWYCH Z DAWNEMI

WYRAŻONE W LICZBACH CAŁYCH.

17 nowych łokci czynią prawie 16 dawnych koronnych, czyli raczéy, stosunek łokci nowych do dawniéyszych iest 67 : 63

7 mil nowych równaią się prawie 8 większym milom dawniéyszym, których rachowano 15 na stopień południka, czyli dokładniéy stosunek mil nowych do dawniéyszych iest 20 : 23.

16 morgów nowych równiaią się prawie 15 morgom dawniéyszym, czyli raczéy stosunek morgów nowych do dawnych polskich iest 81 : 76. (1)

16 korcy nowych równaią się prawie 17 korcom dawniéyszym koronnym, czyli raczéy stosunek korcy nowych do dawniéyszych iest 212 : 225.

1468 funtów nowych równaią się bardzo blisko 1469 funtom dawniéyszym.

Obszerną wiadomość tak co do monet iako też innych miar powziąć można z książki: Nelkebrechers Taschenbuch der Münz-Maass-und Gewitchskunde 13*te* wydanie w Berlinie 1820.

(1) Obacz: *wspomnione wyżéy*, *Porównanie teraźniéyszych i dawniéyszych miar i wag w Królestwie Polskiém używanych*, *przez Jul: Colberg*. *Kar*. 52.

TABLICE
METROLOGICZNE

OBEYMUIĄCE

1. Miary liniowe czyli długości,
2. Miary kwadratowe c. powierzchni,
3. Miary sześcienne c. obiętości,
4. Miary ciężkości c. wagi,
5. Miary wartości c. monet,

niektórych Miast i Kraiów Europeyskich.

I. MIARY LINIIOWE

1. STOPY I ŁOKCIE WYRAŻONE W MILIMETRACH.

m. znaczy miarę mnieyszą w. większą.

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW STOPA.	MILIMETROW ŁOKIEĆ.	NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW STOPA.	MILIMETROW ŁOKIEĆ.
Altona *obacz* Hamburg			łok. do płótna		725, 01
Akwisgran (Aachen)	282,	667, 72	Genua *palmo* . .		249, 83
Amszterdam . .	283,	690, 28	Görlica		563, 2
łok. flamandzki		710, 58	Haga	iak daw: Par:	iak daw: Am:
Anglia	304, 7		Hamburg . . .	286, 49	572, 97
Yards		m. 914, 74	Hannower . . .	292, 99	583, 98
Ells		w. 1143, 48	Heidelberg w Badeńskim	278, 59	558, 65
Anszpach i Bayreyt	297, 76	622, 6 656, 44	Hiszpania . . .	282, 66	836, 6
Antwerpia . . ,	284, 23	m. 684, 42 w. 694, 34	Hollandyia ob. Amszt: Holsztyn ob. Hamb:		
Augszpurg . . .	296, 17	m. 592, 38 w. 609, 52	Inflanty ob. Ryga Karlsbad		w. 677, 2 m. 591, 7
Bawaryia od 1811. r.	291, 86	835, 01			
Bazylea	298, 2		Karlsruhe . . .	291, 1	555,
braccio .		544, 10	Kassel	284, 9	569, 4
aune . .		1179, 35	Kliwiia	295, 51	łok. koloński lub berliń:
Berlin od r. 1816. we wszyst: Prowin: Pruskich stopa reńska	313, 85	667, 71	Koblenc		558, 09
			Kolonia	287, 59	575, 19
Bern	293, 33	541, 71	Kraków	356, 41	616, 98
Brabancya ob: Antwerpia		691, 41	Leodyum (Lütich, *Liège*)	287, 62	551, 55
			Leyden	313, 2	683, 06
Bremen	289, 2	578, 4	Linc obacz Wiedeń		
Brunszwik . . .	285,	570, 72	Lipsk . . zwyczayna	282, 65	565, 2
Bruxella ob. Antwerp.			budownicza	282, 72	
Dania	313, 62	627, 68	Litwa	iak daw: Par:	649, 68
Florencyia i w całey Toskanii od r. 1781. *braccio* = ¼ *canna* = . . .		594, 18	Liworno ob. Florencyia		
			Lowanium (Löven)	285, 66	w. 694, 34 m. 684, 41
Francyia dawn. stopa Paryzka = ⅙ sążnia (*toise*)	324, 7		Lubeka	291,	577, 04
			Luka	589, 91	*brac* 595, 09
aune . .		1188, 37	Luneburg ob: Brunszwik.		
teraznieyszy *metr.*		1000,	Luxemburg ob. Antwerp.		
Frankfurt nad Menem	284, 6	547, 28			
Freyburg . . .		566, 65	Manheim ob. Heidelberg.		
Geldryia		670, 4			
Genewa (*Geneva*, *Genf*)	487, 94	1143, 7	Mantua *braccio*		643, 81
			Mechlin	279, 71	iak m. Low:
Gandawa (*Gent*) łok: zwyczayny iak w Lowanium			Medyiolan . . .	397, 02	*brac* 586, 51
			braccio do wełny		675, 4

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW STOPA.	MILIMETROW ŁOKIEĆ.
Meklenburg ob. Lubeka		
Modena	517, 71	*brac*648, 09
Moguncyia (Werkfuss	291, 5	551, 18
Kameralfuss) .	187, 5	
Namur ob. Geldryia		
Naumburg ob. Lipsk		
Neapol *palmo* . .	262, 8	
canna .		2112,
Neyszatel . . .	300,	1127,
Nimega ob. Geldryia		
Norwegia ob. Dania		
Norymberga . .	303, 86	656, 44
Oldenburg ob. Bremen.		
Osnabrug . . .	279, 27	w. 601, 62
		m. 583, 35
Ostenda		699, 3
Padwa	428, 38	
braccio do iedwabiu		641, 56
dito do wełny		679, 92
Piemont *liprando* .	514. 4	
raso	iak daw. łok.	Polsk: koron:
Polska dawne koron:	297, 77	595, 54
nowe od początku r. 1820.	288,	576,
Portugaliia *palmo* .	218, 6	
varas . . .		1092, 94
Praga w Czech: ob. Wiedeń		
Prezburg ob. Wiedeń		
Prusy ob. Berlin .		
Raguza		513, 2
Ratyzbona (Regensburg)	313, 56	810, 97
Rawenna *braccio* .	w. 584, 26	m. 578, 85
Reńska *stopa* . .	313, 85	
Rossyia	354, 1	
pospolicie teraz używaią stopy angielsk: lub reńskiéy.		
arszyn		711, 48
Rosztok ob. Lubeka		
Rotterdam . . .	312, 43	iak Amszte:

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW STOPA	MILIMETROW ŁOKIEĆ.
Ryga	274, 8	548, 16
Rzym . . stopa daw:	294, 61	*brac*634, 79
palmo do budowli	223, 33	*can*2001, 55
Sardyniia *palmo* .	248, 36	*raso*549, 29
Saleburg łok. do iedwabiu . . .		800, 84
łok. do płótna		1005, 64
Saxonia ob. Lipsk .		
Stralsund ob. Lubeka		
Sycyliia	242, 05	
canna iak w Neapol:		
Szafhauzen . . .		603, 43
Szląsk Austryacki .	289, 42	578, 4
Sztuttgard ob. Wirtemberg		
Szwecyia . . .	297, 1	593, 73
Toskaniia ob. Florencyia		
Trewir ob Koblenc		
Tryiest łok. do iedw.		640, 65
łok. do wełny		675, 84
Turcyia *pik* w.		669, 08
dit. m.		647, 87
Turyn stopa zwyczay:	342, 43	*raso*603, 2
stopa duża .	513, 65	
Tyrol Hrabstwo .	334, 11	804, 14
Ulm	288, 97	568, 46
Węgry ob. Wiedeń		
Wenecyia . . .	347, 4	
braccio do iedwab.		688, 39
dit. do wełny		684, 41
Werona	340, 63	
braccio do iedwab.		648, 55
dit. do wełny		657, 12
Wiedeń i w całéy Austryi . . .	316,	779, 16
iednak w Austryi wyższéy . . .		799, 68
Wirtemberg . .	286. 46	614, 24
Wirtzburg . . .	294, 42	588, 84
Wizmar ob. Hannower		
Zurych	300, 93	601, 86

2. MIARY DROŻNE,

których długość odniesiona iest do długości stopnia południka ziemskiego podług dawnego podziału okręgu.

NAZWISKA MIEYSC.	NA 1. STOPIEŃ POŁUD:	NAZWISKA MIEYSC.	NA 1. STOPIEŃ POŁUD:
Angliia . . . mil rządowych	69, 33	Neapol	57, 71
dit. pospolitych	73,	Niemcy ieograficznych	15,
dit. morskich	60,	małych	17, 75
dit. *leagues*	20,	wielkich	12,
Anszpach i Bayreyt	13,	Polska dawnych dużych	15,
Austryia . . . pocztowych	14, 65	mniéyszych c. morskich	20,
Bawarya mil małych	14, 15	nowych	13, 05
dit. wielkich	8, 69	Portugalia	w. 15,
Brabancyia	20,		m. 18,
lieues	25,	Prusy	14, 37
Brunszwik Luneburg	10, 51	Reńskich mil	14, 76
Czechy mil wielkich	12,	Rossyia . . . *werszt*	104, 3
dit. małych	16, 12	Rzym	74, 7
Daniia (prawie iak reńskie)	14, 77	Saxoniia	12, 3
Francyia *lieues*	25,	Szkocyia	w. 50,
morskich mil	20,		m. 61,
Flandryia większe iak reńskie		Szląsk	17, 18
mniéyszych	25,	Szwabiia	12,
Hamburg	20,	Szwaycaryia	w. 13, 3
Hessyia	11, 29		m. 15, 06
Hiszpania	26, 63	Szwecyia	10, 4
Hollandyia	19, 66	Turcyia . . . *berri*	66, 66
Irlandyia	40,	morskich	84, 68
Litwa	w. 12, 44	Ukraina	12,
	m. 20,	Węgry	13, 33
Lombardyia	67, 25	Westfaliia	10,
Luxemburg	28,	Włochy	60,

II. MIARY KWADRATOWE

KTORYCH POWIERZCHNIA WYRAŻONA IEST W ARACH.

NAZWISKA MIEYSC.	LICZBA ARÓW.
Anglia *acre* = 160 prętów □ .	40, 494
Anspach *morg* = 360 dit . .	45, 965
Antwerpiia *bunder* = 400 dit .	130, 291
Austryia *ob.* Wiedeń	
Auszpurg *iauchart*	24, 588
Bawaryia dit.	34, 074
Bazylea dit. = 140 pręt.	31, 873
Berlin *morg* Magdeb. = 180 pręt. reńs.	25, 532
Bern *iauchart* pola	34, 399
dit. łąki	30, 099
dit. lasu	37, 599
dit. mały . . .	27, 519
dit. naymnieyszy .	26, 991
Brunszwik *morg* = 120 prętów	25, 02
Chełmno daw. miary *morg* = 300 pręt.	56, 034
nowéy miary dit. . .	57, 796
Daniia *beczka wysiewu* . . .	55, 471
Francya *arpent royal* daw. miar. .	51, 072
ar nowéy miary . . .	1,
hectar dit	100,
Gdańsk *morg* = 300 prętów .	55, 555
Genewa *morg*	51, 663
Gotha *acker*	21, 078
Hamburg *morg* = 600 pretom .	96, 522
korzec wysiewu . . .	42, 024
Hannower *morg* = 120 prętóm .	26, 014
Hiszpaniia *fanego* 4900 *varas*	35, 287
Hollandyia *morg* =600 prętom	81, 268
Irlandyia *ob.* Angliia . . .	
Lipsk *morg* = 300 prętom . .	55, 132
Litwa. dit. = dit.	71, 228
Liworno *ob.* Toskaniia . . .	
Magdeburg *ob.* Berlin . . .	
Meklenburg *morg* = 300 prętom	65, 036
dit. 200 prętom	43, 357
Neapol *moggio*	33, 431
Norymberga *morg* = 200 prętom	47, 275
acker = 160 prętom	21, 274
Polska *morg* = 300 pręt. now. miar.	56, 15
dit dit. starey miary	59, 839
Pomeraniia dit. dit. . .	65, 51
Prussy *ob.* Berlin	
Reński *morg* pola = 120 pręt. .	17, 032
dit. lasu = 160 pręt. .	22, 695
iauchart = 60 pręt. .	8, 516
Rossyia *diesiatyna*	145, 698
Saxoniia *ob.* Lipsk	
Szkocyia *acre*	51, 493
Szwecyia *beczka wysiewu* . . .	49, 352
Toskania *saccato* = 10 *staioli* = 660 *pertice*	55, 783
Węgry *ob.* Wiedeń	
Wenecyia *passo* = 25 stóp □ .	0,03018
Wieden *ioch* czyli *iochart* . .	57, 583
Wirtemberg morg = 384 prętom = $\frac{2}{3}$ *iuchart*	31, 518
Zurych *iauchart* pola . . .	32, 404
dit. lasu . . .	36, 004
dit. łąki . . .	28, 804

III. MIARY SZESCIENNE

(DO CIAŁ SUCHYCH I CIEKŁYCH)

których obiętość wyrażona iest w Litrach.

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	DO CIAŁ SUCHYCH.	DO CIAŁ CIEKŁYCH.
	Zawieraią litrów.	
Akwisgran 1 *fass* (beczka) = $\frac{1}{6}$ *malter*	24, 687	
kanne do piwa = $\frac{1}{104}$ beczki		1, 132
dit. do wódki		1, 07
dit. do wina		1, 065
Altona 1 *sak* = 2 szeffel = 4 *fass*	210, 7418	
stübchen = $\frac{1}{32}$ *tonne* (beczki)		3, 6412
Amszterdam *sak* = $\frac{1}{36}$ łasztu	81, 072	
mingel $\frac{1}{180}$ oxeftu		1, 19019
Anszpach i Bayreyt . . . *simra* do twardego ziarna	338, 502	
dit. do owsa	624, 132	
maass $\frac{1}{66}$ *eymer* (wiadra)		1, 3558
Antwerpiia *viertel* $\frac{1}{65}$ łasztu	76, 717	
stoop = $\frac{1}{152}$ both = $\frac{1}{50}$ *ahm*		3, 174
Auszpurg *szaff* = 8 metzen	205, 238	
do wina *maas* $\frac{1}{768}$ *fuder*, $\frac{1}{48}$ *muids*		1, 428
Baden *obacz* Karlsruhe		
Bawarya *schaff* czyli *scheffel* twardego zboża = 6 metzen dit. do owsa = 7 metzen. 1 metze	37, 104	
maass $\frac{1}{60}$ *eimer* = 4 *quartel*		1, 06903
Bazylea . . *müdde* c. *szeffel* = $\frac{1}{8}$ *sack*	16, 127	
do wina: *ohm* = $\frac{1}{3}$ *saum* = 96 dawn. = 120 now. *polt*		129, 016
Berlin 1 *last* = 3 *winspel* (lecz do owsa i ięczmienia tylko 2 wins.) *winspel* = 2 *malter* = 24 *scheffel*. 1 *scheffel* = 16 *metzen*	54, 727	
do wina: *fuder* = 4 *oxhoft* = 6 *ohm* = 12 *eymer* = 24 *anker* = 768 *quart*. 1 *quart*		1, 1703
Bern *maess* = $\frac{1}{12}$ *mütt* = 48 *Immi*	14, 011	
maass czyli *pinte* $\frac{1}{25}$ *eymer*		1, 670
Brunszwik *himt* = $\frac{1}{40}$ *scheffel* = $\frac{1}{10}$ *wispel*	31, 044	
stübchen = 4 *quartier* = $\frac{1}{40}$ ahm		3, 6762
Bruxella iak Antwerpiia		
Chełmno *korzec dawny*	54, 4112	
stof $\frac{1}{100}$ beczki		1, 3885
Florencyia *staja* = $\frac{1}{3}$ *sacco* = 4 *quarti*	23, 684	
do wina: *barillo* = 20 *fiaschi* = 40 *bocali*		41, 656
Francyia daw: miara: *boisseaux* = $\frac{1}{12}$ *setier* = 16 picotins	31, 0126	
pinte = $\frac{1}{72}$ *quartauts* = $\frac{1}{144}$ tierçon		0, 9313
nowa miara *ster* czyli *kilolitr*	1000,	
hectolitr (setier)	100,	
decalitr (boisseaux, velte)	10 iako bois	10, iako velt

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	DO CIAŁ SUCHYCH	DO CIAŁ CIEKŁYCH
	Zawieraia litrów.	
litr (pinte)	1,	
Frankfurt nad Menem: *simmer* = $\frac{1}{4}$ *malter* = 2 metzen	28, 683	
viertel = 80 dawnym a 90 nowym *maass*		143, 4176
Gallicyia Austryacka . . korzec	122, 687	
Gdańsk *szeffel* = $\frac{1}{60}$ *łasztu* = 4 *viertel*	48, 639	
do wina: *oxeft* = 1$\frac{1}{2}$ *antała* (*ohm*) = 6 *ankierów* =		
- 30 *viertel* = 165 *stofom* . 1. *stof*		1, 71
Hamburg *last* = 3 *winspel* = 30 *scheffel*. 1. *scheffel*	105, 37	
do wina: *ankier* = 1 $\frac{1}{4}$ *eymer* = 5 *viertel* =		
10 *stübchen* = 40 *quartier* . 1. *quartier*		0, 90504
Hannower *himt* = $\frac{1}{6}$ *malter* = $\frac{1}{48}$ *winspel* = $\frac{1}{96}$ *last* .	31, 1	
do wina: *quartier* = $\frac{1}{280}$ *oxhoft* = $\frac{1}{64}$ *eymer*		0, 97199
Hiszpaniia *fanega* = $\frac{1}{12}$ *cahiz*	4, 762	
do wina: *cantaro* = 8 *acumbres* = 32 *quartillos*		15, 75
Kassel *szeffel* = $\frac{1}{2}$ *viertel* = 2 *himt*	80, 238	
maass do wina		1, 9542
dit. do piwa		2, 1542
Kopenhaga *tonne* = $\frac{1}{22}$ *last* = 8 *szeffel*	139, 11	
do wina: *kanne* = 2 pott . .		1, 93208
Kraków *korzec*	120, 099	
Litwa *beczka* = 4 *ćwierciom* = 8 *osminom* = 16 *szesna-*		
stkom = 144 gar.	407, 04258	
do napoiu. *czaszka* = 12 garcom . .		33, 9
Londyn: *bushel* = $\frac{1}{2}$ *strikes* = $\frac{1}{4}$ *combs*	35, 725	
do wina: *gallon* = $\frac{1}{18}$ *rundlets* = $\frac{1}{12}$ *tierces*		3, 63008
Lubeka *szeffel* = $\frac{1}{4}$ *tonne* = $\frac{8}{96}$ *last*	33, 403	
do wina: iak Hamburg		
Luxemburg iak Antwerpia.		
Medyiolan *staro* czyli *staio* $\frac{1}{8}$ *moggi* = $\frac{1}{16}$ *rubbi* . .	17, 297	
do wina: *pinte* = $\frac{1}{4}$ *quartari* = $\frac{1}{8}$ *mines*		1, 4877
Moguncyia *simmer* (*virnsel*) = $\frac{1}{4}$ *malter*	27, 347	
do wina *maass* = $\frac{1}{4}$ *viertel* = 4 *schoppen* . .		1, 6947
Munich *metze* = $\frac{1}{6}$ *szeffel* do zboża twardego a $\frac{1}{7}$		
do owsa	37, 104	
do wina: *kanne* = $\frac{1}{60}$ *eymer* = 4 *quartel* . . .		1, 06903
Neapol *tomolo* = $\frac{1}{60}$ *carro* = 24 *maas*	51, 158	
do wina: *caraffa* = $\frac{1}{60}$ *barile*		0, 73395
Norymberga *metze* = $\frac{1}{8}$ *malter* do gładkiego ziarna .	20, 1754	
metze do ostrego ditt .	18, 8318	
do wina: *eymer* = 5 $\frac{2}{3}$ *maass*		73, 6723
Polska garniec daw: = $\frac{1}{32}$ korca daw: = $\frac{1}{72}$ becz: daw:		3, 7689(1)
dit nowy (od pocz: r. 1820) = $\frac{1}{32}$ kor. =		
$\frac{1}{25}$ beczki		4,
Ratysbona: *meess* = $\frac{1}{4}$ *schaff*	26, 245	
do wina: *köpfel* = $\frac{1}{88}$ *eimer*		1, 2894
Rossyia *czetwert* = 2 *osminy* = 4 *poiok* = 8 *czetweri-*		
ków = 64 *garcy*	194, 556	
wedro = 4 *czetweriki* = 8 *osmuszków* 1 *osmu-*		
szek czyli *kruszka*		1, 58692

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	DO CIAŁ SUCHYCH Zawieraią litrów.	DO CIAŁ CIEKŁYCH
Rosztok *scheffel* = $\frac{1}{96}$ *last*	38, 89	-
do ciał ciekłych, iak Hamburg		
Ryga *lof* = $\frac{1}{2}$ beczki = 6 *kulmet*	65, 163	
stof = $\frac{1}{6}$ *viertel*		1, 210029
Rzym *scorzi* = $\frac{1}{22}$ *rubbio*	1, 2147	
do wina: *barilo* = 4 $\frac{1}{2}$ *rubbi* = 32 *bocali* .		45, 514
Stambuł *Kisloz* = $\frac{1}{4}$ *fortin*	35, 1106	
alma		5, 23684
Starlsund podobnie iak w Lubece		
Sycylia *salma generale* = 16 *tomoli*	276, 799	
do wina: *salma* = $\frac{1}{12}$ *tonna* = 8 *quartari* . . .		87, 598
Szwecyia *tonne* = 8 *viertel* = 56 *kanne* = 112 *stoop*	146, 512	
do wina: *oxefi* = 4$\frac{4}{5}$ *ankra* = 72 *kanne*, 1 *kanne*		2, 6184
Węgry iak Wiedeń: używaią iednak następuiących miar		
do wina *eimer* w niższych węgrzech . . .		56, 891
dit. w wyższych		75, 854
antał tokayski		50, 543
Wenecyia *quarta* = $\frac{1}{4}$ *stari* = $\frac{1}{6}$ *sacco*	21, 245	
do wina *quarta* = $\frac{1}{4}$ *bigomia* = $\frac{1}{16}$ *amphora* . .		39, 514
Wiedeń *metze* = $\frac{1}{16}$ *muth*	61, 499	
do wina: *eimer* = 40 *maass*		56, 601
miara do napoiu, *achuring* = 4 *seidel*		1, 415
Wirtemberg *scheffel* = 8 *simri*	177, 227	
hellaichmaass		1; 837047
Wirtzburg do twardego ziarna *metze*	21, 711	
do owsa	33, 527	
eymer = 60 *trübaichmaass* = 72 *hellaichmaass* .	-	75, 41

(1) Podług wyrachowania *Alexandra* Hr. *Chodkiewicza*, ob. Jego *Tablice stosunku dawnych miar i wag francuzkich i koronno-litewsko-polskich i t d. Warsz*: 1811. Podług wyrachowania zaś *Juliusza Colberga* dawny garniec polski zawiera w sobie 3,76 lub 3,7735.... litrów, podług tego iak uważać będziemy, iż miara nowa n.p. kwarta iest do kwarty dawnéy, iak 100 : 94 lub iak 106 : 100. Ob: *Porównanie teraźniéyszych i dawniéyszych miar i wag w Król: Polsk: używanych* przez *Juliusza Colberga* Professora zwyczaynego Jeodezyi w Uniwersytecie Król: Warsz: w Warszawie 1819. kar. 72. Wszakże na karcie 101 zgadza się i ten Autor prawie zupełnie na powyższy stosunek, naznaczaiąc na 1 garniec nowy 201,649 cali sześciennych francuz: a na garniec dawny 190 takichże cali.

IV. MIARY WAG,

KTORYCH CIĘŹKOŚCI WYRAŻONE SĄ W GRAMACH

f. h. znaczy funt handlowy, apt. aptekarski, m. menn: marka menniczna.

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW
Akwisgran f. $=\frac{1}{100}$ cetn $=\frac{1}{3}$ *sziffunt*	468, 96
Altona ob. Hamburg	
Amsterdam 1 *sziffunt* = 3 cent. = 20 *liesfunt* = 37½ *kamieni* =300 f. (*troysgewicht*) . .	492, 0044
f. handl:	493, 9262
f. Apt: = 12 uncyy .	369, 0033
m. menn: do złota i srebr: *troysmark* . . .	246, 0022
Angliia f. królewski z 24 unc:	680, 2806
dit. *avoir du poids* z 16 un:	453, 536
dit. men. i jubilerski *Troy* z 24 *karat* . . .	372, 6
Anszpach i Bayreyt f. . . .	509, 36
z resztą iak w Norymberdze	
Antwerpiia f. $=\frac{1}{8}$ kamienia $=\frac{1}{100}$ cetn:	468, 287
Auszpurg f. ciężki . . .	491, 063
f. lżéyszy . . .	472, 612
m. menn: = 16 łutom .	236, 017
Bamberg f. $=\frac{1}{100}$ cetn. . .	485, 648
Bawarya daw: f. $=\frac{1}{20}$ kamienia $=\frac{1}{110}$ cetn.	571, 4307
nowy f. od 1811 . . .	560,
f. aptekarski . .	360,
m. menn. nieco większa od kolońsk:	233, 951
Berlin daw: f. $\frac{1}{22}$ ciężkiego a $\frac{1}{11}$ lekkiego kamienia $=\frac{1}{100}$ cent.	468, 5358
f. apt:	357, 5668
m. menn: iak kolońska	
karat jubilerski = angielsk:	
od r. zaś 1816 f. $\frac{1}{100}$ cetn.	467, 7187
f. apt.	350, 7835
m. menn:	233,85933
karat jubilerski . . .	0, 205537
Bern f. $=\frac{1}{100}$ cetn . . .	520, 13
f. aptekarski z 12 unc.	356, 658
m. menn: oraz do iedwab: i soli	244, 753

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.
Brunszwik f. $=\frac{1}{114}$ cent. .	470, 891
m. menn: iak kolon.	
Bruxella iak Antwerp.	
Drezno ob Lipsk.	
Florencya f. h. menn: i apt	339, 515
Francyia f. daw. *poids de marc*	489, 2
wagi nowe. *kilogr* = 10 *hectogr* = ...	1000,
Gdańsk daw. f. $=\frac{1}{120}$ cetn. .	435, 421
Genewa f. ciężki	550, 74
f. lżéyszy	458, 95
Hamburg f. $=\frac{1}{112}$ cetn. . .	484, 335
f. =apt. iak w Berl.	
m. menn. iak kolońska	
Hannower f. $\frac{1}{112}$ cetn. . . .	489, 621
dit. apt . . .	365, 0898
do zł. i srebra m. koloń.	
Inflanty ob. Ryga	
Irlandyia funt	544, 774
Koloniia nad renem f. $=\frac{1}{106}$ cet.	467,62256
m. menn. $=\frac{1}{2}$ f. . .	233, 81128
Kopenhaga f. $=\frac{1}{100}$ cetn. .	499, 333
f. apt. iak w Berl.	
marka do złot: i srebra .	234, 967
Kraków funt	405, 036
m. menn.	198, 912
Lipsk f. $=\frac{1}{22}$ kamienia $=\frac{1}{100}$ cetn.	467, 468
m. menn: iak w kołonii.	
Litwa funt $\frac{1}{200}$ cetn. . . .	374, 828
Liworno iak Florencyia . .	
Lubeka podział wag iak w Hamb.	483, 326
m. menn. kolońska	
Madryt *libra* $=\frac{1}{25}$ *arrobas*	460, 888
do zł: i sr: m. kastylska	230, 533
do kleynotów *quilat* (karat)	0, 20573
Medyiolan f. *peso grosso* z 28unc.	762, 971
f. *peso sottile* z 12 unc.	326, 995
marka do zł: i srebra	234, 9901
Moguncyia funt	470, 686

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.
Neapol *rotolo* = $2\frac{7}{9}$ *libra* .	891, 072
do zł: i sr. *libra* . .	320, 775
Neyszatel *poids de fer* . .	520, 132
poids de marc iak Franc:	
Norymberga f. = $\frac{1}{100}$ cetn. .	510, 34
f. apt: . . . ,	382, 918
marka do zł. i srebra	238, 563
Polska f. dawniéyszy zwyczay:	405, 228
dit: aptekarski .	358, 51063
f. now. $\frac{1}{25}$ kamienia $\frac{1}{100}$ cetn	405, 504
m. menn: iak w Kolonii	
Prezburg funt	382, 919
Ratyzbona funt = $\frac{1}{100}$ cetn. .	568, 191
m. do zł: i sre. iak Amszt.	
Rossyia *berkowiec* = 10 pudom	
= 400 f. f. zaś hand: i men:	408, 994
Ryga f. = $\frac{1}{20}$ *liesfunta* . .	418, 076
m. do zł: i sr. = $\frac{1}{2}$ funta	
Rzym *lira* f. handl. i menn.	339, 227
Stambuł *rottel* = $\frac{1}{2}$ *oka* . .	637, 853
cheky do zł: i srebra .	318, 921
Stralsund iak Lubeka	
Sycyliia *rotolo grosso* $\frac{1}{100}$ *cantaro grosso*	873, 342

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.
rotolo sottile $\frac{1}{100}$ *cantaro sottile*	793, 965
do zł. i sr. iak Neapol.	
Szafhauzen funt *ciężki* . .	584, 447
dit *lekki* . .	465, 0201
Szwecyia *schaalfunt* . . .	425, 128
do żelaza *marka* = $\frac{1}{20}$ *markfunt*	340, 084
marka zwana mieyska .	357, 954
dit do zł. i srebra .	210, 642
f apt.	356, 315
Tryiest iak Wiedeń	
Węgry dit.	
Wenecyia f. *peso grosso* . .	477, 506
f. *peso sottile* . .	302, 035
uncyia apt: . . .	250, 83
mar. do zł: i sreb. .	238, 567
Wiedeń f. = $\frac{1}{100}$ cetn . .	560, 012
f. apt:	420, 009
mar. do zł: i sre: .	280, 644
karat jubilerski . .	0, 206085
Wirtemberg iak w Kolonii.	
Wirtzburg f. = $\frac{1}{100}$ cetn. .	477, 1034
Wizmar podział wagi iak w Rosztoku . . . lecz f. .	483, 951

V. MIARY MONET

(ZŁOTEY I SREBRNEY) RZECZYWIŚCIE BITYCH, (1)

których wartość odniesiona iest do wartości czystéy grzywny kolońskiéy iednegoż metalu. (2)

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK Złota.	SREBRA.
Angliia: *gwinea* . .	31, 091	
sztuki podwóyne i połowy podług stosunku (3)		
kronen à 5 szel: szter:		8, 509
szel. szter: à 12 *pence*		42, 55
Brabaneyia: *souverain d'or*	46, 364	
dukat	68, 506	
krontalar . . .		9, 18
Löven po $3\frac{1}{2}$ złotych		8, 25
schiling escalins .		81, 61
złoty po 20 sztüwer		29, 8
sztuki po 5 dit		120, 82
Daniia: *speciesdukaten*	68, 427	
courant dit. . .	85, 714	
christians d'or . .	38, 769	
talary całe . . .		9, 25
sztuka 24 szeling:		45, 333
dit. 16 dit. .		72,
Francyia: *Louis d'or* od 1726 do 1785. .	31, 846	
dit. od r. 1785.	33, 97	
sztuka 20 franków	40, 575	
talar o 6 livrach		8, 344
sztuka 5 franków		10, 387
Genewa sztuka 96 lirów	10, 104	
Cekin	67, 35	
sztuka 8 lirów .		7, 894
Hollandyia *Ruyder* po 14 zł. *kurant* . .	25, 636	
dukat	68, 184	
sztuka 3 złotowa		8, 083
szylling po 6 stüwer		82, 07
stüwer		509, 4
Hisz: *pistole* od r. 1772	38, 215	
piaster od r. 1774		9, 651
Kurlan: *duk.* od r. 1780	65, 184	
albertsthaler . .		9, 6
Medyio. i Mantua: *cekin*	67, 734	
pistol	41, 07	
scudo o 6 lirach .		11, 274
tallaro		14, 139

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK Złota.	Srebra.
lire		67, 64
Modena: *pistol* . .	39, 085	
scudo		9, 465
ducato		17, 79
lire de billon . .		75, 77
Neapol: sztuki po 6 duk:	30, 476	
scudi		10, 273
ducati po 100 *grani*		12, 328
Niemcy: dukaty podług stopy Rzeszy .	67, 944	
dit. dit. hollender:	68, 184	
dit. dit. passierfus	68, 426	
dit. dit. z czyst: zł:	67,	
carolinen . . .	31, 135	
max d'or . . .	46, 703	
Saskie Augustdory, Pruskie Frydrychsdory, Brunszwickie, Hanowerskie, Hessenkasselskie, Hildesheimskie, w Mecklenburg-Strelitz, w Palatynacie Reńskim, sztuki złota . .	38, 621	
talary konwencyine		13, 333
speciesthaler 2 zł. reń:		10,
sztuka $\frac{1}{3}$ talara .		18,
sztuka 4 dobre gro:		80,
dit. 20 graycarów		60,
Polska: duk: od r. 1765	67,	
dit. od r. 1810 .	68, 184	
sztuki 50 złot. od r. 1816. . . .	26,	
dit 25 złotowe	52,	
talary zwane *bite* od r. 1765 do 1787 .		10,
dit. dit. od r. 1787 do 1794 . .		10, 4375
talary po zł: 6 od 1794 do 1795 . . .		$14\frac{1}{12}$,
dit. od r. 1810 .		14,
złotówki od r. 1816		86, 60808

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK Złota.	Srebra.
dwuzłotówki i 5 złotówki podług proporcyi		
Portugaliia: *dobraons*	4, 7307	
dobras	8, 999	
nowe *crusadi* .	237, 037	
crusadi		17, 982
Prus: *tal:* z 24 dob: gro: (obacz Niemcy)		14,
Rossyia: *duk*: po 5 rubli	39, 01	
imperyiały po 10 rubli od 1789 . .	19, 636	
dit. daw: od r. 1755	15, 402	
nowe *dukaty* Pawła I. od r. 1797 .	68, 09	
ruble od r. 1798		13,
sztuki o 10 *kopiiek*		130,
ruble Pawła od r. 1797		9, 216
Rzym: *cekiny* . .	69, 184	
pistole	46, 637	
scudo à 5 lire .		9, 523
testono		31, 745
Sabaudyia i Piemont: *doppie* od r. 1786	28, 275	
dit. dawniéysze	26, 798	
cekiny po 9 lire .	68, 78	
scudi po 6 lire .		7, 333
Sardyniia: *carlini* po 25 lire	16, 242	
scudi po $2\frac{1}{2}$ dit		11, 056
Sycyliia: *oncie* po 3 duk: królewskie . .	60, 675	
oncia po 30 *tari*		4. 1094
scudo po 12 dit		10, 273
Szwaycaryia: sztuka o 32 frankach .	16, 985	
dukat bazelski, berneński i t. d. .	98, 425	
pistol genewski .	45, 291	
dit. neyszatelski .	38, 62	
nowy luidor berneński	33, 97	
sztuka o 4 frankach		8, 639
talar bazelski od r. 1764		11, 85

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK Złota.	Srebra.
dit. . . . 1765		12, 307
dit. genewski o 3 liwrach . . .		10, 386
dit. neyszatelski od r. 1712		9, 831
wiedzieć tu ieszcze trzeba, iż szczególne kantony różne maią gatunki pieniędzy.		
Szwecyia: *dukaty* .	68, 8	
speciesthaler . .		9, 093
dawne Karoliny czyli sztuki 2 markowe		32, 85
Toskania: *ruspono* à 40 *lire*	22, 389	
zecchino czyli *ruspo*	67, 167	
dawne *pistole* od r. 1746 . . ,	38, 095	
testono à 3 *paoli* .		31, 75
lire		62, 93
ducaton		15, 893
Turcyia: *zerimahhud* od r. 1781	109, 675	
dit: od r. 1764 do 1781	95, 425	
dit: dawniéysze .	91, 763	
fonduc	85, 09	
piaster o 40 *para*		38, 4
Wenecia *zecchino* à 22 lire	66, 86	
ducado d'oro à 14 dit.	107, 48	
dawne *pistole* à 38 dit.	38, 713	
ducati à 8 lire .		12, 415
scudo à $12\frac{2}{5}$ dit .		8, 02
taleri à 10 dit .		9, 941
Zjednoczone Stany Ameryki: . . .		
Engle (orzeł) po 10 dolarów . . .	14, 578	
doller czyli *piaster* à 10 *dimes* . .		9, 72
dimes à 10 *cents*		97, 2

(1) Jak są gatunki monet rzeczywiście bitych, tak znayduią się też i monet tylko idealnych czyli umysłowych, t.i. używanych tylko w rachunkach; tak funty szterlingi w Anglii którychą $2\frac{1}{8}$ rachuią na czystą grzywnę kolońską srebra, są monetą umysłową; taką w Niemczech złoty reński, taką u nas iest dukat (zł. 18,) i szeląg trzecia część grosza.

(2) Prawne oznaczenie wagi i czystości kruszcu monety zowie się stopą menniczną. Ta więc oznacza ciężkość szczególnych sztuk, tudzież ilość w nich metalu przedniéyszego i pośledniéyszego który zwykle przymieszywany iest w monecie (no 367). Że zaś większa część europeyskich kraiów stosuie swoie monetę do wagi kolońskiéy; przeto i tu stosowanie się takowe zachowano.

(3) Opuszczać tu będziemy podobną uwagę przy innych monetach, wyiąwszy gdzie stosunek iest odmienny. Wszakże oczywista iest, iż gdy n. p. w Genewie rachuie się 10,104 sztuk złota o 96 lirach na czystą grzywnę kolońską złota, podobnych sztuk o 48 lirach t. i. przez połowę mniéyszych trzeba będzie na tęż grzywnę 20,208. Toż rozumie się względem sztuk podwóynych, i t. d. iakiéy monety, gdzie są używane.

Ob-

Rozwiązania zagadnień w ciągu dzieła podawanych.

Karta 12, nº 32.

I. 1e 3001007. 2e 4000513009043. 3e 5000024000, 0403. 4e 46łok, 734.

II. 1) liczba 1079088219 *oznacza bilion siedemdziesiąt dziewięć milionów ośmdziesiąt ośm tysięcy dwieście dziewiętnaście.*

2) liczba 49703, 00349 wyraża *czterdzieści dziewięć tysięcy siedemset trzy całych, trzysta czterdzieści dziewięć stotysiącznych.*

3) liczba 90056sąż, 738 oznacza *dziewięćdziesiąt tysięcy pięćdziesiąt sześć sążni, siedemset trzydzieści ośm tysiącznych sążnia.*

III. Wyrażenie liczby sto w arytmetyce dwóynéy (1) iest 1100100, w arytmetyce zaś dwunastnéy iest 84 (2).

IV. 1) Liczba 7984 wyrażona w systemacie dwunastnym, waży w dziesiętnym 13492;

2) Wyrażenie liczby 13492 w systemacie dwunastnym, iest 7984.

V. Liczba 497345 która iest napisana podług systematu dwunastnego, wyraża *milion sto dziewięćdziesiąt cztery tysiące pięćset trzydzieści trzy.* (3).

---

(1) W arytmetyce dwóynéy używa się tytko dwóch charakterów: 0, 1.

(2) Widoczna iż w systemacie dwunastnym możnaby używać naszych cyfer dla oznaczenia liczb aż do dziewięciu; lecz byłoby potrzeba umówić się o dwa nowe znaki poiedyncze dla wyrażenia dziesięciu i iedenastu.

(3) Lubo do dalszéy nauki arytmetyki a w szczególności do Algiebry należy okazanie łatwego przeyścia z iednego systematu arytmetycznego do drugiego, kładziemy tu iednak krótką wtéymierze uwagę. Ażeby wysłowić n. p.

Kar. 18 n° 48

I. Ludność cała podanych czterech woiewództw iest 1692124.

II. Odpowiedź iest, 5820 lat.

III. Summa szukana iest 114753, 0354.

IV. Długość promienia ziemskiego podług Lalanda, iest 3685766, 6854 sążni polskich.

Kar. 25 n° 64.

I. Różnica ludności dwóch podanych Woiewództw, iest 269296.

II. Odpowiedź iest, 5692 stóp.

III. Proch wynaleziony przed drukiem na 110 lat. Od wynalezienia zaś 1szego upłynęło lat 49, a od 2go lat 381.

IV. Odpowiedź iest, 563689 mil kwadr.

V. Różnica szukana iest 1) 3206, 765; 2) 8, 252; 3) 55, 172.

---

liczbę 7984 wyrażoną w systemacie dwunastnym, trzeba pomnożyć 8 przez 12; 9 przez 12 razy 12 czyli 144, a 7 przez 12 razy 12×12 czyli 1728; będzie więc
$7 \times 1728 + 9 \times 144 + 8 \times 12 + 4 = 13492$ ważność szukana.

Można także było rozmnożyć 7 przez 12 i dodać następuiące 9, co czyni 93; rozmnożyć znowu 93 przez 12 i dodać 8, co czyni 1124; nakoniec rozmnożywszy 1124 przez 12 i dodawszy 4 znaleźlibyśmy także 13492. Widać tu iż w saméy rzeczy 7 rozmnożone było trzy razy następnie przez 12, 9 dwa razy, a 8 raz tylko.

Sposób ten daie się łatwo odwrócić chcąc wzaiemnie podaną liczbę przenieść w systemat dwunastny. I tak, podzieliwszy liczbę podaną 13492 przez 12, reszta pozostaiąca 4, będzie 1szą cyfrą po prawéy ręce, a iloraz 1124 będzie ważnością następnych cyfer; podzieliwszy znowu 1124 przez 12, reszta powstaiąca 8, będzie 2gą cyfrą, a iloraz 93 ważnością innych cyfer; podzieliwszy go ieszcze przez 12 znaydziemy na 3cią cyfrę 9, a na 4tą iloraz 7 który będąc mniéyszy od 12 kończy działanie. Wyrażenie szukane iest więc 7984.

Kar. 35, n° 81.

I. Gdy ieden czerw. zł. waży złotych 18, więc 5250 czer. zł. ważą 5250 razy więcéy niż $18^{zł}$ to iest, $94500^{zł}$.

II. Odpowiedź: 8760 godzin.

III. Szukam nayprzód ile godzin w roku, rozmnożywszy 24×365 znayduię iż 8760, dodaiąc do tego iloczynu godzin 5 znayduię że w roku astronomicznym iest 8765 godz. 48′ 49″. Obracam teraz godziny na minuty dodaiąc do iloczynu znalezionego 48′; następnie obracam minuty na sekundy dodaiąc 49″; i znayduię iż w roku astronomicznym iest 31556929 sekund, a zatém w 10 takich latach 315569290 sekund.

IV, Cena szukana iest: $4934^{zł},4$.

V. Odpowiedź: 288000 sztuk.

VI. 1) Mnożna pomnożona przez 1000=723287,9; pomnożyć ią więc ieszcze trzeba przez 47, co uczyni 34634531,3. 2) 0,0048 pomnożone przez 0,026 czyni 0,0001248.

Kar. 51, n° 115.

I. Każdy korzec wychodzi tu na złotych 14.

II. Odpowiedź: po $12\frac{15}{45}$ zł.

III. Podane funty obracam tu nayprzód na kamienie, i postrzegam iż ile razy 55668℔ zawieraią 25℔ tyle czynią kamieni; iloraz iest 2226 z resztą 18. Zamieniam teraz 2226^{kam} na cetnary, i widzę iż ile razy 2226^{kam} zawieraią 4^{kam} tyle czynią cetnarów; iloraz iest: 556 z resztą 2; a zatém 55668℔ czynią 556^{cet} 2^{kam} 18℔. Lecz mógłbym tu podane funty i zaraz na cetnary obrócić, podzieliwszy ie przez 100, coby mi dało 556^{cet} z resztą 68℔. Te funty obróciłbym na kamienie podzieliwszy przez 25, coby mi dało 2 kamienie z resztą 18℔.

IV. Odpowiedź: 36 łokci.

V. Odpowiedź: po 1612 ludzi. Pomiiam tu resztę 1029 ludzi z dzielenia pozostałą.

VI. Trzebaby złota 21 251 706 $\frac{16}{18}$ funtów.

VII. Ilorazy szukane są: 1) 0,0046; 2) 0,0542; 3) dopisawszy dwa zera w podzielnéy (n° 111) znayduie się iloraz 78 z resztą 490, a posuwaiąc daléy dzielenie podług n° 113 będę miał iloraz 78,6577...

VIII. Wszystkie dzielniki liczby 360 napisane każdy po razu, są: 1, 2, 3, 7, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360; dzielniki zaś liczby 1080 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 36, 40, 45, 54, 60, 72, 90, 108, 120, 135, 180, 216, 270, 360, 540, 1080.

Kar. 51, n° 116

I. Summa ludności Kalisza, Płocka i Lublina, 25953, którą odiąwszy od ludności Warszawy, zostaie 78393 nadmiar o ile ludność Warszawy iest większa od ludności wspomnionych trzech miast razem wziętéy.

II. Liczba funtów iest 41490 2) liczba stóp iest 509.

III. Dodawszy kwoty we 3 handle włożone i zyski na dwóch handlach zarobione, uczyni razem $42526^{Zł}$; odiąwszy zaś od tey summy stratę na trzecim handlu i wydatek osobny, co czyni razem $580^{Zł}$ zostaie $41946^{Zł}$. maiątek szukany.

IV. $64^{łok}$. sukna po 15zł. kosztowały $960^{Zł}$; $64^{łok}$.—6 czyli $58^{łok}$, po $19^{Zł}$ czynią $1102^{Zł}$; kwota więc zebrana iest większą od wydanéy, tę zatém odiąwszy od tamtéy zostaie $142^{Zł}$. zysku.

V. Gdy człowiek oddycha przez minutę 20 razy, a w godzinie iest 60 minut, przeto rozmnożywszy 20 przez 60 będzie 1200 liczba oddychań w godzinie; a że za każdém odetchnięciem bierze 40 cali sześciennych powietrza, zatém oddychaiąc 1200 razy, weźmie w siebie powietrza 48000 c. sześć. gdy zaś 136ta część powietrza w płuca wciągnionego w nas zostaie, podzieliwszy więc 48000c. sześć: przez 136, będzie iloraz $353\frac{128}{136}$ liczbą cali sześć. pozostałych w płucach (1).

VI. Gdy ludność prowincyi powiększyła się o ósmą część dawniéyszéy swoiéy liczby, więc teraz zawiera dziewięć ósmych części téyże liczby dawniéyszéy. Podzieliwszy zatém 654840 przez 9, wypada na iloraz 72760 przybyłe powiększenie ludności w ostatnich 15 latach, a odiąwszy to powiększenie od teraźniéyszéy ludności, zostaie 582080 liczba ludności przed 15 laty.

VII. Wypada tu nayprzód znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Na to trzeba dodać liczbę korcy uprzedanych iuż we 3ch razach i summę tych korcy która tu iest 681 odiąć od liczby wszystkich korcy które się w śpichrzu znaydowały, reszta 159 iest liczbą korcy na ostatku przedanych. To maiąc, obrachowywam ile zebrano za korce w 4ch razach przedane, i tym końcem mnożę ceny właściwe przez liczbę korcy za każdym razem przedanych, a dodawszy iloczyny w iednę summę znaydę 15506zł. które zebrano za wszystko zboże. 2) Za przybyciem tego warunku gdy się pytaią o zarobek, obrachowawszy iuż iakieśmy widzieli ile zebrano, t. i. : 15506zł. obrachuymy ile wydano t. i. ile kosztowało zboże które się w śpichrzu znaydowało; i dla tego rozmnóżmy cenę 16zł. przez liczbę korcy 840, iloczyn 13440zł. okazuie zł. wydane, odiąwszy ie więc od 15506zł. zebranych, reszta 2066zł. iest zyskiem szukanym.

VIII. Pokażemy tu tylko drogę do rozwiązania, nadmieniaiąc iż rozwiązywanie wszystkich podobnych i zawikłańszych zagadnień powinni uczący się okazywać poprzedniczo w ten sposób:

(1) Obacz Fizykę Bystrzyckiego Tom I. karta 447 w Warsz, 1810 roku.

kupione		*przedane*
kor.		kor
285 × 17zł = pzł		152 × 29zł = pzł.
436 × 26 = p.		328 × 19 = p.
S kor. kupio:	ś.zł.wydanych	s. kor. uprzed: s″zł.zeb:
s		R × 21 = p.
R reszta korcy		s″ zł. zebra: za zbo:
		ś zł. wydan:
		R′ zł czyli zysk,

od czego ieszcze, gdyby były iakie koszta przewozu, i t. d. odięłyby się.

Zastanowiwszy się nad zagadnieniem i obiąwszy wszystkie iego warunki czyli iak zowią *stan zadania*, uważam iż tu nayprzód dla uproszczenia zagadnienia wypada znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Dodaię więc korce kupione w summę którą tu oznaczam przez S, dodaię i korce uprzedane w summę s, i tę summę odeymuię od tamtéy, reszta która oznaczam przez R okazuie mi liczbę korcy które przedano na ostatku. To maiąc, obrachowywam ile wydano za 1sze i 2gie korce kupione, mnożąc ceny właściwe przez liczbę korcy i zbieraiąc iloczyny oznaczone przez p, p, w iednę summę ś która mi okazuie liczbę zł: wydanych za zboże. Obrachowywam teraz podobnie ile zebrano za korce przedane, a odiąwszy ś summę pieniędzy wydanych od s″ summy pieniędzy zebranych znayduie zysk.

IX. Podzieliwszy 5248cet prez 8cet iloraz 656 pokaże liczbę wozów; ta rozmnożona przez 2 pokaże 1312 liczbę koni potrzebnych. Że zaś od każdego konia płacą tu po zł. 3, więc 3zł. wzięte razy 1312. pokażą 3936zł. które tu od wszystkich koni zapłacić trzeba. 2) Za przybyciem tego warunku obrachowawszy, iakieśmy dopiero widzieli, liczbę wozów

656, odeymuię od niéy liczbę wozów zaprzężnych 50. Reszta 606 okazuie mi liczbę wozów do naięcia. Obrachowywam teraz potrzebną do nich liczbę koni która tu będzie 1212, lecz od téy odeymuię 38 liczbę koni które ma ieszcze przewożący. Reszta 1174. okazuie liczbę koni do naięcia. Pozostaie więc tylko obrachować koszt wozów i koni naiąć się maiących mnożąc ceny właściwe przez liczby szczególne tychże wozów i koni; a iloczyny wypadłe dodać w iednę summę która tu będzie 4734zł.

X. Postępuiąc podług wskazanych reguł znaydzie się 1) iż zamierzone umundurowanie kosztowałoby tu 36900zł.

2) za przybyciem tych warunków trzeba od znalezionéy liczby mundurów odiąć 250, a od obrachowanego na resztę mundurów sukna odiąć 360łok znayduiących się w magazynie. Obrachowawszy iuż koszt na potrzebne ieszcze sukno, i na robotę sprawić się maiących mundurów, dodać iloczyny szczególne w iednę summę która tu będzie 23410zł.

Kar. 63, n° 139.

I. Sprowadziwszy dane ułomki do iednakowego mianownika będzie $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4} = \frac{20}{28}$ i $\frac{21}{28}$ z których drugi widocznie iest większy; 2) ułomki $\frac{4}{5}$ i $\frac{13}{25}$ zwracaią się na $\frac{20}{25}$ i $\frac{13}{25}$ z których pierwszy iest widocznie większy; 3) ułomki $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12} = \frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$ z których drugi iest większy.

II Ułomki do spólnego mianownika sprowadzone są: 1) $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{63}{84}$; 2) $\frac{20}{}$, $\frac{18}{}$, $\frac{8}{}$, $\frac{21}{}$, $\frac{22}{24}$.

III. Postępuiąc sposobem zupełnie podobnym iak w sprowadzeniu ułomków do iednakowego mianownika t. i. rozmnożywszy oba wyrazy każdego ułomku przez iloczyn innych liczników będ miał w podaném zagadnieniu $\frac{21}{35}$, $\frac{21}{27}$, $\frac{21}{86}$.

IV. Szukane wyrażenia nayprostsze ułomków są: 1) $\frac{7}{22}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) ułomek $\frac{29}{317}$, nie da się iuż skrócić w wyrażeniu.

V. Ułomek $\frac{6}{7}$# oznacza siódmą część sześciu czerw. zł. (n° 119). Zamieniwszy na talary 6# mnożąc je przez 3, mam $\frac{18}{7}$tal. czyli $2\frac{4}{7}$tal. Zamieniwszy na złote 4tal. mnożąc ie przez 6, mam $\frac{24}{7}$ czyli $3\frac{3}{7}$zł. Zamieniam licznika 3 na grosze i mam $\frac{90}{7}$ czyli $12\frac{6}{7}$gr; więc $\frac{6}{7}$# = 2tal. 3zł. $12\frac{6}{7}$gr.

Kar. 65, n° 144.

I. Summy szukane są 1) $3\frac{11}{20}$; 2) $3\frac{1}{2}$.

II. Wartość szukana iest $1133\frac{323}{396}$zł.

III. Grubszéy liny iest $132\frac{44}{105}$sąż, a cienszéy $44\frac{41}{60}$sąż, razem zaś $177\frac{43}{420}$sąż.

Kar. 66 n° 149.

I. Różnice szukane są: 1) $\frac{1}{72}$; 2) $1\frac{16}{49}$.

II. Uprościwszy ułomki dane, iak tu iednego wyrazy skróciwszy dzieląc przez 4, drugiego przez 9, będzie $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$, a $\frac{441}{1323} = \frac{49}{147}$ co daie się ieszcze skrócić przez 7, bo $\frac{49}{147} = \frac{7}{21}$; trzeba więc wziąć różnicę między $\frac{3}{7}$ i $\frac{7}{21}$ czyli $\frac{9}{21}$ i $\frac{7}{21}$, ta zaś iest $\frac{2}{21}$.

III. Szukana reszta wynosi $6\frac{29}{36}$ łokci.

IV. Różnica pierwsza iest $\frac{3}{44}$, druga $\frac{25}{84}$; różnica tych różnic iest $\frac{53}{231}$.

Kar. 71, n° 156.

I. Łaszt zboża kosztuie tu 24 i $\frac{9}{12}$ czyli $24\frac{3}{4}$

II. $\frac{5}{7}$℔ kosztuie tu $52\frac{1}{7}$zł.

III Siódma część z 77 iest 11, a sześć takich części iest 66.

IV. Szukany iloczyn iest 1) $\frac{2370}{5899}$; 2) $\frac{69}{70} \times \frac{35}{9}$ $= \frac{23 \times 1}{2 \times 3} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$.

V. Ponieważ mnożąc dzielnik przez iloraz znayduie się na iloczyn liczba podzielna (n° 84), więc mnożąc 17 przez $17\frac{2}{3}$ znaydziemy $300\frac{1}{3}$ podzielną szukaną.

VI. Szukany koszt wynosi $808\frac{3}{12}$zł.

VII. Antał wina kosztuie tu $46\frac{4}{5}$#.

VIII. Szukany iloczyn ułomków $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$ czyli $\frac{1}{3}$ (n° 155. 3e).

Kar. 76 n° 168.

I. Każdy zapisał $\frac{2}{20}$ czyli $\frac{1}{10}$ ryzy papieru.

II. Łokieć sukna kosztował tu po 16zł.

III. Rzemieślnik ten zrobi w godzinie $\frac{145}{16}$łok. swoiéy roboty.

IV. Podzieliwszy $3\frac{2}{3}$ przez $8\frac{1}{4}$ znaydziemy $\frac{4}{9}$ które w $3\frac{2}{3}$ zawiera się razy $8\frac{1}{4}$ (n° 96).

V. Sążeń muru kosztuie tu $35\frac{14}{37}$zł.

VI. Jloraz szukany iest, 1) $1\frac{582}{623}$; 2) $\frac{45}{49} : \frac{15}{9} = \frac{45 \times 9}{49 \times 15} = \frac{3 \times 9}{49} = \frac{27}{49}$.

VII. Wypadek szukany iest w obu razach ten sam $\frac{27}{64}$.

VIII. Zgubiwszy czynniki obu wyrazom ułomku spólne 4, 5, 6, 9, podzielę 8 i 14 czynniki licznika przez 2, toż 2 i 10 czynniki mianownika. Wypadły ztąd czynnik 7 w liczniku i takiż w mianowniku zgubię. Podzielę ieszcze przez 3 czynnik licznika 3 i 15 czynnik mianownika, a oba wyrazy ułomku zwróconego do nayprostszego wyrażenia mieć będą czynniki $\frac{4 \times 3}{5 \times 5 \times 11} = \frac{12}{275}$.

IX. $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ iest $\frac{10}{18}$ czyli $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ z 7 iest $\frac{35}{9}$; podzieliwszy $50\frac{1}{2}$ przez $\frac{35}{9}$ znaydzie się liczba szukana $12\frac{69}{70}$.

Kar. 77 n° 169.

I. W 27 znayduie się $\frac{7}{6}$ liczby szukanéy podzieliwszy ie więc przez $\frac{7}{6}$ (n° 160) wypada $23\frac{1}{7}$, iakoż szósta część téy liczby $3\frac{6}{7}$ dodana do $23\frac{1}{7}$ czyni 27.

II. $\frac{3}{4}$ liczby szukanéy czynią 24, a zatém podzieliwszy 24 przez $\frac{3}{4}$ znaydziemy 32.

III. Ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, i $\frac{1}{4}$ dodane razem czynią $\frac{13}{12}$, a zatém w 26 znayduie się $\frac{13}{12}$ liczby szukanéy, podzieliwszy ie więc przez $\frac{13}{12}$ wypada 24 na iloraz. Jakoż liczba ta odpowiada warunkom.

IV. Ułomki dane czynią razem $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ odiąwszy od całości zostaie $\frac{1}{4}$; więc $\frac{1}{4}$ liczby szukanéy $=64$, a zatém cała liczba iest 4 razy większa t. i. 256 co łatwo sprawdzić.

V. Ułomki dane czynią tu razem $\frac{17}{24}$, pozostaie więc do całości $\frac{7}{24}$ które są $=7\frac{1}{2}^{st}$; podzieliwszy więc $7\frac{1}{2}^{st}$ przez $\frac{7}{24}$ wypadnie na iloraz $25\frac{5}{7}^{st.}$ które są długością całego drzewa, co łatwo sprawdzić.

VI. Ułomki dodane czynią tu $2\frac{1}{4}$; zatém $84^{zł.}$ ważą $2\frac{1}{4}$ razy niewiadome pieniądze; podzieliwszy więc 84 przez $2\frac{1}{4}$ wypada iloraz $37\frac{3}{9}$ który iest liczbą zł. szukaną.

VII. Podzieliwszy 12 przez $1\frac{1}{2}$ czyli $\frac{3}{2}$ iloraz 8 iest liczbą mniéyszą, tę rozmnożywszy przez $2\frac{1}{2}$ wypada na iloczyn 20 które iest liczbą większą.

VIII. Gdy 1sza fontanna napełnia wannę w 6 godz., napełni iéy $\frac{1}{6}$ część w godzinie; a ponieważ 2ga fontanna napełnia wannę we 2ch dniach, napełni iéy $\frac{1}{48}$ w godzinie. Znaydzie się podobnie iż iéy napełni $\frac{1}{72}$ w godzinie 3cia fontanna. Więc, razem trzy fontanny napełniaią w godzinie $\frac{1}{6}+\frac{1}{48}+\frac{1}{72}=\frac{24}{144}+\frac{3}{144}+\frac{2}{144}=\frac{29}{144}$ wanny. Ile razy więc $\frac{29}{144}$ wanny zawiera się w całéy wannie, tyle godzin potrzeba do iéy napełnienia. Podzieliwszy zaś 1 przez $\frac{29}{144}$, iloraz iest $\frac{144}{29}=4\frac{28}{29}$. Zatém liczba godzin szukanych iest $4\frac{28}{29}$ czyli $4^{godz.}\ 54'\ 28\frac{28}{29}''$.

IX. Szukam iaka część sadzawki wypływa każdym z osobna kanałem w czasie oznaczonym n. p. w dniu iednym. Wziąwszy więc obiętość sadzawki za

1, podzielę ią przez $3\frac{1}{2}$ czyli $\frac{7}{2}$ dla znalezienia pierwszéy części szukanéy która będzie $\frac{2}{7}$; 2ga będzie $\frac{5}{14}$, a 3cia $\frac{3}{14}$. Dodawszy razem $\frac{4}{14}+\frac{5}{14}+\frac{3}{14}$ iest $\frac{12}{14}$ czyli $\frac{6}{7}$ części sadzawki które trzema kanałami w 1 dniu wypływaią. Podzieliwszy zatém 1 czyli obiętość sadzawki przez $\frac{6}{7}=1\frac{1}{6}$ liczba dni szukana.

X. Podług warunków zagadnienia 1sza pompa wypróżni w godzinie $\frac{1}{36}=\frac{2}{72}$ oznaczonéy ilości wody; 2ga zaś $\frac{1}{24}=\frac{3}{72}$ téyże ilości; lecz w tymże czasie wpływa $\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$ więc ilość wody wypompowanéy w godzinie iest $\frac{2}{72}+\frac{3}{72}-\frac{4}{72}=\frac{1}{72}$. Aże woda znayduiąca się iuż w spodniéy części okrętu wyrażona iest przez $\frac{3}{8}$; więc czas potrzebny do iéy wypróżnienia iest $\frac{3}{8}:\frac{1}{72}=\frac{216}{8}=27$ godzin. A zatém osada okrętu powinna dopilnować pompowania przez 27 godzin. Jakoż gdy w 1 godz. wyciąga się wody $\frac{1}{72}$, w 27 godz. wyciągnie się $\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$.

XI. Podzieliwsyy 5248cet przez 16, iloraz 328 okaże liczbę wozów, ta rozmnożona przez 2 okaże 656 liczbę ludzi potrzebnych. Że zaś przewożący ma swoich wozów zaprzężnych 80, odiąwszy więc 80 od 328, reszta 248 iest liczbą wozów do naięcia. Liczba ta rozmnożona przez 4 okazuie 992 liczbę koni potrzebną, lecz że przewożący ma ieszcze koni 100, odiąwszy więc 100 od 992 zostaie 892 liczba koni do naięcia. Odiąwszy także od 656 liczbę ludzi 200 których iuż ma przewożący, reszta 456 iest liczbą ludzi do naięcia z któych połowa, to iest 228 potrzebna iest do wozów, a druga połówa także 228. do koni. Obrachowawszy iuż koszt na wozy, konie i ludzi naiąć się maiących do wozów i do koni, iloczyny wypadłe 620, 9366, 342 i $407\frac{2}{5}$zł. dodać w summę która tu będzie $10735\frac{2}{5}$zł. Że zaś na przewiezienie to wyznaczone iest 1560tal. czyli 9360zł., nie dostaie więc ieszcze $1375\frac{2}{5}$zł.

XII. Rozmnożywszy 180 liczbę ludzi w każdéy kompanii przez 5 liczbę kompaniy, wypada 900 liczba ludzi do umundurowania. A że każdy 20ty człowiek iest sierżantem, więc podzieliwszy 900 przez 20, iloraz 45 oznaczy liczbę sierżantów, a tém samém i liczbę ich mundurów. Liczbę tę odiąwszy od 900, reszta 855 okaże liczbę żołnierzy prostych, a zatém i liczbę potrzebnych im mundurów. Odiąwszy 25 od 45 a 250 od 855; reszty 20 i 605 okazują liczby mundurów do sprawienia dla sierżantów i dla żołnierzy prostych. Obrachowawszy do tych mundurów potrzebne sukno, płótno, galonki, guziki, nie zapominaiąc odeymować tego co iuż iest w zapasie, pozostanie tylko obrachować koszt na te artykuły i na robotę krawca; iloczyny wypadłe, t. i. $14291\frac{1}{3}$zł za sukno, $2076\frac{21}{40}$zł za płótno, 2662zł za robotę mundurów dla żołnierzy prostych; $596\frac{5}{8}$zł. za sukno, 56zł za płótno, $96\frac{2}{3}$zł. za robotę mundurów i 96zł za galonki dla sierżantów, a $1501\frac{1}{5}$zł za guziki (których tu trzeba 834 tuzinów) dla wszystkich, dodawszy w iednę summę znaydzie się cały koszt $= 21376\frac{7}{20}$zł. Że zaś na umundurowanie to wyznaczone iest 24000zł. więc zostanie ieszcze $2623\frac{13}{20}$zł.

Ostatnie zagadnienia iakożkolwiek zdaią się zawikłane, nie będą iednak bynaymniéy trudne skoro uczący się napisawszy porządnie zagadnienie zrozumią go, i wprzódy wynaydą drogę rozwiązania sposobem podobnym skazanemu w rozwiązaniu zagadnienia VIII. należącego do nº 116.

Kar. 83. n° 175.

I. Ułomek $\frac{531}{1278}$ daie się rozwinąć na ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

a biorąc wyraz iego pierwszy, tož następnie dwa pierwsze, trzy, cztery i pięć, będziemy mieli ważności coraz bližsze $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{27}{65}$, i $\frac{59}{142}$. Ułomek ostatni zupełnie iest równy podanemu, bo ten nie był dany w wyraženiu nayprostszém.

2) Ułomek $\frac{1103}{887}$ iest niewłaściwy, wyciągnąwszy całość, iest 1 i $\frac{216}{887}$. Ten ułomek zamienia się na

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

a biorąc iego wyraz pierwszy, tož następnie dwa pierwsze, trzy, cztery, pięć i sześć, będziemy mieli ważności: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{37}$, $\frac{19}{77}$, $\frac{28}{112}$, $\frac{47}{193}$ i $\frac{216}{887}$; ieželi chcemy dodać całość do každego w szczególności z ułomków, będzie: $\frac{5}{4}$, $\frac{46}{37}$, $\frac{96}{77}$, $\frac{140}{112}$, $\frac{240}{193}$ i $\frac{1103}{887}$.

II. Ułomek oznaczaiący obszerność Europy względem obszerności Azyi iest nayprzód $\frac{171397}{640086}$: rozwinąwszy go podług poprzedzaiących zasad na ułomek ciągły, otrzymamy cztery pierwsze iego ważności na przemian większe i mnieysze: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{15}$, i t. d.

III. Znaydziemy tu podobnąż drogą iak w poprzedzaiącym przykładzie cztery pierwsze ważności $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{38}$, $\frac{4}{51}$, i t. d.

IV. Ułomek szukany iest $\frac{120}{163}$.

Kar. 91. n° 188.

I. $\frac{8}{15} = 0,53333\ldots$; $\frac{13}{21} = 0,619047\ 619\ldots$

II. Ułomek $\frac{85625}{1000000}$ daie się widocznie skrócić, a nayprzód przez 25, będzie $\frac{625}{4000}$, daléy $\frac{25}{160}$, nakoniec $\frac{5}{32}$.

III. $0,565656\ldots$ odpowiada ułomkowi $\frac{56}{99}$, o czém łatwo się przekonać zamieniaiąc ten ułomek na dziesiętne.

IV. $0,19444\ldots$ podług n° 185 daie 1^{od} $19\frac{4}{9}$, potém $\frac{175}{9}$, potém $\frac{175}{900} = \frac{7}{36}$; toż $0,6111\ldots$ daie 1^{od} $6\frac{1}{9}$, potém $\frac{55}{9}$, potém $\frac{55}{90} = \frac{11}{18}$.

V. $\frac{307692}{999999} = \frac{1}{3+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{4}{13}$.

VI. $\frac{789473}{999999} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1+\frac{4}{15}} = \frac{15}{19}$.

Kar. 96 n° 193.

I. Summa długości iest $311^{\text{sąż.}}\ 2^{\text{st.}}\ 10^{\text{c.}}\ 1\frac{2}{3}^{\text{l.}}$

II. Odpowiedź: $280^{\text{grz.}}\ 0^{\text{unc.}}\ 1^{\text{dr.}}\ 57^{\text{gr.}}$

III. Summa szukana iest $8^{\text{d.}}\ 17^{\text{god.}}\ 4'\ 1''$.

IV. Razem iest: 15# $0^{\text{tal.}}\ 4^{\text{Zł.}}\ 6^{\text{gr.}}$

V. Dnia 9 marca 1773 r.

Kar. 99 n° 196.

I. Niedostaie mu 1# $6^{\text{Zł.}}\ 7^{\text{gr.}}$

II. Ma ieszcze zrobić $167^{\text{sąż.}}\ 1^{\text{st.}}\ 8^{\text{c.}}\ 2^{\text{l.}}$

III. Reszta iest 19℔ $12^{\text{unc.}}\ 5^{\text{dr.}}\ 32^{\text{gr.}}$

IV. Różnica szukana iest: $3^{\text{d.}}\ 16^{\text{god.}}\ 51'\ 25''$.

V. Różnica szukana 70^{lat} 3^{mce} $21^{d.}$ $23^{g.}$ $12'$ pokazuie długość życia naysławnieyszego Astronoma Polaka. Napisaliśmy dni 21 nie 20, bo piąty miesiąc w roku may, ma dni 31, więc i t. d.

Kar. 106, n° 202.

I. Podług zadania iest mnożnikiem $0^{sąż.}$ $5^{st.}$ $9^{ca!}$ $10^{l.}$; trzeba więc mnożną wziąć tyle razy ile razy 1 sążeń zawarty iest w $0^{sąż.}$ $5^{st.}$ $9^{c.}$ $10^{l.}$ Uskuteczniaiąc działanie znaydziemy $19^{gr.}$ $7\frac{55}{74}^{den}$.

II. Iloczyn szukany iest $740^{sąż.}$ $0^{st.}$ $7\frac{7}{15}^{c.}$

III. Odpowiedź: $104^{tal.}$ $4^{zł.}$ $24^{gr.}$

IV. $2^{gr.}$ i 6^{de} wzięte 50000 razy czynią $116666\frac{2}{3}^{gr.}$ które zamienione na złote czynią $3888\frac{8}{9}^{zł.}$ potrącenia. Te odiąwszy od $50000^{zł.}$ zostaie $46111\frac{1}{9}^{zł.}$ do wypłacenia. Można tu znaleźć rozwiązanie i w ten sposób: 2 i $\frac{1}{3}$ gr. są $\frac{7}{90}$ złotego, wziąwszy więc $\frac{7}{90}$ z 50000 zł. będzie $3888\frac{8}{9}^{zł.}$ i t. d.

V. Odp. $14768^{zł.}$ $20^{gr.}$ $7\frac{1}{2}^{den}$

Kar. 110 n° 210.

I. Cena łokcia zawiera się tyle razy w $237^{\#}$ $13^{zł.}$ $18\frac{1}{2}^{gr.}$ ile razy $1^{łok.}$ w $57\frac{5}{8}^{łok.}$ trzeba więc podzielić $237^{\#}$ $13^{zł.}$ $18\frac{1}{2}^{gr.}$ przez $\frac{461}{8}^{łok}$ czyli $1902^{\#}$ $0^{zł.}$ $28^{gr.}$ przez 461. Iloraz $4^{\#}$ $2^{zł.}$ $8^{gr.}$ iest ceną łokcia.

II. Tyle trzeba czerw. zł. ile razy $18^{zł.}$ $24^{gr.}$ zawieraią się w 2500^{tal} $4^{zł}$ $18^{gr.}$ Zamieniwszy podzielną i dzielnik na iednakowy gatunek (n° 205) iak tu na ułomek złotych, będzie podzielna $\frac{75023}{5}$zł., dzielnik zaś $\frac{94}{5}$zł. Iloraz wypada 798 i $\frac{11}{94}$. Gdy ułomek ten iest ułomkiem czerwonego zł. który ma $\frac{94}{5}$zł., zamieniwszy go więc na złote będzie $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$zł. Trzeba więc na podaną kwotę 798 czerw. zł. i $2\frac{1}{5}$zł.

III. Potrzeba tyle dni ile razy $28^{sąż}$ $4^{st.}$ i 3^{c} zawieraią się w $8950^{sąż.}$ $3^{st.}$ $6^{c.}$ trzeba więc tę długość podzielić przez tamtę. Postrzegam iż $3^{e\cdot}$ czyli ćwierć stopy iest spólną miarą podzielnego i dzielnika; dosyć więc zwrócić iednego i drugiego do téy miary aby mieć dwie liczby nie wielorakie do podzielenia iednę przez drugą. Pierwsza będzie 214814, a druga 689; iloraz wypadnie $311\frac{535}{689}$ dni, t. i. 311 i $\frac{3}{4}^{d.}$ prawie.

IV. Cena grzywny zawiera się tyle razy w 115^{tal} $3^{zł.}$ $4\frac{5}{16}^{gr.}$ ile $1^{grz.}$ w $7^{grz.}$ $5^{unc.}$ $6^{dra.}$ t. i. zwracaiąc na ułomek, $\frac{494}{64}=\frac{247}{32}$ razy. Pozostaie więc podzielić 115^{tal} $3^{zł.}$ $4\frac{5}{16}^{gr.}$ przez $\frac{247}{32}$ czyli 3696^{tal} $4^{zł.}$ $18^{gr.}$ przez 247. Iloraz $14^{tal.}$ $5^{zł.}$ 24^{gr}, iest ceną grzywny.

V. Podzieliwszy wydaną kwotę całą przez cenę grzywny znaydziemy iż kupiono $7^{grz.}$ $5^{unc.}$ $6^{dr.}$

Kar. 121, n° 232.

I. Żądane kwadraty są: 1) 4401360964; 2) 762548,0976; 3) $\frac{286225}{458329}$.

II. pierwiastki szukane są: 1) 125; 2) 999; 3) 9009.

III. pierwiastki przybliżone są: 1) 1,4142136; 2) 1,7320508; 3) 1359,3969; 4) 0,8451; 5) 8,1187.

IV. Kwadrat liczby danéy iest 16; aże go przewyższać ma kwadrat szukanéy o 48, więc ten iest 64; iego zaś pierwiastkiem iest liczba 8.

V. przez połowę kwadratu liczby danéy t. i. przez 18 podzieliwszy 25992, wypadnie na iloraz 1444 kwadrat liczby szukanéy; pierwiastkiem zaś iego iest 38.

VI. Potęga szesnasta liczby 6, iest 2821109907456 (n° 217).

Kar. 130, n° 247.

I. żądane sześciany są: 1) 1412579812; 2) 51645,087424; 3) $\frac{5927704}{2048383}$.

II. pierwiastki szukane są: 1) 396; 2) 590; 3) 4609.

III. pierwiastki przybliżone są: 1) 1,4422496; 2) 1,5874011; 3) 3,6438; 4) 0,9564; 5) 3,1018.

IV. Sześcian danéy iest 512, a że go przewyższać ma sześcian szukanéy o 1216, ten więc iest 1728 iego zaś pierwiastkiem iest 12.

V. Rozmnożywszy sześcian danéy t. i. 729 przez 4, będzie 2916 połowa sześcianu liczby szukanéy, rozmnożywszy więc przez 2, będzie 4832 sześcian liczby szukanéy. Tę zaś znaydziemy wyciągaiąc $\sqrt[3]{}$ który tu iest 18.

VI. Szukany $\sqrt[16]{}$ iest 5.

Kar. 143 nº 282.

I. Wyraz czwarty w pierwszéy proporcyi rożnicowéy iest $= 8 + 15 - 10 = 23 - 10 = 13$; w drugiéy zaś $x = 3 + 8 - 6 = 11 - 6 = 5$.

II. Wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny w pierwszéy proporcyi iest $= 36 + 36 - 24 = 48$; w drugiéy zaś, $14 + 14 - 22 = 6$.

III Sredni szukany $= \frac{12+6}{2} = 9$, w drugiéy proporcyi $x = \frac{5+17}{2} = 11$.

IV. Wyraz 100tny szukany $= 1 + (3 \times 99) = 298$; w drugim zaś postępie wyraz 25ty $= 82 - (3 \times 24) = 10$.

V. pierwszy stosunek szukany $= \frac{32-4}{7} = \frac{28}{7} = 4$, zatém postęp będzie $\div$ 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32; drugi stosunek szukany iest $\frac{9-45}{9} = \frac{-36}{9} = -4$, postęp więc będzie $\div$ 45 . 41 . 37 . 33 . 29 . 25 . 21 . 17 . 13 . 9.

VI. Summa uderzeń młotka zegarowego = summie wyrazów postępu $\div$ 1 . 2 . 3 . .... 12; summa zaś ta $= 1 + 12 \times \frac{12}{2} = 13 \times 6 = 78$. Summa uderzeń młotka w drugim razie $= 1 + 24 \times \frac{24}{2} = 25 \times 12 = 300$.

VII. Númer 1 może z następuiącemi, 89 amb czyli połączeń dwóch liczb formować, numer 2 połączeń 88, numer 3 połączeń 87 .... i t. d. numer 89 iedno tylko połączenie a numer 90 żadnego. To daie postęp którego pierwszym wyrazem iest 89, ostatnim zaś 1. Summa tego postępu $= 89+1 \times \frac{89}{2} = 90 \times 44\frac{1}{2} = 4005$.

VIII. Młodzieniec nie mógł wygrać zakładu, bo miał $7\frac{29}{40}$ t. i. prawie $7\frac{3}{4}$ mil do przebieżenia w 2ch godzinach. W samey rzeczy, przebiegłby 6 sąż: dla złożenia pierwszego iabłka u spodu pierwszego drzewa, i 6 sąż. aby przyyść wziąć drugie iabłko, co czyni 12 sążni. Aby zanieść drugie iabłko do drugiego drzewa, przebiegłby 9 sąż. i 9 napowrót aby wziąć trzecie iabłko, co czyni 18 sążni. Podobnie rozumuiąc co do trzeciego iabłka, czwartego, i t. d. widzimy iż zadanie zwraca się do znalezienia summy wszystkich wyrazów postępu różnicowego którego pierwszy wyraz iest 12, stosunek 6, a liczba wyrazów 100. Summa zaś ta $= 12+606 \times \frac{100}{2} = 618 \times 50 = 30900$ sąż. $= 7\frac{29}{40}$ mil, rachuiąc po 4000 sąż. na milę, nowych zaś mil polskich uczyniłaby $6\frac{9}{35}$.

IX. Trzeba tu 1od znaleźć summę wyrazów postępu 1 . 3 . 5 ... aż do wyrazu 68go włącznie. Wyraz ten $= 1+(2 \times 59) = 119$. Summa więc wyrazów tego postępu $= 1+119 \times 30 = 3600$; ciało więc spadaiące w 1 minucie przebiega $3600 \times 15 = 54000$ stóp.

X. Odp. 540 stóp.

XI. 1) Idzie tu o znalezienie liczby wyrazów podług no 278; liczba zaś ta $= \frac{41-3}{2}+1 = \frac{38}{2}+1 = 19+1 = 20$.

2) Mylonoby się tu sądząc iż się należy grabarzowi $\frac{2}{5}$ umówionéy nagrody, że i 8 sąż. są $\frac{2}{5}$ głębokości umówionéy: łatwo iest bowiem widzieć iż praca zwiększa się w miarę głębokości kopania. Przypuszcza się z resztą, bo ciężko byłoby oznaczyć dokładnie, iż praca zwiększa się tu w postępie różnicowym głębokości, a zatém i cena podobnie wzrastać powinna. Idzie tu więc o rozdzielenie kwoty $400^{zł}$ na 20 wyrazów któreby były w postępie różnicowym: summa 8^{iu} pierwszych okaże ile się należy grabarzowi za iego robotę. Lecz $400^{zł}$ mogą być rozdzielone wielorakim sposobem na 20 wyrazów różnicowo proporcyionalnych, podług oznaczenia pierwszego wyrazu (1): przypuściwszy n. p. iż na pierwszy wyraz iest $1^{zł}$, otrzymalibyśmy postęp $\div 1 . 3 . 5 . 7$ i t. d. którego ostatni wyraz byłby 39; co dałoby na ośm pierwszych wyrazów summę $64^{zł}$. przypuściwszy zaś iż pierwszym wyrazem iest $10\frac{1}{2}$, ciąg wyrazów byłby $\div 10\frac{1}{2} . 11\frac{1}{2} . 12\frac{1}{2} \ldots$ i t. d. coby dało na ośm pierwszych wyrazów summę $116^{zł}$. Ażeby więc naznaczyć sprawiedliwie co się tu należy grabarzowi, trzeba zacząć od oznaczenia sprawiedliwéy ceny 1^{szego} sążnia roboty i wziąć tę cenę za 1^{szy} wyraz postępu. Przypuszczam iż cena ta iest zł. 5; natenczas postęp szukany będzie $\div 5 . 6\frac{11}{19} . 8\frac{1}{19} . 9\frac{14}{19}$. i t. d. którego różnica stała iest $\frac{30}{19}$, a ostatni wyraz 35. Osmy wyraz tego postępu $= 5 + \frac{30}{19} \times 7 = 16\frac{1}{19}$; summa zaś pierwszych 8^{iu} wyrazów $= (5 + 16\frac{1}{19}) \times 4 = 21\frac{1}{19} \times 4 = 84\frac{4}{19}$ będzie summą złotych przypadaiącą grabarzowi za część dokonanéy przezeń roboty.

---

(1) Znaiąc bowiem liczbę wyrazów, ich summę, ieżeli przypuściemy wyraz pierwszy, znaydziemy podług n° 280 wyraz ostatni a ten maiąc łatwo iuż znaleźć stosunek postępu. Możnaby także przypuścić podług upodobania stosunek a natenczas znaleźlibyśmy wyraz pierwszy (n° 281).

Podobnież należałoby postąpić gdyby n. p. wieża rozebrana być miała tak, ażeby kamień lub cegła ile można w całości była zdeymowana i na dół znoszona. Rozebranie bowiem wyższych części wieży kosztowałoby więcéy pracy niż rozebranie niższych. Jeżeli więc zrobiono umowę na rozebranie całéy wieży; za rozebraniem n. p. 3iéy części nie byłoby dosyć zapłacić tylko 3ią część umówionéy summy, lecz zdaie się sprawiedliwiéy aby za każdą n. p. stopę zaczynaiąc wysokość od dołu rachować coraz więcéy w stosunku różnicowym. Ob. *Abr. Kästners Rechenkunst* 2er *Band Göttingen* 1801 kar. 48.

XII. 1) Idzie tu o znalezienie ostatniego wyrazu (nº 271), a następnie summy wyrazów (nº 275); ostatni wyraz $=100+(10\times11)=100+110=210$. Summa zaś wyrazów $=\frac{100+210}{2}\times12=1860^{tal}$.

2) Wyraz pierwszy znaydziemy podług nº 279: który $=210-(10\times11)=100$; summa zaś iak wyżéy.

3) przewyżka czyli stosunek szukany podług nº 277 iest, $\frac{210-100}{11}=10$; summa zaś iak w.

4) Szukana liczba wyrazów podług nº 278 $=\frac{210-100}{10}+1=12$; summa zaś iak w.

5) Liczba wyrazów podług nº $276=\frac{1860}{155}=12$; stosunek zaś podług nº 277 iest $=\frac{210-100}{11}=10$.

6) Wyraz ostatni podług nº 280 iest $=\frac{2860}{6}-100=210$; stosunek zaś iak w.

7) Wyraz 1szy podług nº 280. iest $=\frac{1860}{6}-210=100$; stosunek zaś iak w.

7) trzeba tu nayprzód znaleźć wyraz pierwszy podług nº 281 t. i. podzieliwszy 1860 przez 6, iloraz 310 będzie summą skraynych; $310-(10\times11)=200$ podwóynemu pierwszemu, zatém pierwszy wyraz iest 100. Wyraz ostatni iako też i summę łatwo iuż znaleźć.

Kar. 156, n° 302.

I. Wyraz czwarty w proporcyi $4:12=6:x$, czyli $1:3=6:x, =\frac{3\times6}{1}=18$; w drugiéy zaś $1:3=x:24$, $x=\frac{24\times1}{3}=8$.

II. Wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny w pierwszéy proporcyi iest $=\frac{10\times10}{4}=25$; w drugiéy zaś, $\frac{12\times12}{48}=3$.

III. Wyraz średni szukany iest $=\sqrt{64}=8$; w 2éy zaś proporcyi $=\sqrt{144}=12$.

IV. Wyraz 33ci szukany $=3\times2^{32}=3\times4294967296=12\,884\,901\,888$; wyraz 8my w postępie 2gim $=15309\times(\frac{1}{3})^7=15309\times\frac{1}{2187}=\frac{15309}{2187}=7$.

V. Idzie tu o znaleźięnie ostatniego t. i. 10go wyrazu. Wyraz ten $=3\times2^9=3\times512=1536$.

VI. 1) Podzieliwszy 2916 przez 4 wypada iloraz 729, z tego wyciągniony $\sqrt[6]{}=3$; postęp więc iest $\div 4:12:36:108:324:972:2916$. 2) Podzieliwszy 3 przez 768 iloraz iest $\frac{3}{768}$ czyli $\frac{1}{256}$, z tego $\sqrt[8]{}=\frac{1}{2}$ iest stosunkiem postępu, ten więc iest $\div 768:384:192:96:48:24:12:6:3$.

VII. Idzie tu o znalezienie summy postępu ilorazowego o 32 wyrazach (n° 301) z których pierwszy iest 1, a stosunek 2. Jest zaś 32gi wyraz $=1\times2^{31}$ czyli 2^{31}, który trzeba rozmnożyć ieszcze przez stosunek, a zatem wziąć 2^{32} co czyni 4 294 967 296. Odeymuię od tego iloczynu pierwszy wyraz 1, zostaie mi 4 294 967 295, co trzeba podzielić przez $2-1$, to iest przez 1 zostanie więc taż sama liczba; i cena konia iest 4 294 967 295 szl. czyli 7 953 643zł. 4gr. 2szl.

VIII. Postęp w tym razie iest $\div 20:400:8000\ldots$ wyraz 10ty $=20\times(20)^9$. Summa zaś wyrazów $=\frac{20\times(20)^{10}-20}{20-1}=538\,947.368\,420$. i ta iest szukana liczba ziarn które, ieżeli 1 korzec będzie ich brał w siebie 4000000, uczynią korcy 134736 i jeszcze nieco więcéy.

IX. Liczba ziarn zboża = summie wyrazów postępu ilorazowego którego pierwszym wyrazem iest 1, stosunek 2 a liczba wyrazów 64. Jest zaś 64ty wyraz tego postępu $=(2)^{63}$; więc summa wszystkich iego wyrazów

$$\frac{2^{64}-1}{2-1} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Przypuściwszy iż korzec bierze w siebie tych ziarn 5000000, byłoby korcy 3 689 358 814 741. Przypuśćmy ieszcze iż łan pola wydaie 400 korcy, tedy na wydanie powyższych korcy trzebaby 9 223 397 036 łanów.

Wyrachowano iż na wydanie tey ilości zboża w roku iednym, trzebaby pola równego powierzchni kuli 8 razy większéy niż powierzchnia naszéy ziemi obeymuiąc to wszystko co zaymuią wody, morza, lasy, i t. d. (1). Widoczna iest także iż summa pieniężna za toż zboże rachowane choćby podług naypomierniéyszéy ceny przechodziłaby wszystkie skarby swiata.

X. Szukany iloczyn wyrazów $= (2\times 4374)^{8}$ z czego trzeba ieszcze wyciągnąć pierwiastek kwadrątowy (n° 300); lecz że tu iest stopień potęgi parzystéy, oszczędzi się pracy wynosząc tylko iloczyn oznaczony t. i. 8748 do potęgi $\frac{8}{2}=4$. Potęga 4ta liczby 8748 iest 5 856 305 815 462 016 szukanym iloczynem wyrazów.

Kar. 165, n° 313.

I. Za mniéy pieniędzy mniéy będzie towaru, stosunki są proste, wypada więc proporcyia

(1) Obacz: Leçons élémentaires d'Arithmétique par *Mauduit*. Paris 1804.

$68\frac{5}{8}\# : 45\frac{3}{4}\# = 40\frac{1}{2}^{cetn.} : x^{cetn.}$

czyli $\frac{549}{8} : \frac{183}{4} = \frac{81}{2} : x$, pomnożywszy pierwszy wyraz przez 8, a dwa inne przez czynniki liczby 8, będzie $549 : 183 = 81 : x$. podzieliwszy wyraz pierwszy i trzeci przez 9 będzie

$$61 : 183 = 9 : x$$

czyli $1 : 3 = 9 : x = \frac{9 \times 3}{1} = 27^{cetn}$.

II. Im więcéy ma zrobić tém więcéy potrzebuie czasu, stosunki są proste, i iest:

łok. łok. d. d.

$$21,9 : 42,75 = 9 : x$$

czyli $2190 : 4275 = 9 : x$, skracaiąc i uskuteczniaiąc znaydziemy $x = 11,71$ dni.

III. Jm mniéy chce łożyć czasu na drogę, tém po więcéy mil musi uieżdżać, stosunki są odwrotne, a że wyraz czwarty ma być większy trzeba więc ułożyć proporcyią $12 : 20 = \frac{15}{2} : x^{mil}$

czyli $3 : 5 = \frac{15}{2} : x$

czyli $6 : 5 = 15 : x$, które znaydziemy $= 12\frac{1}{2}^{mil}$.

IV. Podobnie iak wyżéy postępuiąc znaydziemy iż rachowano tu czerw. zł. po $19\frac{11}{25}$zł. czyli 19zł. $13\frac{1}{5}$gr.

V. Każde 9 snopków zawiezionych do stodoły były 10kiem przed oddaniem dziesięciny; ułożywszy więc proporcyią $9 : 10 = 702 : x$, znaydziemy $x = 780$ liczbie wszystkich snopków, a zatém dziesięcina wynosiła $780 - 702 = 78$ snopków.

VI. Trzeba zwrócić utrzymywanie tych oddziałów woyska do iednakowego czasu, iak tu np. do miesiąca. Mówię zatém: utrzymywać 1000 żołn. przez 3 mce, iest toż samo co przez miesiąc 3 razy więcéy czyli 3000. Utrzymywać 500 żołn. przez 4 mce, iest toż samo co przez ieden miesiąc 4 razy więcéy czyli 2000. Miasto więc obowiązane było tyle ponieść iak gdyby 5000 woyska przez miesiąc utrzymywało. Że zaś rzeczywiście ma teraz utrzymywać tylko 1500 ludzi, więc iasna iest iż to przez dłuższy czas być musi. Ułożemy zatém proporcyią $1500 : 5000 = 1^{\text{mc}} : x^{\text{mcy}}$ odpowiedź iest $3\frac{1}{3}^{\text{mcy}}$.

VII. Za więcéy sążni trzeba więcéy zapłacić. Zamieniwszy liczby wielorakie na ułomki, będzie

$$23\tfrac{8}{9}^{\text{sąż}} : 77\tfrac{4}{9}^{\text{sąż}} = 44\tfrac{16}{45}^{\text{zł.}} : x^{\text{zł.}}$$

czyli $215 : 697 = \frac{1996}{45} : x$; uskuteczniaiąc działanie znayduie się $x = 143^{\text{zł.}}\ 23^{\text{gr.}}\ 15\frac{9}{215}^{\text{d}}$.

VIII. Im bliżéy ma przewieźć umówiony towar tém więcéy go przewieźć powinien, będzie więc $22 : 28 = 50^{\text{cet.}} : x^{\text{cet.}} = 63\frac{7}{11}$; a zatém $13\frac{7}{11}^{\text{cetn.}}$ więcéy od umowionéy ilości.

IX. Ażeby sobie ułatwić poznanie zachodzących stosunków piszę zagadnienie tak:

ludzi	lok	zł	dni
8 ···	3 ···	1500 ·····	40
12 ···	4 ····	x ·····	45

układam potém stosunki iak następnie:

$$\left.\begin{array}{r} 8 : 12 \text{ czyli } 2 : 3 \\ 3 : 4 \\ 40 : 45 \text{ czyli } 8 : 9 \end{array}\right\} = 1500^{\text{zł.}} : x^{\text{zł.}}$$

zatém (nº 307) $4 : 9 = 1500 : x$, które znayduiemy $= 3375^{\text{zł.}}$

X. Postępuiąc podobnie iak w zagadnieniu poprzedzaiącém znaydziemy iż potrzeba 160 robotników.

XI. Odpowiedź $437\frac{1}{2}^{\text{tal}}$.

XII. Napisawszy zagadnienie w ten sposób:

robot.	dni	god.	sąż. dł.	ł. szer.	ł. głę.	tal. zł. gr.	tal.
20 ····	18 ·····	9 ····	360 ·····	$4\frac{2}{3}$ ····	$3\frac{3}{4}$	190 4 24	$= 190\frac{4}{5}$
54 ····	60 ····	10 ····	x ·····	$7\frac{1}{2}$ ···	$2\frac{2}{5}$		

piszę nayprzód stosunek w który wchodzi pytanie, to iest $360 : x$; układam dane stosunki z lewéy strony, maiąc wzgląd czy wpływaią na wyraz ostatni w sposobie prostym lub odwrotnym:

$$\left.\begin{array}{rcl} 20 & : & 54 \\ 18 & : & 60 \\ 9 & : & 10 \\ \frac{15}{2} & : & \frac{14}{3} \\ \frac{12}{5} & : & \frac{15}{4} \end{array}\right\} = 360^{\text{sąż}} : x^{\text{sąż}}$$

gubiąc potém spólne czynniki i skracaiąc podług prawideł, znayduię na czwarty wyraz $3500^{\text{sąż}}$. Chcąc zaś wiedzieć ile zarobią ci robotnicy, dosyć iest uważać stosunek wielkości roboty, lub stosunek liczby robotników i łożonego czasu. W pierwszym razie byłyby stosunki iak pod lit. a), w drugim iak pod lit. b), wypadek iest zawsze iednakowy 1908^{tal}.

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{rcl} 360 & : & 3500 \\ \frac{14}{3} & : & \frac{15}{2} \\ \frac{15}{4} & : & \frac{12}{5} \end{array}\right\} = \overset{\text{tal.}}{\frac{954}{5}} : \overset{\text{tal.}}{x} \qquad \text{b)}\ \left.\begin{array}{rcl} 20 & : & 54 \\ 18 & : & 60 \\ 9 & : & 10 \end{array}\right\} = \overset{\text{tal.}}{\frac{954}{5}} : \overset{\text{tal.}}{x}$$

XIII. Zagadnienie to należy do gatunku zagadnień o których mówiliśmy pod n° 312. 100℔ ołowiu ieden przy drugim uważane lub i razem w iedney bryle złączone, nie mogą 100 razy prędzey upaść niż 1℔ równie iak 100 żołn. razem idących nie mogą zayść 100 razy daley niż 1 żołn. Droga więc od 100℔ przebieżona w 1″ iest ta sama którą 1℔ w tymże czasie przebiega. A ieżeli 100 funtowa bryła ołowiu pospolicie nieco prędzey spaść może, tedy to zawisło od okoliczności których ocenienie szczególniey do fizyki należy.

XIV. Jeżeli ieden koń zaprzągnięty do wozu ciągnie 10 cetn. a inne także poiedynczo zaprzągnięte być maią do wozów; tedy iasna iest, że 12 koni 12 razy więcey ciężaru uciągną niż 1 koń. Lecz ieżeli 12 koni maią być zaprzągnięte do 1 wozu, rzecz się ma wcale inaczéy, ani można wnosić że 120 cetn. uciągną. Przypuściwszy nawet że się wóź nie złamie, co iednak bardzo iest podobna, tedy iuż tak wielki ciężar tłoczyć będzie wóz tak mocno w ziemię że z tego samego względu więcéy niż 12 razy cięższy się stanie do uciągnięcia, inne okoliczności pomiiaiąc.

Kar. 176. nº 325.

I. Napisawszy nayprzód stosunek głównéy wiadoméy z główną niewiadomą, iak w zagadnieniu ni-
ł. berl ł. pol.
nieyszém 50 : x, następnie wiadome stosunki układam podług reguły po lewéy stronie, iako to:

$$\left.\begin{array}{r} 113 : \cancel{128} \\ \cancel{64} : 79 \end{array}\right\} = \begin{array}{c} \text{ł. berl.} \quad \text{ł. pol.} \\ 50 \; : \; x \end{array}$$

skracaiąc będzie $904 : 1185 = 50 : x$ które znaydzie się równe $63\frac{149}{452}$ ł. pol.

II. Odpowiedź: 58 frydrychsdorów równaią się tu $98\frac{74}{75}$# w złocie.

III. Ułożywszy stosunki i po skróceniu uskuteczniwszy znaydzie się iż 128 łokci pol. uczynią łokci bawarsk. 88, 9.

IV. Znaydziemy podobnie iż 1222 tal. hollend: uczynią srebrnych rubli rossyyskich 1629, 9..

V. Wiedząc z tablic metrologicznych że 1 ℔ hamburski ma 484,335 gramów iakich 468,535 rachuie się na 1 ℔ berliński, znaydę odpowiedź
zł.
27,565 prawie.

VI. Stosunki ułożone będą tu następuiące:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{bela} & & \text{ryz} \\ 1 & : & 10 \\ \text{ryza} & & \text{liber} \\ 1 & : & 20 \\ \text{libra} & & \text{ark.} \\ 1 & : & 24 \\ \text{ark.} & & \text{szl.} \\ 1 & : & 2 \\ \text{szl.} & & \text{gr.} \\ 3 & : & 1 \\ \text{gr.} & & \text{zł.} \\ 30 & : & 1 \\ \text{zł.} & & \text{tal} \\ 6 & : & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{bela} & & \text{tal.} \\ 1 & : & x \end{array}$$

skróciwszy wypadnie $9 : 160 = 1 : x$, $x = 17\frac{7}{9}^{\text{tal}}$.

VII. Za 3^{gr} dostanie się $\frac{1}{3}$ łuta.

VIII. Znaiąc z tablic metrologicznych stosunek ankra gdańskiego do garca Warszawskiego czyli raczéy pośrednie między niemi stosunki, układam ie tak:

$$\left.\begin{array}{rcccc} & & \text{gar.} & & \text{litr.} \\ & & 1 & : & 4 \\ & & & & \text{stof} \\ 1{,}71 : 1 & \text{czyli} & 171 & : & 100 \\ & & & & \text{ankr} \\ 27\frac{1}{2} : 1 & \text{czyli} & 55 & : & 2 \\ & & 1 & : & 18^{\text{tal}} \\ & & 1 & : & 6^{\text{zł.}} \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{gar.pol} & & \text{zł. p.} \\ 1 & : & x \end{array}$$

uskuteczniwszy znaydziemy $x = 9{,}186^{\text{zł.}}$

IX. Uważam tu iż $100^{\text{łok}}$. kupionych, uczynią tylko 98 przedanych, lecz za to za $120^{\text{zł.}}$ maiących się zebrać, teraz się wydaie tylko 100. Układam więc stosunki:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{ł.} & & \\ 100 & : & 98 \\ 1 & : & 12 \\ 120 & : & 100 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{ł.} & & \text{zł.} \\ 650 & : & x \end{array}$$

skróciwszy i uskuteczniwszy znaydę $x = 6370^{\text{zł.}}$

X. Zachodzą tu podobne względy iak w poprzedzaiacém zagadnieniu, postąpi się więc podobnież w ułożeniu stosunków wyrażaiąc zł. 1 gr. 12 ułomkiem dla skrócenia, i tak $1^{\text{zł.}}\ 12^{\text{gr.}} = 1\frac{2}{5}^{\text{zł.}}$ czyli $\frac{7}{5}^{\text{zł.}}$

Odpowiedź zaś żądana znaydzie się $392\frac{1}{2}^{\text{zł}}$.

XI. Ułożywszy stosunki iak następuie:

$$\begin{array}{rcl|ccc} 53 & : & 54 & & & \\ 100 & : & 98 & \text{ł.pol:} & & \text{zł.} \\ 180 & : & 75 & 1 & : & x \\ 1 & . & 20 & & & \\ 115 & : & 100 & & & \end{array}$$

znaydziemy skróciwszy i uskuteczniwszy że $x = 3^{\text{zł}}\ 15^{\text{gr}}\ 2\frac{377}{2219}^{\text{szl}}$.

XII. Znaydziemy na odpowiedź $848^{\text{tal}}.\ 2\frac{10}{64}^{\text{zł}}$.

XIII. Gdy mury do portów prowadzące były po dwóch stronach, zatém długość muru do portu Falereyskiego wzięta poiedynczo, była stadiów 70, a do portu Pireyskiego 80, do których przydawszy długość muru poiedynczego 60 stadiów, będzie wszystkiéy długości murów wziętych poiedynczo 210 stadiów; ułożywszy stosunki iak następuie:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{stad.} & & \text{krok.} \\ 1 & : & 125 \\ \text{krok} & & \text{mil.} \\ 6000 & : & 1 \end{array}\right\} = \begin{array}{ccc} \text{stad.} & & \text{mil} \\ 210 & : & x \end{array}$$

po skróceniu i uskutecznieniu wypadnie $x = 4\frac{3}{8}$ mil.

XIV. Wiedząc z tablic metrologicznych że $\frac{1}{6}$ sąż. parysk: ma 324,7 milimetrów których rachuie się

288 na 1 stopę polską, znaydę odpowiedź, 21761,66.

Kar. 185 n° 340.

I. Procent o który się pytaią iest 1250zł.

II. Kapitał szukany, iest 25000zł.

III. Od sta brano po 5zł.

IV. Kapitał o który się tu pytaią iest 25000zł, a procent roczny 1250zł.

V. 1) Ponieważ zarobiono 1500zł. ułożę więc proporcyią, 4500 : 1500=100 : x, które=25.
2) podobnie znaydę iż stracono na $\frac{0}{0}$ 25zł.

VI. Jeżeli za wexel na 100zł. trzeba zapłacić 102zł. więc na 2000zł. zapłacę w tymże stosunku więcéy, ułożę więc proporcyią

100 : 102=2000 : x, które będzie 2040zł.

Szukaiąc samego procentu dla Bankiera ułożyłbym

100 : 2=2000 : x, które=40zł.

VII. Trzeba tu 9 miesięcy i 18 dni zwrócić na ułomek lat: 9 mcy=$\frac{3}{4}$ roku, a 18 dni=$\frac{3}{5}$ mca (1); że zaś miesiąc iest $\frac{1}{12}$ roku, więc $\frac{3}{5}$ mca są $\frac{3}{60}$ czyli $\frac{1}{20}$ roku; $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{20}=\frac{15}{20}$ i $\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ roku. Zatém 6lat 9mcy i 18dni=$6\frac{4}{5}$ lat. To maiąc, łatwo za pomocą reguły trzech składanéy wyrachuię żądany procent, będzie bowiem proporcyia.

$$\left.\begin{array}{l} 100 : 36000 \\ 1 : \frac{34}{5} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{pr.} \quad \text{pr.} \\ =7 : x \end{array}$$

skracaiąc i uskuteczniaiąc znaydziemy odpowiedź 17136zł.

VIII. Podobnież szukany kapitał iest 36000zł.

IX. Brano tu po $7\frac{0}{0}$.

X. Zamieniwszy tu podobnie 6lat 9mcy i 18dni na $6\frac{4}{5}$ lat, trzeba wziąć na pierwszy wyraz propor-

(1) Powszechnie rachuią w podobnych razach 30 dni na każdy miesiąc.

cyi, podług (nº 329), kapitał z procentem $7\frac{0}{0}$ tyloletnim iak iest w zadaniu. Będzie więc proporcyia:

$$\begin{array}{lcl} \text{k. z pr.} & \text{k. z pr.} & \text{k.} \quad \text{k.} \\ 147\frac{3}{5} & : 53136 = & 100 : x^{\text{zł.}} \\ \text{czyli } \frac{738}{5} & : 53136 = & 100 : x \\ \text{czyli } 738 & : 53136 = & 500 : x \\ \text{czyli } 41 & : 2952 = & 500 : x, \end{array}$$

uskuteczniaiąc znaydziemy $x = 36000^{\text{zł.}}$ te odiąwszy od 53136, lub przez proporcyią

$$147\frac{3}{5} : 53136 = 7^{\text{pr.}} : x^{\text{pr.}},$$

znaydziemy procent $17136^{\text{zł.}}$

XI. I m więcéy ma przynieść iaki kapitał tém dłużéy musi być na procencie, lecz im większy iest kapitał tém krócey będzie dła przyniesienia pewnego procentu, ułożemy tu więc stosunki:

$$\left.\begin{array}{rcl} 7 & : & \cancel{17136} \\ \cancel{36000} & : & \cancel{100} \end{array}\right| = \begin{array}{c} \text{rok} \quad \text{lat} \\ 1 : x \end{array}$$

skróciwszy i uskuteczniwszy znaydziemy $x = 6^{\text{lat}}\ 9^{\text{mcy}}\ 18^{\text{dni}}$

XII. Szukany 1) procent iest $14662\frac{1}{2}$zł;

2) kapitał iest $27000^{\text{zł}}$;

3) czas, iest 10 lat i 5 mcy.

XIII. Gdy kapitał pierwiastkowy wynosi $2460^{\text{zł}}$ po 5 mcach, a 2592zł po 16 mcach, więc zwiększył się o 132zł w 11 mcach, a zatém o $\frac{132}{11}$ czyli $12^{\text{zł.}}$ w iednym mcu, a o $60^{\text{zł.}}$ w 5 mcach; lecz że po tém zwiększeniu wynosi 2460zł; kapitał więc pierwiastkowy iest $2400^{\text{zł.}}$ skoro zaś wiem procent miesięczny, łatwo iuż wiedzieć procent roczny, a wiedząc ten od całego kapitału, znaydę i od sta który tu będzie 6.

XIV. Szukany 1) czas, iest 3 miesiące;

2) kwota, iest $1166\frac{2}{3}$#.

XV. Szukany 1) czas, iest $10\frac{3}{4}$ miesięcy; 2) kwota zaś 700^{tal}.

XVI. Szukany 1) czas, iest 4 miesiące; 2) kwota, iest 900^{tal}.

XVII. Gdy osoba A wytrzymała iuż przez 3 miesiące całą kwotę, ma ią ieszcze trzymać przez 5 miesięcy, lecz wypłaciwszy 900^{tal}. pozostaie iéy tylko 1500^{tal}. Zagadnienie to więc zwraca się na następuiące: maiąc 2400^{tal} używać 5 miesięcy, iak długo wypada używać 1500^{tal}; odpowiedź iest 8 miesięcy.

XVIII. Gdy procent iest 5% czyli $\frac{1}{20}$, więc od $1^{zł.}$ iest na końcu roku $\frac{1}{20}^{zł.}$, azatém $1^{zł.}$ waży po roku wraz z procentem $\frac{21}{20}^{zł.}$ czyli $1^{zł.} \times \frac{21}{20}$, a po 5 latach ważyć będzie $1^{zł.} \times (\frac{21}{20})^5$ czyli $1^{zł.} \times \frac{4084101}{3200000}$ (n° 335); 100000zł. ważyć zaś będą 100000 razy więcéy, czyli $\frac{40841\ 100000}{3200000} = \frac{4084101}{32}^{zł.}$ Uskuteczniwszy dzielenie znaydziemy $127628\frac{5}{32}^{zł.}$; i ta iest szukana ważność kapitału na końcu 5^{go} r. wraz z procentem składanym. Odiąwszy od znalezionéy summy pierwiastkowy kapitał 100000, znaydziemy $27628\frac{5}{32}^{zł.}$ zwiększenie iego w 5 latach z przyczyny samego procentu składanego, który gdyby był prostym uczyniłby tylko $25000^{zł.}$ (n° 327).

XIX. Podzieliwszy $127628\frac{5}{32}^{zł.}$ przez ważnośc $1^{zł.}$ po 5 latach która iest $(\frac{21}{20})^5$ czyli $\frac{4084101}{3200000}$. (n° 337), iloraz $127628\frac{5}{32} \times \frac{3200000}{4084101} = \frac{4084101\,00000}{4084101} = 100000^{zł}$ okaże kapitał pierwiastkowy.

XX. 1) Wypada od $1^{zł.}$ na końcu roku $\frac{8}{100} = \frac{2}{25}^{zł}$. więc $1^{zł.}$ waży po roku wraz z proc: $\frac{27}{25}^{zł}$, a po 4 latach ważyć będzie $1^{zł.} \times (\frac{27}{25})^4 = 1^{zł} \times \frac{531441}{390625}$; procent zaś miesięczny iest tu $\frac{2}{300} = \frac{1}{150}$, a zatém za 4 miesiące iest $\frac{4}{150} = \frac{2}{75}^{zł.}$ Więc $1^{zł.}$ waży po 4 miesiącach $\frac{77}{75}^{zł}$, a zatém po 4 latach i 4 miesiącach ważyć będzie $\frac{531441}{390625} \times \frac{77}{75} = \frac{40920957}{29296875}$ zł. (nº 336); a zatém 60000zł. ważyć będą $\frac{40920957}{29296875}$ zł $\times 60000 = \frac{40920957}{15625}$ zł $\times 32$. Uskuteczniwszy znaydziemy odpowiedź $83806\frac{1874}{15625}$ zł.

2) Podzieliwszy $83806\frac{1874}{15625}$ zł przez ważność 1zł po 4 latach i 4 mcach która tu iest $\frac{40920957}{29296875}$ (nº 337); iloraz 60000zł okaże pierwiastkowy kapitał.

Kar. 193, nº 345.

I. Osoba A wypłacić teraz powinna $15428\frac{4}{7}$ zł.

II. Bankier wypłacić powinien $2926\frac{34}{41}$ zł.

III. Widoczna iż trzeba ułożyć proporcyią $600 : 600-564 = 100 : x$ czyli $600 : 36 = 100 : x$, wystawiaiąc przez x to, co odbieraiący traci na 100zł. znaydziemy $x = 6$zł.

IV. Dłużnik miałby prawo zatrzymać pieniądze ieszcze przez 5 miesięcy. Procent za 5 mcy wypada od % $2\frac{1}{2}$. Zagadnienie więc zwraca się na to: iaki kapitał należy dziś oddać aby za 5 mcy wyszedł na $2854\frac{16}{41}$ zł. Odpowiedź podług nº 342 znaydziemy $2784\frac{16}{41}$ zł.

V. Szukana 1) wypłata iest 28125zł. (nº 342);

2) Zagadnienie to wychodzi na następuiące: maiąc po 8 latach wypłacić 45000zł, ileż dziś oddać należy wytrąciwszy sobie procent po 5%? Odpowiedź iest $32142\frac{6}{7}$ zł.

VI. 1) Co do pierwszego pytania ile dziś wypłacić należy? podzieliwszy 45000zł. przez $\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = \frac{7355827511386641}{4096000000000000}$ wartość 1zł. po 12 latach (nº 337), znaydziemy iloraz 25057zł. $20\frac{140180197050410}{2724380559772833}$ gr. czyli skracaiąc ułomek 25057zł. $20\frac{1}{2}$ gr prawie.

2) Co do pytania drugiego, podzieliwszy 45000zł. przez $\left(\frac{21}{20}\right)^{8} = \frac{37822859361}{25600000000}$ wartość 1zł. po 8 latach, kwota szukana iest 30457zł. $23\frac{5247495387}{37822859361}$ gr. czyli $30457\frac{4}{5}$ zł. prawie.

VII. Szukana 1) wypłata podług n° 343 iest, 33631$\frac{11}{19}$zł;

2) czas, iest lat 8;

3) trzeba tu obrachować iak długo A może całego długu nie wypłacać, iak tu dopiero widzieliśmy lat 8, a zagadnienie zwraca się wtedy na następuiące: maiąc ieszcze 5 lat używać 45000zł ileż dziś oddać należy wytrąciwszy procent po 5%? Odpowiedź iest 36000zł.

VIII. Wypada tu obrachować korzyść zapewnioną dłużnikowi przez umowę a to zwracaiąc używanie pożyczonych pieniędzy do używania pewnéy kwoty w iednakowym czasie. I tak uważam nayprzód iż 800tal. używa dłużnik przez 4 miesiące, co iest toż samo iakby używał przez miesiąc 3200tal. Daléy używa 500tal. przez 2 miesiące, co iest to samo iakby używał przez miesiąc 1000tal. Naostatek używa 100tal. przez 2 miesiące, co iest to samo używać 200tal. przez miesiąc. Cała więc korzyść z używania pożyczonych pieniędzy zwraca się tu do używania przez miesiąc 4400tal. Jeżeli zaś téy korzyści ma wyrównywać używanie 800tal. oczywista iż musi być na dłuższy czas. Odpowiedź znaydzie się podług n° 330, 5$\frac{1}{2}$ mcy.

IX. Odpowiedź: w 6$\frac{2}{3}$ miesięcy czyli w 6 miesięcy i dni 20.

X. Obrachowawszy, iak się iuż wyżéy okazało, zapewnioną tu dłużnikowi korzyść, znaydziemy iż ta wyrównywa używaniu przez rok 8000tal. czyli podług przyiętego procentu czystéy korzyści 640tal. Lecz korzyść tę powinien mieć dłużnik dopiero na końcu 4 lat. Zagadnienie więc zamienia się na następuiące: iaki ma być kapitał ażeby z procentem prostym po $8\frac{*}{0}$ za 4 lata wyszedł na 640$^{\text{tal.}}$? Znaydziemy odpowiedź $484\frac{28}{33}$$^{\text{tal.}}$ (n° 342).

XI. 1) Wziąwszy $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{3}$ z daney summy, co czyni 1620, 810 i 2160$^{\text{tal.}}$ i części te razem dodane odiąwszy od 6480$^{\text{tal.}}$ reszta iest 1890$^{\text{tal.}}$ a tak zagadnienie zwraca się na poprzedzaiące, i podobnym sposobem znaydziemy iż wypada oddać ten dług za $6\frac{1}{8}$ mcy. $5\frac{7}{8}$ mcy

2) Potrzeba tu obrachować iak długo mógł trzymać dłużnik całą wypłatę iakieśmy dopiero widzieli $6\frac{1}{8}$ mcy, a zatém wytrzymawszy iuż 2 mce, powinien ią ieszcze trzymać $4\frac{1}{8}$ miesięcy. Zagadnienie więc zwraca się na to: maiąc używać 6480$^{\text{tal.}}$ przez $4\frac{1}{8}$ miesięcy, ileż wypada dziś oddać wytrącaiąc sobie po $8\frac{0}{0}$? Odpowiedź iest 6306$^{\text{zł.}}$ 17$^{\text{gr.}}$ i $1\frac{1}{2}$$^{\text{d.}}$ prawie.

XII. Trzeba tu obrachować korzyść iaką ma zapewnioną płacący podług umowy. To zaś nastąpi zwracaiąc wypłacić się maiącą kwotę do iednego czasu np. miesiąca. I tak podług n° 331 znaydziemy iż korzyść ta wyrównywa używaniu przez miesiąc 9000$^{\text{zł.}}$ Obrachuymy znowu ile iuż korzyści otrzymał rzeczywiście z używania wypłacaiącego się długu do końca 5$^{\text{cin}}$ miesięcy. Znaydziemy że tyle, iak gdyby przez miesiąc 4000$^{\text{zł.}}$ używał. Idzie mu więc tylko o wyrównanie korzyści z używania ieszcze 5000$^{\text{zł.}}$ przez miesiąc. Że zaś po wypłaceniu 2$^{\text{ch}}$ rat długu zostaie mu tylko na końcu 5$^{\text{go}}$ miesiąca 375$^{\text{zł}}$; więc zagadnienie wychodzi na następuiące: maiąc używać 5000$^{\text{zł.}}$ przez miesiąc, iak długo można używać 375$^{\text{zł.}}$? Na odpowiedź znayduię podług n° 330, $13\frac{1}{3}$ miesięcy.

XIII. Gdy czynsz 4200$^{\text{zł.}}$ iest $\frac{1}{10}$ kapitału, 1 zł. podług tego wynosi na końcu r. $\frac{11}{10}$$^{\text{zł.}}$ a zatém 42000$^{\text{zł.}}$ wynosić będą na koncu 2$^{\text{go}}$ roku 42000$^{\text{zł.}}$ $\times \left(\frac{11}{10}\right)^2$ czyli 50820$^{\text{zł.}}$; obie więc wypłaty złączone i obrachowane w téyże epoce powinny wynosić $50820^{zł}$. Lecz pierwsza wypłata uiszczona na końcu pierwszego roku wynosi na końcu 2^{go} roku $\frac{11}{10}$ swoiéy wartości, 2^{ga} zaś wypłata uiszczona na końcu 2^{go} roku wynosi $\frac{10}{10}$ swoiéy wartości; obie więc wypłaty łącznie obrachowane na końcu 2^{go} roku wynosić będą $\frac{11}{10}+\frac{10}{10}=\frac{21}{10}$ części pierwszéy wypłaty. Zatém $\frac{21}{10}$ części pierwszéy wypłaty $=50820^{zł}$.; a $\frac{1}{10}$ téyże wypłaty $=\frac{50820}{21}$ czyli $2420^{zł}$; cała więc pierwsza wypłata iako 10 razy większa $=24200$. Spłaci się więc czynsz i kapitał w 2^{ch} wypłatach po $24200^{zł}$. na końcu pierwszego i 2^{go} roku. W saméy rzeczy, płacąc na końcu 1^{go} roku $24200^{zł}$. gdy $4200^{zł}$. przypada iako czynsz od $42000^{zł}$., więc nie spłaca się rzeczywiście tylko $20000^{zł}$. z kapitału który przez to zwraca się do $22000^{zł}$. Jdzie więc na drugi rok o procent tylko od $22000^{zł}$., procent ten iest 2200 który dodany do 22000 czyni $24200^{zł}$; druga więc wypłata podług warunku zaspokaia dług zupełnie.

XIV. Podobnie rozumuiąc iak w przykładzie poprzedzaiącym, znaydzie się iż każda wypłata powinna być $1331^{zł}$. Trzeba tu tylko uważać, że gdy 1^{sza} wypłata uiszczona na końcu 1^{szego} roku, wynosi na końcu roku 2^{go} $\frac{11}{10}$ czyli $\frac{110}{100}$ swoiéy wartości, taż sama na końcu 3^{go} roku wynosić będzie $\frac{121}{100}$ swoiéy wartości; 2^{ga} wypłata uiszczona na końcu 2^{go} roku, wynosi na końcu roku 3^{go} $\frac{110}{100}$ swéy wartości; 3^{cia} zaś uiszczona na końcu 3^{go} roku wynosi tylko $\frac{100}{100}$ swéy wartości; wszystkie więc 3 wypłaty łącznie obrachowane na końcu 3^{go} roku wynosić będą $\frac{121}{100}+\frac{110}{100}+\frac{100}{100}=\frac{331}{100}$ części pierwszéy wypłaty, i t. d.

Widzimy tu iż dla rozwiązania tego gatunku zagadnień, trzeba wartość summ wypłacać się maiących w różnych epokach, obrachować w iednéy epoce.

XV. Aby rozwiązać to zagadnienie trzeba znaleźć iaka byłaby teraz wartość 50łok. materyi drugiego gatunku na $\frac{8}{4}$łok. szerok. stosuiąc ią do warunków pierwszego kupna; ta wartość porównana z wartością wypadaiącą z warunków 2go kupna proponowanego, da poznać spekulacyią korzystniéyszą. Podług warunku 1szego kupna 30łok. materyi 1szego gatunku na $\frac{9}{4}$łok. szerok. kosztuią 720zł. gotowizną; lecz gdy drugi gatunek materyi iest podléyszy, 50łok. 2go gatunku na $\frac{8}{4}$łok. szerok. kosztowałyby 1000zł. gotowizną (nº 308) a 1210zł. wypłacić się maiące za 2 lata (nº 335). Więc 50łok. materyi 2go gatunku maiące się wypłacić po 2 latach, kosztowałyby kupca 1210zł stosuiąc do warunków 1szego kupna a 1200zł. podług warunku 2go kupna. Drugie więc kupno iest tu korzystniéysze.

Widzimy tu iż w zagadnieniach tego gatunku trzeba odnosić zyski i straty do iednakowéy epoki; różnica summy zysków od summy strat każdéy spekulacyi, da poznać korzyść rzeczywistą.

Kar. 201, nº 355.

I. A straci $881\frac{13}{27}$zł., B $755\frac{15}{27}$, C $975\frac{25}{27}$, D $787\frac{1}{27}$.

II. A miała kapitału $15923\frac{1}{13}$zł., B $7961\frac{7}{13}$, C $12115\frac{5}{13}$.

III. Gdy C ma mieć połowę całego zysku, powinna dać tyleż ile obiedwie osoby pierwsze; dodawszy więc wkładki 350# i 200# summa ich iest 550#, tę kwotę zatém ma włożyć osoba C. Zysk zaś osoby A iest $318\frac{2}{11}$, B $181\frac{9}{11}$ a C 500#.

IV. Weźmie 12℔ saletry, 8℔ siarki, 6℔ węgli i 24℔ prochu.

V. Trzeba $42\frac{6}{7}$℔ piasku, $14\frac{2}{7}$ potażu a $2\frac{6}{7}$kredy.

VI. 1) pierwszy oddział zrobi 5000 miar, 2gi 1800 a 3ci 3200.

2) pierwszy oddział powinien liczyć 2300 robotników, 2gi 828 a 3ci 1472.

VII. Należy tu nayprzód obrachować ile potrzeba będzie w ogóle materyiałów, a to przez proporcyią $:100:101\frac{1}{2}$ czyli $200:203=5000^{\text{ctn}}:x$, które $=5075^{\text{cet}}$. Ponieważ zaś w iakieykolwiek ilości prochu, wzięte ilości saletry, siarki i węgla maią się mieć między sobą iak $\frac{153}{2}:\frac{25}{2}:\frac{25}{2}$, zatem pozostaie proporcyionalnie do tych liczb podzielić 5075^{cetn}. I tak znaydziemy na odpowiedź: 3825^{cetn} saletry, 625 siarki i 625 węgli.

VIII. 1) Trzeba tu zwrócić wkładki do iednakowego czasu aby mieć tylko regułę spółki poiedynczą Gdy zaś dany czas naykrótszy 3 miesiące dzieli dokładnie 6 i 12 mcy, mogę tu wziąć 3 mce za iedność czyli miarę czasu, i aby do niéy zwrócić wkładkę spólnika 2go, powiem: 630^{tal} przez 6 mcy daie takież prawo do zysku iak 2 razy 630 czyli 1260^{tal} przez 3 mce. Podobnież 1sza wkładka użyta przez 4 razy 3 mce, tyle czyni iak 4 razy 840 czyli $3360^{\text{tal.}}$ przez 3 mce. Trzy te wkładki tak przygotowane daią summę $5160^{\text{tal.}}$ Pierwszy zatém stosunek spólny trzem proporcyiom iest $5160:1560$ czyli $43:13=$ i t. d. Znaydziemy iż 1sza osoba bierze z zysku $1015\frac{35}{43}^{\text{tal}}$, 2ga $380\frac{40}{43}$, a 3cia $163\frac{11}{43}$.

2) Trzeba tu nayprzód wynaleźć zysk cały, który będzie odtrąciwszy summę włożonych kapitałów t. i. $12060^{\text{zł.}}$ od kwoty zebranéy za 700 kor. po $20^{\text{zł}}$ t. i. od $14000^{\text{zł}}$. Zysk ten iest $1940^{\text{zł.}}$ Zagadnienie więc rozwiąże się iak wyżéy; i dla 1széy osoby przypadnie $1263\frac{17}{43}^{\text{zł.}}$, dla 2éy $473\frac{37}{43}$ a dla 3éy $203\frac{4}{43}$.

3) Zysk tu iest wskazany iako 10ta część całego kapitału czyli $1206^{\text{zł.}}$ Lecz aby znaleźć cenę korca przedanéy reszty zboża, trzeba nayprzód obra-

chować ile wszyscy wziąć maią ogółem. Maią zaś wziąć summę z kapitału włożonego 12060^{zł} i zysku 1206$^{zł.}$ t. i. razem 13266^{zł}. A że za 18$^{laszt.}$ po 400^{zł}. wzięli 7200^{zł}, za 300$^{kor.}$ po $11\frac{1}{2}^{zł}$ wzięli 3450$^{zł.}$ t. i. razem 10650^{zł}, więc za resztę zboża zebrać ieszcze maią 2616$^{zł.}$ Podzieliwszy tę summę przez pozostałe 214$^{kor.}$ wypada cena korca po 12$^{zł.}$ 6$^{gr.}$ $13\frac{13}{107}^{gr.}$ Zysk zaś podług poprzedzaiącego znaydziemy 1^{széy} osoby $785\frac{13}{43}^{zł}$, 2^{éy} $294\frac{21}{43}$, a 3^{éy} $126\frac{9}{43}$.

IX. Widoczna iest, iż kapitał ostatniego był tylko 2 lata w handlu; przedostatniego zaś półroku dłużéy t. i. $2\frac{1}{2}$ lat; 2^{go} spólnika półtora roku ieszcze dłużey t i. 4 lat. Naostatek pierwszego, był kapitał w handlu lat 5. Zwróciwszy więc (n^{o} 331) włożone kapitały do iednakowego czasu, znaydziemy iż zysk 1^{szego} spólnika iest $1028\frac{4}{7}^{zł.}$, 2^{go} $857\frac{1}{7}$, 3^{go} 1200, a 4^{go} $1714\frac{2}{7}$.

X Zwróciwszy tu wkładki do iednakowego czasu (n^{o} 331) znaydziemy ie odpowiadaiące na 1 miesiąc kwotom: 7200#, 5880 i 7470. Podzieliwszy zysk proporcyionalnie do tych liczb, wypadnie dla 1^{széy} osoby zysku $840\frac{120}{137}$#, dla 2^{éy} $686\frac{98}{137}$ a dla 3^{éy} $872\frac{56}{137}$.

XI. Gdy oprócz strat poniesionych zysk wynosi 100000^{zł}, musieli więc zyskać od początku 3^{go} miesiąca aż do końca 14^{go} $100000+7300+2900=110200$. Pierwsza strata poniesiona była przez 2^{ch} pierwszych spólników, a 2^{ga} już przez 3^{ch}.

Zadanie więc to daie miéysce trzem działaniom.

1^{od} trzeba rozdzielić stratę 7300$^{zł.}$ proporcyionalnie do 86000 i do 60000$^{zł.}$ wypadną części odpowiadaiące 4300 i 3000$^{zł.}$

2re aby rozdzielić drugą stratę, trzeba poznać kapitały które miał w handlu każdy ze spólników w ciągu 15^{go} mca. Pierwszy miał w téy epoce 90000, a 2ch innych każdy po 100000zł. Strata więc dla pierwszego wypada 900 a dla 2ch innych po 1000zł.

3cie trzeba rozdzielić zysk cały 110200zł., a odtrąciwszy potém od części każdego właściwą stratę, otrzyma się zysk iego rzeczywisty.

Zysk ten miał mieysce w ciągu 12u miesięcy, t. i. od początku 3go mca aż do końca 14go. Uważaymy więc iakby Towarzystwo zawiązane było na początku 3go miesiąca a kończyło się na końcu 14go, i obrachuymy iaki w tym czasie miał w handlu każdy ze spólników kapitał zwracaiąc go do iednakowego czasu.

Kapitał 1szego okaże się iakby miał 1066000zł. w handlu przez 1 miesiąc, 2go iakby 1070000 a 3go iakby 1200000.

Rozdzielony więc zysk cały proporcyionalnie do tych kapitałów da części odpowiadaiące 1od $35213{,}78\frac{374}{417}$; 2re $35345{,}92\frac{136}{417}$, 3cie $39640{,}28\frac{324}{417}$zł.

Odiąwszy od każdéy części właściwe straty, znaydziemy na części każdego spólnika z czystego zysku 100000zł., dla 1szego $30013{,}78\frac{374}{417}$, dla 2go $31345{,}92\frac{136}{417}$; dla 3go $38640{,}28\frac{324}{417}$. Gdy summa ułomków czyni 2 setne, zaniechaymy ich dodaiąc po iednéy setnéy do części 1szego i 3go przy których są ułomki naywiększe; będzie zatém na zysk spólnika 1szego 30013,79; 2go 31345, 92; 3go 38640, 29.

XII. Sprowadziwszy wkładki osób A i B do iednakowego czasu znaydziemy zysk osoby B $= 11\frac{2}{3}$#. Ułożywszy zaś proporcyią 18# zysk osoby A: $21\frac{1}{3}$ zysku osoby C $= 5400$# kapitał osoby A rozmnożony przez liczbę miesięcy : x kapitału osoby C rozmnożonego przez liczbę miesięcy, znaydziemy ten ostatni $=6400$#. Że zaś sam kapitał 800# wiadomy, więc podzieliwszy przezeń 6400#, wypadnie 8 miesięcy. Podobnież ułożywszy proporcyią 18# zysku: $11\frac{2}{3}$# zysku = 5400# kapitał rozmnożony przez liczbę mcy: x kapitału rozmnożonego przez liczbę mcy; znaydziemy 3500# kapitał osoby D rozmnożony przez liczbę mcy. Że zaś te wiadome, więc podzieliwszy niemi 3500# wypada kapitał szukany 700#.

XIII. Widoczna iest iż każdy oddział robotników powinien mieć wydzieloną sobie ilość sążni w prostym stosunku swéy liczby, a zdawaćby się mogło iż w odwrotnym odległości; podzieliwszy więc szczególne liczby robotników przez właściwe odległości, trzebaby rozdzielić 15600 sążni proporcyionalnie do liczb: $36 \times \frac{4}{5}$, $25 \times \frac{4}{7}$, $32 \times \frac{4}{10}$ i $48 \times \frac{4}{8}$ (nº 160); czyli opuszczaiąc spólnego czynnika 4, do liczb: $\frac{36}{5}$, $\frac{25}{7}$, $\frac{32}{10}$ i $\frac{48}{8}$ które sprowadzone do nayprostszego mianownika są $\frac{252}{35}$, $\frac{250}{35}$, $\frac{112}{35}$ i $\frac{210}{35}$. A pomiiaiąc znowu mianownika spólnego, zagadnienie zwróciłoby się do rozdzielenia 15600sąż. proporcyionalnie do liczb: 252, 250, 112 i 210. Wypadłoby zatem na robotników z 1széy wsi, $4770\frac{90}{103}$sąż; z 2éy $4733\frac{1}{103}$, z 3éy $2120\frac{40}{103}$, a na przybywaiących z 4éy $3975\frac{75}{103}$.

Lecz zastanowiwszy się nad tém zagadnieniem łatwo postrzeżemy, iż wyznaczyć się maiąca ludziom robota nie może być dzielona w stosunku odwrotnym odległości ich mieszkania od mieysca roboty. Wziąwszy bowiem równą liczbę robotników z 2ch mieysc n. p. z których iedno na 1 milę a drugie na 2 od miéysca roboty odległe, wypadałoby na pierwszych 2 razy więcéy sążni przeznaczyć niż na drugich, co widocznie byłoby niesprawiedliwie. Dosyć tu więc rozdzielić 1od w stosunku prostym liczbę wykopać się maiących sążni na oddziały robotników, potém zaś stosownie do szczególnych odległości iednym uiąć drugim dodać wyrachowanych sążni, a to zważaiąc podług okoliczności czas potrzebny do przebycia drogi od miéysca mieszkania do miéysca roboty.

Podaliśmy tu to zagadnienie z umysłu, aby dać poznać że iak w prostych rachunkach tak tém bardziéy w nieco zawikłanych bacznym być trzeba na drogę postępowania, czyli się idąc nią nie obłąkamy, a zatém czyli nas dokładnie do celu prowadzi.

XIV. Sprowadziwszy ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, do iednakowego mianownika, są one między sobą iak $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, zatém iak 6, 4, 3; iest więc proporcyia, 13 : 24000 i t. d. znaydziemy odpowiedź: dla 1szego $11076\frac{12}{13}$tal dla 2go $7384\frac{8}{13}$ a dla 3go $5538\frac{6}{13}$.

XV. Widać tu 1od iż część B iest $\frac{4}{3}$ części A; część C iest $\frac{6}{5}$ części B; część zaś D iest $\frac{3}{2}$ części C. Wyraziwszy więc pierwszą przez 1, 2ga będzie wyrażona przez $\frac{4}{3}$; 3cia będzie $\frac{6}{5}$ z $\frac{4}{3}=\frac{24}{15}$; a 4ta $\frac{3}{2}$ z $\frac{24}{15}=\frac{72}{30}=\frac{36}{15}$. Zagadnienie zwraca się więc do podzielenia 24000zł. proporcyionalnie do liczb 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{24}{15}$, $\frac{36}{15}$ czyli $\frac{15}{15}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{24}{15}$, $\frac{36}{15}$, i t. d. Znaydziemy część A$=3789\frac{9}{19}$; część B $5042\frac{12}{19}$, część C $6063\frac{3}{19}$, a część D $9094\frac{14}{19}$.

XVI. Wiemy (no 126) iż ułomek iest tém mnieyszy im większego ma mianownika przy iednakowym liczniku. To założywszy, łatwo poiąć iż w tym razie maiątek trzeba podzielić proporcyionalnie do ułomków $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$. Te sprowadzone do iednakowego mianownika są $\frac{6}{180}$, $\frac{9}{180}$, $\frac{10}{180}$, $\frac{15}{180}$, $\frac{18}{180}$. Są więc między sobą iak liczby 6, 9, 10, 15, 18. Podzieliwszy 360000zł. proporcyonalnie do tych liczb, będzie dla syna 1szego $37241\frac{11}{29}$, 2go $55862\frac{2}{29}$, 3go $62068\frac{28}{29}$, 4go $93103\frac{13}{29}$, 5go $111724\frac{4}{29}$zł.

XVII. Znalazłszy iż złotemu iednemu odpowia-
zł.
da 3,234375 (no 354) znaydziemy iż pierwszy weźmie 19334, 53125; 2gi 15620, 15625: 3ci 12642, 65625; 4ty 11610, 9375; 5ty 10488, 28125; 6ty

2954,53125 zł.; 7^{my} 1688,4375; 8^{my} 539,0625; 9^{ty} 121,40625.

XVIII. Osoba A dostanie $13\frac{1}{2}$, B $14\frac{1}{4}$, C $40\frac{17}{36}$, D $28\frac{2}{3}$, E $30\frac{1}{6}$ tal. straci więc ze swego długu A 27, B $28\frac{1}{2}$, C $80\frac{34}{36}$, D $57\frac{1}{3}$, E $75\frac{16}{18}$, F $6\frac{2}{6}$ tal. co czyni $66\frac{1}{3}$ na $\frac{0}{0}$.

Karta 212, n°. 368.

I. Podzieliwszy $158^{zł.}$ przez 98^{unc}, iloraz $1^{zł.}$ $18\frac{8}{49}^{gr}$ iest wartością uncyi.

II. Cena grzywny przypadnie po $67\frac{33}{47}$ zł.

III. Postępuiąc podobnie iak w poprzedzaiącém zagadnieniu znayduie się proba mieszaniny 14,16.

IV. Srednia cena korca iest po $15\frac{7}{3}$ zł.

V. Ponieważ tu likwor za przylaniem wody ma być tańszy, a zatém w stosunku zniżonéy ceny powinno być go więcéy. Ilość zaś iego znaydziemy przez proporcyią; $\overset{zł}{3\frac{1}{5}} : \overset{zł}{4} = \overset{gar}{100} : x = \overset{gar}{125}$ gar. nadmiar więc $125^{gar.}$ nad $100^{gar.}$ t. i. $25^{gar.}$ iest szukaną liczbą garcy wody.

VI. 2 korce zboża droższego a 4 korce tańszego składaią mieszaninę po $10^{zł.}$ korzec (no 362).

VII. Podobnież znaydzie się iż 2 części droższego srebra a 4 tańszego, czyli $\frac{1}{3}$ droższego a $\frac{2}{3}$ tańszego srebra do każdéy grzywny brać potrzeba.

VIII Znaydziemy podobnym co wyżéy sposobem postępuiąc, że 12 części danego srebra a 2 miedzi, czyli 6 części pierwszego a 1 drugiéy dadzą srebro żądanéy proby. Do 21 łutów np. trzebaby wziąć 18 z pierwszego a 3 z drugiéy.

IX. Postępuię iak gdybym miał z danych gatunków zrobić mieszaninę ceny oznaczonéy i znayduię ($n_o 362$) iż lepszego gatunku wchodzi w mieszaninę $\frac{4}{9}$ a podlejszego $\frac{5}{9}$.

X. Uważaymy tu iak gdyby szło o ieden tylko metal np. złoto: porównawszy ilość iego średnią maiącą być w nowéy mieszaninie, z ilościami będącemi iuż w mieszaninach, znaydziemy

$$90 \left\{ \begin{array}{l} 95 \;.\;.\;.\; 5 \\ 85 \;.\;.\;.\; 5 \end{array} \right.$$

iż po równéy ilości z każdéy sztuki wziąć potrzeba, a zatem na 100 gram. weźmie się po 50 z każdéy sztuki. Jakoż 50 gram. z 1széy sztuki zawieraią $\overset{\text{gram.}}{47,5}$ złota, a 50 gram. z 2éy zawierać będą $\overset{\text{gr.}}{42,5}$ t. i. razem 90^{gram}.

XI. Porównawszy wyższe ceny z nayniższą, wypada mieszać po 25℔ naytańszego gatunku z 3℔ każdego z 3ch droższych gatunków.

XII. Szukam nayprzod ile grzywien z każdego gatunku wziąć trzeba dla zrobienia mieszaniny po 50zł. grzywna.

$$50 \;.\;.\; \left\{ \begin{array}{l} 60 \;.\;.\; 29 \\ 58 \;.\;.\;\; 4 \\ 46 \;.\;.\;\; 8 \\ 21 \;.\;.\; 10 \end{array} \right.$$
$$\overline{\qquad\qquad 51}$$

a ułożywszy potém proporcyią:

$$51 : 34 = \left\{ \begin{array}{l} 29 : x = 19\frac{1}{3} \\ \;4 : y = \;2\frac{2}{3} \\ \;8 : z = \;5\frac{1}{3} \\ 10 : v = \;6\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

znaydę, że trzeba wziąć $19\frac{1}{3}$ grzyw. z pierwszego gatunku, $2\frac{2}{3}$ grzy. z 2go; $5\frac{1}{3}$ z 3go; i $6\frac{2}{3}$ grzyw. z 4go,

XIII. Trzeba tu nayprzod znaleźć cenę cetnara. Podzieliwszy więc 63^{otal} przez 35^{cetn}. wypada na iloraz 18^{tal}. Z resztą zagadnienie podług (no 366) łatwo rozwiązać, znaydziemy że się ma wziąć $17\frac{6}{12}$cetn, 2go $2\frac{11}{12}$, 3go $5\frac{10}{12}$ a 4go $8\frac{9}{12}$

XIV. Podług no 349 znaydziemy że trzeba wziąć $5\frac{5}{9}$ grzyw. na $29^{Zł}$; $2\frac{7}{9}$ na $23^{Zł}$ a $16\frac{6}{9}$ na $21^{Zł}$.

XV. Uważam iż 3℔ po 24^{gr}. i funt na 28^{gr}. uczynią 4℔ których wartość cała wynosi 100^{gr}, a zatém funt 1 wypada na 25. gr. Podobnież 2℔ po 15 gr. i funt na 18^{gr}. uczynią 3℔ których wartość razem wynosi 48 gr. a zatém funt 1 po 16^{gr}. Zagadnienie więc zwraca się do tego: z towarów na 25^{gr}. i na 16^{gr}. funt, zrobić mieszaninę na 22^{gr} funt. Podług reguły znaydziemy iż trzeba wziąć 6℔ na 25^{gr} a 3℔ na 16^{gr}. Idzie więc tylko o zwrócenie rozwiązania do pierwszych warunków. Na to, dzielę 6 na 2 części z którychby iedna była potróyna względem drugiéy, iako to, $1\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{2}$; a liczbę 3 na dwie części z którychby iedna była podwóyną względem drugiéy, iako to: 2 i 1. trzeba więc wziąć $1\frac{1}{2}$℔ z pierwszego gatunku, $4\frac{1}{2}$ z 2go, 2℔ z 3go i 1 funt z 4go.

XVI. Gdy dane gatunki są wyższéy wartości niż ma być mieszanina, widoczna iest iż tu nie można zrobić żądanéy kompozycyi bez przybrania poślednieyszego od niéy gatunku. Do kompozycyi tego rodzaiu przymieszywa się pospolicie miedź i ta w tym razie za nic się rachuie. Układam więc różnice:

$$10 \ldots \begin{cases} 13 \ldots 10 \\ 11 \ldots 10 \\ 0 \ldots 3 \ldots 1 \end{cases}$$

Gdyby więc naczynie miało ważyć łutów 24; wziętoby się pierwszego i drugiego gatunku srebra po 10 łutów a miedzi 4^{lut}, lecz że ma ważyć funt

1 i 28 łutów czyli 60^{lut}, układam więc proporcyią

$$24 : 60 = \begin{cases} 10 : x = 25 \\ 10 : y = 25 \\ 4 : z = 10 \end{cases}$$

i znayduię, że trzeba wziąć z pierwszego i drugiego gatunku srebra po 25 łutów a miedzi 10^{lut}.

Kar. 220, n^o 377.

I. Przypuszczam iż liczba szukana iest 7, ta podzielona przez 7 daie na iloraz 1, który rozmnożony przez 15 czyni 15; lecz powinno być 450, mówię więc: ieżeli 15 pozostaie z 7, z czegoż pozostaie 450? t. i. układam proporcyią $15:7=450:x$, $x=210$ iest liczbą szukaną, co łatwo sprawdzić.

II. Przypuszczam iż liczba lat iest 16, ta ze swoią połową czyni 24 od których odiąwszy część 4^{ta} zostaie 18. Układam więc proporcyią: $18:16=90:x$. Wypada liczba szukana 80 lat.

III. Widzę łatwo iż maiątek o który rzecz, iest podzielny przez 3 i 5, i taki że odiąwszy od niego część iego trzecią i dwie piąte zostaie $32000^{zł.}$ Przypuszczam więc liczbę 15 i odiąwszy od niéy $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$ iéy części których summa iest 11; mam reszty 4; powiem zatém: ieżeli 4 powstaie z 15, z iakiéyże liczby powstaie $32000^{zł.}$? znaydę na odp. $120000^{zł.}$ które zupełnie odpowiadaią warunkom.

IV. Liczba szukana iest $272\frac{8}{11}$.

V. Oznaczywszy część pierwszéy 1
część drugiéy będzie . . . . $2+7^{zł.}$
część trzeciéy . . . . $3+7-5^{zł.}$

razem . . . . . 6części$+9^{zł.}$

równe $1000^{zł.}$; odiąwszy więc $9^{zł.}$ od $1000^{zł.}$ i pozostałe $991^{zł.}$ podzieliwszy przez 6, wypada na iloraz część pierwszéy osoby $165\frac{1}{6}$ zł. a zatém część drugiéy będzie $337\frac{2}{6}$ zł. a część 3éy $497\frac{3}{6}$ zł.

VI. Przez podobne postępowanie iak w przykładzie poprzedzaiącym, znaydzie się część 1széy osoby 5472 zł., 2éy 16956; 3ey 8268; 4éy 16896; a 5éy 22368 zł.

VII. Liczba szukana iest 80.

VIII. Zagadnienie to nie daie się rozwiązać przez regułę założenia poiedynczego. Przypuszczam więc nayprzód, iż iedna z 2ch liczb niewiadomych iest 13 ażebym dodaiąc do niéy 11 miał 24 podzielne przez 4. W tém przypuszczeniu druga liczba byłaby 6, do któréy przydawszy 11, mam 17 zamiast 39 potróyności 13, iakby to być powinno podług drugiego warunku zagadnienia; ztąd wynika błąd pierwszy o mniéy, równy 22. Przypuszczam powtóre iż pierwsza liczba = 9 ażebym dodaiąc ią do 11 miał 20 podzielne przez 4, co daie 5 na drugą liczbę niewiadomą; do téy ieżeli dodam 11, będzie 16 zamiast 27 potróyności 9. Ztąd wynika błąd drugi także o mniéy, równy 11. Nakoniec postąpiwszy podług n° 375 znaydziemy że pierwsza liczba iest 5, a druga 4.

IX. Odp: robił przez dni 46, a próżnował przez dni 14.

X. Przypuszczam iż beczka wina kosztuie 50tal; 2 beczki zatém które dał pierwszy kupiec kosztowały 100tal., lecz że mu zwrócono 40tal, pozostaie 60tal. które zapłacił za cło i sprowadzenie 20 beczek wina. Mówię teraz: ieżeli od 20 beczek zapłacono 60tal., ileż przypada od 64? czwarty wyraz proporcyi okazuie mi 192tal. Że zaś kupiec drugi dał 5 beczek wina które podług przypuszczenia kosztuią 250tal, i nadto 40tal. t. i. razem 290tal., więc różnica czyli błąd iest 98tal. więcéy.

Założywszy iż beczka wina kosztowała 60$^{tal.}$ znaydziemy znowu podobną różnicę o 84$^{tal.}$ więcéy. Postępuiąc nakoniec podług nº 376 znaydzie się cena beczki 120$^{tal.}$

XI. Przypuszczam iż ogród kupiono za 100$^{zł.}$ lecz w tym razie przedawszy go za 100—18 wziętoby 82$^{zł.}$, zamiast 7298$^{zł.}$; układam więc proporcyią; $82:7298=100:x$, a 4^{ty} wyraz 8900zł. iest ceną szukaną.

XII. Przypuszczam iż iest kapitał 100$^{zł.}$; trzyletni iego procent iest 13$^{zł.}$, lecz przypuszczenie iest fałszywe, bo na końcu 3^{ch} lat miałbym tylko 113$^{zł.}$, powinienem zaś mieć 7797$^{zł.}$ Układam zatém proporcyią $13:100=7797:x$, które $=6900$zł. okaże kapitał szukany.

XIII. Uważać tu należy 320# iako resztę z liczby z któréy $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ iéy części są odięte. Przypuściwszy iż ta liczba iest 12 odeymiymy od niéy wzmiankowane części, zostaie 5 na wkładkę osoby pierwszéy, a powinno zostać 320; ułożę więc regułę trzech $5:12=320:x$ które $=768$#; $\frac{1}{3}$ téy liczby iest 256, a $\frac{1}{4}$ iest 192 i reszta zostaie się 320#. Maiąc zaś wiadomą iuż wkładkę każdéy osoby, znaydę łatwo iż 1^{sza} weźmie z zysku $41\frac{2}{3}$, 2^{ga} $33\frac{1}{3}$, a 3^{cia} 25#.

XIV. Przypuszczam iż 1^{sza} sztuka kosztowała 1#, 2^{ga} 2#, 3^{cia} 3# i t. d. ostatnia zatém kosztowałaby 12# a wszystkie razem kosztowały 78#, lecz ztąd wypada 18# mniéy niż być powinno; przypuszam iż 1^{sza} sztuka kosztowała 2#, druga 3# i t. d. ostatnia 13#, a wszystkie razem 90#, lecz i tak wypada mniéy 6# niż być powinno. Postępuiąc iuż podług reguły (nº 375), znaydę iż 1^{sza} sztuka kosztowała $2\frac{1}{2}$#, zatém 2^{ga} $3\frac{1}{2}$, 3^{cia} $4\frac{1}{2}$ i t. d. ostatnia $13\frac{1}{2}$.

Kar. 243, nº 413.

I. Znaydziemy log. 2ch odeymuiąc log. 5ciu od log. 10ciu; log. 4ch, podwaiaiąc log. 2ch, a potraiaiąc go otrzymamy log. 8iu sześcianu 2ch. Dodaiąc log. 2ch do log. 3ch będziemy mieć log. 6ciu; a mnożąc log. 3ch przez 2 otrzymamy log. 9ciu.

II. Logarytmy szukanę są:

1) 5.8970071 (nº 398).

2) 3.6948455.

3) 3.1842939.

4) —0. 0579920.

III. Liczby sukane są:

1) 88935000 (nº 403).

2) 5319119,23

3) 3,493;

4) Odiąwszy ten log. od liczby 5, czyli wziąwszy dopełnienie arytmetyczne liczby 5, log. pozostały 3.260638 wpada między logarytmy liczb 18223 i 18224. Ułomek więc szukany iest 0,18224.

IV. Log. liczby 0,17 iest —0.769551 (nº 402), mnożę go przez 5 i mam na iloczyn —3.847755. Odeymuię ten log. od 6 czyli od 6.000000 co mi daie 2,152245 (nº 409). Przydaię 2 do cechy tego logarytmu i szukam iakiéy liczbie odpowiada w tablicach log. 4,152245. Wpada on między liczby 14198 i 14199; biorę 14198 iako liczbę która się naywięcéy zbliża do odpowiedzenia logarytmowi 4.152245, i mam liczbę 141,98. Lecz że log. odiemny —3847755 odiąłem od 6 całych, czyli rozmnożyłem go przez 1000000, więc tak rozmnożony należy do liczby 1000000 razy większéy, aby więc zwrócić do prawdziwéy ważności znalezioną liczbę 141,98 trzeba napisać 0,00014198 (nº 408).

V. Podług n° 392 znaydziemy

1) iż log. szukanego ilorazu iest 0,145731; ten z powiększoną cechą o 4 iedności odpowiada w tablicach liczbie 13987; więc iloraz szukany iest 1,3987. Podobnież.

2) log. —0,1312789 odiąwszy od 5, reszta odpowiada w tablicach liczbie 73913, zatém iloraz szukany iest 0,73913.

VI. Pierwiastki szukane są:

1) 141; 2) trzecia część logarytmu liczby 97666 iest 1.6632474 logarytmem pierwiastku szukanego, log. ten z cechą 4 znayduie się w tablicach odpowiadaiący naybliżéy liczbie 46052 którą zwracaiąc do ważności podług cechy prawdziwéy, będzie 46,052 pierwiastkiem szukanym. Podobnież

3) pierwiastek czwarty liczby 364 znaydzie się 4,367; a

4) Pierwiastek siódmy liczby 5 znaydzie się 1,2585.

5) Potroiwszy log. 3. 758609 liczby 5736, będzie 11,275827 log. iéy sześcianu; piąta część tegoż logarytmu iest 2.255165 logarytmem pierwiastku szukanego. Log. ten z cechą zwiększoną o 2 iedności, wpada między logarytmy liczb 17995 i 17996. Pierwiastek szukany iest więc 179,95 mniéy niż o iednę setną zbliżony.

VII. 1) Aby mieć stosunek szukany trzeba podzielić 1166400 przez 25 a z ilorazu wyciągnąć pierwiastek szósty (n° 298). Biorę więc logarytmy tych liczb, a odiąwszy log. liczby 25 od log. 1166400 będę miał log. 4,6689075 ich ilorazu. Szósta część tego logarytmu 0,7781512 iest logarytmem stosunku szukanego. Logarytm ten odpowiada w tablicach liczbie 6, która iest stosunkiem żądanym.

Podobnież 2) log. liczby $2\frac{2}{3}$ odięty od log. liczby $5\frac{3}{4}$ daie log. 0,333699 ich ilorazu; piąta część iego 0,066740 iest logarytmem stosunku szukanego. Log. ten z cechą zwiększoną o 4 iedności odpowiada liczbie 11661 która zwrócona do prawdziwéy ważności podług cechy, iest 1,1661; i ten iest stosunek szukany. Dla otrzymania średnich szukanych trzeba więc tylko rozmnożyć pierwszy wyraz $2\frac{2}{3}$ przez 1,1661; następnie iloczyn przez 1,1661; i tak d. Lecz i to działanie za pomocą logarytmów można ułatwić dodaiąc następnie log. stosunku do log. pierwszego wyrazu. Szukaiąc tym sposobem liczb odpowiadaiących w tablicach, będą wypadki następuiące:

		średnie odpowiad.
Log. liczby $2\frac{2}{3}$	0,4259687	
Więcéy log. stosunku . .	0,4927085	3,109
Więcéy 2 razy log. stosunku	0,5594483	3,626
Więcéy 3 razy log. stosunku	0,6261881	4,228
Więcéy 4 razy log. stosunku	0,6929279	4,931

VIII. Wiemy z rozwiązania zagadnień nº 335, iż w tym razie trzeba rozmnożyć 100000zł. $\times \left(\frac{21}{20}\right)^{10}$. Uskuteczniamy to zaś za pomocą logarytmów w ten sposób:

$$\begin{array}{rl} \log.\ 21 = & 1,3222193 \\ \log.\ 20 = & 1,3010300 \\ \hline \text{więc } \log.\ \frac{21}{20} = & 0,0211893 \end{array}$$

logarytm ten 10 razy wzięty będzie logarytmem $\left(\frac{21}{20}\right)^{10}$ = ... 0,2118930
dodawszy log. 100000cy . . 5,0000000

będzie . . . . 5,2118930 logarytm szukanego kapitału; gdy zaś liczba odpowiadaiąca temu logarytmowi składa się z 6 cyfer; znaydziemy ią podług nº 406=162889,473. Więc 162889zł,473 są ważnością szukaną.

IX. Wiemy iż tu trzeba podzielić $162889^{zł},473$ przez $(\frac{21}{20})^{10}$; co uskutecezniemy tak:

log. liczby 162 889,473 iest 5,211 8930 (nº 406)
odiąwszy odeń log. $(\frac{21}{20})^{10}$ 0,21 18930

zostaie log. . . . . . . 5,0000000 szukanego kapitału pierwiastkowego; logarytm zaś ten iest logarytmem 100000cy, więc, i t. d.

X. Gdy 5 iest dwudziestą częścią ze 100, ieżeli oznaczemy kapitał przez 1, zwiększy się on przez przydanie procentu na końcu roku o $\frac{1}{20}$, a zatém będzie wyrażony przez ułomek $\frac{21}{20}$. Na końcu zaś roku 2go wyrażenie iego będzie $\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$ czyli $(\frac{21}{20})^2$; na końcu r. 3go będzie $(\frac{21}{20})^3$, i t. d. (nº 335). Ztąd widać iż kapitał na końcu każdego r. zwiększa się tu podług postępu ilorazowego którego pierwszy wyraz iest 1, stosunek $\frac{21}{20}$, a wyrazem ostatnim ma być 2. Idzie więc o liczbę wyrazów. Że zaś tu ostatni postępu wyraz = stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów zmnieyszoną o iedność (nº 296), a właśnie ta liczba = liczbie lat przez ile dany kapitał zostać ma na procencie ażeby został podwoiony; oznaczywszy więc pomienioną liczbę wyrazów przez n, będzie $(\frac{21}{20})^n = 2$, a działaiąc przez logarytmy, iest n razy log. $\frac{21}{20}$ch = log. 2ch, czyli

$$n \times \log. \tfrac{21}{20}\text{ch} = \log. 2\text{ch};\ \text{zatém}\ n = \frac{\log. 2\text{ch}}{\log. \frac{21}{20}\text{ch}}$$ (nº 96); log. 2ch iest 0,3010300, log. $\frac{21}{20}$ch iest 0,0211893; więc $n = \frac{0,3010300}{0,0211893}$. Gubiąc przecinek w podzielnéy i dzielniku t. i. powiększaiąc oba wyrazy ułomku 10 milionów razy i uskuteczniaiąc dzielenie $\frac{3010300}{211893}$, znaydziemy iloraz szukany 14lat 2mce 14dni.

XI. Gdy uciągnięto z beczki 1szy garniec za który dolano wody, stopień czystości wina zwrócił się na $\frac{199}{200}$ swego pierwiastkowego stanu który oznacza-my przez iedność. Aby znaleźć co zostanie po 2^{iem} działaniu zważmy iż stopień czystości wina zmienia się w tym samym sposobie; zróbmy więc proporcyią $1:\frac{199}{200}=\frac{199}{200}:x=(\frac{199}{200})^2$. Liczba ta wyraża stopień czystości wina po 2^{em} działaniu. Zrobiwszy ieszcze $1:\frac{199}{200}=(\frac{199}{200})^2:z$, będzie $(\frac{199}{200})^3$ na stopień czystości wina po 3^{ciem} działaniu, i t. d. Zatém moc wina czyli stopień iego czystości zmnieysza się tu za każdém uciągnięciem garca podług postępu ilorazowego którego pierwszy wyraz iest 1, stosunek $\frac{199}{200}$ a wyraz ostatni $\frac{4}{5}$. Idzie tylko o liczbę wyrazów (n° 296) która zmnieyszona o 1, = liczbie garcy uciągnąć się maiących dla sprowadzenia wina do $\frac{4}{5}$ pierwiastkowéy iego czystości. Oznaczywszy pomienioną liczbę wyrazów przez n, będzie $(\frac{199}{200})^n=\frac{4}{5}$, a zatém $n\times$ log. $\frac{199}{200}$ch = log. $\frac{4}{5}$ch; log. $\frac{199}{200}$ch iest $-0{,}0021769$; log. $\frac{4}{5}$ iest $-0{,}0969100$. Lecz że równość między ilościami odiemnemi, iest także między niemi gdy się staną przydayne: będzie $n\times 0{,}0021769=0{,}0969100$; więc $n=\frac{0{,}0969100}{0{,}0021769}$, uskuteczniaiąc dzielenie znaydziemy $44\frac{113}{388}$, t. i. prawie $44\frac{1}{2}$. Jakoż gdyby chciano zrobić pomienione działanie od razu, potrzebaby było ubrać z beczki piątą część z 200 garcy która iest 40, lecz że podług zagadnienia ubiera się zawsze część wody którą dolewaią w beczkę, zatém widoczna iest że liczba razy ile maią powtórzyć działanie powinna być większa niż 40.

XII. Aby rozwiązać to zagadnienie trzeba znać tę prawdę, iż gęstość powietrza iest tém mnieyszą im obiętość któréy odpowiada taż sama ilość tego płynu, iest większa; a zatém, ieżeli zwiększamy obiętość któréy odpowiada dana massa powietrza bez wpuszczenia powietrza nowego, zamknięte rozszerzać się będzie przez skutek naturalnéy swoiéy sprężystości w stosunku zwiększenia obiętości iemu odpowiadaiącéy.

To założywszy, oznaczmy przez 1, gęstość powietrza w stanie naturalnym i takim iak się znayduie pod dzwonem powietrzociągu przed zaczęciem działania. Za pierwszym opuszczeniem stępla obiętość któréy odpowiada massa powietrza zamkniętego pod dzwonem będzie zwiększona w stosunku 8 do 9, a zatém gęstość iego będzie zmniéyszona w stosunku 9 do 8, t. i. iż stosunek gęstości powietrza w stanie naturalnym do gęstości iego za pierwszém opuszczeniem stępla iest iak $1 : \frac{8}{9}$. Ażeby wiedzieć iaki będzie ten stosunek po 2ém opuszczeniu stępla, zróbmy proporcyią $1 : \frac{8}{9} = \frac{8}{9} : x = (\frac{8}{9})^2$. Za 3ciém opuszczeniem stępla będzie $(\frac{8}{9})^3$, i t. d. podług wyrazów postępu ilorazowego którego pierwszym wyrazem iest 1, stosunek $\frac{8}{9}$, a wyrazem ostatnim ma być $\frac{1}{60}$. Liczbę wyrazów tego postępu zmniéyszoną o 1, t. i. liczbę ile razy trzeba obrócić stępel ażeby gęstość powietrza była zmniéyszona 60 razy, znaydziemy, postępuiąc iak w poprzedzaiących zagadnieniach, $34\frac{38}{51}$ blisko; t. i. ieżeli machina iest dobrze urządzona, po 35 obróceniach stępla można być pewnym iż powietrze pod dzwonem iest 60 razy rzadsze niż w stanie naturalnym.

XIII. Wypada tu logarytmy wyrazów średnich dodać a logarytm skraynego wiadomego odiąć lub też dodać iego dopełnienie arytmetyczne (nº 412). Log. liczby $1528\frac{4}{5}$ czyli $\frac{7644}{5}$ iest 3,1843507, ten 4 razy wzięty iest 12,7374028
log. 217u 2,3364597
dopełnienie arytmetyczne logarytmu 3478in 6,4586704
połowa logarytmu liczby 80000 iest
2,4515450 a iego dopełnienie arytmetyczne 7,5484550
Summa 29,0809879

Gdy tu były dwa dopełnienia arytmetyczne, odeymuię 20 z cechy; pozostały log. 9,0809879 z cechą zmnieyszoną o 5 iedności odpowiada zupełnie (oprócz ostatniéy cyfry na którą nie uważamy) liczbie 12050 którą zwracaiąc do prawdziwéy ważności podług cechy, będzie (n° 404) liczba 1205000000 4tym wyrazem szukanym.

XIV. Działaiąc przez logarytmy, będzie l. $\frac{2}{3}$ + l. $\frac{5}{7}$ + log. $\frac{4}{11}$ = l. 2 + l. 5 + l. 4 — l. 3 — l. 7 — l. 11. Uskuteczniaiąc znaydziemy:

	l. 2ch	= 0, 30103
	l. 5	= 0, 69897
	l. 4	= 0, 60206
dopełnie: arytm.	l. 3	= 9, 52288
dopełnie: arytm.	l. 7	= 9, 15490
dopełnie: arytm.	l. 11	= 8, 95860
		29, 23844

Gdy tu są trzy dopełnienia arytmetyczne, cecha iest za wielka o 30 iedności (*ob.* przypis: pod n° 410); odéymuiąc 26 od cechy, będzie 3,23844 na logarytm liczby ieszcze dziesięć tysięcy razy większéy niż ułomek szukany, liczba ta zawiera się między 1731 i 1732, będzie zatém $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{11}=0{,}1731$ zbliżone do dziesięciotysiącznych części.

XV. Matematyk przyiął rozwiązanie bez żądania wygranéy i rzekł: doday 6526zł. do ważności twoich luidorów, odeymiy od wypadku 10000, reszta będzie nadmiarem twoich luidorow, nad summę 3474zł. Sprawdzaią i znayduią iż tak iest w istocie. Zagaduiący był na to zdumiany nie znał bowiem własnosci dopełnień arytmetycznych.

Mógłby był matematyk kazać sobie powiedzieć summę wypadaiącą po dodaniu 6526zł. która daymy iżby była 24478zł., a natychmiast wyraźnieby widział iż 14478zł iest szukanym nadmiarem a 17952zł całą summą znayduiącą się w kiesie luidorów.

Noty do czterech głównych działań arytmetycznych.

Co do dodawania.

Jeżeli mamy wiele liczb dodać razem; można dla ułatwienia odbyć kilka dodawań cząstkowych, i dodać razem summy szczególne z tamtych wypadłe. Widoczna iest iż połączenie tych wszystkich summ, całą summę okaże.

Co do odeymowania.

Odeymowanie można zamienić w dodawanie za pomocą dopełnień arytmetycznych (n° 410). Sposób ten szczególniéy użytecznym iest wtenczas gdy iest wiele dodawań i odeymowań następnych, co się okazuie z przypisku do n° 410.

Co do mnożenia.

Gdy mnożnik zawiera cyfry wielokrotne iedne względem drugich, natenczas iloczyny cząstkowe znayduią się bardzo łatwo. Rozmnożywszy, mnożną np. przez 3, aby ią rozmnożyć przez 6, biorę tylko 2 razy iloczyn znaleziony z rozmnożenia przez 3, a wziąłbym go 3 razy, maiąc mnożyć liczbę podaną przez 9. Rozmnożywszy zaś mnożną przez 8 gdybym ią miał mnożyć przez 4 wziąłbym tamtego iloczynu połowę; i t. d. pamiętaiąc zawsze na właściwe miéysca cyfer iloczynów cząstkowych.

Wiemy iż mnożenie można uskutecznić zaczynaiąc przez cyfry naywyższe mnożnika (obacz przypisek do n° 70). Postępowanie to przez które możemy zaraz poznać cyfry maiące naywiększą wartość a na których częstokroć przestaiemy, służy do skrócenia mnożeń z dziesiętnemi gdy znaczną ich liczbę zawieraią czynniki, a iloczyn ma być zbliżony tylko do kilku dziesiętnych.

Niech będzie np. 576,24863957 do pomnożenia przez 269,457 z czego iloczyn ma być tylko mniéy iak o iednę tysiączną zbliżony. Trzeba tu mieć wzgląd na iloczyny cząstkowe mogące znacznie wpływać na części tysiączne. I tak rozmnożywszy 6 dziesięćtysiącznych mnożnego przez 9 iedności mnożnika, mieć będę 54 dziesięćtysiącznych t. i. 5 tysiącznych które chcę zachować. Ażeby sobie zapewnić dokładność nieiako wyższą niż żądaną, będę mnożył setne tysiączne mnożnego przez iedności mnożnika; lecz gdy cyfry mnożnika maią iedności dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy większe, mnożyć będę przez nie dziesiętne, dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy mniéysze niż te które były rozmnożone przez iedności mnożnika; przeciwnie gdy cyfry mnożnika zawieraią części dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy mniéysze niż iego iedności, dosyć iest mnożyć przez nie cyfry mnożnego dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy wyższéy wartości niż te które były rozmnożone przez iedności mnożnika. Widać iż tym sposobem ostatnie cyfry iloczynów cząstkowych będą iednościami tegoż samego rzędu względem iedności głownéy mnożnego, i dla tego też znaydować się muszą w iednéy kolumnie.

W podanym przykładzie napisawszy mnożnik pod mnożnym tak, ażeby tego setne tysiączne oznaczone kropką, były w iednéyże kolumnie z iednościami tamtego, zaczynam mnożyć przez 2, które że są stami względem iedności mnożnika, zaczynam więc od mnożenia przez nie cyfry 5 która zawiera części sto razy mniéysze względem iedności cyfry oznaczonéy 3. Maiąc mnożyć przez 6 dziesiątków mnożnika zaczynam od mnożenia 9 które są częściami dziesięć razy mniéyszemi względem iedności cyfry oznaczonéy 3, i t. d. W znalezionym iloczynie całym 155274,22943 pomiiam dwie ostatnie cyfry 43, i mam iloczyn żądany do tysiącznych części przybliżony 155274,229.

$$
\begin{array}{r}
576{,}2486\dot{3}957 \\
269457 \\
\hline
11524972790 \\
3457491834 \\
518623767 \\
23049944 \\
2881240 \\
403388 \\
\hline
155274{,}22943
\end{array}
$$

Że zaś 29 zbliża się bardzo do 30 i że się pominęło niektóre cyfry w iloczynie cząstkowym, iloczyn cały mniéy niż o iednę setną zbliżony będzie 155274, 23. Gdybyśmy tu uskutecznili mnożenie zwyczaynym sposobem, znaleźlibyśmy iloczyn

155274,2296726i349 zkąd widziemy że iloczyn sposobem zbliżonym wyrachowany nie różni się od iloczynu dokładnego iak o 2 dziesięciotysiączne dopiero, i następnie mniéysze części.

Co do dzielenia.

W dzieleniu użyć można następuiącego sposobu skrócenia za pomocą którego znayduie się iloraz bardzo łatwo bez większego uchybienia iak o iedność: wykréśla się w podzielnéy z prawéy strony, tyle cyfer mniéy iedną, ile ich iest w dzielniku, przez ten zaś uskutecznia się dzielenie pozostałey podzielnéy aż do ostatniéy cyfry zachowanéy. Potém zamiast spuszczania obok reszty następuiących cyfer w podzielnéy, opuszcza się cyfra iedności w dzielniku i posuwa się dzielenie zmniéyszaiąc dzielnik o iednę cyfrę za każdém dzieleniem następném aż do ostatniéy cyfry.

Niech będzie np. liczba 794386253 do podzielenia przez 8647. Biorę liczbę 794386 za podzielną, a znalazłszy dwie pierwsze cyfry ilorazu z resztą 7509, dzielę ią przez dzielnik w którym opuszczam 7 iedności naznaczone kropką; znalazłszy trzecią cyfrę ilorazu z resztą 597 dzielę ią znowu przez dzielnik w którym opuszczam 4 dziesiątki i t. d.

Można tu widzieć wzór porównawczy dwóch działań dzielenia, zkąd się okazuie że iloraz sposobem skróconym wyrachowany różni się od prawdziwego o iedność.

Dzielenie zwyczayne		*Dzielenie skrócone*	
794386253	8647	794386~~253~~	8647
16156	91868	16156	91869
75092		7509	
59165		597	
72833		81	
(3657)		(9)	

Sposób ten gruntuiący się na zasadzie wyłożonéy pod n° 106; 107; szczególniéy iest dogodny gdy w liczbach podanych są części dziesiętne, a nie ma być lub bardzo mało cyfer całości w ilorazie, natenczas bowiem dzielnik zaraz się zaczyna zmniéyszać.

Naprzykład, maiąc dzielić 155274, 229 672 67 przez 269,457; zważam nayprzód że powinno być trzy cyfry całości w ilorazie, (n° 99), a zachowuiąc kilka tylko cyfer dziesiętnych, szukam zwyczaynym sposobem dwóch pierwszych cyfer ilorazu, potém zaś używaiąc skrócenia o którém mówiemy znaydę iloraz który w tysiącznych dopiéro częściach różnić się będzie od prawdziwego. Gdybym zaś zwyczaynym sposobem znalazł trzy pierwsze cyfry ilorazu, natenczas różniłby sie on od prawdziwego dopiéro w setnych tysiącznych.

```
1552742296... | 269457
 20̆54572     |---------
  168373      | 576,249
    6703
    1315
     239
     (5)
```

Skrócony ten sposób dzielenia łatwo iest zastosować w zamianie na dziesiętne ułomków zwyczaynych wielkiemi liczbami wyrażonych.

Gdy iaką wielką liczbę wypada często brać za dzielnik lub za mnożną, natenczas wygodnie iest napisać sobie pod ręką szczególne iloczyny téy liczby przez pierwsze dziewięć liczb poiedynczych:

np. $1 \times 13913 = 13913$
$2 \times 13913 = 27826$
$3 \times 13913 = 41739$
$4 \times 13913 =$ i t. d. (porówn: n° 339 i 354).

Jeżeli mam ułomek do pomnożenia przez liczbę dzielącą dokładnie iego mianownik, otrzymam zaráz prosty wypadek dzieląc mianownika. Wzaiemnie maiąc ułomek podzielić przez liczbę dzielącą dokładnie iego licznika otrzymam zaráz prosty wypadek dzieląc licznika (n° 126).

Maiąc więc do pomnożenia ułomek przez iaką liczbę która się daie rozłożyć na 2 czynniki, a ieden z tych zawiera się w mianowniku; podzielę go przez tenże czynnik, a licznik pomnożę iuż tylko przez drugi czynnik; np. aby rozmnożyć $\frac{27}{25}$ przez 15 napiszę $\frac{81}{5}$. Podobneż skrócenie ma miéysce w dzieleniu np. $\frac{27}{25} : 12 = \frac{9}{100}$.

KONIEC.

REJESTR RZECZY.

O działaniach głównych arytmetyki na liczbach całych i dziesiętnych.

O działaniach głównych arytmetyki z ułomkami zwyczaynemi.

40

REJESTR

Niektórych rzeczy szczególnych poprzedzaiącym rejestrem ogólnym nie wskazanych.

TABLICA
NIEKTORYCH MIAR I SKROCEŃ
przez które ie wyrażamy.

CO DO MONET.

# znaczy	dukat	1 dukat czyli czerwony złoty waży	3 tal:
tal.	talar	1 talar	6 zło:
zł.	złoty	1 złoty	30 gr:
gr.	grosz	1 grosz	3 szl:
szl.	szeląg		

CO DO WAG.

Cetn: znaczy . . .	cetnar	1 cetnar waży .	4 kamienie
k.	kamień	1 kamień . .	25 funtów
℔	funt	1 funt . . .	2 grzywny
G. lub M. grzywna c.	marka	1 grzywna . . .	8 uncyy
unc. lub ℥	uncya	1 uncyia	2 łuty
ł.	łut	1 łut	4 drachmy
dr. lub ʒ . . .	drachma	1 drachma . .	3 skrupuły
skr. lub ℈ . . .	skrupuł	1 skrupuł . . .	24 gran
gr	gram	1 gram . . .	$5\frac{1}{2}$ graników
grk.	granik	1 granik .	8 miligramów

CO DO MIAR DŁUGOŚCI.

sąż. znaczy	sążeń	1 sążeń zawiera .	3 łokcie
łok.	łokieć	1 łokieć	2 stopy
st.	stopa	1 stopa	12 cali
c.	cal	1 cal.	12 liniy
l.	linia	1 liniia . . .	2 milimetry.
m.mt.	milimetr		

CO DO MIAR OBIĘTOŚCI.

kor. znaczy . . .	korzec	1 korzec zawiera	4 ćwierci
ćw.	ćwierć	1 ćwierć	8 garcy
gar.	garniec	1 garniec . . .	4 kwarty
kw.	kwarta	1 kwarta . . .	4 kwaterki

CO DO CZASU.

d. znaczy	dzień	1 dzień ma . .	24 godzin
god.	godzina	1 godzina . .	60 minut
′	minuta	1 minuta . . .	60 sekund
″	sekunda	1 sekunda . .	60 tercyy

OMYŁKI W DRUKU.

Karta 23	wiersz 12,	dziewięciu	*czytay*	dziesięciu
— 34	w. 9,	iaką	— —	iako
— —	w. 19,	5,49	— —	549
— 58	w. 17,	$\frac{15}{12}$	— —	$\frac{5}{12}$
— 74	w. 7 *od dołu*,	$\frac{28}{19}$	—	$\frac{28}{9}$
— 75	w. 19,	z $\frac{1}{9}$	— —	z $\frac{2}{3}$
— 80	w. 18,	zbliżoną że	—	zbliżoną do
— —	w. 3 *od dołu*,	$\frac{1}{3}+ {}_{7+1}$	—	$\frac{1}{3}+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}$
— tamże —	—	$\frac{1}{3}+\cfrac{}{\frac{106}{15}}$	—	$\frac{1}{3}+\cfrac{1}{\frac{106}{15}}$
— 81	w. 3	365	— —	355
— 129	w. 17	setną	— —	tysiączną
— 134	w. 7, *od dołu*,	$\div$ 3 . 6 . 12.	—	$\div$ 3 . 6 . 9 . 12.
— 138	w. 2.	iloczynem skraynych i iloczynem	*czytay*	summą skraynych i summą
— 147	w. 18,	przez 5	— —	przez 15
— 152	w. 15,	2 i 128	— . —	4 i 128.
— —	w. 21,	2	— —	4
— —	w. 23,	2	— —	4
— 182	w. 4,	$1\times\frac{1}{5}$	— —	$1+\frac{1}{5}$
— 183	w. 1,	po 2 latach	—	po 3 latach
— —	w. 11,	$1\times\frac{1}{12}$	— —	$1+\frac{1}{12}$
— 194	w, 7, *od dołu*,	d czasu	—	od czasu
— —	w. 5 *od dołu*,	a wypłata	—	ta wypłata
— 195	w. 29,	$\frac{8}{7}$	— —	$\frac{8}{4}$
— 197	w. 2,	$\frac{200\times1}{1}$	— —	$\frac{200\times1}{2}$
— —	w. 6,	4000	— —	400
— 238	w. 7,	3,009	— —	0,009