Tikhomandritzky

INTÉGRALES ABÉLIENNES

ÉLÉMENTS

DE LA

THÉORIE DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

ÉLÉMENTS

DE LA

THÉORIE

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

PAR

M. TIKHOMANDRITZKY,
PROFESSEUR ÉM. À L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE KHARKOW (RUSSIE).

NOUVELLE ÉDITION, REVUE, CORRIGÉE, COMPLÉTÉE DE NOTES
ET EN PARTIE REFAITE ENTIÈREMENT.

ST. PÉTERSBOURG.
IMPRIMERIE DE A. BÖHNKE.
1911.

Préface.

Fondée par le célèbre analyste norvégien *Abel*, la théorie de ses intégrales a reçue depuis un grand développement grâce aux travaux d'Abel lui même et de géomètres allemands: Jacobi, Richelot, *Göpel* et *Rosenhain,* surtout de *Riemann* et de ses disciples comme Roch, C. Neumann, Koenigsberger, Prym, Krazer, Weber, Thomae; ensuite de *Clebsch* et Gordan et de leurs disciples — Lindemann, Klein, Burkhardt, beaucoup de Noether; enfin de *Weierstrass*, Schottky, Hettner, *Dedekind* et *H. Weber*; en France de Ch. Hermite, Briot et Bouquet, Elliot, Raffy, Appell, Goursat, Picard, Poincaré et d'autres. Il y a bien à distinguer maintenant cinq doctrines principales en cette théorie, les noms des fondateurs desquelles nous avons eu le soin de souligner. La première entre elles, celle de Göpel et de Rosenhain, la plus rapprochée de celle d'Abel par l'époque de sa fondation, en est la plus éloignée par ses principes: on sait que ces savants ont cherché, et non sans succès, d'étendre aux fonctions abéliennes la méthode inverse de Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques, qui prend les fonctions Θ pour point de départ. Malgré les contributions que lui ont faits depuis plusieurs des savants eminents, mentionnés plus haut, et tout récemment encore M. Wirtinger, elle reste encore en arrière des autres. Celle de Riemann, basée sur la considération des surfaces à feuillets superposés, nommées d'après lui, et le principe de Dirichlet, est la plus cultivée et la plus répandue. Elle est développée dans son célèbre mémoire presque tout à fait sans calcul *). En

*) C'est ce que Jacobi a prédit l'an 1835: „Diese Theorie muss durch einfache Betrachtungen durchgeführt werden, und man wird in ihrer Ausbildung keine Rechnung mehr brauchen, welche durch die Intensität der Gedanke ersetzt wird. Diese Theorie muss daher nothwendig der Glanzpunkt der Mathematik werden, weil hier die Resultate ohne Rechnung unmittelbar zur Anschauung gelangen". Leçon 69-me sur les „Elliptische Transcendenten", où l'on trouve une digression sur les intégrales hyperelliptiques. (Extrait d'une copie manuscripte des cahiers, faites par Rosenhain

restant pour toujours admirable et un témoin du grand génie de Riemann, elle a pourtant les deux inconvenients: d'une part celui d'être synthétique et d'autre d'emprunter ailleurs les fonctions Θ. C'est ce qui a suggéré à Clebsch et Gordan l'idée de construire cette théorie sur une autre base, en liant la théorie des intégrales abéliennes avec celle des courbes algébriques. L'étude conjointe de ces deux théories les a amenés par le théorème d'Abel aux fonctions $T_{\xi\eta}(x)$, qui conduisent aux fonctions Θ. Mais le chapitre, consacré aux fonctions $T_{\xi\eta}(x)$, est l'un des plus difficiles de leur livre tellement, que Briot a préféré dans sa „Théorie des fonctions abéliennes", après être arrivé au problème d'inversion, d'exposer la théorie des fonctions Θ indépendamment de $T_{\xi\eta}(x)$, comme l'a fait Riemann. Cette manière de traiter les intégrales abéliennes conjointement avec la théorie des courbes algébriques a beaucoup contribué aux progrès d'analyse et de géométrie, mais ne parait pas être naturelle et ne rend que plus difficile la première théorie, en lui ajoutant les difficultés de la deuxième. Elle a reçu depuis beaucoup de perfectionnements, surtout de la part de M. *Noether*, qui l'a rapproché de celle de Weierstrass; mais malgré çà elle est moins répandue que celle de Riemann, et parait être peu à peu abandonnée.

Toutes les trois théories sont beaucoup éloignées des considérations d'Abel — aussi par rapport à la généralité, car pour amener les conclusions jusqu'à la fin, on y devait introduire des restrictions diverses; la dernière, dont il nous reste à parler, celle de *Weierstrass*, longtemps la moins connue des toutes, même en Allemagne, mais la plus naturelle, la plus simple et la plus élégante, s'y rattache le plus étroitement. Chez Weierstrass *toute la théorie se développe naturellement d'une identité*, trouvée par *Abel* dans le mémoire: „Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes" *), (pour les transcendantes d'un ordre plus élevé encore), — résultat, qui est obtenu plus tard aussi par M. Noether. Weierstrass tire de là en premier lieu les relations entre les périodes des intégrales de première et de deuxième espèces, analogues à la relation connue de Legendre dans la théorie des fonctions elliptiques; les formes des intégrales normales de deuxième et de troisième espèce, et le théorème de l'échange de paramètres et d'arguments pour les dernières;

---

d'après les leçons de Jacobi en 1835, comme je l'ai entendu de mon père et aussi de L. Kronecker. Ces leçons sont très dignes de voir le jour, — mon avis, partagé aussi par L. Kronecker.)

*) V-me mémoire de la nouvelle édition de ses oeuvres, § 2.

les fonctions primaires (Primfunktionen) et les expressions par elles des intégrales des trois espèces, de même que des fonctions algébriques rationnelles de la même irrationalité, de laquelle dépendent les intégrales; de là, comme un simple corollaire, le célèbre théorème d'Abel; d'un cas particulier de celui-ci il arrive au problème de Jacobi; en exprimant les sommes des intégrales de deuxième espèce et aussi celles de troisième espèce en fonction de celles de première, ayant les mêmes limites supérieures, il trouve, que les sommes des intégrales fondamentales de deuxième espèce pour les valeurs des arguments augmentées de certaines constantes, sont les dérivées partielles d'une même fonction auxiliaire, par laquelle tout peut être exprimé, aussi les sommes des intégrales de troisième espèce; le théorème d'Abel pour ces dernières dans un cas particulier conduit de suite, en passant du logarithme au nombre, à la fonction Θ générale, dont les propriétés diverses se déduisent ci-après de sa définition elle-même, de même que son développement en série.

Telle est la belle théorie du célèbre analyste allemand.

Tous ces résultats sont tirés et démontrés par Weierstrass à l'aide des développements en séries pour les divers endroits de „l'image algébrique" (algebraisches Gebilde), défini par l'équation algébrique $f(x, y) = 0$, — les développements, dont on n'a besoin de savoir le plus souvent que la forme, — et il parait que c'est cette méthode de démontrer, qui a été le plus remarquée, plus que la théorie elle-même. Mais tous ces résultats peuvent être obtenus aussi par d'autres moyens, plus algébriques, comme l'a montré M. Noether. M. Noether traite cependant la théorie, à la manière de Clebsch et Gordan, à l'aide des considérations et du langage géométriques et des variables (coordonnées) homogènes, ce qui exige du lecteur des connaissances considérables en géométrie et en théorie des formes — connaissances étrangères à la théorie qui nous occupe. J'ai tenté à rendre son analyse purement algébrique et surtout à remplacer sa méthode pour la recherche du genre et des fonctions adjointes par une autre plus simple et plus directe, ce que j'ai réussi à faire en 1893 *). Alors j'ai écrit en russe mes „Éléments de la théorie des intégrales abéliennes", un livre, qui donne une exposition de la belle théorie de Weierstrass la plus simple, la plus proche des éléments d'Analyse, et les moyens d'explorer à fond directement

*) Annales de l'École Normale supérieure. An 1893, № V; aussi: Bulletin des sciences mathématiques, même année, février.

chaque cas particulier. Pour rendre l'exposition de la théorie plus facile et plus compréhensible au lecteur, je m'ai permis de recourir aux surfaces de Riemann, lesquelles donnent un moyen très commode pour indiquer brièvement le chemin d'intégration, et de démontrer quelques propositions qui s'y rapportent, à la manière de Riemann et de M. C. Neumann; mais je ne suppose chez le lecteur aucune connaissance antérieurement acquise de ces surfaces; et en général, les connaissances préalables sont réduites chez moi au minimum possible, celui des éléments d'algèbre supérieure, du calcul différentiel et intégral et des éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, qu'on trouve dans les cours usuels. (Le plan de l'ouvrage montre la table des matières détaillée ci-jointe.)

Ce livre fut imprimé l'an 1895 par la Société mathématique de Kharkow. Mais ma langue maternelle présentant un obstacle à sa propagation dans les pays, où l'on s'intéresse le plus à cette théorie, je me suis décidé d'en faire une édition française, après y avoir apporté quelques améliorations.

Pendant que je cherchais vainement un éditeur pour mon livre qu'on jugeait à tort être plus spécial qu'il l'est en réalité *), il vient de paraître à Kieff l'an 1897 un autre livre russe sur le même sujet, du à l'étude du mien, appartenant à Mr. le prof. Ermakoff. J'y ai trouvé quelque chose, dont j'ai jugé bon de profiter pour l'édition française; mais s'étaient principalement mes propres recherches ultérieures, publiées depuis dans les „Communications de la Société Mathématique de Kharkow“, dans le „Compte-rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens, ténu à Paris du 6 au 12 Août 1900“, — „Sur l'évanouissement des fonctions Θ de plusieures variables“, et dans le tome CXXVI du „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ de Crelle, sous le titre: „Übergang von den Abelschen Integralen zu den Thetafunktionen“, d'après lesquelles sont faites les corrections et les changements dans cette édition de mon livre. L'impulse au dernier travail cité m'a été donné par le IV. Band des „Mathematische Werke von K. Weierstrass“ contenant ses „Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten“, qui vient de paraître enfin l'année 1902 et était très utile pour moi, lorsque j'ai repris la révision de mon travail. Le dernier chapitre j'ai écrit de nouveau d'après mes derniers mémoirs cités tout à l'heure.

---

*) Que l'intérêt ne manquait pas au sujet de mon livre, on l'aperçoit de ce fait, que presque en même temps avec le mien étaient publiés les livres des Mrs. *Appell et Goursat* (Paris, 1895), *H. Stahl* (Leipzig, 1896), *Baker* (Cambridge, 1897).

La même année avec les „Vorlesungen“ de Weierstrass a paru le livre des Mrs. *K. Hensel* et *G. Landsberg*: „Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale“. Leipzig, 1902, consacré à l'exposition de la cinquième théorie des fonctions algébriques et des intégrales abéliennes, due à Mrs. *R. Dedekind* et *H. Weber*; mais je ne pouvais pas en profiter, leur exposition du même sujet différant beaucoup de la mienne. Par la même raison, aussi le livre de Mr. *H. J. Baker*: „An introduction to Abel's theorem and allied Theory, included the theory of the theta“. Cambridge, 1897, ne pouvait apporter des changements dans mon exposition, qui *reste nouvelle jusqu'à nos jours, différant tout à fait des autres expositions tant antérieures, que postérieures d'elle.*

Ma tache était de rendre la théorie des intégrales abéliennes exempte de toutes les difficultés étrangères au sujet même, qui ne sont dues qu'aux méthodes employées par divers savants pour son développement et son exposition, et en présenter les éléments sous la forme naturelle et simple, sans sacrifier pour cela de la généralité, — comme on l'a fait le plus souvent, — et en déduisant en même temps la théorie des thétafonctions de celle des intégrales elles-mêmes. J'ai des raisons pour penser que ma tache n'était pas sans succès, que mon livre peut être très utile pour ceux, qui voudraient se faire une idée nette de la belle théorie des intégrales abéliennes en marchant directement vers le but, sans dépenser beaucoup de temps et d'énergie pour les études préparatoires, qu'exigent les autres expositions, — et que mon exposition n'est pas sans intérêt scientifique même pour les savants distingués.

C'est pourquoi je prend la liberté de mettre devant le monde savant l'édition française de mon ouvrage, pour qu'elle rende à la science et aux étudiants le service, dont elle est capable, dans tous les pays, où l'on s'intéresse aux intégrales abéliennes.

Cette édition, entièrement nouvelle pour les étrangers, présentera pour mes compatriotes une deuxième édition de mon livre, paru il y a quinze ans en langue russe, — revue, corrigée, complétée de notes et en partie refaite de nouveau.

Je n'ai cité que les ouvrages, dont je me suis servis en écrivant ce livre et puis en préparant son édition française. Les indications plus complètes de la littérature des intégrales abéliennes on trouvera dans le livre de Mr. Baker, aussi dans le livre bien connue de Géométrie analytique de Clebsch-Lindemann, lequel est traduit en français.

Je ne puis pas terminer ce préface sans exprimer ma profonde reconnaissance à Mr. le Ministre de l'Instruction publique L. A. Kasso pour la subvention considérable, qu'il m'a assigné des ressources du Ministère, lorsque j'ai commencé l'impression de ce livre, et aussi aux Mrs. E. Billon et F. Erfurt, possesseurs de l'imprimerie de A. Böhnke, comme pour les conditions allégées de payement, autant pour leur empressement de remplir toutes les exigences d'un ouvrage mathématique sur un sujet si sérieux.

M. Tikhomandritzky.

Gatschina,
le 16 Septembre 1911.

Table de matières.

Éléments de la théorie des intégrales abéliennes.

Partie I-re (algébrique).

Introduction.

1. Soit donnée une équation algébrique irréductible:

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0 \tag{1}$$

entre les deux variables x et y, du degré m en x et du degré n en y. En différentiant cette équation on aura la rélation suivante entre leurs différentielles:

$$\frac{dx}{F'_y(x,y)}=-\frac{dy}{F'_x(x,y)}; \tag{2}$$

en multipliant les deux membres de cette égalité par une fonction quelconque rationnelle des variables x et y, soit $f(x,y)$, et en intégrant, nous aurons sous la double forme

$$\int f(x,y)\frac{dx}{F'_y(x,y)}=-\int f(x,y)\frac{dy}{F'_x(x,y)} \tag{3}$$

l'intégrale abélienne la plus générale. C'est à cette forme que peut être ramenée toute autre intégrale d'une fonction rationnelle de x et de y, liées par l'équation (1), comme

$$\int \Phi(x,y)\,dx: \tag{4}$$

on n'a qu'à multiplier et diviser la fonction $\Phi(x,y)$ par $F'_y(x,y)$; alors, en posant

$$\Phi(x,y)\,F'_y(x,y)=f(x,y), \tag{5}$$

on aura l'intégrale du côté gauche de l'égalité (3).

Si l'on prend x pour la variable indépendante, alors la fonction rationnelle la plus générale de x et de y pourra toujours être réduite d'après Abel à la forme

$$(6) \qquad f(x,y) = \frac{f(x, \overset{n-1}{y})}{\psi(x)},$$

$f(x, \overset{n-1}{y})$ et $\psi(x)$ étant des fonctions entières de leurs variables, la première du degré $n-1$ par rapport à y; de cette manière l'intégrale du côté gauche de l'égalité (3) prend définitivement la forme:

$$(7) \qquad \int \frac{f(x, \overset{n-1}{y})}{\psi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)}.$$

C'est sous cette forme, adoptée par Abel, que nous allons étudier les intégrales abéliennes, cette forme étant plus naturelle et plus simple que la forme homogène d'Arongold, adoptée par l'école de Clebsch et Gordan.

2. A chaque valeur de x il correspond d'après l'équation (1) du § précédent n valeurs de y, généralement différentes entre elles; aussi l'intégrale (7) n'aura un sens déterminé que si l'on donne avec la suite continue des valeurs de la variable x:

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, X,$$

la suite des valeurs correspondantes de y:

$$(2) \qquad y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, Y,$$

c'est-à-dire telles, que pour chaque valeur de i on a identiquement

$$(3) \qquad F(\overset{m}{x_i}, \overset{n}{y_i}) = 0.\text{*)}$$

C'est pourquoi on écrit souvent les intégrales abéliennes définies de cette manière:

$$(4) \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{f(x, \overset{n-1}{y})}{\psi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)}.$$

L'ensemble des valeurs particulières x_i, y_i des variables x et y, satisfaisant identiquement à la condition (3), on nomme d'après Briot et

---

*) L'ensemble complet de toutes valeurs des deux variables x et y, satisfaisant identiquement à cette équation, *Weierstrass* a nommé „das algebraische Gebilde", c.-à.-d. „l'image algébrique".

Bouquet *un point analytique**), et la variation de l'ensemble (x, y) de (x_0, y_0) à (X, Y) par la série continue des ensembles (x_i, y_i), x_i et y_i désignant les membres correspondants des séries (1) et (2), *le mouvement* du point analytique suivant *ce chemin*. En parlant du point x, nous entendrons toujours par là le point du plan, dont l'abscisse est égale à la partie réelle de x et l'ordonnée au coéfficient de $\sqrt{-1}$, en supposant cette variable complèxe. Ces parties de la variable complèxe x, variant toutes les deux dans une certaine dépendance l'une de l'autre, le point représentant du plan, le point x, comme nous dirons, décrira une certaine courbe, qui sera fermée, lorsque le point x sera arrivé au point de départ. Une construction analogue pourra être faite pour la variable y dans un second plan; alors à chaque point x du premier plan correspondront en général n points différents dans le second (et à chaque point y du second plan m points, en général différents, du premier), qui décriront autant des courbes dans ce second plan, lorsque le point x décrira une courbe dans le premier. Si le point x décrira dans son plan une courbe fermée, les n points correspondants de y décriront chaqu'un dans le sien les courbes qui pourront n'être pas fermées, du moins quelquesunes. On dit d'un point analytique (x, y) qu'il a décrit une courbe fermée, lorsque ce n'est pas seulement le point x qui a décrit une telle courbe dans son plan, mais aussi le point représentant la valeur choisie des n valeurs correspondantes de y l'a fait dans le sien. En considérant les deux plans en même temps, on fait usage d'une méthode applicable aux fonctions de plusieurs variables indépendantes complèxes en nombre quelconque; mais pour l'étude des intégrales abéliennes sont beaucoup plus appropriées les surfaces de *Riemann* à feuillets multiples superposés qu'on trouvera décrites dans le premier chapitre de ce livre. Weierstrass s'en passait dans ces leçons; mais si l'on pénétre plus profondement dans ses éxpressions, on peut rémarquer leur emploi implicit,— tellement sont elles naturelles dans cette théorie. Mais alors leur emploi explicit est préférable, car l'auteur en gagne la facilité d'exposition, le lecteur celle de la présentation et de l'intelligence de l'exposé. Le secours que nous nous permettons de ces surfaces ne sera pas en contradiction avec le caractère purement analytique, que nous désirons donner à notre exposition de la théorie, car nous ne les emploierons que

*) *Weierstrass* l'appelle „eine Stelle des algebraischen Gebildes", c.-à.-d. „un lieu de l'image algébrique".

comme un moyen clair et précis pour indiquer *le chemin d'intégration*, c'est-à-dire, la suite des valeurs correspondantes de x et de y, par lesquelles passe le point analytique d'une limite de l'intégrale à l'autre.

3. Les propriétés de l'intégrale abélienne [(7) § 1] dépendent en premier lieu du caractère de la fonction algébrique implicite y de x, définie par l'équation (1) § 1, en second lieu de celui de la fonction rationnelle des deux variables x et y: $\dfrac{\overset{n-1}{f(x, y)}}{\psi(x)}$; donc nous devons commencer l'étude des intégrales abéliennes par l'étude de la fonction algébrique y de x, définie par l'équation irréductible (1) § 1, — ce qui fera l'objet du premier chapitre, où nous ferons connaître aussi les surfaces de Riemann, comme nous l'avons déjà dit, — et puis passer à l'étude des fonctions rationnelles de x et y, — ce qui fera l'objet du second chapitre; c'est là aussi, que nous allons déduire l'identité fondamentale, dont nous avons fait mention dans la préface; les chapitres suivants seront consacrés à l'études des intégrales et la dernière à celle de la fonction-Θ.

Chapitre I.

Les propriétés d'une fonction implicite, définie par une équation algébrique irréductible.

4. De l'équation irréductible

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0, \tag{1}$$

où l'on a

$$F(\overset{m}{x},\overset{n}{y}) = f_0(\overset{m}{x})\, y^n + f_1(\overset{m}{x}) y^{n-1} + \ldots + f_{n-1}(\overset{m}{x})\, y + f_n(\overset{m}{x}), \tag{2}$$

$f_0(\overset{m}{x})$, $f_1(\overset{m}{x}), \ldots f_{n-1}(\overset{m}{x})$, $f_n(\overset{m}{x})$ étant des polynomes du degré m en x, on tire pour chaque valeur de cette variable n valeurs de la variable y, qui sont en général finies et différentes entre elles, comme l'on sait; il n'y a d'exception que pour les valeurs de x satisfaisant à l'équation

$$f_0(\overset{m}{x}) = 0, \tag{3}$$

lorsque quelquesunes des valeurs de y deviènnent infinies, et aussi pour celles qui avec les valeurs correspondantes de y satisfont outre l'équation (1) encore à l'équation

$$F'_y(x,y) = 0, \tag{4}$$

lorsque plusieurs des valeurs de y deviènnent égales entre elles. En éliminant y de l'équation (4) à l'aide de l'équation (1), on aura l'équation

$$\Delta(x) = 0, \tag{5}$$

où l'on a

$$\Delta(x) = [f_0(\overset{m}{x})]^{n-2} \prod_{i=1}^{i=n} F'_y(x, y_i), \tag{6}$$

$y_1, y_2, \ldots y_n$ étant les n valeurs de y pour la valeur considérée de x. La fonction $\Delta(x)$ s'appelle le *discriminant* de l'équation (1) par rapport à y; l'équation (5) donne les valeurs de x, pour lesquelles plusieurs des valeurs de y, défini par l'équation (1), deviènnent égales entre elles. Le résultant des équations (1) et (4) ne diffère que par un facteur numérique de celui des équations (4) et celle-ci:

$$nF(\overset{m}{x},\overset{n}{y}) - y\, F'_y(x,y) = 0, \tag{7}$$

qui sont toutes les deux du degré $n-1$ en y; donc le discriminant $\Delta(x)$ sera du degré $2(n-1)$ par rapport aux coéfficients de l'équation (1), et comme ceux-ci sont du degré m par rapport à x, nous en concluons qu'il sera du degré

$$2m(n-1) \tag{8}$$

par rapport à x. Le degré du discriminant deviendra inférieur à ce nombre, lorsque quelquesunes de ses racines s'éloigneront à l'infini. Donc pour le nombre des valeurs de x finies ou infinies, donné par la formule (8), l'équation (1) pourra donner des valeurs égales pour y; mais il est possible que ces valeurs de x ne seront pas toutes distinctes, autrement à dire, l'équation (5) pourra avoir des racines égales. Les valeurs distinctes et finies de x seront déterminées par l'équation d'un certain degré $\mu < 2m(n-1)$ par rapport à x:

$$\Delta_1(x) = 0, \tag{9}$$

en désignant par $\Delta_1(x)$ le quotient de la division du polynome $\Delta(x)$ par son le plus grand diviseur commun avec sa dérivée $\Delta'(x)$, c'est-à-dire, en posant

$$\Delta_1(x) = \Delta(x) : D\,[\Delta(x), \Delta'(x)]. \tag{10}$$

5. L'ensemble de toutes les paires des valeurs correspondantes de x et de y, réelles ou imaginaires, satisfaisant à l'équation (1) § 4, *K. Weierstrass* appellait *l'image algébrique* (das algebraische Gebilde); chaque paire des valeurs correspondantes de x et de y il appellait *un lieu de l'image algébrique* (eine Stelle des algebraischen Gebildes); si x ne satisfait à aucune des équations (3) ou (9) § 4, alors il l'appellait un *lieu ordinaire*; autrement ce sera un *lieu singulier*. Les lieux, où au moins une des variables x et y reçoit une valeur infinie, *Weierstrass* appellait *les lieux infiniment-éloignés* (unendlichferne Stelle des algebraischen Gebildes). *Briot* et *Bouquet* appellaient les valeurs de x qui satisfont à l'une des équations (3) ou (9) § 4, *les points singuliers algébriques*; en particulier ceux, où y prend une valeur infinie, mais tellement que son inverse $\frac{1}{y}$ devient nul, ils appellaient les *pôles*, ceux où quelquesunes des valeurs de y deviènnent égales, les *points critiques algébriques*. *Riemann* appellait ces derniers les *points de ramification* (Verzweigungspunkt)*). Les raisons de toutes ces dénominations seront expliquées plus bas. Un point singulier peut être à la fois un pôle et un point critique algébrique, si notamment en ce point plusieures des valeurs de y deviènnent infinies.

*) Traduction de Mr. *G. Simart* dans sa Thèse (Commentaire sur deux mémoires de Riemann); Mr. *C. Jordan* les appelle les points de branchement „Cours d'Analyse", T. II.

6. Pour les valeurs de x, qui satisfont à la fois aux équations:

$$\overset{m}{f_0}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overset{m}{f_n}(x) = 0, \tag{1}$$

quelquesunes des valeurs de y seront égales à zéro, d'autres seront infinies. On peut éviter cette circonstance par l'introduction d'une nouvelle fonction au lieu de y, en posant

$$y = z + c, \tag{2}$$

et en déterminant la constante c de manière, que le dernier coefficient de l'équation transformée, qui sera

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}), \tag{3}$$

et le premier, qui restera le même $\overset{m}{f_0}(x)$, n'auraient pas des racines communes, c'est ce qui est toujours possible: on n'a que de chercher le plus grand diviseur commun de

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}) \qquad \text{et} \qquad \overset{m}{f_0}(x);$$

le dernier reste ne dependra que de c:

$$\varphi(c);$$

il suffit de donner à c une valeur différente des racines de l'équation

$$\varphi(t) = 0,$$

pour que $\varphi(c)$ soit différent de zéro, et alors les équations

$$\overset{m}{f_0}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{c}) = 0$$

n'auront pas des racines communes. Si le premier coefficient $\overset{m}{f_0}(x)$ n'est qu'une constante, par exemple l'unité, alors y ne deviendra infini pour aucune valeur finie de x; par analogie avec les fonctions rationnelles entières on nomme toute fonction algébrique y, définie par l'équation de la forme

$$y^n + \overset{m}{f_1}(x)\, y^{n-1} + \overset{m}{f_2}(x)\, y^{n-2} + \ldots + \overset{m}{f_{n-1}}(x)\, y + \overset{m}{f_n}(x) = 0, \tag{4}$$

où $\overset{m}{f_1}(x)$, $\overset{m}{f_2}(x)$, $\ldots \overset{m}{f_n}(x)$ sont des fonctions rationnelles entières, — une *fonction algébrique entière* (ganze algebraische Funktion, *Kronecker*). Si l'on pose dans l'équation (1) § 4

$$y = \frac{z}{\overset{m}{f_0}(x)}, \tag{5}$$

on aura, après avoir chassé les dénominateurs, l'équation suivante pour déterminer z:

$$\begin{aligned} z^n + \overset{m}{f_1}(x)\, z^{n-1} + \overset{m}{f_2}(x)\, \overset{m}{f_0}(x)\, z^{n-2} + \ldots + \overset{m}{f_{n-1}}(x)\, [\overset{m}{f_0}(x)]^{n-2} z + \\ + \overset{m}{f_n}(x)\, [\overset{m}{f_0}(x)]^{n-1} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

d'où l'on voit que z sera une fonction algébrique entière de x. Ainsi par la substitution (5) l'étude de la fonction y est ramenée à l'étude de la fonction algébrique entière z. C'est ce qu'a fait Kronecker dans son mémoire sur le discriminant*), et est arrivé ainsi à trouver ses propriétés importantes par la voie purement algébrique. Mais pour notre but cette transformation de l'équation donnée est nûllement indispensable, et nous n'en tirerons qu'une seule conséquence importante, c'est que la fonction y ne devient infinie que d'un ordre fini. En effet, si α est une racine multiple de l'équation $\overset{m}{f_0}(x)=0$ d'ordre k, on aura par l'équation (5):

$$(7) \qquad \lim\,(x-\alpha)^k y \Big|_{x=\alpha} = \lim \frac{z}{\dfrac{f_0(x)}{(x-\alpha)^k}} \Bigg|_{x=\alpha} = \frac{z_{x=\alpha}}{\dfrac{f_0^{(k)}(\alpha)}{k!}}$$

où $z_{x=\alpha}$ sera finie, car la fonction z est entière, et où $f_0^{(k)}(\alpha)$ est différente de zéro.

7. Soit maintenant $x^{(0)}$ un point ordinaire, (c'est-à-dire différente des racines des équations [3] et [9] § 4); alors à $x=x^{(0)}$ correspondront n valeurs finies et différentes de y, que nous désignerons ainsi:

$$(1) \qquad y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ y_3^{(0)},\ \ldots\ y_n^{(0)};$$

toutes les différences

$$(2) \qquad y_i - y_j$$

seront donc finies et différentes de zéro au point $x^{(0)}$. Si x se déplace infiniment peu, en recevant l'accroissement infiniment petit $dx^{(0)}$, chacune des valeurs (1) de y recevra un accroissement infiniment petit, dont la valeur principale sera pour y_i:

$$(3) \qquad dy_i^{(0)} = \left(-F_x'(x^{(0)}, y_i^{(0)}) : F_y'(x^{(0)}, y_i^{(0)})\right) dx^{(0)};$$

donc toutes les valeurs de y seront des fonctions continues de x au voisinage de $x^{(0)}$, et comme c'est un point quelconque choisi à volonté parmi les points ordinaires, on en conclut, que toutes les valeurs de y resteront finies et continues, et parconséquent aussi leurs différences (2), qui seront en outre différentes de zéro, — tant que x n'arrivera pas à l'un des points singuliers: là plusieurs de ces différences peuvent devenir égales à zéro ou à l'infini, et x continuant à se mouvoir plus loin, il y aura lieu à l'incertitude par rapport à ce, lesquelles des deux séries des valeurs de y, ayant un terme commun en ce point, doit on regarder comme un prolongement naturelle de l'une des séries antérieu-

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91, S. 301.

res des valeurs de y, car plusieurs s'y rattachent par la loi de continuité. Voilà pourquoi ces points sont-ils nommés les points critiques; voilà aussi pourquoi Riemann les a nommé *les points de ramification*: en ces points plusieurs séries des valeurs de y deviènnent des prolongements de plusieurs antérieures par la loi de continuité.

8. Si le point x, après avoir décrit une courbe fermée, ne contenant à son intérieur aucun des points singuliers, revient au point de départ $x^{(0)}$, chacune des valeurs de y y reprendra sa valeur initiale par la loi de continuité, car aucune des différences $y_i - y_j$ ne deviendra pas nulle en aucun des points du chemin décrit par x. Si au contraire la courbe fermée, décrite par x, contiendra à son intérieur un point de ramification, il pourra arriver, qu'après le retour de x en $x^{(0)}$ on recevra $y_j^{(0)}$ au lieu de $y_i^{(0)}$, si à ce point critique les deux valeurs y_i et y_j de y deviènnent égales entre elles: $y_i = y_j$; car un tel chemin par la déformation continue peut-être amené à passer par le point critique mentionné, et alors le passage par la loi de continuité de l'une à l'autre des deux valeurs de y qui y deviènnent égales, est possible. De cette manière après le retour du point x au point de départ $x^{(0)}$ par un chemin entourant un point de ramification, on pourra recevoir au point $x^{(0)}$ au lieu de la série primitive des valeurs de y, (1) § 7, cette autre:

$$y_{i_1}^{(0)},\ y_{i_2}^{(0)},\ y_{i_3}^{(0)}, \dots .\ y_{i_n}^{(0)}, \tag{1}$$

composée cependant des mêmes éléments, que la première, — car à ce point $x^{(0)}$ il n'en existe pas d'autres, — mais disposés dans un ordre différent. L'effet du retour de x au point de départ par un tel chemin sera donc exprimé par la substitution:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)}, & y_2^{(0)}, & y_3^{(0)}, & \dots . & y_n^{(0)} \\ y_{i_1}^{(0)}, & y_{i_2}^{(0)}, & y_{i_3}^{(0)}, & \dots . & y_{i_n}^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Ici, lorsque y_h reprend sa valeur initiale, on aura $i_h = h$; mais il est impossible qu'il serait ainsi en tous les points critiques pour chaque indice; car alors chaque y_h, reprenant toujours sa valeur initiale quelque soit le chemin fermé qu'on ait suivi, serait une fonction uniforme, finie et continue à l'exclusion de certains pôles; ce serait donc une fonction rationnelle de x:

$$y_h = \varphi_h(x); \tag{3}$$

mais alors on aurait

$$\overset{m\ n}{F}(x, y) = \overset{m}{f_0}(x) \prod_{h=1}^{h=n} (y - \varphi_h(x)), \tag{4}$$

où tous les facteurs seraient rationnels; parconséquent l'équation

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$$

contrairement à l'hypotèse ne serait pas irréductible. Donc, du moins aux quelquesuns des points critiques appartiendront des substitutions de la forme (2), où les égalités

$$i_h = h$$

n'auront pas lieu pour toutes les valeurs de h. L'ensemble de toutes ces substitutions forme évidement un *groupe* qui est d'ailleurs *transitif*, c'est-à-dire, qui permet de passer de l'une quelconque des valeurs de y au point $x^{(0)}$ à chacune des autres. En effet, si le système des racines:

$$(5) \qquad y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots . y_p^{(0)},$$

où l'on a $p < n$, était de la sorte, que chaque chemin fermé ne faisait que de permuter ces valeurs entre elles sans les faire s'échanger avec aucune des valeurs réstantes de y, alors toute fonction symmétrique des valeurs (5) serait une fonction uniforme, et comme elle est aussi finie et continue à l'exception de certains pôles, elle serait une fonction rationnelle de x; on pourrait donc former alors une équation du degré p aux coefficients rationnels, qui aurait les valeurs (5) de y pour ses racines; mais les racines d'une équation irréductible du degré n ne peuvent satisfaire à aucune équation d'un degré moindre; donc la supposition que nous avons faite par rapport au système (5) des racines, porte une contradiction et doit parconséquent être rejetée.

9. Toute substitution de la forme (2) § 8 peut-être décomposée en une suite des *substitutions circulaires*: il faut pour cela écrire après chaque élément celui, qui doit le remplacer dans la substitution considerée, en commençant à volonté par un quelconque et en continuant cette opération jusqu'à arriver à celui, par lequel on a commencé; alors on prend un des éléments qui n'entrent pas dans le *cycle* écrit, et on répéte la même opération avec lui, et ainsi de suite, jusqu'on a épuisé toutes les lettres de la substitution. Un élément qui doit être remplacé par lui-même, fait à lui-seul un cycle. Chaque cycle s'écrit entre les paranthèses à part. Par exemple la substitution

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7 y_8 y_9 y_{10} \\ y_2 y_3 y_4 y_1 y_8 y_9 y_6 y_5 y_7 y_{10} \end{pmatrix} = (y_1 y_2 y_3 y_4)\,(y_5 y_8)\,(y_6 y_9 y_7)\,(y_{10})$$

est composée de quatre cycles: du premier, du second, du troisième, du quatrième ordre, — *l'ordre* d'une substitution circulaire étant égal au nombre des lettres, formant le cycle. Un cycle du second ordre, c'est-à-dire à deux lettres, se nomme une *transposition*. Tout autre cycle est équivalent à une suite des transpositions en nombre d'une unité moindre de son ordre (composées d'une première lettre du cycle et de chacune des autres). L'ayant en vue on peut dire, qu'*il appartient à chaque point critique algébrique son propre répartition des racines qui y deviènnent égales, en plusieurs groupes, dont les éléments s'échangent entre eux dans l'ordre circulaire, lorsque x décrit un cercle infiniment-petit autour de ce point.*

10. Si l'on connait les points de ramification et les groupes circulaires qui appartiènnent à chacun d'eux, on peut toujours indiquer la valeur, avec laquelle y reviendra au point de départ $x^{(0)}$, cette valeur au moment de départ étant $y_i^{(0)}$, aussitot qu'on donne la forme du chemin. En effet, chaque chemin qui conduit du point $x^{(0)}$ au point X, peut-être réduit par une déformation continue, accomplie de manière à ne pas passer par aucune des points critiques, à une suite déterminée des chemins de la forme bien déterminée, notamment: du point $x^{(0)}$ suivant une droite au point infiniment-voisin du point critique, autour de ce point critique sur un cercle, décrit de lui comme du centre avec un rayon infiniment-petit, puis par la même droite au point de départ $x^{(0)}$; enfin directement de $x^{(0)}$ à X suivant une ligne droite ou courbe, mais qui n'entoure pas déjà aucun des points singuliers. Si le chemin donné est fermé, on a $X = x_0$, et la dernière partie du chemin réduit n'existe plus alors. Les chemins de la forme particulière, décrits tout à l'heure, ont été considerés déjà par *Cauchy*, surtout par *Clebsch* et *Gordan*, qui les nommaient *Schleife*, et par *Briot et Bouquet* qui leurs ont donné le nom des *lacets*. Chaque lacet ou n'a aucune influence sur la valeur de y, — c'est dans le cas, où la valeur considerée forme à elle seule un cycle, — ou la change en une autre, qui la suit dans le cycle de la substitution, appartenant au point singulier consideré.

11. *Riemann* a imaginé une surface spéciale, composée de plusieurs feuillets, propre à représenter uniformément le système entier des valeurs de la fonction algébrique implicite y, définie par l'équation (1) § 4. Prenons n plans coincidants à la manière de n feuillets de papier, posés l'un sur l'autre; prenons pour les axes des parties réelles des valeurs de x les droites superposées dans ces plans; pour les axes des parties imaginaires prenons aussi les droites superposées, perpendiculaires aux premières; marquons dans chaque plan les points représentants de $x^{(0)}$, et y fixons dans chaque feuillet une valeur déterminée de la suite (1) § 7, par exemple dans le premier feuillet *) la valeur $y_1^{(0)}$, dans le second la valeur $y_2^{(0)}, \ldots$ enfin dans le n-ième la valeur $y_n^{(0)}$; puis marquons tous les points de ramification et y joignons en idée entre

*) En comptant du haut en bas.

eux les feuillets, correspondants aux valeurs de y qui, devenant égales entre elles au point singulier consideré, forment un même cycle, en se permutant dans l'ordre circulaire autour de ce point; ensuite faisons des coupures suivant des lignes superposées, allant de chaque point de ramification à l'infini, dans chaque feuillet, de manière à ne pas croiser ni soi-même, ni l'une l'autre; enfin joignons le côté droit de chaque coupure avec le côté gauche de la même coupure dans l'autre feuillet, qui porte la même valeur de y. Ainsi dans l'exemple (1) § 9 on joignera le côté droit du premier feuillet avec le côté gauche du second, le côté droit de celui-ci avec le côté gauche du troisième; le côté droit du troisième avec le côté gauche du quatrième, enfin le côté droit du quatrième avec le côté gauche du premier; puis le côté droit du cinquième avec le côté gauche d'huitième et vice-versa; ensuite le côté droit du sixième avec le côté gauche du neuvième, le côté droit de celui-ci avec le côté gauche du septième et le côté droit du septième avec le côté gauche de sixième; enfin le côté droit du dixième avec son côté gauche. C'est, parceque si nous passons du côté gauche d'une coupure à son côté droit en montant le côté gauche de la coupure jusqu'au point de ramification, en décrivant ensuite un cercle infiniment-petit autour de ce point dans le sens positif *), et enfin en déscendant suivant le côté droit au point vis-à-vis du point de départ, nous y arrivrons avec y_2, si nous étions parti avec y_1; avec y_3, si nous étions parti avec y_2; avec y_4, si nous étions parti avec y_3; avec y_1, si nous étions parti avec y_4; parconséquent à droite dans le premier feuillet y aura la même valeur qu'à gauche dans le second, à droite dans le second la même qu'à gauche dans le troisième, et ainsi de suite. — Par la ligne de coupure il n'y a pas de passage dans le même feuillet d'un côté à l'autre de cette ligne; car en passant cette ligne nous déscendons ou nous nous levons dans un autre feuillet. C'est pour cela qu'on a nommé ces lignes les *lignes de passage*, tandis que les points de ramification, qui en sont les origines, Riemann appelait aussi *Windungspunkte*, que nous voulons traduire par les *points hélicoïdaux,* car autour de ces points la surface de Riemann ressemble une surface hélicoïdale, avec le pas de vis infiniment-petit.

Sur la surface construite de la manière décrite en chacun de ses points la fonction y aura une valeur unique, complètement déterminée: si l'on mène sur cette surface une ligne du point $x^{(0)}$ au point X, en suivant cette ligne nous arriverons au dernier point avec une valeur de y tout à fait déterminée, notamment avec celle, qui est attachée à ce point dans le feuillet, où le point X est donné. On peut, en effet, ramener ce

*) Qui est contraire au mouvement de l'aiguille d'une montre.

chemin par une déformation continue à une suite des lacets, qui en partant du point $x^{(0)}$ dans le feuillet, où il est donné, marche vers un point de ramification, situé dans ce feuillet, en l'entourant passe dans un autre feuillet, où il retourne au point $x^{(0)}$, situé dans ce second feuillet par un chemin superposé au celui dans le premier, pour marcher vers un autre point de ramification en l'entourant passer dans le troisième feuillet, y retourner par un chemin superposé au second chemin dans le point $x^{(0)}$ de ce troisième feuillet, et ainsi de suite, enfin pour passer de $x^{(0)}$ au point X par le chemin situé dans le feuillet, où est donné ce dernier point. En le rapprochant de ce qui a été dit au § 10, on comprend de suite, qu'en effet notre fonction y sera une fonction uniforme de la variable x sur la *surface de Riemann*, que nous avons construit, nommée ainsi d'après son celèbre inventeur.

12. Imaginons maintenant une sphère de diamètre égal à l'unité, composée de n feuillet, qui soient tangentes au point O (où l'on a $x=0$) aux feuillets de la surface de Riemann (que nous supposerons horisontale pour fixer les idées): le feuillet intérieur de la sphère au feuillet inférieur de la surface de Riemann, le second feuillet de la sphère au second de la surface de Riemann, et ainsi de suite; enfin le feuillet extérieur de la sphère au feuillet supérieur de la surface de Riemann. Après avoir construit son diamètre OO', passant par le point O de contact, transportons tous les points de la surface de Riemann dans le feuillets correspondents de la sphère suivant les droites, qui les joignent respectivement au point O' de la sphère, diametralement opposé au point O de contact. Les points de ramification passeront ainsi dans les points déterminés de la sphère, d'où partiront les lignes sphèriques, dans lesquelles seront transformé les lignes de passage de la surface de Riemann; suivant ces lignes nous fairons des coupures, dont les côtés droit nous joignerons ci-après avec les côtés gauches des autres feuillets de la même manière, que nous l'avons fait dans le plan: nous aurons alors *une surface sphèrique de Riemann*, ou simplement *la sphère de Riemann*, construite pour la première fois par Mr. *C. Neumann*, avec les points hélicoïdaux et les lignes de passage. Ces dernières sur la surface sphèrique se rencontrent au point O' de la sphère, qui néanmoins pourra être un point ordinaire — c'est lorsque chaque point, pris dans un feuillet quelconque y revient après avoir décrit un cercle autour du point O'; il sera au contraire un point hélicoïdal, si les points pris dans quelquesuns des feuillets n'y reviènnent pas après avoir décrit un cercle autour de lui.—Si l'on imagine un plan tangent à la sphère au point O', composé de n feuillets, dont le feuillet supérieur est tangent au feuillet intérieur de la sphère, le second au second de la sphère etc., puis qu'on transporte les points de la sphère suivant les droites qui les joignent au point O de la sphère dans les feuillets correspondants du plan, on aura, après y avoir fait des coupures suivant les lignes de passage et joigné leurs côtés droits avec les côtés gauches de la même manière que plus haut, une *surface de Riemann antipode*, comme l'a nommée Mr. C. Neumann, très propre à l'étude de la fonction y pour les valeurs très grandes de x. — Au passage de la surface horisontale de Riemann à la surface antipode il correspond la transformation de l'équation donnée par la substitution $x = \frac{1}{x'}$. — Sur la surface antipode les lignes de passage forment une étoile, dont les rayons partent du point O' vers chacun des points de ramification.

13. S'il arrivait, que le point O' était un point hélicoïdal, la construction de la surface de Riemann pourrait être modifiée ainsi. Prenons un point ordinaire quelconque, soit a, et joignons le avec chacun des points de ramification, qui se trouvent à distance finie de l'origine ($x=0$); traçons aussi une ligne allant à l'infini; après cela faisons des coupures suivant toutes ces lignes et rejoignons leurs bords comme nous l'avons fait plus haut: nous aurons alors une surface de Riemann plane, que nous transformerons ensuite en la sphère de Riemann à la manière du § précédent. Nous aurons ainsi une surface sphérique qui différera de celle du § précédent en ce, que le point de rencontre des lignes de passage sera maintenant un point ordinaire, comme cela n'était auparavant que dans le cas, où le point O' était un point ordinaire. Mais on a nul besoin dans cette modification en construction de la sphère de Riemann, car le circuit du point O' est équivalent au circuit de tous les points de ramification situés à distance finie du point O, ($x=0$), et nous n'en fairons pas d'usage.

14. Les surfaces de Riemann sont *à connexion multiple*. On appelle une surface fermée *simplement connexe*, si toute courbe fermée tracée sur la surface la divise en deux parties telles, qu'il est impossible de passer de l'une à l'autre autrement, qu'en croisant cette ligne; la sphère ordinaire en présente un exemple. Mais il y a d'autres surfaces, où l'on peut tracer de telles courbes fermées, qui ne forment pas une séparation complète des parties adjacentes de la surface, de la sorte qu'on peut passer de l'une à l'autre sans franchir ces lignes; telle est, par exemple, la surface d'un anneau: si l'on y trace une courbe méridienne, on pourra passer d'un côté de cette ligne à l'autre par une parallèle; si l'on y trace une parallèle, on pourra passer d'un côté de cette ligne à l'autre par une méridienne; parconséquent ces courbes fermées, la méridienne dans le premier cas, la parallèle dans le second, ne forment pas une séparation complète des parties de notre surface leurs adjacentes. La surface d'un anneau est donc à connexion multiple.

On appelle *le genre* d'une surface fermée le nombre le plus grand des courbes fermées, ne se rencontrant pas, qu'on peut tracer à la fois sur la surface sans faire par là une séparation complète des parties de la surface adjacentes à ces lignes. Si l'on ne peut tracer aucune courbe de cette sorte, la surface sera dite *de genre zéro*; telle est la sphère ordinaire (à un feuillet). Si l'on ne peut tracer qu'une seule courbe n'empêchant pas la communication entre les parties adjacentes de la surface, elle sera dite *du premier genre*; si l'on peut tracer deux courbes de la même sorte, pas plus, la surface sera dite *du second genre;* généralement, si l'on peut tracer de telles courbes en nombre p à la fois et pas plus, la surface sera dite *du genre p.* La surface d'un anneau sera du premier genre, car on ne peut pas tracer à la fois plus d'une méridienne sans empêcher la communication des parties adjacentes, ou plus d'une parallèle: deux méridiennes, ou deux parallèles, empêcheront déjà la communication des parties séparées par elles. Une méridienne et une parallèle, tracées à la fois sur la surface, pérmettront de passer d'un point quelconque de la surface à tout autre; mais ce n'est que celle de ces lignes, que l'on a tracé la première, qui peut-être regardée comme fermée; l'autre, aboutissant aux deux bords différents de la première, est une *transversale.* Si l'on fait des coupures suivant ces lignes, la première sera *une coupure fermée* (Rückerschnitt), l'autre *une coupure transversale* (Querschnitt). La surface d'un poids de commerce à une anse présente un autre exemple d'une surface du premier genre; la surface d'un tel poids à deux anses présentera l'exemple d'une surface du deuxième genre; en général la surface d'un tel poids à p anses pourrait être un exemple d'une surface de genre p, car on peut tracer autour de chacune des anses une courbe fermée, qui prises ensemble n'empêcheront pas de passer d'un côté à l'autre de ces lignes sans les croiser et seront en nombre p *). Chaque coupure fermée abaisse d'une unité le genre de la surface, en augmentant de deux unités le nombre de ses bords, si elle ne fait pas la séparation complète des parties adjacentes de la surface; une coupure transversale, allant d'un bord d'une coupure fermée à l'autre, n'influe pas sur le genre, mais unit en un seul les deux bords de la première coupure.

15. Nous allons maintenant démontrer la proposition, mise à la tête du § précédent, qu'une surface de Riemann est à connexion multiple. Il suffit pour cela de montrer, qu'on peut toujours tracer sur cette surface des lignes fermées, qui ne constitueront pas une séparation complète des parties adjacentes de la surface. Laissons le point x, en partant

---

*) Une plaque d'une épaisseur quelconque, percée de p trous circulaires, présente aussi un bon exemple d'une surface du genre p.

d'un point fixe quelconque $x^{(0)}$, pris dans le feuillet supérieur, de se mouvoir vers un point hélicoïdal a d'ordre k, situé dans ce feuillet, de déscendre, après avoir fait les $k-1$ tours autour de lui dans le k-ième feuillet, compté de haut en bas; de marcher dans ce feuillet vers un autre point hélicoïdal b d'ordre l, après les $l-1$ tours faits autour de lui déscendre dans le feuillet $k+l$-ième, compté du haut en bas, et ainsi de suite; enfin après être arrivé à un feuillet, d'où il y a un passage dans le premier feuillet, de passer par cette ligne dans ce premier feuillet pour y retourner au point de départ $x^{(0)}$. On aura ainsi une ligne fermée, qui ne formera pas la séparation complète des parties adjacentes de la surface, car nous avons laissé en plusieurs endroits les issues dans le premier feuillet aussi que dans les autres, (on peut par exemple auprès du point a s'élever du k-ième feuillet dans le premier) pour atteindre l'autre côté de la courbe fermée que nous avons tracée, par d'autre lignes de passage. (Voir le dessin à la fin du livre.). La surface de Riemann est donc en effet une surface à connexion multiple. Dans chaque cas particulier, lorsqu'une telle surface sera donnée, on pourra tracer toutes les courbes, ne constituant pas la séparation complète des parties adjacentes de la surface, et en comptant leur nombre, déterminer ainsi le genre de la surface. C'est ce qui est facile à faire dans le cas des surfaces hyperelliptiques de Riemann, à deux feuillets, qui se rapportent à l'irrationalité, définie par l'équation

$$y^2 - R(x) = 0,$$

$R(x)$ désignant un polynome du degré $2\rho+1$ en x *) et en quelques autres cas **). Dans le cas général on réussit de recevoir une formule, qui relie le genre de la surface avec le nombre de feuillets et le nombre et les ordres des points de ramification, à l'aide des considérations nouvelles, que nous empruntons à M. C. Neumann (l. c.) ci-dessous.

---

*) Voir: *Tikhomandritzky*, *M.* L'inversion des intégrales hyperelliptiques. Kharkoff, 1885 (en russe). Dans ce cas particulier on préfére pourtant une autre construction de la surface de Riemann. En désignant par $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2\rho}$ les racines du polynôme $R(x)$, on mène des droites de a_{2i-1} à a_{2i} ($i=1, 2\ldots\rho$) et de a_0 à l'infini pour faire suivant chacune d'elles une coupure et rejoindre ci-après les deux feuillets en croix, pour un observateur regardant le long de ces lignes; on aura ainsi $\rho+1$ lignes de passage; on entoure chacune des ρ premières de ces coupures dans le feuillet supérieur d'une ligne fermée elliptique — A_i autour de la coupure $\overline{a_{2i-1}a_{2i}}$, ne rencontrant pas l'une l'autre; on aura ainsi en tout ρ lignes fermées, qui n'empêcheront pas de passer de l'une à l'autre côté de ces lignes sans les franchir: pour passer du côté interieur de la ligne A_i à son côté extérieur on n'à qu'à de déscendre par la ligne de passage $\overline{a_{2i-1}a_{2i}}$ dans le feuillet inférieur pour s'élever de là par la ligne de passage $\overline{a_0\infty}$ dans le feuillet supérieur et d'y marcher vers le point vis-à-vis du point de départ, situé à l'autre bord de la coupure A_i.

**) C. *Neumann*. Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1884.

16. M. C. Neumann à donné le nom d'une *surface élémentaire* à la surface simplement connexe à un contour fermé: telles sont les surfaces d'un cercle, d'un ellipse, d'un rectangle, d'une trapèze, etc. Riemann définit le dégré de connexion d'une surface par le nombre des coupures transversales qu'il en faut pour la transformer en une surface élémentaire, de telle manière: si l'on n'a besoin d'aucune coupure pour transformer la surface donnée en une surface élémentaire, c'est-à-dire lorsqu'elle est déjà sans cela élémentaire, son degré de connexion sera l'*un*: on dit d'une telle surface qu'elle est simplement connexe; si l'on n'a besoin que d'une seule coupure transversale pour la dite transformation, le degré de connexion d'une telle surface sera exprimé par le nombre 2: l'exemple d'une telle surface présente une surface plane, limitée par deux circonférences concentriques; si l'on aura besoin de deux coupures transversales — le degré de connexion sera exprimé par le nombre 3: en général le degré de connexion d'une surface sera exprimé par le nombre $q+1$, lorsqu'on aura besoin de q coupures transversales pour la transformer en une surface élémentaire. Le degré de connexion d'une surface donnée surpasse donc d'après Riemann d'une unité le nombre des coupures transversales capables de la transformer en une surface élémentaire. Ces surfaces seront nommées simplement, doublement, triplement, en général $q+1$-ment-connexes, suivant le nombre q des coupures, nécessaires pour leur transformation en des surfaces élémentaires.

Pour la surface fermée, comme l'est la sphère de Riemann, le degré de connexion sera exprimée par le nombre

$$2p+1, \tag{1}$$

surpassant d'une unité le double de son genre. Soient en effet

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots . A_p \tag{2}$$

toutes les courbes fermées, qu'on peut tracer à la fois sur la surface donnée sans faire par là une séparation complète des parties adjacentes de la surface; d'après la définition même de ces lignes il est possible de passer d'un côté au point vis-à-vis de l'autre côté de chacune de ces lignes suivant d'autres lignes qui ne coupent pas ni elles-mêmes, ni les lignes (2); nous les désignerons, ces autres lignes, par

$$B_1,\ B_2,\ B_3, \ldots . B_p \tag{3}$$

ainsi, que ce sera la ligne B_i, suivant laquelle on passe d'un côté de la ligne A_i au point vis-à-vis de l'autre côté de la même ligne. Si nous fairons des coupures suivant les lignes (2), notre surface fermée sera transformée en une autre à $2p$ contours; après avoir fait des coupures suivant les lignes (3), nous aurons réunis en un seul contour les deux bords de chaque coupure fermée, ce qui nous donnera une surface au nombre des contours à moitié moindre, c'est-à-dire à p contours. Si l'on trace maintenant une ligne C_i d'un point de la ligne B_i vers un point de la ligne A_{i+1} de manière qu'elle ne coupe pas ni soi-même, ni aucune des autres lignes C_j, ni les lignes A_i, B_i, — on aura en tout $p-1$ de pareilles lignes:

$$C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots .\ C_{p-1} \tag{4}$$

— et si l'on fait des coupures suivant elles, tous les p contours, reçus auparavant, seront réunis en un seul. Ainsi au moyen des p coupures transversales (3) et $p-1$ coupures transversales (4) [après avoir fait p coupures fermées suivant les lignes (2)], en tout au moyen de $2p-1$ coupures transversales on aura transformé la surface de Riemann en une surface à contour unique et de genre zéro, car une coupure suivant chacune des lignes A_i l'abaisse d'une unité, tandisque les coupures suivant les lignes B_i et C_i sont sans aucune influence sur le genre. Noûs avons reçu donc au moyens des coupures décrites une surface du genre zéro à un seul contour fermé, ça veut dire, une surface élémentaire. Mais les coupures tracées peuvent être envisagées autrement encore: la première, faite suivant A_1, est une coupure fermée, la seconde — suivant B_1, est une coupure transversale; l'ensemble des coupures C_1+A_2 on peut regarder comme une seule coupure transversale, parcequ'elle commence en un point de la coupure B_1 et finit dans son propre point antérieur*); B_2 et C_2+A_3, et en général tous les B_i et tous les C_i+A_{i+1} pour $i=1, 2, 3, \ldots\ p-1$ seront toutes des coupures transversales, ainsi qu'on aura en tout $2p-1$ coupures transversales et une coupure fermée. Mais cette dernière aussi pourra être enregistrée avec les autres, transversales, si l'on convient avec M. C. Neumann de regarder toute surface fermée comme une surface ouverte, avec un orifice infiniment petit et parconséquent avec un contour infiniment petit. Ainsi il viendra que la surface de genre p se transforme en une surface élémentaire au moyen de $2p$ coupures transversales, et parconséquent elle est une surface $2p+1$-ment connexe. — Riemann désignait sa surface en état naturelle par la lettre T et après sa transformation en une surface élémentaire à l'aide des coupures indiquées par T'.

17. Il n'est pas difficile de verifier, que par ces coupures notre surface est en effet transformée en une surface élémentaire, c'est-à-dire simplement connexe à un seul contour. Avant tout c'est la dernière circonstance qui se verifie aisement. Convenons de nommer positive celle des deux directions de la coupure A_i, qu'il faut suivre pour avoir à

*) σ-förmiger Querschnitt en allemand.

gauche les points de ramification qui sont entourés de cette ligne; la même chose nous entendrons par les mots la direction positive de la ligne B_i; quant à ligne C_i, sa direction positive sera celle, qu'il faut suivre pour aller de B_i vers A_{i+1}. Après avoir pris pour point de départ celui, qui se trouve à l'intersection des lignes A_1 et B_1 du côté droit de chacune de ces lignes par rapport à leurs directions positives, nous suivrons la direction positive de A_1, parconséquent nous irons sur son côté droit et viendrons au point vis-à-vis du point de départ sur le côté opposée de B_1, c'est-à-dire sur son côté gauche; d'ici nous partirons, en suivant dans la direction négative le côté gauche de B_1, pour venir au point opposé, situé sur le côté gauche de A_1; en suivant maintenant le côté gauche de A_1 dans la direction négative, nous arriverons au point vis-à-vis du point de départ, situé sur le côté droit de B_1; en suivant ce côté droit de B_1 dans la direction positive, nous arriverons à l'origine de la courbe C_1, qui se trouve sur le côté droit de B_1. En suivant le côté droit de C_1 dans le sens positif jusqu'à son embouchure dans le côté droit de A_2, en marchant plus loin sur le côté droit de A_2 jusqu'au point de son rencontre avec la ligne B_2 qui est à côté droit de la première ligne et à côté gauche de la deuxième, nous allons continuer notre chemin sur le côté gauche de celle-ci dans le sens négatif jusqu'au point de son rencontre avec la ligne A_2 sur le côté gauche de celle-ci, que nous suivrons ci-après dans le sens négatif jusqu'à son point de rencontre avec la ligne B_2 situé sur le côté droit de cette ligne, après quoi nous irons sur ce côté droit de B_2 jusqu'à l'origine de la ligne C_2, dont le côté droit nous suivrons jusqu'à son embouchure dans le côté droit de la ligne A_3; et ainsi de suite: sur chacune des paires des courbes $C_i + A_{i+1}$ et B_{i+1} nous aurons à répéter la même chose; enfin nous arriverons à l'origine de la ligne C_{p-1} sur le côté droit de la ligne B_{p-1}. En allant d'ici sur le côté droit de C_{p-1} dans le sens positif jusqu'à son embouchure sur le côté droit du dernier A_p, puis en suivant ce côté dans le sens positif, nous arriverons au point de son rencontre avec la ligne B_p sur le côté gauche de la dernière; d'ici nous irons sur le côté gauche de B_p dans le sens négatif jusqu'à son point de rencontre avec A_p sur le côté gauche de celui-ci; en suivant ce côté gauche dans le sens négatif, nous arriverons au point de son rencontre avec B_p sur le côté droit de cette ligne, que nous suivrons en sens positif jusqu'au point de son rencontre avec A_p sur le côté droit de toutes les deux courbes. D'ici nous marcherons sur le côté droit de A_p dans le sens positif jusqu'à l'embouchure de C_{p-1}, sur le côté gauche de la dernière, que nous suivrons en sens négatif jusqu'à son origine sur le côté droit de B_{p-1}; d'ici nous irons sur le côté droit de B_{p-1} en sens positif jusqu'à son point de rencontre avec A_{p-1} sur les côtés droits de toutes les deux courbes; et ainsi de suite jusqu'au point de rencontre de B_1 avec A_1 sur les côtés droits de tous les deux, c'est-à-dire jusqu'au point de départ *). La surface T' a donc en effet un contour unique. Maintenant il n'y a rien de plus facile que de se convaincre de ce, qu'on peut passer d'un point quelconque de la surface T' à tout autre point de la même surface: on n'a que de méner de chacune de ces points une ligne sur cette surface vers un point arbitraire de son contour, par exemple le plus proche de lui.

18. La différence entre le nombre des coupures transversales qui transforment un système donné des surfaces en un certain nombre des surfaces élémentaires, et ce nombre lui-même est un nombre constant, caractéristique pour le système donné des surfaces.

Pour démontrer cette proposition, supposons en suivant M. C. Neumann, qu'un système donné S des surfaces à l'aide des coupures transversales q', en nombre ν', se transforme en un autre système S', composé d'un nombre α' des surfaces élémentaires, et que le même système S à l'aide des autres coupures transversales q'', en nombre ν'', se transforme en un troisième système S'', composé d'un nombre α'' des surfaces élémentaires. Si nous tracerons l'un après l'autre les deux systèmes des coupures transversales q' et q'', notre système S sera transformé en nombre A des surfaces élémentaires, que nous allons calculer maintenant. Après qu'on aura tracé les coupures q' le système S sera transformé en le système S', et ce système, composé de α' surfaces élémentaires, nous transformerons maintenant à l'aide des coupures q''. Celles-ci, par leurs intersections avec les coupures q' en un nombre δ de points seront divisées en d'autres Q'', dont le nombre sera égal à la moitié du nombre de leurs extremités; ces dernières se trouvent les unes sur les contours du système donné des surfaces S — leur nombre est égal à $2\nu''$, — les autres aux points d'intersection des q'' avec des q', — le nombre de celles-ci est égal à 2δ; donc le nombre total des extremités des coupures Q'' est égal à $2\nu''+2\delta$; parconséquent le nombre des coupures Q'' elles-mêmes est égal à $\nu''+\delta$. Mais la surface élémentaire étant divisée en deux parties par chaque coupure transversale, donc chaque nouvelle coupure transversale augmentant d'une unité le nombre total des surfaces élémentaires, dont était composé le système S', leur nombre, après que seront tracées les $\nu''+\delta$ coupures transversales Q'', sera augmenté de $\nu''+\delta$ unités, et on aura parconséquent

$$(1) \qquad A=\alpha'+\nu''+\delta.$$

De la même manière, en commençant par tracer les coupures q'', et puis faisant les coupures q', on aura pour le même nombre A des

*) Voir la deuxième figure à la fin du livre.

surfaces élémentaires, sur lesquelles sera découpé le système S par l'ensemble des coupures q' et q'', cette autre expression:

$$A = \alpha'' + \nu' + \delta; \tag{2}$$

en comparant entre elles les deux expressions (1) et (2) du nombre A, on trouve:

$$\nu' - \alpha' = \nu'' - \alpha'', \tag{3}$$

ce qui démontre la proposition enoncée. Ce nombre constant pour un système donné S des surfaces, augmenté de deux unités, M. C. Neumann appelle le *nombre fondamental* (Grundzahl) *du système des surfaces* S, et le désigne par la lettre N, ainsi qu'on aura:

$$N = \nu' - \alpha' + 2. \tag{4}$$

19. Chaque coupure transversale nouvelle abaisse d'une unité le nombre fondamental du système donné.

En effet, supposons qu'après avoir transformé le système donné des surfaces S, dont le nombre fondamental soit N, en un autre système S', dont le nombre fondamental soit N', à l'aide d'une seule coupure transversale q, il faut faire encore ν coupures $q_1, q_2, \ldots q_\nu$, de même nature pour transformer le système donné S en α surfaces élémentaires; alors on aura par la formule (4) du § précédent

$$N = \nu + 1 - \alpha + 2; \tag{1}$$

mais le système S' se transformant en α surfaces élémentaires à l'aide de ν coupures transversales $q_1, q_2, \ldots q_\nu$, on aura par la même formule

$$N' = \nu - \alpha + 2; \tag{2}$$

en comparant les formules (1) et (2), on trouve

$$N = N' + 1, \tag{3}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Chaque coupure fermée n'a aucune influence sur le nombre fondamental du système.

En effet, supposons qu'un système donné S soit transformé en un autre S' par une coupure fermée s; traçons maintenant une coupure transversale q suivant une ligne qui joint un point quelconque de s avec le point le plus rapproché du contour du système: cette coupure le transformera en un nouveau système S''. Soient N, N', N'' les nombres fondamentaux des trois systèmes. Mais l'ensemble des coupures: fermée s et transversale q peut encore être envisagé comme une seule coupure transversale r, qui transforme directement le système S en S''; donc, d'après le premier théorème de ce § on aura:

$$N = N'' + 1, \tag{4}$$

$$N' = N'' + 1, \tag{5}$$

d'où il suit que

(6) $$N' = N,$$

c. q. f. d.

20. Nous allons maintenant appliquer ces théorèmes à la surface de Riemann. Nous avons vu dans le § 16 que la sphère de Riemann T à l'aide d'une coupure fermée A_1 et $2p - 1$ coupures transversales B_i et $C_i + A_{i+1}$, i étant $= 1, 2, 3, \ldots p - 1$, se transforme en *une seule* surface élémentaire T'; on a donc ici $\nu' = 2p - 1$ et $\alpha' = 1$; parconséquant on aura:

(1) $$\nu' - \alpha' = 2p - 1 - 1 = 2p - 2.$$

Maintenant nous allons choisir un autre système des coupures fermées et transversales et calculer les nombres ν'' et α'' pour cet autre système. Supposons qu'il se trouve sur notre sphère de Riemann r groupes des points hélicoïdaux superposés, dont le groupe h-ième contient $\lambda^{(h)}_k$ points hélicoïdaux d'ordre k (c'est-à-dire qui joignent chacun k feuillets), où $k = 1, 2, 3, \ldots g_h$; $\lambda^{(h)}_k$ est donc un entier positif, qui peut être égal à zéro pour quelquesunes des valeurs de k*). Traçons maintenant dans le feuillet supérieur de la sphère de Riemann deux cercles parallèles de telle manière, que toutes les r groupes des points hélicoïdaux soient projétées du centre de la sphère dans la zône comprise entre ces deux cercles, et coupons suivant ces derniers tous les n feuillets de la sphère: on aura ainsi $2n$ coupures, qui seront toutes fermées. Après cela traçons sur le feuillet supérieur de la sphère r lignes, allant d'un cercle à l'autre de manière, que dans l'interval compris entre les deux lignes voisines il ne se projète du centre qu'un seul groupe des points hélicoïdaux superposés, et coupons suivant ces lignes tous les n feuillets de la sphère: les coupures reçues seront toutes transversales et en nombre $rn = \nu''$. Cherchons maintenant le nombre α'' des surfaces élémentaires que présentera notre sphère de Riemann après toutes ces coupures. En premier lieu nous aurons $2n$ calottes, découpées de la sphère par les coupures fermées; quant au nombre des surfaces élémentaires qui se trouveront dans chacune des r parties de la zône, comprises entre les coupures transversales, leur nombre se trouve ainsi. Dans la partie, où se trouve le groupe h-ième des points hélicoïdaux, chaque point hélicoïdal d'ordre k, joignant k feuillets ensemble, enlève $k - 1$ feuillets de leur nombre total n; mais chacune de ces parties de la surface à un seul point hélicoïdal d'ordre k est une surface à un seul contour, du chacun point de laquelle on peut passer à tout autre de ses points, donc une surface

*) Pour $k = 1$ nous aurons un point ordinaire.

élémentaire. Parconséquent le nombre des surfaces élémentaires dans la partie considérée de la sphère de Riemann sera égal à

$$n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1), \tag{2}$$

et le nombre total des surfaces élémentaires:

$$\alpha'' = \sum_{h=1}^{h=r} \left(n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)}(k-1) \right) + 2n. \tag{3}$$

On aura donc

$$\nu'' - \alpha'' = rn - \sum_{h=1}^{h=r} \left(n - \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)} (k-1) \right) - 2n. \tag{4}$$

ou, en simplifiant:

$$\nu'' - \alpha'' = \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)} (k-1) - 2n. \tag{5}$$

En portant cette valeur de $\nu'' - \alpha''$ et de même la valeur de $\nu' - \alpha'$, tirée de l'égalité (1), dans l'égalité (3) § 18, nous aurons:

$$2p - 2 = w - 2n, \tag{6}$$

où l'on a posé:

$$w = \sum_{h=1}^{h=r} \sum_{k=2}^{k=g_h} \lambda_k^{(h)} (k-1); \tag{7}$$

c'est le nombre total des points hélicoïdaux *simples*, équivalents à tous les points hélicoïdaux effectifs de notre sphère de Riemann. Riemann nommait un point hélicoïdal *simple* celui, autour du quel deux valeurs seulement de y ce permutent entre elles, c'est-à-dire, dont la substitution est une transposition. Comme une substitution circulaire d'ordre k est équivalente à la succession de $k-1$ transpositions, on dit de ce point hélicoïdal d'ordre k qu'il est équivalent à $k-1$ points hélicoïdaux simples.

De l'équation (6) on tire la formule de Riemann:

$$2p = w - 2n + 2, \tag{8}$$

qui exprime le nombre total des coupures transversales, indispensables pour la transformation de la sphère de Riemann en une surface élémentaire, par les nombres w et n. En divisant par 2 les deux membres de l'égalité (8), on aura le genre p de la sphère de Riemann exprimé par les mêmes nombres:

$$p = \frac{1}{2} w - n + 1. \tag{9}$$

(On en tire de suite la remarque que w est un nombre pair, car p et n sont des entiers). Ainsi en connaissant le nombre total w des points hélicoïdaux simples, équivalents à la totalité des points hélicoïdaux effectifs de la sphère de Riemann, nous aurons aussitôt par cette formule le nombre p qui exprime son genre. C'est *Riemann* qui a désigné ce nombre par p. *Clebsch*, en considérant l'équation fondamentale

$$(10) \qquad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$$

comme l'équation d'une courbe fondamentale, a nommé ce nombre le *genre* de la courbe (Geschlecht) et le désignait par la même lettre. *Cayley* appellait ce nombre le *defect* de la courbe, parcequ' il indique de combien le nombre des points doubles et des points de rebroussement de la courbe est au-dessous de leur nombre maximal, que peut posséder en général la courbe de même ordre. ***Weierstrass*** appellait ce nombre le *rang de l'image algébrique*, défini par l'équation (10), et le désignait par la lettre ρ. Comme à l'image algébrique, défini par l'équation (10), il correspond une sphère de Riemann toute déterminée, on pourrait transporter ce terme sur la surface de Riemann. Weierstrass lui-même avait défini le rang par le théorème suivant:

„Il existe pour chaque image algébrique un tel nombre entier positif ρ, qu' on peut toujours former une fonction rationnelle de (x, y) et de (x', y') $[F(x' y') = 0]$ qui serait égal à ∞^1 au point (x', y') et de même encore aux ρ points arbitraires:

$$(11) \qquad (a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots (a_\rho, b_\rho)$$

du même image algébrique [donc $F(a_i, b_i) = 0$] tandis qu'il n'existe aucune fonction rationnelle de x et y qui serait égal à ∞^1 seulement en ces derniers points."

La démonstration de ce théorème, donnée par Weierstrass dans ses leçons à l'Université de Berlin, nous ne reproduirons pas cependant ici; au chapitre suivant nous verrons que ce nombre, augmenté d'une unité, $\rho + 1$, ou, d'après Riemann et Clebsch, $p + 1$, est le moindre nombre possible des points, où la fonction rationnelle des variables x et y, liées par l'équation (10), devient égale à ∞^1, qui peuvent être donnés arbitrairement *).

21. Pour trouver le nombre w, il faut, comme on le voit par la formule (7) du § précédent, déterminer le nombre et les ordres de tous les groupes circulaires des valeurs de y qui deviènnent égales entre elles,

---

*) Autrement, qu'il n'existe pas des fonctions devenant $= \infty^1$ en un nombre de points moindre que $p + 1$, qu'on pourrait donner à l'arbitraire.

pour chaque point de ramification, tandis que les valeurs elles-mêmes de x et de y aux points, où quelquesunes des valeurs de la dernière variable deviènnent égales entre elles, on n'a pas besoin de connaître. Une méthode pour déterminer le nombre et les ordres de tous les groupes circulaires des valeurs de y qui deviènnent égales entre elles en un point de ramification dans le cas le plus général de l'équation (10) a été donnée par Briot et Bouquet dans la 2-me édition de leur théorie des fonctions elliptiques [4°], mais sous la forme, qui suppose connues les valeurs de x et de y aux points de ramification. Ces dernières cependant ne peuvent êtres tirées des équations, qui les définissent, qu'approximativement, c'est ce que ne suffit pas dans plusieurs cas importants; d'ailleurs le nombre p étant rationnel, il doit être aussi trouvé au moyen des opérations rationnelles. La première méthode pour déterminer le nombre p au moyen des opérations rationnelles a été donnée par M. *Noether* *), la seconde par *M. Raffy***); mais ces méthodes, toutes les deux exigeant une transformation de l'équation donnée en une autre, ou la formation des nouvelles équations, ne sont pas directes et sont loin d'être simples en leur théorie. C'est pourquoi nous avons cherché une méthode plus simple et plus directe, et nous avons réussi de montrer dans notre article sous le titre: „Esquise d'une méthode pour déterminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles" ***) qu'il suffit pour ce but d'algorithme du plus grand diviseur commun. Dans l'ouvrage cité nous nous sommes conformé à l'exposition de Briot dans sa „Théorie des fonctions abéliennes"; ici nous allons traiter la question conformément à la forme (1) § 4 de l'équation fondamentale, qui détermine l'image algébrique, en nous appuiant sur le chapitre premier de l'ouvrage cité de Briot. — Comme par la substitution de $\frac{1}{x}$ aulieu de x et de $\frac{1}{y}$ aulieu de y l'étude de la fonction aux points infiniment éloignés de l'image algébrique se ramène à son étude aux points situés à distance finie de l'origine, nous pouvons nous restreindre à montrer, comment on détermine le nombre et les degrés des groupes circulaires des valeurs de y, satisfaisant à l'équation (10) [(1) § 4], qui deviènnent égales entre elles aux points situés à distance finie de l'origine.

---

*) Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann. Bd. 23, S. 340.

**) Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes. Ann. de l'École Normale. T. 12, p. 105, et Détermination du genre d'une courbe algébrique. Math. Ann. Bd. 23, S. 527.

***) Bulletin des sciences mathém., 2-me sèrie, t. XVII, février 1893, et Annales de l'Ecole Norm. 3-me série, № V, 1893.

22. Soit a un point critique, où quelquesunes des valeurs de y deviénnent égales à b; nous aurons parconséquent à la fois:

(1) $$\overset{m}{F}(a, \overset{n}{b}) = 0,$$

(2) $$\Delta_1(a) = 0.$$

En posant dans l'équation fondamentale (1) § 4 $x = a + \xi$, $y = b + \eta$ et en développant son premier membre suivant la série de Taylor, nous aurons une équation de la forme:

(3) $$\sum A_{\alpha\beta} \eta^\alpha \xi^\beta = 0,$$

les coéfficients $A_{\alpha\beta}$ étant les valeurs des dérivées de $\mathrm{F}(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ par rapport à x jusqu'à l'ordre m et par rapport à y jusqu'à l'ordre n pour $x = a$, $y = b$, divisées par certains nombres entiers. Ces valeurs ne seront connues que lorsque les valeurs a et b le seront; mais pour déterminer le nombre et les degrés des groupes circulaires en lesquelles seront réparties les valeurs de y égales à b pour $x = a$, il suffit de savoir, lesquels de ces coéfficients $A_{\alpha\beta}$ seront égaux à zéro pour $x = a$, $y = b$; car alors on connaîtra les exposants α et β dans tous les termes réstants de l'équation (3), et ce n'est que de ces exposants que dépendent, comme nous le verrons plus bas, le nombre et les degrés des groupes circulaires en question.

Dans le § suivant nous allons montrer qu'on peut toujours représenter par des paires d'équations (sans racines égales) de la forme:

(4) $$\begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) = 0, \end{cases}$$

les systèmes des valeurs de x et de y, qui, en satisfaisant aux équations (1) et (9) § 4, rendent en même temps nulles les dérivées choisies de $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ par rapport à x et à y, en sorte qu'en sousentendant par $x = a$ et $y = b$ les solutions de la paire d'équations (4), on saura desuite lesquels des coefficients $A_{\alpha\beta}$ dans l'équation (3) seront égaux à zéro sans connaître les valeurs mêmes de a et de b, et cela seulement à l'aide des opérations rationnelles, notamment celles d'algorithme du plus grand diviseur commun.

23. Soit donné le système suivant de p équations à deux inconnues x et y:

(1) $$f_1(x, y) = 0, \ f_2(x, y) = 0, \ \ldots \ f_p(x, y) = 0;$$

on demande de trouver leurs solutions communes, s'il en éxiste, ou de prouver dans le cas contraire leur incompatibilité.

Prenons les deux premières équations du système (1) et cherchons leurs solutions communes par la méthode du plus grand diviseur commun; d'après le théorème de *Labatie* *) ces solutions pourront être représentées par une suite des paires d'équations de la forme:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_i(x,y)=0,\\ \psi_i(x)=0.\end{array}\right\} \quad (i=1,2,3,\ldots g) \tag{2}$$

Si l'équation suivante du système (1), savoir:

$$f_3(x,y)=0, \tag{3}$$

a des solutions communes avec les deux premières des équations (1), elles doivent se trouver parmi les solutions de l'une ou de l'autre des paires d'équations (2); nous allons donc chercher par la même méthode les solutions communes à l'équation (3) et la première des équations (2), c'est-à-dire

$$\varphi_i(x,y)=0; \tag{4}$$

d'après le même théorème de Labatie elles seront représentées par les paires d'équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{i,j}(x,y)=0,\\ \psi_{i,j}(x)=0;\end{array}\right\} \quad (j=1,2,3,\ldots h) \tag{5}$$

cherchons maintenant le plus grand diviseur commun des fonctions $\psi_i(x)$ et $\psi_{j,i}(x)$:

$$\vartheta_{i,j}(x)=D\left(\psi_i(x),\psi_{i,j}(x)\right); \tag{6}$$

s'il arrive que

$$\vartheta_{i,j}(x)=1 \tag{7}$$

(ou en général à une constante) — identiquement, alors on en conclura que parmi les solutions de la paire d'équations (5), pour les valeurs considérées de i et j, il n'y a pas des solutions communes à trois premières équations du système (1); dans le cas contraire la paire d'équations:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{i,j}(x,y)=0,\\ \vartheta_{i,j}(x)=0\end{array}\right\} \tag{8}$$

donnera les solutions communes des trois premières équations (1). Si l'identité (7) aura lieu pour toutes valeurs des indices i et j, cela signifiera que les trois premières équations, et parconséquent le système entier des équations (1), sont incompatibles. Si pour quelquesunes des valeurs des indices i et j l'identité (7) n'aura pas lieu, alors les trois premières des équations (1) seront compatibles, et leurs solutions com-

*) Voir *Serret,* Cours d'algèbre supérieure, 3-me éd., p. 198; aussi notre „Compendium d'algèbre supérieure", 2-me éd. Kharkoff 1892. Chap. XIV, § 214, p. 299 (en russe).

munes seront données par les paires d'équations (8) pour ces valeurs de i et j. En joignant dans ce dernier cas à chacune de ces paires d'équations (8) la quatrième équation du système donné (1) et en traitant chacune de ces combinaisons de la même manière, nous parviendrons ou de prouver l'incompatibilité des quatre premières des équations (1) et parconséquent du système entier, ou de représenter les solutions communes des quatre premières équations du système par les paires d'équations de la forme:

$$(9) \qquad \begin{cases} \varphi_{i,j,k}(x,y)=0, \\ \psi_{i,j,k}(x)=0. \end{cases}$$

En continuant de combiner toujours chacune des paires d'équations, représentant les solutions communes des k premières des équations données (1) avec l'équation suivante, on arrive: ou 1°: à démontrer l'incompatibilité de ces $k+1$ premières des équations (1) et par suite de tout le système donné, ou 2° à représenter les solutions communes à toutes les équations du système donné (1) par une série des paires d'équations de la forme:

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y)=0, \\ \psi(x)=0. \end{cases}$$

Ici les équations du système (1) pourraient être quelconques; si nous supposons maintenant que la première est l'équation fondamentale donnée:

$$(11) \qquad F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0,$$

a seconde

$$(12) \qquad F'_y(x,y)=0,$$

et les autres ont chacune pour son premier membre l'une des derivées partielles de $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})$ par rapport aux variables x et y, choises à volonté, on parviendra à la proposition de la fin du § précédent *).

24. Après avoir choisi de toutes les manières possibles les dérivées partielles de $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})$ par rapport à x et à y, on aura, en joignant les équations qu'on reçoit en les égalant à zéro, aux équations (11) et (12) du § précédent, autant de systèmes d'équations de la forme (1) du même §,

---

*) Cette méthode a été donnée par nous pour la première fois dans l'article: „Recherches des points singuliers des courbes algébriques planes", qui fait partie du tome II de la 2-me série des „Communications de la Société mathématique de Kharkoff", l'an 1889 (en russe), et puis dans la 2-me éd. de notre „Compendium de l'algèbre supérieure", mentionné plus haut, Ch. XIV, p. 296 (en russe).

dont on représentera les solutions par les paires d'équations de la forme (10) du même §.

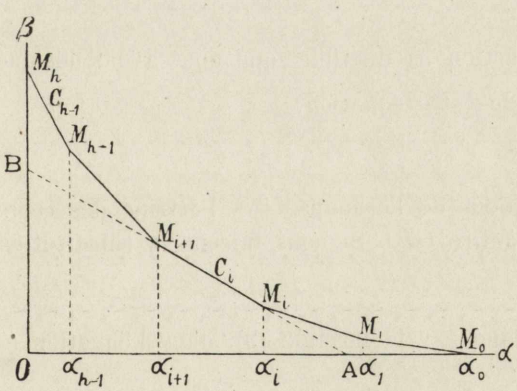
Soit maintenant

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) = 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

l'une des paires d'équations qui donnent les solutions de l'un de ces systèmes. En sousentendant par a et b l'une des solutions de la paire considérée d'équations (1), nous saurons à priori, lesquelles des dérivées partielles de $\overset{m\ n}{F(x, y)}$ par rapport à x et à y sont nulles pour $x = a$, $y = b$; après les avoir omises dans le développement de l'équation $F(a + \xi,\ b + \eta) = 0$ par la série de Taylor, nous aurons une équation de la forme:

$$\sum A_{\alpha\beta}\eta^\alpha\xi^\beta = 0, \tag{2}$$

où tous les exposants α et β nous seront connus. On trouvera parmi les termes de cette somme du moins un seul, qui contient ξ seulement, et du moins un seul qui contient η seulement: dans le cas contraire soit une puissance de $\xi = x - a$, soit une puissance de $\eta = y - b$, sortirait en facteur commun de tous les termes de la somme dans (2), et parconséquent l'équation donnée (11) du § précédent ne serait pas irréductible contrairement à la supposition faite. Prenons maintenant à l'exemple de Newton un système des axes rectangulairs et portons sur l'axe horisontal les valeurs de α, sur l'axe vertical les valeurs de β: alors au chaque terme de la somme en (2) il correspondra un point (α, β) du plan, ayant α et β pour ses coordonnées.



En supposant ξ et η infiniment-petits, on déterminera les termes de la somme en (2) d'un ordre le moins élevé comme il suit. Soit α_0 la plus petite valeur des α dans les termes, où l'on a $\beta = 0$, et β_0 la plus petite valeur des β dans ceux, où l'on a $\alpha = 0$; le point M_0 avec les coordonnées $(\alpha_0, 0)$ se trouvera donc sur l'axe $O\alpha$, et le point M_h, avec les coordonnées $(0, \beta_0)$ sur l'axe $O\beta$. Prenons maintenant une droite, qui coincidait d'abord avec l'axe $O\alpha$, et faisons la tourner dans le sens de l'aiguille d'une montre autour du point M_0 jusqu'au moment, où elle viendra à rencontrer un ou plusieurs des points (α, β); soit M_1 le dernier de ces points rencontrés par la droite; en ce moment faisons tourner la droite, toujours dans le même sens, autour de ce point M_1 jusqu'à ce qu'elle rencontre une nouvelle série des points, dont le dernier soit M_2; alors tournons la droite, toujours dans le même sens, autour de ce dernier jusqu'à la rencontre avec encore une nouvelle série des points (α, β), et ainsi de suite jusqu'à ce, qu'en tournant la droite dans le même sens autour d'un point M_{h-1} elle aura rencontré outre plusieurs autres points (α, β) aussi le point M_h de l'axe $O\beta$, avec les coordonnées $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$. Par les positions successives de la droite est déterminée de cette manière une ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_i M_{i+1} \ldots M_{h-1} M_h$ — que nous allons désigner dorénavant par P, — composée de h côtés:

$$C_0, \; C_1, \; C_2, \ldots . \; C_i, \ldots . \; C_{h-1},$$

convèxe vers l'origine. Tous les points (α, β), qui se rapportent aux différents membres de la somme en (2), ce trouveront ou sur cette ligne, ou au-dessus d'elle par rapport à l'origine. Arrêtons notre attention sur le côté C_i, comme le représentant de tous les autres. Son équation d'après la formule de Géometrie analytique pour la droite passant par les points $M_i(\alpha_i, \beta_i)$ et $M_{i+1}(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$, sera:

$$\frac{\beta - \beta_i}{\alpha_i - \alpha} = \frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} = \frac{q}{p} = \mu, \tag{3}$$

$\frac{q}{p}$ étant une fraction irréductible, que nous avons désigné, pour abréger, par μ. On tire de cette équation:

$$\alpha_i \mu + \beta_i = \alpha\mu + \beta = \alpha_{i+1}\mu + \beta_{i+1}; \tag{4}$$

cela donne la valeur de l'ordonnée β à l'origine des coordonnées pour la droite C_i (c'est-à-dire OB). Si nous fairons la substitution

$$\eta = v\xi^{\mu}, \tag{5}$$

où μ est déterminé par la formule (3), dans l'équation (2), elle prendra la forme:

$$\sum A_{\alpha\beta} v^{\alpha} \xi^{\alpha\mu + \beta} = 0, \tag{6}$$

et parconséquent $\alpha\mu + \beta$ sera l'exposant du degré d'un terme (α, β) de la somme, lorsque η est exprimé en ξ par la formule (5); il sera représenté par l'ordonnée à l'origine de la droite menée par le point (α, β)

parallèlement au côté C_i. Si l'on prolonge ce côté jusqu'à son rencontre avec les axes $O\alpha$ et $O\beta$ aux points A et B respectivement, on verra de suite que toutes ces ordonnées à l'origine seront plus grandes que celle qui est déterminée par la formule (4) et correspond aux points situés sur le côté C_i. — Pour avoir la valeur principale de v dans l'expression (5) de η par ξ, il faut égaler à zéro la somme des termes en (6) du degré le plus bas en ξ, c'est-à-dire, la somme de ceux, qui correspondent aux points, situés sur le côté C_i. En réjetant le facteur commun de tous ces membres — la puissance de $\xi : \xi^{\alpha_i\mu+\beta_i} = \xi^{\alpha\mu+\beta} = \xi^{\alpha_{i+1}\mu+\beta_{i+1}}$, nous aurons pour déterminer la valeur principale de v l'équation:

$$A_{\alpha_i\beta_i} v^{\alpha_i} + \sum{}' A_{\alpha\beta} v^{\alpha} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} v^{\alpha_{i+1}} = 0, \tag{7}$$

où l'accent (') attaché au signe de la somme doit rappeler, qu'elle ne s'étend qu'aux termes de la somme en (6), correspondant aux points situés sur le côté C_i de la ligne polygonale P, pour lesquels les exposants α sont parconséquent liés par l'équation (4). La valeur $v=0$ ne répondant pas à notre question — car alors le développement de η suivant les puissances ascendantes de ξ commencerait par une puissance de ξ plus élévée que la μ-me, — on peut diviser l'équation (7) par $v^{\alpha_{i+1}}$, après quoi elle devient:

$$A_{\alpha_i\beta_i} v^{\alpha_i-\alpha_{i+1}} + \sum{}' A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_{i+1}} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0. \tag{8}$$

La fraction $\dfrac{q}{p}$ étant irréductible, il suit de l'équation (3) que

$$\left.\begin{aligned} \beta-\beta_i &= kq, \\ \alpha_i-\alpha &= kp; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{i+1}-\beta_i &= k_i q, \\ \alpha_i-\alpha_{i+1} &= k_i p; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

des dernières égalités de chaque paire on tire encore celle-ci:

$$\alpha-\alpha_{i+1} = (k_i-k)\,p; \tag{11}$$

à l'aide de la seconde égalité (10) et de la dernière on peut représenter ainsi l'équation (8):

$$A_{\alpha_i\beta_i} v^{k_i p} + \sum{}' A_{\alpha\beta} v^{(k_i-k)p} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0. \tag{12}$$

Tous les exposants ici sont des multiples de p; donc, en posant

$$v^p = \lambda, \tag{13}$$

on aura

$$A_{\alpha_i\beta_i} \lambda^{k_i} + \sum{}' A_{\alpha\beta} \lambda^{k_i-k} + A_{\alpha_{i+1}\beta_{i+1}} = 0, \tag{14}$$

ou simplement

(14') $$L_i = 0,$$

en posant pour abréger:

(15) $$L_i = A_{\alpha_i \beta_i} \lambda^{k_i} + \sum' A_{\alpha\beta} \lambda^{k_i - k} + A_{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}}.$$

Après avoir tiré de l'équation (14) k_i valeurs de λ on trouvera pour chacune d'elles de l'équation (13) p valeurs de v, savoir:

(16) $$v_j = \varepsilon^j \sqrt[p]{\lambda}, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots p-1)$$

en désignant par ε une racine complèxe primitive de l'équation

(17) $$\varepsilon^p - 1 = 0,$$

parconséquent en posant

(18) $$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

En portant la valeur de v_j de l'équation (16) dans l'équation (5), nous aurons pour la valeur principale de η:

(19) $$v_j \xi^\mu = e^{\frac{2j\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}}.$$

Si ξ décrira un cercle d'un rayon infiniment-petit autour du point $\xi = 0$ comme centre, le facteur $\xi^{\frac{q}{p}}$ gagnera le multiplicateur $e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}$, et l'expression (19) sera changée en celle-ci:

(20) $$e^{\frac{2(j+q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}};$$

après un second tour elle se changera en

(21) $$e^{\frac{2(j+2q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}};$$

après le troisième en

(22) $$e^{\frac{2(j+3q)\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}},$$

etc.; enfin après les $p-1$ tours en celle-ci:

(23) $$e^{\frac{2[j+(p-1)q]\pi}{p}\sqrt{-1}} \sqrt[p]{\lambda}\, \xi^{\frac{q}{p}},$$

mais les nombres

(24) $$j,\ j+q,\ j+2q,\ j+3q, \ldots .\, j+(p-1)q,$$

présentant d'après le mod. p la série des nombres

(25) $$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots .\, p-1$$

à l'ordre près, les valeurs (19), (20), (21), (22), (23) représenteront toutes les valeurs que donne la première formule, c'est-à-dire (19), pour $j=0, 1, 2, \ldots p-1$, dans un ordre changé. Pour avoir cet ordre il faut écrire ces valeurs aux points de division d'un cercle en p parties égales et prendre après le premier celui, qui en est éloigné de q divisions, après cet autre prendre celui, qui est éloigné de cet autre de q divisions, et ainsi de suite jusqu'à être arrivé au premier point, ce qui aura lieu nécessairement après qu'on a ajouté de cette manière $(p-1)q$ divisions, car encore q divisions ajoutées, on aura en tous pq divisions ajoutées, ce qui est $\equiv 0 \pmod{p}$. Du môde, par lequel on a reçu les formules (19) — (23), on aperçoit qu'en effet les valeurs principales des p valeurs de η répondant à une racine simple de l'équation (14), forment un groupe, dont les éléments se permutent dans l'ordre circulaire, lorsque ξ décrit un cercle infiniment petit autour de la valeur $\xi=0$. — Il est vrai cependant, que ce qui a été dit tout à l'heure, ne se rapporte en ce moment qu'aux valeurs principales des quantités η; mais il n'est pas difficile de démontrer, que les valeurs complètes de ces quantités suivent la même loi. Soit en effet

$$\eta_j = (v_j + \eta'_j)\xi^{\mu}, \tag{26}$$

où η'_j est un infiniment petit, la valeur complète d'un élément du groupe; après que le point ξ aura décrit un cercle infiniment petit autour du point $\xi=0$, la quantité à droit dans l'équation (26) se changera en celle-ci

$$(v_j+\bar{\eta}'_j)\xi^{\mu} e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = \left(v_{j+q}+\bar{\eta}'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\xi^{\mu}; \tag{27}$$

il faut démontrer que cette quantité ets égale à η_{j+q}. Supposons le contraire: qu'elle ne lui est pas égale; mais alors elle sera égale à une autre de ces quantités, soit η_{j+q+r}, de la sorte, qu'on aura

$$\left(v_{j+q}+\bar{\eta}'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)\xi^{\mu} = \eta_{j+q+r}\,\xi^{\mu}, \tag{28}$$

ou, en portant ici aulieu de η_{j+q+r} son expression et divisant tout par ξ^{μ}:

$$v_{j+q}+\bar{\eta}'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}} = v_{j+q+r}+\eta'_{j+q+r}, \tag{29}$$

ce qui pourra être écrit encore ainsi:

$$v_{j+q}-v_{j+q+r} = \eta'_{j+q+r}-\bar{\eta}'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}}, \tag{30}$$

ou, en portant ici aulieu des v leurs expressions d'après la formule (16):

$$(31)\quad \sqrt[p]{\lambda}\left(e^{\frac{2(j+q)\pi}{p}\sqrt{-1}}-e^{\frac{2(j+q+r)\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)=\eta'_{j+q+r}-\bar{\eta}'_j e^{\frac{2q\pi}{p}\sqrt{-1}};$$

mais ici nous avons à gauche une quantité qui est différente de zéro, si l'on n'a pas $r\equiv 0$ (mod. p), tandisqu'à droite nous avons une quantité infiniment petite; il vient donc une contradiction de l'hypothèse (28); donc elle doit être rejetée. Ainsi en effet les valeurs complètes des η, correspondantes à une racine simple de l'équation (14), forment un groupe de p éléments, en se permuttant dans le même ordre circulaire que leurs parties principales, conformément à ce, que nous avons vu au § 9.

Il correspond donc à chaque racine simple de l'équation (14) un seul groupe circulaire de p valeurs de y, qui deviènnent égales à b pour $x=a$. Si toutes les racines de l'équation $L_i=0$, qui correspond au côté C_i de la ligne polygonale P, sont différentes entre elles, nous aurons k_i groupes circulaires d'ordre p.

25. Mais si l'équation (14) du § précédent aura des racines égales, à chaque racine de multiplicité r il correspondra r valeurs de v égales entre elles; parconséquent chacune des valeurs approximatives de η, dont $v\xi^{\mu}$ forme la partie principale, sera de multiplicité r. Dans ce cas il ne suffit plus de la première approximation pour séparer les racines qui deviènnent égales à b pour $x=a$; il faut trouver à ce but la valeur principale de η' dans l'expression exacte de η:

$$(1)\qquad \eta=(v+\eta')\xi^{\mu},$$

c'est-à-dire il faut faire une deuxième approximation.

Avant de montrer comment on le fait, nous devons montrer, comment peut on, sans connaître a et b, parvenir à savoir, pour lesquelles des solutions de la paire d'équations (1) du § précédent l'équation $L_i=0$ [(14') du § précédent], appartenant au côté C_i du polygone P, n'aura pas des racines égales, pour lesquelles elle aura de pareilles. Pour les premiers notre problème de détermination du nombre et des degrés des groupes circulaires des valeurs de y, devenant égales à b pour $x=a$, d'après le § précédent sera résolu de la première approximation pour le côté consideré C_i; car nous avons vu, qu'on aura k_i groupes d'ordre p. Si cela aura lieu pour tous les côtés du polygone P, c'est-à-dire que les équations $L_i=0$ pour toutes les valeurs de i n'auront que des racines simples, nous saurons le nombre et les degrés des groupes circulaires en chacun des points analytiques, représentés par cette paire d'équations. On aura le nombre de ces points analytiques [si l'on suppose que chacune des deux équations de la paire est déjà délivrée des facteurs multiples, ce qu'on pourra toujours faire d'après la méthode connue de l'algèbre supérieure, et c'est ce que nous supposerons dorénavant toujours déjà fait], en multipliant l'exposant du degré de la première équation par rapport à y par l'exposant du degré de la deuxième par rapport à x.

Nous allons donc maintenant montrer la méthode pour reconnaître, si l'équation $L_i=0$ aura des racines multiples ou non pour quelquesunes des solutions de la paire d'équation (1) du § précédent, et lorsqu'elle en aura, pour lesquelles de ces solutions cela aura lieu.

26. L'équation

$$L_i = 0 \tag{1}$$

[(14) § 24] (dans laquelle nous remplacerons a et b, ces quantités étant inconnues, par x et y) aura par rapport à l'inconnue λ des racines égales alors, quand le plus grand diviseur commun de L_i, considerée comme une fonction de λ seul, et de sa dérivée du premier ordre par rapport à cette variable:

$$D\left(L_i, \frac{dL_i}{d\lambda}\right) \tag{2}$$

sera une fonction de λ et non pas une quantité indépendante de λ, ou, à parler autrement, lorsqu' auront des solutions communes l'équation (1) en λ et l'équation:

$$\frac{dL_i}{d\lambda} = 0. \tag{3}$$

En les cherchant par la méthode du plus grand diviseur commun nous aurons besoin, peut-être, de multiplier les dividendes par quelques facteurs de la forme $\varphi(x,y)$ et de faire sortir des diviseurs de la même forme, communs à tous leurs termes; parconséquent il y aura lieu pour le théorème de Labatie, par lequel les solutions communes des équations (1) et (3) seront représentées par les paires d'équations de la forme:

$$\left.\begin{aligned} f_j^{(i)}(x,y;\lambda) = 0, \\ \chi_j^{(i)}(x,y) = 0. \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, 3 \ldots g^{(i)}) \tag{4}$$

Mais les coéfficients de diverses puissances de λ en L_i et parconséquent aussi en $\frac{dL_i}{d\lambda}$ sont des fonctions des valeurs de x et y, qui sont définies par la paire d'équations (1) § 24; par cette raison nous devons chercher, pour lesquelles des solutions de la paire citée d'équations est satisfaite la deuxième de ces équations, c'est-à-dire:

$$\chi_j^{(i)}(x,y) = 0. \tag{5}$$

En cherchant les solutions communes de cette équation et de l'équation

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{6}$$

[première de la paire cité: (1) § 24] par la méthode du plus grand diviseur commun, on les représentera d'après le théorème de Labatie par les paires d'équations de la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_h^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \psi_h^{(i,j)}(x) = 0; \end{array}\right. \quad (h = 1, 2, \ldots l) \tag{7}$$

mais les valeurs de x doivent satisfaire à la seconde équation de la paire (1) § 24, c'est-à-dire

$$\psi(x) = 0; \tag{8}$$

c'est pourquoi nous devons chercher le plus grand diviseur commun de $\psi(x)$ et de $\psi_h^{(i,j)}(x)$, qui soit $\Theta_h^{(i,j)}(x)$:

$$\Theta_h^{(i,j)}(x) = D\left(\psi(x), \psi_h^{(i,j)}(x)\right). \tag{9}$$

Alors les solutions de la paire (1) § 24, qui satisfont à l'équation (5) du § présent, et, parconséquent celles, pour lesquelles les équations (1) et (3) du § présent auront des solutions communes, seront représentées par les paires d'équations:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_h^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \Theta_h^{(i,j)}(x) = 0, \end{array}\right. \tag{10}$$

pour les valeurs de l'indice h, pour lesquelles $\Theta_h^{(i,j)}(x)$ n'est pas égal identiquement à l'unité (ou à une autre constante en général), et les valeurs de λ elles-mêmes, qui sont des solutions communes aux équations (1) et (3), parconséquent les racines multiples de la première, par les systèmes des trois équations de la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} f_j^{(i)}(x, y; \lambda) = 0, \\ \Phi_h^{(i,j)}(x, y) = 0, \\ \Theta_h^{(i,j)}(x) = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

En éliminant les solutions, représentées par la paire d'équations (10) des solutions, représentées par la paire d'équations (1) § 24, on aura celles-là de cette dernière paire (1) § 24, pour lesquelles l'équation $L_i = 0$ n'aura pas des racines égales. Si l'on désigne par $\Theta(x)$ le plus petit multiple de toutes les $\Theta_h^{(i,j)}(x)$ [dont chacun n'aura pas des facteurs égales, car déjà $\psi(x)$ n'a pas des pareils]:

$$\Theta(x) = M\left(\ldots\Theta_h^{(i,j)}(x)\ldots\right), \tag{12}$$

les solutions de la paire d'équations (1) § 24, pour lesquelles l'équation $L_i = 0$ n'aura pas des racines égales, seront les solutions des paires d'équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, y) = 0; \\ &\psi(x) : \Theta(x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x, y) : \Phi_h^{(i,j)}(x, y) = 0; \\ &\Theta_h^{(i,j)}(x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

où i, j, h parcourent la même suite des valeurs que dans (11). Ce sont ces-mêmes équations, dont on a parlé à la fin du § précédent. Les degrés de ces équations sont connues; parconséquent sera connu le nombre des points de cette cathégorie.

27. Pour les recherches ultérieures il est indispensable de séparer les racines de l'équation $L_i = 0$ d'une multiplicité déterminée de celles d'une autre multiplicité; c'est ce qu'on pourra faire ainsi. Une racine λ de l'équation $L_i = 0$ sera de la multiplicité r-ième, s'il satisfaira outre les équations (1) et (3) du § précédent aussi aux équations suivantes:

$$\frac{d^2 L_i}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^3 L_i}{d\lambda^3} = 0, \quad \ldots . \quad \frac{d^{r-1} L_i}{d\lambda^{r-1}} = 0; \tag{1}$$

pourquoi nous allons chercher, lesquelles des valeurs de λ, déterminées par les systèmes de trois équations (11) § 26, satisfont à la première des équations (1), à deux premières, à trois premières, et ainsi de suite; enfin à toutes les équations (1), par la méthode du § 23. Pour rendre plus simple l'exposition des calculs à faire, nous écrirons sans les indices l'un des systèmes (11) du § précédent:

$$\left.\begin{aligned} &f(x, y; \lambda) = 0, \\ &\Phi(x, y) = 0, \\ &\Theta(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Cherchons maintenant les solutions communes de la première de ces équations et de la première des équations (1) du § présent, en regardant x comme connue; alors d'après le théorème de Labatie ces solutions seront représentées par des paires d'équations de la forme:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x, y; \lambda) = 0, \\ &\Phi_1(x, y) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

mais x et y doivent satisfaire aux deux dernières des équations (2); par cette raison nous allons chercher les solutions communes des équations $\Phi(x, y)=0$ et $\Phi_1(x, y)=0$; elles seront représentées par des paires d'équations de la forme:

$$(4) \qquad \begin{cases} \chi(x, y)=0, \\ \Theta(x)=0; \end{cases}$$

x devant satisfaire à la dernière des équations (2), on cherchera le plus grand diviseur commun des fonctions $\theta(x)$ et $\Theta(x)$, soit $\vartheta(x)$:

$$(5) \qquad \vartheta(x)=D\big(\theta(x), \Theta(x)\big);$$

alors les solutions communes de la première des équations (1) et de la première des équations (2) seront représentées par le système de trois équations:

$$(6) \qquad \begin{cases} f_1(x, y; \lambda)=0, \\ \chi(x, y)=0, \\ \vartheta(x)=0; \end{cases}$$

et les points analytiques, où cela aura lieu, par la paire des deux dernières de ces équations, savoir par la paire:

$$(7) \qquad \begin{cases} \chi(x, y)=0, \\ \vartheta(x)=0. \end{cases}$$

En éliminant ces solutions des solutions des deux dernières des équations (2), on aura des paires d'équations, qui serviront à déterminer celles des valeurs de x et de y, pour lesquelles l'équation $L_i=0$ n'aura pas d'autres racines multiples que doubles; et de même en éliminant les solutions de (6) de celles de (2), on aura des systèmes d'équations pour déterminer ces racines doubles. En désignant par $\bar{\vartheta}(x)$ le plus petit multiple commun de toutes les $\vartheta(x)$ qui correspondent à la même équation première du système, il est clair, que les paires d'équations:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y)=0, \\ \theta(x):\bar{\vartheta}(x)=0, \end{cases}$$

et

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y):\Phi_1(x, y)=0, \\ \bar{\vartheta}(x)=0, \end{cases}$$

représenteront les points analytiques, où l'équation en λ $L_i=0$ n'aura que des racines doubles, tandisque les systèmes de trois équations:

$$(10) \qquad \begin{cases} f(x, y; \lambda)=0, \\ \Phi(x, y)=0, \\ \theta(x):\bar{\vartheta}(x)=0; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y;\lambda)=0, \\ \Phi(x,y):\chi(x,y)=0, \\ \vartheta(x)=0; \end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y;\lambda):f_1(x,y;\lambda)=0, \\ \chi(x,y)=0, \\ \vartheta(x)=0; \end{array}\right\} \quad (12)$$

serviront chacun à déterminer ces racines doubles de l'équation en λ $L_i=0$.

En combinant de la même manière les systèmes d'équations (6) avec la seconde des équations (1), nous représenterons les racines triples de l'équation en λ $L_i=0$ par les systèmes d'équations de trois formes (10), (11) et (12), et les points analytiques, où cela aura lieu, par les paires d'équations de la forme (8) et (9); quant aux points analytiques, où l'équation $L_i=0$ aura des racines de multiplicité supérieure à la troisième, ils seront représentés par les paires d'équations de la forme (4), et les valeurs elles-mêmes de λ par les systèmes d'équations de la forme (6). Et ainsi de suite jusqu'au moment, où l'on arrivera à la dernière des équations (1), quand on aura représenté par les paires d'équations de la même forme (4) les points analytiques, où l'équation $L_i=0$ aura des racines de multiplicité r-ième, qui elles-mêmes seront représentées par les systèmes de trois équations de la même forme que le système (6).

28. Après avoir montré, comment on trouve les paires d'équations, qui déterminent les points analytiques, où l'équation $L_i=0$ a des racines λ d'une multiplicité r-ième, et aussi les systèmes de trois équations, qui déterminent ces racines λ de multiplicité r-ième, nous allons montrer maintenant, comment faut il procéder, pour trouver les secondes approximations des valeurs η [§ 25].

Soit

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,\lambda)=0, \\ \Phi(x,y)=0, \\ \psi(x)=0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

l'un des systèmes de trois équations, qui déterminent les racines de l'équation $L_i=0$ de multiplicité r-ième; les deux dernières de ces équations déterminent les points analytiques, où cela a lieu. Comme on a $\lambda=v^r$, on pourra écrire ce système de manière, qu'il donnera directement les valeurs de v:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v^r)=0, \\ \Phi(x,y)=0, \\ \psi(x)=0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

La valeur complète de η sera représentée dans ce cas par la formule (1) § 25, savoir:

$$\eta=(v+\eta')\,\xi^{\mu}, \tag{3}$$

où v est déterminé par la formule (16) § 24, et chacune de ses p valeurs, correspondantes à la racine du multiplicité r-ième de l'équation $L_i=0$, qui est déterminée par le système (1) de § présent, sera repetée r fois; pour séparer l'une de l'autre les valeurs de η ayant la même partie principale, il faut déterminer la valeur principale de η' dans la formule (3). Dans ce but nous poserons

$$\xi=\xi'^{p}; \tag{4}$$

alors, vu que $\mu=\frac{q}{p}$, on aura d'après (3):

$$\eta=(v+\eta')\,\xi'^{q}. \tag{5}$$

En portant ces expressions de ξ et η par ξ' et η' dans l'équation (2) § 24 et disposant le résultat suivant les puissances de ξ' et η' nous aurons entre ces quantités l'équation

$$\sum A'_{\alpha'\beta'}\eta'^{\alpha'}\xi'^{\beta'}=0, \tag{6}$$

où les coéfficients $A'_{\alpha'\beta'}$ sont des polynomes en v avec les coéfficients-fonctions linéaires de ceux des $A_{\alpha\beta}$, qui entrent dans l'équation (2) § 24 et sont des fonctions des valeurs de x et y, qui à son tour représentent les solutions des deux dernières des équations (1). Il peut arriver que pour quelquesunes des valeurs de v, déterminées par le système (2), quelquesuns des polynomes $A'_{\alpha'\beta'}$ en v deviènnent égaux à zéro; par cette raison il faut avant tout chercher celles des solutions du système (2), pour lesquelles certains des coéfficients, choisis parmi les $A'_{\alpha'\beta'}$, deviènnent égaux à zéro, en combinant pour cela de toutes les manières possibles les équations, qu'on reçoit en égalant ces polynomes à zéro, avec le système (2) du § présent. Par la méthode identique à celle, qui était exposée aux §§ 26 et 27, nous arriverons à représenter les solutions du système (2), pour lesquelles les polynomes choisis entre les $A'_{\alpha'\beta'}$ deviènnent égaux à zéro, par les systèmes de trois équations de la même forme, que (2). Soit

$$\left|\begin{aligned} &f_1(x,y,v)=0,\\ &\Phi_1(x,y)=0,\\ &\psi_1(x)=0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

l'un de ces systèmes *). En réjétant de l'équation (6) les termes, dont les coéfficients s'annulent pour les solutions du système (7), nous serons en état de construire, comme cela était fait au § 24, à l'aide d'un système des axes des coordonnées rectangulaires $O\alpha'$ et $O\beta'$, une ligne polygonale P', convexe vers l'origine des coordonnées, qui commence au point $(\alpha'_0, \beta'=0)$, α'_0 désignant la plus petite des valeurs α', pour lesquelles on a $\beta'=0$, et va jusqu'au point $(\alpha'=0, \beta'_{h'})$, $\beta'_{h'}$ désignant la plus petite des valeurs β', pour lesquelles on a $\alpha'=0$. Au chaque côté $C'_{i'}$ de cette ligne polygonale P' correspondront des groupes spéciaux des termes du degré inférieur par rapport à ξ', lorsqu'on aura posé

$$\eta'=v'\xi'^{\mu'}, \tag{8}$$

en désignant par $-\mu'$ le coéfficient angulaire de ce côté $C'_{i'}$, dont l'équation sera:

$$\frac{\beta'-\beta'_{i'}}{\alpha'_{i'}-\alpha'}=\frac{\beta'_{i'+1}-\beta'_{i}}{\alpha'-\alpha'_{i'+1}}=\frac{q'}{p'}=\mu'. \tag{9}$$

Pour avoir la valeur principale de v', il faut égaler à zéro la somme des termes, qui contiènnent la puissance de ξ' la plus inférieure, qui sera $\xi'^{\alpha'_{i'}\mu'+\beta'_{i'}}$; il faut donc égaler à zéro la somme des termes, dont les exposants α', β' correspondent aux points, qui se trouvent sur le côté $C'_{i'}$, ce qui nous donnera l'équation:

$$A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}v'^{\alpha'_{i'}}+\sum' A'_{\alpha'\beta'}v'^{\alpha'}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}v'^{\alpha'_{i'+1}}=0. \tag{10}$$

En réjétant la solution $v'=0$ comme étrangère à la question par la même raison que plus haut, nous pourrons diviser cette équation par $v'^{\alpha'_{i'+1}}$, et alors elle prendra la forme:

$$A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}v'^{\alpha'_{i'}-\alpha'_{i'+1}}+\sum' A'_{\alpha'\beta'}v'^{\alpha'-\alpha'_{i'+1}}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}=0. \tag{11}$$

---

*) Par rapport à la première de ces équations il est important de remarquer, que s'il lui satisfait une valeur du radical $v=\sqrt[p]{\lambda}$, toutes les autres valeurs du même radical lui satisfairont aussi, λ étant le même. En effet, toutes ces valeurs se distinguent l'une de l'autre par le facteur ε^j [d'après (16) § 24], qui ne peut pas entrer dans les équations (7), car celles-ci sont tirées au moyen des opérations rationnelles d'autres équations qui ne contiènnent pas cette quantité. Il suit de là, que $f_1(x,y,v)$ ne contient que les puissances de v avec les exposants multiples de p, comme la première des équations (7) et parconséquent ne dépend que de $v^p=\lambda$.

Mais $\frac{q'}{p'}$ étant une fraction irréductible, il suit de l'égalité (9):

$$\left\{\begin{array}{l}\beta'-\beta'_{i'}=k'q',\\ \alpha'_{i'}-\alpha'=k'p';\end{array}\right. \tag{12}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l}\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'}=k'_{i'}q',\\ \alpha'_{i'}-\alpha'_{i'+1}=k'_{i'}p';\end{array}\right. \tag{13}$$

en retranchant les dernières de ces équations l'une de l'autre, on aura:

$$\alpha'-\alpha'_{i'+1}=(k'_{i'}-k')\,p'; \tag{14}$$

à l'aide de ces égalités, en posant

$$v'^{p'}=\lambda', \tag{15}$$

$$L'_{i'}=A'_{\alpha'_{i'}\beta'_{i'}}\lambda'^{k'_{i'}}+\sum{}' A'_{\alpha'\beta'}\lambda'^{k'_{i'}-k'}+A'_{\alpha'_{i'+1}\beta'_{i'+1}}, \tag{16}$$

nous réduirons l'équation (11) à la forme:

$$L'_{i'}=0. \tag{17}$$

À chaque racine λ' de cette équation il correspondra d'après (15) p' valeurs de v' de la forme:

$$v'_{j'}=\varepsilon'^{j'}\sqrt[p']{\lambda'},\quad (j'=0,1,2,\ldots p'-1) \tag{18}$$

où $\varepsilon'=e^{\frac{2\pi}{p'}\sqrt{-1}}$, et parconséquent p' valeurs approchées de η', savoir:

$$\eta'_{j'}=v'_{j'}\xi'^{\mu'}, \tag{19}$$

alors que les valeurs précises seront données par la formule:

$$\eta'_{j'}=(v'_{j'}+\eta''_{j'})\,\xi'^{\mu'}. \tag{20}$$

Si l'on porte cette valeur dans la formule (5) du § présent, on aura

$$\eta=\left(v_j+(v'_{j'}+\eta''_{j'})\,\xi'^{\mu'}\right)\xi'^{q}; \tag{21}$$

mais par (4) de ce § on a:

$$\xi'=\xi^{\frac{1}{p}}; \tag{22}$$

en portant cette valeur de ξ' dans (21) et en ouvrant les paranthèses, on aura

$$\eta=v_j\xi^{\frac{q}{p}}+(v'_{j'}+\eta''_{j''})\,\xi^{\frac{qp'+q'}{pp'}}, \tag{23}$$

où $j=0, 1, 2, \ldots p-1$ *); $j'=0, 1, 2, \ldots p'-1$, ainsi que cette formule donnera pp' valeurs pour η, et parconséquent pour $y=b+\eta$. Ces valeurs forment un groupe de pp' éléments, car le second terme de cette formule ne reprend sa valeur primitive qu'après les pp' tours, après lesquels reprendra sa valeur initiale aussi le premier, car $\xi^{\frac{q}{p}}=\xi^{\frac{qp'}{pp'}}$. On le démontre pour la partie principale des valeurs de η, aussi bien que pour les valeurs complètes de la même manière comme en § 24; pourquoi nous ne nous en arrêterons pas. Quant au nombre de ces groupes d'ordre pp', il sera égal au produit du nombre des racines simples de l'équation $L'_{i'}=0$ par l'exposant de la plus haute puissance de $\lambda=v^p$ dans la première des équations (7) du § présent, car chaque racine simple de l'équation $L'_{i'}=0$ pourra se combiner avec chacune des racines de l'équation cité tout à l'heure, et cela pour chacun des points analytiques, représentés par les deux dernières équations du système (7). Pour la racine de multiplicité r'-ième de l'équation $L'_{i'}=0$ on a besoin d'une nouvelle approximation, c'est-à-dire, on a besoin de trouver la valeur principale de η'' dans la formule

$$\eta'=(v'+\eta'')\,\xi'^{\mu'}, \tag{24}$$

représentant la valeur complète de η' pour chaque valeur de v', qui correspond à la racine de multiplicité r'-ième de l'équation $L'_{i'}=0$. Mais pour cela il faut montrer auparavant, dequelle manière peut-on savoir, pour lesquelles des solutions de système (2) du § présent l'équation $L'_{i'}=0$ en λ' aura des racines multiples, pour lesquelles elle n'en aura pas.

29. Nous allons chercher par la méthode du plus grand diviseur commun, en prenant λ' et v pour les inconnues et x et y pour les quantités données, les solutions communes des deux équations

$$L'_{i'}=0, \tag{1}$$

$$\frac{dL'_{i'}}{d\lambda'}=0; \tag{2}$$

d'après le théorème de Labatie elles seront représentés par les paires d'équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,v,\lambda')=0, \\ f_2(x,y,v)=0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

où les valeurs de x, y, v doivent satisfaire au système d'équation (7) du § précédent; par cette raison on cherchera les solutions communes aux

*) Voir la remarque plus haut.

équations $f_1(x, y, v)=0$ et $f_2(x, y, v)=0$, en prenant v et y pour les inconnues, et d'après le théorème de Labatie on les représentera par les paires d'équations de la forme:

$$(4) \qquad \begin{cases} f_3(x, y, v)=0, \\ \varphi_1(x, y)=0, \end{cases}$$

où x et y doivent satisfaire aux deux dernières des équations (7) du § précédent; pourquoi on cherchera les solutions communes aux équations $\Phi_1(x, y)=0$ et $\varphi_1(x, y)=0$; d'après le même théorème on les représentera par les paires d'équations de la forme:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Phi_2(x, y)=0, \\ \psi_2(x)=0, \end{cases}$$

où x doit satisfaire à la dernière des équations (7) du § précédent; pourquoi on cherchera le plus grand diviseur commun de $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, soit $\Theta(x)$:

$$(6) \qquad \Theta(x)=D\big(\psi_1(x), \psi_2(x)\big);$$

alors les solutions communes des équations (1) et (2) en λ' pour les valeurs de x, y, v satisfaisant aux équations (7) du § précédent, seront représentées par le système suivant de quatre équations:

$$(7) \qquad \begin{cases} f(x, y, v, \lambda')=0, \\ f_3(x, y, v)=0, \\ \Phi_2(x, y)=0, \\ \Theta(x)=0. \end{cases}$$

Les trois dernières de ces équations caractérisent ceux des points, caractérisés par les équations (7) du § précédent, pour lesquels l'équations $L'_{i'}=0$ en λ' a des racines multiples; celles-ci elles mêmes sont données par la première de ces équations, pour les valeurs de x, y, v, satisfaisant aux trois de dernières ces équations (7). Pour avoir ceux des points caractérisés par les équations (7) du § précédent, où l'équation $L'_{i'}=0$ n'a que des racines simples, il faut éliminer des solutions du système (7) du § précédent les solutions des trois dernières des équations (7) du § présent. Si l'on désigne par $\vartheta(x)$ le plus petit multiple des toutes les $\Theta(x)$ [pour la même équation supérieure en (7)], alors les solutions du système (7) du § précédent qui en restent après la dite élimination des solutions des trois dernières des équations (7) du § présent, seront représentées par les systèmes suivantes des trois équations:

$$(8) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, v)=0, \\ \Phi_1(x, y)=0, \\ \psi_1(x):\vartheta(x)=0; \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x,y,v)=0,\\ &\Phi_1(x,y):\Phi_2(x,y)=0,\\ &\Theta(x)=0; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x,y,v):f_3(x,y,v)=0,\\ &\Phi_2(x,y)=0,\\ &\Theta(x)=0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Par rapport à toutes ces groupes d'équations on peut faire la même remarque, que nous avons fait au § 28 par rapport à l'équation (7), savoir, qu'elles ne dependent effectivement que de $v^p=\lambda$, car elles sont satisfaites par toutes les valeurs du radical $\sqrt[p]{\lambda}$ pour la même valeur de λ; par cette raison on peut parler du degré de ces équations par rapport à λ. Alors d'après la remarque faite à la fin du § 28 le nombre des groupes circulaires d'ordre pp' sera égal à la somme des produits du nombre des racines simples de l'équation $L'_{i'}=0$ en λ' par l'exposant du degré de la première équation de chacune des trois systèmes d'équations (8), (9) et (10) par rapport à λ, et cela pour chaque point analytique representé par la paire des deux dernières des équations du même système.

Pour les solutions, representés par le système (7) du § présent, on a besoin d'une nouvelle approximation, troisième; mais pour cela il faut connaître auparavant le degré de multiplicité de chaque racine multiple de l'équation $L'_{i'}=0$; comment peut on l'atteindre, — il sera montré au § suivant.

30. Pour déterminer le degré r' de multiplicité des racines λ' de l'équation $L'_{i'}=0$, déterminées par le système (7) du § précédent, nous allons chercher pour lesquelles des valeurs de x, y, v ces valeurs de λ' satisfont à la première, aux deux premières, aux trois premières, enfin à toutes les équations de la suite:

$$\frac{d^2L'_{i'}}{d\lambda'^2}=0,\quad \frac{d^3L'_{i'}}{d\lambda'^3}=0,\quad \ldots\quad \frac{d^{r'-1}L'_{i'}}{d\lambda'^{r'-1}}=0. \tag{1}$$

Comme ces équations sont de la même forme que la première des équations (7) du § précédent, alors, en joignant au système cité la première des équations (1) savoir:

$$\frac{d^2L'_{i'}}{d\lambda'^2}=0, \tag{2}$$

nous allons chercher, comme dans le § précédent, pour lesquelles des solutions de ce système (7) elle est satisfaite. Ces solutions seront représentées par les systèmes des quatres équations de la même forme que le système (7) du § précédent lui-même. Soit l'une d'elles representé par le système:

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x, y, v, \lambda') = 0, \\ f_3'(x, y, v) = 0, \\ \Phi_2'(x, y) = 0, \\ \Theta'(x) = 0; \end{cases}$$

en éliminant ces solutions des solutions du système (7) du § précédent, nous représenterons les solutions de ce système, qui caractérise les points analytiques, où l'équation $L'_{i'} = 0$ n'a que des racines doubles, par les systèmes suivantes des quatre équations (où $\bar{\Theta}'(x)$ désigne le plus petit multiple commun de toutes les $\Theta'(x)$, se rapportant à la même équation supérieure du système):

$$(4) \quad \begin{cases} f(x, y, v, \lambda') = 0, \\ f_3(x, y, v,) = 0, \\ \Phi_2(x, y) = 0, \\ \Theta'(x) : \bar{\Theta}'(x) = 0; \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} f(x, y, v, \lambda') = 0, \\ f_3(x, y, v) = 0, \\ \Phi_2(x, y) : \Phi_2'(x, y) = 0, \\ \Theta'(x) = 0; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} f(x, y, v, \lambda') = 0, \\ f_3(x, y, v) : f_3'(x, y, v) = 0, \\ \Phi_2'(x, y) = 0, \\ \Theta'(x) = 0; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} f(x, y, v, \lambda') : f'(x, y, v, \lambda') = 0, \\ f_3'(x, y, v) = 0, \\ \Phi_2'(x, y) = 0, \\ \Theta'(x) = 0. \end{cases}$$

En joignant à chaque système des équations (3) la seconde des équations (1), savoir:

$$(8) \quad \frac{d^3 L'_{i'}}{d\lambda'^3} = 0,$$

et en traitant de la même manière le système reçu ainsi, nous représenterons les racines triples λ' de l'équation $L'_{i'} = 0$ par les systèmes semblables aux systèmes (4)—(7), et les racines de la même équation d'une multiplicité plus grande par les systèmes de la forme (3). En joignant à ce système d'équations l'équation suivante de la suite (1) et en traitant le nouveau système de la même manière, nous arriverons enfin, en continuant de le faire, à représenter les racines λ' de l'équation $L'_{i'} = 0$ de multiplicité r'-ième par les systèmes d'équations de la forme (3), tandis que les racines de multiplicité inférieure seront représentées par les systèmes de la forme (4)—(7).

31. Soit

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x,y,v,\lambda')=0, \\ f''(x,y,v)=0, \\ \Phi'(x,y)=0, \\ \Theta'(x)=0 \end{array}\right. \tag{1}$$

un des systèmes qui déterminent les racines λ' de l'équation $L'_{i'}=0$ de multiplicité r'-ième. Comme on a $\lambda'=v'^{p'}$, on pourra représenter ce système sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x,y,v,v'^{p'})=0, \\ f''(x,y,v)=0, \\ \Phi'(x,y)=0, \\ \Theta'(x)=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Pour une racine λ' de l'équation $L'_{i'}=0$ de multiplicité r'-ième la quantité η' aura r' valeurs approchées de la forme (8) § 28 égales entre elles; on aura donc besoin d'une nouvelle approximation, troisième. Dans ce but nous poserons:

$$\xi'=\xi''^{p'}; \tag{3}$$

alors nous aurons d'après (24) § 28:

$$\eta'=(v'+\eta'')\,\xi''^{q'}, \tag{4}$$

où v' est l'une des p' valeurs de $\sqrt[p']{\lambda'}$, et λ' la racine r'-ième de l'équation $L'_{i'}=0$, parconséquent l'une des solutions du système (1); en introduisant les variables ξ'' et η'' à l'aide de (3) et (4) dans l'équation (6) du § 28 (sans les termes, dont les coéfficients $A'_{\alpha'\beta'}$ sont égaux à zéro en vertu des équations (7) § 28), on aura, après avoir disposé le résultat suivant les puissances des nouvelles variables, l'équation de la forme:

$$\sum A''_{\alpha''\beta''}\eta''^{\alpha''}\xi''^{\beta''}=0, \tag{5}$$

dont les coéfficients $A''_{\alpha''\beta''}$ seront les polynomes en v' ayant pour ses coéfficients les fonctions linéaires de $A'_{\alpha'\beta'}$, qui sont les polynomes en v avec des coéfficients fonctions linéaires des $A_{\alpha\beta}$, parsuite des fonctions rationnelles de x et de y. Pour quelquesunes des valeurs de x, y, v, v', satisfaisant aux équations (2), quelquesuns des coéfficients $A''_{\alpha''\beta''}$ peuvent s'annuler; pour les trouver, ces valeurs des variables x, y, v, v', nous alons chercher les solutions communes du système composé des équations

(2) et de ceux, qu'on aura en égalant à zéro certains coefficients choisis parmi les $A''_{\alpha''\beta''}$ dans l'équation (5). Soit

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} & f'_1(x,y,v,v')=0,\\ & f'_1(x,y,v)=0,\\ & \Phi'_1(x,y)=0,\\ & \Theta'_1(x')=0,\end{aligned}\right.$$

l'un des systèmes qui donnent les valeurs cherchées des variables; alors, en supposant qu'on a donné aux variables x, y, v, v' dans l'équation (5) les valeurs satisfaisantes à ce système (6) d'équations, nous saurons les termes qui restent dans l'équation après avoir réjété ceux, dont les coéfficients sont nuls, et parconséquent tous les exposants α'', β''; nous pourrons donc construire la ligne polygonale P'' et pour chacun de ses côtés, comme $C''_{i''}$, l'équation:

$$(7)\qquad L''_{i''}=0,$$

du degré $k''_{i''}$ par rapport à λ'', où

$$(8)\qquad \lambda''=v''^{p''},$$

si l'on pose

$$(9)\qquad \eta''=v''\xi''^{\mu''},$$

$$(10)\qquad \mu''=\frac{\beta''_{i''}-\beta''_{i''+1}}{\alpha''_{i''+1}-\alpha''_{i''}}=\frac{q''}{p''},$$

$\alpha''_{i''}$, $\beta''_{i''}$ étant les coordonnées de l'une extrémité du côté $C''_{i''}$, et $\alpha''_{i''+1}$, $\beta''_{i''+1}$ celles de l'autre. Ici nous pouvons, de même que cela était fait par nous à la première et à la deuxième approximations, séparer des solutions du système (6) d'équations celles, pour lesquelles l'équation (7) en λ'' n'aura que des racines simples; ces solutions seront représentées par les systèmes de quatre équations de la forme (4)—(7) § 30, tandis que celles pour lesquelles la même équation aura des racines multiples — par un système des quatre équations de la forme (3) du même § 30. Pour les premières la troisième approximation suffira pour répartir les valeurs égales de y en groupes circulaires, car la valeur complète de η aura la forme:

$$(11)\qquad \eta=v\xi^{\frac{q}{p}}+v'\xi^{\frac{qp'+q'}{pp'}}+(v''+\eta'')\xi^{\frac{(p'q+q')p''+q''}{pp'p''}},$$

où v désigne l'une des p valeurs $\sqrt[p]{\lambda}$ pour la même valeur de λ, v' l'une des p' valeurs de $\sqrt[p']{\lambda'}$ pour la même valeur de λ', v'' l'une des p'' valeurs de $\sqrt[p'']{\lambda''}$ pour la même valeur de λ''. Chaque valeur de l'un de ces radicaux pouvant se combiner avec chacune des deux autres, le nombre des valeurs de η, représentées par la formule (11) pour les valeurs choisies de λ, λ', λ'', sera égal au produit $pp'p''$. Après avoir réduit tous les exposants dans la formule citée au même dénominateur $pp'p''$, on verra de suite, que chacune de ces valeurs de η ne reprendra sa valeur initiale qu'après les $pp'p''$ tours faites par ξ autour de sa valeur nulle; après un moindre nombre des tours elle se changera en une certaine autre d'entre elles; on pourra donc les placer dans un tel ordre, que chacune d'elles sera changée en la suivante, et la dernière en la première, lorsque ξ décrira un cercle infiniment petit autour de sa valeur nulle (comme en § 24); ces valeurs forment donc un groupe circulaire d'ordre $pp'p''$. Il y aura autant de ces groupes, qu'il y a d'unités dans le nombre égal au produit du nombre des valeurs de λ par le nombre des valeurs de λ' pour chaque valeur de λ, puis par le nombre des valeurs de λ'' pour chaque combinaison des valeurs de λ et de λ'.

La remarque faite au § 28 s'étend aussi sur les équations (6): elles ne contiènnent aussi que les puissances de v avec les exposants multiples de p, les puissances de v' avec les exposants multiples de p', ainsi que les premiers membres de ces équations on peut envisager comme les fonctions de λ et λ'. Alors si μ_i est le degré de la seconde des équations (6) par rapport à λ, $\mu'_{i'}$ le degré de la première de ces équations par rapport à λ', $\nu''_{i''}$ le nombre des racines simples de l'équation $L''_{i''}=0$, le nombre des groupes circulaires d'ordre $pp'p''$ formées des valeurs de y représentées par la formule (11) sera égal à

$$\mu_i \mu'_{i'} \nu''_{i''}. \tag{12}$$

Nous aurons le nombre de toutes les groupes circulaires du même ordre en tous les points analytiques, représentés par les deux dernières de équations (6), en multipliant ce nombre (12) par le nombre des points analytiques, représentés par cette paire d'équations, le nombre, qui sera égal au produit d'exposant du degré par rapport à y de la troisième de ces équations (6), par l'exposant du degré par rapport à x de la quatrième de ces équations.

32. Dans le cas, où l'équation $L''_{i''}=0$ aura des racines multiples, on aura besoin de la quatrième approximation, qui nous aménera aux mêmes opérations. La marche à suivre en ces opérations s'est déjà assez bien montrée dans les §§ précédents pour qu'on aurait besoin d'en assister davantage. En continuant ces opérations, s'il se présentera la nécessité des approximations ultérieures, on arrivera enfin infailliblement à une équation $L^{(r)}_{i^{(r)}}=0$ en $\lambda^{(r)}$, dont toutes les racines seront simples, et alors seront connus les nombres et les degrés des tous les groupes circulaires en chaque point analytique singulier, et parconséquent le nombre w [(7) § 20]. Les systèmes, qui caractériseront chaque point singulier, seront composés toujours de plusieures équations avec les inconnues $x, y, v, v', \ldots v^{(r-1)}$, dont le nombre dans chaque équation ira en décroissant de la première équation à la dernière d'une unité, la dernière des variables de chaque équation n'entrant plus dans les équations suivantes. Si les exposants des degrés de ces équations par rapport à celle des variables $\lambda = v^p$, $\lambda' = v'^{p'}, \ldots \lambda^{(r-1)} = v^{(r-1)p(r-1)}$, (car pour ces équations la remarque du § 28 aura lieu aussi) qui n'entre pas dans les équations suivantes, seront $\mu, \mu', \mu'', \ldots \mu^{(r-1)}$, et le degré de l'équation $L^{(r)}_{i(r)} = 0$ par rapport à $\lambda^{(r)} = v^{(r)p^{(r)}}$ sera $\mu^{(r)}$, le nombre des groupes circulaires de l'ordre

$$pp'p'' \ldots p^{(r-1)} p^{(r)} \tag{1}$$

sera égal au produit

$$\mu\mu'\mu'' \ldots \mu^{(r-1)} \mu^{(r)}, \tag{2}$$

et pour tous les points singuliers de la même cathégorie leur nombre sera égal au produit de ce nombre (2) par le nombre des points singuliers de la cathégorie considerée, qui est égal au produit de l'exposant du degré de l'avant-dernière équation par rapport à y par l'exposant du degré de la dernière équation par rapport à x. Les valeurs de y, formant un groupe circulaire, seront représentées par la formule:

$$y = b + v\xi^{\frac{q}{p}} + v'\xi^{\frac{p'q+q'}{pp'}} + v''\xi^{\frac{(p'q+q')p''+q''}{pp'p''}} + \cdots + (v^{(r)} + \eta^{(r)})\xi^{\frac{Q_r}{pp'p''\ldots p^{(r)}}}, \tag{3}$$

Q_r étant une fonction entière de tous les p et q accentués antérieurs, qu'on calcule d'après la même règle, que les numérateurs des exposants précédents, et qui consiste en ce, que le numérateur d'exposant qui précéde immédiatement, est multiplié par p avec l'indice suivant et puis augmenté de la quantité q correspondante, ainsi:

$$\begin{aligned} Q_r = \Big\{ \Big(\Big(\Big(\big((qp'+q')p''+q'' \big) p'''+q''' \Big) p^{(\text{IV})}+q^{(\text{IV})} \Big) p^{(\text{V})} + \ldots . + \\ + q^{(r-2)} \Big) p^{(r-1)} + q^{(r-1)} \Big\} p^{(r)} + q^{(r)}. \end{aligned} \tag{4}$$

De la formule (3), où v doit prendre chacune des valeurs de $\sqrt[p]{\lambda}$, v' chacune des valeurs de $\sqrt[p']{\lambda'}$, v'' chacune des valeurs de $\sqrt[p'']{\lambda''}$, ... enfin $v^{(r)}$ chacune des valeurs de $\sqrt[p^{(r)}]{\lambda^{(r)}}$, pour un système déterminé des valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots \lambda^{(r)}$, choisies dans leur totalité en nombre (2), il est visible de suite, que chaque valeur de y ne reviendra à son état primitif qu'après les $pp'p'' \ldots p^{(r)}$ tours faits par ξ autour de sa valeur zéro; pour un nombre inférieur des tours elle se changera en une autre de même groupe, de la sorte, qu'elles pourront être disposé dans un tel ordre, que chacune d'elles se changera en la suivante et la dernière en la première; d'où il suit que celles, qui correspondent au système choisi des valeurs de $\lambda, \lambda', \dots \lambda^{(r)}$ forment un groupe circulaire de l'ordre donné par la formule (1), et que le nombre de ces groupes sera donné par la formule (2).

33. Pour la détermination du genre de la surface de Riemann il était non seulement indispensable, mais aussi suffisant de connaître le nombre et les degrés de toutes les groupes circulaires en chaque point analytique singulier; mais pour la construction de la surface de Riemann celà n'est pas encore suffisant: il faut savoir encore desquelles des valeurs $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$ de la fonction y pour $x=x^{(0)}$ ($x^{(0)}$ étant un point ordinaire), sont les éléments de chaque groupe circulaire, en chaque point singulier, des prolongements analytiques. Pour cela il faut connaître les valeurs de x et de y en ces points déjà avec une grande approximation. Les paires des équations, par lesquelles elles étaient représentés dans les §§ précédents, rendent ce problème plus facile. Des valeurs précises on n'a pas besoin, pour reconnaître desquelles des quantités $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$ sont des prolongements analytiques les éléments, qui se permuttent en l'ordre circulaire, lorsque x décrit un cercle infiniment petit autour du point singulier considéré: il suffit, si l'on peut rendre l'approximation aussi grande qu'il le faut; alors, en calculant avec la précision pas moindre de celle-ci les prolongements analytiques de $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots y_n^{(0)}$, nous serons en état de repondre à la question, lesquelles de ces prolongements analytiques forment le groupe circulaire, et en quel ordre elles se permuttent autour du point consideré*). Cela fait pour chaque point singulier, on pourra construire du moins approximativement les points hélicoïdaux et les lignes de passage.

34. Pour le calcul des prolongements analytiques des valeurs de y au point $x=x_0$, il faut recourir au développement des fonctions en séries. Pour des points analytiques ordinaires on pourra le faire, en développant la fonction y suivant les puissances de x par la série de Taylor; de cette manière on aura aux environs du point (x_0, y_0), le développement suivant:

$$y = y_0 + y_0'(x-x_0) + \frac{1}{1.2} y_0''(x-x_0)^2 + \dots \quad (1)$$

Si l'on représente $x - x_0$ par une série convergente, disposée suivant les puissances croissantes entières et positives d'une variable auxiliaire t, qui devient égale à zéro pour $t=0$, on aura en portant cette série dans

*) On trouve un nombre suffisant d'exemples pour celà dans la Théorie des fonctions elliptiques par *Briot* et *Bouquet*, 2-e éd. 4°. Paris 1875, p. 57 et les suivantes.

la série (1), les variables x et y exprimées toutes les deux par les séries disposées suivant les puissances croissantes entières et positives de t:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + t\mathfrak{P}_1(t), \\ y = y_0 + t\mathfrak{P}_2(t), \end{cases}$$

où le $\mathfrak{P}$ allemand désignera toujours, d'après Weierstrass, une série disposée suivant les puissances croissantes entières et positives de la variable (Potenzreihe). Aux points de ramification la série de Taylor n'est pas applicable; mais pour de tels points aussi on peut trouver des expressions analogues au (2). Si l'on pose dans la formule (3) § 32:

$$(3)\qquad \xi = \xi^{(r)\,pp'p''\ldots p^{(r)}},$$

et porte les expressions reçues dans les formules $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, on aura une telle paire des fonctions:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + \xi^{(r)\,pp'p''\ldots p^{(r)}}, \\ y = b + v\xi^{(r)\,p'p''p'''\ldots p^{(r)}} + v'\xi^{(r)\,(qp'+q')p''p'''\ldots p^{(r)}} + \\ + v''\xi^{(r)\,((qp'+q')p''+q'')p'''\ldots p^{(r)}} + \ldots + (v^{(r)} + \eta^{(r)})\,\xi^{(r)Q_r}, \end{cases}$$

Q_r étant donné par la formule (4) § 32. Ici $\eta^{(r)}$, en reprenant sa valeur initiale en même temps que $\xi^{(r)}$, sera développable en une série suivant les puissances croissantes, entières et positives, de $\xi^{(r)}$. Les formules (4) donnent donc x et y développés en séries suivant les puissances croissantes entières et poisitives de $\xi^{(r)}$, qui seront convergentes pour les valeurs de $\xi^{(r)}$ suffisament petites. Elles resteront convergentes, si l'on y remplace $\xi^{(r)}$ par son expression par la variable auxiliaire t en forme d'une série disposée suivant des puissances croissantes, entières et positives, de cette variable: $\mathfrak{P}(t)$. Mais lorsqu'au point analytique ordinaire *une paire des fonctions* de la forme (2) (Funktionenpaar) représentait l'élement d'image algébrique, il en faut *plusieurs* au point de ramification ($x = a$, $y = b$), car la paire (4) est le représentant de toutes celles, qu'on aura, en donnant à $v, v', v'', \ldots v^{(r)}$ toutes leurs valeurs. On appelle pour cela ces lieux de l'image algébrique *les lieux à plusieurs éléments* (mehrelementige Stellen; Nöther, Weierstrass). — La représentation des éléments d'un image algébrique par des pareilles paires des fonctions joue un rôle important dans la théorie de Weierstrass dans son propre exposition, où toutes les démonstrations sont fondées sur une pareille représentation des éléments d'un image algébrique*). Nous n'aurons besoin d'une pareille représenta-

*) Voir: *Biermann.* Theorie der analytischen Funktionen. Leipzig 1887, p. 205 et les suivantes. Aussi: *K. Weierstrass.* Mathematische Werke. Bd. IV. Berlin 1902. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. 4°.

tion que très rarement, pourquoi nous ne voulons pas entrer en plus de détails sur ce sujet.

35. Le nombre N_{ab} des lacets binaires au point de ramification (a, b), ou, ce qui est la même chose, le nombre lui équivalent des points doubles, autour desquelles seulement deux des valeurs de y s'échangent entre elles, (le nombre égal, rappelons le, au celui des transpositions, auxquelles est équivalente chaque substitution décomposée en circulaires), dans le cas, où les équations $L_i=0$ n'ont, pour tous les côtés du polygone P, que des racines simples, sera donnée par la formule:

$$N_{a,b}=\sum_{i=0}^{h-1}k_i(p_i-1), \tag{1}$$

car pour le côté C_i nous aurons k_i groupes circulaires d'ordre p_i. On peut l'exprimer, ce nombre, encore autrement:

$$N_{a,b}=\sum_{i=0}^{h-1}k_i p_i-\sum_{i=0}^{h-1}k_i=\sum_{i=0}^{h-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})-\sum_{i=0}^{h-1}k_i=\alpha_0-\sum_{i=0}^{h-1}k_i. \tag{2}$$

La dernière formule peut être reçue aussi par ce raisonnement: α_0 des valeurs de y deviènnent égales; donc les α_0 lettres, dans la substitution, appartenant au point de ramification considéré, se repartissent en k_i groupes circulaires d'ordre p_i, où $i=0, 1, 2, \ldots h-1$; le nombre des transpositions équivalent à un groupe circulaire d'ordre p_i est p_i-1; tel est aussi le nombre des lacets binaires, si l'on rejette celui, qui remplace la dernière lettre du cycle par la première; parconséquent le nombre total des lacets binaires pour le point (a, b) est égal au nombre des transpositions équivalentes, lequel est égal au nombre des lettres de la substitution moins le nombre des groupes circulaires, desquels elle est composée. — Dans le cas, où l'on a besoin des plusieures approximations consécutives, la formule, qui donnerait le nombre des lacets binaires au point de ramification consideré, reçoit-on d'une manière la plus facile par le raisonnement suivant, du à Briot *).

Dans ce cas aussi le nombre des lacets binaires sera égal au nombre des valeurs de y qui deviènnent égales au point consideré, moins le nombre des groupes circulaires, sur lesquels se répartissent ces valeurs égales de y. Maintenant à chaque racine simple $\lambda^{(r)}$ de l'équation $L^{(r)}_{i(r)}=0$ il correspond un groupe circulaire d'ordre $pp'p'' \ldots p^{(r)}$, comme nous l'avons vu au § 32; quant au nombre des racines simples de cette équation, il est égal au degré de l'équation moins la somme des ordres de multiplicité de toutes ses racines multiples; cette somme est égal à la somme des degrés de toutes les équations de l'approximation suivante: $L^{(r+1)}_{i(r+1)}=0$

*) *Briot*. Théorie des fonctions abéliennes. Paris 1879, § 12, p. 19.

par rapport à la variable $v^{(r+1)}$ correspondante, comme il suit des considérations des §§ 24 — 31 (voir les équations (8) § 24, (11) § 28), et la somme des degrés des equations qui correspondent au même polygone $P^{(r+1)}$, est égale à $\alpha_0^{(r+1)}$ (v. la formule (2) du § présent); parconséquent le nombre total des groupes circulaires de l'ordre $pp'p'' \ldots p^{(r)}$ au point (a, b) sera égal à

$$\sum_r k_i^{(r)} - \sum_{r+1} \alpha_0^{(r+1)}, \tag{3}$$

où la première somme s'étend à toutes les équations de l'approximation $r+1$-ième et la seconde à toutes les équations de l'approximation suivante. Ainsi le nombre de toutes les groupes circulaires formés des valeurs de y qui deviènnent égales à b pour $x=a$, sera donné par la formule:

$$\begin{gathered}(\sum k - \sum_1 \alpha_0') + (\sum_1 k' - \sum_2 \alpha_0'') + \ldots + \\ + (\sum_{g-2} k^{(g-2)} - \sum_{g-1} \alpha_0^{(g-1)}) + \sum_{g-1} k^{(g-1)},\end{gathered} \tag{4}$$

si l'on avait besoin de g approximations successives, — où les sommes Σ se rapportent à tous les côtés de la ligne polygonale P; Σ_1 à tous des (P, P'); Σ_2 à tous des (P, P', P''); ... enfin Σ_{g-1} à tous des $(P, P', P'' \ldots P^{(g-1)})$. Si l'on retranche ce nombre du nombre α_0 de toutes les valeurs de y, qui deviènnent égales à b pour $x=a$, on aura le nombre cherché de tous les lacets binaires au point (a, b):

$$\begin{gathered}N_{a,b} = \alpha_0 + \sum_1 \alpha_0' + \sum_2 \alpha_0'' + \ \ldots \ + \sum_{g-1} \alpha_0^{(g-1)} - \\ - \sum k - \sum_1 k' - \sum_2 k'' - \ldots - \sum_{g-1} k^{(g-1)}.\end{gathered} \tag{5}$$

36. On appelle suivant Briot le *degré* du point analytique l'exposant de la puissance de $x - a = \xi$ qui entre comme facteur dans le discriminant. Pour déterminer ce degré, il faut revenir à l'égalité (6) § 5, qui définit le discriminant, et aux formules des §§ précédents, qui expriment les approximations consécutives de y. Dans l'égalité (6) § 5, définissant le discriminant, entre le produit $\prod F_y'(x, y) = \prod \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, que nous allons maintenant discuter. La substitution $x=a+\xi$, $y=b+\eta$, $\eta = v\xi^\mu$ ramène la fonction $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ d'après le § 24 à cette forme:

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = F(a+\xi,\ b+v\xi^\mu) = \xi^{\alpha_i\mu+\beta_i} F_1(\xi, v); \tag{1}$$

en différentiant cette égalité par rapport à v, on aura:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \xi^{\alpha_i\mu+\beta_i} \frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}, \tag{2}$$

mais on a

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial v} = \xi^{(\mu)}; \tag{3}$$

en divisant par cette égalité la précédente, on aura:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i} \frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}. \tag{4}$$

Le produit des facteurs du discriminant, qui se rapportent à la valeur de $y=b$ pour $x=a$, prendra en vertu de l'égalité (4) la forme:

$$\prod \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{\sum\limits_{i=0}^{h-1} k_i p\,[(\alpha_i - 1) + \beta_i]} \prod \frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}, \tag{5}$$

car v a $k_i p$ valeurs, aux quelles correspond le même facteur $\xi^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i}$. Mais d'après (10) § 24 $\alpha_i - \alpha_{i+1} = k_i p$, et $\beta_{i+1} - \beta_i = k_i q$; en vertu de ces égalités on pourra transformer l'exposant de ξ dans la formule (5) de cette manière:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{h-1} k_i p\,[(\alpha_i - 1)\,\mu + \beta_i] &= \sum_{i=0}^{h-1} k_i\,[(\alpha_i - 1)\,q + \beta_i p] = \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} [(\beta_{i+1} - \beta_i)(\alpha_i - 1) + \beta_i(\alpha_i - \alpha_{i+1})] = \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1}) - \beta_h;\end{aligned} \tag{6}$$

ce nombre nous désignerons par $\mathfrak{D}_{ab}$ pour abréger, ainsi qu'on aura

$$\mathfrak{D}_{ab} = \sum_{i=0}^{h-1} (\alpha_i\beta_{i+1} - \beta_i\alpha_{i+1}) - \beta_h. \tag{7}$$

En portant celà dans l'égalité (5) nous aurons

$$\prod \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{\mathfrak{D}_{ab}} \prod \frac{\partial F_1(\xi, v)}{\partial v}. \tag{8}$$

Tel sera le degré de $\xi = x - a$ dans le discriminant, lorsqu'il suffira d'une première approximation pour répartir les valeurs de y, égales à b pour $x=a$ en groupes circulaires; car alors le produit à droite en (8) ne contiendra aucune puissance de ξ en facteur; mais il en sera autrement, si l'on aura besoin d'une deuxième approximation pour la répartition des valeurs de y en groupes circulaires: alors ce produit contiendra une puissance de ξ en facteur. Pour la deuxième approximation nous avons posé [§ 28]:

(9) $$\xi = \xi'^{p};$$

(10) $$v = v_1 + \eta', \qquad \eta' = v'\xi'^{\mu'};$$

où v_1 désigne l'une des valeurs approchées de v; alors on aura:

(11) $$F_1(\xi,v) = \xi'^{\alpha'_{i'}\mu' + \beta'_{i'}} F_2(\xi',v').$$

En différentiant cette égalité par rapport à v', on aura:

(12) $$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v'} = \xi'^{\alpha'_{i'}\mu' + \beta'_{i'}} \frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'};$$

mais on a

(13) $$\frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{\partial \eta'}{\partial v'} = \xi'^{\mu'};$$

en divisant par cette équation la précédente, on aura:

(14) $$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v} = \xi'^{(\alpha'_{i'}-1)\mu' + \beta'_{i'}} \frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}.$$

D'après celà on aura:

(15) $$\prod \frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v} = \xi'^{\sum_{i'} pk'_{i'}p'[(\alpha'_{i'}-1)\mu' + \beta'_{i'}]} \prod \frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'},$$

car v_1 a p valeurs et v' $k'_i p'$ valeurs, aux quelles correspond le même facteur en (14). Mais pour un seul des polygones P' on a:

(16) $$\begin{aligned}\sum_{i'} k'_{i'} p'\big((\alpha'_{i'}-1)\mu' + \beta'_{i'}\big) &= \sum_{i'} k'_{i'}\big((\alpha'_{i'}-1)q' + \beta'_{i'}p'\big) = \\ &= \sum_{i'}\big(\alpha'_{i'}\beta'_{i'+1} - \beta'_{i'}\alpha'_{i'+1}\big) - \beta_{h'} = \mathfrak{D}'_{ab},\end{aligned}$$

où la somme s'étend à tous les côtés d'un polygone P' déterminé, tandisqu'en (15) elle s'étendait à tous les côtés de tous les polygones P'. Ayant égard à l'égalité (9) et en portant la valeur de l'exposant de ξ' de l'égalité (16) en (15) et de là en (8), nous aurons dans le cas, où il suffira de deux approximations successives:

(17) $$\prod \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \xi^{\mathfrak{D}_{ab} + \Sigma_1 \mathfrak{D}'_{ab}} \prod \frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}.$$

Quand on aura besoin d'une troisième approximation, on posera [§ 31]:

(18) $$\xi' = \xi''^{p'},$$

(19) $$v' = v'_1 + \eta'', \qquad \eta'' = v''\xi''^{\mu''},$$

v'_1 étant l'une des valeurs approchées de v', et de la même manière qu'auparavant on aura:

(20) $$F_2(\xi',v') = \xi''^{\alpha''_{i''}\mu'' + \beta''_{i''}} F_3(\xi'',v''),$$

d'où l'on tirera, en différentiant par rapport à v'' et divisant le résultat par la dérivée de v' par rapport à v'':

$$\frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'} = \xi''^{(\alpha''_{i''} - 1)\mu'' + \beta''_i} \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''}. \tag{21}$$

Le facteur à droit sera le même pour les pp' combinaisons des valeurs de v_1 et de v'_1 et pour $k''_{i''} p''$ valeurs de v''; donc on aura

$$\begin{aligned}\prod \frac{\partial F_2(\xi', v')}{\partial v'} &= \xi''^{\Sigma pp' k''_{i''} p'' \left((\alpha''_{i''} - 1)\mu'' + \beta''_{i''}\right)} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''} = \\ &= \xi^{\Sigma \mathfrak{D}''_{ab}} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''}\,{}^{*)}\end{aligned} \tag{22}$$

et parconséquent

$$\prod \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{\mathfrak{D}_{ab} + \Sigma_1 \mathfrak{D}'_{ab} + \Sigma_2 \mathfrak{D}''_{ab}} \prod \frac{\partial F_3(\xi'', v'')}{\partial v''}. \tag{23}$$

En continuant ces considérations, on arrivera dans le cas, où l'on aura besoin de g approximations successives, à cette égalité:

$$\prod \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \xi^{D_{ab}} \prod \frac{\partial F_g(\xi^{(g-1)}, v^{(g-1)})}{\partial v^{(g-1)}}, \tag{24}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$D_{ab} = \mathfrak{D}_{ab} + \sum\nolimits_1 \mathfrak{D}_{ab} + \sum\nolimits_2 \mathfrak{D}''_{ab} + \cdots + \sum\nolimits_{g-1} \mathfrak{D}^{(g-1)}_{ab}. \tag{25}$$

Ce nombre D_{ab} est l'exposant du degré du point analytique $x = a$, $y = b$. Ici les signes des sommations s'étendent à tous les polygones subordonnés jusqu'à celui, qui a le même indice avec le signe de la somme.

37. Retranchons maintenant le nombre N_{ab} du nombre D_{ab}; la différence sera un nombre pair, comme on le verra plus loin; ce nombre est d'une grande importance dans notre théorie, pourquoi nous voulons nous arrêter un instant sur sa considération.

En effectuant la dite soustraction, on aura:

$$\left.\begin{aligned} D_{ab} - N_{ab} &= \\ = \mathfrak{D}_{ab} - \alpha_0 &+ \sum k + \\ + \sum\nolimits_1 \mathfrak{D}'_{ab} - \sum\nolimits_1 \alpha'_0 &+ \sum\nolimits_1 k' + \\ + \sum\nolimits_2 \mathfrak{D}''_{ab} - \sum\nolimits_2 \alpha''_0 &+ \sum\nolimits_2 k'' + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots + \\ + \sum\nolimits_{g-1} \mathfrak{D}^{(g-1)}_{ab} - \sum\nolimits_{g-1} \alpha_0^{(g-1)} &+ \sum\nolimits_{g-1} k^{(g-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mais on a, en désignant par Σ'_j la sommation ne s'étendant qu'à un seul polygone $P^{(j)}$:

---

*) Car en vertu de (9) et (8) on a: $\xi''^{pp'} = \xi'^{p} = \xi$.

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{ab} - \alpha_0 + \sum k = \\ = \sum_{i=0}^{h-1} [(\alpha_i \beta_{i+1} - \alpha_{i+1} \beta_i) + k_i] - \alpha_0 - \beta_h = 2\mathfrak{A}_{ab}; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}'_{ab} - \alpha'_0 + \sum'_1 k' = \\ = \sum_{i'=0}^{h'-1} [(\alpha'_{i'} \beta_{i'+1} - \alpha'_{i'+1} \beta'_{i'}) + k'_{i'}] - \alpha'_0 - \beta'_{h'} = 2\mathfrak{A}'_{ab}; \end{cases}$$

. . . .

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_{ab}^{(g-1)} - \alpha_0^{(g-1)} + \sum'_{g-1} k^{(g-1)} = \\ = \sum_{i^{g(-1)}=0}^{h^{(g-1)}-1} \left[\left(\alpha_{i(g-1)}^{(g-1)} \beta_{i(g-1)+1}^{(g-1)} - \alpha_{i(g-1)1+}^{(g-1)} \beta_{i(g-1)}^{(g-1)}\right) + k_{i(g-1)}^{(g-1)}\right] - \\ \qquad - \alpha_0^{(g-1)} - \beta_{h(g-1)}^{(g-1)} = 2\mathfrak{A}_{ab}^{(g-1)}; \end{cases}$$

où les $2\mathfrak{A}_{ab}$, $2\mathfrak{A}'_{ab}$, . . . $2\mathfrak{A}_{ab}^{(g-1)}$ ne sont pour le moment que des signes abrégés pour les expressions à gauche, qui sont évidement des nombres entiers; mais on verra plus loin que ce sont en effet des nombres pairs, car nous démontrerons plus bas que tous les $\mathfrak{A}_{ab}$ etc. sont des nombres entiers. En vertu de ces égalités, en posant

$$(5)\qquad A_{ab} = \mathfrak{A}_{ab} + \sum_1 \mathfrak{A}'_{ab} + \sum_2 \mathfrak{A}''_{ab} + \cdots + \sum_{g-1} \mathfrak{A}_{ab}^{(g-1)},$$

l'égalité (1) pourra être présentée plus simplement ainsi:

$$(6)\qquad D_{ab} - N_{ab} = 2A_{ab},$$

d'où l'on aura

$$(7)\qquad D_{ab} = N_{ab} + 2A_{ab}.$$

L'ayant en vue, on peut présenter ainsi le discriminant:

$$(8)\qquad \Delta = \prod (x-a)^{D_{ab}} = \prod (x-a)^{N_{ab}} \left(\prod (x-a)^{A_{ab}}\right)^2,$$

les produits s'étendant à tous les points de ramification (a, b), qui ne sont pas à l'infini.

En posant

$$(9)\qquad V = \prod (x-a)^{N_{ab}},$$

$$(10)\qquad W = \left(\prod (x-a)^{A_{ab}}\right)^2,$$

on pourra écrire plus simplement

$$(11)\qquad \Delta = V.\ W.$$

Le premier facteur, V, *Kronecker* appellait *) le facteur *essentiel* du discriminant (wesentlicher Faktor), le second, W, le facteur ***non-essentiel***

---

*) *Kronecker*. Diskriminante der algebraischen Funktionen einer Variabeln. Journal de Crelle. Bd. 91, S. 301.

(ausserwesentlicher Faktor). M. *Noether* appelle le premier, V, *Verzweigungsfaktor,* l'autre, W, *Doppelfaktor*, car le premier donne, étant égalé à zéro, les valeurs de x aux points de ramification de le fonction y, situés dans le fini, l'autre est un carré parfait. Le dernier correspond aux points de ramification, qui *s'enlèvent mutuellement,* d'après l'expression de *Riemann* (sich aufhebende Windungspunkte). Si l'on pose:

$$N = \sum N_{ab}, \tag{12}$$

$$A = \sum A_{ab}, \tag{13}$$

où les sommes s'étendent à tous les points de ramifications (a, b), qui ne se trouvent pas à l'infini, alors N sera le degré du facteur essentiel, et $2A$ le degré du facteur non-essentiel. Comme le nombre

$$D = \sum D_{ab}, \tag{14}$$

où la somme s'étend aux mêmes points de ramification (a, b), est le degré du discriminant $\Delta(x)$ par rapport à x, on aura

$$D = N + 2A, \tag{15}$$

[ce qu'on reçoit du reste, en sommant l'égalité (7) par papport à tous les points (a, b), et en prenant égard à les égalités (12)—(14)]. Si tous les points de ramification sont situés dans le fini de l'image algébrique*), alors on aura d'après le § 5 pour le degré du discriminant le nombre $2m(n-1)$; donc on aura alors:

$$D = 2m(n-1), \tag{16}$$

et en vertu de l'égalité (15):

$$N + 2A = 2m(n-1). \tag{17}$$

Dans le cas que nous considérons maitenant, d'après cette égalité la recherche de l'un des nombres N et A se ramène à la recherche de l'autre. Ayant en vue que w (§ 20) désigne le nombre total des points hélicoïdaux simples, équivalents à la totalité des points hélicoïdaux effectifs de la sphère de Riemann, et qu'à un point hélicoïdal simple il correspond une transposition des deux valeurs de y, parconséquent un lacet, nous en concluons, que

$$w = N. \tag{18}$$

En portant, en vertu de cette égalité, N aulieu de w, ou, d'après (17), A dans la formule de Riemann (9) § 20, nous aurons les deux expres-

---

*) Comme on le suppose généralement dans les livres sur les fonctions abéliennes écrites en français.

sions suivantes du genre p de l'image algébrique considéré et de la sphère de Riemann correspondante:

$$p = \frac{1}{2} N - n + 1; \tag{19}$$

$$p = (m-1)(n-1) - A. \tag{20}$$

Ces formules donneront de suite la valeur de p, s'il réussit de présenter le discriminant sous la forme (11), c'est-à-dire, le décomposer en les facteurs essentiel et non-essentiel. Mais les formules à partir de la (16) dans le cas, où il y aura des points de ramification à l'infini — c'est ce qu'on reconnaîtra de suite, après avoir calculé le discriminant d'après la formule (6) § 4, par l'abaissement de son degré effectif au-dessous de $2m(n-1)$ *) ne seront vraies, que si l'on ajoute aux nombres N et A, calculés par les formules (12) et (13), les nombres pureils se rapportant aux points de ramification situés aux lieux infiniment éloignés de l'image algébrique défini par l'équation $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, [car autrement dans ce cas l'équation (17) n'aurait pas lieu] et qu'on trouvera par les mé-

*) C'est ce qu'on rencontre dans la théorie des intégrales hyperelliptiques, qui dependent de l'irrationalité, définie par l'équation:

$$y^2 - R(x) = 0, \tag{a}$$

$R(x)$ désignant un polynome du degré m. Le discriminant de cette équation est:

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^{i=2} 2y_i = +2\sqrt{R(x)} \cdot -2\sqrt{R(x)} = -4R(x); \tag{b}$$

son degré est m; mais d'après la formule (16) du § présent il devrait être égal à $2m$, car on a $n=2$; donc m des racines du discriminant sont à l'infini. Si l'on a $m = 2\rho$, c'est-à-dire si m est un nombre pair, à la valeur $x = \infty$ correspondront deux points O' de la sphère de Riemann, un dans chaque feuillet, dans chacun des quels tomberont $\rho = \frac{m}{2}$ des infinis de la fonction y, comme on s'en assure sans difficulté en posant $x = \frac{1}{t}$. Ces racines infinies du discriminant, $x = \infty$, appartiendront dans le cas consideré au facteur non-essentiel du discriminant. Si l'on aura $m = 2\rho + 1$, alors il correspondera à $x = \infty$ un seul point O' de la sphère de Riemann, qui sera hélicoïdal; en posant pour cela $x = \frac{1}{t^2}$, on verra, que pour $t=0$ il doit être $y = \infty^m$; parconséquent m infinis de la fonction de y tomberont dans ce cas aussi dans le point O'. Mais de ces $m = 2\rho + 1$ racines infinies du discriminant à son facteur non-essentiel appartiendront $2\rho = m - 1$ et un seul au facteur essentiel. Ainsi dans le cas de l'équation (a) et $m = 2\rho$ toutes les racines du facteur non-essentiel du discriminant et dans le cas de $m = 2\rho + 1$ aussi une racine du facteur essentiel s'éloignent à l'infini, et le discriminant se réduit au polynome $R(x)$, qui est le produit des facteurs linéaires du facteur essentiel du discriminant, qui repondent à ses racines, situées à distance finie de l'origine.

La même chose aura lieu en général pour les fonctions algébriques entières [§ (7)]; lorsqu'elles auront des branchements à l'infini, le discriminant aura des racines à l'infini, et son degré sera inférieur à $2m(n-1)$.

thodes exposées aux §§ précédents après avoir transformé l'équation fondamental (1) § 4 par la substitution, rappellée à la fin du § 21.

La méthode pour décomposer directement le discriminant en ses facteurs essentiel et non-essentiel a été donnée par L. Kronecker dans le mémoire cité plus haut. Nous l'avons exposé pour la forme (1) § 4 de l'équation, dans la 1-re édition (en langue russe) de ce livre, mais comme, nous n'en aurons pas besoin dans la suite, nous l'omettons ici pour passer à la demonstration de ce que les nombres $\mathfrak{A}_{ab}$, $\mathfrak{A}'_{ab}$, ... $\mathfrak{A}^{(g-1)}_{ab}$ sont des nombres entiers.

38. Il suffit évidement de le faire pour le premier de ces nombres, car les autres ont une expression analogue. — Par l'égalité (2) du § précédent, nous avons

$$\mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1}\Big(\alpha_i\beta_{i+1}-\alpha_{i+1}\beta_i+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2}; \tag{1}$$

après avoir ajouté en crochets la quantité identiquement nulle $\alpha_{i+1}\beta_{i+1}-\alpha_{i+1}\beta_{i+1}$, on peut présenter ainsi cette formule:

$$\mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})\beta_{i+1}+\alpha_{i+1}(\beta_{i+1}-\beta_i)+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2}; \tag{2}$$

en ajoutant et retranchant la quantité $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{h-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\beta_i$, on en aura:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ab}&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})(\beta_i+\beta_{i+1})-\alpha_i\beta_i+\alpha_{i+1}\beta_{i+1}+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2}=\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1})(\beta_i+\beta_{i+1})+k_i\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2},\end{aligned} \tag{3}$$

ayant en vue, que $\alpha_0\beta_0$ et $\alpha_h\beta_h$ sont égaux à zéro, car on a $\beta_0=0$, $\alpha_h=0$; en retranchant de chaque facteur binôme en paranthèses une unité, on donnera à cette expression la forme:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ab}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{h-1}\Big(&(\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)+(\alpha_i-\alpha_{i+1})+\\&+(\beta_i+\beta_{i+1})+k_i-1\Big)-\frac{\alpha_0+\beta_h}{2},\end{aligned} \tag{4}$$

d'où, comme la somme $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{h-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})=\frac{1}{2}\alpha_0$ et parconséquent sera détruite par $-\frac{\alpha_0}{2}$ du dernier terme, et comme en outre celà, en transportant β_{i+1} dans le terme suivant de la somme, le dernier $\frac{\beta_h}{2}$, en sortant des parenthèses sera aussi détruit par $-\frac{\beta_h}{2}$ du dernier membre en (4), on en tirera définitivement:

$$(5)\qquad \mathfrak{A}_{ab}=\sum_{i=0}^{h-1}\left\{\frac{1}{2}\Big((\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)+k_i-1\Big)+\beta_i\right\}.$$

Mais le produit

$$(6)\qquad \frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_{i+1}-1)(\beta_i+\beta_{i+1}-1)$$

représente le nombre des points (α,β) qui se trouvent à l'intérieur de la trapèze, dont les côtés parallèles sont les ordonnées β_i et β_{i+1} des deux extrémités du côté C_i, et les autres l'axe $O\alpha$ et le côté C_i lui-même, nombre augmenté de la moitié du nombre k_i-1 des points situés sur le côté lui-même, sans les points extrêmes, comme on le verifie aisement, en construisant la figure*); à ce nombre il y est ajouté encore $\frac{1}{2}(k_i-1)$ et le nombre β_i des points situés sur le côté droit du trapèze; donc l'expression en parenthèses $\{\}$ représente le nombre de tous les points situés à l'intérieur du trapèze, sur le côté C_i lui-même et sur son ordonnée extrême à droite, β_i; donc enfin toute l'expression (5) représente le nombre total des points, situés sur la ligne polygonale P elle-même et au-dessous d'elle, à l'exclusion des points situés sur les axes $O\alpha$ et $O\beta$. Ce nombre $\mathfrak{A}_{ab}$ est donc un entier, c'est ce qu'il fallait démontrer. Il jouera un rôle important dans le chapitre suivant. — La signification du nombre $\mathfrak{A}_{ab}$ donne le moyen le plus simple de le trouver: on n'a que de compter les points situés sur le polygone P et au-dessous de lui à l'exclusion des axes $O\alpha$ et $O\beta$.

39. Le nombre $\mathfrak{A}_{ab}$ ne séra égal à zero que lorsque la ligne polygonale P se réduit à la droite joignant le point $(\alpha_0, \beta=0)$ avec le point $(\alpha=0, \beta_h=1)$; car alors il n'y aura sur le polygone P d'autres points que ses extrémités, qui, se trouvant sur les axes $O\alpha$ et $O\beta$, ne doivent pas être comptés, de même que les points situés au-dessous de lui, qui seront tous situés sur l'axe $O\alpha$**). Et en effet, dans ce cas la formule (1) du § précédent donne pour $h=1$:

---

*) Voir: *Briot.* Théorie des fonctions abéliennes. Paris 1879. § 5, p. 9.

**) C'est ce qu'on a dans le cas hyperelliptique (voir la note du § 37) pour les points de ramification, situés à distance finie de l'origine, qui sont donnés par l'équation $R(x)=0$. En effet, la substitution: $x=a+\xi$, $y=0+\eta$ transforme l'équation: $y^2-R(x)=0$ en celui-ci:

$$\eta^2-R'(a)\,\xi-R''(a)\frac{\xi^2}{1\cdot 2}-\cdots-R^{(m)}(a)\frac{\xi^m}{m!}=0,$$

et l'on voit de suite, que $\alpha_0=2$, $\beta_h=\beta_1=1$, car $R'(a)\neq 0$.

$$\mathfrak{A}_{ab} = \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1 - \beta_0\alpha_1 + 1) - \frac{\alpha_0 + \beta_1}{2} = \frac{1}{2}(\alpha_0 + 1) - \frac{\alpha_0 + 1}{2} = 0,$$

car on a dans le cas consideré $\beta_h = \beta_1 = 1$, $\beta_0 = 0$, donc $\beta_1 - \beta_0 = 1$, et parconséquent en vertu de 10 § 24 aussi $k_i = k_0 = 1$. Mais on a

$$A_{0,1} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=a,\, y=b} \neq 0; \tag{1}$$

parconséquent dans le facteur non-essentiel du discriminant n'entrent pas seulement les facteurs correspondants à ceux des points ($x = a$, $y = b$), pour lesquels on a:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \neq 0; \tag{2}$$

quant aux valeurs de x, qui avec les valeurs correspondantes de y satisfont outre des équations:

$$\overset{m\ \ n}{F}(x,y) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

aussi à l'équation

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

infailliblement du moins le point ($\alpha = 1$, $\beta = 1$) se trouvera sur le polygone P on au-dessous de lui, et parconséquent le nombre $\mathfrak{A}_{ab}$ ne sera pas égal à zéro; pourquoi du moins un seul facteur $(x - a)$ entrera, et, de plus, élevé au carré [(8) § 37], dans le facteur non-essentiel du discriminant.

Ainsi un facteur non-essentiel n'apparait dans le discriminant, et, de plus, encore élevé au carré, que pour les valeurs de x, pour lesquelles toutes les trois équations (3), (4), (5) ont des solutions communes; et inversement, pour les valeurs de x, pour lesquelles les trois équations (3), (4), (5) ont des solutions communes, il apparait toujours et, de plus, élevé au carré, le facteur non-essentiel, qui répond à une telle valeur de x. C'est sur cette remarque qu'est basée la méthode de Kronecker pour décomposer le discriminant en ses facteurs essentiel et non-essentiel.

Chapitre II.

Sur les fonctions rationnelles de la variable indépendante et de sa fonction implicite, définie par une équation algébrique irréductible donnée.

---

40. Soit $R(x,y)$ une fonction rationnelle des variables x et y, liées par l'équation algébrique irréductible:

$$\text{(1)} \qquad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0;$$

sa forme la plus générale est d'après Abel la suivante:

$$\text{(2)} \qquad R(x,y) = \frac{f(x, \overset{n-1}{y.})}{\varphi(x)},$$

où $f(x,y)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions rationnelles entières de leurs variables, dont la première est du degré $n-1$ par rapport à y. Il est évident que la fonction $R(x,y)$ est uniforme sur la surface de Riemann, construite pour la fonction y de x définie par l'équation (1); mais la proposition inverse est aussi juste: „toute fonction z uniforme sur toute la surface de Riemann pour la fonction algébrique y définie par l'équation (1), continue et finie à l'exclusion de quelques pôles, est une fonction rationnelle de x et y". En effet, en désignant pour le moment par $y_1, y_2, \ldots y_n$ les valeurs de y, et par $z_1, z_2, \ldots z_n$ les valeurs de z (qui n'ont pas besoin d'être toutes différentes), correspondantes à la même valeur de x, on aura par la formule de Lagrange:

$$\text{(3)} \qquad z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(y)}{y-y_i} \, \frac{z_i}{\varphi'(y_i)},$$

où l'on a fait

$$\text{(4)} \qquad \varphi(y) = \prod_{j=1}^{n} (y - y_j);$$

en développant le second membre suivant les puissances de y, on aura une fonction entière de y du dégré $n-1$, ayant pour ses coéfficients des fonctions symmétriques de y_i, qui, s'exprimant rationnellement en fonction des coéfficients de l'équation (1), seront des fonctions rationnelles de x, comme des fonctions continues uniformes de x, n'ayant que des pôles; donc le second membre de (3) sera une fonction rationnelle des variables x et y, entière du degré $n-1$ par rapport à la dernière, c'est-à-dire de la forme (2); c'est ce, qu'il fallait démontrer*).

Les valeurs de x et de y, pour lesquelles, ou, à dire autrement, les points de la surface de Riemann, où l'on a

$$R(x,y)=z, \tag{5}$$

z étant une valeur donnée, se trouveront en résolvant le système des équations (1) et (5), ou, ce qui est la même chose en vertu de (2), celui-ci:

$$\left.\begin{aligned} \overset{m}{F}(x,\overset{n}{y})&=0,\\ f(x,\overset{n-1}{y})-z\psi(x)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

D'après le théorème de Labatie les solutions de ce système seront représentés par les paires d'équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} f_i(x,y,z)&=0,\\ \theta_i(x,z)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

dont les premiers membres sont les fonctions irréductibles de leurs variables dans le domaine de rationalité (x,y,z) et (x,z) respectivement, car on peut toujours l'atteindre à l'aide d'un nombre fini d'opérations rationnelles. On sait**) aussi, que le produit de toutes les secondes équations des paires (7), c'est-à-dire:

$$\prod_{i=1}^{\lambda}\theta_i(x,z)=0, \tag{8}$$

sera le résultant du système (6) par rapport à y; cette équation (8) détermine toutes les valeurs de x, pour lesquelles aura lieu l'équation (5), après quoi on tirera de la première des équations (7) les valeurs correspondantes de y. Il n'est pas cependant difficile de se convaincre, que toutes les fonctions $\theta_i(x,z)$ ne diffèrent entre elles que par des facteurs constants. En effet, soit y_k l'une des valeurs de y, qui satisfait à l'équation (5) pour la valeur donnée de z et la valeur consideré de x et parconséquent à l'une de paire des équations de la forme (7), par exemple justement à l'équation (7): on aura alors identiquement:

$$\theta_i(x,z)=0, \tag{9}$$

ou, d'après (5):

$$\theta_i\big(x,R(x,y_k)\big)=0; \tag{10}$$

*) *Weierstrass*. Leçons sur la théorie des intégrales abéliennes (1875—1876).

**) *Serret*. Cours d'Algèbre supérieure. T. I, éd. 3-me, p. 203, la formule (12), ou notre „Compendium d'Algèbre supérieure". 2-e éd., p. 303 (en russe).

y_k satisfait donc à l'équation:

$$\Theta_i\big(x, R(x,y)\big) = 0; \tag{11}$$

mais à cause de l'irréductibilité de l'équation (1) toute autre de ses racines, comme y_l, satisfaira aussi à l'équation: c'est-à-dire, on aura aussi

$$\Theta_i\big(x, R(x,y_l)\big) = 0, \tag{12}$$

x étant un point ordinaire*). On voit donc, que si l'équation (9) est satisfaite par la valeur $z_k = R(x,y_k)$, elle sera aussi satisfaite par chacune des autres valeurs de z pour la valeur considérée de x, savoir:

$$z_1 = R(x,y_1), \quad z_2 = R(x,y_2), \; \ldots \; z_n = R(x,y_n). \tag{13}$$

Celà est vrai pour chaque valeur de l'indice i; donc toutes les équations (9) pour $i=1, 2, 3, \ldots \lambda$ auront, pour la même valeur de x, des solutions communes, savoir (13); étant toutes irréductibles, chacune doit diviser toutes les autres; donc toutes ces fonctions $\Theta_i(x,z)$ ne pourront différer entre elles que par les facteurs constants. En réjétant ces facteurs constants et en désignant les fonctions après celà simplement par $\Theta(x,z)$, on aura pour le résultant (6) l'expression:

$$[\Theta(x,z)]^{\lambda} = 0. \tag{14}$$

Donc z satisfait à une équation irréductible:

$$\Theta(x,z) = 0, \tag{15}$$

— lorsqu'on a $\lambda = 1$, ou à l'équation, dont le premier membre est une puissance d'une équation irréductible, quand $\lambda > 1$.

On peut obtenir le résultant des équations (6) par rapport à y aussi au moyen des fonctions symmétriques, et alors on aura, d'après ce que nous venons de démontrer:

$$\prod_{k=1}^{n}\big(z - R(x,y_k)\big) = \left(\frac{\Theta(x,z)}{\psi_1(x)}\right)^{\lambda}, \tag{16}$$

en désignant par $\psi_1(x)$ le coéfficient de la plus haute puissance de z dans $\Theta(x,z)$, comme il suit de la comparaison des coéfficients des plus hautes puissances de z dans les deux membres de l'égalité. z^p étant la plus haute puissance de z dans $\Theta(x,z)$, la comparaison des mêmes termes donne encore

$$n = p\lambda, \tag{17}$$

---

*) — une supposition, faite pour avoir des valeurs de y toutes différentes afin de profiter la propriété connue des équations irréductibles; du reste x pourra être aussi voisin d'un points singulier que l'on voudra.

d'où l'on conclut, que p, c'est-à-dire le nombre des valeurs différentes de la fonction $z = R(x,y)$ pour la même valeur de x est toujours un diviseur de n; donc, si n est un nombre premier, alors on aura toujours $p = n$. On voit encore par l'égalité (16), quant n n'est pas un nombre premier et $\lambda > 1$, que pour la valeur donnée de z il correspond à chaque valeur de x λ facteurs dans le produit à gauche, parconséquant λ valeurs de y. S'il arrive, que $\lambda = 1$, alors à chaque valeur de x pour la valeur donnée de z il correspondra une seule valeur de y*); donc à chaque paire (x,z) il correspondra une seule valeur de y, parconséquent, pour $\lambda = 1$ *y sera une fonction uniforme de (x,z)*. Dans ce cas on n'aura qu'une seule des équations $f(x,y,z) = 0$ [(7)], qui sera d'ailleurs du premier degré par rapport à y; parconséquent, dans ce cas y sera une fonction rationnelle des variables x et z. Ce cas $\lambda = 1$ se présentera toujours, lorsque n sera un nombre premier, parconséquent $p = n$.

Si le degré de la fonction $\Theta(x,z)$ par rapport à x est q, alors la fonction $R(x,y)$ aura la valeur z en $q\lambda$ points de la surface de Riemann; car il correspondra λ valeurs de y à chacune des q valeurs de x, comme on l'a vu plus haut. Ce nombre

$$\mu = q\lambda \tag{18}$$

s'appelle *le degré* de la fonction rationnelle $R(x,y)$ de x et y. Il ne peut pas être en général plus petit que $p+1$, p désignant le genre de l'image algébrique (1), quelques cas spéciaux exceptés, comme on le verra plus loin.

41. Le cas, où l'on a $\lambda > 1$, peut être ramené à celui, où l'on a $\lambda = 1$, par une transformation linéaire. Il suffit pour cela de poser

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - hy', \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + hy, \\ y' &= y, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

en désignant par h une constante, qui doit être déterminée de la manière, que toutes les valeurs de x', pour lesquelles avec les valeurs correspondantes de y' la fonction $R(x,y)$ reçoit la valeur donnée z, soient différentes. Par la substitution (1) les équations (6) du § précédent se transforment en celles-ci:

$$\left.\begin{aligned} &F(x' - hy', y') = 0, \\ &f(x' - hy', y') - z\,\varphi(x' - hy') = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*) Les divers points x sur la surface de Riemann, où $R(x,y)$ prend la valeur z, ne seront pas superposés dans ce cas.

en éliminant y' entre ces équations, on aura d'après le § précédent un résultant de la forme:

$$\left(\frac{\Theta(x',z)}{\psi_1(x')}\right)^{\lambda'}=0, \tag{4}$$

$\Theta(x',z)$ étant irréductibles car, comme nous l'avons vu au § précédent, le résultant sera une fonction irréductible, ou une puissance d'une telle fonction. Mais alors z sera déterminé en fonction de x' par l'équation

$$\Theta(x',z)=0, \tag{5}$$

qui sera du degré μ par rapport à x', car autrement on ne saurait avoir pour la valeur donnée de z μ paires (x',y'), où non seulement y', mais aussi tous les x' seraient différents entre eux, comme il le doit être en vertu des égalités (2), où tous les y sont différents (car le point (x, y) est un point ordinaire, et h d'après la supposition a reçue une telle valeur, qu'aucune des égalités:

$$x_i+hy_i=x_j+hy_j \tag{6}$$

ne soit pas satisfaite; ici, comme toujours, les valeurs correspondantes de x et y portent le même indice); mais alors par (18) du § précédent il doit être $\lambda'=1$, car on a maintenant $q=\mu$.

42. Prenons maintenant deux fonctions rationnelles de x et y:

$$\xi=R_1(x,y), \tag{1}$$

$$\eta=R_2(x,y), \tag{2}$$

dont la première soit du degré μ, la seconde du degré ν dans le sens expliqué à la fin du § 40. En éliminant x et y de ces deux équations à l'aide de l'équation (1) du § 40, on aura une équation entre ξ et y:

$$\Phi(\xi,\eta)=0, \tag{3}$$

qui sera du degré μ par rapport à η et du degré ν par rapport à ξ. Cette équation (3) sera irréductible, ou une puissance d'une équation irréductible. En effet, si les paires des valeurs correspondantes des variables x et y:

$$(x_1,y_1),\quad (x_2,y_2),\quad (x_3,y_3),\ldots (x_\mu,y_\mu) \tag{4}$$

sont celles, pour lesquelles on a $R_1(x,y)=\xi$; alors le produit

$$\prod_{i=1}^{\mu}\Big(\eta-R_2(x_i,y_i)\Big) \tag{5}$$

sera le résultant de l'équation (2) par rapport au système d'équations:

$$\begin{cases} \overset{m\,n}{F}(x,y)=0, \\ R_1(x,y)-\xi=0. \end{cases} \tag{6}$$

Ce produit (5) se réduira donc, tous les calculs faits, à la fonction $\Phi(\xi,\eta)$, par rapport à laquelle aura lieu la proposition énoncée. Pour le démontrer, posons comme dans le § précédent:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + hy, \\ y' &= y, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où h doit être choisi de la manière, que toutes les valeurs de chacun des éléments de la paire (x'_i, y'_i), pour lesquelles on a $R_1(x', y') = \xi$, soient différentes; alors d'après le § précédent les variables x' et ξ seront liées par l'équation irréductible:

$$\Theta(x', \xi) = 0, \tag{8}$$

laquelle sera du degré μ par rapport à x', et en même temps y' s'exprimera rationnellement en fonction de ξ et x', ainsi qu'on aura

$$y' = R(x', \xi), \tag{9}$$

où R désigne une fonction rationnelle de ses variables. En vertu de cette égalité (9) les égalités (7) prennent la forme:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - hR(x', \xi), \\ y &= R(x', \xi); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

donc x et y s'exprimeront rationnellement par x' et ξ. En désignant par (x'_i, y'_i) les valeurs, en nombre μ, de la paire (x', y'), pour lesquelles on a $R_1(x, y) = \xi$, on aura d'après (10):

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x'_i - hR(x'_i, \xi), \\ y_i &= R(x'_i, \xi); \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

en portant ces valeurs dans le produit (5), et en désignant par $R_3(x'_i, \xi)$ ce, que devient $R_2(x_i, y_i)$ par cette substitution, on aura d'après le § 40:

$$\prod_{i=1}^{\mu} \left(\eta - R_3(x'_i, \xi)\right) = \left(\frac{\Theta_2(\xi, \eta)}{\psi_2(\xi)}\right)^{\lambda_2}, \tag{12}$$

— après avoir exprimé la fonction symmétrique, qui est à gauche, des racines x'_i de l'équation (8) par ses coéfficients, — où $\Theta_2(\xi, \eta)$ est une fonction irréductible de ses variables. Mais cela ne sera autre chose que le résultant de l'élimination de x et y des équations (1) et (2) à l'aide de l'équation (1) § 40; donc

$$\Phi(\xi, \eta) = \left(\frac{\Theta_2(\xi, \eta)}{\psi_2(\xi)}\right)^{\lambda_2}, \tag{13}$$

c'est ce, qui exprime notre proposition. En désignant par p_2 le degré de $\Theta_2(\xi, \eta)$ par rapport à η, on aura

$$p_2 \lambda_2 = \mu, \tag{14}$$

comme il résulte de la comparaison des degrés de η dans les deux membres de l'égalité (12). — Si nous avions commencé par l'élimination de x entre les équations (1) § 40 et (2) du § présent, nous serions arrivé à la conclusion, que la même fonction $\Theta_2(\xi, \eta)$ est du degré q_2 par rapport à ξ, tel, qu'on a

$$(15) \qquad q_2 \lambda_2 = \nu,$$

c'est ce qui finit à démontrer notre proposition par rapport à $\Phi(\xi, \eta)$. Si $\lambda_2 \neq 1$, les nombres p_2 et q_2 seront λ_2 fois moindre que les nombres μ et ν respectivement, et les variables ξ et η seront liées par l'équation:

$$(16) \qquad \Theta_2(\overset{q_2}{\xi}, \overset{p_2}{\eta}) = 0;$$

parconséquent à chaque valeur de ξ correspondront p_2 valeurs différentes de η, car $\Theta_2(\xi, \eta)$ est irréductible, et à chaque valeur de η correspondront q_2 valeurs différentes de ξ. Si l'on a $\lambda_2 = 1$, alors il devient: $p_2 = \mu$, $q_2 = \nu$, et les variables ξ et η seront liées par l'équation irréductible:

$$(17) \qquad \Theta_2(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\mu}{\eta}) = 0.$$

Dans ce cas remarquable, d'après le § 40, la variable x', elle aussi, s'exprimera rationnellement par ξ et η *), et en conséquence des formules (10) de même les variables x et y. Ainsi dans le cas en question chaque paire: celle des variables x et y, liées par l'équation

$$(18) \qquad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0,$$

et celle des variables ξ et η, liées par l'équation:

$$(19) \qquad \Phi(\overset{\nu}{\xi}, \overset{\mu}{\eta}) = 0,$$

s'expriment rationnellement l'une par l'autre. Dans ce cas reçoit-on non seulement l'équation (19) de l'équation (18) par une substitution rationnelle, mais aussi cette dernière équation de l'équation (19) par une substitution rationnelle. Les deux équations (18) et (19) seront donc *rationnellement-réversibles*. L'ensemble de toutes les équations rationnellement-réversibles forme une *classe* d'équations. (Riemann).

43. *Toutes les équations rationnellement-réversibles définissent des fonctions algébriques de même genre*, qui est aussi celui des surfaces de Riemann correspondantes — c'est ce qui permet de démontrer aisement cette proposition importante. D'après la définition que nous avons donné au § 14, le genre de la surface de Riemann, répondante à l'équation $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, est le nombre le plus grand des courbes fermées, qu'on peut

*) L'équation (12) étant le résultant de $\eta = R_3(x', \xi)$ par rapport à l'équation (8).

tracer sur cette surface en même temps sans empêcher par celà la communiquation des parties de la surface adjacentes à ces courbes; nous avons désignées ces courbes en § 16 par $A_k (k = 1, 2, \ldots p)$. Lorsque x aura décrit l'une de ces courbes, A_k par exemple, alors y reviendra à sa valeur initiale; donc aussi les fonctions rationnelles des variables x et y:

$$\xi = R_1(x, y) \tag{1}$$

et

$$\eta = R_2(x, y) \tag{2}$$

reprendront leurs valeurs initiales, et parconséquent le point (ξ, η) décrira sur la surface de Riemann correspondante à l'équation

$$\Phi(\xi, \eta) = 0, \tag{3}$$

qui relie ces variables entre elles, une ligne fermée aussi α_k, car ξ et η reviendront à leurs valeurs initiales, laquelle en outre n'empêchera pas la communication des parties de cette surface, adjacentes à elle, α_k. En effet, si le point (x, y) passe de l'un côté de la ligne A_k au point vis-à-vis de l'autre par une ligne qui ne la croise pas de même que les autres de ces lignes, par exemple par la ligne B_k, alors à cause de l'uniformité des fonctions $R_1(x,y)$ et $R_2(x,y)$ sur la première surface de Riemann, relative à l'équation $\overset{m}{F}(\overset{n}{x}, y) = 0$, la même chose fera le point (ξ, η) sur la surface de Riemann relative à l'équation $\overset{\nu}{\Phi}(\overset{\mu}{\xi}, \eta) = 0$, par rapport à la ligne α_k. Ainsi à chaque ligne fermée A_k sur la première surface de Riemann il correspondra sur l'autre une ligne fermée α_k de même nature; donc le nombre de ces dernières lignes ne peut pas être moindre que celui des A_k. Mais à cause de la réversibilité rationnelle des équations $F(x,y) = 0$ et $\Phi(\xi, \eta) = 0$, le nombre des lignes fermées A_k ne peut pas non plus être moindre que celui des lignes fermées α_k; donc les deux nombres sont égaux; c'est ce qui démontre notre proposition.

Remarque. Les deux lignes de différentes catégories, comme A_k et A_l, sur la surface de Riemann relative à l'équation $\overset{m}{F}(\overset{n}{x}, y) = 0$ ne peuvent engendrer deux lignes α_k et α'_k d'une même catégorie sur la surface de Riemann, répondant à l'équation $\overset{\nu}{\Phi}(\overset{\mu}{\xi}, \eta) = 0$; car les lignes d'une même catégorie sur l'une des surfaces de Riemann aussi bien que sur l'autre, peuvent être reçues l'une de l'autre par une déformation continue, ce qui est impossible pour les lignes des différentes catégories, car les points de ramification, qu'entourent ces diverses lignes, ne sont pas les mêmes, du moins quelquesunes.

44. Nous passons maintenant de ces considérations générales à la considération des fonctions rationnelles d'un point (x, y) de l'image algébrique défini par l'équation elgébrique irréductible

$$(1) \qquad F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0,$$

plus spéciales, mais qui jouent un rôle fondamental dans la théorie qui nous occupe, semblable à celle des fractions simples dans la théorie des fractions rationnelles. On arrive aux conditions qui les définissent, en envisageant les formes différentes qu'on peut donner à l'expression

$$(2) \qquad \frac{f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) \frac{dx}{dt}}{F'_y(x, y)},$$

qui, multiplié par dt, figure sous le signe d'intégration dans l'intégrale abélienne, $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ désignant une fonction rationnelle de x et de y des dégrés μ et ν respectivement, aux points critiques, c'est-à-dire aux points de ramification et aux lieux infiniment éloignés de l'image algébrique de differentes catégories. Quant aux points de ramification, nous avons déjà expliqué au § 34 comment peut-on exprimer en fonction d'une variable auxiliaire t les variables x et y aux environs de ces points; passons donc aux lieux infiniment éloignés.

a) Pour tous les points, où l'on a $a_0 = 0$, $y = \infty$, on fait la substitution:

$$(3) \qquad y = \frac{1}{\bar{y}};$$

alors, en vertu de l'équation (1) ayant $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{\frac{1}{\bar{y}}}) = 0$, on aura:

$$F'_y\left(x, \frac{1}{\bar{y}}\right) = na_0 \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^{n-1} + (n-1)a_1 \left(\frac{1}{\bar{y}}\right)^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}\left(\frac{1}{\bar{y}}\right) +$$

$$(4) \qquad + a_{n-1} - n\bar{y}F\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) = \frac{-1}{\bar{y}^{n-2}}\Big[a_1 + 2a_2\bar{y} + \ldots + (n-2)a_{n-2}\bar{y}^{n-3} +$$

$$+ (n-1)a_{n-1}\bar{y}^{n-2} + na_n\bar{y}^{n-1}\Big] = \frac{1}{\bar{y}^{n-2}} F_1(\overset{m}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}}),$$

en posant

$$(5) \qquad F_1(\overset{m}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}}) = -a_1 - 2a_2\bar{y} - \ldots - (n-2)a_{n-2}\bar{y}^{n-3} - (n-1)a_{n-1}\bar{y}^{n-2} - - na_n\bar{y}^{n-1};$$

en faisant encore

$$(6) \qquad f\left(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) = \frac{1}{\bar{y}^{\nu}} f_1(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\bar{y}}),$$

on réduira l'expression (2) à la forme:

$$\bar{y}^{-n-2-\nu}\,\frac{f_1(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{\bar{y}})\,\frac{dx}{dt}}{F_1(\overset{m}{x},\overset{n-1}{\bar{y}})}. \tag{7}$$

b) Pour les points, où l'on a $x=\infty$ et y fini, on pose:

$$x=\frac{1}{\bar{x}}, \tag{8}$$

donc on aura

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{\bar{x}^2}\,\frac{d\bar{x}}{dt}; \tag{9}$$

en faisant

$$F'_y\left(\frac{1}{\bar{x}},y\right)=\frac{1}{\bar{x}^m}F_2(\overset{m}{\bar{x}},\overset{n-1}{y}), \tag{10}$$

$$f\left(\overset{\mu}{\frac{1}{\bar{x}}},\overset{\nu}{y}\right)=\frac{1}{\bar{x}^{\mu}}f_2(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{y}), \tag{11}$$

on réduira l'expression (2) à la forme:

$$-\bar{x}^{m-2-\mu}\,\frac{f_2(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{y})\,\frac{d\bar{x}}{dt}}{F_2(\overset{m}{\bar{x}},\overset{n-1}{y})}. \tag{12}$$

c) Pour les points, où l'on a $x=\infty$ et $y=\infty$, on fait à la fois les deux substitutions (3) et (8), ou, ce qui est la même chose on fait la dernière substitution, c'est-à-dire (8), dans la formule (7). Alors, ayant égard à (9) et en posant

$$F_1(\overset{m}{x},\overset{n-1}{\bar{y}})=F_1\left(\overset{m}{\frac{1}{\bar{x}}},\overset{n-1}{\bar{y}}\right)=\frac{1}{\bar{x}^m}F_3(\overset{m}{\bar{x}},\overset{n-1}{\bar{y}}), \tag{13}$$

$$f_1(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{\bar{y}})=f_1\left(\overset{\mu}{\frac{1}{\bar{x}}},\overset{\nu}{\bar{y}}\right)=\frac{1}{\bar{x}^{\mu}}f_3(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{\bar{y}}), \tag{14}$$

on réduira l'expression (2) à la forme:

$$-\bar{x}^{m-2-\mu}\,\bar{y}^{-n-2-\nu}\,\frac{f_3(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{\bar{y}})\,\frac{d\bar{x}}{dt}}{F_3(\overset{\mu}{\bar{x}},\overset{\nu}{\bar{y}})}. \tag{15}$$

Maintenant, la fonction rationnelle de x et de y peut toujours être déterminée — et cela *seulement à l'aide des opérations rationnelles*, — de manière:

1°) qu'en tous les points de ramification de la fonction y de x, définie par l'équation (1), qui se trouvent *dans le fini*, son degré par rapport à la variable auxiliaire t (§ 24) soit égal à celui de l'expression;

$$F'_y(x,y):\frac{dx}{dt} \tag{16}$$

par rapport à la même variable t;

2°) qu'en tous les points, où l'on a $a_0=0$, $y=\infty$, soient égaux les degrés, par rapport à la variable t, des expressions:

$$(17) \qquad \overset{\mu\ \nu}{f_1}(x, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad \overset{m\ n-1}{F_1}(x, \bar{y}) : \frac{dx}{dt},$$

3°) qu'aux points, où l'on a $x=\infty$, y fini, soient égaux les degrés par rapport à t des expressions:

$$(18) \qquad \overset{\mu\ \nu}{f_2}(\bar{x}, y) \qquad \text{et} \qquad \overset{m\ n-1}{F_2}(\bar{x}, y) : \frac{d\bar{x}}{dt}$$

4°) qu'aux points, où l'on a $x=\infty$, $y=\infty$, soient égaux les degrés par rapport à t des expressions:

$$(19) \qquad \overset{\mu\ \nu}{f_3}(\bar{x}, \bar{y}) = \overset{\mu\ \nu}{f}\left(\frac{1}{\bar{x}}, \frac{1}{\bar{y}}\right) \qquad \text{et} \qquad \overset{m\ n-1}{F_3}(\bar{x}, \bar{y}) : \frac{d\bar{x}}{dt},$$

(où l'on a conformément à (13) et (5):

$$(20) \qquad \overset{m\ n-1}{F_3}(\bar{x}, \bar{y}) = -[\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2\bar{y} + 3\bar{a}_3\bar{y}^2 + \ldots + n\bar{a}_n\bar{y}^{(n-1)}],$$

$\bar{a}_k$ étant le résultat de la substitution de $\frac{1}{\bar{x}}$ aulieu de x dans a_k, multiplié par $\bar{x}^m$;) — la valeur de la variable auxiliaire t étant supposée infiniment petite.

Alors l'expression

$$(21) \qquad \frac{\overset{\mu\ \nu}{f}(x, y)}{F'_y(x, y)} \cdot \frac{dx}{dt}$$

restera finie en tous les points de la première catégorie; sera de même ordre que $\bar{y}^{n-2-\nu}\Big|_{\bar{y}=0}$ en tous les points de la seconde catégorie, de même ordre que $\bar{x}^{m-2-\mu}\Big|_{\bar{x}=0}$ en tous les points de la troisième, et enfin de même ordre que le produit $\bar{x}^{m-2-\mu}\Big|_{\bar{x}=0} \cdot \bar{y}^{n-2-\nu}\Big|_{\bar{y}=0}$ en tous les points de la quatrième catégorie.

Les fonctions rationnelles de x et y qui satisfont à toutes ces conditions, seront appellées fonctions adjointes à l'équation (1), suivant M. Noether (adjungierte Kurven). Les plus remarquables des fonctions adjointes sont celles, pour lesquelles on a $\mu=m-2$, $\nu=n-2$: avec ces fonctions l'expression (21) sera toujours finie; on les désigne d'après Riemann par

$$(22) \qquad \overset{m-2\ n-2}{\varphi}(x, y)$$

et on les nomme fonctions adjointes *de première espèce*; ensuite les fonctions adjointes

$$(23) \qquad \overset{m-1\ n-1}{\psi}(x, y),$$

pour lesquelles l'expression (21) reste finie aux points de la première catégorie et est du même ordre que $\left.\frac{1}{y}\right|_{\overline{y}=0}$ aux points de la deuxième, que $\left.\frac{1}{x}\right|_{\overline{x}=0}$ — de la troisième, et que le produit $\left.\frac{1}{x}\right|_{\overline{y}=0}\cdot\left.\frac{1}{y}\right|_{\overline{y}=0}$ — de la quatrième. Elle est aussi d'une grande importance dans notre théorie.

45. Nous allons maintenant montrer, comment peut on déterminer effectivement la fonction $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ de manière à remplir ces conditions. À la première approximation on aura d'après (4) § 36:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi^{(\alpha_i-1)\mu+\beta_i}\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}; \tag{1}$$

en posant $\xi=\xi'^p$, nous donnerons à cette égalité la forme:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+\beta_i p}\frac{\partial F_1(\xi'^p,v)}{\partial v}; \tag{2}$$

mais comme on a $x=a+\xi=a+\xi'^p$, on en tire par la différentiation:

$$\frac{dx}{d\xi'}=p\xi'^{p-1}; \tag{3}$$

en divisant (2) par (3), on aura:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{d\xi'}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\cdot\frac{1}{p}\frac{\partial F_1(\xi'^p,v)}{\partial v}; \tag{4}$$

ainsi s'exprime ce quotient pour chaque valeur de v, qui est une racine de l'équation $L_i=0$ [(14') § 24 en vertu de (13) § 24]. En posant $x=a+\xi$, $y=b+\eta$ aussi dans la fonction $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$, on aura:

$$\begin{aligned} f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})&=\sum B_{\gamma'\delta'}\mu^{\gamma'}\xi^{\delta'}=\xi^{\gamma'_i\mu+\delta'_i}\sum B'_{\gamma'\delta'}v^{\gamma'}\xi^{(\gamma'-\gamma'_i)\mu+(\delta'-\delta'_i)}=\text{*)}\\ &=\xi^{\gamma'_i\mu+\delta'_i}f_1(\xi,v), \end{aligned} \tag{5}$$

μ à droite étant donnée par la formule (3) du § 24, et en posant ici $\xi=\xi'^p$, l'égalité suivante:

$$f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})=\xi'^{\gamma'_i q+\delta'_i p}f_1(\xi'^p,v). \tag{6}$$

En la comparant avec l'expression (4), on voit que pour le côté C_i du polygone P (dont le coéfficient angulaire est $-\mu$) il doit être:

$$\gamma'_i q+\delta'_i p=(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1, \tag{7}$$

---

*) La lettre μ à droite et celle à gauche ont des significations tout à fait différentes qu'on ne doit pas confondre.

afin que les fonctions $\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)}$ et $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} : \frac{dx}{d\xi'}$ soient des infiniment-petites de même ordre pour la valeur infiniment-petite de ξ'. On peut donner à la condition (7) une forme plus simple, en posant

$$\gamma' = \gamma - 1, \qquad \delta' = \delta - 1; \tag{8}$$

alors elle devient:

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1, \tag{9}$$

et le polynome (5):

$$\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)} = \sum B_{\gamma\delta} \eta^{\gamma-1} \xi^{\delta-1}, \tag{10}$$

— si l'on désigne encore ses coéfficients simplement par $B_{\gamma\delta}$ aulieu de $B'_{\gamma-1,\delta-1}$. Après ce changement l'égalité (6) prend la forme:

$$\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)} = \xi'^{\,(\gamma_i-1)q + (\delta_i-1)p} f_1(\xi'^{\,p}, v). \tag{11}$$

Si l'on divise (9) par p, on aura:

$$\gamma_i \mu + \delta_i = \alpha_i \mu + \beta_i + \frac{1}{p}; \tag{12}$$

le degré de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)}$ pour ξ' infiniment petit étant plus élevé que $\alpha_i\mu + \beta_i$, il en suit, que tous les $B_{\gamma\delta}$, qui correspondent aux points (γ, δ), situés sur le polygone P et au-dessous de lui, doivent être égaux à zéro:

$$B_{\gamma\delta} = 0; \tag{13}$$

c'est ce qui donne les conditions 1⁰), auxquelles doivent satisfaire les coéfficients du polynome $\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)}$, pour qu'il présente ce, que nous avons nommé une fonction adjointe à l'équation (1) du § précédent. Les coéfficients $B_{\gamma\delta}$ sont des fonctions linéaires des coéfficients de $\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)}$, car ils sont les valeurs des derivées de différents ordres de cette fonction par rapport à x et à y, divisées par certains nombres entiers, pour $x = a$, $y = b$. Si

$$\left\{ \begin{aligned} &\varphi(x,y) = 0, \\ &\psi(x) = 0 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

est la paire d'équations, qui déterminent un tel point (a, b), pour lequel v est une racine de l'équation $L_i = 0$, le premier membre de (13) doit s'annuler pour toutes les solutions de la paire d'équations (14); parconséquent l'expression $B_{\gamma\delta}$ (où nous écrirons maintenant x, y aulieu de a, b respectivement) doit, étant disposée suivant les puissances descendantes de y, être divisible par $\varphi(x,y)$ pour toutes les valeurs de x, qui satisfont à l'équation $\psi(x) = 0$; pourquoi, après avoir divisé $B_{\gamma\delta}$ par $\varphi(x,y)$, nous poserons égaux à zéro les coéfficients du reste de la division: nous aurons ainsi une série d'équations, qui doivent être satisfaites par toutes les solutions de l'équation $\psi(x)=0$; parconséquent le premier membre de chacune de ces équations doit être divisible par $\psi(x)$; par cette raison nous poserons égaux à zéro les coéfficients de chaque puissance de x dans les restes de leur division par $\psi(x)$: c'est ce qui nous donnera les relations cherchées entre les coéfficients de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$, qui seront linéaires par rapport à eux.

46. Ces conditions sont également indispensables, comme dans le cas, où v est une racine simple de l'équation $L_i=0$, de même dans celui, où elle est une racine multiple; mais dans le dernier cas des nouvelles conditions s'y ajoutent, car dans ce cas on a besoin d'une seconde approximation pour trouver la répartition en groupes circulaires des valeurs de y, qui deviènnent égales à b pour $x=a$. Dans ce dernier cas on aura d'après le (14) du § 36:

$$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}=\xi'^{(\alpha'_{i'}-1)\mu'+\beta'_{i'}}\frac{\partial F_2(\xi',v')}{\partial v'}; \tag{1}$$

si l'on y pose d'après (18) du même §:

$$\xi'=\xi''^{p'}, \tag{2}$$

cette égalité se transforme en celle-ci:

$$\frac{\partial F_1(\xi,v)}{\partial v}=\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+\beta'_{i'}p'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'},v')}{\partial v'}; \tag{3}$$

en le portant dans le (2) du § précédent, on aura:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+\beta_i p}\,.\,\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+\beta'_{i'}p'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'},v')}{\partial v'}. \tag{4}$$

Mais d'après (3) du § précédent et (2) du § présent on a:

$$\frac{dx}{d\xi''}=\frac{dx}{d\xi'}\cdot\frac{d\xi'}{d\xi''}=p\xi'^{p-1}\,.\,p'\xi''^{p'-1}; \tag{5}$$

en divisant (4) par (5), nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{d\xi''}=\xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\,.\,\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+(\beta'_{i'}-1)p'+1}\times\\ \times\frac{1}{pp'}\frac{\partial F_2(\xi''^{p'},v')}{\partial v'}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

En faisant la substitution

$$v=v_1+\eta' \tag{7}$$

où v_1 est une racine multiple de l'équation $L_i=0$, dans la fonction $f_1(\xi'^p,v)$, puis en posant

$$\eta'=v'\xi'^{\mu'}, \tag{8}$$

$$\xi'=\xi''^{p'}, \tag{9}$$

on aura pour le côté $C'_{i'}$, du polygone P':

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} & f_1(\xi'^{p}, v) = \sum B'_{\gamma'\delta'}\,\eta'^{\gamma'-1}\,.\,\xi'^{\delta'-1} = \\ & = \xi'^{(\gamma'_{i'}-1)\mu'+\delta'_{i'}-1} \sum B'_{\gamma'\delta'} v'^{(\gamma-\gamma'_{i'})\mu'+\delta'-\delta'_{i'}} = \\ & = \xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'} f_2(\xi''^{p'}, v'); \end{aligned}\right.$$

en le portant dans le (11) du § précédent, nous aurons:

$$(11)\qquad \overset{\mu\ \ \nu}{f(x, y)} = \xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}\,.\,\xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'}\,.\,f_2(\xi''^{p'}, v').$$

Pour chaque racine de l'équation $L_i = 0$ on a

$$(12)\qquad \gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1,$$

comme nous l'avons vu au § précédent; maintenant, en comparant (11) avec (6), on trouve, qu'il doit être encore:

$$(13)\qquad \gamma'_{i'} q' + \delta'_{i'} p' = \alpha'_{i'} q' + \beta'_{i'} p' + 1,$$

pour le côté C'_i, du polygone P'. D'ici on tire, comme plus haut, la conclusion, que pour toutes les γ' et δ', qui correspondent aux points, situés sur le polygone P' et au-dessous de lui, il doit être:

$$(14)\qquad B'_{\gamma'\delta'} = 0.$$

Ces $B'_{\gamma'\delta'}$, sont les polynomes en v_1, que nous disposerons suivant les puissances de cette quantité (laquelle nous désignerons maintenant simplement par v); les coéfficients de ses puissances seront les fonctions linéaires des $B_{\gamma\delta}$, parconséquent des polynomes en x et y, dont les coéfficients seront les fonctions linéaires des coéfficients de la fonction cherchée $\overset{\mu\ \nu}{f(x,y)}$. Les valeurs de v sont déterminées par les systèmes des trois équations de la forme:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} & \chi_1(x, y, v) = 0, \\ & \varphi_1(x, y) = 0, \\ & \psi_1(x) = 0; \end{aligned}\right.$$

pour toutes les solutions de ce système doivent être remplis les conditions (14); pourquoi nous diviserons $B'_{\gamma'\delta'}$ par $\chi_1(x, y, v)$, après l'avoir disposé suivant les puissances descendantes de v, et poserons égaux à zéro les coéfficients de toutes les puissances de v dans le reste reçu: nous aurons une série d'équations avec les inconnues x et y, qui doivent être satisfaites par toutes les solutions des deux dernières des équations (15); par cette raison, après avoir disposé chacun de ces coéfficients suivant les puissances descendantes de y, nous les diviserons par $\varphi_1(x,y)$ et poserons égal à zéro chacun des coéfficients des restes de la division: on aura des équations avec une seule inconnue x, qui doivent être satisfaites par toutes les solutions de l'équation $\psi_1(x)=0$; donc, après les avoir disposé suivant les puissances décroissantes de x, nous les diviserons par $\psi_1(x)$: en égalant à zéro les coéfficients de chaque puissance de x dans les restes reçus, on aura les équations cherchées entre les coéfficients de $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$, linéaires par rapport à eux.

47. Ainsi on trouve les conditions pour les coéfficients de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$, lorsqu'on a besoin d'une deuxième approximation pour répartir en groupes circulaires les valeurs de y, qui deviènnent égales à b pour $x=a$. Ces conditions seront suffisantes, lorsque v' est une racine simple de l'équation $L'_{i'}=0$; mais si elle en sera une racine multiple, alors à l'aide de la troisième approximation on aura de la même manière pour le côté $C''_{i''}$ du polygone P'':

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}:\frac{dx}{d\xi'''}&=\xi'^{(\alpha_i-1)q+(\beta_i-1)p+1}\,.\,\xi''^{(\alpha'_{i'}-1)q'+(\beta'_{i'}-1)p'+1}\times\\&\times\xi'''^{(\alpha''_{i''}-1)q''+(\beta''_{i''}-1)p''+1}\,.\,\frac{1}{pp'p''}\,\frac{\partial F_3(\xi'''^{p''},v'')}{\partial v''},\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

et aussi

$$\left.\begin{aligned}f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})&=\xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p}\,.\,\xi''^{(\gamma'_{i'}-1)q'+(\delta'_{i'}-1)p'}\times\\&\times\xi'''^{(\gamma''_{i''}-1)q''+(\delta''_{i''}-1)p''}f_3(\xi'''^{p''},v'').\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

En comparant ces deux expressions, vu les (12) et (13) du § précédent, on trouve, qu'il doit être aussi:

$$\gamma''_{i''}q''+\delta''_{i''}p''=\alpha''_{i''}q''+\beta''_{i''}p''+1,\qquad(3)$$

d'où il suivra à son tour, que pour toutes les valeurs de γ'' et δ'', correspondantes aux points, situés sur le polygone P'' et au-dessous de lui, on doit avoir:

$$B''_{\gamma''\delta''}=0.\qquad(4)$$

Ici $B''_{\gamma''\delta''}$ sont des polynomes, disposés suivant les puissances descendantes de v', dont les coéfficients sont les polynomes, disposés suivant les puissances descendantes de v; les coéfficients de ces dernières sont les polynomes, disposés suivant les puissances descendantes de y avec des coéfficients, qui sont des polynomes, disposés suivant les puissances descendantes de x, dont les coéfficients sont les fonctions linéaires des coéfficients de la fonction cherchée $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$. Les valeurs de v' sont déterminées par des systèmes de quatre équations de la forme:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Phi_2(x,y,v,v')=0,\\ &\chi_2(x,y,v)=0,\\ &\varphi_2(x,y)=0,\\ &\psi_2(x)=0; \end{aligned}\right.$$

les équations (4) doivent avoir lieu pour toutes les solutions de ce système; donc nous diviserons $B''_{\gamma''\delta''}$ après les avoir disposé suivant les puissances descendantes de v' par $\Phi_2(x,y,v,v')$; les coéfficients du reste de la division nous poserons égaux à zéro: nous aurons ainsi les équations, qui doivent être satisfaites par toutes les solutions des trois dernières des équations (5); par cette raison nous diviserons le premier membre de chacune des équations reçues après les avoir disposé suivant les puissances descendantes de v, par $\chi_2(x,y,v)$ et poserons égaux à zéro les coéfficients des toutes les puissances de v dans les restes de la division: nous aurons ainsi des équations entre y et x, qui doivent être satisfaites par toutes les solutions des deux dernières équations (5); pourquoi nous diviserons le premier membre de chacune d'elles après les avoir disposé suivant les puissances descendantes de y, par $\varphi_2(x,y)$ et poserons égaux à zéro les coéfficients des puissances de y dans les restes reçus: on aura ainsi les équations avec la seule inconnue x, auxquelles doivent satisfaire toutes les solutions de la dernière des équations (5); donc nous diviserons les premiers membres de ces équations par $\psi_2(x)$ et nous poserons égaux à zéro les coéfficients des puissances de x dans les restes reçus: on aura ainsi les conditions nouvelles pour les coéfficients de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ en forme des équations linéaires par rapport à aux.

De la même manière il faut oppérer plus loin, si l'on aurait besoin de la quatrième approximation et des approximations ultérieures pour répartir en groupes circulaires les valeurs de y, égales à b pour $x=a$.

48. La détermination de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ conformément aux autres conditions du § 44 demande des opérations analogues. Ainsi aux points, où x est égal à l'une des racines de l'équation $a_0=0$ (soit a) et $y=\infty$, en posant $x=a+\xi$, $y=\frac{1}{\bar{y}}$, on aura:

$$(1)\qquad f_1(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{\bar{y}})=\sum B_{\gamma\delta}\bar{y}^{\gamma-1}\xi^{\delta-1}=\xi^{(\gamma_i-1)\mu+(\delta_i-1)}f_1^{(1)}(\xi,\bar{v}),$$

où l'on a $\bar{y}=\bar{v}\xi^{\mu}$, $\mu=\frac{q}{p}$, et

$$(2)\qquad f_1^{(1)}(\xi,\bar{v})=\sum B_{\gamma\delta}\bar{v}^{\gamma-1}\xi^{(\gamma-\gamma_i)\mu+(\delta-\delta_i)};$$

et

$$\bar{y}^n F\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) = \sum A_{\alpha\beta}\, \bar{y}^\alpha \xi^\beta = \xi^{\alpha_i\mu + \beta_i} F^{(1)}(\xi, \bar{v})\, \bar{v}, \tag{3}$$

où l'on a

$$F^{(1)}(\xi, \bar{v}) = \sum A_{\alpha\beta} \bar{v}^{\alpha-1} \xi^{(\alpha-\alpha_i)\mu + \beta - \beta_i}, \tag{4}$$

car à cause de $a_0 = 0$ $\bar{y}$ sera le facteur commun de tous les termes en (3). En différentiant l'égalité (3) par rapport à $\bar{v}$, on aura:

$$\left(n\bar{y}^{n-1} F\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) - \bar{y}^{n-2} \frac{\partial F\left(x, \frac{1}{\bar{y}}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\bar{y}}\right)}\right) \xi^\mu = \xi^{\alpha_i\mu + \beta_i}\left(\frac{\partial F^{(1)}(\xi, \bar{v})}{\partial \bar{v}} \bar{v} + F^{(1)}(\xi, \bar{v})\right), \tag{5}$$

d'où l'on trouvera, en ayant égard à (4) § 44 et à (3) lui-même:

$$F_1(\overset{m}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}}) = \xi^{(\alpha_i - 1)\mu + \beta_i}\left[(n-1)F^{(1)}(\xi, \bar{v}) - \bar{v}\frac{\partial F^{(1)}(\xi, \bar{v})}{\partial \bar{v}}\right]. \tag{6}$$

En posant dans (1) et (6) $\xi = \xi'^p$ et en divisant la dernière égalité par

$$\frac{dx}{d\xi'} = \frac{d\xi}{d\xi'} = p\, \xi'^{p-1}, \tag{7}$$

on aura:

$$f_1(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{\bar{y}}) = \xi'^{(\gamma_i - 1)q + (\delta_i - 1)p} f_1^{(1)}(\xi'^p, \bar{v}), \tag{8}$$

$$\frac{F_1(\overset{m}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}})}{\frac{dx}{d\xi'}} = \xi'^{(\alpha_i - 1)q + (\beta_i - 1)p + 1}\left[(n-1)F^{(1)}(\xi'^p, \bar{v}) - \bar{v}\frac{\partial F^{(1)}(\xi'^p, \bar{v})}{\partial \bar{v}}\right]; \tag{9}$$

parconséquent pour que les degrés de (8) et (9) soient égaux, on doit avoir:

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1, \tag{10}$$

d'où l'on conclut, que pour tous les points (γ, δ), qui correspondent aux points, situés sur le polygone P_1, construit pour le point singulier considéré maintenant, et au-dessous de lui, doivent avoir lieu les équations:

$$B_{\gamma\delta} = 0. \tag{11}$$

Les premiers membres de ces équations sont des fonctions de x, dont les coéfficients sont des fonctions linéaires de ceux de la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$; ils doivent s'évanouir identiquement pour toutes les racines de l'équation

$$\varphi(x) = 0, \tag{12}$$

qui donne les racines de l'équations $a_0 = 0$ pour lesquelles devient nul un groupe des coéfficients désignés dans la formule (6) [où l'on doit porter auparavant l'expression (4) de la fonction $F^{(1)}(\xi, \bar{v})$]; parconséquent on égalera à zéro les coéfficients du reste de la division de $B_{\gamma\delta}$ par

$\varphi(x)$: on aura ainsi des nouvelles conditions auxquelles doivent satisfaire les coéfficients de la fonction $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$, linéaires par rapport à ces coéfficients.

De la même manière on trouvera les équations entre les coéfficients de la fonction $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$, linéaires par rapport à eux, qui resultent des conditions d'adjonction, imposées à la fonction $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ aux points de la troisième et de la quatrième catégories *). En désignant par (a, b) un

---

*) Pour l'image algébrique hyperelliptique les conditions d'adjonction ne viennent que des points de la quatrième catégorie, comme il résulte de la remarque faite dans la note marginale au commencement du § 39. En transformant l'équation hyperelliptique:

(a) $$y^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0,$$

par la substitution $x = \frac{1}{\bar{x}}$, $y = \frac{1}{\bar{y}}$, on aura l'équation

(b) $$\bar{x}^{2\rho+1} - \bar{y}^2 R_1(\overset{2\rho+1}{\bar{x}}) = 0,$$

en posant

(c) $$R_1(\overset{2\rho+1}{\bar{x}}) = \bar{x}^{2\rho+1} R\left(\overset{2\rho+1}{\frac{1}{\bar{x}}}\right);$$

si A est le coéfficient de la puissance $x^{2\rho+1}$ dans (a), alors la valeur principale de $\bar{y}$, déterminée par l'équation

(d) $$\bar{x}^{2\rho+1} - \bar{y}^2 A = 0,$$

sera égal à

(e) $$\bar{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} \bar{x}^{\frac{2\rho+1}{2}}.$$

En posant $\bar{x} = t^2$, on aura:

(f) $$\frac{d\bar{x}}{dt} = 2t,$$

(g) $$\bar{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} t^{2\rho+1}.$$

La partie principale de la valeur de la fonction $F_3(\overset{m}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}}) = -2\bar{y} R_1(\overset{2\rho+1}{\bar{x}})$ [*v.* (20) § 44] sera maintenant

(h) $$\mp 2\sqrt{A}\, t^{2\rho+1}$$

et parconséquent la valeur principale de $F_3(\overset{m}{\bar{x}}, \overset{n}{\bar{y}}) : \frac{d\bar{x}}{dt}$ sera égale à

(i) $$\pm \sqrt{A}\, t^{2\rho}.$$

La fonction adjointe de la première espèce $\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y})$ dans notre cas a la forme:

(j) $$\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \lambda_0 x^{2\rho-1} + \lambda_1 x^{2\rho-2} + \cdots + \lambda_{2\rho-2} x + \lambda_{2\rho-1};$$

après la substitution $x = \frac{1}{\bar{x}}$, $y = \frac{1}{\bar{y}}$ elle donnera la fonction:

(k) $$\varphi_1(\overset{2\rho-1}{\bar{x}}, \overset{0}{\bar{y}}) = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x}^2 + \cdots + \lambda_{2\rho-1} \bar{x}^{2\rho-1} =$$
$$= \lambda_0 + \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^4 + \cdots + \lambda_{2\rho-1} t^{2(2\rho-1)};$$

point de ramification quelconque, se trouve-t-il dans un lieu fini ou infini de l'image algébrique, et par $A_{a,b}$ le nombre des points (α, β) situés sur le polygone P correspondant et au-dessous de lui, et de même pour les polygones subordonnés, en un mot — le nombre définie par la formule (5) § 37, on aura le nombre total A des équations linéaires entre les coéfficients de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{f}(x,y)$, qui résultent des conditions d'adjonction, par la formule:

$$A = \sum A_{ab}, \tag{13}$$

la somme s'étendant maintenant (d'après la remarque faite à la fin du même §) à tous les points de ramification, situés aux lieux finis ou infinis de l'image algébrique, défini par l'équation:

$$\overset{m\ n}{F}(x, y) = 0. \tag{14}$$

Remarque importante. Chacune de toutes les A équations $B_{\gamma\delta} = 0$, $B'_{\gamma'\delta'} = 0$, $B''_{\gamma''\delta''} = 0, \ldots$ de Briot, que nous avons reçu dans les §§ 45—48 à la première, à la deuxième, à la troisième, . . . approximations pour déterminer les coéfficients de la fonction rationnelle générale $\overset{\mu\ \nu}{f}(x, y)$ de manière qu'elle soit adjointe à l'équation $\overset{m\ n}{F}(x, y) = 0$, est indispensable, leur ensemble est suffisant pour celà. Il en est de même des nos équations d'adjonction que nous avons déduit par notre méthode des opérations rationnelles des équations de Briot, les notres étant des combinaisons linéaires de celles-ci en même nombre, comme il est aisé a voir.

Ces équations ne sauraient pas être dépendantes les unes des autres dans le cas général, ne l'étant pas dans le cas particulier hyperelliptique,

---

cette fonction doit être de même ordre infiniment petite que la quantité (i); donc on doit poser

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{\rho-1} = 0; \tag{l}$$

en portant ces valeurs dans (j), on aura pour la fonction adjointe de la première espèce $\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y})$ l'expression suivante:

$$\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \lambda_\rho x^{\rho-1} + \lambda_{\rho+1} x^{\rho-2} + \cdots + \lambda_{2\rho-2} x + \lambda_{2\rho-1}, \tag{m}$$

tous les coéfficients restant arbitraires ici. On aura donc ρ fonctions indépendantes de première espèce. Le même nombre on trouve par la formule de Riemann [(9) § 20] pour le genre de cet image algébrique: on a dans le cas consideré: $n = 2$, $w = 2\rho + 1 + 1 = 2(\rho + 1)$; donc $\frac{1}{2}w = \rho + 1$ et $p = \frac{1}{2}w - n + 1 = \rho + 1 - 2 + 1 = \rho$. On verra plus loin que le nombre des fonctions adjointes de première espèce, indépendantes entres elles, est toujours égal au genre de l'image algébrique, défini par l'équation (14) du § présent.

(c'est, dont il est aisé de s'assurer par le calcul direct des fonctions adjointes à l'équation $y^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0$, facile à faire*);) mais pourtant la possibilité d'une telle dépendance dans des cas particuliers ne parrait pas d'être exclue par celà à priori; il faut donc discuter de près ce point important de notre théorie **).

Les équations, exprimants les conditions d'adjonction, étant linéaires par rapport aux coéfficients cherchés de la fonction adjointe $\overset{\mu\;\nu}{f}(x, y)$, pour que q d'elles soient des conséquences des autres d'entre elles, il faut, qu'évanouissent certains déterminants, dont les éléments sont composés des coéfficients de l'équation fondamentale (14), et contiennent aussi les exposant μ et ν de la fonction $\overset{\mu\;\nu}{f}(x,y)$; mais ces derniers étant des nombres abstraits, on aura ainsi des rélations entre les coéfficients seuls de l'équation fondamentale, lesquelles auront lieu pour toute autre fonction adjointe comme $\overset{\mu-1\;\nu}{f}(x,y)$ et $\overset{\mu\;\nu-1}{f}(x, y)$. Pour s'en assurer, il n'y a qu'à appliquer les équations d'adjonction respectivement aux fonctions adjointes réductibles $x\overset{\mu-1\;\nu}{f}(x,y)$ et $y\overset{\mu\;\nu-1}{f}(x, y)$: la forme des équations restera la même, seulement la notation des inconnues subira un changement legère. Il en sera de même pour la fonction $\overset{\mu-1\;\nu-1}{f}(x, y)$. En effet, chaque produit de la forme

$$(15)\qquad (ax+bx+c)\overset{\mu-1\;\nu-1}{f}(x, y)=\overset{\mu\;\nu}{\bar{f}}(x,y)$$

sera aussi une fonction adjointe, comme le second facteur à gauche, des degrés μ et ν par rapport à x et à y respectivement, mais *réductible* (zerfallende adjungierte Kurve). Les coéfficients de la fonction adjointe $\overset{\mu\;\nu}{\bar{f}}(x, y)$ satisfairont donc à toutes les équations, que donne notre méthode pour la fonction adjointe $\overset{\mu\;\nu}{f}(x,y)$, et celà quelques soient les a, b, c. En prenant $a=b=0$, $c=1$, on en tirera les équations, auxquelles doivent satisfaire les coéfficients de la fonction adjointe $\overset{\mu-1\;\nu-1}{f}(x, y)$. Ces équations auront la même forme que celles pour la fonction $\overset{\mu\;\nu}{f}(x, y)$, les coéfficients $\overset{\mu}{\bar{\alpha}}_k$ de celle-ci devant $y^{\nu-k}$ se réduisant à $\overset{\mu-1}{\alpha}_{k-1}$ de la fonction $\overset{\mu-1\;\nu-1}{f}(x, y)$ devant $y^{\nu-k}$, le coéfficient $\overset{\mu}{\bar{\beta}}_{k,l}$ devant $x^{\mu-l}$ dans $\overset{\mu}{\bar{\alpha}}_k$ se réduisant à $\overset{\mu-1}{\beta}_{k-1,l-1}$

*) V. les notes marginales aux §§ 48 et 56.

**) Briot (l. c. p. 20) *suppose* ces relations distinctes.

devant $x^{\mu-l}$ dans $\overset{\mu-1}{\alpha_{k-1}}$. Ces équations, étant en même nombre A, également indispensables et suffisantes que celles, qu'on trouve pour les coéfficients de la fonction $f(\overset{\mu-1}{x}, \overset{\nu-1}{y})$ en lui appliquant directement notre méthode, seront équivalentes à ces dérnières, et comme les premières ne diffèrent que par la notation des inconnues de celles pour la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$, q d'entre elles seront les conséquences des autres, et par suite la même chose aura lieu pour les dernières, et celà en vertu des mêmes relations entre les coéfficients de l'équation fondamentale.

Nous sommes donc maintenant en présence des mêmes circonstances pour la fonction $f(\overset{\mu-1}{x}, \overset{\nu-1}{y})$, qu'auparavant pour la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$. En continuant ces considérations, nous arriverons de proche à proche à la conclusion, que des A équations d'adjonction q seront les conséquences des autres de ces équations pour chacune des fonctions adjointes précédentes jusqu'à la fonction $f(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ [que nous désignerons désormais par $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$] inclusivement. Mais alors les $2p-2$ zéros variables de cette dernière fonction adjointe [d'après la formule (20) de § 50] formeront une multiplicité (eine Schaar) de dimension $p-1+q$, ∞^{p-1+q}, tandisque, comme l'ont démontré M-rs *Brill* et *Noether* *) par les considérations géométriques à l'aide du théorème du reste („Restsatz"), elle ne peut pas être que de dimension $p-1$: ∞^{p-1}. On doit donc avoir $q=0$, c'est-à-dire, les équations d'adjonction sont indépendantes entre elles dans tous les cas**).

49. Le nombre des coéfficients de la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ est donné par la formule:

$$(\mu+1)(\nu+1); \tag{1}$$

mais comme dans le cas $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ les valeurs de cette fonction en tous les points de l'image algébrique, défini par l'équation (14) du § précédent, sont égales aux valeurs de la fonction

$$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) + \chi(\overset{\mu-m}{x}, \overset{\nu-n}{y}) F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}), \tag{2}$$

où $\chi(\overset{\mu-m}{x}, \overset{\nu-n}{y})$ désigne une fonction entière des variables x et y des degrés marqués au-dessus, avec $(\mu-m+1)(\nu-n+1)$ coéfficients indéter-

*) *Brill* et *Noether*. Math. Ann. Bd. VII, § 4.

**) Une démonstration directe n'étant pas encore donnée jusqu'à présent, nous reproduirons la démonstration citée des M-rs Brill et Noether sous la forme un peu modifiée dans l'„Appendice".

minés, on peut profiter de cette indétermination afin de donner à un même nombre des coéfficients de la fonction des valeurs fixées une fois pour toutes, par exemple, égales à zéro; alors il restera un tel nombre des coéfficients indéterminés:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mu+1)(\nu+1)-(\mu-m+1)(\nu-n+1)=\\ &\quad=m(\nu+1)+n(\mu+1)-mn=\\ &\quad=m\nu+n\mu-(m-1)(n-1)+1, \end{aligned}\right.$$

qui doivent satisfaire aux conditions d'adjonction mentionnées plus haut, en sorte qu'il reste définitivement dans la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$ seulement

$$(4)\qquad m\nu+n\mu-(m-1)(n-1)+1-A$$

des coéfficients indéterminés, A étant déterminé par la formule (13) du § précédent. Lorsqu'on a $\mu<m$, $\nu<n$, alors le nombre des coéfficients indéterminés sera égal à

$$(5)\qquad (\mu+1)(\nu+1)-A;$$

dans le cas $\mu=m-2$, $\nu=n-2$ — de la fonction adjointe de la première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$, on aura pour le nombre de ses coéfficients qui restent arbitraires, l'expression

$$(6)\qquad (m-1)(n-1)-A=p$$

— d'après le (20) du § 37 (conformément à ce, que nous avons devancé dans la note marginale du § 48). Dans le cas $\mu=m-1$, $\nu=n-1$, — celui de la fonction adjointe $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$, on aura pour le nombre de ses coéfficients indéterminés l'expression:

$$(7)\qquad mn-A=p+m+n-1.$$

50. Les valeurs de la variable x, pour lesquelles on aura

$$(1)\qquad f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})=0,$$

seront déterminées par l'équation, qui résulte de l'élimination de y de l'équation (1) à l'aide de l'équation fondamentale

$$(2)\qquad F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0,$$

savoir de l'équation:

$$(3)\qquad \Phi(x)=a_0^{\nu}\prod_{i=1}^{n} f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y_i})=0.$$

Le degré de cette équation par rapport à x est égal à

$$(4)\qquad m\nu+\mu n,$$

car elle est du degré ν par rapport aux coéfficients de l'équation (2), qui sont du degré m en x, et du degré n par rapport aux coéfficients de l'équation (1), qui sont du degré μ en x. Mais entre les racines de cette équation (3) on trouvera les valeurs, qui correspondent aux points de ramification (a, b), et le facteur $x-a$, correspondant à un tel point, entrera dans la fonction $\Phi(x)$ au degré $2A_{ab}$. En effet, d'après (11) du § 45 nous avons dans le voisinage de ce point:

$$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi'^{(\gamma_i-1)q+(\delta_i-1)p} f_1(\xi'^p, v); \tag{5}$$

mais d'après le (9) du § 45 on a:

$$\gamma_i q + \delta_i p = \alpha_i q + \beta_i p + 1; \tag{6}$$

parconséquent

$$f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi'^{\alpha_i q + \beta_i p + 1 - q - p} f_1(\xi'^p, v); \tag{7}$$

le même facteur correspond aux p valeurs de v pour chaque racine de l'équation $L_i = 0$ du degré k_i par rapport à λ, qui répond au côté C_i du polygone P; donc le produit des facteurs de $\Phi(x)$, répondants à ce côté prendra la forme

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi'^{p[\alpha_i k_i q + \beta_i k_i p + k_i - k_i q - k_i p]} \prod f_1(\xi'^p, v); \tag{8}$$

mais on a $k_i q = \beta_{i+1} - \beta_i$, $k_i p = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ [(10) § 24]; parconséquent, et en vertu de $\xi'^p = \xi$, on le réduira à celui-ci:

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{[(\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} + k_i) - (\beta_{i+1} - \beta_i) - (\alpha_i - \alpha_{i+1})]} \prod f_1(\xi'^p, v). \tag{9}$$

En formant des pareils produits pour les autres côtés du polygone P et en les multipliant on aura, vu que $\beta_0 = 0$, $\alpha_h = 0$:

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{\sum_{i=0}^{h-1} (\alpha_i \beta_{i+1} - \beta_i \alpha_{i+1} + k_i) - \alpha_0 - \beta_h} \prod f_1(\xi'^p, v), \tag{10}$$

ce qui pourra d'après (1) du § 38 être présenté ainsi:

$$\prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{2\mathfrak{A}_{ab}} \prod f_1(\xi'^p, v). \tag{11}$$

Dans le cas où λ est une racine multiple de l'équation $L_i = 0$, on trouvera de même pour le produit à la droite de (11) cette expression:

$$\prod f_1(\xi'^p, v) = \xi^{2\Sigma_1 \mathfrak{A}'_{ab}} \prod f_2(\xi''^{p'}, v'), \tag{12}$$

la somme $\Sigma_1 \mathfrak{A}_{ab}$ s'étendant sur tous les côtés des toutes les lignes polygonales P', qui se rapportent à toutes les racines multiples de toutes les équations $L_i = 0$ pour tous les côtés de la ligne polygonale P; car le facteur extérieur

$$\xi''^{[(\alpha'_{i'}\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'}\alpha'_{i'+1})-(\beta'_{i'+1}-\beta'_{i'})-(\alpha'_{i'}-\alpha'_{i'+1})]}$$

restera le même pour p valeurs de $v=\sqrt[p]{\lambda}$, à chacune desquelles correspondent p' valeurs de $\sqrt[p']{\lambda'}$, — pourquoi il entrera pp' fois; mais on a $\xi''^{pp'}=\xi'^{p}=\xi$, et cela pour chaque côté du polygone P et celui de P', qui lui est subordonné; donc on aura le facteur, écrit en (12). En le portant dans (11), on aura:

$$(13) \qquad \prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) = \xi^{2\mathfrak{A}_{ab}+2\Sigma_1\mathfrak{A}'_{ab}} \prod f_2(\xi''^{p'}, v'),$$

où l'on a $v'^{p'}=\lambda'$, λ' étant une racine de l'équation $L'_{i'}=0$. Ici de mêmes tous les facteurs du produit à droite qui répondent à une racine multiple de cette équation, auront en facteur la même puissance de ξ'''; la même puissance de ξ''' entrera dans tous les facteurs du produit, en nombre $pp'p''$, qui répondent à toutes les valeurs de $v=\sqrt[p]{\lambda}$, $v'=\sqrt[p']{\lambda'}$, $v''=\sqrt[p'']{\lambda''}$ pour les valeurs choisies de $\lambda, \lambda', \lambda''$, car les coéfficients de l'équation $L''_{i''}=0$ de la troisième approximation dépendent de λ et λ', comme on l'a vu en § 28 (remarque marginale); parconséquent le facteur:

$$\xi'''^{[(\alpha''_{i''}\beta''_{i''+1}-\alpha''_{i''+1}\beta''_{i''})-(\beta''_{i''+1}-\beta''_{i''})-(\alpha''_{i''}-\alpha''_{i''+1})]}$$

entrera élevé à la puissance $pp'p''$ pour chaque combinaison des valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda''$ qui répondent au chaque côté de P et de tous les polygones lui subordonnés P' et P'', et, comme on a $\xi'''^{pp'p''}=\xi''^{pp'}=\xi'^{p}=\xi$, on aura:

$$(14) \qquad \prod f_2(\xi''^{p'}, v') = \xi^{2\Sigma_2\mathfrak{A}''_{ab}} \prod f_3(\xi'''^{p''}, v''),$$

la somme $\Sigma_2\mathfrak{A}''_{ab}$ s'étendant à tous les côtés des polygones P'' qui répondent à tous les polygones P', qui à leur tour répondent à tous les côtés du polygone P. En portant le produit des (14) en (13), on aura:

$$(15) \qquad \prod f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{2(\mathfrak{A}_{ab}+\Sigma_1\mathfrak{A}'_{ab}+\Sigma_2\mathfrak{A}''_{ab})} \prod f_3(\xi'''^{p''}, v'').$$

En continuant les mêmes considérations, on trouvera pour le résultat définitif, qu'on doit avoir:

$$(16) \qquad \Phi(x) = a_0^{\nu}\prod_{j=1}^{n} f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y_j}) = \xi^{2A_{ab}} a_0^{\nu} \prod f_{g-1}(\xi^{(g-1)\,p^{(g-2)}}, v^{(g-2)}),$$

A_{ab} étant déterminé par la formule (5) du § 37, (en comprenant, pour plus de simplicité, sous le signe $\prod$ à droite aussi tous les autres facteurs du produit à gauche, qui se rapportent aux valeurs de y_j différentes de b pour $x=a$). On voit de cette formule que la valeur $x=a$, qui répond au point hélicoïdal (a, b), sera pour l'équation $\Phi(x)=0$ une racine de multiplicité $2A_{ab}$ (car $\xi=x-a$). Parconséquent il y aura aux points de ramifications $2A$ zéros de la fonction $\Phi(x)$, le nombre A étant déterminé par la formule (13) du § 48, où, — rappelons le —, la sommation s'étend à tous les points de ramification, situés aux lieux finis ou infinis de l'image algébrique (2); car l'équation $\Phi(x)=0$, résultante de l'élimination de y entre les équations (1) et (2), aura pour ses racines aussi les valeurs de x, pour lesquelles ces deux équations (1) et (2) en y auront pour racines communes des valeurs infinies de y *); la présence des valeurs infinies de x entre les racines de l'équation $\Phi(x)=0$ on reconnaîtra par l'abaissement de son degré effectif au-dessous de la valeur donnée par la formule (4).

Outre ces $2A$ zéros, communes à toutes les fonctions adjointes, la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ aura d'autres zéros, variables d'une fonction à l'autre, en nombre:

$$m\nu+\mu n-2A. \tag{17}$$

Le nombre des coéfficients indéterminés de la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ dans le cas de $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$, d'après la formule (4) du § précédent étant

$$m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)+1-A, \tag{18}$$

le nombre de leurs rapports à un même d'entre eux sera égal à

$$m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)-A; \tag{19}$$

en retranchant ce nombre du nombre (17) des tous les zéros variables de la fonction $\Phi(x)$, on aura un reste:

$$(m-1)(n-1)-A=p; \tag{20}$$

donc, le nombre des zéros de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$, surpassant de p le nombre de ses coéfficients arbitraires, on voit que p de ces zéros ne peuvent pas être assignés à volonté, mais sont complètement déterminés par les autres. Dans le cas de $\mu=m-2$, $\nu=n-2$, le nombre des rapports des coéfficients arbitraires de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ à l'un d'eux d'après (6) du § précédent étant égal à

$$(m-1)(n-1)-A-1=p-1, \tag{21}$$

et le nombre de ses zéros variables étant égal à

$$\left.\begin{aligned} &m(n-2)+n(m-2)-2A= \\ &=2\{(m-1)(n-1)-A-1\}=2(p-1), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

---

*) Voir *Serret*. Cours d'algèbre supérieure. 3-me éd. Paris, 1866. T. I, p. 641.

on voit que de $2(p-1)$ zéros de la fonction adjointe de première espèce ne peuvent être donné arbitrairement qu'une moitié seulement: $p-1$, et que les autres en sont parfaitement déterminés. Dans le cas $\mu=m-1$, $\nu=n-1$, le nombre des rapports des coéfficients arbitraires de la fonction adjointe $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ à l'un d'eux, d'après (7) du § précédent est égal à:

$$mn-A-1=p+m+n-2, \tag{23}$$

tandisque le nombre de ses zéros mobiles est égal à

$$\left\{\begin{aligned} & m(n-1)+n(m-1)-2A= \\ & =2mn-m-n-2A= \\ & =2(p+m+n-1)-m-n= \\ & =2p+m+n-2; \end{aligned}\right. \tag{24}$$

en le comparant avec le nombre précédent, on voit que pour la fonction adjointe $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ le nombre de ses zéros variables, qui sont déterminés par les autres, est aussi égal à p, le genre de l'image algébrique, comme dans le cas de $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$.

51. Soient

$$\psi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) \quad \text{et} \quad \chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}) \tag{1}$$

deux fonctions adjointes, comme la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ des sept derniers §§, des mêmes degrés respectivement par rapport à x et y, contenant chacune d'après (4) du § 49

$$m\nu+\mu n-(m-1)(n-1)+1-A \tag{2}$$

coéfficients arbitraires. Comme des fonctions adjointes elles seront aux points de ramification toutes les deux du même ordre que le quotient

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} : \frac{dx}{dt} \tag{3}$$

et parconséquent d'un ordre égal; comme des fonctions adjointes des mêmes degrés par rapport à x et à y respectivement, elles seront du même ordre aussi aux points infiniment-éloignés de l'image algébrique

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0; \tag{4}$$

parconséquent leur rapport

$$z=\frac{\psi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})}{\chi(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})} \tag{5}$$

présente une fonction, qui a une valeur finie en tous les points singuliers de l'image algébrique (4). Quant aux points ordinaires, on peut toujours, en supposant les nombres μ et ν suffisament grands, de finir la détermination des fonctions (1) de manière, que z deviendra $=\infty^1$ aux m' points fixes de la surface de Riemann correspondante à (4), choisis à volonté. En effet, pour qu'il serait possible de le faire, il faut et il suffit, que le nombre des rapports des coéfficients arbitraires de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{\chi}(x, y)$ à l'un d'eux soit plus grand que m':

$$m\nu + n\mu - (m-1)(n-1) - A > m';$$

alors*) on peut toujours déterminer la fonction $\overset{\mu\ \nu}{\chi}(x, y)$ d'une telle manière, qu'elle devient un zéro du premier ordre: 0^1, aux m' points donnés; aux coéfficients qui resteront après cela indéterminés, on peut donner des valeurs quelconques, choisies à volonté; alors tous les zéros restants seront complètement déterminés. Après cela, la fonction $\overset{\mu\ \nu}{\psi}(x, y)$ étant de même degré par rapport à x, respectivement à y, on peut la déterminer de manière, qu'elle devient un zéro du premier ordre, 0^1, à chacun de ces zéros restants de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{\chi}(x, y)$, dont le nombre est

$$m\nu + n\mu - 2A - m', \tag{6}$$

si seulement ce nombre ne surpasse pas le nombre des rapports des coéfficients de la fonction $\overset{\mu\ \nu}{\psi}(x, y)$ à l'un d'eux, c'est-à-dire, si l'on a l'inégalité suivante:

$$m\nu + n\mu - 2A - m' < m\nu + n\mu - (m-1)(n-1) - A,$$

ou en transportant tous les termes à droite:

$$0 < m' - [(m-1)(n-1) - A], \tag{7}$$

c'est-à-dire — d'après (20) du § précédent —, si l'on a

$$m' > p. \tag{8}$$

Le nombre des coéfficients arbitraires, qui restent après cela dans la fonction z [(5)], sera égal à

$$m' - p + 1, \tag{9}$$

en y comprenant le facteur commun des tous les termes. Ce nombre ne peut pas être inférieur à 2. En effet, les mêmes infinis, que la fonction z, aura aussi la fonction $\alpha z + \beta$; donc on aura toujours

$$m' - p + 1 \geqq 2, \tag{10}$$

d'ou il suit

$$m' \geqq p + 1. \tag{11}$$

Ainsi, quand on a $m' \geqq p + 1$, notre problème est toujours possible, car alors la fonction z, définie par l'équation (4), ne deviendra en effet infinie du

*) Si l'on a $m' > p$; le cas de $m' = p$ sera discuté à part plus loin.

premier ordre ∞^1, qu'aux m' points donnés. Le plus petit nombre des points analytiques, où la fonction rationnelle des variables x et y, liées par l'équation (4), doit devenir $=\infty^1$, qui peuvent être donné à volonté, est donc $p+1$. [Cette proposition *Weierstrass* a pris pour la définition même du genre (Rang) de l'image algébrique (4), et a montré dans ses leçons, comment peut-on construire une fonction, qui deviendrait $=\infty^1$ au point (x', y') de l'image algébrique et encore seulement aux p points fixes (a_i, b_i) $(i=1, 2, 3, \ldots p)$, pris arbitrairement. Il a donné le nom de *principale* à cette fonction et l'a désigné par $H(x, y; x', y')$; il en a déduit ensuite toutes les autres fonctions*).] — Le nombre des coéfficients arbitraires, qui en restent après cela, sera, comme nous l'avons vu, égal à

$$m'-p+1; \tag{12}$$

mais ce n'est qu'une limite inférieure de ce nombre, car il peut arriver, que les zéros de la fonction étant choisis au hasard, quelques-unes des équations de conditions ne seront que les conséquences des autres. Leur nombre précis est déterminé par le théorème de Riemann-Roch (Riemann-Roch'sche Satz); on le déduit plus aisement d'une autre forme, sous laquelle peut être présentée la fonction en question comme on le verra au § 68. — En ayant égard aux valeurs de x aux points, où notre fonction doit devenir $=\infty^1$, on voit que la fonction la plus générale, uniforme sur la surface de Riemann du genre p, dépend en général de

$$2m'-p+1 \tag{13}$$

constantes arbitraires. D'après les valeurs données de ces points analytiques elle se détermine à l'aide des opérations rationnelles, et ce n'est que la recherche de la valeur de y qui correspond à la valeur donnée de x, qui exige la résolution de l'équation (4). — Si l'on a $m'=p$, alors la construction d'une fonction, qui ne devient $=\infty^1$ qu'aux p points donnés, n'est possible qu'à l'aide des fonctions adjointes de première espèce, comme on le verra plus loin.

52. Toutes les équations, qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation rationnelle, forment une classe d'équations, qui déterminent une classe des fonctions algébriques, comme on l'a vu au § 42. Toutes les fonctions rationnelles de x et de y liées, par une équation de la classe, forment un système des fonctions algébriques à la même branchement, aussi lorsqu'on introduit l'une d'elles, par exemple $\xi=R_1(x, y)$, [(1) § 42], comme variable indépendante. Ainsi chaque équation nous amène à une

*) Voir la note de M. *Hettner*: Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen. Göttinger Nachrichten 1884, ou *K. Weierstrass*. Mathematische Werke. Bd. 4. Berlin, 1902. S. 60 und folgende.

classe de systèmes des fonctions algébriques à la même branchement, qui se transforment l'une en l'autre par l'introduction d'une fonction du système comme variable indépendante de la manière, que toutes les équations de la même classe conduisent à la même classe de systèmes des fonctions algébriques, et inversement chaque classe de systèmes de telles fonctions conduit à une même classe d'équations (Riemann) *).

Si le genre de l'image algébrique, défini par l'équation $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, est égal à p, et une fonction ζ des variables x et y devient en μ points égale à ∞^1 et parconséquent prend chaque valeur en μ points de la surface de Riemann correspondante, alors le nombre des points de ramification de la surface de Riemann pour l'équation qui détermine ζ en x d'après la formule (6) de § 20 sera

$$w = 2(\mu + p - 1), \tag{1}$$

tandisque le nombre des constantes arbitraires, que contient une telle fonction, est d'après (13) du § précédent égal à $2\mu - p + 1$. On peut les déterminer, et celà d'un nombre fini de manières, de la sorte, qu'un nombre égal des points de ramification prendra une place déterminée sur la surface de Riemann; les autres des points de ramifications en nombre

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1) = 3p - 3, \tag{2}$$

restant arbitraires et variant d'une classe de systèmes des fonctions à même branchement à l'autre, ont été nommés par Riemann *les modules de la classe* (Klassenmoduln)**), comme les constantes, qui la déterminent.

53. Après ces considérations d'un ordre général passons maintenant à l'étude spéciale des fonctions adjointes $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ et $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, toutes les deux étant d'une valeur fondaméntale dans la théorie des intégrales abéliennes, — en commençant par celle *de première espèce*, $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. — Le nombre des coéfficients arbitraires de cette fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ d'après la formule (6) du § 49 est égal à p; parconséquent la fonction la plus générale de première espèce est une fonction linéaire homogène avec des coéfficients arbitraires de p fonctions particulières de même espèce, où les coéfficients arbitraires mentionnés tout à l'heure ont reçus p systèmes des valeurs particulières, choisies à volonté, ainsi que ces fonctions se trouvent aux moyens des seules opérations rationnelles;

---

*) Voir *Riemann*. Gesammelte Werke. 2. Auflage. Leipzig, 1892. Theorie der Abelschen Funktionen. § 12. S. 119.

**) L. c. § 120.

par cette raison on pourrait les nommer *naturelles* *). Nous désignerons les p fonctions naturelles de l'espèce considérée par

$$(1)\qquad \bar{\varphi}_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y});$$

alors la fonction générale de première espèce s'exprimera ainsi:

$$(2)\qquad \varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})=\sum_{i=1}^{p} C_i\bar{\varphi}_i(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).$$

Dans cette formule on peut toujours déterminer les constantes arbitraires C_i de manière, que la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ s'annulera en $p-1$ des points donnés:

$$(3)\qquad (a_1,b_1),\ (a_2,b_2),\ldots.(a_p,b_p),$$

(plus des zéros nous ne pouvons pas assigner arbitrairement à cette fonction d'après le § 50), et dans le point restant prendra l'unité pour valeur, si seulement les points (a_j,b_j) [(3)] sont tels, que le déterminant

$$(4)\qquad {}^{1,1}_{\;j}\left|\bar{\varphi}_i(\overset{m-2}{a_j},\overset{n-2}{b_j})\right|^{k\quad p}_{p}\gtrless 0,$$

(est différent de zéro). En effet, en portant les valeurs (3) dans la formule (2) et en désignant maintenant par $\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ celle des fonctions adjointe de première espèce, qui doit être égale à l'unité pour $x=a_k$, $y=b_k$ et à zéro aux toutes les autres des points analytiques (3), ainsi qu'on aura

$$(5)\qquad \varphi_k(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k})=1,$$

$$(6)\qquad \varphi_k(\overset{m-2}{a_l},\overset{n-2}{b_l})=0,\qquad (l\gtrless k)$$

nous aurons pour déterminer les constantes C_j le système suivant d'équations:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} 1&=C_1\bar{\varphi}_1(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k})+C_2\bar{\varphi}_2(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k})+\cdots+C_p\bar{\varphi}_p(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k}),\\ 0&=C_1\bar{\varphi}_1(\overset{m-2}{a_l},\overset{n-2}{b_l})+C_2\bar{\varphi}_2(\overset{m-2}{a_l},\overset{n-2}{b_l})+\cdots+C_p\bar{\varphi}_p(\overset{m-2}{a_l},\overset{n-2}{b_l}),\end{aligned}\right.$$

où $l=1,2,3,\ldots k-1,k+1,\ldots p$. En éliminant les constantes C_j des équations (2) et (7), nous aurons pour déterminer la fonction $\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ l'équation suivante, en forme d'un déterminant:

---

*) Dans le cas hyperelliptiques en se rapportant à la formule (m) de la note marginale du § 48, on apperçoit de suite, que pour ces dernières on peut prendre $x^{\rho-1}, x^{\rho-2},\ldots x, 1$. (Jacobi, Richelot.)

$$\begin{vmatrix} \varphi_k(x,y) & \bar\varphi_1(x,y) & \bar\varphi_2(x,y) & \ldots & \bar\varphi_k(x,y) & \ldots & \bar\varphi_p(x,y) \\ 0 & \bar\varphi_1(a_1,b_1) & \bar\varphi_2(a_1,b_1) & \ldots & \bar\varphi_k(a_1,b_1) & \ldots & \bar\varphi_p(a_1,b_1) \\ 0 & \bar\varphi_1(a_2,b_2) & \bar\varphi_2(a_2,b_2) & \ldots & \bar\varphi_k(a_2,b_2) & \ldots & \bar\varphi_p(a_2,b_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \bar\varphi_1(a_k,b_k) & \bar\varphi_2(a_k,b_k) & \ldots & \bar\varphi_k(a_k,b_k) & \ldots & \bar\varphi_p(a_k,b_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \bar\varphi_1(a_p,b_p) & \bar\varphi_2(a_p,b_p) & \ldots & \bar\varphi_k(a_p,b_p) & \ldots & \bar\varphi_p(a_p,b_p) \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

(où l'on a omis les exposants $m-2$, et $n-2$ de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ par rapport à x et à y pour simplifier la formule). Le système des fonctions de première espèce:

$$\varphi_1(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),\ \varphi_2(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),\ \ldots .\ \varphi_p(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \qquad (9)$$

déterminées ainsi, s'appelle un système *normal* et les points analytiques (3) — *les points fondamentaux* du système*).

Comme on a

$$\left|\varphi_k(\overset{m-2}{a_j}, \overset{n-2}{b_j})\right|_{j=1,\,k=1}^{p,\;p} = 1, \qquad (10)$$

— car les éléments de ce déterminant, situés sur sa diagonale principale, sont égaux chacun à l'unité, et les autres à zéro, — toute autre fonction de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ pourra être également représentée en fonction linéaire des éléments du système normal. En effet, soit

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{i=1}^{p} C_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}); \qquad (11)$$

en posant ici $x = a_k$, $y = b_k$, on aura d'après (5) et (6):

$$\varphi(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) = C_k; \qquad (12)$$

en le portant dans (11), nous aurons:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{i=1}^{p} \varphi(\overset{m-2}{a_i}, \overset{n-2}{b_i})\, \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \qquad (13)$$

---

*) Dans le cas hyperelliptique, en supposant $R(x) = P(x)\,Q(x)$, où l'on a: $P(x) = \prod_{i=1}^{\rho}(x - a_{2i-1})$, $Q(x) = A\prod_{i=1}^{\rho}(x - a_{2i})$, *Weierstrass* prenait pour les points fondamentaux (3) les racines de l'équation $P(x) = 0$, et pour le système normal des fonctions adjointes de première espèce le système des fonctions $\dfrac{P(x)}{x - a_{2k-1}}$, $(k = 1, 2, \ldots \rho)$, évidement de première espèce, étant du degré $\rho - 1$ seulement, qui s'annulent pour $x = a_{2l-1}$, $(l \gtrless k)$, mais pour $x = a_{2k-1}$ prennent la valeur $P'(a_{2k-1})$ aulieu de l'unité.

En particulier, on pourra exprimer par les éléments du système normal aussi les éléments du système naturel.

Les constantes C_k peuvent être trouvées aussi de la manière suivante. Si (α_i, β_i) $(i=1, 2, \ldots p)$ sont les points analytiques, où la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ devient nulle, excepté le point (α_h, β_h), où elle devient égale à l'unité, alors, en remplaçant dans (11) (x, y) par $(\alpha_i, \beta_i)_1^p$, on aura un système d'équations analogue à (7), d'où l'on trouvera:

$$C_k = (-1)^{h+k-2} \frac{D'_{hk}}{D'}, \tag{14}$$

où l'on a

$$D' = {}_{1,1}^{}\left| \varphi_i(\overset{m-2}{\alpha_j}, \overset{n-2}{\beta_j}) \right|_{p}^{i\ \ p}, \tag{15}$$

et où D'_{hk} désigne le mineur de ce déterminant, répondant à l'élément, qui est placé à l'intersection de la ligne h-ième avec la colonne k-ième. En comparant les deux expressions de C_k, on aura la formule:

$$\varphi_h(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k};\ \alpha_j, \beta_j)_1^p = (-1)^{h+k-2} \frac{D'_{hk}}{D'}, \tag{16}$$

où nous avons écrit la fonction, en plaçant entre les paranthèses aussi ses points fondamentaux, comme des constantes caractéristiques pour elle, et attaché l'indice h à la lettre φ pour indiquer celui des points $(\alpha_j, \beta_j)_1^p$, où elle prend exceptionnellement pour valeur l'unité aulieu de zéro.

Nous désignerons cette fonction quelquefois d'une autre manière, en écrivant après les variables x, y les zéros arbitraires de la fonction, puis ses zéros non-arbitraires, en les séparant des premiers par un trait vertical, ainsi:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y};\ x_i, y_i \mid_1^{p-1} x'_i, y'_i), \tag{17}$$

où les $(x_i, y_i)_1^{p-1}$ sont les zéros arbitraires, tandisque les $(x'_i, y'_i)_1^{p-1}$ les zéros non-arbitraires. Si l'on prend les $(x'_i, y'_i)_1^{p-1}$ pour les zéros arbitraires, on recevra les $(x_i, y_i)_1^{p-1}$ pour les zéros non-arbitraires, les zéros de la fonction adjointe de la première espèce étant déterminé par la moitié de leur nombre total $2(p-1)$.

54. On aura des fonctions adjointes de première espèce particulières, tout à fait déterminées, en nombre fini, dites *tangentielles*, en cherchant de déterminer les constantes $C_i{}_1^p$ dans l'expression (11) du § précédent de manière, que chacun des zéros de la deuxième catégorie coïncide avec l'un de la première, ou mieux dire — que les $2(p-1)$ zéros coïncident deux à deux, car les $p-1$ premiers cessent aussi d'être arbitraires dans ce cas. Mais lorsque le point (x_l', y_l') coïncide avec le point (x_k, y_k), le dernier zéro devient double; la droite, qui les joignait, devient tangente au point (x_k, y_k) à la courbe

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x_i', y_i') = 0, \tag{1}$$

de même qu'à la courbe fondamentale

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0; \tag{2}$$

donc, en différentiant ces deux équations et en éliminant la dérivée $\frac{dy}{dx}$, on aura une troisième équation:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

à laquelle doivent satisfaire x_k et y_k. En éliminant y des équations (1) et (3) à l'aide de l'équation (2) on aura deux équations de la forme suivante:

$$\Phi(x; \overset{p}{\underset{1}{C_i}}) = 0, \tag{4}$$

$$\Psi(x; \overset{p}{\underset{1}{C_i}}) = 0, \tag{5}$$

homogènes par rapport aux constantes $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$ du dégré n par rapport à ces dernières, l'expression (11) du § précédent de la fonction adjointe en étant du premier. Les fonctions en (1) et (3) étant adjointes, ces équations en x aurons aussi des racines indépendantes des valeurs des constantes $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$; mais ces racines nous sont déjà connues, car elles satisfont à l'équation (9) du § 4, savoir:

$$\Delta_1(x) = 0; \tag{6}$$

on pourra donc à l'aide des simples divisions débarrasser les équations (4) et (5) de ces racines, et on aura deux équations plus simples, aussi homogènes par rapport à $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$:

$$\Phi_1(x, \overset{p}{\underset{1}{C_i}}) = 0, \tag{7}$$

$$\Psi_1(x, \overset{p}{\underset{1}{C_i}}) = 0, \tag{8}$$

qui doivent avoir $p-1$ racines communes; donc leurs premiers membres auront dans ce cas un plus grand diviseur commun du degré $p-1$. En le cherchant par la méthode des divisions successives, arrêtons ces opérations au moment, où nous serons arrivé à un reste du degré $p-2$; en égalant à zéro chacun de ces $p-1$ coéfficients, qui seront des fonctions des $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$, homogènes aussi par rapport à eux, on aura $p-1$ équations pour déterminer leurs rapports à l'un d'eux, par exemple à C_p. Ces équations, étant algébriques, le nombre des valeurs de ces rapports $\frac{C_i}{C_p}$ (pour $i=1, 2, \ldots p-1$) sera en général fini d'après le théorème de Bezout *). En les portant dans l'avant-dernier reste et l'égalant après cela à zéro, on aura l'équation pour déterminer les valeurs de x aux points-zéros de la fonction adjointe de première espèce construite avec ces valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$; la valeur correspondante de y on trouvera ci-après, en cherchant la racine commune des équations (1) et (2), après y avoir porté la valeur considérée de x et dans la première aussi les valeurs trouvées des $\overset{p}{\underset{1}{C_i}}$. Le nombre de pareilles équations pour x sera égal au nombre des solutions du système d'équations en $\frac{C_i}{C_p}$ $(i=1, 2, \ldots p-1)$.

---

*) Il serait infini, si quelquesunes des équations entre les $\frac{C_i}{C_p}$ $(i=1, 2, \ldots p-1)$ étaient les conséquences des autres, c'est ce qui ne peut avoir lieu que dans les cas particuliers, où les coéfficients de l'équation fondamentale seraient liés entre eux par certaines équations. — En appliquant le procedé du texte au cas hyperelliptique, on appercevra par la forme, laquelle prennent dans ce cas les équations (4) et (5), que les fonctions $\frac{P(x)}{x-a_{2l-1}}$ de Weierstrass (v. la note marginale du § 53) sont de la catégorie considérée maintenant, car la fonction $\left(\frac{P(x)}{x-a_{2l-1}}\right)^2$ devient le plus grand diviseur commun de leurs premiers membres, lorsqu'on y fait $C_k=0$ pour $k \geqq l$. — C'est ce qui est aisé à voir à priori, car la fonction $\varphi(\overset{\rho-1}{x}, \overset{0}{y})$ étant formellement indépendante de y, ses zéros sont superposés deux à deux aux points de la surface de Riemann à deux feuillets, correspondante à l'image hyperelliptique; donc ses racines ne peuvent se confondre deux à deux qu'aux points de ramification, les autres valeurs égales de y ne pouvant répondre qu'aux valeurs différentes de x, car l'équation $b^2-R(\overset{2\rho+1}{x})=0$ n'a pas des racines égales. De même en raisonant géométriquement: l'équation $\varphi(\overset{\rho-1}{x}, \overset{0}{y})=0$ représente l'ensemble de $\rho-1$ droites perpendiculaires à l'axe des x, lesquelles coupent la courbe fondamentale $y^2-R(\overset{2\rho+1}{x})=0$ chaqu'une en deux points; celles-ci se confondent en un seul point double, lorsque ces droites passent par les points doubles de la courbe fondamentale, dont les abscises sont les racines du polynome $R(\overset{2\rho+1}{x})$ et les ordonnées toutes égales à zéro.

Ce nombre sera aussi le nombre des fonctions adjointes tangentielles de première espèce. Il n'est pas pourtant facile de le trouver par la considération du système de ces équations en $\frac{C_i}{C_p}$ à cause de leur trop grande généralité; mais il sera déterminé par d'autres considérations dans le dernier chapitre de ce livre, où l'on trouvera égal à

$$N_{II} = 2^{p-1}(2^p - 1).^{*)} \tag{9}$$

55. A l'aide des fonctions adjointes de première espèce, que nous avons étudié au § 53, on pourra construire une fonction qui devient infinie du premier ordre: ∞^1 aux p points donnés, — pourvu qu'ils satisfassent à la condition, qu'une certaine fonction adjointe de première espèce s'annule, quand on remplace les variables x et y par leurs valeurs en ces points**), — et qui contient deux constantes arbitraires. En effet, posons

$$z = \frac{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\sum_{i=1}^{p} \beta_i \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})} \tag{1}$$

et déterminons les rapports des toutes les $\overset{p}{\underset{2}{\beta_i}}$ à β_1 de manière, que le dénominateur s'annule à $p-1$ des points donnés: 0^1; on pourra si-après donner à β_1 une valeur arbitraire (par exemple prendre $\beta_1 = 1$), car dans (1) on a $2p-1$ rapports des $\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i}}$ et $\overset{p}{\underset{2}{\beta_i}}$ à β_1. Mais ce dénominateur devient 0^1 encore en $p-1$ d'autres points, qui sont déterminés par les premiers; déterminons donc les coéfficients α_i du numérateur de la manière, qu'il s'annule en $p-2$ de ces derniers points; cette condition nous donne $p-2$ équations linéaires entre les coéfficients α_i, dont deux restent parconséquent arbitraires***), et nous aurons ainsi une fonction, qui devient ∞^1 en p points, dont l'un est déterminé par les autres $p-1$ de ces points, et qui contient linéairement deux constantes arbitraires. Les fonctions qui deviennent égales à ∞^1 en μ points de la surface de Riemann, μ étant $< p$, sont des fonctions spéciales, que nous laissons de côté.

56. Passons maintenant à l'étude de la fonction adjointe $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$. D'après (7) § 49 elle contient linéairement, outre un facteur constant commun à tous ses termes, encore

---

*) On pourra consulter pour les courbes adjointes tangentielles aussi le livre de *H. Stahl:* Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1896. § 32, S. 257.

**) Car d'après le § 50 on ne peut donner arbitrairement que $p-1$ zéros d'une fonction adjointe de première espèce.

***) Dans le cas général, lorsque les zéros donnés ne forment pas un groupe spécial (Noether); dans le dernier cas le nombre des constantes arbitraires est donné par le théorème de Riemann-Roch (§ 68). (V. *H. Stahl,* l. c. § 11, S. 81 und folgende).

(1) $$p+m+n-2$$

coéfficients indéterminés, et d'après (24) § 50 elle a

(2) $$2p+m+n-2$$

zéros mobiles, c'est-à-dire variants d'une fonction à l'autre de la même espèce; mais de ce nombre seulement $p+m+n-2$ zéros peuvent être donnés arbitrairement, après quoi les p restants seront complètement déterminés. On peut toujours assujettir cette fonction à la condition de prendre la valeur 0^1 pour toutes les solutions du système d'équations:

(3) $$\begin{cases} F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0, \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

deux solutions exceptées, que nous désignerons par (ξ, y_ξ) et (η, y_η). En éliminant y de la première de ces équations à l'aide de la deuxième, on aura pour déterminer x l'équation

(4) $$F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right) = 0$$

du degré $m+n$ par rapport à l'inconnue x; y étant d'après la deuxième des équations (3) une fonction uniforme de x, on voit, que le nombre total des solutions du système (3) est égal à $m+n$. Quelquesunes de ces solutions pourront être infinies: cela aura toujours lieu, si le coéfficient a_0 de l'équation fondamentale est effectivement du degré moindre que m *): alors le degré de l'équation (4) s'abaissera au-dessous de $m+n$, ce qui signifiera que quelquesunes des racines de cette équation se sont éloigné à l'infini; la valeur correspondante de y sera aussi infinie dans ce cas. La fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ ne deviendra pas nulle que pour celles de ces solutions, qui correspondent à ξ et à η; pour toutes les autres, finies ou infinies, on aura

(5) $$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = 0.$$

En portant ici la valeur de y, tirée de la deuxième des équations (3), on aura l'équation:

(6) $$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right) = 0,$$

du degré $m+n-2$ par rapport à l'inconnue x, qui doit être satisfaite par toutes les racines, finies ou infinies de l'équation (4) à l'exception de ξ et de η; donc on doit avoir:

---

*) C'est ce qui aura toujours lieu dans le cas d'équation hyperelliptique $y^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0$, où le degré de a_0 est un zéro aulieu d'être égal à $2\rho+1$.

$$\psi\Big(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\Big) = C\,\frac{F\Big(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\Big)}{(x-\xi)(x-\eta)}. \tag{7}$$

Après avoir effectué la division à droite, on n'a qu'à égaler les coéfficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de cette égalité pour avoir les équations linéaires entre les coéfficients de la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, qui serviront à les déterminer. Il y aura en tout $m+n-1$ équations, tandis que le nombre total des coéfficients de la fonction avec la constante C sera d'après (7) du § 49 égal à $p+m+n$; donc on tirera de ces équations les expressions de $m+n-1$ des coéfficients en fonctions linéaires de p autres et de la constante C, ainsi qu'il restera encore $p+1$ coéfficients indéterminés, C y compris *). Cette fonction adjointe, déter-

---

*) Dans le cas hyperelliptique la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ aura la forme:

$$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{2\rho}{x})\,y + \theta_1(\overset{2\rho}{x}), \tag{a}$$

où l'on aura:

$$\theta_0(\overset{2\rho}{x}) = \alpha_0 x^{2\rho} + \alpha_1 x^{2\rho-1} + \cdots + \alpha_{2\rho-1}x + \alpha_{2\rho}, \tag{b}$$

$$\theta_1(\overset{2\rho}{x}) = \beta_0 x^{2\rho} + \beta_1 x^{2\rho-1} + \cdots + \beta_{2\rho-1}x + \beta_{2\rho}. \tag{c}$$

L'équation (4) de ce § prendra maintenant la forme

$$\Big(-\frac{ax+c}{b}\Big)^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0; \tag{d}$$

étant seulement du degré $2\rho+1$ aulieu d'être du degré $2\rho+3$, (car $m+n=2\rho+1+2=2\rho+3$), elle aura deux racines infinies. Si maintenant ξ et η sont deux racines finies de cette équation, la fonction (a) devra avoir de même deux racines infinies; donc la valeur de la fonction:

$$\psi_1(\overset{2\rho}{\underset{1}{\bar x}}, \overset{1}{\bar y}) = \bar x^{2\rho}\,\bar y\,\psi\Big(\overset{2\rho}{\frac{1}{\bar x}}, \overset{1}{\frac{1}{\bar y}}\Big) = \bar\theta_0(\overset{2\rho}{\bar x}) + \bar\theta_1(\overset{2\rho}{\bar x})\,\bar y, \tag{e}$$

où l'on a posé:

$$\bar\theta_0(\overset{2\rho}{\bar x}) = \alpha_0 + \alpha_1\bar x + \alpha_2\bar x^2 + \cdots + \alpha_{2\rho}\bar x^{2\rho} = \alpha_0 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^4 + \cdots + \alpha_{2\rho}t^{4\rho}, \tag{f}$$

$$\bar\theta_0(\overset{2\rho}{\bar x}) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2\bar x^2 + \cdots + \beta_{2\rho}\bar x^{2\rho} = \beta_0 + \beta_1 t^2 + \beta_2 t^4 + \cdots + \beta_{2\rho}t^{4\rho}, \tag{g}$$

pour t infiniment petit doit être elle-même infiniment petite d'un ordre de deux unité plus élevé, que l'ordre de la quantité

$$F_3(\bar x, \bar y) : \frac{dx}{dt}, \tag{h}$$

dont la valeur principale est égale (d'après (i) de la note marginale au § 48) à

$$\mp\sqrt{A}\,t^{2\rho}, \tag{i}$$

aulieu d'être du même ordre, comme l'exigent les seules conditions d'adjonction; donc on doit poser:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{\rho-1} = \alpha_\rho = \beta_0 = 0, \tag{j}$$

minée de la manière décrite, est dite *de troisième espèce.* La fonction générale de troisième espèce, contenant linéairement $p+1$ constantes arbitraires, est une fonction linéaire des $p+1$ fonctions adjointes de troisième espèce particulières, qu'on aura en donnant les valeurs particulières à ces constantes. On verra dans le § suivant, que toutes ces fonctions, après avoir été divisées par $ax+by+c$, ne diffèrent entre elles, outre un facteur constant, que par la fonction adjointe générale de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. Pour déterminer le facteur constant on assujetit la fonction à une nouvelle condition, comme on le verra plus loin.

---

et l'on aura:

(k) $$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{\rho-1}{x})y + \theta_1(\overset{2\rho-1}{x});$$

quant aux autres coéfficients, on les trouvera en résolvant les équations, que donnera la comparaison des deux membres de l'équation:

(l) $$\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\left(-\frac{ax+c}{b}\right) + \theta_1(\overset{2\rho-1}{x}) = C\frac{\left(-\frac{ax+c}{b}\right)^2 - R(\overset{2\rho+1}{x})}{(x-\xi)(x-\eta)}.$$

On peut cependant sans faire ces calculs tirer de cette équation la forme usuelle de la fonction $\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})$ pour le cas consideré, donnée par Riemann. En posant pour abréger

(m) $$Y = -\frac{ax+c}{b}$$

et en portant dans (l) y^2 aulieu de $R(\overset{2\rho+1}{x})$, qui lui est égal en vertu de l'équation hyperelliptique, on aura, après avoir tout transporté à droite:

(n) $$0 = -\theta_0(\overset{\rho-1}{x})Y - \theta_1(\overset{2\rho-1}{x}) + C\frac{Y^2-y^2}{(x-\xi)(x-\eta)};$$

en ajoutant cette égalité avec (k), on aura:

(o) $$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{\rho-1}{x})(y-Y) + C\frac{Y^2-y^2}{(x-\xi)(x-\eta)}.$$

Mais en vertu de (m) on a l'identité:

(p) $$ax+by+c = b(y-Y);$$

en divisant par elle l'égalité précédente, nous aurons:

(q) $$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c} = \frac{1}{b}\theta_0(\overset{\rho-1}{x}) - \frac{C}{b}\frac{y+Y}{(x-\xi)(x-\eta)}.$$

Le second membre à droite peut être transformé ainsi: de l'équation de la droite passant par les points:

(r) $$\left(\xi, y_\xi = \sqrt{R(\xi)}\right) \quad \text{et} \quad \left(\eta, y_\eta = \sqrt{R(\eta)}\right)$$

on tire

(s) $$Y = \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x-\xi) + y_\xi;$$

57. Comme on a

$$\overset{m\;n}{F}(\xi, y_\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \overset{m\;n}{F}(\eta, y_\eta) = 0, \tag{1}$$

où l'on a en vertu de la deuxième des équations (3) § 56:

$$y_\xi = -\frac{a\xi + c}{b}, \quad \text{et} \quad y_\eta = -\frac{a\eta + c}{b}, \tag{2}$$

on pourra, en posant encore pour abréger

$$\bar{y} = -\frac{ax + c}{b}, \tag{3}$$

représenter l'équation (7) du § précédent ainsi

$$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = \frac{c}{(\xi-\eta)(x-\xi)(x-\eta)} \begin{vmatrix} \overset{m\;n}{F}(x, \bar{y}) & \overset{m\;n}{F}(\xi, y_\xi) & \overset{m\;n}{F}(\eta, y_\eta) \\ x & \xi & \eta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

(d'où l'on apperçoit de suite la divisibilité par $x-\xi$, $x-\eta$, $\xi-\eta$ du second facteur du second membre de cette équation). À l'aide de cette

---

parconséquent on aura:

$$\left.\begin{aligned} y + Y &= y + y_\xi + \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x - \xi) = \\ &= \frac{(y + y_\xi)(\eta - x + x - \xi) + (y_\eta - y_\xi)(x - \xi)}{\eta - \xi} = \\ &= \frac{(y + y_\eta)(x - \xi) - (y + y_\xi)(x - \eta)}{\eta - \xi}, \end{aligned}\right\} \tag{t}$$

et par suite

$$\frac{y + Y}{(x-\xi)(x-\eta)} = \frac{1}{\xi - \eta}\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right). \tag{u}$$

En le portant dans (q) et en posant d'après (23) § 57

$$C = b(\xi - \eta) \tag{v}$$

on aura définitivement la forme cherchée de la fonction

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax + by + c} = -\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right) + \theta(\overset{\rho-1}{x}), \tag{w}$$

en posant pour abréger $\frac{1}{b}\theta_0(\overset{\rho-1}{x}) = \theta(\overset{\rho-1}{x})$. Ce polynome n'est qu'une fonction adjointe de première espèce; en l'enlevant, on aura de même une fonction adjointe de troisième espèce (divisée par $ax + by + c$), qui prendra la forme:

$$-\left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\xi)}}{x - \xi} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x - \eta}\right) \tag{x}$$

en vertu de (r). C'est là la forme usuelle de cette fonction dans le cas hyperelliptique. (V. notre ouvrage: L'inversion des intégrales hyperelliptiques. Kharkow, 1885. Ch. I, p. 8, formule (6) [en russe]).

formule il est aisé de trouver la valeur de la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ pour $x=\xi$, $y=y_\xi$, et de même pour $x=\eta$, $y=y_\eta$. En retranchant la deuxième colonne de la première et en divisant la première colonne du résultat par $x-\xi$, on aura, vu (1):

$$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{\bar{y}}) = \frac{C}{x-\eta} \cdot \frac{F(\overset{m}{x}, \overset{n}{\bar{y}}) - F(\overset{m}{\xi}, \overset{n}{y_\xi})}{x-\xi}; \tag{5}$$

en faisant approcher indéfiniment le point $(x, \bar{y})$ du point (ξ, y_ξ), on aura à la limite

$$\psi(\overset{m-1}{\xi}, \overset{n-1}{y_\xi}) = \frac{C}{\xi-\eta} \frac{dF(\xi, y_\xi)}{d\xi}; \tag{6}$$

mais on a

$$\frac{dF(\xi, y_\xi)}{d\xi} = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} \cdot \frac{dy_\xi}{d\xi}, \tag{7}$$

et on tire des équations (2):

$$\frac{dy_\xi}{d\xi} = -\frac{a}{b} = \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi} = \frac{y_\xi - y_\eta}{\xi - \eta}, \tag{8}$$

[aussi d'après l'équation de la droite passant par les points (ξ, y_ξ) et (η, y_η)]; en le portant dans (7) et de là en (6), on aura:

$$\psi(\overset{m-1}{\xi}, \overset{n-1}{y_\xi}) = -\frac{C}{(\eta-\xi)^2}\left(\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial \xi}(\eta - \xi) + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}(y_\eta - y_\xi)\right). \tag{9}$$

De la même manière en trouve:

$$\psi(\overset{m-1}{\eta}, \overset{n-1}{y_\eta}) = -\frac{C}{(\xi-\eta)^2}\left(\frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial \eta}(\xi - \eta) + \frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial y_\eta}(y_\xi - y_\eta)\right). \tag{10}$$

On voit par ces formules, que les valeurs de la fonction $\frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ aux points (ξ, y_ξ) et (η, y_η) sont indépendantes des coéfficients de cette fonction. Donc si l'on désigne par $\psi_1(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ une autre fonction adjointe de la même espèce, dont le nombre d'après le § précédent est ∞^{p+1}, la différence

$$\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) - \frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) \tag{11}$$

deviendra nulle aux points (ξ, y_ξ) et (η, y_η), comme la fonction $ax+by+c$, et aux points infiniment proches de ces points sera infiniment petite d'un ordre pas inférieure que cette dernière. En la divisant par cette dernière, on aura une fonction

$$\left[\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) - \frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\right] : (ax+by+c), \tag{12}$$

qui reste finie pour toutes les $m+n$ solutions du système d'équations (3) du § précédent, le numerateur s'annulant en même temps que le dénominateur pour ces solutions, comme il suit de ce qui précède, — de sorte qu'elle n'aura que $2p-2$ zéros mobiles $\frac{}{}$, et qui satisfiera à toutes les conditions, auxquelles satisfait la fonction adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. Pour les points de la première catégorie [(1°) du § 44,] cela est évident, car la fonction en crochets est adjointe et le diviseur $ax+by+c$ est fini et différent de zéro en ces points; donc elle est de même ordre que la fonction $F'_y(x,y):\frac{dx}{dt}$ en ces points. Pour les points de la deuxième catégorie le quotient de la division de l'expression en crochets par cette dernière fonction devient infini comme $\frac{1}{\bar{y}}$ pour $\bar{y}=0$; mais de la même manière devient infinie en ces points la fonction $ax+by+c$; donc le quotient de la division de l'expression (12) par la fonction $F'_y(x,y):\frac{dx}{dt}$ restera fini, et parconséquent les deux fonctions seront de même ordre. Les mêmes considérations s'appliquent à l'expression (12) aux points de la troisième catégorie et nous conduisent au même résultat. Quant aux points de la quatrième catégorie, en posant $x=\frac{1}{\bar{x}}$, $y=\frac{1}{\bar{y}}$, on aura

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\frac{dx}{dt}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)}=\frac{\psi_3(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})\frac{d\bar{x}}{dt}}{(a\bar{y}+b\bar{x}+c\bar{x}\bar{y})F_3(\bar{x},\bar{y})}, \tag{13}$$

$F_3(\bar{x},\bar{y})$ étant déterminée par l'équation (21) du § 44 et $\psi_3(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})$ par l'équation analogue à (14) § 44; les deux fonctions $\psi_3(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})$ et $F_3(\bar{x},\bar{y}):\frac{dx}{dt}$ étant du même ordre d'après les conditions d'adjonction, il parrait que l'expression (13) devient infinie comme $\frac{1}{a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{x}\bar{y}}$ pour $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$; mais on a vu au § précédent, que les points de la quatrième catégorie n'existant que dans le cas, où a_0 est du degré inférieur à m, l'équation (4) du § précédent et parconséquent l'équation (6) du même § auront des racines infinies; donc la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ aura des nouveaux zéros à l'infini, et parconséquent $\psi_3(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})$ sera d'un ordre plus élevé au moins d'une unité, que $F_3(x,\bar{y}):\frac{d\bar{x}}{dt}$. Donc aussi aux points singuliers de la quatrième catégorie l'expression (12) ne sera pas d'un ordre moins élevé que $F_3(\bar{x},\bar{y}):\frac{d\bar{x}}{dt}$. On en conclut que le quotient de la division de l'expression (12) par une certaine fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$, de première espèce, sera une fonction uniforme, finie et continue sur toute la sphère de

Riemann; mais une telle fonction ne peut être qu'une constante*). Donc on aura:

$$(14)\qquad \left[\frac{1}{C_1}\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})-\frac{1}{C}\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})\right]:(ax+by+c)=\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),$$

d'où l'on tire:

$$(15)\qquad \psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})=C_0\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})+(ax+by+c)\,\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}),$$

en désignant simplement $\frac{C_1}{C}$ par C_0, et en liant le facteur C_1 du second terme avec les coéfficients arbitraires C_i de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ [(11) § 53]. C'est ainsi, que s'expriment l'une par l'autre deux fonctions différentes de troisième espèce $\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$, déterminées de la manière expliquée plus haut à l'aide de l'équation:

$$(16)\qquad ax+by+c=0,$$

[en parlant géométriquement, qui s'annulent en tous les points d'intersection de la droite (16) avec la courbe fondamentale, les points (ξ, y_ξ) et (η, y_η) exceptés]. Les $p+1$ coéfficients, qui restent après cela indéterminés, sont les p coéfficients arbitraires de la fonction générale de la première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ et le facteur C_0. On voit par la formule (15), que la demande d'avoir un zéro au point (ξ,y_ξ) ou au point (η, y_η) outre les zéros déjà fixés, ou cette autre d'avoir ses p zéros sur une courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})=0$, pour la fonction $\psi_1(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$ la réduit au dernier terme du second membre de cette équation (15), car en y remplaçant (x,y) par un de ces point $(\bar{x},\bar{y})$, on en reçoit: $C_0\psi(\overset{m-1}{\bar{x}},\overset{n-1}{\bar{y}})=0$, d'où il suit $C_0=0$, car $\psi(\overset{m-1}{\bar{x}},\overset{n-1}{\bar{y}})$ est finie et différente de zéro.

Pour $x=\xi$, $y=y_\xi$ la fonction $ax+by+c$ s'annule; mais son rapport à $x-\xi$ sera une quantité finie différente de zéro; la même chose aura lieu pour l'autre point $x=\eta$, $y=y_\eta$. En effet, on a

$$(17)\qquad \left.\frac{ax+by+c}{x-\xi}\right|_{x=\xi}=\frac{a+b\dfrac{dy_\xi}{d\xi}}{1};$$

---

*) En effet, une fonction symmétrique des toutes les valeurs d'une telle fonction, qui se rapportent à la même valeur de x, serait alors une fonction uniforme, finie et continue sur toute la sphère ordinaire (à un feuillet); donc elle serait une constante; on pourrait donc former une équation à coéfficients constants, dont la fonction en question serait une racine; donc cette fonction se réduirait à une constante, c'est ce qu'il fallait démontrer.

mais le point (ξ, y_ξ) se trouvant sur la courbe fondamentale, c'est-à-dire les valeurs ξ, y_ξ satisfaisant à l'équation $\overset{m\ n}{F(x, y)}=0$, on aura:

$$\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}\frac{dy_\xi}{d\xi} = 0; \tag{18}$$

en portant la valeur de $\frac{dy_\xi}{d\xi}$ d'ici en (17) et de même la valeur de $\frac{a}{b}$ de (8), nous aurons

$$\frac{ax+by+c}{x-\xi}\Bigg|_{x=\xi} = \frac{b}{\xi-\eta}\,\frac{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial \xi}(\eta-\xi) + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}(y_\eta - y_\xi)}{\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}}, \tag{19}$$

D'ici et de (9) il suit, que

$$\lim\left[\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)}(x-\xi)\right]_{x=\xi} = -\frac{C}{b(\xi-\eta)}. \tag{20}$$

De la même manière on trouvera, que

$$\lim\left[\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)}(x-\eta)\right]_{x=\eta} = +\frac{C}{b(\xi-\eta)}, \tag{21}$$

car on a

$$\lim \frac{ax+by+c}{x-\eta}\Bigg|_{x=\eta} = -\frac{b}{\xi-\eta}\,\frac{\frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial \eta}(\xi-\eta) + \frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial y_\eta}(y_\xi - y_\eta)}{\frac{\partial F(\eta, y_\eta)}{\partial y_\eta}}. \tag{22}$$

Si l'on pose, pour finir la détermination de la fonction $\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}$:

$$C = b(\xi-\eta), \tag{23}$$

les équations (20) et (21) deviendront:

$$\lim\left[\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)}(x-\xi)\right]_{x=\xi} = -1, \tag{24}$$

$$\lim\left[\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)}(x-\eta)\right]_{x=\eta} = +1. \tag{25}$$

De là suivent pour la fonction:

$$\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)} \tag{26}$$

telles développements: au voisinage du point (ξ, y_ξ):

$$\frac{\overset{m-1\ n-1}{\psi(\ x\ ,\ y\ )}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)} = -\frac{1}{x-\xi} + \mathfrak{P}(x-\xi), \tag{27}$$

et au voisinage de l'autre point (η, y_η):

(28) $$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{(ax+by+c)F'_y(x,y)} = +\frac{1}{x-\eta} + \mathfrak{P}_1(x-\eta),$$

en désignant par la lettre allemande $\mathfrak{P}$ une série, ordonnée suivant les puissances entières et positives de l'argument.

Nous avons supposé dans ce qui précède, que les points (ξ, y_ξ) et (η, y_η) étaient différents des points de ramification. Si l'un d'eux, par exemple (ξ, y_ξ), se confondait avec un point de ramification d'ordre p, on poserait $x-\xi = t^p$ et on définirait la fonction de troisième espèce $\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c}$ par la condition, qu'aux environs de ce point on aurait:

(29) $$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\frac{dx}{dt}}{(ax+by+c)F'_y(x,y)} = -\frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t);$$

il faudrait donc pour ce point de ramification modifier les conditions d'adjonction de manière, que l'ordre de la fonction

(30) $$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c}$$

pour t infiniment petit serait inférieur d'une unité de celui de la fonction:

(31) $$F'_y(x,y) : \frac{dx}{dt},$$

aulieu de lui être égal, comme l'exigent les conditions d'adjonction. — Si l'autre point (η, y_η), lui aussi, venait à tomber en un autre point de ramification, on procéderait de la même manière. — Si le point de ramification, dans lequel tomberait l'un des points (ξ, y_ξ) ou (η, y_η) se trouverait à l'infini, on n'aurait qu'à poser $x = t^{-p'}$, si l'ordre de ce point était p', et puis continuer de la manière indiquée pour le premier cas. — Il faut encore remarquer, que lorsque le point (ξ, y_ξ) coïncide avec un point de ramification, un certain nombre d'autres points d'intersection de la droite $ax+by+c=0$ avec la courbe fondamentale $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ y viennent à tomber aussi, c'est ce qui augmentera le nombre de zéros de la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ en ce point de la sorte, que sa valeur aux environs de ce point pourra être infiniment petite d'un ordre plus élevé, que l'exigent les conditions d'adjonction*).

*) Dans le cas hyperelliptique il n'y a aucune condition d'adjonction pour les points de ramification, situés dans le fini, (comme on l'a vu dans la note marginale du § 48); il n'y en aura pas aussi pour la fonction $\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})$ dans le cas con-

58. La fonction

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c} \tag{1}$$

$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ étant la fonction adjointe à l'équation

$$\overset{m}{F}(x, \overset{n}{y}) = 0, \tag{2}$$

déterminée au § 56 par la condition de s'annuler pour toutes les paires des valeurs de x et y, satisfaisants à l'équation (2) conjointement avec cette autre:

$$ax+by+c=0, \tag{3}$$

---

sideré; car en posant $x=a_i+t^2$ et parconséquent $y=t\sqrt{R'(a_i)}+t^2\mathfrak{P}(t^2)$, comme on a $aa_i+b.0+c=0$, on aura aux environs de ce point:

$$ax+by+c=b\sqrt{R'(a_i)}\,t+t^2\mathfrak{P}_1(t^2), \tag{a}$$

quantité infiniment petite du premier ordre. On aura dans ce cas la fonction $\dfrac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c}$ en posant $\xi=a_i$ dans la formule (x) de la note marginale du § 56, ce qui la réduira, cette formule à la suivante:

$$-\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_i}-\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(\eta)}}{x-\eta}\right). \tag{b}$$

Dans le cas, où le point (η, y_η) tomberait dans le point O' à l'infini, (qui est de ramification pour $m=2\rho+1$), l'ordre de la fonction $\psi_1(\overset{2\rho}{\bar{x}}, \overset{1}{\bar{y}})$ doit être d'une unité moindre, d'après le texte, que dans la note mentionnée, de ses deux zéros à l'infini l'un se changeant en le point (η, y_η), où elle ne doit pas s'annuler; donc β_0 ne sera plus égal à zéro, et la fonction $\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})$ prendra la forme:

$$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})=\theta_0(\overset{\rho-1}{x})y+\theta_1(\overset{2\rho}{x}). \tag{c}$$

Comme en vertu de (v) de la note citée on aura: $\dfrac{C}{x-\eta}=b\dfrac{\xi-\eta}{x-\eta}\Bigg|_{\eta=\infty}=b$, et ayant égard à (m) de la même note, on aura au lieu de l'équation (l) de la note citée du § 56 la suivante:

$$\theta_0(\overset{\rho-1}{x})Y+\theta_1(\overset{2\rho}{x})=b\,\frac{Y^2-R(\overset{2\rho-1}{x})}{x-\xi}; \tag{d}$$

en éliminant $\theta_1(\overset{2\rho}{x})$ à l'aide de celle-ci de la précédente et en divisant le résultat par (p) de la même note, on aura:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c}=\frac{1}{b}\,\theta_0(\overset{\rho-1}{x})-\frac{y+Y}{x-\xi}; \tag{e}$$

à l'exclusion des solutions:

$$(4) \qquad x=\xi,\ y=y_\xi; \qquad x=\eta,\ y=y_\eta,$$

sera dorénavant désignée, d'après M. Noether, par $P_{\xi\eta}(x, y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, ainsi qu'on aura

$$(5) \qquad \frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c} = P_{\xi\eta}(x, y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$$

— *si elle devient* $=0$[1] *aux points* (a_i, b_i) $(i=1, 2, 3, \dots p)$. Ces valeurs $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ peuvent être données arbitrairement, à la seule condition: le déterminant

$$(6) \qquad {}^{1,1}_{\ \ i}_{\ \ p}\left|\, \overset{h}{\varphi_k(\overset{m-2}{a_i}, \overset{n-2}{b_i})} \,\right|^{p} \neq 0;$$

en effet, en désignant par $\psi_1(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ une fonction quelconque particulière de cette espèce, nous aurons d'après (15) du § précédent:

$$(7) \qquad \frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c} = \frac{\psi_1(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c} + \sum_{j=1}^{p} C_j \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y});$$

(en changeant les rôles de ψ et ψ_1 et en écrivant au lieu de $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ son expression par le système fondamental des fonctions de première espèce, [(11) § 53]); en posant ici $x=a_i$, $y=b_i$ $(i=1, 2, \dots p)$, nous aurons pour déterminer les constantes C_j conformément à la condition prescrite un tel système d'équations:

$$(8) \qquad 0 = \frac{\psi_1(\overset{m-1}{a_i}, \overset{n-1}{b_i})}{aa_i+bb_i+c} + \sum_{j=1}^{p} C_j \varphi_j(\overset{m-2}{a_i}, \overset{n-2}{b_i}),$$

---

ayant $y_\xi = -\dfrac{a\xi+c}{b}$, on tirera de ($m$) de la note citée: $Y = y_\xi - \dfrac{a}{b}(x-\xi)$, ce qui changera (e) en celle-ci:

$$(\mathrm{f}) \qquad \frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c} = \frac{1}{b}\,\theta_0(\overset{\rho-1}{x}) - \frac{y+y_\xi}{x-\xi} + \frac{a}{b},$$

et en y remplaçant y et y_ξ par leurs expressions en x et ξ respectivement, on aura pour la fonction cherchée définitivement:

$$(\mathrm{g}) \qquad \frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c} = \theta(\overset{\rho-1}{x}) - \frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(\xi)}}{x-\xi},$$

en posant encore:

$$(\mathrm{h}) \qquad \frac{1}{b}\,\theta_0(\overset{\rho-1}{x}) + \frac{a}{b} = \theta(\overset{\rho-1}{x}),$$

— évidement aussi une fonction adjointe de première espèce. — On vérifie aisement, que la fonction (g), divisée par $2\sqrt{R(x)} : \dfrac{dx}{dt}$, pour $x=t^{-2}$ devient infinie comme $\dfrac{1}{t}$ pour $t=0$.

$(i=1, 2, 3, \ldots p)$; on en tire:

$$C_k = -\frac{D^{(k)}}{D}, \tag{9}$$

où l'on a

$$D = i \left| \overset{1,1}{\underset{p}{}}\ \overset{j}{\varphi_j}(\overset{m-2}{a_i}, \overset{n-2}{b_i}) \right|^{p}, \tag{10}$$

et où $D^{(k)}$ désigne ce, que devient ce déterminant, lorsqu'on y remplace la colonne k-ième par

$$\frac{\psi_1(\overset{m-1}{a_i}, \overset{n-1}{b_i})}{aa_i + bb_i + c}. \qquad (i=1, 2, 3, \ldots p) \tag{11}$$

Le numérateur et le dénominateur de l'expression (9) de C_k sont des fonctions alternées des paires (a_i, b_i), et parconséquant C_k en sera une fonction symmétrique. Nous entendrons dorénavant*) par $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i)$ les points fondamentaux du système normal des fonctions adjointes de première espèce $\varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ [(9) § 53]; alors la fonction adjointe de l'espèce considérée la plus generale, avec des zéros aux points $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}} \beta_i)$ sera donnée d'après (15) du § précédent, en vertu de (5) par la formule:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}} \beta_i) = P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i) + \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{12}$$

où l'on a

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{j=1}^{p} C_j \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{13}$$

les constantes C_j étant maintenant déterminées par la formule, qui résulte de (9) après le changement de $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i)$ en $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}} \beta_i)$ et de la fonction (11) en $P_{\xi\eta}(\alpha_j, \beta_j; \overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i)$.

On peut déterminer ces constantes encore d'une autre manière. En posant $x=a_k, y=b_k$ dans l'équation (12) et (13), on aura

$$P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}} \beta_i) = \varphi(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}), \quad \varphi(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}) = C_k,$$

et par suite:

$$C_k = P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}} \beta_i); \tag{14}$$

---

*) Le § suivant excepté.

en portant les valeurs de C_k de (14) dans l'égalité (12), on aura:

$$(15) \qquad P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) = P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(a_j, b_j; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).$$

En comparant (14) avec (9), on aura:

$$(16) \qquad P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) = \frac{D^{(k)}}{D},$$

où l'on a maintenant

$$(17) \qquad D = {}_{i}\overset{1,1}{\underset{p}{\left| \overset{j \qquad p}{\varphi_j(\overset{m-2}{\alpha_i}, \overset{n-2}{\beta_i})} \right|}}$$

et $D^{(k)}$ s'en déduise en remplaçant la colonne k-ième par

$$(18) \qquad P_{\xi\eta}(\alpha_i, \beta_i; \overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}}). \qquad (i = 1, 2, \ldots p)$$

Dès ce moment c'est toutes ces fonctions $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})$, qui seront nommées *fonctions adjointes de troisième espèce*, et les constantes ξ et η, avec les valeurs correspondantes de y, *leurs paramètres*. Les points (ξ, y_ξ) et (η, y_η) de la surface de Riemann on pourrait nommer les points-paramètres *).

Nous désignerons quelquefois la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ aussi de cette manière:

$$(19) \qquad \psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; x_i, y_i \,\overset{p}{\underset{1}{|}}\, x'_i, y'_i)$$

où les $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ sont ses zéros arbitraires et $\overset{p}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$ ses zéros non-arbitraires.

On peut dans la formule (7) déterminer les constantes $\overset{p}{\underset{1}{C_j}}$ de telle maniere, que les $2p$ zéros variables de la fonction à gauche de cette équation deviènnent égaux deux à deux. On trouvera les valeurs des constantes $\overset{p}{\underset{1}{C_j}}$, et aussi les valeurs des zéros doubles $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ de la fonction considérée, par la méthode, que nous avons donnée dans le § 54 pour déterminer les fonctions adjointes tangentielles de première espèce; mais ici les unes valeurs comme les autres seront dépendantes des points (ξ, y_ξ) et (η, y_η), à cause de polynome $ax + by + c$, qui figure dans l'équation (7) et qui, égalé à zéro, représente la droite, qui joint ces deux points. En portant ces valeurs dans l'équation (7), nous aurons l'une des fonctions adjointes tangentielles de troisième espèce. En effet,

*) Weierstrass définit autrement la fonction de troisième espèce (v. Hettner, l. c.); une nouvelle définition a donné aussi M. Ermakoff; nous avons préféré celle de Briot et Bouquet, qui appartient à Clebsch et Gordan, dans la forme que lui a donné M. Noether.

en égalant cette fonction à zéro, on aura une courbe adjointe de troisième espèce, qui sera tangente à la courbe fondamentale $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ aux points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, y étant confondu, en chacun, deux points de son intersection avec celle-ci. Nous reviendrons encore à ce sujet plus loin.

59. La fonction adjointe de troisième espèce avec les paramètres ξ et η est complètement et uniformément définie par ses zéros, les constantes C_j entrant linéairement dans son expression, donnée par les formules (12) et (13) du § précédent. À l'aide de cette remarque on peut aisement démontrer plusieures des propriétés de ces fonctions, qui jouent un rôle important dans la théorie des intégrales abéliennes*). La première propriété s'exprime par l'égalité suivante:

$$P_{\xi\zeta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + P_{\zeta\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}). \tag{1}$$

Pour démontrer cette égalité on n'a besoin que de remarquer, que la fonction à gauche est une fonction adjointe, qui devient ∞^1 aux points (ξ, y_ξ) et (η, y_η) de manière que

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta} + P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \xi)\right)_{x=\xi} = -1, \tag{2}$$

(car on a d'après (24) § 57 vu (5) § 58:

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta}}{F_y'(x, y)}(x - \xi)\right)_{x=\xi} = -1, \quad \lim \left(\frac{P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \xi)\right)_{x=\xi} = 0,)$$

et

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta} + P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \eta)\right)_{x=\eta} = +1, \tag{3}$$

(car on a d'après (25) § 57 vu (5) § 58:

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta}}{F_y'(x, y)}(x - \eta)\right)_{x=\eta} = 0, \quad \lim \left(\frac{P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \eta)\right)_{x=\eta} = +1,)$$

comme la fonction à droite en (1), tandis qu'au point (ζ, y_ζ) on aura:

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta} + P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \zeta)\right)_{x=\zeta} = 0, \tag{4}$$

(car on a d'après les formules citées des §§ 57 et 58:

$$\lim \left(\frac{P_{\xi\zeta}}{F_y'(x, y)}(x - \zeta)\right)_{x=\zeta} = +1, \quad \lim \left(\frac{P_{\zeta\eta}}{F_y'(x, y)}(x - \zeta)\right)_{x=\zeta} = -1),$$

*) Suivant M. Noether. 2. Note. S. 2—3 (l. c.).

— donc c'est un point ordinaire pour le premier membre de l'égalité (1), comme pour le second; on a de plus

$$(5) \qquad \left(P_{\xi\zeta}+P_{\zeta\eta}\right)_{x=a_i,\, y=b_i}=0$$

pour toutes les valeurs de i: $i=1,2,3,\ldots p$; mais par toutes ces propriétés la fonction $P_{\xi\eta}(x,y;\, a_i, b_i)_1^p$ est définie complètement; d'où suit l'égalité (1), qu'il fallait démontrer.

On peut écrire l'égalité (1) encore de cette manière:

$$(6) \qquad P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - P_{\zeta\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi\zeta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}),$$

ou, en changeant η et ζ l'un contre l'autre:

$$(7) \qquad P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi\zeta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - P_{\eta\zeta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}),$$

[ce qu'on démontre du reste de la même manière que l'égalité (1)]. Si l'on permute ici les lettres ξ et η, le second membre de l'égalité changera seulement le signe; donc on aura

$$P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}).$$

Les deux dernières égalités expriment des propriétés nouvelles de la fonction considérée: la dernière, que la fonction $P_{\xi\eta}$ est une fonction alternée des deux paramètres, ξ et η, c'est-à-dire qu'elle ne change que de signe, lorsqu'on met un paramètre à la place de l'autre, d'où il suit à son tour qu'elle s'annule pour $\xi=\eta$, $y_\xi=y_\eta$, [ce que du reste on voit par (7),] l'avant-dernière — qu'elle se décompose en une différence des deux semblables fonctions, dont chacune ne dépend que d'un seul de ses paramètres.

60. Revenons à l'équation (15) § 58:

$$(1) \quad P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) = P_{\xi\eta}(x,y;\, \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(a_j, b_j;\, \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})\, \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).$$

En posant ici suivant Mr. M. Noether:

$$(2) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_1=x\\ \beta_1=y\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\alpha_2=a_2\\ \beta_2=b_2\end{matrix}\right\} \cdots \left.\begin{matrix}\alpha_p=a_p\\ \beta_p=b_p\end{matrix}\right\}$$

et ayant égard à ce, que

$$(3) \qquad P_{\xi\eta}(x,y;\, x, y, \overset{p}{\underset{2}{a_j, b_j}})=0,$$

$$(4) \qquad P_{\xi\eta}(a_i, b_i;\, x, y, \overset{p}{\underset{2}{a_j, b_j}})=0,$$

pour $i=2, 3, \ldots p$, nous aurons:

$$0=P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})+P_{\xi\eta}(a_1,b_1;x,y,\overset{p}{\underset{1}{a_j, b_j}})\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}), \tag{5}$$

d'où il suit:

$$P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})=-P_{\xi\eta}(a_1 b_1;x,y,\overset{p}{\underset{2}{a_j, b_j}})\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}); \tag{6}$$

c'est-à-dire, que si après avoir transposé dans la fonction $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ (x,y) avec (a_1, b_1) on multiplie le résultat par $-\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$, on aura la même fonction; et en général, si l'on transpose (x, y) avec (a_k, b_k) et multiplie le résultat par $-\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$, on aura la même fonction $P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$:

$$P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})=-P_{\xi\eta}(a_k,b_k;\overset{k-1}{\underset{1}{a_i, b_i}};x,y;\overset{p}{\underset{k+1}{a_i, b_i}})\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}). \tag{7}$$

61. En posant dans l'égalité (7) § 59:

$$\eta=\xi+\Delta\xi,$$

on aura après l'avoir divisé par $-\Delta\xi$, en vertu de (8) § 59:

$$\frac{P_{\xi+\Delta\xi,\,\xi}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{\Delta\xi}=\frac{\Delta P_{\xi\zeta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{\Delta\xi}; \tag{1}$$

en approchant $\Delta\xi$ indéfiniment à zéro, la fonction à droite aura pour limite la dérivée de $P_{\xi\zeta}$ par rapport à ξ, la fonction à gauche — celle, en quelle se change la fonction $\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})}{ax+by+c}$, lorsqu'on pose en (7) § 56 $\eta=\xi$ et $C=-b\Delta\xi$ — d'après (23) § 55 (en parlant géométriquement, lorsque la sécante $ax+by+c=0$, menée par le point (ξ, y_ξ), devient la tangente au même point à la courbe fondamentale).

Cette double dérivation de la nouvelle fonction permet démontrer aisement ses propriétés principales. Celle, qui est exprimée par le premier membre de l'égalité (1), montre de suite que c'est une fonction adjointe, qui devient $=\infty^2$ au point (ξ, y_ξ) ou, en parlant autrement, qui devient ∞^1 en deux points coïncidants. C'est ce, qui permet de recevoir cette fonction par la méthode de § 56 et celle de § 59 — pour les fonctions adjointes tangentielles de cette espèce, en prenant pour $ax+by+c=0$ la tangente à la courbe fondamentale au point (ξ, y_ξ). En outre, on voit par cette définition, qu'elle ne dépend nullement de ζ qui figure formellement à droite dans cette égalité. Du reste il n'est pas difficile de démontrer l'indépendance de la nouvelle fonction de ζ ainsi: en différentiant par rapport à ξ l'égalité (7) § 59, nous aurons:

$$\frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi} = \frac{dP_{\xi\zeta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi}, \tag{2}$$

car le second terme à droite de l'égalité mentionnée est indépendant de ξ; mais ici la fonction à gauche peut être reçue de celle à droite en remplaçant ζ par η: la fonction, conservant sa valeur malgré ce changement, ne peut pas dépendre du second paramètre de la fonction $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$. Nous désignerons cette fonction après l'avoir multiplié par $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$, par $E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, de sorte que:

$$E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} \cdot \frac{dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi}. \tag{3}$$

Il est facile de voir par celà, que pour $x = a_i$, $y = b_i$, on aura $E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = 0$. Cette définition de la fonction donne de suite la forme de son développement aux environs de point (ξ, y_ξ): d'après (5) § 58 et (27) § 57 nous avons:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -\frac{F'_y(x, y)}{x - \xi} + \mathfrak{P}_2(x - \xi); \tag{4}$$

parconséquent

$$E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = -\frac{F'_y(x, y) \cdot F'_y(\xi, y_\xi)}{(x - \xi)^2} + \mathfrak{P}_3(x - \xi).\text{*)} \tag{5}$$

On appelle cette fonction (3) — *fonction adjointe de deuxième espèce.* On peut recevoir de la même manière les fonctions de deuxième espèce d'ordre élevé avec un seul paramètre ξ, qui deviènnent pour $x = \xi$, $y = y_\xi$ infinies d'ordre plus élevé. En différentiant la fonction $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ k fois par rapport à ξ et en multipliant le résultat par $\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$, on aura une fonction, qui sera désignée ainsi:

$$E_\xi^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} \cdot \frac{d^k P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi^k}. \tag{6}$$

---

*) En regardant F'_y comme le signe de la dérivée par rapport à y, nous écrirons les valeurs particulières de x et y à leurs place entre les paranthèses seulement, de sorte qu'on aura toujours: $F'_y(\xi, y_\xi) = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}$.

Quelquefois l'opération de la différentiation k fois de suite par rapport à ξ, suivie de la multiplication par $F'_y(\xi, y_\xi)$, sera désigné par D_ξ, ainsi que les équations (3) et (6) prendront la forme:

$$E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=D_\xi P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}); \tag{7}$$

$$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=D_\xi^k P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}). \tag{8}$$

Toutes ces fonctions deviènnent nulles pour $x=a_i, y=b_i$. En différentiant k fois l'égalité (4) par rapport à ξ et en multipliant le résultat par $\frac{\partial F(\xi,y_\xi)}{\partial y_\xi}$, c'est-à-dire, en effectuant l'opération D_ξ^k, nous aurons au voisinage du point (ξ, y_ξ):

$$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=-k!\frac{F'_y(\xi,y_\xi)\cdot F'_y(x,y)}{(x-\xi)^{k+1}}+\mathfrak{P}_k(x-\xi). \tag{9}$$

La relation entre les fonctions adjointes de la deuxième espèce avec le même paramètre, mais qui différent entre elles par leurs zéros, sera reçue, si l'on effectue l'opération D_ξ^k sur l'égalité (1) du § précédent; nous aurons alors d'après (8):

$$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})=E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})+\sum_{j=1}^{p}E_\xi^{(k-1)}(a_j,b_j;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}). \tag{10}$$

En transposant la somme à gauche et en échangeant entre eux les systèmes $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})$ et $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$, on aura la relation:

$$E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})=E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})-\sum_{j=1}^{p}E_\xi^{(k-1)}(\alpha_j,\beta_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\bar{\varphi}_j(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y}), \tag{11}$$

en désignant par $\bar{\varphi}_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$ le système normal, dont les points fondamentaux sont $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})$. Pour $k=1$ nous aurons:

$$E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})=E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})-\sum_{j=1}^{p}E_\xi(\alpha_j,\beta_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\bar{\varphi}_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}). \tag{12}$$

62. Dans le cas, où le point (ξ, y_ξ) se confond avec l'un des points fondamentaux, par exemple avec (a_k, b_k), les formules des §§ précédents deviènnent illusoires. En effet, on voit par la formule (7) § 60 qu'on aura alors $P_{a_k\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=\infty$ pour chaque valeur de x, car on a:

$$P_{a_k\eta}(a_k,b_k;a_1,b_1,\ldots a_{k-1},b_{k-1},x,y,a_{k+1},b_{k+1},\ldots a_p,b_p)=\infty, \tag{1}$$

les valeurs de la variable et de paramètre étant égales, ou, à parler autrement, les points représentants la variable et le paramètre de la fonction de troisième espèce étant confondus. Dans ce cas M. M. Noether*) prend la fonction adjointe de troisième espèce:

(2) $$P_{a_k\eta}(x,y;a_1,b_1,\ldots a_{k-1},b_{k-1},a_k',b_k',a_{k+1},b_{k+1},\ldots a_p,b_p),$$

où le point (a_k', b_k') est un point différent de (a_k, b_k), choisi arbitrairement à la seule condition de n'être pas situé sur une même courbe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$ avec les autres zéros de la fonction, et à l'aide de l'opération $D^l_{a_k}$ en déduit les fonctions adjointes de la deuxième espèce avec le paramètre a_k, que nous désignerons ainsi:

(3) $$E_k(x,y)=D_{a_k}P_{a_k\eta}(x,y;a_1,b_1,\ldots a_{k-1},b_{k-1},a_k',b_k',a_{k+1},b_{k+1},\ldots a_p,b_p);$$

(4) $$E_k^{(l-1)}(x,y)=D^l_{a_k}P_{a_k\eta}(x,y;a_1,b_1,\ldots a_{k-1},b_{k-1},a_k',b_k',a_{k+1},b_{k+1},\ldots a_p,b_p).$$

Les formules (5) et (9) du § précédent sont applicables à ces fonctions, c'est-à-dire qu'aux environs des points (a_k, b_k) elles seront développables en séries de la même forme, qu'on reçoit en y changeant ξ en a_k. — On peut nommer points fondamentaux *secondaires* les points:

(5) $$(a_1',b_1'),\ (a_2',b_2')\ \ldots\ (a_p',b_p').$$

63. Pour déduire de la même manière les fonctions adjointes de deuxième espèce dans le cas, où leur paramètre tombe en un point de ramification, situé dans le fini ou à l'infini, on doit commencer par considérer le cas, où le point-paramètre (ξ, y_ξ) se trouve aux environs d'un tel point, mais n'y tombe pas encore: alors la formule (5) du § 57 reste applicable. Supposons, que le point (ξ, y_ξ) se trouve aux environs du point de ramification (α, β) d'ordre μ; alors on pourra poser [d'après (4) § 34]:

(1) $$\xi=\alpha+\tau^\mu;$$

comme la droite $ax+by+c=0$ passe par ce point, on aura:

(2) $$y_\xi=-\frac{a\alpha+c+a\tau^\mu}{b}=\bar\beta-\frac{a}{b}\tau^\mu,$$

en posant pour abréger:

(3) $$\bar\beta=-\frac{a\alpha+c}{b}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (5) § 57, nous aurons:

(4) $$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right)=\frac{C}{x-\eta}\,\frac{F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right)-F\left(\overset{m}{\alpha+\tau^\mu}, \overset{n}{\bar\beta-\frac{a}{b}\tau^\mu}\right)}{x-\alpha-\tau^\mu}.$$

*) Uber die algebraische Differentialausdrücke. 2-te Note. (Sitzungsberichte der physik.-medic. Societät zu Erlangen. 14. Jan. 1884.) M. Ermakoff construit autrement la fonction de deuxième espèce dans ce cas.

Pour calculer la valeur de cette fonction au point-paramètre, prenons d'abord sur la droite $ax+by+c=0$ un point très proche de lui, lequel, tombant aux environs du point (α, β), pourra être représenté en vertu de (3) par

$$x=\alpha+t^{\mu}, \quad \bar{y}=-\frac{ax+c}{b}=\bar{\beta}-\frac{a}{b}t^{\mu}; \tag{5}$$

en portant cela dans la formule (4), on aura:

$$\psi\left(\overset{m-1}{\alpha+t^{\mu}}, \overset{n-1}{\beta-\frac{a}{b}t^{\mu}}\right)=\frac{C}{\alpha-\eta+t^{\mu}} \cdot \frac{F\left(\overset{m}{\alpha+t^{\mu}}, \overset{n}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}t^{\mu}}\right)-F\left(\overset{m}{\alpha+\tau^{\mu}}, \overset{n}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}}\right)}{(t-\tau)(t^{\mu-1}+t^{\mu-2}\tau+\cdots+\tau^{\mu-1})}, \tag{6}$$

après avoir décomposé $t^{\mu}-\tau^{\mu}$ en ses facteurs. En approchant t de τ, on aura à la limite:

$$\psi\left(\overset{m-1}{\alpha+\tau^{\mu}}, \overset{n-1}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}}\right)=\frac{C}{\alpha-\eta+\tau^{\mu}}\,\frac{1}{\mu\tau^{\mu-1}}\,\frac{d}{d\tau}F\left(\overset{m}{\alpha+\tau^{\mu}}, \overset{n}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}}\right); \tag{7}$$

mais on a

$$\frac{d}{d\tau}F\left(\overset{m}{\alpha+\tau^{\mu}}, \overset{n}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}}\right)=\frac{1}{b}\left[bF_x'\left(\alpha+\tau^{\mu}, \bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}\right)-aF_y'\left(\alpha+\tau^{\mu}, \bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}\right)\right]\mu\tau^{\mu-1};$$

donc, et en posant en vertu de la convention exprimée par (23) § 57:

$$C=b\,(\alpha-\eta+\tau^{\mu}), \tag{8}$$

on aura définitivement la valeur cherchée:

$$\psi\,(\overset{m-1}{\alpha+\tau^{\mu}}, \overset{n-1}{\bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}})=bF_x'(\alpha+\tau^{\mu}, \bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu})-aF_y'(\alpha+\tau^{\mu}, \bar{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}). \tag{9}$$

La fonction

$$ax+by+c=a(\alpha+t^{\mu})+by+c=at^{\mu}+b\,(y-\bar{\beta}) \tag{10}$$

[en vertu de la première des équations (5) et de (3)], le point analytique $(\alpha+t^{\mu}, y)$ étant celui de l'image algébrique définie par l'équation $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0$, deviendra nul pour $t=\tau$, la droite $ax+by+c=0$ passant par le point-paramètre; donc son rapport à $t-\tau$ prendra pour $t=\tau$ la forme $\frac{0}{0}$; on trouvera sa vraie valeur d'après la règle connue:

$$\left.\frac{at^{\mu}+b(y-\bar{\beta})}{t-\tau}\right|_{t=\tau}=\left(a+b\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\tau}\right)\mu\tau^{\mu-1}, \tag{11}$$

car $\frac{dy}{d\tau}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\tau}=\frac{dy}{dx}\mu\tau^{\mu-1}$; quant à $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\tau}$, on aura sa valeur par l'équation

$$F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\frac{dy}{dx}=0, \tag{12}$$

après y avoir posé $x=\alpha+\tau^{\mu}$, $y=\overline{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu}$. En le portant en (11), on aura:

$$(13)\quad \left.\frac{at^{\mu}+by+c}{t-\tau}\right|_{t=\tau}=\frac{\left[aF_y'(\alpha+\tau^{\mu},\overline{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu})-bF_x'(\alpha+\tau^{\mu},\overline{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu})\right]\mu\tau^{\mu-1}}{F_y'(\alpha+\tau^{\mu},\overline{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu})}.$$

En divisant (9) par (13), on trouve:

$$(14)\quad \lim\left[(t-\tau)\frac{\psi(\overset{m-1}{\alpha+t^{\mu}},\overset{n-1}{\overline{\beta}-\frac{a}{b}t^{\mu}})}{at^{\mu}+b(y-\overline{\beta})}\right]_{t=\tau}=-\frac{F_y'(\alpha+\tau^{\mu},\overline{\beta}-\frac{a}{b}\tau^{\mu})}{\mu\tau^{\mu-1}};$$

donc on aura

$$(15)\quad \lim\left[(t-\tau)\frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})\frac{dx}{dt}}{(ax+by+c)\,F_y'(x,y)}\right]_{t=\tau}=-1,$$

x et y ayant ici les valeurs (5). Il suit de là, qu'aux environs du point-paramètre très rapproché du point de ramification d'ordre μ on aura

$$(16)\quad \frac{\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})\frac{dx}{dt}}{(ax+by+c)F_y'(x,y)}=-\frac{1}{t-\tau}+\mathfrak{P}(t-\tau),$$

ou, en vertu de (5) § 58:

$$(17)\quad P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}=-\frac{1}{t-\tau}+\mathfrak{P}(t-\tau),$$

ξ et y_{ξ} étant donnés ici par les formules (1) et (2) du § présent. Pour $\tau=0$ l'équation (16) devient l'équation (29) § 57; donc la fonction avec le paramètre au point de ramification même est la limite de celle qui figure en (16) [ou (17)], pour $\tau=0$. Les coéfficients de cette dernière dépendent de la variable τ; en différentiant l'équation (17) une fois, l fois par rapport à la variable τ, on aura les formules:

$$(18)\quad \frac{\partial}{\partial\tau}\left[P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right]=-\frac{1}{(t-\tau)^2}+\mathfrak{P}_1(t-\tau);$$

$$(19)\quad \frac{\partial^l}{\partial\tau^l}\left[P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right]=-\frac{l!}{(t-\tau)^{l+1}}+\mathfrak{P}_l(t-\tau).$$

(en posant $1.2.3\ldots l=l!$). Les limites des fonctions à gauche pour $\tau=0$ définiront les fonctions de deuxième espèce avec le paramètre au point (α,β) de ramification d'ordre μ. Pour ces dernières on aura donc:

$$(20)\quad \lim\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right]\right\}_{\tau=0}=-\frac{1}{t^2}+\mathfrak{P}_1(t);$$

$$\lim \left\{\frac{\partial^l}{\partial\tau^l}\left[P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F'_y(x,y)}\right]\right\}_{\tau=0} = -\frac{l!}{t^{l+1}} + \mathfrak{P}_l(t). \tag{21}$$

Aux points de ramification la dérivée $F'_y(\xi, y_\xi)$ étant égale à zéro, l'opération D_ξ, introduite d'après M. Noether au § 61, doit être remplacée par l'opération $\frac{d}{d\xi}$. *)

Dans le cas, où le point-paramètre coïncide avec un point de ramification d'ordre μ', situé à l'infini, il faut commencer par poser

$$\xi = \tau^{-\mu'}; \tag{22}$$

---

*) Dans la note marginale du § 56 nous avons trouvé pour la fonction $\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c}$ dans le cas hyperelliptique l'expression donnée par la formule (x); cherchons ce qu'elle devient lorsque le point (ξ, y_ξ) tombe en point $(a_i, 0)$, a_i étant une racine de $\overset{2p+1}{R(x)}$. En posant $\xi = a_i + \tau^2$, l'expression cité sera changé en celle-ci:

$$-\left(\frac{\sqrt{R(x)} + \tau\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1\cdot 2}R''(a_i)\tau^2 + \cdots}}{x - a_i - \tau^2} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x-\eta}\right); \tag{a}$$

en posant $x = a_i + t^2$, on donnera au premier terme en paranthèses la forme:

$$\frac{t\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1\cdot 2}R''(a_i)t^2 + \cdots} + \tau\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1\cdot 2}R''(a_i)\tau^2 + \cdots}}{(t-\tau)(t+\tau)}; \tag{b}$$

en multipliant (a) après cela par $(t-\tau)$, on trouvera que pour $t = \tau$ le produit deviendra égal à $\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2 + \ldots}$; donc on aura aux environs du point $\xi = a_i + \tau^2$, $y_\xi = \tau\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2 + \ldots}$ pour la fonction (a) un développement de la forme:

$$\frac{\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1\cdot 2}R''(a_i)\tau^2 + \cdots}}{t-\tau} + \mathfrak{P}(t-\tau). \tag{c}$$

Si l'on pose maintenant en (a) et (c) $\tau = 0$, on aura pour la fonction l'expression (b) de la note marginale du § 57, et aux environs du point $(a_i, 0)$ le développement:

$$-\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_i} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x-\eta}\right) = -\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{t} + \mathfrak{P}(t), \tag{d}$$

qu'il est aisé de vérifier directement.

En différentiant par rapport à τ l'expression (a) et puis posant $\tau = 0$, on trouvera:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\sqrt{R(x)} + \tau\sqrt{R'(a_i) + \frac{1}{1\cdot 2}R''(a_i)\tau^2 + \cdots}}{x - a_i - \tau^2} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x-\eta}\right\}_{\tau=0} &= \\ = -\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{x-a_i} = \frac{\sqrt{R'(a_i)}}{t^2}&, \end{aligned} \tag{e}$$

(car $x - a_i = t^2$,) conformément à la formule (20) de ce §.

alors, en vertu de l'équation de la droite $ax+by+c=0$, on aura

$$(23)\qquad y_\xi = -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b},$$

et par suite d'après la formule (5) du § 57:

$$(24)\qquad \psi\Big(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\Big) = C\,\frac{F\Big(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\Big) - F\Big(\overset{m}{\tau^{-\mu'}}, -\overset{n}{\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}}\Big)}{(x-\tau^{-\mu'})(x-\eta)};$$

en posant $x=t^{-\mu'}$, on lui donnera la forme:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \psi\Big(\overset{m-1}{t^{-\mu'}}, -\overset{n-1}{\frac{at^{-\mu'}+c}{b}}\Big) &= C\,\frac{F\Big(\overset{m}{t^{-\mu'}}, -\overset{n}{\frac{at^{-\mu'}+c}{b}}\Big) - F\Big(\overset{m}{\tau^{-\mu'}}, -\overset{n}{\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}}\Big)}{(t^{-\mu'}-\tau^{-\mu'})(t^{-\mu'}-\eta)} = \\ &= \frac{C.t.\tau}{(t^{-\mu'}-\eta)}\,\frac{F\Big(\overset{m}{t^{-\mu'}}, -\overset{n}{\frac{at^{-\mu'}+c}{b}}\Big) - F\Big(\overset{m}{\tau^{-\mu'}}, -\overset{n}{\frac{at^{-\mu'}+c}{b}}\Big)}{-(t-\tau)(t^{-\mu'+1}+t^{-\mu'+2}\tau^{-1}+\cdots+\tau^{-\mu'+1})}; \end{aligned}$$

d'où il suivra pour $t=\tau$:

$$(26)\qquad \psi\Big(\overset{m-1}{\tau^{-\mu'}}, -\overset{n-1}{\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}}\Big) = bF'_x\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big) - aF'_y\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big)\,*),$$

en posant $C=b(\tau^{-\mu}-\eta)$ conformément à (23) § 57. De la même manière comme plus haut on trouvera:

$$(27)\qquad \frac{ax+by+c}{t-\tau}\bigg|_{t=\tau} = -\mu'\tau^{-\mu'-1}\,\frac{aF'_y\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big) - bF'_x\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu}+c}{b}\Big)}{F'_y\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big)}.$$

En divisant (26) par (27), on aura:

$$(28)\qquad \lim\Big(\frac{\psi(x,y)}{ax+by+c}\Big)_{t=\tau} = -\frac{F'_y\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big)}{-\mu'\tau^{-\mu'-1}},$$

d'où il suivra pour la fonction à gauche le développement:

$$(29)\qquad \frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c} = -\frac{1}{t-\tau}\,\frac{F'_y\Big(\tau^{-\mu'}, -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}\Big)}{-\mu'\tau^{-\mu'-1}} + \mathfrak{P}(t-\tau),$$

aux environs du point $\xi=\tau^{-\mu'}$, $y_\xi = -\frac{a\tau^{-\mu'}+c}{b}$, et parsuite pour le produit de celle-ci par $\frac{dx}{dt} : F'_y(x,y)$ cette autre:

*) Le second facteur du dénominateur se réduisant à $-\mu'\tau^{-\mu'+1}$ comme celui du numérateur: $\tau^2\cdot -\mu'\tau^{-\mu'-1} = -\mu'\tau^{-\mu'+1}$.

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})}{ax+by+c}\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}=-\frac{1}{t-\tau}+\mathfrak{P}(t-\tau), \tag{30}$$

en entendant par x et y leurs expressions en t, ou en vertu de (5) § 58:

$$P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}=-\frac{1}{t-\tau}+\mathfrak{P}(t-\tau). \tag{31}$$

En différentiant cette égalité une fois, l fois par rapport à τ, on aura les deux suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right)=-\frac{1}{(t-\tau)^2}+\mathfrak{P}_1(t-\tau), \tag{32}$$

$$\frac{\partial^l}{\partial\tau^l}\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right)=-\frac{l!}{(t-\tau)^{l+1}}+\mathfrak{P}_l(t-\tau), \tag{33}$$

qui définissent les fonctions adjointes de deuxième espèce, ayant son point-paramètre aux environs du point O' de la sphère de Riemann. En posant $\tau=0$ dans les formules (31) — (33), on aura les équations:

$$\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right)_{\tau=0}=-\frac{1}{t}+\mathfrak{P}(t), \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right)_{\tau=0}=-\frac{1}{t^2}+\mathfrak{P}_1(t), \tag{35}$$

$$\frac{\partial^l}{\partial\tau^l}\left(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\frac{\frac{dx}{dt}}{F_y'(x,y)}\right)_{\tau=0}=-\frac{l!}{t^{l+1}}+\mathfrak{P}_l(t), \tag{36}$$

qui définissent les fonctions de troisième et deuxième espèces avec le point-paramètre au point O' de la sphère de Riemann. *)

---

*) Pour appliquer cette méthode au cas hyperelliptique posons dans la formule (w) de la note marginale du § 56, $\eta=\tau^{-2}$; ayant égard à la formule (x) de la même note, nous aurons:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})}{ax+by+c}=\theta(\overset{\rho-1}{x})-\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(\xi)}}{x-\xi}+\frac{1}{\tau^{2\rho-1}}\,\frac{\sqrt{R_1(\tau^2)}+\tau^{2\rho+1}\sqrt{R(x)}}{1-x\tau^2}\right), \tag{a}$$

où $R_1(\tau^2)=\tau^{2(2\rho+1)}(R\tau^{-2})$; mais on a:

$$\frac{1}{1-x\tau^2}=1+x\tau^2+x^2\tau^4+\ldots+x^{\rho-1}\tau^{2\rho-2}+\frac{x^\rho\tau^{2\rho}}{1-x\tau^2}; \tag{b}$$

en portant cela en (a) et en posant

$$\theta(\overset{\rho-1}{x})-\frac{\sqrt{R_1(\tau^2)}}{\tau^{2\rho-1}}(1+x\tau^2+x^2\tau^4+\cdots+x^{\rho-1}\tau^{2\rho-2})=\theta_1(\overset{\rho-1}{x}), \tag{c}$$

64. Si l'on a une fonction

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}, \tag{1}$$

$[f(x,y)$ étant une fonction adjointe à l'équation fondamentale], qui devient $=\infty^\nu$ au point (ξ, y_ξ)*), alors on peut toujours déterminer les constantes $A_1, A_2, \ldots A_{\nu-1}$ et B de la sorte, que la fonction

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)} - \sum_{k=1}^{\nu-1} A_{\nu-k} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - BP_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \frac{f_1(x,y)}{\varphi_1(x)} \tag{2}$$

où l'on a $\varphi_1(x) = \varphi(x):(x-\xi)^\nu$, ne deviendra plus infinie en ce point, et alors on aura:

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)} = \sum_{k=1}^{\nu-1} A_{\nu-k} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + BP_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \frac{f_1(x,y)}{\varphi_1(x)}. \tag{3}$$

Pour le démontrer, prenons la somme des résultats reçus, après avoir divisé cette égalité par $F'_y(x,y)$, en y remplaçant y par toutes ses valeurs $y_1, y_2, \ldots y_n$, répondants à la même valeur de x: nous aurons une fonction symmétrique de ces valeurs:

---

nous aurons:

$$\frac{\overset{2\rho\ 1}{\psi}(x,y)}{ax+by+c} = \theta_1(\overset{\rho-1}{x}) - \frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(\xi)}}{x-\xi} - \frac{x^\rho\tau\sqrt{R_1(\tau^2)}+\tau^2\sqrt{R(x)}}{1-x\tau^2}; \tag{d}$$

en posant ici $\tau=0$, on aura la formule (g) de la note marginale du § 57. En différentiant cette formule (d) par rapport à τ et puis posant $\tau=0$, on trouvera pour la fonction adjointe de deuxième espèce l'expression:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\overset{2\rho\ 1}{\psi}(x,y)}{ax+by+c}\right)\right)_{\tau=0} = -x^\rho\sqrt{A}, \tag{e}$$

en désignant par A le coéfficient de la plus haute puissance de x dans le polynome $R(\overset{2\rho+1}{x})$. On vérifie aisement que cette fonction après être multipliée par $\frac{\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{R(x)}}$, où l'on a $x=t^{-2}$, sera développable en série de la forme:

$$\frac{1}{t^2} + \mathfrak{P}(t^2), \tag{f}$$

le signe du premier terme étant contraire à celui de la formule (20) du texte, car ici c'est le second point-paramètre qui s'est éloigné à l'infini, et non le premier. C'est ce, qu'on trouverait aussi par la méthode de la note marginale du § 57, car $\lim\left(\frac{c}{x-\xi}\right) = b\,\frac{\xi-\eta}{x-\xi}\Big|_{\xi=\infty} = -b$, et la seconde partie de l'équation (d) de la note citée deviendra $-b\dfrac{y^2-R(\overset{2\rho+1}{x})}{x-\eta}$.

*) Que nous supposons d'abord ordinaire.

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\,\frac{1}{F'_y(x,y_j)}=\sum_{k=1}^{\nu-1}A_{\nu-k}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_\xi^{(k-1)}(x,y_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}{F'_y(x,y_j)}+ \tag{4}$$
$$+B\sum_{j=1}^{n}\frac{P_{\xi\eta}(x,y_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}{F'_y(x,y_j)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{f_1(x,y_j)}{\varphi_1(x)}\,\frac{1}{F'_y(x,y_j)},$$

qui s'exprimera rationnellement par x. Multiplions cette égalité, dont les deux membres seront après cela des fonctions rationnelles de x seul, par $(x-\xi)^\nu$ et différentions le résultat obtenu par rapport à x $\nu-k-1$ fois de suite, après quoi y faisons $x=\xi$. Comme d'après (9) § 61 on a au voisinage de $x=\xi$, $y=y_\xi$:

$$(x-\xi)^\nu E_\xi^{(l-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=-l!\,F'_y(\xi,y_\xi)\,.\,F'_y(x,y)\,(x-\xi)^{\nu-l-1}+ \tag{5}$$
$$+\mathfrak{P}_l(x-\xi)\,(x-\xi)^\nu,$$

on voit aussitôt, qu'après avoir différentié $\nu-k-1$ fois l'équation (4) et y posé ensuite $x=\xi$, on n'obtiendra un résultat différent de zéro que de celui des termes de la somme, pour lequel on a $l=k$, notamment celui-ci:

$$\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}}\left((x-\xi)^\nu\frac{E_\xi^{(k-1)}(x,y_g;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}{F'_y(x,y)}\right)_{x=\xi,\,y_g=y_\xi}=-k!\,(\nu-k-1)!\,F'_y(\xi,y_\xi)\,\text{*)}; \tag{6}$$

il est aisé de voir, que les deux derniers termes en (4) disparaissent aussi après les opérations mentionnées, de sorte que nous aurons l'égalité:

$$\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}}\left((x-\xi)^\nu\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{F'_y(x,y_j)}\right)_{x=\xi}=-k!\,(\nu-k-1)!\,F'_y(\xi,y_\xi)\,A_{\nu-k}, \tag{7}$$

d'où l'on aura:

$$A_{\nu-k}=-\frac{1}{k!\,(\nu-k-1)!}\cdot\frac{1}{F'_y(\xi,y_\xi)}\cdot\frac{d^{\nu-k-1}}{dx^{\nu-k-1}}\left((x-\xi)^\nu\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{F'_y(x,y_j)}\right)_{x=\xi}. \tag{8}$$

Le coéfficient B, d'après la formule (27) § 57, sera trouvé après $\nu-1$ différentiations, et l'on aura:

$$B=-\frac{1}{(\nu-1)!}\cdot\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}\left((x-\xi)^\nu\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x,y_j)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{F'_y(x,y_j)}\right)_{x=\xi}. \tag{9}$$

---

*) En supposont que c'est y_g, qui devient $=y_\xi$; les autres valeurs de y en seront différentes, (ξ, y_ξ) étant un point ordinaire.

Dans le cas, où (ξ, y_ξ) coïncide avec l'un des points de ramification, on doit poser $x-\xi=t^p$, p étant le nombre des valeurs de y qui se permutent circulairement autour du point (ξ, y_ξ), et porter la valeur de x, tirée de cette équation, dans l'égalité (4), multipliée par $\frac{dx}{dt}=pt^{p-1}$; puis la multiplier par t^ν et ensuite continuer de la même manière, comme précédement. Si l'on a $\xi=\infty$ et ce point est de ramification d'ordre p', il faut poser $x=t^{-p'}$, multiplier l'égalité (4) par $\frac{dx}{dt}=-p't^{-p'-1}$ et puis encore par $t^{\nu'}$, et ensuite continuer de la manière précédente. On aura ainsi dans ce dernier cas, en accentuant tous ce qui se rapporte à lui, la formule suivante pour le coéfficient $A'_{\nu'-k'}$:

$$(10) \qquad A'_{\nu'-k'}=+\frac{p'}{k'!(\nu'-k'-1)!}\frac{d^{\nu'-k'-1}}{dt^{\nu'-k'-1}}\left(t^{\nu'}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(t^{-p'},y^{(j)}_{t^{-p'}})}{\varphi(t^{-p'})}\cdot\frac{t^{-p'-1}}{F'_y(t^{-p'},y^{(j)}_{t^{-p'}})}\right)_{t=0},$$

les fonctions de la deuxième espèce étant définies dans ce cas par les formules (35) et (36) du § 63. On trouvera de la même manière, que

$$(11) \qquad B'=\frac{p'}{(\nu'-1)!}\frac{d^{\nu'-1}}{dt^{\nu'-1}}\left(t^{\nu'}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(t^{-p'},y^{(j)}_{t^{-p'}})}{\varphi(t^{-p'})}\cdot\frac{t^{-p'-1}}{F'_y(t^{-p'},y^{(j)}_{t^{-p'}})}\right)_{t=0}.$$

Cette règle suit immédiatement des conditions d'adjonction. (Voir les §§ 44 et 46.)

65. On peut réunir en un seul, suivant Abel, tous les termes du développement (3) du § précédent, se rapportant à un même infini de la fonction donnée, que nous avons trouvé là. Il suffit de montrer, comment peut on le faire pour le premier des cas, que nous y avons considéré, celui, où (ξ, y_ξ) est un point ordinaire à distance finie de l'origine. Après avoir changé dans les formules (8) et (9) du § précédent x en z, portons les expressions que nous avons trouvé là pour les coéfficients, et aussi aulieu des fonctions $E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ leurs expressions tirées de (3) et (6) § 61, dans les termes mentionnées de l'égalité (3) du § précédent; nous aurons pour ces termes:

$$\sum_{k-1}^{\nu-1}A_{\nu-1}E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})+BP_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})=*)$$

$$=-\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{1}{k!(\nu-k-1)!}\frac{d^{\nu-k-1}}{dz^{\nu-k-1}}\left((z-\xi)^\nu\sum_{j=1}^{n}\frac{f(z,y_z^{(j)})}{\varphi(z)}\frac{1}{F'_y(z,y_z^{(j)})}\right)_{z=\xi}\frac{d^kP_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{d\xi^k}=$$

---

*) Le dernier terme pouvant être réuni à la somme en posant $k=0$, la dérivée d'ordre 0 étant la fonction elle même.

$$= -\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}\left((z-\xi)^{\nu}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(z,y_z^{(j)})}{\varphi(z)}\,\frac{P_{z\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}{F'_y(z,y_z^{(j)})}\right)_{z=\xi} \qquad (1)$$

— d'après la formule de Leibnitz. [On comprend sans doute, qu'on a ici: $\overset{m}{F}(z,\overset{n}{y}{}_z^{(j)})=0$]. De la même manière, dans le cas, où (ξ, y_ξ) tombe dans un des points hélicoïdaux à l'infini, les termes correspondants du développement (3) se réunissent en un seul suivant:

$$\frac{p'}{(\nu'-1)!}\frac{d^{\nu'-1}}{d\tau^{\nu'-1}}\left(\tau^{\nu'}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\tau^{-p'},y_{\tau^{-p'}}^{(j)})}{\varphi(\tau^{-p'})}\cdot\frac{P_{\tau^{-p'},\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\tau^{-p'-1}}{F'_y(\tau^{-p'},y_{\tau^{-p'}}^{(j)})}\right)_{\tau=0}, \qquad (2)$$

en indiquant par la notation $y_{\tau^{-p'}}^{(j)}$, qu'on doit remplacer x par $\tau^{-p'}$, après avoir calculé la fonction symmétrique des valeurs de y, que présente cette somme.

66. Soient maintenant

$$\xi_1, y_{\xi_1}, \quad \xi_2, y_{\xi_2}, \quad \ldots \quad \xi_r, y_{\xi_r}, \qquad (1)$$

les infinis de la fonction adjointe $\frac{f(\overset{\mu}{x},\overset{n-1}{y})}{\varphi(x)}$, situés dans le fini, c'est-à-dire pour lesquels ξ a une valeur finie, d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ respectivement, et

$$\xi'_1, y_{\xi'_1}, \quad \xi'_2, y_{\xi'_2}, \quad \ldots \quad \xi'_{r'}, y_{\xi'_{r'}}, \qquad (2)$$

ceux, qui sont à l'infini, c'est-à-dire pour lesquels ξ a une valeur infinie, d'ordres $\nu'_1, \nu'_2, \ldots \nu'_{r'}$ respectivement, quelquesuns des points (1) et (2) pouvant tomber dans les points de ramification. Après avoir formée la fonction $P_{\xi_1,\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ on peut, d'après § 64, séparer de la fonction donnée une partie telle, que la fonction restante $\frac{f_1(x,y)}{\varphi_1(x)}$ ne deviendra plus infinie au point (ξ_1, y_{ξ_1}); après avoir ensuite formée la fonction $P_{\xi_2\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$ on peut séparer de la fonction $\frac{f_1(x,y)}{\varphi_1(x)}$ une partie telle, que le reste $\frac{f_2(x,y)}{\varphi_2(x)}$ ne deviendra plus infini au point (ξ_2, y_{ξ_2}); et ainsi de suite; enfin on arrivera à la fonction $\frac{f_{r-1}(x,y)}{\varphi_{r-1}(x)}$, qui ne deviendra plus infinie en aucun des points (1). En traitant de la même manière cette dernière, on construira la fonction $P_{\xi'_1\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$, à l'aide de laquelle, d'après le § 64, on pourra séparer d'elle une telle partie, que la fonction restante $\frac{f_r(x,y)}{\varphi_r(x)}$

ne deviendra plus infinie au point $(\xi'_1, y_{\xi'_1})$; en continuant, on arrivera enfin à la fonction $\frac{f_{r+r'-1}(x,y)}{\varphi_{r+r'-1}(x)}$, qui ne deviendra plus infinie en aucun des points (1) et (2), mais qui peut être en un seul point (η, y_η) pourrait devenir $=\infty^1$. Cette fonction devant rester finie pour les points à l'infini, son degré par rapport à y doit être égal à $n-2$, d'après § 44, et le degré de la fonction $f_{r+r'-1}(x,y)$ par rapport à x doit surpasser de $m-2$ le degré de $\varphi_{r+r'-1}(x)$. Le degré de $f_{r+r'-1}(x,y)$ par rapport à y étant égal à $n-2$, et cette fonction devant s'annuler pour n valeurs de y, qui correspondent en vertu de l'équation $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$ à chaque racine de l'équation $\frac{\varphi_{r+r'-1}(x)}{x-\eta}=0$, et à $n-1$ des valeurs de y correspondants à la racine η de l'équation $\varphi_{r+r'-1}(x)=0$, tous les coéfficients de chaque puissance de y dans le polynome $f_{r+r'-1}(x,\overset{n-2}{y})$ doivent être divisibles par le polynome $\varphi_{r+r'-1}(x)$ de sorte, que la fonction $\frac{f_{r+r'-1}(x,y)}{\varphi_{r+r'-1}(x)}$ se reduira à une fonction entière de x et y des degrés $m-2$ et $n-2$ respectivement, qui ne deviendra pas parconséquent infinie au point (η, y_η). Etant d'ailleurs adjointe, elle ne sera pas autre chose qu'une fonction adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$. Les constantes C_j, qui entrent dans son expression [(13) § 58], se déterminent à l'instant: on n'a que de poser $x=a_k$, $y=b_k$ après avoir écrit toute la décomposition en éléments simples avec des coéfficients indéterminés; alors à droite il ne restera que C_k, et l'on aura:

$$C_k=\frac{f(a_k,b_k)}{\varphi(a_k)}. \tag{3}$$

Ainsi on aura définitivement pour notre fonction la décomposition suivante en éléments simples:

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}=\sum_{h'=1}^{r'}\left\{\sum_{k'=1}^{\nu'_{h'}-1}A'_{\nu'_{h'}-k'}E^{(k'-1)}_{\xi'_{h'}}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)+B'_{h'}P_{\xi'_{h'}\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\right\}+\\ +\sum_{h=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{\nu_h-1}A_{\nu_h-k}E^{(k-1)}_{\xi_h}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)+B_hP_{\xi_h\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\right\}+\\ +\sum_{j=1}^{p}\frac{f(a_j,b_j)}{\varphi(a_j)}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y}).\end{aligned} \tag{4}$$

Aux environs du point (η, y_η) toutes les fonctions $P_{\xi\eta}$ deviènnent $=\infty^1$ comme $\frac{F'_y(\eta,y_\eta)}{x-\eta}$ pour $x=\eta$ [car (η,y_η) est un point ordinaire];

mais notre fonction restant finie en ce point, comme il est démontré tout à l'heure, on doit avoir:

$$\sum_{h'=1}^{r'} B'_{h'} + \sum_{h=1}^{r} B_h = 0, \tag{5}$$

ou, en portant aulieu de $B'_{h'}$ et B_h leurs valeurs, tirées de (11) et (9) § 64:

$$\begin{aligned}\sum_{h'=1}^{r'} \frac{p'_{h'}}{(\nu'_{h'}-1)!} \frac{d^{\nu'_{h'}-1}}{d\tau_{h'}^{\nu'_{h'}-1}} \left(\tau_{h'}^{\nu'_{h'}} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\tau_{h'}^{-p'_{h'}}, y^{(j)}_{\tau_{h'}^{-p'_{h'}}})}{\varphi(\tau_{h'}^{-p'_{h'}})} \cdot \frac{1 \cdot \tau_{h'}^{-p'_{h'}-1}}{F'_y(\tau_{h'}^{-p'_{h'}}, y^{(j)}_{\tau_{h'}^{-p'_{h'}}})} \right)_{\tau_{h'}=0} + \\ + \sum_{h=1}^{r} \frac{-1}{(\nu_h-1)!} \frac{d^{\nu_h-1}}{d\xi_h^{\nu_h-1}} \left((z_h-\xi_h)^{\nu_h} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(z_h, y^{(j)}_{z_h})}{\varphi(z_h)} \cdot \frac{1}{F'_y(z_h, y^{(j)}_{z_h})} \right)_{z_h=\xi_h} = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

En portant aulieu des A et B leurs valeurs tirées des formules (8) — (11) § 64, on donnera, d'après les formules (1) et (2) § 65, à la décomposition en éléments simples de la fonction considérée la forme suivante:

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)}{\varphi(x)} = \sum_{h'=1}^{r'} \frac{p'_{h'}}{(\nu'_{h'}-1)!} \cdot \frac{d^{\nu'_{h'}-1}}{d\tau_{h'}^{\nu'_{h'}-1}} \left(\tau_{h'}^{\nu'_{h'}} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\tau_{h'}^{-p'_{h'}}, y^{(j)}_{\tau_{h'}^{-p'_{h'}}}) \tau_{h'}^{-p'_{h'}-1}}{\varphi(\tau_{h'}^{-p'_{h'}})} \cdot \frac{P_{\tau_{h'}^{-p'_{h'}}, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a, b}})}{F'_y(\tau_{h'}^{-p'_{h'}}, y^{(j)}_{\tau_{h'}^{-p'_{h'}}})} \right)_{\tau'_{h'}=0} - \\ - \sum_{h=1}^{r} \frac{1}{(\nu_h-1)!} \cdot \frac{d^{\nu_h-1}}{dz_h^{\nu_h-1}} \left((z_h-\xi_h)^{\nu_h} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(z_h, y^{(j)}_{z_h})}{\varphi(z_h)} \cdot \frac{P_{z_h, \eta}(x,y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{F'_y(z_h, y^{(j)}_{z_h})} \right)_{z_h=\xi_h} + \\ + \sum_{j=1}^{p} \frac{f(a_j, b_j)}{\varphi(a_j)} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).\end{aligned} \tag{7}$$

La première somme a droite représente le résidu intégrale de la fonction de (z, y_z):

$$\frac{f(z, y_z)}{\varphi(z)} \frac{P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})}{F'_y(z, y_z)} \tag{8}$$

par rapport à ses infinis, se trouvant aux points O' de la surface de Riemann, tandis que chaque terme de la seconde somme est le résidu par rapport à l'infini, situé au point (ξ_h, y_{ξ_h}) de la même surface, respectivement. *Abel* désignait la première somme par la lettre Π, placée devant l'expression (8), (car d'après l'autre définition de résidu c'est le coéfficient de t^{-1} dans le développement de la fonction considérée suivant les puissances de la variable t).

67. On a vu au § 51, qu'il est toujours possible de former une fonction adjointe, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, qui devient $=\infty^1$ en m' points, si l'on a $m' > p$. Supposons qu'on a $m' = \nu - 1 + p$, ν étant > 1; alors la condition $m' > p$ est remplie. Supposons que les $\nu - 1$ points, où la fonction cherchée devient $=\infty^1$, se confondent avec le point (ξ, y_ξ), et les autres avec les points $(a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$ de la sorte, que la fonction aura un infini d'ordre $\nu - 1$ au point (ξ, y_ξ), et un infini simple à chacun des points $(a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$. Soit $f(x, y)$ cette fonction; en la différentiant et multipliant après par $F'_y(x, y)$, on aura la fonction $D_x f(x, y)$ qui aux mêmes points deviendra respectivement égale à ∞^ν et à ∞^2; parconséquent, en lui appliquant ce qu'on a démontré au § précédent, on aura (suivant M. Noether, l. c.):

$$D_x f(x,y) = \sum_{h=1}^{\nu-1} A_{\nu-h} E_\xi^{(h-1)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i) +$$

$$(1) \qquad + \sum_{k=1}^{p} B_k E_k(x, y; a_1, b_1, \dots a_{k-1}, b_{k-1}; a'_k, b'_k; a_{k+1}, b_{k+1}, \dots a_p, b_p) +$$

$$+ \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),$$

les fonctions $P_{\xi\eta}$, $P_{\alpha_k\eta}$ ne pouvant pas entrer dans ce décomposition en éléments simples, car alors les développements en series suivant les puissances de $(x - \xi)$ ou $(x - a_k)$ contiendraient les termes en $(x - \xi)^{-1}$, ou $(x - a_k)^{-1}$, que ne peut pas contenir le développement de la derivée d'une fonction algébrique, uniforme sur la surface de Riemann, la différentiation abaissant les degrés d'une unité. À l'aide de cette formule on peut exprimer la fonction $E_\xi^{(\nu-2)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$ par celles des $E_\xi^{(k)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$, où $k < \nu - 2$ et par les $E_k(x, y; \dots a'_k, b'_k, \dots)$, où $k = 1, 2, 3 \dots p$. De la même manière on peut exprimer $E_\xi^{\nu-3}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$ par des pareilles fonctions d'ordre moindre au point (ξ, y_ξ) et ainsi de suite. De cette manière, en portant chaque pareille expression dans les précédentes, on arrive au résultat suivant:

$$(2) \quad E_\xi^{(\nu-2)}(x, y; a_i \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i) = D_x \Phi(x, y) + \sum_{k=1}^{p} B_k \bar{E}_k(x, y; \dots a'_k, b'_k, \dots) + \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}).$$

En portant ces expressions dans l'égalité (4) du § précédent, nous aurons une formule de réduction de la fonction donnée $\frac{f(x, y)}{\varphi(x)}$ à la somme des termes, dont le premier sera la dérivée D_x d'une fonction algébrique rationnelle de x et de y, les autres—les fonctions E_k et $P_{\xi_k, y}$, multipliées par des constantes, enfin le dernier la fonction de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. — On peut faire cette réduction aussi d'un coup. En effet, d'après le § 51 on peut toujours former une fonction $\Phi(x, y)$, qui deviendra aux points:

$$(\xi_1, y_{\xi_1}),\ (\xi_2, y_{\xi_2}), \ldots (\xi_r, y_{\xi_r}) \tag{3}$$

infinie d'ordres respectivement égaux à

$$\nu_1 - 1,\ \nu_2 - 1, \ldots \nu_r - 1, \tag{4}$$

et aux points $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ égale à ∞^1, le nombre des points étant plus grand que p; la dérivée D_x de cette fonction deviendra aux mêmes points infinie d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r$ et 2 respectivement. Cette fonction, (et parconséquent aussi sa dérivée), contiendra d'après (9) § 51 linéairement un nombre égal à

$$\sum_{j=1}^{r}(\nu_j - 1) + p - p + 1 = \sum_{j=1}^{r}(\nu_j - 1) + 1 \tag{5}$$

des coéfficients indéterminés, qui pourront être déterminés de manière que la fonction

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} - D_x \Phi(x, y) \tag{6}$$

ne devienne infinie aux points (3) que du premier ordre; alors elle pourra être décomposée seulement suivant les fonctions $E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k, \ldots)$, $P_{\xi_k, \eta}(x y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ et $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$. Après avoir déterminé les coéfficients de ces fonctions comme celà était montré au § 64, et la constante restante par la condition, que la fonction ne devienne pas infinie au point (η, y_η), on aura:

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} = D_x \Phi(x, y) &+ \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{A}_k E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k, \ldots) + \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{B}_k P_{\xi_k, \eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{C}_k \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \end{aligned} \tag{7}$$

Après avoir formé la fonction $\Phi(x, y)$, on tirera d'ici aisement — pour $\mathfrak{A}_l$ en vertu de (5) § 61, et pour $\mathfrak{B}_l$ en vertu de (27) § 57 — les formules suivantes pour les coéfficients $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{B}_l$ et $\mathfrak{C}_l$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_l &= -\left\{\frac{(x-a_l)^2}{F'_y(x, y)}\left[\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} - D_x \Phi(x, y)\right]\right\}_{\substack{x=a_l \\ y=b_l}} : F'_y(a_l, b_l)\ ; \quad (l = 1, 2, \ldots p) \\ \mathfrak{B}_l &= -\left\{\frac{x-\xi_l}{F'_y(x, y)}\left[\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} - D_x \Phi(x, y)\right]\right\}_{\substack{x=\xi_l \\ y=y_{\xi_l}}}; \qquad (l = 1, 2, \ldots r) \\ \mathfrak{C}_l &= \left\{\frac{f(x, y)}{\varphi(x)} - D_x \Phi(x, y) - \mathfrak{A}_l E_l(x, y; \ldots a'_l, b'_l, \ldots)\right\}_{\substack{x=a^l_l \\ y=b^l_l}} . \ (l = 1, 2, \ldots p) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

De ces coéfficients les $\mathfrak{B}_l$ sont liés entre eux par la relation (5) du § précédent, la fonction $\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}$ étant finie au point (η, y_η).

68. Revenons de nouveau à la fonction

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \tag{1}$$

pour y considérer cette fois (ξ, y_ξ) comme des variables, liées entre elles par l'équation fondamentale, et (η, y_η) et (x, y) comme des constantes. Ce sera une fonction algébrique de ξ, [car $P_{\xi\eta}(x,y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ a été reçue à l'aide des opérations rationnelles sur les quantités qui y entrent,] uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\ n}{F}(\xi, y_\xi) = 0$. Elle devient $= \infty^1$ aux points (x, y) et $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ de cette surface: par rapport au premier celà suit de ce, que pour $\xi = x$, $y_\xi = y$, le paramètre et l'argument étant égaux entre eux, elle devient égale à ∞^1 par sa définition même, donnée au § 57; quant aux derniers celà suit de l'égalité (7) § 60, où le premier facteur du second membre devient égal à ∞^1 pour $\xi = a_k$, $y_\xi = b_k$, tandis que le second reste fini et différent de zéro, car il ne dépend pas de ξ. — La fonction

$$CP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + C' \tag{2}$$

représentera une fonction la plus générale, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\xi, y_\xi) = 0$, qui devient égal à ∞^1 aux $p+1$ points de cette surface, savoir:

$$(x, y), \qquad (\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}). \tag{3}$$

Si nous posons maintenant:

$$\Phi(\xi, y_\xi) = C_0 + \sum_{h=1}^{m'} C_h P_{\xi\eta}(\xi_h, y_{\xi_h}; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}), ^{*)} \tag{4}$$

nous aurons une fonction de (ξ, y_ξ), uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\ n}{F}(\xi, y_\xi) = 0$, laquelle d'après ce que nous avons dit tout à l'heure deviendra égale à ∞^1 aux points:

---

*) *M. Noether*. 2. Note (Erlangen), § 8, la première formule. Une formule plus générale (pour les cas des infinis ∞^ν) on trouve à la page 3-me de sa 4-me note. 1886. Nous nous contentrons à considérer ici le cas de $\nu = 1$.

$$\underset{1}{\overset{m'}{(\xi_h, y_{\xi_h})}}. \tag{5}$$

— notamment, d'après (4) § 61, au point (ξ_k, y_{ξ_k}) comme

$$- C_k \frac{F'_y(\xi_k, y_{\xi_k})}{\xi_k - \xi} \tag{6}$$

pour $\xi = \xi_k$, — et, en général, encore aux points fondamentaux, car d'après (7) § 60 on a:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \underset{1}{\overset{p}{a_i, b_i}}) = - P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \underset{1}{\overset{k-1}{a_i, b_i}}; x, y, \underset{k+1}{\overset{p}{a_i, b_i}}) \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{7}$$

par suite au point (a_k, b_k) comme

$$\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - \xi} \sum_{h=1}^{m'} C_h \varphi_k(\overset{m-2}{\xi_h}, \overset{n-2}{y_{\xi_h}}) \tag{8}$$

pour $\xi = a_k$. Mais si l'on détermine les constantes $\underset{1}{\overset{m'}{C_h}}$ de manière qu'on ait:

$$\sum_{h=1}^{m'} C_h \varphi_k(\overset{m-2}{\xi_h}, \overset{n-2}{y_{\xi_h}}) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots p) \tag{9}$$

alors la fonction $\Phi(\xi, y_\xi)$, définie par l'équation (4) restera finie aux points fondamentaux, et ne deviendra infinie ∞^1 qu'aux m' points (5), comme la fonction (5) § 51.

Si tous les p équations (9) seront indépendantes l'une de l'autre, alors le nombre des constantes arbitraires dans la fonction (4) sera égale à

$$m' + 1 - p; \tag{10}$$

mais si q équations entre les équations (9), pas plus, sont les conséquences des autres, alors le nombre des constantes arbitraires en (4) s'élevera jusqu'à

$$m' + 1 - p + q. \tag{11}$$

En effet, supposons pour fixer les idées, que ce soient les $p - q$ premières des équations (9), qui sont indépendantes; alors les déterminants d'ordre $p - q$, formés des eleménts de la matrice:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ j \\ p-q \end{array} \left\| \begin{array}{c} \scriptstyle 1 \qquad h \qquad m' \\ \\ \varphi_j(\overset{m-2}{\xi_h}, \overset{n-2}{y_{\xi_h}}) \\ \\ \end{array} \right\| \tag{12}$$

ne seront pas tous nuls, tandis que ceux d'ordre $p - q + 1$, formées des éléments de la matrice, qu'on reçoit de celle-ci, en lui ajoutant une $p - q + 1$-ième ligne des éléments:

$$\varphi_{p-q+1}(\overset{m-2}{\xi_h}, \overset{n-2}{y_{\xi_h}}), \qquad (h = 1, \ldots m') \tag{13}$$

tous seront nuls; parconséquent on pourra toujours trouver telles $p-q$ constantes $\alpha_1^{(l)}$, $\alpha_2^{(l)}, \ldots a_{p-q}^{(l)}$, qu'on ait

$$(14) \qquad \sum_{j=1}^{p-q}\alpha_j^{(l)}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi_h},\overset{n-2}{y_{\xi_h}})-\varphi_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi_h},\overset{n-2}{y_{\xi_h}})=0$$

pour les valeurs de h, répondantes à l'un des déterminants d'ordre $p-q$ de la matrice (12), lequel est différent de zéro. Mais alors la même équation (14) aura lieu aussi pour toutes les autres valeurs de h; car en remplaçant les $\alpha_j^{(l)}$ par leurs valeurs tirées des équations (14) dans la fonction

$$(15) \qquad \varphi'_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y})=\sum_{j=1}^{p-q}\alpha_j^{(l)}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})-\varphi_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})$$

on aura pour le résultat le quotient des deux déterminants: au numérateur celui de l'ordre $p-q+1$, qui sera $=0$ pour $\xi=\xi_h$, $y=y_{\xi_h}$, et au dénominateur celui du système des équations (14), qui est différent de zéro. On l'aura pour toutes les valeurs de l de 1 à q. Toutes ces fonctions:

$$(16) \qquad \varphi_j(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})\ (j=1,2\ldots p-q) \quad \text{et} \quad \varphi'_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})\ (l=1,2,\ldots q)$$

seront d'ailleurs linéairement indépendantes entres elles: en effet si l'on avait

$$(17) \qquad \sum_{j=1}^{p-q}\beta_j\varphi_j(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})+\sum_{l=1}^{q}\beta'_l\varphi'_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})=0,$$

en posant ici $\xi=\xi_h$, $y=y_{\xi_h}$, on aurait pour toutes les m' valeurs de h, en vertu de ce qui vient d'être démontré, les relations:

$$(18) \qquad \sum_{j=1}^{p-q}\beta_j\varphi_j(\overset{m-2}{\xi_h},\overset{n-2}{y_{\xi_h}})=0;$$

donc les $p-q$ premières équations ne sauraient être indépendantes entre elles, comme on l'a supposé. Ainsi $\beta_j \overset{p-q}{\underset{1}{=}} 0$. Alors l'équation (17) se réduirait en vertu de (15) à celle-ci:

$$(19) \qquad \sum_{j=1}^{p-q}\left(\sum_{l=1}^{q}\alpha_j^{(l)}\beta'_l\right)\varphi_j(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})-\sum_{l=1}^{q}\beta'_l\varphi_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi},\overset{n-2}{y_\xi})=0;$$

mais une telle relation n'existe pas entre les fonctions adjointes de première espèce fondamentales. Donc aussi $\beta'_l \overset{q}{\underset{1}{=}} 0$. Les fonctions (15) étant ainsi indépendantes de même entres elles, on pourra remplacera les q dernières des équations (9) par celles-ci:

$$(20) \qquad \sum_{h=1}^{m'}C_h\varphi'_{p-q+l}(\overset{m-2}{\xi_h},\overset{n-2}{y_{\xi_h}})=0,$$

lesquelles se réduisent en vertu de (14) à des identités. Donc après ce changement il ne restera des équations (9) que les $p-q$ premières. Par suite dans l'expressions (4) on aura $m'+1-p+q$ coéfficients indéterminés. C. q. f. d.

Donc, „*s'il existe q fonctions adjointes de première espèce, linéairement indépendantes, lesquelles s'annulent en tous les points* (5), *alors la fonction algébrique la plus générale, qui devient infinie* ∞^1 *en ces points, contiendra d'une façon linéaire et homogène en tout* $m'-p+q+1$ *constantes arbitraires*“.

C'est-là le célèbre théorème de *Riemann-Roch* (Riemann-Roch'sche Satz), dont nous avons fait mention au § 51*).

69. La dérivée de cette fonction par rapport à ξ, multipliée par $F'_y(\xi, y_\xi)$, deviendra en vertu de (3) et (5) § 61 au point (x, y) égale à ∞^2 comme

$$-\frac{F'_y(x,y)\cdot F'_y(\xi, y_\xi)}{(x-\xi)^2} \tag{1}$$

pour $\xi = x$, $y_\xi = y$; aux points $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$ par la même formule, en vertu de (7) § 60 elle deviendra égale à ∞^2 comme

$$\frac{F'_y(a_k, b_k)\cdot F'_y(\xi, y_\xi)}{(\xi-a_k)^2}\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \tag{2}$$

pour $\xi = a_k$, $y_\xi = b_k$.

De la symmétrie de la formule (1) par rapport à (x, y) et (ξ, y_ξ) on conclut, que la fonction de (x, y)

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \tag{3}$$

restera finie au point $x=\xi$, $y=y_\xi$, et seulement aux points $x=a_i$, $y=b_i$ deviendra égale à ∞^2 comme son premier terme, car le second s'annule en ces points. Quant au point (η, y_η), les deux termes n'en dépendent que formellement, comme on l'a vu au § 61 [(2)].

Par cette raison, en considérant dans la formule (3) x comme variable indépendante, on peut décomposer cette fonction suivant les $E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k, \ldots)$ $(k=1, 2, \ldots p)$ et $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$**), dont elle sera

*) V. *Klein-Friecke*. Elliptische Modulfunktionen. Bd. I. Leipzig, 1890. § 5, pp. 546—549. Aussi *Forsyth*. Theory of functions of a complexe variable. Cambridge, 1893. § 240. pp. 457—462. Des autres demonstrations on trouvera dans l'article des Mrs. *Brill* et *Noether*: „Über algebraische Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie“. Math. Annal. Bd. VII. S. 269—310, et dans le livre des Mrs. *Hensel* et *Landsberg*, cité au Préface.

**) En vertu de la formule (4) du § 64, où l'on doit poser $B_h = 0$, les fonctions de troisième espèce ne pouvant pas y entrer maintenant par la même raison qu'au § précédent, vu la formule (2).

une fonction linéaire avec les coéfficients, qui dépendront de (ξ, y_ξ). On aura ainsi

$$(4)\quad \begin{aligned} &D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p} \chi_k(\xi, y_\xi) E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k, \ldots) + \sum_{k=1}^{p} \psi_k(\xi, y_\xi) \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}). \end{aligned}$$

Comme la transposition de (x, y) avec (ξ, y_ξ) à gauche de cette égalité n'en fait que changer le signe, de la sorte qu'aussi par rapport à (ξ, y_ξ), si l'on regarde ξ comme la variable indépendante, la fonction à gauche possède les mêmes propriétés, on en conclut que les fonctions $\chi_k(\xi, y_\xi)$ et $\psi_k(\xi, y_\xi)$ deviènnent aussi $= \infty^2$ aux points (a_k, b_k) et parconséquent sont décomposable de la même manière, ainsi qu'on aura:

$$(5)\quad \chi_k(\xi, y_\xi) = \sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \lambda'_{kj} \varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \right);$$

$$(6)\quad \psi_k(\xi, y_\xi) = \sum_{j=1}^{p} \left(\mu_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \mu'_{kj} \varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \right).$$

En portant ces développements dans l'égalité (4), nous aurons:

$$(7)\quad \begin{aligned} &D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \Big\{ \left(\lambda_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \lambda'_{kj} \varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \right) E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k, \ldots) + \\ &\qquad + \left(\mu_{kj} E_j(\xi, y_\xi; \ldots a'_j, b'_j \ldots) + \mu'_{kj} \varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \right) \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \Big\}. \end{aligned}$$

Cette expression doit changer son signe par la transposition de (x, y) avec (ξ, y_ξ); on doit donc avoir:

$$(8)\quad \lambda_{kj} = -\lambda_{jk}; \quad \mu'_{kj} = -\mu'_{jk};$$

et

$$(9)\quad \lambda'_{kj} = -\mu_{jk}$$

pour toutes les valeurs de k et j de 1 à p. Si l'on multiplie maintenant l'égalité (4) par $(x - a_k)^2$ et si l'on y pose ensuite $x = a_k$, $y = b_k$, alors d'après (2) [après y avoir changé (ξ, y_ξ) en (x, y) et vice versa] on aura à gauche

$$(10)\quad F'_y(a_k, b_k) \cdot F'_y(x, y) \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}),\text{*)}$$

*) le second terme à gauche s'annulant pour $x = a_k$, $y = b_k$.

et à droite d'après (5) § 61 (pour $\xi = a_k$) appliquée à la fonction $E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots)$:

$$-F'_y(a_k, b_k) \,.\, F'_y(x, y)\, \chi_k(\xi, y_\xi); \tag{11}$$

donc il doit être:

$$\chi_k(\xi, y_\xi) = -\overset{m-2\;\, n-2}{\varphi_k(\;\xi\;,\; y_\xi\;)}; \tag{12}$$

parconséquent d'après (5) et (9) on aura:

$$\lambda_{kj} = 0; \quad \lambda'_{kj} = 0 \quad (k \neq j); \quad \lambda'_{kk} = -1, \tag{13}$$

et ensuite d'après (9):

$$\mu_{jk} = -\lambda'_{kj} = 0; \quad \mu_{kk} = -\lambda'_{kk} = +1. \tag{14}$$

En portant ces valeurs dans l'égalité (7) nous aurons:

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_j}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \Big\{ -\overset{m-2\;\, n-2}{\varphi_k(\;\xi\;,\; y_\xi\;)}\, E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \tag{15}$$

$$+ \Big(E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{p} \mu'_{kj}\, \overset{m-2\; n-2}{\varphi_j(\;\xi\;,\; y_\xi\;)} \Big) \overset{m-2\;\, n-2}{\varphi_k(\;x\;,\; y\;)} \Big\},$$

ou

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \Big\{ \overset{m-2\; n-2}{\varphi_k(\;x\;,\; y\;)} E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) - \overset{m-2\; n-2}{\varphi_k(\;\xi\;,\; y_\xi\;)} E_k(x, y; \ldots a'_k b'_k, \ldots) \Big\} + \tag{16}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \mu'_{kj}\, \overset{m-2\; n-2}{\varphi_k(\;x\;,\; y\;)}\, \overset{m-2\; n-2}{\varphi_j(\;\xi\;,\; y_\xi\;)}.$$

Mais comme on a $\mu'_{kj} = -\mu'_{jk}$, et parconséquent $\mu'_{kk} = -\mu'_{kk} = 0$, on peut présenter la double somme de cette manière:

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2} \mu'_{kj} \Big(\overset{m-2\; n-2}{\varphi_k(\;x\;,\; y\;)} \overset{m-2\; n-2}{\varphi_j(\;\xi\;,\; y_\xi\;)} - \overset{m-2\; n-2}{\varphi_k(\;\xi\;,\; y_\xi\;)} \overset{m-2\;\, n-2}{\varphi_j(\;x\;,\; y\;)} \Big); \tag{17}$$

en portant cette expression dans l'égalité (16) et en posant

$$\frac{1}{2} \mu'_{kj} = -\frac{1}{2} \mu'_{jk} = c_{kj}, \tag{18}$$

— ainsi qu'on aura

$$c_{kj} = c_{jk}, \tag{19}$$

où c_{kk} pourra être différent de zéro, (car pour $j = k$ les deux termes en accolades dans (17) se détruisent), nous aurons:

$$D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) =$$

$$(20) \quad = \sum_{k=1}^{p}\Big\{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big(E_k(\xi, y_\xi; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big) -$$
$$- \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\Big(E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\Big)\Big\}.$$

En posant pour abréger:

$$(21) \quad \bar{E}_k(x, y) = E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}\varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}),$$

on pourra écrire ainsi l'égalité précédente:

$$(22) \quad \begin{aligned} &D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = \\ &= \sum_{k=1}^{p}\Big\{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\bar{E}_k(\xi, y_\xi) - \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\bar{E}_k(x, y)\Big\}. \end{aligned}$$

C'est là cette identité remarquable, d'où se développe chez Weierstrass toute la théorie des intégrales abéliennes. Chez Abel lui-même on trouve une identité semblable dans le mémoire: „Petite contribution à la théorie de quelques fonctions transcendantes" § 2*), mais déduite pour d'autres transcendantes; pour les intégrales abéliennes cette identité a été trouvée pour la première fois par Weierstrass et communiquée pour le cas hyperelliptique dans le „Program" de Braunsberg, 1849, pour le cas général dans ses leçons sur cette théorie à l'Université de Berlin; plus tard cette identité a été retrouvée indépendamment de lui par M. Noether **). Nous avons suivi M. Noether dans l'exposition de ce sujet***).

70. La fonction $\bar{E}_k(x, y)$, définie par l'équation (21) du § précédent, est une fonction adjointe de la deuxième espèce, qui devient égale à ∞^2 au point (a_k, b_k), mais qui a des valeurs arbitraires aux autres points fondamentaux grâce aux constantes arbitraires c_{kj}, qui entrent dans le second terme en (21); les points fondamentaux, n'étant pas caractéristiques pour cette fonction, sont omis dans sa notation. — Si l'on transporte dans l'égalité (22) les termes, précédés du signe (—), dans l'autre membre, elle prendra la forme:

---

*) V-me mémoire de la nouvelle édition de ses oeuvres. T. I.

**) Ueber die algebraische Differentialausdrücke. 3. Note. Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Societät zu Erlangen. Sitzung v. 14. Januar 1884.

***) Pour le cas des intégrales hyperelliptiques nous l'avons déduit dans notre ouvrage sur l'inversion de ces intégrales d'une manière élémentaire. M. Béliankine l'a fait de nouveau d'une manière très simple dans sa note: „Démonstration de l'identité de Weierstrass dans la théorie des intégrales hyperelliptiques". Annales de l'Université de Kieff, 1900; aussi dans le Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan. 2. IX no 2. 1899.

$$\begin{aligned} D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2\ n-2}{\xi\ ,\ y_\xi}) \bar{E}_k(x, y) = \\ = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2\ n-2}{x\ ,\ y}) \bar{E}_k(\xi, y_\xi). \end{aligned} \tag{1}$$

En posant:

$$H(x, y \mid \xi, y_\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2\ n-2}{x\ ,\ y}) \bar{E}_k(\xi, y_\xi), \tag{2}$$

on pourra écrire l'égalité (1) plus brièvement ainsi:

$$H(\xi, y_\xi \mid x, y) = H(x, y \mid \xi, y_\xi). \tag{3}$$

La fonction, définie par l'équation (2) est une fonction adjointe de la deuxième espèce, qui devient égale à ∞^2 au point (ξ, y_ξ), et qui prend au point (a_k, b_k) la valeur $\bar{E}_k(\xi, y_\xi)$ tout à fait arbitraire, comme il a été expliqué tout à l'heure; les points fondamentaux n'étant pas caractéristiques pour la fonction $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$, on a omis les constantes $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$ dans sa notation; le point (ξ, y) est le *paramètre* de cette fonction*). L'égalité (3) exprime une propriété caractéristique de la fonction de ne pas changer en valeur par l'échange du paramètre (ξ, y_ξ) avec l'argument (x, y). On appelle *normale* cette fonction de deuxième espèce. En faisant coïncider le paramètre (ξ, y_ξ) avec le point (a_g, b_g), la seconde partie de l'équation (2) prendra la forme indéterminée $\infty - \infty$, dont la vraie valeur se trouve par l'équation (1) égale à $\bar{E}_g(x, y)$; ainsi on aura:

$$H(x, y \mid a_g, b_g) = \bar{E}_g(x, y), \tag{4}$$

c'est-à-dire, que la fonction fandamentale généralisée de seconde espèce $\bar{E}_g(x, y)$ n'est qu'un cas particulier de la fonction normale $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$, celui — où le paramètre (ξ, y_ξ) coïncide avec le point fondamental (a_g, b_g). En vertu de (4) on pourra écrire l'équation (2) de cette manière:

$$H(x, y \mid \xi, y_\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2\ n-2}{x\ ,\ y}) H(\xi, y_\xi \mid a_k, b_k). \tag{5}$$

Quoique les quantités $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ entrent dans cette expression de la fonction adjointe normale de deuxième espèce, elle n'en dépend pourtant que formellement. Pour le montrer, remplaçons dans l'équation (1) § 60

*) *Weierstrass* désigne de cette manière le quotient du second membre d'équation (2) par $F'_y(x, y)$. Notre $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$ est la même que $H_\xi(x)$ de Mr. *M. Noether* 2. Note (Erlangen) § 6; aussi: Math. Ann. Bd. 37, p. 448.

l'un par l'autre les deux systèmes des points fondamentaux $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ et $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})$; nous aurons:

$$(6) \qquad P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) + \sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(\alpha_j, \beta_j; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \varphi_i(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}});$$

par l'opération D_ξ on en tire:

$$(7) \qquad D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) + \sum_{j=1}^{p} D_\xi P_{\xi\eta}(\alpha_j, \beta_j; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}).$$

Après le même échangement des points fondamentaux on aura par la formule (13) § 53 pour la fonction $\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ cette expression:

$$(8) \qquad \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\alpha_j}, \overset{n-2}{\beta_j}) \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}). \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

En portant ces expressions des deux fonctions dans l'équation (5), nous en aurons:

$$(9) \qquad \begin{gathered} H(x, y \mid \xi, y_\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) + \\ + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) \left\{ D_\xi P_{\xi\eta}(\alpha_j, \beta_j; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\alpha_j}, \overset{n-2}{\beta_j}) H(\xi, y_\xi \mid a_k, b_k) \right\}; \end{gathered}$$

mais l'expression en paranthèses $\{\}$ n'étant d'après (5) autre chose que $H(\alpha_j, \beta_j \mid \xi, y_\xi)$, qui est égal en vertu de (3) à $H(\xi, y_\xi \mid \alpha_j, \beta_j)$, cette expression de la fonction normale de seconde espèce prend aussitôt la forme:

$$(10) \qquad H(x, y \mid \xi, y_\xi) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) H(\xi, y_\xi \mid \alpha_j, \beta_j),$$

qui ne diffère de celle, donnée par l'équation (5), que par les points fondamentaux. Donc, ces points pouvant être remplacés par tous autres, la fonction $H(x, y \mid \xi, y_\xi)$ n'en dépend pas effectivement. C. q. f. d.

La possibilité démontrée de remplacer dans les équations (2) et (3) les points fondamentaux $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ par d'autres $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})$, permet de conclure, que la propriété fondamentale de la fonction normale de deuxième espèce, exprimée par l'équation (3), appartiendra aussi aux fonctions fondamentales généralisées de deuxième espèce vu l'équation (4).

71. La fonction de la variable (z, y_z)

$$(1) \qquad P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$$

construite à la manière de celle de la variable (ξ, y_ξ), donnée par la formule (1) du § 68, jouera un grand rôle dans notre théorie; c'est pourquoi nous allons la considérer ici de plus près. Elle a $p+1$ infinis ∞^1 aux points:

$$(x', y');\ (x_i, y_i)_1^p \tag{2}$$

et $p+1$ zéros 0^1 aux points

$$(\xi, y_\xi);\ (\alpha_i, y_{\alpha_i})_1^p; \tag{3}$$

nous allons considérer ce qu'elle devient dans les deux cas particuliers suivants: 1) lorsque l'un des points $(x_i, y_i)_1^p$, par exemple (x_p, y_p), viendra à coïncider avec le point (ξ, y_ξ); 2) lorsque les points $(x_i, y_i)_1^p$ viènnent sur une courbe adjointe de première espèce: $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$. Pour rendre cette étude plus facile nous donnerons une autre expression de la même fonction (1). A cet effet, pour plus de clarté, nous allons modifier un peu pour le moment la notation adoptée par nous dans les §§ précédents des fonctions adjointes de première et de troisième espèces, en écrivant après leurs zéros arbitraires aussi leurs zéros nonarbitraires, en les séparant des premiers par un trait vertical, de manière que

$$\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z};\ x_i, y_i \mid x_i', y_i')_1^{p-1}\ ^{*)} \tag{4}$$

représentera une fonction adjointe de première espèce de la variable (z, y_z), ayant ses $p-1$ zéros arbitraires aux points $(x_i, y_i)_1^{p-1}$ et ses $p-1$ zéros nonarbitraires aux points $(x_i', y_i')_1^{p-1}$, de même que

$$P_{x', x_p}(z, y_z;\ (x_i', y_i')_1^{p-1};\ \xi, y_\xi \mid (\alpha_i, y_{\alpha_i})_1^p)\ ^{**)} \tag{5}$$

la fonction adjointe de troisième espèce de la même variable (z, y_z), avec les paramètres aux points (x', y') et (x_p, y_p), ayant ses p zéros arbitraires aux points $(x_i', y_i')_1^{p-1}$ et (ξ, y_ξ), et ses p zéros nonarbitraires aux points $(\alpha_i, y_{\alpha_i})_1^p$. Ces derniers zéros sont complètement déterminés par les paramètres et les zéros arbitraires, c'est-à-dire par les points:

$$(x', y'),\ (x_p, y_p);\ (x_i', y_i')_1^{p-1},\ (\xi, y_\xi), \tag{6}$$

---

*) Voir la formule (17) § 53.

**) Voir la formule (19) § 58.

ou, — comme les deux systèmes $\overset{p-1}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ et $\overset{p-1}{\underset{1}{(x', y')}}$ des zéros de la fonction (4) déterminent complètement l'un l'autre, — par les points,

$$(7) \qquad (x', y'),\ \overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}},\ (\xi, y_\xi),$$

comme le sont les zéros de la fonction (1), autres que (ξ, y_ξ). Le produit de la fonction (1) par la fonction (4):

$$(8) \qquad P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \cdot \varphi(\overset{m-2\ n-2}{z}, y_z; x_i, y_i \mid \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$$

sera une fonction adjointe, (car tel est le second facteur), qui deviendra infinie ∞^1 seulement aux deux points (x', y') et (x_p, y_p), les autres infinis du premier facteur, $\overset{p-1}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, étant les zéros de l'autre, et qui aura ses zéros aux points (ξ, y_ξ), $\overset{p-1}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$ et aux points $\overset{p}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$, dont les premiers peuvent être considéré comme arbitraires, vu la reprocité des deux systèmes des points $\overset{p-1}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ et $\overset{p-1}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$. Cette fonction ne sera donc autre chose, que la fonction (5), ou n'en différera que par un facteur constant; celui-ci pouvant être compris dans le signe de la fonction (4), qui n'est définie par ses zéros qu'à un facteur constant près, nous pouvons par suite écrire:

$$(9) \quad P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \cdot \varphi(\overset{m-2\ n-2}{z}, y_z; x_i, y_i \mid \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}) = P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}),$$

d'où l'on aura de suite la formule cherchée:

$$(10) \qquad P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = \frac{P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2\ n-2}{z}, y_z; x_i, y_i \mid \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})}.$$

Lorsque le point (x_p, y_p) viendra coïncider avec le point (ξ, y_ξ), ou avec l'un des points $\overset{p-1}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$, par exemple avec le point (x'_{p-1}, y'_{p-1}), — c'est ce qui aura lieu dans le second cas, où les p points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ viènnent sur une courbe adjointe de première espèce, — comme l'un des deux infinis de la fonction (5) sera absorbé par l'un de ses zéros arbitraires, l'un de ses zéros nonarbitraires, soit (α_p, y_{α_p}), doit venir à tomber, en l'autre infini (x', y') de la fonction pour l'absorber, car il n'existe pas des fonctions adjointes qui auraient un seul infini. Donc dans les deux cas la fonction (5) se réduira à une fonction adjointe de première espèce: dans le premier cas à

$$\varphi(\overset{m-2\,n-2}{z\ ,\ y_z}\,; x_i', \overset{p-1}{y_i'} \underset{1}{|}\ \alpha_i, y_{\alpha_i}), \tag{11}$$

à quoi on aura, comme il est aisé à voir:

$$(\overset{p-1}{\alpha_{\underset{1}{i}}, y_{\alpha_i}}) = (\overset{p-1}{x_{\underset{1}{i}}, y_i}), \tag{12}$$

dans le second à

$$\varphi(\overset{m-2\,n-2}{z\ ,\ y_z}\,; \overset{p-2}{x'_{\underset{1}{i}}, y_i'}; \xi, y_\xi \mid \overset{p-1}{\alpha_{\underset{1}{i}}, y_{\alpha_i}}) \tag{13}$$

sans avoir l'égalité (12), et la fonction (1) se réduira dans le premier cas à l'unité, dans le second à

$$\frac{\varphi(\overset{m-2\,n-2}{z\ ,\ y_z}\,; \overset{p-2}{x'_{\underset{1}{i}}, y_i'}, \xi, y_\xi \mid \overset{p-1}{\alpha_{\underset{1}{i}}, y_{\alpha_i}})}{\varphi(\overset{m-2\,n-2}{z\ ,\ y_z}\,; x_i, \overset{p-1}{y_i} \underset{1}{|}\ x_i', y_i')}. \tag{14}$$

72. Avant de quitter la partie algébrique de notre théorie pour passer à la partie transcendante, traitant les intégrales abéliennes et leur inversion, il nous reste à développer encore une notion nouvelle, due à Mrs. Brill et Noether *), et dont les progrès recents de la théorie, qui nous occupe, ont signalé toute l'importance, — celle des points *corresiduaux* (Mrs. Brill et Noether) ou *équivalents* (Mr. F. Klein). On sait par le § 68, qu'il est toujours possible de former une fonction, ayant les $p+1$ infinis arbitrairement donnés:

$$(x, y);\ (\overset{p}{x_{\underset{1}{i}}, y_i}), \tag{1}$$

et un zéro en un point arbitraire, par quoi les p zéros restants seront parfaitement déterminés; si le zéro donné est (ξ, y_ξ), les autres seront désigné ici par $(\overset{p}{\xi_{\underset{1}{i}}, y_{\xi_i}})$, de sorte que le système complet des zéros de notre fonction sera représenté ainsi:

$$(\xi, y_\xi);\ (\overset{p}{\xi_{\underset{1}{i}}, y_{\xi_i}}); \tag{2}$$

si le zéro donné sera (η, y_η), les p zéros restant seront désigné par $(\overset{p}{\eta_{\underset{1}{i}}, y_{\eta_i}})$, en sorte que le système complet des zéros sera:

$$(\eta, y_\eta);\ (\overset{p}{\eta_{\underset{1}{i}}, y_{\eta_i}}). \tag{3}$$

*) Math. Ann. Bd. VII. 1873. S. 272—273.

Les deux systèmes des point (2) et (3), formant les zéros des deux fonctions de (z, y_z):

$$(4)\qquad P_{z\xi}(x, y;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$$

et

$$(5)\qquad P_{z\eta}(x, y;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i),$$

ayant les mêmes infinis aux points (1), sont ceux, que Mrs. Brill et Noether ont nommé *corresiduaux* et M. F. Klein *équivalents*; nous adopterons la dernière dénomination, comme indépendante de toute considération géométrique. Le quotient de ces deux fonctions:

$$(6)\qquad \frac{P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)}{P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)}$$

sera une fonction de $(z, y_z,)$ qui restera finie aux points (1) [et notamment égale à l'unité au point (x, y), comme il résulte de (27) § 57 et (5) § 58,] qui aura les points (3) pour ses zéros et les points (2) pour ses infinis comme la fonction:

$$(7)\qquad P_{z\eta}(\xi, y_\xi;\ \overset{p}{\underset{1}{\xi_i}}, y_{\xi_i});$$

on peut parconséquant définir aussi les points équivalents deux systèmes des points, dont l'un représente les zéros, l'autre les infinis d'une même fonction de degré $p+1$, (7). [§ 40].

Les deux fonctions (6) et (7), ayant les mêmes zéros 0^1 et les mêmes infinis ∞^1, ne peuvent différer l'une de l'autre que par un facteur constant; on aura donc:

$$(8)\qquad P_{z\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i}}, y_{\xi_i}) = c\,\frac{P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)}{P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)}.$$

La constante c pourra être déterminée de deux manières, c'est ce qui conduit aux résultats intéressants. En premier lieu, en posant $z=x$, $y_z=y$, on aura d'après la remarque faite plus haut sur la valeur du quotient à droite en (8)

$$(9)\qquad c = P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i}}, y_{\xi_i}).$$

D'un autre côté, en chassant le dénominateur dans l'équation (8), de sorte qu'elle prendra la forme:

$$(10)\qquad P_{z\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)\, P_{z\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i}}, y_{\xi_i}) = c\, P_{z\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i),$$

on pourra y poser:

$$z = \xi + \Delta\xi; \tag{11}$$

après avoir divisé le premier facteur à gauche et multiplié le deuxième par $\Delta\xi$, par quoi la valeur du produit ne sera pas changée, faisons y tendre $\Delta\xi$ vers zéro; comme d'après (4) du § 61 on a:

$$\lim \Delta\xi\, P_{\xi+\Delta\xi,\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})\Big|_{\Delta\xi=0} = F'_y(\xi, y_\xi), \tag{12}$$

et d'après (1) du même §:

$$\lim \frac{P_{\xi+\Delta\xi,\xi}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{\Delta\xi}\Bigg|_{\Delta\xi=0} \doteq \frac{dP_{\xi\eta}(x, y; x_i, y_i)}{d\xi}, \tag{13}$$

on aura à la limite, en se rappelant de la signification du symbole D_ξ:

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = c P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{14}$$

d'où l'on trouvera:

$$c = \frac{D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})} = D_\xi \log P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}). \tag{15}$$

En comparant les deux formes de ce résultat avec le premier, donné par l'équation (9), on aura les deux formules:

$$P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) = D_\xi \log P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}); \tag{16}$$

$$P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}) . P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{17}$$

qui nous seront, toutes les deux, très utiles plus loin. La dernière, si l'on y considère (η, y_η) comme variable, représente à gauche le produit de deux fonctions, dont chacune a pour ses zéros les infinis de l'autre; on pourra les nommer à juste titre *inverses* l'une de l'autre *). Les zéros et les infinis étant du premier ordre, ce produit restera toujours fini et parconséquent se réduira à une constante, — c'est ce qu'on voit par le second membre de l'équation (17) qui d'après (2) § 61 ne dépend pas de η.

Le premier membre de la même équation (17) étant symmétrique par rapport aux systèmes (1) et (2), on en conclut:

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}}), \tag{18}$$

*) V. *Ermakoff*. „Théorie des fonctions abéliennes sans les surfaces de Riemann". Kiew, 1897. (Annales de l'Université de Kiew) (en russe.)

une relation fort importante. Elle exprime aussi la proposition sur l'échange de paramètre avec l'argument dans le cas de l'équivalence des systèmes de points formés du point variable et des points fondamentaux, de même que l'égalité (1) § 70 l'exprime dans le cas général. Les deux membres de la dernière ne dépendant que formellement des $(a_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} b_i)$ comme il y a été démontré plus haut, nous pouvons, sans détruire cette égalité, remplacer, comme le remarque M. Noether, ces points dans la fonction du second membre par $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$, dans celle du premier par $(\xi_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} \xi_i)$; alors elle prendra la forme:

$$
(19)\quad \begin{aligned} & D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)\bar{E}_{x_k}(\xi, y_\xi) = \\ & = D_x P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \xi_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_i}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \xi_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_i})\bar{E}_{\xi_k}(x, y), \end{aligned}
$$

— où nous avons introduit dans la notation des fonctions adjointes de première espèce leurs points fondamentaux, ces points n'étant pas maintenant les mêmes dans les deux membres (que nous avons en outre transposé). En vertu de (18) cette égalité prend la forme:

$$
(20)\quad \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)\bar{E}_{x_k}(\xi, y_\xi) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \xi_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_i})\bar{E}_{\xi_k}(x, y),
$$

ou, en vertu de (4) § 70:

$$
(21)\quad \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i) H(\xi, y_\xi \mid x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}; \xi_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_i}) H(x, y \mid \xi_k, y_\xi),
$$

une identité intéressante, dont nous nous avons servi dans l'édition russe de ce livre pour démontrer d'après M. Noether deux propositions importantes.

Partie II-me (transcendante).

Chapitre III.

Reduction des intégrales abéliennes aux intégrales des trois espèces; les propriétés caractéristiques des intégrales de chaque espèce.

73. La formule (4) § 66 donne la décomposition de la fonction $\frac{f(x,y)}{\varphi(x)}$, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, en éléments simples; en multipliant les deux membres de cette formule par $\frac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, (x_0, y_0) étant un point ordinaire de l'image algébrique $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, on aura:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)} =$$

$$\begin{aligned} = \sum_{h'=1}^{r'} \left\{ \sum_{k'=1}^{\nu'_{h'}-1} A'_{\nu'_{h'}-k'} \int\limits_{x_0}^{x} E^{(k'-1)}_{\xi'_{h'}}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + B'_{h'} \int\limits_{x_0}^{x} P_{\xi'_{h'}\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i) \frac{dx}{F'_y(x,y)} \right\} + \\ + \sum_{h=1}^{r} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu_h-1} A_{\nu_h-k} \int\limits_{x_0}^{x} E^{(k-1)}_{\xi_h}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + B_h \int\limits_{x_0}^{x} P_{\xi_h\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}} b_i) \frac{dx}{F'_y(x,y)} \right\} + \\ + \sum_{j=1}^{p} \frac{f(a_j,b_j)}{\varphi(a_j)} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}. \end{aligned} \qquad (1)$$

De même en multipliant par $\frac{dx}{F'_y(x,y)}$ l'égalité (7) § 67 et en intégrant de x_0 à x, on aura:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0) +$$

$$(2)\quad + \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{A}_k \int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + \sum_{h=1}^{r} \mathfrak{B}_h \int_{x_0}^{x} P_{\xi_h \eta}(x,y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)},$$

où l'on a:

$$(3)\quad \int_{x_0}^{x} \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \sum_{j=1}^{p} C_j \int_{x_0}^{x} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}.$$

Ces formules réduisent l'intégrale abélienne générale aux intégrales de trois espèce:

de la première espèce:

$$\text{I)}\quad \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)};$$

il y' en a p différentes linéairement indépendantes; ensuite

de la deuxième espèce:

$$\text{II)}\quad \int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)};$$

et

$$\text{II}')\quad \int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k, b'_k, \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)};$$

de cette dernière catégorie il y' en a aussi p différentes; enfin:

de la troisième espèce:

$$\text{III)}\quad \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}.$$

74. Les intégrales de première espèce restent finies et continues sur toute la sphère de Riemann, comme il suit de ce, que nous avons vu au § 44, savoir, que la fonction $\dfrac{\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})\dfrac{dx}{dt}}{F'_y(x,y)}$ est finie en chaque point de la sphère de Riemann. C'est là la propriété caractéristique des intégrales de première espèce.

Les intégrales de deuxième espèce deviènnent infinies en un seul point, qui peut être à une distance finie ou infinie du point $x=0$; savoir: l'intégrale II) au point (ξ, y_ξ) infinie d'ordre k: ∞^k, et l'intégrale II') au point (a_k, b_k) infinie du premier ordre: ∞^1. En effet, si (x_1, y_1) est un point, situé dans le voisinage du point (ξ, y_ξ) et dans le domaine de la convergence uniforme de la série $\mathfrak{P}_k(x-\xi)$ de la formule (9) § 61, on aura d'après cette même formule, en l'intégrant:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i}},b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \int_{x_0}^{x_1} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i}},b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)} + \\ &+ (k-1)!\frac{F'_y(\xi,y_\xi)}{(x-\xi)^k} - (k-1)!\frac{F'_y(\xi,y_\xi)}{(x_1-\xi)^k} + \int_{x_1}^{x} \mathfrak{P}_k(x-\xi)\frac{dx}{F'_y(x,y)};\end{aligned} \tag{1}$$

ici la dernière intégrale reste finie pour $x=\xi$, car telle est la fonction sous le signe de l'intégration; aussi sont finis les termes premier et troisième, indépendants de la variable x, tandisque le second devient ∞^k, d'où il suit ce que nous en avons dit. En particulier, pour $k=1$, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i}},b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)} \tag{2}$$

deviendra $=\infty^1$ comme la fonction

$$\frac{F'_y(\xi,y_\xi)}{x-\xi} \tag{3}$$

pour $x=\xi$. D'après la remarque faite à la fin du § 62 ces résultats s'appliquent immédiatement à l'intégrale II') (§ 73), qui devienne $=\infty^1$ au point (a_k, b_k) comme l'expression:

$$\frac{F'_y(a_k,b_k)}{x-a_k} \tag{4}$$

pour $x=a_k$. Ces derniers intégrales de la deuxième espèce devenant chacune $=\infty^1$ à l'un des points fondamentaux, on peut les appeler *in-*

tégrales fondamentales de la deuxième espèce, et l'intégrale (2) — *intégrale générale de la deuxième espèce avec le paramètre* (ξ, y_ξ). L'intégrale II) § 73 peut être appellée *l'intégrale générale de la deuxième espèce d'ordre* k, car elle devient $=\infty^k$ au point (ξ, y_ξ).

L'intégrale de la troisième espèce possède deux infinis logarithmiques: l'un au point (ξ, y_ξ), où elle devient infinie comme $-\log(x-\xi)$ pour $x=\xi$, l'autre au point (η, y_η), où elle devient infinie comme $+\log(x-\eta)$ pour $x=\eta$. En effet, par (27) et (28) § 57 et (5) § 58 on a aux environs des points-paramètres correspondants:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{1}{F'_y(x, y)} = -\frac{1}{x-\xi} + \mathfrak{P}(x-\xi), \tag{5}$$

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{1}{F'_y(x, y)} = +\frac{1}{x-\eta} + \mathfrak{P}_1(x-\eta); \tag{6}$$

en désignant par (x_1, y_1) un point pris au voisinage du point (ξ, y_ξ) dans le domaine de convergence uniforme de la série $\mathfrak{P}(x-\xi)$, et par (x_2, y_2) un point pris au voisinage du point (η, y_η) dans le domaine de convergence uniforme de la série $\mathfrak{P}_1(x-\eta)$, on aura, en multipliant ces égalités par dx et en intégrant:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{dx}{F'_y(x, y)} &= \int_{x_0}^{x_1} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{dx}{F'_y(x, y)} - \\ &\quad - \log(x-\xi) + \log(x_1-\xi) + \int_{x_1}^{x} \mathfrak{P}(x-\xi)\,dx;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{dx}{F'_y(x, y)} &= \int_{x_0}^{x_2} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\,\frac{dx}{F'_y(x, y)} + \\ &\quad + \log(x-\eta) - \log(x_2-\eta) + \int_{x_2}^{x} \mathfrak{P}_1(x-\eta)\,dx;\end{aligned} \tag{8}$$

dans les deux formules les derniers termes des seconds membres restent finis pour $x=\xi$, respectivement $x=\eta$, car telles sont les fonctions sous le signe de l'intégrale; les autres termes, les seconds exceptés, sont des quantités finies, indépendantes de x, d'ou il suit ce que nous avons dit. C'est là la propriété caractéristique des intégrales de troisième espèce. On remarquera les coéfficients des termes logarithmiques dans les formules (7) et (18), et que la somme de ces coéfficients est égale à zéro.

75. En multipliant (7) et (8) § 61 par $\dfrac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, on aura les relations suivantes entre les intégrales de la deuxième espèce de différents ordres et celle de la troisième espèce:

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = D_\xi \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = D_\xi^k \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}, \tag{2}$$

car on peut ici changer l'ordre de la différentiation et de l'intégration. De la même manière on tirera de (3) et (4) § 62 les relations suivantes:

$$\int_{x_0}^{x} E_k(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = D_{a_k} \int_{x_0}^{x} P_{a_k\eta}(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)}, \tag{3}$$

$$\int_{x_0}^{x} E_k^{(l-1)}(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = D_{a_k}^l \int_{x_0}^{x} P_{a_k\eta}(x, y; \ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)} \tag{4}$$

76. L'intégrale de troisième espèce, que nous avons considéré au § précédent, a une dérivée, qui s'annule aux points fondamentaux $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$; une autre, dont la dérivée s'annule aux autres points: $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})$, en diffère par une fonction linéaire des intégrales de la première espèce. En effet, en multipliant l'égalité (1) § 60 par $\dfrac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, on aura:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(a_j, b_j; \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}}) \int_{x_0}^{x} \varphi_j(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}. \end{aligned} \tag{1}$$

En effectuant l'opération D_ξ sur les deux membres de cette égalité, vu (1) du § précédent et (7) § 61 on aura:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\beta_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)}+\\ &+\sum_{j=1}^{p} E_\xi(a_j,b_j;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\beta_i)+\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)};\end{aligned}$$

en effectuant l'opération D_ξ^k sur (1), vu (2) du § précédent et (8) § 61, on aura

$$(3)\qquad \begin{aligned}\int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\beta_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \int_{x_0}^{x} E_\xi^{(k-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)}+\\ &+\sum_{j=1}^{p} E_\xi^{(k-1)}(a_j,b_j;\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\beta_i)\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)}.\end{aligned}$$

Les formules (2) et (3) expriment une proposition analogue pour les intégrales de deuxième espèce avec le paramètre au point (ξ, y_ξ).

77. En multipliant l'égalité (21) § 69 par $\frac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, on aura:

$$(1)\qquad \begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \bar{E}_k(x,y)\frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k,b'_k\ldots)\frac{dx}{F'_y(x,y)}+\\ &+\sum_{j=1}^{p} c_{k_j}\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)};\end{aligned}$$

cette intégrale nouvelle de la deuxième espèce diffère donc aussi de sa correspondante entre les intégrales fondamentales de deuxième espèce par une fonction linéaire des intégrales de première espèce, dont les coéfficients, des constantes, satisfont, rappellons-le, à l'égalité (19) § 69. Nous appellons aussi fondamentales ces dernières intégrales de la deuxième espèce, mais plus générales. — Comme on a

$$(2)\qquad D_x\int_{x_0}^{x}\bar{E}_k(x,y)\frac{dx}{F'_y(x,y)}=\bar{E}_k(x,y)$$

on peut écrire l'égalité (2) § 70 de cette manière:

$$H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)=$$

$$=D_\xi\Big(P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)+\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\int_{\xi_0}^{\xi}\bar{E}_k(\xi,y_\xi)\frac{d\xi}{F'_y(\xi,y_\xi)}\Big); \tag{3}$$

en multipliant cette égalité par $\dfrac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, on aura:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)\frac{dx}{F'_y(x,y)}&=D_\xi\Big\{\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)}+\\&+\sum_{k=1}^{p}\int_{\xi_0}^{\xi}\bar{E}_k(\xi,y_\xi)\frac{dx}{F'_y(\xi,y_\xi)}\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)}\Big\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Le premier terme du second membre de cette formule est l'intégrale de la deuxième espèce (1) § 75; parconséquent l'intégrale de son premier membre, qui en diffère par une fonction linéaire des intégrales de première espèce, est aussi de la deuxième espèce. On appelle cette intégrale *l'intégrale normale de deuxième espèce*: le point (ξ,y_ξ) en est le *paramètre*. L'égalité (4) nous montre que cette intégrale peut être reçue à l'aide de l'opération D_ξ, exécutée sur l'intégrale:

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}b_i)\frac{dx}{F'_y(x,y)}+\\&+\sum_{k=1}^{p}\int_{\xi_0}^{\xi}\bar{E}_k(\xi,y_{\xi_i})\frac{d\xi}{F'_y(\xi,y_\xi)}\cdot\int_{x_0}^{x}\varphi_k(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(\xi,y_\xi)},\end{aligned} \tag{5}$$

qui, différant de l'intégrale de troisième espèce (le premier terme) par une fonction linéaire des intégrales de première espèce, est aussi une intégrale de la troisième espèce.

L'intégrale normale de deuxième espèce se réduit à l'aide des fonctions algébriques aux intégrales fondamentales de deuxième espèce. En multipliant l'égalité (1) § 70 par $\dfrac{dx}{F'_y(x,y)}$ et en intégrant de x_0 à x, on aura, en se rappellant de (6) § 59:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \int_{x_0}^{x} \bar{E}_k(x,y) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \\
&= D_\xi \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + \sum_{k=1}^{p} \bar{E}_k(\xi, y_\xi) \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)};
\end{aligned}
$$

le second membre de cette égalité ne diffère pas essentiellement du second membre de l'égalité (4), car, en y ouvrant les crochets, on aura le second membre de (6); donc on a:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} H(x, y \mid \xi, y_\xi) \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \\
&= P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \int_{x_0}^{x} \bar{E}_k(x,y) \frac{dx}{F'_y(x,y)};
\end{aligned}
$$

c'est ce, qui démontre la proposition énoncée, car le premier terme à droite est une fonction algébrique de x, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$.

En multipliant l'égalité (4) par $\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}$ et en intégrant de ξ_0 à ξ, en ayant égard à (6) § 59, nous aurons:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{x_0}^{x} H(x, y \mid \xi, y_\xi) \frac{dx}{F'_y(x,y)} \cdot \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \\
&= \int_{x_0}^{x} P_{\xi,\xi_0}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x,y)} + \sum_{k=1}^{p} \int_{\xi_0}^{\xi} \bar{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}.
\end{aligned}
$$

Cette intégrale ne diffère que par la lettre, désignant le second paramètre de l'intégrale de troisième espèce (5); parconséquent elle est aussi de troisième espèce. En effectuant sur elle l'opération D_ξ, on aura l'intégrale normale de deuxième espèce, tandis que nous l'avons déduit de cette dernière au moyen de l'intégration par rapport à la variable ξ; voilà quel est le lien entre ces deux intégrales d'espèces différentes. L'intégrale (8) s'appelle *l'intégrale normale de troisième espèce*; les points

(ξ, y_ξ) et (ξ_0, y_{ξ_0}) en sont les paramètres. On comprend bien, sans doute, que les chemins d'intégration de x_0 à x et de ξ_0 à ξ ne doivent pas se croiser, car autrement l'intégrale n'aurait pas de sens. — En multipliant l'égalité (3) § 70 par $\frac{dx}{F'_y(x,y)} \cdot \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}$ et en intégrant par rapport à x de x_0, et par rapport à ξ de ξ_0, suivant les chemins qui ne se croisent pas, on aura:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{\xi_0}^{\xi} H(\xi, y_\xi | x, y) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} \frac{dx}{F'_y(x, y)} = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{x_0}^{x} H(x, y | \xi, y_\xi) \frac{dx}{F'_y(x, y)} \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}. \quad (9)$$

Cette égalité exprime la propriété caractéristique de l'intégrale normale de troisième espèce de rester invariable en sa valeur par l'échange des paramètres et des limites. Elle démontre „*le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument*". — La même proposition pour l'autre forme de l'intégrale normale de troisième espèce peut être déduite de la même manière de l'égalité (1) § 70; en la multipliant par la même quantité et en intégrant entre les mêmes limites, on aura:

$$\begin{aligned}\int_{\xi_0}^{\xi} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} + \sum_{k=1}^{p} \int_{x_0}^{x} \overline{E}_k(x,y) \frac{dx}{F'_y(x, y)} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \\ = \int_{x_0}^{x} P_{\xi, \xi_0}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{dx}{F'_y(x, y)} + \sum_{k=1}^{p} \int_{\xi_0}^{\xi} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} \cdot \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x, y)}.\end{aligned} \quad (10)$$

À l'aide de la formule (1) § 69, qui donne le mode de devenir infinie aussi de la fonction $H(x, y | \xi, y_\xi)$, en vertu de (2) § 70, on peut appercevoir facilement de (9) que l'intégrale normale de troisième espèce devient l'infinie logarithmique, lorsque l'argument devient égal au paramètre, car on a

$$\int^{\xi}\int^{x} -\frac{dx\, d\xi}{(x-\xi)^2} = \int^{\xi} \frac{d\xi}{x - \xi} = -\log(x - \xi) + C;$$

pour l'autre paramètre on aura $+\log(x - \xi_0) + C$. La même chose est aussi visible de l'égalité (10).

78. Si l'on trace sur la sphère de Riemann une courbe du point (η, y_η) au point (ξ, y_ξ), où l'intégrale de troisième espèce devient infinie, de manière qu'elle ne croise pas ni soi-même, ni les lignes A_h et B_h

$(h=1,2,\ldots p)$; alors cette ligne sera une *coupure* de la fonction, représentée par l'intégrale de troisième espèce, ayant ces points pour paramètres: sur les deux côtés opposés de cette ligne les valeurs de l'intégrale considérée seront différente de $2\pi i$: en passant du droit à gauche, l'intégrale recevra l'accroissement de $-2\pi i$. En effet, le point (x, y) décrivant un cercle infiniment petit autour du point (ξ, y_ξ) dans le sens positif, l'intégrale recevra un accroissement de $-2\pi i$ grâce au terme $-\log(x-\xi)$ de son développement pour le point considéré; de même, le point (x,y) décrivant un cercle infiniment petit autour du point (η, y_η) dans le sens négatif, l'intégrale recevra le même accroissement grâce au terme $+\log(x-\eta)$ de son développement pour ce point; mais l'un ou l'autre des deux cercles doit on décrire, si l'on veut passer de l'autre côté de la ligne sans la croiser.

79. Pour simplifier les formules nous voulons introduire une notation abrégée des intégrales des trois espèces à l'aide des grandes chiffres Romains: I, II, III, qui présentent cette avantage, qu'on peut écrire les limites des intégrales et indiquer à l'aide d'un indice, attaché au bas ou en haut des chiffres les différences individuelles de chaque intégrale de la même espèce, de la manière suivante:

a) l'intégrale fondamentale de première espèce:

$$\mathop{\mathrm{I}_k}_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}; \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{1}$$

b) l'intégrale générale de première espèce:

$$\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{2}$$

en vertu de (11) § 53 on aura:

$$\mathop{\mathrm{I}}_{x_0}^{x} = \sum_{k=1}^{p} C_k \mathop{\mathrm{I}_k}_{x_0}^{x}; \tag{3}$$

c) l'intégrale fondamentale de deuxième espèce:

$$\mathop{\mathrm{II}_k^0}_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} E_k(x,y;\ldots a'_k, b'_k \ldots) \frac{dx}{F'_y(x,y)}; \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{4}$$

d) l'intégrale fondamentale de deuxième espèce plus générale:

$$\mathop{\mathrm{II}_k}_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \overline{E}_k(x,y) \frac{dx}{F'_y(x,y)}; \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{5}$$

en vertu de (4) on tirera de (1) § 77 la relation:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{\overset{0}{\mathrm{II}}}}_k + \sum_{j=1}^{p} c_{kj} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j, \qquad (k=1,2,\ldots p) \tag{6}$$

où l'on a $c_{kj}=c_{jk}$, du reste ces constantes étant arbitraires;

e) l'intégrale de deuxième espèce avec le paramètre au point (ξ, y_ξ) ayant la dérivée, qui s'annule aux points fondamentaux:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\overset{0}{\mathrm{II}}}}_\xi = \int_{x_0}^{x} E_\xi(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{7}$$

f) le même intégrale d'ordre élevé:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_\xi^{(l-1)} = \int_{x_0}^{x} E_\xi^{(l-1)}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{8}$$

g) l'intégrale normale de deuxième espèce avec le paramètre au point (ξ, y_ξ):

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_\xi = \int_{x_0}^{x} H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)\frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{9}$$

h) la première intégrale de troisième espèce:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\overset{0}{\mathrm{III}}}}_{\xi\eta} = \int_{x_0}^{x} P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\frac{dx}{F'_y(x,y)}; \tag{10}$$

i) l'intégrale normale de troisième espèce avec les paramètres aux points (ξ, y_ξ) et (ξ_0, y_{ξ_0}):

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\xi_0} = \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}_{x,x_0} = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{x_0}^{x} H(x,y\,|\,\xi,y_\xi)\frac{dx}{F'_y(x,y)}\cdot\frac{d\xi}{F'_y(\xi,y_\xi)}; \tag{11}$$

elle s'exprime ainsi par la précédente en vertu du (8) § 77:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\xi_0} = \overset{x}{\underset{x_0}{\overset{0}{\mathrm{III}}}}_{\xi,\xi_0} + \sum_{k=1}^{p}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\cdot\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k; \tag{12}$$

l'égalité (10) du § précédent, qui exprime le théorème de l'échange du paramètre et de l'argument, prendra maintenant la forme:

$$\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\overset{0}{\mathrm{III}}}}_{x,x_0} + \sum_{k=1}^{p}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{\overset{0}{\mathrm{III}}}}_{\xi,\xi_0} + \sum_{k=1}^{p}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k\cdot\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k. \tag{13}$$

Les formules, qui montrent, comment dérivent l'une de l'autre les intégrales normales de deuxième et de troisième espèce, prennent la forme:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_{\xi} = D_{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\,\xi_0}; \tag{14}$$

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\,\xi_0} = \int_{\xi_0}^{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_{\xi} \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_{\xi})}. \tag{15}$$

En effectuant sur l'intégrale normale de troisième espèce l'opération D^k_{ξ}, on aura d'après (8):

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{[k-1]}_{\xi} = D^k_{\xi} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\,\xi_0}, \tag{16}$$

qui diffère de l'intégrale (8) par une fonction linéaire des intégrales (1), comme il suit de la formule (8) § 77; c'est pour cela, que nous en avons modifié un peu la notation.

80. Les formules (1) et (2) § 73 pour la réduction des intégrales abéliennes à celles de trois espèces, après y avoir introduit les notations abrégées des intégrales, prendront la forme suivante, plus simples:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \sum_{h'=1}^{r'} \left\{ \sum_{k'=1}^{\nu'_{h'}-1} A'_{\nu'_{h'}-k'} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(k'-1)}_{\xi'_{h'}} + B'_{h'} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi'_{h'},\eta} \right\} + \\ &+ \sum_{h=1}^{r} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu_h-1} A_{\nu_h-k} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{(k-1)}_{\xi_h} + B_h \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi_h\eta} \right\} + \sum_{i=1}^{p} \frac{f(a_i, b_i)}{\varphi(a_i)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_i;\end{aligned} \tag{1}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{p} \mathfrak{A}_k \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{0}_{k} + \sum_{h=1}^{p} \mathfrak{B}_h \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi\eta} + \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}. \tag{2}$$

Si l'on multiplié l'égalité (7) § 66 par $\dfrac{dx}{F'_y(x,y)}$ et l'intègre de x_0 à x, on aura la formule équivalente à (1), mais plus serrée, si l'on y introduit les notations nouvelles des intégrales, savoir:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)} &= \Pi \frac{f(z, y_z)}{\varphi(z) F'_y(z, y_z)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{z,\eta} \Bigg|_{z=\infty} - \\ &- \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu_k-1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k-1}}{dz^{\nu_k-1}} \left((z-\xi_k)^{\nu_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(z, y_z^{(j)})}{\varphi(z) F'_y(z, y_z^{(j)})} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{z\eta} \right)_{z=\xi_k} + \sum_{j=1}^{p} \frac{f(a_j, b_j)}{\varphi(a_j)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j,\end{aligned} \tag{3}$$

où la lettre II devant l'expression $\frac{f(z,y_z)}{\varphi(z)F'_y(z,y_z)} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{z,\eta}\Big|_{z=\infty}$ désigne d'après Abel la somme des résidus de cette fonction par rapport à ses infinis, situés aux points O' de la sphère de Riemann.

À l'aide de la relation (12) § 79 et en vertu du théorème de l'échange du paramètre et de l'argument chez l'intégrale normale de troisième espèce on pourra transformer la formule (2) en celle-ci:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f(x,y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F'_y(x,y)} = \Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0) + \tag{4}$$
$$+\sum_{k=1}^{p} \mathfrak{A}_k \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}^{0}_{k} + \sum_{k=1}^{r} \mathfrak{B}_h \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi_h \eta} + \sum_{k=1}^{p} \Big(\mathfrak{C}_k - \sum_{h=1}^{r} \mathfrak{B}_h \overset{\xi_h}{\underset{\eta}{\mathrm{II}}}{}_k\Big) \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_k,$$

les coéfficients $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_k$, des intégrales des trois espèces étant déterminés par les formules (8) § 67. — Les intégrales des deux premières espèces étant fondamentales, et parsuite indépendantes les unes des autres, et les infinis des intégrales de troisième espèce étant logarithmiques, on voit de suite, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale du premier membre de cette formule se réduise à une fonction algébrique, sont*):

$$\mathfrak{A}_k = 0 \ (k=1,2,\ldots p),\ \mathfrak{B}_k = 0 \ (h=1,2,\ldots r),\ \mathfrak{C}_k - \sum_{h=1}^{r} \mathfrak{B}_h \overset{\xi_h}{\underset{\eta}{\mathrm{II}}}{}_k = 0 \ (k=1,2,\ldots p), \tag{5}$$

les troisièmes se réduisant en vertu des deuxièmes à celles-ci:

$$\mathfrak{C}_h = 0. \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{6}$$

Si de ces équations les deuxièmes n'auront pas lieu, mais seulement les équations premières et troisièmes, c'est-à-dire, qu'on aura:

$$\mathfrak{A}_k = 0, \quad \mathfrak{C}_k - \sum_{h=1}^{r} \mathfrak{B}_h \overset{\xi_h}{\underset{\eta}{\mathrm{II}}}{}_k = 0, \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{7}$$

et en outre:

$$\frac{\mathfrak{B}_{h_i}}{n_i} = \frac{\mathfrak{B}_{h_{i+1}}}{n_{i+1}} = \cdots = \frac{\mathfrak{B}_{h_{g_i-i}}}{n_{g_i-i}} = Q_i, \quad (i=1,2,\ldots s) \tag{8}$$

où tous les nombres n_i, $n_{i+1}, \ldots n_{g_i-i}$ sont des entiers, alors on aura:

$$\sum_{h=1}^{r} \mathfrak{B}_h \overset{\xi_h}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}{}_{x,x_0} = \sum_{i=1}^{s} Q_i \Big(n_i \overset{\xi_{h_i}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}{}_{x,x_0} + n_{i+1} \overset{\xi_{h_{i+1}}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}{}_{x,x_0} + \cdots + n_{g_i-i} \overset{\xi_{h_{g_i-i}}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}{}_{x,x_0} \Big). \tag{9}$$

*) Voyez: *Weierstrass*. Werke. Bd. IV. S. 267.

En désignant par $\psi_i(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y, laquelle devient infinie aux limites supérieures des intégrales (entre paranthèses) de l'ordre marqué par le coéfficient de la même intégrale, et égale à zéro au point unique (η, y_η) de l'ordre égal à la somme de ces coéfficients:

$$(10) \qquad n_i + n_{i+1} + \cdots + n_{g_i - i},$$

à la condition, que cette somme n'est pas inférieure à $p+1$, on aura d'après le théorème d'Abel (v. le Chapitre V de ce livre) l'égalité suivante:

$$(11) \qquad n_i \overset{\xi_{h_i}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x, x_0} + n_{i+1} \overset{\xi_{h_i+1}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x, x_0} + \cdots + n_{g_i - i} \overset{\xi_{h_{g_i - i}}}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x, x_0} = \log \frac{\psi_i(x, y)}{\psi_i(x_0, y_0)},$$

en vertu de laquelle l'égalité (4) se réduria à celle-ci:

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y)}{\varphi(x)} \frac{dx}{F_y(x, y)} = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{s} Q_i \log \frac{\psi_i(x, y)}{\psi_i(x_0, y_0)}.$$

Donc les équations (7) et (8) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale abélienne se réduise aux fonctions algébriques et logarithmiques *).

La même voie à suivre se présente le plus naturel dans les recherches ayants pour but de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une intégrale abélienne du rang donné se réduise aux celles des rangs inférieurs, c'est-à-dire se rapportants aux images algébriques des genres inférieurs. Pourtant, vu le caractère spécial de cette question d'une part et des grandes complications de l'autre, qui peuvent s'y présenter et nous entrainer loin hors des limites imposées à nous par le titre du livre, nous laissons d'y revenir à l'autre occasion, — sans vouloir empêcher par cela quelqu'un de nous y devancer, — en se contentant ici de l'indication faite.

---

*) D'une manière semblable *L. Koenigsberger* a traité le même problème dans le cas hyperelliptique. Voyez ses „Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale". Leipzig, 1878. Achte Vorlesung. S. 130 — 153.

Chapitre IV.

Fonctions primaires. Relations entre les périodes des intégrales.

81. En revenant à l'identité (22) § 69 multiplions ses deux membres par $\dfrac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}$ et l'intégrons suivant la courbe fermée A_h; alors le second terme de son premier membre, qui sera réduit à $dP_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ après la dite multiplication, donnera le zéro après l'intégration, car le chemin fermée A_h ramène à sa valeur initiale la fonction de (ξ, y_ξ) $P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, qui est uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m}{F}(\xi, \overset{n}{y}_\xi) = 0$, étant une fonction rationnelle de (ξ, y_ξ), [§ 68]. En introduisant encore les notations suivantes pour les intégrales des trois espèces, prises suivant la courbe fermée A_h dans le sens positif *):

$$\int_{(A_h)} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(A_h)}{\mathrm{I}_k} = \omega_{kh}, \tag{1}$$

$$\int_{(A_h)} \overline{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(A_h)}{\mathrm{II}_k} = \eta_{kh}, \tag{2}$$

$$\int_{(A_h)} P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(A_h)}{\mathrm{III}^0_{x\eta}} = \Omega(x, y)_h, \tag{3}$$

— car la dernière intégrale sera une fonction du point (x, y), tandis que les deux premières sont des quantités constantes, — on aura:

$$D_x\Omega(x, y)_h = \sum_{k=1}^{p} \left\{ \eta_{kh}\, \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) - \omega_{kh} \overline{E}_k(x, y) \right\}, \tag{4}$$

*) C'est-à-dire par rapport auquel la partie intérieur de A_h sera à gauche.

et en divisant par $F'_y(x,y)$:

(5) $$\frac{d}{dx}\Omega(x,y)_h = \sum_{k=1}^{p}\left\{\eta_{kh}\frac{\overset{m-2\,n-2}{\varphi_k(\,x\,,\,y\,)}}{F'_y(x,y)} - \omega_{kh}\frac{\overline{E}_k(x,y)}{F'_y(x,y)}\right\}.$$

La dernière égalité nous montre, que la fonction $\Omega(x,y)_h$, définie par l'équation (3), a une dérivée algébrique, uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\;n}{F(x,y)}=0$, mais avec les coéfficients transcendants ω_{kh} et η_{kh}, définis par les équations (1) et (2). L'équation (5) définit la fonction à une constante additive près; là dernière sera déterminée, si l'on intègre cette égalité en commençant du point (x_0,y_0); une fonction reçue de cette manière, qui s'annule pour $x=x_0$, $y=y_0$, nous désignerons par $\Omega(x,y;\,x_0,y_0)_h$; alors on aura:

(6) $$\Omega(x,y;x_0,y_0)_h = \sum_{k=1}^{p}\left(\eta_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right).$$

D'un autre côté, on tire de l'équation (3), à cause de ce que par (6) § 59 on a:

(7) $$P_{x\eta}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) - P_{x_0\eta}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}) = P_{x,x_0}(\xi,y_\xi;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}}),$$

cette autre expression de la même fonction:

(8) $$\Omega(x,y;x_0,y_0)_h = \underset{(A_h)}{\Pi\!\Pi}{}^{\circ}_{x,x_0}.$$

De ces deux expressions (6) et (8) de la fonction $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ on déduit aisement toutes ses propriétés. De la première expression on voit, que cette fonction sera finie et continue à moins que le point (x,y) ne vient pas se confondre avec l'un des points fondamentaux $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})$, où elle devient infinie du premier ordre: ∞^1, comme l'expression:

(9) $$-\,\omega_{kh}\frac{F'_y(a_k,b_k)}{x-a_k},$$

pour $x=a_k$ ainsi qu'il suit de l'équation (6) d'après (4) du § 74. Quand le point (x,y) arrive sur la ligne A_h, la formule (8) devient illusoire, tandis que la formule (6) montre, que notre fonction aura encore une valeur finie; mais cependant cette valeur ne sera pas la même sur les deux bords de la ligne A_h: cette ligne sera donc une coupure de cette fonction, qui reçoit un accroissement fini, lorsque le point (x,y) passe à travers d'elle d'un côté à l'autre. En effet, pour que la formule (8) conserve le sens, lorsque le point (x,y) vient sur le chemin d'intégration A_h, il faut changer un peu ce chemin auprès du point (x,y), en faisant le point (ξ,y_ξ) devier le point (x, y), en décrivant autour de lui, comme du centre, un demicercle d'un rayon infiniment petit du côté droit ou du côté gauche; mais dans ces deux cas on n'obtient pas le même résultat: le chemin, qui laisse le point (x, y) à sa gauche, peut être transformé en celui, qui le laisse à sa droite, plus un autre suivant un cercle entier de rayon infiniment petit autour de lui dans le sens positif, ainsi que la valeur de la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$, lorsque le point (x, y) est situé auprès du chemin A_h de sa côté gauche, sera égale à celle, qu'a la fonction, lorsqu'il est situé de sa côté droite, plus la valeur de l'intégrale, prise suivant le cercle infiniment petit autour du point (x, y) dans le sens positif; mais cette dernière est égale à $-2\pi i$, car au voisinage du point (x, y) on a par (4) § 61:

$$P_{x, x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i) = -\frac{F'_y(\xi, y_\xi)}{\xi - x} + \mathfrak{P}_2(\xi - x). \tag{10}$$

Ainsi la valeur de la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ à gauche du chemin A_h, ou, à parler autrement, à l'intérieur de la courbe fermée A_h, sera de $2\pi i$ moindre qu'à droite de cette ligne, autrement — à l'extérieur de cette courbe, ainsi qu'en passant par cette ligne fermée de son intérieur à l'extérieur, la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ reçoit brusquement l'accroissement de $+2\pi i$, en passant de l'extérieur à l'intérieur celui de $-2\pi i$. Durant que le point (x, y) ne passe pas à travers de cette ligne, la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ reste uniforme; mais comme à cause de la connexion multiple de la surface de Riemann le point (x, y) peut autant de fois que l'on veut passer à travers de la ligne A_h dans le même sens, on conçoit, qu'en chaque point de la surface de Riemann la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ aura un nombre infini des valeurs, qui diffèrent entre elles par un multiple de $2\pi i$, par $2q\pi i$, q étant un entier quelconque, positif ou négatif.

82. De même en intégrant la même identité (22) § 69, après l'avoir multiplié par $\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}$, suivant le chemin fermé B_h dans le sens positif, et en posant:

$$\int_{(B_h)} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(B_h)}{\mathrm{I}_k} = \omega'_{kh}, \tag{1}$$

$$\int_{(B_h)} \bar{E}_k(\xi, y_\xi) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(B_h)}{\mathrm{II}_k} = \eta'_{kh}, \tag{2}$$

$$\int_{(B'_h)} P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \underset{(B_h)}{\overset{0}{\mathrm{III}}_{x\eta}} = \Omega'(x, y)_h, \tag{3}$$

on aura:

$$(4) \qquad D_x \Omega'(x,y)_h = \sum_{k=1}^{p} \left\{ \eta'_{kh} \varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) - \omega'_{kh} \overline{E}_k(x,y) \right\},$$

et en divisant par $F'_y(x,y)$:

$$(5) \qquad \frac{d}{dx} \Omega'(x,y)_h = \sum_{k=1}^{p} \left\{ \eta'_{kh} \frac{\varphi_k(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{F'_y(x,y)} - \omega'_{kh} \frac{\overline{E}_k(x,y)}{F'_y(x,y)} \right\},$$

d'où il suivra, que la fonction $\Omega'(x,y)_h$ a une dérivée algébrique, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0$, avec les coéfficients transcendants ω'_{kh} et η'_{kh}. En intégrant l'égalité (5) sur le même chemin qu'en le § précédent, du point (x_0, y_0) au point (x, y), on aura, — en désignant la fonction $\Omega'(x,y)_h$ qui s'annule pour $x=x_0$, $y=y_0$, par $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$, l'égalité suivante:

$$(6) \qquad \Omega'(x,y;x_0,y_0)_h = \sum_{k=1}^{p} \left(\eta'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} - \omega'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k}} \right),$$

et aussi de l'équation (3) d'après (7) du § précédent cette autre:

$$(7) \qquad \Omega'(x,y;x_0,y_0)_h = \underset{(B_h)}{\overset{0}{\Pi\!\!\mathrm{I}_{x,x_0}}}.$$

De ces deux expressions on tire de la même manière, qu'au § précédent, la conclusion, que la fonction $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$ est finie sur toute la sphère de Riemann, les points fondamentaux exceptés, où elle devient infinie: ∞^1 comme

$$(8) \qquad -\omega'_{kh} \frac{F'_y(a_k, b_k)}{x - a_k},$$

pour $x=a_k$, et uniforme tant que le point (x,y) ne passe pas à travers de la ligne B_h; en passant par cette ligne de l'intérieur à l'extérieur, elle reçoit l'accroissement de $+2\pi i$, en passant de l'extérieur à l'intérieur celui de $-2\pi i$, de manière qu'en chaque point de la sphère de Riemann elle a une infinité des valeurs, qui différent entre elles par $2q'\pi i$, q' étant un entier positif ou négatif; enfin, comme la fonction du § précédent, elle devient égale à zero pour $x=x_0$, $y=y_0$ (en négligeant les multiples de $2\pi i$).

83. Chaque contour fermé nous amène à une pareille fonction, qui cependant ne sera qu'une fonction linéaire des $2p$ fonctions $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ et $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$, ayant pour coéfficients des nombres entiers. En effet, un contour fermé quelconque peut être réduit à une suite déterminée des courbes A_z et B_h $(h=1,2,\ldots p)$, suivies dans l'un ou l'autre sens, et encore des contours fermés infiniment petite autour des points de ramification, qui cependant donneront les intégrales égales à zéro, ces intégrales étant prises suivant les chemins infiniment-petits des fonctions, qui y restent finies, comme on le voit par les formules (5) des deux §§ précédents; en désignant maintenant par m_h le nombre, qui indique de combien de fois le chemin d'intégration A_h a été suivi dans le sens positif plus souvent que dans le sens négatif, et par n_h le nombre qui indique la même chose pour la courbe B_h; en désignant encore par $\bar{\Omega}(x,y;x_0,y_0)$ la fonction qui se rapporte au chemin fermé considéré, on aura l'égalité:

$$\bar{\Omega}(x,y;x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{p}\left\{m_h\Omega(x,y;x_0,y_0)_h+n_h\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}, \tag{1}$$

et aussi cette autre (en vertu des équations (6) des §§ 81 et 82):

$$\bar{\Omega}(x,y;x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{p}\left(\bar{\eta}_k\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}-\bar{\omega}_k\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}\right), \tag{2}$$

en désignant par $\bar{\omega}_k$ et par $\bar{\eta}_k$ les valeurs des intégrales I_k et II_k de première et deuxième espèces, se rapportant au même chemin, ainsi qu'on a:

$$\bar{\omega}_k=\sum_{h=1}^{p}(m_h\omega_{kh}+n_h\omega'_{kh}), \tag{3}$$

$$\bar{\eta}_k=\sum_{h=1}^{p}(m_h\eta_{kh}+n_h\eta'_{kh}). \tag{4}$$

84. Les quantités ω_{kh} et ω'_{kh} $(h=1,2,3,\ldots p)$ sont *les périodes* *) de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ de première espèce; les quantités η_{kh} et η'_{kh} $(h=1,2,3,\ldots p)$ sont *les périodes* de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ de deuxième espèce. Tout chemin, qui mène du point (x_0,y_0) au point (x,y) peut être réduit par une déformation continue à une suite déterminée des chemins A_h et B_h $(h=1,2,3,\ldots p)$, suivis d'un chemin déterminé, qui amène directement du point (x_0,y_0) au point (x,y); ainsi, qu'en désignant par $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ les valeurs des intégrales qui se rapportent à ce dernier chemin, leurs valeurs se rapportants à tout autre chemin seront données par les formules:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}+\bar{\omega}_k=\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}+\sum_{h=1}^{p}(m_h\omega_{kh}+n_h\omega'_{kh}), \tag{1}$$

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}+\bar{\eta}_k=\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}+\sum_{h=1}^{p}(m_h\eta_{kh}+n_h\eta'_{kh}), \tag{2}$$

---

*) On désigne ces périodes par le nom des *périodes cycliques*. *E. Picard.* Traité d'Analyse. T. II, p. 392.

m_h, n_h $(h=1, 2, 3, \ldots p)$ étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs. Entre les périodes des intégrales de première et de deuxième espèces il existe des relations intéressantes et importantes pour notre théorie, qu'on déduit aisement des égalités (6) des §§ 81 et 82; c'est ce que nous montrerons dans le § suivant.

85. Dans les égalités mentionnées faisons le point (x, y) décrire la courbe fermée A_g, où nous supposerons $g \neq h$; ce chemin ne rencontrera pas ni A_h, ni B_h; par conséquent les fonctions $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ et $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$ reprendront leurs valeurs initiales, et leurs accroissements seront égaux à zéro, tandis que les intégrales

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} \quad \text{et} \quad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}, \tag{1}$$

qui entrent dans les seconds membres de ces égalités, recevront respectivement les accroissements

$$\omega_{kg} \quad \text{et} \quad \eta_{kg}; \tag{2}$$

en retranchant des égalités reçues après que le point (x, y) a décrit le chemin A_g les mêmes égalités à l'état primitif, on aura les relations suivantes entre les périodes des intégrales des deux premières espèces:

$$\sum_{k=1}^{p} (\eta_{kh}\omega_{kg} - \omega_{kh}\eta_{kg}) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} (\eta'_{kh}\omega_{kg} - \omega'_{kh}\eta_{kg}) = 0, \quad (h \neq g) \tag{4}$$

où dans la dernière on a indispensablement $h \neq g$, tandis que la première aura lieu aussi pour $h=g$, car alors chaque terme de la somme sera identiquement égal à zéro. De même, si l'on fait le point (x, y) décrire le chemin fermé B_g, où l'on a $h \neq g$, on tirera des mêmes égalités (6) §§ 81 et 82 par la même raison les égalités:

$$\sum_{k=1}^{p} (\eta_{kh}\omega'_{kg} - \omega_{kh}\eta'_{kg}) = 0, \tag{5}$$

qui ne diffère de (4) que par le facteur (-1), et

$$\sum_{k=1}^{p} (\eta'_{kh}\omega'_{kg} - \omega'_{kh}\eta'_{kg}) = 0, \tag{6}$$

qui aura lieu aussi pour $h=g$, chaque terme de la somme devenant alors identiquement nul. Si l'on fait, dans la même égalité (6) § 81 le point (x, y) décrire la courbe fermée B_h dans le sens positif, comme il passera en vertu de cela du côté gauche de la ligne A_h à son côté droit, la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0)_h$ recevra l'accroissement $2\pi i$, et l'on aura l'égalité:

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega'_{kh}-\omega_{kh}\eta'_{kh})=2\pi i. \tag{7}$$

En faisant le point (x, y) décrire la même courbe B_h dans le sens positif dans l'égalité (6) § 82, nous aurons l'égalité (6) du § présent pour $g=h$, c'est-à-dire une identité; si l'on fait, dans la même égalité (6) § 82, le point (x, y) décrire la courbe A_h dans le sens positif, comme il passera en vertu de cela du côté droit de la ligne B_h à son côté gauche, la fonction $\Omega'(x, y; x_0, y_0)_h$ acquerra l'accroissement $-2\pi i$, et l'on aura l'égalité:

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega_{kh}-\omega'_{kh}\eta_{kh})=-2\pi i, \tag{8}$$

qui ne diffère que par le facteur -1 de la précédente.

Ainsi nous avons reçu*) entre les périodes des intégrales de première et deuxième espèces quatre relations différentes, que nous allons réunir, vu de leur importance, dans cette table:

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega_{kg}-\omega_{kh}\eta_{kg})=0, \tag{I}$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega'_{kg}-\omega_{kh}\eta'_{kg})=0, \quad (h \neq g) \tag{II}$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega'_{kh}-\omega_{kh}\eta'_{kh})=2\pi i, \tag{III}$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega'_{kg}-\omega'_{kh}\eta'_{kg})=0. \tag{IV}$$

86. À l'aide de ces relations il est aisé de calculer le déterminant d'ordre $2p$, dont les éléments sont les périodes des intégrales de première et deuxième espèce, savoir:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \omega_{11} & \eta_{21} & \omega_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{p1} & \omega_{p1} \\ \eta_{12} & \omega_{12} & \eta_{22} & \omega_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{p2} & \omega_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{1p} & \omega_{1p} & \eta_{2p} & \omega_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_{pp} & \omega_{pp} \\ \eta'_{11} & \omega'_{11} & \eta'_{21} & \omega'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{p1} & \omega'_{p1} \\ \eta'_{12} & \omega'_{12} & \eta'_{22} & \omega'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{p2} & \omega'_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta'_{1p} & \omega'_{1p} & \eta'_{2p} & \omega'_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \eta'_{pp} & \omega'_{pp} \end{vmatrix} = \Delta, \tag{1}$$

*) Par la méthode de Weierstrass, donnée dans ses leçons sur la théorie des intégrales abéliennes.

qui est en même temps le déterminant du système de $2p$ équations linéaires (6) §§ 81 et 82, lorsqu'on y considère comme inconnues les intégrales $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ $(k=1,2,3,\ldots p)$. Effectuons p fois la permutation circulaire des lignes horisontales: cela introduira le facteur $(-1)^{(2p-1)p}=$ $=(-1)^p$; puis transposons entre elles les colonnes verticales de chaque paire 1-re et 2-me, 3-me et 4-me,...; c'est ce qui introduira encore une fois le facteur $(-1)^p$, qui avec l'autre donnera $(-1)^{2p}=+1$; maintenant multiplions les colonnes de rang pair par -1; cela introduira de nouveau le facteur $(-1)^p$, ainsi qu'on aura:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \omega'_{11} & -\eta'_{11} & \omega'_{21} & -\eta'_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{p1} & -\eta'_{p1} \\ \omega'_{12} & -\eta'_{12} & \omega'_{22} & -\eta'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{p2} & -\eta'_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega'_{1p} & -\eta'_{1p} & \omega'_{2p} & -\eta'_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega'_{pp} & -\eta'_{pp} \\ \omega_{11} & -\eta_{11} & \omega_{21} & -\eta_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p1} & -\eta_{p1} \\ \omega_{12} & -\eta_{12} & \omega_{22} & -\eta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{p2} & -\eta_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{1p} & -\eta_{1p} & \omega_{2p} & -\eta_{2p} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{pp} & -\eta_{pp} \end{vmatrix} = (-1)^p \Delta.$$

En multipliant les déterminants (1) et (2) d'après la règle connue, on aura en vertu des formules (I)—(IV) du § précédent:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 2\pi i & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 2\pi i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2\pi i & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2\pi i & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -2\pi i & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & & -2\pi i \end{vmatrix} = (-1)^p \Delta^2$$

ou, le déterminant se réduisant au terme principal:

$$(4)\qquad (-1)^p (2\pi i)^{2p} = (-1)^p \Delta^2,$$

d'ou l'on tire

$$(5)\qquad \Delta = \pm (2\pi i)^p.$$

87. Le déterminant du système des $2p$ équations (6) §§ 81 et 82, linéaires par rapport des intégrales de première et deuxième espèces $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ $(k=1,2,\ldots p)$, étant ainsi différent de zéro, le système pourra être résolu par rapport à ces intégrales; c'est ce que nous allons faire par la méthode des multiplicateurs indéterminés. À cet effet nous multiplierons les équations

$$\sum_{k=1}^{p}\left\{\eta_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k-\omega_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\}=\Omega(x,y;x_0,y_0)_h \tag{1}$$

par λ'_{gh}, et les équations

$$\sum_{k=1}^{p}\left\{\eta'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k-\omega'_{kh}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\}=\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h \tag{2}$$

par $-\lambda_{gh}$, et après les avoir ajouté, en prenons la somme par rapport à h de 1 à p; en changeant l'ordre des sommations par rapport à h et à k, on aura:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\left\{\sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh}-\lambda_{gh}\eta'_{kh}).\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k-\sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh}-\lambda_{gh}\omega'_{kh}).\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k\right\}=\\=\sum_{h=1}^{p}\left\{\lambda'_{gh}\Omega(x,y;x_0,y_0)_h-\lambda_{gh}\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Si l'on veut avoir d'ici l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g$, on doit poser:

$$\sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh}-\lambda_{gh}\eta'_{kh})=0, \qquad (k\neq g) \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\eta_{gh}-\lambda_{gh}\eta'_{gh})=1, \tag{5}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh}-\lambda_{gh}\omega'_{kh})=0, \tag{6}$$

d'où l'on aura les valeurs de λ_{gh} et λ'_{gh}. C'est ce qu'il est aisé de faire en vertu des relations (I)—(IV) du § 85. Pour trouver λ_{gj}, multiplions les équations (4) par ω_{kj}, (5) par ω_{gj}, (6) par $-\eta_{kj}$ et ajoutons les produits reçus pour $k=1, 2, \ldots p$; en ordonnant le résultat suivant les λ, nous aurons:

$$\sum_{h=1}^{p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega_{kj}-\omega_{kh}\eta_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega_{kj}-\omega'_{kh}\eta_{kj})\right\}=\omega_{gj}; \tag{7}$$

c'est ce qui se réduit d'après (I)—(IV) § 85 à celle-là:

$$-\lambda_{gj}(-2\pi i)=\omega_{gj}, \tag{8}$$

d'on l'ou trouve:

$$\lambda_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\omega_{gj}. \tag{9}$$

Pour trouver λ'_{gj}, multiplions les équations (4) par ω'_{kj}, (5) par ω'_{gj}, (6) par $-\eta'_{kj}$, et ajoutons les produits reçus pour $k=1, 2, 3 \ldots p$; en ordonnant le résultat suivant les λ, on aura:

$$(10) \qquad \sum_{h=1}^{p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega'_{kj}-\omega_{kh}\eta'_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega'_{kj}-\omega'_{kh}\eta'_{kj})\right\}=\omega'_{gj};$$

et cela se réduira d'après (I)—(IV) § 85 au suivant:

$$(11) \qquad 2\pi i\,.\,\lambda'_{gj}=\omega'_{gj},$$

d'où l'on trouvera:

$$(12) \qquad \lambda'_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\,\omega'_{gj}.$$

En portant les valeurs de λ_{gj} et λ'_{gj} de (9) et (12) dans l'égalité (3), on aura l'expression cherchée de l'intégrale de première espèce par les fonctions $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ et $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$:

$$(13) \qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{p}\left\{\omega'_{gh}\Omega(x,y;x_0,y_0)_h-\omega_{gh}\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}.$$

Si l'on veut avoir l'expression de l'intégrale de deuxième espèce $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g$ par les mêmes fonctions, on doit déterminer les facteurs indéterminés λ et λ' par les équations:

$$(14) \qquad \sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\eta_{kh}-\lambda_{gh}\eta'_{kh})=0,$$

$$(15) \qquad \sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\omega_{kh}-\lambda_{gh}\omega'_{kh})=0, \qquad (k\neq g)$$

$$(16) \qquad \sum_{h=1}^{p}(\lambda'_{gh}\omega_{gh}-\lambda_{gh}\omega'_{gh})=-1.$$

Pour trouver λ_{gj}, multiplions les équations (14) par ω_{kj}, (15) par $-\eta_{kj}$, (16) par $-\eta_{gj}$ et ajoutons les produits reçus pour $k=1,2,\ldots p$; en ordonnant le résultat suivant les λ, on aura:

$$(17) \qquad \sum_{h=1}^{p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega_{kj}-\omega_{kh}\eta_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega_{kj}-\omega'_{kh}\eta_{kj})\right\}=\eta_{gj};$$

cela se réduira d'après (I)—(IV) § 85 au suivant:

$$(18) \qquad -\lambda_{gj}(-2\pi i)=\eta_{gj},$$

d'où l'on trouvera

$$(19) \qquad \lambda_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\eta_{gj}.$$

Pour déterminer λ'_{gj}, multiplions les mêmes équations respectivement par ω'_{kj}, $-\eta'_{kj}$, $-\eta'_{gj}$ et ajoutons les produits obtenus pour $k=1,2,\ldots p$; après avoir ordonné le résultat suivant les λ, on aura:

$$\sum_{h=1}^{p}\left\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta_{kh}\omega'_{kj}-\omega_{kh}\eta'_{kj})-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{p}(\eta'_{kh}\omega'_{kj}-\omega'_{kh}\eta'_{kj})\right\}=\eta'_{gj}, \tag{20}$$

ce qui se réduira d'après (II)—(IV) § 85 à celui là:

$$\lambda'_{gj}\,.\,2\pi i=\eta'_{gj}, \tag{21}$$

d'où l'on trouve:

$$\lambda'_{gj}=\frac{1}{2\pi i}\eta'_{gj}. \tag{22}$$

En portant les valeurs de λ_{gj} et λ'_{gj} de (19) et (22) dans l'égalité (3), on aura l'expression cherchée de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_g$ de la deuxième espèce par les fonctions $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ et $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{p}\left\{\eta'_{gh}\Omega(x,y;x_0,y_0)_h-\eta_{gh}\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}. \tag{23}$$

Les formules (13) et (23) font montrer très bien la périodicité des intégrales de première et deuxième espèces: si le point (x,y) décrit la courbe fermée A_k dans le sens positif, toutes les fonctions Ω_h et Ω'_h reprendront leurs valeurs initiales, exceptée la fonction $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_k$, qui recevra l'accroissement $-2\pi i$, car le point (x,y) passera de l'extérieur à l'intérieur de la courbe fermée correspondante B_k, d'où résulteront pour les intégrales $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_g$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_g$ les accroissements ω_{gk} et η_{gk} respectivement; si le point (x,y) décrira dans le sens positif la courbe fermée B_k, toutes les fonctions Ω_h et Ω'_h reprendront leurs valeurs initiales, exceptée la fonction $\Omega(x,y;x_0,y_0)_k$, qui recevra l'accroissement $+2\pi i$, car le point (x,y) passera de l'intérieur à l'extérieur de la courbe A_k, d'où résulteront pour les intégrales $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_g$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_g$ d'après les formules (13) et (23) les accroissements respectifs ω'_{gk} et η'_{gk}.

Si l'on passe de l'un point quelconque de la ligne c_1 au point vis-à-vis à l'autre bord de cette même ligne par une ligne qui ne rencontra aucune des ligne $\overset{p}{\underset{1}{A}}{}_h$ et $\overset{p}{\underset{1}{B}}{}_h$, alors chacune des fonctions Ω_h et Ω'_h reviendra à sa valeurs initiale d'après les §§ 81 et 82 et d'après les formules (13) et (23) la même chose en résultera pour les intégrales $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$; le module de périodicité par rapport à ligne c_l est donc égal à zéro.

88. En portant les valeurs des λ et λ' des équation (9) et (12) du § précédent dans les égalités (4), (5) et (6) et des équations (19) et (22) dans les équations (14), (15) et (16) du même §, on aura des relations suivantes entre les périodes des intégrales des deux premières espèces:

$$\sum_{h=1}^{p}(\omega'_{gh}\eta_{kh}-\omega_{gh}\eta'_{kh})=0, \tag{1}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\omega'_{gh}\eta_{gh}-\omega_{gh}\eta'_{gh})=2\pi i, \tag{2}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\omega'_{gh}\omega_{kh}-\omega_{gh}\omega'_{kh})=0, \tag{3}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\eta'_{gh}\eta_{kh}-\eta_{gh}\eta'_{kh})=0, \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\eta'_{gh}\omega_{kh}-\eta_{gh}\omega'_{kh})=0, \tag{5}$$

$$\sum_{h=1}^{p}(\eta'_{gh}\omega_{gh}-\eta_{gh}\omega'_{gh})=-2\pi i, \tag{6}$$

dont les deux dernières ne diffèrent pas essentiellement de (1) et (2) respectivement, tandis que les autres présentent des relations nouvelles. Les deux premières ressemblent respectivement les équations (II) et (III) du § 85, mais en diffèrent en ce, que la sommation s'effectue ici suivant le second indice, qui se rapporte à la courbe de l'intégration, tandis que dans les formules citées du § 85 la sommation s'effectuait suivant le premier indice, se rapportant à l'intégrale du système fondamental. La formule (3) a été reçue par Riemann*) d'après le théorème de Cauchy, en intégrant l'expression

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_g}}\,.\,d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} \tag{7}$$

suivant le contour de la surface élémentaire T', en quelle se transforme la surface de Riemann par les coupures faites suivant les lignes A_h, B_h, C_h ($h=1, 2, \ldots p$) [§ 16]. L'expression (7) reste toujours finie à l'intérieur de cette surface élémentaire, pourquoi l'intégrale prise suivant son contour dans le sens positif, par exemple, d'après le théorème de Cauchy sera égale à zéro; d'un autre côté, cette intégrale pourra

*) V. *Riemann, B.* Werke. 2. Aufl., S. 131. (Theorie der Abelschen Funktionen, § 20.)

être décomposée en une somme des intégrales, se rapportant à chacune des lignes A_h, B_h, C_h $(h=1, 2, \ldots p)$, dont chacune est suivie une fois dans le sens positif, l'autre dans le sens négatif. Quant à la fonction $\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ — elle aura les mêmes valeurs sur les deux bords de chacune de ces lignes, étant uniforme sur la surface de Riemann; la même chose est à dire des valeurs de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_g}}$ (comme aussi des autres intégrales fondamentales de deux première espèces) sur les lignes C_k, qui seront les mêmes sur ses deux bords, le module de périodicité étant égal à zéro sur ces lignes d'après le § précédent, en vertu de quoi les intégrales relatives aux lignes C_h donneront en somme le zéro; suivant la ligne A_h au contraire les valeurs de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_g}}$ à droite de cette ligne sont plus de ω'_{gh} qu'à gauche d'elle aux points vis-à-vis, car on passe de l'un côté à l'autre en suivant pendant l'intégration la ligne B_h dans le sens négatif; parconséquent la somme des deux intégrales, se rapportants à cette ligne A_h, sera égale à

$$\int\limits_{(A_h)} \omega'_{gh} d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} = \omega'_{gh}\omega_{kh}; \tag{8}$$

suivant la ligne B_h l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_g}}$ a des valeurs moindres de ω_{gh} sur le côté droit de cette ligne, qu'aux points correspondants de son côté gauche, que l'on suit le premier pendant l'intégration, car on passe de ce côté à l'autre en cheminant le long A_h dans le sens négatif; parconséquent les intégrales se rapportants à la courbe B_h donneront en somme:

$$-\int\limits_{(B_h)} \omega_{gh} d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}} = -\omega_{gh}\omega'_{kh}. \tag{9}$$

En ajoutant les égalités (8) et (9), en sommant ensuite par rapport à h de 1 à p, on aura le premier membre de l'égalité (3) de Riemann.

De la même manière on peut recevoir les formules (1) et (2). Pour la première on n'a qu'à intégrer suivant le contour de la surface élémentaire T' l'expression:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}} \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_g}}; \tag{10}$$

les mêmes considérations nous conduisent au premier membre de l'équation (1) (changé du signe); quant à son second membre on le reçoit, en remarquant, que les deux facteurs de l'expression (10) restent partout finis, excepté le point (a_k, b_k) pour le premier facteur, qui y devient infini ∞^1 comme

$\frac{F'_h(a_k, b_k)}{x-a_k}$ pour $x=a_k$; mais au même point le second facteur devenant égal à zéro 0^1 comme $x-a_k$ pour $x=a_k$, le produit reste fini même en ce point; l'expression (10) restant partout finie sur la surface de Riemann T', son intégrale, prise suivant le contour de T' est d'après le théorème de Cauchy égale à zéro. — On supposait $k \neq g$; lorsqu'on a $k=g$, alors au point (a_g, b_g) le premier facteur devient infini comme

$$\frac{F'_y(a_g, b_g)}{x-a_g} \tag{11}$$

pour $x=a_g$, et l'autre égal à

$$\frac{1}{F'_y(a_g, b_g)}; \tag{12}$$

l'intégrale considérée, pouvant se réduire à l'intégrale autour du point (a_g, b_g) suivant un cercle infiniment petit, aura pour sa valeur $-2\pi i$, vu que ce point est à droite du chemin d'intégration; c'est ce pourquoi on aura l'équation (2), changé du signe.

En intégrant l'expression

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k \tag{13}$$

suivant le contour de T', on arrive de la même manière au premier membre de l'équation (4); quand à son second membre, on trouvera de cette manière sa valeur. À l'aide de (6) § 79, on aura:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k = \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k + \sum_{j=1}^{p} c_{kj} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g \frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j; \tag{14}$$

en intégrant, d'après (1) et (2) qui sont déjà démontré, on aura:

$$\int_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g d \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_k = \int_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g d \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k + 2\pi i c_{kg}; \tag{15}$$

d'après la même formule (6) § 79 on aura:

$$\int_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}_g d \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k = \int_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_g d \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi}}{}^0_k + \sum_{j=1}^{p} c_{gj} \int_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_j d \overset{x}{\underset{x}{\Pi}}{}^0_k. \tag{16}$$

Le premier terme à droite est nul, car au point (a_g, b_g) le premier facteur devenant infini comme (11), l'autre s'annulant comme $(x-a_g)$ pour $x=a_g$, la fonction à intégrer reste finie en ce point; au point (a_k, b_k) le premier facteur restant fini et l'autre devenant $=\infty^2$ comme

$$-\frac{F'_y(a_k, b_k)}{(x-a_k)^2}$$

pour $x=a_k$, le résidu est nul. Quant à la somme, tous les termes, où $j\neq k$, sont par la même raison égaux à zero; il ne reste à considérer que l'intégrale

$$\int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\, d\, \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\,.$$

Pour le trouver, remarquons que la fonction:

$$\frac{d}{dx}\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\,\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\right) \tag{17}$$

n'a qu'un seul infini double au point (a_k, b_k), en y devenant $=\infty^2$ comme

$$-\frac{1}{(x-a_k)^2}; \tag{18}$$

pour $x=a_k$; donc on aura

$$\int\limits_{(T')} \frac{d}{dx}\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\,\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\right) dx = 0, \tag{19}$$

mais comme on a

$$\frac{d}{dx}\left(\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\,\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\right) = \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}^0_k}}\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}} + \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}, \tag{20}$$

on aura, en intégrant cette égalité suivant le même contour, en vertu de (19):

$$0=\int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}} + \int\limits_{(T)} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}}\, d\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}, \tag{21}$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la valeur trouvée plus haut*) de la deuxième intégrale:

$$\int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}\, d\, \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi^0_k}} = -2\pi i. \tag{22}$$

En portant cette valeur dans (16), on aura $-2\pi i . c_{gk}$ pour celle de l'intégrale de son premier membre, laquelle étant mise dans l'égalité (15), nous donne:

$$\int\limits_{(T')} \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_g}}\, d\, \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k}} = (-c_{gk}+c_{kg})\, 2\pi i = 0 \tag{23}$$

en vertu de (19) § 69, parquoi l'équation (4) est aussi démontré par la méthode de Riemann.

---

*) Dans le cas plus générale de l'intégrale $\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k}}$.

89. La fonction $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$, définie par l'équation (8) § 81, en chaque point de la surface de Riemann possède une infinité des valeurs, qui diffèrent l'une de l'autre par un multiple de $2\pi i$, et est finie sur toute la surface de Riemann à l'exception des points fondamentaux $(a_k, b_k)_1^p$, où elle devient infinie: ∞^1, comme l'expression (9) du même §. Si l'on prend cette fonction pour l'exposant d'une puissance du nombre e (la base du système naturel des logarithmes), on aura une fonction transcendante:

$$E(x,y;x_0,y_0)_h = e^{\Omega(x,y;x_0,y_0)_h}, \tag{1}$$

qui sera uniforme sur toute la surface de Riemann, car on a $e^{\pm 2q\pi i} = 1$, partous finie et différente de zéro à l'exception des points $(a_k, b_k)_1^p$ qui en seront *des points singuliers essentiels* (wesentlich-singuläre Stellen, Weierstrass), car elle y prendra toute valeur, grâce au facteur

$$e^{-\omega_{kh}\frac{F'_y(a_k,b_k)}{x-a_k}}, \tag{2}$$

qui s'en détache, si l'on développe la fonction Ω_h en une série suivant les puissances de $x-a_k$, convergente dans le voisinage de ce point [(9) § 81]; pour $x=x_0$, $y=y_0$ elle devient égale à l'unité, son exposant $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$ devenant égal à zéro:

$$E(x,y;x_0,y_0)\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} = 1. \tag{3}$$

Par ces propriétés la fonction $E(x,y;x_0,y_0)_h$ est définie complètement; car soit $E_1(x,y;x_0,y_0)_h$ une autre fonction pareille, uniforme sur la surface de Riemann, partous finie, égale à l'unite au point (x_0,y_0), et aux points $(a_k, b_k)_1^p$ caractérisée par le facteur (2); alors le quotient

$$\frac{E_1(x,y;x_0,y_0)}{E(x,y;x_0,y_0)_h} \tag{4}$$

sera une fonction finie et continue sur toute la surface de Riemann pour $\overset{m}{F}(x,\overset{n}{y})=0$, même aux points $(a_k, b_k)_1^p$, car le facteur (2) disparait du quotient (4), quand on remplace ses deux termes par leurs développements, ayants lieu au voisinage de ce point. Mais alors ce quotient est une constante *), qui ne peut être que l'unité, car il prend cette valeur au point (x_0,y_0). C'est ce qu'il fallait démontrer.

*) V. la première note marginale du § 57.

De même, en prenant pour l'exposant d'une puissance du même nombre e la fonction $\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h$ définie par l'équation (7) § 82 et qui possède les mêmes propriétés que la fonction $\Omega(x,y;x_0,y_0)_h$, on aura une nouvelle fonction:

$$E(x,y;x_0,y_0)_h = e^{\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h}, \tag{5}$$

de même uniforme sur toute la surface de Riemann, finie et différente de zéro partous à l'exception des points $\overset{p}{\underset{1}{(a_k,b_k)}}$, qui en seront les points essentiels, car grâce au facteur:

$$e^{-\omega'_{kh}\frac{F'_y(a_k,b_k)}{x-a_k}}, \tag{6}$$

qui s'en détache après le développement de l'exposant de e en une série convergente au voisinage du point (a_k, b_k), elle y prendra toute valeur; au point (x_0, y_0) elle deviendra égale à l'unité:

$$E'(x,y;x_0,y_0)_h\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} = 1. \tag{7}$$

La fonction $E'(x,y;x_0,y_0)_h$ est complètement déterminée par ces propriétés; c'est ce qu'on démontre de la même manière que pour la fonction (1).

Il y a en tout $2p$ fonctions de la forme (1) et (5) qui différent entre elles par les facteurs (2) et (6), où $h=1,2,\ldots p$, qui s'en détachent aux points singuliers essentiels pour la même valeur de l'indice k, se rapportant au point singulier considéré. *Weierstrass* les a nommé *fonctions primaires* (Prim-Funktionen), *de première espèce* — ajoutons-nous, car nous rencontrerons encore d'autres fonctions, qui portent le même nom. La fonction plus générale de même espèce, qu'on aura, en prenant pour l'exposant de la puissance du nombre e la fonction plus générale $\bar{\Omega}(x,y;x_0,y_0)$ qui se rapporte à un chemin fermé quelconque, et que nous désignerons ainsi:

$$\bar{E}(x,y;x_0,y_0) = e^{\bar{\Omega}(x,y;x_0,y_0)}, \tag{8}$$

en vertu de (1) § 83 se décompose en produit de puissances positives ou négatives des fonctions primaires, considérées tout à l'heure:

$$\bar{E}(x,y;x_0,y_0) = \prod_{h=1}^{p}\Big(E(x,y;x_0,y_0)_h\Big)^{m_h}\cdot\Big(E'(x,y;x_0,y_0)_h\Big)^{n_h}. \tag{9}$$

Weierstrass a démontré de plus, que toute fonction $E(x, y; x_0, y_0)$, uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\ n}{F(x,y)} = 0$, finie, différente de zéro et continue à l'exception des points $\overset{p}{\underset{1}{(a_k, b_k)}}$, qui seront pour elle des points singuliers essentiels à cause du facteur, qui s'en détache au voisinage de ces points, de la forme

$$(10) \qquad e^{c_k \frac{F'_y(a_k, b_k)}{x - a_k}}$$

pour le point (a_k, b_k), n'est que la fonction $\bar{E}(x, y; x_0, y_0)$, définie par l'égalité (8), les constantes c_k se réduisant absolument à des fonctions linéaires des périodes des intégrales de première espèce à coéfficients entiers. Pour démontrer cette proposition de grande importance, remarquons avec Weierstrass que la dérivée logarithmique d'une telle fonction, multipliée par $F'_y(x, y)$, étant uniforme sur la surface de Riemann, finie et continue à l'exception des p pôles du second ordre $\overset{p}{\underset{1}{(a_k, b_k)}}$, où elle devient infinie en vertu de (10) comme:

$$(11) \qquad -c_k \frac{F'_y(a_k, b_k) F'_y(x, y)}{(x - a_k)^2}$$

pour $x = a_k$, $y = b_k$, sera, en vertu de la proposition de § 40, une fonction rationnelle de (x, y) et adjointe, qui par la même raison qu'au § 67 pourrait être représentée en fonction linéaire des fonctions adjointes des deux premières espèces seulement; on aurait donc:

$$(12) \qquad D_x \log \mathfrak{E}(x, y; x_0, y_0) = \sum_{h=1}^{p} \Big(\lambda_h \bar{E}_h(x, y) - \mu_h \varphi_h(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \Big);$$

en comparant les coéfficients du terme avec $\frac{1}{(x - a_k)^2}$ dans les développements des deux membres de cette égalité, on trouve de suite en vertu de (11) et de la formule (5) § 61, appliquée en vertu de (21) § 69 aux fonctions considérées de deuxième espèce:

$$(13) \qquad \lambda_k = c_k.$$

En changeant pour plus de symmétrie μ_h en c'_h, on pourra écrire l'équation (12) de cette manière:

$$(14) \qquad D_x \log \mathfrak{E}(x, y; x_0, y_0) = \sum_{h=1}^{p} \Big(c_h \bar{E}_h(x, y) - c'_h \varphi_h(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) \Big);$$

en la multipliant maintenant par $\frac{dx}{F'_y(x, y)}$ et en intégrant suivant les courbes $A_k, B_k, (k=1,2,\ldots p)$, on aura le système suivant de $2p$ équations linéaires en $\overset{p}{\underset{1}{c_h}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{c'_h}}$:

$$2q_k\pi i=\sum_{h=1}^{p}(c_h\eta_{hk}-c'_h\omega_{hk}); \tag{15}$$

$$2q'_k\pi i=\sum_{h=1}^{p}(c_h\eta'_{hk}-c'_h\omega'_{hk}), \tag{16}$$

(pour $k=1,2,3,\ldots p$), q_k et q'_k étant des entiers, car le logarithme d'une fonction uniforme, comme l'est $\mathfrak{E}(x,y;x_0,y_0)$ d'après notre supposition, ne peut recevoir autre valeur après le retour de (x,y) au point de départ que celle, qui diffère de la primitive d'un multiple de $2\pi i$. Pour trouver c_g, multiplions l'équation (15) par ω'_{gk}, l'équation (16) par $-\omega_{gk}$, et prenons après cela la somme de toutes ces équations pour $k=1,2,3,\ldots p$; nous aurons en vertu de (1), (2), (3) de § 88:

$$c_g=\sum_{k=1}^{p}(q_k\omega'_{gk}-q'_k\omega_{gk}), \tag{17}$$

c'est ce qui démontre notre proposition. On trouvera de la même manière, que

$$c'_g=\sum_{k=1}^{p}(q_k\eta'_{gk}-q'_k\eta_{gk}). \tag{18}$$

On voit que c_g et c'_g ont la forme (3) et (4) § 83; ce sont donc les périodes correspondantes des intégrales de première et de deuxième espèces. En intégrant (14), après l'avoir multiplié par $\frac{dx}{F'_y(x,y)}$, de (x_0,y_0) à (x,y), et en passant du logarithme au nombre lui-même, on aura pour $\mathfrak{E}(x,y;x_0,y_0)$ une expression analogue au (8) en vertu de (2) § 83.

90. En prenant les logarithmes, on tire des équations (1) et (5) du § précédent:

$$\Omega(x,y;x_0,y_0)_h=\log E(x,y;x_0 y_0)_h \tag{1}$$

$$\Omega'(x,y;x_0,y_0)_h=\log E'(x,y;x_0,y_0)_h. \tag{2}$$

En portant ces expressions dans les équations (13) et (23) § 87, nous aurons les expressions des intégrales de première et de deuxième espèces par les fonctions primaires de la première espèce:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{p}\left\{\omega'_{gh}\log E(x,y;x_0,y_0)_h-\omega_{gh}\log E'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}, \tag{3}$$

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{p}\left\{\eta'_{gh}\log E(x,y;x_0,y_0)_h-\eta_{gh}\log E'(x,y;x_0,y_0)_h\right\}. \tag{4}$$

Par les mêmes fonctions primaires de la première espèce et par les fonctions primaires de la deuxième espèce s'expriment aussi les intégrales de troisième espèce, comme nous le verrons au § suivant, et les fonctions algébriques, uniformes sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, comme on le verra dans le chapitre suivant, et parconséquent l'intégrale de la deuxième espèce avec le paramètre (ξ, y_ξ), qui se réduit à l'aide d'une fonction algébrique uniforme sur la surface de Riemann considérée, aux intégrales fondamentales de deuxième espèce d'après la formule (7) § 77.

91. On tire de l'équation (13) § 79:

$$(1)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{\xi,\xi_0} = \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{x,x_0} + \sum_{k=1}^{p}\left(\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k\right);$$

posons maintenant:

$$(2)\qquad \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{III}}}{}^{0}_{x,x_0} = \int_{\xi_0}^{\xi} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}) \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}).$$

Cette équation définit une fonction de (x, y), qui sera uniforme sur la surface de Riemann, tant que le point (x, y) ne passe pas par la ligne d'intégration allant du point (ξ_0, y_{ξ_0}) au point (ξ, y_ξ); sur la ligne d'intégration elle même le point (x, y) ne peut pas se trouver, car alors l'intégrale n'aura pas de sens; il faut alors, en intégrant, le devier suivant un demicercle infiniment petit, en le laissant du côté droit ou du côté gauche de la ligne d'intégration, et il en suivra alors, comme en § 81, qu'à gauche de la ligne d'intégration la valeur de la fonction sera moindre de $2\pi i$ qu'à sa droite, de sorte que (x, y) traversant de gauche à droite cette ligne, notre fonction reçoit l'accroissement brusque de $+2\pi i$, et $-2\pi i$, si (x, y) la traverse en sens inverse, c'est-à-dire de droite à gauche. Aux extrémités de la ligne d'intégration la fonction devient infinie: au point (ξ, y_ξ) comme

$$(3)\qquad -\log(\xi - x)\Big|_{x=\xi},$$

et au point (ξ_0, y_{ξ_0}) comme

$$(4)\qquad +\log(\xi_0 - x)\Big|_{x=\xi_0};$$

au point $(x = x_0, y = y_0)$ elle devient égale à zéro et aux points $(\overset{p}{\underset{1}{a_k, b_k}})$ à l'infini du premier ordre: ∞^1. En effet, pour le point (x, y), situé au voisinage du point (a_k, b_k), on aura d'après (7) § 60, (4) § 61 et (5) § 58:

$$P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{1}{F'_y(\xi, y_\xi)} = -P_{x,x_0}(a_k, b_k; a_1, b_1, \ldots \overset{(k)}{\xi, y_\xi}, \ldots a_p, b_p)\frac{\overset{m-2\,n-2}{\varphi_k(\xi, y_\xi)}}{F'_y(\xi, y_\xi)} =$$

$$= + \frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x} \cdot \frac{\overset{m-2\,n-2}{\varphi_k(\xi, y_\xi)}}{F'_y(\xi, y_\xi)} - \mathfrak{P}(a_k - x)\frac{\overset{m-2\,n-2}{\varphi_k(\xi, y_\xi)}}{F'_y(\xi, y_\xi)}; \tag{5}$$

[en comprenant, dans le second terme, le facteur constant $F'_y(a_k, b_k)$ sous le signe $\mathfrak{P}(a_k - x)$]; en multipliant cette égalité par $d\xi$ et en intégrant de ξ_0 à ξ, on aura d'ici:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x}\,\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}_k}} - \int_{\xi_0}^{\xi} \mathfrak{P}(a_k - x)\frac{\overset{m-2\,n-2}{\varphi_k(\xi, y_\xi)}}{F'_y(\xi, y_\xi)}\,d\xi, \tag{6}$$

d'où il suit que pour $x = a_k$, $y = b_k$ notre fonction devient infinie: ∞^1, comme

$$\left.\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x}\,\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}_k}}\right|_{x = a_k}, \tag{7}$$

le second terme de l'égalité (6) étant fini pour $x = a_k$.

Comme le point (x, y), grâce à la connexion multiple de la surface de Riemann peut autant de fois, qu'on voudra, passer à travers de la ligne d'intégration dans le même sens, on en conclut, que la fonction $\Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})$ aura en chaque point de la surface de Riemann une infinité des valeurs, différentes entre elles par des multiples de $2\pi i$. Si l'on prend maintenant cette fonction pour l'exposant d'une puissance du nombre e, on aura une fonction nouvelle:

$$E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) = e^{\Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})}, \tag{8}$$

qui sur toute la surface de Riemann pour $\overset{m\ n}{F(x, y)} = 0$ sera uniforme, finie et continue à l'exception des points $\overset{p}{\underset{1}{(a_k, b_k)}}$, qui en seront les points singuliers essentiels, car en développant l'exposant en une série suivant les puissances de $x - a_k$, convergente au voisinage du point (a_k, b_k), on faira s'en détacher le facteur:

$$e^{\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x}\,\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}_k}}}, \tag{9}$$

grâce auquel elle recevra toute valeur en ce point, — et du point (ξ, y_ξ), où elle devient infinie: ∞^1 en vertu de (3), car on a

$$e^{-\log(\xi - x)} = \frac{1}{\xi - x}; \tag{10}$$

au point (ξ, y_{ξ_0}) elle devient égale à zéro: 0^1 en vertu de (4), car on a

$$e^{\log(\xi_0 - x)} = \xi_0 - x; \tag{11}$$

au point (x_0, y_0) elle devient égale à l'unité, l'exposant dans la formule (8) s'annulant en ce point:

$$E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) \Big|_{x = x_0,\, y = y_0} = 1. \tag{12}$$

Cette fonction s'appelle *la fonction primaire de deuxième espèce*: elle a un seul zéro [au point (ξ_0, y_{ξ_0})], un seul infini [au point (ξ, y_ξ)], et p points singuliers essentiels $(a_k, b_k)_1^p$. Par les propriétés énumérées elle est définie à un facteur primaire général de première espèce près. En effet, soit

$$E_1(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) \tag{13}$$

une autre fonction qui, étant uniforme sur la surface de Riemann, a un zéro au point (ξ_0, y_{ξ_0}), un infini au point (ξ, y_ξ), p points singuliers essentiels $(a_k, b_k)_1^p$, caractérisés par des facteurs du type (9), et qui devient égale à l'unité au point (x_0, y_0); le quotient

$$\frac{E_1(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})}{E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0})} \tag{14}$$

sera une fonction uniforme sur la surface de Riemann considérée, sans zéros et sans infinis, mais avec les p points singuliers essentiels $(a_k, b_k)_1^p$, car au point (a_k, b_k) le quotient des facteurs du type (9), l'un du numérateur, l'autre du dénominateur, se réduira à

$$e^{-\frac{F'_y(a_k, b_k)}{x - a_k} \overline{\omega}_k}, \tag{15}$$

les intégrales $\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k$, comme ayant les mêmes limites, ne pouvant différer entre elles que par une fonction linéaire des périodes, à coéfficients entiers, c'est ce qui est $\overline{\omega}_k$ d'après (3) § 83, et qui devient égale à l'unité au point (x_0, y_0); ce quotient ne sera donc autre chose, que la fonction $\bar{E}(x, y; x_0, y_0)$, définie par l'égalité (8) § 89, c'est ce qu'il fallait démontrer.

92. En prenant les logarithmes, on tire de l'égalité (8) du § précédent:

$$\Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) = \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}); \tag{1}$$

en le portant dans l'égalité (1) du § précédent, présentée d'abord, d'après (2) du § précédent, sous la forme:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi, \xi_0} = \Omega(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \sum_{k=1}^{p} \left\{ \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k \right\}, \tag{2}$$

on aura:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi, \xi_0} = \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \sum_{k=1}^{p} \left\{ \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k - \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \cdot \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k \right\}; \tag{3}$$

la première de ces formules donne l'expression de l'intégrale de troisième espèce par la fonction Ω, la seconde par la fonction primaire de la deuxième espèce, pour laquelle les paramètres de l'intégrale sont: le premier (ξ, y_ξ) l'infini, le second (ξ_0, y_{ξ_0}) le zéro. — Si l'on porte ici aulieu des intégrales $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k$ et $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k$ leurs expressions par les fonctions primaires de la première espèce, tirées des formules (3) et (4) § 90, on aura:

$$\begin{aligned} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}^0_{\xi, \xi_0} &= \log E(x, y; x_0, y_0 \mid \xi, y_\xi; \xi_0, y_{\xi_0}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{p} \left\{ \sum_{k=1}^{p} \left(\eta'_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \right) \log E(x, y; x_0, y_0)_h - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{p} \left(\eta_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \right) \log E'(x, y; x_0, y_0)_h \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Les coéfficients des $\log E(\ldots)_h$ et $\log E'(\ldots)_h$ dans cette formule peuvent être aussi exprimées par les fonctions primaires de première espèce. En effet, à l'aide des égalités (1) et (2) § 90 on pourra représenter les équations (6) § 81 et (6) § 82 de cette manière:

$$\log E(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{p} \left(\eta_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k \right), \tag{5}$$

$$\log E'(x, y; x_0, y_0)_h = \sum_{k=1}^{p} \left(\eta'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega'_{kh} \overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k \right); \tag{6}$$

en changeant dans ces formules (x, y) en (ξ, y_ξ), puis en (ξ_0, y_{ξ_0}), et en retranchant le dérnier résultat du premier, on aura:

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\eta_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}_k - \omega_{kh} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}_k \right) = \log \frac{E(\xi, y_\xi; x_0, y_0)_h}{E(\xi_0, y_{\xi_0}; x_0, y_0)_h}; \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{p}\Big(\eta'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k-\omega'_{kh}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}{}_k\Big)=\log\frac{E'(\xi,y_\xi;x_0,y_0)_h}{E'(\xi_0,y_{\xi_0};x_0,y_0)_h}. \tag{8}$$

En portant ces expressions dans l'égalité (4), on aura l'expression de l'intégrale de troisième espèce par les fonctions primaires des deux espèces:

$$\begin{aligned}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\xi_0}&=\log E(x,y;x_0,y_0\mid\xi,y_\xi;\xi_0,y_{\xi_0})+\\ &+\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{p}\Big\{\log\frac{E'(\xi,y_\xi;x_0,y_0)_h}{E'(\xi_0,y_{\xi_0};x_0,y_0)_h}\log E(x,y;x_0,y_0)_h-\\ &\qquad-\log\frac{E(\xi,y_\xi;x_0,y_0)_h}{E(\xi_0,y_{\xi_0};x_0,y_0)_h}\log E'(x,y;x_0,y_0)_h\Big\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Il est indispensable de rappeler, qu'on entend sous le log dans toutes ces formules celle de ses valeurs, qui s'évanouit, lorsque la quantité située sous ce signe devient égale à l'unité; c'est alors seulement que ces expressions sont tout à fait déterminées.

On tire des formules précédentes les diverses expressions des périodes de l'intégrale de troisième espèce. Si l'on fait le point (x,y) décrire la courbe fermée A_g dans le sens positif dans les égalités (4) et (9), on aura, en retranchant du résultat reçu les mêmes formules à l'état primitif, les égalités suivantes:

$$\overset{0}{\underset{(A_g)}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\xi_0}=+\sum_{k=1}^{p}\Big(\eta_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k-\omega_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}{}_k\Big)=+\log\frac{E(\xi,y_\xi;x_0,y_0)_g}{E(\xi_0,y_{\xi_0};x_0,y_0)_g}; \tag{10}$$

si l'on fait décrire le point (x,y) la courbe B_g dans le sens positif, on aura:

$$\overset{0}{\underset{(B_g)}{\mathrm{III}}}{}_{\xi,\xi_0}=+\sum_{k=1}^{p}\Big(\eta'_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}}}{}_k-\omega'_{kg}\overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}}}{}_k\Big)=+\log\frac{E'(\xi,y_\xi;x_0,y_0)_g}{E'(\xi_0,y_{\xi_0};x_0,y_0)_g}; \tag{11}$$

car en suivant le chemin A_g, on passe du côté extérieur au côté intérieur de la ligne fermée B_g, et parconséquent l'accroissement de log $E'(\ldots)_g$ sera égale à $-2\pi i$; en suivant le chemin B_g, on passe du côté intérieur de la ligne A_g à sont côté extérieur, parconséquent l'accroissement de $\log E(\ldots)_g$ sera égale à $+2\pi i$. En outre le passage du point (x,y) à travers de la ligne de l'intégration [formule (3)] donne le $2p+1$-ième période de l'intégrale de troisième espèce *), savoir:

$$2\pi i. \tag{12}$$

---

*) On le nomme *le période polaire*. E. Picard. Traité d'Analyse, T. II, p. 392.

Les périodes de l'intégrale normale de troisième espèce s'obtiènnent sans difficulté des dernières formules du § présent. D'après (12) § 79 on a:

$$\underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \underset{(A_g)}{\overset{0}{\mathrm{III}}}_{\xi,\xi_0} + \sum_{k=1}^{p} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{II}_k}} \underset{(A_g)}{\mathrm{I}_k}; \tag{13}$$

donc d'après (10) du § présent (première forme) on aura:

$$\underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \sum_{k=1}^{p} \eta_{kg} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}_k}}.\,^{*)} \tag{14}$$

De la même manière on trouvera d'après (11) du § présent

$$\underset{(B_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} = \sum_{k=1}^{p} \eta'_{kg} \overset{\xi}{\underset{\xi_0}{\mathrm{I}_k}}. \tag{15}$$

Nous désignerons quelquefois ces périodes par ζ_g et ζ'_g, ainsi qu'on aura:

$$\zeta_g = \underset{(A_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0} \tag{16}$$

$$\zeta'_g = \underset{(B_g)}{\mathrm{III}}_{\xi,\xi_0}. \tag{17}$$

Dans ce qui précède, nous avons exprimé par les fonctions primaires de première et de deuxième espèces les intégrales abéliennes de toutes les trois espèces d'après Weierstrass; dans le chapitre suivant nous montrerons d'après lui, que toute fonction algébrique, uniforme sur la même surface de Riemann, s'exprime aussi par les fonctions primaires: de là on aura de soi-même le théorème célèbre d'Abel.

---

*) Vu que $\underset{(A_g)}{\mathrm{I}_k} = \omega_{kg}$.

Chapitre V.

Expression d'une fonction rationnelle de (x, y), uniforme sur la surface de Riemann, par les fonctions primaires. Théorème d'Abel.

93. Nous avons montré dans le § 51 de quelle manière peut-on déterminer une fonction de (x, y), qui deviendrait égale à ∞^1 aux m' points donnés de la surface de Riemann, à quoi il reste encore $m'-p+1$ des coéfficients indéterminés, par rapport auxquels cette fonction sera linéaire et homogène. De ces coéfficients $m'-p$ peuvent être déterminés de manière, que la fonction devient égale à 0^1 en $m'-p$ points de la surface de Riemann, donnés arbitrairement; le facteur commun de tous les termes qui restera encore indéterminé après cela, se détermine par la condition, que la fonction prènne en un point de la surface de Riemann, donné arbitrairement, par exemple (x_0, y_0) (différent des points singuliers et des points fondamentaux) une valeur donnée, l'unité par exemple. Sans la dernière condition la fonction sera déterminé à un facteur constant près; soit

$$z = C\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} \tag{1}$$

une telle fonction; en posant ici $x = x_0, y = y_0$, on aura d'après la dernière condition:

$$1 = C\frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}; \tag{2}$$

en divisant par cette égalité la précédente, on aura:

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}. \tag{3}$$

Désignons les m' zéros de cette fonction par

$$(\alpha_i, y_{\alpha_i}), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m') \tag{4}$$

et ses m' infinis par

$$(x_i, y_i); \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m') \tag{5}$$

ces derniers tous peuvent être donnés arbitrairement, tandis que des premiers seulement $m'-p$ peuvent l'être, les p restants étant alors complètement déterminés, (ou à l'inverse).

94. D'après le § 91 on peut toujours construire une fonction primaire de (x, y):

$$E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}), \tag{1}$$

qui en un seul point (α_i, y_{α_i}) devient égale à zéro 0^1 et en un seul point (x_i, y_i) infinie ∞^1 du premier ordre, qui devient en outre égale à l'unité au point (x_0, y_0); elle aura, comme nous l'avons vu, p points singuliers essentiels $(a_j, b_j)_1^p$ (les points fondamentaux). Après avoir formé m' des pareilles fonctions et puis leur produit:

$$\prod_{i=1}^{m'} E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}), \tag{2}$$

on aura une fonction, qui de même que la fonction (3) du § précédent, sera uniforme sur toute la surface de Riemann, deviendra égale à zéro 0^1 aux points (4) du § précédent et à l'infini ∞^1 aux points (5) de même §, enfin à l'unité au point (x_0, y_0), comme la fonction mentionnée tout à l'heure [(3) § 93]; parconséquent le quotient:

$$\left(\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}\right) : \prod_{i=1}^{m'} E(x, y; x_0, y_0 \mid x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i}) \tag{3}$$

sera une fonction uniforme, finie et continue sur toute la surface de Riemann à l'exception des p points $(a_k, b_k)_1^p$, qui en seront les points singuliers essentiels, car au voisinage de ces points se détachent d'elle en vertu de (9) § 90 les facteurs de la forme:

$$e^{-\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x} \sum_{i=1}^{m'} \mathrm{I}_k{}_{\alpha_i}^{x_i}}, \tag{4}$$

et qui devient égale à l'unité au point (x_0, y_0); ce ne sera donc, d'après le § 89, autre chose que la fonction primaire de première espèce $\bar{E}(x, y; x_0, y_0)$, les sommes

$$\sum_{i=1}^{m'} \mathrm{I}_k{}_{\alpha_i}^{x_i} \tag{5}$$

se réduisant d'après le § 89 aux fonctions linéaires des périodes de l'intégrale avec les coéfficients entiers. (C'est ce qui est déjà un résultat important en soi-même, comme on le verra plus loin). D'où il suivra, que

$$(6)\qquad \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}:\frac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)}=\prod_{i=1}^{m'} E(x,y;x_0,y_0\,|\,x_i,y_i;\alpha_i,y_{\alpha_i})\,.\,\bar{E}(x,y;x_0,y_0).$$

Les chemins d'intégration des m' intégrales, qui entrent d'après (8) § 91 dans la définition des fonctions primaires $E(\ldots|\ldots)$ de la deuxième espèce, sont tout à fait arbitraires; le chemin d'intégration de l'intégrale, qui entre dans la définition de la fonction $\bar{E}(x,y;x_0,y_0)$, pourra être réuni au celui qui entre dans la définition du dernier facteur du produit en (7), pourquoi ce facteur se confondra avec le dernier du produit, de sorte, qu'en le supposant déjà fait, on pourra écrire la dernière formule plus simplement ainsi:

$$(7)\qquad \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}:\frac{\psi(x_0,y_0)}{\chi(x_0,y_0)}=\prod_{i=1}^{m'} E(x,y;x_0,y_0\,|\,x_i,y_i;\alpha_i,y_{\alpha_i}),$$

où déjà seulement les $m'-1$ chemins d'intégration, à l'aide desquelles sont définis les $m'-1$ premiers facteurs du produit, sont tous à fait arbitraires, et celui du dernier facteur doit être choisi d'une manière convenable, afin que cette égalité soit juste.

On voit ainsi qu'en effet toute fonction rationnelle de (x,y), uniforme sur la surface de Riemann considérée, peut être décomposée en facteurs, savoir les fonctions primaires de la deuxième espèce, répondant chacune à l'une des paires, composée chacune d'un zéro et d'un infini de la fonction donnée, associés à volonté, et uniformes sur la surface de Riemann considérée. — Nous avons supposées différentes seulement dans la notation toutes les paires $(x_i,y_i)_1^{m'}$ et toutes les paires $(\alpha_i,y_{\alpha_i})_1^{m'}$, tandis que de fait quelquesunes des premières entre elles, de même que quelquesunes des secondes entre elles, peuvent être égales; dans ce cas dans les séries (4), respectivement (5) du § 93, chaque paire doit être écrite autant de fois, qu'il y a d'unités dans l'exposant de son ordre de multiplicité: alors dans le cas des zéros et des infinis multiples autant des facteurs à droite dans l'équation (8) s'annuleront à la fois, ou deviendront respectivement infinis. Il y a une différence ici avec la décomposition en facteurs primaires d'une fonction rationnelle sur une sphère ordinaire en ce, que les facteurs primaires sur la surface de Riemann ne sont défini qu'à un facteur primaire de première espèce près (voir le § 91) pour chaque paire composée d'un zéro et d'un infini de la fonction donnée, et sont des fonctions transcendantes, tandis que dans le cas de $p=0$ — celui de la sphère ordinaire, ils sont algébriques, rationnels.

95. Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'égalité (7) du § précédent, on aura, ayant égard aux égalités (2) et (8) § 91:

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_{\alpha_i}^{x_i} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; a_j \overset{p}{\underset{1}{;}} b_j)\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \log\left\{\frac{\psi(x,y)\,.\,\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\,.\,\psi(x_0,y_0)}\right\}. \tag{1}$$

Cette équation exprime *le théorème d'Abel pour les intégrales de troisième espèce*: „la somme des intégrales abéliennes de troisième espèce avec les paramètres (x,y) et (x_0,y_0), prises des zéros aux infinis d'une fonction algébrique donnée, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, est égal au logarithme du quotient des valeurs de cette fonction aux points analytiques qui répondent aux paramètres de l'intégrale".

La fonction à droite dans l'équation (1), ne dépendant pas des points fondamentaux, on aura de même:

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_{\alpha_i}^{x_i} P_{x,x_0}(\xi, y_\xi; \alpha_j \overset{p}{\underset{1}{;}} \beta_j)\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = \log\left\{\frac{\psi(x,y)\,.\,\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\,.\,\psi(x_0,y_0)}\right\}; \tag{2}$$

donc, en retranchant d'ici la précédente, on aura d'après (12) § 58 l'équation suivante:

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_{\alpha_i}^{x_i} \varphi(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = 0, \tag{3}$$

qui exprime *le théorème d'Abel pour les intégrales abéliennes de première espèce*: „la somme des valeurs des intégrales de première espèce, prises des zéros aux infinis d'une fonction algébrique, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, est égale à zéro".

En particulier on aura:

$$\sum_{i=1}^{m'}\int_{\alpha_i}^{x_i} \varphi_h(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)} = 0, \tag{4}$$

ou, plus brièvement:

$$\sum_{i=1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_h}} = 0. \tag{5}$$

Cette équation n'est pas en contradiction avec la valeur, que nous avons reçue pour son premier membre au § 94, en démontrant la formule (6) du même §, car là tous les chemins d'intégration étaient arbitraires, et ici, comme dans la formule (7) du § précédent et dans toutes les formules du § présent, le chemin dans la dernière intégrale ne l'est plus; si l'on veut laisser aussi ce chemin arbitraire, on doit ajouter aù son second membre une fonction linéaire des périodes de l'intégrale avec des coéfficients entiers, et on aura alors le résultat du § 94. On doit ajouter les fonctions linéaires des périodes des intégrales correspondantes aux seconds membres d'autres formules du § présent, si l'on préfère de laisser arbitraire dans ces formules aussi le chemin d'intégration dans la dernière intégrale.

On apperçoit qu'il existe une liaison intime entre le théorème d'Abel et la décomposition d'une fonction rationnelle de (x, y), uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\;n}{F(x, y)} = 0$, en facteurs primaires: pour avoir la dernière avec toute la rigueur on devait démontrer préalablement la proposition sur la somme (5) du § 94, qui n'est autre chose, comme on l'a vu tout à l'heure, que l'expression du théorème d'Abel pour les intégrales de première espèce; mais alors on reçoit de suite le théorème d'Abel pour les intégrales de troisième espèce (et des toutes les autres, comme on le verra de suite). D'un autre côté, on pourrait obtenir l'équation (2) directement par d'autres méthodes, par exemple par celle d'Abel lui-même*) ou par celle de Briot**): alors, en passant du logarithme au nombre lui même, on aura en vertu des formules citées au commencement de ce § la décomposition de la fonction $\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} : \frac{\psi(x_0, y_0)}{\chi(x_0, y_0)}$ en facteurs primaires ***).

En multipliant l'équation (5) du § présent par $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_k}}$ et en sommant suivant k de 1 à p, après avoir ajouté le résultat à recevoir à l'équation (2), on aura d'après (12) § 79:

$$\text{(6)} \qquad \sum_{i=1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}_{x, x_0}}} = \log \left\{ \frac{\psi(x, y) \cdot \chi(x_0, y_0)}{\chi(x, y) \cdot \psi(x_0, y_0)} \right\},$$

---

*) Donnée dans le mémoire XII (oeuvres comp. T. I) pour l'intégrale abélienne la plus générale. Mr. Sylow (T. II, p. 195—196) a indiqué les corrections qu'il faut porter dans la formule, donnée par Abel, et que l'on trouve faites dans l'édition russe de mon livre sur les éléments de la théorie des intégrales abéliennes.

**) Dans sa „Théorie des fonctions abéliennes". Paris, 1879, p. 70.

***) Voyez la formule (17) p. 395 du livre des Mrs. *Appell* et *Goursat*: Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Paris, 1895.

ce qui exprime *le théorème d'Abel pour l'intégrale normale de troisième espèce.*

En effectuant l'opération D_x sur cette égalité, on aura d'après (14) du même § 79:

$$\sum_{i=1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\Pi}}{}_x = D_x \log \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} \tag{7}$$

ce qui exprime le théorème d'Abel pour l'intégral normale de deuxième espèce.

En général nous aurons donc une fonction algébrique à droite de l'égalité (7); mais dans un cas particulier, fort important pour le dernier chapitre de ce livre, elle se réduit à zéro, comme pour les intégrales de la première espèce. Cela arrive notamment dans le cas, où les fonctions $\psi(x,y)$ et $\chi(x,y)$ sont les fonctions adjointes de deuxième espèce, qui deviènnent $=\infty^2$ au point (x,y), où l'intégrale de deuxième espèce, qui figure à gauche de l'équation (7), devient infinie $=\infty^1$. En changeant la notation de paramètre en (ξ, y_ξ), nous aurons en effet d'après l'équation (5) du § 61 aux environs de ce point (ξ, y_ξ):

$$\psi(x,y) = -\frac{F_y^{'}(x,y)\cdot F_y^{'}(\xi,y_\xi)}{(x-\xi)^2} + \mathfrak{P}_1(x-\xi), \tag{α}$$

$$\chi(x,y) = -\frac{F_y^{'}(x,y)\cdot F_y^{'}(\xi,y_\xi)}{(x-\xi)^2} + \mathfrak{P}_2(x-\xi); \tag{β}$$

donc on aura:

$$\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{1+\bar{\mathfrak{P}}_1(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2}{1+\bar{\mathfrak{P}}_2(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2}, \tag{γ}$$

en prenant le logarithme et puis en différentiant par rapport à ξ, nous aurons:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\log\left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right) &= \frac{-\bar{\mathfrak{P}}_1^{'}(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2 - \bar{\mathfrak{P}}_1(x-\xi)\cdot 2(x-\xi)}{1+\bar{\mathfrak{P}}_1(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2} - \\ &\quad - \frac{-\bar{\mathfrak{P}}_2^{'}(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2 - \bar{\mathfrak{P}}_2(x-\xi)\cdot 2(x-\xi)}{1+\bar{\mathfrak{P}}_2(x-\xi)\cdot(x-\xi)^2},\end{aligned} \tag{δ}$$

c'est ce qui s'annule évidemment, lorsqu'on y pose: $x=\xi$, $y=y_\xi$. Donc dans le cas cas particulier considéré, aulieu de l'équation (7) nous aurons cette autre:

$$\sum_{i=1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\Pi}}{}_\xi = 0. \tag{7'}$$

En revenant à l'équation (7), on peut lui donner une autre forme, qui rend plus visible le caractère algébrique de son second membre. En effectuant l'opération D_x, indiquée seulement dans l'équation (7), nous aurons:

$$(8)\qquad \begin{aligned} D_x \log\left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right) &= \frac{D_x\psi(x,y)}{\psi(x,y)} - \frac{D_x\chi(x,y)}{\chi(x,y)} = \\ &= \frac{\chi(x,y)D_x\psi(x,y) - \psi(x,y)D_x\chi(x,y)}{\psi(x,y)\,\chi(x,y)}, \end{aligned}$$

et

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} D_x\psi(x,y) &= \psi'_x(x,y)\cdot F'_y(x,y) - \psi'_y(x,y)\cdot F'_x(x,y), \\ D_x\chi(x,y) &= \chi'_x(x,y)\cdot F'_y(x,y) - \chi'_y(x,y)\cdot F'_x(x,y), \end{aligned} \right.$$

et comme on a

$$(10)\qquad F(\overset{m}{x},\overset{n}{y}) = 0,$$

on pourra donner à l'équation (7) cette forme:

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{m'} \Pi_x\Big|_{\alpha_i}^{x_i} = \frac{-1}{\psi(x,y)\,\chi(x,y)} \begin{vmatrix} F(x,y) & \psi(x,y) & \chi(x,y) \\ F'_x(x,y) & \psi'_x(x,y) & \chi'_x(x,y) \\ F'_y(x,y) & \psi'_y(x,y) & \chi'_y(x,y) \end{vmatrix}.$$

Cette égalité exprime *le théorème d'Abel pour l'intégrale normale de la deuxième espèce avec le paramètre* (x,y): „la somme des valeurs des intégrales normales de la deuxième espèce avec le paramètre (x,y) prises des zéros aux infinis d'une fonction algébrique, uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x},\overset{n}{y})=0$, est égale à une fonction algébrique de ce paramètre, également uniforme sur la même surface“.

En effectuant l'opération D_x^k sur les deux membres de l'égalité (6), on aura, vu (16) § 79, *le théorème d'Abel pour les intégrales abéliennes de la deuxième espèce d'ordre* k *avec le paramètre* (x,y):

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{m'} \Pi_x^{[k-1]}\Big|_{\alpha_i}^{x_i} = D_x^k \log\left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right).$$

Dans toutes ces formules, rappellons le encore une fois, les chemins d'intégration de toutes les intégrales à l'ecception d'une seule, étaient tout à fait arbitraires; pour la dernière le chemin d'intégration devait être choisi d'une manière convenable pour que ces égalités aient lieu, comme il suit de ce, qu'on a dit au § 93. Si l'on voulait laisser indéterminé aussi le chemin d'intégration dans cette dernière intégrale, on devrait ajouter, comme nous l'avons remarqué plus haut, aux seconds membres de toutes ces égalités une fonction linéaire des périodes

des intégrales respectives avec les mêmes coéfficients entiers, car les intégrales prises entre les mêmes limites suivant d'autres chemins en différront par une fonction linéaire des périodes à coéfficients entiers.

96. Il est aisé maintenant d'obtenir l'égalité, qui exprime le théorème d'Abel pour l'intégrale abélienne la plus générale: après avoir changé dans la formule (3) § 80 x_0 et x respectivement en α_i et x_i, et pris la somme des résultats obtenus pour les valeurs de i de 1 à m', en changeant l'ordre de différentiation et de sommation, on aura d'après (6) du § précédent, la formule donnée par *Abel* lui-même dans son célèbre mémoire (le XII-ième de la nouvelle édition de ces Oeuvres), présenté en 1826 à l'Academie des sciences de Paris, savoir:

$$\sum_{i=1}^{m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i, y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{F'_y(x_i, y_i)} = \Pi \frac{f(z, y_z)}{\varphi(z) F'_y(z, y_z)} \log\left(\frac{\psi(z, y_z) \cdot \chi(\eta, y_\eta)}{\chi(z, y_z) \cdot \psi(\eta, y_\eta)}\right)_{z=\infty} -$$

$$-\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(\nu_k - 1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k - 1}}{dz^{\nu_k - 1}} \left((z - \xi_k)^{\nu_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(z, y_z^{(j)})}{\varphi(z) F'_y(z, y_z^{(j)})} \log\left(\frac{\psi(z, y_z^{(j)}) \cdot \chi(\eta, y_\eta)}{\chi(z, y_z^{(j)}) \cdot \psi(\eta, y_\eta)}\right)\right)_{z=\xi_h} + C, \tag{1}$$

la constante C étant ajoutée pour laisser arbitraires tous les chemins d'intégration *).

97. Il a été montré dans le § 51 et les suivants, qu'on peut toujours former une fonction, uniforme sur la surface de Riemann pour $\overset{m\ n}{F(x, y)} = 0$, qui deviendrait $= \infty^1$ en m' points donnés de la surface, après quoi il reste $m' - p + 1$ coéfficients indéterminés, par rapport auxquels cette fonction sera linéaire homogène, et que $m' - p$ rapports de ces coéfficients à l'un d'eux peuvent être déterminés de manière, que la fonction deviendra égale à zéro 0^1 aux $m' - p$ points de la surface de Riemann choisis arbitrairement; les p zéros restants seront trouvé d'après ces données, en résolvant l'équation du degré p par rapport à x, qu'on reçoit par l'élimination de y de l'équation fondamentale $\overset{m\ n}{F(x, y)} = 0$ et de celui qu'on aura en égalant à zéro la fonctien cherchée, et par la division ci-après du résultat trouvé ainsi par le produit des facteurs de la forme $x - \alpha$, répondants aux zéros de la fonction, donnés arbitrairement.

*) En employant toute fois notre notation, plus claire que celle d'Abel lui-même dans le mémoire cité, et aussi plus correcte. (Voyez la note de M. Sylow dans le II vol. des oeuvres de N. H. Abel (p. 195—196). Les signes des deux premiers termes chez nous sont contraires à ceux d'Abel; en transposant les limites des intégrales à gauche on restitue la concordance complète.

Dans cette proposition les zéros et les infinis de la fonction peuvent évidement être échangés les uns avec les autres (comme il est aisé de le voir, en cherchant $\frac{1}{z}$ aulieu de z); parconséquent on peut toujours former une fonction, qui deviendra égale à 0^1 aux m' points donnés arbitrairement, $\overset{m'}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$ et à ∞^1 aux $m'-p$ points, donnés arbitrairement, par exemple (x_i, y_i) $(i=p+1, p+2 \ldots m')$; enfin égale à l'unité au point (x_0, y_0); cette fonction deviendra $=\infty^1$ encore en p points, qu'on déterminera d'après les points énumérés en résolvant une équation algébrique du degré p, qu'on aura après avoir divisé par le produit des facteurs linéaires, répondants aux infinis donnés de la fonction cherchée: $(x-x_{p+1}) \ldots (x-x_{m'})$, le résultat de l'élimination de y entre l'équation $\overset{m\;n}{F(x,y)}=0$ et $\frac{1}{z}=0$. Alors, en transportant à droite la somme des intégrales, ayant pour leurs limites supérieures ces infinis de la fonction cherchée: (x_i, y_i) $i=1, 2, 3, \ldots p$, nous aurons les égalités suivantes:

$$\sum_{i=p+1}^{m'} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{p} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\alpha_i}^{x_i}; \tag{1}$$

$$\sum_{i=p+1}^{m'} \mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{p} \mathop{\mathrm{III}_{x,x_0}}\limits_{\alpha_i}^{x_i} + \log\left\{\frac{\psi(x,y)\cdot\chi(x_0,y_0)}{\chi(x,y)\cdot\psi(x_0,y_0)}\right\}; \tag{2}$$

$$\sum_{i=p+1}^{m'} \mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha_i}^{x_i} = -\sum_{i=1}^{p} \mathop{\mathrm{II}_x}\limits_{\alpha_i}^{x_i} - \frac{1}{\psi(x,y)\,\chi(x,y)} \begin{vmatrix} F(x,y) & \psi(x,y) & \chi(x,y) \\ F'_x(x,y) & \psi'_x(x,y) & \chi'_x(x,y) \\ F'_y(x,y) & \psi'_y(x,y) & \chi'_y(x,y) \end{vmatrix}; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=p+1}^{m'} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i,y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{F'_y(x_i,y_i)} = -\sum_{i=1}^{p} \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{f(x_i,y_i)}{\varphi(x_i)} \cdot \frac{dx_i}{F'_y(x_i,y_i)} + \\ &\qquad + \Pi \frac{f(z,y_z)}{\varphi(z)F'_y(z,y_z)} \log\left(\frac{\psi(z,y_z)\,.\,\chi(\eta,y_\eta)}{\chi(z,y_z)\,.\,\psi(\eta,y_\eta)}\right)\Bigg|_{z=\infty} - \\ &-\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(\nu_k-1)!} \cdot \frac{d^{\nu_k-1}}{dz^{\nu_k-1}}\left((z-\xi_k)^{\nu_k} \sum_{j=1}^{p} \frac{f(z,y_z^{(j)})}{\varphi(z)F'_y(z,y_z^{(j)})} \log\left(\frac{\psi(z,y_z^{(j)})\,.\,\chi(\eta,y_\eta)}{\chi(z,y_z^{(j)})\,.\,\psi(\eta,y_\eta)}\right)\right)_{z=\xi_k} + C. \end{aligned} \tag{4}$$

Ces égalités montrent à nous, que les sommes d'un nombre quelconque $m'-p$ des intégrales se réduisent toujours à un nombre constant p des intégrales de la même espèce, dont les limites supérieures sont déterminés complètement par leurs limites inférieures et les limites inférieures et supérieures des autres $m'-p$ intégrales de la même espèce, ou directement, comme les intégrales de première espèce, ou à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. Cette proposition n'est qu'une autre expression du théorème d'Abel. Les mémes égalités nous montreront, si l'on transporte les deux sommes des intégrales d'un membre à l'autre de ces égalités, comment les sommes des p intégrales s'expriment par les sommes des autres intégrales, dont aussi les limites supérieures sont donné arbitrairement.

Si l'on préfère laisser dans les formules (1)—(3) tous les chemins d'intégration arbitraires, on doit ajouter à droite une fonction linéaire des périodes, comme on l'a fait dans la formule (4), où C désigne une telle fonction en vertu de ce, qui a été dit à la fin du § 95.

98. Au cas particulier, où le nombre m' a la valeur minimale, c'est-à-dire, si l'on a

$$m' = p + 1, \tag{1}$$

les premiers membres des égalités (1)—(4) du § précédent se réduiront à un seul terme, tandis que les seconds conserveront ses p intégrales; de cette manière, dans ce cas particulier (1), chaque intégrale abélienne peut être échangée contre une somme de p intégrales de la même espèce,— une observation, qui peut être utile quelque fois. Dans le cas (1) notre fonction $\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$, qui devient égale à ∞^1 aux points $(\overset{p+1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ et à zéro 0^1 aux points $(\overset{p+1}{\underset{1}{\alpha_j, y_{\alpha_j}}})$, dont les p premiers sont déterminés d'après l'un d'eux, par exemple (x_{p+1}, y_{p+1}), et d'après les $p+1$ zéros*), ne sera autre chose, que la fonction:

$$P_{x,\alpha_{p+1}}(x_{p+1}, y_{p+1}; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{2}$$

de (x, y), déterminée au § 68, lorsqu'on prend $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ aulieu de $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$ pour les points fondamentaux: elle devient en effet, d'après le § 68, égale à 0^1 pour $x = \alpha_{p+1}, y = y_{\alpha_{p+1}}$, et à ∞^1 pour $x = x_i, y = y_i$, $(i = 1, 2, \dots p)$. Ecrivons, pour simplifier, α' aulieu de α_{p+1}, et x' aulieu de x_{p+1}, y' aulieu de y_{p+1}; alors la fonction (2) sera représentée ainsi:

*) Après avoir échangé entre eux les deux systèmes équivalents des points dans l'équation (16) § 72, on lui donnera la forme:

$$P_{\xi\eta}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = D_x \log P_{x\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_i, y_{\xi_i}}})$$

et c'est la fonction à droite qui sera déterminée d'après les données énumérées, par la méthode du § 68.

(3) $$P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}),$$

et les égalités (5), (7) et (6) du § 95 prendront la forme:

(4) $$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_h}} = 0;$$

(5) $$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\Pi_x}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\Pi_x}} = D_x \log\left(P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\right);$$

(6) $$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}_{x,x_0}}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{III}_{x,x_0}}} = \log\left(\frac{P_{x,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{x_0,\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right).$$

En vertu de l'équation (16) § 72, on pourrait donner à l'équation (5) cette forme:

(7) $$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\Pi_x}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{y_i}{\Pi_x}} = P_{x',\alpha'}(x, y; \overset{p}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}}),$$

si l'on a:

(8) $$(x, y); (\overset{p}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}}) \infty (\alpha', y_{\alpha'}); (\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) \infty (x', y'); (\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}),\ {}^{*)}$$

en employant pour l'équivalence le signe de Kronecker.

Remarque. Les intégrales, prises entre les mêmes limites suivant le même chemin, mais en le sens inverse, donnant un zéro pour somme, on pourra en profiter, afin d'établir une correspondance arbitraire entre les limites inférieures et supérieures des intégrales.

99. Le théorème d'Abel est réversible, c'est-à-dire, que si ont lieu les égalités (5) § 95, savoir:

(1) $$\sum_{i=1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_h}} = 0, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots p)$$

alors, dans le cas $m' > p$, on peut toujours former une fonction algébrique uniforme sur la surface de Riemann considérée, qui sera $= 0^1$ pour $x = \alpha_i, y = y_{\alpha_i}$ et $= \infty^1$ pour $x = x_i$, $y = y_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots m')$. En effet en formant le produit:

(2) $$A \prod_{i=1}^{m'} E(x, y; x_0, y_0 \,|\, x_i, y_i; \alpha_i, y_{\alpha_i})$$

---

*) M. Noether. 3. Note, § 12.

on aura la fonction algébrique en question, décomposée en facteurs primaires; car ce produit possède les propriétés suivantes: sur la surface de Riemann pour $\overset{m}{F}(x, \overset{n}{y}) = 0$ il est une fonction uniforme, finie et continue à l'exception des points $\overset{m'}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, où il devient $= \infty^1$; aux points $\overset{m'}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$ il est $= 0^1$, au point (x_0, y_0) il est $= A$, dont la valeur est donné arbitrairement; aux points $\overset{p}{\underset{1}{(a_k, b_k)}}$ de chaque facteur du produit se détachant d'après (9) § 91 un facteur de la forme:

$$e^{\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x} \mathrm{I}_k \Big|_{\alpha_i}^{x_i}}, \tag{3}$$

du produit complet sera détaché le facteur:

$$e^{\frac{F'_y(a_k, b_k)}{a_k - x} \sum\limits_{i=1}^{m'} \mathrm{I}_k \Big|_{\alpha_i}^{x_i}} = e^0 = 1, \tag{4}$$

en vertu de l'égalité (1) du § présent, — avant que le point (x, y) viendra tomber au point (a_k, b_k); ce point sera donc un point ordinaire pour le produit (2). Mais une telle fonction est d'après le § 40 une fonction rationnelle des variables x, y, liées par l'équation $\overset{m}{F}(x, \overset{n}{y}) = 0$. Si l'on a $m' = p$, alors, comme on l'a vu au § 53, on ne peut pas donner arbitrairement tous les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, mais seulement $p - 1$ de ces points, et le dernier point doit être choisi de manière qu'il serait avec les autres un zéro d'une certaine fonction adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ de première espèce (en parlant géométriquement — qu'on pourrait faire passer par l'ensemble de ces p points une courbe adjointe de première espèce); si cette condition est remplie, alors la formule (2) donnera aussi dans ce cas la fonction cherchée; si l'on prend les p points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ arbitrairement, alors une pareille fonction n'existe pas, comme nous le savons déjà. Cette observation de Weierstrass trouvera son application au chapitre suivant.

Chapitre VI.

Le problème de Jacobi.

100. Dans l'équation (1) § 97, que nous écrirons maintenant ainsi:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = -\sum_{i=p+1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}}, \qquad (k=1,\, 2, \ldots p)$$

tous les α_i, et de même tous les x_i à droite, peuvent être donnés arbitrairement, après quoi tous les x_i à gauche, et parconséquent tous les y_i correspondants, seront complètement déterminés. Si nous faisons varier tous les x_i à droite dans l'équation (1) de la manière, que la somme des intégrales du second membre conserve sa valeur, — nous la désignerons par v_k, ainsi qu'on aura

$$(2)\qquad -\sum_{i=p+1}^{m'} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k, \qquad (k=1, 2, \ldots p)$$

où tous les v_k sont des quantités déterminées, — alors les x_i du premier membre de la même équation (1) ne varierons pas en général. En effet, en vertu de (2), l'équation (1) prendra alors la forme:

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k; \qquad (k=1, 2, \ldots p)$$

supposons que de même pour un autre système des valeurs des x_i, par exemple x'_i $(i=1, 2, \ldots p)$ on aurait aussi:

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}_k}} = v_k; \qquad (k=1, 2, \ldots p)$$

en retranchant l'égalité précédente de celle-ci, on aurait:

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_k}} = 0; \qquad (k=1, 2, \ldots p)$$

mais alors on pourrait former une fonction uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, qui deviendrait égale à ∞^1 seulement aux p points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, comme on l'a démontré au § précédent; mais cela ne peut avoir lieu, comme on l'a vu aussi au § cité, que si toutes les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ avec les valeurs correspondantes de $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$ satisfont à l'équation:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0, \tag{6}$$

dont le premier membre est une fonction adjointe de première espèce, ou, en parlant géométriquement, lorsque tous les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ seront situés sur une courbe adjointe de première espèce. A l'exception d'un tel système particulier des valeurs de v_k $(k=1, 2, \ldots p)$, qui amène les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ dans la position, où ils se trouveraient sur une courbe adjointe de première espèce, cela ne peut pas donc avoir lieu, et *pour chaque système des valeurs de* v_k $(k=1, 2, \ldots p)$, *différent de celle qui amène les points* $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ *sur une courbe adjointe de première espèce, le système des valeurs* $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ *sera unique et déterminé.*

Dans le cas particulier, où l'on prend les points fondamentaux $\overset{p}{\underset{1}{(a_i, b_i)}}$ pour les points $\overset{p}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$, nous désignerons ces sommes par u_k, ainsi qu'on aura:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_k}} = u_k, \qquad (k=1, 2, \ldots p) \tag{7}$$

Dans le cas exceptionnel, où le système donné des valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ sera tel, que tous les $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ satisferont à l'équation

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0, \tag{8}$$

les sommes des intégrales des premiers membres des équations (7) pourront être réduites, — et cela de plusieures manières — à d'autres sommes, de $p-1$ intégrales seulement. En effet, si les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ sont situés sur la courbe (8), comme on peut toujours former une autre fonction de même espèce:

$$\varphi'(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}), \tag{9}$$

qui deviendra nulle aux $p-2$ autres zéros de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ et encore à l'un des points fondamentaux, par exemple (a_l, b_l), la fonction formée par leur quotient:

$$z=\frac{\varphi'(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})}{\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})} \tag{10}$$

deviendra infinie: ∞^1 seulement aux points $(x_i, y_i)_1^p$ et égale à zéro 0^1 au point (a_l, b_l) et encore aux $p-1$ autres points $(x'_i, y'_i)_1^{p-1}$; mais alors on aura d'après le théorème d'Abel:

$$\sum_{i=1}^{l-1} \overset{x_i}{\underset{x'_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{x_l}{\underset{a_l}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=l+1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x'_i}{\mathrm{I}_h}} = 0, \tag{11}$$

ou, en ajoutant la même chose aux deux membres de cette égalité,

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = \sum_{i=1}^{l-1} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=l+1}^{p} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}, \tag{12}$$

ce qui démontre la proposition énoncée, le second membre de cette égalité ne contenant en effet que $p-1$ intégrales.

Par ces équations (12) les variables $u_h{}_1^p$, et par suite aussi les variables $v_h{}_1^p$, sont données en fonctions de $p-1$ paramètres (x'_i, y'_i) $(i=1, 2, \ldots l-1, l+1, \ldots p)$; ces derniers cependant ne sont pas indépendants, mais sont liés entre eux par une équation. En effet, pour que les points $(x_i, y_i)_1^p$ pouvaient se trouver sur une courbe adjointe de première espèce $\varphi(x^{m-2}, y^{n-2})=0$, il faut d'après le § 53, qu'on ait: le déterminant

$$\overset{1,1}{\underset{p}{{}^{(i)}}}\left| \overset{(j)}{\varphi_j}(x_i^{m-2}, y_i^{n-2}) \right|^{p} = 0; \tag{13}$$

en élevant cette équation à la deuxième puissance, on aura à gauche une fonction symmétrique des paires $(x_i, y_i)_1^p$, par conséquent une fonction des variables $v_h{}_1^p$, comme on le verra plus loin, parsuite aussi une fonction des variables $u_h{}_1^p$; en portant dans cette équation leurs expressions, tirées des équations (12) en vertu de (7), on aura une équation entre les paires (x'_i, y'_i) $(i=1, 2, \ldots l-1, l+1, \ldots p)$. De là il suit que les équations (12) ne contiennent réellement que $p-2$ paramètres indépendants*). Comme une variable complexe par toutes ses valeurs forme une multiplicité de 2 dimensions, les valeurs des p variables $u_h{}_1^p$ dans le cas général en formeront une de $2p$ dimensions, tandis que dans le cas exceptionnel seulement de $2p-4$ dimensions**).

---

*) *Clebsch* u. *Gordan*. Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1866. S. 184–186.

**) *Weierstrass*. Werke. Bd. IV, S. 460.

Ainsi à part le cas exceptionnel, on voit, que pour les valeurs constantes de $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ celles de $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ le seront aussi; au contraire, si l'on fait varier infiniment peu quelquesunes des variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, les premiers membres des équations (4) varieront aussi, c'est ce qui ne peut avoir lieu sans, que variassent quelquesunes des intégrales qui y entrent, c'est ce qui ne peut pas arriver à son tour sans que variassent quelquesunes des quantités $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ (et parconséquent les valeurs correspondantes de $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$). Donc, en conservant leurs valeurs, tant que conservent les siennes les quantités $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, et variant en même temps que ces dernières, *les quantités* $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ (et par suite les valeurs correspondantes de y) *sont des fonctions des quantités* $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, *et* de plus *telles, qu'à chaque système des valeurs des* $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ *correspond un seul système complètement déterminé des valeurs* des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ (et des leurs correspondants $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$), de sorte qu'après le retour des variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ à leurs valeurs initiales, les valeurs des paires $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ ne pourront que de se permuter entre elles, à l'abstraction du cas exceptionnel, où les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ seront amenés par le système donné des valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ à être situés sur une courbe adjointe (6) de première espèce, le cas, où elles restent indéterminées.

La considération des limites supérieures des intégrales de première espèce comme des fonctions des sommes des leurs valeurs s'appelle *l'inversion des intégrales abéliennes*; le problème de *Jacobi* consiste dans la recherche des expressions analytiques des limites des intégrales par les sommes des leurs valeurs, c'est-à-dire des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ (et aussi des $\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$) par $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$. Nous verrons plus loin, que les $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ seront donnés par les racines d'une équation du degré p, dont les coéfficients sont des fonctions uniformes des variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$.

101. La définition des variables $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ en fonctions de $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ par les équations (7) du § précédent est équivalente à celle par un système des équations différentielles, qu'on déduit des équations mentionées (7) en les différentiant, et la condition supplémentaire d'avoir $x_i = a_i, y = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots p)$ pour $\overset{p}{\underset{1}{u_k}} = 0$. En différentiant les équations (7) du § précédent, on aura, vu l'équation (1) § 79, le système suivant des équations différentielles:

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{x_i}, \overset{n-2}{y_i}) \frac{dx_i}{F'_y(x_i, y_i)} = du_k, \qquad (k=1, 2, \ldots p) \tag{1}$$

où y_i est la valeur de y pour $x=x_i$. En résolvant ces équations par rapport à $\dfrac{dx_i}{F'_y(x_i, y_i)}$, on trouvera

$$dx_i = (-1)^{i-1} F'_y(x_i, y_i) \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \frac{D_{ki}}{D} du_k, \tag{2}$$

D désignant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(\overset{m-2}{x_1}, \overset{n-2}{y_1}) & \varphi_1(\overset{m-2}{x_2}, \overset{n-2}{y_2}) & \ldots & \varphi_1(\overset{m-2}{x_p}, \overset{n-2}{y_p}) \\ \varphi_2(\overset{m-2}{x_1}, \overset{n-2}{y_1}) & \varphi_2(\overset{m-2}{x_2}, \overset{n-2}{y_2}) & \ldots & \varphi_2(\overset{m-2}{x_p}, \overset{n-2}{y_p}) \\ \varphi_3(\overset{m-2}{x_1}, \overset{n-2}{y_1}) & \varphi_3(\overset{m-2}{x_2}, \overset{n-2}{y_2}) & \ldots & \varphi_3(\overset{m-2}{x_p}, \overset{n-2}{y_p}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_p(\overset{m-2}{x_1}, \overset{n-2}{y_1}) & \varphi_p(\overset{m-2}{x_2}, \overset{n-2}{y_2}) & \ldots & \varphi_p(\overset{m-2}{x_p}, \overset{n-2}{y_p}) \end{vmatrix} \tag{3}$$

et D_{ki} son mineur, qu'on déduit en effaçant la ligne k-ième et la colonne i-ième. On voit par cette formule, que les variables $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ seront des fonctions holomorphes des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, tant qu'on n'aura pas $D=0$, ce qui arrivera, lorsque quelquesunes des paires $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ deviendront égales entre elles, où lorsque les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ arriveront sur la courbe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$; — le dernier cas sera celui de l'indéterminaticn, que nous avons déjà considéré au § précédent. Dans le cas, où quelquesunes des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$, et leurs correspondants y_i, deviennent égaux, — car dans ce cas aussi le déterminant D sera $=0$, ayant alors quelquesunes des colonnes identiques, — les fonctions symmétriques des paires $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$:

$$S\overset{p}{\underset{1}{(x_j, y_j)}} \tag{4}$$

ne cesseront pas de rester holomorphes. En effet, en prenant la dérivée partielle de cette fonction par rapport à la variable indépendante u_k, dont elle dépend par l'intermédiaire des $(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$, et ayant en vue, que par (2) on à:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = (-1)^{i+k-2} F'_y(x_i, y_i) \cdot \frac{D_{ki}}{D}, \tag{5}$$

et que la dérivée partielle complète de $S(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$ par rapport à x_i est égale à l'expression:

$$\left(\frac{\partial S(\overset{p}{\underset{1}{x_j, x_j}})}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{F'_y(x_i, y_i)} \left[\frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial S}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}\right], \tag{6}$$

nous aurons:

$$\frac{\partial S(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})}{\partial u_k} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{k+i-2} D_{ki} \left[\frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial S}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}\right]; \tag{7}$$

la somme à droite est un déterminant, qu'on déduit du déterminant D en y remplaçant les éléments de la ligne k-ième respectivement par

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial S}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots p)$$

et parconséquent elle deviendra nulle de même ordre, que le déterminant D, lorsque quelquesunes des paires $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ deviendront égales entre elles; parconséquent les dérivées partielles de $S(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$ par rapport à $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ resteront finies et déterminées, à la condition que les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ ne viènnent pas en même temps sur une courbe adjointe de première espèce: dans ce dernier cas D sera un zéro d'un ordre plus élévé que cette somme, et parconséquent les dérivées partielles en question deviendront infinies: nous aurons alors de nouveau le cas d'indétermination, mentionné plus haut. Il suit de là que, l'abstraction faite du cas exceptionnel de l'indétermination, $S(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$ sera une fonction uniforme et continue des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$. En particulier les sommes $\sum_{i=1}^{p} x_i^\lambda$ seront des fonctions uniformes, finies et continues des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, étant des fonctions symmétriques des paires $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$; de là il suivra à son tour, que les $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ seront les racines d'une équation du degré p:

$$\psi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})x^p + \psi_1(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})x^{p-1} + \cdots + \psi_{p-1}(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})x + \psi_p(\overset{p}{\underset{1}{u_k}}) = 0, \tag{8}$$

où $\psi_0(\overset{p}{\underset{1}{u_k}}), \dots \psi_p(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})$ sont des fonctions uniformes, finies et continues des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, qui s'annulent toutes à la fois pour les systèmes des valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, qui amènent les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ sur la courbe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, lorsqu'aura lieu le cas de l'indétermination. On appelle ces fonctions *abéliennes*. Plus généralement, si l'on a une fonction

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}, \tag{9}$$

toute fonction symmétrique des résultats obtenues en y remplaçant (x, y) par $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, étant une fonction uniforme des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ par l'intermédiaire des $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, sera aussi *une fonction abélienne*. Les valeurs d'une telle fonction aux points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ seront de même les racines d'une équation algébrique de degré p, dont les coéfficients seront des fonctions abéliennes.

Remarquons encore, que d'après la formule (16) § 53 l'égalité (2) du § présent peut être représentée aussi de cette manière:

$$dx_i = F'_y(x', y') \sum_{k=1}^{p} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) du_k, \tag{10}$$

(ayant en vue le changement admissible des lignes horisontales d'un déterminant en lignes verticales et vice versa) et parconséquent:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_k} = F'_y(x_i, y_i) \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}). \tag{11}$$

102. Des sommes des intégrales de deuxième, et aussi de troisième espèce, toutes prises d'un même point quelconque ordinaire (x_0, y_0) aux points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, qui répondent aux limites supérieures des intégrales de première espèce, qui entrent dans les égalités (7) § 100 définissant les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, savoir les sommes:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi_k}}, \qquad (k = 1, 2, \dots p) \tag{1}$$

de même les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x}{\Pi_\xi}} \tag{2}$$

et

$$\sum_{i=1}^{p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta}, \tag{3}$$

où ξ en η désignent les paramètres, étant des fonctions symmétriques des limites supérieures des intégrales, seront des fonctions des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ par l'intermédiaire des $(x_i,\overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$, et de plus — à part les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ pour lesquelles les intermédiaires restent indéterminées, — (1) et (2) uniformes, c'est-à-dire, recevant une seule valeur pour le système donné des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, la dernière, (3) — multiforme, recevant au contraire pour ce système des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ une infinité des valeurs, qui diffèrent toutes entre elles par des multiples de $2\pi i$. En effet, si les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ reprènnent leurs valeurs initiales, les paires des quantités $(x_i,\overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ reprendront aussi leurs valeurs initiales à l'ordre près, peut être, — c'est ce qui pourra arriver, si les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ passeraient par celles de leurs valeurs, pour lesquelles quelquesunes des racines de l'équation (8) du § précédent deviènnent égales entre elles, — mais le changement de l'ordre des limites des intégrales ne pourra pas faire varier des sommes comme (1) et (2), et ne peut faire varier que de

$$2q\pi i, \tag{4}$$

q étant un entier positif ou négatif, des sommes comme (3), si quelques chemins d'intégration, en se déformant pendant la variation des quantités $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, auraient passé par des points (ξ, y_ξ) et (η, y_η), qui répondent aux paramètres, où ces intégrales ont des infinis logarithmiques. Nous nommerons les sommes des intégrales (1) et (2) *les transcendantes abéliennes de deuxième espèce*, et les désignerons, en modifiant un peu la notation de Weierstrass de cette manière:

$$\sum_{i=1}^{p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k, \qquad (k=1,2,3,\ldots p) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}_\xi = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi; \tag{6}$$

et les sommes des intégrales (3) *les transcendantes abéliennes de troisième espèce,* et les désignerons ainsi:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{III}_{\xi\eta}\Big|_{x_0}^{x_i} = \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}). \tag{7}$$

En effectuant l'opération D_ξ sur cette dernière égalité, nous aurons en vertu de (14) § 79 et (6) du § présent:

$$D_\xi \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi. \tag{8}$$

À l'inverse, en vertu de (15) § 79 et (7) du § présent, on tirera de l'équation (6) par l'intégration:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \int_\eta^\xi J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi \frac{d\xi}{F'_y(\xi, y_\xi)}. \tag{9}$$

D'après (7) § 77 et (9) § 79 on aura aussi:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}) J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \sum_{i=1}^{p} P_{x_i, x_0}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}}), \tag{10}$$

où le dernier terme, étant symmétrique en $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, s'exprimera aussi en fonction des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$.

103. La transcendante abélienne de deuxième espèce, définie par l'égalité (5) du § précédent, et parconséquent cette autre, qui en diffère par une constante additive:

$$C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k \tag{1}$$

deviènnent égales à ∞^1 comme la quantité

$$\frac{F'_y(a_k, b_k)}{x - a_k} \tag{2}$$

pour $x = a_k$, d'après (4) § 74, chaque fois que les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ reçoivent les valeurs, pour lesquelles l'un des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ vient à coïncider avec le point (a_k, b_k). Pour les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, qui amènent les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ sur une courbe adjointe de première espèce, elles restent indéterminées avec $(x_i, y_i)_1^p$; pour toutes les autres valeurs des variables $u_h{}_1^p$, elles seront des fonctions finies et continues de ces variables, et uniformes, comme nous l'avons vu au § précédent. — La transcendante abélienne de deuxième espèce, définie par l'équation (6) du § précédent, sera semblablement uniforme, finie et continue pour tous les systèmes des valeurs des variables $u_h{}_1^p$, à l'exception de celles, qui amènent quelquesuns des points $(x_i, y_i)_1^p$ en coïncidence avec le point (ξ, y_ξ), car alors les intégrales de la somme (6) du § précédent, recevants (ξ, y_ξ) pour limite supérieure, deviendront égales a ∞^1 comme la quantité

$$\frac{F'_y(\xi, y_\xi)}{x - \xi} \tag{3}$$

pour $x = \xi$, comme il suit de (3) § 74 et des §§ suivants. On peut le voir aussi par la formule (10) du § précédent: en effet de la manière semblable à (3) devient infini un terme de la dernière somme en (10) du § précédent d'après le § 68 et la formule (4) § 61 (où il faut transposer x avec ξ). D'après le même § et la formule (7) § 60 il deviendra infini aussi au point (a_k, b_k) comme la quantité

$$-\varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\frac{F'_y(a_k, b_k)}{x_l - a_k} \tag{4}$$

pour $x_l = a_k$; mais de la même manière, seulement avec le signe $+$, devient infini le terme de la première somme, qui contient $J(u_h)_k{}_1^p$, tandis que les autres y restent finis; parconséquent en ces points $(a_k, b_k)_1^p$ la fonction $J(u_h)_\xi{}_1^p$ aura une valeur finie.

Quant à la transcendante abélienne de troisième espèce, elle deviendra infini avec l'un des termes de la somme (7) du § précédent comme

$$-\log(x_i - \xi)_{x_i = \xi} \tag{5}$$

pour chaque système des valeurs des variables $u_h{}_1^p$, qui amène le point (x_i, y_i) au point (ξ, y_ξ), et comme

$$+\log(x_j - \eta)_{x_j = \eta} \tag{6}$$

pour chaque système des valeurs des variables $u_h{}_1^p$, qui amène le point (x_j, y_j) au point (η, y_η), comme il suit de (7) et (8) du § 74, et devient indéterminée pour les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ aménant les points $(x_i, y_i)_1^p$ sur une courbe adjointe de première espèce.

104. Si dans les formules (7) § 100 les points $(x_i, y_i)_1^p$ décrivent des chemins fermés quelconques, ces derniers se réduisant à une suite déterminée des courbes fermées A_j et B_j $(j=1, 2, \ldots p)$, les égalités en question deviendront:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_k{}_{a_i}^{x_i} = u_k + \sum_{j=1}^{p} (m_j \omega_{kj} + n_j \omega'_{kj}), \tag{1}$$

où à gauche les $(x_i, y_i)_1^p$ ont les mêmes valeurs qu'en égalité (7) § 100, mais les chemins d'intégration seront déjà des autres, notamment composés des chemins anciens et des chemins fermés, qu'auront décrits les points $(x_i, y_i)_1^p$. — Les fonctions symmétriques des $(x_i, y_i)_1^p$, comme par exemple la somme.

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\psi(x_i, y_i)}{\chi(x_i, y_i)} = Ab(u_h)_1^p, \tag{2}$$

— comme nous les voulons désigner dès maintenant, en produisant cette notation de leurs nom: „abéliennes“, — ne seront pas changées par cela en leur valeur algébrique, et parconséquent nous aurons:

$$Ab\Big(u_h + \sum_{j=1}^{p} (m_j \omega_{hj} + n_j \omega'_{hj})_1^p\Big) = Ab(u_h)_1^p. \tag{3}$$

Les fonctions abéliennes sont donc des fonctions périodiques de leurs variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$; elles possèdent notamment $2p$ systèmes de périodes simultanées distinctes, car chaqu'un des nombres $\overset{p}{\underset{1}{m_j}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{n_j}}$ peut être égal à zéro et à l'unité.

Qnant aux transcendantes abéliennes de deuxième et de troisième espèces, les sommes des intégrales de deuxième, respectivement de troisième espèce, qui les définissent d'après les égalités (5) et (7) § 102, se changeront après cela respectivement en les suivantes:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{II}_k{}_{x_0}^{x_i} + \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{kj} + n_j \eta'_{kj}), \qquad (k=1, 2, \ldots p) \tag{4}$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{III}_{\xi\eta}{}_{x_0}^{x_i} + \sum_{j=1}^{p} (m_j \zeta_j + n_j \zeta'_j) + 2q\pi i, \tag{5}$$

où conformément au (16) et (17) § 92 on a posé:

$$\zeta_j = \underset{(A_j)}{\mathrm{III}}_{\xi\eta}, \qquad \zeta'_j = \underset{(B_j)}{\mathrm{III}}_{\xi\eta}, \tag{6}$$

les premières sommes étant ici respectivement les mêmes, qu'aux (5) et (7) § 102. Ainsi, lorsque les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ reçoivent les accroissements

$$\tilde{\omega}_h = \sum_{j=1}^{p} (m_j \omega_{hj} + n_j \omega'_{hj}), \tag{7}$$

les transcendantes abéliennes de deuxième espèce *fondamentales* (comme on pourrait les nommer, ces fonctions étant définies à l'aide des intégrales fondamentales de deuxième espèce), reçoivent les accroissements:

$$\tilde{\eta}_k = \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{kj} + n_j \eta'_{kj}), \tag{8}$$

et les transcendantes abéliennes de troisième espèce les accroissements:

$$\tilde{\zeta} = \sum_{j=1}^{p} (m_j \zeta_j + n_j \zeta'_j) + 2q\pi i, \tag{9}$$

où les m_j, n_j $(j=1,2,\ldots p)$ dans toutes les trois formules (7), (8) et (9) désignent les mêmes nombres entiers, positifs ou négatifs, ainsi qu'on aura:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \tilde{\omega}_h)_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \tilde{\eta}_k; \tag{10}$$

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \tilde{\omega}_h) = \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) + \tilde{\zeta}. \tag{11}$$

Ces fonctions possèdent donc la périodicité de la seconde espèce, d'après la terminologie de Ch. Hermite.

En passant à la transcendante abélienne de deuxième espèce plus générale, avec le paramètre (ξ, y_ξ), pour laquelle a lieu l'égalité (10) § 102, nous remarquons, que la dernière somme de son second membre étant une fonction symmétrique des paires $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, est une fonction abélienne des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, et parconséquent reprendra sa valeur, quand ces variables recevront les accroissements $\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}$, de sorte que toute la variation de cette transcendante, provenant de l'accroissement des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ de $\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}$, que nous désignerons par $\tilde{\eta}_\xi$, ainsi qu'on aura

$$\tilde{\eta}_\xi = \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{\xi j} + n_j \eta'_{\xi j}), \tag{12}$$

— s'exprimera par la formule:

$$(13)\qquad \tilde{\eta}_\xi = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\,\tilde{\eta}_k.$$

En donnant ici aux nombres m_j, n_j les valeurs 0, l'un excepté, que nous poserons $=1$, nous aurons:

$$(14)\qquad \eta_{\xi j} = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\,\eta_{kj};$$

$$(15)\qquad \eta'_{\xi j} = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi})\,\eta'_{kj}.$$

105. Les dérivées partielles des transcendantes abéliennes de deuxième et de troisième espèces par rapport aux variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ on obtient de cette manière. En différentiant l'équation (6) § 102 par rapport à la variable u_k, ayant en vue que son premier membre n'en dépend que par l'intermédiaire des $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, on aura d'après le (9) du § 79 et (11) du § 101:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi}{\partial u_k} &= \sum_{i=1}^{p} H(x_i, y_i \,|\, \xi, y_\xi)\,\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) = \\ &= H(a_k, b_k \,|\, \xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}), \end{aligned}$$

— en vertu de l'équation (10) § 70 pour $x = a_k$, $y = b_k$, [où l'on aurait changé préalablement $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, \beta_i}})$ en $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$]. En faisant coïncider le point (ξ, y_ξ) avec (a_l, b_l), on reçoit d'ici la formule:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l}{\partial u_k} &= \sum_{i=1}^{p} H(x_i, y_i \,|\, a_l, b_l)\,\varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) = \\ &= c_{lk} - D_{a_l} P_{a_l\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}), \end{aligned}$$

car par l'équation (4) § 70 (écrite avec l pour g) et (21) § 69, (écrite avec l pour k), on a pour $\xi = a_l$, $y_\xi = b_l$:

$$(3)\qquad H(a_k, b_k \mid a_l, b_l) = \bar{E}_l(a_k, b_k) = c_{lk},$$

en supposant $l \neq k$; pour $l = k$ la seconde forme du second membre de l'équation mentionnée devient illusoire, en prenant la forme $\infty - \infty$ *).

*) La seconde expression pour la dérivée de $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_l$ par rapport à u_k correspond à la formule (4) § 48 de notre ouvrage sur l'inversion des intégrales hyperelliptiques

En passant à l'égalité (7) § 102 pour en déduire la dérivée par rapport à u_k de la fonction $\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, remarquons, que d'après le théorème de l'échange de paramètre et de l'argument on a:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x_i, x_0}; \tag{4}$$

donc, en différentiant par rapport à u_k on aura:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{x_i, x_0} \frac{\partial x}{\partial u_k}, \tag{5}$$

ce qui prendra en vertu de l'égalité (11) du § 101 et (14) du § 79 la forme suivante:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}_{x_i}. \tag{6}$$

Si l'on change maintenant dans la formule (7) § 77 x et x_0 respectivement en ξ, η; puis $(\overset{p}{\underset{1}{a_j, b_j}})$ en $(\overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$; enfin (ξ, y_ξ) en (a_k, b_k), on aura, en employant la notation abrégée des intégrales de deuxième espèce, cette autre:

$$\overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}_k = P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(\overset{m-2}{a_k}, \overset{n-2}{b_k}; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}_{x_i}, \tag{7}$$

en se rappelant (pour le premier membre) de (4) § 70. En vertu de celle-ci on pourra représenter la dérivée cherchée de cette autre manière:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi}}_k - P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}). \tag{8}$$

On pourrait aussi recevoir cette formule à l'aide de l'autre propriété caractéristique de l'intégrale normale de troisième espèce, celle, qui nous a conduit à la formule (9) § 102. En différentiant cette dernière formule par rapport à u_k, nous aurons d'après (1) du § présent:

(p. 89), citée déjà plus haut; elle était certainement connue de Weierstrass, parce qu'on peut la tirer sous la forme un peu différente, et pour le cas de $c_{lk} = 0$, de la formule (29) § 4 de son mémoire: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen", Crelle Journ. Bd. 47. Dans le cas des fonctions abéliennes générales les secondes formes de (1) et (2) ont été données (la seconde pour le cas $c_{lk} = 0$) pour la première fois par Mr. V. Ermakoff dans son mémoir, cité au § 72.

$$(9)\quad \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \int_{\eta}^{\xi} \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi}{\partial u_k}\cdot\frac{d\xi}{F'_y(\xi,y_\xi)} = \int_{\eta}^{\xi} H(\xi,y_\xi \mid a_k,b_k)\frac{d\xi}{F'_y(\xi,y_\xi)} - P_{\xi\eta}(a_k,b_k;\overset{p}{\underset{1}{x_j,y_j}}),$$

en se rappelant de la propriété de la fonction $P_{\xi\eta}$, exprimée par l'équation (1) § 59 et de l'autre, par laquelle elle s'annule, lorsque ses paramètres deviennent égaux. En vertu de (4) § 70 et (5) § 79 le premier terme du second membre de cette équation est identique à $\overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi_k}}$; on aura donc la même formule (8). De celle-là on revient à la formule (6) à l'aide de (7) *).

106. La formule (8) du § précédent pourra être présentée encore d'une autre manière fort importante. En désignant par $(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}})$ et par $(\eta, y_\eta; \overset{p}{\underset{1}{\eta_{ki}, y_{\eta_{ki}}}})$ deux systèmes équivalentes au système de point $(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}})$, — c'est ce qu'on pourrait désigner, en imitant L. Kronecker, ainsi:

$$(1)\qquad (a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) \infty (\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}}) \infty (\eta, y_\eta; \overset{p}{\underset{1}{\eta_{ki}, y_{\eta_{ki}}}}), -$$

on aura en vertu de (17) § 72 vu (18) de même § l'analogue de (16):

$$(2)\qquad P_{\xi\eta}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_j, y_j}}) = D_{a_k}\log P_{a_k\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}});$$

en le portant dans l'équation (8) du § précédent, nous aurons:

$$(3)\qquad \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi_k}} - D_{a_k}\log P_{a_k\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}}).$$

Mais d'après l'équation (5) § 98 on a:

$$(4)\qquad \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi_k}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{k_i}}{\underset{\eta_{k_i}}{\Pi_k}} = D_{a_k}\log P_{a_k\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}}),$$

d'ou l'on tire:

$$(5)\quad \overset{\xi}{\underset{\eta}{\Pi_k}} - D_{a_k}\log P_{a_k\eta}(\xi, y_\xi; \overset{p}{\underset{1}{\xi_{ki}, y_{\xi_{ki}}}}) = -\sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{\eta_{ki}}{\Pi_k}} = C_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi_k}} - (C_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi_k}});$$

---

*) L'expression (8) de la dérivée par rapport à u_k de la fonction abélienne de troisième espèce appartient aussi à Mr. Ermakoff (l. c.). Elle correspond, dans le cas hyperelliptique, à la formule (4) § 47 p. 85 de notre ouvrage citée.

en le portant dans l'équation (3), nous aurons:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = C_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi_k}} - (C_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{x_0}{\Pi_k}}). \tag{6}$$

C'est cette formule que nous avions en vue de déduire. Les constantes C_k sont tout à fait arbitraires dans ces expressions pour $k=1,2,\ldots p$. Il nous reste introduire dans cette formule les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$. Afin de le faire, remarquons, que par le théorème d'Abel [(4) § 98] on a:

$$\overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} = 0\,; \tag{7}$$

en l'ajoutant avec l'équation (7) § 100, qui définit les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, on aura:

$$\overset{\xi}{\underset{a_k}{\mathrm{I}_h}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = u_h\,, \tag{8}$$

d'où l'on tire:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\xi_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = u_h + \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}}. \tag{9}$$

De la même manière on trouve:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\eta_{ki}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} = u_h + \overset{a_k}{\underset{\eta}{\mathrm{I}_h}}. \tag{10}$$

En se rapportant à l'équation (5) § 102, qui définit la transcendente abélienne de deuxième espèce fondamentale, on apperçoit de suite, qu'après l'introduction des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ dans l'équation (6), elle prendra la forme:

$$\frac{\partial \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\partial u_k} = C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\eta}{\mathrm{I}_h}})_k - \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}})_k\Big). \tag{11}$$

107. Les dérivées partielles par rapport à $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ de la transcendente abélienne de troisième espèce s'expriment donc par les transcendentes de la deuxième espèce, dont les arguments diffèrent de ceux de la première par certaines constantes. Les dérivées partielles de ces dernières fonctions par rapport à $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ s'expriment par les formules, qu'on déduit de (2) § 105, en y changeant $(x_j, \overset{p}{\underset{1}{y_j}})$ en $(\xi_{lj}, \overset{p}{\underset{1}{y_{\xi_{lj}}}})$, notamment:

$$(1)\qquad \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_l}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_l}{\partial u_k} = c_{lk} - D_{a_l} P_{a_l \eta}(a_k, b_k; \xi_{li} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{li}}).$$

De même on trouve

$$(2)\qquad \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k}{\partial u_l} = c_{kl} - D_{a_k} P_{a_k \eta}(a_l, b_l; \xi_{ki} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{ki}}).$$

Les deux systèmes des points, figurant sous le signe de P dans ces équations, sont respectivement les zéros, et les infinis de la fonction de z:

$$(3)\qquad \frac{P_{z\xi}(a_l, b_l; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)}{P_{z\xi}(a_k, b_k; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)}$$

— car le zéro (ξ, y_ξ) et les infinis $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ étant communs aux deux membres de la fraction, elle y reste finie; par $p+1$ infinis et un zéro les p zéros restants de la fonction du dégré $p+1$ [§ 40], uniforme sur la surface de Riemann considérée, étant complètement déterminés, cette fonction (3) ne diffère que par un facteur constant de la fonction

$$(4)\qquad P_{z, a_k}(a_l, b_l; \xi_{ki} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{ki}});$$

parconséquent les deux systèmes suivants de points:

$$(5)\qquad (a_k, b_k; \xi_{li} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{li}}) \qquad \text{et} \qquad (a_l, b_l; \xi_{ki} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{ki}});$$

sont équivalents [§ 72]; mais alors en vertu de (18) § 72 on aura:

$$(6)\qquad D_{a_l} P_{a_l \eta}(a_k, b_k; \xi_{li} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{li}}) = D_{a_k} P_{a_k \eta}(a_l, b_l; \xi_{ki} \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\xi_{ki}}),$$

et comme on a en outre par (19) § 69

$$(7)\qquad c_{lk} = c_{kl},$$

on en conclut que les seconds membres des égalités (1) et (2) sont égaux; donc les premiers le sont aussi:

$$(8)\qquad \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_l}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_l}{\partial u_k} = \frac{\partial J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k}{\partial u_l}. \text{*)}$$

---

*) Cette démonstration de la formule (8), donné pour le premier fois par M. Ermakoff (l. c.) est l'extension sur les intégrales abéliennes générales de celle, que nous avons donné pour les intégrales hyperelliptiques dans notre ouvrage sur leur inversion, citée plus haut. Dans l'édition russe de ce livre nous avons donné la démonstration de M. *Noether*: Ueber das Jacobische Umkehrproblem. Sitzungsberichte der

La quantité ξ est tout à fait arbitraire. Cette égalité nous montre, que les fonctions

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\xi}^{a_k})_k \qquad (k=1,2,\ldots p) \tag{9}$$

sont les dérivées partielles par rapport à $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$ d'une certaine fonction des mêmes variables indépendantes. La même chose aura lieu par rapport aux fonctions qui en diffèrent par des constantes arbitraires:

$$C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\xi}^{a_k})_k, \quad (k=1,2,3,\ldots p) \tag{10}$$

lesquelles seront aussi les dérivées partielles par rapport aux variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ d'une certaine autre fonction des mêmes variables. En la désignant par

$$\Phi(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}; C_h; \xi), \tag{11}$$

si elle s'annule pour $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(0)}$, on aura:

$$C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\xi}^{a_k})_k = \frac{\partial \Phi(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}; C_h; \xi)}{\partial u_k}, \tag{12}$$

et parconséquent

$$d\Phi(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}; C_h; \xi) = \sum_{k=1}^{p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\xi}^{a_k})_k \Big) du_k. \tag{13}$$

Le point (ξ, y_ξ) étant tout à fait arbitraire, on pourra le faire coïncider avec le point (x_0, y_0); alors nous aurons un cas particulier de cette fonction, que nous désignerons de la même manière, en omettant seulement ξ, de la sorte qu'on aura:

$$d\Phi(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) = \sum_{k=1}^{p} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{x_0}^{a_k})_k \Big) du_k. \tag{14}$$

La fonction (13), plus générale, peut aisement être ramenée à celle-ci, particulière. En effet, on a:

$$\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\xi}^{a_k} = \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{x_0}^{a_k} - \mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{x_0}^{\xi}; \tag{15}$$

---

physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Sitzung v. 16. Juni 1884. Cette nouvelle démonstration est plus symmétrique, comme la deuxième démonstration de Mr. M. Noether, donnée par lui dans les Math. Ann., Bd. 37, S. 483.

parconséquent l'égalité (13) prendra la forme:

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
d\Phi(u_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h; \xi) &= \sum_{k=1}^{p} \Big(C_k + J(u_h - \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{\xi} \Big|_1^p + \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{a_k})_k \Big) du_k = \\
&= \sum_{k=1}^{p} \Big(C_k + J(v_h \Big|_1^p + \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{a_k})_k \Big) dv_k = d\Phi(v_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h),
\end{aligned}
$$

— si l'on pose

$$
(17)\qquad v_h = u_h - \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{\xi}; \qquad (h = 1, 2, \dots p)
$$

d'ici il suit, que

$$
(18)\qquad \Phi(u_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h; \xi) = \Phi(v_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h) + C.
$$

Pour déterminer la constante C, posons $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(0)}$; alors, si l'on fait

$$
(19)\qquad \overset{(0)}{v_h} = \overset{(0)}{u_h} - \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{\xi}, \qquad (h = 1, 2, \dots p)
$$

on aura

$$
(20)\qquad 0 = \Phi(\overset{(0)}{v_h} \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h) + C;
$$

en retranchant cela de (18), nous aurons:

$$
(21)\qquad \Phi(u_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h; \xi) = \Phi(v_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h) - \Phi(\overset{(0)}{v_h} \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h),
$$

ou, en portant aulieu de v_h et $v_h^{(0)}$ leurs expressions, tirées des égalités (17) et (19):

$$
(22)\qquad \Phi(u_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h; \xi) = \Phi(u_h - \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{\xi} \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h) - \Phi(\overset{(0)}{u_h} - \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{\xi} \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h).
$$

De l'égalité (14) il suit que la fonction

$$
(23)\qquad \Phi(u_h \Big|_1^p \overset{(0)}{u_h}, C_h) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_h \Big|_1^p + \mathop{\mathrm{I}_h}_{x_0}^{a_k})_k \Big) du_k,
$$

l'intégrale étant prise suivant une courbe dans l'espace à p dimensions du point $(\overset{p}{\underset{1}{u_k^{(0)}}})$ *jusqu'au point* $(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})$, *en évitant les points, où la fonction à intégrer devient infinie ou indéterminée.* La fonction plus générale, déterminée par l'équation (13) sera représentée par une intégrale semblable à (23), où à la place de x_0 figurera ξ.

De cette définition de la fonction on déduit aisement ses propriétés principales, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

108. En multipliant l'égalité (11) § 106 par du_k et en sommant par rapport à k de 1 à p, on aura d'après (13) du § 107:

$$d\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; C_h; \eta) - d\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}; C_h; \xi); \tag{1}$$

en intégrant cette égalité, on aura:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \eta) - \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi), \tag{2}$$

ou, d'après (22) du § précédent:

$$\begin{aligned} \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}) = {} & \Phi(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) - \\ & - \Big(\Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) - \Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)\Big). \end{aligned} \tag{3}$$

En effectuant l'opération D_ξ sur cette égalité, on aura:

$$\begin{aligned} & J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_\xi = \\ & = \sum_{k=1}^{p} \left\{ \frac{\partial\Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)}{\partial u_k} - \frac{\partial\Phi(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)}{\partial u_k^{(0)}} \right\} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}), \end{aligned} \tag{4}$$

ou, d'après (12) et (15) du § précédent:

$$\begin{aligned} & J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})_\xi = \\ & = \sum_{k=1}^{p} \Big\{ J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}}}{}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k - J(u_h^{(0)} + \overset{p}{\underset{1}{\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}}}{}_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big\} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}). \end{aligned} \tag{5}$$

109. Revenons maintenant aux formules (4) — (6) § 98. La première de ces égalités peut être représentée ainsi:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k - \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k = 0, \tag{1}$$

ou, en transposant les termes précédés du signe (—) dans l'autre membre de l'égalité, de cette manière:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_k + \overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k + v_k, \tag{2}$$

en posant:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{I}}}_k = v_k. \tag{3}$$

Dans les égalités (5) et (6) du § 98 changerons la notation des paramètres, en écrivant ξ, η aulieu de x, x_0, et ensuite décomposons chaque intégrale sous le signe de sommation en une différence des deux autres, nous aurons:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\Pi}}_\xi + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi}}_\xi - \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\Pi}}_\xi = D_\xi \log\Big(P_{\xi\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\Big), \tag{4}$$

ce qu'on peut en vertu de (6) § 102 et (2) du § présent représenter ainsi:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\Pi}}_\xi + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} v_h)_\xi = D_\xi \log\Big(P_{\xi\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\Big); \tag{5}$$

et de même:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} - \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} = \log\left(\frac{P_{\xi\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\eta\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right), \tag{6}$$

ou, d'après (7) § 102 et (2) du § présent:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta} + \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} v_h) = \log\left(\frac{P_{\xi\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}{P_{\eta\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})}\right). \tag{7}$$

On peut former aussi une fonction, qui deviendra égale à ∞^1 aux $p+1$ points, dont p restent les mêmes $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ qu'auparavant, et le dernier sera le point $(\alpha', y_{\alpha'})$, et qui devient égale à 0^1 au point (x', y'); alors on aura d'après le théorème d'Abel:

$$\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\mathrm{I}}}_k + \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha'_i}{\mathrm{I}}}_k = 0, \tag{8}$$

d'ou l'on trouvera, comme plus haut:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha'_i}{\underset{\alpha_i}{\mathrm{I}}}_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{\alpha'_i}{\mathrm{I}}}_k + \overset{\alpha_i}{\underset{x'}{\mathrm{I}}}_k = u_k - v_k + \tilde{\omega}_k, \tag{9}$$

où l'on a

$$\tilde{\omega}_k = \sum_{g=1}^{p} (m_g \omega_{kg} + n_g \omega'_{kg}), \tag{10}$$

— car le chemin d'intégration pourra être un autre, — et d'après le théorème d'Abel pour les intégrales de troisième espèce dans le cas considéré:

$$\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\text{III}}}_{\xi\eta}+\sum_{i=1}^{p}\overset{x_i}{\underset{x_0}{\text{III}}}_{\xi\eta}-\sum_{i=1}^{p}\overset{\alpha'_i}{\underset{x_0}{\text{III}}}_{\xi\eta}=\log\left(\frac{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}{P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}\right), \tag{11}$$

d'où nous arriverons comme plus haut à la formule:

$$\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\text{III}}}_{\xi\eta}+\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})-\Pi_{\xi\eta}(u_h\overset{p}{\underset{1}{-}}\bar v_h)=\log\left(\frac{P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}{P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}\right), \tag{12}$$

en posant pour abréger:

$$\bar v_k=v_k-\tilde\omega_k. \quad (k=1,2,\ldots p) \tag{13}$$

Si l'on ajoute les égalités (7) et (12) et si l'on prend égard à ce, que, le chemin de $(\alpha', y_{\alpha'})$ à (y', x') et puis de (x', y') à $(\alpha', y_{\alpha'})$ étant fermé, d'après (14) et (15) § 92 on a en général:

$$\overset{x'}{\underset{\alpha'}{\text{III}}}_{\xi\eta}+\overset{\alpha'}{\underset{x'}{\text{III}}}_{\xi\eta}=2q'\pi i+\sum_{k=1}^{p}\tilde\eta_k\overset{\xi}{\underset{\eta}{\text{I}}}_k=2q'\pi i+\sum_{k=1}^{p}\tilde\eta_k(\overset{\xi}{\underset{x_0}{\text{I}}}_k-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\text{I}}}_k), \tag{14}$$

où

$$\tilde\eta_k=\sum_{g=1}^{p}(m_g\eta_{kg}+n_g\eta'_{kg}), \tag{15}$$

on aura la formule suivante:

$$\begin{aligned}\log.\left(\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)\cdot P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)\cdot P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}y_i)}\right)&=2q\pi i+\\ +2\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})-\Pi_{\xi\eta}(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}v_h)&-\Pi_{\xi\eta}(u_h\overset{p}{\underset{1}{-}}v_h),\end{aligned} \tag{16}$$

car en vertu des formules (11) et (9) du § 104 et des formules du § 92 citées tout à l'heure, on a

$$\Pi_{\xi\eta}(u_h-\overset{p}{\underset{1}{v_h}}+\tilde\omega_h)=2q''\pi i+\sum_{k=1}^{p}\tilde\eta_k\overset{\xi}{\underset{\eta}{\text{I}}}_k+\Pi_{\xi\eta}(u_h\overset{p}{\underset{1}{-}}v_h). \tag{17}$$

En posant pour le moment:

$$\Pi_{\xi\eta}(\overset{(0)}{u_h})+\Phi(\overset{(0)}{u_h}-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\text{I}}}_h\Big|_1^p\overset{(0)}{u_h},C_h)-\Phi(\overset{(0)}{u_h}-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\text{I}}}_h\Big|_1^p\overset{(0)}{u_h},C_h)=C', \tag{18}$$

on a d'après (3) du § précédent:

$$(19)\qquad \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = C' + \Phi(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) - \Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) + 2q_1\pi i,$$

$$(20)\qquad \begin{aligned} \Pi_{\xi\eta}(u_h \pm v_h) = C' + \Phi(u_h \pm v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) - \\ - \Phi(u_h \pm v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) + 2q_2\pi i, \end{aligned}$$

(q_2 pouvant avoir des valeurs différentes pour les deux signes $\pm$). En vertu de ces formules l'équation (16) prendra la forme:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \log\left(\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \cdot P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \cdot P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}\right) = 2Q\pi i + \\ + 2[\Phi(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) - \Phi(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)] - \\ - \Phi(u_h + v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) + \Phi(u_h + v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) - \\ - \Phi(u_h - v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) + \Phi(u_h - v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h). \end{aligned}$$

110. En passant du logarithme au nombre et en posant, pour abréger:

$$(1)\qquad \Theta(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) = e^{\Phi(u_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)},$$

— notation, introduite par *Jacobi*, d'où vient la dénomination *thétafonction* pour cette nouvelle fonction, on tirera de l'équation (21) du § précédent cette autre:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{P_{\xi,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \cdot P_{\xi,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\eta,\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}) \cdot P_{\eta,x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})} = \\ &= \frac{\dfrac{\Theta(u_h + v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) \cdot \Theta(u_h - v_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)}{[\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)]^2}}{\dfrac{\Theta(u_h + v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h) \cdot \Theta(u_h - v_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)}{[\Theta(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}_h \Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)]^2}}. \end{aligned}$$

Dans cette égalité les dénominateurs des deux membres on tire de leurs numérateurs respectifs par le changement de ξ en η; on en conclut que le rapport des numérateurs des deux membres est une fonction, qui ne change pas sa valeur, si l'on remplace ξ par η, qui en est parconséquent tout à fait indépendant; c'est-à-dire que ce rapport ne dépend pas du point (ξ, y_ξ). En le désignant par V, nous aurons donc l'égalité suivante:

$$P_{\xi\alpha'}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}, y_i}) \cdot P_{\xi x'}(\alpha', y_{\alpha'}; \overset{p}{\underset{1}{x_i}, y_i}) =$$

$$= V \frac{\Theta(u_h + v_h - \mathrm{I}_h \overset{\xi}{\underset{x_0}{|}} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h) \cdot \Theta(u_h - v_h - \mathrm{I}_h \overset{\xi}{\underset{x_0}{|}} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{[\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \overset{\xi}{\underset{x_0}{|}} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)]^2}. \tag{3}$$

Cette formule correspond à celle de la théorie des fonctions elliptiques, qui donne l'expression de la fonction $\wp(u) - \wp(v)$ par $\Theta(u)$, [ou par $\sigma(u)$], et à celle de la théorie des fonctions hyperelliptiques, qui donne l'expression de la fonction $\frac{\varphi(a)}{P(a)}$ par les Θ-fonctions *). En considérant à gauche ξ comme variable indépendante, nous avons là une fonction uniforme sur la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$, qui devient égale à ∞^2 aux p points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}, y_i})$. Au point (x', y') et aussi au point $(\alpha', y_{\alpha'})$ elle est finie et différente de zéro, car l'un de ses facteurs devient $= \infty^1$, lorsque l'autre devient $= 0^1$. Chaque facteur à gauche est une fonction symmétrique des paires $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}, y_i})$, comme il suit de ce, qu'on a dit au § 58 après la formule (11); parconséquent leur produit le sera aussi, et parsuite il sera une fonction des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$. Considérée comme une fonction de ces variables il devient $= \infty^2$ pour les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, qui amènent l'un des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}, y_i})$ en (ξ, y_ξ); la même chose a lieu par rapport à second membre de (3), où, comme nous le verrons au chapitre suivant, le dénominateur $[\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \overset{\xi}{\underset{x_0}{|}} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)]^2$ devient égale à 0^2 pour les mêmes systèmes des valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$; il suit de là, que V sera par rapport à chacune des variables indépendantes $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ séparément une fonction uniforme (car Θ l'est comme on le verra plus bas), continue et toujours finie; parconséquent par rapport à chacune de ces

*) La formule (4) sur la page 101 de notre ouvrage, déjà citée, sur l'„Inversion des intégrales hyperelliptiques". Kharkow, 1885 (en russe).

variables une constante, c'est-à-dire une grandeur, qui est indépendante de ces variables. Par cette raison on peut la déterminer, en donnant aux variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ des valeurs particulières quelconques, par exemple en posant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$; alors tous les $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ viendront à tomber en $(\overset{p}{\underset{1}{a_i, b_i}})$, et nous aurons de l'égalité (3):

$$(4)\quad P_{\xi\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,P_{\xi x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=V\frac{\Theta(v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,\Theta(-v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)}{[\Theta(-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)]^2},$$

d'où l'on aura V. On peut l'éliminer de l'égalité (3), en la divisant par cette égalité (4); on aura alors:

$$(5)\quad \begin{aligned}&\frac{P_{\xi\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})\,.\,P_{\xi x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{\xi\alpha'}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,.\,P_{\xi x'}(\alpha',y_{\alpha'};\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})}=\\&=\frac{[\Theta(-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)]^2\,\Theta(u_h+v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,\Theta(u_h-v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)}{\Theta(v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,\Theta(-v_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,[\Theta(u_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)]^2}.\ ^{*)}\end{aligned}$$

111. De l'équation (1) du § précédent, qui définit la nouvelle fonction $\Theta(u_h\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)$, on tire

$$(1)\qquad \Phi(u_h\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)=\log\Theta(u_h\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h).$$

En vertu de cette égalité on peut donner la forme suivante à l'égalité (3) § 108:

$$(2)\qquad \varPi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})-\varPi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})=\log\frac{\Theta(u_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\eta}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,\Theta(u_h^{(0)}-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)}{\Theta(u_h-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\xi}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)\,\Theta(u_h^{(0)}-\mathrm{I}_{h\,x_0}^{\;\eta}\Big|_1^p u_h^{(0)},C_h)}.$$

Si l'on pose

$$(3)\qquad \overset{0}{\varPi}_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{III}_{\xi\eta}{}_{a_i}^{x_i},$$

en commençant l'intégration par les mêmes valeurs des x_i, par lesquelles nous l'avons fait pour les intégrales de première espèce en (7) § 100, on aura évidement:

*) Cette formule présente une analogie complète de la formule (6) p. 104 de notre ouvrage citée plus haut.

$$\overset{\circ}{\Pi}_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{o_h}}), \tag{4}$$

et parconséquent d'après (2) nous aurons

$$\overset{\circ}{\Pi}_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \log \frac{\Theta(u_h - \overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)\,\Theta(-\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}{\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)\,\Theta(-\overset{\eta}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}. \tag{5}$$

En effectuant l'opération D_ξ sur les deux membres d'égalité (2), nous aurons d'après (8) § 102:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi - J(\overset{p}{\underset{1}{\overset{(0)}{u_h}}})_\xi = \sum_{k=1}^{p} \left\{ \frac{1}{\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)} \cdot \frac{\partial \Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}{\partial u_k} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Theta(\overset{(0)}{u_h} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)} \cdot \frac{\partial \Theta(\overset{(0)}{u_h} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}{\partial u_h} \right\} \varphi_k(\overset{m-2}{\xi}, \overset{n-2}{y_\xi}), \tag{6}$$

car le côté droit de l'égalité (2) dépend de ξ par l'intermédiaire des quantités $(u_k \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}})$ et $(\overset{(0)}{u_k} \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}})$. Quant aux expressions des fonctions $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ par les fonctions Θ, on les aura en vertu de (12) § 107, en différentiant (1) par rapport à u_k, c'est ce qui donnera:

$$C_1 + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k = \frac{1}{\Theta(u_h \Big| \overset{p}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)} \cdot \frac{\partial \Theta(u_h \Big| \overset{k}{\underset{1}{}} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}{\partial u_k}, \tag{7}$$

d'où l'on trouve, en changeant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en $u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}$:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u}})_k = \frac{1}{\Theta(u_h - \overset{a_k p}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \underset{1}{} \overset{(0)}{u_h}, C_h)} \cdot \frac{\partial \Theta(u_h - \overset{a_k p}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \Big| \underset{1}{} \overset{(0)}{u_h}, C_h)}{\partial u_k} - C_k. \tag{8}$$

Ainsi les transcendantes abéliennes de deuxième et de troisième espèces sont ramenées aux Θ-fonctions. Si l'on prenait de telles systèmes des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, qui amènent tous les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, un seul excepté, au point $(x_0, y_0,)$ alors des p termes de la somme des intégrales de troisième et de deuxième espèces qui définissent respectivement les transcendantes $\Pi_{\xi\eta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ et $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$, $p-1$ se réduiront à zèro, et il n'en restera qu'un seul, qui sera exprimé ainsi de même par les Θ-fonctions.

112. Les valeurs d'une fonction symmétrique quelconque des valeurs de la fonction $\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$ aux points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ seront connues, lorsque seront connues les valeurs des fonctions symmétriques simples, comme on le sait par l'algèbre supérieure; quant à ces dernières, on les trouvera de la manière suivante. Désignons par $(\overset{m'}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ les zéros, par $(\overset{m'}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}})$ les infinis de la fonction:

$$\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z, \tag{1}$$

où z est une valeur donnée arbitrairement; les dernières, c'est-à-dire $(\overset{m'}{\underset{1}{\beta_i, y_{\beta_i}}})$, étant les zéros de la fonction $\chi(x,y)$, sont invariables; les premiers varieront avec z. Alors d'après le théorème d'Abel [(6) § 95] nous aurons:

$$\sum_{i=1}^{m'} \mathrm{III}_{x,x'_0}\Big|_{\alpha_i}^{\beta_i} = \log\left\{\frac{\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z}{\dfrac{\chi(x'_0,y'_0)}{\psi(x'_0,y'_0)} - z}\right\}, \tag{2}$$

où (x,y) et (x'_0, y'_0) sont des points quelconques ordinaires de la surface de Riemann pour $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0$. À gauche on peut échanger les paramètres avec les limites des intégrales, après quoi nous aurons:

$$\sum_{i=1}^{m'} \mathrm{III}_{\beta_i,\alpha_i}\Big|_{x'_0}^{x} = \log\left\{\frac{\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} - z}{\dfrac{\psi(x'_0,y'_0)}{\chi(x'_0,y'_0)} - z}\right\}. \tag{3}$$

En posant ici $x=\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$, $y=\overset{p}{\underset{1}{y_i}}$, $x'_0=\overset{p}{\underset{1}{a_i}}$, $y'_0=\overset{p}{\underset{1}{b_i}}$, et en ajoutant les résultats obtenus ainsi, on aura d'après (3) du § précédent:

$$\sum_{i=1}^{m'} \Pi^0_{\beta_i,\alpha_i}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \log\left\{\frac{\prod_{j=1}^{p}\left(\dfrac{\psi(x_j,y_j)}{\chi(x_j,y_j)} - z\right)}{\prod_{j=1}^{p}\left(\dfrac{\psi(a_j,b_j)}{\chi(a_j,b_j)} - z\right)}\right\}, \tag{4}$$

(à droite $\prod_{j=1}^{p}$ désignant le produit).

Le premier membre de cette égalité peut être, d'après (5) du § précédent, présenté ainsi:

$$\sum_{i=1}^{m'} \Pi^0_{\beta_i, \alpha_i}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \sum_{i=1}^{m'} \log \frac{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)\,\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)\,\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}; \tag{5}$$

en le portant dans l'égalité précédente et en passant des logarithmes aux nombres, nous aurons:

$$\frac{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{\psi(x_j, y_j)}{\chi(x_j, y_j)} - z\right)}{\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{\psi(a_j, b_j)}{\chi(a_j, b_j)} - z\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{m'} \dfrac{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}}{\prod_{i=1}^{m'} \dfrac{\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}}. \tag{6}$$

Après avoir multiplié à gauche le numérateur et le dénominateur par $(-1)^p$, nous multiplierons les deux membres par le dénominateur du côté gauche; posons alors

$$\prod_{j=1}^{p}\left(z - \frac{\psi(a_j, b_j)}{\chi(a_j, b_j)}\right) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m'} \dfrac{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{\Theta(u_h - \mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}}{\prod_{i=1}^{m'} \dfrac{\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\alpha_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}{\Theta(-\mathrm{I}_h \Big|_{x_0}^{\beta_i} \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h)}} = N; \tag{7}$$

ce N sera une quantité, qui dépend de z comme explicitement, tant par l'intermédiaire des quantités $(\overset{m'}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, qui dépendent aussi de z, comme on l'a déjà remarqué plus haut. En développant suivant les puissances de z le produit qui reste après cela au premier membre de l'égalité (6), on aura:

$$z^{p-2} + M_1 z^{p-1} + M_2 z^{p-2} + \cdots + M_{p-1} z + M_p = N, \tag{8}$$

où $M_1, M_2, \ldots M_p$ sont les fonctions symmétriques simples des valeurs de la fonctions $\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$ aux points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, que l'on cherche. Après avoir choisi arbitrairement p valeurs de z, soit:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_p, \tag{9}$$

et déterminé pour chacune de ces valeurs, comme z_k, les valeurs correspondantes $\alpha_i^{(k)}$ avec les valeurs correspondantes de y, et ensuite les valeurs correspondantes de N, que nous désignerons respectivement par

(10) $$N_1, N_2, N_3, \dots N_p,$$

d'après la formule (7), nous aurons le système de p équations linéaires par rapport aux quantités cherchées $M_1, M_2, \dots M_p$, savoir:

(11) $$z_k^p + M_1 z_k^{p-1} + M_2 z_k^{p-2} + \dots + M_{p-1} z_k + M_p = N_k,$$

pour $k=1, 2, \dots p$. En le résolvant, on aura les quantités $\overset{p}{\underset{1}{M_h}}$ en forme des fonctions linéaires des quantités $\overset{p}{\underset{1}{N_h}}$, qui s'expriment par les fonctions Θ, où les valeurs de $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ sont considérées comme des quantités données. Quand on aura trouvé les quantités $M_1, M_2, \dots M_p$, on obtiendra les valeurs $\frac{\psi(x_i, y_i)}{\chi(x_i, y_i)}$ de notre fonction en résolvant l'équation:

(12) $$z^p + M_1 z^{p-1} + M_2 z^{p-1} + \dots + M_{p-1} z + M_p = 0. ^{*)}$$

113. Quand on aura les valeurs de la fonction

(1) $$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$$

aux points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, alors les valeurs de toute autre fonction:

(2) $$Z = \frac{\Psi(x, y)}{X(x, y)}$$

aux mêmes points pourront être trouvées de la manière suivante. Formons de la même manière, comme nous l'avons fait au § précédent, les équations, qui seraient satisfaites par les valeurs aux mêmes points de la fonction

(3) $$Z \,.\, z^k = \frac{\Psi(x,y)}{X(x,y)} \left(\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right)^k$$

pour $k=0, 1, 2, \dots p-1$. En désignant par $M_1^{(k)}$ les coéfficients de la puissance $p-1$-ième de l'inconnue dans chacune de ces équations, nous aurons un système de p équations linéaires par rapport à $Z_i = \frac{\psi(x_i, y_i)}{\chi(x_i, y_i)}$ savoir:

(4) $$\sum_{i=1}^{p} Z_i z_i^k = -M_1^{(k)}. \qquad (k=0, 1, 2, \dots p-1)^{**)}$$

---

*) Voir: *Clebsch* u. *Gordan*. „Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1866. § 42. S. 142.

**) Voir: *Clebsch* u. *Gordan*. Ibid. S. 143.

En résolvant ces équations on aura les valeurs de Z_i en fonction rationnelles de z_i respectivement et des quantités connues. Il est à remarquer, que cette expression de Z_i par z_i ne le contiendra pas à une puissance plus élevé que $p-1$ *). Conformément au théorème connue sur la forme générale d'une fonction rationnelle d'une racine de l'équation algébrique on peut la rendre, cette expression, entière par rapport à z_i du degré $p-1$, car en multipliant le numérateur et le dénominateur par ce dernier — le déterminant

$$\begin{array}{c|c|}
0,1 & i \quad p \\
k & z_i^k \\
p &
\end{array}$$

on aura au dénominateur le discriminant de l'équation (12) du § précédent.

Si l'on prend en particulier

$$z = \frac{x}{x-\xi}, \tag{5}$$

ξ étant une constante, on aura de la même manière l'équation pour déterminer les x_i, qui sera de la même forme que l'équation (12) du § précédent. En effet, on aura en premier lieu une équation en z; en y introduisant son expression par x, tirée de l'équation (5), nous la transformerons en une équation avec l'inconnue x, qui sera de même degré, la substitution (5) étant linéaire. Après cela on obtiendra les valeurs correspondantes de y par la même méthode, qu'on a donné tout à l'heure pour la détermination de Z_i. En effet, en prenant $\Psi(x,y)=y, \mathrm{X}(x,y)=1$, nous aurons $Z=y$ **). De cette manière y_i sera exprimé par x_i en forme d'un polynôme du degré $p-1$ par rapport à x_i, dont les coéfficients, de même que ceux de l'équation, qui détermine les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$, seront des fonctions rationnelles de diverses Θ-fonctions. Pour les systèmes des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_k}}$, pour lesquelles s'annulent tous les coéfficients de l'équation en x (après avoir chassé les dénominateurs), les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{x_i}}$ resteront indéterminées, comme on a déjà expliqué plus haut.

---

*) Voir: *Briot*. „Théorie des fonctions abéliennes". Paris, 1879. Chap. XIII. pp. 160—162.

**) Ibid. pp. 163—164.

Chapitre VII.

Les fonctions Thêtas.

---

114. Après avoir montré, comment on résout le problème de Jacobi à l'aide des thétafonctions, nous allons développer ici leurs propriétés principales, en partant de leur définition même par l'équation (1) § 110, où l'exposant du nombre e est défini par l'équation (23) du § 107, à laquelle nous avons réduit dans le même § la fonction plus générale, qui d'après la remarque faite à la fin de ce § serait définie par l'équation:

$$(1) \qquad \Phi(u_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h\,;\xi) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k\,,$$

— en intégrant suivant une courbe dans l'espace à p dimensions du point $(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}})$ au point $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$. En prenant la fonction (1) pour l'exposant du nombre e, on aurait une fonction plus générale:

$$(2) \qquad \Theta(u_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h;\xi) = e^{\Phi(u_h \,\big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h;\,\xi)}\,,$$

qui n'est pas pourtant indispensable, car d'après les équations (22) du § 107 et (1) du § 110 on a:

$$(3) \qquad \Theta(u_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h;\xi) = \frac{\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h)}{\Theta(u_h^{(0)} - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h)}\,.$$

Les propriétés de thétafonctions dépendant de celles de la fonction $\Phi(u_h \,\Big|_1^p\, u_h^{(0)}, C_h)$, on doit commencer par discuter ces dernières. Dans les premières recherches on pourra même au lieu de celle-ci étudier la fonction plus générale définie par l'équation (1) de ce §, à laquelle revient la première, lorsque le point (ξ, y_ξ) tombe dans le point (x_0, y_0), pris pour limite inférieure des intégrales de deuxième espèce.

115. La fonction $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ reste finie et continue tant que les arguments des fonctions $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h)_k$ $(k=1, 2, \ldots p)$ sous les signes de l'intégration ne reçoivent pas des valeurs, pour lesquelles ces fonctions deviennent infinies. Les arguments mentionnés peuvent être réduit à des sommes de p intégrales à l'aide du théorème d'Abel; on pourrait faire la même chose pour les fonctions $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h)_k$ elles-mêmes, si le théorème d'Abel ne devenait pas illusoir pour les intégrales de deuxième espèce, lorsque l'un des limites de ces intégrales coïncide avec leur paramètre. Pour obvier à cet obstacle il faut recourrir à la méthode des limites; c'est pourquoi aulieu de la fonction $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h)_k$ nous allons considérer d'abord celle-ci:

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{x'}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h)_k, \tag{1}$$

(x', y') désignant un point rapproché de (a_k, b_k), mais non pas coïncidant avec lui. Alors en posant

$$u_h + \overset{x'}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h + \overset{x'}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}_h, \tag{2}$$

on aura en vertu de (5) § 98:

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{x'}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}_h)_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\Pi}}_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{\Pi}}_k + \overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi}}_k - D_{a_k} \log\Big(P_{a_k \xi}(x', y'; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)\Big), \tag{3}$$

$(\alpha_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\alpha_i})$ étant les autres que (ξ, y_ξ) zéros de la fonction:

$$P_{z,\xi}(x', y'; x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i) \tag{4}$$

de la variable indépendante (z, y_z), ayant ses $p+1$ infinis aux points (x', y') et $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$. Au moment, où nous fairons coïncider le point (x', y') avec le point (a_k, b_k), le second membre de l'égalité (3) contiendra une expression indéterminée de la forme $\infty - \infty$; pourtant il restera fini et déterminé. En effet, aux environs du point (a_k, b_k) on a d'après le § 74:

$$\overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi}}_k = \frac{F'_y(a_k, b_k)}{x' - a_k} + \mathfrak{P}(x' - a_k), \tag{5}$$

et d'après (4) et (5) du § 61:

$$D_{a_k}\log\Big(P_{a_k\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})\Big)=\frac{D_{a_k}P_{a_k\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{a_k\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}=$$

$$=\left[-\frac{\frac{\partial F(a_k,b_k)}{\partial b_k}\cdot\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}{(x'-a_k)^2}+\mathfrak{P}_3(x'-a_k)\right]:\left[-\frac{\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}{x'-a_k}+\mathfrak{P}_2(x'-a_k)\right]=$$

$$(6)\qquad =\left[\frac{\frac{\partial F(a_k,b_k)}{\partial b_k}}{x'-a_k}-\frac{x'-a_k}{\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}\mathfrak{P}_3(x'-a_k)\right]:\left[1-\frac{x'-a_k}{\frac{\partial F(x',y')}{\partial y'}}\mathfrak{P}_2(x'-a_k)\right]=$$

$$=\frac{\frac{\partial F(a_k,b_k)}{\partial b_k}}{x'-a_k}+\mathfrak{P}_4(x'-a_k);$$

donc la différence

$$(7)\qquad \overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi_k}}-D_{a_k}\log\Big(P_{a_k\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})\Big)=\overline{\mathfrak{P}}(x'-a_k)$$

sera finie et déterminée, et parconséquent il en sera de même de la fonction $J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{}}\overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}})_k$. Il en sera autrement pour les valeurs spéciales des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, qui amènent quelquesuns des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ au point (ξ,y_ξ), ou tous ces points sur une courbe adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})=0$: dans ces deux cas, comme on l'a vu au § 71, l'un des points $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,y_{\alpha_i}}})$ viendra toujours tomber dans le point (x',y'), en sorte qu'à la limite, où ce point coïncidera avec (a_k,b_k), la somme $\sum_{i=1}^{p}\overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\Pi_k}}$ deviendra infinie, — dans le second cas les autres des points $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,y_{\alpha_i}}})$ restant, en vertu de l'égalité (12) du § 71, indéterminés comme les $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i,y_i}})$. Parconséquent la fonction $J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{}}\overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}_h}})_k$ devient infinie dans les deux cas mentionnés; allons voir de plus près de quelle manière le devient elle.

116. Soit (x_g,y_g) l'un des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$ qui tombent en (ξ,y_ξ); alors on aura pour (x',y') très rapproché de (a_k,b_k):

$$(1)\qquad \overset{x_g}{\underset{x_0}{\Pi_k}}+\overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi_k}}=\overset{x'}{\underset{x_0}{\Pi_k}}=-\frac{\frac{\partial F(a_k,b_k)}{\partial b_k}}{x'-a_k}+\mathfrak{P}(x'-a_k);$$

quant à la partie algébrique en (3) du § précédent, elle pourra d'abord être représentée en vertu de (7) § 59 et (2) § 61 de cette manière:

$$D_{a_k}\log\Big(P_{a_k\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})\Big)=\frac{D_{a_k}P_{a_k\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}{P_{a_k\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})-P_{\xi\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})}. \tag{2}$$

De la formule (6) § 70, après le changement des $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,\beta_i}})$ en $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$, on tire:

$$P_{\xi\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})=P_{\xi\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})-\sum_{j=1}^{p}P_{\xi\eta}(x_j,y_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\varphi_j(\overset{m-2}{x'},\overset{n-2}{y'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}), \tag{3}$$

d'où l'on aura dans le cas, où quelquesuns des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})$,—par exemple les l premiers, — seront très près du point (ξ,y_ξ):

$$\begin{aligned}P_{\xi\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})&=\\ =P_{\xi\eta}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})&-\sum_{j=1}^{l}\Bigg(-\frac{\frac{\partial F(x_j,y_j)}{\partial y_j}}{x_j-\xi}+\mathfrak{P}_j(x_j-\xi)\Bigg)\varphi_j(\overset{m-2}{x'},\overset{n-2}{y'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})-\\ &-\sum_{j=l+1}^{p}P_{\xi\eta}(x_j,y_j;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})\,\varphi_j(\overset{m-2}{x'},\overset{n-2}{y'};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}}).\end{aligned} \tag{4}$$

En portant cela dans l'équation (2), de même que les développements du premier membre du dénominateur et du numérateur de la même formule (2), et de là et de la formule (1) dans l'équation (3) du § précédent, on trouve aisement *), que

$$\begin{aligned}\lim\Bigg\{\overset{x'}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_k-D_{a_k}\log\Big(P_{a_k,\xi}(x',y';\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})\Big)\Bigg\}_{(x',y')=(a_k,b_k)}&=\\ =\sum_{j=1}^{l}\frac{\frac{\partial F(x_j,y_j)}{\partial y_j}}{x_j-\xi}\,\varphi_j(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})+K_k,&\end{aligned} \tag{5}$$

K_k désignant l'ensemble des termes qui restent finis à la limite et ne contiènnent pas des puissances négatives des $(\overset{l}{\underset{1}{x_j-\xi}})$. Donc on aura dans le cas considéré:

$$C_k+J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}+\overset{a_k}{\underset{\xi}{\mathrm{I}}}{}_h)_k=\sum_{j=1}^{l}\frac{\frac{\partial F(x_j,y_j)}{\partial y_j}}{x_j-\xi}\,\varphi_j(\overset{m-2}{a_k},\overset{n-2}{b_k};\overset{p}{\underset{1}{x_i,y_i}})+L_k, \tag{6}$$

---

*) Le résultat des substitutions indiquées en (2) pouvant être soumis d'abord à la transformation indiquée en (6) du § précédent.

L_k désignant la somme des termes ne contenants pas des puissances négatives des $(x_j \overset{p}{\underset{1}{-}} \xi)$. Après avoir multiplié cette équation par du_k, en sommant par rapport à k de 1 à p et en intégrant le résultat du point $(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}})$ au point $(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, tous les deux désignant les valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ pour lesquelles sont convergents les développements (4), (5) et (6), on aura en vertu de (1) § 114 et (10) § 101:

$$\begin{aligned}\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h;\xi) &= \Phi(u_h^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h;\xi) + \sum_{j=1}^{l}\int_{x_j^{(1)}}^{x_j}\frac{dx_j}{x_j-\xi} + \sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(1)}}^{u_k} L_k\,du_k = \\ &= \log\prod_{j=1}^{l}(x_j-\xi)+M,\end{aligned} \tag{7}$$

$\overset{p}{\underset{1}{x_j^{(1)}}}$ désignant les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{x_j}}$ pour $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} u_h^{(1)}$, et M l'ensemble des termes ne contenants pas des puissances négatives des $(x_j \overset{l}{\underset{1}{-}} \xi)$. En portant cette expression dans l'équation (2) § 114, on aura:

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h;\xi) = \prod_{j=1}^{l}(x_j-\xi)\cdot e^{M}, \tag{8}$$

d'où il suit que pour les valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, pour lesquelles l des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ (par exemple les l premiers) tombent en (ξ, y_ξ), la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h, \xi)$ devient $=0^l$. En vertu de (3) § 114, on voit, que la même chose aura lieu pour la fonction $\Theta(u_h - \overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)$.

Il suit de l'analyse précédent, que la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)$ sera $=0^l$, lorsque l des points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ tombent en (x_0, y_0), avec lequel coïncide pour elle le point (ξ, y_ξ). On pourrait lui appliquer directement le même analyse.

117. Dans le second cas, celui, où les points $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ viennent sur une courbe adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$, la fonction (4) § 115 se réduira, d'après le (14) § 71, à la fonction:

$$\frac{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi \overset{p-1}{\underset{1}{|}} \alpha_i, y_{\alpha_i})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{|}} x'_i, y'_i)}, \tag{1}$$

qui aura p infinis aux points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$, — car on a $x_p = x'_{p-1}$, $y = y'_{p-1}$, — et p zéros aux points (ξ, y_ξ) et $\overset{p-1}{\underset{1}{(\alpha_i, y_{\alpha_i})}}$, les points $\overset{p-2}{\underset{1}{(x'_i, y'_i)}}$, étant les zéros communs du numérateur et du dénominateur. On aura donc dans ce cas par le théorème d'Abel:

$$0 = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{\xi}{\underset{x_p}{\mathrm{I}_h}}; \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{2}$$

en ajoutant cette équation avec (7) § 100, qui définie les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, on aura:

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{\xi}{\underset{a_p}{\mathrm{I}_h}}; \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{3}$$

mais c'est justement la même forme, que prend en vertu des équations (12) § 71 l'expression de u_h dans le premier cas, lorsque (x_p, y_p) tombe en (ξ, y_ξ). Donc à l'aide de l'équation (2) qui existe toujours dans le second cas, celui-ci est ramené au premier. Donc la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ devient aussi égale à zéro dans le cas, où les $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ viennent sur la courbe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, d'ailleur *identiquement*, (ξ, y_ξ) étant quelconque et $\overset{p-1}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ restant indéterminés.

La même chose aura lieu pour la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)$: elle deviendra aussi identiquement nulle pour les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, qui amènent les points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ sur une courbe adjointe de première espèce. D'après le § 100 dans ce cas $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ se réduiront toujours à une somme de $p-1$ intégrales.

118. La fonction $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ devenant infinie comme logarithme de $x_i - \xi$ pour $x_i = \xi$, d'après la formule (7) § 116, on en conclut, que pour chaque système des valeurs données des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ elle aura une infinité des valeurs, différant entre elles de $2q\pi i$, q étant un nombre entier, positif ou négatif. Comme on a $e^{2q\pi i} = 1$, la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ n'aura qu'une seule valeur. Donc la fonction $\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ est uniforme, toujours finie — parce qu'elle s'annule là, où $\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h; \xi)$ devient infinie, — et continue, — autrement à dire — *holomorphe* pour toutes les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$; elle s'annule dans les deux cas: ou lorsque quelquesuns des points $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ tombent en (ξ, y_ξ), ou lorsqu'ils viènnent tous sur une courbe adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$, et dans ce dernier cas *identiquement*, c'est-à-dire — (ξ, y_ξ) étant quelconque, et $\overset{p}{\underset{1}{(x_i, y_i)}}$ restant indéterminés.

119. Nous allons maintenant déterminer la variation, qu'éprouve une thétafonction, lorsque les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ s'accroissent des périodes simultanés; en vertu de (3) § 114 on peut se restreindre maintenant à la fontion particulière, définie par les équations:

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = e^{\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h)}, \tag{1}$$

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_h^{(0)}}^{u_h} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k \Big) du_k. \tag{2}$$

Nous désignerons les périodes simultanés pour les deux espèces des intégrales de la même manière, comme au § 104:

$$\tilde{\omega}_k = \sum_{j=1}^{p} (m_j \omega_{kj} + n_j \omega'_{kj}), \tag{3}$$

$$\tilde{\eta}_k = \sum_{j=1}^{p} (m_j \eta_{kj} + n_j \eta'_{kj}), \tag{4}$$

de sorte que, d'après (10) § 104, on aura:

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tilde{\omega}_h)_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k + \tilde{\eta}_k. \tag{5}$$

Il importe de remarquer avant tout, que les valeurs de la fonction $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ sont toutes différentes, le cas d'indétermination excepté. Soient en effet deux systèmes de valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$:

$$u'_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_h, \tag{6}$$

$$u''_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}}}{}_h, \tag{7}$$

et supposons qu'on a plus généralement:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u''_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u'_h}})_k, \tag{8}$$

c'est-à-dire, que les valeurs correspondantes de la fonction $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ ne diffèrent que par $\tilde{\eta}_k$, le cas d'égalité y étant compris comme particulier. On aura en même temps:

$$u_h'' - u_h' = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i''}{\underset{x_i'}{\mathrm{I}_h}}, \qquad (h=1, 2, \ldots p) \tag{9}$$

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h''}})_k - J(\overset{p}{\underset{1}{u_h'}})_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i''}{\underset{x_i'}{\mathrm{II}_k}}, \tag{10}$$

les intégrales étant prises sur les mêmes courbes respectives dans les deux égalités; donc, si le côté droit de la deuxième se réduira à $\tilde{\eta}_k$, le côté droit de la première se réduira à $\tilde{\omega}_h$, et de plus $(\overset{p}{\underset{1}{x_i'', y_i''}})$ viendront à tomber en $(\overset{p}{\underset{1}{x_i', y_i'}})$ [§ 100]. Si $\tilde{\eta}_k$ se réduira à zéro, alors tous les $\overset{p}{\underset{1}{m_j}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{n_j}}$ seront des zéros, parsuite aussi $\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}$ se réduiront à zéro; donc la fonction $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k$ ne peut avoir des valeurs égales que pour deux systèmes identiques des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$; donc elle aura des valeurs différentes pour des systèmes différents des valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, c. q. f. d. — Après cette remarque passons au problème que nous nous avons posé.

120. En changeant u_k en $u_k + \tilde{\omega}_k$ aux limites supérieures des intégrales dans l'équation (2) du § précédent, nous aurons:

$$\begin{aligned}\Phi(u_h + \tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) &= \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k + \tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k}^{u_k + \tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k,\end{aligned} \tag{1}$$

en négligeant $2q\pi i$ et en remplaçant pour cela le signe $=$ par le signe $\equiv$. On trouve aisement le second terme à droite en vertu de l'égalité (5) du § précédent. En effet, on aura consécutivement:

$$\begin{aligned}\int_{u_k^{(0)} + \tilde{\omega}_k}^{u_k + \tilde{\omega}_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k &= \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k = \\ = \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k + \tilde{\eta}_k\Big) du_k &= \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big) du_k + \tilde{\eta}_k (u_k - u_k^{(0)});\end{aligned} \tag{2}$$

et parconséquent:

$$\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{u_k^{(0)}+\tilde{\omega}_k}^{u_k+\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k=$$

$$(3)\qquad =\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{u_k^{(0)}}^{u_k}\Big(C_k+J\big(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k+\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k-u_k^{(0)})=$$

$$=\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\,|\,u_h^{(0)},C_h)+\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k-u_k^{(0)})\,.$$

En passant au premier terme du côté droit en (1), remarquons, qu'on a:

$$\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{u_k^{(0)}}^{u_k^{(0)}+\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k=\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{0}^{\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k\equiv$$

$$(4)\qquad \equiv\sum_{k=1}^{p}\left\{\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k+\int\limits_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k\right\};$$

mais on a aussi:

$$(5)\qquad \int\limits_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_h\Big)du_k=\int\limits_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0}-\Big(C_k+J\big(\tilde{\omega}_k-u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0}-\Big(C_k+J\big(-u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k+\tilde{\eta}_k\Big)du_k=\int\limits_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{0}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k+\frac{1}{2}\tilde{\eta}_k\tilde{\omega}_k\,,$$

— en changeant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ dans la première partie de l'intégrale; parconséquent on aura:

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{p}\int\limits_{u_k^{(0)}}^{u_k^{(0)}+\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k\equiv\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}\tilde{\eta}_k\tilde{\omega}_k\,.$$

En vertu de (3) et (6) l'équation (1) devient:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\Phi(u_h+\tilde{\omega}_h\overset{p}{\underset{1}{|}}\,u_h^{(0)},C_h)&\equiv\Phi(u_h\overset{p}{\underset{1}{|}}\,u_h^{(0)},C_h)+\\&+\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k-u_k^{(0)}+\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_k)+\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J\big(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\big)_k\Big)du_k\,.\end{aligned}$$

121. Pour évaluer le dernier terme du second membre de cette égalité, nous allons introduire $2p$ constantes indéterminées $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}$ et $\overset{p}{\underset{1}{J}}{}_k$ pour les déterminer convenablement après, en remarquant, que l'on a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k= \\
&=\sum_{k=1}^{p}(C_k-J_k)\tilde{\omega}_k+\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k\,,
\end{aligned}\tag{1}$$

où le dernier terme à son tour peut être représenté de cette manière:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(u_k+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_k^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k= \\
&=\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k+ \\
&\quad+\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k\,.
\end{aligned}\tag{2}$$

Le premier terme du second membre se trouve aisement, car on a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)\,du_k= \\
&=\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\,du_k-\sum_{k=1}^{p}\int_{\bar{u}_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\,du_k\equiv \\
&\equiv\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\,du_k-\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{\bar{u}_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}J(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\,du_k={}^{*)} \\
&=\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}}^{\bar{u}_k^{(c)}}\Big\{J(u_h-\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}}}{}_h+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\tfrac{1}{2}}}\tilde{\omega}_k+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}\,du_k=-\sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(0)}}^{\bar{u}_k^{(0)}}\tilde{\eta}_k\,du_k= \\
&=-\sum_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(\bar{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)}).
\end{aligned}\tag{3}$$

---

*) Car on a: $\int_a^b-\int_c^\partial=\int_e^b-\int_e^a-\int_e^\partial+\int_e^c=\int_e^c-\int_e^a-\Big(\int_e^\partial-\int_e^b\Big)=\int_a^c-\int_b^\partial.$

En portant cette valeur dans l'équation (2) et de là dans l'équation (1), on aura:

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(C_k+J(u_k+\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)du_k=\\ &=\sum_{k=1}^{p}\Big[(C_k-J_k)\,\omega_k-(\bar{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)})\tilde{\eta}_k\Big]+\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)du_k,\end{aligned}$$

où le dernier terme, pour être évalué, exige que l'on détermine convenablement les constantes indéterminées $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_k^{(0)}}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{J_k}}$. Il nous suffit de connaître une valeur quelconque de ce terme, car toutes les autres en diffèrent d'un multiple de $2\pi i$, comme $2q\pi i$, qui nous peu importe, car $e^{2q\pi i}=1$.

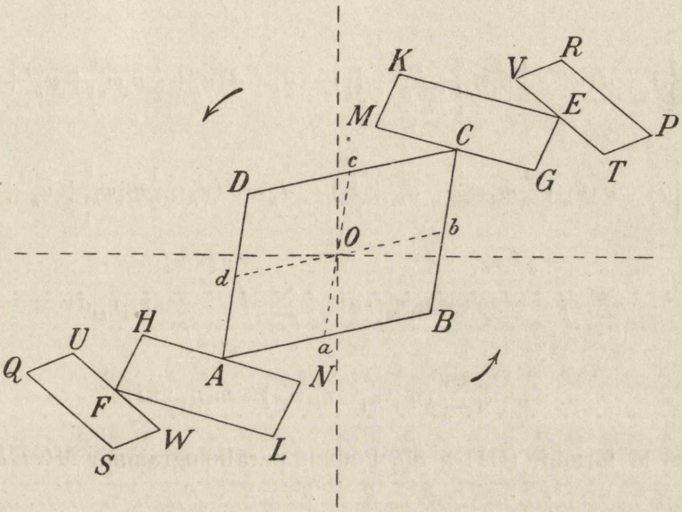
122. Si l'on pouvait déterminer ces constantes de manière que l'on ait pour toutes les valeurs des variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$:

$$(1)\qquad J_k+J(-u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k=-\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big),$$

$(k=1,2\ldots p)$ — et c'est ce qui est toujours possible, comme nous le verrons dans la suite, — on pourrait calculer très-bien le dernier terme en (4) du § précédent. En effet, en multipliant l'égalité (1) par $-du_k$, en sommant pour $k=1,2,\ldots p$ et en intégrant le résultat suivant une courbe du point $(-\overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_h}})$ au point $(+\overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_h}})$, on aura:

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{p}\int_{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(-u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)du_k=\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}^{+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)du_k;$$

— l'égalité, qui prouve, qu'alors l'intégrale prise du premier point $(-\overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}})$ au second $(+\overset{p}{\underset{1}{\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k}})$ suivant une courbe quelconque dans l'espace à p dimensions est égale à l'autre, prise entre les mêmes points dans le sens inverse suivant la courbe symmétrique de la première par rapport à l'origine $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$, et parconséquent égale à la moitié de celle, prise sur la courbe fermée, composée de toutes les deux mentionnées. Il ne reste donc que de faire un choix convenable d'une pareille courbe, avec le centre de symmétrie en $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$, pour pouvoir calculer l'intégrale cherchée. Nous allons choisir pour cela une ligne brisée, dont la figure ci-jointe, faite pour le plan de la variable u_k, permettra de faire une idée; des lignes brisées analogues doivent être imaginées dans les plans de chacune des autres variables:



On a ici: $AB = m_1\omega_{k1}$, $BC = n_1\omega'_{k1}$ (parconséquent $Ob = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}m_1\omega_{k1}$, $bC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}$); $MC = CG = \frac{1}{2}m_2\omega_{k2}$, $GE = \frac{1}{2}n_2\omega'_{k2}$; $VE = ET = = \frac{1}{2}m_3\omega_{k3}$, $TP = \frac{1}{2}n_3\omega'_{k3}$, et ainsi de suite. Le parallelogramme HL est le symmétrique de GK; le parallelogramme US est le symmétrique de TR, et ainsi de suite. Les variables, en partant des sommets correspondants des parallelogrammes correspondants dans leurs plans doivent varier sur le côté AB suivant la proportion:

$$\frac{du_1}{\omega_{11}} = \frac{du_2}{\omega_{21}} = \cdots = \frac{du_k}{\omega_{k1}} = \cdots = \frac{du_p}{\omega_{p1}}, \tag{4}$$

sur le côté BC suivant la proportion:

$$\frac{du_1}{\omega'_{11}} = \frac{du_2}{\omega'_{21}} = \cdots = \frac{du_k}{\omega'_{k1}} = \cdots = \frac{du_p}{\omega'_{p1}}, \tag{5}$$

et ainsi de suite. Les points finales, comme P et Q dans le cas de $p = 3$, représentent, comme il est aisé de voir, respectivement les points $+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k$ et $-\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k$.

L'intégrale, prise dans le sens positif, indiqué par les flèches, suivant le contour entier de la figure, est égale évidemment à la somme de pareilles intégrales, prises suivant le contour de chaque parallelogramme. Pour le parallelogramme centrale $ABCD$ de notre figure, vu que

$$\int_A^B+\int_B^C+\int_C^D+\int_D^A=\int_A^B-\int_D^C+\int_B^C-\int_A^D,$$

nous aurons:

$$\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 m_1\omega_{k1}}^{+\frac12 m_1\omega_{k1}}\Big\{J_k+J(u_h-\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-J_k-J(u_h+\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 n_1\omega'_{k1}}^{+\frac12 n_1\omega'_{k1}}\Big\{J_k+J(u_h+\tfrac12 m_1\sum_1^p\omega_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-J_k-J(u_h-\tfrac12 m_1\sum_1^p\omega_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}du_k=$$

$$(6)\qquad =\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 m_1\omega_{k1}}^{+\frac12 m_1\omega_{k1}}(-n_1\eta'_{k1})\,du_k+\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 n_1\omega'_{k1}}^{+\frac12 n_1\omega'_{k1}}m_1\eta_{k1}du_k=$$

$$=m_1n_1\sum_{k=1}^{p}(\eta_{k1}\omega'_{k1}-\eta'_{k1}\omega_{k1})=m_1n_1\cdot 2\pi i,$$

— d'après la formule (III) § 85. Pour le parallelogramme $MGEK$, vu que

$$\int_M^G+\int_G^E+\int_E^K+\int_K^M=\int_M^G-\int_K^E+\int_G^E-\int_M^K,$$

nous aurons:

$$\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}\Big\{J_k+J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\sum_1^p\tfrac12 n_1\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-$$

$$-J_k-J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}+\tfrac12 n_2\omega'_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{0}^{\frac12 n_2\omega'_{k2}}\Big\{J_k+J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}+\tfrac12 m_2\omega_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-$$

$$(7)\qquad -J_k-J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}-\tfrac12 m_2\omega_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}du_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}\Big\{J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\sum_1^p\tfrac12 n_1\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k-$$

$$-J(u_h+\tfrac12 m_1\omega_{h1}+\tfrac12 n_1\sum_1^p\omega'_{h1}+\tfrac12 n_2\omega'_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big\}du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}m_2\eta_{k2}\cdot\tfrac12 n_2\omega'_{k2};$$

et pour son symmétrique $NHFL$, vu que

$$\int_N^H+\int_H^F+\int_F^L+\int_L^N=-\int_H^N+\int_F^L+\int_H^F-\int_N^L,$$

de même:

$$\sum_{k=1}^p\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}\Big\{-J_k-J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k+$$

$$+J_k+J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}-\frac12 n_2\omega'_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k\Big\}du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^p\int\limits_0^{-\frac12 n_2\omega'_{k2}}\Big\{J_k+J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}-\frac12 m_2\omega_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k-$$

$$-J_k-J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}+\frac12 m_2\omega_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k\Big\}du_k= \qquad (8)$$

$$=\sum_{k=1}^p\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}\Big\{-J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k+$$

$$+J\big(u_h-\frac12 m_1\omega_{h1}-\frac12\sum_1^p n_1\omega'_{h1}-\frac12 n_2\omega'_{h2}+\bar u_h^{(0)}+\int_{x_0}^{a_k}{}_h\big)_k\Big\}du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^p(-m_2\eta_{k2})\cdot\big(-\frac12 n_2\omega'_{k2}\big);$$

pour leur ensemble, en ajoutant (7) et (8), nous recevrons:

$$\sum_{k=1}^p\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}(m_1\eta_{k1}+n_1\eta'_{k1})\,du_k+\sum_{k=1}^p\int\limits_{-\frac12 m_2\omega_{k2}}^{+\frac12 m_2\omega_{k2}}-(m_1\eta_{k1}+n_1\eta'_{k1}+n_2\eta'_{k2})\,du_k+$$

$$+\sum_{k=1}^p m_2n_2\eta_{k2}\omega'_{k2}=m_2n_2\sum_{k=1}^p(\eta_{k2}\omega'_{k2}-\eta'_{k2}\omega_{k2})=m_2n_2\cdot 2\pi i, \qquad (9)$$

— d'après la même formule (III) § 85. Pour le parallelogramme $VTPR$ et son symmétrique $WUQS$ les calculs restent les mêmes avec cette différence, que la place de $m_2\omega_{k2}$ et de $n_2\omega'_{k2}$ prendront $m_3\omega_{k3}$ et $n_3\omega'_{k3}$ respectivement, et la place de $\frac12 m_1\omega_{k1}+\frac12 n_1\omega'_{k1}$ la somme: $\frac12 m_1\omega_{k1}+$ $+\frac12 n_1\omega'_{k1}+\frac12 m_2\omega_{k2}+\frac12 n_2\omega'_{k2}$, de sorte que la partie de l'intégrale suivant le contour entier de la figure, qui leurs corresponde, sera égale à

$$m_3n_3\,.\,2\pi i. \qquad (10)$$

Et la même chose aura lieu pour chaque paire suivante des parallelogrammes symmétriques par rapport à O: les calculs seront toujours les mêmes avec la différence, que la place de $m_2\omega_{k2}$ et de $n_2\omega'_{k2}$ occuperont chaque fois les périodes se rapportant au parallelogramme considéré, et la place de $\frac{1}{2}m_1\omega_{k1}+\frac{1}{2}n_1\omega'_{k1}$ occupera la demisomme de tous les périodes précédents; de sorte que pour la partie correspondante aux derniers parallelogrammes on aura

(11) $$m_p n_p \,.\, 2\pi i.$$

En ajoutant tous les résultats précédents: (6), (9), (10) ... (11), on aura pour la valeur de l'intégrale prise suivant le contour entier:

(12) $$2\pi i\sum_{k=1}^{p} m_k n_k,$$

et parconséquent pour la valeur de l'intégrale cherchée:

(13) $$\sum_{k=1}^{p}\int_{-\frac{1}{2}\tilde\omega_k}^{+\frac{1}{2}\tilde\omega_k}\Big(J_k+J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}}}{}_h^{(0)}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k=\pi i\sum_{k=1}^{p}m_k n_k.$$

123. En portant ce résultat dans la formule (4) § 121 et de là dans la formule (7) § 120, nous aurons:

(1) $$\Phi(u_h+\tilde\omega_h\Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)\equiv\Phi(u_h\Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}[(C_k-J_k)\tilde\omega_k-(\overline{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)})\tilde\eta_k]+\sum_{k=1}^{p}[\tilde\eta_k(u_k-u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde\omega_k)+m_k n_k\pi i].$$

En prenant les deux membres de cette congruence (mod. $2\pi i$) pour l'exposant du nombre e, on aura en vertu de (1) § 117 et de ce, que $e^{\pi i}=-1$, l'équation fonctionnelle de thétafonction:

(2) $$\Theta(u_h+\tilde\omega_h\Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h)=$$
$$=(-1)^{\sum_{k=1}^{p}m_k n_k}\, e^{\sum_{k=1}^{p}[(C_k-J_k)\tilde\omega_k-(\overline{u}_k^{(0)}-u_k^{(0)})\tilde\eta_k]}\, e^{\sum_{k=1}^{p}\tilde\eta_k(u_k-u_k^{(0)}+\frac{1}{2}\tilde\omega_k)}\,\Theta(u_h\Big|_1^p u_h^{(0)}, C_h):$$

elle exprime la variation, qu'éprouve une thétafonction, lorsqu'on fait accroitre les variables des périodes simultanées.

124. Aulieu des paramètres $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)}$ et $\overset{p}{\underset{1}{C}}{}_k$ nous allons maintenant introduire les autres: $\overset{p}{\underset{1}{\mu}}{}_h$ et $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}{}_h$, en posant:

(1) $$\begin{cases}\overline{u}_h^{(0)}-u_h^{(0)}=-\sum_{j=1}^{p}(\mu_j\omega_{kj}+\nu_j\omega'_{kj})\ ^{*)}\\[2ex] C_k-J_k=-\sum_{j=1}^{p}(\mu_j\eta_{kj}+\nu_j\eta'_{kj}),\end{cases}\qquad (k=1,2,\dots p)$$

---

*) On aura alors: $u_k^{(0)}=\overline{u}_k^{(0)}+\sum_{j=1}^{p}(\mu_j\omega_{kj}+\nu_j\omega'_{kj})$.

c'est ce qui est toujours possible, car le déterminant de ces $2p$ équations avec $2p$ inconnues $\overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{\nu_h}}$ n'est autre chose que le déterminant Δ du § 86 [formule (1)] qui est égal à $\pm(2\pi i)^p$ d'après (5) du même §, et parconséquent différent de zéro. Du reste on résout ces équations aisement à l'aide des relations (I) — (IV) du § 85 entre les périodes des intégrales abéliennes de 1-re et de 2-me espèce. En effet, en multipliant la première des équations (1) par $-\eta'_{kg}$, la seconde par ω'_{kg} et les ajoutant pour $k=1, 2, \ldots p$, on aura en vertu des équations mentionnées:

$$\sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\omega'_{kg} - (\overset{(0)}{\bar{u}_k} - \overset{(0)}{u_k})\eta'_{kg}] = -2\pi i . \mu_g ; \tag{2}$$

de même, en multipliant la première par $-\eta_{kg}$ et la seconde par ω_{kg}, on aura après la sommation en vertu des mêmes relations entre les périodes:

$$\sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\omega_{kg} - (\overset{(0)}{\bar{u}_k} - \overset{(0)}{u_k})\eta_{kg}] = 2\pi i . \nu_g . \tag{3}$$

En multipliant maintenant l'équation (2) par n_g, l'équation (3) par m_g et en les sommant après l'addition de $g=1$ à $g=p$, on aura en vertu de (3) et (4) du § 119:

$$\sum_{k=1}^{p} [(C_k - J_k)\tilde{\omega}_k - (\overset{(0)}{\bar{u}_k} - \overset{(0)}{u_k})\tilde{\eta}_k] = 2\pi i \sum_{g=1}^{p} (\nu_g m_g - \mu_g n_g) . \tag{4}$$

Nous allons aussi changer les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en d'autres, en posant:

$$u_h - \overset{(0)}{u_h} = u'_h , \qquad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{5}$$

et la notation même de la fonction, en écrivant:

$$\Theta(u'_h + \overset{(0)}{u_h} \overset{p}{\underset{1}{|}} \overset{(0)}{u_h}, C_h) = \Theta(u'_h ; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) . \tag{6}$$

En vertu des équations (4), (5) et (6), l'équation (2) du § précédent prend la forme:

$$\Theta(u_h + \tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k n_k} e^{2\pi i \sum\limits_{k=1}^{p} (\nu_g m_g - \mu_g n_g)} e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_k (u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)} \Theta(u_h ; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h), \tag{7}$$

— en écrivant de nouveau u_h pour u'_h.

En posant dans cette équation soit $m_l = 1$, soit $n_l = 1$ et les autres m_k et n_k égaux à zéro, on aura les formules:

$$\left.\begin{aligned} \Theta(u_h + \omega_{hl} \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h) &= e^{+2\pi i . \nu_l} e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \eta_{kl}(u_k + \frac{1}{2}\omega_{kl})} \Theta(u_h ; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h); \\ \Theta(u_h + \omega'_{hl} \overset{p}{\underset{1}{;}} \mu_h, \nu_h) &= e^{-2\pi i . \mu_l} e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \eta'_{kl}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kl})} \Theta(u_h ; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

plus simples. Il y en a $2p$; par leurs application répétée on revient à la formule générale (7)*).

L'ensemble des nombres $(\overset{p}{\underset{1}{\mu_h, \nu_h}})$ s'appelle la *caractéristique* de la fonction Θ, chacun des nombres μ_h et ν_h *l'élément* de la caractéristique.

125. La plus simple des toutes les thétafonctions, sans doute, sera celle, pour laquelle on a

$$\mu_h = 0, \qquad \nu_h = 0, \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{1}$$

c'est-à-dire, dont tous les éléments de la caractéristique sont les zéros; nous la désignerons plus simplement, en posant:

$$\Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{0_h}}, 0_h) = \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}). \tag{2}$$

Les équations (8) et (7) prennent pour elle effectivement la forme plus simple:

$$\left\{\begin{aligned} \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \omega_{hl}}}) &= e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \eta_{kl}(u_k + \frac{1}{2}\omega_{kl})}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}});\\ \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \omega'_{hl}}}) &= e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \eta'_{kl}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kl})}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}); \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h + \tilde{\omega}_h}}) = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k n_k}\, e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \tilde{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)}\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}). \tag{4}$$

Des équations (1) du § précédent il suit, qu'avec (1) on aura aussi:

$$C_k = J_k, \qquad u_k^{(0)} = \bar{u}_k^{(0)}, \qquad (k=1,2,\ldots p) \tag{5}$$

et qu'à l'inverse ces dernières ont pour conséquence les équations (1) du § présent, le déterminant des équations mentionnées étant $=\pm(2\pi i)^p$.

Comme les quantités $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$ ne sont pas arbitraires, on ne sait pas d'avance, si l'on pourrait les prendre pour limites inférieures de l'intégrale dans l'équation (2) § 119, qui définit la fonction $\Phi(u_h \,\overset{p}{\underset{1}{|}}\, u_h^{(0)}, C_h)$: on doit donc un peu modifier la définition naturelle de cette fonction. Si l'on prend un point différent du point $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$ pour limite inférieure de l'intégrale curviligne dans l'espace à p dimensions, on ne changera cette fonction $\Phi(u_h \,\overset{p}{\underset{1}{|}}\, u_h^{(0)}, C_h)$ que

*) On trouvera ces calculs dans notre ouvrage: „L'inversion des intégrales hyperelliptiques". Kharkow, 1885 (en russe). Ch. V, § 59, p. 114, qui restent les mêmes pour ce cas particulier, car l'équation fonctionnelle pour thétafonction (9), donnée ibid. à la p. 113, est identique à l'équation (7) de ce §.

d'une constante additive et parconséquent la fonction Θ que d'un facteur constant, c'est ce qui ne fera changer en rien ses propriétés caractéristiques. Comme d'après le § précédent les limites supérieures doivent être changées en $u_k \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_k^{(0)}$, nous prendrons aussi pour les limites inférieures les quantités $u_k^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_k^{(0)}$, où les $\overset{p}{\underset{1}{u_k^{(1)}}}$ désignent des quantités choisies arbitrairement à la seule condition que $u_k^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_k^{(0)}$ ne soit pas un lieu singulier, et définirons alors une fonction $\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ par l'équation:

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)} + \bar{u}_k^{(0)}}^{u_k + \bar{u}_k^{(0)}} \Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)\, du_k, \tag{6}$$

c'est ce qu'on pourra, en vertu de (2) § 119, écrire aussi de cette manière:

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}) + \Phi(u_h + \bar{u}_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(1)} + \bar{u}_h^{(0)}, J_k); \tag{7}$$

on peut aussi donner cette forme à l'équation (6):

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(1)}}^{u_k} \Big(J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k\Big)\, du_k; \tag{8}$$

$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}})$ est une constante arbitraire.

En appliquant à la fonction $\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ l'équation (1) § 123, c'est ce qui est possible en vertu de (7), on aura:

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tilde{\omega}_h) \equiv \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) + \sum_{k=1}^{p} \big[\tilde{\eta}_k(u_k + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_k) + m_k n_k \pi i\big], \tag{9}$$

d'où il suivra pour la fonction:

$$e^{\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})} \tag{10}$$

justement l'équation de la forme (4); on pourra donc poser:

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = e^{\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}, \tag{11}$$

cette équation, de même que l'équation (4) ne déterminant la fonction $\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_k}})$ qu'à un facteur constant près.

126. *Weierstrass* appelait cette fonction (11) *thétafonction sans paramètres*; on pourrait la nommer *fondamentale* à juste titre, car la plus générale, considérée auparavant, se ramène aisement à celle-ci. En effet, on peut représenter l'équation (2) § 119 de cette manière:

$$(1)\quad \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} (C_k - J_k)\, du_k + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)}}^{u_k} \Big(J_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \mathrm{I}_{x_0}^{a_k}{}_h)_k\Big)\, du_k;$$

en supposant, que le point $u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}$ n'appartient pas aux lieux singuliers, on tirera de la formule (1) la suivante:

$$\Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) \equiv$$

$$(2)\quad \equiv \sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)(u_k - u_k^{(0)}) + \sum_{k=1}^{p} \int_{u_k^{(0)} - \bar{u}_k^{(0)}}^{u_k - \bar{u}_k^{(0)}} \Big(J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)} + \mathrm{I}_{x_0}^{a_k}{}_h)_k\Big)\, du_k \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)(u_k - u_k^{(0)}) + \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}) - \Phi(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)}),$$

en vertu de (8) du § précédent; donc, en prenant pour l'exposant du nombre e les deux membres du (2), on aura:

$$(3)\qquad \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = e^{\sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k)(u_k - u_k^{(0)})} \frac{\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)})}{\Theta(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)})}.$$

En changeant ici u_h en $u_h + u_h^{(0)}$ on lui donnera la forme:

$$(4)\qquad \Theta(u_h + u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = e^{\sum_{k=1}^{p} (C_k - J_k) u_k} \frac{\Theta(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u}}{}_h^{(0)} - \bar{u}_h^{(0)})}{\Theta(u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{-}} \bar{u}_h^{(0)})},$$

en remplaçant ici $C_k - J_k$ et $u_h^{(0)} - \bar{u}_h^{(0)}$ par leurs valeurs, tirées des équations (1) § 124, et en employant la notation (6) § 124 de la fonction considérée, nous aurons:

$$(5)\qquad \Theta(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h) = e^{-\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (\mu_j \eta_{kj} + \nu_j \eta'_{kj}) u_k} \frac{\Theta\big(u_h + \sum_{j=1}^{p} \overset{p}{\underset{1}{(}} \mu_j \omega_{hj} + \nu_j \omega'_{hj})\big)}{\Theta\big(\sum_{j=1}^{p} (\mu_j \overset{p}{\underset{1}{\omega}}{}_{hj} + \nu_j \omega'_{hj})\big)}.$$

127. Passons maintenant à l'étude des équations (1) § 122, que nous y avons posé et utilisé pour le calcul du dernier terme de la formule (4) § 121. On peut écrire ces équations sous la forme:

$$(1)\qquad J(-u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)} + \mathrm{I}_{x_0}^{a_k}{}_h)_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}{}_h^{(0)} + \mathrm{I}_{x_0}^{a_k}{}_h)_k = -2J_k, \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

qui nous montre, que les sommes des fonctions à gauche doivent se réduir aux constantes. Ces fonctions de deuxième espèce dans les p équations, représentées par (1), ne diffèrent entre elles que par les paramètres, qui se trouvent placés dans l'un ou l'autre des points fondamentaux $(a_k, \overset{p}{\underset{1}{,}} b_k)$; on peut généraliser la question sur la possibilité des équations (1) et chercher, s'il est possible de trouver des valeurs des constantes $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ telles, qu'on ait

$$J(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h)_\xi + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h)_\xi = C_\xi, \tag{2}$$

$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$ désignant une fonction de deuxième espèce avec le paramètre au point (ξ, y_ξ), et C_ξ une constante, qui peut dépendre de ce point. En posant

$$-u_h + \bar{u}_h = v_h; \qquad u_h + \bar{u}_h = w_h, \quad (h = 1, 2, \dots p) \tag{3}$$

nous pourrons écrire l'équation (2) de cette manière:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})_\xi + J(\overset{p}{\underset{1}{w_h}})_\xi = C_\xi. \tag{4}$$

En différentiant cette équation par rapport à la variable u_k, on aura:

$$-\frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})_\xi}{\partial v_k} + \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{w_h}})_\xi}{\partial w_k} = 0. \tag{5}$$

En posant

$$v_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi i}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}; \qquad w_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi i}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}, \tag{6}$$

on aura par la formule (1) § 105:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})_\xi}{\partial v_k} &= H(a_k, b_k \mid \xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y''_{\xi i}); \\ \frac{\partial J(\overset{p}{\underset{1}{w_h}})_\xi}{\partial w_k} &= H(a_k, b_k \mid \xi, y_\xi) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y''_{\xi i}). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

En portant ces expressions dans l'équation (5), nous aurons:

$$D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x'_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y'_{\xi i}) - D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y''_{\xi i}) = 0; \tag{8}$$

comme on à ici $k = 1, 2, \dots p$, cette équation nous montre, que la fonction de la variable (x, y):

$$D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y'_{\xi i}) - D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi i} \overset{p}{\underset{1}{,}} y''_{\xi i}) \tag{9}$$

s'annule en tous les points fondamentaux $(a_k, b_k)_1^p$; mais cette fonction, étant la différence de deux fonctions adjointes de deuxième espèce avec le même paramètre en (ξ, y_ξ), n'est autre chose qu'une fonction adjointe de première espèce $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$; or celle-ci se réduit identiquement à zéro, lorsqu'elle s'annule en tous les points fondamentaux, comme il suit de la formule (2) § 53; donc on aura identiquement:

$$(10) \qquad D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i})_1^p = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})_1^p,$$

d'où il suit, que les deux côtés de cette égalité représentent la même fonction adjointe de deuxième espèce avec les $2p$ zéros: $(x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i})_1^p$ et $(x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})_1^p$; seulement à gauche ce sont ceux du premier groupe qu'on considère comme les zéros arbitraires, tandis qu'à droite ce sont ceux du second. Cette fonction pourra être construite, par la remarque du § 61, de la manière expliquée en § 56 pour la fonction adjointe de troisième espèce, en prenant seulement aulieu de la droite $ax + by + c = 0$ la tangente à la courbe fondamentale au point (ξ, y_ξ), parconséquent la droite $l_\xi = 0$, en posant pour abréger

$$(11) \qquad l_\xi = \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial_\xi}(x - \xi) + \frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi}(y - y_\xi);$$

on aura alors, en désignant par $\bar{\psi}_\xi$ la fonction $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ dans ce cas:

$$(12)\, D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i})_1^p = D_\xi P_{\xi\eta}(x, y; x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})_1^p = \frac{\bar{\psi}_\xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i} \Big|_1^p x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})}{l_\xi}.$$

En ajoutant les équations (3), on aura:

$$(13) \qquad 2\bar{u}_h = v_h + w_h; \qquad (h = 1, 2, . \;. p)$$

en portant ici les valeurs (6) de v_h et de w_h, cette équation deviendra pour $h = 1, 2, \ldots p$:

$$(14) \qquad 2\bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p}\left(\overset{x'_{\xi_i}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}} + \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\overset{x'_{\xi_i}}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} + \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}\right) - 2\sum_{i=1}^{p}\overset{a_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}},$$

et permettra de calculer les valeurs de ces constantes, qui rendent possible l'équation (2): en effet, après avoir déterminé algébriquement la fonction $\bar{\psi}_\xi$ (12), en prenant arbitrairement $(x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i})_1^p$, on saura aussi les zéros non-arbitraires de cette fonction: $(x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})_1^p$, et parsuite on pourra calculer les intégrales en (14), après avoir choisi les chemins d'intégration à l'arbitraire. On aperçoit de suite, que les équations (14) déterminent les $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ aux périodes près.

Si l'on fait tendre $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ aux zéros, les v_h et w_h tendront vers $\bar{u}_h$ tous les deux, pour $h=1, 2, \ldots p$; donc les $(x'_{\xi_i}, \overset{p}{\underset{1}{,}} y'_{\xi_i})$ et les $(x''_{\xi_i}, \overset{p}{\underset{1}{,}} y''_{\xi_i})$ tendront à coïncider respectivement aux points $(c_{\xi_i}, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{c_{\xi_i}})$, c'est-à-dire les points (x'_{ξ_i}, y'_{ξ_i}) et $(x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})$ tous les deux avec le même point $(c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}})$, et cela pour chaque valeur de l'indice i de $i=1$ à $i=p$. La fonction (12) tendra alors à la fonction

$$\frac{\bar{\psi}_\xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}} \overset{p}{\underset{1}{|}} c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}})}{l_\xi}, \tag{15}$$

et les équations (14) à celles-ci:

$$2\bar{u}_h = 2\sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_{h}\Big|_{a_i}^{c_{\xi_i}}, \quad (h=1, 2, \ldots p) \tag{16}$$

d'où l'on tire:

$$\bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_{h}\Big|_{a_0}^{c_{\xi_i}} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_{h}\Big|_{x_0}^{c_{\xi_i}} - \sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_{h}\Big|_{x_0}^{a_i}: \quad (h=1, 2, \ldots p) \tag{17}$$

Les nouvelles formules (16) donneront pour les $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ les mêmes valeurs que les anciennes (14); en effet, avec la fonction

$$\frac{\bar{\psi}_\xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; x'_{\xi_i}, y'_{\xi_i} \overset{p}{\underset{1}{|}} x''_{\xi_i}, y''_{\xi_i})}{\bar{\psi}_\xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}} \overset{p}{\underset{1}{|}} c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}})} \tag{18}$$

on aura d'après le théorème d'Abel en prenant convenablement le dernier chemin:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\mathrm{I}_{h}\Big|_{c_{\xi_i}}^{x'_{\xi_i}} + \mathrm{I}_{h}\Big|_{c_{\xi_i}}^{x''_{\xi_i}} \right) = 0, \tag{19}$$

d'où l'on tire:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\mathrm{I}_{h}\Big|_{a_i}^{x'_{\xi_i}} + \mathrm{I}_{h}\Big|_{a_i}^{x''_{\xi_i}} \right) = 2\sum_{i=1}^{p} \mathrm{I}_{h}\Big|_{a_i}^{c_{\xi_i}}. \tag{20}$$

L'équation

$$\bar{\psi}_\xi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}; c_{\xi_i}, y_{\xi_i} \overset{p}{\underset{1}{|}} c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}}) = 0 \tag{21}$$

représente une courbe adjointe *tangentielle* de deuxième espèce, nommée ainsi à raison de ce, que les points de son intersection avec la courbe fondamentale $\overset{m}{F}(\overset{}{x},\overset{n}{y})=0$ coïncidant deux à deux, elle est tangente à celle-ci aux points $(c_{\xi_i},\overset{p}{\underset{1}{,}}y_{c_{\xi_i}})$. Le problème de la détermination d'une pareille courbe est un problème algébrique, dépendant de la résolution d'un nombre fini des équations algébriques, et parconséquent il a un nombre fini de solutions. Nous avons donné aux §§ 54 et 58 la méthode pour déterminer ces fonctions *); mais ce qui est important de remarquer ici, c'est que ces solutions se répartissent en deux classes, suivant que la courbe est propre de cette espèce, ou qu'elle est le produit de la droite $l_\xi=0$ par la fonction adjointe tangentielle de première espèce, c'est-à-dire, lorsque l'équation (21) se réduise à celle-ci:

$$(22)\qquad l_\xi\varphi(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y};c_i,\overset{p-1}{\underset{1}{y_{c_i}|}}c_i,y_{c_i})=0,$$

(eine zerfallende adjungierte tangentielle Kurve) c'est ce qui arrive d'après le § 71, lorsqu'un zéro arbitraire et parconséquent un zéro nonarbitraire tombent au point (ξ,y_ξ), pour le cas considéré maintenant — lorsqu'un point de contact de la courbe tangentielle tombe en (ξ,y_ξ). Dans le cas de la courbe adjointe tangentielle propre de deuxième espèce — nous dirons de la 1-e classe, — les points de contact $(c_{\xi_i},\overset{p}{\underset{1}{,}}y_{c_{\xi_i}})$ dépendent du point (ξ,y_ξ); dans celui de la courbe adjointe tangentielle de la deuxième espèce, impropre, — nous dirons de la 2-e classe, — les points de contact $(c_i,\overset{p-1}{\underset{1}{,}}y_i)$ en sont indépendants; (c'est — pourquoi la lettre ξ ne figure pas dans leurs notations). Comme un des zéros de la fonction $\bar\psi_\xi$ dans ce second cas tombe en (ξ,y_ξ), la formule (17) se transforme en celle-ci:

$$(23)\qquad \bar u_h=\sum_{i=1}^{p-1}\overset{c_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}+\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}-\sum_{i=1}^{p}\overset{a_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}},\qquad (h=1,2,\ldots p)$$

ou, en posant

$$(24)\qquad \bar u_h^{(0)}=\sum_{i=1}^{p-1}\overset{c_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}-\sum_{i=1}^{p}\overset{a_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}},\qquad (h=1,2,\ldots p)$$

plus simplement:

$$(25)\qquad \bar u_h=\bar u_h^{(0)}+\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}.\qquad (h=1,2,\ldots p)$$

---

*) Voir aussi: *H. Stahl.* Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1896. § 23, S. 257.

Dans ce cas un seul terme — le dernier — dépend du point (ξ, y_ξ), tandisque dans la formule (17), qui rèste la même pour les solutions de la première classe, en dépendent tous les p termes de la première somme. — La fonction adjointe tangentielle de la première espèce, qui figure dans l'équation (22), se détermine aussi par la condition, que ces zéros coïncident deux à deux, algébriquement, et le problème de sa détermination possède un nombre fini des solutions, plus petit, que pour la fonction $\bar{\varphi}_\xi$, car ces solutions ne font qu'une partie de celles-là [(§ 54)].

128. La constante C_ξ peut être déterminée toujours par la première méthode dans le cas des solutions de la première classe, aussi que celles de la seconde. On a

$$J(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})_\xi = \sum_{i=1}^{p} \Pi_\xi \Big|_{x_0}^{x'_{\xi i}}; \qquad J(\overset{p}{\underset{1}{w_h}})_\xi = \sum_{i=1}^{p} \Pi_\xi \Big|_{x_0}^{x''_{\xi i}}; \tag{1}$$

donc l'équation (4) du § précédent peut être présenté de cette manière:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\Pi_\xi \Big|_{x_0}^{x'_{\xi i}} + \Pi_\xi \Big|_{x_0}^{x''_{\xi i}} \right) = C_\xi. \tag{2}$$

Cette équation permet toujours déterminer C_ξ, car en prenant arbitrairement les points $(x'_{\xi i}, y'_{\xi i})$ on saura les autres: $(x''_{\xi i}, y''_{\xi i})_1^p$; quand aux chemins d'intégration — elles doivent être les mêmes, que dans les équations (14) § 127. Pour les solutions de la première classe on pourra poser $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$, c'est ce qui réduira $(x'_{\xi i}, y'_{\xi i})$ et $(x''_{\xi i}, y''_{\xi i})$ à $(c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}})$, et l'équation (2) prendra la forme

$$2 \sum_{i=1}^{p} \Pi_\xi \Big|_{x_0}^{c_{\xi i}} = C_\xi, \tag{3}$$

d'où l'on aura

$$\tfrac{1}{2} C_\xi = \sum_{i=1}^{p} \Pi_\xi \Big|_{x_0}^{c_{\xi i}}; \tag{4}$$

mais pour la seconde classe un des points $(c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}})_1^p$ venant à coïncider avec le paramètre (ξ, y_ξ) de l'intégrale de seconde espèce, ces formules deviènnent illusoires et on doit appliquer une autre méthode, si l'on ne veut pas employer la formule (2).

En remplaçant dans l'équation (2) § 127 u_h par $u_h + \bar{u}_h$, on aura:

$$J(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h + 2\bar{u}_h}})_\xi = C_\xi; \tag{5}$$

en posant ici

$$(6)\qquad u_h = \mathfrak{c}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{a_i} \mathrm{I}_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots p)$$

les chemins d'intégration étant ici les mêmes, que dans l'équation, qui définit la fonction $J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$, notamment:

$$(7)\qquad J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{x_i} \mathrm{II}_\xi,$$

nous aurons:

$$(8)\qquad J(\overset{p}{\underset{1}{-}}\mathfrak{c}_h)_\xi = 0,$$

les chemins d'intégration se réduisant à un point (x_0, y_0)*); parconséquent l'équation (5) nous donnera:

$$(9)\qquad C_\xi = J(\mathfrak{c}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}_h)_\xi,$$

— une formule qui est juste aussi pour la première classe. Cette formule a été donnée par *Weierstrass*.

129. En retranchant l'équation (17) § 127 des équations (6) du même §, on aura:

$$(1)\qquad -u_h = v_h - \bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{c_{\xi_i}}^{x'_{\xi_i}} \mathrm{I}_h, \qquad u_h = w_h - \bar{u}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{c_{\xi_i}}^{x''_{\xi_i}} \mathrm{I}_h,$$

parconséquent

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{c_{\xi_i}}^{x'_{\xi_i}} \mathrm{I}_h = -\sum_{i=1}^{p} \int_{c_{\xi_i}}^{x''_{\xi_i}} \mathrm{I}_h,$$

— c'est ce qui suit du reste directement de l'équation (19) du même §. En retranchant de même l'équation (4) § 128 de chacune des équations (1) du même § et en posant avec Mr. *H. Weber***):

$$(3)\qquad Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi = -\frac{1}{2} C_\xi + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h)_\xi,$$

---

*) Car $-\mathfrak{c}_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{x_0} \mathrm{I}_h$, où les chemins sont les mêmes qu'en (6), mais parcourrus dans le sens inverse; on aura donc en (7) à droite $\sum_{i=1}^{p} \int_{x_0}^{x_0} \mathrm{II}_\xi = 0$.

**) Über das Additionstheorem der Abelschen Funktionen. § 6. J. v. Crelle. Bd. 70, S. 193.

nous aurons (d'après (1) et (4) § 128) pour la première classe:

$$Z(\overset{p}{\underset{1}{-}} u_h)_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi_i}}{\underset{c_{\xi_i}}{\Pi_\xi}}; \qquad Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{c_{\xi_i}}{\Pi_\xi}}; \tag{4}$$

en retranchant (3) § 128 de (2) du même §, on aura:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x'_{\xi_i}}{\underset{c_{\xi_i}}{\Pi_\xi}} + \sum_{i=1}^{p} \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{c_{\xi_i}}{\Pi_\xi}} = 0; \tag{5}$$

donc, en vertu de (4) nous aurons:

$$Z(\overset{p}{\underset{1}{-}} u_h)_\xi = - Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi, \tag{6}$$

c'est-à-dire que la fonction (3) est impaire, lorsqu'elle est de la première classe. Mais la même chose a lieu aussi pour la seconde, seulement les équations (4) et (5) devenant illusoires, on doit partir de l'équation (2) § 127: celle-ci peut être représenté ainsi:

$$-\frac{1}{2} C_\xi + J(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h)_\xi = -\left(-\frac{1}{2} C_\xi + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}_h)_\xi\right), \tag{7}$$

c'est ce qui revient à (6) en vertu de (3); pour la deuxième classe la constante C_ξ est donnée par la formule (9) § 128, et les valeurs de $-u_h$ et de u_h par les formules:

$$-u_h = \sum_{j=1}^{p-1} \overset{x'_{\xi_i}}{\underset{c_i}{I_h}} + \overset{x'_{\xi_p}}{\underset{\xi}{I_h}}; \qquad u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{c_i}{I_h}} + \overset{x''_{\xi_p}}{\underset{\xi}{I_h}}, \tag{8}$$

et en vertu de (19) § 127 on aura:

$$\sum_{i=1}^{p-1} \overset{x'_{\xi_i}}{\underset{c_i}{I_h}} + \overset{x'_{\xi_p}}{\underset{\xi}{I_h}} = -\left(\sum_{i=1}^{p-1} \overset{x''_{\xi_i}}{\underset{c_i}{I_h}} + \overset{x''_{\xi_p}}{\underset{\xi}{I_h}}\right), \tag{9}$$

car l'équation (19) § 127 existe aussi lorsque les fonctions $\bar{\psi}_\xi$ en (18) § 127 appartiènnent aux classes différentes.

130. Les deux classes des fonctions $Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$ présentent une différence essentielle pour le point $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$: celles de la première y s'annulent; celles de la seconde y deviènnent infinies ∞^1. En effet, d'après (7) et (4) du § 128 et (16) du § 127 on a pour la 1-ère classe:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}})_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{c_{\xi_i}}{\underset{x_0}{\Pi_\xi}} = \frac{1}{2} C_\xi; \tag{1}$$

en posant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$ dans l'équation (3) du § précédent, on touvera donc:

$$(2)\qquad Z(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})_\xi=0.$$

Pour la seconde classe on a en vertu de (23) § 127:

$$(3)\qquad \bar{u}_h=\sum_{i=1}^{p-1}\overset{c_i}{\underset{a_i}{\mathrm{I}_h}}+\overset{\xi}{\underset{a_p}{\mathrm{I}_h}};$$

donc on aura d'après (7) § 128:

$$(4)\qquad J(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}})_\xi=\sum_{i=1}^{p-1}\overset{c_i}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_\xi}}+\overset{\xi}{\underset{x_0}{\mathrm{II}_\xi}}=\infty,$$

et parconséquent cette fois, en posant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}=0$ dans l'équation (3) § 129 on aura:

$$(5)\qquad Z(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})_\xi=\infty.$$

131. Nous allons maintenant comparer entre elles les diverses solutions de notre problème. Les constantes $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ et C_ξ sont représenté par des sommes des intégrales abéliennes, respectivement de première et de deuxième espèces; mais les valeurs de ces intégrales dépendant du chemin d'intégration, nos constantes ne sont déterminées par les formules des §§ précédents qu'à des périodes respectives près; cependant tous les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ et de C_ξ, qui ne diffèrent que par les périodes correspondants, donnent la même fonction $Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$, car si dans l'équation (3) § 129 on remplace $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ par $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h+\tilde{\omega}_h}}$, on doit remplacer $-\frac{1}{2}C_\xi$ par $-\frac{1}{2}\bar{C}_\xi-\tilde{\eta}_\xi$ en vertu de la formule (9) § 128, mais comme on a:

$$(1)\qquad J(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}+\tilde{\omega}_h)_\xi=J(u_h\overset{p}{\underset{1}{+}}\bar{u}_h)_\xi+\tilde{\eta}_\xi,$$

on voit de suite que l'expression de $Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$ par la formule (3) § 129 restera la même. Donc, on ne pourra obtenir les fonctions $Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$ différentes entre elles qu'à l'aide des courbes adjointes tangentielles différentes. Il nous reste donc à comparer entre elles les solutions, répondantes aux différentes courbes adjointes tangentielles.

Si l'on prend au lieu de la fonction (15) § 127 une autre fonction analogue:

$$(2)\qquad \frac{\bar{\psi}_\xi(x,y;c'_{\xi_i},y_{c'_{\xi_i}}\overset{p}{\underset{1}{|}}c_{\xi_i},y_{c'_{\xi_i}})}{l_\xi},$$

on aura par les formules (17) § 127 et (4) 128:

$$\bar{u}'_h = \sum_{i=1}^{p} \overset{c'_{\xi i}}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} - \sum_{i=1}^{p} \overset{a_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2} C'_\xi = \sum_{i=1}^{p} \overset{c'_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi_h}}; \tag{4}$$

à l'aide de la fonction

$$\frac{\bar{\psi}_\xi(x, y; c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}} \overset{p}{\underset{1}{|}} c'_{\xi i}, y_{c'_{\xi i}})}{\bar{\psi}_\xi(x, y; c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}} \overset{p}{\underset{1}{|}} c_{\xi i}, y_{c_{\xi i}})} \tag{5}$$

d'après le théorème d'Abel on aura:

$$2\sum_{i=1}^{p} (\overset{c'_{\xi i}}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}} - \overset{c_{\xi i}}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}}) = 2(\bar{u}'_h - \bar{u}_h) \equiv 0, \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{6}$$

et parconséquent $= \bar{\omega}_h$; et en vertu de (7') du § 95;

$$2\sum_{i=1}^{p} (\overset{c'_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi_\xi}} - \overset{c_{\xi i}}{\underset{x_0}{\Pi_\xi}}) = C'_\xi - C_\xi \equiv 0, \tag{7}$$

— parconséquent $= \bar{\eta}_\xi$, les chemins d'intégration étant les mêmes, où l'on a:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \sum_{j=1}^{p} (\bar{m}_j \omega_{hj} + \bar{n}_j \omega'_{hj}); \qquad (h = 1, 2, \dots p) \\ \bar{\eta}_\xi &= \sum_{j=1}^{p} (\bar{m}_j \eta_{\xi j} + \bar{n}_j \eta'_{\xi j}); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

donc on aura:

$$u'_h = \bar{u}_h + \frac{1}{2}\bar{\omega}_h; \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2} C'_\xi = \frac{1}{2} C_\xi + \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi. \tag{10}$$

Ces formules conservent leur forme aussi dans les cas, où l'une des deux fonctions en (5), ou même toutes les deux, seront remplacées par une fonction de la deuxième classe:

$$l_\xi \varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}; c_i, y_i \overset{p}{\underset{1}{|}} c_i, y_i), \tag{11}$$

et pour la première, (9), reste la même aussi la manière de l'obtenir; quant à la seconde, (10), — on aura par la formule (9) § 128:

$$C'_\xi = J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}'_h)_\xi = J(c_h + \overset{p}{\underset{1}{2}}\bar{u}_h + \bar{\omega}_h)_\xi = J(c_h \overset{p}{\underset{1}{+}} 2\bar{u}_h)_\xi + \bar{\eta}_\xi = C_\xi + \bar{\eta}_\xi. \tag{12}$$

132. Si l'on porte les valeurs de $\overset{p}{\underset{1}{u}}{}'_h$ et de $\frac{1}{2}C'_\xi$ des équations (9) et (10) du § précédent dans la formule:

$$(1) \qquad Z'(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi = -\frac{1}{2}C'_\xi + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{u}'_h)_\xi\,,$$

formée d'après (3) § 129 avec les nouvelles constantes, on aura:

$$(2) \qquad Z'(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi = -\frac{1}{2}C_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}}}_h + \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi\,,$$

et en vertu de la formule rappellée:

$$(3) \qquad Z'(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi = -\frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi + Z(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi\,.$$

Cette formule peut être obtenue aussi de la manière suivante, qui fait sortir aussitôt la propriété de la nouvelle fonction d'être impaire. On a en vertu de la formule (3) § 129 et de la propriété de la fonction de deuxième espèce $J(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi$ [§ 104], rappellée en formule (1) § 131:

$$(4) \qquad Z(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{\omega}_h)_\xi = Z(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi + \bar{\eta}_\xi\,;$$

en remplaçant ici $\overset{p}{\underset{1}{u}}_h$ par $u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h$ et en retranchant $\frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi$ des deux membres de cette équation, on aura, vu que d'après (6) § 129:

$$(5) \qquad Z(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi = -Z(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi\,,$$

cette équation:

$$(6) \qquad Z(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi = -\left(Z(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)_\xi - \frac{1}{2}\bar{\eta}_\xi\right),$$

qui démontre la propriété énoncée de la fonction définie par l'équation (3). En comparant cette équation transcrite à l'aide de (3) § 129 avec cette formule on arrive aux relations (9) et (10) du § précédent.

133. La formule (3) du § précédent ramène toutes les fonctions $Z(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi$ à l'une d'elles. Après l'avoir choisi arbitrairement, on pourra désigner les autres avec Mr. *H. Weber* *) de cette manière:

$$(1) \qquad Z\begin{bmatrix} \bar{m}_1, \bar{m}_2, \ldots \bar{m}_p \\ \bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots \bar{n}_p \end{bmatrix}(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi = Z\begin{bmatrix} \overset{p}{\bar{m}_i} \\ \underset{1}{\bar{n}_i} \end{bmatrix}(\overset{p}{\underset{1}{u}}_h)_\xi\,,$$

*) Zur Theorie der Umkehrung der Abelschen Integrale. *J. v. Crelle.* Bd. 70. § 8.

en posant:

$$Z\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_i\\ \bar n_i\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi = -\frac{1}{2}\bar\eta_\xi + Z(u_h \underset{1}{\overset{p}{+}} \frac{1}{2}\bar\omega_h)_\xi, \tag{2}$$

où les quantités $\underset{1}{\overset{p}{\bar\omega_h}}$ et $\bar\eta_\xi$ sont définies par les équations (8) § 131.

L'ensemble des nombres $\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_i\\ \bar n_i\end{bmatrix}}}$ on peut nommer la *caractéristique* de la fonction (2) *par rapport* à la fonction $Z\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi$, car ce concept est relatif à la fonction, prise pour la fondamentale, et la caractéristique changera avec celle-ci d'après une loi, du reste, très simple. En changeant $\underset{1}{\overset{p}{u_h}}$ en $u_h \underset{1}{\overset{p}{+}} \bar{\bar\omega}_h$ dans l'équation (2) et retranchant $\frac{1}{2}\bar{\bar\eta}_\xi$ de ses deux membres, les quantités $\underset{1}{\overset{p}{\bar{\bar\omega}_h}}$ et $\bar{\bar\eta}_\xi$ étant définies, par les équations analogues au (8) § 131, on aura, comme il est aisé de voir:

$$-\frac{1}{2}\bar{\bar\eta}_\xi + Z\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_j\\ \bar n_j\end{bmatrix}}}(u_h \underset{1}{\overset{p}{+}} \frac{1}{2}\bar{\bar\omega}_h)_\xi = Z\begin{bmatrix}\bar m_j \overset{p}{+} \bar{\bar m}_j\\ \bar n_j \underset{1}{+} \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi; \tag{3}$$

donc relativement à la fonction (2) cette nouvelle fonction aura pour la caractéristique $\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}}$, et on peut écrire:

$$Z\begin{bmatrix}\bar m_j \overset{p}{+} \bar{\bar m}_j\\ \bar n_j \underset{1}{+} \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi = Z\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_j\\ \bar n_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi. \tag{4}$$

On trouve de même, en partant de la fonction $Z\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi$:

$$Z\begin{bmatrix}\bar m_j \overset{p}{+} \bar{\bar m}_j\\ \bar n_j \underset{1}{+} \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi = Z\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_j\\ \bar n_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{(u_h)}}_\xi. \tag{5}$$

De ces formules on déduit cette loi de composition des caractéristiques:

$$\begin{bmatrix}\bar m_j \overset{p}{+} \bar{\bar m}_j\\ \bar n_j \underset{1}{+} \bar{\bar n}_j\end{bmatrix} = \underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_j\\ \bar n_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}} = \underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar{\bar m}_j\\ \bar{\bar n}_j\end{bmatrix}}}\underset{1}{\overset{p}{\begin{bmatrix}\bar m_j\\ \bar n_j\end{bmatrix}}}, \tag{6}$$

qui est commutative, comme on le voit, et s'énonce ainsi: pour composer deux caractéristiques il ne faut qu'ajouter leurs éléments correspondants: ces sommes des éléments correspondants des caractéristiques composantes seront les éléments correspondants de la caractéristique résultante.

134. Les éléments de la caractéristique peuvents être réduit à l'une des deux valeurs: 0 et 1, car, comme nous l'avons vu au § 131, les autres, en différant de l'une de celles-ci par un nombre pair, ne conduiront pas à des nouvelles fonctions $Z(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_\xi$, car les valeurs des constantes $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ et de C_ξ différeront des sousentendues maintenant par des périodes simultanées. Chacun des nombres $\overset{p}{\underset{1}{m_j}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{n_j}}$ pouvant recevoir indépendamment des autres deux valeurs, 0 et 1, le nombre des solutions différentes sera égal à 2^{2p}. Elles seront réparties en deux classes; en désignant par $N_{\rm I}^{(p)}$ et $N_{\rm II}^{(p)}$ les nombres des solutions de la première, respectivement de la deuxième classe, nous aurons une première relation entre ces nombres:

$$N_{\rm I}^{(p)} + N_{\rm II}^{(p)} = 2^{2p}. \tag{1}$$

Il n'est pas facile de trouver directement la différence de ces nombres: $N_{\rm I}^{(p)} - N_{\rm II}^{(p)}$. Nous verons tout à l'heure, que $N_{\rm I}^{(p)}$ est le nombre des caractéristiques pour lesquelles on a:

$$\sum_{j=1}^{p} m_j n_j \equiv 0 \pmod{2}, \tag{2}$$

et $N_{\rm II}^{(p)}$ le nombre de celles pour lesquelles on a:

$$\sum_{j=1}^{p} m_j n_j \equiv 1 \pmod{2}; \tag{3}$$

on appelle les premières *paires* et les secondes — *impaires*. Désignons par $N_{\rm I}^{(p-1)}$ et $N_{\rm II}^{(p-1)}$ les mêmes nombres pour le genre $p-1$. En ajoutant aux éléments

$$\left|\begin{matrix} m_1 \\ n_1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} m_2 \\ n_2 \end{matrix} \left|\begin{matrix} \cdot\cdot\cdot \\ \end{matrix}\right| \begin{matrix} m_{p-1} \\ n_{p-1} \end{matrix}\right| \tag{4}$$

une colonne nouvelle, on apperçoit de suite, que seulement dans le dernier cas de ces quatres possibles:

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right|, \qquad \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right|, \tag{5}$$

les sommes en (2) et (3) s'augmentront d'une unité, et parconséquent la caractéristique passera dans l'autre des deux catégories. Donc on aura les relations suivantes:

$$3N_{\rm I}^{(p-1)} + N_{\rm II}^{(p-1)} = N_{\rm I}^{(p)}; \qquad N_{\rm I}^{(p-1)} + 3N_{\rm II}^{(p-1)} = N_{\rm II}^{(p)}; \tag{6}$$

en retranchant la seconde de la première, on aura:

$$2(N_{\rm I}^{(p-1)} - N_{\rm II}^{(p-1)}) = N_{\rm I}^{(p)} - N_{\rm II}^{(p)}. \tag{7}$$

En changeant ici p en $p-1$, puis en $p-2,\ldots$ enfin en 2, et en multipliant entre elles les équations reçues, nous aurons:

$$2^{p-1}(N_{\mathrm{I}}^{(1)}-N_{\mathrm{II}}^{(1)})=N_{\mathrm{I}}^{(p)}-N_{\mathrm{II}}^{(p)}; \tag{8}$$

mais dans le cas de $p=1$ toutes les caractéristiques possibles sont celles, que nous voyons en (5); donc on a $N_{\mathrm{I}}^{(1)}=3$, $N_{\mathrm{II}}^{(1)}=1$, $N_{\mathrm{I}}^{(1)}-N_{\mathrm{II}}^{(1)}=2$, et la dernière équation devient:

$$N_{\mathrm{I}}^{(p)}-N_{\mathrm{II}}^{(p)}=2^{p}. \tag{9}$$

Des équations (1) et (9) on tire de suite:

$$N_{\mathrm{I}}^{(p)}=2^{p-1}(2^{p}+1), \tag{10}$$

$$N_{\mathrm{II}}^{(p)}=2^{p-1}(2^{p}-1).\ ^{*)} \tag{11}$$

135. Après ces recherches générales sur l'équation (2) § 127 revenons aux p équations (1) du même §. Pour satisfaire par le même système des valeurs $\overset{p(0)}{\underset{1}{u_h}}$ à toutes ces équations, qui sont comprises en (1), on doit faire emploi des solutions de la seconde classe, car alors seulement $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ auront la forme (25) § 127, où (ξ, y_ξ) doit être remplacé par (a_k, b_k) pour l'équation (1), k recevant les valeurs $1, 2, \ldots p$. En vertu de l'équation (9) § 128, vu qu'en (1) § 127 le lieu de C_ξ tient $-2J_k$, nous aurons alors:

$$J_k=-\frac{1}{2}J\Big(c_h+2\big(\overset{p(0)}{\underset{1}{u_h}}+\overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h\big)\Big)_k. \qquad (k=1,2,\ldots p) \tag{1}$$

Comme les valeurs de $\overset{p(0)}{\underset{1}{u_h}}$, données par la formule (24) § 127:

$$\bar{u}_h^{(0)}=\sum_{i=1}^{p-1}\overset{c_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h-\sum_{i=1}^{p}\overset{a_i}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h, \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{2}$$

et les valeurs (1) de J_k ne sont définies qu'aux demipériodes correspondants près par ces formules, on aura ainsi 2^{2p} thétafonctions différentes, dont chacune peut être prise pour thétafonction fondamentale, par laquelle s'exprimeront toutes les autres par la formule (4) § 126. Comme les autres valeurs des constantes $\overset{p(0)}{\underset{1}{\bar{u}_h}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{J_k}}$ en vertu des formules (9) et (10) § 131 sont:

$$\bar{u}_h^{(0)}+\frac{1}{2}\bar{\omega}_h, \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{3}$$

$$J_k-\frac{1}{2}\bar{\eta}_k, \qquad (k=1,2,\ldots p) \tag{4}$$

---

*) Voyez *H. Stahl.* Theorie der Abelschen Funktionen. Leipzig, 1896. S. 214—215.

posons dans la formule (4) § 126:

$$(5)\qquad u_h^{(0)} - \bar{u}_h^{(0)} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_h, \qquad (h=1,2,\ldots p)$$

$$(6)\qquad C_k - J_k = -\frac{1}{2}\bar{\eta}_k, \qquad (k=1,2,\ldots p)$$

et nous aurons

$$(7)\qquad \Theta(u_h + u_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{|}} u_h^{(0)}, C_h) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k} \frac{\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)}{\Theta(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}})},$$

en supposant toute fois, que $\Theta(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}})$ est différente de zéro, car autrement cette formule serait illusoire. En comparant les équations (5) et (6) avec les équations (1) § 124, on voit qu'elles deviendront identiques, si l'on prend $\mu_h = \frac{1}{2}\bar{m}_h$, $\nu_h = \frac{1}{2}\bar{n}_h$; donc en vertu de (6) § 124 on peut écrire ainsi la dernière équation:

$$(8)\qquad \Theta(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \frac{1}{2}\bar{n}_h) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k} \frac{\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)}{\Theta(\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}})}.$$

136. Une autre formule exprimant l'une par l'autre les deux thétafonctions, dont les paramètres sont liés par les relations (5) et (6) du § précédent, qui aurait lieu dans tous les cas, on tire de la formule (8) § 125. En désignant par $\Phi_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ ce, que devient $\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ lorsqu'on remplace $\bar{u}_h^{(0)}$ et J_k respectivement par les valeurs (3) et (4) du § précédent, nous aurons:

$$\Phi_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \Phi_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}}) = \sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(1)}}^{u_k}\Big(J_k - \frac{1}{2}\bar{\eta}_k + J(u_h + \bar{u}_h^{(0)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k =$$

$$(1)\qquad = \sum_{k=1}^{p} -\frac{1}{2}\bar{\eta}_k(u_k - u_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{p}\int_{u_k^{(1)}+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k}^{u_k+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k}\Big(J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\Big)du_k =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k(u_k - u_k^{(1)}) + \Phi(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h) - \Phi(u_h^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h),$$

donc aussi:

$$(2)\qquad \frac{\Theta_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\Theta_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(1)}}})} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k}\,\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)}{e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k^{(1)}}\,\Theta(u_h^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)},$$

d'où l'on aura

$$\Theta_1(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = K(\bar{m}_j \overset{p}{\underset{1}{,}} \bar{n}_j)\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k}\, \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_h), \tag{3}$$

en posant pour abréger:

$$\frac{\Theta_1(\overset{p(\iota)}{\underset{1}{u_h}})}{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k^{(\iota)}}\, \Theta(u_h^{(\iota)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)} = K(\bar{m}_j \overset{p}{\underset{1}{,}} \bar{n}_j). \tag{4}$$

Les $\overset{p(1)}{\underset{1}{u_h}}$ étant arbitraires ici, on peut toujours les choisir de manière, que ni $\Theta_1(\overset{p(1)}{\underset{1}{u_h}})$, ni $\Theta(u_h^{(1)} \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h)$ ne soient égaux à zéro. L'arbitraire parait ici à cause de ce, que la fonction théta n'est défini par l'équation, d'où nous sommes parti, qu'à un facteur constant près. La formule (2) a lieu dans le cas, où $\bar{m}_j$ et $\bar{n}_j$ sont des nombres entiers quelconques, comme on le voit par la méthode employée ici pour la déduire.

137. Toutes les thétafonctions, que nous avons considéré dans les deux derniers §§, jouissent de la propriété d'être paire ou impaire. En effet, en vertu des équations (8) et (11) du § 125 nous avons:

$$\log\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(\iota)}}}) + \sum_{k=1}^{p}\int_{u_h^{(\iota)}}^{u_h}\Big(J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \mathrm{I}_h)_k{}_{x_0}^{a_k}\Big)\,du_k; \tag{1}$$

donc

$$d\log\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \sum_{k=1}^{p}\Big(J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \mathrm{I}_h)_k{}_{x_0}^{a_k}\Big)\,du_k; \tag{2}$$

ici le second membre ne change pas de valeur, en vertu de (1) § 122, lorsqu'on change $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$; donc on a:

$$d\log\Theta(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = d\log\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}), \tag{3}$$

et en l'intégrant:

$$\Theta(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = C\,\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}), \tag{4}$$

en désignant par C une constante. Pour la trouver remplaçons de nouveau $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ par $-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ ici; nous aurons:

$$\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = C\,\Theta(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}); \tag{5}$$

en multipliant les égalités (4) et (5) entre elles, nous aurons, en réduisant ci-après:

$$(6) \qquad 1 = C^2,$$

d'où l'on aura:

$$(7) \qquad C = \pm 1.$$

En portant ceci dans l'équation (4), nous aurons

$$(8) \qquad \Theta(-\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \pm\, \Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}),$$

ce qui démontre la proposition énoncée. On voit par cette démonstration, simple et élégante, due à Mr. V. Ermakoff, qu'elle est une conséquence immédiate des conditions (1) § 122, auxquelles nous avons assujeti les paramètres $\overset{p}{\underset{1}{J_k}}$ et $\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$, que nous avons introduit d'abord pour mener à fin nos calculs de l'équation fonctionnelle de théta générale. Les conditions mentionnées, qui forment un lien entre la théorie de cette fonction et celle des courbes adjointes tangentielles, trouvées et utilisées pour la première fois par *Clebsch* et *Gordan* dans leur „Théorie des fonctions abéliennes", prennent donc leur origine dans la nature des choses.

Lorsque dans l'équation (8) aura lieu le signe supérieur, la fonction $\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ sera *paire*, autrement — *impaire*. En posant dans le dernier cas $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$, nous aurons:

$$(9) \qquad \Theta(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = -\Theta(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = 0,$$

la fonction $\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ étant finie et continue; donc pour cette fonction impaire on aura:

$$(10) \qquad \log\Theta(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = \Phi(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = -\infty,$$

et parconséquent les fonctions

$$(11) \qquad J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_h}})_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots p)$$

qui en sont les dérivées partielles par rapport à u_k, sont de la deuxième classe, car celles de la première classe restent finies pour $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$, comme on l'a vu au § 130. Donc les fonctions de la première classe amènent aux thétafonctions paires, celles de la deuxième classe aux thétafonctions impaires. Pour que ces dernières conduisent aussi aux thétafonctions paires, on devrait avoir $\Theta(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = 0^2$, et pour cela, la fonction adjointe tangentielle de la première classe dégénerant en celle de la deuxième, deux des points $(c_{\xi_i}, y_{c_{\xi_i}})_1^p$ devraient venir à tomber dans le point (ξ, y_ξ), c'est ce qui ne peut avoir lieu dans le cas général, en exigeant des certaines relations entre les coéfficients de l'équation $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$. Par suite le nombre des thétafonctions paires est égal au nombre des fonctions de la première classe, c'est-à-dire à $2^{p-1}(2^p + 1)$, comme on l'a vu au § 134, tandis que le nombre des thétafonctions impaires est égal au nombre de celles de la seconde, c'est-à-dire à $2^{p-1}(2^p - 1)$.

138. Toutes ces thétafonctions, paires et impaires, on déduit aisement de la thétafonction fondamentale d'une manière analogue à celle que nous avons employé au § 133 pour la fonction $Z(u_h)_{1\,\xi}^{p}$.

En remplaçant dans l'équation fonctionnelle de thétafonction fondamentale [(4) de § 125]:

$$\Theta(u_h + \bar{\omega}_h)_1^p = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} \bar{m}_k \bar{n}_k} e^{\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k (u_k + \frac{1}{2}\bar{\omega}_k)} \Theta(u_h)_1^p \tag{1}$$

les variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ par $u_h - \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\Big|_1^p$ et puis en multipliant les deux membres de l'égalité reçue par $e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k u_k}$, on aura:

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k u_k} \Theta(u_h + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_h)_1^p = \pm(-1)^{\sum_{k=1}^{p} \bar{m}_k \bar{n}_k} e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \bar{\eta}_k u_k} \Theta(-u_h + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_h)_1^p, \tag{2}$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou inférieur suivant que la fonction théta fondamentale est paire ou impaire. En posant pour un moment

$$f(u_h; \bar{m}_h, \bar{n}_h)_1^p = e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \eta_k u_k} \cdot \Theta(u_h + \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_h)_1^p, \tag{3}$$

on voit par (2), que cette fonction sera de même parité que la thétafonction fondamentale, lorsqu'on aura

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{m}_k \bar{n}_k \equiv 0 \text{ (mod. 2)}, \tag{4}$$

et de parité contraire, lorsqu'on aura

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{m}_k \bar{n}_k \equiv 1 \text{ (mod. 2)}. \tag{5}$$

En vertu de l'équation (4) de § 125 on aura pour la fonction (3), en y changeant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en $u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tilde{\omega}_h$, cette équation:

$$(6)\quad \begin{cases} f(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}; \bar{m}_h, \bar{n}_h) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k(u_k+\tilde{\omega}_k)}\Theta(u_h + \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}} + \tilde{\omega}_h) = \\ = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k n_k} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k(u_k+\tilde{\omega}_k)} e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\bar{\omega}_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)} \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h) = \\ = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k n_k} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}(\bar{\eta}_k\tilde{\omega}_k - \bar{\omega}_k\tilde{\eta}_k)} e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)} f(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h), \end{cases}$$

ou, comme d'après les relations de Weierstrass entre les périodes des intégrales abéliennes des deux premières espèces (I — IV) § 85 on a:

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2}(\bar{\eta}_k\tilde{\omega}_k - \bar{\omega}_k\tilde{\eta}_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{p}(\frac{1}{2}\bar{m}_k n_k - \frac{1}{2}\bar{n}_k m_k),$$

définitivement:

$$(8)\qquad f(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}; \bar{m}_h \bar{n}_h) =$$

$$= (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p} m_k n_k} e^{2\pi i\sum\limits_{k=1}^{p}(\frac{1}{2}\bar{n}_k m_k - \frac{1}{2}\bar{m}_k n_k)} e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)} f(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h).$$

En comparant cette équation avec l'équation (7) du § 124, on aperçoit de suite, que la dernière devient identique à cette équation (8), en y prenant $\mu_h = \frac{1}{2}\bar{m}_h$, $\nu_h = \frac{1}{2}\bar{n}_h$ pour toutes les valeurs de l'indice h de 1 à p; donc la fonction $f(u_h; \overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h)$, définie par l'équation (3), ne diffère de la fonction $\Theta(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \frac{1}{2}\bar{n}_h)$ que par un facteur constant. En le désignant par $K(\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h)$, comme dans le § 136, nous pouvons donc écrire, en ayant égard aussi à l'équation (2), cette double équation:

$$(9)\quad \begin{cases} \Theta(u_h; \frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \frac{1}{2}\bar{n}_h) = K(\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h) e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k} \Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h) = \\ = \pm(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{m}_k\bar{n}_k} K(\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \bar{n}_h) e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{\eta}_k u_k} \Theta(-u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h). \end{cases}$$

Comme on a dans le cas de m_k, n_k, $\bar{m}_k$, $\bar{n}_k$ entiers:

$$e^{2\pi i \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\bar{n}_k m_k - \frac{1}{2}\bar{m}_k n_k\right)} = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}(\bar{m}_k n_k + \bar{n}_k m_k)}, \tag{10}$$

et

$$m_k n_k + \bar{m}_k n_k + \bar{n}_k m_k = (m_k + \bar{m}_k)(n_k + \bar{n}_k) - \bar{m}_k \bar{n}_k, \tag{11}$$

on pourra maintenant écrire l'équation (8) de cette manière:

$$\begin{gathered}\Theta(u_h + \tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{;}} \tfrac{1}{2}\bar{m}_h, \bar{n}_h) = \\ = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{m}_k\bar{n}_k} (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}(m_k+\bar{m}_k)(n_k+\bar{n}_k)} e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\tilde{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)} \Theta(u_h; \tfrac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \tfrac{1}{2}\bar{n}_h).\end{gathered} \tag{12}$$

139. En posant $\overset{p}{\underset{1}{u_h}} = 0$ dans l'équation (2) du § précédent, on aura:

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}}) = \pm(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{m}_k\bar{n}_k}\,\Theta(\tfrac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}}). \tag{1}$$

Dans le cas de

$$\pm(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{p}\bar{m}_k\bar{n}_k} = -1, \tag{2}$$

cette équation (1) ne peut avoir lieu que lorsqu'on a

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{\omega}_h}}) = 0; \tag{3}$$

donc la fonction théta fondamentale s'annule pour $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h$ dans le cas (5) du § précédent, lorsqu'elle est paire, et dans le cas (4) du même §, lorsqu'elle est impaire. On appelle les caractéristiques, satisfaisantes à la congruence (4), *paires*, et celles, qui satisfont à la congruence (5), *impaires*; on peut transporter cette dénomination sur les demipériodes correspondantes et exprimer ainsi le résultat obtenu:

„La fonction théta fondamentale s'annule pour les demipériodes impaires, lorsqu'elle est paire, et pour les demipériodes paires, lorsqu'elle est impaire."

En posant $u_h \overset{p}{\underset{1}{=}} \frac{1}{2}\tilde{\omega}_h$ dans l'équation (9) du § précédent, on aura

$$\Theta(\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_h; \tfrac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\bar{m}_h}}, \tfrac{1}{2}\bar{n}_h) = 0, \tag{4}$$

lorsque

$$\Theta\Big(\tfrac{1}{2}(\tilde{\omega}_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \bar{\omega}_h)\Big) = 0, \tag{5}$$

parconséquent, dans le cas, où théta fondamentale est paire, lorsqu'on aura

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{p}(m_k+\bar{m}_k)(n_k+\bar{n}_k)\equiv 1\,(\mathrm{mod.}\,2)\,,$$

et dans le cas, où théta fondamentale est impaire, lorsqu'on aura

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{p}(m_k+\bar{m}_k)(n_k+\bar{n}_k)\equiv 0\,(\mathrm{mod.}\,2)\,.$$

Ces zéros sont les plus remarquables; ils étaient nommé par *P. Pokrowsky* *) *les zéros principaux* de thétafonction considérée; dans le cas de $p=1$ il n'y a pas d'autres; mais dans le cas de $p>1$ il y en a une infinité d'autres, comme il suit des formules (7) et (12) du § 100, d'après lequelles $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ se réduisent dans ces cas aux fonctions de $p-1$ variables, liées par une équation.

140. Après avoir déduit les propriétés principales des fonctions théta générales de leur définition même par les équations (1) et (2) du § 119, nous pouvons maintenant passer aux thétafonctions spéciales.

Les intégrales de seconde espèce, considérées jusqu'à présent, étaient les plus générales, qui s'expriment d'après la formule (6) § 79 ainsi:

$$(1)\qquad \overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k}}=\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k^{(0)}}}+\sum_{j=1}^{p}c_{kj}\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_j}}\,,\qquad (k=1,2,\dots p)$$

$\overset{x}{\underset{x_0}{\Pi_k^{(0)}}}$ étant une intégrale particulière de même espèce. Les constantes c_{kj} satisfont, rappelons-le, à la seule condition, que soit $c_{jk}=c_{kj}$. En faisant le point (x,y) décrire la courbe A_h ou B_h, l'intégrale (1) s'accroitra respectivement de

$$\left.\begin{aligned} &(2)\qquad \eta_{kh}=\eta_{kh}^{(0)}+\sum_{j=1}^{p}c_{kj}\,\omega_{jh}\,,\\ &\text{ou de}\\ &(3)\qquad \eta'_{kh}=\eta'^{(0)}_{kh}+\sum_{j=1}^{p}c_{kj}\,\omega'_{jh}\,. \end{aligned}\right\}\qquad (h=1,2,\dots p)$$

On peut maintenant déterminer les constantes c_{kj} par la condition, qu'on ait:

$$(4)\qquad \eta_{kh}^{(0)}+\sum_{j=1}^{p}c_{kj}\,\omega_{jh}=0\,,\qquad (h=1,2,\dots p)$$

si le déterminant

$$(5)\qquad \Omega=(h)\overset{1,1\;\;j\;\;p}{\underset{p}{\left|\;\omega_{jh}\;\right|}}$$

*) *P. Pokrowsky.* Théorie des fonctions ultraelliptiques de la 1-re classe. Moscou, 1887, (en russe), p. 199, § 25. Aussi à voir: Recueil Mathématique (Sbornik). Moscou, t. XIII, p. 245 et 409.

de ce système d'équations est différent de zéro. On peut le supposer, car par une transformation linéaire à coéfficients entiers des périodes — c'est ce qui revient à remplacer les courbes A_h et B_h primitives par d'autres, composées de celles-là, — toujours peut on faire, qu'il en soit ainsi. La manière la plus simple d'arriver à ce but serait à remplacer quelquesunes des lignes en ω_{kh} $(h=1,2,\ldots p)$ du déterminant (5) par les lignes en ω'_{lh} $(h=1,2,\ldots p)$, car tous les déterminants possibles déduits de cette manière de Ω (5) ne peuvent pas être $=0$, car alors d'après le théorème connu de Laplace sur les déterminants le déterminant Δ [(1) § 86] serait de même $=0$, tandis qu'il est $=\pm(2\pi i)^{2p}$, comme on a trouvé là. — En posant

$$\Omega_{lh}=\frac{1}{\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{lh}}, \tag{6}$$

on tirera des équations (4):

$$c_{kg}=-\sum_{h=1}^{p}\Omega_{gh}\eta_{kh}^{(0)}. \tag{7}$$

En permutant ici k et g, on aura:

$$c_{gk}=-\sum_{h=1}^{p}\Omega_{kh}\eta_{gh}^{(0)}. \tag{8}$$

Il est aisé de s'assurer, que la condition

$$c_{gk}=c_{kg} \tag{9}$$

est remplie par ces valeurs (7) et (8), et cela en vertu des relations de Weierstrass (I) § 85, qu'on pourra écrire de cette manière:

$$\sum_{l=1}^{p}\eta_{lq}\omega_{lr}=\sum_{l=1}^{p}\omega_{lq}\eta_{lr}. \tag{10}$$

En multipliant cette égalité par $\Omega_{gq}\Omega_{kr}$ et en sommant par rapport à q et r de 1 à p, nous aurons:

$$\sum_{l=1}^{p}\sum_{q=1}^{p}\Omega_{gq}\eta_{lq}\sum_{r=1}^{p}\Omega_{kr}\omega_{lr}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{q=1}^{p}\Omega_{gq}\omega_{lq}\sum_{r=1}^{p}\Omega_{kr}\eta_{lr}; \tag{11}$$

mais à gauche la somme par rapport à r est $=1$ seulement pour $l=k$, autrement à zéro; de même à droite la somme par rapport à q est $=1$ seulement pour $l=g$, autrement à zéro; donc cette égalité (11) se réduit à celle-là:

$$\sum_{q=1}^{p}\Omega_{gq}\eta_{kq}=\sum_{r=1}^{p}\Omega_{kr}\eta_{gr}. \tag{12}$$

Cette égalité ayant lieu pour les intégrales générales de deuxième espèce aura lieu aussi pour les intégrales particulieres $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{II}}}{}_k^{(0)}$; mais alors en vertu des équations (7) et (8) elle se réduit à l'égalité (9), qui est ainsi démontrée.

En portant la valeur de c_{jk} au lieu de c_{kj} — c'est ce qui est permi en vertu de (9), — d'après (8) dans l'équation (3), on aura:

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} - \sum_{j=1}^{p} \omega'_{jh} \sum_{l=1}^{p} \Omega_{kl} \eta^{(0)}_{jl}. \tag{13}$$

En multipliant cette équation par $u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}$ et en sommant le produit par rapport à k de 1 à p, nous aurons pour l'exposant de e dans le second membre de la deuxième des équations (3) § 125 dans le cas spécial considéré une expression de la forme suivante:

$$\sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = \sum_{k=1}^{p} \eta'^{(0)}_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) - \sum_{j=1}^{p} \omega'_{jh} \sum_{l=1}^{p} \eta^{(0)}_{jl} \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kl}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right). \tag{14}$$

Elle deviendra plus simple si l'on pose:

$$\sum_{k=1}^{p} \Omega_{kl}\, u_k = v_l, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \Omega_{kl}\, \omega'_{kh} = \tau_{hl}. \tag{16}$$

On aura, c'est ce qui est important de noter:

$$\tau_{lh} = \tau_{hl}. \tag{17}$$

Pour le démontrer, il faut partir de l'équation (3) du § 88 (de Riemann), qu'on peut écrire ainsi:

$$\sum_{m=1}^{p} \omega'_{gm} \omega_{km} = \sum_{m=1}^{p} \omega_{gm} \omega'_{km}. \tag{18}$$

En multipliant cette égalité par $\Omega_{gl}\Omega_{kh}$ et en sommant par rapport à g et k de 1 à p, nous aurons:

$$\sum_{m=1}^{p} \sum_{g=1}^{p} \Omega_{gl} \omega'_{gm} \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh} \omega_{km} = \sum_{m=1}^{p} \sum_{g=1}^{p} \Omega_{gl} \omega_{gm} \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh} \omega'_{km}; \tag{19}$$

mais à gauche la somme par rapport à k est $=1$ seulement pour $m=h$ autrement à zéro; à droite la somme par rapport à g est $=1$ pour $m=l$, autrement à zéro; donc cette équation revient à celle-ci:

$$\sum_{g=1}^{p} \Omega_{gl}\, \omega'_{gh} = \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh} \omega'_{kl}, \tag{20}$$

où le second membre se déduise du premier simplement par la permutation de h et l, tandisque le premier d'après (16) est égal à τ_{hl}; par suite le second est égal à τ_{lh}; l'équation (17) est donc démontrée.

Les équations (15) et (16) peuvent être tout de suite résolues par rapport à u_g la première et à ω'_{gh} la seconde. En multipliant chacune de ces équations par ω_{gl} et en sommant par rapport à l de 1 à p, en vertu de ce, que la somme $\sum_{l=1}^{p} \Omega_{kl}\omega_{gl} = 1$ seulement pour $k = g$, autrement à zéro, nous aurons:

$$u_g = \sum_{l=1}^{p} \omega_{gl} v_l, \qquad (g = 1, 2, \ldots p) \tag{21}$$

$$\omega'_{gh} = \sum_{l=1}^{p} \omega_{gl} \tau_{lh}, \qquad (g, h = 1, 2, \ldots p) \tag{22}$$

en ayant égard pour la dernière à (17). En portant la valeur de u_k et celle de ω'_{kh} des équations (21) et (22) pour $g = k$ dans le premier terme du côté droit de l'équation (14), et en transformant son second terme à l'aide des équations (15) et (16), on aura un résultat, qui pourra être présenté ainsi:

$$\sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}) = \sum_{l=1}^{p}(v_l + \frac{1}{2}\tau_{lh}) \sum_{k=1}^{p}(\eta'^{(0)}_{kh}\omega_{kl} - \eta^{(0)}_{kl}\omega'_{kh}), \tag{23}$$

en réunissant les deux termes à droite après y avoir changé pour cela la lettre sommatoire j en k. Mais d'après les relations de Weierstrass (II) et (III) § 85 la somme en k à droite se réduit à zéro pour $l \gtrless h$, et à $-2\pi i$ pour $l = h$; donc on aura définitivement cette équation:

$$\sum_{k=1}^{p} \eta'_{kh}(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}) = -2\pi i(v_h + \frac{1}{2}\tau_{hh}), \tag{24}$$

où d'après (16) on a

$$\tau_{hh} = \sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh}\omega'_{kh}. \tag{25}$$

L'expression (24) sera l'exposant de e dans la deuxième des équations (3) § 125; dans la première en vertu de l'équation (4) il se réduira à zéro.

141. En portant $u_k + \omega_{kh}$ aulieu de u_k dans l'équation (15) de § précédent et en marquant pour le moment la nouvelle valeur de v_j par la lettre h, placée en haut entre paranthèses, nous aurons d'après (15) et de ce que

$$\sum_{k=1}^{p} \Omega_{kh}\omega_{kl} \begin{matrix} = 0 \\ = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (h \gtrless l) \\ (h = l) \end{matrix} \tag{1}$$

les deux égalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned} v_j^{(h)} &= v_j, \qquad (j \gtrless h) \\ v_h^{(h)} &= v_h + 1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

En portant dans la même équation (15) du § précédent $u_k + \omega'_{kh}$ aulieu de u_k et en désignant par $v_j^{(h')}$ la nouvelle valeur de v_j qui en résulte, nous aurons d'après les équations (15), (16) et (17) du § précédent:

$$(3) \qquad v^{(h')} = v_j + \tau_{jh}. \qquad (j = 1, 2, 3, \dots p)$$

En introduisant maintenant les variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ aulieu de $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ dans les équations (3) § 125, appliquées au cas spécial considéré de la fonction fondamentale $\Theta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, que nous désignerons par $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$ dans ce cas spécial et par $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$, lorsque y seront introduit les variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ aulieu de $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, de sorte qu'il sera

$$(4) \qquad \Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) = \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}),$$

nous aurons:

$$(5) \quad \vartheta(v_1, v_2, \dots v_{k-1}, v_k + 1, v_{k+1} \dots v_p) = \vartheta(v_1, v_2, \dots v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots v_p);$$

$$(6) \quad \vartheta(v_1 + \tau_{1k}, v_2 + \tau_{2k}, \dots v_p + \tau_{pk}) = e^{-2\pi i(v_k + \frac{1}{2}\tau_{kk})}\, \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p).$$

La première de ces équations peut être de suite généralisée ainsi:

$$(7) \qquad \vartheta(v_1 + m_1, v_2 + m_2, \dots v_p + m_p) = \vartheta(v_1, v_2, \dots v_p);$$

dans la seconde nous changerons n_k fois $\overset{p}{\underset{1}{v_i}}$ en $\overset{p}{\underset{1}{v_i + \tau_{ki}}}$, et multiplierons les résultats; nous aurons:

$$(8) \qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h + n_k\tau_{hk}}}) = e^{-2\pi i(n_k v_k + \frac{1}{2} n_k^2 \tau_{kk})}\, \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}});\,^{*)}$$

de la même manière nous aurons aussi:

$$(9) \qquad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h + n_l\tau_{hl}}}) = e^{-2\pi i(n_l v_l + \frac{1}{2} n_l^2 \tau_{ll})}\, \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}});$$

en changeant ici v_h en $v_h + n_k\tau_{hk}$ (pour $h = 1, 2, \dots p$) et en multipliant le résultat par l'égalité (8), après une réduction facile nous aurons:

$$(10) \quad \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h + n_k\tau_{hk} + n_l\tau_{hl}}}) = e^{-2\pi i\left(n_k v_k + n_l v_l + \frac{1}{2}(\tau_{kk} n_k^2 + 2\tau_{kl} n_k n_l + \tau_{ll} n_l^2)\right)}\, \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}).$$

---

*) car $\sum_{h=1}^{n} (2h-1) = n^2$.

En répétant cette opération p fois, on aura la formule:

$$\vartheta(v_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}) = e^{-2\pi i\left(\sum_{j=1}^{p} n_j v_j + \frac{1}{2}\varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_h}})\right)} \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}), \tag{11}$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_h}}) = \sum_{k,l=1}^{p} \tau_{kl} n_k n_l. \tag{12}$$

En changeant dans cette formule (11) $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ en $v_h \overset{p}{\underset{1}{+}} m_h$, $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}$ étant des nombres entiers, on aura d'après (6) et ayant égard à ce, que $\sum_{j=1}^{p} n_j m_j$ est un nombre entier, la formule la plus générale:

$$\vartheta(v_h + m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}) = e^{-\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k (2v_k + \sum_{l=1}^{p} \tau_{kl} n_l)} \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}), \tag{13}$$

où l'on a porté aulieu de $\varphi(\overset{p}{\underset{1}{n_k}})$ son expression d'après l'équation (12).

En remplaçant ici $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$ par $v_h - \frac{1}{2} m_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}$, vu que $e^{-\pi i . q} = (-1)^q$ lorsque q est entier, et ayant en vue qu'à cause des relations (15) du § précédent entre les anciennes variables $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ et les nouvelles $\overset{p}{\underset{1}{v_k}}$ la thétafonction fondamentale (4) du § présent est une fonction paire aussi des variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, c'est-à-dire qu'on a

$$\vartheta(-\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}), \tag{14}$$

nous aurons:

$$\begin{aligned} &\vartheta(v_h + \frac{1}{2} m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}) = \\ &= (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k} e^{-\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k . 2v_k} \vartheta(-v_h + \frac{1}{2} m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}), \end{aligned} \tag{15}$$

ou, en multipliant les deux membres de cette égalité par $e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k (v_k + \frac{1}{2} m_k + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj})}$, cette autre équation:

$$\begin{aligned} &\vartheta(v_h + \frac{1}{2} m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}) e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k (v_k + \frac{1}{2} m_k + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj})} = \\ &= (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k} \vartheta(-v_h + \frac{1}{2} \overset{p}{\underset{1}{m_h}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj}) e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k (-v_k + \frac{1}{2} m_k + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj})}. \end{aligned} \tag{16}$$

En posant

$$\vartheta\begin{bmatrix} \overset{p}{m_k} \\ n_k \\ {}_1 \end{bmatrix}(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \vartheta\begin{bmatrix} m_1 m_2 \cdots m_p \\ n_1\, n_2 \cdots n_p \end{bmatrix}(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \tag{17}$$

$$= \vartheta(v_h + \tfrac{1}{2}\, m_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj})\, e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} n_k (v_k + \frac{1}{2} m_k + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{p} n_j \tau_{hj})},$$

on pourra écrire l'équation précédente de cette manière:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \overset{p}{m_k} \\ n_k \\ {}_1 \end{bmatrix}(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p} m_k n_k}\, \vartheta\begin{bmatrix} \overset{p}{m_k} \\ n_k \\ {}_1 \end{bmatrix}(-\overset{p}{\underset{1}{v_k}}). \tag{18}$$

Cette équation fait voir que la thétafonction, définie par l'équation (17), est paire ou impaire, suivant que l'on aura

$$\sum_{k=1}^{p} m_k n_k \equiv 0 \pmod{2} \tag{19}$$

ou

$$\sum_{k=1}^{p} m_k n_k \equiv 1 \pmod{2}. \tag{20}$$

Les fonctions, définies par l'équation (17), sont donc de la même nature que celles, dont nous nous sommes occupé au § 138, à un facteur constant près. La raison de notre chois actuel pour celui-ci sera visible dans le § suivant. — Si contrairement à l'usage on prendrait pour théta fondamentale une fonction impaire, on n'aurait qu'à placer le signe (—) devant les seconds membres des équations (15) et (18).

142. On voit par l'équation (5) du § précédent, que la fonction $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$ est une fonction périodique des variables $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, et comme elle est toujours finie et continue, elle est dévéloppable d'après le théorème de *Fourier* en une série infinie à p entrées de la forme:

$$\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{m_h=-\infty}^{+\infty} A_{m_1 m_2 \ldots m_h}\, e^{2\pi i \sum_{k=1}^{p} m_k v_k}. \tag{1}$$

Les coéfficients $A_{m_1 m_2 \ldots m_p} \equiv A_{\overset{p}{\underset{1}{m_h}}}$ de ce développement se déterminent le plus aisement de cette manière. Portons ce développement aulieu de $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$ dans les deux membres de l'équation (13) du § précédent, (en y supposant toute fois $\overset{p}{\underset{1}{m_h}} = 0$ et après y avoir transporté le facteur exponentiel à gauche); en employant la notation abrégée des coéfficients et des sommes multiples (en imitant Riemann), facile à comprendre, nous aurons, après avoir introduit le facteur exponentiel sous le signe de sommation:

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_i}\right)_{i=1}^{p} A_{\substack{m_h\\1}}^{p} e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} 2m_k v_k} = \tag{2}$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_i}\right)_{i=1}^{p} A_{\substack{m_h\\1}}^{p} e^{\pi i \sum_{k=1}^{p}\left((m_k+n_k)2v_k + (2m_k+n_k)\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}n_l\right)}.$$

En comparant les coéfficients de $e^{\pi i \sum_{k=1}^{p}(m_k+n_k)2v_k}$ dans les deux membres de cette égalité, on aura:

$$A_{\substack{m_h+n_h\\1}}^{\;\;p} = A_{\substack{m_h\\1}}^{p} e^{\pi i \sum_{k=1}^{p}(2m_k+n_k)\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}n_l}, \tag{3}$$

pour toutes les valeurs de $\overset{p}{\underset{1}{m_h}}$. En posant $\overset{p}{\underset{1}{m_h}} = 0$, on en aura:

$$A_{\substack{n_h\\1}}^{p} = A_{\substack{0_h\\1}}^{p} e^{\pi i \sum_{k,l=1}^{p}\tau_{kl}n_k n_l}. \tag{4}$$

Les coéfficients, déterminés d'après cette formule, satisfont à l'équation (3); car en substituant l'expression de $A_{\substack{m_h\\1}}^{p}$, obtenue de (4) par le changement de n_h en m_h, dans l'équation (3), on aura à droite justement l'expression de $A_{\substack{m_h+n_h\\1}}^{\;\;p}$, reçue d'après (4), en y changeant n_h en m_h+n_h, ayant en vue l'identité:

$$\sum_{k,l=1}^{p}(m_k m_l + 2m_k n_l + n_k n_l) = \sum_{k,l=1}^{p}(m_k+n_k)(m_l+n_l). \tag{5}$$

En portant l'expression des coéfficients $A_{\substack{n_h\\1}}^{p}$ de l'équation (4) dans le développement (1), on aura:

$$\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_i}\right)_{i=1}^{p} e^{\pi i \sum_{k=1}^{p} m_k\left(2v_k + \sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}m_l\right)}, \tag{6}$$

où l'on a posé $A_{\substack{0_h\\1}}^{p} = 1$, pour déterminer définitivement la fonction $\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})$.

Ainsi nous avons reçu l'expression analytique de la fonction théta de Jacobi et Riemann. On pourrait la nommer aussi la fonction théta avec la caractéristique zéro. Pour avoir l'expression analytique des autres thétafonctions, paires ou impaires, avec des caractéristiques différentes de zéro, on n'a que de porter le développement de $\vartheta\overset{p}{\underset{1}{(v_h)}}$ fondamentale, présenté par la formule (6), dans l'équation (17) du § précédent, définissant ces autres thétafonctions, après y avoir changé la notation des éléments de la caractéristique par les lettres latins en celle par les lettres grecques μ et ν. En introduisant le facteur exponentiel sous le signe de sommation multiple, on aura pour l'exposant de e dans le terme général:

$$\pi i\sum_{k=1}^{p}\Big[m_k(2v_k+\mu_k+\sum_{l=1}^{p}\nu_l\tau_{kl}+\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}m_l)+\nu_k(v_k+\frac{1}{2}\mu_k+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}\nu_l)\Big]=$$

$$(7)\qquad =\pi i\sum_{k=1}^{p}(m_k+\frac{\nu_k}{2})\Big[2(v_k+\frac{\mu_k}{2})+\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}(m_l+\frac{\nu_l}{2})\Big],$$

car on a en réunissant dans une somme double les termes avec τ_{kl}:

$$\sum_{k,l=1}^{p}\tau_{kl}\Big[m_k\nu_l+m_km_l+\frac{1}{4}\nu_k\nu_l\Big]=$$

$$(8)=\sum_{k,l=1}^{p}\tau_{kl}\Big[2m_k\frac{\nu_l}{2}+m_km_l+\frac{1}{4}\nu_k\nu_l\Big]=\sum_{k,l=1}^{p}\tau_{kl}\Big[m_k\frac{\nu_l}{2}+m_l\frac{\nu_k}{2}+m_km_l+\frac{\nu_k}{2}\frac{\nu_l}{2}\Big]=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{p}\tau_{kl}(m_k+\frac{\nu_k}{2})(m_l+\frac{\nu_l}{2});$$

donc on aura:

$$(9)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\mu_h\\ \nu_h\end{bmatrix}_1^p(v_h)_1^p=\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_i}\Big)_{i=1}^{p} e^{\pi i\sum_{k=1}^{p}(m_k+\frac{\nu_k}{2})\Big[2(v_k+\frac{\mu_k}{2})+\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}(m_l+\frac{\nu_l}{2})\Big]}.$$

Cette expression est tout à fait semblable à celle, donnée par la formule (6); elle s'en déduit, en ajoutant à la variable v_k la moitié de l'élément supérieur correspondant μ_k de la caractéristique, et à la lettre sommatoire m_k la moitié de l'élément inférieur correspondant ν_k. Voilà pourquoi nous avons choisi $e^{\pi i\sum_{k=1}^{p}n_k(\frac{1}{2}m_k+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{p}\tau_{kl}n_l)}$ pour le facteur constant dans l'équation (16) du § précédent: de cette manière nous avons reçue la forme usuelle de cette fonction.

143. Ayant trouvé l'expression analytique de la fonction théta de *Jacobi*, nous avons trouvé par là les expressions de toutes les autres, car on peut exprimer sans difficulté les dernières, et en premier lieu la thétafonction fondamentale générale (avec c_{kg} tout à fait arbitraires, mais satisfaisant toujours à la condition (9) § 140), par la fonction de Jacobi. On n'a pour cela que de décomposer les c_{kl} en deux parties chaqu'un, dont l'une soit la valeur déterminée par la formule (7) § 140, que reçoit cette constante pour la fonction théta de Jacobi, c'est-à-dire de poser:

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{p} \Omega_{gh}\eta_{kh}^{(0)} + b_{kg}; \tag{1}$$

mais en vertu de (6) § 79, [ou (1) § 140,] vu (6) § 128, on a:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k^{(0)} + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}(u_j + \mathfrak{c}_j); \tag{2}$$

en portant ici aulieu de c_{kj} sa valeur tirée de (1), on aura:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k^{(0)} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} \Omega_{jh}\eta_{kh}^{(0)}(u_j + \mathfrak{c}_j) + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}(u_j + \mathfrak{c}_j), \tag{3}$$

ou, en posant

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k^{(1)} = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k^{(0)} - \sum_{j,k=1}^{p} \Omega_{jh}\eta_{kh}^{(0)}(u_j + \mathfrak{c}_j), \tag{4}$$

plus brièvement:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}(u_j + \mathfrak{c}_j). \tag{5}$$

En posant ici

$$u_h = \mathfrak{c}_h + 2(\bar{u}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h), \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{6}$$

nous aurons:

$$J_k = -\frac{1}{2} J\Big(\mathfrak{c}_h + 2(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)\Big)_k = J_k^{(1)} - \sum_{i=1}^{p} b_{kj}(\bar{u}_j^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_j + \mathfrak{c}_j), \tag{7}$$

où l'on a d'après (4):

$$\begin{aligned} J_k^{(1)} &= -\frac{1}{2} J\Big(\mathfrak{c}_h + 2(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)\Big)_k^{(1)} = \\ &= -\frac{1}{2} J\Big(\mathfrak{c}_h + 2(\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)\Big)_k^{(0)} + \sum_{j,h=1}^{p} \Omega_{jh}\eta_{kh}^{(0)}(\bar{u}_j^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_j + \mathfrak{c}_j). \end{aligned} \tag{8}$$

En remplaçant dans l'équation (5) $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ par $u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h$ et en ajoutant au résultat l'équation (7), nous aurons:

$$J_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k = J_k^{(1)} + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj}u_j. \tag{9}$$

Maintenant remplaçons ici $\overset{p}{\underset{1}{\bar{u}_h^{(0)}}}$ par

$$\bar{\bar{u}}_h^{(0)} = \bar{u}_h^{(0)} + \frac{1}{2}\bar{\bar{\omega}}_h, \qquad (h = 1, 2, \dots p) \tag{10}$$

$\overset{=}{\omega}_h$ étant une période; alors d'après (4) § 135 J_k et $J_k^{(1)}$ seront changés respectivement en

(11) $$\bar{J}_k = J_k - \frac{1}{2}\overset{=}{\eta}_k \qquad \text{et} \qquad \bar{J}_k^{(1)} = J_k^{(1)} - \frac{1}{2}\overset{=}{\eta}_k,$$

$\overset{=}{\eta}_k$ étant la période de l'intégrale de deuxième espèce, qui répond aux $\overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{\omega}}}_k$; nous aurons:

(12) $$\bar{J}_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{u}}}{}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k = \bar{J}_k^{(1)} + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{u}}}{}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} b_{kj} u_j.$$

Supposons maintenant que $\overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{\omega}}}_h$ sont de celles périodes, qui rendent la fonction à gauche de l'équation (12), de même que la partie correspondante à droite, une fonction de 1-re classe; alors, après avoir multiplié cette équation (12) par du_k et sommé par rapport à k de 1 à p nous allons l'intégrer de $\overset{p}{\underset{1}{u_h = 0}}$; nous aurons ainsi:

(13) $$\sum_{k=1}^{p} \int_0^{u_k} \left(\bar{J}_k + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{u}}}{}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k\right) du_k = $$
$$= \sum_{k=1}^{p} \int_0^{u_k} \left(\bar{J}_k^{(1)} + J(u_h + \overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{u}}}{}_h^{(0)} + \overset{a_k}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_h)_k^{(1)}\right) du_k + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{p} b_{kj} u_j u_k;$$

en vertu de l'équation (8) § 125 on peut présenter cette équation de cette manière:

(14) $$\bar{\Phi}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \bar{\Phi}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) = \bar{\Phi}^{(1)}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}) - \bar{\Phi}^{(1)}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}}) + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{p} b_{kj} u_j u_k; {}^{*})$$

en prenant les deux membres de cette équation pour l'exposant du nombre e, en vertu de l'équation (11) du même § 125 nous aurons:

(15) $$\frac{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} = \frac{\bar{\Theta}^{(1)}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\bar{\Theta}^{(1)}(0_h)} e^{\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{p} b_{kj} u_j u_k}.$$

Cette équation donne l'expression d'une thétafonction générale (celle du côté gauche) par une thétafonction spéciale et paire (celle du côté droit). Parmi celles-ci se trouve la fonction $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, (4) du § 141. Si l'on suppose que dans l'équation (10) les $\frac{1}{2}\overset{p}{\underset{1}{\overset{=}{\omega}}}_k$ sont prises d'une telle manière qu'elles nous conduisent justement à la fonction $\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})$, aulieu de l'équation (15) nous aurons:

*) Car en vertu de (12) § 140 et (1) du § présent il suit de (19) § 69 la même relation entre les b_{kj}, c'est-à-dire: $b_{jk} = b_{kj}$.

$$\frac{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} = \frac{\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\Theta_0(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k,j=1}^{p} b_{kj} u_j u_k}. \tag{16}$$

Portons ici les valeurs des $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ en $\overset{p}{\underset{1}{v_h}}$, tirées de l'équation (21) du § 140; en posant

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{p} b_{kj}\,\omega_{kg}\,\omega_{jh} = \pi i \beta_{gh}, \tag{17}$$

nous aurons la formule suivante:

$$\frac{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})}{\bar{\Theta}(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} = \frac{\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{v_h}})}{\vartheta(\overset{p}{\underset{1}{0_h}})} e^{\pi i \sum\limits_{g,h=1}^{p} \beta_{gh} v_g v_h}, \tag{18}$$

qui donne l'expression d'une thétafonction fondamentale paire par la fonction de Jacobi. Les autres thétafonctions s'exprimant par la fondamentale, comme on l'a vu aux §§ 126, 135 et 136, il n'est pas difficile d'avoir aussi leurs expressions par la fonction de Jacobi; mais, nous nous bornant aux éléments de la théorie des intégrales abéliennes, il nous suffit d'indiquer cette possibilité.

Appendice.

Complément au § 48.

1. *Théorème des restes* (Restsatz). Partageons tous les zéros variables d'une fonction adjointe $\overset{\mu_1\ \nu_1}{f_1(x, y)}$ en deux groupes, contenant le premier Q_1 zéros, le second R_1. Soit donnée encore une autre fonction adjointe $\overset{\mu_2\ \nu_2}{f_2(x, y)}$, qui aurait parmi ses zéros variables les Q_1 zéros du premier groupe et encore d'autres R_2 zéros; de même soit donnée une troisième fonction adjointe $\overset{\mu_3\ \nu_3}{f_3(x, y)}$, qui aurait parmi ses zéros variables les R_1 zéros du second groupe des zéros variables de la première fonction et encore d'autres Q_3 zéros, de manière que les groupes des racines variables des trois fonctions f_1, f_2, f_3 soient:

$$(1)\qquad \begin{cases} G_{Q_1} \text{ et } G_{R_1} & \text{pour} \quad f_1\,. \\ G_{Q_1} \text{ et } G_{R_2} & \text{„} \quad f_2\,, \\ G_{Q_3} \text{ et } G_{R_1} & \text{„} \quad f_3\,. \end{cases}$$

Les deux groupes G_{R_1} et G_{R_2}, ayant le même reste G_{Q_1}, sont dits *corrésiduaux*; aussi les deux groupes G_{Q_1} et G_{Q_3} sont corrésiduaux, ayant le même reste G_{R_1}. Maintenant, on peut trouver une quatrième fonction adjointe $\overset{\mu_4\ \nu_4}{f_4(x, y)}$, qui aurait pour ses zéros variables les groupes G_{Q_3} et G_{R_1}. En effet, posons:

$$(2)\qquad f_2 . f_3 = \Phi . f_1 + \Psi . F\,,$$

en entendant par F la fonction $\overset{m\ n}{F(x, y)}$, formant le premier membre de l'équation, qui définit l'image algébrique; en remplaçant ici le paire (x, y) par un point quelconque de l'image algébrique considéré, on réduira le second membre de l'équation (2) à son premier terme $\Phi . f_1$, qui s'annule avec son second facteur pour chaqu'un des zéros de l'un des groupes G_{Q_1} et G_{R_1}, pour lesquels s'annulent respectivement les facteurs f_2 et f_3 de son premier membre; mais celui-ci s'annule aussi pour les zéros des groupes G_{R_2} et G_{Q_3}, pour lesquels s'annulent respectivement f_2 et f_3; comme f_1, ne s'annule pas en ces points, c'est Φ qui doit s'annuler en ces points. Mais Φ doit encore remplir aussi tous les conditions d'adjonction; car (en ne considérant que les points de l'image algébrique), aux environs de chaque point singulier l'ordre infinitésimal du produit $f_2.f_3$ est double de celui de f_1, toutes les trois fonctions f_1, f_2, f_3 étant adjointes. Donc Φ ne sera pas autre chose que la fonction adjointe $f_4(\overset{\mu_4}{x}, \overset{\nu_4}{y})$, dont les exposants μ_4 et ν_4 sont déterminés par les équations:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 + \mu_3 &= \mu_4 + \mu_1 ; \\ \nu_2 + \nu_3 &= \nu_4 + \nu_1 , \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

que donne la comparaison des dégrés de x, respectivement de y des deux membres de l'équation (2). D'après (17) § 50 on doit encore avoir:

$$m\nu_4 + n\mu_4 - 2A = Q_3 + R_2 ; \tag{4}$$

mais cette équation est, en vertu de (3), une conséquence des équations analogues pour les fonctions f_1, f_2, f_3, savoir:

$$\left.\begin{aligned} m\nu_1 + n\mu_1 - 2A &= Q_1 + R_1 ; \\ m\nu_2 + n\mu_2 - 2A &= Q_1 + R_2 ; \\ m\nu_3 + n\mu_3 - 2A &= Q_3 + R_1 ; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

en effet, en retranchant la première de la somme des deux autres, de ces équations, on aura justement l'équation (4), car des équations (3) on tire:

$$\left.\begin{aligned} \mu_4 &= \mu_2 + \mu_3 - \mu_1 ; \\ \nu_4 &= \nu_2 + \nu_3 - \nu_1 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Il suit de là la proposition que nous avions en vue: „Si deux groupes G_{R_1} et G_{R_2} sont corrésiduaux par rapport au groupe G_{Q_1}, ils le seront par rapport à tout autre groupe G_{Q_3}, qui est résidual au groupe G_{Q_1} par rapport à l'un d'eux G_{R_1}".

On apperçoit par cette proposition que la conception des groupes corrésiduaux est indépendante du groupe particulier, pris pour le reste commun de ces groupes.

2. Il suit des formules des §§ 49 et 50, que dans le cas, où parmi les équations d'adjonction il y aurait un certain *nombre s*, qui seraient les conséquences des autres, on aurait entre le nombre $\overline{N}_k^{(\mu,\nu)}$ des rapports des coéfficients indéterminés de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ à l'un d'eux et le nombre $N_z^{(\mu,\nu)}$ de ses zéros variables cette inégalité:

(1) $$\bar{N}_k^{(\mu,\nu)} \geqslant N_z^{(\mu,\nu)} - p,$$

lorsque $\mu > m-2$, $\nu > n-2$, et pour la fonction adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$, pour laquelle $\mu = m-2$, $\nu = n-2$, cette autre:

(2) $$\bar{N}_k^{(m-2,\, n-2)} \geqslant N_z^{(m-2,\, n-2)} - p + 1.$$

Comme on a par le § 50:

(3) $$N_z^{(m-2,\, n-2)} = 2p - 2,$$

la dernière inégalité pourra être représentée ainsi:

(4) $$N_k^{(m-2,\, n-2)} \geqslant p - 1.$$

Partageons les $N_z^{(\mu,\nu)}$ zéros variables de la fonction adjointe $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ en deux groupes de Q et de R zéros, de sorte qu'on aura:

(5) $$Q + R = N_z^{(\mu,\nu)};$$

en retranchant cette égalité de l'inégalité (1) et en transposant ci-après Q dans l'autre membre, nous aurons l'inégalité:

(6) $$\bar{N}_k^{(\mu,\nu)} - R \geqslant Q - p.$$

Si les R relations, qu'on aura en remplaçant (x, y) dans la fonction $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y})$ par ses zéros du groupe G_R ne seront pas toutes indépendantes, le nombre q des coéfficients qui restent après cela indéterminés, sera plus grand, que $\bar{N}_z^{(\mu,\nu)} - R$; on aura:

(7) $$q > \bar{N}_k^{(\mu,\nu)} - R;$$

parconséquent on aura à fortiori en vertu de (6):

(8) $$q > Q - p.$$

De la même manière, en partageant en deux groupes G_Q et G_R, les zéros variables de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$, nous arriverons pour cette fonction adjointe, en vertu de (2), à l'inégalité:

(9) $$q \geqslant Q - p + 1,$$

q désignant le nombre de ses coéfficients, qui restent indéterminés.

3. Nous démontrerons maintenant le

Théorème inverse, au dernier résultat. „L'ensemble des points analytiques, formant l'un des groupes de la famille *) (eine Schaar) G_Q^q, lorsque

*) Nous employons ce mot aulieu de „série linéaire" pour abréger.

le nombre Q des points d'un groupe et le nombre q des paramètres indéterminés satisfont à l'inégalité (9) § 2, pourra toujours appartenir aux zéros variables d'une fonction adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ de première espèce (ou, en langage géométrique, on pourra toujours mener une courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ par les points de chacun des groupes de la famille G_Q^q, lorsque l'inégalité (9) § 2 a lieu)".

Le théorème a évidement lieu, lorsqu'on a $q = 0$ et $Q < p-1$, l'inégalité (9) § 2 étant satisfaite par ces valeurs de q et de Q, car le nombre des coéfficients indéterminés n'étant pas d'après (4) § 2 inférieur à $p-1$, on pourra toujours les déterminer dans ce cas de manière, que les Q points du groupe soient les zéros de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$; supposons donc que le théorème soit juste pour les groupes de la famille $G_{(Q-1)}^{(q-1)}$, et démontrons qu'elle sera alors juste aussi pour les groupes de la famille G_Q^q dans le cas de l'inégalité (9) § 2.

En passant de la famille des groupes G_{Q-1}^{q-1} à la famille des groupes G_Q^q nous ajoutons un point au groupe et un paramètre seulement, tandis que en passant de la fonction adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ à la fonction adjointe $f(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ on augmente le nombre des coéfficients indéterminés de $m+n-1$ unités; si donc par le groupe G_{Q-1} on peut mener une courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ *), on pourra par le groupe G_Q mener une courbe adjointe $f(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = 0$. Prenons pour cela l'un des groupes de la famille G_Q^q, menons une droite par un point variable (α, y_α) de ce groupe, et par les autres $Q-1$ points du même groupe faisons passer la courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, c'est ce qui est possible d'après la suposition faite de la justesse du théorème dans le cas de G_{Q-1}^{q-1}, l'inégalité (9) § 2 étant satisfaite par des nombres $q-1$ et $Q-1$, lorsqu' elle l'est par les nombres q et Q. L'ensemble de la droite par le point (α, y_α) et de la courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ formera une courbe adjointe (réductible) $\bar{f}(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = 0$, et le reste des Q points, lesquels nous avons pris, sera formé par les $m+n-1$ autres que (α, y_α) points d'intersection de la droite menée par (α, y_α) avec la courbe fondamentale, et des $2p-2-(Q-1)$ autres points (variables) d'intersection de

*) En adoptant, pour abréger, le langage géométrique des Mrs. Brill et Noether.

la courbe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$ avec la même courbe fondamentale, qui *formeront ensemble le reste aussi pour toutes les autres groupes de la famille* G_Q^q, d'après le théorème des restes [§ 1]. Les courbes $f(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y}) = 0$ de degré $m+n-2$, découpant ces groupes de Q points, étant rencontré en $m+n-1$ points par notre droite, menée par le point (α, y_α), se réduiront à l'ensemble de cette droite et d'une courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$; les Q points de chaque groupe de la famille considérée seront donc découpés sur la courbe fondamentale par ces dernières courbes adjointes. Le théorème inverse est donc démontré.

Mais alors on doit avoir

$$Q \leqslant 2p - 2, \tag{10}$$

car le nombre des zéros variables de la fonction $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ est égal à $2p-2$. Il en suit, que les familles des groupes de Q points, G_Q^q, pour lesquelles ait lieu l'inégalité (9) § 2, n'existent pas dans le cas, où l'on aurait $Q > 2p-2$.

4. On en tire cette conclusion importante, que les familles des groupes G_{2p-2}^q, satisfaisant à l'inégalité (9) § 2, pour lesquel d'après (9) § 2 on aurait

$$q > p - 1, \tag{11}$$

ne sauraient pas être de dimension plus grande que $p-1$. En effet, si l'on avait $q=p$, on pourrait, en prenant un point quelconque (β, y_β) de la courbe fondamentale, former la famille

$$G_{2p-1}^p \tag{12}$$

des groupes de $2p-1$ points, contenant chacun le point (β, y_β), pour laquelle l'inégalité (9) § 2 aurait lieu, car on a

$$p = 2p - 1 - p + 1 = p; \tag{13}$$

mais alors on pourrait, d'après le théorème inverse, faire passer par les $2p-1$ points de chacun des groupes de la nouvelle famille une courbe adjointe $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$, c'est ce qui est impossible, comme on l'a vu tout à l'heure [(10)].

La dimension q de la famille des groupes G_{2p-2}, ayant $p-1$ pour sa limite inférieure et ne pouvant le dépasser même d'une unité, doit être égal à

$$p - 1. \tag{14}$$

C. q. f. d.

Errata.

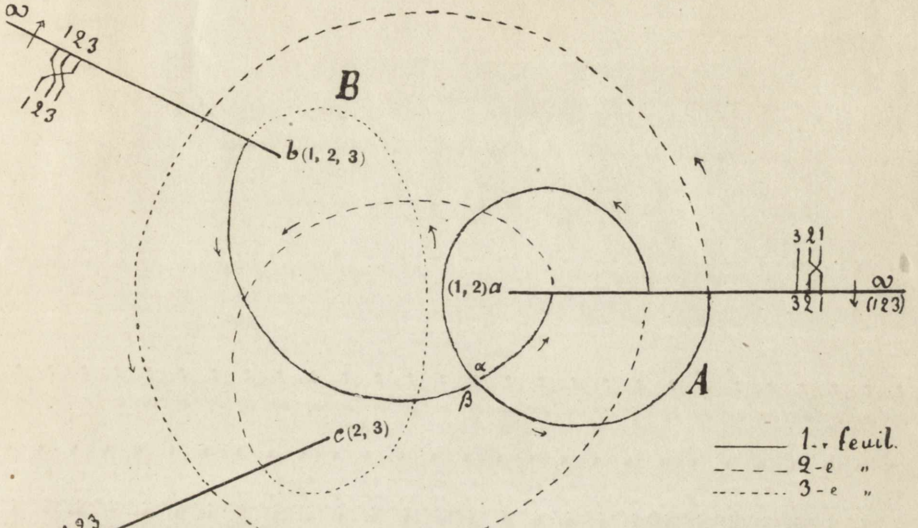
Page.	*Ligne.*	*Aulieu de:*	*Lisez:*
13	6	ramification	ramification,
„	22	le feuillets	les feuillets
„	27	transformé	transformées
16	30	on préfére	on préfère
21	33	eu un	en un
23	7	$-2n.$	$-2n,$
26	2	deviénnent	deviennent
„	9	$\overset{m}{\mathrm{F}}(\overset{n}{x},y)$	$\overset{m}{F}(\overset{n}{x},y)$
28	24	a seconde	la seconde
32	24	,	;
41	14	$\alpha' - \alpha'_{i'+1}$	$\alpha'_{i'} - \alpha'_{i'+1}$
„	„	$-\beta'_i$	$-\beta'_{i'}$
44	17	satisfaisant	satisfaisantes
52	14	$v\xi^{(r)p'p''p''' \cdots p^{(r)}}$	$v\xi^{(r)qp'p''p''' \cdots p^{(r)}}$
55	2	$=\xi^{(\mu)};$	$=\xi^{\mu};$
58	6	$-\alpha^{(g-1)}_{i(g-1)1+}$	$-\alpha^{(g-1)}_{i(g-1)+1}$
63	16	on	ou
64	10, 11	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
„	27—28	de y_i, qui, s'exprimant rationnellement en fonction des coéfficients de l'équation (1), seront	de y_i et de z_i, lesquelles, revenant en même temps que x à leurs valeurs initiales seront
66	35	d'un points	d'un point
67	4	quant	quand
74	10	$=f\left(\frac{\overset{\mu}{1}}{\bar{x}}, \frac{\overset{\nu}{1}}{\bar{y}}\right)$	$=\bar{x}^{\mu}\,\bar{y}^{\nu} f\left(\frac{\overset{\mu}{1}}{\bar{x}}, \frac{\overset{\nu}{1}}{\bar{y}}\right)$
75	18	$\sum B_{\gamma'\delta'}\mu^{\gamma'}\xi^{\delta'}$	$\sum B'_{\gamma'\delta'}\eta^{\gamma'}\xi^{\delta'}$
76	8	$B_{\gamma\delta}$	$\boldsymbol{B}_{\gamma\delta}$
80	26	à aux	à eux

Page.	*Ligne.*	*Aulieu de:*	*Lisez:*
83	14	$B'_{\gamma''\delta''}=0$	$B''_{\gamma''\delta''}=0$
84	20	$(ax+bx+c)$	$(ax+by+c)$
88	7	$f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y})$	$f(\overset{\mu}{x},\overset{\nu}{y_j})$
91	27	y	y
95	27	$Q(x)=A\prod\limits_{i=1}^{\rho}(x-a_{2i})$	$Q(x)=A\prod\limits_{i=0}^{\rho}(x-a_{2i})$
103	8	$\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{y})$	$\psi(\overset{m-1}{x},\overset{n-1}{\bar{y}})$
"	"	c	C
105	19	(21)	(20)
"	20	(14)	(19)
112	4	$=\frac{D^{(k)}}{D}$,	$=-\frac{D^{(k)}}{D}$,
114	14	$P_{\xi\eta}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=-$	(8) $P_{\eta\xi}(x,y;\overset{p}{\underset{1}{a_i,b_i}})=-$
115	2	$\overset{p}{\underset{1}{a_j,b_j}})\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$	$\overset{p}{\underset{2}{a_j,b_j}})\varphi_1(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})$
"	18	55	57
"	26	59	58
121	17	$\sqrt{R'(a_i)+\frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2+\cdots}$	$-\sqrt{R'(a_i)+\frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2+\cdots}$
"	20	$\frac{\sqrt{R'(a_i)+\frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2+\cdots}}{t-\tau}$	$-\frac{\sqrt{R'(a_i)+\frac{1}{1.2}R''(a_i)\tau^2+\cdots}}{t-\tau}$
"	27	$=\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{t^2}$	$=-\frac{\sqrt{R'(a_i)}}{t^2}$
122	8	$-F\left(\overset{m}{\tau^{-\mu'}},-\frac{\overset{n}{at^{-\mu'}}+c}{b}\right)$	$-F\left(\overset{m}{\tau^{-\mu'}},-\frac{\overset{n}{a\tau^{-\mu'}}+c}{b}\right)$
"	15	$\lim\left(\frac{\psi(x,y)}{ax+by+c}\right)_{t=\tau}$	$\lim\left((t-\tau)\frac{\psi(x,y)}{ax+by+c}\right)_{t=\tau}$
123	20	$(R\tau^{-2})$;	$R(\tau^{-2})$;
124	28	$\lim\left(\frac{c}{x-\xi}\right)$	$\lim\left(\frac{C}{x-\xi}\right)$
"	29	$y^2-R(\overset{2\rho+1}{x})$	$Y^2-R(\overset{2\rho+1}{x})$
126	16	46.	63.
130	28	$B_k\bar{E}'_k$	$\bar{B}_k E_k$
134	2	$a^{(l)}_{p-q}$	$\alpha^{(l)}_{p-q}$
137	11	b_j	b_i

Page.	*Ligne.*	*Aulieu de:*	*Lisez:*
139	20	fandamentale	fondamentale
140	3	φ_i	φ_j
143	25	restant	restants
150	29	(18)	(8)
152	3	$\alpha_{i}\overset{p}{\underset{1}{,}}\beta_i)+\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)};$	$\alpha_{i}\overset{p}{\underset{1}{,}}\beta_i)\int_{x_0}^{x}\varphi_j(\overset{m-2}{x},\overset{n-2}{y})\frac{dx}{F'_y(x,y)};$
158	7	d'après (8):	l'intégrale
„	13	y	y
„	17	$\underset{x_0}{\overset{x}{\mathrm{I}}}$	$\underset{x_0}{\overset{x}{\mathrm{I}}}$
„	18	multiplié	multiplie
„	19	y	y
„	22	$\sum_{k=1}^{\nu}$	$\sum_{k=1}^{r}$
159	1	II	Π
„	18	$\mathfrak{G}_h=0.$	$\mathfrak{G}_k=0.$
„	23	n_{g_i-i}	n_{g_i-1}
160	9	réduria	réduira
164	24	$2q'\pi i$	$2q'\pi i$
170	12	$\sum_{h=1}^{p}\}$	$\sum_{h=1}^{p}\{$
174	19	$\sum_{j=1}^{p}c_{k_j}$	$\sum_{j=1}^{p}c_{kj}$
175	14	$\int_{(T)}$	$\int_{(T')}$
187	11	des	de
188	9	en (7)	en (6)
204	14	$F'_y(x',y')$	$F'_y(x_i,y_i)$
205	22	des	les
208	21	Qnant	Quant
212	10	de point	des points
214	22	donné pour le premier fois	donnée pour la première fois
218	21	a'_i	a_i
224	15	$\frac{\chi(x'_0,y'_0)}{\psi(x'_0,y'_0)}-z$	$\frac{\psi(x'_0,y'_0)}{\chi(x'_0,y'_0)}-z$

Page.	*Ligne.*	*Aulieu de:*	*Lisez:*
226	25	$Z_i = \frac{\psi(x_i, y_i)}{\chi(x_i, y_i)}$	$Z_i = \frac{\Psi(x_i, y_i)}{X(x_i, y_i)}$
242	16	§ 117	§ 119
243	23	$\sum_{k=1}^{p}(\nu_g m_g - \mu_g n_g)$	$\sum_{g=1}^{p}(\nu_g m_g - \mu_g n_g)$
246	13	,	;
247	20	$-D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x''_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{;}} y''_{\xi i});$	$-D_\xi P_{\xi\eta}(a_k, b_k; x'_{\xi i}, \overset{p}{\underset{1}{;}} y'_{\xi i});$
„	24	on à ici	on a ici
254	28	$c_{\xi i}$,	$c'_{\xi i}$,
255	7	$2(\bar{u}'_h - \bar{u}_h) = 0,$	$2(\bar{u}'_h - u_h) \equiv 0,$
270	4	$v^{(h')}$	$v_j^{(h')}$

I.



$w = 1 + 1 + 2 + 2 = 6;$
$n = 3;$
$p = \frac{1}{2} w - n + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$

II.