DIE

VIER SPECIES

VON

DR. OTTO HESSE,

ORDENTL. PROF. AN DEM K. POLYTECHNIKUM ZU MÜNCHEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

Dickstein

18 24/V 72

Die Einheit und die positiven Zahlen.

Die vier Species gehen von dem Begriffe der Einheit aus. Dieser Begriff ist zugleich der Grundpfeiler, auf welchem die ganze Analysis aufgebaut ist.

Die Einheit ist ein Gebilde des durch Erfahrungen schon gereifteren menschlichen Verstandes. Denn das Kind auf der Mutter Arm wird zwar unterscheiden können, ob der ihm zugedachte erste Christbaum viel oder wenig Lichtsterne trägt; eine Ahnung von dem, was wir Einheit nennen, wird deshalb schon das Kind haben, einen Begriff davon hat es sicherlich nicht.

Der Begriff der Einheit entwickelt sich erst mit zunehmender Erfahrung. Derselbe lässt sich deshalb auch nicht in bestimmte Grenzen einschliessen, vielmehr bleibt er weiter bildungsfähig, so weit man auch in der Erkenntniss gekommen sein mag.

Wie wenig auch der Begriff der Einheit entwickelt sei, so ist er doch für den menschlichen Geist ein ganz nothwendiger Begriff, um empfangene Eindrücke zu ordnen und einigermassen vorbereitet zu sein für die Aufnahme neuer Eindrücke.

Den Begriff der Einheit erklären zu wollen, scheint schon deshalb ein nutzloses Unternehmen, weil dieser Begriff sich nicht begrenzen lässt. Gäbe man ihm auch bestimmte Grenzen, so bedürfte man zu seiner Erklärung doch einfacherer Begriffe, die sich aber nicht auffinden lassen, weil der Begriff der Einheit schon zu den einfachsten Begriffen gehört.

Wenn nun der Begriff der Einheit sich in dem Geiste des Menschen fortwährend erweitert, etwa wie ein Krystall in der Flüssigkeit, der er seine Entstehung verdankt, so erhebt sich wohl die Frage: Wie lässt sich auf so unsicherer Grundlage weiter bauen? Die Antwort mag uns der Baumeister geben, der sich wohl bewusst ist, dass es in der ganzen Natur keinen festen Punkt giebt, nicht ein Mal relativ feste Punkte, welche er als Fundament seines Baues brauchen könnte. — Das Bauwerk zerfällt daher mit der Zeit, das Muster erbt sich fort.

Mit dem Muster unserer Vorfahren in der Hand will ich es versuchen, auf Grundlage des unvollkommenen und weiter bildungsfähigen Begriffes der Einheit, eine Construktion der vier Species zu entwickeln, wie sie sich unsere Vorfahren bis zur Zeit ungefähr gedacht haben.

Wenn man sich eine Vorstellung machen kann von der Einheit, die in der Algebra mit dem Zeichen 1 ausgedrückt wird, abgesehen von den Eindrücken, die diese Vorstellung veranlasst haben, so kann man sich auch eine zweite gleichberechtigte Einheit denken und weitere derselben Art. Die Vereinigung der zweiten Einheit mit der ersten zu einem Ganzen giebt die Zahl 2. Verbindet man diese Zahl 2 wieder mit der Einheit, so entsteht die Zahl 3 als die Vereinigung dreier Einheiten zu einem Ganzen.

Auf diese Weise entwickeln sich in dem menschlichen Geiste die Begriffe der Zahlen, deren Zeichen sind: 1, 2, 3.

Es wird sich aber im Verlaufe unserer Entwickelungen sehr bald eine Einheit anderer Art aufdrängen, die negative Einheit und in Folge davon eine Reihe neuer Zahlen, die negativen Zahlen, welche durch ihre Bezeichnung von den in Rede stehenden positiven Zahlen unterschieden werden müssen.

In dieser Voraussicht soll fortan die Einheit, von der wir ausgegangen sind, die positive Einheit genannt und mit dem Zeichen $+1$ bezeichnet werden. Die sich aus dieser positiven Einheit entwickelnden positiven Zahlen, werden wir ausdrücken durch die Zeichen:

1) $\ldots\ldots +1, +2, +3, +4 \ldots$

Wenn wir nun an unserem Geiste die Reihe der positiven Zahlen vorüberführen, so unterscheiden wir kleine Zahlen und grosse Zahlen. Von einer kleinen Zahl haben wir eine klare Vorstellung, weil wir uns dieselbe schon öfters gedacht und jedes Mal die vorgeschriebenen Operationen mit der Einheit vergegenwärtigt haben, welche auf die Zahl führen. Eine bestimmte grosse Zahl haben wir uns wohl niemals gedacht. Darum haben wir auch keine klare Vorstellung von einer bestimmten grossen Zahl. Um uns eine ungefähre Vorstellung von ihr zu machen, müssen wir zu anderen Hülfsmitteln greifen. Wir berechnen zum Beispiel die Zeit, die erforderlich ist, um bis zu der gedachten Zahl zu zählen; wir berechnen die Länge der Rolle von Geldstücken, welche neben einander gelegt die grosse Zahl repräsentiren soll. Eine klare Vorstellung von der grossen Zahl haben wir darum doch nicht, weil wir sie mit den gebotenen Hülfsmitteln nicht von den benachbarten Zahlen unterscheiden können.

Wie gross aber auch die Zahl sei, von der wir uns eine klare, oder auch unklare, Vorstellung gemacht haben; durch Zulegung einer Einheit zu derselben, können wir uns noch eine grössere Zahl denken. Diese Bemerkung führt auf den Satz:

2) Die Anzahl der positiven Zahlen ist unendlich gross.

Wie nun eine Zahl entsteht durch einmalige Zulegung der Einheit zu der nächst niederen Zahl, so entsteht auch eine grössere Zahl aus einer gegebenen Zahl, wenn man ihr die Einheiten zulegt, aus welchen eine zweite gegebene Zahl zusammengesetzt ist. Die grössere Zahl zu finden ist ein Problem, welches man nennt:

Die Addition.

Greifen wir aus der Reihe der positiven in 1) aufgeführten Zahlen irgend zwei heraus, die wir als gegebene Zahlen bezeichnen wollen mit den Zeichen $+a$ und $+b$, so verlangt das Problem der Addition diejenige Zahl $+c$ zu finden, welche aus gerade soviel Einheiten zusammengesetzt ist, als die gegebenen Zahlen zusammengenommen.

Die gegebenen Zahlen heissen Summanden, die gesuchte Zahl die Summe.

Auf die bekannte Lösung des Problemes, welche darin besteht, dass man zu dem einen Summanden soviel Einheiten zuzählt, als der andere Summand enthält, brauchen wir hier nicht näher einzugehen. Aber Eines wollen wir doch gleich constatiren, um sogleich und später davon Gebrauch zu machen, dass die gesuchte Summe immer grösser ist als einer der Summanden, und dass die gesuchte Summe immer unter der in 1) aufgeführten Zahlenreihe wieder zu finden ist. Es versteht sich dieses nach dem Vorhergehenden ganz von selbst.

An wievielen Beispielen wir auch das Problem der Addition ausführen mögen; die Resultate lassen niemals neue noch unbekannte Zahlen entdecken. Es bedarf dazu eines neuen schöpferischen Gedankens, der Umkehrung des Problemes; eines Gedankens, der erst seit Abel und Jacobi, aus der Geometrie hergenommen, auch in der Algebra und der Analysis zur vollen Würdigung gekommen ist. Wir wollen dieses Prinzip der Umkehrung entwickeln, nachdem wir dem vorliegenden Probleme der Addition die einfachste Form werden gegeben haben.

Man könnte alle mit gegebenen Grössen vorzunehmende Operationen in Worten ausdrücken. Dieses Verfahren würde aber mit fortschreitender Erkenntniss der mathematischen Grössen bald so langwierig, dass eine Uebersicht kaum möglich scheint. Es bedient sich deshalb die Mathematik gewisser Zeichen zur Abkürzung, um durch dieselben ganze Ideengänge oder vorgeschriebene Operationen mit gewissen Grössen auszudrücken. Dahin gehört das Gleichheits-Zeichen $=$, welches zwischen zwei Grössen gesetzt nichts weiter ausdrücken soll, als dass die beiden Grössen ihrem Werthe nach gleich seien, so verschieden sie auch in der Form sein mögen. Der Ausdruck selbst heisst Gleichung.

Dieses vorausgesetzt, lässt sich das Problem der Addition in folgender Gleichung niederlegen:

3) . . . . $+ a + b = + c.$

Die unbekannte Zahl $+ c$ bestimmen, wenn die Zahlen $+ a$ und $+ b$ gegeben sind, heisst die Gleichung auflösen.

Nach dem Vorhergehenden können wir die Gleichung 3) in allen Fällen auflösen, wenn die gegebenen Zahlen aus der Reihe 1) hergenommen sind; die Auflösung wird in derselben Reihe 1) der Zahlen wieder gefunden.

Ein Problem, welches verlangt aus gewissen gegebenen Grössen andere durch sie bestimmte Grössen aufzusuchen, kehrt man um, wenn man nicht alle gegebenen Grössen als gegebene, aber gewisse gesuchte Grössen als gegebene betrachtet und verlangt die nunmehr unbekannten, in dem Problem aber gegebenen, Grössen zu suchen.

Lehrreiche Beispiele der Umkehrung, mit welchen die ältere Schwester, die Geometrie, der Algebra vorangegangen ist, sollen nicht bloss dazu dienen, den vorangegangenen Satz zu erläutern, sondern auch die Gesichtspunkte zu kennzeichnen, welchen die vier Species und die Algebra nachgegangen sind.

Es ist ein bekanntes Fundamental-Problem der Geometrie „Das Dreieck zu construiren, von welchem zwei Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gegeben sind.“ Die Auflösung des Problems ist eindeutig; das will sagen, dass es nur ein einziges Dreieck giebt, welches den Bedingungen des Problemes genügt. Will man also die dritte Seite des Dreieckes haben, so hat dieselbe eine bestimmte Länge, oder will man einen der nicht gegebenen Winkel des Dreiecks construiren, so hat derselbe eine bestimmte Grösse. Von welcher Grösse die drei Daten des Problems auch seien, das Problem kann immer gelöset werden; denn die Lösung desselben ist aufzufinden unter den Dreiecken, wenn man sich alle möglichen Dreiecke construirt denkt. In ähnlicher Weise kann das Problem der Addition auch immer eindeutig gelöset werden, welches auch die Summanden seien, die aus der Zahlenreihe 1) gewählt sind, und die Auflösung ist in derselben Zahlenreihe wieder zu finden.

Das angegebene Fundamental-Problem der Geometrie kehrt man um, wenn man festsetzt, „dass zur Construktion des Dreieckes nicht bloss zwei Seiten, sondern alle drei Seiten gegeben seien.“ Die Auflösung dieses umgekehrten Problemes ist wieder eindeutig; so ist auch die Auflösung des umgekehrten Problemes der Addition, des Problemes der Subtraktion, eindeutig. Es ist aber in dem geometrischen Probleme der Umstand in Erwägung zu ziehen, dass von den gegebenen drei Seiten je zwei grösser seien als die dritte. In diesem Falle ist das verlangte Dreieck unter den möglichen Dreiecken wiederzufinden. In ähnlicher Weise hat man die Daten des Problems der Subtraktion zu beschränken, wenn die Auflösung auf die in 1) aufgeführten bekannten Zahlen zurückführen soll.

Wenn von den gegebenen drei Seiten des Dreiecks eine grösser ist als die beiden andern zusammengenommen, so ist das Dreieck unmöglich, weil in jedem sichtbaren Dreiecke die Summe zweier Seiten grösser ist, als die dritte Seite. In gleicher Weise ist auch das Problem der Subtraktion unter Umständen unmöglich, wenn man die Auflösung nur unter den bekannten Zahlen 1) suchen will. Die Auflösung wird aber immer möglich, wenn man noch eine, von der Reihe der Zahlen 1) verschiedene, Zahlenreihe, die negativen Zahlen, erdenkt, von welchen eine jede genau definirt ist.

Die Erfindung der negativen Zahlen ist in den vier Species ein gewaltiger Fortschritt gewesen. Er hat auch auf die Geometrie seinen Einfluss geübt, denn die analytische Geometrie macht heut zu Tage kaum einen Unterschied zwischen Dreiecken, von welchen der Satz gilt, dass die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte Seite, und den Dreiecken, für welche der Satz nicht gilt. Dreiecke der letzten Art sind allerdings nicht sichtbar, sie haben aber Eigenschaften, die durch wirkliche Figuren zur Anschauung gebracht werden können.

Das aufgeführte Fundamental-Problem der Geometrie lässt sich verschiedentlich umkehren. Von diesen Umkehrungen wollen wir jedoch nur noch zweier Erwähnung thun, für welche sich das Analogon in den vier Species leicht auffinden lässt.

Wenn zur Construktion eines Dreiecks zwei Seiten und der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so hat man bekanntlich nicht eine, sondern zwei Auflösungen des Problemes, oder, wenn man die unsichtbaren Dreiecke ausschliesst, unter Umständen gar keine Auflösung. Das Analogon dafür ist die Umkehrung der Multiplication in der Voraussetzung, dass die beiden Factoren des Produktes gleich seien. Denn dieses umgekehrte Problem der Multiplication lässt, wenn man nur positive und negative Grössen kennt, entweder zwei Auflösungen zu oder gar keine.

Man kann sich endlich das Problem stellen „ein Dreieck zu construiren, von welchem die drei Winkel gegeben sind.“ Auf der Kugeloberfläche giebt es allerdings nur eine Auflösung des Problems. Wenn man aber festsetzt, dass die Summe der Winkel zwei Rechte betrage, so hat man unendlich viele Auflösungen, nämlich alle ähnlichen Dreiecke in der Ebene. Die Umkehrung des Problemes der Multiplication mit mehreren gleichen Factoren, zutreffender noch die Potenz mit gebrochenen Exponenten, lässt die Analogie zwischen Geometrie und Algebra deutlich erkennen.

Nach diesen Auseinandersetzungen behandeln wir nun das umgekehrte Problem der Addition:

Die Subtraktion und die negativen Zahlen.

Das Problem der Addition lässt sich nicht, wie das angegebene Fundamental-Problem der Geometrie, mehrfach umkehren, weil die gegebenen Summanden mit einander vertauscht werden können, ohne die Summe zu ändern. Wenn man daher in der Gleichung 3), welche das Problem der Addition in der einfachsten Weise ausdrückt, die Zahlen $+ a$ und $+ c$ als gegebene betrachtet, die Zahl $+ b$ aber sucht, so ist dieses das Problem der Subtraktion. Die gegebene Zahl $+ c$ heisst Minuendus, die gegebene Zahl $+ a$ Subtrahendus und die gesuchte Zahl $+ b$ die Differenz.

Erinnert man sich des vorhin hervorgehobenen Satzes, dass die Summe immer grösser ist, als einer der Summanden, und stellt sich alle möglichen Aufgaben der Subtraktion unter der Annahme, dass $+ c$ grösser sei als $+ a$, so werden die Auflösungen immer wieder gefunden in der Reihe 1) der bekannten positiven Zahlen. Man braucht, wie aus der Gleichung 3) ersichtlich ist, von der grösseren Zahl $+ c$ nur soviel Einheiten abzunehmen, als die kleinere Zahl $+ a$ enthält, um die gesuchte Zahl $+ b$ zu erhalten. Anders ist es, wenn man annimmt, dass der Minuendus $+ c$ gleich dem Subtrahendus $+a$ sei, und die Differenz $+b$ gefunden werden soll, wie in der Gleichung:

4) . . . . $+1+b=+1$.

Die gesuchte Zahl $+b$ ist offenbar in der bekannten Zahlenreihe 1) nicht zu finden, obwohl sie genau definirt ist durch die Gleichung. Diese Zahl heisst Null und wird mit dem Zeichen 0 bezeichnet. Man kann sie so definiren:

5) Die Null ist diejenige Zahl, welche zur positiven Einheit addirt, dieselbe ungeändert lässt.

Die Null ist nicht etwa das philosophische Nichts, mit dem sich doch nicht operiren lässt, sondern sie ist, wie die anderen bekannten Zahlen, eine streng definirte Zahl. Sie hat Eigenschaften, von welchen wir eine sogleich hervorheben wollen.

Addirt man nämlich die Gleichung $+1=+1$ zu der Gleichung 4) ein Mal oder mehrere Male, in Berücksichtigung des Fundamental-Satzes, dass Gleiches zu Gleichem addirt wieder Gleiches giebt, so erhält man $+2+0=+2$, $+3+0=+3$ und endlich:

6) . . . . $+a+0=+a$,

welches auch die aus der Reihe 1) genommene Zahl $+a$ sei. Die Gleichung 6) drückt sich in Worten so aus:

7) Die Null lässt jede positive Zahl ungeändert, wenn sie zu derselben addirt wird.

Auch die Null selber bleibt ungeändert, wenn zu ihr eine oder mehrere Nullen addirt werden. Denn addirt man zu einer gegebenen Zahl die Null mehrere Male, so bleibt die gegebene Zahl ungeändert. Das will sagen, dass auch die Summe mehrerer Nullen die Zahl ungeändert lasse, oder dass die Summe mehrerer Nullen wieder gleich Null sei.

Schon der Satz 7) beweiset, dass die Null eine ganz besondere Stellung in den vier Species beansprucht, denn von keiner anderen Zahl lässt sich Aehnliches sagen. Sie ist unter den algebraischen Grössen der Mephistofeles, welcher zwar den meisten Gesetzen der vier Species unterworfen ist, andere Gesetze aber missachtet. Will man demnach Irrthümer vermeiden, wie sie alltäglich vorkommen, indem man mit der Null gerade so operirt, wie mit anderen algebraischen Grössen, so muss man der Zahl Null eine ganz besondere Aufmerksamkeit zuwenden. Man kennt die Gesetze der vier Species, welchen die Null nicht unterworfen ist, und doch achtet man darauf nicht immer. Es erklärt sich dieses daraus, dass man oft mit algebraischen Ausdrücken zu operiren hat, die man selbst nicht darstellen kann, von welchen man nur das Bildungsgesetz kennt. Da kann es sich denn leicht ereignen, dass man in dem Glauben handele, die complicirten Ausdrücke seien von der Null verschieden, während sie ihr gleich sind. Es ist in der That nicht so leicht die Fehler zu vermeiden, zu welchen die Null verführt.

Es wird sich empfehlen die eben definirte Null, in so weit wir sie erkannt haben, sogleich in die Rechnung einzuführen, indem wir dieselbe als Minuendus wählen, in dem Beispiele:

8) . . . . $+1+b=0.$

Die Auflösung dieses Subtraktions-Problemes ist unter den bekannten Zahlen, selbst die Null mit eingeschlossen, nicht wieder zu finden. Die gesuchte Zahl $+b$ ist eine neue Zahl. Man nennt sie die negative Einheit und bezeichnet sie mit dem Zeichen -1. Sie wird definirt durch folgenden Satz:

9) D i e   n e g a t i v e   E i n h e i t   i s t   d i e j e n i g e   Z a h l, w e l c h e   z u r   p o s i t i v e n   E i n h e i t   a d d i r t   d i e   Z a h l   N u l l   g i e b t.

Nachdem wir den Begriff der negativen Einheit -1 entwickelt haben, können wir uns auch zwei und mehrere Einheiten derselben Art vorstellen. Die Vereinigung zweier negativen Einheiten führt zur negativen Zahl -2, die Vereinigung dreier zur Zahl -3. Auf diese Weise entsteht die Reihe der negativen Zahlen:

10) . . . . $-1, -2, -3, -4, \ldots$

von welchen der dem Satze 2) analoge Satz gilt:

11) D i e   A n z a h l   d e r   n e g a t i v e n   Z a h l e n   i s t   u n e n d l i c h   g r o s s.

Um nun Eigenschaften der Zahlenreihen 1) und 10) zu entdecken, gehen wir von dem Satze 9) aus, der sich durch eine Gleichung so ausdrücken lässt:

$$+1 - 1 = 0.$$

Addiren wir diese Gleichung ein Mal oder mehrere Male zu ihr selber, so erhalten wir $+2-2=0$, $+3-3=0$ und allgemein:

12) . . . . $+a - a = 0.$

Diese Gleichung ist der kurze Ausdruck des Satzes:

13) Die Summe zweier gleich grossen Zahlen, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist, ist immer gleich Null.

Das Verhalten der Null zu den negativen Zahlen ergiebt sich aus der Gleichung 12). Addiren wir nämlich zu der positiven Zahl $+a$ die Null, so bleibt der linke Theil der Gleichung unverändert. Vereinigen wir aber diese Null mit der negativen Zahl $-a$, so kann sie auch diese Zahl nicht ändern ohne die Gültigkeit der Gleichung zu zerstören. Wir haben demnach den Satz:

14) Die Null lässt jede negative Zahl ungeändert, wenn sie zu derselben addirt wird.

Man macht sich ein geometrisches Bild der positiven und negativen Zahlen, wenn man auf einer unbegrenzten geraden Linie von einem beliebig auf derselben gewählten Null-Punkte eine, zwei und mehrere Längeneinheiten in der einen Richtung und in der entgegengesetzten aufträgt. Die Endpunkte der aufgetragenen Längeneinheiten sollen, wie die Figur zeigt, die Zahlen darstellen.

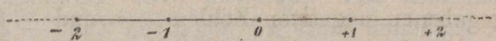

Fig. 1.

Man kann aber auch unter den Zahlen ebensowohl die Punkte als die Entfernungen dieser Punkte von dem Null-Puncte in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung verstehen. Wir werden hier die bezeichneten Punkte als Symbole der Zahlen nehmen und das angefangene Bild in dem Maasse vervollständigen, als sich die Erkenntniss der algebraischen Grössen in dem Folgenden erweitern wird. Eine andere Vorstellung der entgegengesetzten Zahlen ist Vermögen und Schulden. Da aber ein jedes Bild den Gegenstand nur von einer Seite auffasst, so kann man von der letzten Auffassung auch nicht sagen, dass sie die positiven und negativen Zahlen treffender wiedergebe. Denn das spätere Problem der Multiplication entgegengesetzter Zahlen führt auf Widersinniges, wenn man das Bild für den Gegenstand selbst nimmt.

Nachdem wir nun den Begriff auch der negativen Zahlen festgestellt haben, so drängt sich uns ein neues Problem auf:

Die Addition positiver und negativer Zahlen.

Wir können nach dem Vorhergehenden die Voraussetzung machen, dass die Gleichung 3), welche wir hier wiederholen:

$$3) \; \ldots\ldots \quad +a + b = +c,$$

in allen Fällen gelöset sei, erstens wenn die Zahlen $+a$ und $+b$ aus der Reihe 1) beliebig gewählt sind, zweitens, wenn die Zahlen $+a$ und $+c$ aus derselben Reihe genommen sind, jedoch unter der Voraussetzung, dass die Zahl $+c$ grösser sei als die Zahl $+a$. In dieser Voraussetzung addiren wir zu der genannten Gleichung die identische Gleichung $-c -a -b = -c -a -b$ und erhalten:

$$15) \; \ldots\ldots\ldots \quad -c = -a - b.$$

Diese Gleichung löset das Problem der Addition zweier beliebig gegebenen negativen Zahlen $-a$ und $-b$. Sie beweiset, dass die Summe zweier negativen Zahlen dem absoluten Werthe nach gleich ist der Summe zweier gleich grossen positiven Zahlen, und dass die Summe selbst eine negative Zahl ist.

Addirt man zu der Gleichung 3) die identische Gleichung $-a = -a$, so erhält man:

$$16) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad +b = +c - a.$$

Da wir nun bei Gelegenheit der Subtraktion die Zahl $+b$ als die Differenz der positiven Zahlen $+c$ und $+a$ erkannt haben, so beweiset diese Gleichung, dass die Summe einer grösseren positiven Zahl $+c$ und einer kleineren negativen Zahl $-a$ eine positive Zahl ist von der Grösse der Differenz der absoluten Zahlen.

Addirt man zu der Gleichung 15) die identische Gleichung $+a=+a$, so erhält man:

17) . . . . $+a-c=-b.$

Diese Gleichung beweiset, dass die Summe einer grösseren negativen Zahl $-c$ und einer kleineren positiven Zahl $+a$ eine negative Zahl ist ebenfalls von der Grösse der Differenz der absoluten Zahlen.

Hieraus ergiebt sich nun die allgemeine Regel für die Addition:

18) Die Summe zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist gleich der Summe ihrer Zahlenwerthe. Das Vorzeichen richtet sich nach den Vorzeichen der Summanden. Die Summe zweier Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen ist gleich der Differenz ihrer Zahlenwerthe. Das Vorzeichen derselben ist das der grösseren Zahl.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, dass die Lösung des behandelten Problems immer unter den nunmehr bekannten Zahlen zu finden ist. Es führt das Problem also nicht auf neue Grössen, ebenso wenig als das folgende,

Die Subtraktion positiver und negativer Zahlen.

Wir haben in dem Vorhergehenden das Problem der Subtraktion unter der Beschränkung gelöset, dass Subtrahendus und Minuendus positive Zahlen seien, und dass der erstere kleiner sei als der Minuendus. Diese Beschränkung soll jetzt fortfallen. In dieser Voraussetzung haben wir die unbekannte Zahl b zu suchen in folgenden vier Fällen:

19) . . . .
$$\begin{aligned}+a+b&=+c,\\ +a+b&=-c,\\ -a+b&=+c,\\ -a+b&=-c,\end{aligned}$$

Addiren wir zu diesem Zwecke entweder die identische

Gleichung $-a = -a$ oder $+a = +a$, so erhalten wir mit Weglassung des Vorzeichens der gesuchten Zahl b, welche erst zu bestimmen ist:

$$20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{aligned} b &= +c - a, \\ b &= -c - a, \\ b &= +c + a, \\ b &= -c + a, \end{aligned}$$

Hierdurch ist das Problem der Subtraktion zurückgeführt auf das zuvor behandelte Problem der Addition entgegengesetzter Zahlen, und es ergiebt sich aus dem Vergleich der Gleichungen 19) und ihrer Auflösungen 20) die Regel der Subtraktion:

21) Man erhält die Differenz zweier Zahlen, wenn man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und den so veränderten Subtrahendus zu dem Minuendus addirt.

Die Multiplication positiver und negativer Zahlen.

Das Addiren einer und derselben Zahl mehrmals zu ihr selber nennt man multipliciren und die Summe heisst Produkt. Die Produkte c, wenn die zu addirende Zahl b gegeben ist, kann man leicht berechnen in den Fällen:

$$+b = c, \quad +b + b = c, \quad +b + b + b = c, \ldots.$$

Zur Abkürzung ist man aber übereingekommen diese Summen, die wir fortan Produkte nennen, so zu bezeichnen:

$$1.b = c, \quad 2.b = c, \quad 3.b = c, \ldots$$

Die erste Zahl in dem Produkte heisst Multiplicator, die zweite Zahl Multiplicandus. Wir haben demnach folgende Definition:

22) Das Produkt ist die Summe von sovielen gleichen Multiplicanden, als der Multiplicator Einheiten hat.

Es setzt diese Definition des Produktes voraus, dass wenigstens der Multiplicator eine positive Zahl sei, denn die

Null und die negativen Zahlen haben wir nicht als den Inbegriff positiver Einheiten erklärt. Wir werden aber vorläufig annehmen, dass auch der Multiplicandus eine positive Zahl sei.

Das Problem der Multiplication verlangt demnach aus der Gleichung:

23) . . . . $a.b = c$

die unbekannte Zahl c zu finden, wenn die positiven Zahlen a und b gegeben sind. Die Lösung des Problemes erlangt man durch das Addiren.

Bei der Bildung von Produkten in allen speciellen Fällen lässt sich die Wahrnehmung machen, dass man Multiplicator und Multiplicandus mit einander vertauschen kann ohne das Produkt zu ändern. Ob diese Regel allgemeine Gültigkeit hat, wissen wir nicht. Sie bedarf jedenfalls eines Beweises.

Zu diesem Zwecke bilden wir ein Rechteck, dessen eine Seite aus a, dessen andere Seite aus b Längeneinheiten besteht und zertheilen das Rechteck durch Linien, welche parallel den Seiten gehen, in Quadrate, wie in der folgenden Figur:

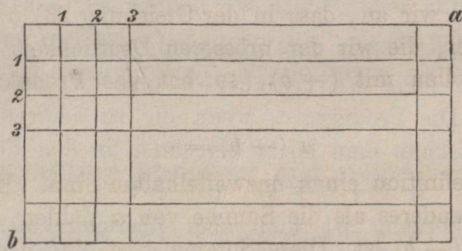

Fig. 2.

Das ganze Rechteck besteht aus den gezeichneten Quadraten, ist also die Summe derselben. Diese Summe brauchen wir aber nur auf zwei verschiedene Arten auszudrücken, um die angegebene Regel allgemein zu beweisen.

Die erste Vertikalreihe der Quadrate enthält b Quadrate, die beiden ersten Vertikalreihen enthalten $2.b$ Quadrate u. s. w. Das ganze Rechteck besteht also aus $a.b$ Quadraten.

Die erste Horizontalreihe besteht aus a Quadraten, die beiden ersten enthalten $2.a$ Quadrate und alle Horizontalreihen bestehen aus $b.a$ Quadraten.

Da nun die Zahl der Quadrate, aus welchen das ganze Rechteck besteht, sich selber gleich ist, so haben wir, was zu beweisen war:

$$a.b = b.a.$$

Da hiernach Multiplicator und Multiplicandus ohne Aenderung des Produktes vertauscht werden können, so sind sie in demselben gleichberechtigt und man braucht zwischen ihnen keinen Unterschied zu machen. Man hat daher die alte Benennung aufgegeben und nennt sie nunmehr Factoren des Produktes, von denen wir eben den Satz bewiesen haben:

24) In einem jeden Produkte lassen sich die Factoren mit einander vertauschen ohne dadurch das Produkt zu ändern.

Dieses gilt vorläufig nur für positive Factoren. Liegen auch negative Factoren eines Produktes vor, so werden wir vorerst zu prüfen haben, ob die gegebene Definition 22) auch passt.

Nehmen wir an, dass in der Gleichung 23) b eine negative Zahl sei, die wir der grösseren Deutlichkeit wegen bezeichnen wollen mit $(-b)$, so hat das Produkt c in der Gleichung:

$$a.(-b) = c$$

nach der Definition einen unzweifelhaften Sinn. Es ist nämlich nichts anderes als die Summe von a Zahlen, von denen jede gleich $(-b)$ ist. Diese Summe c ist eine negative Zahl und dem absoluten Werthe nach gleich der Zahl c in der Gleichung 23).

Das Produkt $(-a).b$ hat aber nach der Definition 22) keinen Sinn mehr, weil die Zahl $(-a)$ nicht als der Inbegriff positiver Einheiten aufgefasst werden kann. Man hat nun die Wahl, das genannte Produkt entweder zu verwerfen oder demselben einen ganz bestimmten Sinn unterzulegen. Im letzteren Falle steht es uns zu jenem Produkte einen jeden beliebigen Sinn unterzulegen. Es muss sich aber empfehlen dem genannten Produkte eine solche Bedeutung zu geben, dass der für positive Factoren aufgestellte Satz 24) auch darauf Anwendung findet.

Wir definiren demnach das genannte Produkt durch die Gleichung:

25) . . . . $(-a).b = b.(-a)$.

Denn nun lassen sich Multiplicator und Multiplicandus vertauschen ohne Aenderung des Produktes auch in dem vorliegenden Falle.

Eben so wenig hat das Produkt $(-a).(-b)$ nach der Definition 22) einen Sinn, welche positive Zahlen voraussetzt. Wir müssen desshalb ein solches Produkt entweder verwerfen oder demselben wieder einen ganz bestimmten Sinn unterlegen. Das Letztere hat man vorgezogen und das Produkt definirt durch die Gleichung:

26) . . . . $(-a).(-b) = +ab$.

Es sind dieses allerdings ganz willkürliche Definitionen, die erste 25) ist durch den Satz 24) geboten, wenn er ebensowohl auf positive als negative Factoren Anwendung finden soll. Die Zweckmässigkeit der anderen Definition 26) soll in dem folgenden Abschnitte dargethan werden.*)

Fassen wir nun die Regeln der Multiplication kurz zusammen, so können wir auf Grund der angegebenen Definitionen sagen:

27) Das Produkt zweier Zahlen ist gleich dem Produkte ihrer Zahlenwerthe. Dieses Produkt hat das positive Vorzeichen, wenn die Factoren gleiche Vorzeichen haben; es hat das negative Vorzeichen, wenn die Factoren entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Es bleibt noch übrig auf das Verhalten der Null einzugehen, wenn dieselbe als Factor in einem Produkte auftritt.

---

*) Wenn man an Stelle der Zahlen ihre Bilder nimmt, indem man die positiven Zahlen als Vermögen, die negativen als Schulden auffasst, so muss die Definition 26), welche das Produkt zweier negativen Zahlen als ein positives erklärt, im höchsten Grade auffallen. Man wird sich doch sagen müssen, dass man durch blosse Ideenoperationen nimmermehr aus Schulden zu Vermögen gelangen kann. Zu solchen Inconsequenzen führt es aber, wenn man das Bild eines Gegenstandes für ihn selber nimmt.

Ist die Null in einem Produkte der Multiplicandus, wie in dem Falle $a0$, so ist nach der Definition 22) das Produkt gleich der Summe mehrerer Nullen, von welchen wir nachgewiesen haben, dass sie der Null gleich sei. Ist die Null aber Multiplicator wie in dem Falle $0a$, so hat dieses Produkt nach der Definition keinen Sinn. Will man aber den Satz 24) auch bestehen lassen in dem vorliegenden Falle, so muss man das genannte Produkt definiren durch die Gleichung:

28) . . . . $0a = a0 = 0.$

Hieraus entspringt nun der Satz:

29) Ein jedes Produkt ist gleich der Null, wenn einer der Factoren die Null ist.

Wir haben diesen Satz allerdings nur festgestellt unter der Voraussetzung, dass der andere Factor des Produktes eine positive Zahl sei, denn die Producte $(-a)\,0$, $0\,(-a)$ und 00 haben wieder keinen Sinn. Wir definiren aber auch diese Produkte, wenn wir festsetzen, dass der Satz 29) allgemeine Gültigkeit habe, mag der zweite Factor des Produktes eine positive oder negative Zahl oder die Null selber sein.

Die Multiplication der Binomien.

Die Summe zweier Zahlen, als ein Ganzes betrachtet, nennt man ein Binomium. Sind die gegebenen Zahlen a und α, so bedient man sich der Einschliessungszeichen wie folgt:

$$(a + \alpha)$$

um dadurch auszudrücken, dass die Summe als ein Ganzes zu betrachten sei.

Es sollen nun die Regeln der Multiplication zweier Binomien dargelegt werden vorerst unter der Voraussetzung positiver Zahlen, oder mit anderen Worten, es soll die Entwickelung gefunden werden des Produktes:

30) . . . . $(a + \alpha)\,(b + \beta).$

Zu diesem Zwecke bilden wir ein Rechteck, dessen eine

Seite zusammengesetzt ist aus a Längeneinheiten und aus α weitern Längeneinheiten, dessen andere Seite die Grösse hat von $b + \beta$ Längeneinheiten, wie die Figur zeigt:

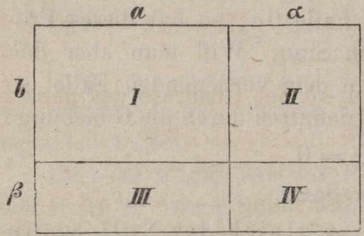

Fig. 3.

Wir zertheilen dasselbe durch gerade Linien parallel den Seiten in die vier Rechtecke I . . IV und denken uns noch jedes dieser vier Rechtecke in Quadrate zertheilt, deren Seiten gleich der Längeneinheit sind, wie in Fig. 2. In dieser Voraussetzung stellt das Binomium 30) die Zahl aller Quadrate dar, aus welchen das ganze Rechteck besteht, und die Produkte ab, αb, $a\beta$, $\alpha\beta$ sind die Zahlen der Quadrate, aus welchen der Reihe nach die vier Theile des Rechteckes zusammengesetzt sind. Da nun das ganze Rechteck gleich ist seinen Theilen zusammengenommen, so hat man:

31) . . . $(a + \alpha)(b + \beta) = ab + \alpha b + a\beta + \alpha\beta$,

eine Gleichung, welche sich in Worten so wiedergeben lässt:

32) Man erhält das Produkt zweier Binomien, wenn man jeden Theil des einen Binomiums mit jedem Theile des anderen Binomiums multiplicirt und hierauf sämmtliche Produkte addirt.

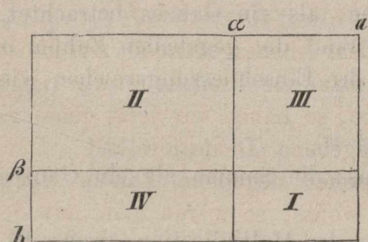

Fig. 4.

In gleicher Weise wollen wir auch das Produkt der Binomien entwickeln:

33) . . $(a - \alpha)(b - \beta)$

indem wir annehmen, dass die negativen Zahlen kleiner seien, als die ihnen entsprechenden positiven Zahlen. In dieser Absicht bilden wir ein Rechteck von den Seiten a und b und zertheilen dasselbe, indem wir auf der Seite a die Länge α und auf der Seite b die Länge β abschneiden, durch zwei den Seiten parallele Linien in die vier Rechtecke.

Wenn wir uns endlich diese Rechtecke wie vorhin noch in Quadrate zertheilt denken, deren Seiten der Längeneinheit gleich sind, so bestehen die vier Rechtecke der Reihe nach aus so viel Quadraten, als die folgenden Zahlen angeben:

$$\mathrm{I} = (a - \alpha)(b - \beta), \quad \mathrm{II} = \alpha\beta, \quad \mathrm{III} = a\beta - \alpha\beta,$$
$$\mathrm{IV} = \alpha b - \alpha\beta.$$

Ihre Summe ist gleich der Zahl ab der Quadrate des ganzen Rechteckes. Wir haben mithin:

$$(a - \alpha)(b - \beta) + \alpha b + a\beta - \alpha\beta = ab,$$

und wenn wir die identische Gleichung $-\alpha b - a\beta + \alpha\beta = -\alpha b - a\beta + \alpha\beta$ addiren, so erhalten wir die wirkliche Entwickelung des Produktes 33):

$$34) \ldots (a - \alpha)(b - \beta) = ab - \alpha b - a\beta + \alpha\beta.$$

Dieses ist eine streng bewiesene Gleichung gleich wie die Gleichung 31), in der die Voraussetzung gemacht war, dass sämmtliche Zahlen in ihr positive Zahlen seien. Nehmen wir aber an, dass α und β in der Gleichung 31) negative Zahlen seien, so erhalten wir aus derselben die nicht bewiesene Gleichung:

$$(a - \alpha)(b - \beta) = ab + (-\alpha)b + a(-\beta) + (-\alpha)(-\beta).$$

Die drei ersten Glieder des rechten Theiles dieser Gleichung stimmen mit den entsprechenden Gliedern der vorhergehenden Gleichung überein. Um die Uebereinstimmung der rechten Theile der Gleichungen vollständig zu machen, muss man setzen $(-\alpha)(-\beta) = +\alpha\beta$.

Wenn es demnach in dem vorhergehenden Abschnitte noch zweifelhaft blieb, wie man das Produkt zweier negativen Zahlen zu definiren habe, so haben wir jetzt einen zutreffenden Grund für die gegebene Definition 26). Denn wenn man dem Produkte zweier negativen Zahlen irgend eine andere Definition geben wollte, so würde man mit den Binomen nicht rechnen können unbeirrt darum, ob ihre Bestandtheile positive oder negative Zahlen seien.

Werfen wir schliesslich noch einen Rückblick auf alle bis dahin gelöseten Probleme, so können wir sagen, nachdem wir die positiven und negativen Zahlen, einschliesslich der Null, erkannt haben, dass keines dieser Probleme Veranlassung zur Entdeckung neuer Grössen giebt; denn jedes der genannten Probleme führt zurück auf die bekannten Zahlen. Das folgende Problem, die Umkehrung der Multiplication, wird aber Grössen entdecken lassen, welche nicht mehr Zahlen sind.

Die Division und die Brüche.

Wir kehren das vorausgegangene Problem der Multiplication um, wenn wir in der Gleichung 22):

$$ab = c,$$

die Zahlen a und c als gegeben betrachten, die Zahl b aber suchen. Dieses Problem, welches die Division heisst, führt auf neue Grössen. Denn Beispiele beweisen, dass die gesuchte Zahl b unter Umständen unter den bekannten Zahlen aufgefunden werden kann, unter anderen Umständen nicht.

Setzen wir zum Beispiele $a = 2$ und $c = 6$, so finden wir, dass b den Werth habe $b = 3$. Setzen wir aber $a = 2$ und $c = 1$, so kann weder unter den positiven noch unter den negativen Zahlen eine Zahl b aufgefunden werden, welche der Gleichung genügt. Die gesuchte Grösse ist offenbar eine neue. Um sie zu fixiren, möchte man versucht sein, sie zu definiren als diejenige Grösse, welche für b in die Gleichung $2b = 1$ gesetzt, der Gleichung genügt oder, mit anderen Worten, sie für diejenige Grösse auszugeben, welche mit 2 multiplicirt die Einheit giebt. Dieses würde aber keine Definition sein, weil wir in dem Vorhergehenden zwar die Bedeutung eines Produktes zweier Zahlen festgestellt aber keinesweges eine Definition des Produktes einer Zahl und einer Grösse gegeben haben, welche keine Zahl ist. Eine solche Definition aus der Definition 22) abzuleiten wird unsere nächste Aufgabe sein.

Nach der Definition 22) ist das Produkt c der Factoren a und b die Summe von a Summanden, von welchen ein jeder gleich b ist, was sich durch eine Gleichung ausdrücken lässt, wie folgt:

$$\overset{1}{\breve{b}} + \overset{2}{\breve{b}} + \overset{3}{\breve{b}} + \ldots + \overset{a}{\breve{b}} = c.$$

Diese Gleichung beweiset, dass man die Zahl c in a gleiche Theile zu theilen und einen davon zu nehmen habe, um die gesuchte Grösse b zu erhalten. Die gesuchte Grösse b nennt man einen Bruch oder Quotient. Man bezeichnet ihn mit dem Zeichen $b = \frac{c}{a}$ und unterscheidet den Zähler c oder Dividendus des Bruches von seinem Nenner a, Divisor. Wir verstehen also unter Multiplication eines Bruches $\frac{c}{a}$ mit seinem Nenner a eine Operation mit diesen Grössen, welche den Zähler c giebt.

Wollen wir nun einen Bruch in Worten definiren, so können wir sagen:

35) Ein Bruch verlangt, dass man seinen Zähler in so viel gleiche Theile theile, als der Nenner Einheiten hat, und dass man einen von diesen gleichen Theilen nehme.

Diese Definition ist deshalb unbequem, weil man bei Brüchen mit gleichen Nennern immer wieder Theilungen der Zähler vorzunehmen hat. Wir definiren den Bruch deshalb wie folgt:

36) Ein Bruch verlangt, dass man die Einheit in so viel gleiche Theile theile, als der Nenner Einheiten hat und dass man von diesen gleichen Theilen so viel nehme, als der Zähler Einheiten hat.

Beide Definitionen kommen auf Dasselbe hinaus. Denn wenn man c Einheiten in a gleiche Theile dadurch theilt, dass man eine jede der c Einheiten in a gleiche Theile theilt und von jeder der c Einheiten einen Theil, also c Theile nimmt, so erhält man ganz dasselbe, als wenn man eine Einheit in a gleiche Theile theilt und c von diesen Theilen nimmt.

Specielle Fälle der Brüche sind die Zahlen 1, 2, 3, 4 ..., denn dieselben stellen sich in Form von Brüchen so dar:

37) . . . . $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1} \ldots$

Gehen wir nun von dem Bruche $\frac{1}{a}$ aus. Derselbe verlangt, dass man die Einheit in a gleiche Theile theile und einen von diesen Theilen nehme. Dieser eine Theil lässt sich wieder wie eine Einheit betrachten. Um diese Einheit zu unterscheiden von der ursprünglichen Einheit, wollen wir sie die Einheit a^{ter} Ordnung nennen. Eine von diesen Einheiten, zwei, drei und mehrere derselben sind die Brüche:

38) . . . . $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}, \frac{4}{a} \ldots,$

eine Reihe, die der Reihe der positiven Zahlen 1) oder 37) analog gebildet ist Man kann sie nennen die Reihe der positiven Zahlen der a^{ten} Ordnung, weil sie aus der Einheit a^{ter} Ordnung gerade so entstehen als die positiven Zahlen aus der Einheit.

Es können zwei Brüche ein verschiedenes Ansehen haben und doch einander gleich sein. Versteht man unter n irgend eine positive Zahl, so hat man:

39) . . . . $\frac{c}{a} = \frac{cn}{an}.$

Der Bruch auf der linken Seite der Gleichung verlangt nämlich, dass man die Einheit in a gleiche Theile zertheile und c von diesen Theilen nehme. Der linke Theil der Gleichung stellt also c Theile der genannten Art dar. Der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung will, dass man die Einheit in an gleiche Theile theile. Dieses kann dadurch geschehen, dass man die Einheit wie vorhin zuerst in a gleiche Theile theilt und jeden dieser Theile noch in n gleiche Theilchen. Nimmt man nun n Theilchen, so bilden diese einen der vorhin genannten Theile, $2n$ Theilchen bilden zwei Theile etc. . . ., also cn Theilchen, welche den Bruch auf der rechten Seite der Gleichung repräsentiren, bilden c von den genannten Theilen, welche den linken Theil der Gleichung darstellen.

Die bewiesene Gleichung drücken wir in Worten so aus:

40) Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit demselben Factor multiplicirt.

oder mit anderen Worten:

41) Ein Bruch bleibt ungeändert, wenn man gleiche Factoren des Zählers und Nenners unterdrückt.

Ferner folgt hieraus:

42) Jeder Bruch ist gleich der Einheit, wenn Zähler und Nenner gleich sind.

Die einzige Ausnahme von dieser Regel ist der Fall, wenn Zähler und Nenner des Bruches gleich der Null sind, ein Fall, der im Vorhergehenden nicht vorgesehen worden ist, weil wir unter Zähler und Nenner vorläufig nur positive Zahlen verstanden wissen wollten. Auf den Ausnahmefall näher einzugehen, behalten wir uns vor für einen späteren Abschnitt.

Nehmen wir nun aus der Reihe 38) der Brüche irgend zwei $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\beta}{a}$, so ist es das Problem der Addition den Bruch $\frac{\gamma}{a}$ zu finden der Art, dass man hat:

43) . . . . $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{a}$,

denn die Summe zweier Zahlen $\frac{\alpha}{a}$ und $\frac{\beta}{a}$ a^{ter} Ordnung ist wieder eine Zahl a^{ter} Ordnung. Ihre Grösse ist der Bruch $\frac{\gamma}{a} = \frac{\alpha + \beta}{a}$, welcher in der Reihe 1) wieder zu finden ist.

Die Umkehrung des Problemes in dem Falle:

44) . . . . $\frac{1}{a} + \frac{\beta}{a} = \frac{1}{a}$

führt auf einen noch unbekannten Bruch, welcher zu der Einheit a^{ter} Ordnung $\frac{1}{a}$ addirt letztere ungeändert lässt. Es ist dieses die aus dem Vorhergehenden bekannte Null, welche die Einheit, von welcher Art sie auch sei, ungeändert lässt, wenn man sie zu ihr addirt.

Führen wir nun in die Gleichung 43) für $\frac{\gamma}{a}$ die Null ein wie folgt:

45) . . . . $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{a} = 0$

und suchen den Bruch $\frac{\beta}{a}$, der der Gleichung genügt, so ist derselbe in der Reihe 38) nicht aufzufinden. Dieser Bruch ist ein negativer Bruch mit dem Zeichen $-\frac{\alpha}{a}$. Setzen wir endlich für α die Reihe der Zahlen, so sehen wir auf diese Weise die negativen Zahlen a^{ter} Ordnung oder mit anderen Worten die negativen Brüche mit dem Nenner a entstehen:

46) .... $-\frac{1}{a}, -\frac{2}{a}, -\frac{3}{a}, -\frac{4}{a} \ldots$

Ein specieller Fall davon sind die negativen Zahlen in Form von Brüchen:

47) .... $-\frac{1}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{4}{1} \ldots$

Man macht sich ein Bild von den positiven und negativen Brüchen, wenn man in der Fig. 1 auf der horizontalen geraden Linie zwischen den Punkten, welche die positiven und negativen Zahlen darstellen, andere Punkte zwischen ihnen fixirt, welche um die Grössen der Brüche von dem Nullpunkte abstehen. Denkt man sich nun alle möglichen Brüche auf diese Weise als Punkte auf der geraden Linie gezeichnet, so lassen je zwei auf einander folgende Punkte zwischen einander noch einen, wenn auch sehr kleinen Zwischenraum, welcher für die Bilder der noch zu entwickelnden irrationalen Grössen vorbehalten bleibt.

Nachdem wir die positiven Brüche 38) und die negativen Brüche 46) haben entstehen sehen, so drängt sich zunächst die Frage auf, wie ein Bruch aufzufassen sei, dessen Zähler und Nenner negative oder entgegengesetzte Zahlen sind. Um diese Frage zu entscheiden müssen wir auf das Multiplicationsproblem und im Besonderen auf den Satz 27) zurückgehen.

Nach diesem Satze ist der Zahlenwerth des Produktes c zweier Zahlen a und b unabhängig von den Vorzeichen der Factoren a und b. Umgekehrt wird auch der Zahlenwerth eines Factors b nur abhängen von dem Zahlenwerthe des Produktes c und des anderen Factors a. Dieses auf den Bruch b ausgedehnt will sagen, dass der Zahlenwerth des Bruches $b = \frac{c}{a}$ unabhängig sei von den Vorzeichen des Zählers c und des Nenners a und allein abhänge von ihren Zahlenwerthen. Es findet demnach ein jeder Bruch b seine Stelle in der Reihe der Brüche 38) oder 46). Es bedarf nur noch der Bestimmung des Vorzeichens des Bruches b, dessen Zahlenwerth in dem Vorhergehenden festgestellt ist. Da aber der Bruch b mit seinem Nenner a multiplicirt das Produkt c geben muss, so hat man auf Grund des Satzes 27) folgende Regel:

48) Der Zahlenwerth eines Bruches ist nur abhängig von den Zahlenwerthen seines Zählers und Nenners. Der Bruch hat das positive Vorzeichen wenn Zähler und Nenner das gleiche Vorzeichen haben. Er hat das negative Vorzeichen, wenn Zähler und Nenner von entgegengesetzten Vorzeichen sind.

Wir haben daher keinen Bruch, welche Vorzeichen auch Zähler und Nenner haben, welcher in der Voraussetzung, dass a eine positive Zahl sei, sich nicht in einer der beiden Reihen 38) und 46) wieder finden lässt.

Fassen wir nun die Brüche mit demselben Nenner a, sowohl positive als negative Brüche, als Zahlen der a^{ten} Ordnung auf, so ergeben sich aus 18) und 21) folgende Regeln für die Addition und Subtraktion solcher Brüche:

49) Die Summe zweier Brüche mit demselben Nenner und demselben Vorzeichen ist gleich der Summe ihrer Zahlenwerthe. Das Vorzeichen richtet sich nach den Vorzeichen der Summanden. Die Summe zweier Brüche mit demselben Nenner aber von entgegengesetzten Vorzeichen ist gleich der Differenz ihrer Zahlenwerthe. Das Vorzeichen ist das des grösseren Bruches.

50) Man erhält die Differenz zweier Brüche mit demselben Nenner, wenn man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und den so veränderten Subtrahendus zu dem Minuendus addirt.

Wenn wir uns am Ende des Abschnittes die in demselben aufgestellten Sätze 40) bis 42) vergegenwärtigen, so müssen mir uns doch gestehen, dass dieselben bewiesen wurden nur in der Voraussetzung positiver Zahlen des Zählers, des Nenners und des Factors. Da aber ein jeder Bruch, wie dargelegt worden ist, zurückführt auf einen positiven Bruch 38) oder auf einen negativen Bruch 46), so liegt auch der Beweis der genannten Sätze auf der Hand, mögen Zähler oder Nenner oder der Factor irgend welche positive oder negative Zahlen sein.

Die vier Species der Brüche.

Die Probleme der Addition und Subtraktion der Brüche werden nach den Sätzen 49) und 50) als gelöset zu betrachten sein, wenn es gelingt irgend zwei gegebene Brüche ohne Aenderung ihrer Werthe auf Brüche zurückzuführen, welche gleiche Nenner haben. Dieses ist aber nach 40) immer ausführbar. Denn multiplicirt man Zähler und Nenner des einen gegebenen Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruches, und multiplicirt man Zähler und Nenner des anderen gegebenen Bruches mit dem Nenner des ersten Bruches, so hat man an Stelle der gegebenen Brüche zwei Brüche von gleichen Werthen mit den gegebenen und mit gleichen Nennern, welche den angegebenen Regeln 49) und 50) unterliegen.

Was die Multiplication von Brüchen anbetrifft, so reicht die für Zahlen gegebene Definition 22) für sie nicht aus. Es liegt auf der Hand, dass die gegebene Definition erweitert werden muss der Art, dass sie die Multiplication der Zahlen, welche doch specielle Fälle der Brüche sind, in sich schliesst.

Betrachtet man das Produkt zweier Zahlen als das Produkt von Brüchen, die den Nenner 1 haben, so sieht man, dass das Produkt der Brüche erhalten wird, wenn man einen Bruch bildet, dessen Zähler gleich ist dem Produkte der Zähler, und dessen Nenner gleich ist dem Produkte der Nenner der beiden Brüche.

Man erweitert demnach die Definition des Produktes zweier Zahlen, wenn man sagt:

51) Das Produkt zweier Brüche ist wieder ein Bruch, dessen Zähler gleich ist dem Produkte der Zähler und dessen Nenner gleich ist dem Produkte der Nenner der Brüche.

Diese Definition trifft auch zu, wenn der Multiplicator eine positive Zahl ist, in welchem Falle das Produkt selbst nach der Definition 22) noch einen bestimmten Sinn hat.

Wenn man zwei Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 auffasst, so erhält man den Quotienten der beiden Zahlen dadurch, dass man den Divisorbruch umkehrt, das heisst

Zähler zum Nenner und Nenner zum Zähler macht, und dann mit dem Bruche des Dividendus multiplicirt. Diese Bemerkung giebt Veranlassung zu folgender Definition, welcher sich der einzige Fall unterordnet, in welchem die Definition 35) noch einen Sinn hat, nämlich wenn der Divisor eine ganze Zahl ist:

52) Der Quotient zweier Brüche ist wieder ein Bruch, den man erhält, wenn man den Divisorbruch umkehrt und ihn hierauf mit dem anderen Bruche multiplicirt.

Die Null im Zähler oder Nenner der Brüche.

Wenn der Zähler c eines Bruches $b = \frac{c}{a}$ die Null ist, so hat der Bruch nach den Definitionen 35) und 36) keinen Sinn. Um einen solchen Bruch zu definiren gehen wir auf die Gleichung 23) zurück $ab = c$, aus welcher die Definitionen geschöpft wurden. Wenn der rechte Theil dieser Gleichung gleich Null ist, so muss der linke Theil es auch sein. Da es nun keine Zahl und keinen Bruch giebt, ausgenommen die Null, welcher mit a multiplicirt ein Produkt gleich der Null giebt, so wird der gesuchte Bruch b die Null selber sein. Wir können daher sagen:

53) Wenn der Zähler eines Bruches der Null gleich ist, so ist der Bruch selber der Null gleich.

Zur Erklärung des Bruches $b = \frac{c}{a}$, dessen Nenner a gleich Null ist, können weder die Definitionen 35) und 36), noch die oben gebrauchte Gleichung 23) dienen. Um uns

---

*) Es hat bis zur Zeit nicht an Bestrebungen gefehlt, die vier Species der Brüche als eine Folge aus den ursprünglichen Definitionen der vier Species der Zahlen darzustellen. Versuche der Art mussten missglücken, wenn bei Aufstellung der Definitionen nicht zugleich die Erweiterungen auf negative Zahlen und Brüche in's Auge gefasst wurden. Das letztere ist wohl als unmöglich niemals versucht worden.

dennoch eine Vorstellung zu machen von einem Bruche der genannten Art, wählen wir folgenden Weg.

Wir betrachten einen Bruch $b = \frac{c}{a}$, dessen Nenner a nicht der Null gleich ist, sondern gleich einem Bruche $a = \frac{1}{n}$, welch' letzterer sich um so mehr der Null nähert, als die Zahl n, die ebensowohl positiv als negativ sein kann, wächst.

Dieser Bruch b wird auf Grund von 52): $b = c.n$ und mit wachsendem Werthe von n einen grossen Zahlenwerth annehmen, ob positiv oder negativ. Nehmen wir für n eine unendlich grosse Zahl, so nähert sich der Nenner a des Bruches b über alle Grenzen der Null und wir können schliesslich sagen:

54) Wenn der Nenner eines Bruches gleich Null ist, so ist der Werth des Bruches unendlich gross, aber unbestimmt, ob positiv oder negativ.

Die Unbestimmtheit in dem angegebenen Satze rührt davon her, ob wir uns der Null nähern wollen von der positiven oder von der negativen Seite.

Die Unbestimmtheit eines Bruches $b = \frac{c}{a}$ vermehrt sich noch, wenn man annimmt, dass sowohl Zähler als Nenner der Null gleich sind. Es entsteht also die Frage, wie ein Bruch aufzufassen sei, dessen Zähler und dessen Nenner gleich Null sind, denn alles Vorhergehende giebt nur ungenügende Anhaltepunkte zur Entscheidung der Frage.

Man möchte versucht sein, einen Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich Null sind, auf Grund des Satzes 42) für die Einheit zu nehmen. Da aber der genannte Bruch ein specieller Fall des in dem vorhergehenden Satze aufgeführten Bruches ist, so sollte das Vorzeichen unentschieden bleiben. Aber gegen diese Auffassung sprechen Thatsachen, die vorgeführt werden sollen.

Durch Entwickelung hat man, welches auch die Zahl x sei:

$$\begin{aligned} x - 1 &= x - 1, \\ x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1), \\ x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und wenn man auf beiden Seiten der Gleichungen durch $x - 1$ dividirt:

$$\frac{x-1}{x-1} = 1,$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1,$$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$$

. . . .

Setzt man nun $x = 1$, so erhält man für den Bruch $\frac{0}{0}$ die verschiedenen Werthe

$$1, \ 2, \ 3 \ \ldots$$

Es beweiset dieses, dass der Bruch $\frac{0}{0}$ eine unbestimmte Form ist, welche bald diesen, bald jenen Werth annehmen kann.

Brüche mit einer Unbekannten, welche sich für einen bestimmten Werth der Unbekannten unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen, haben allerdings bestimmte Werthe. Diese festzustellen gehört aber zu den Aufgaben der Differentialrechnung.

Die irrationalen Grössen.

Wenn die Factoren eines Produktes c gleich sind, wie in dem Falle:

55) . . . . $aa = c$,

so kehrt man dieses Problem der Multiplication um, indem man c als eine gegebene Grösse betrachtet, den gleichen Factor a aber sucht.

Dieses umgekehrte Problem führt bisweilen auf die in dem Vorhergehenden bekannt gewordenen Grössen zurück, zum Beispiel wenn $c = 4$ oder $c = 9$ ist. Setzen wir aber $c = 2$, so können wir unter den Brüchen, welche doch die allgemeinsten Grössen bis dahin sind, keinen Bruch angeben, welcher mit sich selber multiplicirt die Zahl 2 gebe.

Denn wenn $\frac{p}{q}$ der gesuchte Bruch wäre, von dem wir annehmen können, dass Zähler und Nenner keine gleichen Factoren haben, welche sich fortheben lassen, so müsste sein:

$$\frac{pp}{qq} = 2,$$

das heisst, der Bruch links vom Gleichheitszeichen müsste dadurch eine ganze Zahl werden, dass der Nenner Factor des Zählers wäre, was gegen die Annahme ist, weil gleiche Factoren des Zählers und Nenners ausgeschlossen sind.

Wenn wir demnach auch keinen Bruch angeben können, welcher mit sich selber multiplicirt die Zahl 2 giebt, so lässt sich doch immer ein Bruch finden, der mit sich selber multiplicirt das Produkt 2 giebt mit einem Fehler, der so klein ist, als man will.

Man kann allgemein nachweisen, wenn c ein beliebig gegebener positiver Bruch ist, dass man immer einen Bruch a finden kann, welcher in die Gleichung 55) gesetzt derselben genügt bis auf einen Fehler, der so klein ist, als man will.

Die gesuchte ideale Grösse a, welche in die Gleichung 55) gesetzt der Gleichung ohne Fehler genügt, nennt man eine irrationale Grösse. In dem vorliegenden Falle, wenn c positiv ist, heisst sie reell, weil ihr Werth als Bruch sich annähernd angeben lässt.

Die umgekehrten Potenzen oder allgemeiner die Wurzeln der Gleichungen sind irrationale Grössen. Sie sind reell, wenn ihre Werthe sich annähernd durch Brüche darstellen lassen.

Wenn nun die reellen irrationalen Grössen sich genau nicht als Brüche ausdrücken lassen, so haben wir doch auch keine Definition solcher Grössen, wie sie zum Beispiel in der Gleichung 55) angedeutet ist. Man könnte sich dadurch helfen, dass man für die reellen irrationalen Grössen diejenigen Brüche nimmt, welche ihre Werthe sehr angenähert wiedergeben. Dadurch würde sich aber jedes Mal ein Fehler einmischen, mit dem man weiter zu rechnen hätte. Es bleibt daher, um Fehler zu vermeiden, so klein sie auch seien, nichts übrig, als eine erweiterte, wenn auch ideale, Definition der Multiplication aufzustellen wie folgt:

56) Unter Multiplication zweier Grössen versteht man eine Operation mit diesen Grössen, welche in allen Fällen auf die bekannten Regeln der Multiplication zurückführt, wenn die Factoren positive oder negative Zahlen oder Brüche sind, welche aber für irrationale Factoren näher zu bezeichnen bleibt.

In dem vorliegenden Falle 56), wenn c eine positive Grösse ist, in welchem die irrationalen gleichen Factoren a sich annähernd durch Brüche ausdrücken lassen, sowie in dem Falle, wenn c eine negative Grösse ist, bezeichnen wir die Multiplication der gleichen irrationalen Factoren a als eine Operation mit denselben, welche in aller Strenge das Resultat c giebt.

Wenn wir in der Gleichung 55) setzen $c = -1$, so können wir für a nicht einmal annähernd einen Bruch finden, welcher der Gleichung genügt. Denn weder ein positiver, noch ein negativer Bruch mit sich selber multiplicirt giebt ein negatives Produkt. Die gesuchte irrationale Grösse ist eine neue. Man nennt sie die imaginäre Einheit und bezeichnet sie mit dem Buchstaben i. Man hat daher:

57) . . . . $ii = -1$.

Nachdem wir den Begriff der imaginären Einheit festgestellt haben, so können wir mit derselben gerade so operiren, als mit der positiven Einheit. Der Complex zweier solcher Einheiten ist die imaginäre Zahl $2i$ etc. Auf diese Weise ergeben sich die imaginären positiven Zahlen.

58) . . . . $i,\ 2i,\ 3i,\ 4i \ldots$

Wenn ai und bi irgend zwei von diesen imaginären Zahlen sind, so ist es das Problem der Addition die Zahl ci zu finden der Art, dass man hat:

59) . . . . $ai + bi = ci$,

$c = a + b$ ist die Auflösung des Problemes.

Die Umkehrung des Problemes in dem Falle:

60) . . . . $i + bi = i$

lässt für die gesuchte imaginäre Zahl bi eine Zahl erkennen, welche zur imaginären Einheit addirt, dieselbe ungeändert lässt. Wir können die gesuchte imaginäre Zahl ebenfalls Null nennen, weil wir das Verhalten derselben der positiven Einheit gegenüber zwar festgestellt haben, aber nicht der imaginären Einheit gegenüber.

Die Einführung der Null für ci in der Gleichung 59) wie folgt:

61) . . . . $ai + bi = 0$

führt, wenn man die Unbekannte bi sucht für die Zahlen a gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot$ — auf die negativen imaginären Zahlen:

62) . . . . . . $-i, \quad -2i, \quad -3i, \quad -4i \ldots$

Sowohl die positive als die negative imaginäre Einheit kann in a gleiche Theile getheilt werden. Nimmt man von diesen Theilen einen oder zwei oder mehrere, so ergeben sich daraus die Reihen der positiven und negativen imaginären Brüche:

63) . . . . . . $\frac{1}{a}i, \quad \frac{2}{a}i, \quad \frac{3}{a}i, \quad \frac{4}{a}i \ldots$

64) . . . . . . $-\frac{1}{a}i, -\frac{2}{a}i, -\frac{3}{a}i, -\frac{4}{a}i \ldots,$

die wir auch imaginäre Zahlen a^{ter} Ordnung nennen können.

Es bleibt noch übrig auf noch allgemeinere imaginäre Grössen von der Form ai aufmerksam zu machen, in welcher Form a die Bedeutung einer reellen irrationalen Grösse hat.

Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass das Produkt $a(ai)$ nach der Definition 22) einen richtigen Sinn hat, zumal wenn wir annehmen, dass a eine positive Zahl ist. Stellen wir uns nun das Multiplications-Problem, in der Gleichung:

$$a(ai) = ci$$

die Unbekannte ci zu finden, so ergiebt sich der Werth von $c = aa$. Kehren wir aber das Problem um, indem wir c etwa gleich 2 setzen und suchen den zweiten Factor (ai) des linken Theiles der Gleichung, so ergiebt sich für a gerade diejenige reelle irrationale Grösse, von welcher der Anfang des Abschnittes handelte, die mit sich selber multiplicirt die Zahl 2 giebt.

Es existiren also imaginäre Grössen von der angegebenen Form (ai), die nicht imaginäre Brüche sind, die sich aber annähernd durch imaginäre Brüche ausdrücken lassen.

Bilder der in diesem Abschnitt construirten Grössen entwerfen wir, indem wir zur Fig. 1 zurückkehren. Nachdem wir die Brüche in derselben auf der Horizontallinie als Punkte aufgetragen haben, welche zwischen den Zahlen liegen, so werden die Punkte, welche reelle irrationale Grössen darstellen sollen, zwischen den Punkten der Brüche zu liegen kommen.

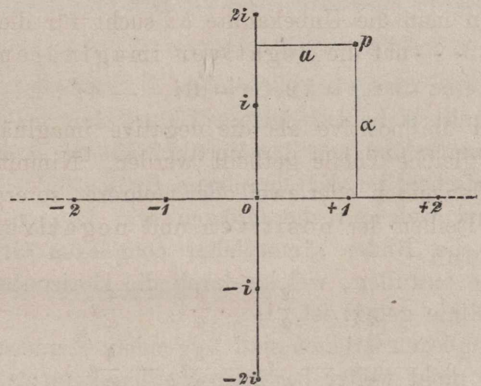

Fig. 5.

Um den imaginären Grössen in der Figur ihre Stellen anzuweisen, ziehen wir durch den Nullpunkt eine Vertikallinie und tragen nach beiden Seiten von dem Nullpunkte die Längeneinheiten mehrmals auf. Die Theilungspunkte der Vertikallinie sollen Bilder der imaginären Zahlen sein. Die Bilder der imaginären Brüche liegen dazwischen und zwischen diesen die Bilder der imaginären Grössen, welche nicht imaginäre Brüche sind.

Nachdem wir in diesem Abschnitte eine kurze Entwickelung zweier Gattungen von irrationalen Grössen gegeben haben, der reellen irrationalen Grössen und der imaginären Zahlen, Brüche und der imaginären Grössen, welche nicht mehr Brüche sind, so vereinigen wir jetzt reelle und imaginäre Grössen und erhalten dadurch die complexen Grössen.

Die complexen Grössen und die vier Species derselben.

Die Vereinigung einer reellen Grösse a mit einer imaginären Grösse αi zu einem Ganzen, ebenfalls eine irrationale Grösse:

65) . . . . $(a + \alpha i)$,

nennt man eine complexe Grösse.

Der Punkt p in der letzten Figur, der von der Horizontallinie um α und von der Vertikallinie um a absteht, ist das geometrische Bild der complexen Grösse 65). Da nun a und α irgend welche reelle Grössen sein können, so sieht man, dass die Bilder sämmtlicher complexen Grössen die ganze Ebene ausfüllen, welche durch die Horizontallinie und die Vertikallinie gelegt ist.

Die complexen Grössen sind folgendem Grundsatze unterworfen, der nicht weiter bewiesen werden kann:

66) Wenn zwei complexe Grössen einander gleich sind, so sind sowohl ihre reellen Theile einander gleich, als ihre imaginären Theile.

Wenn nun irgend zwei complexe Grössen $(a + bi)$ und $(\alpha + \beta i)$ gegeben sind, so wird ihre Summe wieder eine complexe Grösse:

67) . . $(a + \alpha i) + (b + \beta i) = (a + b) + (\alpha + \beta)\, i$.

Ihre Differenz wird wieder eine complexe Grösse:

68) . . $(a + \alpha i) - (b + \beta i) = (a - b) + (\alpha - \beta)\, i$.

Was die Multiplication complexer Grössen anbetrifft, so war ihre Definition 56) noch vorbehalten. Wir ergänzen demnach die unvollständige Definition 56), wenn wir sagen:

69) Man erhält das Produkt zweier complexen Grössen, wenn man sie als Binomien betrachtet und dieselben so multiplicirt, als ob die imaginäre Einheit i Factor in denselben wäre.

Hieraus folgt, dass das Produkt zweier complexen Grössen von gleicher Form ist als die Factoren, dass nämlich:

70) . . . . . . $(a + \alpha i)(b + \beta i) = c + \gamma i.$

Denn wenn man nach der angegebenen Regel 69) die Multiplication ausführt, so erhält man:

$$c = ab - \alpha\beta, \quad \gamma = a\beta + b\alpha.$$

Dieses beweiset, dass das Produkt zweier complexen Grössen wieder eine complexe Grösse ist.

Die Division verlangt die Erkenntniss des Factors $b + \beta i$ in der Gleichung 70), das heisst, des Bruches $b + \beta i = \frac{c + \gamma i}{a + \alpha i}$, wenn sämmtliche in dem Ausdrucke des Bruches vorkommende reellen Grössen gegeben sind.

Um zu derselben zu gelangen multipliciren wir die Gleichung 70) mit $(a - \alpha i)$, wodurch wir auf Grund von 69) erhalten:

$$(a^2 + \alpha^2)(b + \beta i) = (ac + \alpha\gamma) + (a\gamma - c\alpha)i$$

und durch Division mit $(a^2 + \alpha^2)$:

71) . . . . . $b + \beta i = \frac{(ac + \alpha\gamma) + (a\gamma - c\alpha)i}{a^2 + \alpha^2}.$

Es ist daher nach Satz 66)

$$b = \frac{ac + \alpha\gamma}{a^2 + \alpha^2} \quad \beta = \frac{a\gamma - c\alpha}{a^2 + \alpha^2},$$

und wir können sagen, der Bruch oder Quotient zweier complexen Grössen ist wieder eine complexe Grösse.