DIE

EULER'SCHEN INTEGRALE

BEI

UNBESCHRÄNKTER VARIABILITÄT

DES

ARGUMENTES.

ZUR HABILITATION

IN DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

BEARBEITET

VON

Dr. HERMANN HANKEL.

LEIPZIG,

IN COMMISSION BEI LEOPOLD VOSS.

1863.

§. 1.

Historisches.

Obgleich schon in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts complexe Functionen mehrfach untersucht wurden, weiterhin Kühn die Darstellbarkeit complexer Grössen in der Ebene im Jahre 1750 bemerkte, und Laplace in der Integration auf complexem Wege ein mächtiges Instrument zur Bestimmung von Integralen gefunden hatte, so ist dennoch die wahre Bedeutung der Einführung complexer Grössen erst von Gauss darin erkannt worden, dass durch die Erweiterung der Variabilität des Argumentes gewisse Eigenschaften, die allen Functionen als solchen zukommen, hervortreten — Eigenschaften, die bei der Beschränkung des Argumentes auf reelle Werthe nur als singuläre und mehr oder minder zufällige erscheinen mussten. Indess hat Gauss seine analytischen Untersuchungen so dargestellt, dass in ihnen die complexen Grössen überall nur verhüllt auftreten, und es ist zuerst Cauchy gewesen, der in seinen Schriften die complexen Variabelen consequent in Anwendung gebracht und dadurch den Grund zu einer Theorie der unbeschränkten Variabilität gelegt hat.

In neuerer Zeit ist durch die glänzenden Arbeiten Hrn. Riemann's, meines hochverehrten Lehrers, diese Theorie in ein wesentlich neues Stadium getreten, insofern von ihm zuerst in ausgedehnterer Weise das Princip benutzt worden ist, Functionen nicht durch explicite Formeln, sondern durch ein sie vollständig charakterisirendes System von Bedingungen zu bestimmen und aus diesen ihre weiteren Eigenschaften abzuleiten; die thatsächliche Darstellung der Function hat dann erst dass Schlussglied der ganzen Theorie zu bilden. Es wird durch ein solches Verfahren nicht allein der Zweck erreicht, ohne einen Apparat von Formeln

1*

und mehr oder minder grosse Complication der Rechnung, unter stetem Bewusstsein des Wesentlichen die Theorie einer Function zu entwickeln, wie hiefür die Abhandlung des Hrn. Riemann über die hypergeometrische Reihe ein ausgezeichnetes Beispiel gibt, sondern es ist dies auch der eigentlich natürliche Weg, um Functionen zu behandeln, die ihrer Natur nach sich einer Darstellung durch explicite Formeln nur widerstrebend fügen.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, habe ich die Theorie der Euler'schen Integrale, die vermöge grosser Eleganz und umfassender Anwendungen zu den interessantesten Theilen der Analysis gehört, einer Bearbeitung unterworfen; dieselbe hat mich nach Erledigung einer Voruntersuchung über die Exponentialgrösse dazu geführt, ein höchst einfaches System von Bedingungen aufzustellen, durch welches die Legendre'sche Function $\Gamma(x)$ eindeutig bestimmt wird. Aus demselben folgen mit Leichtigkeit die bisher bekannten Sätze über Producte solcher Functionen. Auf die Entwickelung der bekannten Euler'schen semiconvergenten Reihen für $\Gamma(x)$ und die damit zusammenhängenden Untersuchungen, bin ich an dieser Stelle nicht eingegangen, da die Theorie der Functionen grosser Zahlen ein für sich geschlossenes Gebiet bildet, aus dem ich hier nicht Aphorismen geben mochte. Ich entwickele dann ein Integral, das für jeden Werth des Argumentes seine Bedeutung beibehält und leicht alle charakteristischen Eigenschaften von $\Gamma(x)$ erkennen lässt. Durch Aenderung des Integrationsweges kann man aus demselben ohne Weiteres die bisher bekannten mannigfachen Formen des Integrales für $\Gamma(x)$ oder $1 : \Gamma(x)$ erhalten.

Was das Euler'sche Integral erster Gattung, die von Binet mit $B(p,q)$ bezeichnete Function betrifft, so habe ich darauf verzichtet, für diese Function zweier Variabelen ein stets gültiges einfaches Integral aufstellen zu können. Solange indess p einen positiven reellen Theil hat, lässt sich ein Integral für $B(p,q)$ angeben, das für jeden Werth von q seine Bedeutung beibehält; ebenso, wenn $(-p-q)$ einen positiven reellen Theil hat, ein Integral, das für alle entsprechenden Werthe von p und q seinen Sinn nicht verliert. Dieses Integral liefert durch Specialisirung der drei willkührlichen Constanten, welche dasselbe enthält, und verschiedene Annahmen des Integrationsweges mit

Leichtigkeit die verschiedenen Formeln, in die von den Analysten, häufig durch einen grossen Aufwand von Rechnung und besondere Kunstgriffe das Euler'sche Integral transformirt worden ist.

Es konnte natürlich nicht meine Aufgabe sein, alle Integrale, durch welche $\Gamma(x)$, $B(p,q)$ oder die reciproken Werthe derselben dargestellt worden sind, zu entwickeln und ich habe mich in dieser Hinsicht auf diejenigen beschränkt, die entweder ihrer Eleganz oder sonstiger Eigenthümlichkeit wegen von besonderem Interesse zu sein schienen. Ebenso wenig habe ich neue Transformationen der Euler'schen Integrale unternommen, da es ohnehin scheint, als ob bei Anwendungen die allgemeinen Formeln in den meisten Fällen die zweckmässigsten sein werden. Denn es rechtfertigt sich der bisherige Gebrauch der verschiedenen Formeln allein dadurch, dass die transformirten Integrale für verschiedene Gebiete des Argumentes gültig bleiben, also je nach den Bedürfnissen das eine oder andere Integral angewandt werden musste.

Bei der überaus grossen Literatur unseres Gegenstandes und bei der Gewohnheit der meisten Mathematiker, die Schriften ihrer Vorgänger nicht zu citiren, war es mit mancherlei Schwierigkeiten verknüpft, die Stellen aufzufinden, in denen die betreffenden Theoreme zuerst angegeben worden sind. Es können deshalb meine Citate, namentlich die aus Euler'schen Abhandlungen, eine vollständige Authenticität in dieser Beziehung nicht überall beanspruchen.

Die ersten Untersuchungen über die späterhin als Euler'sche Integrale bezeichneten Functionen sind in der berühmten: „Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora matheseos problemata" von Wallis (zuerst 1655 erschienen) niedergelegt — einem Werke, dessen etwas beschwerliches Studium durch den offenen Einblick in die Werkstätte eines eminenten Geistes in schönster Weise belohnt wird. Wallis geht dabei von dem Grenzwerthe aus, durch welchen das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p,q)$$

dargestellt wird und zeigt, dass $B(p,q)$ und $B(p+\frac{1}{2}, q)$ durch numerische Facultäten dargestellt werden können, so lange p

und q positive ganze Zahlen sind. Durch Induction findet er ferner, dass $B(p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2})$ unter derselben Voraussetzung für p und q gleich einem Producte numerischer Facultäten in $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sein muss und entwickelt schliesslich für $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ sein berühmtes unendliches Product, das später Euler Veranlassung gegeben hat, für die zu interpolirenden Glieder in der Reihe $1.\ 2.\ 3.\ldots x$ ein unendliches Product aufzustellen.

Der erste Bericht über diese Untersuchung, an die sich die Ermittelung von $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ unmittelbar anschliesst, die Darstellung der numerischen Facultäten durch Integrale erster und zweiter Gattung, sowie der Ausdruck des Integrales erster Gattung durch drei Integrale zweiter Gattung findet sich in den Briefen Euler's an Goldbach aus dem Jahre 1729 [1]). Die erste diesen Gegenstand betreffende Abhandlung: „De progressionibus transscendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt [2])" bildet die Grundlage aller späteren ausserordentlich zahlreichen Untersuchungen Euler's über diese Integrale und die mit ihnen eng zusammenhängenden unendlichen Producte. Die durchgeführte Bezeichnung des Integrales erster Gattung durch die Nebeneinanderstellung seiner Variabelen — ein Beweis der klaren Auffassung desselben als besondere Transscendente — finde ich zuerst in der Abhandlung: „Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}dx$, posito post integrationem $x=1$ [3])". Dasselbe ist für die Integrale zweiter Gattung erst geschehen in der Arbeit: „Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}dx(lx)^{\frac{m}{n}}$, integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa [4])".

---

[1]) Correspondance math. et phys. publ. par P. H. Fuss, Petersburg 1843. 1. Bd. S. 3—7 und 11—18.

[2]) Comment. Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, Bd. 5. 1738. S. 36. Es wird im Folgenden bei Citaten akademischer Abhandlungen stets das Jahr des Erscheinens des betreffenden Bandes notirt werden.

[3]) Miscell. Taurin. Bd. 3. 1766. S. 156.

[4]) Novi Comment. Petrop. Bd. 16. 1772. S. 91. und Euleri Instit. calc. int. Bd. 4. S. 78.

Die Entwickelung des wichtigen Integrales

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}$$

ist zuerst gegeben in den beiden gleichzeitigen Abhandlungen: „Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam" und „De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur [1])", wenn gleich die Ermittelung dieses Integrales, unbestimmt genommen, nach der bekannten Methode durch Zerlegung in Partialbrüche schon viel älter ist.

Ehe ich zu den Untersuchungen übergehe, die den Gegenstand der folgenden Abhandlung ausmachen sollen, erscheint es mir zweckmässig, in aller Kürze diejenigen Sätze aus der Theorie der complexen Variabilität, die ich im Folgenden anzuwenden haben werde, zusammenzustellen. Nachdem von Hrn. Riemann „die allgemeinen Voraussetzungen und Hülfsmittel zur Untersuchung unbeschränkt veränderlicher Grössen" in classischer Weise aufgestellt worden sind [2]) werde ich nur eine Reproduction zu geben haben und ich würde angestanden haben, nur ein Wort an dieser Darstellung zu ändern, wenn ich nicht auf einige Punkte etwas ausführlicher einzugehen hätte, als es a. a. O. geschehen ist. Was die Beweise der anzuführenden Sätze betrifft, so sind dieselben direct oder indirect in dem verdienstvollen Werke der Hrn. Briot und Bouquet [3]) enthalten, das sich in den Händen aller Mathematiker befindet.

§. 2.

Grundlagen der complexen Functionentheorie.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise wird im Folgenden an der von Kühn [4]) gegebenen Darstellung festgehalten werden,

---

[1]) Miscell. Berol. Bd. 7. 1743. S. 91 u. ff.

[2]) Crelle's Journal. Bd. 54. S. 101.

[3]) Théorie des fonctions doublement périodiques. Paris 1859. S 1–42

[4]) Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Novi Comment. Acad. Imp. Petrop. Bd. 3. 1753. S. 170.

nach der die complexe Grösse $z = x + yi$ repräsentirt wird durch einen Punkt mit der Abscisse x und der Ordinate y in einer unendlichen Ebene, die man entweder als Fläche mit unendlich entfernter, etwa kreisförmiger Begrenzung, oder als eine geschlossene Fläche — etwa unendlich grosse Kugel — ansehen kann. Diese beiden Vorstellungen, von denen die letztere besonders instructiv zu sein scheint, unterscheiden sich für endliche Punkte nicht von einander; jener die Ebene begrenzende unendlich grosse Kreis degenerirt aber bei der zweiten Anschauung in einen einzigen Punkt, den Unendlichkeitspunkt.

Eine Function von $z = x + yi$ (fonction monogène nach Cauchy[1]) nennt nun Hr. Riemann eine Grösse w, die sich mit z der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}$$

gemäss ändert. Die ganze Theorie der Functionen complexer Variabelen ist also als eine ausgeführte Theorie dieser Differentialgleichung zu betrachten. Die erste Folgerung, die sich aus derselben ziehen lässt, ist die, dass sich eine solche Function stets nach dem Taylor'schen Lehrsatze in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $(z - a)$ entwickeln lässt, sobald sie in einem mit $mod\,(z - a)$ um a beschriebenen Kreise überall einen und nur einen endlichen bestimmten Werth hat. Sind daher die sämmtlichen Derivirten dieser Function für $z = a$ gegeben, oder ist, was hiemit im Wesentlichen zusammenfällt, die Function selbst auf einer endlichen Strecke von a aus bekannt, so ist sie dadurch für die ganze Kreisfläche bestimmt. Von dieser Kreisfläche aus kann man nun die Function nach allen Seiten hin fortsetzen und durch Wiederholung derselben Operation sie für alle Theile der Ebene bestimmen, in der $z = x + yi$ dargestellt wird; nur hat man zu berücksichtigen, dass bei dieser Fortsetzung kein Punkt überschritten wird, in dem die Function nicht endlich und bestimmt ist. Es

---

[1]) Ich benutze diese Gelegenheit, um auf ein weniger bekanntes „Mémoire sur les intégrales définies“ aufmerksam zu machen, das die erste Arbeit Cauchy's über diesen Gegenstand ist; es ist schon am 22. August 1814 der Pariser Akad vorgelegt, aber erst 1827 erschienen (Mém. prés. p. div. sav. à l'Ac. d. sciences. Bd. 1. S. 599. u. ff.)

geht hieraus hervor, dass eine auf einer endlichen Strecke gegebene Function durch einen gegebenen Flächenstreifen, in dem sie stets endliche Werthe hat, nur auf eine Weise fortgesetzt werden kann.

Es ist aber hiebei keineswegs ausgeschlossen, dass, je nach dem die Fortsetzung auf dem einen oder dem anderen Wege geschieht, für denselben Punkt sich mehrere Werthe der Function ergeben können. Man nennt eine Function, bei der dieser Fall eintritt, mehrwerthig, nennt aber eine Function innerhalb eines Theiles der Ebene einwerthig oder monodrom, wenn sie, in einer endlichen Strecke dieser Ebene als gegeben gedacht, immer denselben Werth beibehält, man mag sie durch einen innerhalb des Ebenenstückes liegenden Weg fortsetzen, durch welchen man will. Jeder mehrwerthigen Function kommen gewisse ausgezeichnete Punkte zu von der Beschaffenheit, dass wenn man die Function um sie herum fortsetzt und wieder zu dem Anfangswerthe zurückkehrt, dieselbe einen anderen Werth angenommen hat. Diese Punkte nennt Hr. Riemann Verzweigungspunkte. Ein solcher Verzweigungspunkt ist z. B. für $(x-a)^{\mu}$, wo μ eine beliebige complexe Zahl bezeichnet, der Punkt $x=a$; lässt man x von einem Punkte $x=x_1$ ausgehen und geht um $x=a$ herum wieder zu $x=x_1$ zurück, so wird die Function bei diesem Umlaufe den Factor $e^{2\mu\pi i}$ erhalten haben. Nur wenn μ eine reelle ganze Zahl ist, wird $x=a$ kein Verzweigungspunkt sein. In jedem Ebenenstücke, welches den Punkt $x=a$ weder in sich enthält, noch umschliesst, ist die Function $(x-a)^{\mu}$ monodrom. Ebenso ist $x=a$ für $log\ (x-a)$ ein Verzweigungspunkt; bei jedem Umlaufe um denselben ändert sich $log\ (x-a)$ um $2\pi i$.

Es besteht nun ein wesentlicher Unterschied der algebraischen und transscendenten mehrwerthigen Functionen darin, dass erstere nach einer endlichen Anzahl von Umläufen ihren ursprünglichen Werth wieder erlangen, während dies bei letzteren im Allgemeinen nicht der Fall ist. Sieht man ganz von ersteren ab, so ist einleuchtend, dass die Untersuchung mehrwerthiger Transscendenten ungemein erleichtert werden wird, wenn man sich von der Vieldeutigkeit der Function für einen und denselben Werth des Argumentes befreien kann. Zu diesem Zwecke denkt sich Hr. Riemann die Ebene in bestimmten von den Verzweigungspunkten ausgehenden Linien zerschnitten, so dass die Function innerhalb des nicht zerschnittenen Theiles der Ebene monodrom ist, d. h. man denkt sich gewisse Linien festgesetzt, durch welche die Variabele niemals gehen darf und die als Begrenzung der Ebene angesehen werden. Zerschneidet man z. B. die Ebene der x in einer von $x=a$ bis $x=\infty$ gehenden sonst willkührlichen, nur sich selbst nicht schneidenden — nicht verknoteten — Linie, so kann x niemals um $x=a$ herumgehen und es wird $(x-a)^\mu$ für jeden Punkt der Ebene eine bestimmte Bedeutung haben, sobald man seinen Werth nur in einem einzigen Punkte festsetzt. Ebenso wird bei derselben Zerschneidung $log\,(x-a)$ in der zusammenhängenden Ebene monodrom bleiben. Nimmt man specieller an, die Ebene wäre in der negativen reellen Achse zerschnitten und $log\,x$ sei für reelle positive x reell, so wird die im Allgemeinen willkührliche ganze Zahl m in $log\,(re^{\varphi i}) = log\,r + (\varphi + 2m\pi)i$, wo $log\,r$ stets reell vorausgesetzt ist, so bestimmt werden müssen, dass für $\varphi = 0$, $log\,(re^{\varphi i})$ reell ist, also $m=0$. Setzt man also $log\,(re^{\varphi i}) = log\,r + \varphi i$, so wird der Logarithmus, da φ niemals über $\pm\pi$ wachsen kann, in dem unzerschnittenen Theile der Ebene überall monodrom sein. Der Logarithmus eines unendlich dicht über der negativen reellen Achse gelegenen Punktes, für den $\varphi=\pi$ ist, wird danach $log\,r + \pi i$ sein; der Logarithmus eines unendlich dicht unter derselben Achse gelegenen Punktes $\varphi = -\pi$ ist dagegen $log\,r - \pi i$.

Ist nun beidemal r dasselbe, so wird der Logarithmus zweier unendlich nahen Punkte der negativen Achse, deren einer über, deren anderer unter der Schnittcurve liegt, um $2\pi i$ verschieden sein. Es wird im Folgenden häufig von der Zerschneidung der Ebene von $x=0$ bis $x=+\infty$ auf der reellen positiven Achse Gebrauch gemacht werden. Nimmt man dann $log\,(-x)$ für negative reelle x als reell an, so ist $log\,(-re^{\varphi i}) = log\,r + (\varphi - \pi)i$ zu setzen, wobei wiederum $log\,r$ stets reell angenommen werden soll. Wenn $\varphi = +\pi$, so ist $log(-re^{\varphi i}) = log\,r$ in der That reell; für $\varphi=0$ hat man $log(-re^{\varphi i}) = log\,r - \pi i$, für $\varphi = 2\pi$, $log\,(-re^{\varphi i}) = log\,r + \pi i$. Ganz dieselben Zerschneidungen lassen sich auch für $(-x)^\mu = e^{\mu\,log(-x)}$ in Anwendung bringen.

Die Function $(x-a)^\mu$ ebenso wie $log(x-a)$ hat nur einen Verzweigungspunkt im Endlichen. Ebenso gibt es auch Functionen mit mehreren Verzweigungspunkten im Endlichen, wie denn $(x-a)^{\mu}(x-b)^{\nu}$, wo μ, ν keine reellen ganzen Zahlen sind, oder $log(x-a)(x-b)$ einfache Beispiele von Functionen mit zwei endlichen Verzweigungspunkten abgeben. Um $(x-a)^{\mu}(x-b)^{\nu}$ monodrom zu machen, wird man z. B. die Ebene in einer von $x=a$ nach $x=\infty$ und einer von $x=\infty$ nach $x=b$ gehenden, nicht verknoteten Linie zerschneiden können. Nur in dem Falle, dass $(\mu+\nu)$ eine reelle ganze Zahl ist, wird das System der Schnitte ein anderes sein müssen. Man sieht nämlich ein, dass bei einem Umlaufe um $x=a$ oder $x=b$ ein anderer Werth erreicht werden würde, nicht so aber, wenn a und b zugleich umlaufen werden, insofern die Function bei einem solchen Umlaufe den Factor $e^{2(\mu+\nu)\pi i}=1$ erhält. Es genügt also, um $(x-a)^{\mu}(x-b)^{\nu}$ in diesem Falle monodrom zu machen, dass die Ebene in einer, $x=a$ und $x=b$ verbindenden, nicht verknoteten Curve zerschnitten wird. Ebenso sieht man, dass $(x-a)^{\mu}(x-b)^{\nu}(x-c)^{\varrho}$ wo keine der Zahlen μ, ν, ϱ, wohl aber ihre Summe $(\mu+\nu+\varrho)$ eine reelle ganze Zahl sein soll, die drei Verzweigungspunkte $x=a$, b, c hat und dass sie monodrom wird, wenn man die Ebene in irgend einer, die Punkte a, b, c verbindenden, nicht verknoteten Curve zerschneidet.

Ich beschränke mich auf diese Bemerkungen, welche die Art und Weise, nach welcher ich später die Ebene zu zerschneiden haben werde, in das genügende Licht setzen, und füge über Integrale complexer Functionen noch Folgendes hinzu: [1])

Aus der partiellen Differentialgleichung, der die complexen Functionen überhaupt genügen müssen, folgt mit Leichtigkeit, [2]) dass das Integral $\int f(x)\,dx$, ausgedehnt über eine geschlossene Curve, innerhalb deren die Function überall monodrom, stetig und endlich ist, verschwinden muss, dass also das Integral zwischen zwei festen Punkten, auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt, denselben Werth hat, wenn man diese beiden Curven in einander überführen kann, ohne dabei durch einen Punkt

---

[1]) Vergl. Riemann, Crelle's Journal. Bd. 54. S. 105.

[2]) Vergl. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Göttingen 1851. S. 8 u. ff.

hindurchzugehen, in dem die Function mehrwerthig, unstetig oder unendlich ist.

Wird die Function $f(x)$ in dem Punkte $x = a$ unendlich gross erster Ordnung, so ist das Integral, ausgedehnt über die Begrenzung eines den Punkt $x = a$ einschliessenden Ebenenstückes, innerhalb dessen die Function überall monodrom, stetig und mit Ausnahme von $x = a$ endlich ist, gleich dem Integrale in derselben Richtung, ausgedehnt über einen unendlich kleinen, um $x = a$ beschriebenen Kreis und man hat daher, je nach der Integrationsrichtung

$$\int f(x)\,dx = \pm 2\pi i . \lim_{x=a} (x-a) f(x)$$

Es ist schon von Cauchy[1]) bemerkt worden, dass das über eine geschlossene Curve ausgedehnte Integral

$$\int d \log f(x)\, dx = \int \frac{\partial \log f(x)}{\partial x} = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \pm 2\pi i\,(S_1 - S_2)$$

wo S_1 die Summe der Exponenten ist, nach denen die monodrome Function $f(x)$ innerhalb der Integrationscurve unendlich gross wird und S_2 die Summe der Exponenten, nach welchen $f(x)$ innerhalb desselben Gebietes unendlich klein wird. Es folgt hieraus nach einer Bemerkung des Hrn. Riemann unmittelbar, dass eine Function in der ganzen Ebene ebenso oft unendlich klein, als unendlich gross werden muss.

Eine Function von x, die in keinem Punkte der Ebene und auch für $x = \infty$ nicht unendlich wird, ist, wie sich erweisen lässt, eine Constante. Jede mit x sich wirklich ändernde Function von x muss daher mindestens in einem Punkte unendlich gross und nach dem eben angeführten Satze auch mindestens in einem Punkte unendlich klein werden. Diese beiden Punkte können aber auch, wie hiefür $e^{\frac{1}{x}}$ ein einfaches Beispiel darbietet, in einen zusammenfallen.

---

[1]) Dieser Satz, der in der Theorie algebraischer Gleichungen zur Bestimmung der Anzahl complexer Wurzeln, die zwischen gegebenen Grenzen liegen, dienen kann, ist von Cauchy zuerst in einer lithographirten Abhandlung „Calcul des indices des fonctions“, Turin 1831, später in anderer Form im 25. Hefte des Journ. de l'éc. polyt. Paris 1837. S. 176 dargestellt.

§. 3.

Die Exponentialgrösse.

Es sei $\varphi(x)$ eine monodrome stetige Function, die für jeden endlichen Werth des Argumentes x von Null und Unendlich verschieden bleibt und der Functionalgleichung $\varphi(x+1)=\varphi(x)$ genügt.

Man bemerkt zunächst, dass diese Function stets in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

entwickelt werden kann und es wird nun zu untersuchen sein, wie die Coefficienten a_n dieser Reihe aus den gegebenen Eigenschaften von $\varphi(x)$ abgeleitet werden können und in wie weit sie durch dieselben bestimmt sind.

Infolge der Functionalgleichung $\varphi(x+1)=\varphi(x)$ wird die Function $\varphi(x)$ für $x=\pm\infty$ endlich, von Null und Unendlich verschieden bleiben. Soll daher $\varphi(x)$ im Allgemeinen keine Constante sein, so muss die Function bei der Annäherung an den Unendlichkeitspunkt von der Seite der positiven imaginären Achse her unendlich gross und bei der Annäherung von der Seite der negativen imaginären Achse unendlich klein werden, oder umgekehrt. Es muss aber nach den Bemerkungen auf S. 12 in diesem Falle die Function auf der Seite der positiven imaginären Achse in derselben Weise unendlich gross, als auf der Seite der negativen imaginären Achse unendlich klein werden, so dass $\varphi(x)\,\varphi(-x)$ für jedes unendliche x von Null und Unendlich verschieden sein wird. Da dies Product für endliche Werthe von x ebenfalls endlich bleibt, so ist $\varphi(x)\,\varphi(-x)$ eine Constante und zwar $[\varphi(o)]^2$, also

$$\varphi(x)\,\varphi(-x)=a_0{}^2$$

Die Derivirte $\varphi'(x)$, die derselben Functionalgleichung $\varphi'(x+1)=\varphi'(x)$ genügt, wird wie $\varphi(x)$ nur in dem Unendlichkeitspunkte unendlich werden können und muss in ihm unendlich werden, wenn sie nicht constant sein soll. In allen andern

Punkten muss $\varphi'(x)$ einen endlichen Werth haben; es fragt sich aber, ob $\varphi'(x)$ nicht für endliche x zu Null werden kann.

Integrirt man $\int d\log\varphi'(x)$ über die Begrenzung eines Rectangels mit den Eckpunkten $x=z$, $z+1$, $z+qi+1$, $z+qi$, wo die im Allgemeinen complexe Grösse z und die reelle q nur so gewählt werden müssen, dass $\varphi'(x)$ auf der Begrenzung des Rectangels nicht verschwindet, so ergibt sich zunächst, dass das Integral $\int d\log\varphi'(x)$ von $x=z$ bis $x=z+1$, $=\log\varphi'(z+1)-\log\varphi'(z)$ und da $\varphi'(z+1)=\varphi'(z)$, gleich Null ist. Ebenso verschwindet das Integral von $x=z+qi+1$ bis $x=z+qi$ genommen. Ausserdem aber ist das Integral von $x=z+1$ bis $x=z+qi+1$ dem Integrale von $x=z+qi$ bis $x=z$ entgegengesetzt gleich und es heben sich die Integrale über diese parallelen Seiten gegenseitig auf, so dass

$$\int d\log\varphi'(x)=0$$

Da $\varphi'(x)$ in diesem Rectangel nicht unendlich gross werden kann, so ist dieses Integral $=\pm 2\pi i.\ S$ also $S=0$, wobei S die Summe der positiven Exponenten darstellt, nach welchen $\varphi'(x)$ innerhalb dieses Rectangels unendlich klein wird. Es wird somit $\varphi'(x)$ innerhalb der Fläche des Rectangels nicht verschwinden und, da man die ganze Ebene mit solchen Rectangeln überdecken kann, so geht hieraus hervor, dass $\varphi'(x)$ für keinen endlichen Werth von x unendlich klein werden wird. Man gelangt auf diese Weise zu dem Resultate, dass $\varphi'(x)$ die sämmtlichen zur Definition von $\varphi(x)$ dienenden Eigenschaften ebenfalls besitzt, und es ist leicht, durch Fortsetzung des soeben angewandten Verfahrens nachzuweisen, dass allgemein $\varphi^{m}(x)$ die gleichen Eigenschaften besitzt. Es wird somit auch $\varphi^{m}(x)\,\varphi^{m}(-x)$ constant $=[\varphi^{(m)}(0)]^2$ also:

$$\varphi^{(m)}(x)\ \varphi^{(m)}(-x)=a_m{}^2$$

sein. Diese Gleichungen genügen nun, um die Coefficienten der Entwickelung von $\varphi(x)$ nach Potenzen von x bis auf a_0 und a_1 zu bestimmen. Da nämlich:

$$\varphi^{(m)}(x)=a_m+\frac{a_{m+1}}{1!}x+\frac{a_{m+2}}{2!}x^2+\ldots$$

$$\varphi^{(m)}(-x)=a_m-\frac{a_{m+1}}{1!}x+\frac{a_{m+2}}{2!}x^2-\ldots$$

so gibt der Coefficient von x^2 in dem Producte dieser Reihen die recurrirende Gleichung

$$a_m a_{m+2} = a_m^2 + 1$$

die aus zwei Coefficienten alle übrigen eindeutig bestimmt. Nehmen wir a_0 und a_1 willkührlich, so genügt

$$a_n = a_0 \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n$$

dieser Gleichung und wir haben daher

$$\varphi(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^n = a_0 e^{\frac{a_1}{a_0} x}$$

Nun soll aber $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ sein, also $e^{\frac{a_1}{a_0}} = 1$, welche Gleichung durch die Annahme $a_1 = 2k\pi i a_0$ erfüllt wird, wo k eine beliebige ganze Zahl, die Null mit eingeschlossen bedeutet. Es genügt daher $a_0 e^{2kx\pi i}$ allen obigen Bedingungen und ist auch die einzige ihnen genügende Function, so dass man jetzt den Satz aussprechen kann:

Die Exponentialgrösse $\varphi(x) = c e^{2kx\pi i}$, wo c ganz willkührlich, k eine beliebige ganze Zahl, ist die einzige monodrome stetige Function von x, die für alle endlichen Werthe von Null und Unendlich verschieden ist und der Functionalgleichung $\varphi(x+1) = \varphi(x)$ genügt.

Fügt man ausserdem die Gleichung $\varphi(0) = 1$, woraus sich $c = 1$ bestimmt, und die Bedingung hinzu, dass $\varphi(x)$ für alle reellen Werthe von x reell sein muss, so genügt diesen Voraussetzungen nur die Annahme $k = 0$, d. h. $\varphi(x)$ muss eine Constante und zwar $\varphi(x) = 1$ sein. Die Bedingung, dass $\varphi(x)$ für alle reellen Werthe von x reell sein muss, kann indess noch dahin reducirt werden, dass für irgend eine endliche Strecke der reellen Achse $\varphi(x)$ reell ist, weil dann in dieser sämmtliche Derivirte von $\varphi(x)$ reell sein müssen und $\varphi(x)$, nach dem Taylor'schen Lehrsatze in der reellen Achse fortgesetzt, in derselben überall reelle Werthe erhält. Als einfaches Corollar zu dem vorstehenden Satze ergibt sich daher folgendes Theorem:

Eine monodrome, stetige, für alle endlichen Werthe des Argumentes von Null und Unendlich verschiedene Function von x, die den Gleichungen $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, $\varphi(0) = 1$ genügt und auf einer endlichen Strecke der reellen Achse reell bleibt, ist eine Constante $\varphi(x)=1$.

Es lässt sich dieser Satz auch auf eine einfache Art direkt nachweisen: Zunächst ist klar, dass $\varphi(x)$ stets nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt werden darf und daher $\varphi(x)$ von jener reellen Strecke aus in der reellen Achse fortgesetzt, überall in derselben reelle Werthe annehmen muss, so dass $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... reell sind. Es wird somit die Entwickelung von $\varphi(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von x nur reelle Coefficienten haben und, wenn $\varphi(p+qi)=P+Qi$ gesetzt wird auch $\varphi(p-qi)=P-Qi$ sein, wo p, q, P, Q reelle Grössen sind. Man sieht hieraus, dass $\varphi(p+qi)$ und $\varphi(p-qi)$ mit unendlich wachsendem q entweder beide endlich bleiben, oder beide zu gleicher Zeit unendlich gross oder unendlich klein werden. Im ersten Falle ist $\varphi(x)$ constant; der zweite kann nicht eintreten, weil dann $\varphi(x)$ niemals unendlich würde; ebenso ist der dritte Fall unmöglich. Es muss also $\varphi(x)$ nothwendig eine Constante sein, die sich aus $\varphi(0)=1$ bestimmt.

Diese Sätze, die ihre volle Gültigkeit behalten, wenn man die formell allgemeinere Functionalgleichung $\varphi(x+m)=\varphi(x)$ wo m eine reelle Zahl bedeutet, zu Grunde legt, führen unmittelbar zu folgenden Theoremen[1]:

Eine monodrome, stetige, für alle endlichen Werthe des Argumentes von Null und Unendlich verschiedene Function $f(x)$, die für alle reellen Werthe von x reell ist und überall der Functionalgleichung

$$f(x+m)=nf(x)$$

genügt, wo m und $n>0$ reelle Zahlen sind, ist durch diese Bedingungen bis auf einen reellen constanten Factor bestimmt.

Der Beweis dieses Satzes liegt auf der Hand: Gäbe es nemlich zwei Functionen $f(x)$, die allen diesen Bedingungen genügten, so würde ihr Quotient $\varphi(x)$ alle in dem letzten Satze angeführten Bedingungen erfüllen, also eine, und zwar reelle Constante sein.

---

[1]) Es lassen sich diesen Sätzen noch manche andere allgemeinere Formen geben; ich habe jedoch, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, vorgezogen, sie in der Weise aufzuführen, wie sie im Folgenden Anwendung finden werden.

Den Bedingungen genügt:

$$f(x) = c\,e^{\frac{1}{m}x\log n} = c\,n^{\frac{x}{m}}$$

wo c eine reelle Constante und für $\log n$ der reelle Logarithmus zu wählen ist. Es ist dies die einzige Lösung obiger Functionalgleichung unter den angegebenen Voraussetzungen.

Als specieller Fall hievon erscheint

$$f(x) = c\,e^{\frac{1}{m}x\log m} = c\,m^{\frac{x}{m}}$$

als Lösung der Functionalgleichung

$$f(x+m) = m f(x)$$

und

$$f(x) = c\,e^{x\log m} = c\,m^{x}$$

als Lösung der Gleichung:

$$f(x+1) = m f(x)$$

wobei $m > 0$ stets reell gedacht wird.

Eine monodrome, stetige, für alle reellen Werthe von x reelle Function $f(x)$, die für alle geraden Zahlen . . . -4, -2, 0, $+2$, $+4$, . . . unendlich klein erster Ordnung wird, für alle übrigen endlichen Werthe von x aber von Null und Unendlich verschieden bleibt und der Functionalgleichung

$$f(x+2) = f(x)$$

genügt, ist durch diese Bedingungen bis auf einen reellen constanten Factor bestimmt.

Der Quotient zweier Functionen, denen alle diese Eigenschaften zukämen, würde nämlich nach dem obigen Satze eine reelle Constante sein. Da nun $f(x) = \sin x\pi$ diesen Bedingungen genügt, so ist

$$f(x) = c \sin x\pi$$

wo c reell, die allgemeinste und die einzige Lösung.

§. 4.

Die allgemeine Definition der Function $\Gamma(x)$ und ihre wesentlichen Eigenschaften.

Eine monodrome Function $\Gamma(x)$, die mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen $x = 0$, -1, -2, . . . überall im Endlichen stetig, von Null und Unendlich verschieden, für eine endliche

Strecke der reellen Achse reell ist, und den Gleichungen

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x),$$

$\Gamma(1)=1$ genügt, ist durch diese Bedingungen vollständig bestimmt.

Zunächst ist zu bemerken, dass aus der Functionalgleichung $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$ folgt, dass die Function für $x=0, -1, -2, \ldots$ unendlich gross erster Ordnung wird. Da $1:\Gamma(x)$ für alle endlichen Werthe von x endlich und stetig bleibt, so kann $1:\Gamma(x)$ von der Strecke der reellen Achse aus, in welcher es reell ist, mittels des Taylor'schen Lehrsatzes über die ganze reelle Achse reell fortgesetzt werden. Der Nachweis, dass es nur eine Function geben kann, welche den Bedingungen für $\Gamma(x)$ genügt, kann nun genau wie zuvor durch die Bemerkung geführt werden, dass der Quotient $\varphi(x)$ zweier, alle diese Bedingungen erfüllenden Functionen überall im Endlichen von Null und Unendlich verschieden, für die reelle Achse reell und der Functionalgleichung $\varphi(x+1)=\varphi(x)$ unterworfen ist, also eine Constante sein muss, die sich aus $\Gamma(1)=1$ der Einheit gleich bestimmt.

Ist nun $\Gamma(x)$ auf diese Weise vollständig definirt, so kann man den Satz aufstellen:

Die allgemeinste monodrome, stetige Function $f(x)$, die mit Ausnahme der Werthe $x=0, -1, -2, \ldots$ überall im Endlichen von Null und Unendlich verschieden bleibt, und der Functionalgleichung

$$f(x+1)=x f(x)$$

genügt, ist

$$f(x)=c\,e^{2kx\pi i}\,\Gamma(x)$$

wo c eine beliebige Constante nnd k eine ebenfalls beliebige ganze Zahl bedeutet.

Der Beweis dieser Behauptung ist leicht zu führen. Denn der Quotient $f(x):\Gamma(x)$ wird überall im Endlichen von Null und Unendlich verschieden sein und der Gleichung $\varphi(x+1)=\varphi(x)$ genügen müssen, ist also eine Exponentialgrösse $c\,e^{2kx\pi i}$.

Was nun die wesentlichen Eigenschaften dieser Function $\Gamma(x)$ betrifft, so folgt unmittelbar aus der Definition, nach der $1:\Gamma(x)$ für alle endlichen Werthe von x einen endlichen Werth hat, dass dieser Quotient $1:\Gamma(x)$ in eine für alle Werthe von x convergirende Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden kann — ein von Hrn. Weierstrass zuerst bemerktes Theorem. [1])

Das Product $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)$ bleibt von Null und Unendlich verschieden mit Ausnahme aller ganzzahligen Werthe von x, für welche es unendlich gross erster Ordnung wird; es ist reell für alle reellen x und verändert seinen Werth nicht, wenn x mit $(x+2)$ vertauscht wird. Denn es ist $\Gamma(x+2)=(x+1)\,x\,\Gamma(x)$ und $\Gamma(1-x)=(-x)\,(-x-1)\,\Gamma(-x-1)$, also $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)= \Gamma(x+2)\,\Gamma(-x-1)$ und somit darf nach dem letzten Satze des §. 3. dieses Product $=c : \sin x\pi$ gesetzt werden. Um die Constante c zu bestimmen, geht man anstatt von $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)= c : \sin x\pi$ bequemer von der hieraus abgeleiteten Gleichung $\Gamma(x+1)\,\Gamma(1-x)=cx : \sin x\pi$ aus, und erhält wenn $x=0$ gegesetzt wird: $c=\pi$, so dass sich also:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}$$

eine seit Euler [2]) häufig behandelte Formel, ergibt:

Der Quotient:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(x+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(xn)}=f(x)$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, wird für keinen endlichen Werth des Argumentes x Null oder Unendlich. Setzt man ferner $(x+\frac{1}{n})$ statt x, so erhält man leicht

$$f(x+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}f(x)$$

es sind daher alle Bedingungen erfüllt, die nach §. 3.

$$f(x)=c\,e^{-nx\log n}=cn^{-nx}$$

ergeben. Die nur von n abhängige Grösse c wird in der bekannten Weise gefunden, indem man $x=0$ setzt, wodurch

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{c}{n}$$

erhalten wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}$$

---

[1]) Ueber die Theorie der analytischen Facultäten. Crelle's Journal Bd. 51. S. 40.

[2]) Novi Comm. Acad. Petrop. Bd. 16. 1772. S. 121.

so findet man

$$\frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}\,\frac{\pi}{\sin\frac{2}{n}\pi}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{n-1}{n}\pi}=\left(\frac{c}{n}\right)^2$$

und hieraus $c=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$, wo die positive Quadratwurzel zu nehmen ist, so dass man schliesslich:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

erhält — das bekannte Gauss'sche Multiplicationstheorem,[1]) das für $x=0$ schon von Euler gegeben ist.

Durch verschiedene Methoden,[2]) deren Entwickelung hier zu weit führen würde, kann man aus der obigen Definition ableiten, dass der Quotient

$$\Gamma(x):e^{(x-\frac{1}{2})\log x-x}$$

für unendliche Werthe von x von Null und Unendlich verschieden bleibt. Eine einfache Verification zeigt übrigens, dass dieser asymptotische Werth der obigen Definition von $\Gamma(x)$ entspricht, insofern man aus demselben unmittelbar folgern kann, dass $\Gamma(x+1):\Gamma(x)$ mit unendlich wachsendem x unendlich gross erster Ordnung wird, was mit der Gleichung $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ übereinsimmt. Ueberhaupt kann man $\Gamma(x)$ auch durch folgende, diese Transscendente vollständig bestimmende Eigenschaften definiren:

Es ist $\Gamma(x)$ eine monodrome Function von x, die für alle endlichen Werthe von x von Null und Unendlich verschieden bleibt mit Ausnahme der Werthe $x=0, -1, -2, \ldots$, in denen sie unendlich gross erster Ordnung wird, die für unendliche Werthe des Argumentes unendlich wird wie $e^{(x-\frac{1}{2})\log x-x}$ und für welche $\Gamma(1)=1$ ist.

Es folgen hieraus ebenfalls mit Leichtigkeit die vorstehends angeführten Relationen zwischen verschiedenen $\Gamma(x)$; es wird aber nur in seltenen Fällen möglich sein, an einem vorliegenden Aus-

---

[1]) Disquis. circa seriem infinitam . . . Comment rec. soc. Gottingensis Bd. 2. 1813, a. a. 1811–13. Vergl. ferner Dirichlet: Sur les intégrales Eulériennes. (Crelle's Journal. Bd. 15. S. 261.)

[2]) Man kann hierüber u. A. einsehen die Abhandlung des Hrn. Lipschitz: Ueber die Darstellung gewisser Functionen durch d. Euler'sche Summenformel. Crelle's Journ. Bd. 56. S. 11.

drucke die in dieser Definition angezogenen Eigenschaften direct nachzuweisen und auf diesem Wege das Auftreten von $\Gamma(x)$ zu erkennen.

Ich bemerke noch, dass die monodrome Function $\Gamma(x)$ auch einen monodromen Werth als asymptotische Function haben muss und dass der in letzterer auftretende Logarithmus so zu bestimmen ist, dass derselbe auf der negativen reellen Achse unstetig und für positive reelle Werthe von x reell wird.

Bei den vorstehenden Untersuchungen ist es noch unentschieden geblieben, ob es überhaupt eine Function $\Gamma(x)$ gibt, die allen vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Der Nachweis, dass dies in der That der Fall ist, erledigt sich durch folgende explicite Darstellung einer solchen Function:

Da $\Gamma(x)$ für alle negativen ganzen Zahlen unendlich gross erster Ordnung wird, so stellt man $\Gamma(x)$ durch einen Ausdruck dar, der im Nenner die Factoren x, $x+1$, $x+2$, in. inf. enthält und wird, damit die einzelnen Factoren zur Einheit abnehmen, zunächst:

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.\ 2.\ \ldots\ldots\ n}{x(x+1)\ \ldots\ldots\ (x+n)} \varphi(x)$$

zu setzen haben, wo $\varphi(x)$ für reelle Werthe von x reell, stets von Null und Unendlich verschieden und so beschaffen sein muss, dass $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$; diese letztere Bedingung gibt für $\varphi(x)$ die Functionalgleichung

$$\lim \frac{\varphi(x+1)}{x+n+1} = \lim \varphi(x)$$

und, wenn man das endliche x gegen das unendlich wachsende n vernachlässigt $\varphi(x+1) = n\varphi(x)$. Man erhält daher nach §. 3., $\varphi(x) = c n^x$, wo die Constante c noch von n abhängen kann und so zu bestimmen ist, dass das unendliche Product convergirt. Gauss[1]) hat gezeigt, dass die Annahme $c=1$ dieser Bedingung genügt und man hat daher:

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1.\ 2.\ \ldots\ldots\ n}{x(x+1)\ \ldots\ldots\ (x+n)} n^x$$

[1]) Comment. rec. soc. Gott. Bd. 2. a. a. 1811—13.

— eine schon von Euler[1]) bemerkte und vielfach angewandte Formel.

§. 5.

Darstellung von $\Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral und Transformationen desselben.

Um $\Gamma(x)$ durch ein bestimmtes Integral darzustellen, wird es, da $\Gamma(x)$ für alle negativen ganzen Zahlen unendlich gross wird, zweckmässig sein $1:\Gamma(x)$ oder $1:\Gamma(-x)$ durch ein Integral auszudrücken, welches stets endlich, stetig und monodrom bleiben muss. Um nun auf die Differenzengleichung

$$\frac{1}{\Gamma(-x)}+\frac{x}{\Gamma(1-x)}=0$$

das geniale Verfahren Laplace's[2]) anzuwenden, nach welchem das Integral einer solchen Gleichung $=\int t^x u\,dt$ gesetzt und u als Function von t bestimmt wird, muss man bedenken, dass t^x im Allgemeinen eine mehrwerthige Function von t ist und also, um die Untersuchung in genügend allgemeiner Weise zu führen, die Ebene in einer von $t=0$ bis $t=\infty$ gezogenen Linie zu durchschneiden ist. Ich wähle zu diesem Zwecke die Achse der reellen positiven t und bestimme $log\,(-t)$ in $(-t)^x=e^{x\,log(-t)}$ reell für negative reelle t. Setzt man dann:

$$\frac{1}{\Gamma(-x)}=\int(-t)^x u\,dt$$

so erhält man mittels obiger Gleichung:

$$\int\{x(-t)^{x-1}+(-t)^x\}u\,dt=0$$

und, wenn $(-t)^x=w$, also $x(-t)^{x-1}=-\frac{\partial w}{\partial t}$ gesetzt wird:

$$\int\left(\frac{\partial w}{\partial t}-w\right)u\,dt=0$$

Diese Gleichung wird nun durch theilweise Integration in

$$wu-\int w\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\right)dt=0$$

---

[1]) Comm. Ac. Petrop. Bd. 5. 1738. S. 36 vergl. auch Nov. Comm. Ac. Petrop. Bd. 13. 1769. S. 3.

[2]) Mém. sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres. Mém. de math. et de phys. de l'Acad. roy. d. sc. Paris 1785. Année 1782. S. 1 u. ff. vergl. ferner Théorie des probab. Paris 1820. S. 126.

verwandelt, und wird, indem man w als willkührliche Grösse ansieht, erfüllt, wenn für beide Grenzen des Integrales u verschwindet und $\frac{\partial u}{\partial t}+u=0$, d. h. $u=ce^{-t}$ ist. Es wird aber im Allgemeinen $u=ce^{-t}$ nur für $t=+\infty$ verschwinden und man darf deshalb

$$\frac{1}{\Gamma(-x)}=c\int_{+\infty}^{+\infty}(-t)^x e^{-t}\,dt$$

setzen, wo von $t=+\infty$ oberhalb der Abscissenachse in einer Curve, welche die positive Achse nicht schneidet, bis $t=+\infty$ unterhalb der Abscissenachse zu integriren ist. Um die Constante c zu bestimmen, kann man $x=-1$ nehmen; dann wird die linke Seite der Einheit gleich und da in diesem Falle die Function unter dem Integralzeichen monodrom ist, das Integral von $t=+\infty$ um $t=0$, herum nach $t=+\infty$ zurück, gleich dem in einem unendlich kleinen Kreise um $t=0$ genommenen Integrale. Letzteres ist aber $=-2\pi i$ und man hat daher die Gleichung $1=-c.2\pi i$, also:

$$(1)\qquad -\frac{2\pi i}{\Gamma(-x)}=\int_{+\infty}^{+\infty}(-t)^x e^{-t}\,dt$$

Dieser Integralausdruck genügt nun ausser der Functionalgleichung $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ und $\Gamma(1)=1$ auch allen anderen Bedingungen. Er ist eine stetige, endliche, monodrome Function von x, die nur verschwindet, wenn die Integrationscurve die vollständige Begrenzung eines Theiles der Ebene bildet, in welchem die Function endlich bleibt. Das ist aber nur der Fall, wenn x eine positive ganze Zahl ist, in welchem Falle $1:\Gamma(-x)$ verschwinden soll. Ist überhaupt der reelle Theil von $x>-1$, so darf man, ohne dass das Integral unendliche Elemente erhält, den Integrationsweg unendlich dicht an der reellen Achse entlang führen und zwar oberhalb derselben von $t=+\infty$ bis $t=0$ und unterhalb von $t=0$ bis $t=+\infty$. Dann erhält man:[1])

---

[1]) Ich bemerke, dass sich im Folgenden, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, das Zeichen $\gtrless$ stets nur auf die reellen Theile der vorkommenden Grössen beziehen soll.

$$-\sin x\pi\int_0^\infty r^x e^{-r}dr=\frac{\pi}{\Gamma(-x)}\quad, x>-1$$

wobei r reell und $\log r$ in $r^x=e^{x\log r}$ reell zu nehmen ist. Man sieht also, dass $\Gamma(-x)$ für positive reelle Werthe von x reell ist und es werden somit in der That alle Bedingungen erfüllt, welche die Function definirten.

Man kann von dieser letzteren für $x>-1$ geltenden Gleichung aus auch rückwärts zu dem obigen Integralausdrucke (1) gelangen, indem man die vorstehenden Schlüsse in umgekehrter Ordnung auf einander folgen lässt. Von einer anderen Form der letzten Gleichung ausgehend, ist auf diese Weise mein hochverehrter Lehrer Hr. Scheibner[1]) schon vor längerer Zeit zu einem für alle Werthe von x gültigen Integrale für $\Gamma(x)$ gelangt.

Führt man in (1) at statt t als Integrationsvariabele ein, wo a eine reelle positive Zahl bezeichnet, so hat man:

$$(2)\qquad \int_{+\infty}^{+\infty}(-t)^x e^{-at}dt=-\frac{2\pi i}{a^{x+1}\Gamma(-x)}\quad, a>0$$

wobei $\log a$ in $a^{x+1}=e^{(x+1)\log a}$ reell zu nehmen ist.

Die Bedingung, dass a reell und positiv, kann leicht dahin erweitert werden, dass der reelle Theil von a positiv sein muss. Betrachtet man nämlich beide Seiten der vorstehenden Gleichung als Functionen von a, so sieht man zunächst, dass das Integral im Allgemeinen endlich und stetig bleiben wird, so lange nur der reelle Theil von a positiv ist; unter dieser Bedingung wird auch die rechte Seite eine stetige, monodrome Function von a sein, und, da die beiden Seiten der Formel (2) für reelle positive a als einander gleich nachgewiesen sind, so folgt ihre Gleichheit für complexe a mit positivem reellen Theile, also allgemein für $a>0$ aus den Bemerkungen auf S. 8 u. 9.

Es folgt aber weiter, dass sich, wenn der reelle Theil von $x<0$, also $(-t)^x$ für unendliche t verschwindet, beide Seiten auch noch stetig ändern, wenn man den positiven reellen Theil von

---

[1]) Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen. Ber. d. kön. sächsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 1856. S. 46 ff.

a unendlich klein werden lässt, da in diesem Falle die Exponentialgrösse e^{-at} überhaupt nur endliche Werthe annehmen kann. Die Gleichung (2) bleibt also unter der Voraussetzung $x < 0$ auch noch gültig, wenn der positive reelle Theil von a verschwindet.

Nach diesen Bemerkungen ist es nun leicht, die verschiedenen Integrale für $\Gamma(x)$ und $1 : \Gamma(x)$ darzustellen, die bisher auf die verschiedensten Weisen abgeleitet worden sind.

Ich habe schon bemerkt, dass sobald $x > -1$, der Integrationsweg unendlich dicht an die reelle Achse herangerückt werden darf. Lässt man dies in (1) und (2) geschehen und vertauscht x mit $(x-1)$, so erhält man die Gleichung:

$$3)\qquad \int_0^\infty r^{x-1} e^{-r} dr = \Gamma(x) \quad , \; x > 0$$

durch welche Legendre $\Gamma(x)$ definirt hat, und aus (2):

$$4)\qquad \int_0^\infty r^{x-1} e^{-ar} dr = \frac{\Gamma(x)}{a^x} \quad , \; \begin{matrix} x > 0 \\ a > 0 \end{matrix}$$

wo $\log r$ und $\log a$ in $r^{x-1} = e^{(x-1)\log r}$ und $a^x = e^{x \log a}$ für reelle positive r und a reell zu nehmen sind. Setzt man in (4) $a = \alpha + \beta i = \varrho e^{\varphi i}$, so findet man durch Zerlegung in den reellen und imaginären Theil die von Euler[1]) gegebenen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &5)\qquad \int_0^\infty r^{x-1} e^{-\alpha r} \cos\beta r \, dr = \frac{\Gamma(x)}{\varrho^x} \cos(x\varphi) \\ &6)\qquad \int_0^\infty r^{x-1} e^{-\alpha r} \sin\beta r \, dr = \frac{\Gamma(x)}{\varrho^x} \sin(x\varphi) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} x > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix}$$

Es ist nach den vorstehenden Bemerkungen erlaubt, so lange $x < 0$ in (2), α unendlich abnehmen zu lassen; die Integration durch Null hindurch ist aber nur erlaubt, sobald $x > -1$. Man hat also, wenn wieder x mit $(x-1)$ vertauscht wird für $a = \beta i$:

$$7)\qquad \int_0^\infty r^{x-1} e^{-\beta r i} dr = \frac{\Gamma(x)}{\beta^x} e^{-x\frac{\pi}{2} i} \quad , \; +1 > x > 0$$

[1]) De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum. Euleri Inst. calc. int. Bd. 4. S. 337.

und durch Trennung des Reellen und Imaginären:

$$\left.\begin{array}{l}(8)\quad \int\limits_0^\infty r^{x-1} \cos\beta r\, dr = \dfrac{\Gamma(x)}{\beta^x}\cos\left(x\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex](9)\quad \int\limits_0^\infty r^{x-1} \sin\beta r\, dr = \dfrac{\Gamma(x)}{\beta^x}\sin\left(x\dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\ 1 > x > 0$$

wobei β als positive reelle Grösse angesehen werden soll.

Diese letzteren Gleichungen kann man auf eine nicht uninteressante Weise durch Aenderung des Integrationsweges auch direct aus (2) ableiten.

Wird in (2) $x > -1$ angenommen, so ist, wie schon bemerkt, die Integration durch Null hindurch erlaubt. Ausserdem aber bleibt, so lange $x < 0$ ist, $(-t)^x e^{-at}$ auch endlich für unendlich wachsende t mit Ausnahme von $t = -\infty$. Man darf also unter der Bedingung $0 > x > -1$ als Integrationsweg die imaginäre Achse von $t = +\infty i$ durch Null hindurch nach $t = -\infty i$ wählen. Dann wird für $t = ri$ von $t = +\infty i$ bis $t = 0$

$$\log(-t) = \log(-re^{\frac{\pi}{2}i}) = \log r - \frac{\pi}{2} i$$

also

$$(-t)^x = r^x e^{-\frac{\pi}{2}xi}$$

zu setzen sein; für $t = -ri$ von $t = 0$ bis $t = -\infty i$

$$\log(-t) = \log(-re^{3\frac{\pi}{2}i}) = \log r + \frac{\pi}{2} i$$

und daher

$$(-t)^x = r^x e^{+\frac{\pi}{2}xi}$$

gesetzt werden müssen und somit nach (2)

$$(10)\quad \int\limits_0^\infty r^x \cos\left(ra + \frac{\pi}{2}x\right) dr = \frac{\pi}{a^{x+1}\,\Gamma(-x)} \qquad \begin{array}{c}0 > x > -1\\ a > 0\end{array}$$

Man kann nun der Gleichung (2) noch eine andere zur Seite stellen: Es ist nämlich klar, dass $(-t)^x e^{+at}$, wo $a > 0$, für alle unendlichen Werthe von t mit Ausnahme von $t = +\infty$ unendlich klein wird, sobald $x < 0$, dass also das Integral

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{-\infty} (-t)^x e^{+at} dt = 0 \qquad \begin{matrix} 0 > x \\ a > 0 \end{matrix}$$

wenn es zwischen zwei von $t = +\infty$ verschiedenen unendlichen Punkten auf einer die reelle positive Achse nicht schneidenden Curve genommen wird, weil in diesem Falle die Integrationscurve ein Ebenenstück begrenzt, innerhalb dessen die Function stetig und endlich ist. Setzt man $x > -1$ voraus, so darf man, wie oben, durch die imaginäre Achse integriren und erhält:

$$(12) \quad \int_0^\infty r^{x} \cos(ra - \frac{\pi}{2} x)\, dr = 0 \qquad \begin{matrix} 0 > x > -1 \\ a > 0 \end{matrix}$$

Addirt und subtrahirt man (10) und (12), so erhält man die beiden von Euler gegebenen Integrale (8) und (9) [1]).

Vertauscht man in (1) und (11), x mit $(-x)$, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} (13) \quad \displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{(-t)^x} dt = -2\pi i \frac{a^{x-1}}{\Gamma(x)} \\[2em] (14) \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{+at}}{(-t)^x} dt = 0 \end{matrix}\right\} a > 0$$

Es wird nun, sobald $x > 0$ ist, in beiden Integralen erlaubt sein, als Integrationsweg eine mit der imaginären Achse parallele auf ihrer negativen Seite liegende Gerade zu wählen. Setzen wir daher $t = -k + ri$, wo k eine im Allgemeinen complexe Zahl mit positivem reellen Theile bedeutet, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} (15) \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ari}}{(k+ri)^x} dr = \frac{2\pi}{\Gamma(x)} a^{x-1} e^{-ak} \\[2em] (16) \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ari}}{(k+ri)^x} dr = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x > 0 \\ a > 0 \\ k > 0 \end{matrix}$$

---

[1]) Vergl. hierüber Laplace, Théorie des probabilités. Paris 1820 S. 482 u. ff., ferner Cauchy, Mém. prés. p. div. savans. Bd. 1. S. 631 und 635.

Das erste dieser Integrale hat für $a=1$ zuerst Laplace entwickelt.[1])

Legendre hat diese Integrale auf eine interessante Weise transformirt.[2]) Integrirt man nämlich in (13) und (14) auf einer geraden Linie von $t=-1+\infty i$ bis $t=-1-\infty i$, so darf man für den Theil des Integrationsweges, der oberhalb -1 liegt

$$t=-1+i\,tan\,\varphi=-\frac{1}{cos\,\varphi}e^{-\varphi i}$$

und

$$(-t)^x=\left(\frac{1}{cos\,\varphi}\right)^x e^{-x\varphi i}$$

von $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi=0$; für den anderen Theil

$$t=-1-i\,tan\,\varphi=-\frac{1}{cos\,\varphi}e^{\varphi i}$$

und

$$(-t)^x=\left(\frac{1}{cos\,\varphi}\right)^x e^{x\varphi i}$$

von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{\pi}{2}$ setzen, wo $log\,cos\,\varphi$ in

$$\left(\frac{1}{cos\,\varphi}\right)^x=e^{-x\,log\,cos\,\varphi}$$

als Logarithmus einer positiven Zahl immer reell zu nehmen ist. Man erhält auf diese Weise die beiden Integrale:

$$\left.\begin{aligned}
&(17)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{x-2}\varphi\,cos(a\,tan\,\varphi-x\varphi)d\varphi=\frac{\pi}{\Gamma(x)}a^{x-1}e^{-a}\\
&(18)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{x-2}\varphi\,cos(a\,tan\,\varphi+x\varphi)d\varphi=0
\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&x>0\\&a>0\end{aligned}$$

Das erste dieser Integrale ist das Legendre'sche; addirt oder subtrahirt man beide, so erhält man die höchst eleganten Formeln:

---

[1]) Mém. de l'Acad. d. sciens. 1785. S. 60. u. Théorie d. probab. S. 126. Fernere Literatur: Cauchy, Journal de l'école polyt. 19 Heft. S. 569, Cauchy, Mém. sur l. int. déf. pris. entre lim. imag. S. 34 und 36. Poisson, Journal de l'école polyt 19. Heft. S. 481, Liouville, Crelle's Journal Bd. 13. S. 231.

[2]) Legendre, Exercices de calcul intégral. 3. Theil. Des quadratures S. 354. Vergl. ferner: Lobatschewsky, Mém. Kasan 1835. S. 211; Kummer, Crelle's Journal Bd. 17. S. 235.

$$(19)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{x-2}\varphi \cos(a\tan\varphi)\cos(x\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2\,\Gamma(x)} a^{x-1} e^{-a}$$

$$(20)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{x-2}\varphi \sin(a\tan\varphi)\sin(x\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2\,\Gamma(x)} a^{x-1} e^{-a}$$

$$\left.\right\} \begin{array}{l} x>0 \\ a>0 \end{array}$$

Es ist hiermit eine Reihe von Transformationen des Euler'schen Integrales zweiter Gattung auf einem so einfachen und natürlichen Wege entwickelt, dass die ausserordentliche Fruchtbarkeit dieser Methode wohl keinem Zweifel unterliegen kann.

§. 6.

Die allgemeine Form des Euler'schen Integrales erster Gattung.

Die Function von x:

$$(x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2}$$

in der a, b, c, p, q beliebige complexe Constanten bedeuten, hat die drei Verzweigungspunkte a, b, c; sie wird für unendlich grosse Werthe von x unendlich klein zweiter Ordnung und ändert ihren Werth nicht beim Umlaufe um den Unendlichkeitspunkt $x=\infty$. Ebenso wird die Function nach einem Umlaufe um alle drei Verzweigungspunkte, da die Summe der Exponenten eine ganze Zahl beträgt, denselben Werth wieder annehmen, nach dem Umlaufe um einen oder zwei dieser Verzweigungspunkte aber einen Factor erhalten, der so lange p, q oder $(-p-q)$ nicht ganze Zahlen sind, von der Einheit verschieden ist. Es wird also, um $(x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2}$ in der Ebene monodrom zu machen, genügen, die drei Verzweigungspunkte a, b, c durch eine sich selbst nicht scheidende und nicht geschlossene Curve zu verbinden und sich in dieser die Ebene zerschnitten zu denken. Wir wollen dabei die Vereinbarung treffen, dass a und c stets die Endpunkte dieser Curve sein sollen, so dass a, b, c auf der Curve nacheinander folgen. Dann wird es möglich sein, die Function so zu bestimmen, dass sie ausserhalb dieser Curve stets monodrom, endlich und stetig ist.

Das Integral dieser Function über irgend eine geschlossene Curve, die innerhalb des unzerschnittenen Theiles der Ebene liegt, also die Verbindungslinie von a, b, c nicht trifft, wird stets gleich Null sein. Denn eine solche Curve zerschneidet die Ebene, die nach den Bemerkungen auf S. 8 als eine geschlossene Fläche angesehen werden soll, in zwei Theile. In einem dieser Theile werden die Verzweigungspunkte enthalten sein; in dem anderen wird die Function überall — mag in ihm der Unendlichkeitspunkt eingeschlossen sein oder nicht — stetig, endlich und monodrom sein; das Integral über die Curve, als Begrenzung dieses Theiles betrachtet, wird daher stets verschwinden müssen.

Wird nun im Folgenden stets angenommen, dass q einen reellen Theil hat, der grösser als -1 ist, so darf man das Integral, ohne dass es seinen Sinn verliert oder unendlich wird, bis zu dem Verzweigungspunkte b selbst fortsetzen. Das Integral

$$\int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx,$$

ausgedehnt über eine Curve, die auf der einen Seite des Schnittes in b beginnt, in einer beliebigen Curve um a herum geht und auf der anderen Seite des Schnittes wiederum in b endigt, wird nach dem eben Bemerkten dem Integrale gleich werden, das über eine in demselben Punkte b beginnende, um c in ä nlicher Weise herumgehende und auf der anderen Seite wieder in b endigende Curve ausgedehnt ist.

Sind a, b, c bestimmte, von einander verschiedene Grössen, so können diese beiden einander gleichen Integrale, so lange $q > -1$, für keinen Werth von p unendlich oder unstetig werden, da sie über eine endliche Curve ausgedehnt sind, auf der die zu integrirende Function niemals unendlich oder unstetig wird; wohl aber gibt es Werthe von p, für welche diese Integrale verschwinden. Diese Werthe müssen so beschaffen sein, dass für dieselben einer der Punkte a, c aufhört, ein Verzweigungspunkt zu sein. Dies ist aber nur möglich, sobald p oder $(p+q+2)$ positive oder negative ganze Zahlen sind. Ist nämlich p eine ganze Zahl, so ist $x=a$ kein Verzweigungswerth und das Integral von b um a herum nach b zurück ist über eine Curve ausgedehnt, welche die vollständige Begrenzung eines Flächenstückes bildet, innerhalb dessen die Function monodrom bleibt. Wenn nun p eine ganze negative Zahl ist, so ist dieses Integral gleich dem Integral in einem unendlich kleinen Kreise um den Punkt $x = a$ herum, in dem die Function unendlich gross wird, hat also einen endlichen Werth; ist aber p eine ganze positive Zahl (die Null mit eingeschlossen) so ist die Function innerhalb des von der Integrationscurve eingeschlossenen Gebietes überall monodrom, endlich und stetig; das Integral wird also in diesem Falle verschwinden.

Dasselbe Integral von b um a herum nach b zurück, kann aber ausserdem noch in einem anderen Falle verschwinden. Die Integrationscurve zerschneidet nämlich die Ebene in zwei Theile, in deren einem sich der Punkt $x = a$, in deren anderem sich der Punkt $x = c$ befindet. Es wird daher das Integral auch verschwinden, wenn $(p + q + 2)$ eine ganze negative Zahl ist, in welchem Falle die Integrationscurve die vollständige (äussere) Begrenzung eines Flächenstückes bildet, innerhalb dessen die Function überall monodrom, endlich und stetig ist.

Ebenso zeigt sich, dass das Integral von b um c herum, das dem um a genommenen Integrale gleich ist, ebenfalls nur verschwinden kann, sobald p eine positive ganze und $(p + q + 2)$ eine negative ganze Zahl ist, in beiden Fällen die Null eingerechnet.

Das betrachtetete Integral wird daher, sobald a, b, c constante, von einander verschiedene Werthe sind, für alle ganzzahligen Werthe von p und $(-p - q - 2)$ unendlich klein werden, sonst aber stetig und von Null und Unendlich verschieden bleiben.

Nachdem die Wurzelwerthe des Integrales, als Function von p betrachtet, gefunden sind, ist es nöthig, das Integral in Bezug auf seine Abhängigkeit von a, c einer Prüfung zu unterziehen. Nehmen wir zu diesem Zwecke an, a nähere sich unendlich dem Verzweigungswerthe b, so wird sich das Integral unendlich dem von b um c genommenen Integrale

$$\int_b^b (x - b)^{p+q} (x - c)^{-p-q-2} \, dx = \frac{1}{b - c} \int_b^b \left(\frac{x - b}{x - c}\right)^{p+q} d\left(\frac{x - b}{x - c}\right)$$

nähern; das letztere Integral ist, unbestimmt genommen:

$$= \frac{1}{b - c} \frac{1}{p + q + 1} \left(\frac{x - b}{x - c}\right)^{p+q+1}$$

und es ist nun die Differenz dieses Ausdruckes für $x = b$ oberhalb der Schnittcurve und unterhalb letzterer zu bilden.

Beide Werthe werden sich nur durch einen Exponentialfactor unterscheiden und es wird daher diese Differenz unendlich wie $(x-b)^{p+q+1}$ für $x=b$, und zwar unendlich klein oder unendlich gross, je nachdem $(p+q+1)>0$ oder <0 ist. Das Integral wird daher, mit $(a-b)^{-p-q-1}$ multiplicirt, für $a=b$ von Null und Unendlich verschieden bleiben. Wenn man c unendlich dicht an b heran rücken lässt, so findet man durch ein ähnliches Verfahren, dass das Integral unendlich wird, wie $(x-b)^{-p-1}$ für $x=b$, so dass also das Integral, mit $(b-c)^{p+1}$ multiplicirt, von Null und Unendlich verschieden bleibt. Lässt man a unendlich nahe an c heran rücken, indem man die beiden Endpunkte der Schnittcurve einander unendlich nähert, ohne die Curve selbst unendlich klein werden zu lassen, so wird sich die Function $(x-a)^p\,(x-b)^q\,(x-c)^{-p-q-2}$ einer von p unabhängigen Function beliebig annähern; die Ordnung, in der das Integral für $a=c$ unendlich gross oder unendlich klein wird, ist daher von p unabhängig und wird durch Specialisirung des Werthes von p unten erhalten werden.

Man sieht nun hieraus, dass, wenn mit Q eine nur von q, a, c abhängige Function bezeichnet wird:

$$\int_b^b (x-a)^p\,(x-b)^q\,(x-c)^{-p-q-2}\,dx = \quad ,\ q>-1$$

$$Q\,(a-b)^{p+q+1}\,(b-c)^{-p-1}\,F(p)$$

gesetzt werden kann, wo $F(p)$ eine Function von p bezeichnet, welche für alle ganzzahligen positiven Werthe von p und $(-p-q-2)$ unendlich klein wird, sonst aber überall stetig, von Null und Unendlich verschieden ist.

Um nun zunächst $F(p)$ genauer zu bestimmen, setze ich das Integral in die Form

$$\int_b^b \left(\frac{x-a}{x-c}\right)^p \left(\frac{x-b}{x-c}\right)^q d\left(\frac{x-a}{x-c}\right)$$

und leite hieraus nach einer bekannten Reductionsformel:

$$=\frac{a-c}{a-b}\,\frac{1}{p+1}\left(\frac{x-a}{x-c}\right)^{p+1}\left(\frac{x-b}{x-c}\right)^{q+1}$$

$$+\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{p+q+2}{p+1}\int\left(\frac{x-a}{x-c}\right)^{p+1}\left(\frac{x-b}{x-c}\right)^{q}d\left(\frac{x-a}{x-c}\right)$$

ab; das erste Glied dieses Ausdruckes ist zwischen den Grenzen b und b zu nehmen und wird, $q>-1$ vorausgesetzt, verschwinden, so dass man, beide Integrale über denselben Integrationsweg ausgedehnt:

$$\int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx =$$

$$\frac{c-b}{a-b}\cdot\frac{p+q+2}{p+1}\int_b^b (x-a)^{p+1}(x-b)^q (x-c)^{-p-q-3} dx$$

erhält. Nun ist

$$\int_b^b (x-a)^{p+1}(x-b)^q (x-c)^{-p-q-3} dx =$$

$$Q\,(a-b)^{p+q+2}(b-c)^{-p-2}F(p+1)$$

und somit:

$$F(p)=-\frac{p+q+2}{p+1}F(p+1)$$

Die Bedingungen, dass $F(p)$ nur verschwindet, wenn p oder $(-p-q-2)$ ganze positive Zahlen (die Null eingeschlossen) sind, sonst aber überall von Null und Unendlich verschieden ist, und die vorstehende Functionalgleichung, werden offenbar erfüllt wenn

$$F(p)=\frac{\varphi(p)}{\Gamma(-p)\,\Gamma(p+q+2)}$$

gesetzt wird, wo nun $\varphi(p)$ eine monodrome, stetige, überall von Null und Unendlich verschiedene Function bezeichnet, für welche $\varphi(p+1)=\varphi(p)$ ist. Man hat daher $\varphi(p)=c\,e^{2pk\pi i}$ zu setzen, wo c eine von p nicht abhängige Constante, die in Q mit eingerechnet werden kann und k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man kann hienach:

$$\int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx$$

$$=Q\,(a-b)^{p+q+1}(b-c)^{-p-1}\frac{1}{\Gamma(-p)\,\Gamma(p+q+2)}$$

setzen, wobei man von Exponentialfactoren $e^{2kp\pi i}$ absieht, die von der willkührlichen Bestimmung der vieldeutigen Potenzen abhängen.

Um nun das von p nicht abhängige Q zu bestimmen, kann man für p einen solchen Werth wählen, dass sich das Integral direct finden lässt. Ein solcher ist z. B. $p=-1$; dann ist a kein Verzweigungspunkt mehr, wohl aber wird in ihm die Function unendlich und man hat:

$$\int_b^b \frac{(x-b)^q (x-c)^{-q-1}}{x-a} dx = 2\pi i (a-b)^q (a-c)^{-q-1}$$

also aus der vorstehenden Gleichung

$$Q = 2\pi i \cdot \Gamma(q+1) \cdot (a-c)^{-q-1}$$

so dass man nun in folgender Gleichung das Resultat aller dieser Betrachtungen darstellen kann:

$$\int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx = \quad , \quad q > -1$$

$$2\pi i (a-b)^{p+q+1} (b-c)^{-p-1} (a-c)^{-q-1} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(-p)\,\Gamma(p+q+2)}$$

Dieses Integral, das für alle p gilt, ist wohl die allgemeinste Form des Euler'schen Integrales erster Gattung und man kann aus demselben leicht alle speciellen Formen desselben, die entweder die von Binet[1]) mit $B(p, q)$ bezeichnete Function oder deren reciproken Werth darstellen, ableiten.

Für den directen Gebrauch ist es zweckmässig, anstatt dieser einzigen Gleichung ein System von 6 Formeln, die sich aus diesem einen Integrale durch einfache Vertauschungen ergeben, aufzustellen:

$$(1) \int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx = \quad , \quad q > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{-p-1} (c-a)^{-q-1} (a-b)^{p+q+1} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(-p)\,\Gamma(p+q+2)}$$

---

[1]) Journal de l'école polyt. 27. Heft. S. 131.

$$(2) \int_b^b (x-a)^{-p-q-2}(x-b)^q (x-c)^p dx = \quad , q > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{p+q+1}(c-a)^{-q-1}(a-b)^{-p-1} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(-p)\Gamma(p+q+2)}$$

$$(3) \int_b^b (x-a)^q (x-b)^p (x-c)^{-p-q-2} dx = \quad , p > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{-q-1}(c-a)^{-p-1}(a-b)^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-q)\Gamma(p+q+2)}$$

$$(4) \int_b^b (x-a)^{-p-q-2}(x-b)^p (x-c)^q dx = \quad , p > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{p+q+1}(c-a)^{-p-1}(a-b)^{-q-1} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(-q)\Gamma(p+q+2)}$$

$$(5) \int_b^b (x-a)^p (x-b)^{-p-q-2}(x-c)^q dx = \quad , -p-q-2 > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{-p-1}(c-a)^{p+q+1}(a-b)^{-q-1} \frac{\Gamma(-p-q-1)}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)}$$

$$(6) \int_b^b (x-a)^q (x-b)^{-p-q-2}(x-c)^p dx = \quad , -p-q-2 > -1$$

$$2\pi i (b-c)^{-q-1}(c-a)^{p+q+1}(a-b)^{-p-1} \frac{\Gamma(-p-q-1)}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)}$$

Es ist in allen diesen Gleichungen die reelle Zerschneidung vorausgesetzt und stets von b um a oder um c herum nach b zu integriren. Da die Function unter dem Integralzeichen auch für unendliche Werthe von x endlich und stetig bleibt, so ist es ohne Weiteres erlaubt, diese Integration auch durch den Unendlichkeitspunkt hindurch gehen zu lassen.

§. 7.

Transformationen des Euler'schen Integrales erster Gattung.

Bleibt man bei der Gleichung (1) des §. 6 stehen, so sieht man, dass, wenn ausser $q > -1$ auch $p > -1$ vorausgesetzt wird, der Integrationsweg unendlich dicht an der a, b verbindenden Schnittcurve entlang genommen werden kann und man findet auf die schon bei dem Integrale zweiter Gattung angewandte Weise:

$$\int_b^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx = \quad , \quad \begin{matrix} p>-1 \\ q>-1 \end{matrix}$$

$$2i \sin p\pi \int_b^a (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx$$

und somit:

$$1) \int_a^b (x-a)^p (x-b)^q (x-c)^{-p-q-2} dx = \quad , \quad \begin{matrix} p>-1 \\ q>-1 \end{matrix}$$

$$(b-c)^{-p-1} (c-a)^{-q-1} (b-a)^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$$

Setzt man hierin $a=0$, $b=1$, so findet man:

$$2) \int_0^1 \frac{x^p (1-x)^q}{(x-c)^{p+q+2}} dx = \frac{1}{(1-c)^{p+1} c^{q+1}} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}, \quad \begin{matrix} p>-1 \\ q>-1 \end{matrix}$$

In dieser von Abel[1]) auf ganz andere Weise entwickelten Formel ist die Ebene in einer $x=0$, 1, c der Reihe nach verbindenden Curve zu zerschneiden. Lässt man c in das Unendliche rücken, so wird, indem man beiderseits mit c^{p+q+2} multiplicirt, die gewöhnliche Euler'sche Gleichung[2]):

$$3) \int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}, \quad \begin{matrix} p>-1 \\ q>-1 \end{matrix}$$

---

[1]) Oeuvres compl. Bd. 1. S. 95 und Crelle's Journ. Bd. 2. S. 24.

[2]) Comment. Acad. Petrop. Bd. 5. 1738. S. 38 Man sieht übrigens leicht, wie man von dieser Gleichung, nachdem man ihre Gültigkeit für jedes p hergestellt hat, auf mein allgemeines Integral zurückgehen kann. Die drei Verzweigungspunkte von $x^p (1-x)^q$ sind $x=0$, 1, ∞ und man gelangt zu dem obigen Systeme von 6 Formeln, indem man an die Stelle von x einen rationalen Ausdruck ersten Grades von x setzt, der für $x=0$, 1, ∞ die Werthe a, b, c in irgend einer Reihenfolge annimmt. Es lässt sich aber die hiebei als Grundlage angenommene Gleichung (3), da sie keine unbeschränkte Veränderung von p gestattet, direct nur durch mehr oder minder complicirte Operationen entwickeln.

erhalten, wobei der Exponentialfactor, den man der rechten Seite aller vorstehenden Gleichungen hinzufügen darf, in der entsprechenden Weise bestimmt werden muss.

Lässt man in (1) b ins Unendliche wachsen, so erhält man, nachdem beiderseits mit b^q dividirt ist:

$$4)\quad \int_0^\infty (x-a)^p (x-c)^{-p-q-2} dx =$$

$$(c-a)^{-q-1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}, \quad \begin{matrix} p > -1 \\ q > -1 \end{matrix}$$

Setzt man noch specieller $a=0$, $c=-1$, wo nun die Ebene auf der reellen Achse von $x=0$ bis $x=+\infty$ und von $x=-\infty$ bis $x=-1$ zu zerschneiden ist, so hat man:

$$5)\quad \int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^{p+q+2}} dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}, \quad \begin{matrix} p > -1 \\ q > -1 \end{matrix}$$

— eine ebenfalls von Euler herrührende Formel.

Benutzt man die Formel (5) des §. 6., worin $-p-q > 1$ sein soll und lässt in ihr b in's Unendliche wachsen, so hat man:

$$6)\int (x-a)^p (x-c)^q dx = 2\pi i (c-a)^{p+q+1} \frac{\Gamma(-p-q-1)}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)}$$

$$-p-q > 1$$

Wenn man hierin die Integration von $x=+\infty i$ bis $x=-\infty i$ auf der imaginären Achse vornimmt, indem man $a > 0$, $c < 0$ voraussetzt, so hat man:

$$7)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(xi-a)^p (xi-c)^q} = 2\pi (c-a)^{1-p-q} \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)},$$

$$p+q > 1,\ c < 0,\ a > 0$$

In dieser interessanten, von Cauchy gegebenen Formel [1]) ist, wenn a und c etwa als reell vorausgesetzt werden, die Ebene von $x=a$ bis $x=+\infty$ und von $x=-\infty$ bis $x=c$ in nicht ver-

---

[1]) Mém. sur les int. déf. pris. entre d. lim. imag. S. 34.

knoteten, die imaginäre Achse nicht treffenden Linien zu zerschneiden.

Ich gebe noch die Ableitung einer Transformation des Euler'schen Integrales, bei welcher die Integrationsvariabele keine Curvenstrecke, sondern die einer solchen entsprechenden Winkelgrösse ist:

Setzt man in (1) des §. 6. $a=0$, $b=1$, so ist es erlaubt, die Integration in dieser Gleichung auf einen durch den Punkt $x=1$ mit der imaginären Achse parallel gezogenen unendlichen Geraden vorzunehmen. Setzt man dann $c=\infty$ und vertauscht p, q mit $-p$, $-q$, so erhält man:

$$8)\quad \int \frac{dx}{(x-1)^q (-x)^p} = 2\pi i \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(p)\Gamma(2-p-q)}, +1>q$$

Der gedachte Integrationsweg von $x=1$ parallel mit der imaginären Achse bis $x=1+\infty i$ und ebenso von $x=1-\infty i$ bis $x=1$, darf dann auch hier noch angewandt werden, sobald die Function unter dem Integralzeichen für unendliche x endlich bleibt, also wenn $p+q>0$. Die Verzweigungspunkte sind $x=0$, 1, ∞ und man denke sich die Ebene in der positiven Achse zerschnitten. Setzte man nun für den Theil des Integrationsweges von $x=1$ bis $x=1+\infty i$

$$x=1+i\tan\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}e^{\varphi i}$$

so hat man von $\varphi=0$ bis $=\frac{\pi}{2}$ zu integriren und

$$(-x)^p=\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^p e^{p(\varphi-\pi)i}, (x-1)^q=\tan^q\varphi\, e^{-\frac{\pi}{2}qi}$$

zu setzen. In dem Integrale von $x=1-\infty i$ bis $x=+1$ setze man analog

$$x=1-i\tan\varphi=\frac{1}{\cos\varphi}e^{(2\pi-\varphi)i}$$

integrire also von $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis $\varphi=0$ und setze:

$$(-x)^p=\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^p e^{-p(\varphi-\pi)i}, (x-1)^q=\tan^q\varphi\, e^{+\frac{\pi}{2}qi}$$

wobei für $\cos^p\varphi$, $\tan^q\varphi$ diejenigen Potenzen dieser positiven reellen Grössen zu nehmen sind, die für reelle p und q reell werden. Setzt man diese angegebenen Werthe in dem obigen Integrale (8) ein, so erhält man leicht:

$$9)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cot^{q}\varphi \cos\{(p+\tfrac{1}{2}q)\pi - p\varphi\}\, d\varphi =$$

$$\pi \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(2-p-q)}, \quad \begin{matrix} +1>q \\ p+q>0 \end{matrix}$$

Unter denselben Bedingungen kann man nun dieser Gleichung eine andere zur Seite stellen. Zerschneidet man nämlich die Ebene von $x=+1$ über $x=0$ nach $x=-\infty$ in der reellen Achse, so wird das Integral

$$10)\qquad \int \frac{dx}{(x-1)^q (-x)^p} = 0$$

sein, wenn es von $x=+1$ über irgend eine, jene Schnittcurve nicht treffende, nach $x=1$ zurückkehrende Curve ausgedehnt wird. Unter der obigen Voraussetzung $p+q>0$ wird man hiefür die durch $x=1$ mit der imaginären Achse parallel gezogene Gerade substituiren dürfen. Dann ist für den ersten Theil des Weges von $x=1$ bis $x=1+\infty i$

$$(-x)^p = \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^p e^{p\varphi i}, \quad (x-1)^q = \tan^q\varphi\, e^{\frac{\pi}{2}qi}$$

für den zweiten Theil von $x=+1-\infty i$ bis $x=+1$

$$(-x)^p = \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^p e^{-p\varphi i}, \quad (x-1)^q = \tan^q\varphi\, e^{-\frac{\pi}{2}qi}$$

und man findet auf dieselbe Weise:

$$11)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cot^{q}\varphi \cos\{\tfrac{1}{2}q\pi + p\varphi\}\, d\varphi = 0, \quad \begin{matrix} +1>q \\ p+q>0 \end{matrix}$$

Hieraus folgt

$$J = \cos\frac{1}{2}q\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cot^{q}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi$$

$$= \sin\frac{1}{2}q\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cot^{q}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi$$

und nun aus Gleichung (9):

$$J=\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

so dass man die beiden von Cauchy [1]) gegebenen Formeln:

$$11)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{p-2}\varphi \, cot^{q}\varphi \, cos\, p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2\, cos\, \frac{1}{2} q\pi}\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

$$12)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{p-2}\varphi \, cot^{q}\varphi \, sin\, p\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2\, sin\, \frac{1}{2} q\pi}\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

$$+1>q,\ p+q>0$$

erhält.

Zu denselben Formeln gelangt man auf eine hievon ganz verschiedene Weise, indem man in der (1) Gleichung des §. 6. $a=0$, $b=+1$, $c=-1$ setzt und die Ebene von $x=0$ über $x=+1$ auf der reellen Achse bis $x=+\infty$, dann durch den Unendlichkeitspunkt hindurch von $x=-\infty$ bis $x=-1$ wiederum auf der reellen Achse zerschneidet. Dann ist es erlaubt, die Integration, von $x=+1$ anfangend durch einen Kreis, der um $x=0$ mit der Einheit als Radius beschrieben ist, bis wieder zu $x=+1$ zurück auszuführen. Setzt man dann entsprechend $x=e^{\varphi i}$, so erhält man durch einfache Transformationen zwei Integrale, die sich von den obigen nicht wesentlich unterscheiden.

---

[1]) Recherche d'une formule générale qui fournit l. valeur d. l. plupart d. int déf. Annal. de Gergonne, Bd. 17. S. 126.

Leipzig, Druck von A. Edelmann.