Arytmetyka

Radominskiego. -

REJESTR

Niektórych rzeczy szczególnych poprzedzającym rejestrem ogólnym niewskazanych.

Nie można sobie zrobić dokładnego wyobrażenia jakiéjkolwiek wielkości, tylko odnosząc ją do innéj znanéj tegoż gatunku, czyli, ażeby poznać iż rzecz jaka jest wielka lub mała, trzeba ją *zmierzyć*. Stąd definicyja znaczenia tego słowa. . . . . . . nº 2.

Zbiór jedności jednego gatunku to jest rzeczy w których uważamy to, co spólnego między sobą mają, stanowi *liczbę*. . . . . nº 5.

Jlość czyli *wielkość* znana, wzięta za miarę porównania innych wielkości, nie uważa się za podzieloną, póki ją bierzemy za jedność. . . . . . nº 6.

Liczb może być nieskończenie wiele, napróżnoby więc usiłowano wyrażać je wszystkie przez tyleż odmiennych znaków. Trzeba więc było użyć innego sposobu. Ten którego użyto, jest równie prosty jak pełny dowcipu. . . . . nº 12.

Jaką drogą postąpiono, chcąc pisać cyframi i wymówić słowami wszystkie o jakich pomyślić można, liczby naszego składu arytmetycznego rosnącego, takąż samą postąpić wypada, chcąc pisać cyframi i wymawiać słowami wszystkie jakie być mogą liczby naszego składu arytmetycznego malejącego. nº 21—23.

Systemat naszego liczenia gruntuje się na téj zasadzie: że w ciągu cyfer położonych jednych obok drugich, ważność każdéj z nich staje się postępnie dziesięć razy większą z miejsca na miejsce postępując od prawéj ręki do lewéj, i dla tego arytmetyka nasza zowie się *dziesiętna*. . . . . nº 30.

Użycie dziesięciu znaków liczebnych nie było rzeczą konieczną, bo można było użyć ich mniéj lub więcéj, i wprowadzić jakikolwiek układ liczenia. nº 31.

Systemat liczenia dwunastny byłby dogodniejszy od systematu dziesiętnego: dla czego jednak go nie wprowadzono?. . . . . nº 32.

Kształt i znaczenie cyfer *rzymskich*. . . . nº 33.

Dodawanie będąc właściwie skróconém d o l i c z a n i e m, a odejmowanie skróconém o d l i c z a n i e m może się odbywać tylko na ilościach jednorodnych i jednogatunkowych. . . . . nº 38 i 39.

Mnożenie jest gatunkiem skróconego dodawania, a dzielenie gatunkiem skróconego odejmowania. nº 40 i 41.

Próba dodawania . . . . nº 49.

Próba odejmowania, i nawzajem dodawania. nº 59 i 60.

Definicyje ilości *dodatnych i odjemnych*, gdzie się oraz pokazuje: iż summa może być mniejsza od jednéj z liczb które ją swém połączeniem formują, wzajemnie różnica może być większa niż liczba od któréj się odejmowało; a z tąd, iż dodawanie nie zawsze jest zwiększaniem, ani odejmowanie zawsze zmniejszaniem. . . . . n° 62 i 64.

Próba mnożenia. . . . . n° 75.

Okazanie iż dwa lub więcéj czynników rozmnożonych przez siebie w jakimkolwiek porządku dają zawsze ten sam iloczyn. . . . . n° 79.

Mnożnik oznaczając ile razy ma się wziąć mnożna, powinien być uważany jako liczba *ogólna*; a z tąd iloczyn musi mieć jedności téjże natury co mnożna. Stąd oraz przestroga, który z czynników mianowanych brać trzeba za mnożną, a który za mnożnik, i kiedy z czynników mianowanych którykolwiek może być brany za mnożną lub mnożnik. . . n° 82.

Definicyje liczb *wielokrotnych*, *pierwotnych i pierwotnych między sobą*. . . . . n° 89 i 91.

Próba dzielenia i nawzajem mnożenia. . n° 97 i 98.

Dzieląc iloczyn z wielu czynników przez którykolwiek z nich, wypadnie na iloraz iloczyn innych czynników. . . . . n° 99.

Dla czego za każdém dzieleniem cząstkowém nie można nigdy więcéj położyć w ilorazie jak 9. . n° 101.

Sposób poznania wszystkich dzielników dokładnych jakiéj liczby. . . . . n° 104 i 105.

Sposób znalezienia najmniejszéj liczby podzielnéj przez liczby dane. . . . . n° 106.

Za powiększeniem saméj liczby dzielnéj, co za zmiana będzie z ilorazem, i przeciwnie; a stąd wniosek. . . . . n° 107 i 108.

Za zmniejszeniem liczby dzielnéj jak się zmienia iloraz, i przeciwnie; a stąd wniosek. . . n° 110 i 112.

Sposób przybliżenia prawdziwéj ważności ilorazu gdy ten dokładnym być nie może, czyli dzielenia mniejszéj liczby przez większą. . . . . . . n° 117.

Kiedy natura jedności ilorazu oznaczona jest przez zadanie, a kiedy iloraz jest tego gatunku jakiego liczba dzielna? . . . . n° 118.

Wszystkie sposoby sprowadzania ułomków do jednakowego mianownika gruntują się na téj zasadzie: *iż można czynić w ich wyrażeniu różne odmiany bez odmiany ich ważności.* . . . . . n° 136.

Do sprowadzania ułomków do najprostszego wyrażenia służy, *sposób poznania czy liczba podzielna jest przez* 2, 3, 4, 5 i t. d. a szczególniéj *sposób znalezienia największego dzielnika spólnego dwom lub więcéj liczbom.* . . . . n° 138 i 142.

W mnożeniu ułomków są przypadki w których znajduje się iloczyn sposobem nader łatwym. . n° 160.

Korzystną bywa rzeczą oznaczać tylko uskutecznienie działania. . . . . tamże 3cie.

W dzieleniu ułomków zdarzają się często przypadki w których można sobie skrócić działanie. n° 168.

Dzielenie liczb ułomkowych sprowadzić można do dzielenia liczb całkowitych lub dziesiętnych. n° 169.

TABLICA

NIEKTÓRYCH MIAR POLSKICH I SKRÓCEŃ

przez które je wyrażamy.

DO MONET.

duk. znaczy . . .	dukat	1 dukat czyli czerwony złoty waży . . . . 3 tal.
tal.	talar	1 talar . . . . . 6 złot.
zł.	złoty	1 złoty . . . . . 30 gr.
gr.	grosz	1 grosz . . . . . 3 szel.
szl.	szeląg	

DO WAG.

Cet. znaczy . . .	cetnar	1 cetnar waży 4 kamienie
k. lub kam. . . .	kamień	1 kamień . . 25 funtów
℔	funt	1 funt . . . . 2 grzywny
G. c. M. grzywna c.	marka	1 grzywna . . . 8 uncyj
unc.	uncyja	1 uncyja . . . 2 łuty
ł.	łut	1 łut . . . . 4 drachmy
dr. lub ʒ . . .	drachma	1 drachma . . . 3 skrupuły
skr. lub ℈ . . .	skrupuł	1 skrupuł . . . 24 gran
grn.	gran	1 gran . . . $5\frac{1}{2}$ graników
grk.	granik	1 granik . 8 miligramów

DO MIAR DŁUGOŚCI.

sąż. znaczy . . .	sążeń	1 sążeń zawiera . 3 łokcie
łok.	łokieć	1 łokieć . . . . 2 stopy
st.	stopa	1 stopa . . . . 12 cali
c.	cal	1 cal . . . . . 12 linij
l.	linija	1 linija . . . . 2 milimetry
m. mt.	milimetr	

DO MIAR OBJĘTOŚCI.

kor. znaczy . . .	korzec	1 korzec zawiera 4 ćwierci
ćw.	ćwierć	1 ćwierć . . . . 8 garcy
gar.	garniec	1 garniec . . . . 4 kwart
kw.	kwarta	1 kwarta . . . 4 kwaterek

DO CZASU

d. znaczy . . .	dzień	1 dzień ma . . . 24 godzin
god.	godzina	1 godzina . . . 60 minut
. . . .	minuta	1 minuta . . . 60 sekund
. . . .	sekunda	1 sekunda . . . tercyj 40

TABLICA
NIEKTÓRYCH MIAR ROSSYJSKICH.

DO MONET.

66-20 Imperyjał ma wartości 10 rubli.
33-10 Półimperyjał — 5 rubli.
6-20 Rubel — 2 połtyny.
3-10 Połtyna — 2 półpołtynniki c. czetwertaki.
1-20 Półpołtynnik — 5 piętaków c. $2\frac{1}{2}$ grywenniki.
1-10 Dwugrywennik — 2 grywenniki.
20 Grywennik — 2 piętaki.
10 Piętak — 5 kopiejek sr.
Kopiejka srebrna ma wartości 2 grosze polskie, a kopiejka miedna pół grosza polskiego.

DO WAG.

Berkowiec waży 10 pudów.
Pud — 40 funtów.
Funt — 32 łutów.
Łót — 3 zołotniki.
Zołotnik waży prawie $\frac{1}{3}$ łut. pols. a ściśle 96,96 grana.

DO DŁUGOŚCI

Wersta zajmuje 500 sążni.
Sążeń — 3 arszyny.
Arszyn — 4 ćwierci.
Ćwierć — 4 werszki.
Werszek zajmuje prawie $1\frac{5}{6}$, a ściśle 1.852 cali pols.

DO OBJĘTOŚCI a) ciał stałych.

Czetwert zawiera 2 ośminy.
Ośmina — 4 czetweriki.
Czetwerik — 8 osmuszków czyli garcy.
Garniec zawiera prawie $3\frac{1}{2}$ kwarty polskiéj.

b) rozcieków.

Beczka zawiera 40 wiader.
Wiadro — 8 sztofów.
Sztof — 2 kružki.
Kružka — 5 czarek.
Czarka zawiera $\frac{1}{2}$ kwaterki polskiéj.

ZASADY ARYTMETYKI.

ROZDZIAŁ I.

O LICZENIU.

1. Nazywamy *wielkością* czyli *ilością* (quantitas) wszystko co może być powiększone lub zmniejszone, wszystko co się składa z części. I tak: *liczby*, *rozciągłość*, *ruch*, *głos*, *światło*, i t. d., są wielkościami czyli ilościami.

2. Nie można sobie zrobić dokładnego wyobrażenia jakiéjkolwiek wielkości, tylko odnosząc ją do innéj znanéj tegoż samego gatunku: czyli, ażeby poznać, iż rzecz jaka jest wielka lub mała, trzeba ją zmierzyć, to jest: trzeba wziąć znaną wielkość i uważać ile razy ta znana zawiera się w nieznanéj.

3. Wielkość wzięta za wyraz czyli miarę porównania wielkości tegoż samego gatunku, nazywa się *jednością* (unitas). Tak gdy mówię: ta ławka ma dwanaście łokci długości, daję zrozumiéć, że znana długość łokcia zawiéra się dwanaście razy w długości ławki. Podobnież gdy mówię: ten bilet jest na dziesięć złotych, przyrównywam wartość tego biletu do znanéj już wartości złotego, wziętéj za jedność. Mówiąc, pewne ciało waży pięć funtów, przyrównywam ciężar, czyli wagę tegoż ciała, do znanego ciężaru czyli wagi funta.

4. Jedność więc, *jestto ilość czyli wielkość wzięta dowolnie lub z natury za wyraz czyli miarę porównania wielkości tegoż samego gatunku.* Ztąd wynika, że tyle jest gatunków jedności, ile jest gatunków wielkości. W pospolitéj mowie nazywa się jednością każda rzecz pojedyncza, np. xiążka, jabłko, sztuka monety.

5. *Liczba* (numerus) *jest zbiorem wielu jedności tegoż samego gatunku.* Możnaby ją także nazwać wypadkiem z porównania jakiéjkolwiek wielkości z jéj jednością.

6. Ilość, do któréj przyrównywamy wielkości jednegoż gatunku, nie uważa się za podzieloną, dopóki ją uważamy za jedność; przecież może być podzieloną, i tém samém miéć części, względem których każdéj staje się liczbą. Tak złoty wzięty za jedność, można rozdzielić na dziesięć części równych, i ten staje się natenczas liczbą utworzoną przez zbiór tych dziesięciu części z których każda jest jednością. Chcąc oznaczyć ciężar ciała ważącego pięć funtów, mógłbym wziąć za jedność wagę mniejszą od funta, a natenczas ciężar ciała byłby oznaczony przez liczbę większą niż pięć.

7. Ponieważ każda liczba, jakkolwiekbądź wielka lub mała, złożona jest z jedności, każda więc da się powiększyć albo zmniejszyć, doliczając do niéj albo odliczając od niéj te jedności, co nazywamy *rachunkiem* (calculus).

8. Nauka o liczbach, obejmująca naukę liczenia i rachunku, nazywa się *Arytmetyką* (Arithmetica).

9. Liczby zawiérające w sobie jedność pewną liczbę razy zupełnie, zowią się *liczby całkowite* czyli prosto *całkowite* (numeri integri), liczby zawiérające w sobie tylko jednę lub wiele części jedności, zowią się liczby *ułomkowe* czyli *ułomki* (numeri fracti vel fractiones). Pięć, siedm, dziesięć złotych i t. d. są całkowite: pół, trzy czwarte, siedm dziesiątych części złotego i t. d. są ułomki.

10. Liczby całkowite i liczby ułomkowe są *mianowane* czyli *szczególne* (numeri concreti), lub *niemianowa-*

ne czyli ogólne (numeri abstracti). Są mianowane, gdy gatunek jedności jest oznaczony; a są niemianowane, gdy gatunek jedności nie jest oznaczony. Ośm złotych, sześć funtów, dziewięć dziesiątych złotego, są liczby mianowane; trzy, cztéry, pięć razy, pół, trzy czwarte, są liczby niemianowane.

11. Liczeniem zowiemy pospolicie zbieranie jedności dla poznania liczby czyli ilości, lecz w Arytmetyce przez *liczenie* rozumie się *sztuka wyrażania jakiéjkolwiek liczby przez znaki umówione, i wysłowiania każdéj liczby temi znakami wyrażonéj.*

12. Oczywista jest rzecz, iż liczb może być nieskończenie wiele, i że na próżnoby usiłowano wyrażać je wszystkie przez tyleż odmiennych znaków; bo wielość tych znaków pociągnęłaby za sobą niemożność zatrzymania ich w pamięci. Trzeba było więc użyć innego sposobu, a ten, którego użyto, jest równie prostym jak dowcipnym. Zależy on na używaniu nie wielu znaków rozmaicie między sobą kombinowanych.

13. Tych znaków, które zowiemy *cyframi* (notae numerorum), mamy tylko dziesięć w przyjętym sposobie liczenia. Oto ich kształt i ważności:

0. zero,
1. jedno,
2. dwa,
3. trzy,
4. cztéry,
5. pięć,
6. sześć,
7. siedm,
8. ośm,
9. dziewięć.

Zero, gdy jest samo, nic nie znaczy: za pomocą zaś innych cyfer wyrażamy liczby od jednego aż do dziewięciu włącznie.

14. Liczby wyrażone przez jednę tylko z tych dziewięciu cyfer znaczenie mających, nazywają się *liczby pojedyncze*; wszelkie inne nazywamy *liczbami złożonemi.*

Liczby pojedyncze nazywamy także *liczbami jednocyfrowemi* lub *jednościami pierwszego rzędu.*

15. Dla wyrażenia liczb złożonych zgodzono się:

1*ód* aby z dziesięciu jedności zrobić tylko jednę *drugiego rzędu*, którą nazwano *dziesiątek.*

2*re* aby rachować dziesiątki jak się rachują jedności, mówiąc: jeden dziesiątek, dwa dziesiątki, i tak następnie aż do dziewięciu dziesiątków.

3*cis* ażeby do wyrażenia dziesiątków użyć tychże cyfer, których używają do wyrażania jedności; lecz żeby dla ich rozróżnienia kłaść je na drugiém miejscu. Tak 10 oznacza jeden dziesiątek, czyli dziesięć; 20 dwa dziesiątki czyli dwadzieścia; 30 trzy dziesiątki czyli trzydzieści; 40 cztery dziesiątki czyli czterdzieści; 50 pięć dziesiątków czyli pięćdziesiąt; 60 sześć dziesiątków czyli sześćdziesiąt; 70 siedm dziesiątków czyli siedmdziesiąt; 80 ośm dziesiątków czyli ośmdziesiąt; 90 dziewięć dziesiątków czyli dziewięćdziesiąt.

Postępując od dziesięciu do dwudziestu, znajdujemy dziesięć i jeden, dziesięć i dwa.... i t. d. dziesięć i dziewięć. Lecz zamiast tych wyrazów zwyczaj przyjął wyrazy: jedenaście, dwanaście.... i t. d. dziewiętnaście. Bardzo zaś jest łatwo wyrazić liczby pośrednie. Bo gdy jedenaście jest to samo co dziesięć i jeden, dwanaście jest to samo co dziesięć i dwa.... i t. d. dziewiętnaście jest to samo co dziesięć i dziewięć; napiszemy więc 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, gdzie widać, iż 1 położony na drugiém miejscu waży dziesięć.

Podług tego napiszemy bez trudności liczby zawarte między dwadzieścia i trzydzieści, między trzydzieści i czterdzieści, i tak następnie aż do dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięć dziesiątków i dziewięć jedności, co się napisze 99.

16. Zgodzono się także, aby z dziesięciu dziesiątków zrobić jednę tylko *jedność trzeciego rzędu*, którą nazwano *sto*; i rachować sta jak rachują dziesiątki i jedności mówiąc, jedno sto, dwa sta.... i t. d. Zgodzono się nadto, aby używać tychże cyfer, lecz żeby je odróżnić, kładąc je na trzeciém miejscu. Tak 100 znaczy jedno sto czyli sto; 200 dwa sta czyli dwieście; 300 trzy sta czyli trzysta; 400 cztery sta czyli cztérysta; 500 pięć set czyli pięćset; 600 sześć set czyli sześćset; 700 siedm set czyli siedmset; 800 ośm set czyli ośmset; 900 dziewięć set, czyli dziewięćset.

Między sto i dwieście, jest sto jeden, sto dwa.... i t. d. nareszcie, sto dziewięćdziesiąt dziewięć. Dla wyrażenia tych liczb pośrednich, uważmy iż liczba np. sto dziewięćdziesiąt dziewięć, waży jedno sto, dziewięć dziesiątków i dziewięć jedności; napiszemy ją więc 199.

Liczba sto jeden, która oznacza jedno sto, nic dziesiątków i jednę jedność, napisze się 101. Zero znaczy iż nie ma dziesiątków, a 1 położony na trzeciém miejscu waży sto.

Między dwieście i trzysta, między trzysta i czterysta i t. d. znajdują się też same liczby co między sto i dwieście; napiszemy je więc podobnież. Tak dla wyrażenia dziewięćset dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięć set, dziewięć dziesiątków, i dziewięć jedności, napiszemy 999.

17. Trzy cyfry tak położone nazywają się *przedziałem jedności.* Trzy cyfry położone po lewéj stronie przedziału jedności, jak naprzykład: 954729 składają *przedział tysięcy.* Dla uformowania tego przedziału zgodzono się, aby z dziesięciu set, zrobić tylko jednę jedność tysięcy, z dziesięciu jedności tysięcy, jeden dziesiątek tysięcy, z dziesięciu dziesiątków tysięcy, jedno sto tysięcy.

W tym względzie każda cyfra znaczenie mająca, położona na pierwszém miejscu, wyraża jedności *pojedyncze*, położona zaś na innych miejscach następujących od prawéj ku lewéj ręce, wyraża jedności *zbiorowe.*

Przez podobne postępowanie formują *przedział milijonów*, *przedział bilijonów*, *przedział trylijonów*, *kwadrylijonów*, i t. d. a w każdym przedziale cyfra z prawéj strony będąca wyraża jedności, cyfra w środku dziesiątki, a cyfra z lewéj strony sta, tegoż przedziału; odniesiona zaś do jedności pojedynczych, wyraża jedności takiego rzędu, jaki oznacza miejsce po lewéj stronie od jedności rachując, np. jedności tysięcy są *jednościami czwartego rzędu*, dziesiątki tysięcy są *jednościami piątego rzędu....* i t. d., milijon *jednością siodmego rzędu* i t. d.

Możnaby także było składać przedziały po dwie lub po cztery cyfry; lecz w piérwszym razie byłoby więcéj przedziałów w jakiéj liczbie danéj, w drugim mniéj niż podług teraźniejszego sposobu ich składania. Zważając granice liczb, jakie pospolicie w użyciu zachodzić mogą, łatwo widziéć, iż wzięto środek w téj mierze przyzwoity.

Dla łatwiejszego jeszcze poznania rozmaitych rzędów i przedziałów liczb, dosyć jest przypatrzyć się liczbie następującéj, która jest podzielona na przedziały, i pod każdą cyfrą podpisana jéj ważność ze względu na miejsce które zajmuje.

Przedział:

trylijonów	*bilijonów*	*milijonów*	*tysięcy*	*jedności*
83	**597**	**862**	**407**	**654**
dziesiątki, jedności	sta, dziesiątki, jedności	sta, dziesiątki, jedności	sta, dziesiątki, jedności	sta, dziesiątki, jedności

(1)

18. Widzimy ztąd, iż w cyfrach naszych znaczenie mających trzeba rozróżnić dwie ważności; jednę nadaną przez umowę, a drugą przez miejsce na którém są położone. Pierwsza nazywa się ważność *bezwzględna*, druga ważność *miejscowa*. W wyrażeniu np. 500, ważność bezwzględna cyfry 5 jest pięć, ważność jéj miejscowa jest pięćset, to jest 5 jedności, z których każda waży sto (2).

---

(1) Autorowie niemieccy rachują zwykle po przedziale milijonów, przedział tysięcy milijonów; po przedziale bilijonów, przedział tysięcy bilijonów i t. d., na bilijon więc rachują milijon milijonów; na trylijon, milijon bilijonów i t. d., podług naszego zaś sposobu rachowania, 1000 tysięcy idzie na milijon, 1000 milijonów na bilijon, 1000 bilijonów na trylijon, i t. d.

(2) Nader wiele ułatwi sobie rachunki kto się wcześnie wprawi w szybkie na pamięć przebieganie tych przedziałów od pierwszego do wyższych i na odwrót; ztąd bowiem zaraz wiedzieć będzie do którego rzędu

19. Łatwo jest teraz napisać cyframi jaką liczbę wymówioną albo napisaną głoskami, np. liczbę ośmset trzydzieści siedm milijonów, czterysta trzy tysiące, dwadzieścia trzy. W saméj rzeczy, przez proste wysłowienie widzę od razu, 1*ód* iż mi trzeba trzech przedziałów; 2*re* iż w przedziale tysięcy nie ma dziesiątków, ani set, w przedziale jedności; napiszę więc 837 403 023.

20. Aby wysłowić liczbę napisaną cyframi, trzeba, postępując od prawéj do lewéj ręki, podzielić ją na przedziały, każdy o trzech cyfrach, wyjąwszy ostatni po lewéj ręce, który ich może zawiérać dwie lub tylko jednę (1); potém wymawiać każdy przedział jeden po drugim, zaczynając od przedziału najwyższego, i wyrażać ważność miejscową cyfer tenże przedział składających, dołączając nazwisko przedziału do nazwiska cyfry jedności, np. liczba następująca, 34|904|827|937 wysłowi się tak: trzydzieści cztery bilijony, dziewięćset cztery milijony, ośmset dwadzieścia siedm tysięcy, dziewięćset trzydzieści siedm (2).

---

należą, a tém samém na którém miejscu od jedności zacząwszy znajdują się sta, dziesiątki lub jedności jakiegokolwiek przedziału, np. dziesiątki bilijonów są na 2ém miejscu, w 4ym przedziale, zatém na 11tém miejscu od jedności zacząwszy.

(1) Wprawiwszy się, robimy te przedziały myślą.

(2) Zamiast *dwieście tysięcy*, *trzysta tysięcy*.... *dziewięćset tysięcy*, używamy wyrażeń *dwakroć stotysięcy*, *trzykroć stotysięcy*.... *dziewięćkroć stotysięcy*; lecz jeżeli prócz set, znajdują się dziesiątki i jedności tysięcy, wyrażenie to nie powinno się używać, gdyż jest wątpliwém. I tak w naszym przykładzie, mówiąc, ośm kroć sto dwadzieścia siedm tysięcy, rozumiećby można ośm razy 127 tysięcy, bo *kroć* znaczy raz lub *razy*.

21. Takąto drogą postąpiono, chcąc pisać cyframi i wymówić słowami wszystkie o jakich pomyśléć można liczby naszego składu arytmetycznego rosnącego. Zastanowiwszy się cokolwiek, postrzeżemy, iż zupełnie podobnym sposobem trzeba postąpić, chcąc pisać cyframi i wymawiać słowami wszystkie jakie być mogą liczby naszego składu arytmetycznego malejącego.

W saméj rzeczy, nic nie przeszkadza żebyśmy uważali jedność, jako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda, będąc dziesięć razy mniejsza od jedności, ważyć będzie *dziesiątą* część (*decimalis*) téj jedności, czyli krócéj *dziesiątą*.

Podobnież możemy sobie wystawić, iż dziesiąta jest złożona z dziesięciu cząstek równych, z których każda, jako dziesięć razy mniejsza od dziesiątéj, będzie sto razy mniejsza od jedności, i ztąd ją nazwiemy *setną*.

Podobnież będziemy uważać setną jako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda, będąc dziesięć razy mniejszą od setnéj, będzie sto razy mniejszą od dziesiątéj, a tysiąc razy mniejszą od jedności, i ztąd ją nazwiemy *tysiączną*.

Rozciągniemy bez trudności to rozumowanie do *dziesięciotysiącznych*, *stotysiącznych*, *milijonowych*, *dziesięciomilijonowych*, *stomilijonowych*, i t. d.

22. Więc jedność, waży dziesięć dziesiątych, sto setnych, tysiąc tysiącznych, dziesięć tysięcy dziesięciotysiącznych, i t. d.

Dziesiąta, waży dziesięć setnych, sto tysiącznych, tysiąc dziesięciotysiącznych, i t. d.

Setna waży dziesięć tysiącznych, sto dziesięciotysiącznych, i t. d.

Tysiączna waży dziesięć dziesięciotysiącznych, i t. d.

23. To wszystko dobrze zrozumiawszy, mówię:

1*ód* Cyfra położona na piérwszém miejscu po lewéj stronie jedności, ma ważność miejscową dziesięć razy większą czyli wyraża dziesiątki; więc cyfra położona na piérwszém miejscu po prawéj stronie jedności, miéć będzie ważność miejscową dziesięć razy mniejszą czyli wyrazi dziesiąte.

2*re* Cyfra położona na drugiém miejscu po lewéj stronie jedności wyraża sta: więc cyfra położona na drugiém miejscu po prawéj stronie jedności wyrazi setne.

3*cie* Cyfra położona na trzeciém miejscu po lewéj stronie jedności wyraża tysiące; więc cyfra położona na trzeciém miejscu po prawéj stronie jedności wyrazi tysiączne.

Znajdziemy podobnie, że cyfra położona po prawéj stronie jedności wyraża na czwartém miejscu dziesięciotysiączne, na piątém miejscu stotysiączne, na szóstém miejscu milijonowe, na siódmém miejscu dziesięciomilijonowe, i t. d.

24. Aby wyrazić w cyfrach liczbę: sześć całkowitych, pięćset dwadzieścia cztery tysiącznych, napiszę 6,524 lub 6.524 rozróżniając przez znak umówiony, to jest, przecinek lub kropkę, rzęd jedności. Cyfry położone po prawéj stronie przecinka lub kropki, nazywają się *cyfry dziesiętne*, a ilości, które one wystawiają, nazywają się *części dziesiętne*, lub prosto *dziesiętne* (decimales).

Aby wyrazić cztery dziesięciotysiączne, napiszę 0,0004 kładąc zero na zastąpienie miejsca jedności, a po przecinku, zer trzy, na miejsce dziesiątych, setnych, i tysiącznych, które się w podanéj liczbie nie znajdują.

25. Jeżeli idzie o wysłowienie w mowie liczby 7,465? zamiast mówienia, siedm całkowitych, cztery dziesiątych,

sześć setnych, pięć tysiącznych, powiem: siedm całych, czterysta sześćdziesiąt pięć tysiącznych (n° 22).

Do łatwego wysłowienia części dziesiętnych jest jeszcze ten sposób: podziel myślą zaczynając od przecinka, cyfry dziesiętne na przedziały po trzy cyfry (ostatni przedział może mieć jednę cyfrę lub dwie); wysłów następnie każdy przedział, i na końcu każdego cząstkowego wysłowienia dodaj nazwisko jedności, którą ostatnia tego przedziału cyfra wyraża, np. liczba 2,749 863 29 wymawia się; dwie jedności 749 tysiącznych 863 milijonowych 29 stomilijonowych.

26. Łatwo widzieć, iż kładąc jedno lub więcéj zer po ostatniéj dziesiętnéj cyfrze liczby jakiéj, nie zmienia się wartość, lecz tylko wyrażenie téj liczby. Tak 0,24 jest toż samo co 0,240; 0,2400; 0,24000, i t. d. liczba 2 jest równa 2,0; 2,00; 2,000; 2,000000; i t. d. gdyż zera te oznaczają, iż nie ma części dziesiętnych rzędu niższego, tak jak zera dopisane po lewéj stronie liczby całéj oznaczające że nie ma jedności rzędu wyższego, ważności jéj nie odmieniają.

27. Lecz widzimy, iż przeniesienie przecinka ważność liczb odmienia. Jeżeli cofasz przecinek o jedno, dwa, trzy i t. d. miejsca ku lewéj ręce, liczba przez to staje się 10, 100, 1000, i t. d. razy mniejsza; np. od liczby 945,8 jest dziesięć razy mniejsza liczba 94,58 a sto razy mniéjsza 9,458 i t. d. bo jedności całkowite i części dziesiętne rzędów wyższych, zamieniają się na jedności całkowite i części dziesiętne rzędów niższych.

28. Przeciwnie, jeżeli posuwasz przecinek o jedno, dwa, trzy i t. d. miejsca ku prawéj ręce; liczba przez to staje się 10, 100, 1000, i t. d. razy większą. Tak od liczby

by 5,4271 jest dziesięć razy większa liczba 54,271, a sto razy większa 542,71 i t. d. bo jedności całkowite i części dziesiętne rzędów niższych, zamieniają się na jedności całkowite i części dziesiętne rzędów wyższych.

29. Jeżeli nie można posunąć lub cofnąć przecinka, dla braku cyfer ważność mających, nagradza się to zerami; np. ażeby liczba 12,34 stała się 1000 razy większą lub mniéjszą, trzeba napisać 12340 lub 0,01234.

30. Z tego wszystkiego co się dotąd powiedziało o wyrażaniu liczb w przyjętym składzie arytmetycznym, bądź rosnącym, bądź malejącym, widzimy, iż zupełny stemat naszego liczenia na téj się jedynie gruntuje zasadzie przyjętéj: *że w ciągu cyfer położonych jednych obok drugich, ważność każdéj z nich staje się postępnie dziesięć razy większą z miejsca na miejsce postępując od prawéj ręki do lewéj, i odwrotnie.* Dla tegoto nasza arytmetyka zowie się *dziesiętna* (decimalis albo denaria).

31. Możnaby było użyć mniéj lub więcéj znaków liczebnych i przypuścić inne prawo zwiększania się ważności miejscowéj tych znaków; umówić się np. iżby idąc od prawéj ręki do lewéj, stawały się następnie za każdém miejscem dwa razy, cztery razy, dwanaście razy większe, i natenczas arytmetyka byłaby nazwana, *dwójna, czwórna, dwunastna* (binaria, quaternaria, duodenaria).

Lecz prawie wszystkie ludy znajome przyjęły arytmetykę dziesiętną, i łatwo poznajemy, iż ta zgoda nie może być skutkiem trafu. Być może, iż liczba palcy u rąk była powodem do obrania liczby dziesięć, którą każdy prawie zawsze znajduje przed oczyma, tak dalece, iż lud którjby miał dwa palce, cztery palce..... dwanaście palcy, byłby podobno przyjął arytmetykę dwójną, czwórną, ... dwunastną.

Arytmetyka dziesiętna przechodzi rzeczywiście wszystkie od niéj poniższe, w tém, że wyrażenie liczb jest w niéj prostsze. Słusznie więc przeniesioną została nad wszystkie od niéj poniższe.

32. Lecz przyznać potrzeba, iż arytmetyka zwyczajna, porównana z wyższemi, ustępuje z wielu względów arytmetyce dwunastnéj. Ta, z więcéj dwoma znakami, któreby trzeba było wymyśléć dla wyrażenia dziesięciu i jedenastu, każde przez jednę cyfrę, wyrażałaby liczby sposobem jeszcze prostszym; nadto, dwanaście może być podzielone zupełnie na dwie, na trzy, na cztéry, na sześć części równych, gdy dziesięć może być tylko na dwie i na pięć; własność liczby dwunastu tak istotna do ułatwienia rachunków i miar, iż ludzie nawet po przyjęciu arytmetyki dziesiętnéj nie przestali używać układu dwunastnego, rachując na tuziny, i tuziny tuzinów.

Jeżeli nie korzystano ze sposobu liczenia jaki się w ogólności zdziałał w układzie wag i miar, i nie poddano arytmetyki dwunastnéj w miejsce arytmetyki dziesiętnéj, to dla tego, iż pożytki które piérwsza wystawia, byłyby przewyższone niedogodnościami jakieby pociągnęło przejście z jednéj arytmetyki do drugiéj.

33. Oprócz wskazanych powyżéj cyfer, które się zowią *arabskiemi*, używamy cyfer rzymskich. Cyfry *rzymskie* mają następujący kształt i znaczenie:

I	znaczy	1
V	. . . .	5
X	. . . .	10
L	. . . .	50
C (centum)	. . . .	100
D lub IƆ	. . . .	500
M (mille) lub CIƆ	. . . .	1000

Temi siedmiu cyframi piszemy wszelkie inne liczby podług następującego prawidła: ile razy cyfra mniejszéj wartości znajduje się po prawéj stronie cyfry większéj wartości, t. j. następuje po niéj, tedy się do niéj dorachowywa; jeżeli zaś cyfra mniejszéj wartości znajduje się po lewéj stronie cyfry większéj wartości, t. j. poprzedza ją, tedy zostaje od niéj odjęta. Z resztą piszą się liczby raczéj przez mniéj niż przez więcéj cyfer. I tak:

VI znaczy 6, a IV znaczy 4
XI . . . . 11, a IX 9
LX . . . . 60, a XL 40
CX . . . 110, a XC 90
MDCXLVIII 1648, MDCCCXL 1840.

Trudne jest jednak i wiele miejsca zabiérające samo nawet temi cyframi oznaczanie większych liczb, np.

4000 oznacza się przez MMMM lub CIƆ CIƆ CIƆ CIƆ.
5000 . . . . . . IƆƆ lub ICC.
6000 . . . . . . IƆƆ CIƆ.
10000 . . . . . . CCIƆƆ lub CMƆ lub ƆMC.
50000 . . . . . . IƆƆƆ lub DƆƆ i t. d.

Rzymskich cyfer używają w napisach pomnikowych, w oznaczeniu części lub rozdziałów xiążek, i t. p.

ZAGADNIENIA.

34. I. Napisać cyframi, 1^{od} trzy milijony tysiąc siedm; 2^{re} cztéry trylijony, pięćset trzynaście milijonów, dziewięć tysięcy, cztérdzieści trzy; 3^{cie} pięć bilijonów, dwadzieścia cztéry tysiące całkowitych, cztérysta trzy dziesięciotysiącznych; 4^{te} cztérdzieści sześć łokci, pięćset trzydzieści cztéry tysiącznych.

II. Wysłowić liczbę 1) 1 079 088 219; 2) 449703, 00349;
łok.
3) 90056, 738.
sąż.
4) 400703, 9349.

III. Napisać cyframi rzymskiemi 1) 1656; 2) 753; 3) 1492; 4) 1672; 5) 1725.

IV. Wysłowić liczbę 1) CMLXV. 2) MDCCIII. 3) MDCCCXV. 4) MDCCCXXV.

V. Napisać cyframi liczbę *dziesięć* w arytmetyce 1) dwójnéj; 2) czwórnéj; 3) ośmiennéj; 4) dwunastnéj (1).

---

(1) Dalsze zagadnienia podobne i dalsze wiadomości o sposobie wyrażania liczb w rozmaitych układach arytmetycznych, a mianowicie o sposobie przechodzenia z jednego układu do drugiego, wymagają znajomości dalszych działań arytmetycznych, a w szczególności znajomości algiebry. Podamy ich jednak chociaż kilka przy zagadnieniach, w które wchodzą połączone działania arytmetyczne (n° 120).

ROZDZIAŁ II.

O RACHUNKU ARYTMETYCZNYM.

35. Rachunek arytmetyczny jest sztuka składania i rozkładania liczb przez działania prawidłom nieomylnym poddane.

36. Prawidła wspiérają słabość rozumu ludzkiego, podając mu sposoby do dojścia następnie i po części do wypadków, których nie może znaleźć od razu.

37. Pospolicie cztéry liczymy główne działania w rachunku: *dodawanie*, *odejmowanie*, *mnożenie i dzielenie* (additio, substractio, multiplicatio, et divisio).

38. Dodawanie służy do połaczenia wielu liczb w jednę, która się nazywa *summą* (summa).

Widoczna zaś jest, iż nie można łączyć w jednę liczbę, liczb różnego gatunku np. łokci i stóp, a tém bardziéj liczb różnéj natury, jako to łokci i złotych; dodawanie więc będąc właściwie skróconém d o l i c z a n i e m, może się odbywać tylko na ilościach jednorodnych (quantitates homogeneae) i jednogatunkowych.

39. Odejmowanie służy do znalezienia *różnicy* (differentia) między dwiema liczbami, to jest, o ile jedna przewyższa drugą (1).

Gdy zaś odejmowanie jest właściwie skróconém o d l i c z a n i e m, więc liczba którą odejmujemy i liczba od

---

(1) Nazywają także wypadek z odejmowania *nadmiarem* lub *resztą*.

któréj odejmujemy, powinny być koniecznie jednéjże natury i gatunku; a zatém odejmowanie nie może się odbywać na ilościach różnorodnych (quantitates heterogeneae) i różnogatunkowych.

40. Mnożenie służy do wzięcia jakiéj liczby nazwanéj *mnożną* (multiplicandus), tyle razy, ile oznacza jedności inna liczba nazwana *mnożnikiem* (multiplicator), a wypadek z działania nazywa się *iloczyn* (productum albo factum) (1).

Jasną jest rzeczą, iż iloczyn składa się z mnożnéj powtórzonéj tyle razy, ile razy jedność jest zawarta w mnożniku; mnożenie więc jest gatunkiem dodawania, przez które przydajemy jaką liczbę do siebie saméj tyle razy, ile razy jedność jest zawarta w drugiéj.

Mnożna i mnożnik nazywają się *czynnikami* iloczynu (factores).

41. Dzielenie służy do znalezienia ile razy jaka liczba nazwana *dzielną* (dividendus), zawiéra w sobie inną nazwaną *dzielnikiem* (divisor), a wypadek z działania otrzymany, nazywa się dla tego *iloraz* (quotiens albo quotus) (2).

Widoczną jest rzeczą, iż liczba jaka, nie może się zawiérać w drugiéj, tylko tyle razy właśnie, ile razy może być od niéj odjętą; więc dzielenie jest gatunkiem odejmowania, które służy do znalezienia, ile razy jaka liczba może być odjętą od drugiéj (3).

---

(1) Nazywają też iloczyn *mnogością.*

(2) *Dzielna* nazywa się także *podzielną*, przecież to właściwie powinnoby się mówić w tym razie tylko, gdy się z dzielenia nic nie zostanie.

(3) Z tego względu możnaby je nazwać *odmnożeniem.*

Wyłożone dopiéro 4ch działań określenia (definicye) uczący się koniecznie dobrze pojąć i w pamięci zatrzymać powinni, to im albowiem posłuży do rozpoznawania w podawanych zadaniach, gdzie i jak którego działania użyć mają, a na czém szczególniéj nauka rachunków polega. Zastosowanie prawideł nie ma trudności, skoro się pojmie określenie, cel i potrzeba każdego.

Wszystkie liczby mogą być poddane pod działania któreśmy tu opisali; wyłożymy zaś sposób odbywania ich naprzód z liczbami całemi i dziesiętnemi, co oraz będzie zasadą odbywania ich z wszelkiemi innemi.

CZĘŚĆ PIÉRWSZA.

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH ARYTMETYKI NA LICZBACH CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

ROZDZIAŁ I.

O DODAWANIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

42. Gdy liczby które chcemy dodać, są pojedyncze, summę ich znajdujemy natychmiast, a zatém nie potrzeba prawidła na uskutecznienie tego dodawania (n° 36). I tak wiemy od razu, iż 4 dodane do 5, da summę 9; co piszemy $4+5=9$ i wymawiamy 4 *więcéj* 5 *równe* 9. *lub* 4 *i* 5 *czyni* 9. Podobnież $6^{zł.}+8^{zł.}=14^{zł.}$ i t. d.

43. Przy niejakiéj wprawie łatwo jest także dodać za pomocą pamięci, liczbę pojedynczą do liczby złożonéj. Tak znajdziemy bez trudności, iż $15+8=23$, iż $342^{zł.}+7^{zł.}=349^{zł.}$ i t. d.

44. Gdy liczby które dodać mamy są złożone, i gdy nie widzimy od razu ich summy; sposób jéj znalezienia jest: *wziąć oddzielnie summę wszystkich różnych części tych liczb.*

Niechbym miał np. do dodania razem liczby 494; 2532 i 9043.

Dla znalezienia summy tych liczb piszę je tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. i podkréślam je linijką:

494
2532
9043
12069

Poczém zaczynając od prawéj ręki z góry na dół mówię: 4 i 2 czyni 6, i 3 czyni 9. Summa ta kolumny jedności może być wyrażoną przez jednę cyfrę, piszę ją więc pod tąż kolumną.

Postępuję do kolumny dziesiątków, i mówię: 9 i 3 czyni 12, i 4 czyni 16, to jest, sześć jedności dziesiątków, które piszę pod kolumną dziesiątków, i dziesięć dziesiątków czyli jedno sto, które dodaję do kolumny set bezpośrednie następującéj, mówiąc: 1 zatrzymany i 4 czyni 5, i 5 czyni dziesięć, i 0 czyni także 10, to jest, jeden dziesiątek set czyli tysiąc. Gdy tu nie ma jedności rzędu w którym działam, zapełniam miejsce znakiem 0, a tysiąc zatrzymuję dla dodania go do następującéj kolumny tysięcy do któréj postępuję; mówię więc: 1 zatrzymany i 2 czyni 3, i dziewięć czyni 12, które piszę zarazem, ponieważ już ostatnia jest kolumna. Tak summa szukana jest 12069.

45. Aby więc uskutecznić dodawanie liczb złożonych, *napisz liczby podane jedne pod drugiemi tak, aby jedności tegoż samego rzędu były w jednéj kolumnie, i podkreśl je linijką, dla oddzielenia ich od summy któréj szukasz.*

Poczém *dodawaj razem liczby każdéj kolumny, zaczynając od piérwszéj po prawéj ręce, a postępując* *następnie od jednéj kolumny do drugiéj, która bezpośrednio następuje po lewéj ręce.*

Jeżeli summa kolumny w któréj działanie wykonywasz, może być wyrażoną przez jednę cyfrę, napiszesz ją pod tąż kolumną; jeżeli zaś musi być wyrażoną przez kilka cyfer, położysz pod tą kolumną tylko jedności jéj rzędu, lub w braku tych jedności położysz 0, a zatrzymasz dziesiątki dla dodania ich do następującéj kolumny jako jedności tegoż rzędu co ona, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéj po lewéj ręce kolumny, któréj summę napiszesz.

46. Gdybym miał na drugi przykład dodać 0, 7; 1,89 i 7,97;

Piszę te liczby tak, ażeby setne były pod setnemi, dziesiąte pod dziesiątemi, i t, d.

$$
\begin{array}{r}
0{,}7 \\
1{,}89 \\
7{,}97 \\
\hline
10{,}56
\end{array}
$$

a podkreśliwszy je linijką, mówię zaczynając od setnych: 9 i 7 czyni 16, to jest 6 setnych które piszę pod kolumną setnych, i dziesięć setnych czyli jednę dziesiątą, którą dodaję do kolumny dziesiątych, mówiąc: jeden zatrzymany i 7 czyni 8, i 8 czyni 16, i 9 czyni 25; piszę tylko 5 pod kolumną dziesiątych a zatrzymuję dwa dziesiątki dziesiątych, czyli dwie jedności dla dodania ich do kolumny następującéj, która jest kolumną jedności. Mówię więc: 2 zatrzymane i 0 czyni także 2, i 1 czyni 3, i 7 czyni 10, które piszę razem, ponieważ już ostatnia jest kolumna. A tak summa szukana jest 10,56.

47. Znajdziemy przez podobne postępowanie, iż summa liczb mianowanych 9478 zł. 3729 zł. i 47978 zł. jest

łok. łok. łok.
61 185 zł. Summa zaś liczb 45,08; 37,4 i 8,57
łok.
jest 91,05. Oto wzór tych dwóch działań.

zł.	łok.
9478	45,08
3729	37,4
47978	8,57
zł.	łok.
61185	91,05

48. Widzimy tu, iż prawidło to jest nieomylne; bo przepisuje dodawać następnie wszystkie części liczb podanych: postępując więc podług niego, znajdziemy summę szukaną, która jest tylko zbiorem tych różnych części.

49. W uskutecznieniu jednak działania, może się popełnić omyłka. Dla zapewnienia się więc o dokładności wypadku, używają *sprawdzenia* czyli *próby*. Chcąc się przekonać czyli nie masz omyłki w dodawaniu, najlepszą jest do tego próbą *powtórzyć działanie postępując z dołu do góry*. Widoczną jest rzeczą, iż tym sposobem wypaść powinna taż sama summa, która wypadła postępując z góry na dół.

ZAGADNIENIA.

50. I. Znaleźć summę liczb: 1) 23867; 8487; 89754; 24382; 2) 3763; 89; 276; 97654; 607 453?

II. Przy wystawieniu pewnego domu wydano na mularską robotę z pomocnikami zł. 3157, na ciesielską robotę zł. 610, na materyały dla mularzy zł. 4580, na materyał dla cieśli zł. 1442, na robotę stolarską zł. 636, ślósarską 516, kowalską 144, szklarską 117, garncarską 120; ileż razem wydano?

III. Rachują, iż od stworzenia świata do potopu upłynęło lat 1656, od potopu do zbudowania kościoła Salomonowego 1344, od zbudowania kościoła do narodzenia CHRYSTUSA PANA lat 1000, od téj epoki upłynęło już lat 1841; ileż upłynęło lat od stworzenia świata do początku teraźniejszego r. 1841.

IV. Troję zburzyli Grecy na lat 431 przed założeniem Rzymu. Od założenia Rzymu do Narodzenia CHRYSTUSA PANA upłynęło lat 753. Ileż jest lat od zburzenia Troi do roku teraźniéjszego.

V. Gubernija Krakowska liczy ludności 439 917, Sandomierska 428 225, Kaliska 654 034, Lubelska 546 971, Płocka 505 668, Mazowiecka 842 909, Podlaska 388 913, Augustowska 582 296; jakaż jest ludność tych ośmiu Gubernij?

VI. Gubernija Pułtawska ma obszerności 875 mil kwadratowych (1), ludności zaś 1 825 000; Kurska 770 mil kwadratowych, a 1 612 000 ludności; Riazańska 613 mil kwadratowych a 1 300 000 ludności; Podolska 948 mil kwadratowych a 1 462 100 ludności. Jakaż jest obszerność i ludność tych cztérech Gubernij?

VII. Znaleźć summę liczb: 1) 90543,52; 5943,4324; 18265,783; 2) 27,509; 317,68; 0,99563; 7000, 8?

---

(1) Powierzchnia zamknięta cztérema linijami prostemi równemi i w zejściach swoich równo nachylonemi do siebie, nazywa się *kwadratem*. Jeżeli jedna z tych linij, które się zowią *bokami* kwadratu, ma łokieć długości, powierzchnia niemi obwiedziona, zowie się *łokciem kwadratowym*, jeżeli ma jednę stopę długości, *stopą kwadratową*, jeżeli milę, *milą kwadratową* i t. d.

VIII. Znaleźć liczbę od którejby zostawało reszty 35644 po odjęciu z niej 5456?

IX. Kto się urodził 1672 roku, kiedyż umarł jeżeli miał lat życia 53?

X. Trzech ludzi podzielili między siebie niewiadomą liczbę rubli: pierwszy dostał 4358 rubli; drugi 540 rubli więcéj niż piérwszy, a trzeci tyle ile dwaj pierwsi i nadto 54 ruble. Ileż dostał drugi, a ile trzeci, i jaka była cała summa kiedy po wspomnionéni rozdzieleniu zostało się jeszcze 27 rubli?

XI. Gubernija Krakowska ma obszerności 193, 16 mil kw. Sandomierska 249,94; Kaliska 297,19; Lubelska 304, 74; Płocka 301, 74; Mazowiecka 346, 41; Podlaska 252, 42; Augustowska 326, 50. Ileż mil kwadratowych obejmują wszystkie Gubernije?

XII. Promień kuli ziemskiéj czyli odległość jéj środka od powierzchni zawierać ma długości 3 684 275,0938 sążni polskich. *Lalande* przydał mu jeszcze długości 1491,5906 tychże sążni. Jakąż mu więc długość przyznawał?

Dodawanie + =

ROZDZIAŁ II.

O ODEJMOWANIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

51. Gdy liczby od których mam odejmować, są pojedyncze, nie potrzeba prawidła na uskutecznienie tego odejmowania. Wiémy bowiem od razu, iż odejmując np. 4 od 6, zostaje 2 ná resztę. Pisze się 6—4=2, a mówi się 6 *mniéj* 4 *równe* 2, lub 4 od 6 zostaje 2; podobnież 5zł.=3zł.

52. Przy pewnéj wprawie łatwo jest także wynaleźć w pamięci różnicę między liczbą złożoną a liczbą pojedynczą. Tak znajdzie się bez trudności, iż 16—9=7, iż 218zł.— 9zł. =209zł. i t. d. (1).

53. Gdy mamy do odejmowania liczby złożone, których różnicy nie można widziéć od razu, trzeba *wziąć różnicę w szczególności wszystkich części tych dwóch liczb.*

Żądają np. różnicy liczb 52387 i 34583.

Piszę te liczby tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, i t. d. i podkreślam je linijką.

$$\begin{array}{r} 52387 \\ 34583 \\ \hline 17804 \end{array}$$

(1) W arytmetyce wymienia się pierwéj ilość od któréj się odejmuje: np. różnica między 8 i 5 jest 3.

Poczém mówię: 3 od 7 zostaje 4, które piszę pod kolumną jedności. Postępuję do kolumny dziesiątków, mówiąc: 8 od 8 zostaje 0, które piszę pod tąż kolumną. Postępuję do kolumny set, mówiąc: 5 od 3 odjąć nie można; biorę w myśli 1 z cyfry 2 następującéj ku lewéj stronie (1). Gdy zaś jedność wzięta waży 10 tych, do których wziąłem, dodawszy je więc do jedności set, od których mam odejmować, mieć będę 13 set. Mogę więc już 5 odjąć od 13, i zostanie mi 8, które piszę pod kolumną set. Postępuję do kolumny tysięcy i mówię: 4 od 1 (bo od dwóch wziąwszy 1, zmniejszyłem je o jedność) nie można; biorę znowu w myśli 1 od cyfry 5 ku lewéj stronie następującéj, i mówię: 4 od 11 zostaje 7, które piszę pod kolumną tysięcy. Nakoniec postępuję do kolumny dziesiątków tysięcy i mówię: 3 od 4 zostaje 1, który piszę pod tąż kolumną. A tak różnica żądana jest 17804.

Gdyby cyfra, od któréj trzeba wziąć, była 0, natenczas od następującéj za nią ku lewéj ręce cyfry, znaczenie mającéj, bierze się 1; przez co cyfra ta zostanie mniejszą o jedność, a następne zero lub zera, uważa się już jako mające po 9 jedności.

W przypadku gdy cyfra od któréj mam odejmować, jest mniejszą od téj, którą mam odejmować, jak np. w powyższém działaniu w kolumnie set: gdy pięć od trzech odjąć nie można; krótsze jeszcze jest prawidło: przydać myślą dziesiątek do 3, co czyni 13, odjąć potém 5 od 13, zostaje 8 set, które piszę pod kolumną set. Postępuję do kolumny tysięcy, a zwiększywszy cyfrę 4 jednością, dla nagrodzenia za przydany w liczbie wyższéj

---

(1) Dla lepszéj pamięci, cyfrę z któréj wziąłem, i która zmniejszyła się o jedność, znaczę punktem lub kréską.

dziesiątek (1), mówię: 5 od 2 nie można; przydaję znowu 10 do 2, co czyni 12, i mówię: 5 od 12 zostaje 7 tysięcy, które piszę pod kolumną tysięcy i t. d.

54. Aby więc uskutecznić odejmowanie liczb złożonych, *napisz mniejszą liczbę pod większą tak, aby jedności tegoż samego rzędu były w jednéjże kolumnie, i podkréśl je linijką dla oddzielenia tych liczb od różnicy, któréj szukasz.*

Poczém, *bierz różnicę liczb każdéj kolumny, zaczynając od piérwszéj po prawéj ręce, a postępując od jednéj kolumny do drugiéj bezpośrednio następującéj, pisz za każdym razem resztę pod kolumną, z któréj taż reszta wypada.*

Jeżeli w liczbie wyższéj znajduje się cyfra równa odpowiadającéj cyfrze w liczbie niższéj, i nie masz żadnéj różnicy, w tym razie dla ocalenia wartości innych znaków liczebnych, zapełnisz miejsce znakiem 0.

Jeżeli zaś w liczbie wyższéj cyfra jaka mniejsza jest, od odpowiadającéj w liczbie niższéj, natenczas aby można odejmowanie uskutecznić, potrzeba przydać myślą dziesiątek do téjże cyfry, napisać pod linijką nadmiar cyfry wyższéj tak zwiększonéj nad cyfrę niższą odpowiadającą, a dla nagrodzenia zwiększyć jednością cyfrę niższą bezpośrednio po lewéj ręce następującą.

55. Założmy sobie np. znaleźć różnicę liczb 9,147 i 7,958.

---

(1) Przydając 10 do cyfry 3, położonéj na miejscu set, powiększam 10 stami czyli tysiącem liczbę 52387: lecz rachując 5 zamiast 4 położonych na miejscu tysiąców, powiększam tysiącem liczbę 34583, więc różnica liczb 52387 i 34583 zostaje taż sama.

Dla znalezienia jéj, piszę te liczby tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiąte pod dziesiątemi, i t. d. jak tu widzimy:

$$\begin{array}{r} 9,147 \\ 7,958 \\ \hline 1,189 \end{array}$$

i mówię: 8 od 7 nie można: 8 od 17 zostaje 9, które piszę pod kolumną tysiącznych. Postępuję do kolumny setnych i mówię: 6 od 4 nie można; 6 od 14 zostaje 8, które piszę pod kolumną setnych. Postępuję do kolumny dziesiątych i mówię, 10 od 1 nie można; 10 od 11 zostaje 1, który piszę pod kolumną dziesiątych. Nakoniec postępuję do kolumny jedności, i mówię: 8 od 9 zostaje się 1, który piszę pod tąż kolumną. Tak więc różnica szukana jest 1,189.

56. Gdyby zamiast liczby 9,147 była podana 9,14; natenczas dopisałbym do niéj 0, i mówiłbym: 8 od 0 nie można; 8 od 10 zostaje 2 i t. d. W ogólności: gdy liczba odejmować się mająca, ma kilka cyfer dziesiętnych więcéj, niż liczba od któréj odejmować wypada, lub gdy ta ostatnia żadnéj nie ma cyfry dziesiętnéj, doda się do niéj tyle zer z prawéj strony, ile potrzeba do zrównania liczby cyfer dziesiętnych w obu liczbach, co ich wartości nie zmienia (nº 26), a po takowém przygotowaniu, postępuje się podług wyżéj skazanego prawidła.

57. Przez podobne postępowanie znajdziemy, iż różnica liczb mianowanych 95381 zł. i 85792 zł. jest 9589 zł. i że różnica liczb 196,4 sąż. i 89,696 sąż. jest 106,704 sąż. Oto jest wzór tych działań.

zł.	sąż.
95381	196,4
85792	89,696
9589	106,704

58. Widoczną jest rzeczą, iż idąc za tém prawidłem, bierze się różnica wszystkich części liczb podanych, i że się powinna tém samém znaleźć różnica cała tych dwóch liczb.

59. Dla sprawdzenia odejmowania, *dodasz różnicę do liczby którą odejmowałeś; jeżeli odejmowanie było dobrze zrobione, znajdziesz liczbę od któréj odejmowałeś.* Bo łącząc dwie części które składają całość, musi się złożyć koniecznie taż całość.

Tak dla sprawdzenia odejmowania pod n° 53, przydaję różnicę 17804 do liczby 34583, którą miałem odejmować, a znalazłszy liczbę 52387 od któréj miałem odejmować, jestem pewny że się w działanie błąd nie wcisnął.

60. Przeciwnie dla sprawdzenia dodawania, *odejmij od summy znalezionéj, summy szczególne wszystkich kolumn; nic się zostać nie powinno, jeżeli działanie dobrze było zrobione.* Bo odejmując od jakiéj całości wszystkie części które ją składają, nie powinno nic zostać z téjże całości.

Sprawdźmy tym sposobem dodawanie następujące:

$$\begin{array}{r} 987 \\ 491 \\ 354 \\ \hline 1832 \end{array}$$

Biorę summę kolumny jedności, mówiąc: $7 + 1 + 4 = 12$; żeby uskutecznić odejmowanie, przydaję myślą

10 do cyfry 2 całéj summy, co czyni 12, i mam 12—12=0.

Postępuję do kolumny następującéj, do któréj dla nagrodzenia przydaję 1, a liczba do odejmowania jest natenczas 1+8+9+5=23. Aby odejmowanie wykonać, przydaję 20 do cyfry 3 całkowitéj summy, co czyni 23, i mam 23—23=0.

Nakoniec, postępuję do ostatniéj kolumny, do któréj dla nagrodzenia przydaję 2, i na ostatnią liczbę do odejmowania jest 2+9+4+3=18, mam więc 18—18=0, zkąd wnoszę, że dodawanie było dobrze zrobione.

61. W podanych dotąd przykładach odejmowania, liczba mająca się odejmować była mniejsza lub tak wielka, jak liczba od któréj się miało odejmować; lecz gdyby się trafiła większa, jak np. gdyby szło o odjęcie od dziesięciu złotych które posiada pewny człowiek, piętnastu złotych które przegrał, jakżeby sobie trzeba postąpić? oto: zamiast odjęcia 15 od 10, czego nie można wykonać, odejmij 10 od 15; zostanie 5; poprzedź tę liczbę znakiem —, będziesz miał 10zł.—15zł.= —5zł.

Tak tedy gracz ma 5zł. mniéj niż mu potrzeba na zapłacenie summy przegranéj; innemi słowy ma długu złotych 5.

Dla zapewnienia się o tym wypadku, dodaj do liczby 15zł. któreś miał do odejmowania, różnicę —5zł. a połączenie tych dwóch ilości 15zł.—5zł. da 10 zł. co właśnie tak być powinno (nº 59).

62. W dodawaniu 15—5=10 tę spostrzegamy osobliwość, iż summa może być mniejszą od jednéj z liczb, które ją swém połączeniem formują. Zdaje się to zrazu zadziwiające, lecz nieco zastanowiwszy się, widzimy że jest ściśle dokładném.

W saméj rzeczy, jeżeli łączę mój majątek z twoim, widoczna jest, iż nasz majątek spólny będzie wyrażony przez summę, jaka wypadnie z dodania naszych majątków szczególnych.

Dajmy teraz, iż twój majątek wynosi 30000 zł., mój niechby był 10000 zł. i niechbym był zadłużony na 15000 zł. wyrażenie naszego majątku spólnego będzie 30000 zł. + 10000 zł. — 15000 zł. = 25000 zł. summa mniejsza niż 30000 które posiadasz. Nie trzeba więc mieszać znaczeń słów *dodawać* i *powiększać*.

63. Wzajemnie *odejmować* nie jest to zawsze *zmniejszać;* czyli, co na jedno wychodzi, różnica może być większa niż liczba od któréj się odejmowało. Bo gdyby się pytano, o ile pewny człowiek posiadający 12000 zł. majątku jest bogatszym od innego, który nie ma majątku, lecz 4000 zł. długu, widzimy, iż nadmiar majątku piérwszego będzie 12000 zł. które posiada, więcéj summą wyrównywającą 4000 zł. długu które tamten winien, tak dalece, iż różnica jest 16000 zł. liczba większa niż 12000 zł., któréj się szukało nadmiaru nad 4000 zł. długu.

64. Łatwo tu nabyć można ogólnego wyobrażenia ilości czyli wielkości *dodatnych* i *odjemnych* (quantitates positivae et negativae). Piérwsza jest wzięta we względzie obranym; druga we względzie tamtemu przeciwnym. np. Jeżeli z miejsca w którém jestem, zamierzam sobie udać się na wschód, droga którą odbywam w tym kierunku, jest dodatna względnie do mego celu; przeciwnie, jeżeli w zamiarze udania się na wschód, udaję się ku zachodowi, cała droga którą w tym razie odbywam, będzie odjemna względnie do mego celu.

65. Ilość dodatna albo nie jest poprzedzona żadnym znakiem, albo jest poprzedzona znakiem +; jeżeli usze-

dłem 1000 sążni ku wschodowi z miejsca w którém zostawałem, droga moja wyrażona będzie przez 1000 lub +1000 sążni; jeżeli przeciwnie zrobiłem 1000 sążni drogi ku zachodowi, droga moja jest odjemna i wyrażenie jéj musi być poprzedzone znakiem —, wyrażę ją więc przez —1000 sążni. Widzę zatém, iż dopóki zostaję w miejscu, dopóty droga moja jest żadna i mogę ją wyrazić przez 0. W tymto względzie *zero* trzyma środek między ilościami dodatnemi i odjemnemi.

ZAGADNIENIA.

66. I. Znaleźć różnicę liczb: 1) 30 824 i 12 705; 2) 10 010 000 i 999 999; 3) 60 000 i 52 364?

II. Ile razy da się odjąć 1) 3 578 621 od 107 358 863; 2) 6 403 857 od 25 615 428?

III. Gubernija Mazowiecka zawiéra ludności 842 909, Podlaska 388 913; jakaż jest różnica ludności tych dwóch Gubernij?

IV. Petersburg ma ludności 470 202, a domów 8 833; Wiedeń zaś ludności 357 927, a domów 8 343; o ileż więcéj ludności i domów w piérwszém mieście.

V. Najwyższa góra ziemska Himalaja czyli Himalih w Indyjach jest 26862 stóp angielskich wysoka, najwyższa w Ameryce południowéj Chimborako wysoka jest 21451 takichże stóp; o ileż tamta jest wyższa?

VI. Proch wynaleziony został roku 1330, a sztuka drukarska 1440; o ileż lat wynalazek piérwszego, poprzedził wynalazek drugiéj; a ile lat upłynęło w szczególności od każdego z tych wynalazków do roku teraźniejszego 1841?

VII. Sól w Polsce odkryto za Bolesława Wstydliwego, w żupach Bochni r. 1251, a w rok potém w Wieliczce. Ileż lat upłynęło od odkrycia żup jednych i drugich?

VIII. Europę rachują na 171396 mil kwadratowych rozległą, Azyą zaś na 640087 mil kwadratowych. O ileż mil kwadratowych większa jest Azya od Europy?

IX. Królestwo Polskie w roku 1824 liczyło ludności 3 800 317; w roku 1827: 4 022 335; w r. 1830: 4 232 127. Jakież było powiększenie ludności w poprzednich trzech, a jakie w ostatnich trzech latach?

X. Gubernija Wiatska ma rozległości 2280 mil kwadratowych, a ludności 2120190; Symbirska 1402 mil kwadratowych, a 1192000 ludności; Kazańska 1044 mil kwadratowych, a 1200 000 ludności. Jakaż jest różnica co do rozciągłości i ludności: 1) między piérwszą i drugą, 2) między drugą i trzecią, 3) między piérwszą i trzecią?

XI. Największa odległość słońca od ziemi w lecie wynosi 21 237 498 mil niemieckich (jeograficznych), a najmniejsza w zimie 20 638 236 takichże mil. O ileż mil słońce w zimie jest bliżéj ziemi aniżeli w lecie?

XII. Powierzchnia kuli ziemskiéj wynosi 9 295 106 mil kwadratowych, xiężyca 684 249 mil kwadratowych, słońca 10 940 939 378 mil kwadratowych. O ileż mil kwadratowych powierzchnia ziemi jest większa od powierzchni xiężyca, a mniejsza od powierzchni słońca.

XIII. Znaleźć różnicę, między 1) 3750,44 i 543,675; 2) 25 i 16,748; 3) 200,402 i 145,23?

XIV. Funt Polski = 405 504 milligra[illegible] funt rossyjski zawiéra 409 169,73. o ileż pié[illegible]mniejszy od drugiego?

XV. Pewna osoba ma całego majątku zł. 12480, ma zaś długu 14372. Ileż się jéj zostanie majątku gdy ten dług wypłaci?

XVI. Znaleźć trzy liczby których summa jest 21240; summa dwóch piérwszych 15000, a summa dwóch drugich 18200.

XVII. O ile liczba 14276 większą jest od różnicy między liczbami 4879 i 3298?

XVIII. Znaleźć 1) dwie liczby których summa byłaby równa liczbie 1200; 2) trzy liczby których summa byłaby 127.

ROZDZIAŁ III.

O MNOŻENIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

67. Gdy mnożna i mnożnik są liczbami pojedynczemi, nie potrzeba prawidła na takie mnożenie. Każdy wié, iż np. 2 rozmnożone przez 2, to jest 2 powtórzone 2 razy, dają 4 na iloczyn. Pisze się 2×2, lub $2 . 2 = 4$, i wymawia się: 2 *rozmnożone* przez 2 równe 4, lub, 2 *razy* 2 jest 4. Wiémy także, iż $5 \times 1 = 5$, i że $7 \times 0 = 0$. (n° 40).

Tabl.

68. Tablica następująca zawiéra iloczyny wszystkich liczb pojedynczych:

a b		
1 × 1 = 1	2 × 1 = 2	3 × 1 = 3
1 × 2 = 2	2 × 2 = 4	3 × 2 = 6
1 × 3 = 3	2 × 3 = 6	3 × 3 = 9
1 × 4 = 4	2 × 4 = 8	3 × 4 = 12
1 × 5 = 5	2 × 5 = 10	3 × 5 = 15
1 × 6 = 6	2 × 6 = 12	3 × 6 = 18
1 × 7 = 7	2 × 7 = 14	3 × 7 = 21
1 × 8 = 8	2 × 8 = 16	3 × 8 = 24
1 × 9 = 9	2 × 9 = 18	3 × 9 = 27
4 × 1 = 4	5 × 1 = 5	6 × 1 = 6
4 × 2 = 8	5 × 2 = 10	6 × 2 = 12
4 × 3 = 12	5 × 3 = 15	6 × 3 = 18
4 × 4 = 16	5 × 4 = 20	6 × 4 = 24
4 × 5 = 20	5 × 5 = 25	6 × 5 = 30
4 × 6 = 24	5 × 6 = 30	6 × 6 = 36
4 × 7 = 28	5 × 7 = 35	6 × 7 = 42
4 × 8 = 32	5 × 8 = 40	6 × 8 = 48
4 × 9 = 36	5 × 9 = 45	6 × 9 = 54
7 × 1 = 7	8 × 1 = 8	9 × 1 = 9
7 × 2 = 14	8 × 2 = 16	9 × 2 = 18
7 × 3 = 21	8 × 3 = 24	9 × 3 = 27
7 × 4 = 28	8 × 4 = 32	9 × 4 = 36
7 × 5 = 35	8 × 5 = 40	9 × 5 = 45
7 × 6 = 42	8 × 6 = 48	9 × 6 = 54
7 × 7 = 49	8 × 7 = 56	9 × 7 = 63
7 × 8 = 56	8 × 8 = 64	9 × 8 = 72
7 × 9 = 63	8 × 9 = 72	9 × 9 = 81

Ważną jest rzeczą umieć je na pamięć, i dobrze się z niemi oswoić, chcąc z szybkością i dokładnością odbywać mnożenie (1).

---

(1) Dobra jest rzecz, aby początkujący, mając skazany sposób robienia téj tablicy, sami ją sobie porządnie układali, rozciągając ją daléj i do liczb złożonych. Układanie podobnéj tablicy i innych działań głównych, niemałą im korzyść w rachunkach zapewni. Przy tablicy odejmowania trzeba pamiętać na to co się powiedziało pod nrem 61.

Wprawa rachowania z pamięci bardzo wiele przynosi korzyści, jużto że ułatwia rachunki dalsze i trudniejsze na piśmie, już że zaostrza ciekawość, przyzwyczaja do uwagi i uczy rozumować: nie powinna więc być zaniedbywaną. Wiele w téjmierze zalet łączy metoda *Pestalocego*. Aby mieć zastósowane do niéj ćwiczenie z podanéj tu tablicy mnożenia, dosyć jest odmienić miejsce dwóch piérwszych kolumn a, b, to jest, drugą napisać na miejscu piérwszéj, a tę na miejscu drugiéj: w téj zaś, liczbę do mnożenia wziętą nazywać, połową, trzecią częścią lub czwartą i t. d. innéj. Tak mnożąc 6, nazywam je połową dwunastu i mówię: raz połowa dwunastu jest sześć, dwa razy połowa dwunastu jest .... i t. d. Można równie nazwać to 6, trzecią częścią ośmnastu, czwartą, i t. d. Następnie można za każdym razem dodawać do wypadku lub od niego odejmować liczbę jaką stałą, np. raz czwarta część 24ch więcéj 3 jest 9 i t. d., lub raz czwarta część 24ch mniéj 3 jest 3 i t. d. Można także liczbę stałą dodawaną nazwać połową lub trzecią i t. d. częścią innéj np. mnożąc 5 mogę zacząć: raz piąta część 25ciu więcéj czwarta część 12tu jest 8 i t. d., lub, raz szósta część 30tu mniéj trzecia część 9ciu jest 2 i t. d. Naostatek można jeszcze wyrażać iloczyn nie prosto jak wypada, lecz odnośnie do liczb innych, np. czego jest połową, trzecią i t. d. częścią.

69. Gdy mnożna jest złożona a mnożnik pojedynczy lub złożony, i nie widzimy od razu wypadku mnożenia, *trzeba składać iloczyn cały, którego nie można znaleźć od razu.*

Dla znalezienia np. iloczynu z 7081 przez 4, piszę 4 pod 7081 i podkreślam je linijką:

$$\begin{array}{r} 7081 \\ 4 \\ \hline 28324 \end{array}$$

Potém zaczynając od prawéj ręki, mówię: 4 razy 1 jest 4, które piszę na miejscu jedności.

Postępuję do cyfry następującéj i mówię: 4 razy 8 dziesiątków jest 32 dziesiątków. Piszę 2 jedności dziesiątków, a zatrzymuję 3 dziesiątki dziesiątków czyli 3 sta, dla dodania ich do iloczynu następującego.

Mówię więc: 4 razy 0 set jest 0 set, i 3 sta, które piszę na miejscu set.

Nakoniec przystępuję do ostatniéj cyfry mnożnéj i mówię: 4 razy 7 tysięcy czyni 28 tysięcy, które piszę zarazem.

70. W praktyce nie wysłowia się jedności iloczynów szczególnych i odtąd pomijać je będziemy dla krótkości.

71. Gdy więc idzie o mnożenie liczby złożonéj przez pojedynczą; *napisz mnożnik pod mnożną, i podkreśliwszy linijką, aby czynniki były oddzielone od iloczynu ca-*

I tak: raz piąta część 25ciu więcéj czwarta część 12tu jest połową 16tu; dwa razy piąta część 25ciu więcéj czwarta część 12tu jest połową 26ciu i t. d.

Jakożkolwiek rachunek podobny zdaje się być zawikłany, przekonywa jednak doświadczenie, iż ucząc się go w porządku, okaże się łatwym i nader korzystnym.

łego szukanego, mnóż następnie przez mnożnik, postępując od prawéj ręki do lewéj, jedności różnych rzędów składające mnożną.

Gdy iloczyn cyfry nad którą działasz, może być wyrażony jednym znakiem, napisz go w iloczynie całym na miejscu które zajmować powinien.

Gdy iloczyn musi być wyrażony przez kilka cyfer, napiszesz tylko jedności tegoż iloczynu, lub w braku ich napiszesz 0, zatrzymując dziesiątki dla dodania do iloczynu następującego, jako jedności tegoż co on rzędu, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéj po lewéj ręce cyfry, któréj iloczyn napiszesz.

72. Niechby się pytano o iloczyn 963 przez 658.

Dla znalezienia go piszę mnożnik pod mnożną tak, aby jedności jednakowego rzędu tych dwóch czynników były w kolumnach:

$$
\begin{array}{r}
963 \\
\underline{658} \\
7704 \\
4815 \\
\underline{5778} \\
633654
\end{array}
$$

i podkreśliwszy linijką mówię: 8 razy 3 jest 24; piszę 4 a zatrzymuję 2; 8 razy 6 jest 48, a zatrzymane 2 jest 50; piszę 0 a zatrzymuję 5; 8 razy 9 jest 72, a 5 zatrzymane jest 77, które piszę razem.

Przystępuję do 5 dziesiątków mnożnika, mówiąc: 5 razy 3 jest 15; że liczba ta 15, znaczy 15 dziesiątków, to jest rzecz oczywista: piszę więc 5 na miejscu dziesiątków, a zatrzymuję 1; 5 razy 6 jest 30, a 1 zatrzymany jest 31; piszę 1 a zatrzymuję 3; 5 razy 9 jest 45, a 3 zatrzymane jest 48, które piszę razem.

Nakoniec, przystępując do set mnożnika, mówię: 6 razy trzy jest 18; ten iloczyn wyraża oczywiście sta; piszę więc 8 na miejscu set a zatrzymuję 1; 6 razy 6 jest 36, a 1 zatrzymany jest 37; piszę 7 a zatrzymuję 3; 6 razy 9 jest 54, a 3 zatrzymane jest 57, które piszę razem. Dodaję iloczyny cząstkowe, i mam 633654 na iloczyn cały (1).

73. Aby więc rozmnożyć liczbę złożoną przez inną złożoną, *napisz mnożnik pod mnożną tak, aby jedności tegoż samego rzędu były w kolumnie i podkreśl.*

Mnóż następnie całą mnożną przez każdą cyfrę mnożnika, postępując od prawéj ręki do lewéj.

Układaj rozmaite iloczyny cząstkowe jedne pod drugiemi tak, ażeby piérwsza cyfra po prawéj ręce każdego z tych iloczynów znajdowała się wprost pod tą, przez którą mnożyłeś.

Dodaj wszystkie te iloczyny cząstkowe i będziesz miał iloczyn cały.

74. Prawidło przepisane jest nieomylne. Bo mnożyć jednę liczbę przez drugą, jestto powtarzać piérwszą tyle

(1) Łatwo się tu okazuje, iżby można zacząć działanie od cyfry najwyższego rzędu mnożnika, np. mnożyć 1ód mnożną przez 6 set, potém przez 5 dziesiątków, nakoniec przez 8 jedności; tym sposobem iloczyn cząstkowy, który poprzedniczo wypadł trzeci, byłby tu piérwszym a piérwszy trzecim, jak widzimy z wzoru działania:

$$\begin{array}{r} 963 \\ 658 \\ \hline 5778 \\ 4815 \\ 7704 \\ \hline 633654 \end{array}$$

razy, ile jest jedności w liczbie drugiéj. Że zaś podług prawidła przepisanego powtarza się mnożna tyle razy, ile oznacza każda cyfra mnożnika; więc podług tego prawidła powtarza się mnożna tyle razy, ile jest jedności w całym mnożniku, a zatém znajduje się nieomylnie prawdziwy iloczyn.

75. Ażeby poznać czy nie masz omyłki w mnożeniu, *powtórz je, biorąc za mnożną liczbę, która była mnożnikiem w piérwszym razie, a za mnożnik liczbę która była mnożną.* Iloczyn powinien być ten sam. W saméj rzeczy widzimy, iż 6 razy 3 i 3 razy 6 daje zawsze jednakowy iloczyn 18.

76. Wypada tu jeszcze uważać, iż trzy czynniki, cztéry, i t. d. rozmnożone przez siebie w jakimkolwiek porządku, dają zawsze ten sam iloczyn np. $3\times4\times5=5\times3\times4=3\times5\times4=5\times4\times3$ . . . i t. d. Aby tę prawdę okazać naocznie, napiszmy np. 5 jedności w linii prostéj i powtórzmy to 4 razy; otrzymamy 4 razy 5 jedności.

1,	1,	1,	1,	1,
1,	1,	1,	1,	1,
1,	1,	1,	1,	1,
1,	1,	1,	1,	1,

Jeżeli zamiast rachowania jedności w linijach od lewéj ręki do prawéj, porachujemy je z góry na dół, znajdziemy 5 linij każdą po 4 jedności: więc 4 jedności powtórzone razy 5, dają ten sam iloczyn, co 5 jedności powtórzone razy 4. Że zaś dla otrzymania iloczynu z więcéj czynników, nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa, ztąd łatwo widzimy, iż porządek w ich mnożeniu jest dowolny.

77. Gdy mnożna i mnożnik są zakończone zerami, skraca się działanie mnożąc tylko cyfry ważność mające jedne przez drugie, i dopisując na końcu iloczynu tak znalezionego wszystkie zera któreśmy pominęli.

Tak dla znalezienia iloczynu z 369000 przez 8900, mnożę tylko 369 przez 89, a znalazłszy iloczyn 32841, dopisuję pięć zer na końcu, co mi daje 3284100000 na prawdziwy iloczyn szukany.

W saméj rzeczy, prawdziwa mnożna 369000 jest tysiąc razy większa niż 369, a prawdziwy mnożnik 8900 sto razy większy niż 89, więc prawdziwy iloczyn powinien być sto razy tysiąc razy t. j. sto tysięcy razy większy niż 32841; trzeba więc 32841 sto tysięcy razy zwiększyć, aby mieć prawdziwy iloczyn, a to nastąpi dopisując pięć zer na końcu liczby 32841.

Dla téj przyczyny, gdybym miał mnożyć 985 przez 10000, napisałbym 9850000.

78. Nakoniec, gdy się znajdują zera pośrednie w mnożniku, opuszczamy je, biorąc tylko iloczyn mnożnéj przez cyfrę ważność mającą, która bezpośrednio po lewéj ręce następuje, i pisząc piérwszą cyfrę tego iloczynu cząstkowego pod cyfrą przez którą mnożymy, jak to widać w następującym przykładzie.

$$\begin{array}{r}
397802 \\
\underline{480003} \\
1193406 \\
3182416 \\
1591208 \\
\hline
190946153406
\end{array}$$

79. Podług tego co się już powiedziało, w mnożeniu liczb całkowitych żadna nie zachodzi trudność; lecz gdyby szło o mnożenie dziesiętnych, jakżeby sobie trzeba postąpić? oto: *nie uważając na przecinek, działaj zupełnie jak gdyby szło o mnożenie liczb całkowitych, i oddziel przecinkiem od prawéj ręki z iloczynu całego tyle*

cyfer na dziesiętne, ile ich jest razem w obu czynnikach.

Tak, aby rozmnożyć 1,9542 przez 3,94 działam jak gdybym miał 19542 mnożyć przez 394.

$$\begin{array}{r} 1{,}9542 \\ 3{,}94 \\ \hline 78168 \\ 175878 \\ 58626 \\ \hline 7{,}699548 \end{array}$$

Biorę iloczyny cząstkowe nie uważając na przecinki które są w dwóch czynnikach, potém znalazłszy 7699548 iloczyn cały, oddzielam z niego przecinkiem sześć cyfer dziesiętnych od prawéj ręki, a prawdziwy iloczyn będzie 7,699548 to jest 7 całych 699 548 milijonowych.

W saméj rzeczy, mnożąc 19542 przez 394, mnożyłem liczbę dziesięć tysięcy razy większą niż 1,9542 przez liczbę sto razy większą niż 3,94; więc iloczyn znaleziony jest sto razy, dziesięć tysięcy razy t. j. milijon razy większy niż prawdziwy iloczyn; więc aby mieć prawdziwy iloczyn, trzeba 7696548 milijon razy zmniejszyć, a to nastąpi oddzielając sześć cyfer dziesiętnych (n° 27), czyli tyle, ile ich jest razem w obu czynnikach: więc prawdziwy iloczyn będzie 7,699 548.

80. Gdyby się nie znajdowało w całym iloczynie tyle znaków, ile jest cyfer dziesiętnych w obu razem czynnikach, trzeba położyć po lewéj stronie tego iloczynu liczbę zer dostateczną (n° 28), jak to widzimy w przykładzie następującym.

$$\begin{array}{r} 0{,}00029 \\ 0{,}018 \\ \hline 232 \\ 29 \\ \hline 0{,}0000522 \end{array}$$

81. Gdyby się miało mnożyć jaką liczbę np. 5,2439 przez 10 lub przez 100, lub i t. d. dosyć dla otrzymania iloczynu posunąć przecinek ku prawéj ręce w mnożnéj o jedno, lub dwa, lub i t. d. miejsc. Tak $5{,}2439 \times 10 = 52{,}439$ a $5{,}2439 \times 100 = 524{,}39$. i t. d.

Bo mnożyć przez 10 lub przez 100 jestto zwiększać mnożną 10 razy lub 100 razy. Że zaś, posuwając o jedno lub dwa miejsca ku prawéj ręce w mnożnéj, zwiększa się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (nº 28), więc tym sposobem znajdzie się prawdziwy iloczyn.

82. Gdy czynniki, których szukamy iloczynu, są liczbami mianowanemi; nie można dowolnie brać któregokolwiek za mnożnik lub mnożną: inaczéj bowiem chociażby iloczyn wypadł wielkości szukanéj, mógłby jednak być złożony z jedności nie téj natury, jakiéj szukamy, lecz zupełnie różnéj. Zważając więc że *mnożnik* to tylko skazuje, ile razy wziąć należy mnożną; że zatém za *liczbę ogólną* czyli *niemianowaną uważany być powinien*; ten zawsze czynnik obierać potrzeba za mnożną, który się składa z jedności téj natury, o jakie w zapytaniu idzie.

Podług téj uwagi, gdyby ci zadano znaleźć wartość
łok. zł.
549 po 95,39 za łokieć; postrzeżesz natychmiast, iż chcąc
zł.
mieć złote w iloczynie, powinieneś wziąć 95,39 za mno-
łok.
żną a mnożnik 549 uważać jako liczbę ogólną, która oznacza, iż mnożna powinna być wzięta 549 razy, to
łok. łok.
jest tyle razy ile 1 jest zawarty w 549.

łok.
Nakoniec, gdyby ci podano to zadanie: 0,49 płótna

zł. zł.
kosztuje 1, ileż będzie łokci tegoż płótna za 57? Weź-
łok. zł.
miesz 0,49 za mnożną, powtórzysz ją tyle razy ile 1 jest
zł.
zawarty w 57 t. j. 57 razy; a iloczyn znaleziony wyrażałby liczbę łokci. Oto jest wzór tych dwóch działań.

zł.	łok.
95,39	0,49
549	57
85851	343
38156	245
47695	
zł.	łok.
52369,11	27,93

W tenczas tylko którykolwiek czynnik mianowany można brać dowolnie za mnożnik lub mnożną, gdy się obadwa składają z jedności jednorodnych: wtedy bowiem iloczyn zawsze będzie zawiérał w sobie takież same jedności, jakich szukamy; co łatwo z poprzedzającego objaśnienia wyrozumiéć.

ZAGADNIENIA.

83. I. Znaleźć iloczyn liczb: 1) 12634 przez 548; 2) 56789; 3) 6070809 przez 6070809.

II. Gdy łok: 1 materyi kosztuje zł. 38, ileż zł. kosztować będzie 1285 łok: téj materyi?

III. 5250 czerw. zł. ileż czynią złotych, rachując czerwony złoty po zł. 18?

IV. Koń zwykle ciągnąć może ciężaru 598 funtów. Ileż ciężaru ciągnąć może koni 348?

V. Kiedy głos ubiega na sekundę 1027 stóp paryzkich; ileż ubieży: 1) w dwóch minutach? 2) w dwóch godzinach?

VI. Rok pospolity z 365 dni złożony, ileż zawiéra godzin, gdy na dzień rachujemy godzin 24?

VII. Rok astronomiczny zawiéra dni 365 godzin 5, minut 8, sekund 49. Gdy godzina zawiéra 60 minut, minuta 60'', a dzień 24 godzin; ileż będzie sekund w 10 latach.

VIII. 2540 imperyałów ile czynią złotych polskich, kiedy za jeden dają po zł. 69? —

IX. 168 pudów i 35 funtów, ile uczynią funtów?

X. Miał ktoś pola zasianego żytem 98 morgów. Na morgu użyna zwykle 2 kopy, z każdéj kopy wymłaca 3 korce. Ileż mieć będzie korcy z całego zbioru?

XI. Przedając 1) korzec zboża po zł. 18, ile przypadnie zł. za 24 łasztów, gdy łaszt ma korcy 30? 2) ośminę zboża po zł. 9, ile przypadnie za beczek 246, gdy beczka zawiéra 8 ośminów? 3) garniec wódki po gr. 54, ileż przypadać będzie za garcy 1540?

XII. Sześć kostek sześciennych rzucanych razem, ileż razy upaść mogą odmiennie?

XIII. Las jest długi na mil 12, z których na każdéj znajduje się 120 poręb, w każdéj porębie rośnie około 357 sosien, z każdéj mieć można 12 klocków, a z klocka 15 łupek. Ileż z tego lasu mieć można łupek?

XIV. Rozmnożyć: 1) 635,48 przez 42; 2) 468 przez 35,64; 3) 524,17 przez 15,62; 4) 723,2879 przez 47000; 5) 0,0048 przez 0,026.

XV. Gdy łokieć pewnéj materyi kosztuje zł. 39,4; ileż złotych kosztować będzie 428,6 łokci téj materyi?

XVI. Kupiono 2243,2 arszynów płótna po 24 kopiejek, a 302,6 arszynów drugiego płótna, które jest 2 razy droższe. Ileż zapłacono za każdy gatunek płótna?

XVII. W pewnéj biblijotece jest 25 szaf, w każdéj szafie po 9 półek, na każdéj półce po 57 xiążek, a każda xiążka po średniéj cenie warta jest 3 rubli assygnacyjnych, co wyrównywa wartości zł. 5. Ileż ma wartości cała biblijoteka?

XVIII. Jaka zmiana zajdzie w iloczynie, jeżeli mnożną rozmnożymy przez 15, a mnożnik przez 3?

XIX. Znaleźć iloczyn dwóch liczb, z których pierwsza jest równa 243, a druga równa piérwszéj rozmnożonéj przez 12?

XX. Znaleźć trzy liczby, z których druga byłaby równa piérwszéj rozmnożonéj przez 145, a trzecia równa drugiéj rozmnożonéj przez 27?

ROZDZIAŁ IV.

O DZIELENIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

---

84. Gdy jest liczba pojedyncza do dzielenia przez pojedynczą, nie potrzeba prawidła na to działanie. Każdy wié iż np. 8 zawiéra w sobie 4 dwa razy, a zatém że dzieląc 8 przez 4, jest dwa na iloraz. Piszę się, $\frac{8}{4}=2$ lub $8:4=2$ i wymawia się 8 *podzielone przez* 4 *równe* 2, lub 8 *zawiéra w sobie* 4, *razy* 2.

85. Znajduje się także bez podawania prawidła iloraz z podzielenia liczby złożonéj z dwóch cyfer przez liczbę pojedynczą. Do tego potrzeba tylko wiedzieć iloczyny liczb pojedynczych; tak widać od razu iż $\frac{72}{9}=8$, iż $\frac{42}{7}=6$, i t. d.

86. Ponieważ iloraz oznacza, ile razy dzielna zawiera dzielnik (nº 41), jasną jest rzeczą, iż dzielna składa się z dzielnika wziętego tyle razy ile jedności zawiéra iloraz. Więc mnożąc dzielnik przez iloraz będzie na iloczyn liczba równa dzielnéj, słowem: dzielna. Tak w przykładach powyższych, jest $4\times2=8$; $9\times8=72$; $7\times6=42$; a w tym $\frac{5}{5}=1$, mnożąc dzielnik 5 przez iloraz i znajduje się dzielna 5.

87. Zdarza się często, iż iloraz z podzielenia jednéj liczby przez drugą nie może być zupełnie wyrażony przez całkowitą; takim jest iloraz z podzielenia 11 przez 3.

W saméj rzeczy jest on większy niż 2, a mniejszy niż 3. W takim razie, *napisz na iloraz mniejszą z dwóch liczb pomiędzy któremi zawarty jest iloraz prawdziwy. Rozmnóż dzielnik przez tę liczbę, odejmij od dzielnéj iloczyn z tego mnożenia, i połóż różnicę po prawéj stronie ilorazu oznaczając dzielenie jéj przez dzielnik.*

Tak w dzieleniu 11 przez 5 napisawszy 2 na iloraz, mówię: $5\times2=10$, 10 od 11 zostaje 1, który piszę po prawéj stronie 2, oznaczając iż go trzeba podzielić przez 5, i mam $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$. Widzimy więc iż 11 jest złożone z jednéj części zupełnie podzielnéj przez 5, i reszty 1, któréj potrzeba tylko oznaczyć dzielenie przez 5.

88. Widoczną jest, iż iloraz z 11 przez 5 mógłby także być wyrażony przez $\frac{11}{5}$ jak przez $2\frac{1}{5}$, ponieważ te dwa wyrażenia są równe. Wnieśmy z tego przykładu, iż kiedy iloraz z podzielenia jakiéj liczby przez drugą nie może być zupełnie wyrażony przez całkowitą liczbę, można go wyrazić, oznaczając dzielenie dzielnéj przez dzielnik. Sposób ten wyrażania ilorazu niezupełnego jest wygodnym, i staje się koniecznym, gdy dzielna jest mniejsza od dzielnika. Gdybym miał np. 6 podzielić przez 7, nie mógłbym napisać prostszego ilorazu, tylko $\frac{6}{7}$.

89. Ilość zupełnie, to jest bez zostawiania reszty, podzielna przez drugą, jest *wielokrotną* względem drugiéj czyli *wielokrotnością* drugiéj, a ta jest *częścią wielokrotną* pierwszéj. Tak 8 jest liczbą wielokrotną tak 4*ch* jako i 2*ch*, a 4 i 2 są częściami wielokrotnemi 8*miu*.

90. Liczby wielokrotne z dwóch, są liczbami *parzystemi*, liczby zaś niepodzielne przez 2, zowią się *nieparzyste*.

Postrzegamy łatwo iż każda liczba zakończona przez 0, 2, 4, 6, lub 8 musi być parzystą.

91. Każda liczba niemająca innego dzielnika zupełnego tylko sama siebie i jedność, nazywa się *liczbą piérwszą* lub *liczbą pierwotną;* 1, 2, 3, 5, 7, 11, i t. d. są liczby pierwotne (1).

92. Nakoniec kiedy dwie liczby, które porównywamy z sobą, nie mają żadnego spólnego dzielnika zupełnego, tylko jedność, nazywamy je liczby *piérwsze* lub *pierwotne między sobą, chociaż same w sobie nie są pierwotnemi;* tak 15 i 4 są liczby pierwotne między sobą.

93. Gdy dzielna jest złożona a dzielnik pojedynczy lub złożony, nie widać zaraz ile razy tenże zawiéra się w dzielnéj, *trzeba więc częściami szukać ilorazu którego zaraz znaleźć nie można.*

Aby podzielić np. 73648 przez 8, piszę te dwie liczby w ten sposób:

$$
\begin{array}{r|l}
\dot{7}\dot{3}\dot{6}\dot{4}\dot{8} & 8 \\
\underline{72} & \overline{9206} \\
16 & \\
\underline{16} & \\
48 & \\
\underline{48} & \\
0 &
\end{array}
$$

Biorę za piérwszą dzielną cząstkową 73 tysiące liczby dzielnéj 73648 (2) i mówię, 73 zawiéra 8, razy 9; piszę 9

(1) Pożyteczną jest, ażeby początkujący układali sobie tablice liczb pierwotnych od 1 do 100 np. lub 200, lub daléj.

(2) Gdy piérwsza cyfra całéj dzielnéj zawiéra dzielnik, trzeba wziąć tę tylko cyfrę za dzielną cząstkową.

pod linijką, i widzimy oczywiście, iż te 9 powinny wyrażać tysiące (1). Potém mówię, $8 \times 9 = 72$, które odjąwszy od dzielnéj cząstkowéj 73, zostaje 1 tysiąc, do którego przybiéram 6 set dzielnéj (2), co mi daje 16 set na drugą dzielną cząstkową. Mówię zatém, $8 \times 2 = 16$, które odjąwszy od dzielnéj cząstkowéj 16, nic nie zostaje. Przybiéram 4 dziesiątki dzielnéj i mam trzecią dzielną cząstkową. Mówię: 4 nie zawiéra 8 ani razu; piszę w ilorazie 0 dla oznaczenia, iż ten nie zawiéra dziesiątków. Do 4 przybiéram 8 jedności na ostatnią dzielną cząstkową i mówię: 48 zawiéra 8, razy 6; piszę więc w ilorazie cyfrę 6, która wyraża jedności; i mówię $8 \times 6 = 48$, które odjąwszy od dzielnéj cząstkowéj 48, zostaje 0. Tak liczba 73 648 zawiéra 8 zupełnie 9 206 razy.

94. Jeżeli więc idzie o podzielenie liczby złożonéj przez pojedynczą? *napisz dzielnik po prawéj stronie dzielnéj, oddzielając je linijką, i pociągnąwszy drugą pod dzielnikiem, pisz pod nią cyfry ilorazu, w miarę ich wynajdywania. Dla wynalezienia zaś ich, dziel następnie przez dzielnik wszystkie części dzielnéj postępując od lewéj ręki do prawéj, dopóki dzielna nie będzie wyczerpana.*

Jeżeli w ciągu działania natrafisz na cząstkową dzielną niezawiérającą dzielnika; natenczas przed przybraniem

---

(1) Jest pewna, iż liczba 73 uważana sama, zawiéra 8, tylko 9 razy z resztą 1; lecz uważana jako składająca część liczby 73648, waży 73 tysiące, a zatém zawiéra 8, dziewięć tysięcy razy i zostaje 1 tysiąc.

(2) Dla uniknienia omyłki trzeba naznaczyć kropką lub kréską ostatnią cyfrę piérwszéj dzielnéj cząstkowéj, a następnie każdą cyfrę spuszczoną.

następującego znaku dzielnéj, napiszesz w ilorazie 0 *dla oznaczenia, iż iloraz nie zawiéra jedności tego rzędu, w którym działasz.*

95. Aby liczbę złożoną podzielić przez inną złożoną np. 151982 przez 495, układam dzielną i dzielnik jak w przykładzie poprzedzającym:

$$\begin{array}{r} 151\dot{9}\dot{8}\dot{2} \\ 1485 \\ \hline 3482 \\ 3465 \\ \hline 17 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 495 \\ \hline 307\frac{17}{495} \end{array}\right.$$

Poczém biorę za piérwszą dzielną cząstkową cztéry cyfry 1519 dzielnéj, ponieważ trzy piérwsze nie zawiérają dzielnika (1). Dochodzę ile razy liczba 1519 zawiéra 495, a dla większéj łatwości dochodzę tylko, ile razy 15 set dzielnéj cząstkowéj 1519 zawiéra 4 sta dzielnika 495, mówiąc: 15 zawiéra 4, razy 3; mnożę 495 przez 3; iloczyn znaleziony 1485 może być odjęty od 1519, a zatém dzielnik jest zawarty 3 razy w dzielnéj cząstkowéj. Piszę więc w ilorazie cyfrę 3, która wyrażać będzie sta, ponieważ dzielna cząstkowa 1519 wyraża 1519 set, i odejmuję 1485 od 1519, a zostanie się 34.

Do pozostałéj reszty 34 przybiéram cyfrę 8 dzielnéj i mam 348 dziesiątków na drugą dzielną cząstkową. Że zaś liczba 348 nie zawiéra w sobie liczby 495; potrzeba więc napisać 0 w ilorazie dla oznaczenia iż ten nie zawiéra dziesiątków.

---

(1) Widoczną jest rzeczą, iż 151 uważane jako wyrażające 151 tysięcy, nie zawiéra 495 ani razu jednego w rzędzie tysięcy. Bo 495×1000 jest większe niż 151000.

Do 348 przybiéram cyfrę 2 ostatnią dzielnéj; co mi daje 3482 jedności na ostatnią dzielną cząstkową. Lecz zamiast uważać ile razy 3482 zawiéra 495, uważam dla téjże przyczyny co wyżéj, ile razy 34 zawiéra 4. Jednak nim napiszę 8 w ilorazie, mnożę 495 przez 8; a ponieważ iloczyn znaleziony 3960 wypada mi większy niż dzielna cząstkowa 3482 okazuje się więc ztąd, iż ta dzielna nie zawiéra 8 razy dzielnika. Probuję więc tymże samym sposobem czy dzielna 3482 nie zawiéra w sobie dzielnika 495 razy 7, i widzę, że iloczyn 3465 może być odjęty od 3482. Piszę więc w ilorazie cyfrę 7, która wyrazi jedności, i odejmuję 3465 od 3482; resztę 17 piszę po prawéj stronie ilorazu i oznaczam jéj dzielenie przez 495. Tak tedy liczba 151982 zawiéra liczbę 495, razy 307, z resztą 17.

96. Prawidło przepisane jest nieomylne. Bo dzielić jednę liczbę przez drugą, jestto szukać ile razy piérwsza zawiéra drugą. Że zaś idąc za prawidłem przepisaném, dochodzimy zawsze ile razy każda część dzielnéj zawiéra dzielnik, a tém samém ile razy cała dzielna zawiéra dzielnik; więc prawidło przepisane jest nieomylne.

97. Ażeby poznać czy nie zaszła omyłka w dzieleniu, *trzeba rozmnożyć dzielnik przez iloraz: jeżeli dzielenie które sprawdzić chcemy dobrze było odbyte, wypadnię dzielna* (n° 86). Gdy jest jaka reszta, *trzeba ją dodać do iloczynu z dzielnika przez iloraz.* Bo jeżeli prawda np. iż liczba 151982 zawiéra 495, razy 307 z resztą 17, widoczną jest rzeczą, iż trzeba dla znalezienia 151982 dodać 17 do 151965 iloczynu z 495 przez 307.

98. I odwrotnie, dzielenie służyć może do sprawdzenia mnozenia. Bo dzielna jest iloczynem którego dwoma czynnikami są dzielnik i iloraz: *więc dzieląc iloczyn*

przez jeden z jego czynników wzięty za dzielnik, będzie drugi czynnik na iloraz.

99. Uważmy, iż dla otrzymania iloczynu z wielu czynników, nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa (n° 76) w jakimkolwiek porządku, więc dzieląc iloczyn z wielu czynników, przez którykolwiek z nich, wypadnie na iloraz iloczyn innych czynników.

100. Nie koniecznie potrzeba pisać pod każdą dzielną cząstkową iloczyn dzielnika przez każdą cyfrę położoną w ilorazie. Skraca się dzielenie czyniąc odejmowanie w miarę rozmnożenia każdéj cyfry dzielnika przez cyfrę wyrażającą ile razy dzielnik jest zawarty w dzielnéj cząstkowéj, nad którą się działa.

Niech będzie np. 162832 do podzielenia przez 398.

$$\begin{array}{r|l} 162\,\dot{8}\dot{3}\dot{2} & 398 \\ \hline 3\,632 & 409\frac{50}{398} \\ 50 & \end{array}$$

Biorę 1628 za piérwszą dzielną cząstkową i mówię: 16 zawiéra 3, razy 5, probuję 5 i widzę iż jest za wielkie, i że dzielna cząstkowa 1628 zawiéra 398 tylko 4 razy (1). Piszę więc 4 w ilorazie, i mnożę dzielnik przez 4, mówiąc:

---

(1) Zamiast uważania ile razy liczba 16 zawiéra 3, można uważać ile razy liczba 16 zawiéra 4, ponieważ dzielnik 398 zbliża się bardziéj do 400 niż do 300. Znajduje się od razu 4, które jest prawdziwym ilorazem. Tak we wszystkich przypadkach gdzie drugą cyfrą dzielnika są liczby 9, 8, 7, czyli, gdy drugiéj cyfrze nie wielu jedności brakuje do uczynienia jedności tego rzędu, jakie się mieszczą w cyfrze piérwszéj, zamiast szukania ile razy ta cyfra zawiéra się w dzielnéj odpowiadającéj, szukać trzeba ile razy zawiéra się zwiększona jednością.

$4\times8=32$; 32 od 8 nie można: aby uskutecznić odejmowanie, dodaję 30 do 8, co czyni 38, i mówię: 32 od 38 zostaje 6, które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéj stronie 1628, a zatrzymuję 3 dziesiątki, aby je dodać dla nagrodzenia iloczynowi dziesiątków, które mieć będę mnożąc 9 dziesiątków dzielnika przez 4. Mówię więc: $4\times9=36$, a 3 zatrzymane $=39$; 39 od 2 nie można; dodaję w myśli 40 do 2, co czyni 42, i mówię: 39 od 42 zostaje 3, które piszę pod 2, a zatrzymuję 4, aby je dodać dla nagrodzenia do iloczynu set które mieć będę, mnożąc 3 sta dzielnika przez 4. Mówię więc: $4\times3=12$, a 4 zatrzymane $=16$, 16 od 16 zostaje 0.

Do reszty 36 przybiéram cyfrę 3 dzielnéj. Gdy dzielna cząstkowa 363 nie zawiéra 398, piszę 0 w ilorazie, i przybiéram zaraz do 363 ostatnią cyfrę dzielnéj, co daje 3632 na ostatnią dzielną cząstkową. Rozpoznawszy, iż ta dzielna zawiéra dzielnik 398 tylko 9 razy, piszę 9 w ilorazie, i mnożę dzielnik, mówiąc: $9\times8=72$; 72 od 2, nie można; przydaję 70 do 2, i mam 72. Mówię więc: 72 od 72 zostanie 0, które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéj stronie dzielnéj cząstkowéj 3632, i zatrzymuję 7 dziesiątków. Mnożę 9 dziesiątków przez dzielnik 9, mówiąc, $9\times9=81$, a 7 zatrzymane $=88$; 88 od 3 nie można. Dodaję w myśli 90 do 3 co czyni 93, i mówię: 88 od 93 zostanie 5, które piszę pod dziesiątkami 3, a zatrzymuję 9. Mnożę 3 sta przez dzielnik mówiąc $9\times3=27$ a 9 zatrzymane $=36$; 36 od 36 zostaje 0. Tak mam na iloraz 409 z resztą 50.

101. Zważmy tu, iż za każdém dzieleniem cząstkowém nie można nigdy więcéj położyć w ilorazie jak 9. Bo rzęd jedności ilorazu każdego dzielenia cząstkowego jest koniecznie oznaczony rzędem jedności liczby dziel-

néj cząstkowéj przyrównanym do rzędu jedności dzielnika. Gdybyśmy zaś w dzieleniu cząstkowém położyli tylko 10 w ilorazie, jest rzeczą widoczną, iż iloraz ten byłby rzędu wyższego niż być powinien. I tak w przykładzie poprzedzającym, gdy dzielna cząstkowa 363 wyrażająca dziesiątki, nie zawiérała dzielnika 398 ani razu w rzędzie dziesiątków; dzielna cząstkowa 3632 wyrażająca jedności, zawiérać go musiała tylko w rzędzie jedności; a zatém nie można położyć w ilorazie większéj cyfry niż 9. Jakoż 50 reszta z tego dzielenia mniejsza niż dzielnik 398 jasno pokazuje, iż dzielna cząstkowa 3632 nie zawiéra dzielnika 393 ani razu więcéj.

Można jeszcze okazać powyższą prawdę i w ten sposób: gdy dzielna cząstkowa np. 363 nie zawiéra dzielnika ani razu; taż dzielna przybraniem cyfry zwiększona dziesięć razy, nie może go zawiérać więcéj nad 9 razy.

Ztąd się okazuje, że iloraz powinien mieć zawsze tyle cyfer więcéj jedną, ile zostaje cyfer w dzielnéj po piérwszém dzieleniu cząstkowém.

102. Jeżeliby w ciągu dzielenia wypadła reszta większa od dzielnika, lub mu tylko równa; byłoby to dowodem, iż dzielnik zawiéra się jeszcze w dzielnéj, a zatém że cyfra położona w ilorazie jest za małą. Trzeba więc natenczas zwiększyć tęż cyfrę jedną, dwoma i t. d. jednościami.

103. Gdy dzielna i dzielnik są zakończone zerami, skraca się działanie opuszczając w jednéj i w drugiéj liczbie tyle zer, ile ich jest na końcu liczby mającéj ich mniéj, i dzieląc część pozostałą dzielnéj przez część pozostałą dzielnika. Naprzykład, gdybym miał 3 284 100 000 do podzielenia przez 8900, opuściłbym dwa zera w dzielnéj i dzielniku, potém dzieliłbym 32 841 000 część po-

zostałą dzielnéj, przez 89 część pozostałą dzielnika, i miałbym na iloraz 360000. Jakoż 32 841 000 set zawiéra 89 set, zupełnie tyle razy ile 32 841 000 jedności zawiéra 89 jedności.

Gdyby dzielnik był 1 z zerami, dosyćby było, aby mieć iloraz, wymazać na końcu dzielnéj tyle zer ile ich jest po jedności. Tak dla podzielenia 45000 przez 100; wymazuję dwa zera na końcu dzielnéj i mam na iloraz 450. Jakoż $450 \times 100 = 45000$. Lecz gdyby nie było zer na końcu dzielnéj, natenczas aby mieć iloraz, oddzieli się po prawéj stronie liczby dzielnéj tyle cyfer ile jest zer po jedności, i oznaczy, że te cyfry mają być podzielone przez dzielnik. Tak, jeżeli jest 43649 do podzielenia przez 1000, iloraz będzie $43\frac{649}{1000}$. Możnaby też napisać tylko 43,649 (nº 27).

104. Zdarza się często, że trzeba poznać wszystkie dzielniki zupełne jakiéj liczby. Oto jest sposób ich znalezienia. Dajmy, iż żądają wszystkich dzielników liczby 84.

Dzielę kolejno tę liczbę przez wszystkie liczby pierwotne (nº 91) 1, 2, 3, 5, 7, i t. d. nie przestając dzielić przez tęż samę liczbę dopóki można.

Tak dzieląc 84 przez 1, iloraz jest 84.

Dzielę 84 przez 2, i mam iloraz 42.

Dzielę następnie przez 2, i widzę, iż liczba 42 podzielona przez 2, daje iloraz 21, który już nie jest podzielony przez 2.

Dzielę 21 przez 3, a iloraz 7 nie jest już podzielony ani przez 3 ani przez 5.

Dzielę więc 7 przez 7; iloraz jest 1, i dzielenie przez liczby pierwotne jest już wyczerpane.

Dla objęcia jednym rzutem oka liczb dzielnych i ilorazów, które mi dają te rozmaite dzielniki, układam je jak tu widzimy.

Dzielne i ilorazy	Dzielniki
84	1
42	2
21	2
7	3
1	7

105. Lecz liczba 84 jest jeszcze podzielna przez wszystkie iloczyny dzielników pierwotnych, wziętych wszystkiemi sposobami po dwa, po trzy i t. d.

Zróbmy więc te iloczyny przestając na napisaniu po razu tych, które są te same.

Biorąc je

1*ód* po dwa, znajdziemy 4, 6, 14, 21,

2*re* po trzy 12, 28, 42,

3*cie* po cztery . . . . 84.

Wszystkie tedy dzielniki liczby 84 napisanę każdy po razu, są: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

Krócéj jest jeszcze brać iloczyny dzielników pierwotnych w miarę ich wynajdywania.

84	1
42	2
21	2, 4,
7	3, 6, 12
1	7, 14, 28, 21, 42, 84 (1).

106. Aby zaś znaleźć najmniéjszą liczbę podzielną przez liczby dane, *potrzeba liczby dane rozłożyć na czynniki*

(1) Nie bezpożyteczną będzie, aby uczący się układali tablicę liczb niepierwotnych, rozkładając je na czynniki pierwotne np:

$4=2\times2$	$12=2\times2\times3$
$6=2\times3$	$14=2\times7$
$8=2\times2\times2$	$15=3\times5$
$9=3\times3$	$16=2\times2\times2\times2$
$10=2\times5$	$18=2\times3\times3$

pierwotne i z tych opuszczając które są spólne, wziąć po razu te które się po razu tylko zawiérają w danych liczbach, a inne po tyle razy, ile razy najwięcéj zawiérają się w któréjkolwiek z tych liczb; iloczyn z tak pozostałych czynników uformowany, będzie najmniejszą liczbą podzielną przez liczby dane: np. ażeby znaleźć najmniejszą liczbę podzielną przez 18, 28, 42 i 112; postępuję w ten sposób:

18	1	28	1	42	1	112	1
9	2	14	2	21	2	56	2
3	3	7	2	7	3	28	2
1	3	1	7	1	7	14	2
						7	2
						1	7

i rozmnożywszy czynniki $3\times3.7.2\times2\times2\times2$ to jest $9\times7\times16$, znajdę 1008 liczbę najmniejszą, jaka może być podzielona przez 18, 28, 42 i 112.

Tu jest miejsce wyłożyć jeszcze niektóre zasady dzielenia, jakich częste przystosowania znajdą się w dalszym ciągu.

107. 1*ód* Jeżeli, nie zmieniając dzielnika, rozmnożymy dzielną przez jakąkolwiek całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy większy ile jest jedności w liczbie, przez którą rozmnożyliśmy dzielną. Jakoż widoczna jest, iż np. dzielna rozmnożona przez 2 lub przez 3, staje się 2 razy lub 3 razy większą, a zatém zawiéra tenże sam dzielnik dwa razy więcéj lub trzy razy więcéj.

108. Przeciwnie, jeżeli nie zmieniając dzielnéj rozmnożymy dzielnik przez jakąkolwiek całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy mniejszy ile jest jedności w liczbie, przez którą rozmnożyliśmy dzielnik. Bo jasną jest rzeczą, iż dzielnik rozmnożony przez 2 lub przez 3, staje się 2 razy lub 3 razy większym, więc

zawiéra się w téj saméj dzielnéj dwa razy mniéj lub trzy razy mniéj.

109. Więc *mnożąc dzielną i dzielnik przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

110. 2*re* Jeżeli, nie zmieniając dzielnika, dzielimy dzielną przez jakąkolwiek całkowitą, iloraz wypadły z podzielenia téj nowéj dzielnéj przez dzielnik niezmieniony, będzie tyle razy mniejszy, ile jest jedności w liczbie przez którą podzieliliśmy dzielną. W saméj rzeczy widzimy, iż dzielna podzielona np. przez 2 lub przez 3, staje się 2 razy lub 3 razy mniejszą, a tém samém zawiéra tenże sam dzielnik dwa razy mniéj lub trzy razy mniéj.

111. Przeciwnie, jeżeli, nie zmieniając dzielnéj, podzielimy dzielnik przez jakąkolwiek całkowitą, iloraz wypadły z podzielenia niezmienionéj dzielnéj przez nowy dzielnik, będzie tyle razy większy ile jest jedności w liczbie, przez którą podzieliliśmy dzielnik. Bo dzielnik podzielony przez 2 lub przez 3, staje się 2 razy lub 3 razy mniejszym, więc zawiéra się w téj saméj dzielnéj dwa razy więcéj lub trzy razy więcéj.

112. Więc *dzieląc dzielną i dzielnik przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

Przejdźmy do dzielenia dziesiętnych.

113. Gdy masz dziesiętne do podzielenia, *nie uważając na przecinek, działaj zupełnie jak gdyby szło o podzielenie liczb całkowitych: lecz pamiętaj oddzielić przecinkiem od prawéj ręki z ilorazu tyle cyfer dziesiętnych, ile ich jest więcéj w dzielnéj niż w dzielniku.*

Tak, aby podzielić 138,4968 przez 50,18 działam jak gdybym miał 1384968 podzielić przez 5018.

$$\begin{array}{r} \dots \\ 138{,}4968 \\ 38\,136 \\ 3\,0108 \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} 50{,}18 \\ \hline 2{,}76 \end{array} \right.$$

Potém znalazłszy na iloraz 276, oddzielam przecinkiem 2 cyfry dziesiętne, a prawdziwy iloraz będzie 2,76.

Jakoż biorąc za dzielną 1384968, zamiast 138,4968; zwiększyłem tę dzielną, a tém samém i iloraz dziesięć tysięcy razy (nº 107).

Że zaś, biorąc za dzielnik 5018, zamiast 50,18 zwiększyłem dzielnik sto razy (nº 108); więc iloraz 276 jest jeszcze sto razy większy od prawdziwego. Więc aby mieć prawdziwy iloraz, trzeba zmniejszyć 276 sto razy, a to nastąpi oddzielając dwie cyfry dziesiętne, t. j. tyle, ile ich jest więcéj w dzielnéj niż w dzielniku.

114. Gdyby się nie znajdowało w ilorazie tyle znaków, ile jest cyfer dziesiętnych więcéj w dzielnéj niż w dzielniku, trzeba położyć po lewéj stronie ilorazu liczbę zer dostateczną (nº 29), jak to widzimy w przykładzie następującym, gdzie na iloraz wypada tylko cyfra 9.

$$0{,}000036 \left\} \begin{array}{c} 0{,}004 \\ \hline 0{,}009 \end{array} \right.$$

Dla téjże saméj przyczyny w przykładzie następującym dopisaliśmy 0 po lewéj stronie dziesiętnych ilorazu:

$$\begin{array}{r} \dots\dots \\ 0{,}29706 \end{array} \left\} \begin{array}{c} 3 \\ \hline 0{,}09902 \end{array} \right.$$

115. Lecz jeżeli się w dzielniku więcéj znajduje dziesiętnych niż w dzielnéj, natenczas trzeba dopisać do dzielnéj liczbę zer potrzebną do wyrównania liczbie cyfer dziesiętnych w dzielniku, i nie uważając na przecinek, wykonywać działanie jak gdyby szło o podzielenie liczb

całych (nº 109); np. jeżeli jest 46,8 do podzielenia przez 4,252; dopisuję do dzielnéj dwa zera i mam 46800 do podzielenia przez 4252; iloraz będzie 11 z resztą 28.

116. Gdybyśmy mieli jaką liczbę np. 983,7 do podzielenia przez 10, 100, lub przez 1 z ilukolwiekbądź zerami, dosyć jest, dla otrzymania ilorazu, cofnąć przecinek ku lewéj ręce w dzielnéj o jedno, dwa miejsca, lub w ogólności o tyle miejsc, ile jest zer po jedności; np. 983,7 : 10=98,37; 983,7 : 100=9,837 i t. d.

W saméj rzeczy, dzielić przez 10 lub przez 100, jestto zmniejszać dzielną 10 razy lub 100 razy. Że zaś cofając przecinek o jedno lub dwa miejsca ku lewéj ręce w dzielnéj, zmniejsza się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (nº 27); otrzymuje się więc tym sposobem prawdziwy iloraz. Tak, aby podzielić 43649 przez 1000, dosyć jest napisać 43,649.

117. W przypadkach gdy nie można mieć ilorazu zupełnego, t. j. gdy się jaka reszta zostaje, mogę za pomocą części dziesiętnych zbliżyć się do prawdziwego ilorazu aż do tak małych części dziesiętnych, które już można zaniedbać bez znacznego uchybienia, czyli co na jedno wychodzi, mogę dzielić mniejszą liczbę przez większą.

Weźmy resztę z działania nº 100 gdzie zostało 50 do podzielenia przez 398.

Mogę od razu do dzielnéj 50, sześć zer przypisać, jeżeli tylko do sześciu dziesiętnych chcę dzielenie posunąć, lub przypisywać zera w miarę potrzeby. Oto jest wzór tych dwóch działań.

......			
50000000	398	500	398
1020	0,125628	1020	0,125628
2240		2240	
2500		2500	
1120		1120	
3240		3240	
56.... i t. d.		56.... i t. d.	

Iloraz więc przybliżony z 50 przez 398 jest 0,125628; lub 0,12562; lub 0,1256; lub i t. d. podług potrzeby zatrzymania się przy 6*téj*, lub przy 5*téj*, lub przy 4*téj*, lub i t. d. cyfrze dziesiętnéj; t. j. podług potrzeby zbliżenia ważności dziesiętnych do prawdziwéj, mniéj niż o jednę milijonową, lub stotysiączną, lub dziesięciotysiączną, lub i t. d. (1).

Rachunek ten którego zasada jest jasna (nº 107 i 113), będzie miał jeszcze ważne zastosowania gdy mówić będziemy niżéj o zamianie ułomków zwyczajnych na dziesiętne i t. d. Zabawiliśmy się nad nim nieco dłużéj, bo wprawa w niego nader jest potrzebna.

118. Gdy dzielna i dzielnik są liczbami mianowanemi, odbywa się dzielenie jak gdyby te liczby były niemianowane i szło o znalezienie, ile razy jedna zawiéra drugą.

Gdyby się pytano np. ile razy ten który ma 46*zł.* jest bogatszy od tego, który ma 23*zł;* iloraz 2 jest liczbą niemianowaną (ogólną), która oznacza, iż jest 2 razy bogatszy.

Jeżeli idzie o podzielenie 46*zł.* porówno między 23 osób? iloraz jest liczbą mianowaną oznaczającą, iż każda osoba powinna mieć 2*zł.* na swój dział.

---

(1) Tak, ważność liczby 0, 125628 zbliżona do prawdziwego ilorazu mniéj niż o jednę np. setną jest 0, 12; bo część zaniechana 0,005628 jest mniejsza niż 0,01.

Dajmy iż trzeba rozwiązać zadanie następujące: 23 łokci wstążki kosztuje 46*zł.* jakaż jest cena łokcia? iloraz 2 jest liczbą mianowaną oznaczającą, iż cena łokcia jest złotych 2.

Nakoniec, jeżeli chcę wiedzieć, ile za 46*zł.* będzie muru po 23*zł.* sążeń rachując? iloraz 2 jest liczbą mianowaną pokazującą, iż będzie 2*sąż.* muru.

Tym sposobem łatwo znajdziemy, iż gdy 27 osób mają się porówno dzielić summą 948,51 zł.; dział każdéj osoby będzie 35,13 zł.; i że, gdy łokieć jakiéj materyi kosztuje 29 zł.; za 2099,6 zł. będzie 72,4 łok. téj materyi. Widzimy tu tablicę tych dwóch działań.

zł.		zł.	
948,51	27	2099,6	29
138	zł.	69	łok.
35	35,13	116	72,4
81		0	
0			

Widzimy ztąd, że gdy dzielna i dzielnik są jednego gatunku, natura jedności ilorazu wypada zawsze taka, jakiéj wymaga zadanie. Gdy zaś dzielna i dzielnik są różnego gatunku, iloraz jest tego gatunku jakiego i liczba dzielna.

ZAGADNIENIA.

119. I. Podzielić 1) 294 876 przez 9; 2) 210 735 przez 7; 3) 13 140 przez 365; 4) 8 222 730 przez 5865.

II. Podzielić liczbę 123 456 789 przez 7. Iloraz znaleziony podzielić jeszcze przez 7, i tak następnie dopóki się da dzielić, pomijając reszty z dzielenia pozostać mogące; 2) podzielić tęż samę liczbę podobnie przez 8; 3) podobnie przez 9.

III. 1) 585 068 groszy, ile uczynią złotych? talarów? i czerw: zł? 2) 640 722 kopiejek, ile uczynią półtynników? ile rubli? i imperyjałów?

IV. 122 070 stóp: 1) ile uczynią łokci? 2) ile sążni? 3) ile werst, rachując 500 sążni na jednę werstę? 4) ile mil, rachując 7 werst na milę?

V. Za 248 korcy zboża dano 3472 złote; po ileż płacono korzec?

VI. Jest do podziału 1155 zł. na 195 ludzi, ileż się każdemu dostanie?

VII. 55668 fun. ileż czynią: 1) kamieni? 2) centnarów? 3) pudów? 4) berkowców?

VIII. Łokieć pewnéj materyi kosztuje zł. 27, ileż będzie łokci téj materyi za 990 zł? 2) jeżeli zaś łokieć kosztuje 11 półtynników, ileż będzie łokci za 250 rubli?

IX. Gdy z Warszawy do Petersburga jest 188 mil, a do Paryża 202, ujeżdżający na dzień 16 mil, ile dni potrzebować będzie na podróż z Warszawy; 1) do Petersburga, 2) do Paryża?

X. Królestwo Polskie liczy ludności 4 388 928: zawiéra zaś 2 271 mil kwadratowych powierzchni: ileż mieszkańców wypada na milę kwadratową?

XI. Jak długo trzebaby ciągle rachować do bilijona, wiedząc z doświadczenia, że potrzeba jednéj minuty na porachowanie od 1 do sta?

XII. Podzielić 1) 586 przez 7,45? 2) 0,3794 przez 7? 3) 15930,36 przez 46,58; 4) 0,000276 przez 0,06; 5) 28 przez 365 aż do części milijonowych.

XIII. Rozłożyć liczbę 1) 728 na 3 czynniki; 2) 6827 na 4 czynniki, 3) 4756 na 3 lub 4, lub.... i t. d. czynników.

XIV. Gdy korzec zboża kosztuje 1) zł. 25,6; ileż będzie korcy za 3450 zł? 2) 14,3 półtynników, ileż będzie korcy za 840 rubli?

XV. Ujeżdżający na dzień: 1) 18,6 mil, ileż dni potrzebuje na przebycie drogi z Warszawy do Rzymu 290 mil wynoszącéj? 2) 140,4 werst, ileż dni potrzebuje do podróży z Moskwy do Warszawy 1040,6 werst odległéj?

XVI. Słońce jest większe od ziemi 1448000 razy, planeta Jowisz 1474 razy, planeta Saturn 1030 razy, a Uran 83 razy. Jleż razy słońce jest większe od każdéj z wymienionych planet?

XVII. Znaleźć wszystkie dzielniki liczb 1) 360; 2) 480; 3) 1080.

XVIII. Znaleźć najmniéjszą liczbę podzielną przez 16, 48, 72, 64, 96, 128 i 240.

ZAGADNIENIA W KTÓRE WCHODZĄ POPRZEDZAJĄCE DZIAŁANIA POŁĄCZONE.

120. I. W Kaliszu rachują ludności 11400, w Płocku 10821, w Lublinie 13617, w Warszawie 136102; o ileż

więcéj jest ludności w Warszawie niż w trzech pierwszych miastach razem?

II. 1) 576*cet.* 1*kam.* i 18 *fun.* ileż uczyni funtów? 2) 84*sąż.* 2*łok.* 1*st.* ileż czyni stóp? 3) 245 berkowców, 8 pudów i 36 fun. ileż uczyni funtów? 4) 678 rubli sr. 2 półtynniki, 15 kopiejek sr. ileż uczyni groszy polskich, złotych i talarów?

III. Mający zł. 4597 idzie w zakład o 350 zł. wieleż mieć będzie gdy wygra zakład; a ile gdy przegra?

IV. Dwaj dłużnicy razem są winni zł. 10000. Jeden jest winien zł. 2468, a drugi resztę całego długu. Ostatni zapłacił już na rachunek swego długu zł. 1590. Ileż był winien pierwiastkowo, a ile jeszcze jest winien?

V. Znaleźć liczbę 1) od któréj potrzeba odjąć 398, ażeby reszta była równa 1346; 2) która rozmnożona przez 35 wynosi 3605; 3) rozdzielona przez 105 daje na iloraz 789; 4) która wzięta podwójnie i jeszcze powiększona o 276 byłaby równa 1000; 5) która rozmnożona przez 15 równa się téjże saméj liczbie rozmnożonéj przez 18, bez 324ch.

VI. Jaka zmiana zajdzie w iloczynie dwóch liczb, 1) jeżeli jeden czynnik zmniejszymy 16 razy, a drugi powiększymy 48 razy? 2) jeżeli oba czynniki zmniejszymy 15 razy?

VII. Jaka zmiana zajdzie w ilorazie 1) jeżeli dzielną zmniejszymy 12 razy, a dzielnika 3 razy? 2) jeżeli dzielną zwiększymy 28 razy, a dzielnika zmniejszymy także 28 razy; 3) jeżeli dzielną zmniejszymy 38 razy, a dzielnika powiększymy 16 razy?

VIII. 1) Jeżeli od niewiadoméj liczby odejmiemy 4645 a resztę podzielimy przez 250, tedy na iloraz będzie 91; 2) Jeżelibyśmy niewiadomą liczbę dodali do iloczynu ze 185 przez 27, otrzymalibyśmy liczbę równą iloczynowi ze 115 przez 155. Jakaż jest ta niewiadoma?

IX. Kupiec przedał swój towar, który go kosztował 325 rubli, za taką cenę, że gdyby był dostał jeszcze o 12 rubli więcéj, wtedy zysk jego wyrównywałby całemu kosztowi towaru. Za ileż rubli przedał towar?

X. Kupiec prowadzący trojaki handel, włożył w 1*szy* 12860*zł.* w 2*gi* 15440, w 3*ci* 10680; zarobił zaś przez rok na 1*szym* 1688*zł.* na 2*gim* 1858, lecz na 3*cim* stracił 226*zł.* i przy tém wszystkiém poniósł jeszcze wydatku 354*zł.* Ileż na końcu tego roku miéć będzie majątku.

XI. Kupił kto 64*łok.* sukna po 15*zł.* łokieć, przedał zaś łokieć po 19*zł.* lecz na miarze zginęło mu łokci 6. Ileż miał zysku lub straty?

XII. W dwóch workach było tyle pieniędzy, że gdyby z jednego płacono co dzień sześciu ludziom po 9 złotych, każdy z nich byłby płatny przez rok cały, a z drugiego worka gdyby płacono tyluż ludziom taką samą summę, wystarczyłoby tylko na opłacenie ich przez 24 dni. Ileż było w jednym, a ile w drugim worku pieniędzy?

XIII. Za beczkę żyta, przedając, wezmę rubli 8, przepędziwszy zaś toż żyto na wódkę, mam garcy 63: garniec wódki sprzedaje się po gr. 36, potrąciwszy koszta od waru, to jest gorzelanego, statki i t. p. rubel 1; drożdże zł. 3, drwa zł. 2 gr. 10; czy zyskam lub stracę, rachując beczkę 4 czetwerti?

XIV. Kupiec A od kupca B wziął jednego gatunku sukna 56 łokci po zł. 7 łokieć; drugiego 25 łokci po zł. 9; trzeciego 47 łokci po zł. 13; czwartego 19 łokci po zł. 16. Kupiec B nawzajem wziął od kupca A 63 łokcie po zł. 8; 24 łok. po zł. 12; 54 łok. po zł. 14; 15 łok. po zł. 17. Któryż z tych kupców wziął więcéj i o ile wartości?

XV. Sprzedaje ktoś pszenicy korcy 374 po zł. 45, żyta korcy 826, korzec po zł. 23, drzewa sztuk 1374, sztuka po zł. 27. Na rachunek należytości wziął 15472 zł.; za resztę ma mieć przysłany cukier licząc kamień po zł. 52. Ileż dostanie kamieni cukru potrąciwszy zadatek?

XVI. Ma ktoś dwojakiego gatunku pszenicę. Lepszéj korcy 95 po zł. 36, pośledniejszéj korcy 76 po zł. 28. Zmięszawszy oba gatunki, po ile ma przedawać korzec, aby zyskał 120 zł.?

XVII. Złotnik ma dwojakiego gatunku srebro. Lepszego grzywien 50, grzywna po zł. 61, podlejszego grzywien 45 po zł. 50. Po stopieniu razem obu gatunków, jaka będzie wartość jednéj grzywny?

XVIII. Pewien zaciągnął długu u kupca 4295 zł. Na zaspokojenie tego długu posyła pszenicy korcy 174, licząc korzec po zł. 35; żyta korcy 68 po zł. 19; grochu korcy 130 po zł. 29. Nadto na każdym korcu tego zboża liczy kosztów zł. 8. Po zrobionym obrachunku, któraż strona drugiéj, i ile dopłacić będzie powinna?

XIX. Kupiono spirytusu garcy 468, płacąc garniec po zł. 6. Jeżeli do tego spirytusu doleją wody część trzecią, po ile mają przedawać jeden garniec wódki, aby, potrąciwszy opłatę od garca po gr. 24, jeszcze na każdym zyskać groszy 20? Po dobraniu zaś wódki ubyło garcy 2.

XX. Gdy korzec pszenicy wydaje mąki pięknéj garcy 25, a z garca mąki wypieka się bułek trzygroszowych 9; wypiekłszy 6 korcy mąki, ileż się zbierze złotych za bułki?

XXI. Zakupiono w lesie 4958 sztuk drzewa, płacąc sztukę po zł. 26. Ścięcie i rąbanie na sążnie każdéj sztuki kosztuje zł. 16. Z tego drzewa było sążni 14878. Wywózka sążnia kosztuje zł. 12, po sprzedaniu zyskują na tym handlu 28375 zł. po ileż sprzedano sążeń?

XXII. Kupiono jęczmienia korcy 929, płacąc korzec po zł. 14, i wyrobiono go na piwo. Do wyrobienia piwa potrzebowano chmielu korcy 47 po zł. 26. Piwowarowi od korca jęczmienia płacono zł. 3. Drzewa wyszło przy téj robocie sztuk 91 po zł. 15. Wyrobiono ztąd piwa 838 beczek. Po ile ma być sprzedawana beczka, aby na każdym korcu jęczmienia zyskać złoty 1?

XXIII. Wyrachowano, iż człowiek zwyczajnie oddychając, za każdym razem wciąga w siebie powietrza 40 cali sześciennych (1), i że 136ta część powietrza w płuca

---

(1) Miejsce zamknięte sześcią kwadratami (ob. przypisek na str. 23) równemi i w zejściach swoich czyli *krawędziach* równo nachylonemi do siebie, nazywa się *sześcianem.* Jeżeli krawędź sześcianu ma stopę długości, a zatém gdy miejsce jest zamknięte sześcią stopami kwadratowemi; natenczas miejsce to czyli objętość zowie się *stopą sześcienną*, jeżeli krawędź ma cal 1; *calem sześciennym*, i t. d.

wciągnionego, w nas zostaje. Oddycha zaś człowiek przez minutę pospolicie 20 razy.

Ileż w godzinie pozostaje w nim cali sześciennych powietrza?

XXIV. Wiedząc, że w prowincyi ludnéj teraz na 644 840 dusz, powiększyła się ludność przez dopiéro skończone 15 lat o ósmą część dawniejszéj liczby swojéj, znaleźć jak wielkie jest to powiększenie, i jaka była ludność przed 15 laty?

XXV. Do obliczania siły machin parowych wzięto za jedność siłę konia, t. j. siłę która może w 1' (minucie) podnieść 250 cetnarów ciężaru na stopę wysokości. Podług téj zasady obliczyć: 1) jeżeli machina ma siłę 20 koni, jakiż ciężar podnosi przez godzinę? 2) machina podnosząca przez godzinę 600 000 cetn., iluż koni sile odpowiada?

XXVI. 1) Liczbę 57436 napisaną w układzie ośmiennym przenieść w układ dziesiętny; 2) wzajemnie, liczbę 24350 z układu dziesiętnego przenieść w układ ośmienny. 3) Wysłowić liczbę wyrażoną przez 7984 w systemacie dwunastnym. 4) Wzajem: liczbę 13492 napisać w arytmetyce dwunastnéj. 5) Wysłowić liczbę 497345 napisaną w systemacie dwunastnym, i 6) wzajem, liczbę 1 194 533 napisać w systemacie dwunastnym.

XXVII. Jest w pewnym śpichrzu 840*kor.* zboża, z którego przedano: 1e 145*kor.* po 18*zł.*; 2e 231 po 17; 3e 302 po 19; resztę korcy po 20*zł.*; 1) ileż zebrano za wszystko?

2) Gdyby powiedziano: iż zboże będące w śpichrzu kosztowało po 16*zł.* korzec, ileżby zarobiono przy wspomnionéj przedaży?

XXVIII. Gdyby zboże do śpichrza skupowano częściami, np. kupiono 1e 286*kor.* po 17*zł.*; 2e 436 po 16*zł.*; i przedawano także częściami, np. 1e 152*kor.* po 20*zł.*; 2e 528 po 19; 3e resztę korcy po 21*zł.* ileż zarobiono?

XXIX. Jest do przewiezienia z jednego miejsca na drugie 5248*cet.* pewnego materyjału, którego biorą po 8*cet.* na wóz parokonny. Od każdego zaś konia płacą tu po 3*zł.* 1) Ileż wszystkie konie do tego przewiezienia razem użyte będą kosztowały?

2) Gdyby tu każdy wóz do przewiezienia użyty kosztował np. zł. 2, a chcący przewieźć miałby swoich wozów zaprzężnych 50, i nadto jeszcze koni 38, których do tego przewiezienia chce użyć; ileż go jeszcze najem wozów i koni będzie kosztował?

XXX. Jest do umundurowania 5 kompanij po 180 ludzi. Na każdego człowieka trzeba 4*łok.* sukna po zł. 9, krawcowi zaś od roboty każdego munduru zł. 5; 1) ileż podług tego zamierzone umundurowanie będzie kosztowało?

2) Gdyby już było w magazynie 250 mundurów gotowych, i oprócz tego 360*łok.* sukna; ileżby wtenczas umundurowanie kosztowało?

XXXI. Ojciec umiérający zapisał swój majątek sześciu synom. Najstarszemu najmniéj: drugiemu z kolei wieku następującemu, tyle co najstarszemu i najmłodszemu nadto jeszcze zł. 50. Trzeciemu tyle także co najstarszemu. Czwartemu tyle co dwom piérwszym i jeszcze zł. 359; piątemu tyle co piérwszemu i trzeciemu, a najmłodszemu tyle co przedostatniemu i jeszcze zł. 60. Ponieważ syn najstarszy nie potrzebował pieniędzy a kochał braci, podzielił więc ich częścią swoją dając każdemu po zł. 360. Pozostające zaś od podziału zł. 86 darował staremu słudze. Ileż każdy z synów dostał po ojcu, i ile wszystkim ojciec zapisał?

XXXII. Odległość średnia planety Merkurego od słońca wynosi 8 milijonów mil jeograficznych, Wenusa czyli jutrzenki 15 milijonów takichże mil, ziemi 21 milijonów, Marsa 32 milijonów, Jowisza 108 milijonów, Saturna 199 milijonów, Urana 398 milijonów. O ileż mil odległość od słońca każdéj z wymienionych planet jest mniejsza lub większa niż odległość ziemi, i ile razy odległość każdéj z tychże planet jest mniejsza lub większa, niż odległość ziemi? Wypadek ma być posunięty w liczbach dziesiętnych aż do tysiącznych części.

XXXIII. Dobry wół waży 247357440 miligramów t. j. prawie tyle funtów, ile rachują stóp wysokości Wezuwijusza. A jeżelibyśmy liczbę miligramów podzielili przez 49471488, iloraz pokazałby liczbę ćwierci mil, o ile ta góra oddalona jest od Neapolu. Ileż ma stóp wysokości ta góra, i jak jest odległą od Neapolu?

CZĘŚĆ DRUGA.

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH ARYTMETYKI Z UŁOMKAMI ZWYCZAJNEMI.

ROZDZIAŁ I.

WIADOMOŚCI POPRZEDNICZE.

121. Sposób odbywania cztérech głównych działań arytmetycznych z ułomkami łatwo pojmiemy, gdy poznamy dokładnie sposób ich wyrażania. Nader zaś proste są zasady, które nam posłużą do oznaczania tego wyrażania. W saméj rzeczy, *ułomek jakikolwiek zawiéra jednę lub wiele części jedności*, a jedność może być dzieloną na wiele części równych, rozmaitéj wielkości, np. na dwie połowy, trzy części, cztéry ćwiartki, pięć części, i t. d. Wyrażenie więc ułomku powinno być takie, żeby dawało zarazem wyobrażenie liczby i wielkości części ten ułomek składających (1).

122. W tym celu używamy dwóch liczb nazwanych *wyrazami* ułomku (termini fractionis), z których jednę

(1) Z podanéj tu definicyi ułomku widzimy, że i części dziesiętne o których wyżéj mówiliśmy, uważać można za ułomki dziesiętne.

piszemy nad drugą, oddzielając je linijką poziomą. Liczba niższa oznacza wielość części, t. j. na ile części równych dzielimy jedność, i nazywa się *mianownik* (denumerator); wyższa, oznacza ile ułomek zawiéra tych części i nazywa się *licznik* (numerator). I tak w wyrażeniu $\frac{3}{10}$ mianownik 10 oznacza, iż w ułomku są części jedności dziesiąte, a licznik 3 oznacza, iż ułomek zawiéra 3 takich części. Wysłowia się ułomek $\frac{3}{10}$ mówiąc *trzy dziesiąte* (1); lecz możnaby także mówić *dziesiąta część trzech.* Bo widoczną jest rzeczą, iż trzy dziesiąte np. łokcia, jest zupełnie to samo co dziesiąta część trzech łokci.

123. Łatwo tu postrzedz, iż wyrażenie ułomkowe jest ilorazem oznaczonym dzielenia nieuskutecznionego, którego dzielna jest licznikiem ułomku, dzielnik zaś jest mianownikiem.

124. Ztąd wypada, 1$^{\text{od}}$: jeżeli nie odmieniając mianownika ułomku, rozmnożymy licznik przez jakąkolwiek całkowitą; ułomek nowy będzie tyle razy większy, ile jest jedności w całkowitéj przez którą pomnożyliśmy licznik (n^{o} 107). Mnożąc np. licznik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2, będzie ułomek $\frac{2}{3}$ dwa razy większy niż $\frac{1}{3}$.

125. Przeciwnie, jeżeli nie zmieniając licznika ułomku, rozmnożymy mianownik przez jakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mniejszy, ile jest jedności w całkowitéj, przez którą pomnożyliśmy mianownik (n^{o} 108). Mnożąc np. mianownik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2, będzie ułomek $\frac{1}{6}$ dwa razy mniejszy niż $\frac{1}{3}$.

---

(1) Prócz ułomku $\frac{1}{2}$, który wymawia się pół, w pospolitém wysłowieniu wszystkich innych np. $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{7}$ jedna trzecia, cztéry siódme, domyśla się zawsze wyrazu *część, części.*

126. Więc, *mnożąc oba wyrazy jakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność tego ułomku.* Tak mnożąc obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 2, lub przez 3, lub 4, i t. d. zamieni się on na $\frac{2}{4}$ lub $\frac{3}{6}$, lub $\frac{4}{8}$ i t. d. i jest widoczną, iż te nowe ułomki są wszystkie równe $\frac{1}{2}$.

127. 2re: jeżeli nie odmieniając mianownika ułomku, podzielimy licznik przez jakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mniejszy, ile jest jedności w całkowitéj, przez którą podzieliliśmy licznik (nº 110). Dzieląc np. licznik ułomku $\frac{3}{4}$ przez 3, będzie ułomek $\frac{1}{4}$, który jest trzy razy mniejszy niż $\frac{3}{4}$.

128. Przeciwnie, jeżeli nie zmieniając licznika ułomku, podzielimy mianownik przez jakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy większy, ile jest jedności w całkowitéj, przez którą podzieliliśmy mianownik (nº 111). Dzieląc np. mianownik ułomku $\frac{1}{8}$ przez 4, będzie ułomek $\frac{1}{2}$, który jest cztéry razy większy niż $\frac{1}{8}$.

129. Więc, *dzieląc obadwa wyrazy jakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność tego ułomku.* Tak dzieląc przez 4 obadwa wyrazy ułomku $\frac{4}{8}$, zamieni się on na ułomek $\frac{1}{2}$, który jest równy $\frac{4}{8}$.

130. Z tych prawd jako i z definicyj ułomku (nº 121 i 122), łatwo wniesiemy, iż za powiększeniem samego licznika wartość ułomku się zwiększa, jako i za pomniejszeniem samego mianownika; a przeciwnie, za zmniejszeniem samego licznika zmniejsza się wartość ułomku, jako i za powiększeniem mianownika; że zatém dwojaki mamy sposób powiększania lab zmniejszania wartości ułomku; że wreszcie możemy dwojakim sposobem odmieniając wyrażenie ułomku nie odmieniać jego wartości. Ztąd także widzimy, że z ułomków mających jednakowe mianowniki ten jest większy, którego licznik jest większy;

a z mających równe liczniki, ten jest większy którego mianownik jest mniejszy.

131. Czasem ułomek da się wyrazić w liczbach całkowitych, a 1od, jeżeli części mianownikiem skazane, wyrażają jedności niższego gatunku; natenczas licznik wyrazi wprost liczbę całkowitą z tych jedności złożoną np. $\frac{2}{3}$ sążnia jest 2 łokcie, $\frac{14}{30}$ zł. jest 14 gr. $\frac{7}{32}$ korca jest 7 garcy, i t. d. 2re jeżeli części mianownikiem oznaczone są wielokrotnością części niższego gatunku: natenczas ułomek będzie liczbą całkowitą, wypadającą z rozmnożenia téj wielokrotności przez licznik, np. $\frac{2}{3}$ sążnia jest 4 stopy, $\frac{5}{6}$ zł. jest 25 gr. $\frac{3}{8}$ korca jest 12 garcy i t. d.

W ogólności, ażeby znaleźć wartość ułomku w liczbach całkowitych niższego gatunku, dosyć jest pamiętać, że ułomek jest ilorazem oznaczonym dzielenia nieuskutecznionego (nº 123). Zamieniając więc licznik czyli dzielną, na liczbę niższego gatunku, i uskuteczniając dzielenie, znajdziemy wartość szukaną ułomku. Tak $\frac{3}{5}$ zł. czyni $\frac{90}{5}$ gr. czyli 18 gr.; $\frac{5}{6}$ łok. czyni $\frac{120}{6}$ cali, to jest 20 cali.

132. Często się zdarza, iż trzeba całkowitą wyrazić w kształcie ułomku, bez odmiany ważności téj całkowitéj. To uskutecznia się najprostszym sposobem, dając jéj 1 za mianownik. I tak $7=\frac{7}{1}$, $9=\frac{9}{1}$ i t. d. co jest rzeczą widoczną.

Lecz jeżeli chcemy zamienić całkowitą na ułomek, któryby miał mianownik dany, *trzeba ją rozmnożyć przez mianownik który jéj dać chcemy, a iloczyn będzie licznikiem ułomku żądanego*. Tak, aby zamienić 4 na ułomek mający 2 za mianownik, mnożę 4 przez 2 i dzielę przez 2, co mi daje $\frac{8}{2}$. Aby 4 zamienić na ułomek mający 3 za mianownik, mnożę 4 przez 3 i dzielę przez 3, i mam ułomek $\frac{12}{3}$ i t. d.

Widzimy oczywiście, iż wyrażenia ułomkowe $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{3}$, są równe 4, bo uskuteczniając oznaczone dzielenie, znajdziemy też samę całkowitą; nadto widzimy, iż dla zamienienia 4 na ułomek, rozmnożyliśmy je tylko i podzielili przez też samę liczbę, a to ich wartości odmienić nie może.

Ułomki takie jak $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{3}$, które zawiérają jedność lub wiele jedności, nazywają się *ułomki niewłaściwe*, te zaś które są mniejsze niż jedność, nazywają się *właściwe*.

133. Ułomki niewłaściwe mogą być zawsze wyrażone w liczbach całkowitych, gdy licznik daje się podzielić bez reszty przez mianownik; a w liczbach całkowitych z ułomkami właściwemi, gdy licznik nie da się podzielić bez reszty przez mianownik. I tak $\frac{20}{4}=5$; $\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

134. W wielu przypadkach potrzebujemy mieć ułomki z jednakowemi mianownikami: gdy więc są z różnemi, trzeba umieć sobie w tym przypadku postąpić.

Ułomki z różnemi mianownikami, można zawsze zamienić na ułomki, jednakowe mianowniki mające, co nazywa się *sprowadzaniem ułomków do jednakowego mianownika.*

135. Aby sprowadzić do jednakowego mianownika ułomki niejednakowe mianowniki mające: *trzeba rozmnożyć oba wyrazy każdego ułomku przez mianownik drugiego, jeżeli ich tylko dwa, a przez iloczyn mianowników innych, jeżeli ich jest więcéj niż dwa.*

Tak, ażeby przywieśdź do jednakowego mianownika dwa ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, mnóżę przez 5 obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ co mi daje $\frac{5}{10}$; potém mnożę przez 2 obadwa wyrazy ułomku $\frac{3}{5}$ i mam $\frac{6}{10}$. Dwa ułomki sprowadzone do jednego mianownika są więc: $\frac{5}{10}$ i $\frac{6}{10}$.

Aby dać jednakowy mianownik ułomkom $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$; mnożę naprzód obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 5×7, iloczyn mianowników dwóch innych ułomków, co daje $\frac{1 \times 5 \times 7}{2 \times 5 \times 7}$ czyli $\frac{35}{70}$.

Potém mnożę obadwa wyrazy ułomku $\frac{4}{5}$ przez 2×7, iloczyn mianowników innych, i mam $\frac{4 \times 2 \times 7}{5 \times 2 \times 7}$ czyli $\frac{56}{70}$.

Nakoniec, mnożę obadwa wyrazy ułomku $\frac{3}{7}$ przez 2×5 iloczyn mianowników pozostałych, i znajduję $\frac{3 \times 2 \times 5}{7 \times 2 \times 5}$ czyli $\frac{30}{70}$.

Ułomki sprowadzone do jednakowego mianownika są więc: $\frac{35}{70}$, $\frac{56}{70}$, $\frac{30}{70}$.

Spostrzegamy łatwo, iż ułomki sprowadzone tęż samę mają ważność co i ułomki dane; ponieważ dla przywiedzenia ich do jednakowego mianownika, mnożyliśmy oba wyrazy każdego ułomku przez tęż samę liczbę, co nie zmienia ważności ułomku (nº 126).

Niemniéj widoczną jest, iż tym sposobem ułomki sprowadzone mieć będą jednakowy mianownik, ponieważ mianownik każdego ułomku jest iloczynem wszystkich mianowników ułomków danych (nº 76).

136. Wszystkie inne sposoby czyli raczéj skrócenia wyłożonego sposobu przyprowadzania ułomków do jednakowego mianownika gruntują się na wskazanéj tu zasadzie: to jest, *że w wyrażeniu ułomków można czynić różne odmiany bez odmiany ich ważności.*

Tak gdybym miał $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{60}$ i $\frac{9}{45}$ do sprowadzenia do jednakowego mianownika, postrzegam że mianownik piérwszego ułomku jest częścią wielokrotną mianowników dwóch innych, to jest, zawiéra się w mianowniku drugiego ułomku 4 razy, a 3 razy w mianowniku trzeciego. A że i liczniki ich są podzielne przez też liczby oznaczające wielokrotność ich mianowników względem mianownika piérwszego, to jest przez 4 i przez 3, więc podzieliwszy oba wyrazy drugiego ułomku przez 4, a trzeciego przez 3, otrzymamy zaraz ułomki $\frac{2}{15}$ i $\frac{3}{15}$ mające jednakowy mianownik z ułomkiem $\frac{7}{15}$.

Jeżeli mam dwa lub więcéj ułomków, z których jednego mianownik jest liczbą wielokrotną względem mianowników innych (n° 89), natenczas aby mieć jednakowe mianowniki, dosyć jest pomnożyć oba wyrazy każdego ułomku, którego mianownik jest częścią wielokrotną mianownika większego, przez liczbę oznaczającą wielokrotność; np. mając sprowadzić do jednakowego mianownika ułomki $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$; uważam iż liczby 4, 3, 2, są częściami wielokrotnemi 12*stu*; pomnożywszy więc oba wyrazy ułomku $\frac{1}{4}$ przez 3, $\frac{2}{3}$ przez 4, a $\frac{1}{2}$ przez 6, otrzymam równe im ułomki: $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{12}$, mające ten sam mianownik co i ułomek $\frac{5}{12}$.

137. Gdy znaczna jest liczba ułomków, a w tych nie ma żadnego mianownika któryby w sobie zawiérał mianowniki wszystkich innych ułomków podanych, natenczas aby sobie ułatwić sprowadzenie ich do jednego mianownika, trzeba *znaleźć najmniejszą jak można liczbę, któraby była zupełnie podzielną przez każdy mianownik.*

Jeżeli podane mianowniki są liczbami pierwotnemi między sobą, *iloczyn z rozmnożenia ich przez siebie będzie najmniejszą liczbą zupełnie podzielną przez każdy z mianowników* (n° 99).

Lecz jeżeli mianowniki nie są liczbami pierwotnemi między sobą, łatwo jest poznać, iż dla znalezienia najmniejszéj liczby podzielnéj przez każdy z nich, dosyć jest wziąć iloczyn z ich mianowników które są wielokrotnemi drugich, opuszczając te które są częściami wielokrotnemi piérwszych. Np. mając sprowadzić do jednakowego mianownika ułomki $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{5}$, postrzegam naprzód, iż 6 i 8 są częściami wielokrotnemi 24*ch*, a 9 częścią wielokrotną 18*tu*; opuszczam te mianowniki i tylko mi zostaje 24, 18, i 5. Szukam najmniejszéj liczby podzielnéj przez te liczby (n⁰ 106) i znajduję że nią jest $8\times9\times5=360$. Tę liczbę mając, dzielę ją przez każdy z mianowników, a przez iloraz mnożę obadwa wyrazy ułomku którego mianownik był dzielnikiem, albo raczéj mnożę przez ten iloraz tylko liczniki odpowiadające, a iloczyny wypadłe będą licznikami nowych ułomków sprowadzonych do jednakowego mianownika najmniejszego ile być może, którym widocznie będzie liczba 360. A tak podane ułomki zamienią się na ułomki: $\frac{300}{360}$, $\frac{315}{360}$, $\frac{165}{360}$, $\frac{100}{360}$, $\frac{160}{360}$, $\frac{144}{360}$.

138. Gdy ułomek jest wyrażony przez wielkie liczby, trudno jest dokładne o ważności jego mieć wyobrażenie. Pożyteczną więc jest rzeczą umieć wyrażać ułomki bez zmiany ich ważności najmniejszemi ile można liczbami. Sposób którego można użyć dla przywiedzenia ułomku do najprostszego wyrażenia, jest, dzielić bez reszty obadwa jego wyrazy przez liczby 2, 3, 4, i t. d. tyle razy, ile będzie można.

Podzielimy przez 2, gdy obadwa wyrazy ułomku kończyć się będą cyfrą parzystą: ponieważ zaś każdy dziesiątek, sto, tysiąc i t. d. jest zupełnie podzielny przez 2, więc skoro jedności dają się podzielić przez 2, zatém i cała liczba będzie podzielną przez 2. Tak $\frac{8}{32}$ jest podzielne przez 2, i zamienia się naprzód na $\frac{4}{16}$ potém na $\frac{2}{8}$ a nakoniec na $\frac{1}{4}$.

Podzielimy przez 3, gdy summa cyfer licznika i summa cyfer mianownika uczyni każda 3, albo liczbę wielokrotną względem 3. Bo dzieląc 10 przez 3, reszta jest 1, jest także 1 dzieląc 100, 1000.... więc dzieląc 20, 200, 2000.... reszta powinna być podwójna, czyli $=2$. Dzieląc 40, 400, 4000... reszta będzie 1; dzieląc zaś 50, 500, 5000... reszta zostanie 2, i t. d. Reszty z dzielenia zawsze wypadać będą 1, lub 2. Że zaś liczba np. 8753 może być rozłożona na jedności, dziesiątki i t. d... t. j. $8000+700+50+3$; dzieląc je więc przez 3, reszty $2+1+2$ czynią 5. Zatém reszta z $\frac{8753}{3}$ jest taż-sama co $\frac{5}{3}$ to jest 2. Więc reszta z dzielenia liczby jakiéj przez 3, znajduje się dzieląc wszystkie jéj cyfry, jak gdyby wystawiały proste jedności i odejmując 3, tyle razy ile można. Więc każda liczba, któréj summa cyfer jest 3, lub liczbą wielokrotną względem 3, jest podzielna przez 3. I tak np. obadwa wyrazy ułomku $\frac{15}{228}$ są podzielne przez 3, ponieważ 6 summa cyfer licznika, jest liczbą wielokrotną względem 3, jako i 12 summa cyfer mianownika. Ułomek więc zamieni się na $\frac{5}{76}$.

Liczba 9 ma tęż samę własność co liczba 3. Tak ułomek $\frac{81}{1089}$ w którym summa cyfer licznika czyni 9 a summa cyfer mianownika jest liczbą wielokrotną względem 9, ma obadwa swe wyrazy podzielne przez 9 i zamienia się na $\frac{9}{121}$ (1).

---

(1) Dzieląc 10 przez 9 reszta jest 1; jest także 1 dzieląc 100, 1000.... więc dzieląc 20, 200, 2000.... reszta powinna być podwójna czyli 2; dzieląc 30, 300, 3000.... będzie reszta 3, i t. d. Że zaś liczba np. 8753 może być rozłożona na jedności, dziesiątki, i t. d. to jest

Podzielimy przez 4, gdy ostatnie dwie cyfry licznika i mianownika są podzielne przez 4. Każde bowiem sto jest podzielne przez 4. Skoro więc dziesiątki i jedności dadzą się zupełnie podzielić przez 4, więc i cała liczba będzie podzielną przez 4. Obadwa wyrazy ułomku np. $\frac{516}{704}$ są podzielne przez 4, i ułomek ten zamienia się na ułomek $\frac{129}{176}$. Przez podobne rozumowanie okazuje się, iż każda liczba jest podzielna przez 8, skoro jéj ostatnie trzy cyfry są podzielne przez 8. Tak obadwa wyrazy ułomku $\frac{1208}{1560}$ są podzielne przez 8, i ułomek zamienia się na $\frac{151}{195}$.

Podzielimy przez 5, gdy obadwa wyrazy ułomku kończą się na 5, albo jeden na 5 drugi na 0. Bo każda liczba zakończona na 5 albo na 0 jest liczbą wielokrotną względem 5, a tém samém podzielną przez 5. Tak obadwa wyrazy ułomku $\frac{15}{25}$ są podzielne przez 5, i ułomek zamienia się na $\frac{3}{5}$. Podobnież ułomek $\frac{10}{15}$ na $\frac{2}{3}$. Gdyby obadwa wyrazy kończyły się na 0, trzeba je podzielić przez 10. Tak $\frac{40}{50}$ zamienia się na $\frac{4}{5}$.

Pamiętać tu należy, iż liczba dająca się podzielić przez dzielniki pierwotne, da się także podzielić przez iloczyny tych dzielników. I tak liczba jest podzielna przez 6, 10, 12, 15, 18, 20 i t. d. jeżeli się daje podzielić w szczególności przez 2 i 3, przez 2 i 5, przez 3 i 4 (nie przez

---

na 8000+700+50+3 i t. d. które dzielone przez 9, dadzą reszty 8+7+5+3.... czyli 23. Zatém reszta z $\frac{8753}{9}$ będzie taż sama co z $\frac{23}{9}$ t. j. 5.

Więc reszta z dzielenia liczby jakiéj przez 9 znajduje się, dodając wszystkie jéj cyfry jak gdyby wystawiały proste jedności, i odejmując 9 tyle razy ile można; więc każda liczba któréj summa cyfer jest 9, lub liczbą wielokrotną względem 9, jest i t. d.

2 i 6), przez 3 i 5, przez 2 i 9 (nie przez 3 i 6), przez 4 i 5 i t. d. (n° 105) (1).

139. Lecz aby przywieśdź natychmiast ułomek do najprostszego wyrażenia: *podziel obadwa wyrazy ułomku przez ich największy spólny dzielnik, to jest, przez największą liczbę, która je obadwa dzielić może zupełnie.* Tak, dzieląc obadwa wyrazy ułomku $\frac{8}{32}$ przez 8, które jest największą liczbą mogącą dzielić zupełnie 8 i 32; wypadnie $\frac{1}{4}$, wyrażenie najprostsze jakie można znaleźć zamiast $\frac{8}{32}$.

Są przypadki, w których nie jest łatwo poznać największy dzielnik spólny dwom liczbom; sposób jego znalezienia okaże się nam przez przykład następujący. Dajmy, iż chcąc sprowadzić ułomek $\frac{45}{81}$ do najprostszego wyrażenia, zakładam sobie znaleźć największy spólny dzielnik obu wyrazów składających ten ułomek. Powiem naprzód: ten największy spólny dzielnik nie może być większy jak 45. Zobaczmy więc czy 45, które się zupełnie dzieli przez siebie, dzieli także zupełnie i 81; a okaże się, że je dzieli z resztą 36; ułomek $\frac{45}{81}$ jest zatém równy $\frac{45}{45+36}$.

Teraz mówię: największy spólny dzielnik nie może być większy jak 36, inaczéj część 36 nie byłaby zupełnie podzielną: probuję więc, czyli 36, które się dzieli zupełnie przez siebie, dzieli także zupełnie i 45, a okaże się znowu że je dzieli z resztą 9; ułomek więc

(1) Sposób poznania podzielności liczb przez 7, przez 11 i dalsze liczby pierwsze, opuszczamy, jest bowiem w teoryi tylko ciekawy, lecz dłuższy niż doświadczenie samém dzieleniem.

$\dfrac{45}{45+36.}$ zamienia się na $\dfrac{36+9}{36+9+36.}$

Uważam iż pod tym kształtem ułomek nie może mieć większego spólnego dzielnika jak 9, ponieważ 9, które się znajduje w obu wyrazach, nie mogłoby być zupełnie podzielone przez liczbę większą niż samo; probuję dzielenia, i postrzegam, iż 9 dzieli zupełnie części ułomku: jest więc dzielnikiem spólnym licznika i mianownika, i widzimy oczywiście z tego postępowania, iż jest największym, ponieważ liczba większa niż 9 nie mogłaby dzielić zupełnie obu wyrazów ułomku $\frac{45}{81}$.

Znalazłszy już największy spólny dzielnik, pozostaje tylko podzielić przez niego obadwa wyrazy ułomku, który zamienić chcemy na prostszy; tak dzieląc 45 i 81 przez 9, dojdziemy iż najprostsze wyrażenie $\frac{45}{81}$, jest $\frac{5}{9}$.

140. Zastanawiając się nad postępowaniem w tém działaniu, wniesiemy, iż aby znaleźć największy spólny dzielnik czyli największą spólną miarę dwóch liczb, *trzeba dzielić większą przez mniéjszą. Jeżeli iloraz wypadnie zupełny, to jest: bez zostawienia reszty, mniéjsza będzie największym spólnym dzielnikiem.*

Jeżeli iloraz jest z resztą, trzeba dzielić mniéjszą liczbę, która była dzielnikiem, przez tę resztę; a ta będzie największym spólnym dzielnikiem, jeżeli się dzielenie wykona bez reszty. Jeżeli wypadnie reszta, trzeba dzielić pierwszą resztę przez drugą, i powtarzać takowe działanie dopóty, dopóki nie znajdziemy ilorazu bez reszty. Reszta dzieląca zupełnie poprzedzającą, będzie największym spólnym dzielnikiem szukanym.

W takowém działaniu wygodnie jest pisać każdą resztę po prawéj stronie dzielnika, aby natychmiast zajmowała miejsce właściwe w następującém dzieleniu. Tak np. dochodząc największego spólnego dzielnika ułomku $\frac{651}{1364}$, pisze się:

1364	651	62	31
	2	10	2

Największym więc spólnym dzielnikiem danego ułomku jest 31. Podzieliwszy zatém przez niego obadwa wyrazy ułomku, otrzymamy $\frac{21}{44}$ ułomek skrócony z ułomku danego (1).

141. Gdy na ostatnią resztę wypada jedność, jestto znakiem, iż wyrazy ułomku nie mają innego dzielnika spólnego jak jedność, czyli że są *pierwotnemi między sobą*; a zatém że ułomek nie może być skrócony. W tym razie nazywają go nieprzywiedlny (irreductibilis) (2). Jeżeli zaś w szukaniu spólnego dzielnika dwóch liczb znajdziemy na resztę, liczbę pierwotną, lub postrzeżemy, iż wypadły dzielnik i dzielna są pierwotnemi między sobą, będzie to także znakiem, że dane liczby nie mają innego dzielnika spólnego jak 1.

142. Największy dzielnik spólny więcéj niż dwóch liczb znaleźlibyśmy, szukając naprzód największéj spólnéj miary między dwiema liczbami najmniejszemi, potém między liczbą znalezioną i z pozostałych najmniejszą, i t. d.

---

(1) Ułomek ten = blisko $\frac{1}{2}$, albowiem, gdy licznik jest połową mianownika, ułomek taki = połowie całości. Im zaś różnica między licznikiem a mianownikiem jest mniéjsza, tém bardziéj ułomek zbliża się do całości.

(2) Jak można jednak skracać w wyrażeniu takie ułomki sposobem przybliżającym, obaczymy niżéj (nº 189) w rozdziale o ułomkach ciągłych.

Zrozumiawszy dobrze, co się dotąd mówiło o wyrażaniu ułomków, pojmiemy łatwo dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie tychże liczb.

ZAGADNIENIA.

143. I. Czém są: 1) 1, 2, 3, 4,... 17 zł. względem 1 czerw: zł.? 2) 1, 2, 3, 4.... 99 kopiejek sr. względem rubla sr.? 3) 1, 2, 3, 4.... 23 cali, względem łokcia? 4) 1, 2, 3, 4.... 16 werszków, względem arszyna? 5) 1, 2, 3, 4.... 31 łutów, względem funta? 6) 1, 2, 3, 4.... 39 funtów względem puda? 7) 2 kwarty, względem garca? 8) 1, 2,.... 40 wiader względem beczki?

II. Czemu równe 1) $\frac{3}{5}$ z 842; 2) $\frac{4}{16}$ z 2460?

III. Ułomek 1) $\frac{117}{324}$ powiększyć 12 razy; 2) $\frac{112}{127}$ zmniejszyć 16 razy.

IV. Który jest większy z dwóch ułomków: 1) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}$? 2) $\frac{4}{5}$ i $\frac{13}{25}$? 3) $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$?

V. Jeżeli ułomek $\frac{15}{66}$ zmienię na ułomek $\frac{60}{66}$ a potém na ułomek $\frac{15}{36}$; ile razy go zmniejszę lub powiększę?

VI. 1) $\frac{6}{7}$ duk. ile czyni talarów, złotych, groszy? 2) $\frac{3}{5}$ rub: sr. ile czyni półtynników, grywienników i kopiejek sr:?

VII. 1) 5 całych zamienić na ułomek niewłaściwy, któryby miał 20 za mianownik. 2) 27 całych na ułomek, któryby miał 28 za mianownik.

VIII. Wyciągnąć całkowite z ułomku niewłaściwego: 1) $\frac{383}{15}$; 2) $\frac{287}{94}$; 3) $\frac{1365}{13}$.

IX. Ileż jedności zawierać będzie ułomek $\frac{27}{249}$ zwiększony 28 razy?

X. Ułomkom $\frac{3}{9}$ i $\frac{16}{17}$, nadać jednakowe liczniki, a ułomkom $\frac{5}{9}$ i $\frac{4}{5}$ jednakowe mianowniki.

XI. Sprowadzić do spólnego mianownika: 1) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$; 4) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{21}{16}$.

XII. Jak sprowadzić do jednakowych liczników ułomki: 1) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{4}$? 2) $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{16}$? 3) $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{12}{13}$?

XIII. Ułomki $\frac{13}{60}$, $\frac{17}{28}$, $\frac{23}{240}$, $\frac{173}{225}$, $\frac{319}{490}$ i $\frac{523}{720}$ sprowadzić do jednakowego mianownika sposobem zwyczajnym i sposobem skróconym.

XIV. Jakie jest wyrażenie najprostsze ułomku: 1) $\frac{36661}{115005}$? 2) $\frac{143429}{382064}$? 3) $\frac{29}{317}$?

XV. Znaleźć największy dzielnik spólny liczb: 1) 85; 204; 578. 2) 115; 260; 851; 2231.

ROZDZIAŁ II.

O DODAWANIU UŁOMKÓW.

144. Tylko ilości jednorodne i jednogatunkowe można do siebie dodawać (n° 38). Że zaś mianownik oznacza gatunek części ułomku; *jeżeli więc ułomki które trzeba do siebie dodać, nie mają jednakowego gatunku części, to jest: odmienne mają mianowniki, trzeba je naprzód sprowadzić do jednakowego mianownika.*

145. To założywszy, ażeby dodać razem ułomki: *weź summę wszystkich liczników, i daj jéj mianownik spólny.*

Tak, aby dodać ułomki $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{9}$ mające jednakowy mianownik, biorę 14 summę liczników, 2, 5, 7, daję jéj mianownik spólny 9, a summa szukana będzie $\frac{14}{9}$, która się zamienia uskuteczniając dzielenie na $1\frac{5}{9}$.

Tym sposobem dojdziemy, iż summa ułomków mianowanych $\frac{2}{5}$*zł.* i $\frac{3}{5}$*zł.* $=\frac{5}{5}$*zł.* $=1$*zł.*

Aby mieć summę ułomków $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, sprowadzam je naprzód do jednakowego mianownika, a zamienią się na $\frac{231}{385}$, $\frac{220}{385}$, $\frac{210}{385}$, dodaję potém ich liczniki 230, 220, 210 i pod summą 661 tych liczb, piszę mianownik spólny 385. Summa więc trzech ułomków danych jest $\frac{661}{385}$, czyli uskuteczniając dzielenie, $1\frac{276}{385}$.

Znajdziemy przez podobne działanie, iż summa ułomków mianowanych $\frac{1}{2}$*zł.*, $\frac{3}{4}$*zł.*, $\frac{5}{6}$*zł.* i $\frac{7}{9}$*zł.* jest $\frac{1236}{432}$*zł.* $=$ $2\frac{31}{36}$*zł.*

146. Gdy znaczna jest liczba ułomków do dodawania, natenczas można nie sprowadzać ich razem do jednakowego mianownika, lecz w miarę łatwości sprowadzania ich do tegoż po dwa, po trzy, i t. d. uskuteczniać ich dodawanie. Tak w poprzedzającém zagadnieniu, $\frac{1}{2}$ łatwo jest dodać do $\frac{5}{6}$, bo $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$ czyli 1 i $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ i $\frac{7}{9}=\frac{3}{9}$ i $\frac{7}{9}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$ i $\frac{3}{4}$ sprowadzam zwykłym sposobem do jednego mianownika i mam $\frac{4}{36}$ i $\frac{27}{36}=\frac{31}{36}$. Znalazłem więc że $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{9}=2\frac{31}{36}$ summa ta sama co wyżéj.

147. Jeżeli są całkowite połączone z ułomkami: *weź summę ułomków i dodaj ją do summy całkowitych.*

Tak, $7\frac{3}{4}+11\frac{2}{5}=7\frac{15}{20}+11\frac{8}{20}=18\frac{23}{20}=19\frac{3}{20}$.

zł. zł. zł.

Podobnie, $5\frac{2}{3}+7\frac{4}{5}+6\frac{7}{8}=5\frac{80}{120}+7\frac{96}{120}+6\frac{105}{120}=18\frac{281}{120}$

zł.

$=20\frac{41}{120}$.

ZAGADNIENIA.

148. I. Jaka jest summa ułomków: 1) $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{8}$? 2) $\frac{15}{49}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{4}$? 3) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$? 4) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{8}{15}$?

II. Następujące liczby niech będą razem zebrane: $156\frac{3}{5}$, $45\frac{5}{6}$, $47\frac{7}{8}$, $95\frac{3}{4}$, $49\frac{2}{3}$, $64\frac{1}{2}$?

III. Pewna osoba ujechała jednego dnia werst $84\frac{1}{4}$, drugiego $90\frac{1}{3}$, trzeciego $100\frac{3}{4}$. Przez 3 następne dni jechała równo po $135\frac{1}{2}$ werst. Jak wielką w tych 6 dniach odbędzie podróż?

IV. Kupiono cztery sztuki materyi: 1*sza* kosztuje zł. $324\frac{5}{11}$, 2*ga* zł. $298\frac{1}{6}$, 3*cia* zł. $198\frac{4}{9}$, a 4*ta* zł. $312\frac{3}{4}$. Pytają się o całą wartość tych czterech sztuk?

V. Ma powroźnik grubéj liny w 1*szym* pęku sąż. $82\frac{2}{7}$ w 2*gim* sąż. $35\frac{3}{10}$, w 3*cim* sąż. $14\frac{5}{6}$; cieńszéj liny w 1*szym* pęku sąż. $15\frac{3}{5}$, w 2*gim* sąż. $28\frac{1}{3}$ i jeszcze kawalek sąż. $\frac{7}{12}$. Ileż ma sążni grubéj, ile cieńszéj, a ile razem całéj liny?

VI. Gdy z Warszawy do Drezna rachują mil pocztowych $77\frac{1}{2}$, z Drezna do Lipska $12\frac{3}{8}$, z Lipska do Frankfurtu nad Menem $39\frac{1}{9}$, z Frankfurtu do Moguncyi $4\frac{1}{21}$, z Moguncyi do Paryża $62\frac{3}{7}$; ileż jest mil pocztowych z Warszawy do Paryża?

VII. Handlujący zbożem kupił żyta za *duk.* $127\frac{5}{18}$, pszenicy za $158\frac{13}{25}$, jęczmienia $84\frac{7}{15}$, owsa $95\frac{11}{20}$. Sprzedawszy to zboże, zarobił na piérwszém *duk.* $28\frac{16}{21}$, na drugiém $37\frac{3}{14}$, na trzeciém $12\frac{4}{5}$, na czwartém $21\frac{11}{30}$. Ileż zarobił na wszystkiém, a ile zebrał w ogóle pieniędzy.

VIII. 1) Dwie osoby idą ku sobie, jedna 4 mile na 7 godzin, druga 3 mile na 5 godzin, ile obiedwie razem uchodzą przez godzinę? 2) Gdyby zaś jedna uchodziła 4 mile na 3 godzin, a druga 3 mile na 4 godzin; ileżby obie razem uszły na godzinę?

IX. 1) Pewna osoba uchodzi w 7miu godzinach 4 mile, druga uchodzi w 7miu godzinach 5 mil, idąc na przeciwko siebie, ileż się do siebie w jednéj godzinie przybliżają? 2) Gdyby zaś jedna uchodziła na 5 godzin 3 mile, a druga także na 5 godzin 2 mile, o ileżby na godzinę przybliżyły się do siebie?

X. Jedna osoba we 4 tygodniach wydała duk. 1, druga w tymże czasie duk. 4, trzecia duk. 2. Ileż wszystkie razem przez jeden tydzień wydają?

XI. 1) Rzemieślnik jeden mógłby skończyć pewną robotę w 3 dniach, drugi zrobiłby ją w dniach 4, a trzeci w dniach 5. Ileż téj roboty robią wszyscy razem przez jeden dzień? 2) Cztérech sukienników robią sukno: jeden kończy wyznaczoną mu ilość w 2 dniach, drugi tęż samę w 4 dniach, trzeci w 2 dniach, czwarty w 3 dniach. Ileż téj roboty wszyscy razem w jednym dniu robią?

XII. 1) Prowadząc wodę jedném korytem do jakiéjś sadzawki, napełniłbym ją w dniach 5, drugiém korytem napełniłbym ją w dniach 6, trzeciém w dniach 7, czwartém w dniach 11. Puszczam razem wodę temi cztérema korytami, i pytam się, jaka część téj sadzawki wypełni się przez dzień jeden? 2) Gdyby zaś woda jedném korytem płynąca napełniała sadzawkę w dniach 6, drugiém w dniach 7, trzeciém w dniach 8, czwartém w 12; puszczona razem temi cztérema korytami, jakąż jéj część napełni przez dzień jeden?

XIII. Pewna osoba miała w jednym kwartale dochodu 20 duk. 1 tal: i $\frac{3}{4}$ zł.; w drugim 24 $\frac{1}{2}$ duk. $2\frac{5}{6}$ tal.; w trzecim tal. $46\frac{3}{5}$, zł. $4\frac{4}{5}$; w czwartym duk. $30\frac{2}{3}$, zł. $5\frac{1}{2}$. Ileż miała dochodu rocznego?

XIV. Kupił ktoś kilka par lichtarzy: za jednę parę dał $20\frac{1}{3}$ rubli 20 kopiejek, za drugą $8\frac{3}{5}$ rub: i 10 kopiejek, za trzecią $6\frac{1}{8}$ rubl: za czwartą $2\frac{1}{30}$ rubli. Ileż razem te cztéry pary lichtarzy kosztowały?

XV. W żupie solnéj przedano raz $25\frac{7}{9}$ berkowców, $3\frac{2}{5}$ pudów soli; drugi raz $10\frac{2}{3}$ berkowców, $4\frac{7}{8}$ pudów, $15\frac{1}{2}$ funtów; trzeci raz $20\frac{1}{2}$ berkowców, $20\frac{1}{2}$ pudów. Ileż razem wszystkiéj soli przedano?

ROZDZIAŁ III.

O ODEJMOWANIU UŁOMKÓW.

149. Nie można odejmować od siebie części różnorodnych i różnogatunkowych (nº 39). *Jeżeli więc ułomki których szukamy różnicy mają odmienne mianowniki: trzeba je przywieśdź do jednego mianownika.*

150. To założywszy, ażeby odjąć ułomek od ułomku: *weź różnicę liczników i daj jéj mianownik spólny.*

Tak, ażeby odjąć ułomek $\frac{2}{7}$ od ułomku $\frac{5}{7}$, odejmuję 2 od 5, i daję reszcie 3 mianownik spólny 7, a różnica szukana będzie $\frac{3}{7}$.

Podobnie, $\frac{8}{9}$funta—$\frac{3}{9}$funta$=\frac{5}{9}$funta.

Ażeby odjąć $\frac{3}{4}$ od $\frac{5}{6}$, sprowadzam te ułomki do spólnego mianownika, i otrzymuję $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, odejmuję potém 18 od 20 i pod resztą 2, piszę mianownik spólny 24. Więc $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

Dojdziemy prz ez podobne działanie, iż ułomek mianowany $\frac{19}{21}$funta przewyższa ułomek mianowany $\frac{23}{35}$funta o $\frac{182}{735}$funta czyli $\frac{26}{105}$funta.

152. Jeżeli są całkowite połączone z ułomkami: *weź różnicę ułomków i złącz ją z różnicą całkowitych.*

Tak, $17\frac{3}{4}-5\frac{6}{11}=17\frac{33}{44}-5\frac{24}{44}=12\frac{9}{44}$.
zł. zł. zł. zł. zł. zł.

Podobnież, $7\frac{4}{6}-4\frac{1}{3}=7\frac{4}{6}-4\frac{2}{6}=3\frac{2}{6}=3\frac{1}{3}$.

152. Chcąc odjąć ułomek od liczby całkowitéj, bierzemy jedność z całkowitéj i zamieniwszy ją na ułomek tegoż gatunku części, to jest taki, któryby miał spólny mianownik z ułomkiem danym, postępujemy podług powyższego prawidła.

Tak, aby odjąć $\frac{2}{7}$ od 5, biorę jedność z liczby całkowitéj 5, którą zamieniam na ułomek mający za mianownik 7 i mam $4\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=4\frac{5}{7}$.
zł. zł. zł.

Również, $29-\frac{8}{17}=28\frac{9}{17}$.

153. Gdy zaś od ułomku połączonego z całkowitą, większy jest ułomek który odjąć mamy, natenczas wziąwszy podobnie jak wyżéj, jedność od całkowitéj i zamieniwszy ją na ułomek mający spólny mianownik z obydwoma ułomkami, dodać go do ułomku mniejszego i postąpić jak się wyżéj wskazało.

Tak, ażeby odjąć $6\frac{3}{4}$ od $8\frac{1}{4}$, mówię: $8=7+\frac{4}{4}$; więc $8\frac{1}{4}=7\frac{5}{4}$; że zaś $7\frac{5}{4}-6\frac{3}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$, a zatém różnica szukana jest $1\frac{1}{2}$.

Podobnież, $7\frac{1}{8}$ zł. $-4\frac{2}{3}$ zł. $=7\frac{3}{24}$ zł. $-4\frac{16}{24}$ zł. $=6\frac{27}{24}$ zł. $-4\frac{16}{24}$ zł. $=2\frac{11}{24}$ zł.

ZAGADNIENIA.

154. I. Jaka jest różnica: 1) między $\frac{23}{36}$ i $\frac{45}{72}$? 2) między $\frac{12}{28}$ i $\frac{441}{1323}$? 3) między $307\frac{11}{24}$ i 99? 4) między 21 i $19\frac{33}{49}$? 5) między $56\frac{6}{7}$ i $28\frac{4}{9}$? 6) między $54\frac{2}{6}$ i $36\frac{5}{8}$?

II. Pewna osoba potrzebując sukna $25\frac{2}{5}$ łok. 1) znajduje u kupca tylko $13\frac{2}{5}$ łok. Ileż jéj niedostaje? 2) Gdy zaś u drugiego kupca znajduje się podobnego sukna łokci $26\frac{1}{4}$, ileż go jest nad potrzebę téj osoby?

III. Z pewnéj sztuki materyi trzymającéj: 1) $34\frac{4}{5}$ łok. długości, oderznięto $17\frac{5}{6}$ łok. ileż łokci zostało? 2) $28\frac{1}{2}$ arszynów długości, oderznięto $19\frac{3}{5}$ arszyn. i nadto $3\frac{1}{2}$ werszków; ileż się jeszcze arszynów zostało?

IV. Znaleźć różnicę różnic między: 1) $\frac{9}{11}$ i $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{7}$ i $\frac{5}{12}$? 2) między $8\frac{4}{5}$ i $3\frac{2}{7}$ a $6\frac{5}{6}$ i $4\frac{1}{8}$?

V. Jadąc z Warszawy na Brześć Litewski, Słonim i Mińsk do Petersburga rachujemy mil $211\frac{1}{2}$. Gdy z Warszawy do Brześcia Litewskiego jest mil $25\frac{7}{8}$, z Warszawy do Słonima $51\frac{2}{7}$; z Warszawy do Mińska $79\frac{4}{9}$: jakaż jest odległość tych miast między sobą w szczególności?

VI. Rzemieślnik mający przychodu 5 rubli w 6 dni, wydaje 4 ruble w 5 dni; ileż mu zostaje każdego dnia?

VII. Która materya droższa? gdy jednéj 5 łokci kosztuje rubli 4, drugiéj 6 łokci rubli 5.

VIII. Ktoś idzie w drogę i uchodzi co 3 godziny 2 mile, po niejakim czasie wychodzi drugi za nim, i uchodzi w 4 godzinach 3 mile; o ileż się drugi co godzina do piérwszego zbliża?

XI. Złodziéj uciekający ubiega co 4 godziny 5 mil. Po niejakim czasie wysłana pogoń za złodziejem ubiega co godzina 2 mile; ileż się co godzina do złodzieja zbliża?

X. Woda do stawu jedném korytem prowadzona, napełnia go 4 razy w dniach 5; taż woda inném korytem wypuszczona w dniach 4 trzy razyby go wypróżniła. Niech te koryta razem puszczone będą, jakaż część stawu napełni się przez dzień 1? 2) Gdyby piérwsze koryto 6 razy napełniało staw w dniach 5, jakaż wtedy część stawu napełni się przez dzień? 3) Gdyby piérwsze koryto było jak wymieniono z początku, lecz drugie niechby wypróżniało staw 5 razy w 4 dniach; niech woda razem piérwszém korytem wpływa do stawu, z tegoż drugiém wypływa. Jakąż część stawu napełni przez dzień 1?

XI. Kupiec mający wosku: 1) $6\frac{2}{5}$ celn. $3\frac{2}{3}$ kamienia, $8\frac{1}{2}$ *funt.* przedał $23\frac{3}{4}$ kamienia, $18\frac{2}{3}$ *funt.* Ileż mu zostało? 2) 4 berkowców, $8\frac{1}{3}$ pudów; przedał $9\frac{1}{6}$ pudów, $34\frac{3}{5}$ *funt.* Ileż mu zostało?

XII. Mający: 1) $31\frac{1}{2}$ talar. wydał $17\frac{2}{3}$ zł. ileż mu się zostało? 2) $33\frac{1}{2}$ rubli, $3\frac{2}{5}$ półtyny; wydał $8\frac{3}{4}$ rubli, $2\frac{5}{6}$ półtyny; ileż mu się zostało?

XIII. Jest w śpichrzu zboża: 1) $65\frac{1}{2}$ korcy $14\frac{2}{3}$ gar. wydano zaś z niego $48\frac{1}{5}$ kor. $18\frac{3}{4}$ gar. Ileż zboża zostało? 2) $52\frac{1}{6}$ czetwerti, $5\frac{3}{4}$ ośminy; wydano zaś z niego $9\frac{3}{4}$ czetwerti, $7\frac{4}{5}$ czetwerików. Ileż się zboża zostało?

XIV. Jeden bałwan soli waży $2\frac{4}{5}$ pudów, funt. $10\frac{3}{8}$. Drugi bałwan pudów 1, funt. $5\frac{1}{3}$. O ile jeden cięższy od drugiego?

XV. W sklepie korzennym na jeden talerz szali położono wagę $25\frac{1}{2}$ fun. i $\frac{3}{4}$ łuta, na drugi zaś talerz włożono towaru $20\frac{3}{4}$ fun. 2 łuty. Ile potrzeba ująć wagi ażeby nastąpiła równowaga?

XVI. Kupiec mający likworu garcy $100\frac{3}{5}$ za które zapłacił zł. $1400\frac{2}{3}$, sprzedał z niego różnemi czasy garcy $49\frac{1}{5}$, kwaterek $\frac{5}{6}$, za które wróciło się mu zł. $780\frac{3}{4}$. Ile kupcowi pozostało likworu, a ile ma zebrać za resztę aby nie stracił.

XVII. Dwie osoby *A* i *B* wzięły bilety na loteryją fantową dla ubogich, piérwsza za zł. $8\frac{1}{2}$, druga za dukat $1\frac{3}{8}$, zł. $5\frac{2}{3}$. Układają się zaś w ten sposób: osoba *A* mówi, jeżeli moje numera wyjdą, na ówczas z wygranéj dam na wsparcie ubogich zł. 100. Osoba zaś *B* powiada, że jeżeli moje numera wyjdą, wówczas na podobny cel poświęcę dukat. 10 w złocie, (które idą po zł. 19 gr. 12). Zdarza się że obiedwie wygrały, piérwsza fant wartości zł. $300\frac{5}{6}$, druga wartości rubli 40, kopiejek 18. Po dopełnieniu ofiar, i potrąceniu stawki, ile jedna miała więcéj od drugiéj?

ROZDZIAŁ IV.

O MNOŻENIU UŁOMKÓW.

---

155. Aby rozmnożyć ułomek przez całkowitą; *rozmnóż licznik ułomku przez całkowitą i daj iloczynowi mianownik ułomku.*

Naprzykład, aby rozmnożyć $\frac{2}{11}$, przez 4, mnożę licznik 2 przez 4, a wypadłemu iloczynowi 8 daję mianownik ułomku 11; czyli $\frac{8}{11}\times 4=\frac{8}{11}$.

W saméj rzeczy, rozmnożyć $\frac{2}{11}$ przez 4, jestto powtórzyć ułomek $\frac{2}{11}$ cztéry razy, czyli zwiększyć go cztéry razy.

Mnożąc zaś przez 4, licznik tego ułomku, a nie odmieniając mianownika, czynimy go cztéry razy większym (nº 124), więc $\frac{2}{11}\times 2=\frac{4}{11}$.

zł. zł. zł.

Podobnież, $\frac{3}{7}\times 2=\frac{6}{7}$; $\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

156. Jeżeli trzeba liczbę całkowitą rozmnożyć przez ułomek, *rozmnóż całkowitą przez licznik ułomku, i daj iloczynowi mianownik tegoż ułomku.*

To jest, tym samym sposobem mnoży się całkowita przez ułomek, jak ułomek przez całkowitą, bo zmiana miejsca czynników nie odmienia iloczynu (nº 76).

Naprzykład, aby rozmnożyć 12 przez $\frac{2}{3}$, mnożę całkowitą 12 przez licznik 2, i daję iloczynowi 24 mianownik 3; więc $12\times\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8$. Łatwo spostrzegamy iż 8 jest iloczynem, bo iloczyn 24 z rozmnożenia 12 przez 2, jest trzy razy za wielki, gdyż trzeba było mnożyć 12 tylko przez trzecią część dwóch; więc, ażeby przyprowadzić iloczyn 24 do prawdziwéj ważności, trzeba go trzy razy zmniejszyć, a to nastąpi, gdy go podzielimy przez 3; więc $12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Lub też: iloczyn powinien zawiérać mnożną tyle razy, ile mnożnik zawiéra jedności; że zaś w tym przykładzie mnożnik zawiéra tylko dwie trzecie części jedności, więc iloczyn z 12 przez $\frac{2}{3}$ powinien zawiérać tylko dwie trzecie części mnożnéj 12; zatém $12 \times \frac{2}{3} = 8$.

Podobnie, $25 \times \frac{5}{6} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$.

Gdyby się pytano o wartość $\frac{4}{5}$ łok. jakiéj materyi, któréj łokieć kosztuje 26 zł.; widzimy, iż trzeba powtórzyć 25 zł. cztéry piąte razy (n° 82), czyli pomnożyć 25 zł. przez $\frac{4}{5}$. Że zaś 25 zł. $\times \frac{4}{5} = \frac{100}{5}$ zł. $= 20$ zł. więc wartość o którą pytają, jest 20 zł.

157. Aby rozmnożyć ułomek przez ułomek, *weź naprzód iloczyn liczników, potém iloczyn mianowników, i daj drugi iloczyn za mianownik piérwszemu.*

Naprzykład, aby rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$; biorę iloczyn liczników który jest 6, biorę potém iloczyn mianowników który jest 35, i daję 35 za mianownik liczbie 6; więc $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

Jakoż, rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$ jestto powtórzyć $\frac{3}{7}$ dwie piąte razy, albo co jedno jest, wziąć $\frac{3}{7}$ piątą część dwóch razy. Mnożąc zaś przez 2 co daje $\frac{6}{7}$, powtórzyłem mnożną dwa razy, zamiast powtórzyć piątą część dwóch razy; więc iloczyn $\frac{6}{7}$ jest pięć razy za wielki, aby zatém mieć prawdziwy iloczyn, trzeba $\frac{6}{7}$ pięć razy zmniejszyć, a to nastąpi gdy pomnożę mianownik 7 przez 5 (n° 125). Więc $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

Gdyby się teraz pytano o wartość $\frac{12}{16}$ funt. jakiego towaru rachując po $\frac{2}{3}$ *zł.* funt, doszlibyśmy natychmiast, iż wartość szukana jest $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$.

158. Jeżeli mnożna i mnożnik mają liczby całkowite z ułomkami, trzeba w każdym czynniku sprowadzić całkowitą do mianownika ułomku, przy nich będącego (nº 132), aby mieć same tylko ułomki, a wtenczas pozostanie się tylko do mnożenia ułomek przez ułomek.

Naprzykład, aby rozmnożyć $3\frac{1}{2}$ przez $4\frac{2}{3}$; mówię $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$: więc $3\frac{1}{2} \times 4\frac{2}{3} = \frac{7}{2} \times \frac{14}{3} = \frac{98}{6} = 16\frac{2}{3}$.

Podobnie, aby wiedzieć wartość $3\frac{1}{4}$ *łok.* jakiéj materyi, rachując po $7\frac{1}{2}$ *zł.* za łokieć; zamieniam $3\frac{1}{4}$ *łok.* na ułomek $\frac{13}{4}$ *łok.* a $7\frac{1}{2}$ *zł.* na ułomek $\frac{15}{2}$ *zł.*; potém mnożę $\frac{15}{2}$ *zł.* przez $\frac{13}{4}$ i mam na iloczyn $\frac{195}{8}$ *zł.* $= 24\frac{3}{8}$ *zł.* Więc wartość szukana jest $24\frac{3}{8}$ *zł.*

159. Gdyby jednak w czynnikach, znajdowały się wielkie liczby całkowite, np. gdyby $3175\frac{3}{4}$ wypadało rozmnożyć przez $2469\frac{1}{2}$, natenczas krócéj będzie rozmnożyć mnożną przez całkowite mnożnika, a potém przez jego ułomek. Oto jest wzór tego działania.

$$
\begin{array}{rrrcl}
 & a & b & & \\
 & 3175 & \frac{3}{4} & & \\
 & á & b' & & \\
 & 2469 & \frac{1}{2} & & \\
\hline
a \times á = & 7839075 & & & \\
b \times á = . & 1851 & \frac{3}{4} & . \; . & \frac{6}{8} \\
a \times b' = . & 1587 & \frac{1}{2} & . \; . & \frac{4}{8} \\
b \times b' = . & . & \frac{3}{8} & . \; . & \frac{3}{8} \\
\hline
\end{array}
$$

Iloczyn cały: $7842514\frac{5}{8}$.

Oznaczyliśmy tu czynniki i ich iloczyny cząstkowe głoskami, aby tém łatwiéj widzieć, zkąd wypadły te iloczyny cząstkowe, których dodanie w iloczyn cały jest zawsze łatwe; bo postępując naszą drogą, mianownik ułomku w czwartym iloczynie cząstkowym, będzie zawsze wielokrotny względem każdego mianownika w ułomkach dwóch poprzedzających iloczynów cząstkowych, a zatém dodanie ułomków odbywa się tu bardzo łatwo (n° 136).

160. W mnożeniu ułomków są przypadki, w których znajduje się iloczyn sposobem nader łatwym. Oto niektóre tego przykłady.

1e. Jeżeli liczba, przez którą trzeba mnożyć ułomek, równa jest jego mianownikowi, iloczynem będzie licznik ułomku. Gdyby mi zadano rozmnożyć np. $\frac{6}{7}$ przez 7? uwolnię się od działania, i napiszę licznik 6 na iloczyn; bo widzimy iż $\frac{6\times 7}{7}=6\times 1=6$.

2e. Gdy mam ułomek mnożyć przez liczbę, która dzieli zupełnie jego mianownik, zamiast mnożyć licznik, podzielę mianownik przez tę liczbę, wyjdzie to na jedno (n° 128), a przyjdę tym sposobem natychmiast do prostszego wyrażenia iloczynu. I tak, aby rozmnożyć $\frac{5}{24}$ przez 3, zamiast mnożyć 5 przez 3, podzielę 24 przez 3, a wypadek $\frac{5}{8}$ będzie iloczynem $\frac{5}{24}\times 3$ przywiedzionym do najprostszego wyrażenia.

3e. Jeżeli mam wiele ułomków mnożyć przez siebie, oznaczę tylko mnożenie ich mianowników: gubiąc potém czynniki spólne obu wyrazom ułomku iloczynu, będę go miał natychmiast przywiedziony do najprostszego wyrażenia.

Tak $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1\times 2\times 3\times 4}{2\times 3\times 4\times 5}=\frac{1}{5}$.

Oczywista jest, iż gubiąc czynniki spólne obu wyrazom ułomka, nie odmienia się bynajmniéj ważność iloczynu jaki ten ułomek wyraża, ponieważ się tylko dzieli obadwa wyrazy ułomku przez tęż samę ilość (n° 129).

Z ostatniego i podobnych przykładów przekonywamy się, iż korzystną jest rzeczą niekiedy oznaczać uskutecznienie działania; często bowiem nie uskuteczniając go w zupełności, znaleźć można wypadek w najprostszém wyrażeniu.

ZAGADNIENIA.

I. Pomnożyć: 1) $\frac{16}{17}$ przez $\frac{5}{8}$; 2) $\frac{150}{347}$ przez $\frac{70}{87}$; 3) $\frac{60}{70}$ przez $\frac{35}{9}$; 4) $3\frac{3}{4}$ przez 5; 5) 8 przez $9\frac{5}{7}$; 6) $13\frac{1}{2}$ przez $14\frac{1}{2}$.

II. 1) Kiedy korzec jakiego zboża kosztuje $\frac{11}{12}$ talara, ileż kosztować będzie 27 korcy? 2) Kiedy $\frac{1}{4}$ ośminy zboża kosztuje $\frac{7}{8}$ rubla, ileż kosztuje 125 czetwerti?

III. Kiedy funt pewnego towaru kosztuje 73 zł. ileż będzie kosztowało $\frac{5}{7}$ funt. tegoż towaru? 2) Kiedy funt towaru kosztuje $15\frac{2}{3}$ rubli, ileż jeden pud kosztuje?

IV. 1) Pytają się ile czyni $\frac{6}{7}$ z 77? 2) $\frac{5}{9}$ z 446?

V. Znaleźć liczbę która podzielona: 1) przez 17, dałaby na iloraz $17\frac{2}{3}$? 2) przez $19\frac{2}{5}$ dałaby na iloraz 15?

VI. Ile kosztować będzie, 1) $2\frac{3}{4}$ łokcia np. płótna płacąc łokieć po $\frac{5}{6}$ zł.? 2) $\frac{7}{12}$ arszyna pewnéj materyi, gdy arszyn płaci się po $2\frac{3}{4}$ rubla? 3) $45\frac{3}{4}$ łokci sukna po $17\frac{2}{5}$ zł. łokieć? 4) $52\frac{3}{8}$ arszyna materyi po $8\frac{3}{10}$ rubla arszyn?

VII. Pewna osoba ujeżdża na dzień mil $8\frac{3}{7}$; w dniach $5\frac{2}{5}$ ile ujedzie?

VIII. Z pewnéj kopalni wydobywają codziennie miedzi pudów $8\frac{3}{5}$, w dniach 18 ile wydobędą pudów?

IX. Naczynie srebrne ważące grzywien $3\frac{2}{4}$, ile kosztować będzie, gdy złotnik z robotą, żąda za grzywnę duk. $4\frac{3}{5}$?

X. Jeżeli na furę parokonną włożyć można $12\frac{1}{3}$ cetnarów siana, na 24 fur jaką ilość włożyć można?

XI. Jeżeli kamień towaru kosztuje duk. $7\frac{2}{5}$, kamieni $5\frac{3}{4}$, ile kosztować będzie?

XII. Jeżeli garniec jakiego napoju kosztuje $2\frac{3}{5}$ zł. ileżby kosztowało 18 garcy czyli antał?

XIII. Jaki jest iloczyn ułomków $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, następnie przez siebie rozmnożonych?

XIV. Kamień wełny kosztuje $4\frac{2}{5}$ duk.; $3\frac{2}{3}$ cet. $2\frac{1}{4}$ kamienia, ile kosztować będzie?

XV. Jeżeli beczka wina kosztuje $15\frac{2}{5}$ duk., $3\frac{1}{3}$ beczek, 2 kwart; ile kosztować będzie?

XVI. Pewna osoba potrzebuje na tydzień $1\frac{1}{2}$ funta kawy. Funt kawy kosztuje zł. $3\frac{2}{5}$. Jakiż jest z tego względu wydatek na rok?

XVII. Jeżeli kto na tydzień próżnuje $18\frac{2}{3}$ minut, ile to wyniesie na miesiąc? ile na rok?

XVIII. Jeżeli: 1) snop słomy kosztuje $6\frac{3}{4}$ gr. ileż złotych kosztować będzie $9\frac{2}{3}$ kóp? 2) Funt siana kosztuje $14\frac{1}{3}$ kopiejek srebrnych, ileż rubli kosztować będzie 65 pudów siana?

XIX. Ktoś opłaca komornego 5 duk., 3 zł. i gr. 10 kwartalnie. Ileż zapłaci za półtora roku?

XX. Pewna osoba, która włożyła w handel $\frac{3}{4}$ swego majątku, zyskała $\frac{2}{5}$ tego, co weń włożyła; ileż tedy zyskała?

XXI. 1) Pewny podróżny, który w 5 godzinach uchodzi 3 mile, szedł tylko $\frac{3}{4}$ godziny; ileż uszedł przez ten czas? 2) gdyby zaś uchodził 3 mile na 4 godziny i szedł tylko 48 minut; ileżby uszedł przez ten czas?

XXII. 14 robotników kopią rów pewnéj głębokości i szerokości, każdy z nich wykopuje wzdłuż $\frac{1}{3}$ część sznura na dzień; ileż sznurów wykopią wszyscy razem w jednym dniu?

ROZDZIAŁ V.

O DZIELENIU UŁOMKÓW.

162. Aby podzielić ułomek przez całkowitą, *rozmnóż mianownik ułomku przez całkowitą i ten iloczyn daj za mianownik licznikowi ułomku.*

Naprzykład, aby podzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, mnożę mianownik 2 przez 3, i daję iloczyn 6 za mianownik licznikowi 1. ułomku danego. Więc $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$. Widzimy bowiem, iż ułomek $\frac{1}{6}$ jest prawdziwym ilorazem z podzielenia $\frac{1}{2}$ przez całkowitą 3, bo dzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, jestto $\frac{1}{2}$ trzy razy zmniejszyć, mnożąc zaś przez 3 mianownik ułomku $\frac{1}{2}$, zmniejszamy go trzy razy (nº 125); więc $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Dojdziemy przez działanie zupełnie podobne, iż jeżeli 7 osób mają porówno między siebie podzielić $\frac{5}{9}$ *zł.* dział każdéj będzie $\frac{5}{63}$ *zł.*

163. Kiedy jest do dzielenia liczba całkowita przez ułomek: *trzeba dzielić całkowitą przez licznik ułomku, a iloraz rozmnożyć przez mianownik.*

Naprzykład, aby podzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, dzielę 6 przez 2, co daje $\frac{6}{2}$; iloraz ten $\frac{6}{2}$ mnożę przez 3, i mam $\frac{18}{2}$ (nº 155). Więc $6 : \frac{2}{3} = \frac{18}{2} = 9$.

Jakoż dzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, jestto szukać ile razy 6 zawiéra $\frac{2}{3}$. Jest zaś widoczna iż 6 zawiéra $\frac{2}{3}$ trzy razy więcéj niż 2, ponieważ 2 jest trzy razy większe niż $\frac{2}{3}$; więc iloraz $\frac{6}{2}$ znaleziony z podzielenia 6 przez 2, jest trzy razy mniejszy; aby go zatém sprowadzić do prawdziwéj jego ważności, trzeba go trzy razy zwiększyć, a to nastąpi mnożąc go przez 3. Więc $6 : \frac{2}{3} = \frac{6}{2} \times 3 = \frac{18}{2} = 9$.

Nadto, 6 zawiéra $\frac{1}{3}$ ośmnaście razy; więc nie zawiéra $\frac{2}{3}$, tylko 9 razy; więc znowu $6 : \frac{2}{3} = 9$.

Znajdę podobném zupełnie postępowaniem, iż dzieląc sztukę materyi 27*łok.* długą, na kawały długie po $\frac{3}{4}$*łok.* każdy, będzie 36 kawałów. Jakoż $27 : \frac{3}{4} = \frac{27}{3} \times 4 = \frac{108}{3} = 36$.

164. Aby podzielić ułomek przez ułomek: *rozmnóż mianownik ułomku dzielnéj przez licznik ułomku dzielnika: rozmnóż potém licznik ułomku dzielnéj przez mianownik ułomku dzielnika, i daj piérwszy iloczyn za mianownik drugiemu.*

Naprzykład, aby podzielić $\frac{2}{5}$ przez $\frac{3}{4}$, mnożę 5 przez 3, co mi daje iloczyn 15, potém mnożę 2 przez 4, i mam iloczyn 8. Daję pierwszy iloczyn 15 za mianownik drugiemu iloczynowi 8, i mam $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$.

Jakoż gdybym miał $\frac{2}{5}$ do dzielenia przez 3, iloraz byłby $\frac{2}{15}$ (nº 162). Lecz ten iloraz jest cztery razy mniejszy, ponieważ powinienem tylko dzielić przez czwartą część 3ch; więc aby przyprowadzić iloraz do prawdziwéj ważności; trzeba go cztery razy zwiększyć; więc trzeba pomnożyć $\frac{2}{15}$ przez 4 co daje $\frac{8}{15}$ więc $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{8}{15}$.

Działając podobnie, dojdziemy, iż gdy $\frac{3}{10}$*łok.* np. wstążki kosztuje $\frac{6}{25}$*zł.*, łokieć kosztuje $\frac{4}{5}$*zł.*; bo $\frac{6}{25}$*zł.*: $\frac{3}{10}=\frac{60}{75}$*zł.*$=\frac{4}{5}$*zł.*

165. Zastanawiając się nad postępowaniem któregośmy się trzymali w dzieleniu całkowitéj przez ułomek, i ułomku przez ułomek, łatwo postrzegamy iż otrzymalibyśmy też same wypadki, mnożąc dzielną przez ułomek dzielnika odwrócony. Bo $6\times\frac{3}{2}=\frac{18}{2}=9$ (nº 163), i $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$ (nº 164).

Aby więc podzielić liczbę jakąkolwiek całkowitą lub ułomkową przez ułomek; *dosyć ją rozmnożyć przez ten ułomek odwrócony.*

Uważmy tu że jedność podzielona przez ułomek, jest toż samo co tenże ułomek odwrócony; np. $\frac{1}{\frac{2}{5}}$ czyli $1:\frac{2}{5}=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$.

166. Jeżeli dzielna i dzielnik mają całkowite z ułomkami, sprowadza się każda całkowita do mianownika ułomku przy niéj będącego, a będzie do dzielenia tylko ułomek przez ułomek.

Tak, $4\frac{3}{5}:6\frac{1}{3}=\frac{23}{5}:\frac{19}{3}=\frac{23}{5}\times\frac{3}{19}=\frac{69}{95}$.

Podobnież, jeżeli wykopanie $3\frac{1}{5}$*sąż.* rowu kosztuje $19\frac{1}{4}$*zł.* dojdziemy, iż wykopanie sążnia rowu kosztuje $6\frac{1}{64}$*zł.* Bo $19\frac{1}{4}$*zł.* : $3\frac{1}{5}=\frac{77}{4}$*zł.*: $\frac{16}{5}=\frac{77}{4}$*zł.*$\times\frac{5}{16}=\frac{385}{64}$*zł.*$=6\frac{1}{64}$*zł.*

167. Można jednak nie zamieniać dzielnéj na ułomek, np. jeżeli sążeń pewnéj roboty kosztuje $5\frac{2}{3}$*zł.* a pytają

się ile będzie sążni za $52\frac{3}{4}$*zł.*? Zamieniam dzielnik $5\frac{2}{3}$ na ułomek który będzie $\frac{17}{3}$, mnożę potém dzielną przez mianownik 3, co mi daje $156\frac{9}{4}$*zł.* a podzieliwszy wypadek ten przez 17, mam $9\frac{21}{68}$*sąż.* na iloraz.

168. W dzieleniu ułomków zdarzają się często przypadki, w których można sobie skrócić działanie. I tak: 1*e.* Jeżeli jest dany ułomek do dzielenia przez liczbę całkowitą która dzieli zupełnie licznik, natenczas podzielę licznik przez tę liczbę (n° 127), tym sposobem znajdę zaraz proste wyrażenie ilorazu.

Mając np. $\frac{15}{16}$ do dzielenia przez 5, podzielę tylko licznik 15 przez 5, i mieć będę $\frac{3}{16}$ iloraz w najprostszém wyrażeniu.

2*re.* Gdy licznik ułomku dzielnéj jest liczbą wielokrotną względem licznika ułomku dzielnika, a mianownik jest także wielokrotnym względem mianownika; w tym przypadku aby znaleźć wyrażenie najprostsze ilorazu, podzielę licznik dzielnéj przez licznik dzielnika, a mianownik dzielnéj przez mianownik dzielnika. Chcąc np. dzielić $\frac{27}{33}$ przez $\frac{9}{11}$? podzielę 27 przez 9, i 33 przez 11, a iloraz z $\frac{27}{33} : \frac{9}{11}$ przywiedziony do najprostszego wyrażenia, będzie $\frac{3}{3}=1$. Bo w saméj rzeczy $\frac{27}{33} : \frac{9}{11} = \frac{27}{33} \times \frac{11}{9} = \frac{297}{297} = 1$.

3*cie.* Kiedy można podzielić przez jednakową liczbę liczniki albo mianowniki ułomków, których szukam ilorazu, nie trzeba tego zaniedbywać.

Jeżeli mam np. $\frac{8}{9}$ dzielić przez $\frac{4}{7}$; podzielę 8 i 4 przez 4, i będę miał $\frac{2}{9} : \frac{1}{7} = \frac{14}{9}$. Bo $\frac{8}{9} : \frac{4}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{4} = \frac{4\times2}{9} \times \frac{4}{7} =$
$$\frac{4\times2\times7}{9\times4} = \frac{2\times7}{9} = \frac{14}{9}.$$

Jeżeli jest $\frac{3}{49} : \frac{5}{14}$, podzielę 49 i 14 przez 7, i będzie $\frac{3}{7} : \frac{5}{2}$. Bo $\frac{3}{49} : \frac{5}{14} = \frac{3}{49} \times \frac{14}{5} = \frac{3\times7\times2}{7\times7\times5} = \frac{3\times2}{7\times5} \frac{6}{35}$

Naostatek, gdybym miał dzielić $\frac{6}{35}$ przez $\frac{9}{28}$ widzę, iż 6 i 9 są podzielne przez 3, a 35 i 28 przez 7; dzielę więc 6 i dziewięć przez 3, a 35 i 28 przez 7, co mi daje $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$. Bo $\frac{6}{35} : \frac{9}{28} = \frac{6}{35} \times \frac{28}{9} = \frac{3 \times 2 \times 7 \times 4}{7 \times 5 \times 3 \times 3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{8}{15}$

169. Gdy ułomek dzielnika ma tenże sam mianownik co i ułomek dzielnéj, aby w tym razie mieć iloraz, trzeba tylko zgubić mianownik spólny, i oznaczyć dzielenie licznika ułomku dzielnego przez licznik ułomku dzielnika. Tak, $\frac{10}{15} : \frac{11}{15} = \frac{10}{11}$.

Bo widoczną jest rzeczą, iż $\frac{10}{15}$ podzielone przez $\frac{11}{15}$ da koniecznie ten sam wypadek, co $\frac{10}{15}$ zwiększone 15 razy, czyli 10 całkowitych, podzielone przez $\frac{11}{15}$ zwiększonych 15 razy, czyli 11 całkowitych. Jakoż $\frac{10}{15} : \frac{11}{15} = \frac{10}{15} \times \frac{15}{11} = \frac{10 \times 15}{15 \times 11} = \frac{10}{11}$.

Można więc dzielenie liczb ułomkowych sprowadzić do dzielenia całkowitych lub dziesiętnych (n° 117), sprowadzając piérwsze do jednakowego mianownika.

170. Dla sprawdzenia działań odbytych z ułomkami, trzeba użyć działań przeciwnych. I tak dodawanie i odejmowanie służą sobie wzajemnie do sprawdzenia. Toż samo jest z mnożeniem i dzieleniem.

171. Może się zdarzyć, iż trzeba znaleźć ważność pewnéj części ułomku np. ważność $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$. To wyrażenie $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$ oznacza, iż trzeba wziąć dwa razy trzecią część z $\frac{4}{5}$. Dzielę więc $\frac{4}{5}$ przez 3, i widzę, że iloraz $\frac{4}{15}$ jest trzecią częścią z $\frac{4}{5}$. Mnożę $\frac{4}{15}$ przez 2, a iloczyn $\frac{8}{15}$ jest ważnością $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$.

Podobnież, aby mieć $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ciu z $\frac{2}{3}$; mówię: $\frac{5}{6}$ z $\frac{2}{3} = \frac{10}{18}$, zadanie więc zamieniam do wzięcia $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18}$; jest zaś $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18} = \frac{30}{72}$; więc $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ciu z $\frac{2}{3} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

Zastanawiając się nad postępowaniem któregośmy użyli, spostrzegamy łatwo, iż dla znalezienia ważności *ułomka ułomków* (tak się nazywa gatunek liczb o których mowa), trzeba tylko wyznaczyć iloczyn wszystkich tych ułomków rozmnożonych przez siebie, a to się czyni sposobem nader łatwym, oznaczając iloczyn wszystkich liczników, i dzieląc go przez iloczyn oznaczony wszystkich mianowników.

Tak $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ch $\frac{3}{4}$ch z $\frac{4}{5}$ zł. $\frac{1\times2\times3\times4}{2\times3\times4\times5}=\frac{1}{5}$ zło. znosząc czynniki spólne obu wyrazom ułomka. Wychodzi to więc na mnożenie i jest niém właściwie, choć się zdaje być dzieleniem. Bo mnożenie przez ułomek ma za cel wzięcie z mnożnéj, części takiéj jaka jest oznaczona przez ułomek; a dzielenie przez ułomek skazuje nam ile razy tenże zawiéra się w dzielnéj. Gdybyśmy więc tam użyli dzielenia, wypadłoby wcale co innego.

172. Z mnożenia przez ułomek właściwy wypada i wypadać musi naturalnie mniéj, niż wynosi druga liczba do działania wchodząca; gdy tymczasem z dzielenia przez tenże ułomek koniecznie musi wypadać więcéj. Bo gdy mnożnik jest 1, natenczas wypada na iloczyn mnożna podana (nº 40); lecz że ułomek właściwy mniejszy jest niż 1, więc iloczyn z rozmnożenia przez ten ułomek musi być mniejszy niż liczba mnożna. Podobnież rozumować możemy co do dzielenia (porówn. (nº 156, 163). I tak $\frac{2}{3}$ ze 100 czyni $66\frac{2}{3}$; kiedy $100:\frac{2}{3}=150$. Ztąd oraz łatwo pojmujemy, że z mnożenia ułomków właściwych przez siebie, iloczyn wypadać musi mniejszy od każdego z czynników, a z dzielenia iloraz większy od każdéj z dwóch innych liczb do działania wchodzących. I tak $\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$; a $\frac{3}{5}:\frac{1}{5}=\frac{3}{1}=3$.

173. Wypada tu zrobić uwagę podobną jak pod n° 63 i 64, iż wyraz *mnożyć* nie zawsze odpowiada wyrazowi i wyobrażeniu *powiększać*, podobnie jak wyraz *zawiérać* nie zawsze bywa właściwie użytym w dzieleniu. Jasną jest bowiem rzeczą, iż dzielna nie zawiéra dzielnika gdy jest mniejsza od niego. Przecież tak się mówić zwykło w dzieleniu, lecz to tylko przez nawyknienie do pospolitego sposobu mówienia, który nie zawsze, jak widzimy, z dokładnością jest zgodny.

ZAGADNIENIA.

174. I. Podzielić: 1) $\frac{1}{5}$ przez 6; 2) $\frac{14}{19}$ przez 7; 3) $\frac{4}{5}$ przez 8; 4) 5 przez $\frac{2}{5}$; 5) 8 przez $\frac{5}{11}$; 6) $\frac{1}{2}$ przez $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{45}{39}$ przez $\frac{15}{9}$; 8) 26 przez $3\frac{1}{4}$; 9) $25\frac{15}{18}$ przez 5; 10) $14\frac{1}{2}$ przez $2\frac{1}{2}$.

II. Czterem ludziom dano $\frac{4}{6}$ tal.; ileż się każdemu dostanie?

III. Płacąc funt cukru po $\frac{1}{3}$ rubla, ile kupię funtów za 14 rubli?

IV. Kupiono: 1) za $\frac{3}{4}$ duk. materyi 5 łokci, po ileż płacono za łokieć? 2) za $\frac{7}{8}$ rubl. 4 arszyny, po ileż arszyn?

V. 1) Czterech uczniów z równą pisząc prędkością zapisali w jednym czasie $\frac{2}{5}$ ryzy papiéru. Ileż każdy zapisał? 2) 4 robotników ma robić $3\frac{1}{5}$ łokcia pewnéj roboty. Ileż na jednego przypadnie?

VI. Ktoś robi pewnéj roboty 6 łokci na dzień, ta robota ma $120\frac{1}{2}$ łokcia wynosić; ileż dni do jéj ukończenia potrzebować będzie?

VII. Jeżeli na sztukę jakiego ubioru lub pokrycie jakiego sprzętu, wychodzi płótna łokci $5\frac{1}{2}$; łokci 156 na ileż sztuk wystarczy?

VIII. Jeżeli: 1) pud wełny kosztuje rubli sr. $12\frac{2}{3}$, potrzebuję zaś rubli 149. Ileż mam pudów wełny wyprzedać? 2) $13\frac{1}{2}$ funta wosku kosztuje $2\frac{1}{8}$ rubli sr. ileż kosztuje funt? 3) $1\frac{3}{4}$ funta mięsa kosztuje $17\frac{1}{2}$ gr. po ileż funt?

IX. Kupiono: 1) sukna, płacąc po 12 zł. to jest po $\frac{2}{3}$ czerw. zł. łokieć. Dano za wszystko 24 czerw. zł. Ileż kupiono łokci? 2) za 79 zł. $4\frac{3}{4}$ łok. np. sukna, po ileż łokieć? 3) za 11 rubli $\frac{5}{6}$ łokcia pewnéj materyi. Ileż przypada za łokieć téj materyi? 4) $16\frac{1}{2}$ arszynów sukna za 54 rubli sr. Po ileż wypada arszyn?

X. Rzemieślnik który zrobił: 1) $\frac{3}{4}$ łok. jakiéj roboty w $\frac{4}{5}$ godz., ileż jéj zrobił w godzinę, jednakowo zawsze robiąc? 2) $\frac{4}{5}$ łok. pewnéj roboty we trzech kwadransach ($\frac{3}{4}$ godz.), ileż zrobi téj roboty w jednéj godzinie?

XI. Pewny podróżny ujechał $15\frac{3}{5}$ mili w godzinach 10 i minutach 24 ($\frac{2}{5}$ godz.); ileż ujeżdżał na godzinę?

XII. $9\frac{1}{4}$ sążni pewnego muru kosztuje $327\frac{9}{20}$ zł. Ileż kosztuje sążeń muru?

XIII. Przez jakąż liczbę trzeba podzielić 1) $3\frac{2}{3}$ ażeby mieć iloraz $8\frac{1}{4}$? 2) $8\frac{1}{4}$ ażeby mieć iloraz $3\frac{2}{3}$.

XIV. Czyli to samo jest $\frac{3}{4}$ z $\frac{9}{16}$ co $\frac{9}{16}$ z $\frac{3}{4}$?

XV. Znaleźć iloczyn z ułomków:

$$\frac{1\times3\times3\times5\times4\times8\times\ 9\times14\times\ 6}{2\times4\times5\times6\times7\times9\times10\times15\times11}.$$

XVI. Pytają się o liczbę, która rozmnożona przez $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ z 7, daje iloczyn $50\frac{1}{2}$?

XVII. Dłużnik obowiązał się wypłacić 123 rubli, $4\frac{2}{5}$ półtynników, w 6 ratach. Po ileż ma płacić na każdą ratę?

XVIII. Jeżeli: 1) 3 łokcie sukna kosztuje 17 zł. $15\frac{1}{2}$ gr.; ileż kosztuje 1 łokieć? 2) 4 funty $2\frac{1}{2}$ luta bawełny kosztuje 8 zł. $14\frac{2}{3}$ gr.; ileż kosztuje jeden lut? 3) 4 woły kosztuje 33 duk. 15 zł. i gr. 18. Cóż kosztuje wół jeden? 4) 15 arszynów i 13 werszków sukna kosztuje 52 ruble 21 kopiejek sr.; po ileż kosztuje arszyn?

XIX. 1) $8\frac{2}{5}$ grzywien srebra kosztuje duk. 33, zł. $5\frac{2}{3}$; po ileż płacono jednę grzywnę? 2) Żyta korcy $5\frac{1}{2}$ kosztuje duk. $5\frac{2}{3}$, gr. 20; po ilez płacono korzec?

XX. 1) Jeżeli rubel assygnacyjny waży $\frac{2}{7}$ rubla srebrem; 366 rubli assygn. ile uczynią rubli srebrem? 2) Frank wazy $1\frac{3}{5}$ zł. albo $\frac{22}{25}$ rub: assygn.; 140 franków ile uczynią złotych, a ile rubli assygn.? 3) $\frac{2}{5}$ cetnara wazy 1 pud; 120 cetn. $8\frac{2}{3}$ funt. ile uczynią pudów?

XXI. Spytano się rachmistrza, która jest godzina? on odpowiedział: jest: $\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{6}$ z $\frac{7}{12}$ z $\frac{6}{7}$ z 24 godzin; któraż więc jest godzina?

ZAGADNIENIA W KTÓRE WCHODZĄ DZIAŁANIA UŁOMKÓW POŁĄCZONE.

175. I. Ktoś ma $149\frac{1}{6}$ zł. Z tych pieniędzy kupił sobie za $84\frac{1}{5}$ zł. ubioru, za $9\frac{2}{3}$ zł. drzewa, za $12\frac{1}{6}$ zł. żywności. Ileż mu się jeszcze zostało?

II. Ktoś przez 4 lata podróżował: $\frac{3}{4}$ roku bawił w Poznaniu, $\frac{1}{2}$ roku w Krakowie, $\frac{1}{5}$ w Wilnie, resztę czasu przepędził w Warszawie. Jakże długo bawił w Warszawie?

III. Pewna osoba kupuje 5 sztuk materyi:

1a ma łokci $23\frac{1}{2}$ łokieć po rubli $2\frac{1}{3}$

2a — — $30\frac{1}{6}$ — — „ $1\frac{1}{2}$

3a ma łokci $23\frac{3}{4}$ łokieć po rubli $1\frac{4}{5}$
4a — — $27\frac{2}{3}$ — — „ $1\frac{2}{3}$
5a — — $20\frac{1}{2}$ — — „ $4\frac{1}{2}$. Ileż zapłaci za te 5 sztuk materyi?

IV. Pewny kupiec ma 2 antały wina po $6\frac{2}{3}$ duk., 3 antały po $10\frac{1}{2}$ duk., i antał za $15\frac{5}{6}$ duk.; mięsza razem to wino. Po ile wypada garniec téj mięszaniny?

V. Kupiec przedając materyi: 1) łokci $15\frac{5}{6}$ po $2\frac{1}{2}$ duk., stracił na każdym dukacie po zł. $1\frac{1}{2}$. Ilez stracił na wszystkiém? 2) $64\frac{2}{8}$ arszynów po $4\frac{1}{4}$ rubli, stracił na każdym rublu $1\frac{2}{5}$ grywennika. Ilez stracił na wszystkiém?

VI. Potrzeba jednę robotę skończyć w tygodniu, ale żaden rzemieślnik nie podejmuje się jéj w tym czasie wygotować: lecz jeden z nich zrobiłby dwie takie roboty w tygodniach 5, drugi ledwie obiecuje skończyć ją w tygodniach 4, trzeci mógłby trzy razy więcéj zrobić jak żądają w tygodniach 10. Użyto więc wszystkich 3ch. Zachodzi pytanie, czy zrobią tę robotę w jednym tygodniu?

VII. Pewna osoba każe robić pół tuzina koszul. Na każdą wyjdzie płótna $5\frac{1}{2}$ łokcia; łokieć kosztuje po $1\frac{4}{5}$ zł. od roboty każdéj koszuli ma zapłacić $1\frac{1}{2}$ zł. Ileż kosztują koszule? po czemu jedna wypada? i ile płótna wyjdzie?

VIII. Ugodzono robotnika na dzień: 1) po zł. $1\frac{5}{6}$. Wyrabia on dziennie 7 ćwierci łokcia swojéj roboty. Ileż zarobi za łokci $86\frac{1}{2}$; 2) po $2\frac{2}{5}$ grywenniki, a ten wyrabia dziennie po $3\frac{1}{2}$ arszyna. Ilez zarobi, ukończywszy 500 sążni swéj roboty?

IX. Pewny mieszkając w mieście 10 miesięcy, wybrał u piekarza przez ten czas chleba pudów $15\frac{5}{8}$. Przez 3 miesiące nie płacił. Ileż zapłacić za ten czas powinien, rachując pud po $1\frac{3}{5}$ rubli?

X. Pewna osoba mająca 8650 rubli, włożyła je w trojaki handel: w piérwszy $\frac{1}{2}$ tego majątku, na którym w rok zyskała $\frac{1}{5}$ tego, co włożyła; w drugi handel włożyła $\frac{1}{4}$ tegoż majątku, na tym w rok $\frac{1}{6}$ nakładu zyskała; w trzeci włożyła resztę majątku, i na niéj podobnież w rok zyskała $\frac{1}{9}$ włożonego kapitału. Ileż po skończonym roku ogółem zyskała, i ile ma razem całego majątku?

XI. Kupiec sprowadził 82 ryzy papiéru, ryza po $15\frac{1}{3}$ tal. Od transportu zapłacił $24\frac{1}{2}$ tal. Ponieważ papiér po sprowadzeniu go, zamokł w magazynie, i zaciągnął miejscami plamy, wyprzedał go więc kupiec w połowie po $14\frac{1}{4}$ tal., a w połowie po $12\frac{1}{2}$ tal. Ileż stracił?

XII. Pewna osoba ma kapitału 64000 zł. Przez trzy lata na początku każdego roku wkłada w handel po zł. 2500, a na końcu roku zyskuje zawsze po $\frac{1}{8}$ reszty pozostałéj. Ileż po upłynieniu tych trzech lat mieć będzie?

XIII. Piekarz ma czworaką mąkę. Piérwszéj $13\frac{1}{2}$ korcy po $16\frac{3}{4}$ zł. korzec; drugiéj $12\frac{1}{4}$ korcy po $13\frac{1}{3}$ zł.; trzeciéj $24\frac{1}{5}$ korcy po 17 zł.; czwartéj $20\frac{1}{6}$ korcy po $14\frac{1}{2}$ zł. Ileż po zmięszaniu będzie mąki, i po ile trzeba mu korzec przedawać, jeżeli ma zyskać na wszystkiém zł. 60?

XIV. Kiedy kto na tydzień potrzebuje $1\frac{1}{2}$ funta kawy, $1\frac{3}{4}$ cukru, a funt kawy jest po zł. $2\frac{1}{3}$, funt zaś cukru po zł. $1\frac{4}{5}$; ileż wyda na rok, czyli przez 52 tygodnie?

XV. Posłańcowi jednemu na utrzymanie się w mieście przez dni 8, dano pewną summę. Po trzech dniach zdało mu się, że trzeba mu będzie jeszcze zatrzymać się przez

6 dni, rozdziela więc pozostałe pieniądze na 6 dni; lecz nad swoje spodziéwanie pięć dni zabawiwszy wyjechał; wieleż mu zostało pieniędzy?

XVI. 1) Trzy osoby chcą złożyć w pewnym czasie talarów $147\frac{4}{9}$. Jedna z nich daje talarów 5 co dni 7, druga 3 co dni 5, trzecia 5 co dni 6. Jakże prędko złożą zamierzoną ilość, i ile każda złoży? 2) Cztéry osoby chcą złożyć $758\frac{4}{5}$ rubli, jedna składa 6 rubli co dni 7, druga 5 co dni 4, trzecia 8 co dni 4, a czwarta 10 co dni 6. Pytanie toż samo co wyżéj?

XVII. Ojciec zostawia pięcioro dzieci, i rozrządza testamentem, aby każde piątą część pozostałego majątku otrzymało. Jedno z tych dzieci umiéra, i pozostawia czworo dzieci, rozporządzając, ażeby się te, działem jego równo podzieliły. Jakąż cząstkę piérwszego dziedzictwa każde z tych czworga dzieci otrzyma?

XVIII. Pan umiérając zapisuje swemu kommissarzowi pewną summę, kucharzowi $\frac{3}{4}$ téjże summy co kommissarzowi, pokojowemu $\frac{5}{7}$ działu kucharza, a 5ciu innym służącym razem, trzy razy tyle co kucharzowi. Jakąż częścią summy kommissarzowi zapisanéj jest dział pokojowego, i każdego z innych służących?

XIX. Podzielić 1) 100 na dwie części tak, ażeby piérwsza była większa od drugiéj o 10; 2) $\frac{3}{7}$ na dwie takie części, ażeby piérwsza była mniejsza od drugiéj o $\frac{2}{15}$

XX. Wiedząc summę i różnicę dwóch liczb, znaleźć każdą, np. 1) summa jest 8, różnica 1; 2) summa jest $27\frac{17}{42}$, a różnica $16\frac{11}{42}$.

XXI. Jakąż mam w myśli liczbę, jeżeli 1) odjąwszy od niéj $\frac{2}{3}$, zostanie 38? 2) $\frac{2}{3}$ téj liczby i 5 czyni 43? 3) połowa i trzecia część téj liczby czyni 50? 4) połowa téj liczby, trzecia część i 8 czyni 58? 5) $\frac{4}{5}$ téj liczby pomnożone przez $\frac{3}{4}$ a potém podzielone przez $4\frac{1}{2}$ $=\frac{2}{3}$?

XXII. Z pewnéj summy wydano: 1) $\frac{3}{4}$ co czyniło zł. 15. Jakaż była cała summa? 2) $\frac{5}{9}$ co uczyniło zł. 20. Jakaż była summa? 3) $\frac{3}{8}$ i zostało się 10 rubli. Jakaż była summa? 4) 40 rubli, i zostało się $\frac{3}{4}$ całéj summy. Jakaż jest ta reszta i jaka cała summa? 5) zł. 30, a resztę rozdzieliwszy na 3 części, jedna taka jest $\frac{2}{15}$ całéj summy. Jakaż jest cała summa?

XXIII. Znaleźć liczbę, która 1) dodana do swéj szóstéj części, uczyni 27? 2) zmniejszona o swą czwartą część $=24$?

XXIV. Jaka jest liczba: 1) któréj połowa, trzecia część i czwarta czyni 26? 2) z któréj odjąwszy $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$, reszta czyni 64?

XXV. Pewnéj sztuki drzewa jest $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ część całéj długości ukryta np. w wodzie, lecz z wierzchu ukazuje się $7\frac{1}{2}$ stóp; ileż cała sztuka ma długości?

XXVI. Pewien mówi, iż $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ części jego pieniędzy, uczyni 84 zł.; ileż ma złotych?

XXVII. Próżniak jeden żył lat 80; $\frac{1}{5}$ swego życia przepędził na spaniu, $\frac{1}{18}$ na jedzeniu i piciu, $\frac{1}{4}$ na włóczeniu się, $\frac{5}{16}$ na grach rozmaitych. Ileż mu czasu pozostawało na zatrudnienia gospodarskie?

XXVIII. Cóż wypadnie jeżeli 1) $\frac{3}{4}$ 728miu dodamy do $\frac{5}{10}$ 1000ca? 2) $\frac{3}{4}$ z 728 dodamy do $\frac{5}{9}$ z 1000? 3) $\frac{2}{3}$ 729ciu odejmiemy od 1000ca? 4) $\frac{3}{4}$ 27miu odejmiemy od $\frac{11}{15}$ch 135ciu?

XXIX. Z dwóch liczb większa $= 17\frac{1}{8}$, a trzecia część ich ilorazu jest $\frac{7}{9}$. Czemu się równa mniejsza liczba?

XXX. Przez jaką liczbę podzielić trzeba daną liczbę, aby ta stała się $1\frac{1}{2}$ razy większą?

XXXI. Znaleźć ułomek w którym 1) licznik byłby większy od mianownika o 12; 2) licznik byłby większy o 15 od podwójnego mianownika; 3) licznik byłby mniejszy od mianownika 12 razy; 4) licznik byłby większy od mianownika 12 razy.

XXXII. 1) Pewna osoba co dni 7 wydaje 6 tal., druga co 6 dni 5 tal. Gdy obie mają po 24 tal., na jak długo każdéj ta ilość wystarczy? 2) Na jak długo wystarczy dwom osobom 271 rubli; kiedy jedna wydaje 4 ruble co 5 dni, a druga 3 ruble co 4 dni?

XXXIII. Złodziéj uciekający ubiega 3 mile co 2 godzin. Po 5ciu godzinach pogoń za nim wysłana ubiega 7 mil co 4 godziny. Ileż pogoń co godzina przybliża się do złodzieja, i w jakim czasie go doścignie?

XXXIV. Dwóch przyjaciół mieszkających od siebie o mil: 1) 21, jedzie naprzeciw siebie. Jeden ujeżdża na 5 godzin 3 mile, drugi na 5 godzin 4 mile. Jakże prędko zjadą się z sobą, i ile mil każdy z nich ujedzie? 2) 213, jedzie ku sobie. Jeden ujeżdża mil 7 na 4 godzin, a drugi 9 na 5 godzin. Pytanie toż samo, co wyżéj? 3) $61\frac{3}{7}$, czyli 430 wiorst, jedzie naprzeciw siebie.

Jeden ujeżdża 35 wiorst na 3 godziny, a drugi 45 na 4 godzin. Pytanie toż samo co wyżéj.

XXXV. Pewien zapłacił złotych $572\frac{4}{15}$ za dziesięcinę wynoszącą kóp $29\frac{3}{5}$. Zwózka i omłócenie kosztowało go zł. $78\frac{4}{5}$. Przedając ziarno, brał za korzec zł. $22\frac{1}{4}$. Ile go kosztowała kopa, co wziął za wszystko zboże, i ile zyskał; wiedząc że kopa dawała $1\frac{4}{7}$ korca?

XXXVI. Sadzawka pewna może być napełniona w 5 dniach wodą płynącą jednostajnie jedném korytem. Taż sama woda drugiém korytem wypływając, wypróżniłaby sadzawkę w dniach 6. Niechże razem woda wpływa piérwszém korytem do sadzawki, i drugiém wypływa, w jakimże czasie ją napełni?

XXXVII. Są trzy fontanny, z których 1sza napełnia pewny wodościek w 6 godzinach, 2ga napełnia tenże wodościek w 2ch godzinach, a 3cia w 3ch; w jakimże czasie napełniony zostanie wodościek, gdy woda będzie wychodzić temi trzema razem fontannami?

XXXVIII. Sadzawka mająca 3 kanały, wypróżniłaby się 1szym przez $3\frac{1}{2}$ dni, 2gim przez $2\frac{4}{5}$ dni; 3cim przez $4\frac{2}{3}$ dni; otworzywszy razem te trzy kanały, za ileż się dni wypróżni?

XXXIX. Okręt uszkodzony burzą przepuszcza wodę, która w 18 godzinach może napełnić spód jego. Zaczynają wylewać wodę dwiema pompami, z których 1sza wypróżniłaby część wspomnioną w 36 godz., a 2ga w 24ch. Gdy pompować zaczęto, było już wody $\frac{3}{8}$ objętości spodniéj części okrętu. W jakimże czasie taż część będzie wypróżniona?

XL. Trzech podróżnych spólnym kosztem jadących ma zapłacić w oberży $23\frac{5}{6}$ zł., za konie na poczcie $48\frac{3}{4}$ zł., za naprawę powozu $16\frac{1}{2}$ zł. Ileż każdy zapłacić powinien?

XLI. Cztérech podróżnych ma zapłacić spólnie koszt podróży. Jednemu z pomiędzy siebie oddają na ten cel 70 rubli. Konie na poczcie kosztowały ich razem $148\frac{5}{8}$ rubli. Oberże $86\frac{3}{4}$ rubli. Tryngielt, naprawa powozu i t. p. $43\frac{3}{5}$ rubli. Czyli, i ile mają dopłacić, i co wypada na każdego?

XLII. Pewien nie mogąc korzystnie sprzedać zboża, przedsiębierze wypalać wódkę. Ma zaś żyta korcy $183\frac{3}{4}$, pszenicy $85\frac{1}{3}$, jęczmienia $240\frac{3}{7}$. Z korca żyta otrzymuje wódki 7éj próby garcy $8\frac{1}{5}$, z korca pszenicy garcy $9\frac{2}{3}$, z korca jęczmienia garcy $7\frac{1}{6}$. Drzewo, usługa, wynagrodzenie za zniszczyć się mogące naczynia browaru, wynosi zł. $840\frac{2}{3}$. Sprzedaje wódkę, garniec po zł. $3\frac{3}{5}$. Ileż garcy miał wódki, ze zboża razem zmięszanego, i ile wziął za nię?

XLIII. Pewien zakupuje na wodzie drzewa pasów $48\frac{3}{4}$; każdy po sztuk 120. Płaci za pas $90\frac{3}{4}$ tal. Od karowania sztuki godzi się po $1\frac{3}{5}$ zł. Od placu na którym drzewo składa zobowiązał się zapłacić od pasa tal. $23\frac{5}{7}$. Wziąwszy na swoję potrzebę sztuk 54, resztę sprzedał biorąc za sztukę tal. $3\frac{2}{5}$. Ponieważ zgodził się z własną odwózką, umawia więc furmana, któremu od każdych 3 sztuk zapłacić ma $\frac{4}{5}$ tal. Ileż dał za drzewo na wodzie, ile go kosztowało karowanie, ile placowe, ile odwózka, ile wszystko razem, ile wziął za drzewo, i czy zyskał lub stracił?

XLIV. Średnica czyli grubość kloca, z którego deski mają być rznięte, wynosi 36 cali. Każda deska ma mieć grubości $1\frac{1}{2}$ cala. Wiadomo zaś, iż na obladry czyli okrawki rachuje się z obu stron kloca po $1\frac{1}{2}$ cala, a samo rznięcie piły zajmuje $\frac{1}{2}$ cala. Ileż może być desek z pomienionego kloca?

XLV. Gdyby miano przewieźć 5248 cetn. o mil 14 wozami cztérokonnemi, biorąc na każdy wóz po 16 cetn. i do każdego wozu potrzebowano 2ch ludzi, t. j. jednego do samego wozu, drugiego do koni; chcący zaś przewieźć płaci od konia na milę po $\frac{3}{4}$ zł., a od wozu na całą drogę po zł. $2\frac{1}{2}$, ludziom także na całą drogę po zł. $1\frac{1}{2}$, tym co przy wozach, a po $1\frac{4}{6}$ tym co przy koniach; ma zaś swoich wozów zaprzężnych 80, prócz tego koni 100 i ludzi 200, z których połowę do wozów a drugą połowę do koni przeznacza; ileż go jeszcze kosztować będzie zamierzone przewiezienie, na które wyznaczone jest 1560 talarów?

XLVI. Jest do umundurowania 5 kompanij po 180 ludzi. Każdy 20ty człowiek jest sierżant. Na każdego trzeba $3\frac{1}{2}$ łok. sukna, lecz dla prostych żołnierzy łokieć sukna po zł. $8\frac{2}{3}$, a dla sierżantów po zł. $10\frac{3}{4}$; toż po $3\frac{3}{4}$ łok. płótna, dla prostych żołnierzy na $1\frac{1}{10}$ zł. łokieć, a dla sierżantów na $1\frac{3}{5}$ zł. łokieć. Do każdego munduru sierżanta trzeba $1\frac{1}{2}$ łok. galonka po zł. $3\frac{1}{6}$. Do każdych trzech mundurów, 4ry tuziny guzików po zł. $1\frac{1}{4}$ tuzin. Jest zaś w magazynie gotowych już mundurów 250 dla prostych żołnierzy, a 25 dla sierżantów; tudzież 468 łokci sukna na mundury dla piérwszych, a 14 łokci dla drugich; 986 łokci płótna dla piérwszych, a 60 łokci dla drugich. Krawcowi od roboty munduru dla prostego żołnierza płaci się $4\frac{2}{5}$ zł. a dla sierżanta $4\frac{5}{6}$. Na takowe umundurowanie jest w kassie 24000 zł. Ileż z tego funduszu zostanie lub ile zabraknie?

LXVII. Pewna osoba w okolicy, w któréj wiązka kory do garbowania, kosztuje $\frac{4}{5}$ tal. posiada las podzielony na 8 poręb, które co 16 lat odnawiają się. Jeżeli każe korę zdejmować, tedy płaci za darcie i wiązanie $\frac{3}{20}$ tal. od wiązki. Może zaś z każdéj poręby 80 wiązek kory i 12 sążni szczap, sążeń po zł. 4 rachować, lecz go rąbanie drzewa na sążeń $\frac{7}{12}$ tal. kosztuje. Jeżeli nie każe kory zdejmować, tedy dochód z sążni przynosi ósmą część więcéj, gdyż przez zdejmowanie kory zmniéjsza się miąższość drzewa; i każdy sążeń może o $\frac{1}{4}$ tal. drożéj przedać, bo nieodarte drzewo więcéj jest ogrzewne. Któryż sposób gospodarowania jest zyskowniéjszy, na którym zyskuje się w 16 latach więcéj, i o ile więcéj?

ROZDZIAŁ VI.

O ZAMIANIE UŁOMKÓW ZWYCZAJNYCH NA DZIESIĘTNE I WZAJEMNIE, TUDZIEŻ O UŁOMKACH PERYJODYCZNYCH.

176. Porównywając rachunek ułomków zwyczajnych z rachunkiem dziesiętnych, spostrzegamy, że ostatni w wielu względach jest prostszym i krótszym, a zatém że jest korzystniéj używać go zamiast rachunku rzeczo-

nych ułomków. Idzie tylko o zamianę na dziesiętne wyrażeń ułomkowych z któremi działać wypada.

Zamiana ta jest nader łatwa pamiętając na to, co się pod nº 117 powiedziało. I tak: dajmy iż mam zamienić ułomek $\frac{3}{4}$ na dziesiętne. Przypisuję 0 do licznika, co mi daje 30, dzielę przez 4 licznik 30, większy dziesięć razy niż 3. Iloraz jest 7 i zostaje 2. Spostrzegam łatwo, iż iloraz 7 jest dziesięć razy za wielki; więc powinienem go dziesięć razy zmniejszyć, co zrobię pisząc go po przecinku w ten sposób: 0,7.

Teraz przypisuję 0 do 2, co zwiększa jeszcze dziesięć razy tę resztę pochodzącą z liczby już dziesięć razy zwiększonéj. Dzielę 20 przez 4, iloraz będzie 5 bez reszty. Piszę go po prawéj stronie 7 aby go przywieść do prawdziwéj jego ważności, i wnoszę, iż ułomek $\frac{3}{4}$ jest zupełnie równy 0,75.

Znajduje się przez podobne postępowanie, iż $\frac{4}{5}$ łok.
łok. zł.
zamieniają się na 0,8 bez reszty, i że $\frac{1}{2}$ zł. $=$ 0,5.

177. W ogólności można zamienić na ułomek dziesiętny skończony, ułomek jakikolwiek zwyczajny, gdy mianownik tego ułomku przywiedziony do najprostszego wyrażenia, dzieli dokładnie licznik rozmnożony przez 10 lub 100, lub 1000 i t. d. Że zaś 10 nie ma innych dzielników dokładnych jak 2 i 5, zatém i liczby wielokrotne z 10 nie mogą być podzielone dokładnie, tylko przez 2 i przez 5, albo przez iloczyny, których obie liczby 5 i 2 są wyłącznie czynnikami: więc ułomek nie da się zamienić dokładnie na dziesiętne, gdy mianownik będzie miał między swemi czynnikami insze liczby niż 2 i 5, albo niż iloczyny których 2 i 5 wzięte razem lub oddzielnie, będą wyłącznie czynnikami.

Tak ułomek $\frac{7}{15}$ nie może nigdy być zamieniony dokładnie na dziesiętne, z przyczyny 3, które jest jednym z czynników 15.

Lecz chociaż mieć nie można dokładnéj ważności tego gatunku ułomków, można się do niéj zbliżać coraz bardziéj, posuwając dzielenie coraz daléj. Naprzykład, dojdziemy, iż zatrzymując się przy trzech dziesiętnych, $\frac{2}{3} = 0{,}666$ mniéj jak o jednę tysiączną, i że posuwając dzielenie aż do piątéj dziesiętnéj, $\frac{2}{3} = 0{,}66666$ mniéj niż o jednę setną tysiączną zbliżone do prawdziwéj wartości.

Znajdę podobném postępowaniem, iż $\frac{5}{11} = 0{,}4545$ mniéj niż o jednę dziesięciotysiączną zbliżone.

Posuwając daléj zamianę ułomku $\frac{3}{4}$ na dziesiętne, mielibyśmy zawsze tęż samę cyfrę 6 powtórzoną bez końca; a posuwając zamianę ułomku $\frac{5}{11}$, liczba 45 wracałaby się ustawicznie. Widzimy więc, iż niemożność zamienienia ściśle jakiego ułomku na dziesiętne, oznajmia się przez powrót ustawiczny téj saméj cyfry, lub przez powrót tychże samych cyfer. Ułomek dziesiętny w tym razie nazywają *nieskończony*.

178. Lubo w podobnym razie nie można poznać liczby cyfer peryjodu, jednak granice jéj można oznaczyć, gdyż liczba ta nie może przewyższać mianownika zmniejszonego jednością. Reszty bowiem z dzielenia liczby jednéj przez drugą, muszą być liczbami mniejszemi niż dzielnik. Zamieniając np. $\frac{5}{7}$ na dziesiętne;

$$\begin{array}{l|l} 50 & 7 \\ \hline & 0{,}714285 \\ 10 & \\ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \end{array}$$

postrzegam, iż ostatnia reszta daje też samę dzielną od któréj zacząłem, zatém z dzieleń następnych otrzymam też same cyfry w ilorazie. Powrót zaś tych cyfer nie może być później jak za siódmém dzieleniem. Bo reszty liczb dzielnych przez 7 mogą być tylko następujące: 1, 2, 3, 4, 5, 6, a nigdy 7, która jest dzielnikiem. Gdyby zaś która z tych okazała się powtórnie jeszcze pierwéj, otrzymalibyśmy w ilorazie też same cyfry, lecz pierwéj niż na miejscu oznaczoném przez mianownik.

Powrót więc następny tychże samych cyfer w ilorazie, nie może w danym przykładzie później się okazać, jak na siódmém miejscu oznaczoném przez mianownik ułomku

179. W ułomkach więc dziesiętnych nieskończonych znajduje się koniecznie jedna lub więcéj cyfer, które się stale powtarzają i które formują tak nazwany *peryjód* ułomku. Same zaś wtedy ułomki zowią się z tego względu *peryjodyczne.*

Rozumie się samo przez się, że ułomek zwyczajny dany do zamienienia na dziesiętny, powinien być przywiedziony do najprostszego wyrażenia.

180. Umiejąc zamieniać ułomki zwyczajne na dziesiętne, obaczmy czy z dziesiętnych nie można się wrócić do ułomków zwyczajnych.

Widzimy naprzód, iż są ułomki dziesiętne, jak 0.7, 0.07, 0.007, i t. d. lub jak 0.3, 0.03, 0.003, i t. d., które już nie mogą mieć mniejszego mianownika; gdyż obadwa ich wyrazy nie mają żadnego dzielnika spólnego. Te ułomki więc nie mogą stracić piętna ułomków dziesiętnych, tylko stając się w wyrażeniu mniéj prostemi. Trzeba więc natenczas przestać na napisaniu ich sposobem innych ułomków.

Tak $0,7 = \frac{7}{10}$; $0,03 = \frac{3}{100}$ i t. d.

181. Lecz gdy dwa wyrazy ułomku dziesiętnego skończonego mają jakikolwiek dzielnik spólny, spostrzegamy zaraz, iż je można przywieść do mniejszego mianownika, i tém samém odjąć im kształt dziesiętny.

Wtenczas napisawszy ułomek dziesiętny sposobem ułomków zwyczajnych (co zawsze ma miejsce dając częściom dziesiętnym za mianownik liczbę oznaczoną ich nazwiskiem), podzielimy oba wyrazy przez ich największy dzielnik spólny, a otrzymany ułomek zwyczajny będzie najprostszém wyrażeniem ułomku podanego.

Tak $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, i t. d.

182. Gdy ułomki dziesiętne peryjodyczne są tylko ułomkami zwyczajnemi, które nie mogą być dokładnie wyrażonemi przez dziesiętne, łatwo postrzegamy, iż będą zawsze mogły przyjąć kształt ułomków zwyczajnych, który jest ich prawdziwym kształtem.

Zastanówmy się naprzód nad temi, których peryjód zaczyna się od pierwszéj zaraz cyfry. Dajmy np. iż żądają zamienić na ułomek zwyczajny, ułomek dziesiętny peryjodyczny 0,3333 . . . . . Pomnożywszy ten ułomek przez 10, będzie 3.3333 . . . . . (1), gdy od téj liczby odejmiemy ułomek dany:

$$\begin{array}{r} 3,3333\ \ldots \\ 0,3333\ \ldots \\ \hline 3,0000\ \ldots \end{array}$$

zostanie 3 całkowite, liczba dziewięć razy większa niż ułomek dany. Nakoniec podzieliwszy tę liczbę przez 9

(1) Nie trzeba się dziwić widząc w tym ułomku dziesiętnym jeszcze cztery cyfry pomimo posunięcia przecinka o jedno miejsce ku prawéj ręce, w ułomku bowiem nieskończonym można przypuścić tyle cyfer ile się podoba.

będzie $\frac{3}{9}$ ułomek równy ułomkowi danemu, tak, iż 0,3333 . . . $=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Tym sposobem postąpimy, ile razy peryjód składać się będzie z jednéj cyfry, t. j. weźmiemy peryjod i podzielimy go przez 9.

Tak 0,6666 . . . $=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; 0,5555 . . . $=\frac{5}{9}$ i t. d.

Gdyby peryjód był o dwóch cyfrach, natenczas aby go przeprowadzić na całkowite, trzeba rozmnożyć ułomek dany przez 100, a odjąwszy od pomnożonego sam ułomek dany, okaże się całkowitość oznaczona przez peryjód 99 razy większa od tegoż ułomku; podzieliwszy ją więc przez 99 otrzymamy ważność szukaną.

Tak ułomek 0,181818 . . . . rozmnożony przez 100, daje 18,181818 . . . .; odjąwszy ułomek, zostaje 18, a podzieliwszy przez 99 znajduje się $\frac{18}{99}=\frac{2}{11}=$0,181818 . . .

Podobnież, 0,272727 . . . daje naprzód 27,272727 . . . dalej 27, daléj $\frac{27}{99}=\frac{3}{11}=$0,272727 . . .; 0,090909 . . . daje naprzód 9,090909 . . .; potém 9, potém $\frac{9}{99}=\frac{1}{11}=$0,090909 i t. d.

W tym razie więc dosyć jest wziąć peryjód i podzielić go przez 99.

Gdyby peryjód był o trzech cyfrach, potrzebaby pomnożyć ułomek przez 1000, odjąć samże ułomek i podzielić całkowite przez 999; czyli prosto, wziąć peryjód i podzielić go przez 999, i tak daléj.

183. W ogólności, aby na ułomek zwyczajny zamienić ułomek dziesiętny bezpośrednio peryjodyczny, trzeba podzielić jego peryjód przez liczbę wyrażoną przez tyle cyfer 9 obok siebie położonych, ile jest cyfer w peryjodzie.

184. Roztrząśnijmy teraz przypadek w którymby się znajdowała jedna lub więcéj cyfer przed peryjodem.

Jasną jest rzeczą, iż mnożąc natenczas ułomek przez 10, 100, 1000, i t. d. lub co na jedno wychodzi, posuwając przecinek o jedno, dwa, trzy i t. d. miejsca ku prawéj ręce, można przeprowadzić do rzędu całkowitych wszystkie cyfry któreby były przed peryjodem.

To uczyniwszy, wypadek będzie złożony z dwóch części, t. j z całkowitéj i z ułomku dziesiętnego bezpośrednio peryjodycznego; lecz każda z tych części będzie tyle razy za wielka ile było jedności w liczbie przez którą pomnożyliśmy dany ułomek. Podzieliwszy więc ważność każdéj z tych części przez liczbę która mnożyła i dodając wypadki, otrzymamy ułomek szukany.

Gdyby podano np. ułomek 0,1666..... pomnożyłbym go przez 10 i miałbym $1{,}666\ldots = 1 + 0{,}666\ldots$; szukając natenczas ważności $0{,}666\ldots$ która jest $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, otrzymałbym $1 + 0{,}666\ldots = 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; lecz ważność ta jest 10 razy za wielka, bo jest ważnością ułomku podanego 0,1666.... rozmnożonego przez 10, podzieliwszy ją więc przez 10, otrzymamy: $0{,}1666\ldots = \frac{5}{3} : 10 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Gdyby podano 0,08333... rozmnożywszy przez 100 będzie $8{,}333\ldots = 8\frac{3}{9} = 8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$; podzieliwszy przez 100 będzie $\frac{25}{300} = \frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$

185. Więc, aby zamienić na ułomek zwyczajny, ułomek dziesiętny peryjodyczny, którego peryjód nie zaczyna się od pierwszéj cyfry, trzeba 1° zamienić peryjód na ułomek zwyczajny podług zasady poprzedzającéj, jak gdyby się zaraz ten peryjód zaczynał; 2° dodać ułomek zamieniony do cyfer, które będą przed peryjodem, jako wyrażające całkowite; 3° sprowadzić całkowite do mianownika ułomku, aby otrzymać ze wszystkiego jednę tylko liczbę

ułomkową; 4^e podzielić tę liczbę ułomkową przez 1 z tylu żerami ile będzie cyfer przed peryjodem ułomku danego; 5^e nakoniec przywieść nowy ułomek do najmniejszych wyrazów.

Tak 0,041666... daje 1^e $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; 2^e $41\frac{2}{3}$; 3^e $\frac{125}{3}$; 4^e $\frac{125}{3000}$; 5^e $\frac{1}{24}=0{,}041666$.

Podobnież 0,0208333... daje naprzód $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, potém $208\frac{1}{3}$, potém $\frac{625}{3}$, potém $\frac{625}{30000}$, nakoniec $\frac{1}{48}=0{,}0208333...$, 0,0185185... daje naprzód $\frac{135}{999}=\frac{5}{27}$ daléj $\frac{5}{27}$, daléj $\frac{5}{27}$; potém $\frac{5}{270}$, nakoniec $\frac{1}{54}=0{,}0185185...$ i t. d.

186. Gdy peryjód nie zaraz się zaczyna lub jest długi, np. 0,9285714 2857... natenczas chcąc mieć ważność jego w ułomku zwyczajnym, dosyć jest wziąć sześć pierwszych cyfer dziesiętnych, i dawszy im za mianownik tyleż razy napisaną liczbę 9. szukać za pomocą ułomków ciągłych, o których rzecz będzie w następującym zaraz rozdziale, najprostszego wyrażenia.

187. Chcąc mieć ważność zbliżoną ułomku, którego nie można zamienić dokładnie na dziesiętne, i gdy nie ma potrzeby ścisłéj dokładności, przestajemy na wzięciu dwóch lub trzech cyfer dziesiętnych opuszczając inne (n^o 117). Tak, aby mieć przez zbliżenie ważność $\frac{5}{12}$, wziąłbym trzy pierwsze cyfry z 0,416666... Lecz gdy opuszczenie cyfer pomienionych ściąga błąd mały, ważną jest rzeczą umieć rozróżniać przypadki, w których błąd ten można uczynić mniejszym. W opuszczeniu zaś cyfer jakiego wyrażenia dziesiętnego zdarzyć się może, iż w cyfrach zaniechanych pierwsza po lewéj ręce będzie większa niż 5, albo równa 5, albo nakoniec mniejsza niż 5.

W pierwszym przypadku dodaj jedność do ostatniéj cyfry po prawéj stronie części zachowanéj, a błąd będzie mniejszym. Tak 0,417 lub 0,417000 zbliża się więcéj do 0,416666..., niż 0,416 lub 0,416000.

W drugim przypadku można jeszcze przydać jedność. Tak opuszczając trzy cyfry 527 z liczby 0,78527, wezmę 0,79 za ważność zbliżoną tejże liczby. Albowiem 0,79 różni się od 0,78527 nieco mniéj przez nadmiar, to jest przewyższając, niż się różni od niéj 0,78 przez brak, to jest nie dochodząc. Lecz widzimy, iż gdyby ostatnia cyfra była 5 i tę chciano opuścić, np. z liczby 0,785; błąd byłby jednakowy, czyliby napisano 0,78 czyli 0,79.

Nakoniec w trzecim przypadku nie trzeba dodawać jedności. Bo jeżeli w wyrażeniu 0,16249 zaniedbuję trzech cyfer 249, ilość 0,16 zbliża się więcéj ważnością do 0,16249 niż 0,17 (1).

ZAGADNIENIA.

188. I. Wyrazić w ułomku dziesiętnym:

1) złotego, 1, 2, 3, 4.... 29 gr.
2) rubla sr. 1, 2, 3, 4.... 99 kopiejek.
3) łokcia, 1, 2, 3, 4.... 23 cali.
4) arszyna, 1, 2, 3, 4.... 15 werszków.
5) kamienia, 1, 2, 3, 4.... 24 fun.

---

(1) Łatwo tu jest uczynić widocznemi prawdy dopiero wymienione, okazując różnicę między liczbami o których mowa.

6) puda, 1, 2, 3, 4.... 39 fun.
7) garca, 1, 2, 3, kwarty.
8) beczki, 1, 2, 3, 4.... 39 wiader.

II. Zamienić na dziesiętne ułomek: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) $\frac{3}{40}$; 6) $\frac{8}{15}$; 7) $\frac{13}{21}$; 8) $\frac{16}{26}$;—

III. Na ułomek zwyczajny zamienić dziesiętny, peryjodyczny: 1) 0,44444..... 2) 0,565656..... 3) 0,19444..... 4) 0,61111..... 5) 0,307692307..... 6) 0,857142857.....

IV. Jakie ułomki odpowiadają dziesiętnym: 1) 0,6; 2) 0,028; 3) 0,1875; 4) 0,3125; 5) 0,027027027; 6) 0,31171717.

V. Wyrazić w dziesiętnych częściach 1) arszyna, 6^3 werszków; 2) puda, 12 fun. 7 łutów; 3) roku, dzień jeden: rachując że rok składa się z 365 dni, 5 godzin, 48 minut i 48 minut drugich czyli sekund.

VI. Ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{16}$ i $\frac{5}{8}$ zamienić na dziesiętne i dodać.

VII. 1) 14 rubli, 2 grywenniki, 8 kopiejek; 2) 25 rubli, 3 grywenniki, 1 piętak; 3) 4 grywenniki, 8 kopiejek; zamienić na dziesiętne części rubla i dodać.

VIII. 1) 3 wersty, 200 sążni, 2 arszyny i 15 werszków; 2) 4 wersty, 100 sążni, 2 arszyny i 5 werszków; zamienić na dziesiętne części wersty, i mniejszą długość odjąć od większéj.

IX. 1) O ile ułomek dziesiętny 0,0276 jest większy lub mniejszy od ułomku $\frac{3}{20}$? 2) o ile razy jest większy lub mniejszy?

X. Platyna jest 21,74; złoto 19,258; srebro 10,4743, merkuryusz czyli żywe srebro 13,598 razy cięższe od wody. Znaleźć ile razy cięższe są wspomnione metale od żelaza, kiedy to cięższe jest od wody $7\frac{15}{19}$ razy.

XI. Kwarta wody waży $2\frac{103}{221}$ fun.; kwarta powietrza 29,5248 gran. Złoto od wody jest cięższe 19,258 razy, ołów 11,352; srebro 10,4743; miedź 8,788; żelazo 7,788; cyna 7,291; cynk 6,861 razy. Ileż razy powietrze jest lżejsze od wody? Ile razy każdy z wymienionych metalów jest cięższy od wody? Ile zaważy walec złoty, ołowiany, srebrny, miedziany, żelazny, cynowy i cynkowy tych samych wymiarów co kwarta?

XII. Wziąć w trzech tylko cyfrach dziesiętnych najbliższą ważność: 1) 0,972912.... 2) 0,972512; 3) 0,973193; 4) 0,973099.

ROZDZIAŁ VII.

O UŁOMKACH CIĄGŁYCH.

189. *Ułomkiem ciągłym* (fractio continua) nazywamy taki ułomek, którego wyrażenie złożone jest z liczby bądź skończonéj bądź nieskończonéj ułomków szczególnych, z których każdy ma za licznik jedność, a za mianownik liczbę całkowitą połączoną z podobnymże ułomkiem. Takiém jest wyrażenie:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

190. Ułomki ciągłe służą do wystawienia sposobem przybliżającym i nie wielu liczbami, ważności ułomków nie dających się w wyrażeniu skrócić, a wielkiemi liczbami wyrażonych (1).

191. Załóżmy sobie wyrazić tym sposobem ważność ułomku $\frac{100000}{314159}$. Dzieląc oba wyrazy tego ułomku przez licznik 100000, znajdziemy $\cfrac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$.

Podzielmy oba wyrazy części ułomkowéj w mianowniku będącéj przez licznik 14159, a ta część zamieni się na $\cfrac{1}{7+\cfrac{887}{14159}}$.

Podzielmy znowu obadwa wyrazy ułomku będącego przy 7 przez licznik 887, a część ta ułomkowa staje się $\cfrac{1}{15+\cfrac{854}{887}}$

(1) Ułomki szczególne, które wchodzą w wyrażenie ciągłe, o którém mówimy, możnaby nazwać ułomkami całkującemi (*fractiones integrantes*), za ich bowiem pomocą możemy napowrót otrzymać ułomek podany.

Podzielmy jeszcze oba wyrazy ułomku będącego przy 15 przez licznik 854, część ułomkowa zamieni się na $\frac{1}{1+\frac{33}{854}}$.

Przez wszystkie te działania ułomek $\frac{100000}{314159}$ wyrażony będzie przez ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\text{ i t. d.}}}}}$$

Widzimy, iż biorąc piérwszy wyraz 3, pomijając ułomek przy nim będący, będzie $\frac{1}{3}$ piérwszą ważnością zbliżoną do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za wielką.

Jeżeli weźmiemy dwa piérwsze wyrazy ułomku ciągłego pomijając ułomek będący przy 7, będzie $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{22}{7}}=\frac{7}{22}$, ważność więcéj zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za mała.

Weźmy trzy piérwsze wyrazy ułomku ciągłego, pomijając ułomek będący przy 15, będzie

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{15}{106}}=\cfrac{1}{\cfrac{333}{106}}=\frac{106}{333}$$

ważność jeszcze więcéj zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za wielka.

Nakoniec; weźmy cztéry piérwsze wyrazy ułomku ciągłego, pomijając ułomek będący przy 1, będzie

$$\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{113}{16}}} = \frac{1}{3+\frac{16}{113}} = \frac{1}{\frac{155}{113}} = \frac{113}{355},$$

ważność jeszcze więcéj zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za mała.

Nie przestając działać podobnie, znajdziemy nowe ważności na przemiany większe i mniejsze niż $\frac{100000}{314159}$, lecz zawsze coraz bliższe; tak dalece, iż za wzięciem na ostatku wszystkich wyrazów ułomku ciągłego (jak w tym przykładzie ośmiu wyrazów, bo w nim ósmy byłby już ostatni), prawdziwą ważność jego otrzymujemy.

192. Widzimy, iż aby rozwinąć dany ułomek zwyczajny na ułomek ciągły, trzeba: *podzielić oba wyrazy ułomku danego przez jego licznik; skoro dzielenie to odbywa się bez reszty, t. j. skoro licznik ułomku jest spólnym dzielnikiem obu jego wyrazów, ułomek będzie przywiedziony do najprostszego wyrażenia i działanie już skończone. Jeżeli jest reszta, uważajmy ją za licznik nowego ułomku łączącego się z pierwszym ilorazem znalezionym, któryto licznik będzie miał za mianownik licznik ułomku danego. Działaj podobnie z tym nowym ułomkiem, i z ułomkami powstającemi w ciągu działania, dopóki nie dojdziesz do ostatniego ułomku mającego za licznik jedność, a za mianownik liczbę pierwotną;* i na tenczas działanie będzie skończone.

193. Wzajemnie, ułomek ciągły zamieniamy na zwyczajny, łącząc całkowite z ułomkami przy nich będącymi i wykonywając skazane dzielenie.

194. Można tu spostrzedz *analogią* czyli podobieństwo zachodzące między sposobem rozwijania danego ułomku zwyczajnego na ułomek ciągły, a sposobem szukania największego dzielnika spólnego dwóch liczb danych. Najprostsza zaś do tego droga jest; dzielić mianownik przez licznik jak się powiedziało pod n°. 140; ilorazy z tąd wypadłe podług porządku, będą mianownikami ciągu ułomków pojedynczych jedność za liczniki mających, a których zbiór formuje ułomek ciągły równy ułomkowi danemu.

Tym sposobem postępując, ułomek $\frac{535}{689}$ można poddać dzieleniu następującemu

689	535	154	73	8	1
	1	3	2	9	8

Ułomek więc ten daje się rozwinąć na ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{8}}}}}$$

a biorąc wyraz jego pierwszy, toż następnie dwa, trzy, cztery i pięć, będziemy mieli ważności 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{66}{85}$, i $\frac{535}{689}$.

195. Przyczyna nierówności tych ułomków zwyczajnych otrzymywanych z ułomku ciągłego, na przemiany większych i mniejszych od ważności ułomku ciągłego podanego, łatwa jest do pojęcia. Wynika ona z natury ułomków zwyczajnych z ułomkami ciągłemi skombino-

wanych. Tak w ułomku $\frac{1}{3}$ pomijając ułomek $\frac{1}{7}$ przy mianowniku 3, będący, robimy ten mianownik mniejszym niż bydź powinien, a zatém wartość ułomku jest większa niż bydź powinna (n^{o} 130). W wyrażeniu $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ pomijając ułomek $\frac{1}{15}$ zwiększyliśmy wartość ułomku $\frac{1}{7}$ a tém samém powiększyliśmy mianownik 3, przez co wartość ułomku $\frac{1}{3}$ jest mniejsza niż bydź powinna i t. d. Biorąc więc w ułomku ciągłym *nieparzystą* liczbę ułomków, a resztę opuszczając, otrzymujemy ułomek większy od danego; przeciwnie zaś wypada ułomek mniejszy od danego, gdy bierzemy *parzystą* liczbę ułomków. Widocznie o tém przekonać się można zamieniając znalezione ważności na wyrażenia dziesiętne.

196. Ułomki ciągłe służyć więc mogą i do wyrażania ważności ułomków dziesiętnych, w ułomkach zwyczajnych, (n^{o} 186) zwlaszcza gdy tamte są wielkiemi liczbami wyrazone, a przestać mozna na wyrażeniu przybliżonéj ważności.

Niech będzie np. ułomek dziesiętny 92857142857.... którego mieć chcą ważność w ułomku zwyczajnym: dosyć jest wziąć sześć pierwszych cyfer dziesiętnych, i dawszy im za mianownik tyleż razy napisaną liczbę 9 szukać za pomocą ułomków ciągłych najprostszego wyrażenia.

I tak $\frac{928571}{999999}$ będzie równy $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{13}}=\cfrac{1}{\cfrac{14}{13}}=\frac{13}{14}$; z ułomku

0,470588235294l176 4705882... wziąwszy $\frac{470588}{999999}$ będzie $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}=\cfrac{1}{\cfrac{17}{8}}=\frac{8}{17}$.

197. Ułomki mające postać ułomków ciągłych, to jest, tém się tylko różniące, że licznikiem ich, jest inna liczba nie jedność; mają także własności ułomków ciągłych i podług nº 193 na ułomki zwyczajne zamienione być mogą.

ZAGADNIENIA.

198. I. Znaleźć za pomocą ułomków ciągłych wyrażenia prostsze 1) $\frac{531}{1278}$? 2) $\frac{1103}{887}$?

II. Wiedząc iż Europa zawiera 171 397 mil kwadratowych, a Azyja 640 086 mil kwadratowych, oznaczyć jaką jest częścią obszerność Europy względem obszerności Azyi (1) ?

III. Wiedząc iż w prowincyi liczącéj 654886 dusz, powiększyła się ludność przez dopiero skończone 10 lat o 51372; jakąż jest częścią to powiększenie względem dawnéj ludności.?

IV. Znaleźć za pomocą ułomków ciągłych wyrażenie najprostsze, jaką częścią jest ludność Królestwa Polskiego 4 388 928 dusz, względem ludności Rossyi 62 517 000 dusz?.

V. Kwarta wody, to jest litr, waży 2,466066 fun. kwarta powietrza waży 29,524824 gran. za pomocą ułomków ciągłych znaleźć te ważności zbliżone w ułomkach zwyczajnych, którychby mianowniki były 1) dwucyfrowe 2) trzycyfrowe 3) czterycyfrowe.

VI. Groszy 11 wyrazić w ułomku ciągłym złotego, i oznaczyć tego ułomku wartości przybliżone.

---

(1) Zagadnienie to powinnoby właściwie tak być wysłowione: oznaczyć zbliżony *stosunek* obszerności Europy do obszerności Azyi; lecz znaczenie wyrazu *stosunek* późniéj t. j. przy nauce o stosunkach i proporcyjach będzie podane.

VII. 1) 15 Garcy wyrazić w ułomku ciągłym korca? 2) 19 fun. w ułomku ciągłym puda? 3) 495 arszynów w ułomku ciągłym wersztv?

VIII. Woda wolno płynąca upływa w 1 sekundzie stóp 3, prędko płynąca stóp 7, prędkość zwyczajnego wiatru wynosi stóp 10 na 1"; prędkość wiatru wielkiego (szturm) od 40 do 60 stóp na 1"; wiatru gwałtownego (orkan) stóp 125 na 1". Prędkość średnia głosu jest stóp 1158 $\frac{1}{3}$ w 1", a światło przebiega w 1 sekundzie mil 42590.

Jakże oznaczyć ułomkiem najprościéj wyrażonym prędkość:

1. Wody wolno płynącéj, względem szybko płynącéj;

2. Wiatru zwyczajnego względem wielkiego w przecięciu, i tego ostatniego względem prędkości wiatru gwałtownego;

3. Średnią wody, względem prędkości wiatru wielkiego w przecięciu;

4. Wody szybko płynącéj względem prędkości wiatru gwałtownego;

5. Wiatru gwałtownego względem szybkości głosu, a głosu względem szybkości światła.

IX. Znaleźć ułomek z którego powstał ułomek ciągły

1) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}}$

2) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1 \text{ i t. d.}}}}}}}}$

3) $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}$

4) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4 \text{ i t. d.}}}}}}}$

X. Z ułomku ciągłego:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}$$

1) talara, 2) rubla; przyjść do ułomku zwyczajnego, a następnie do wartości jego; tudzież do wartości ułomków pojedynczo lub po kilka uważanych?

XI. W jednym roku było w pewnéj okolicy chorych 3475. Z tych wyzdrowiało 2183. W następującym roku znajdowało się tamże 5479 chorych, z tych wyzdrowiało 4279. Jakąż częścią jest liczba przywróconych do zdrowia, względem liczby chorych w roku pierwszym, toż w roku drugim? a jaka w przecięciu średniém w tych obu latach?

XII. Kolumna *ALEXANDRA* w Petersburgu jedna z najwyższych na kuli ziemskiéj, bo mająca samego słupa (walca w jednéj sztuce) granitowego $88\frac{4}{5}$ stóp, jest w całości, rachując z piedestałem i Aniołem na wierzchu Kolumny bronzowym, $163\frac{4}{7}$ stóp wysoka. Gdy Kolumna Pompejusza w Alexandryi ma wysokości $66\frac{3}{5}$ stóp; Watykańska w Rzymie $80\frac{23}{36}$ stóp; obelisk Alexandryjski (zwany igła Kleopatry) 66, 6 stóp; Kolumna Izaakowskiego kościoła $59\frac{1}{3}$ stóp; znaleźć za pomocą ułomków ciągłych, jaką częścią względem samego słupa granitowego Kolumny Alexandrowskiéj są wysokości wymienionych czterech pomników, a jaką względem całéj wysokości téjże Kolumny.

CZĘŚĆ TRZECIA.

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH Z LICZBAMI WIELORAKIEMI CZYLI RÓŻNOGATUNKOWEMI.

ROZDZIAŁ I.

WIADOMOŚCI POPRZEDNICZE.

199. *Liczba wieloraka* (numerus complexus) jestto liczba złożona z rozmaitych jedności które są częściami jednejże jedności głównej. Tak 6 sążni, 4 stopy, 5 cali, jest liczbą wieloraką, w któréj sążeń jest jednością główną. Stopa która się zawiera 6 razy w sążniu, i cal który się zawiera 12 razy w stopie, nazywają się *jednościami posiłkowemi* (unitates secundariae).

200. Nie wszystkie jedności główne jednakowo poddzielamy. Poddziały miar długości np. sążnia, są różne od poddziałów miar wagi, np. funta, a te znowu różnią się od poddziałów miar monet, miar czasu, i t. d. Dla tego dobrze jest obeznać się z położoną na początku téj xiążki małą tablicą miar, których użycie jest u nas najczęstsze.

Kładziemy tu jednak niektóre jeszcze potrzebne wté mierze wiadomości.

Długość wynosząca pół ósma łokcia czyli 15 stóp, nazywa się *prętem*, a 10 prętów rachują na 1 *sznur* mierniczy.

Na milę polską rachowano dawniéj 12500 łok. podług teraźniejszego zaś urządzenia miar zawierać ona powinna $14816\frac{147}{288}$ łokci nowych, i $=8$ *werstom* (верста); mila jednak pocztowa zawiera tylko 7 werst.

Arszyn (Аршинъ, ob. wspomnioną wyźéj tablicę miar) jedność zasadowa rossyjskiéj miary długości $=1$ łokciowi pols. 5, 63.... cala (1).

Morgiem nazywają powierzchnią mającą 3 sznury miernicze wzdłuź a 1 wszerz. Morg więc ma 3 sznury kwadratowe; 30 morgów idzie na *włókę*, a tych 3 na *łan*.

Diesiatyna (Десятина) $=1$ morgowi 2 sznurom 85,64 prętom kwadr. polskim, czyli 1,95.... to jest $1\frac{19}{20}$ morga.

Miar tych uźywają do mierzenia roli, łąk, lasu, i t. p. Wielkie przestrzenie ziemi tudzież wody, mierzą się przez *mile kwadratowe*.

Korzec jest miara do mierzenia rzeczy sypnych, dzieli się na 4 *ćwierci*, z których kaźda ma garcy 8. *Garniec* zaś miara uźywana i do ciał ciekłych, dzieli się na 4 *kwarty*, a ta na 4 *kwaterki*. Podług nowego urządzenia miar, kwarta polska $=$ zupełnie 1 litrowi nowéj miary francuzkiéj.

---

(1) Obszerniejszą wiadomość o tych i innych jednościach miar, o ich podziale, i w szczególności o porównaniu miar rossyjskich z polskiemi; ob. w tablicach metrologicznych w wyźszym kursie czyli 2gim tomie Zasad Arytmetyki.

Czetwert' (Четверть) miara odpowiadająca naszemu korcowi jest czwartą, a *osmina* (осмина) ósmą częścią dawnéj, teraz już nieużywanéj beczki. Czetwert' =1,64 korca pols. czyli 6 ćwierci 4 $\frac{3}{7}$ garcy.

Na *Beczkę* warszawskiéj miary rachowano dawniéj 72 garcy. *Półbeczek* więc miał garcy 36, a ćwierć beczki czyli antał 18 garcy.

Beczka pospolita miała garcy 27; teraz zawierać powinna garcy nowych 25.

Na łaszt dawniéj rachowano korcy 30; lecz teraz przez łaszt rozumie się zwykle łaszt gdański, który dzieląc się na 60 *szefflów* pruskich, równy jest 25,763 korcy czyli 25 $\frac{29}{38}$.

Szyffunt (Schiffpfund) zawiera pospolicie 4 cetnary, i odpowiada wadze rossyjskiéj zwanéj *berkowiec*, która ma 10 pudów t. j. 400 fun.

Beczka ładunku na okręcie jest ciężar 2000 fun. (20 cetn.) Dwie beczki czyli 4000 fun. czynią *łaszt okrętowy*, (Schifflast).

Jednością zasadową monety polskiéj jest *złoty polski*. Sztuki większe srebrne bite, są: *dwuzłotowe*, *pięciozłotowe i dziesięciozłotowe*; mniejsze zaś *dziesięciogroszowe* i *pięciogroszowe*. Złoto biją w sztukach po 25 zł. i 50 zł.

Jednością zasadową monety rossyjskiéj jest *rubel srebrny* mający wartość Zł. 6 gr. 20 czyli 200 gr. a 100 kopiejek, stąd *półruble* i *ćwierćruble* dają ułatwienie w rachunku. Rublowi srebrnemu w wartości wyrównywają podług prawa 3 ruble i 50 kopiejek assygnatami bankowemi. Rubel więc *assygnacyjny* $=\frac{2}{7}$ rubla srebrem czyli $1\frac{19}{21}$ zł. czyli 1 zł. $27\frac{1}{7}$ gr. = gr. 57, 14....

Co do podziału czasu: *rok astronomiczny* składa się z 365 dni, 5 godz. 48' i 49"; *rok* zaś *pospolity* z 365 dni i godzin 5. Zamyka on 12 miesięcy, z których jedne mają po 30 drugie po 31 dni, wyjąwszy miesiąc nazwany *Luty* który ma zwykle dni 28. Tydzień składa się z dni 7. Rok więc ma tygodni 52 i dzień 1 a czasem 2. Co 4 lata bowiem jest rok zwyczajny *przestępny* i ten ma dni 366; a to dla zrównania początku roku pospolitego z początkiem roku astronomicznego. W roku przestępnym miesiąc Luty ma dni 29.

Dzień pospolity rachuje się od północy do północy. Przeciąg lat 100, nazywamy *wiekiem* (1).

Rzeczy które się rachować zwykły na sztuki, rachują także na tuziny, kopy, i t. d. *Tuzin* jest sztuk 12, *mendel* 15, *kopa* 60.

Wielki tuzin, czyli tuzin tuzinów zawiera sztuk 144.

Papier rachować się zwykł na bele, ryzy, i t. d. *Bela* = 10 ryz, *ryza* = 20 liber, *libra* papieru do pisania zawiera arkuszy 24, papieru do druku zawierać powinna arkuszy 25.

---

(1) Z lat kończących wieki, tylko 4ty jest przestępnym, tak, iż w przeciągu 400 lat, jest tylko 97 przestępnych. Aby zaś poznać czyli podany rok jest przestępnym, dosyć jest daną liczbę lat dzielić przez 4; jeżeli dzielenie uskutecznia się bez reszty, tedy r. jest przestępnym, jeżeli zaś jest reszta, okazuje ona ile lat od ostatniego r. przestępnego upłynęło.

Bela sukna ma zwykle postawów 10. *Postaw* ma łokci 32. *Sztuka* płótna ma zwykle łokci 60 lub 100. Płótno cienkie przedaje się na weby. *Weba* zawiera łokci 70 lub 72.

Sążeń drzewa na opał jest sążeń sześcienny (ob. przyp. na st. 69) t. j. po 6 stóp wzdluż, wszerz i wysokość. Sążeń mniejszy jest 6 stóp długi, 3 szeroki, i 3 wysoki, zawiera więc 108 stóp sześciennych czyli kubicznych.

201. Widzieliśmy jak za pomocą ułomków zwyczajnych można uskuteczniać dodawanie liczb wielorakich (n° 148 zagad. XIII—XV), odejmowanie (n° 154 zagad. XI—XVI), mnożenie (n° 161 zagad. XIV, XV i XIX), i dzielenie (n° 174 zagad. XVII—XIX); bo każda liczba wieloraka składa się z jedności głównéj i z ułomków téjże jedności. Sprowadzając więc wszystkie ułomki do jednego gatunku części głównéj jedności, mieć będziemy jednego gatunku ułomki zamiast liczb wielorakich. Lecz ta droga jest długą, i przewidujemy że może być skróconą. Jakoż są prawidła uskuteczniania tych działań dogodniejszemi sposoby, lubo w nich, mianowicie w mnożeniu i dzieleniu, użycie znowu ułomków jest najdogodniejsze. Praktyka i wprawa każdego o tém najlepiéj przekonać mogą.

ROZDZIAŁ II.

O DODAWANIU LICZB WIELORAKICH.

---

202. Ażeby dodać liczby wielorakie, np. 237*zł.* 12*gr.* 2*sz.*; 28*zł.* 5*gr.* 1*sz.* i 314*zł.* 19*gr.* 2*sz.* piszę te liczby jedne pod drugiemi tak, aby jedności jednakowego gatunku były w jednéjże kolumnie:

237*zł.*	12*gr.*	2*sz.*
28	5	1
314	19	2
580*zł.*	7*gr.*	2*sz.*

Biorę summę tych trzech liczb zaczynając od kolumny szelągów, dodaję ją razem i mam szelągów 5, a że grosz zawiera w sobie szelągów 3, summa więc szelągów 5, czyni grosz 1 i szelągów 2; piszę 2 szelągi pod kolumną szelągów a zatrzymuję grosz 1 dla dodania go do kolumny groszy.

Postępując do kolumny groszy, dodaję ją i mam razem z groszem 1 zatrzymanym z szelągów, 37 groszy; lecz że 37 groszy czynią złoty 1 i groszy 7; piszę 7 gr. pod kolumną groszy, a przenoszę złoty 1 do kolumny złotych, których summa znajduje się jak widzieliśmy w liczbach złożonych.

203. Dla uskutecznienia więc dodawania liczb wielorakich *piszą się liczby dane jedne pod drugiemi tak*, *ażeby*

wszystkie jedności tegoż samego gatunku były w jednejże kolumnie; a podkreśliwszy wszystko, zaczyna się dodawanie od jedności gatunku najniższego. Jeżeli summa ich nie składa jedności gatunku bezpośrednie wyższego, piszę ją pod jednościami jéj gatunku; jeżeli zaś zawiera w sobie tyle części iż można z nich złożyć jednę lub więcéj jedności gatunku najbliżéj wyższego, natenczas piszę pod tą kolumną tylko nadmiar tych jedności posiłkowych nad jedność lub liczbę jedności wyższego gatunku, które zatrzymuję dla dodania ich do właściwéj kolumny, z którą postępuję tymże samym sposobem.

Podobnym sposobem działając dojdziemy, iż summa 39*sąż.* 4*st.* 6*c.* 8*l.* 1*mmt.* i 28*sąż.* 3*st.* 11*c.* 10*l.* 1*mmt.* jest 68*sąż.* 2*st.* 6*c.* 7*l.* 0*mmt.*

204. W dodawaniu liczb wielorakich, zachodzić mogą okoliczności na które wzgląd mieć wypada.

Np. Osoba A urodziła się d. 5 Lutego 1742 r. a przeżywszy 53 lat, 4 miesiące, 9 dni, umarła, kiedyż śmierć jéj nastąpiła?

Uważam, iż r. 1742 nie był jeszcze skończony, lecz 1741, i miesiąc 1 to jest Styczeń, i dni 4, ponieważ 5ty dzień drugiego w roku miesiąca Lutego nie był jeszcze skończony, kiedy pisano 5 Lutego.

Oznaczywszy więc czas urodzenia przez 1741 r. 1 miesiąc i 4 dni; gdyż tyle lat, i t. d. upłynęło do 5go Lutego 1742 r. od Narodzenia CHRYSTUSA PANA, to jest czasu od którego lata rachujemy,

napiszę:	1741*lat*	1*m.*	4*dni*
	53	4	9
	1794	5	13

Do dnia więc śmierci upłynęło od wspomnionéj epoki 1794*lat* 5*m.* 13*dni.* Ostatni dzień oznacza tu 14ty dzień 6go miesiąca po 1794 roku, to jest 14ty Czerwca 1793 r.

ZAGADNIENIA.

205. I. Wiedząc, że jednemu robotnikowi należy się tal. 8, zł. 3, gr. 17; drugiemu tal. 15, zł. 5, gr. 9; trzeciemu tal. 7, zł. 1, gr. 23; czwartemu tal. 11, gr. 21; piątemu tal. 13, zł. 4, gr. 19. Jakaż summa potrzebna jest na ich zapłacenie?

II. Pewien włożył w szkatułkę raz 8 zł. 12 gr.; 2gi raz 6 duk. 4 zł. 20 gr.; 3ci raz 2 tal. 1 zł., naostatek przyłożył 7 duk. 2 tal. 2 zł. i 4 gr.; chce wiedzieć ile ma razem.

III. Ileż uczyni długości: 1) 154 sąż. 3 st. 7 c. $9\frac{1}{2}$ l.; 13 sąż. 2 st. 8 c. $11\frac{1}{3}$ l.; 132 sąż. 5 st. 19 c. $3\frac{5}{6}$ l.; 0 sąż. 2 st. 7 c. 1 l.? 2) 84 prętów, 12 stóp, 11 cali; 56 prętów, 7 stóp, 8 cali; 128 prętów, $9\frac{1}{2}$ cali; 14 stóp, $8\frac{1}{2}$ cali?

IV. Pewny powroźnik ma 5 kręgów liny: w pierwszym 45 sążni 2 arszyny i 6 werszków; w drugim 32 sążni, 1 arszyn i 1 stopę; w trzecim 28 sążni, 1 arszyn, 1 stopę, 7 werszków; w czwartym 36 sążni i 6 werszków; w piątym 1 sążeń 2 arszyny i 3 werszki; ileż razem długość tych lin wynosi?

V. Ileż ważą razem 15 grzyw. 5 unc. 6 dr. 42 grany; 217 grz. 7 unc. 7 dr. 60 gr.; 41 grz. 6 unc. 5 dr. 17 gr.; 4 grz. 5 unc. 6 dr. 10 gr?

VI. Do zważenia pewnego ciężaru, położono na przeciwném ramieniu szali dwa ciężary wynoszące po kamieni 7, funtów 3, uncyj 11, łót 1. Dla zrównoważenia potrzeba było jeszcze dołożyć funt. 8, uncyj 9. Ileż ważył cały ciężar?

VII. Namierzono raz żyta beczek 12 i ośminów 3; drugi raz beczek 15, ośminów 3, garcy 5. Ileż wszystkiego rachując na beczki?

VIII. Wydano żyta ze śpichrza raz 8 beczek, 3 ośminy, 1 czetwerik; drugi raz 3 beczki, 1 ośminę; trzeci raz 2 czetwerti, 1 ośminę, 3 czetweriki; czwarty raz 18 beczek, 3 czetwerti, 1 ośminę i 2 czetwerìki; ileż ogółem wszystkiego wydano?

IX. Zakupiono 4 berlinek pszenicy. Na pierwszéj było 24 łasztów, 18 korcy, 2 ćwierci, 5 garcy; na drugiéj 18 łaszt. 14 kor. 3 ćwierci, 4 garcy; na trzeciéj 17 łaszt. 12 korcy, 1 ćwierć, 3 garce; na czwartéj 20 łasztów, 16 korcy, 2 ćwierci, 7 garcy. Ileż wszystkiego zakupiono?

X. Jedna kufa mieści w sobie garcy 125, kwart 3, kwaterek 2; druga garcy 157, kwartę 1, kwaterkę 1; trzecia garcy 96, kwartę 1, kwaterek 3. Ileż wszystkie razem zawierają?

XI. Piwowar sprzedał piwa 3 beczki, 14 garcy, dwie kwarty; inną razą sprzedał 14 beczek, 22 garcy, 1 kwartę; trzecią razą sprzedał 24 beczek, 20 garcy, 3 kwarty; w domu wydał piwa dla domowników 20 garcy; ileż wszystkiego piwa wydał, rachując jednę beczkę po 25 garcy?

XII. W pewnym folwarku wysiano oziminy: żyta 117 korcy, 3 ćwierci, 6 garcy; pszenicy 35 kor. 1 ćwierć, 4 gar.; jarzyny zaś, to jest owsa 94 kor. 7 ćw. 5 garcy; jęczmienia 63 kor. 3 ćw.; grochu 9 kor. 4 gar.; prosa 3 ćw. 7 garcy.

W drugim folwarku żyta 128 kor. 2 ćw. 4 garcy; pszenicy 49 kor. 1 ćw.; owsa 104 kor. 1 ćw. 5 gar.; jęczmienia

61 kor. 7 gar.; grochu 15 kor. 3 ćw. 2 gar.; prosa 2 kor. 2 ćw. 4 garce.

W trzecim żyta 121 kor. 1 ćw.; pszenicy 58 korcy, 5 garcy; owsa 86 kor. 3 ćw. 6 garcy; jęczmienia 70 kor. 2 ćw.; grochu 20 kor. 3 ćw. 5 gar.; prosa 3 kor. 2 ćw. $6\frac{1}{2}$ garca.

Ileż wynosi zasiew oziminy a ile jarzyny w każdym z osobna folwarku, i we wszystkich razem? Ile całego zasiewu w każdym folwarku, i we wszystkich razem? Ile wynosi zasiew każdego gatunku zboża we wszystkich trzech folwarkach?

XIII. Winiarz raz sprzedał: 5 garcy wina i 3 kwarty za zł. 24 i groszy 15; drugi raz 16 garcy i 3 kwaterki za zł. 18 groszy 20; trzeci raz 11 garcy i 1 kwartę za zł. 31, groszy 21. Ileż wszystkiego wina sprzedał, i ile wziął za nie?

XIV. Bank zakupił na 3ch składach złożoną wełnę. W pierwszym składzie było cetn. 468, kamieni 3, funt. 12, za które zapłacił duk. 9360 zł. 8 gr. 25; w drugim było cetn. 589, kam. 2, funt. 19, i zapłacił za nie duk. 8691 zł. 15 gr. 20; w trzecim było cetn. 497, kam. 1, funt. 15, za które zapłacił duk. 8053 zł. 12 gr. 18. Ileż zakupił wszystkiéj wełny, i ile dał za nią?

XV. Pewny kupiec ma czworakiego gatunku papier. Pierwszego gatunku ma 1 belę, 8 ryz, 16 liber, 20 arkuszy; drugiego 6 ryz, 12 liber, 18 arkuszy; trzeciego 2 bele, 5 ryz, 10 liber, 10 arkuszy; czwartego 16 bel, 9 ryz, 15 liber, 20 arkuszy. Ileż ma wszystkiego papieru?

XVI. Dodawszy 2*dni* 10*god.* 52*min.* 54"; 5*d.* 9*god.* 17' 19", i 21*god.* 3' 48"; jakaż będzie summa?

XVII. Osoba B. urodziła się 16 Września 1765 roku, osoba A. jest 7 lat, 5 miesięcy, 23 dni młodsza; kiedyż się urodziła?

XVIII. W którym roku wieku swojego umarł ten, który się w 1751, 16 Sierpnia urodził; przepędził zaś w domu rodziców lat 9, miesięcy 2 i dni 14, w szkołach lat 8, miesięcy 7, dni 18; w wojsku lat 13, miesięcy 3, dni 19; na urzędzie lat 17, miesięcy 9, dni 26, a chorował miesięcy 5, dni 19?

XIX. Któś kupił wioskę; pytającemu się, ileby morgów cała wioska zajmowała, odpowiedział: pole zasiane żytem i pszenicą wynosi morgów 429, prętów kwadratowych 236; zasiane jęczmieniem, owsem i gryką wynosi morg. 189, prętów kwadr. 146, poddane uprawie na przyszłą siejbę morg. 415, pręt. kwadr. 89, łąki zajmują morgów 69, pręt. kwadr. 46; lasy morg. 84, pręt. kwadr. 12; ogrody morg. 12, pręt. kwadr. 37. Ileż ta wioska zajmowała włók i morgów?

XX. Ciało wolno spadające, puszczone np. z wysokości na ziemię, ubiega w sekundzie

1széj	8	łokci	17	cali	6	linij
2giéj	26	—	4	—	6	—
3ciéj	43	—	15	—	6	—
4téj	61	—	2	—	6	—
5téj	78	—	13	—	6	—

Ileż ubiega w dwóch pierwszych sekundach, ile w trzech pierwszych, ile w czterech pierwszych, ile we wszystkich pięciu, ile w czterech, trzech i dwóch ostatnich?

ROZDZIAŁ III.

O ODEJMOWANIU LICZB WIELORAKICH.

---

206. Ażeby odjąć liczbę wieloraką np. 289*zł.* 19*gr.* 11*den.* od 332*zł.* 2*gr.* 9*den.* (1), piszę mniejszą liczbę pod większą w ten sposób, aby jedności tegoż samego gatunku były w jednéjże kolumnie, i odejmuję wszystkie części liczby mniejszéj od wszystkich części odpowiadających liczby wyższéj, zaczynając od jedności najniższego rzędu.

332*zł.*	2*gr.*	9*den.*
289	19	11
42*zł.*	12*gr.*	16*den.*

Nie mogąc odjąć 11*de.* od 9*de.*, przydaję w myśli jeden grosz który ma 18*de.*, co czyni 27*de.*, od których odjąwszy 11 zostanie 16*de.*; zwiększywszy teraz jednością 19*gr.*, liczbę następującą bezpośrednie po lewéj ręce, mówię: 20*gr.* od 2*gr.* nie można; przydaję 1 złoty który ma 30*gr.* do 2*gr.* co czyni 32*gr.* i mówię: 20 od 32 zostaje 12. Naostatek zwiększywszy jednością 289*zł.* odejmuję 290 od 332 jak zwyczajnie i mam 42*zł.* Tak tedy różnica szukana jest 42*zł.* 12*gr.* 16*de.*

---

(1) Wprowadziliśmy tu dla wprawy w rachunek denary, których liczono 6 na szelag, lubo już teraz nie używają ich w rachunku.

207. Chcąc więc odjąć jednę liczbę wieloraką od drugiéj: *piszę liczbę mniejszą pod większą, tak, aby jedności tegoż samego gatunku były w jednéjże kolumnie, i podkreśliwszy je, zaczynam odejmowanie od jedności gatunku najniższego. Jeżeli liczba niższa może być odjętą od liczby wyższéj, napiszę resztę pod linijką. Jeżeli zaś nie może być od niéj odjętą, natenczas aby uskutecznić odejmowanie, przydaję w myśli do liczby, od któréj odejmować nie można, jedność gatunku bezpośrednie wyższego, zamieniwszy ją na gatunek o który idzie. Napiszę teraz pod linijką różnicę między liczbą wyższą tak zwiększoną i liczbą niższą odpowiadającą, a dla nagrodzenia zwiększę jednością liczbę niższą następującego bezpośrednie po lewéj ręce gatunku.*

Dojdziemy podobnym sposobem, iż różnica między 32*sąż.* 0*st.* 2*c.* 0*l.* 1*mmt* i 19*sąż.* 4*st.* 5*c.* 10*l.* jest 12*sąż.* 1*st.* 8*c.* 2*l.* 1*mmt.*

208. Gdyby się pytano: ile upłynęło lat, miesięcy i dni np. od 2go Listopada 1775 roku do dnia 6go Kwietnia 1794 roku?

Napisalibyśmy liczby przygotowane podług nº 204, jak następuje:

1793*lat*	3*mce*	5*d.*
1774	10	1
18*lat*	5*mc.*	4*d.*

Pozostaje tylko wziąć różnicę. Ta okazuje, że od 2go Listop. 1775 r. do 6go Kwiet. 1794 r. upłynęło lat 18, miesięcy 5 i dni 4.

Postępując podobnie, dojdziemy, iż jeżeli pewna osoba umarła 1818 r. 15 Maja o godz. 5 rano; urodziła się zaś 1755 roku 28 Czerwca o godz. 9 po południu, osoba ta żyła 62*lat* 8*mcy* 15*dni* 8*god*.

ZAGADNIENIA.

209. I. Ma ktoś: 1) 8 duk. 11 zł. i 23 gr. ileż mu niedostaje do 10 duk.? 2) 64 półimperyjały, 3 ruble, 2 połtyny, 3 grywenniki; ileż mu niedostaje do 100 imperyjałów?

II. Mający zapłacić: 1) duk. 512, talar. 4, zł. 1, gr. 12; daje duk. 200, zł. 3, gr. 11. Ileż ma jeszcze zapłacić, aby się uiścił z długu? 2) 200 imperyjałów, 6 rubli; daje 124 imper. 1 półimper. 4 ruble, 2 połtyny, 2 grywenniki; ileż jeszcze jest winien?

III. Mający zrobić 487*sąż.* pewnéj roboty, zrobił jéj dopiéro 319*sąż.* 4*st.* 3*c.* 10*l.* Ileż jeszcze ma zrobić?

IV. Ile już wykopano długości rowu, który ma wynosić 4 wiorsty, 239 sążni, 2 arszyny; gdy pozostaje do wykopania sążni 419, arsz. 2, ćw. 1, werszków 3?

V. Ma być wykopany rów długi na sążni 18, łokci 2, stopę 1, cali 8. Wykopano już sążni 12, łok. 2, st. 1, cali 10. Ile jeszcze pozostaje do wykopania?

VI. Gdy kto ujechał mil 63, wiorst 6, mając jechać mil 112; ileż mu jeszcze przejechać zostaje?

VII. Z Warszawy do Gdańska liczą pocztowych mil 46, ćwierć 1. Jeżeli pewna osoba ujechała mil 14, ćw. 3; ile jeszcze ma ujechać?

VIII. Sztuka sukna wynosząca łokci 45, ćwierć 1, cali 2, zmniejszyła się po zstąpieniu o łok. 3, ćwierć 1, cali 3. Ileż jest tego sukna po zstąpieniu?

IX. Odjąwszy: 1) od 20 cetnarów; 3 cetn. 2 kam. 24 funt. 24 łuty; ileż się zostanie? 2) Od 52*funt.* 9*unc.* 2*dr.* 44*gr.*; odjąwszy 12*fun.* 12*unc.* 5*dr.* jakaż zostanie reszta? 3) Od 4ch berkowców; 38 pudów, 38 funtów, 15 łutów; ileż się zostanie? 4) Od 6 pudów, 15 funtów, 20 łutów; 5 pud. 22 funt. 24 łuty, 2 zołotniki; jakaż zostanie reszta?

X. Mieszanina dwóch metalów wynosi funtów 50, uncyj 11, łut. 1. Gdy jeden z tych metalów waży funtów 33, uncyj 9; jakaż jest waga drugiego?

XI. Pytają się o różnicę między 17*dni* 11*god.* 47′ 5″; a 13*dni* 18*godz.* 55′ 40″?

XII. Jeżeli Kopernik urodził się w roku 1473 dnia 19 Lutego po południu o godzinie 4 minucie 48; umarł zaś roku 1543 dnia 10 Czerwca, dajmy, iż o godzinie 4 po południu, jak dlugo żył?

XIII. Pewne pole wydało zboża kóp 18, mędli 3, snopów 8. Zwieziono z pola kóp 14, mędli 2, snop. 14. Ileż pozostaje do zwiezienia?

XIV. Na składzie znajdowało się zboża łasztów 9, korcy 12, ćwierci 2, garcy 3. Sprzedano łasz. 5, kor. 18, ćw. 3, gar. 7. Ile pozostało?

XV. W pewném biórze wypotrzebowano jednego roku papieru bel 8, ryz 8, liber 3; drugiego roku bel 6, ryz 9, liber 7. Jaka była oszczędność w roku drugim?

XVI. Jedno pole zawiera w miarach kwadratowych sznurów 8, prętów 4, pręcików 3; drugie sznurów 5, prętów 8, pręc. 9. O ile pierwsze jest większe od drugiego.

XVII. Dnia 13 Czerwca 1818 roku zaprowadzone u nas zostały nowe miary i wagi. Ileż lat, miesięcy i dni używamy miar i wag nowych, rachując do dnia zadania tego przykładu?

XVIII. Planeta Ceres odkrytą została dnia 28 Grudnia 1800 roku; Pallas 28 Marca 1802; Juno 1 Września 1804; Westa 29 Marca 1807. Ile upłynęło lat od odkrycia każdéj z pomienionych planet do dnia $\frac{7}{19}$ Sierpnia 1839 roku, uroczystego otwarcia nowego Głównego Obserwatoryum Pułkowskiego?

XIX. Pewna osoba skończywszy lat 47, miesięcy 3 i dni 12 życia, umarła 7 Września 1830 roku. W którymże się roku i dniu urodziła?

XX. Jan urodził się 1803 roku dnia 12 Lutego o godzinie 8 po południu. Paweł zaś 1789 dnia 16 Czerwca o godzinie 3ciéj rano. Ileż dziś każdy z nich ma lat, i o ile lat Paweł jest starszy od Jana?

ROZDZIAŁ IV.

O MNOŻENIU LICZB WIELORAKICH.

210. W mnożeniu liczb wielorakich na trzy natrafiamy przypadki: albo mnożnik jest liczbą jednogatunkową, a mnożna wieloraką; albo mnożna liczbą jednogatunkową, a mnożnik wieloraką; albo mnożna i mnożnik są liczbami wielorakiemi. W pierwszym przypadku, czynnikiem jednogatunkowym, mnożę wszystkie części czynnika wielorakiego. W innych przypadkach unikając działania z ułomkami, potrzeba zamienić różne gatunki tak jednego jak drugiego czynnika na części najmniejsze

dane w zagadnieniu, a natura zagadnienia wskaże sposób otrzymania żądanego iloczynu.

Co do 1go przypadku; gdyby się pytano: 5 łokci sukna ile kosztować będzie, płacąc łokieć po duk. 2. zł. 4, gr. 28? otrzymamy rozwiązanie zagadnienia mnożąc wszystkie części czynnika wielorakiego przez 5. Jakoż

28 gr. × 5 czyni zł. 4, gr. 20.
4 zł. × 5 czyni duk. 1, zł. 2,
2 duk. × 5 czyni......10,

czyli łokci 5 kosztuje duk. 11, zł. 6, gr. 20.

Co do 2go przypadku: kiedy mnożnik będzie liczbą wieloraką: np. 3 cetn. 1 kamień 12 funt. ile kosztować będzie, płacąc cetnar po rubli 4? Ponieważ w najniższym gatunku znajdują się funty; przeto wszystko wyrażam w funtach; a zatém:

cetn. 3 czyni fun. 300
kam. 1 — — — 25
dodaję fun.........12

i mam w ogóle fun. 337

Dochodzę teraz ceny jednego funta. Skoro cetn. kosztuje rubli 4, czyli gr. 800, więc funt kosztuje 100 razy mniéj czyli gr. 8 zatém fun. 337 kosztować będzie 337 × 8, czyli 2696 gr. czyli rubli 13, zł. 3, gr. 6.

Co do 3go przypadku; kiedy oba czynniki są liczbami wielorakiemi, np. gar. 32, kwart 3, kwaterka 1, ile kosztować będzie, płacąc garniec po duk. 4, zł. 3, gr. 10? Dochodzę ceny jednéj kwaterki, która będzie gr, 5; gar.

32, kwart 3, kwater. 1, zamieniam na kwaterki, co uczyni kwater. 525; rozmnożywszy cenę kwaterki przez liczbę kwaterek, znajdę odpowiedź duk. 4, zł. 5, gr. 15.

212. Lecz mnożenie liczb wielorakich może (jak widzieliśmy nº 201) być przywiedzione we wszelkich przypadkach w ogólności do mnożenia ułomków.

I tak weźmy naprzykład: gdyby się pytano, co ma kosztować 54*sąż.* i 3*st.* jakiéj roboty, rachując po 42*zł.* 18*gr.* i 2*sz.* sążeń? Zamieniam mnożną 42*zł.* 18*gr.* i 2*sz.* na szelągi, co czyni 3836*sz.*; a że szeląg jest 90tą częścią złotego, więc mnożna może być oznaczona przez $\frac{3836}{90}$*zł.*; podobnież mnożnik 54*sąż.* 3*st.* obrócony na stopy daje 327*st*; że zaś stopa jest 6tą częścią sążnia więc mnożnikiem będzie $\frac{327}{6}$*sąż.* A tak zagadnienie jest przywiedzione do mnożenia $\frac{3836}{90}$ przez $\frac{327}{6}$*sąż.* co czyni $\frac{125437}{540}$ czyli $2322\frac{402}{540}$ *zł.* a zamieniając ułomek na grosze, a grosze na szelągi (nº 123) będzie 2322*zł.* 27*gr.* 1*sz.*

Podobnież, gdyby się pytano, ile kosztuje 38*sąż*, 4*st.* 4*c.* gdy sążeń jest po 48*zł.* 28*gr.* 6*de.*? zamieniam obadwa czynniki na ułomki. A naprzód co do mnożnéj; 48*zł.* i 28*gr.* $=$ 48 i $\frac{14}{15}$*zł.*; 6*de.* są $\frac{1}{3}$ *gr.* a że grosz jest $\frac{1}{30}$ *zł.* więc $\frac{1}{3}$ *gr.* jest $\frac{1}{90}$*zł.* (nº 171). Lecz $\frac{1}{90}$ i $\frac{84}{60} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18}$; więc 48*zł.* 28*gr.* 6*de.* $= 48\frac{17}{18}$*zł.*

Co do mnożnika; 38*sąż.* 4*st.* $=$ 38 i $\frac{2}{3}$*sąż.*; 4*c.* są $\frac{1}{3}$ *st.* a że stopa jest $\frac{1}{6}$*sąż.* więc $\frac{1}{3}$*st.* jest $\frac{1}{18}$*sąż.*; $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{18} = \frac{12}{18}$ i $\frac{1}{18} = \frac{13}{18}$*sąż.* Zatém 38*sąż.*, 4*st.* 4*c.* $= 38\frac{13}{18}$*sąż.* Zagadnienie więc sprowadzone jest do pomnożenia $48\frac{17}{18}$*zł.* przez $38\frac{13}{18}$*sąż.* czyli $\frac{881}{18} \times \frac{607}{18}$ co czyni $\frac{684057}{324}$*zł.* czyli uskuteczniając dzielenie i zamieniając pozostałe ułomki na grosze i denary, będzie iloczyn cały, 1895*zł.* 7*gr.* $2\frac{1}{3}$*de.*

Gdyby się pytano, ile za 48*zł.* 28*gr.* 6*de.* będzie sążni, gdy za złoty jest 38*sąż.* 4*st.* 4*c.*; a zatém gdyby trzeba było pomnożyć 38*sąż.* 4*st.* 4*c.* przez 48*zł.* 28*gr.* 6*de.* czyli $\frac{607}{18} \times \frac{881}{18}$, natenczas iloczyn $\frac{614057}{325}$ oznaczałby sążnie, a uskuteczniając dzielenie, nie zaniedbując oraz zamieniać pozostałych ułomków na stopy i cale, wypadłby iloczyn, 1895*sąż.* 1*st.* $5\frac{1}{9}$*c.*

Podany sposób mnożenia lubo się rozciąga do wszelkiego gatunku liczb wielorakich, lecz wymaga więcéj rachunku niż ten który zaraz wyłożymy.

213. Sposób najwięcéj używany i prostszy w tych działaniach zależy na rozkładaniu liczb rozmaitego nazwiska na części wielokrotne (nº 89) względem jedności gatunku bezpośrednio wyższego (1).

---

(1) Dla ułatwienia sobie działań w téj mierze, niech uczący się rozkładają na części wielokrotne złoty, sążeń, funt, i t. d. zacząwszy od części najmniejszéj np. grosza, cala, łuta i t. p. I tak:

1	gr.	jest	30tą	częścią	złotego
2	—	są	15tą	—	—
3	—	—	10tą	—	—
4	—	—	10tą i 30tą, albo 2 razy 15tą, i t. d.		

Można i w ten sposób mieć ćwiczenie: z pewnéj liczby części uważać jaka ich liczba jest połową, 3cią, 4tą i t. d. częścią względem ogółu: np. z 20 części

10 jest połową
5 czwartą
4 piątą częścią i t. d.

Z 15, 10 czyni dwie trzecie; 5 trzecią część, i t. d.

Naprzykład, ażeby wiedzieć cenę $46\frac{3}{4}$*łok.* jakiéj materyi po 26*zł.* 10*gr.* 9*de.* łokieć, widzę, iż trzeba powtórzyć cenę łokcia tyle razy, ile łokieć jest zawarty w $46\frac{3}{4}$*łok.* Wezmę zaś $\frac{3}{4}$ mnożnéj, albo biorąc naprzód część czwartą i pisząc ją trzy razy, albo też biorąc mnożnéj połowę, i znowu téj połowy, połowę. Tak:

	26*zł.*	10*gr.*	9*de.*
	$46\frac{3}{4}$		
1szy iloczyn cząstkowy	156	0	0
2gi — —	1040	0	0
3ci — —	15	10	0
4ty — —	0	23	0
5ty — —	13	5	$4\frac{1}{2}$
6ty — —	6	17	$11\frac{1}{4}$
Iloczyn cały	1231*zł.*	25*gr.*	$15\frac{3}{4}$*de.*

Mnożę naprzód całą mnożną przez 46. Zaczynam od mnożenia 26*zł.* co mi daje dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia 10*gr.* i mówię: gdybym miał złoty do pomnożenia przez 46, miałbym na iloczyn 46*zł.*; lecz 10*gr.* jest tylko trzecią częścią złotego, iloczyn więc 10*gr.* przez 46 będzie tylko trzecią częścią 46*zł.* co mi daje 3ci iloczyn cząstkowy. Postępuję do mnożenia 9*de.* przez 46, i widzę iż gdybym miał 1 grosz do pomnożenia przez 46, miałbym 46*gr.* na iloczyn. Że zaś 9*de.* czyni tylko połowę grosza, iloczyn więc tych 9*de.* przez 46 powinien uczynić tylko połowę 46*gr.* czyli 23*gr.* co jest 4tym iloczynem cząstkowym.

Pozostaje mi wziąć 26*zł.* 10*gr.* 9*de.* $\frac{3}{4}$ razy, czyli co na jedno wychodzi, trzeba ażebym wziął $\frac{3}{4}$ z 26*zł.* 10*gr.*

9*de*. Dla większéj łatwości rozkładam $\frac{3}{4}$ na $\frac{1}{2}$ i na $\frac{1}{4}$. Za pół łokcia biorę połowę ceny łokcia, t. j. połowę 26*zł*. 10*gr*. 9*de*., co mi daje piąty iloczyn cząstkowy. Nakoniec za $\frac{1}{4}$ które jest połową połowy, biorę połowę z 13*zł*. 5*gr*. $4\frac{1}{2}$*de*. co jest ceną półłokcia, i mam 6ty ostatni iloczyn cząstkowy. Dodając wszystkie te iloczyny, znajduję 1231*zł*. 25*gr*. $15\frac{3}{4}$*de*. za cenę $46\frac{3}{4}$*łok*. po 26*zł*. 10*gr*. 9*de*. łokieć.

214. Podobnież, aby wiedzieć cenę 38*sąż*. 5*st*. 8*c*. gdy 48*zł*. 28*gr*. 6*de*. kosztuje sążeń; widzę iż powtarzając 48*zł*. 28*gr*. 6*de*. tyle razy ile 1 sążeń zawarty jest w 38*sąż*. 5*st*. 8*c*. znajdę iloczyn szukany. Oto jest wzór działania:

	48*zł*.	28*gr*.	6*de*.
	38*sąż*.	5*st*.	8*c*.
1szy iloczyn cząstkowy	384	0	0
2gi — —	144	0	0
3ci — —	19	0	0
4ty — —	12	20	0
5ty — —	3	24	0
6ty — —	0	12	12
7my — —	24	14	3
8my — —	16	9	8
9ty — —	5	13	$2\frac{2}{3}$
Iloczyn cały	1906*zł*.	3*gr*.	$7\frac{2}{3}$*de*.

Mnożę naprzód całą mnożną przez 38. Zaczynam od 48*zł*. co mi daje dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia 28*gr*. i mówię: gdybym miał 1*zł*. do pomnożenia przez 38, miałbym na iloczyn 38*zł*. lecz że 28*gr*., które rozkładam na 15*gr*. 10*gr*. i

3*gr.*, ważą tylko połowę, trzecią część i dziesiątą złotego, aby więc mieć od razu w złotych iloczyn z 28*gr.* przez 38, biorę połowę, trzecią część i dziesiątą 38*zł.* co mi daje 3ci, 4ty i 5ty iloczyn cząstkowy.

Postępuję do mnożenia 6*de.* przez 38 i mówię: gdybym miał grosz do pomnożenia przez 38, iloczyn byłby 38*gr.*; lecz 6*de.* jest tylko trzecią częścią grosza, iloczyn więc z 6*de.* przez 38 zamieniony na grosze zawierać będzie tylko trzecią część 38*gr.* co mi daje 6ty iloczyn cząstkowy.

Gdybym szukał wartości tylko 38*sąż.* działanie byłoby skończone, i pozostałoby jedynie wziąć summę wszelkich tych iloczynów szczególnych; lecz trzeba jeszcze znaleźć wartość 5*st.* i 8*c.*

Postrzegam iż 5*st.* rozłożone na 3*st.* i 2*st.* są połową i trzecią cześcią sążnia, biorąc więc połowę i trzecią część 48*zł.* 28*gr.* 6*de.* ceny sążnia, będę miał wartość pięciu stóp. Te dwa działania dają mi 7my i 8my iloczyn cząstkowy.

Nakoniec za 8*c.* które są trzecią częścią dwóch stóp, będę miał trzecią część iloczynu, który znalazłem za 2*st.* i to jest 9ty iloczyn cząstkowy.

Dodając wszystkie te cząstkowe iloczyny znajdziemy 1906*zł.* 3*gr.* $7\frac{2}{3}$*de.* wartość szukaną.

215. Gdyby się zaś pytano, ile za 48*zł.* 28*gr.* 6*de.* dostanie pewnego towaru, rachując za 1*zł.* po 38*sąż.* 5*st.* 8*c.*? znajdę podobnie postępując, iż na iloczyn wypada 1906*sąż.* 0*st.* $8\frac{2}{9}$*c.* Oto jest wzór tego działania.

			38*sąż.*	5*st.*	8*c.*		
			48*zł.*	28*gr.*	6*de.*		
1szy	iloczyn	cząstk.	304	0	0		
2gi	—	—	152	0	0		
3ci	—	—	24	0	0	z rozmn. 3st. przez 48.	
4ty	—	—	16	0	0	—	2
5ty	—	—	5	2	0	—	8*c.*
6ty	—	—	19	2	10	z rozmn. mnożnego przez	15*gr.*
7my	—	—	12	5	$10\frac{2}{3}$		10
8my	—	—	3	5	$4\frac{2}{5}$		3
9ty	—	—	1	1	$9\frac{7}{15}$		1
10ty	—	—	0	2	$7\frac{7}{45}$		6*de.*
	Iloczyn	cały	1906*sąż.*	0*st.*	$8\frac{2}{9}$*c.*		

Mnożę naprzód całą mnożną przez 48. Zaczynam od 38*sąż.* co mi daje dwa piérwsze iloczyny cząstkowe. Aby 5*st.* wziąć 48 razy, rozkładam je na 3*st.* i 2*st.* t. j. na pół i trzecią część sążnia, i mam zaraz połowę i trzecią część 48*sąż.* co mi daje 3ci i 4ty iloczyn cząstkowy. Przystępuję do mnożenia 8*c.* przez 48, a że 8*c.* jest $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ stopy, więc będę miał $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ z 48*st.* t. j. 24 i 8 = 32*st.* czyli 5*sąż.* i 2*st.* co mi daje iloczyn 5ty.

Aby rozmnożyć 38*sąż.* 5*st.* 8*c.* przez 28*gr.* uważam iż te są połową, trzecią i dziesiątą częścią złotego, powinienem zatém wziąć połowę, trzecią i dziesiątą część mnożnéj, co mi daje 6ty, 7my i 8my iloczyn cząstkowy. Naostatek aby pomnożyć mnożną przez 6*de.* uważam, ilebym z niéj mógł mieć za grosz 1, i dla tego biorę trzecią część 8go iloczynu cząstkowego, co mi daje 9ty iloczyn przybrany oznaczający, iż za grosz miałbym 1*sąż.* 1*st.* $9\frac{7}{15}$*c.*; więc za 6*de.* które są trzecią częścią grosza, mieć będę tylko 2*st.* $7\frac{7}{45}$*c.* co mi daje ostatni iloczyn cząstkowy. Dodając wszystkie te iloczyny znajdę 1906*sąż.* 0*st.* $8\frac{2}{9}$*c.* na iloczyn cały.

216. Z tego widzimy, iż *aby wykonać mnożenie z liczbami wielorakiemi za pomocą części wielokrotnych, trzeba umieć zamieniać poddziały głównéj jedności czynnika jednego, na różne części wielokrotne téjże jedności, i wziąć za każde z nich, części podobne z czynnika drugiego; summa tych wszystkich części czyli iloczynów cząstkowych, będzie iloczynem całym szukanym.*

Postępowanie to wypływa widocznie z definicyi mnożenia (nº 40).

ZAGADNIENIA.

217. I. Wydając co dzień groszy 6 np. ubogim; ile zł. wydałem przez rok cały?

II. Gdyby kto marnie stracił co dzień 10 minut, ileż to godzin uczyni straty drogiego czasu na rok?

III. Jeżeli jednemu robotnikowi należy się tal. 8, zł. 3, gr. 17; ileż razem np. 9 robotnikom, którzy tęż samę, co pierwszy pracę ukończyli, należyć się będzie?

IV. Ileż kosztować będzie; 1) 15 sążni pewnéj roboty, jeżeli sążeń kosztuje zł. 2, gr. 18, szel. 2? 2) 0 sąż. 5 st. 9c. 10 l, rachując po 0 zł. 19 gr. 11 den. sążeń?

V. Ileż dostać można towaru: 1) za zł. 252, gr. 18, sz. 2, rachując za złoty fun. 4, łutów 6? 2) za rubli 80, kop. 30, jeżeli za rubla przypada fun. 6, łut. $2\frac{1}{2}$?

VI. 1) Pobierając co miesiąc 4 duk. 8 zł. 15 gr. ileż przypadnie za lat 33, miesięcy 6? 2) Płacący dziennie za stół po zł. 2, gr. 18, ileż zapłaci za miesięcy 5, tygodni 3 i dni 2? 3) Ktoś opłaca komornego 5 duk. 3 zł. i gr. 10 kwartalnie; ileż zapłaci za dwa lata, miesięcy 4 i dni 24?

VII. Jeżeli kosztuje: 1) kamień cukru 2 duk., zł. 8, gr. 28; ileż kosztuje 6 kamieni? 2) beczka piwa zł. 15, gr. 25; beczek 9 ile kosztować będzie? 3) sztuka drzewa 3 ruble, 25 kop.; 58 sztuk ileż kosztuje? 4) beczka zboża, rubli 2, kop. 15; ileż kosztuje 15 beczek, 3 czetwerti, 1 ośmina i 1 czetwerik? 5) tysiąc sztuk cegły duk. 2, zł. 4, gr. 8; 54000 cegieł ile kosztuje?

VIII. Ileż kosztować będzie: 1) sukna łokci 8, ćw. 3, płacąc łokieć po duk. 2, zł. 11, gr. 10? 2) zboża łasztów 5, kor. 14, ćw. 3; płacąc łaszt po 61 duk. 12 zł. i gr. 18? 3) żelaza cetn. 15, kam. 3, fun. 18; płacąc kamień po 2 ruble, 8 kop.? 4) papieru bel 12, ryz 6, liber 8; płacąc belę po rubli 9, kop. 14? 5) mydła cet. 3, kam. 2, fun. 12; płacąc kamień po duk. 1, gr. 10?

IX. Jeżeli kopa żyta po wymłóceniu wydaje korzec 1, ćw. 2, gar. $6\frac{1}{2}$; kóp 12, mędli 3, snopów 10, ile wydadzą korcy?

X. Na zasianie jednego morgu roli, potrzeba zboża 1 korzec, ćwierć 1, garcy $5\frac{1}{2}$. Na zasianie 16 morgów ile potrzeba?

XI. Grabarze wyrobili rów długi na sążni 12, stóp 3, cali 8. Ile wezmą za tę robotę skoro za jeden sążeń biorą rubli 2, kopiejek 15?

XII. Zgodzono robotników: 1) 24, na tygodni 8. Każdy robotnik zarabia na tydzień duk. 2, zł 3, gr. 24; ile każdy zarobi, a ile wszystkim wypłacono? 2) 15, na miesięcy 3, tygodni 2, płacono każdemu na tydzień talarów 2, zł. 4, gr. 18; pytanie jak wyżéj?

XIII. 1) Kiedy 12 sztuk czyli tuzin pewnego towaru kosztuje 8 tal. 4 zł. 12 gr.; ileż kosztować będzie wielki tuzin czyli 12 tuzinów? 2) Jeżeli jedna sztuka pewnego towaru kosztuje tal. 2, zł. 3, gr. 8; tuzinów wielkich 4, małych 5 i sztuk 5, ile kosztować będzie?

XIV. Jeżeli 1) na funt szterling (moneta rachunkowa angielska) rachuje się 6 tal. 3 zł. $15\frac{15}{17}$ gr.; ileż uczyni 3754 funt. szterlingów? 2) Imperyjały nowe idą po zł. 34, gr. 11; ileż złotych uczyni 2682 imperyjałów?

XV. Złotnik ugodził się z robotą wziąć za każdy łut srebra zł. 5 gr. 18. Zrobił srebra stołowe ważące 10 grzywien, 7 uncyj, łót. $1\frac{2}{3}$. Jakąż kwotę za to srebro odbierze?

XVI. Ile kosztuje: 1) 5 cetn., 3 kamienie, $22\frac{1}{2}$ funtów cukru, jeżeli cetnar kosztuje tal. 29, zł. 3, gr. 24; 2) 4 berkowce, 8 pudów, 35 fun. wosku; gdy pud jeden kosztuje 4 ruble, 2 połtynniki, 5 kopiejek? 3) 5 pudów, $30\frac{3}{4}$ fun. herbaty; kiedy funt kosztuje 3 ruble. 18 kop.? 4) 5 berkowców, 7 pud., 32 fun. lnu; jeżeli pud płaci się po 2 rub. 1 połtyn. 2 grywenniki, 5 kop.?

XVII. Sprzedając: 1) kamień wełny po 3 duk. 2 tal. 4 zł. 21 gr. Ileż przypadnie za 80 kamieni, $18\frac{5}{8}$ fun.? 2) grzywnę srebra po duk. 3 zł. 8 gr. 20; ileż dostanę za 18 grzywien i $10\frac{1}{2}$ łutów; 3) postaw sukna po duk. 42, zł. 4, gr. 8; ileż przypadnie za 5 postawów i łokci $18\frac{2}{3}$?

XVIII. Siana fur 14 ile kosztować będzie, płacąc pud po zł. 1 gr. 10, na każdéj zaś furze znajduje się pudów 25, funt. 30?

XIX. Znajdują się 3 pola: każde zawiera morgów 5, z każdego morgu zebrano żyta kóp 3, mędli 2, snopków 8, każda kopa wydaje ziarna korcy 2, ćw. 3, garcy $5\frac{1}{2}$; 1) ile będzie z tego zbioru kóp zboża; 2) ile korcy po wymłóceniu?

XX. Do pewnéj fabryki ugodzono fur 16 na dni 4; każda fura kosztuje dziennie talar 1, zł. 5, gr. 10. Ile wszystkim za 4 dni zapłacić trzeba?

XXI. Zakupiono 14 sztuk drzewa, płacąc sztukę po duk. 2, zł. 9, gr. 8. Z każdéj sztuki było sążni 3. Sążeń przedawano po duk. 1, zł. 4, gr. 12; 1) ile zapłacono za drzewo? 2) ile było sążni? 3) ile wzięto za sprzedane sążnie?

XXII. 1) Pewna osoba oddaje w kommis towaru za duk. 115. Jeżeli biorący w kommis odtrąci sobie od każdego dukata zł. 2, gr. 6; ileż wszystkiego odtrąci, i ile odda po odtrąceniu? 2) Z mających się płacić 50000 zł. np. długu, potrącają po 2 gr. i 6 de. na złotym; ileż potrącenie wynosi, a ile zapłacić istotnie trzeba?

XXIII. Jeżeli w handlu morskim 1 zł. przynosi rocznie 22 zł. 20 gr. 10 de; ileż przyniosą na rok 669 zł. 4 gr. i 9 de?

1250

ROZDZIAŁ V.

O DZIELENIU LICZB WIELORAKICH.

218. W dzieleniu liczb wielorakich natrafiamy podobnie jak w mnożeniu na trzy przypadki: albo dzielnik jest

liczbą jednogatunkową a dzielna wieloraką; albo dzielna jednogatunkową a dzielnik wieloraką; albo dzielna i dzielnik są liczbami wielorakiemi.

W szczególnych tylko przypadkach obejść się możemy bez pomocy ułomków, i w tym razie szczególniéj jeszcze o to starać się należy, aby tak dzielna jak dzielnik zawierały tylko ilości jednakowe. I tak:

Co do 1szego przypadku: Jeżeli kamieni 5 kosztuje duk. 12, zł. 15, gr. 25? Otrzymamy cenę kamienia, dzieląc wszystkie wyrazy dzielnéj przez 5. Tu zaś bez zamiany nawet podzielnéj na grosze, znajdę łatwo że kamień płacono po duk. 2, zł. 10, gr. 11.

Gdyby zaś kamień płacono po duk. 10, zł. 15, gr. 25, znalazłaby się cena jego łatwiéj jeszcze, gdyż wszystkie wyrazy różnogatunkowéj dzielnéj byłyby podzielne przez 5.

Co do 2go: Dajmy że 28 tal. zapłacono za 4 łok. 2 ćw. pewnéj materyi, i jest pytanie po ile płacono łokieć? Zamieniam 4 łok. na ćwierci łokcia i mam razem z 2ma ćw. 18 ćwierci; dzieląc 28 tal. przez 18, dochodzę ceny ćwierci łokcia, która tu jest tal. 1, zł. 3, gr. 10. Cena więc łokcia jest 4 razy większa, to jest tal. 5, zł. 1, gr. 10.

Co do przypadku 3go: Jeżeli się pytają np. co kosztuje garniec jakiego likworu lub towaru sypkiego, jeżeli za 32 garcy, 3 kwarty, 1 kwaterkę zapłacono duk. 4, zł. 15, gr. 15? Zamieniam 32 gar. 3 kwar. 1 kwaterkę na kwaterki, co wynosi 525 kwater. Podobnież 4 duk. 15 zł. 15 gr. czyni 2625 gr. podzieliwszy 2625 przez 525, znajdę cenę kwaterki gr. 5. Cena ta rozmnożona przez 16 liczbę kwaterek garca, pokaże cenę garca t. j. zł. 2, gr. 20.

219. Widzimy tu jak długa jest ta droga, i przewidujemy iż może być skróconą. W saméj rzeczy, ogólniejszy, i za wprawą, łatwiejszy jest sposób dzielenia liczb wielorakich za pomocą ułomków.

I tak, aby podzielić liczbę wieloraką przez inną, np. ażeby znaleźć cenę łokcia, przypuszczając że $46\frac{3}{4}$ łok. kosztowały 1231 zł. 25 gr. $15\frac{3}{4}$ de.; uważam, iż cena łokcia zawiera się tyle razy w 1231 zł. 25 gr. $15\frac{3}{4}$ de., ile 1 łokieć w $46\frac{3}{4}$ łok. t. j. 46 i $\frac{3}{4}$ razy, czyli (sprowadziwszy 46 do mianownika 4), $\frac{187}{4}$ razy, pozostaje więc tylko dzielić 1231 zł. 25 gr. $15\frac{3}{4}$ de. przez $\frac{187}{4}$, co się sprowadza do pomnożenia 1231 zł. 25 gr. $15\frac{3}{4}$ przez $\frac{4}{187}$ i daje $\frac{4927\text{zł. } 13\text{gr. } 9\text{de.}}{187}$

Iloraz 26 zł. 10 gr. 9 de., który znajduję uskuteczniając dzielenie, jest ceną łokcia.

Oto jest wzór skrócony działania w którém tylko reszty są oznaczone:

```
zł.
4927      13gr.   9de.   | 187
1187                     |------------------
  65=1950zł.             | 26zł.  10gr.  9de.
       13
    -----
     1963
       93=1674de.
              9
          -------
          1683
             0
```

Podobnież, ażeby znaleźć cenę sążnia, przypuszczając, iż 24sąż. 2st. 8c. kosztowały 58zł. 20gr. 12de. uważam, iż cena sążnia zawiera się tyle razy w 58zł. 20gr. 12de. ile 1 sążeń w 24sąż. 2st. 8c. więc podzieliwszy 24sąż. 2st. 8c. przez 1 sążeń, trzeba dzielić 58zł. 20gr. 12de. przez iloraz z tego dzielenia wypadły.

Aby zaś dzielenie to uskutecznić, uważam, iż zamieniając 1 sążeń na cale, mam 72c. a zamieniając 24sąż. 2st. 8c. na cale, mam 1760 cali. Iloraz więc ilości 24sąż. 2st. podzielonéj przez 1 sążeń, jest ułomek ogólny $\frac{1760}{72}$.

Pozostaje teraz dzielić 58zł. 20gr. 12de. przez $\frac{1760}{72}$, co się sprowadza do pomnożenia 58zł. 20gr. 12de. przez $\frac{72}{1760}$ i czyni $\frac{4225\text{zł. } 18\text{gr.}}{1760}$; iloraz 2zł. 12gr. $\frac{27}{55}$de. który się znajduje uskuteczniając dzielenie, którego tu wzór widzimy, jest ceną sążnia.

$$\begin{array}{rr} 4225\textit{zł.} & 18\textit{gr.} \\ 705 = & 21150 \\ & 18 \\ \hline & 21168 \\ & 3568 \\ & 48 = \frac{864}{1760}\textit{de.} = \frac{27}{55}. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1760 \\ \hline 2\textit{zł.} \quad 12\textit{gr.} \quad \frac{27}{55}\textit{de.} \end{array} \right.$$

220. Widzimy ztąd, iż *dla wykonania podobnych działań, trzeba sprowadzić dzielnik do części jego najmniejszych, potém mnożyć dzielną przez liczbę wyrażającą ile razy najmniejszy gatunek dzielnika zawiera się w jego największym danym gatunku, i odbywać dzielenie według prawideł wyżéj przepisanych.*

Można tu skrócić działanie, bo np. ułomek ogólny $\frac{1760}{72} = \frac{220}{9}$; dosyć więc rozmnożyć dzielną przez 9 a dzielić przez 220.

221. Wypada jeszcze dodać uwagę, iż gdy dzielnik jest téjże natury co dzielna, a iloraz ma być ogólny, natenczas dzielna podobnież jak dzielnik musi być wyrażona w częściach najmniejszego gatunku jego, inaczéj nie możnaby otrzymać ilorazu ogólnego.

Gdyby nawet iloraz miał być mianowany, trzeba podobnie obie liczby przysposobić. W tym jeszcze razie szczególny wzgląd zachodzi, iż gdy reszta z dzielenia pozostała jest ułomkiem jedności gatunku ilorazu, a chcemy dzielenie posunąć i otrzymać iloraz w częściach niższego gatunku; zamienić należy tę resztę na części gatunku bezpośrednio niższego, i dzielić podług wskazanych prawideł. Np. gdyby się pytano, ile za 7668 zł. 11 gr. 8 de. będzie pewnéj roboty, rachując po 72 zł. sążeń? spostrzegamy, iż z natury zadania, iloraz powinien zawierać sążnie i części sążnia. Zamieńmy więc dzielną i dzielnik na denary, a mieć będziemy 4135166 de. do dzielenia przez 38880 de. co daje na iloraz 106sąż. Reszta $\frac{13886}{38880}$ jest ułomkiem sążnia. Zamieniam ją więc na stopy, cale i t. d. i wykonywając dzielenie znajdę jeszcze na iloraz 2st. 1c. $8\frac{2}{15}$. Podobne już działanie wykonywaliśmy pod nº 212, zamieniając ułomek złotego na grosze, i t. d.

222. Łatwo także spostrzeżemy, iż dzielenie liczb wielorakich może być przywiedzione i do dzielenia ułomków, a nawet, iż w wielu przypadkach najdogodniejszém jest ich użycie, (porówn. nº 210). Praktyka i wprawa każdego o tém najlepiéj przekonać mogą. Jakoż przy teoryi ułomków rozwiązaliśmy już wiele zagadnień, któreby mogłyby należyć i do zagadnień z liczbami wielorakiemi (porówn. zagadnienia pod nº 161, 174, 175).

223. Mnożenie i dzielenie liczb wielorakich można sprowadzić do mnożenia i dzielenia zwyczajnego z częściami dziesiętnemi, zamieniając w liczbach danych różne poddziały jedności głównéj na części dziesiętne.

224. Aby zamienić liczbę wieloraką na jeden tylko gatunek jedności głównéj z częściami jéj dziesiętnemi, trzeba ją zamienić naprzód na liczbę ułomkową (nº 212) a tę dopiéro na dziesiętne (nº 180).

I na odwrót, ażeby części dziesiętne jakiéj jedności głównéj zamienić na liczbę wieloraką, dosyć jest zachować prawidła mnożenia dziesiętnych. Pytają się np. $\overset{\textit{sąż.}}{0,65347}$ ileż czyni stóp, cali i linij? Mnożę dziesiętne przez 6 zamieniając sążeń na stopy, iloczyn jest $\overset{\textit{st.}}{3,92082}$; mnożę części dziesiętne stopy przez 12 zamieniając na cale i mam $\overset{\textit{c.}}{11,04984}$; mnożę części cala przez 12 zamieniając na linije, i mam $\overset{\textit{l.}}{0,59808}$ równe prawie $\frac{3}{5}$l., a zatém ważność dziesiętnych danych wynosi prawie 0sąż. 3st. 11c. $\frac{3}{5}$l.

Podobnież postępując znajdziemy, iż jeżeli rok astronomiczny ma $\overset{\textit{dni}}{365,24254}$; tedy zawiera 365d. 5g. 48' 49" i nieco więcéj.

W rachunku zamiany złotych polskich na ruble assygnacyjne i wzajemnie, wielkie ułatwienie podają następujące tablice, które służą na tak wielkie summy jakie tylko kto zechce.

TABLICE

Służące do zamiany złotych pols. na ruble ass. i rubli ass. na złote pols. po kursie stałym 350 *rubli ass. za* 100 *rubli sr. według Najwyższego Ukazu z d.* $\frac{1}{13}$ *Lipca* 1839 *r.*

I. (a) Tablica służąca do zamiany złot. pols na ruble assygnacyjne

Złote Pols.	Ruble Ass
1000	525
2000	1050
3000	1575
4000	2100
5000	2625
6000	3150
7000	3675
8000	4200
9000	4725

II. Tablica służąca do zamiany rubli assygnacyjnych na złote polskie

Ruble Assy.	Złote Polskie
100000	190476, 190476
200000	380952, 380952
300000	571428, 571428
400000	761904, 761904
500000	952380, 952380
600000	1142857, 142857
700000	1333333, 333333
800000	1523809, 523809
900000	1714285, 714285

I.(b) Tablica służąca do zamiany groszy polskich na kopijki assygnacyjne

gr.	kopij.	gr.	kopij.	gr.	kopij
1	1,75	11	19,25	21	36,75
2	3,50	12	21,00	22	38,50
3	5,25	13	22,75	23	40,25
4	7,00	14	24,50	24	42,00
5	8,75	15	26,25	25	43,75
6	10,50	16	28,00	26	45,50
7	12,25	17	29,75	27	47,25
8	14,00	18	31,50	28	49,00
9	15,75	19	33,25	29	50,75
10	17,50	20	35,00	30	52,50

UŻYCIE TAB. I. (a) i TAB. I. (b).

Ile rub. ass. uczyni zł. 17254 gr. 20?

Tab. I. (a)	10,000......	5250
	7,000.......	3675
	200......	105
	50......	26, 25
	4......	2, 10
Tab I. (b)	gr. 20	35
		9058, 70

17254 zł. 20 gr. czyni 9058 r. as. 70 ko.

UŻYCIE TABLICY II.

Ile zł. uczyni 9058 rubli as. 70 kop.?

9000......	17142, 857
50......	95, 238
8......	15, 238
70	1, 333
	17254, 666

9058 r. as. i 70 ko. czyni zł. 17254 g. 20.

225. Ztąd łatwo się przekonać możemy, iż gdybyśmy w naszych miarach i wagach mieli podział dziesiętny, rachunek liczb wielorakich w miarę zachowania tego podziału byłby ułatwiony.

226. Co się tyczy próby czterech działań z liczbami wielorakiemi, ta odbywa się podobnie, jak się powiedziało wyżej pod nº 165 o próbie czterech działań z ułomkami zwyczajnemi. Co do mnożenia i dzielenia; gdy je uskuteczniać można niejednym sposobem, więc i te sposoby służyć sobie mogą wzajemnie za próbę, np. w mnożeniu *podwoić mnożną i wziąć połowę mnożnika*, lub przeciwnie; w dzieleniu zaś *oba wyrazy podwoić lub ich wziąć połowę*, i t. d.

ZAGADNIENIA.

227. I. Ojciec zostawił majątku dla 5 synów 479 duk. 2 tal. 5 zł. 20 gr.; mają się równo podzielić; ileż każdy dostanie?

II. 45 sztuk drzewa kosztuje duk. 52, zł. 16, gr. 20; ileż kosztuje sztuka?

III. Łokieć pewnéj materyi kosztuje 3 duk.; ileż jéj łokci będzie za 14 duk. 2 tal. 5 zł.?

IV. Za $57\frac{5}{8}$ łokci pewnego towaru zapłacono 237 duk. 13 zł. $8\frac{1}{2}$ gr., po ileż płacono łokieć?

V. Zapłacono 106 duk. za 8 sążni, 5 stóp, 6 cali pewnéj roboty; po ileż płacono sążeń?

VI. Trzy oddziały robotników razem potrzebują na miesiąc mięsa kamieni 216, funt. 10,
chleba — 162, — 12,
soli — 13, — 12, łut. 16. Ile potrzeba mięsa, chleba i soli dla każdego oddziału?

VII. Rachując czerwony złoty po zł. 18, gr. 24; ileż trzeba czerw. zł. na spłacenie 2500 tal. 4 zł. 18 gr.?

VIII. Duk. 2123, zł. 14, gr. 20, ile uczynią 1) rubli sr.? 2) ile assygnacyjnych? 3) ile imperyjałów nowych po zł. 34, gr. 11? 4) ile franków, rachując frank po gr. 48?

IX. Przedsięwzięto kopać kanał 8950sąż. 3st. 6c. długi, szerokości miernéj wszędzie jednakowéj: kopią go na dzień 28sąż. 4st. 3c. dł.; jest pytanie ile dni trzeba będzie na wykopanie całego kanału, przypuszczając, iż gatunek ziemi w całéj jego rozciągłości jest jednakowy?

X. Wiedząc, iż: 1) łokci 3, ćw. 2 pewnéj materyi kosztuje duk. 5, zł. 12, gr. 21; po ileż płacono łokieć? 2) 15 arszynów, 12 werszków sukna kosztuje 57 rubli i 20 kop. sr.; ileż kosztuje arszyn?

XI. Sążeń drzewa kosztuje duk. 2, zł. 2, gr. 16. Za duk. 123, zł. 15, gr. 25, ile będzie sążni?

XII. Świéc kamieni 12, fun. 8, kosztują duk. 19, zł. 17, gr. 10; po czemu płacono funt?

XIII. Jeżeli dano: 1) 857 rubli, 2 połtynniki, 18 kop. sr. za 65 sztuk płótna; po ileż płacono sztukę? 2) 96 rub. 3 połtyny, 16 kop. sr. za 14 wołów, jakaż jest wartość wołu?

XIV. Omłócono zboża kóp 9, mendli 2, snopów 4; z tego było korcy 12, ćw. 3. gar. 6; ileż wydaje kopa?

XV. Pszenicy korcy 15, ćwierci 2, wydaje mąki kor. 18, ćw. 3, gar. 5; ileż mąki wydaje korzec?

XVI. Złotych 128, gr. 15 ile czyni: 1) rubli sr. licząc rubel po zł. 6, gr. 20? 2) rubli assygnacyjnych licząc jeden rubel ass. zł. 1 gr. 27?

XVII. W pewnéj oberży potrzeba co miesiąc mięsa cetn. 20, kamieni 3, funt. 12, które kosztują razem duk. 42, zł. 9, gr. 7; 1) ile na dzień wychodzi mięsa, rachując 30 dni na miesiąc; 2) jaki jest codziennie wydatek? 3) po ile płacono funt jeden?

XVIII. Za 22 berkowce, 6 pudów, 25 funtów potażu, wzięto 1944 rubli, 1 połtynę, 12 kopiejek? Po czemu wypada berkowiec, pud i funt potażu?

XIX. Płacąc jednemu robotnikowi duk. 3, zł. 8 i gr. 23, zapłacono duk. 55, zł. 14 i gr. 8; ileż było robotników?

XX. Za 48 beczek żyta i 2 ośminy, zapłacono 495 rubli, 1 połtynę i 2 grywenniki; ileż kosztuje beczka?

XXI. Naczynie srebrne waży grzywien 4, uncyj 5, łót 1, nie rachując roboty. Zapłacono za nie duk. 16, zł. 10, gr. 20; po ileż płacono łót srebra?

XXII. Wiadomo, iż grzywna czystego srebra kosztowała 14 tal. 5 zł. 24 gr. Jest pytanie ile grzywien kupiono za 115 tal. 3 zł. $4\frac{5}{16}$ gr.?

XXIII. 24 robotników z równą usilnością pracujących przez dni 16 wykopali rowu 229 sznurów i 8 prętów: 1) ileż każdy przez cały czas roboty wykopał? 2) ile na dzień wykopał?

XXIV. Rzemieślnik który 1) odebrał 45 rubli, 10 kop. sr. za 18 dni roboty; ileż zarabiał dziennie? 2) ugodzony na dzień po zł. 14, gr. 25, odebrał zł. 229, gr. $27\frac{1}{2}$; ileż dni zarabiał?

ZAGADNIENIA W KTÓRE WCHODZĄ POŁĄCZONE DZIAŁANIA Z LICZBAMI WIELORAKIEMI.

228. I. Gospodarz mający pszenicy korcy $30\frac{1}{3}$, ćw. $2\frac{3}{5}$, żyta zaś kor. 50 i $\frac{7}{11}$ ćw.

1ód wysiał pszenicy kor. $6\frac{5}{7}$, ćw. 1; żyta zaś kor. $12\frac{1}{3}$, ćw. $\frac{2}{3}$;
2re sprzedał pszenicy kor. 12, i $\frac{2}{5}$ ćw., a żyta kor. 11, ćw. 3;
3cie na własną potrzebę wydał pszenicy kor. $6\frac{1}{5}$, ćw. 2, żyta zaś kor. 10 i $\frac{5}{6}$ ćw.; ileż mu się pozostało jednego i drugiego gatunku zboża?

II. Ktoś był winien $14\frac{1}{4}$ zł. $+ 27\frac{2}{3} + 19\frac{7}{8} + 47\frac{2}{7} + 38\frac{2}{5}$ złot.; na to wypłacił w różnych czasach: $9\frac{1}{6} + 12\frac{5}{8} + 39\frac{1}{9} + 41\frac{1}{2} + 26 + 8\frac{3}{4}$; ileż jeszcze został winien?

III. W kupieckich rejestrach znaleziono spis długu. Osoba *A* winna duk. 74, tal. 2, zł. 5, gr. 18. Osoba *B* wybrała też samą ilość towarów co osoba *A*, i nad to za duk. 12, zł. 8, gr. 28. Osoba *C* winna jest toż samo co osoba *A*, i nad to duk. 16, zł. 4, gr. 25; ile każda z tych osób jest winna, i ile cały dług wynosi?

IV. 1) Ktoś zapytany dnia 16 Stycznia 1796 roku, ile miał lat życia? odpowiedział: na początku wieku 19go miałbym lat pół wieku; ileż miał lat życia?

2) Osoba *A* mniemała, że przyjaciel *B* miał lat 50, ten zaś odpowiedział: że nie tyle lat liczy, ponieważ w cięźkiéj słabości w jakiéj był przed 7 laty i 5 miesiącami, byłby umarł jako 50 letni, gdyby nadspodziewanie nie wyzdrowiał; ileż miała lat osoba *B* i kiedy się urodziła? mówiły zaś z sobą dnia 18 Lipca 1832 r.

V. Gdybym miał: 1) 2 razy tyle i 5 razy tyle pieniędzy, jak mam, tedy z pieniędzmi, które mam rzeczywiście, miałbym 100 tal.; ileż mam rzeczywiście?

2) 2 razy i 3 razy tyle ile mam, i nad to 21 tal. 3 zł. 10 gr. tedy miałbym 200 tal.; ileż mam teraz?

VI. Sztuka sukna trzymająca łokci 30, ćw. 2, cali 8; po zstąpieniu trzyma łokci 29, ćw. 3, cali 5; ileż przez zstąpienie ubyło na całéj sztuce, a ile na łokciu?

VII. Przypada płacić summę 32160 zł. w złocie, rachując dukat po zł. 16, gr. $22\frac{1}{2}$. Ten co płaci brał dukat po 18 zł.; ile traci na złocie?

VIII. Kupuje ktoś: 1) dukaty po zł. 20, gr. 5. Wydaje po zł. 19, gr. 14; ileż zyskuje na stu dukatach? 2) imperyjały nowe po zł. 34, gr. 12, wydaje po zł. 34, gr. $15\frac{1}{2}$; ileż traci na stu?

IX. Zgodzono robotnika po 2 zł. 17 gr. na dzień, obiecawszy mu oraz stół póki roboty nie ukończy. Za każdy dzień w którymby nie robił, miano mu za stół wytrącić zł. 1, gr. 6. Gdy po 13 tygodniach i 5 dniach przyszło do obrachunku, pokazało się, że tylko przez dni 48 robił; ileż mu się za ten czas należy?

X. Dano złotnikowi sztukę srebra ważącą funt. 5, uncyj 7, łut. 1, drachm. 1. Z tego zrobił naczynie ważące funtów 4, uncyj 9, łut. 1. Od roboty łóta bierze zł. 2, gr. 8; ileż pozostało srebra, za które obowiązuje się złotnik zapłacić rachując grzywnę po duk. 4, zł. 8, gr. 10? kto komu ma dopłacić, i ile?

XI. 17 robotników przez dni 6 na tydzień, a przez 12 godzin na dzień robiących, w 9 tygodniach i 4 dniach zrównali ziemię na ogród, 3 stopy kwadratowe co godzina każdy równając. Jakaż była obszerność tego ogrodu, i ile ta robota kosztowała, rachując po 2 grosze na stopę jednę kwadratową?

XII. Bankier pożyczył dukatów 124, licząc czerwony złoty po zł. 19 gr. 20. Dług ten ma być spłacony złotem. Ileż potrzeba dukatów na zaspokojenie długu, jeżeli dukat będzie rachowany po zł. 18, gr. 24?

XIII. Kupiono: 1) pewnego towaru cetn. 4, kam. 3, funt. 12; płacąc funt po zł. 15, gr. 14. Sprzedano funt po zł. 6, gr. 8. Czy zyskano na téj sprzedaży i ile? 2) 42 kam. konopi płacąc kamień duk. 5, zł. 14, gr. 18, z tego wyrobiono 3 liny, każdą przedano po duk. 72, zł. 15, gr. 27. Czyli zyskano lub stracono, i ile?

XIV. Pewny kupiec zamienia: 1) 37 łokci sukna, którego łokieć zł. 16, gr. 25 kosztuje, za 28 łokci innego sukna, którego łokieć 1 duk. 3 zł. 16 gr. kosztuje; ileż zyskał lub stracił na téj zamianie? 2) $27\frac{1}{2}$ łokci sukna za łokci $18\frac{2}{3}$ innego sukna; na ileż mu łokieć tego drugiego sukna wypadnie, kiedy łokieć pierwszego kosztował duk. 1, zł. 5, gr. 24? 3) ileż łokci sukna, którego łokieć 15 zł. kosztuje, w zamian wypada za $25\frac{1}{2}$ łokci innego sukna, którego łokieć duk. 1, zł. 12, gr. 12 kosztuje?

XV. 1) Wysłał ktoś dwóch służących w drogę, z któréj za 9 dni powrócić mają. Wysłani zaś zostali bryczką 4ma końmi. Ileż im dać potrzeba było pieniędzy na koszta podróży, żeby każdemu koniowi dawano 4 gar. owsa na dzień po 6 gr. garniec, 12 funtów siana po 2 gr. funt, żeby opłacić oberżystę po 2 zł. za nocleg i po 3 gr. co noc od jednego konia, służącym zaś strawnego po złotemu i gr. 6 na dzień?

2) Gdyby Pan na wszelki przypadek, chciał służącym przydać zł. 24, ileż potrzebowałby im dać na całą drogę?

XVI. Wiedząc, że gołąb' ubiega w przeciągu 3 dni, mil 500; a koń najszybszy 60 stóp na sekundę; jakżeby prędzéj doszła wiadomość do Petersburga z Warszawy, czy wysławszy jezdźca z oznaczoną szybkością, czy też gołębia? i w jakim czasie przez pierwszego, a w jakim przez drugiego?

XVII. 124 franki ile uczynią: 1) złotych pol.? 2) rubli srebrem? 3) rubli assygnacyjnych? 4) dukatów? licząc frank po zł. 1, gr. 18.

XVIII. 1) 348 duk. ile czynią imperyjałów, rachując dukat zł. 19, gr. 8, a imperyjał po zł. 34, gr. 3? 2) 30 funtów szterlingów, ile uczynią frydrychsdorów, licząc funt szterling po zł. 38, gr. 20, a frydrychsdor po zł. 32, gr. $22\frac{1}{2}$?

XIX. Znajduje się 2 gatunki pszenicy: lepszéj kor. 12. którą płacono po duk. 2, zł. 5, gr. 16; drugiego gatunku kor. 15, którą płacono po duk. 1, zł. 15, gr, 12. Zmięszano te dwa gatunki i przedawano korzec po duk. 2, zł. 10, gr. 12. Czy zyskano? lub stracono i ile?

XX. Kupiono 12 wołów po duk 11, zł. 15, gr. 23. Podatku od każdego wołu zapłacono duk. 1, zł. 10, gr. 18. Sprzedawano mięso ogółem do traktyjerni, biorąc za cetn. duk. 6, zł. 7, gr. 16. Było zaś cetnarów 36. Ileż na tych wołach zyskano, lub stracono?

XXI. Pewien zakupił 18 sztuk drzewa, płacąc sztukę po duk. 2, zł. 3, gr. 10. Z każdéj sztuki, wyłączając gałęzie, miał kloców 4, przedawał kloc po talarze 1, zł. 2, gr. 4. Gałęzie spalone z zakupionego drzewa, wydały węgli korcy 53, ćw. 3. Przedał korzec po zł. 3, gr. 24. Czy zyskał lub stracił, i ile?

XXII. Pewna osoba kupiła wina beczek 42, płacąc jednę po duk. 9, zł. 17, gr. 12. Z tego przedała beczek 22, jednę beczkę po duk. 15 zł. 13. gr. 9; resztę zaś sprzedała po duk. 18, zł. 3, gr, 4. Czy zyskała, lub straciła, i ile?

XXIII. Jest dwojakie wino: pierwszego gar. 12, po duk. 2, zł. 7, gr. 15; drugiego gar. 9, po duk. 1, zł. 16, gr. 24. Kupiec mięsza te gatunki. Po jakiéj cenie ma sprzedawać aby nie stracił?

XXIV. Zakupiono dwojakiego gatunku pszenicy: pierwszego korcy 16, ćw. 2, gar. 5, za które zapłacono duk. 20, zł. 8, gr. 15; drugiego gatunku kor. 9, ćw. 2, gar. 7, za które zapłacono duk 12, zł. 6, gr. 20. Zmięszawszy, po ile mają sprzedawać korzec, aby zyskać na wszystkiém rubli 8, kopiejek 12?

XXV. Zakupiono postawów sukna 183, w każdym znajduje się łok. 32. Płacono łokieć po duk. 1, zł. 5, gr. 16. Po jakiéj cenie mają sprzedawać łokieć, aby zarobić na każdym postawie duk. 8, zł. 12, gr. 20?

XXVI. Kupiec mający 1) 65 bel papieru, sprzedał raz: 3 bele, 8 ryz i 16 liber; drugi raz 6 bel, 6 ryz, 6 liber; trzeci raz 8 bel, 5 liber; czwarty raz 3 libry i 13 arkuszy; zepsuło się raz 4 libry i 18 arkuszy; ileż sprzedał, a ile ma jeszcze do sprzedania? 2) 22 berkowców kawy; sprzedał raz 7 pudów i 25 fun.; drugi raz 8 pudów i 30 fun.; trzeci raz 9 pudów i 18 fun.; czwarty raz 8 pudów i 35 fun. Pytanie toż samo co wyżéj.

XXVII. Rzeźnik zakupił wołów 9, płacąc sztukę po duk. 12, zł. 4, gr. 18. Podatku od każdego wołu opłacił duk. 1, zł. 10, gr. 6. Za każdą skórę bierze duk. 1, zł. 8, gr. 20. Za głowę, nogi i inne części, które się całkowicie sprzedają, ma z każdego wołu duk. 1, zł. 3, gr. 12. Z każdego wołu średnio biorąc było mięsa cetn. 5, kam. 2, funt. 8. Po czemu sprzedawać ma funt mięsa aby na każdym wole miał zysku duk. 1, zł. 5, gr. 16?

XXVIII. Mydlarz zakupił łoju kam. 5, fun. 8. Po przetopieniu ubyło kam. 1, fun. 16. Płacił kam. po duk. 1, zł. 2, gr. 3. Wyrobił z tego świéc kam. 4, fun. 5. Po ile ma sprzedawać kamień świéc, aby zyskał na każdym kam. zł. 4, gr. 10.

XXIX. Przysłano kupcowi cukru cetn. 4, kam. 2, fun 14, rachując kam. po duk. 2, zł. 14, gr. 20. Kupiec w zamian odsyła wino, licząc garniec po duk. 1, zł. 5, gr. 8. Ileż ma posłać wina, jeżeli odtrąci sobie za transport cukru duk. 6, zł. 3, gr. 10?

XXX. Wełny cetnarów 8, kamieni 3, kupiono płacąc cetnar po duk. 16, zł. 8, gr. 20; drugiego gatunku cet. 3, kam. 2, płacąc cetn. po duk. 10, zł. 6, gr. 12. Z tego zrobiono sukna 138 łok. ćw. 2. Po ile mają sprzedawać łokieć aby zyskać duk. 6. zł. 11, gr. 15?

XXXI. Kupiono pszenicy kor. 9, ćw. 2, gar. 6. płacąc korzec po duk. 1, zł. 5, gr. 20; żyta kor. 7, ćw. 3, gar. 4, korzec po tal. 2, zł. 3, gr. 18. Zboże to wyrobiono na wódkę, któréj było garcy 112, kwart 2, kwat. 3. Po ile trzeba sprzedawać garniec wódki, aby na wydanéj kwocie zyskać duk. 5, zł. 8, gr. 24?

XXXII. Fabrykant wystawił powozów 16, na które wydał gotowych pieniędzy duk. 194, zł. 8, gr. 24; przytém utrzymywał 9 czeladników płacąc każdemu na miesiąc duk. 4, zł. 5, gr. 15, przez lat 2, miesięcy 3. Po ile ma sprzedawać powóz aby na każdym zyskał duk. 14 i zł. 8?

XXXIII. Znajduje się dwojakiego gatunku srebro: jednego grzywien 3, uncyja 1, łut 1, drachm 3, rachując grzywnę po duk. 4, zł. 5, gr. 20; drugiego gatunku grzywien 2, uncyja 1, łut. 1, rachując grzywnę po duk. 3, zł. 12, gr. 18. Po zmięszaniu obu gatunków jaka jest cena jednéj grzywny?

XXXIV. Za spirytusu gar. 64, kwart 2, kwat. 3, zapłacono duk. 31, zł. 8, gr. 25. Przymięszano do tego wody gar. 8, kwartę 1, kwat. 2. Po jakiéj cenie trzeba sprzedawać garniec wódki, aby nie stracić, wiedząc jeszcze iż po dobraniu wódki ubyło 3 kwaterek?

XXXV. Kupcowi przysłano dwa gatunki wina; jednego gar. 124. kwart 2, rachując garniec po duk. 2, zł. 4, gr. 6; drugiego gatunku gar. 140, kw. 3, licząc garniec po duk. 1, zł. 10, gr. 15. Od każdego garca opłacił cła zł. 7, gr. 24. Transport kosztował go duk. 8, zł. 6, gr. 12. Usługę i utrzymanie wina rachuje sobie duk. 3, zł. 2, gr. 5. Pierwszego gatunku przy zlewaniu w butelki ubyło gar. 2, kwart 3, kwater 1; drugiego gar. 3, kwar. 1. Po czemu ma sprzedawać garniec każdego w szczególności gatunku, aby nie stracił?

XXXVI. Szynkarz ma wódkę dwojakiego gatunku: jednéj gar. 16, kwart 3, kwat. 1, za którą zapłacił duk. 2, zł. 16, gr. 24; drugiéj gar. 26, kwarta 1, kwat. 3, za którą zapłacił duk. 5, zł. 8. gr. 20. Miesza oba gatunki i dolewa wody gar. 2, kwart 3. Po czém wyschło mu gar. 2, kwart 2, kwat. 3. Po czemu ma sprzedawać garniec, aby zyskał na wszystkiém duk. 1, zł. 5, gr. 12?

XXXVII. Pewne pole jest 250 sążni 2 łokcie długie, a 150 sążni, 1 łokieć szerokie. Wiedząc że konie przy zwyczajnym chodzie w pługu uchodzą 4000 sążni na 2 godziny i 30 minut; że w czasie każdego zawracania moźnaby 6 sążni daléj zorać; znaleźć: 1) wiele będzie skib kiedy się pole orze wzdłuż; i kiedy skiba jest 6 cali szeroka; 2) w jakim czasie pole będzie zorane? 3) ile czasu zabierze zawracanie? nakoniec jak długo oraćby trzeba, gdyby się pole miało orać wszerz?

XXXVIII. Drzewo jarząb wydaje rocznie 12 fun. jagód; z 6 fun. jagód otrzymuje się 1 gar. i kwaterka wódki. Jeżeli trakt 14 mil długi po obu stronach osadzony będzie drzewem takiém, w ten sposób, że drzewo od drzewa odległe będzie na 4 sążnie i łok. 2; wiele się z jagód wszystkich tych drzew, które się znajdują przy trakcie, otrzyma wódki? wiele się oszczędzi żyta którego się zwykle na wódkę używa, kiedy korzec wydaje 20 garcy, i kwartę 1 wódki? Mila zaś zawiéra 4938 sążni, łok. 2.

XXXIX. Świéca których 12 idzie na 1 funt, pali się 3 godziny, 20 minut, druga których tylko idzie na 1 funt 8, pali się 5 godzin, minut 15; pierwszych kosztuje funt zł. 1, gr. 4; drugich zaś zł. 1, gr. 5. Przypuściwszy że co dzień przez 6 miesięcy, tygodni 3, wypada palić świécę 6 godzin; ileż się wyda w tym przeciągu na świéce, ile się oszczędzi używając jednego z dwóch gatunków i którego?

XL. Pole mające powierzchni 800 sążni kwadr. wydaje żyta kóp 2, mendli 2. Z mendla żyta otrzymuje się ziarna $\frac{3}{4}$ korca. Korzec jest na 12 zł. gr. 15. Ktoś dzierżawi na 3 lata 10 takich pól, a za każde płaci 60 zł. rocznie. W pierwszym roku uprawia je żytem, w drugim owsem, a w trzecim zostawia je odłogiem. Do wysiewu potrzebuje 9 korcy żyta a 12 korcy owsa. Owies wraca się w dziesięcioro, a korzec przedaje się po 4 zł. i gr. 15. Podatek rocznie zł. 20, gr. 15; danina pańska wynosi $3\frac{1}{2}$ korca żyta i $3\frac{1}{2}$ korca owsa. Koszta na uprawę przez 2 lata wynoszą 400 zł. Zbiór przez 2 lata kosztuje 180 zł. Młócenie opłaca się 12tym korcem. Ileż zarobiono lub stracono na téj dzierżawie?

ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ W CIĄGU DZIEŁA PODAWANYCH.

Stron. 14 n° 34.

I. 1sze 3 001 007. 2e 4 000 513 009 043. łok.
3e 5 000 024 000, 0403. 4e 46, 534.

II. 1) Bilijon, siedmdziesiąt dziewięć milijonów, ośmdziesiąt ośm tysięcy, dwieście dziewiętnaście.

2) Czterdzieści dziewięć tysięcy siedmset trzy całkowitych, trzysta czterdzieści dziewięć stotysiącznych

3) Dziewięćdziesiąt tysięcy pięćdziesiąt sześć łok. siedmset trzydzieści ośm tysiącznych łokcia.

4) Czterykroć stotysięcy siedmset trzy sążnie, dziewięć tysięcy trzysta czterdzieści dziewięć dziesięciotysiącznych sążnia.

III. 1) MDCLVI. 2) DCCLIII. 3) MCCCCXCII. 4) MDCLXXII. 5) MDCCXXV.

IV. 1) Dziewięćset sześćdziesiąt pięć. 2) Tysiąc siedmset trzy. 3) Tysiąc ośmset piętnaście. 4) Tysiąc ośmset dwadzieścia pięć.

V. Wyrażenie liczby dziesięć: 1) w arytmetyce dwójnéj w któréj używałoby się tylko dwóch charakterów: 0 i 1, jest: 1010; tu bowiem liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, oznaczałyby się w tym sposobie 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

2) W arytmetyce czwórnéj w któréj używałoby się czterech znaków t. j. 0, 1, 2, 3, jest 22; tu bowiem pierwsze dziesięć liczb oznaczyłyby się tak: 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22.

3) W arytmetyce ośmiennéj w któréj moglibyśmy używać siedmiu pierwszych znaków naszéj arytmetyki i zera, jest 12; w téj bowiem pierwsze dziesięć liczb oznaczyłyby się tak: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12

4) W arytmetyce dwunastnéj możnaby używać naszych cyfer dla oznaczenia liczb aż do dziewięciu; lecz potrzebaby się było umówić o dwa nowe znaki pojedyncze dla wyrażenia dziesięciu i jedenastu. *Ob.* przypisek na str. 15, i zagadnienia na str. 120, nº XXVI.

Stron. 22, nº 50.

I. Summy szukane są: 1) 146 490; 2) 709 235.

II. Wydano razem zł. 11 322.

III. Odpowiedź jest: 5841 lat.

IV. Odp. 3042 lat.

V. 4 388 928.

VI. Obszerność jest 3206 mil kwadratowych, ludność zaś 6 199 100.

VII. 1) 114 752,7354. 2) 7346,98463.

VIII. 41100.

IX. 1725 r.

X. Drugi dostał 4898 rubli, trzeci 9310; wszystkich zaś pieniędzy było 18593 rubli.

XI. 2272, 10 mil kwadr.

XII. 3 685 766, 6844 sąż.

Stron. 32 n° 66.

I. Różnica szukana jest: 1) 18 119; 2) 9 010 001; 3) 7636.

II. 1) trzydzieści razy z resztą 233; 2) zupełnie razy 4.

III. 453 996.

IV. Ludności więcéj 112275; domów zaś 490 więcéj.

V. 5411 stóp.

VI. Proch wynaleziony przed sztuką drukarską na lat 110. Od wynalazku pierwszego upłynęło lat 511, a od drugiego 401.

VII. Do roku teraźniejszego upłynęło lat 591, od czasu odkrycia soli w Bochni, a 590 od czasu odkrycia w Wieliczce.

VIII. Odp. 468 691 mil kwadr.

IX. Powiększenie ludności w pierwszych trzech latach było 222 018, a w drugich trzech 209 792; razem więc w sześciu latach 431 810.

X. Gub. Wiatska jest rozleglejsza od Symbirskiéj o 878 mil kwadr. a ludniejsza o 928190 dusz; Symbirska od Kazańskiéj rozleglejsza o 358 mil kwadr. a mniéj ludna o 8000 dusz. Wiatska rozleglejsza od Kazańskiéj o 1236 mil kwadr. a ludniejsza o 920 190 dusz.

XI. Odp. 599 262 mil jeograficznych.

XII. Powierzchnia ziemi od powierzchni xiężyca większą jest mil kwadratowych 8 610 857; a mniejsza od powierzchni słońca mil kwadr. 10 931 644 272.

XIII. 1) 3206, 765; 2) 8, 252; 3) 55, 172.

XIV. Funt Polski mniejszy jest od funta rossyjskiego o 3665,73 miligramów.

XV. Dany majątek nie wystarcza zadłużonéj osobie na zaspokojenie długu, owszem nie dostaje jéj 1892 zł.

XVI. Pierwsza liczba $=21240-18200=3040$.
Trzecia $=21240-15000=6240$.
Druga więc $=21240-(3040+6240)=21240-9280=11960$.

XVII. 12695.

XVIII. 1) Wziąwszy jakąkolwiek liczbę mniejszą od 1200, druga będzie = różnicy między 1200 i tamtą. Zagadnienie to, i temu podobne, w których może być wiele, lub nieskończona liczba odpowiedzi czyniących zadosyć danym warunkom, zowią się *nieoznaczone*. 2) Podobnież i to zagadnienie jest nieoznaczone.

Stron. 44 nº 83.

I. Iloczyny szukane są: 1) 6 923 432; 2) $56789\times56789=3\,224\,990\,521$; 3) 36 854 721 914 481.

II. Odpowiedź, zł. 48 830.

III. Gdy jeden czerw. zł. waży złotych 18 więc 5250 czerw. zł. ważą 5250 razy więcéj niż 18 zł. to jest 94500 zł.

IV. Może ciągnąć funtów 208 104.

V. 1) 123 240 stóp paryzkich. 2) 3 697 200 st. par.

VI. Odpowiedź 8760 godzin.

VII. Szukam naprzód ile godzin w roku, rozmnożywszy 24×365 znajduję iż 8760, dodając do tego iloczynu godzin 5, znajduję że w roku astronomicznym jest 8765 g. 48', 49". Zamieniam teraz godziny na minuty dodając do iloczynu znalezionego 48'; następnie zamieniam minuty na sekundy dodając 49"; i znajduję iż w roku astronomicznym jest 31 556 929 sekund, a zatém w 10 takich latach 315 569 290 sekund. Zagadnienie to ściśle biorąc, powinnoby należyć do liczb wielorakich.

VIII. Odp. 175 260 zł.

IX. Odp. 6755 funtów.

X. Użnie kóp 196, a mieć będzie korcy 588.

XI. Odp. 1) 12 960 zł. 2) 17 712 zł. 3) 83 160 gr.

XII. Ponieważ każda kostka będąc sześcienna odpowiadać może każdą ścianą sześciu ścianom drugiéj, więc rzucając dwie kostki, liczba rzutów odmiennych jest $6 \times 6 = 36$, a na 3 kostki taż liczba jest $6 \times 6 \times 6 = 216$; a zatém na 6 kostek liczba odmiennych rzutów jest $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 46\,656$.

XIII. Na 12 milach jest poręb 1440, sosien 514 080, z tych można otrzymać klocków 6 168 960, a łupek czyli szczap 92 534 400.

XIV. 1) 26 690,16; 2) 16 679,52; 3) 8 187,5354; 4) mnożna pomnożona przez 1000 = 723 287,9; pomnożyć ją więc trzeba przez 47, co uczyni 33 994 531,3; 5) 0,0001248.

XV. Odp. zł. 16 886,84.

XVI. 1) 53836,8; 2) 14524,8.
XVII. 64125 zł.
XVIII. Iloczyn powiększy się 45 razy.
XIX. 708 588.
XX. Zadanie jest nieokreślone. Jakąkolwiek liczbę można wziąć za pierwszą, i podług tego wzięcia znaleźć drugą i trzecią.

Stron. 63 nº 119.

I. Ilorazy szukane są: 1) 32764; 2) 30115; 3) 36; 4) 1402.
II. 1) 123456789 podzielone przez 7 daje na iloraz 17636684 z resztą 1; iloraz ten podzieliwszy przez 7 otrzymamy 2519526 z resztą 2; następnie 359932, z resztą 2; 51418 z resztą 6; 7345 z resztą 3; 1049 z resztą 2; 148 z resztą 6; 21 z resztą 2.
2) 123456789 podzielone przez 8 daje na iloraz: 15432098 z resztą 5; następnie 1929012 z resztą 2; 241126 z resztą 4; 30140 z resztą 6; 3767 z resztą 4; 470 z resztą 7; 58 z resztą 6; 7 z resztą 2.
3) 123456789 podzielone przez 9 daje na iloraz: 13717421 z resztą 0; następnie 1524160 z resztą 3; 169351 z resztą 1; 18816 z resztą 7; 2090 z resztą 6; 232 z resztą 2; 25 z resztą 7.
III. 1) zł. 19502 i gr. 8; tal. 3250, zł. 2, gr. 8, duk. 1083, tal. 1, zł. 2, gr. 8.
2) połtynników 25628 i kop. 22; rubli 6407 i kop. 22; imperyjałów dawnych 640, rubli 7, kop. 22; imperyjałów nowych 1281, rub. 2, kop. 22.
IV. 1) 61035 łok. 2) 20345 sąż. 3) 40 werszt z resztą 345 sąż. 4) 5 mil z resztą 5 werszt i 345 sąż.
V. Po zł. 14 korzec.
VI. $5\frac{180}{195}$, to jest po zł. 5 i gr. $27\frac{9}{13}$.

VII. 1) 2226 kam. z resztą 18 funt. 2) 556 cetn. z resztą 2 kam. 18 funt. 3) 1391 pud. z resztą 28 fun. 4) 139 berkowców z resztą 1 pud, 28 funtów.

VIII. 1) $36\frac{2}{8}$ łok. 2) obróciwszy 250 rubli na połtynniki, co uczyni 1000 połtyn; dzielę 1000 przez 11, iloraz $90\frac{10}{11}$ okaże liczbę łokci szukaną, t. j. prawie 91 łok.

IX. 1) $12\frac{3}{4}$ dni, t. j. 12 dni, 18 godz.
2) $12\frac{5}{8}$ dni, t. j. 12 dni i 15 godz.

X. Odp. po 1932 ludzi, pomijając resztę z dzielenia pozostającą.

XI. Przeszło 19 lat, i to nawet rachując dzień i noc, a jeszcze trzebaby wymawiać coraz większe liczby równie prędko jak mniejsze. Wiedząc bowiem ile się rachuje na minutę, łatwo dojdziemy ile na godzinę, rok, i t. d.

XII. 1) dopisawszy dwa zera w dzielnéj (n° 115) znajdę iloraz 78 z resztą 490, a posuwając daléj dzielenie podług (n° 117) będę miał iloraz 78,6577; 2) 0,0542; 3) 342; 4) 0,0046; 5) 0,076712.

XIII. Bardzo łatwo, bo nie masz warunku żeby czynniki były równe, albo stopniowo większe lub mniejsze, lecz jakiekolwiek.

XIV. 1) 134765 korcy; 2) zamieniwszy ruble na połtynniki; których będzie 3360, i podzieliwszy teraz przez 14,3 znajdę iloraz 234965 korcy czyli blisko 235 kor.

XV. 1) 15,59 dni; 2) 7,411 dni.

XVI. Słońce jest większe od Jowisza 982,36 razy, od Saturna 1405,825 razy, od Urana 17445,78... razy.

XVII. Wszystkie dzielniki liczby 360 napisane każdy po razu są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360;

Dzielniki liczby 480 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, 48, 60, 80, 96, 120, 160, 240, 480;

Dzielniki zaś liczby 1080 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 36, 40, 45, 54, 60, 72, 90, 108, 120, 135, 180, 216, 270, 360, 540 i 1080.

XVIII. $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 . 3\times3 . 5$ czyli $128\times9\times5 = 5760$.

Stron. 65. n⁰ 120.

I. Odpowiedź: 100 264.

II. 1) 57 643; 2) 509; 3) 98356; 4) gr. 135 730; zł. 4524 z resztą gr. 10; tal. 754 z resztą gr. 10.

III. Mieć będzie gdy wygra 4947 zł., a gdy przegra 4247.

IV. Drugi dłużnik winien był 7532 zł. a upłaciwszy 1590 pozostaje winien zł. 5942.

V. 1) 1744; 2) 103; 3) 378525; 4) 362; 5) 108.

VI. 1) powiększymy jeszcze 3 razy; 2) zmniejszymy 225 razy.

VII. 1) Zmniejszy się jeszcze 4 razy; 2) nic zmieni się; 3) zmniejszy się 608 razy.

VIII. 1) 202 395; 2) 12830.

IX. 638 rubli.

X. Dodawszy kwoty we 3 handle włożone i zyski na dwóch handlach zarobione, uczyni razem 42526*zł.* odjąwszy zaś od téj summy stratę na trzecim handlu i wydatek osobny, co uczyni razem 580*zł.*, zostaje 41946*zł.* majątek szukany.

XI. 64*łok.* sukna po 15*zł.* kosztowały 960*zł.*; 64*łok.*— 6 czyli 58*łok.* po 19*zł.* czynią 1102*zł.* kwota więc zebrana jest większą od wydanéj, tę więc odjąwszy od tamtéj zostaje 142*zł.* zysku.

XII. W 1 worku było 19710 zł. a w 2gim 1296 zł.

XIII. Zyskam na beczcę zł. 8, gr. 8.

XIV. Kupiec B wybrał więcéj od kupca A towarów za zł. 411; gdyż A wziął 252+225+611+304 czyli 1392 zł. Kupiec zaś B. wziął 504+288+756+255 czyli 1803 zł.

XV. Dostanie 1102 kamieni z resztą $\frac{28}{52}$, ta reszta jest ilorazem oznaczającym części kamienia. W nauce o ułomkach, a daléj o liczbach wielorakich, obaczymy jak dochodzić wartości tych części.

XVI. $95 \times 36 = 3420$; $76 \times 28 = 2128$. Razem więc kosztuje pszenica zł. 5548. A że przedający ma zyskać zł. 120, więc ją powinien sprzedać za zł. 5548+120 czyli za 5668. Że zaś wszystkiego ma kor. 95+76 czyli 171; powinien przedawać korzec po $\frac{5668}{171}$ czyli po zł. $33\frac{25}{171}$.

XVII. Grzywien 50×64 zł. $= 3200$; grzyw. 45×50 zł. $=$ 2250. Razem jest grzywien 50+45 czyli 95, a ich spólna wartość 3200+2250 zł. czyli 5450 zł. Po stopieniu więc wartość grzywny będzie $\frac{5450}{95}$ zł. czyli $57\frac{15}{95}$ zł.

XVIII.

Pszenicy kor. 174	po zł. 35	kosztuje zł. 6090
żyta — 68	— 19	— 1292
grochu — 130	— 29	— 3770

jest wszystkiego korcy 372, a każdego korca przewiezienie kosztuje zł. 8; transport więc wszystkich razem wynosi 2976 zł. Zboże i transport kosztuje zatém 14128 zł. Tyle więc powinienby kupiec zapłacić: lecz że pożyczył sprzedającemu 4295 zł. zapłaci więc tylko 14 128 — 4295 czyli 9833 zł.

XIX. Spirytus kosztuje zł. 2808. Trzecia część 468 jest 156. Dolano więc wody 156 garcy do spirytusu; było zatém wódki 624 garcy. A że jéj ubyło gar. 2, pozostało więc 622 gar. które kosztują 2808 zł. Tę summę nie tylko ma odebrać sprzedający, ale nadto opłaciwszy od każdego garca 24 gr. na każdym garcu zyskać 20 gr. Dowiemy się ile opłata i zysk wynosić będzie, biorąc iloczyn 622×24 gr. $=$ 497 zł. 18 gr., tudzież 622×20 gr. $=$ 414 zł., 20 gr. Sprzedający powinien wszystkie wymienione summy, t. j. 2808 zł. za spirytus wydane, 497 zł. 18 gr. konsumpcyi opłacone, i 414 zł. 20 gr. zamierzonego zysku, czyli razem 3720 zł. 8 gr. za wódkę zebrać; jeżeli swemu żądaniu chce zadosyć uczynić. Należy więc summę zł. 3720 (opuściwszy grosze), podzielić przez ilość gar. wódki 622, a wypadły iloraz zł. $5\frac{610}{622}$ skaże, po czemu garniec wódki ma być sprzedawany.

XX. Garniec mąki wydaje 9 bułek po 3 gr. czyli przynosi 27 gr. Korzec zatém wyda 32 razy więcéj bułek i tyleż razy więcéj przyniesie pieniędzy, t. j. 764 gr. czyli zł. 25, gr. 14; a 6 korcy mąki, 6 razy większą ilość bułek i tyleż razy większą kwotę pieniężną od ostatniéj czyli 152 zł. 24 gr.

XXI. Samo drzewo kosztuje $4958 \times 26 = 128\,908$ zł.
rąbanie . . . . . . $4958 \times 16 = 79328$ zł.
zwózka sążni . . . $14878 \times 12 = 178\,536$ zł.
Nadto sprzedający zyskał 28375 zł., wziął więc za sążnie 406247 zł. Sprzedał więc sążeń po zł. $27\frac{4541}{14878}$.

XXII. Jęczmień kosztował zł. 13006, chmiel 1222, piwowar zł. 2787, drzewo 1365. Razem więc koszt piwa był zł. 18380. Sprzedający ma zyskać na każdym korcu jęczmienia zł. 1, czyli razem 929 zł. powinien więc zebrać za sprzedane piwo 19309 zł., a że miał piwa beczek 838; powinien więc sprzedawać beczkę po zł. $\frac{19309}{838}$ czyli po zł. $23\frac{35}{838}$.

XXIII. Gdy człowiek oddycha przez minutę 20 razy, a w godzinie jest 60 minut, przeto rozmnożywszy 20 przez 60, będzie 1200 liczba oddychań w godzinie; a że za każdém odetchnieniem bierze 40 cali sześciennych powietrza, zatém oddychając 1200 razy, weźmie w siebie powietrza 48000 cali sześcien. gdy zaś 136ta część powietrza w płuca wciągnionego w nas zostaje, podzieliwszy więc 48000 c. sześcien. przez 136, będzie iloraz $352\frac{128}{136}$ liczbą cali sześcien. pozostałych w płucach.

XXIV. Gdy ludność prowincyi powiększyła się o ósmą część dawniejszéj swojéj liczby, więc teraz zawiera dziewięć ósmych części tejże liczby dawniejszéj. Podzieliwszy zatém 644 840 przez 9, wypada na iloraz 71647 (pomijając resztę), przybyłe powiększenie ludności w ostatnich 15 latach, a odjąwszy to powiększenie od teraźniejszéj ludności, zostaje 573 193, liczba ludności przed 15 laty.

XXV. 1) 300 000 cetn. 2) sile 40 koni.

XXVI. 1) Trzeba pomnożyć cyfrę na drugiém miejscu po lewéj stronie t. j. 3 przez 8; cyfrę na 3ciém miejscu t. j. 4 przez 8 razy 8 czyli 64; cyfrę na 4tém miejscu t. j. 7 przez 8 razy 8×8 czyli 512, a cyfrę na 5tém miejscu t. j. 5 przez $8\times8\times8\times8$ czyli 4096; będzie więc $5\times4096+7\times512+4\times64+3\times8+6=24350$.

2) Podzieliwszy liczbę daną przez 8, reszta pozostająca 6, będzie pierwszą cyfrą po prawéj ręce, a iloraz 3043 będzie ważnością następnych cyfer; podzieliwszy znowu 3043 przez 8, reszta pozostająca 3, będzie drugą cyfrą, a iloraz 380 ważnością innych cyfer; podzieliwszy go znowu przez 8, znajdziemy na trzecią cyfrę 4, a iloraz 47 ważnością innych cyfer; podzieliwszy go jeszcze przez 8, znajdziemy na czwartą cyfrę 7, a na piątą iloraz 5, na którym jako mniejszym od 8 kończy się działanie.

3) Podobnym sposobem znajdziemy: trzynaście tysięcy czterysta dziewięćdziesiąt dwa; i wzajemnie 4) 7984.

5) milijon sto dziewięćdziesiąt cztery tysiące, pięćset trzydzieści trzy; i 6) 497 345.

XXVII. 1) Wypada naprzód znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Trzeba więc dodać liczbę korcy uprzedanych już we trzech razach, i summę tych korcy która jest 681 odjąć od liczby wszystkich korcy, które się w śpichrzu znajdowały; reszta 159 jest liczbą korcy na ostatku przedanych. To mając, obrachowywam, ile zebrano za korce w 4ch razach przedane, i tym końcem mnożę ceny właściwe przez liczbę korcy za każdym razem przedanych, a dodawszy iloczyny w jednę summę, znajdę 15 506 zł. 2) 2066 jest zyskiem szukanym.

XXVIII. Pokażemy tu tylko drogę do rozwiązania, nadmieniając, iż rozwiązywanie podobnych i zawikłańszych zagadnień powinni uczący się okazywać poprzedniczo na tablicy w ten sposób:

kupione		*przedane*	
kor.	zł.	kor.	zł.
286×17 zł. = p		152×20 = p.	
436×16 = p		528×19 = p.	
S. kor. kupion.	ś. zł. wydane.	s. kor. uprzed.	
s. kor. uprzed.		R. ×21 = p.	
R. reszta korcy	s'' zł. zebran.		s'' zł. zeb.
	ś zł. wydan.		
	R' zł. czyli zysk,		

od czego jeszcze, gdyby były jakie koszta przewozu, i t. d. odjęlibyśmy.

Zastanowiwszy się nad zagadnieniem i objąwszy wszystkie jego warunki czyli jak zowią *stan zadania*, uważam, iż tu naprzód dla uproszczenia zagadnienia wypada znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Dodaję więc korce kupione w summę którą oznaczam przez S, dodaję i korce uprzedane w summę s, i tę summę odejmuję od tamtéj, reszta którą oznaczam przez R, okazuje mi liczbę kor. które przedano na ostatku. To mając, obrachowywam ile wydano za 1sze i 2gie korce kupione, mnożąc ceny właściwe przez liczbę kor. i zbierając iloczyny oznaczone przez p, p, w jednę summę ś, która mi okazuje liczbę zł. wydanych za zboże. Obrachowywam teraz podobnie ile zebrano za kor. przedane, a odjąwszy ś summę pieniędzy wydanych, od s'' summy pieniędzy zebranych, znajduję zysk.

XXIX. Podzieliwszy 5248*cet.* przez 8*cet.* iloraz 656 pokaże liczbę wozów, ta rozmnożona przez 2, pokaże 1312 liczbę koni potrzebnych. Że zaś od każdego konia płacą po zł. 3, więc 3*zł.* wzięte razy 1312 pokażą 3936*zł.* które od wszystkich koni zapłacić trzeba.

2) 4734 zł.

XXX. 1) 36900 zł.

2) Za przybyciem tych warunków, trzeba od znalezionéj liczby mundurów odjąć 250, a od obrachowanego na resztę mundurów sukna odjąć 360*łok.* znajdujących się w magazynie. Obrachowawszy już koszt na potrzebne jeszcze sukno, i na robotę sprawić się mających mundurów, dodać iloczyny szczególne w jednę summę, która będzie 23410 zł.

XXXI. Dział 1go t. j. najstarszego był $360 \times 5 + 86 = 1886$

3go tyleż t. j. . . . . . $360 \times 5 + 86 = 1886$

5go co 1mu i 3mu . $(360 \times 5 + 86) \times 2 = 3772$

6go . . . . . . $(360 \times 5 + 86) \times 2 + 60 = 3832$

2go . . . $(360 \times 5 + 86) \times 3 + 60 + 50 = 5768$

4go . $(360 \times 5 + 86) \times 4 + 60 + 50 + 359 = 8013$

Majątek zatém pozostały po ojcu wynosił zł. 25 157.

XXXII. Merkuryusz jest bliżéj słońca o

. . . .	21 — 8 = 13	milion. mil jeogr. czyli	2,625	razy niż ziemia
Venus	21 — 15 = 6		1,400	
Mars daléj o .	32 — 21 = 11		1,522	
Jowisz	108 — 21 = 87		5,142	
Saturn	199 — 21 = 178		9,476	
Uranus . . .	398 — 21 = 377		18,952	

XXXIII. Ponieważ funt ma 405 504 miligramów, więc podzieliwszy przez nie liczbę daną, iloraz 610, pokaże liczbę stóp wysokości Wezuwijusza; a drugi iloraz 5, pokaże liczbę ćwierci mil o jakie ta góra odległą jest od Neapolu.

Stron. 86. n° 143.

I. 1) Złoty jest 18tą częścią czerw. zł. Biorąc więc 18 za mianownik, będziemy mieli ułomki: $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$, $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$, $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$, i t. d... $\frac{17}{18}$; odpowiadające 1, 2, 3, 4 .... 17 złotym.

2) $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, i t. d. $\frac{99}{100}$ rubla.

3) $\frac{1}{24}$, $\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$, $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$, $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$..... $\frac{23}{24}$ łokcia.

4) $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ i t. d. arszyna, $\frac{16}{16}$ werszków jest arszyn.

5) $\frac{1}{32}$, $\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$, $\frac{3}{32}$, $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, i t. d. $\frac{31}{32}$ fun.

6) $\frac{1}{40}$, $\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$, i t. d. $\frac{39}{40}$ puda.

7) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ garca.

8) Podobnie jak pod liczbą 6.

II. 1) Piąta część z 842 jest $\frac{842}{5}$, a zatém $\frac{3}{5}$ będą równe $\frac{842}{5}\times 3=\frac{2526}{5}=505\frac{1}{5}$.

2) Podobnież znajdziemy 615. Lecz $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ więc można prosto wziąć $\frac{1}{4}$ z 2460.

III. 1) Trzebaby pomnożyć licznik przez 12 (n° 130), ale jest lepiéj podzielić mianownik przez 12 gdyż jest podzielny, co zaraz daje prostsze wyrażenie zmieniając ułomek na $\frac{117}{27}$.

2) Możnaby rozmnożyć mianownik przez 16, a lepiéj podzielić licznik przez 16 gdy jest podzielny. Tym sposobem otrzyma się ułomek w najprostszém wyrażeniu $\frac{7}{127}$.

IV. 1) Ułomki sprowadzone do jednakowego mianownika $=\frac{20}{28}$ i $\frac{21}{28}$, z których drugi widocznie jest większy.

2) Ułomki $\frac{4}{5}$ i $\frac{13}{25}$ zamieniają się na $\frac{20}{25}$ i $\frac{13}{25}$ z których pierwszy jest widocznie większy.

3) Ułomki $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12} = \frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$ z których drugi jest większy.

Z powodu ułomków $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$ zamienionych na $\frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$ wypada tu przypomnieć, iż mianowniki ich mają spólny czynnik 4, zawierający się w pierwszym 2 razy, w drugim 3 razy. W takim przypadku zwykło się liczby układać tak:

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{8} & & \frac{5}{12} \\ & 4 & \\ 2 & & 3 \end{array}$$

a rozmnożywszy wyrazy pierwszego ułomku przez 3, drugiego przez 2, otrzymamy ułomki z jednakowym mianownikiem, bo w każdym z nich spólny czynnik zawierać się będzie razy 2×3, czyli 6 razy.

V. W pierwszym razie powiększę go 4 razy, bom tyle razy powiększył licznik; w drugim razie zmniejszę go o połowę, bo o tyleż zmniejszam mianownik.

VI. 1) Ułomek $\frac{6}{7}$ duk. oznacza siódmą część sześciu czerw. zł. (nº 123.) Zamieniwszy na talary 6 duk. mnożąc je przez 3, mam $\frac{18}{7}$ tal. czyli $2\frac{4}{7}$tal. Zamieniwszy na złote 4tal. mnożąc je przez 6, mam $\frac{24}{7}$ czyli $3\frac{3}{7}$zł. Zamieniam licznik 3 na grosze i mam $\frac{90}{7}$ czyli $12\frac{6}{7}$gr; więc $\frac{6}{7}$ duk. = 2tal. 3zł. $12\frac{6}{7}$gr.
2) 2 półtynniki, 10 grywenników.

VII. 1) Szukanym ułomkiem jest $\frac{100}{20}$, gdyż $5 = \frac{5 \cdot 20}{20} = \frac{100}{20}$.
2) $\frac{27 \cdot 28}{28} = \frac{756}{28}$.

VIII. 1) $25\frac{8}{15}$; 2) $2\frac{49}{94}$; 3) $10\frac{6}{13}$.

IX. $3\frac{3}{83}$.

X. Co do 1go, potrzeba tylko pomnożyć licznikiem jednego ułomku oba wyrazy drugiego ułomku, na odwrot, licznikiem drugiego, pomnożyć oba wyrazy pierwszego ułomku, czyli $\frac{3}{9} \times \frac{16}{16}$ a $\frac{16}{17} \times \frac{3}{3}$ przez co niezmieni się wartość ułomku, a będzie $\frac{48}{144}$ i $\frac{48}{51}$.

Co do 2go, co w pierwszym razie licznikami, to w tym razie mianownikami działać potrzeba, gdyż $\frac{3}{9}$ i $\frac{16}{17}$ jest toż samo co $\frac{3}{9} : \frac{17}{17}$ i $\frac{16}{17} : \frac{9}{9}$; a z tąd wypadną ułomki $\frac{51}{153}$ i $\frac{144}{153}$ z jednemi mianownikami.....

XI. Ułomki do spólnego mianownika sprowadzone są:

1) $\frac{56}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{21}{84}$.
2) $\frac{60}{120}$, $\frac{80}{120}$, $\frac{90}{120}$, $\frac{96}{120}$.
3) $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{22}{24}$.
4) $\frac{280}{336}$, $\frac{294}{336}$, $\frac{196}{336}$, $\frac{441}{336}$, $\frac{216}{336}$.

XII. 1) Postępując sposobem podobnym jak w sprowadzeniu ułomków do jednakówego mianownika, to jest rozmnożywszy oba wyrazy każdego ułomku przez iloczyn innych liczników, będę miał $\frac{21}{35}, \frac{21}{27}, \frac{21}{84}$.
2) $\frac{105}{150}$, $\frac{105}{126}$, $\frac{105}{560}$.
3) $\frac{24}{27}$, $\frac{24}{42}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{24}{26}$.

XIII. Bez skrócenia jest nader długie działanie, i znajdzie się 32 006 016 000 000 na spólny mianownik; przez skrócenie zaś (nº 137) spólny mianownik 176400, a liczniki 38220; 107100; 16905; 135632; 114840 i 128135.

XIV. 1) $\frac{7}{22}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) ułomek $\frac{20}{317}$, nie da się już skrócić w wyrażeniu.

XV. 1) 17; 2) 23.

Stron. 89. n° 148.

I. 1) $\frac{10}{24}$; 2) $1\frac{130}{294}$; 3) $3\frac{11}{20}$; 4) $3\frac{1}{2}$.

II. $460\frac{27}{120} = 460\frac{9}{40}$.

III. $681\frac{5}{6}$ werst.

IV. $1133\frac{323}{796}$ zł.

V. Grubszéj liny jest $132\frac{44}{105}$ sąż., a cieńszéj $44\frac{31}{60}$ sąż. razem zaś $176\frac{13}{140}$ sąż.

VI. $195\frac{233}{504}$ mil.

VII. Zarobił $100\frac{1}{7}$ zł. a zebrał $465\frac{733}{900}$ zł.

VIII. 1) Obiedwie razem uchodzą na godzinę $\frac{4}{7}+\frac{3}{5}$ czyli $\frac{20+21}{35}$ czyli $\frac{41}{35}$ czyli $1\frac{6}{35}$ mili.

2) Uchodziłyby razem $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$ czyli $\frac{16+9}{12}$ czyli $\frac{25}{12}$ czyli $2\frac{1}{12}$ mili.

IX. Zbliżają się do siebie co godzina o $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}$ czyli $\frac{9}{7}$; czyli o $1\frac{2}{7}$ mili. 2) o $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$ milę.

X. Wydają przez tydzień po $1\frac{3}{4}$ duk.

XI. 1) Wszyscy przez dzień robią $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ czyli $\frac{20+15+12}{60}$ czyli $\frac{47}{60}$ naznaczonéj pracy. 2) Wszyscy na dzień wyrabiają $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ czyli $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ czyli $1+\frac{3+4}{12}$ czyli $1\frac{7}{12}$ t. j. wszyscy wyrabiają przez dzień całą ilość dla jednego wyznaczoną i $\frac{7}{12}$ drugiéj takiéj ilości.

XII. Przez dzień wypełni się: 1) na $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}$ czyli na $\frac{462+385+330+210}{2310}=\frac{1381}{2310}$ swéj objętości. 2) a w tym przypadku $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ czyli $\frac{672+576+504+336}{4032}$ czyli $\frac{2088}{4032}$ czyli $\frac{261}{504}=\frac{29}{56}$ swéj objętości.

XIII. Miała przez cały rok duk. 92, zł 1, gr. 18.

XIV. Za wszystkie dał r. $36+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{30}$ i kop. 30. Te ostatnie $=\frac{30}{100}$ czyli $\frac{3}{10}$ r. dał więc razem r. $36+\frac{10}{30}+\frac{18}{30}+\frac{1}{8}+\frac{1}{30}+\frac{9}{30}+$ czyli r. $36+\frac{38}{30}+\frac{1}{8}$ czyli $37+\frac{8}{30}+\frac{1}{8}$; $\frac{8}{30}+\frac{1}{3}$ czyli $\frac{4}{15}$ i $\frac{1}{8}$ sprowadzone do jednakowego mian. $\frac{32}{120}$ i $\frac{15}{120}=\frac{47}{120}$ r. $=\frac{4700}{120}$ kop. $=39\frac{1}{6}$ kop. Odp. jest więc 37 r. $39\frac{1}{6}$ kop.

XV. Razem mieć będzie kwart 14 i nadto $\frac{2}{8}+\frac{4}{5}+\frac{6}{11}$ $=\frac{385+352+240}{440}=\frac{977}{440}=2\frac{97}{440}$: garcy 42, nadto $\frac{1}{3}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{7}{21}=\frac{2}{3}+\frac{10}{8}=\frac{16+30}{24}=$ $\frac{46}{24}=1\frac{11}{12}$. Razem więc kwart $16\frac{97}{440}$ a garcy $43\frac{11}{12}$. Ponieważ kwart $16=4$ gar. a $\frac{11}{12}$ gar. $\frac{44}{12}$ czyli $3\frac{8}{12}$ czyli $3\frac{2}{3}$ kwart, powyższa więc summa wyrazi się tak: 47 gar. 3 kwar. i nadto $\frac{2}{3}+\frac{97}{440}$ kwar. czyli $\frac{880+291}{1320}=\frac{1127}{1320}$.

XVI. 50 berkowców, 8 pudów, $24\frac{5}{18}$ fun.

Stron. 93, n° 154.

I. Różnice są: 1) $\frac{1}{72}$.

2) Uprościwszy ułomki dane, jak tu jednego wyrazy skróciwszy dzieląc przez 4, drugiego przez 9, będzie $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$, a $\frac{441}{1323}=\frac{49}{147}$ co daje się jeszcze skrócić przez 7, bo $\frac{49}{147}=\frac{7}{21}$; trzeba więc wziąć różnicę między $\frac{3}{7}$ i $\frac{7}{21}$, czyli między $\frac{9}{21}$ i $\frac{7}{21}$, ta zaś jest $\frac{2}{21}$.

3) $108\frac{11}{24}$; 4) $1\frac{16}{49}$; 5) $28\frac{26}{63}$; 6) $17\frac{31}{40}$.

II. 1) U 1go kupca brak 12 łok. a 2) u 2go $\frac{17}{20}$ łok. nazbyt.

III. Reszta wynosi 1) $6\frac{29}{30}$ łok. 2) $8\frac{190}{160}$.

IV. 1) Różnica 1sza jest $\frac{3}{44}$, 2ga $\frac{25}{84}$; różnica tych różnic jest $\frac{53}{231}$. 2) różnica 1sza $5\frac{18}{35}$, 2ga $2\frac{17}{24}$. Różnica tych różnic $2\frac{1017}{1190}$.

V. Odległość Brześcia Litewskiego od Słonima $25\frac{23}{56}$, Słonima od Mińska $28\frac{10}{63}$ a Mińska od Petersburga $132\frac{1}{8}$ mili.

VI. Zostaje mu się $\frac{1}{30}$ r. dziennie, czyli gr. $6\frac{2}{3}$; gdyż $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{25-24}{30}=\frac{1}{30}$ r. $=$ gr. $6\frac{2}{3}$.

VII. Materya której 6 łok. kosztuje 5 r., jest droższa o $\frac{1}{30}$ r. czyli o gr. $6\frac{2}{3}$.

VIII. O $\frac{1}{12}$ mili, gdyż $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$.

IX. O 3 ćwierci mili, bo $\frac{2}{1}-\frac{5}{4}=\frac{8-5}{4}=\frac{3}{4}$.

X. 1) $\frac{1}{20}$ część objętości bo $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$.

2) $\frac{9}{20}$; gdyż $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}=\frac{24-15}{20}=\frac{9}{20}$.

3) Nienapełni; gdyż odpływ jest większy niż przypływ bo dziennie korytem 2giém odpływa wody $\frac{9}{20}$ objętości stawu więcéj, niż 1szém przypływa.

XI. 1) $\frac{32}{5}$ c. $+\frac{11}{3}$k. $+\frac{17}{2}$ fun. $=\frac{3200}{5}+\frac{275}{3}+\frac{17}{2}$ fun. $=$

$$\frac{19200+2750+255}{30}=\frac{22205}{30}=\frac{4441}{6}\text{fun}$$

$$\frac{95}{4}\text{k.}+\frac{56}{3}\text{f.}=\frac{1375}{4}+\frac{56}{3}\text{fun.}=\frac{7125+224}{12}=\frac{7349}{12}\text{ f.}$$

$$\frac{4441}{6}-\frac{7349}{11}=\frac{1533}{22}=127\frac{9}{12}\text{fun.}$$

2) $\frac{40}{1}+\frac{25}{3}$pud. $=\frac{120+25}{3}=\frac{145}{3}$pud. $=\frac{5800}{3}$fun.

$$\frac{55}{6}\text{p.}+\frac{173}{5}\text{f.}=\frac{2200}{6}+\frac{173}{5}\text{f.}=\frac{11000+1038}{30}=\frac{12038}{3}\text{f.}$$

$$\frac{58000}{30}-\frac{12038}{30}=\frac{45962}{80}=1532\frac{1}{15}\text{fun.}$$

XII. 1) $171\frac{1}{2}$ zł. 2) $=99\frac{34}{60}$ połt.

XIII. 1) $549\frac{31}{60}$ gar. 2) $=354\frac{8}{15}$ czetwert'.

XIV. Podobnież znajdziemy $77\frac{1}{24}$ fun.

XV. $150\frac{3}{4}$ łut.

XVI. Pozostało się likworu $823\frac{26}{30}$ kwaterki, zebrać zaś ma za resztę zł. $619\frac{11}{12}$.

XVII. Osoba A wygrawszy, po odtrąceniu 100 zł. dla ubogich i stawki zł. $8\frac{1}{2}$, mieć będzie zł. $300\frac{5}{6}-108\frac{3}{6}=192\frac{1}{3}$.

B wygrała fant wartości $40\frac{9}{50}$ czyli $\frac{2009}{50}$ rub. Ponieważ rubel jest $\frac{20}{3}$ zł. więc zamieniwszy na złote czyni $\frac{4018}{15}=267\frac{13}{15}$ zł.

Wypadająca z zakładu ofiara wynosi 10 duk. czyli $10\times19\frac{2}{5}=194$ zł. Stawka czyni duk. $\frac{11}{8}+\frac{17}{3}$ zł. $=\frac{198}{8}+\frac{17}{3}$ zł. $=\frac{594+136}{24}=\frac{730}{24}=30\frac{5}{12}$. Pozostaje jéj więc $267\frac{13}{15}-(194+30\frac{5}{12})=267\frac{13}{15}-224\frac{5}{12}=43\frac{27}{60}$ zł.

Wygrana więc osoby A przewyższa wygraną osoby B, o $192\frac{1}{3}-43\frac{27}{60}=148\frac{53}{60}$ zł.

Stron. 100. nº 161.

I. 1) $\frac{16}{17}\times\frac{5}{8}=\frac{2}{17}\times5=\frac{10}{17}$; 2) $\frac{3500}{10063}$; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) $18\frac{3}{4}$; 5) $77\frac{5}{7}$; 6) $195\frac{3}{4}$.

II. $24\frac{3}{4}$ tal.; 2) gdy $\frac{1}{4}$ ośminy zboża kosztuje $\frac{7}{8}$ rub. więc ośmina kosztuje cztery razy więcéj, a czetwert' która zawiera 2 ośminy, 8 razy więcéj t. j. $\frac{56}{8}=7$ rub. a zatém 125 czetwerti 125 razy więcéj, t. j. 875 rub.

III. 1) $52\frac{1}{7}$ zł.; 2) $626\frac{2}{3}$ rub.

IV. 1) Siódma część z 77 jest 11, a 6 takich części jest 66; 2) $\frac{2230}{9}=247\frac{7}{9}$.

V. 1) Ponieważ mnożąc dzielnik przez iloraz znajdujemy na iloczyn liczbę dzielną (n° 86), więc mnożąc 17 przez $17\frac{2}{3}$ znajdziemy $300\frac{1}{3}$ dzielną szukaną; 2) 291.

VI. 1) $2\frac{7}{24}$ zł.; 2) $1\frac{20}{48}$ rub.; 3) $796\frac{1}{20}$ zł.; 4) $434\frac{57}{80}$ rub.

VII. $45\frac{18}{35}$ mil.

VIII. $154\frac{4}{5}$ pudów.

IX. $16\frac{89}{540}$ duk. = 16 duk., 2 zł., 29 gr.

X. $288\frac{24}{3} = 296$ cetnarów.

XI. Odpowiedź: $42\frac{11}{20}$ duk.

XII. Odp. $46\frac{4}{5}$ zł.

XIII. Iloczyn jest $\frac{2}{6}$ czyli $\frac{1}{3}$ (n° 160, 3cie).

XIV. $3\frac{2}{3}$ cet. = $12\frac{8}{3}$ kam. = $14\frac{2}{3}$ kam., dodawszy $2\frac{1}{2}$ kam. będzie $17\frac{1}{6}$ kam. któremi pomnożywszy cenę kamienia, będzie $74\frac{13}{30}$ duk. = 74 duk. 7 zł. 24 gr.

XV. 2 kwart jest = $\frac{1}{50}$ becz.; $\frac{10}{3} + \frac{1}{50} = \frac{503}{150}$ becz. któremi rozmnożywszy cenę beczki $\frac{77}{5}$ duk., znajdę $51\frac{481}{750}$ duk. czyli 51 duk. 11 zł. $16\frac{8}{25}$ gr.

XVI. $265\frac{1}{5}$ zł.

XVII. Próżnuje przez miesiąc $74\frac{2}{3}$ minut, a przez rok 14 godz. 56 minut.

XVIII. 1) $130\frac{1}{2}$ zł.; 2) podana tu cena siana jest tak droga jak nigdy nie bywa. Chcąc jednak dojść wartości podanych funtów podług ceny oznaczonéj, uważam iż 65 pud. = 2600 fun.; $14\frac{1}{3}$ kop. $\times$ 2600 = $37266\frac{2}{3}$ kop. = $372\frac{2}{3}$ rub.

XIX. Odp. $31\frac{1}{9}$ duk. czyli 31 duk. i zł. 2.

XX. Zyskała $\frac{6}{20}$ czyli $\frac{3}{10}$ tego, co włożyła.

XXI. 1) Na godzinę uchodzi $\frac{3}{5}$ mili, a zatém przez $\frac{3}{4}$ godz. ujdzie $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ mili.

2) $\frac{48}{60}$ god. $=\frac{4}{5}$ god. Gdy więc kto na godzinę uchodzi $\frac{3}{4}$ mili, w $\frac{4}{5}$ ujdzie $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ mili.

XXII. Wykopią $\frac{1}{3}\times 14=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ sznura.

Stron. 108. nº 174.

I. 1) $\frac{1}{5}: 6=\frac{1}{30}$; 2) $\frac{2}{19}$; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$; 5) $\frac{88}{8}=11$; 6) $\frac{2}{3}$; 7) $\frac{45}{39}:\frac{15}{9}=\frac{45}{39}\times\frac{9}{15}=\frac{3}{13}\times\frac{3}{1}=\frac{9}{13}$; 8) 8; 9) $5\frac{1}{6}$; 10) $5\frac{4}{5}$.

II. Po $\frac{1}{6}$ tal. czyli po zł. 1.

III. Odp. funtów 42.

IV. 1) $\frac{3}{20}$ duk. $=2\frac{7}{10}$ zł.; 2) $\frac{7}{32}$ r. $=\frac{700}{32}=21\frac{7}{8}$ kop.

V. 1) $\frac{2}{20}$ czyli $\frac{1}{10}$ ryzy; 2) $\frac{4}{5}$ łok.

VI. Dni 20 i $\frac{1}{12}$ czyli godzin 2.

VII. Odp. na sztuk 28 $\frac{5}{11}$.

VIII. 1) $11\frac{20}{30}$ pudów; 2) $\frac{17}{108}$ rub. $=\frac{1700}{108}=15\frac{20}{27}$ kop. 3) po 10 gr.

IX. 1) 36 łok. 2) zł. $16\frac{12}{19}$; 3) $13\frac{1}{5}$ rub. 4) $3\frac{3}{11}$ rub.

X. Przez 1) $\frac{15}{16}$ łokcia. 2) $\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$ łok.

XI. Ujeżdżał po $1\frac{1}{2}$ mili.

XII. $35\frac{74}{185}$ zł.

XIII. 1) Przez $\frac{4}{9}$ (nº 98); 2) $\frac{9}{4}$ czyli $2\frac{1}{4}$.

XIV. Wypadek jest w obu razach ten sam $\frac{27}{64}$.

XV. Zgubiwszy czynniki obu wyrazom ułomku spólne 4, 5, 6, 9, podzielę 8 i 14 czynniki licznika przez 2, oraz 2 i 10 czynniki mianownika. Wypadły ztąd czynnik 7 w liczniku i takiż w mianowniku zgubię. Podzielę jeszcze przez 3 czynnik licznika 3, i 15 czynnik mianownika, a oba wyrazy ułomku sprowadzonego do najprostszego wyrażenia mieć będą czynniki $\frac{4\times3}{5\times3\times12}=\frac{12}{275}$.

XVI. $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ jest $\frac{10}{18}$ czyli $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{9}$ z 7 jest $\frac{35}{9}$; podzieliwszy $50\frac{1}{2}$ przez $\frac{35}{9}$ znajdziemy liczbę szukaną $12\frac{60}{80}$.

XVII. Po $82\frac{11}{15}$ połtynników.

XVIII. 1) zł. 5, gr. $25\frac{1}{6}$; 2) niespełna po gr. 2, bo po $1\frac{745}{783}$ gr. 3) 8 duk. zł. 8 gr. $9\frac{1}{2}$; 4) 3 rub. $30\frac{47}{265}$ kop.

XIX. 1) 3 duk. 17 zł. 11 gr. $\frac{128}{567}$; 2) duk. 1 i gr. 22.

XX. 1) $91\frac{1}{2}$ rub. sr. 2) 260 zł. a $134\frac{2}{5}$ r. as. 3) $300\frac{13}{16}$ pud.

XXI. $7\frac{1}{2}$.

Stron. 110. nº 175.

I. Zostało mu zł. $43\frac{2}{15}$.

II. Bawił w Warszawie lat $2\frac{11}{20}$.

III. Zapłaci $287\frac{5}{9}$ rubli.

IV. Garniec wypada po $10\frac{1}{9}$ zł.

V. Stracił 1) $59\frac{3}{8}$ zł. 2) $382\frac{13}{30}$ grywenników.

VI. Nie zrobią, lecz tylko $\frac{19}{20}$ jéj części.

VII. Koszule wszystkie kosztują zł. $68\frac{2}{5}$. Jedna wypada po zł. $11\frac{2}{5}$. Na wszystkie wyszło płótna 33 łokcie.

VIII. 1) zł. $90\frac{13}{21}$; 2) $1028\frac{4}{7}$ grywenników.

IX. Wybrawszy przez 10 miesięcy $15\frac{5}{8}$ pudów, wybierał na miesiąc po $\frac{125}{80} = \frac{25}{16}$ pud., a zatém przez 3 miesiące wybrał $\frac{75}{16}$ pud. Że zaś za każdy winien zapłacić $\frac{8}{5}$ rub. więc za wszystkie winien $\frac{75}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{1} = 7\frac{1}{2}$ rub.

X. W 1szy handel włożyła $\frac{8650}{2}$ czyli 4325 rub. a zysk ztąd wynosi $\frac{4325}{5}$ czyli 865 rub.; w 2gi włożyła $\frac{8650}{4}$ a zyskała $\frac{8650}{4.6}$, to jest $360\frac{5}{12}$ rub.; w trzeci włożyła także $\frac{1}{4}$ swego majątku, a zyskała ztąd część 9tą to jest $240\frac{5}{18}$. Ogólnie więc zyskała $1465\frac{25}{36}$ rub. a cały jéj majątek w końcu roku wynosi $10115\frac{25}{36}$ rub.

XI. Papier na miejscu kosztował $1257\frac{1}{3}$ tal. a transport $24\frac{1}{2}$ tal. razem więc $1281\frac{5}{6}$ tal.
Za 41 ryz $\times 14\frac{1}{4}$ tal. wziął $584\frac{1}{4}$ tal.
a za $41 \times 12\frac{1}{2}$ wziął $512\frac{1}{2}$ tal.
Za wszystek więc wziął $1096\frac{3}{4}$ tal., a zatém stracił $185\frac{1}{12}$ tal.

XII. Zł. 2500 na początku każdego roku wkładane w handel, nie wchodzą tu do obrachowania korzyści, owszem mają być uważane jako wydatek. Zagadnienie ściąga się tylko do obrachowania zysku z pozostającego majątku, i do zogółowania go z pozostałym kapitałem. Obrachujemy więc w ten sposób:

Majątek	64000
Wydatek na początku 1go roku .	2500
Reszta majątku na począt. 1go r.	61500
Zysk 1go roku	$7687\frac{1}{2}$
Majątek na końcu 1go r. . .	$69187\frac{1}{2}$
Wydatek na początku 2go r. .	2500
Majątek na początku 2go r. . .	$66687\frac{1}{2}$
Zysk z tego roku	$8335\frac{15}{16}$
Majątek na końcu 2go r. . .	$75023\frac{7}{16}$
Wydatek na początku 3go r. .	2500
Majątek na początku 3go r. . .	$72523\frac{7}{16}$
Zysk 3go roku	$9065\frac{55}{128}$
Majątek na końcu 3go r. . . .	$81588\frac{111}{128}$ zł.

XIII. Będzie miał mąki korcy $70\frac{7}{60}$; a że za wszystko ma wziąć zł. $1153\frac{11}{40}$, więc korzec musi przedawać po $16\frac{3769}{8414}$ czyli po zł. 16, gr. 13 i jeszcze nieco więcéj nad szeląg.

XIV. Wyda na rok zł. $345\frac{4}{5}$.

XV. Wydając dziennie $\frac{1}{8}$, przez 3 dni wydał $\frac{3}{8}$ udzielonéj sobie ilości. Resztę $\frac{5}{8}$ podzieliwszy na 6 części, przeznacza na dzień $\frac{5}{48}$. A że zabawił tylko 5 dni, wydał więc tylko $\frac{25}{48}$. Z reszty zatém $\frac{5}{8}$ czyli $\frac{30}{48}$ powinno mu się zostać $\frac{5}{48}$ odebranéj pierwotnie ilości. Jeżeli więc ilość ta będzie oznaczona, łatwo znajdziemy wartość reszty.

XVI. 1) Pierwsza składa dziennie $\frac{5}{7}$ tal. druga $\frac{3}{5}$, a trzecia $\frac{5}{6}$. Wszystkie zatém dziennie składają $\frac{451}{210}$ tal. aby więc złożyć $147\frac{4}{9}$ tal. potrzebują tyle dni ile razy $147\frac{4}{9}$ zawiera w sobie $\frac{451}{210}$ t. j. $68\frac{886}{1353}$ pierwsza w tym czasie złoży tal. $49\frac{3771}{9471}$, druga $41\frac{87}{451}$, 3cia $37\frac{862}{4059}$.
2) Pierwsza składa dziennie $\frac{6}{7}$ rub. 2ga $\frac{5}{4}$, 3cia 2, 4ta $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$; wszystkie zatém dziennie $5\frac{65}{84}$ rub. aby więc złożyć summę wynoszącą rubli $758\frac{4}{5}$ potrzebują dni $131\frac{1021}{2425}$. W tym czasie pierwsza złoży rub. $112\frac{10976}{16975}$, 2ga $164\frac{134}{485}$, 3cia $262\frac{2042}{2425}$, 4ta $219\frac{17}{485}$.

XVII. Każde z pięciu dzieci pozostałych dostanie $\frac{1}{5}$ części całego majątku. Piąta więc część podzielona na 4ch wnuków, wyniesie dla każdego $\frac{1}{20}$ część majątku dziadowskiego.

XVIII. Kucharz weźmie $\frac{3}{4}$ działu Kommissarza, pokojowy $\frac{15}{28}$ działu Kommissarza, pięciu służących razem $\frac{9}{4}$ działu kucharza; a zatém każdy $\frac{9}{20}$ tegoż działu.

XIX. 1) Odjąwszy 10 od 100, resztę 90 podzieliwszy przez 2, skoro dodasz do jednéj części t.j. do 45 dziesięć, mieć będziesz dwie liczby żądane: 55 i 45.
2) Podobnie znajdziesz $\frac{59}{210}$ i $\frac{31}{210}$.

XX. Od summy dwóch liczb odjąwszy ich różnicę, reszta musi się równać jeszcze podwójnéj liczbie mniejszéj. Wziąwszy więc téj reszty połowę, mieć będziemy liczbę mniejszą, a tę znając znajdziemy zaraz i większą. Tym sposobem znajdziemy: 1) $4\frac{1}{2}$ i $3\frac{1}{2}$; 2) $21\frac{5}{6}$ i $5\frac{4}{7}$.

XXI. 1) Liczba pomyślana jest $38\frac{2}{3}$. Gdyby zaś po odjęciu $\frac{2}{3}$ części liczby pomyślanéj, zostawało 38, byłaby ona 114.

2) 43 — 5 czyli $38 = \frac{2}{3}$ częściom liczby szukanéj, liczba więc ta jest $38 : \frac{2}{3} = \frac{114}{2} = 57$.

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 50$, a zatém liczba szuk. jest $50 : \frac{5}{6} = 60$.

4) odjąwszy 8, reszta jest $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ czyli $\frac{5}{6}$ liczby szukanéj, ta więc jest 60. 5) 6.

XXII. 1) Cała summa była zł. 20. 2) 36. 3) Skoro $\frac{5}{8} = 10$ rubli, summa zatém cała jest $10 : \frac{5}{8} = 16$.

4) Skoro 40 rubli $= \frac{1}{4}$ summy szukanéj, więc cała równa się $40 : \frac{1}{4} = 160$, pozostałe zaś $\frac{3}{4}$ téj summy wynoszą 120 rubli.

5) Cała summa składa się z 3ch części takich z jakich każda jest $\frac{2}{15}$ téjże summy, czyli składa się z $\frac{6}{15}$ téj summy i z 30 zł., które dopełniając $\frac{6}{15}$ do całéj summy wynoszą $\frac{9}{15}$ summy. Summa więc szukana jest $30 : \frac{9}{15} = \frac{450}{9} = 50$.

XXIII. 1) W 27 znajduje się $\frac{7}{6}$ liczby szukanéj, podzieliwszy je więc przez $\frac{7}{6}$ (nº 165) wypada $23\frac{1}{7}$. Jakoż szósta część téj liczby $3\frac{6}{7}$, dodana do $23\frac{1}{7}$ czyni 27.

2) $\frac{3}{4}$ liczby szukanéj czynią 24, a zatém cała $= 24 : \frac{3}{4} = 32$.

XXIV. 1) Ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ dodane razem czynią $\frac{13}{12}$, a zatém w 26 znajduje się $\frac{13}{12}$ liczby szukanéj, podzieliwszy je więc przez $\frac{13}{12}$ wypada 24 na iloraz.

2) Ułomki dane czynią razem $\frac{3}{4}$; skoro więc $\frac{1}{4}$ liczby szukanéj $=$ 64, a zatém cała liczba jest 4 razy większa to jest 256.

XXV. W wodzie jest ukryte $\frac{8}{24}+\frac{6}{24}+\frac{3}{24}=\frac{17}{24}$ całéj sztuki, na wierzchu więc jest $\frac{7}{24}$ całéj sztuki; podzieliwszy więc $7\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ stóp przez $\frac{7}{24}$ znajdziemy $25\frac{5}{7}$ stóp długości całego drzewa.

XXVI. Ułomki dodane czynią $2\frac{1}{4}$; zatém 84 zł. ważą $2\frac{1}{4}$ razy niewiadome pieniądze; podzieliwszy więc 84 przez $2\frac{1}{4}$ wypada iloraz $37\frac{3}{9}$ który jest liczbą zł szukaną.

XXVII. Odpowiedź: lat $14\frac{5}{9}$.

XXVIII. 1) 1046; 2) $1101\frac{5}{9}$; 3) 514; 4) $81\frac{1}{4}$.

XXIX. $7\frac{19}{56}$.

XXX. Przez $\frac{2}{3}$.

XXXI. Zagadnienie jest nieokreślone bo jest:

1) $\frac{14}{2}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{16}{4}$ i t. d.
2) $\frac{19}{2}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{23}{4}$ i t. d.
3) $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{24}$, $\frac{3}{36}$ i t. d.
4) $\frac{48}{4}$, $\frac{60}{5}$, $\frac{72}{6}$ i t. d.

XXXII. 1) Pierwsza wydaje co dzień $\frac{6}{7}$ tal. a zatém 24 tal. wystarczą jéj na $24 : \frac{6}{7} = 28$ dni; druga wydaje dziennie $\frac{5}{6}$ tal. więc jéj 24 tal. wystarczą na 28 $\frac{4}{5}$ dni, czyli na 28 dni $19\frac{1}{5}$ god.

2) Obie razem wydają dziennie $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16+15}{20}=\frac{31}{20}$ r. podzieliwszy więc 271 przez $\frac{31}{20}$ wypadnie 174 $\frac{26}{31}$ dni.

18*

XXXIII. Złodziéj ubiega na godzinę $\frac{3}{2}$ mili, a pogoń $\frac{7}{4}$; zbliża się więc do złodzieja co godzina o $\frac{7}{4} - \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$ mili. Że zaś złodziéj zyskał na czasie godzin 5, a zatém ubiegł naprzód $\frac{15}{2}$ mili; więc podzieliwszy $\frac{15}{2}$ przez $\frac{1}{2}$ znajdziemy 30 liczbę godzin, po których go pogoń dopędzi.

XXXIV. 1) Zbliżają się do siebie co godzina o $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ mili; dla przebycia więc 21 mil potrzebować będą godzin $21 : \frac{7}{5} = 15$. Pierwszy zatém ujedzie mil 9, a drugi 12.

2) Zjadą się za godzin 60; pierwszy ujedzie mil 105, a drugi 108.

3) Zjadą się za godzin $18\frac{42}{55}$. Pierwszy ujedzie werst $218\frac{10}{11}$, drugi $211\frac{1}{11}$.

XXXV. Dziesięcina kosztowała ze zwózką zł. 651 $\frac{1}{15}$, jedna kopa kosztowała zł. 21 $\frac{221}{222}$; za wszystko zboże wziął zł. 1034 $\frac{33}{35}$, zyskał więc zł. 383 $\frac{92}{105}$.

XXXVI. Sadzawka w dniu jednym napełnia się $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ swéj objętości; do napełnienia więc całéj potrzeba dni 30.

XXXVII. Odpowiedź: w 1 godzinie.

XXXVIII. Szukam jaka część sadzawki wypływa każdym z osobna kanałem w czasie oznaczonym, np. w dniu jednym. Wziąwszy więc objętość sadzawki za 1, podzielę ją przez $3\frac{1}{2}$ czyli $\frac{7}{2}$ dla znalezienia pierwszéj części szukanéj którą będzie $\frac{2}{7}$, 2ga będzie $\frac{5}{14}$ a 3cia $\frac{3}{14}$. Dodawszy razem $\frac{4}{14} + \frac{5}{14} + \frac{3}{14}$ jest $\frac{12}{14}$, czyli $\frac{6}{7}$ części sadzawki które trzema kanałami w jednym dniu wypływają. Podzieliwszy zatém jedność czyli objętość sadzawki przez $\frac{6}{7}$ wypadnie $1\frac{1}{6}$ liczba dni szukana.

XXXIX. Pierwsza pompa wypróżni w godzinie $\frac{1}{36}=\frac{2}{72}$ oznaczonéj ilości wody; druga zaś $\frac{1}{24}=\frac{3}{72}$ téjże ilości; lecz w tymże czasie wpływa $\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$; więc ilość wody wypompowanéj w godzinie jest $\frac{2}{72}+\frac{3}{72}-\frac{4}{72}=\frac{1}{72}$. A że woda znajdująca się już w spodniéj; części okrętu wyrażona jest przez $\frac{3}{8}$; więc czas potrzebny do jéj wypróżnienia jest $\frac{3}{8}:\frac{1}{72}=\frac{216}{8}=27$ godzin. A zatém osada okrętu powinna dopilnować pompowania przez 27 godzin. Jakoż gdy w jednéj godzinie wyciąga się wody $\frac{1}{72}$, w 27 godzin wyciągnie się $\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$.

XL. Zapłacić każdy powinien zł. $29\frac{25}{36}$.

XLI. Jeżeli przed wyjazdem wszystkie 4 osoby złożyły razem tylko 70 rub. wtedy dopłacić mają rub. 208 $\frac{30}{40}$, a zatém każda z nich ma dopłacić rubli $52\frac{30}{160}$.

Jeżeli zaś przed wyjazdem każda złożyła 70 rubli, czyli wszystkie 280, wtedy mają napowrót odebrać $1\frac{1}{40}$ rubli; a zatém każda po $\frac{41}{160}$ rubli = zł. 1, gr. $21\frac{1}{4}$.

XLII. Miał wódki gar. 4054 $\frac{170}{252}$; wziął za nią zł $14596\frac{67}{70}$; odtrąciwszy koszt zł. 840 $\frac{2}{3}$. Zysk wyniesie zł. 13756 $\frac{61}{210}$.

XLIII. Drzewo na wodzie kosztowało 4424 $\frac{1}{16}$ tal. karowanie 1560, placowe $1156\frac{1}{14}$, odwózka $1545\frac{3}{5}$ razem 8685 $\frac{411}{560}$. Wziął zaś za drzewo 19706 $\frac{2}{5}$, zyskał zatém 11020 $\frac{373}{560}$ tal. oraz sztuk drzewa 54.

XLIV. Ponieważ obladry zajmują 3 cale, więc pozostaje tylko na deski 33 cali, że zaś każda deska ma mieć grubości $1\frac{1}{2}$ cala a rznięcie piły $\frac{1}{2}$ cala, przeto na każdą deskę rachować potrzeba 2 cale, zatém podzieliwszy 33 przez 2, będzie desek żądanych 16 i jedna $\frac{3}{4}$ cala mająca.

XLV. Podzieliwszy 5248 cet. przez 16, iloraz 328 okaże liczbę wozów, ta rozmnożona przez 2, okaże 656 liczbę ludzi potrzebnych. Że zaś przewożący ma swoich wozów zaprzężnych 80, odjąwszy więc 80 od 328, reszta 248 jest liczbą wozów do najęcia. Liczba ta rozmnożona przez 4, okazuje 992 liczbę koni potrzebną, lecz że przewożący ma jeszcze koni 100, odjąwszy więc koni 100 od 992 zostaje 892 liczba koni do najęcia. Odjąwszy także od 656 liczbę ludzi 200, których już ma przewożący, reszta 456 jest liczbą ludzi do najęcia, z których połowa to jest 228 potrzebna jest do wozów, a druga połowa także 228 do koni. Obrachowawszy już koszt na wozy, konie i ludzi nająć się mających do wozów i do koni, iloczyny wypadłe, 620, 9366, 342 i 380 zł. dodać w summę która będzie 10 708 zł. Że zaś na przewiezienie wyznaczone jest 1560 tal. czyli 9360 zł. niedostaje więc 1348 zł.

XLVI. Rozmnożywszy 180, liczbę ludzi w każdéj kompanii przez 5, liczbę komp. wypada 900 liczba ludzi do umundurowania. A że każdy 20ty człowiek jest sierżantem, więc podzieliwszy 900 przez 20, iloraz 45 oznaczy liczbę sierżantów, a tém samém i liczbę ich mundurów. Liczbę tę odjąć od 900, reszta 855 okaże liczbę żołnierzy prostych, a zatém i liczbę potrzebnych im mundurów. Odjąwszy 25 od 45, a 250 od 855: reszty 20 i 605 okazują liczby mundurów do sprawienia dla sierżantów i dla żołnierzy prostych. Obrachowawszy do tych mundurów potrzebne sukno, płótno, galonki, guziki, nie zapominając odejmować tego co już jest w zapasie, pozostanie obrachować koszt na te artykuły i na robotę krawca; iloczyny wypadłe to jest $14295\frac{2}{3}$ zł. za suk. $2076\ \frac{21}{40}$ zł. za płót. 2662 zł. za robotę mundurów dla żołn. prostych: $596\ \frac{5}{8}$ zł. za suk. 56 zł. za płót. $96\ \frac{2}{3}$ zł. za robotę mundurów i 95 zł. za galonki dla sierżantów, a $1041\ \frac{2}{8}$ zł. za guziki dla wszystkich, dodawszy w jedną summę znajdziemy cały koszt$=20920\ \frac{3}{20}$ zł. Że zaś na umundurowanie wyznaczono 24006 zł. więc zostaje $3079\ \frac{17}{20}$ zł.

XLVII. 1szy sposób zagospodarowania jest korzystniejszy od 2go, i przynosi więcéj 388 tal.

Nader użyteczną jest rzeczą, aby uczniowie po zastanowieniu się nad zagadnieniem, powiadali 1ód, ile działań wchodzi w rozwiązanie, 2re jakie działania wchodzą, 3cie koléj podług jakiéj wchodzą. Następnie uczeń do tablicy zawołany, napisawszy na niéj porządnie zagadnienie, i wyłożywszy sposób rozwiązania, niech skaże 1ód całą robotę jak powiedzieliśmy na str. 194 a naostatek niech wyznaczani z kolei dyktują mu działania które ma wykonywać.

Stron. 127. n° 188.

I. 1) 0,033...; 0,066...; 0,1; 0,1555...; 0,9066...

2) 0,01; 0,02; 0,03; 0,04;... 0,99.

3) 0,04166... 0,0833... 0,125;... 0,95833....

4) 0,0625; 0,125; 0,1875; 0,25;... 0,9375.

5) 0,04; 0,08; 0,12; 0,16...0,96.

6) 0,025; 0,05; 0,075; 0,1;...0,975.
7) 0,25; 0,5; 0,75.
8) 0,125; 0,25; 0,375; 05,...;0,875.

II. 1) 0,66; 2) 0,55...; 3) 0,833...; 4) 0,85; 5) 0,075; 6) 0,533...; 7) 0,6428571 4285...; 8) 0,619047 619...

III. 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{56}{99}$; 3) $\frac{175}{400} = \frac{7}{36}$; 4) $\frac{11}{18}$; i 5) $\frac{11306}{37037}$; 6) $\frac{31746}{37037}$.

IV. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{250}$; 3) $\frac{3}{16}$; 4) $\frac{5}{16}$; 5) $\frac{3}{111}$; 6) $\frac{1543}{4950}$.

V. 1) 0,421 .... arszyna; 2) 0, 3054 .... puda; 3) 0,002 73....roku.

VI. 3,8.

VII. 1) 14,28; 2) 25,325; 3) 0,48, razem 40,085.

VIII. 1) 3,05955; 2) 4,23413; różnica 1,17458.

IX. 1) jest mniejszy o 0,1224; 2) jest mniejszy razy 1,2254.

X. Platyna jest cięższa od żelaza, razy 2,791; złoto 2,472; srebro 1,344; merkuryusz 1,8704.

XI. Powietrze jest lżejsze od wody 769; 7686 razy. Walce téj saméj co kwarta objętości ważyć będą: złoty, funtów 47,487762; ołowiany, 27,994032; srebrny 25,827784; miedziany 21,671208, żelazny, 19,205208; cynowy 17,979506; cynkowy 16,919226. Ile razy każdy z tych metalów jest cięższy od wody? wymienione jest w zagadnieniu. Jeżeliby się zaś pytano: ile razy każdy z wymienionych metalów jest cięższy od powietrza? należałoby znalezioną ciężkość każdego walca tychże metalów dzielić przez ciężkość kwarty powietrza.

XII. Ważność najbliższa będzie zawsze 0,973.

Stron. 135. n° 198.

I. 1) Ułomek $\frac{531}{1278}$ daje się rozwinąć na ułomek ciągły:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

a biorąc wyraz jego pierwszy, następnie dwa pierwsze trzy, cztery i pięć, będziemy mieli ważności coraz bliższe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{27}{65}$, $\frac{59}{142}$. Ułomek ostatni zupełnie $=$podanemu, ten bowiem nie był dany w wyrażeniu najprostszém.

2) Ułomek $\frac{1103}{887}$ jest niewłaściwy, wyciągnąwszy całkowitość, jest 1 i $\frac{216}{887}$. Ten ułomek daje ważności: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{37}$, $\frac{19}{78}$, $\frac{28}{115}$, $\frac{47}{193}$ i $\frac{216}{887}$; jeżeli chcemy dodać całkowitość do każdego w szczególności z ułomków będzie: $\frac{5}{4}$, $\frac{46}{37}$, $\frac{97}{78}$, $\frac{143}{115}$, $\frac{240}{193}$ i $\frac{1103}{887}$.

II. Ułomek oznaczający obszerność Europy względem obszerności Azyi jest 1ód $\frac{171397}{640086}$: rozwinąwszy go na ułomek ciągły, otrzymamy cztery pierwsze jego ważności na przemian większe i mniejsze: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{15}$, i t. d.

III. $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{38}$, $\frac{4}{51}$, i t. d.

IV. Biorąc 1szy wyraz ułomku ciągłego i następnie jego wyrazy dwa, trzy i t. d., znajdziemy ważności: $\frac{1}{14}$, $\frac{4}{57}$, $\frac{41}{484}$, i t. d.

V. Kwarta wody waży 1) $2\frac{7}{15}$ funt. 2) $2\frac{103}{221}$ funt. 3) $2\frac{3983}{8546}$ f. Kwarta powietrza 1) $29\frac{21}{40}$ gra. 2) $29\frac{328}{625}$ i t. d.

VI. 11 gr. $= \frac{11}{30}$ zł. $= \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$.

Biorąc pierwszy ułomek cząstkowy to jest $\frac{1}{2}$ wypada wartość jego gr. 15, za wielka o 4 gr. Biorąc dwa pierwsze ułomki cząstkowe wypadnie gr. 10, wartość za mała o 1 gr. Biorąc trzy, wypadnie $11\frac{1}{4}$ za wiele o $\frac{1}{4}$ gr. Biorąc cztéry, wypadnie $10\frac{10}{11}$ za mało o $\frac{1}{11}$ gr. Biorąc wszystkie, otrzymamy zupełną ważność danego ułomku. Tu widocznie przekonywamy się o własnościach ułomku ciągłego, i o zbliżaniu się wartości jego cząstkowych do zupełnéj, przez nadmiar lub brak; stósownie do liczby nieparzystéj lub parzystéj, cząstek branych (n^o 195).

VII. 1) $\frac{15}{32}$ rozwinąwszy na ułomek ciągły, dwa pierwsze wyrazy jego dadzą ważność $\frac{7}{15}$ kor. 2) dojdziemy do ważności $\frac{1}{2}$ i $\frac{9}{19}$ puda. 3) podobnie dojdziemy $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{13}$.

VIII. 1) $\frac{3}{7}$; 2) prędkość wiatru zwyczajnego względem prędkości wielkiego w przecięciu jest $\frac{1}{5}$, zaś tego ostatniego względem prędkości wiatru gwałtownego; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{27}$, $\frac{13}{32}$.

3) średnia prędkość wody jest $\frac{3+7}{2} = 5$ stóp na sekundę. Średnia prędkość wiatru wielkiego jest 50 stop na sekundę. Bez użycia więc ułomków ciągłych, oznaczemy ułomkiem 1szą względem 2éj $\frac{1}{10}$.

4) $\frac{7}{123}$, co za pomocą ułomków ciągłych, znajdziemy bliskie $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{35}$.
5) prędkość wiatru gwałtownego względem prędkości głosu oznaczona ułomkiem zwyczajnym jest $\frac{125}{1158\frac{1}{3}}=\frac{375}{3475}$; co za pomocą ułomków ciągłych jest bliskie $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{28}$, $\frac{4}{37}$, i t. d. Podobnież znajdziemy oznaczenie prędkości głosu względem prędkości światła, lecz 1ód trzeba tę ostatnią oznaczoną w milach oznaczyć w stopach.

IX. 1) $\frac{120}{163}$; 2) $\frac{97}{56}$; 3) $2\frac{31}{48}=\frac{127}{48}$; 4) $\frac{396}{881}$.

X. Ułomek ciągły powstał ze zwyczajnego $\frac{103}{323}$.
1) $\frac{103}{323}$ tal. $=$ 1 zł. $27\frac{139}{323}$ gr. biorąc zaś cząstki ułomku ciągłego, wypada $\frac{1}{3}$ tal. $=$ 2 zł.; $\frac{7}{22}$ tal. $=$ 1 zł. $27\frac{3}{11}$ gr.; $\frac{15}{47}$ tal. $=$ 1 zł. $27\frac{41}{47}$ gr.; $\frac{22}{69}$ tal. 1 zł. $27\frac{27}{69}$ gr.
2) $\frac{103}{323}$ rub. $=$ 2 zł. $3\frac{251}{323}$ gr.; biorąc zaś cząstkowo ułomek ciągły, wypada $\frac{1}{2}$ rub. $=$ 2 zł. $6\frac{2}{3}$ gr.; $\frac{7}{22}$ r. $=$ 2 zł. $3\frac{7}{11}$ gr.; $\frac{15}{47}$ r. $=$ 2 zł. $3\frac{39}{47}$ gr.; $\frac{22}{69}$ r. $=$ 2 zł. $3\frac{150}{207}$ gr.

XI. Rozwijając ułomki $\frac{2183}{3475}$ i $\frac{4279}{5479}$ na ciągłe i biorąc ich wyrazy dwa, trzy, cztery i t. d., znajdziemy ułomki 1ód: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, i t. d. 2re $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$ odpowiadające zagadnieniu. Aby zaś mieć ułomki w średniém przecięciu z obu lat, potrzeba dodać liczbę chorych i liczbę przywróconych do zdrowia i następnie ułomek $\frac{3231}{4477}$ zamienić na ciągły z którego dojdziemy do ułomków $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{13}{18}$, odpowiadających zagadnieniu.

XII. Wysokość kolumny Pompejusza tudzież obelisku alexandryjsk. względem wysokości samego słupa granitowego kolumny ALEXANDRA jest $\frac{333}{444}=\frac{3}{4}$ bez użycia ułomków ciągł. Wysokość kolumn watykańskiéj tudzież Izaakowskiéj względem wysok. tegoż słupa granitowego jest $\frac{34515}{38174}$ i $\frac{890}{1332}$, co przez przybliżenie = ułomkom $\frac{9}{10}$, $\frac{19}{21}$, $\frac{66}{73}$... i $\frac{2}{3}$, $\frac{55}{77}$, $\frac{57}{85}$.... i t. d. Wysokości zaś tych 4ch kolumn względem całéj wysok. kolumny ALEXANDRA są: $\frac{2331}{5725}$ $\frac{2331}{5725}$, $\frac{48321}{98470}$ i $\frac{1246}{3435}$ — $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{27}$....; $\frac{1}{2}$, $\frac{26}{53}$, $\frac{53}{108}$....; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{37}{102}$.... i t. d.

Stron. 145. nº 205.

I. Tal. 56, zł. 3, gr. 29.

II. Ma razem duk. 15, zł. 4, gr. 6.

III. 1) Sążni 303, stop 2, cali 10, linii $1\frac{2}{3}$; 2, 270 prętów, 6 stop, 1 cal.

IV. Sążni 144, arszynów 2, werszków 5.

V. Grzyw. 280, uncyi 2, dr. 1, gran. 57.

VI. Kam. 14, funt. 15, unc. 10.

VII. Beczek 27, ośmin 6, garcy 5.

VIII. Beczek 31, ośmina 1, czetwerików 2, (ośmina ma 4 czetweriki.)

IX. Łaszt. 81, kor. 2, ćw. 2, garcy 3.

X. Gar. 379, kwart 2, kwaterek 2.

XI. Beczek 44, garcy 2, kw. 2.

XII. Oziminy w folwarku 1) kor. 153, ćw. 1, gar. 2; w 2) kor. 177, ćw. 3, gar. 4; w 3) kor. 179, cw. 1, gar. 5; we wszystkich kor. 510, ćw. 2, gar. 3. Jarzyny w folwarku 1) kor. 169, ćw. 3; w 2) kor. 185, ćw. 2, gar. 3; w 3) kor. 182, gar. $1\frac{1}{2}$; we wszystkich kor. 537, ćw. 1, gar. $4\frac{1}{2}$. We wszystkich folw. żyta kor. 367, ćw. 3, gar. 2; pszen. kor. 142, ćw. 3, gar. 1; owsą kor. 287, ćw. 1; jęczm. kor. 197; grochu kor. 45, ćw. 3, gar. 3; prosa kor. 7, ćw. 1, gar. $1\frac{1}{2}$.

XIII. Garcy 33, kwater. 3; za to wziął zł. 74, gr. 26.
XIV. Cet. 1555, kam. 3, f. 21; za to duk. 26 106, zł. 1, gr. 3.
XV. Bel 22, liber 15, ark. 20.
XVI. Dni 8, godzin 17, 14', 1".
XVII. Urodziła się dnia 9 marca 1773 roku.
XVIII. 22 Stycz. 1801 r., mając lat 49, mies. 5, dni 6.
XIX. Włók 39, morg. 29, pręt. kwadr. 266.
XX. Ubiega w 2ch 1szych sekundach łok. 34, cali 22; w 3ch 1szych łok. 78, cali 13, lin. 6; w 4ch 1szych łok. 139, cali 16; w 5ciu, łok. 218, c. 5, l. 6; w 4ch ostatnich ł. 209, c. 12; w 3ch ostatnich łok. 183, c. 7, l. 6; w 2ch ostatnich łok. 139, cali 16.

Stron. 151 n° 209.

I. 1) Duk. 1, zł. 6, gr. 7. 2) 35 półimper. 1 rubel, 1 połtyna, 2 grywenniki.
II. 1) Duk. 312, tal. 3, zł. 4, gr. 1; 2) 75 imper. 1 półimp. 1 rubel, 1 połtyna, 3 grywenniki.
III. Sążni 167, stop. 1, cali 8, lin. 2.
IV. 3 wersty, 319 sążni, 2 arsz. 2. ćw. 1 wérszek.
V. Pozostaje sąż. 5, łok. 2, stop. 1, cal. 10.
VI. Zostaje do przejechania mil 48, wersta 1.
VII. Ma jechać mil 31, ćw. 2.
VIII. Jest łok. 41, ćw. 3, cali 5.
IX. 1) Cet. 16, kam. 1, łut. 8; 2) 39 f. 11 unc. 5 dr. 44 gr. 3) 1 pud, 1 f., 17 ł. 4) 32 ł. 28 ł. 1 zołot.
X. Odp. funt. 27, unc. 2, łut. 1.
XI. Odp. 3 dni, 16 godz. 51' 25"
XII. 70 lat, 3 mce, 21 d. 23 godz. 12'; pokazuje długość życia najsławniejszego astronoma. Napiszemy dni 21

nie 20, bo maj jako 5ty miesiąc w porządku roku ma dni 31, więc i t. d.

XIII. Pozostaje kop. 4, snopków 9.
XIV. Łaszt. 3, kor. 20, ćw. 2, gar. 4.
XV. Odp. bela 1, ryz 8, liber 16.
XVI. Ponieważ sznur kwadr. zawiera 100 prętów kwadr., a pręt kwadr. 100 pręcików kwadr.; znajdziemy 2 sznury kwadr. 95 pręt. kwadr. 94 pręcik. kwadr.

XVII. Odp. znajdzie sam rozwięzujący i przekona się próbą o jéj dokładności.

XVIII. Od odkrycia Cerery, 40 lat, 7 mcy i 21 dni; Pallady, 39 lat, 4 mce i 21 dni; Junony, 36 lat, 11 mcy i 18 dni; Westy 34 lat, 4 mce i 20 dni.

XIX. Urodziła się dnia 26 Maja 1782 roku.
XX. Paweł jest starszy od Jana o lat 13, m. 7, d. 27, g. 17. Długość wieku ich życia zależy od daty zadania, wszakże ta nie powinna być tak późną, aby długość życia ludzkiego przenosiła.

Stron. 161. n° 217.

I. Licząc w roku dni 365, wydam na rok zł. 73.
II. Straci czasu na rok godz. 36, min. 30.
III. Jeżeli wszyscy razem tęż samę ukonczyli pracę co 1szy, tedy im się należyć będzie także 8 tal. 3 zł. 17 gr. Jeżeli zaś każdy z nich wykończył to co 1szy, więc im się należy 77 tal. 2 zł. i 3 gr.
IV. 1) zł. 39, gr. 10; 2) 19 gr. $7\frac{55}{74}$ den.
V. 1) funt. 1057 łut. $14\frac{17}{45}$; 2) funt. 488, łut. $2\frac{7}{20}$.
VI. 1) duk 1803; zł. 7; 2) zł. 423, gr. 24; 3) duk. 49, zł. 14.

VII. 1) duk 14, zł. 17, gr. 18; 2) zł. 142, gr. 15; 3) r. 188, kop. 50; 4) r. 34, kop. $19\frac{27}{32}$; 5) duk. 120, zł. 14, gr. 12.

VIII. 1) duk 23, gr. 15; 2) duk 338, zł. 14, gr. $6\frac{7}{20}$; 3) r. 154, kop. $53\frac{19}{25}$; 4) r. 115, kop. $52\frac{24}{25}$; 5) duk. 14, zł. 7, gr. $16\frac{1}{4}$.

IX. Korcy 20, ćw. 3, gar. $6\frac{11}{48}$.

X. Korcy 22, ćw. 3.

XI. Rubli 27, kop. $11\frac{7}{18}$.

XII. 1) Każdy zarobi duk. 17, zł. 12, gr. 12; a wszyscy duk, 424, zł. 9, gr. 18; 2) każdy tal. 38, zł. 4, gr. 12, a wszyscy tal. 576.

XIII. 1) Wielki tuzin kosztuje tal. 104. zł. 4, gr. 24; 2) tal. 1630, zł. 5, gr. 28.

XIV. 1) tal. 24732, zł. 1, gr. $12\frac{6}{17}$; 2) zł. 92172, gr. 12,

XV. Zł. 992, gr. 24.

XVI. 1) 177 tal. $10\frac{13}{20}$ gr.; 2) r. 222, połt. 1, kop. $13\frac{1}{2}$; 3) r. 733, kop. $78\frac{1}{2}$; 4) r. 166, grywen. 1, kop. 6.

XVII. 1) duk 317, zł. 2, gr. $18\frac{89}{200}$; 2) duk 64, zł. 7, gr. $3\frac{3}{4}$; 3) duk 235, zł 14, gr. $24\frac{2}{3}$.

XVIII. Zł. 480, gr. 20.

XIX. 1) kop. 54, mędli 2; 2) korcy 159, gar. $7\frac{3}{4}$.

XX. Tal. 120 zł. 5, gr. 10.

XXI. 1) duk. 35, zł. 3, gr. 22; 2) 42; 3) duk. 52, zł. 4, gr. 24.

XXII. 1) duk. 14, zł. 1; a odda duk. 100, zł. 17; 2) 2 gr. i 6 de. wzięte 50000 razy $=116666\frac{2}{3}$ gr. które zamienione na zł. czynią $3888\frac{8}{9}$ zł. Te odjąwszy od 50000 zł. zostaje $46111\frac{1}{9}$ zł. do wypłacenia. Możnaby znaleźć rozwiązanie i w ten sposób: 2 i $\frac{1}{3}$ gr.

19*

są $\frac{7}{90}$ zł. wziąwszy więc $\frac{7}{90}$ z 50000 zł. będzie $3888\frac{8}{9}$ zł. i t. d.

XIII. 15179 zł. 23 gr. $13\frac{1}{2}$ den.

Stron. 171, nº 227.

I. Każdy dostanie duk. 95, tal 2, zł. 5, gr. 28.

II. Sztuka kosztuje duk. 1, zł. 3, gr. $5\frac{1}{9}$.

III. Będzie łok. 4, ćw. 3, c. $5\frac{5}{9}$.

IV. Po duk. 4, zł. 2, gr. $7\frac{381}{461}=7\frac{5}{7}$ gr. prawie.

V. Po duk. 11, zł. 15, gr. $29\frac{47}{107}$.

VI. Mięsa 72 kam. 3 fun. $10\frac{2}{3}$ łuta. Chleba 54 kam. 4 fun. Soli 4 kam. 12 fun. 16 łut.

VII. Potrzeba czerw. zł. 798 $\frac{11}{94}$.

VIII. 1) rub. srb. 5734 $\frac{3}{10}$; 2) rub. ass. 22937 $\frac{1}{5}$; 3) imperyjałów 1112 $\frac{388}{1031}$; 4) franków 23891 $\frac{7}{8}$.

IX. Odp. dni 253 $\frac{51}{2547}$.

X. 1) Łokieć po duk. 1, zł. 11, gr. 10 $\frac{2}{7}$; 2) arszyn po rub. 3, kop. 63 $\frac{11}{63}$.

XI. Odp. sąż. 57 $\frac{3}{1156}$.

XII. Płacono funt po zł. 1, gr. 5.

XIII. 1) rub. 13, kop. 20 $\frac{18}{65}$; 2) r. 6, połt. 1, kop. $47\frac{4}{7}$.

XIV. Kopa wydaje kor. 1, ćw. 1, gar. 3 $\frac{79}{287}$.

XV. Wydaje mąki kor. 1, gar. $7\frac{1}{31}$.

XVI. 1) r. sr. $19\frac{11}{40}$; 2) r. ass. 77 $\frac{1}{10}$

XVII. 1) kam. 2, fun. $19\frac{17}{30}$; 2) duk. 1, zł. 7, gr. 15; 3) gr. 10 i prawie $\frac{1}{24}$ gr.

XVIII. Berk: po r. 85, połt. 1, kop. 30 $\frac{1420}{1813}$; pud: po r. 8, połt. 1, kop. 8 $\frac{142}{1813}$; f: po kop. 21 $\frac{8194}{18130}$.

XIX. Odp. 16 robotników.

XX. Rub. 10, gryw. 2, kop. 7 $\frac{69}{193}$.

XXI. Po zł. 3, gr. 29 $\frac{7}{15}$.

XXII. Kupiono grzywien 30, unc. 7.

XXIII. 1) Sznur. 9, pręt. $5\frac{3}{4}$; 2) pręt $5\frac{63}{64}$.
XXIV. 1) r. 2, kop. $50\frac{5}{9}$; 2) $15\frac{1}{2}$.

Stron. 173, n° 228.

I. Pszen. kor. $4\frac{44}{105}$, ćw. $3\frac{1}{5}$. Żyta kor. $15\frac{2}{3}$, ćw. $\frac{3}{22}$.

II. Pozostał winnym zł. $9\frac{997}{1260}$.

III. B. winna jest duk. 87, tal. 1, zł. 2, gr. 16; C. duk. 91, zł. 4, gr. 13. Wszystkie duk. 253, tal. 2, gr. 17.

IV. 1) Miał lat 45, i dni 16; 2) lat 57, mcy 5. Ur. się r. 1775 d. 18 Lutego.

V. 1) $12\frac{1}{2}$ tal.; 2) tal. 35, zł. 4, gr. 4.

VI. Na całéj sztuce ubyło ćw. 2, cali 4; a na każdym łokciu $\frac{13}{25}$ cala prawie.

VII. Traci zł. 24.

VIII. 1) Traci zł. 70; 2) zyskuje zł. 8, gr. 10.

IX. Należy mu się tylko zł. 65, gr. 18.

X. Należy dopłacić złotnikowi zł. 191, gr. $26\frac{27}{32}$.

XI. 35496 stóp kwadr. a zł. 2366, gr. 12.

XII. Potrzeba będzie duk. 129 i $\frac{101}{141}$.

XIII. 1) zł. 4470. gr. 12; 2) duk. 25, zł. 7, gr. 15.

XIV. 1) Stracił zł. 19, gr. 27; 2) łok. po duk. 1, zł. 15, gr. 19 $\frac{31}{330}$; 3) łok. $35\frac{172}{225}$.

XV. 1) Potrzeba dać zł. 100 i gr. 24.
2) Potrzebowałby dać zł. 124 i gr. 24.

XVI. W zagad. nie masz danéj odległości z Warsz. do Petersb. a że ta wynosi mil 188, więc gołąb' potrzebawałby $188 : \frac{506}{3} = \frac{564}{500} = 1\frac{16}{125}$ dni. Koń zaś (rachując na milę 14500 łok, ubiegłby, gdyby z jednaką mógł biedz prędkością $178\frac{22}{29}$ mili na dzień), $198 : 178\frac{22}{29} = 1\frac{67}{1296}$ dni. Koń więc dobiegłby prędzéj o $\frac{12361}{162000}$ dnia, czyli 1 g. 49 min. $52\frac{8}{15}$ sek.

XVII. 1) zł. 198, gr. 12; 2) $29\frac{19}{25}$ r. sr.; 3) $119\frac{19}{25}$ r. ass.; 4) 11 duk. 12 gr.

XVIII. 1) $196\frac{21}{131}$; 2) $35\frac{33}{79}$ frydrychsd.

XIX. Zyskano duk. 14, zł. 1, gr. 12.

XX. Zyskano duk 69, zł. 8, gr. 24.

XXI. Zyskał duk 4, zł. 9, gr. $25\frac{1}{2}$.

XXII. Zyskał duk. 291, zł. 12, gr. 14.

XXIII. Po duk. 2, zł. 3, gr. $23\frac{1}{7}$.

XXIV. Po duk. 1, zł. 6, gr. $18\frac{32}{211}$.

XXV. Po duk. 1, zł. 10.

XXVI. 1) Sprzedał bel 18, lib. 15, ark 7, zostało mu bel 49, ryz 4, liber 4, ark. 17; 2) sprzedał berk. 3, p. 4, f. 28; ma zaś jeszcze berk. 18, pud, 5, f. 12.

XXVII. Po gr. 11, i pr, $\frac{2}{13}$.

XXVIII. Po zł. 29 gr. $7\frac{74}{105}$.

XXIX. Garcy 35, kwart 2, kwat. $2\frac{19}{1545}$.

XXX. Po duk. 1, zł. 6, gr. 9 i $\frac{8}{17}$ czyli prawie $\frac{1}{2}$ gr.

XXXI. Garniec po zł. 3, gr. 29 i prawie $\frac{1}{2}$ gr.

XXXII. Po duk. 87, zł. 2, gr. $19\frac{1}{12}$.

XXXIII. Cena duk. 4, zł. 1, gr. $7\frac{18}{347}=6\frac{1}{10}$ prawie.

XXXIV. Po zł. 7, gr. 22 i $\frac{5}{6}$ gr. ułomek za pomocą ułomków ciągłych znaleziony.

XXXV. Garniec 1go ma sprzedawać po duk 2, zł. 10, gr. 1; 2go po duk. 2, zł. 1, gr. $27\frac{3}{11}$.

XXXVI. Po zł. 4, gr. 1 i prawie $\frac{1}{8}$.

XXXVII. 1) Skib podłużnych będzie 1804.

2) Zaorze w godzinach $289\frac{47}{120}$.

3) Zawracanie zabierze godzin $6\frac{153}{200}$.

4) Oranie wszerz zabiera godzin $293\frac{68}{75}$, gdyż na zawracanie wypada godzin $11\frac{7}{25}$.

XXXVIII. Gar. 62968. Żyta oszczędzi się kor. $3109\frac{45}{81}$.

XVII. [illegible] zł. 199. gr. [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] 11 [illegible] 18 gr.

XVIII. 1) 198 [illegible] 2) 35 [illegible]

XIX. Zyskano duk. 14, zł. 5, gr. 12.

XX. Zyskano duk. [illegible], zł. 8, gr. 24.

XXI. Zyskał duk. 4, zł. 9, gr. 25[illegible].

XXII. Zyskał duk. 291 [illegible]

XXIII. Po duk. 2, zł. 3, gr. 23 [illegible]

XXIV. Po duk. 1, zł. 6, gr. 19 [illegible]

XXV. Po duk. 3, zł. 10.

XXVI. 1) Sprzedał beł 18, lib. 15, duk. 3 [illegible]
bel [illegible], lib. 4, [illegible] 3) [illegible]
3 [illegible] mu jeszcze beł. 18, [illegible]

XXVII. Po gr. 11 i [illegible]

XXVIII. Po zł. 29 gr. 7 [illegible]

XXIX. Garcy 35, kwart 3, [illegible] 1 [illegible]

XXX. Po duk. 1, zł. 1, gr. 9 [illegible] czyli prawie [illegible]

XXXI. Garniec po zł. 3, gr. 29 i prawie [illegible]

XXXII. Po duk. 22, zł. 2, gr. 19 [illegible]

XXXIII. Cena duk. 4, zł. 1, gr. 7 [illegible] prawie.

XXXIV. Po zł. 7, gr. 28 i [illegible] gr. [illegible] za pomocą
ułamków ciągłych znaleziony.

XXXV. Garniec 1go ma [illegible] po duk. 2, zł. 11,
gr. 1, 2go po duk. [illegible]

XXXVI. Po zł. 4, gr. 1 i prawie [illegible]

XXXVII. 1) Sztab [illegible] będzie 1 [illegible]
2) Zegarze w godzinach [illegible]
3) Zatrudnienie żołnierzy godzin [illegible]
4) Ogólne [illegible] żołnierza godzin 295 [illegible], gdyż na
zatrudnienie wypada godzin 14 [illegible]

XXXVIII. [illegible] 12998. Życie [illegible] 2100 [illegible]