SWIERZBIENSKI

JEOMETRYA

Jan Nepomucen Frejdziewicz
1855 r.

KURS
JEOMETRYI ELEMENTARNÉJ
Z RYSUNKIEM JEOMETRYCZNYM
I ZASTOSOWANIAMI

PRZEZ

M. Świerzbieńskiego,
Kand. Fil. Nauczyciela Matematyki
w Gimnazyum Realnem Warszawskiem.

WARSZAWA,
Nakładem Autora,
w Drukarni Józefa Tomaszewskiego
przy ulicy Bielańskiej Nr. 600.

1848.

WOLNO DRUKOWAĆ,

z warunkiem złożenia w Warszawskiém Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie dnia 23 Kwietnia (5 Maja) 1848 r.

Cenzor,

L. T. Tripplin.

PRZEDMOWA.

Na współdziałaniu zdolności teoretycznéj i praktycznéj, na połączeniu tych dwóch kierunków, opiera się postęp każdéj umiejętności, zatém i Jeometryi. Umysł badający oczyszcza i prześwietla mętny chaos faktów i własną mocą wykrywa nowe prawdy,—a powszechne koniecznością kierowane prace, skrzętne kombinacye praktycznego człowieka, wskazują nowe widoki tam, gdzie ograniczone warunki myślącéj indywidualności sięgać nie pozwalają. Na pracach taką podwójną spłodzonych drogą, powstaje system wszechstronny, stapiający w pewnym momencie całość prawdy, w którym nauka staje się pełną i praktyczną, a empirya rozumną i konieczną.

Do utworzenia takiego systematu w Jeometryi dążyłem. O ile wymaganiu założonemu uczyniłem zadość, światły czytelnik oceni; uważam wszakże stosownem wskazać na te punkta, które mi się zdawały stanowić własność i zasługę mego poglądu.

Przedewszystkiem, w rozwijaniu pojęć jeometrycznych, starałem się zachować nieprzerwany a jednostajny ciąg i apodyktyczne następstwo myśli, mianowicie w szczególnych traktatach nauki, nie cofałem się do ulubionego punktu wyjścia: własności trójkątów, ale rozpoczynając całość od prawd oczywistych, z nich i z poznanych już własności figur, wyprowadziłem nowe prawdy. Słusznie bowiem powiedział Kant, że jeśli dla dojścia do celu potrzeba będzie często wracać do punktu, od któregośmy zaczęli, żeby nową przedsięwziąć drogę, to z tego można wnosić, że nauka daleką jest od drogi pewnéj, któréj szuka tylko po omacku, ale jéj nie znajduje; jedném słowem że nie ma nauki; a przedewszystkiém o naukę idzie, o prawdę nie o użytek. W pracy méj nie chciałem się pochłonąć jednostronnie pojętym pedagogicznym celem: poczynienia ułatwień dla uczących się,—zwykle bowiem takie ułatwienia dzieją się nie inaczéj jak kosztem nauki saméj; kosztem myślącéj i tworzącéj zdolności uczącego się; nauka zamienia się w aggregat faktów, dogodnie zastosowanych dla *pamięci*, w kupę wolną całości i związku; przytem nawet ważny pedagogiczny cel: wszechstronnego rozwinięcia władz poznawania, należycie osiągniętym być nie może. To jest wreszcie najłatwiejsze, co najlogiczniejsze, najprostsze.

Tak tedy, podług najlepszéj wiedzy mojéj, urządziłem czcigodny budynek przeszłości; ważniejsze zmiany względem zwykłego rzeczy traktowania, zawierają się w traktatach: o dwóch liniach prostych leżących na płaszczyznie, o równości, podobieństwie i symetryczności figur, tudzież o zależności wielkości figur równoobwodowych do ich kształtu.

Dołączone, odpowiednio rozwinięciu teoryi, zagadnienia i zastosowania, objaśniając prawdy podane i wskazując sposób w jaki one stosowanemi być winny, dopełniają całości nauki i mojéj książki.

Przez łączne objęcie tak zasad jak i zastosowań, mianowicie: traktując Jeometryę elementarną już jako izagogikę Jeometryi wyższéj, już jako naukę pomocniczą w Matematyce stosowanéj, tudzież przewodniczącą w rzemiosłach; a przeto odpowiednio wymaganiom tak realnego jak i ogólnego ukształcenia, zatém równie właściwą dla szkół realnych, jako i filologicznych (opuszczając tylko w ostatnich zastosowania), sądziłem że zadosyć czynię wymaganiom teoretycznym i praktycznym potrzebom.

Oddaję pracę moją pod bezstronny sąd publiczny w przekonaniu, że w dzisiejszym stanie literatury matematycznéj krajowéj, nie będzie ona bez pożytku, gotów zawsze stanąć w zapasy za przekonanie, dobrą wiarą i pracą bez uprzedzeń zdobyte, a poddać się wszechstronniejszemu, jakie w rozwoju nauki jest konieczne.

WSTĘP.

I. Wszystko co działa na nasze zmysły zowie się ciałem.

Ciała mogą być uważane pod trzema względami:

a) pod względem kształtu, mogą być kuliste, wielościenne i t. p.

b) pod względem wielkości,—mogą być równe, albo jedno większe od drugiego;

c) pod względem jakości, czyli składu wewnętrznego;—mogą być złożone z jednakowéj, lub téż niejednakowéj materyi.

Dwa jakiekolwiek ciała jednakowego kształtu, mogą się różnić wielkością;—jednakowego kształtu i wielkości, mogą się różnić co do jakości;— mające zaś wszystkie trzy własności jednakowe, zupełnie nie różnią się od siebie tak, że jedno za drugie może być wziętem;— przeto te trzy własności wyczerpują zupełnie istotę ciała; i dla tego ciała mogą być uważane tylko pod temi trzema względami.

II. Jeżeli weźmiemy za przedmiot poznania naszego kształt i wielkość ciał, to do ich poznania nie możemy dojść, za pomocą rozważania samychże ciał, po-1sze, z przyczyny nieograniczonéj ich liczby; po-2gie, że codzienne potrzeby życia wymagają nadawania ciałom ciągle odmiennego kształtu, stosownie do celu na jaki są przeznaczone; a w tym względzie istniejące ciała nie nastręczają przykładu.

III. Zastanowiwszy się nad jakiémkolwiek ciałem, widzimy że ono ma granice oddzielające je od innych ciał, i te granice zowią się *powierzchniami*. Krawędzie czyli przecięcia się tych powierzchni, zowią się *liniami*. Krawędzie czyli linie, ograniczają się przez spotkanie się z drugiemi liniami lub téż powierzchniami; granice zaś te zowią się *punktami*. Ztąd wynika: że powierzchnia, jest granicą ciała; linia, powierzchni; punkt zaś, granicą linii.

Powierzchnia przecinając ciało, przecina zarazem niektóre z ograniczających je powierzchni z ich krawędziami; tym sposobem na powierzchniach tworzą się linie, a na liniach, punkta. Lecz podzielność jest główną własnością ciał, przeto na powierzchni można poprowadzić dowolną liczbę linii; na linii zaś, wziąć można dowolną liczbę punktów.

W każdém miejscu powierzchni, można poprowadzić przecinające się linie, ich przecięcie się zowie się punktem; i dla tego każde miejsce powierzchni zowie się punktem.

IV. Nie ma nawet dwóch ciał mających kształt zupełnie jednakowy, jednak wiele jest ciał co do kształtu do siebie podobnych: jak kuliste, graniaste i t. p. Dla oznaczenia tego podobieństwa, a tém samém i samego kształtu ciał, potrzeba przyjąć za stały taki kształt, do którego najbardziéj zbliża się kształt ciał podobnych do siebie; taki to kształt jest ciałem wyobrażalném czyli jeometryczném. I tak: w ciałach kulistych spostrzegamy, że różnica między odległościami punktów ich powierzchni od punktu wewnątrz wziętego w jednych jest większa, aniżeli w drugich, i dla tego za stały przyjmujemy taki kształt, w którym te odległości są jednakowe, i któryto zowie się *kulą*. Żadne ciało nie ma takiego kształtu, lecz tylko kształt ich zbliża się do kuli. Podobnym sposobem dochodzimy do pojęcia innych jeometrycznych ciał czyli *brył*.

V. Różnica między bryłą a ciałem jest ta, że pierwsza jako wyobrażalna *a*) niéma jakości czyli składu wewnętrznego, a przeto może być tylko uważana pod względem kształtu i wielkości; *b*) że ona bez przerwy może się powiększać i zmniejszać, ciała zaś choćby się i żmniejszały z powodu dzielenia, to w tém zmniejszaniu się zawsze są przerwy.

VI. Powiększanie się i zmniejszanie brył nie ma granic. Stopniowe powiększanie się brył doprowadza nas do pojęcia *przestrzeni*, stopniowe zaś zmniejszanie się do pojęcia *punktu*. Przestrzeń i punkt mają kształt nieoznaczony, czyli są bezkształtne, gdyż do ich pojęcia przychodzimy z rozważania jakiéjkolwiek bryły; pod względem zaś wielkości: przestrzeń jest nieskończenie wielką, punkt zaś nieskończenie małym, dla tego, że pierwsza jest większą, a drugi mniejszym, od wszelkiéj ograniczonéj wielkości.

VII. Ograniczenia ciała zowią się powierzchnią, linią, punktem (III), z tego powodu i granica bryły zowie się także *powierzchnią*, granica téj powierzchni *linią*, granica linii *punktem*. One są tylko wyobrażalne, i razem z bryłą mogą się powiększać lub zmniejszać, ograniczenia zaś ciała podpadają pod zmysły, i tak jak samo ciało, ani powiększać się, ani zmniejszać nie mogą.

VIII. W bryle, podobnie jak w ciele, można poprowadzić dowolną liczbę powierzchni, które zrodzą na powierzchniach bryły dowolną liczbę linii, zaś na liniach taką samą liczbę punktów (III); i dla tego bryłę można uważać, za powierzchnie; powierzchnię, za linie; linię za *punkta*,—bez przerwy po sobie następujące. Z tego to powodu tworzenie się tych wielkości przedstawiamy w następujący sposób:

Droga przez punkt przebieżona, jako szereg punktów bez przerwy idących, zowie się linią. Dla téj saméj przyczyny droga przebieżona przez linię zowie się powierzchnią; przebieżona zaś przez powierzchnię, bryłą.

* * *

IX. Linia jako nieprzerwany szereg punktów jest tylko wyobrażalną. Pojęcie o niéj powinno być oznaczone, inaczéj bowiem nie moglibyśmy wykryć szczególnych jéj własności. Linia w myśli wtenczas tylko jest oznaczoną, gdy przedstawimy sobie tworzące ją punkta jako mające jedną główną własność. Z tego to powodu *linie, pod względem kształtu, są to punkta bez przerwy po sobie idące, mające jednakową własność główną*: np. linia prosta, jest to szereg nieprzerwany punktów jednakowo położonych ze wszystkich stron,

2

względem dwóch jakichkolwiek jéj punktów. Dla téj saméj przyczyny pod względem kształtu *powierzchnie są to linie bez przerwy po sobie idące, mające jedną własność wspólną*: np. płaszczyzny, są to linie proste bez przerwy po sobie idące, przecinające się z dwoma zbiegającemi się prostemi. *Bryły, są to powierzchnie ograniczone, bez przerwy po sobie idące, mające główną własność wspólną.* Powierzchnie tworzące bryłę dla tego są ograniczone, gdyż inaczéj otrzymalibyśmy pojęcie bryły nieograniczonéj, czyli przestrzeni.

* * *

X. Ze sposobu tworzenia się wielkości przestrzennych, otrzymaliśmy ich własności ściągające się do kształtu; własności zaś co do ich wielkości są:

1) Pod względem wielkości punkt jest nieskończenie mały (VI), a tém samém nie może być zmierzonym; i dla tego linia, jako droga przez punkt przebieżona ma tylko jeden wymiar, zależący od wielkości drogi przebieżonéj, zwanéj *długością*. Dla zmierzenia linii trzeba tylko zmierzyć jéj długość; i dla tego długość zowie się wymiarem linii—*linia zaś, wielkością przestrzenną jednowymiarową; czyli rozciągłością uważaną pod jednym wymiarem długości.*

2) Wielkość i stosunek powierzchni, jako drogi przebieżonéj przez linię, zależy tylko od *długości* téj linii, zowiącéj się w tym razie *długością powierzchni*, —i od odległości, na którą ona oddaliła się od pierwiastkowego swego położenia. Odległość ta mierzy się

linią zwaną *szerokością powierzchni*. Ztąd wynika że: 1) powierzchnie, mające równe długości i szerokości, są sobie równe; 2) przy równych długościach, jedna powierzchnia tyle razy jest większa od drugiéj, ile razy szerokość pierwszéj, jest większa od szerokości drugiéj powierzchni, czyli powierzchnie te są w stosunku szérokości—i nawzajem powierzchnie mające równe szerokości, mają się do siebie w stosunku długości; 3) w ogólności zaś powierzchnie mają się do siebie jak iloczyny z długości przez szerokość; czyli jedna powierzchnia tyle razy zawiera się w drugiéj powierzchni; ile razy iloczyn z długości, przez szerokość pierwszéj, zawiera się w podobnym iloczynie drugiéj powierzchni. Za jedność do mierzenia powierzchni zazwyczaj przyjmujemy taką powierzchnię, któréj długość i szerokość, równają się jedności przyjętéj za jedność do mierzenia linii; iloczyn więc z liczebnéj wartości z długości przez szerokość, dla powierzchni przyjętéj za jedność, równa się także jedności liczebnéj: przeto jedność powierzchni tyle razy zawiera się w mierzonéj powierzchni, ile zawiera jedności iloczyn z liczebnéj wartości długości, przez szerokość mierzonéj powierzchni. Ztąd wynika, że dla mierzenia powierzchni, mierzymy tylko jéj długość i szerokość, które z tego powodu zowią się wymiarami powierzchni,—*powierzchnię zaś nazywamy wielkością przestrzenną dwuwymiarową; czyli rozciągłością uważaną pod dwoma wymiarami, długości i szerokości.*

3) Wielkość i stosunek brył zależy od tworzącéj ograniczonéj powierzchni, przeto od jéj długości i

szerokości, zowiących się w tym przypadku *długością i szerokością bryły*, i od odległości, na którą oddaliła się ta powierzchnia, od pierwotnego swego położenia, mierzonéj linią zwaną *wysokością*, *grubością*, albo *głębokością* bryły. Powierzchnia przeto tworząca, względem bryły takie zajmuje miejsce, jakie, tworząca linia, względem powierzchni: a zatém bryły 1) mające powierzchnie i wysokości równe, mają wielkość jednakową; 2) mające powierzchnie równe, mają się do siebie jak wysokości; i nawzajem mające wysokości równe, mają się do siebie jak tworzące powierzchnie; 3) w ogólności zaś są w stosunku iloczynów z podstaw, przez wysokości, czyli: jedna bryła tyle razy zawiera się w drugiéj, ile razy iloczyn z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości pierwszéj, zawiera się w podobnym iloczynie drugiéj bryły. Dla mierzenia brył zazwyczaj przyjmujemy za jedność taką bryłę, któréj długość, wysokość i szerokość równają się jedności przyjętéj do mierzenia linii; iloczyn więc z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości dla téj jedności brył, równa się liczebnéj jedności; a zatém jedność brył, tyle razy zawiera się w mierzonéj bryle, ile jedności zawiera w sobie iloczyn z liczebnéj wartości długości, szerokości i wysokości téj bryły. Z tego to powodu dla zmierzenia bryły, mierzymy jéj długość, szerokość i wysokość, które dla tego zowią się wymiarami bryły: *bryła zaś wielkością przestrzenną trzechwymiarową; czyli, rozciągłością uważaną pod trzema wymiarami długości, szerokości i wysokości.*

XI. Własności kształtu i wielkości linii, powierzchni i brył, jako zlewające się w tych ilościach, zależą jedne od drugich—i tak: linia pod względem kształtu, jest nieprzerwanym szeregiem punktów mających jednakową własność (IX); pod względem wielkości, może być wyobrażaną jako nieskończona (VII): lecz linię wtedy tylko można wyobrazić jako nieskończenie wielką, gdy oprócz jéj punktów mających jednakową własność, niéma innych punktów mających tę samą własność; w przeciwnym razie choćbyśmy pod względem wielkości, wyobrazili linią większą od wszelkiéj oznaczonéj długości, to z przyczyny niezupełności kształtu, punkta nieleżące na téj linii, lecz mające z punktami téj linii jednakową własność, utworzyłyby także linię, będącą przedłużeniem pierwszéj, uważanéj za nieskończenie wielką; a która w tym razie niebyłaby taką, jako mniejsza od téj, którą możemy wyobrazić. Linia więc niezawierająca wszystkich punktów mających jednakową własność, nie może powiększyć się do nieskończoności—a przeto nie byłaby jeometryczną. Ztąd wynika, że *linia jest to nieprzerwany szereg wszystkich punktów, mających jednakową własność wspólną*; linia zaś niezawierająca wszystkich punktów, jest tylko *częścią* czyli *odcinkiem linii* np. łuk. Z tego to powodu linia może być złożoną z dwóch oddzielnych części: czyli może mieć odnogi, których punkta mają jednakową własność.—To się odnosi równie do powierzchni i do bryły.

XII. Poznawszy własności linii, powierzchni i bryły, odnoszące się tak co do kształtu, jako téż i wielkości widzimy że 1) *linia jest to szereg nieprzerwany wszystkich punktów jednakowéj własności, mający jeden tylko wymiar;* 2) *powierzchnia jest nieprzerwany szereg wszystkich linii jednakowéj własności, mający dwa wymiary;* 3) *Bryła jest nieprzerwany szereg ograniczonych powierzchni jednakowéj własności, mający trzy wymiary.*

*
* *

XIII. *Jeometrya jest nauka mająca za przedmiot poznanie ilości przestrzennych: linii, powierzchni i bryły, pod względem ich kształtu i wielkości.*

XIV. Zależność wielkości przestrzennych wskazuje nam drogę, którą powinniśmy postępować dla poznania ich własności. I tak: widzieliśmy 1) że od kształtu czyli sposobu tworzenia się zależy wielkość ilości przestrzennych; 2) kształt i wielkość powierzchni zależy od linii; kształt i wielkość brył zależy od ograniczonych powierzchni; przeto powinniśmy rozwijać dla każdéj z ilości przestrzennych 1) naprzód własności kształtu, a potém wielkości;—2) naprzód poznać te własności linii, potém powierzchni, a na końcu brył, z czego się tworzą trzy części Jeometryi: *a*) Nauką o liniach, Liniometrya; *b*) nauka o powierzchniach, Planimetrya, i *c*) nauka o bryłach czyli Solidometrya.

XV. Zasady Jeometryi czyli Elementarna Jeometria ma za przedmiot:

1) W Liniometryi linię prostą i okrąg koła t. j. nieprzerwany szereg wszystkich punktów leżących

na płaszczyznie w jednakowéj odległości od punktu téj płaszczyzny zwanego środkiem koła.—Lecz że te linie leżą na płaszczyznie, zaś same lub ich połączenia ograniczają płaszczyznę, któréj wielkość i kształt zależy od tych linnii; —przeto w Elementarnéj Jeometryi prosta, okrąg koła i ich połączenia uważają się na płaszczyznie, razem z własnościami ograniczonéj płaszczyzny, co stanowi jéj część zwaną Planimetryą;—2) w nauce o powierzchniach uważa się więc tylko takie powierzchnie, które się tworzą linią prostą i okręgiem koła i nie przedstawiają linij nie wchodzących w zakres téj nauki, a zatém tylko powierzchnię *a*) *płaską*, *b*) *walca* t. j. *szereg prostych równoległych, przecinających się z dwoma równemi i równoległemi okręgami*; *c*) *ostrokręgu* t.j. *szereg prostych wychodzących z jednego punktu, przecinających się z okręgiem*; *d*) *kuli* t. j. *miejsce równych okręgów, mających wspólny środek*. I ich połączenia takie, z których wynikają linie proste lub okręgi.—Lecz kształt i wielkość bryły czyli przestrzeni ograniczonéj powierzchniami, zależy od kształtu i wielkości tych powierzchni, a tém samém od własności ich połączeń; przeto w Elementarnéj Jeometryi, własności powierzchni i ich połączeń, wykładają się razem z własnościami brył, i to stanowi jéj część drugą zwaną Solidometrią.

* * *

XVI. Stosownie do sposobu uważania ilości przestrzennych, tak Planimetrya, jako téż i Solidometrya dzieli się na dwie części,—w pierwszéj uważają się własności co do kształtu, w drugiéj zaś co do wielkości.

Część Isza.

Księgi Iszéj Planimetryi i Księgi IIéj Solidometryi.

Jeometryczne wielkości naprzód uważać należy same w sobie czyli oddzielnie, i dla tego: Rozdział I.

a) w Planimetryi, linie: 1) prosta, 2) łamana jako złożona z części linii prostéj, i 3) okrąg koła.

b) w Solidometryi: powierzchnie 1) płaska, 2) walcowa, 3) ostrokręgowa i 4) kulista.

Poznawszy własności każdéj z jeometrycznych wielkości, następnie możemy poznać własności ich połączeń, i dla tego: Rozdział IIgi.

a) w Planimetryi: połączenia linii prostych.

Linie leżące na płaszczyznie, a nawet jakiekolwiek linie mogą mieć: 1) jeden lub kilka punktów wspólnych, i wtedy zowią się: *a*) *przecinającemi się*, *b*) *stycznemi*, gdy punkta przecięcia się zlewają się w jeden, tak że w ogólności jedna linia leży zewnątrz drugiéj. Linie styczne są tylko szczególnym przypadkiem przecinających, przejście zaś od przecinania się do styczności przedstawia się nam w ten sposób: jeśli przecinająca obraca się około jednego z punktów wspólnych, to inne stopniowo zbliżają się do tego punktu i gdy jeden zleje się z nim, wtedy przecinająca staje się styczną. Gdyby linia nie przestałaby się obracać, to punkt przecięcia się oddalalby się od punktu obrotu; i znowu linia byłaby przecinającą. Dla tego to przejście z przecinania się do przecinania się zowie się stycznością; 2) mogą nie mieć punktów wspólnych i wtedy zowią się: *a*) *oddzielnemi*, *b*) *równoległemi*, gdy punkta jednéj linii są jednakowo oddalone od linii drugiéj.

Uważając linie leżące na płaszczyznie, zwracamy uwagę na zależność od nich ograniczonéj płaszczyzny. I tak: jeśli dwie proste przechodzą przez jeden punkt, to one z dwóch tylko stron ograniczają płaszczyznę, zowiącą się *kątem*. Przeto kąt pod względem kształtu, jest nachyleniem się dwóch prostych przecinających się, pod względem zaś wielkości jest częścią nieograniczonéj płaszczyzny. Prosta spotykając drugą linię prostą czyni z nią równe lub też nierówne kąty przyległe—i podług tego zowie się prostopadłą lub pochyłą.—Położenie linii zależy od kątów, tak, że położenie dwóch prostych na płaszczyznie, oznacza się za pomocą kątów, które one czynią z przecinającą je linią prostą czyli *poprzeczną*. Proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe; przecinające się zaś tworzą z poprzeczną trzy odcinki, i trzy kąty zawarte między temi odcinkami; te trzy odcinki równie jak i płaszczyzna zawarta między temi odcinkami zowią się trójkątem, który ma tę własność, że trzy z jego części wyznaczają wielkość lub stosunek trzech innych. Z połączenia przecinających się z równoległemi wynika proporcyonalność linii, z któréj wynika własność ogólnego połączenia prostych.

b) w Solidometryi połączenie płaszczyzny *A*) z liniami prostemi, *B*) z płaszczyznami nieograniczającemi lub téż ograniczającemi przestrzeń.

Płaszczyzna jest miejscem linii prostych, przeto własności połączenia prostéj z płaszczyzną, zasadzają się na własnościach połączania linii prostych, tak, że warunki prostopadłości, pochyłości, równoległości prostéj do płaszczyzny, sprowadzają się do warunków odpowiednich połączeń linii prostych. Linia pochyła czyni nieograniczoną liczbę kątów z prostemi tworzącemi płaszczyznę, przechodzącemi przez spodek pochyłéj, z których najmniejszy wyraża najmniejsze, a tém samém prawdziwe nachylenie się linii do płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny, podobnie jak linie mogą być przecinające lub nieprzecinające się, prostopadłe, pochyłe, albo równoległe. Wzajemne ich położenie zależy od przestrzeni zawartéj między dwoma przecinającemi się płaszczyznami, zwanéj *kątem dwuściennym*, kąt ten pod względem kształtu jest nachyleniem się płaszczyzn, pod względem wielkości jest częścią nieograniczonéj przestrzeni. Stosunek zaś tych kątów równa się stosunkowi odpowiednich im kątów płaskich.

Przestrzeń ograniczona więcéj aniżeli dwoma płaszczyznami przechodzącemi przez jeden punkt, zowie się *kątem bryłowym*. Uważając ten kąt pod względem kształtu, wyrażamy zależność między jego kątami płaskiemi i dwuściennemi; pod względem zaś wielkości, wyrażamy jaką częścią całéj nieograniczonéj przestrzeni jest przestrzeń tego kąta.

Nakoniec uważając połączenie płaszczyzn ograniczających przestrzeń, wskazujemy własności powierzchni ograniczających bryły, a tém samém i bryły, szczególniéj co do ich tworzenia się, symetryi, foremności.

Poznawszy własności połączenia linii prostych i płaszczyzn, pozostaje wskazać te własności dla połączeń linii prostéj z krzywemi t. j. okręgami kół tudzież płaszczyzny z powierzchniami krzywemi, i dla tego: Rozdział III.

a) w Planimetryi: połączenie linii prostych i wielokątów z okręgami;

b) w Solidometryi: połączenie płaszczyzny z powierzchniami walca, ostrokręgu i kuli, przeto własności trójkąta i wielokąta kulistego.

Poczém pozostaje tylko uważać własności połączeń linii krzywych z krzywemi, powierzchni krzywych z takiemiż powierzchniami, i dla tego Rozd. IV.

a) w Planimetryi, połączenie okręgów w których zwracamy uwagę na punkta sprzężone z linią środków (centre de similitude directe et inverse), koła potęgowe (cercles radicaux), oś i środek tych kół (axe et centre radical), obopólne okręgi (cercles reciproques) i t. p.

b) w Solidometryi: połączenie krzywych powierzchni.

Część II.

Księgi Iszéj Planimetryi i Księgi IIéj Solidometryi.

Własności płaszczyzn ograniczonych liniami i własności brył ograniczonych powierzchniami.

Powierzchnie równie jak bryły, mogą mieć jednakowy kształt i wielkość, albo jednakowy kształt przy różnéj wielkości t. j. przy jednakowym kształcie stosunek linii łączących odpowiednie punkta, może być równy lub nierówny jedności,—podobnie figury uważane co do wielkości bez względu, na kształt, mogą być równe lub w pewnym stosunku;—i nakoniec przy równéj wielkości ograniczeń, mogą mieć wielkość jednakową lub niejednakową,—a ztąd tak Planimetrya jako téż i Solidometrya (Stereometrya) rozdziela się na:

Rozd. I. *Równość.*

Rozd. II. *Podobieństwo.*

Rozd. III. *Równoważność i stosunek wielkości.*

Rozd. IV. *Izoperymetryczność* czyli *równoobwodowość.*

XVII. Techniczne wyrazy używane w Jeometryi, poznamy w ciągu téj nauki, gdyż tam poznamy tylko właściwe ich znaczenie, tu zaś wyłożymy ściągające się do samego jéj wykładu:

1° *Pewnik* jest prawda przyjęta za oczywistą, bez żadnego dowodzenia.

2° *Twierdzenie* jest to prawda stająca się widoczną za pomocą dowodzenia.

Twierdzenie składa się z dwóch części: z *założenia*, tego co przypuszczamy, albo co wiemy że tak jest; i z *właściwego twierdzenia*, czyli tego, czego na mocy założenia dowieść mamy. Tak, że każde twierdzenie da się wyrazić w ten sposób: Zakładam że..., a mam dowieść że ...—

Odróżniamy w twierdzeniach następujące przypadki:

a) *Twierdzeniem odwrotném* nazywać będziemy takie, w którém za złożenie służy to, co dowiedliśmy w poprzedzającém twierdzeniu, a dowieść mamy tego co było założeniem.

b) *Twierdzenie główne*, w którém dowodzimy głównéj własności figury, a przeto takiéj, na któréj opiera się dowodzenie prawie wszystkich innych własności tego kształtu.

3° Często dowodząc twierdzenia dowodzimy zarazem i innéj własności téj figury, która dla proszczenia twierdzenia nie była w niém umieszczona. Te to prawdy po twierdzeniu umieszczają się jako *Wnioski*.

Wnioskiem zowie się także prawda, chociaż nie dowiedziona dowodzeniem twierdzenia, jednak bezpośrednio z niego wypływająca.

4° *Uwaga* jest jakoby wnioskiem wynikającym z porównania kilku twierdzeń.

5° *Zagadnienie* ma za przedmiot oznaczenie, zazwyczaj co do formy, kilku ilości nieznanych, za pomocą rysunku, uskutecznionego na zasadzie prawd jeometrycznych.

6° *Zadanie* ma za przedmiot oznaczenie, zazwyczaj co do wielkości, jednéj lub kilku ilości nieznanych, za pomocą rachunku; ono więc należy tak do Jeometryi, jak i do Arytmetyki lub Algebry.

XVIII. Dowodzenia są pięciorakie:

1° *Zbiorowe* (syntetyczne) idą od znanych do nieznanych, to jest: biorą w pomoc dowiedzione poprzednio prawdy, tak, że w końcu z nich wypadnie co miało być dowiedzionem. Zasadą tego dowodzenia jest to: że z prawd wyprowadzone następstwa same są prawdami.

Dowodzenia tego rodzaju przyprowadzają drogą rozumową do prawdy, a tym sposobem najbardziéj ułatwiają tak przyswojenie dowodzenia, jako téż i saméj prawdy, czyniąc ją dalszym rozwojem już znanych— są więc najwłaściwsze w elementarnych naukach.

2° *Rozbiorowe* (analityczne) postępują od nieznanych do znanych, to jest: uważają że to, czego dowieść potrzeba jest rzeczywiście prawdą. Zasadą tego dowodzenia jest to: że tylko prawda do prawd prowadzi. Dowodzenia tego rodzaju, wyprowadzają prawdę w sposób oddzielny od poprzedzających, i dla tego unikać ich potrzeba w elementarnéj matematyce.

3° Przez przypuszczenie (apagogiczne) przypuszczamy że to czego mamy dowieść jest nieprawdą, i na zasadzie prawd poprzedzających wywodzą się następstwa, niezgodne z prawdami już dowiedzionemi; a zatém okazujemy, że przypuszczenie nasze było fałszywe, a tém samém to co twierdziliśmy jest prawdą. Zasadą tego dowodzenia jest to: że z fałszu prawda nie może być wyprowadzoną.

4° *Przez prawdopodobieństwo* (indukcyą). Z kilku przypadków, w których twierdzenie pokazuje się prawdziwém, wnosi się o wszystkich. Dowodzenia tego rodzaju, właśnie dla tego że tylko są prawdopodobne, nie mają matematycznéj ścisłości. Nabierają jéj dopiero, kiedy tak się urządzi dowodzenie, iż w każdym dowiedzionym pojedynczym przypadku, leży zaraz dowód następnego przypadku.

5° *Przez przybliżenie* (aproximacyą), kiedy różnica między dwoma wielkościami jest mniejsza od dowolnie wziętéj ilości, wtedy one są równe. Dowodzenia te miejsca mieć niepowinny w elementarnéj matematyce, gdyż zasada ich: że ilości różniące się o ilosć nieskończenie małą, t. j. mniejszą od wszelkiéj dowolnéj ilości są sobie równe, dowodzi się dopiero w wyższéj matematyce.

XIX. Pewniki.

1) Każda ilość jest sobie saméj równą.

2) Część mniejsza jest od całości, a całość większa od swojéj części.

3) Całość jest równa wszystkim częściom swoim.

4) Dwie ilości równe trzeciéj są między sobą równe.

5) Jeżeli jedna ilość nie jest równa drugiéj, wtedy jest od niéj większą albo mniejszą.

6) Jeśli ilość ani jest mniejsza, ani większa od drugiéj, wtedy musi jéj być równa; kiedy linia prosta nie może paść ani pod, ani nad linią, to padnie na tą linię.

7) Kiedy jedna ilość jest mniejsza od drugiéj, a ta mniejsza od trzeciéj, to pierwsza tém bardziej mniejsza jest od trzeciéj; a tém samém jeśli ilość trzecia jest większa od drugiéj,a druga większa od pierwszéj, to tém bardziéj trzecia jest większa od pierwszej.

8) Jeśli dwie ilości są sobie równe, a jedna z nich mniejsza lub większa od trzeciéj to i druga jest taką samą względem trzeciéj.

9) Dodając ilości większe do siebie i ilości mniejsze do siebie, summa pierwszych będzie większa od summy drugich.

10) Gdy do ilości równych dodamy lub odejmiemy ilości równe, wypadki będą równe.

11) Do dwóch ilości równych dodawszy ilości nierówne, ta summa będzie większa, gdzieśmy więcéj dodali, a ta mniejsza gdzieśmy mniéj dodali—tudzież od dwóch ilości równych, odjąwszy części nierówne, tam zostanie więcéj gdzieśmy mniéj odjęli, a tam mniéj gdzieśmy więcéj odjęli.

XX. Znaki i skrócenia.

36. Znak $<$ pokazuje że ilość przy wierzchołku napisana jest mniejsza od napisanéj przy rozwartości.

Znak $=$ pokazuje, że ilości z obu stron tego znaku napisane są równe co do wielkości.

37. *Tw.* znaczy Twierdzenie.
Tw. od. „ Twierdzenie odwrotne.
Tw. gł. „ Twierdzenie główne.
Wn. „ Wniosek.
Uw. „ Uwaga.
Zg. „ Zagadnienie.
Zd. „ Zadanie.
Zt. „ Zastososowanie.

38. Rysunek jeometryczny powinien wskazywać sposób kreślenia i dla tego:

1° Linie dane proste lub krzywe prowadzą się cienko ciągnione.

2° Linie otrzymane z zadania prowadzą się grubiéj ciągnione.

3° Linije służące do rysunku, do dowodzenia, prowadzą się cienko; przerywane, przerwy i linijki ciągnione powinny być równe. Gdy ich jest wiele, linie jednego od drugiego gatunku odróżniają stawiając w przerwach jeden, dwa i t.d. punktów.

4° Linie dane w rysunku, lecz zakryte innemi częściami rysunku, lub części ich zakryte oznaczają się punktami.

WSTĘP SKRÓCONY.

1. Widząc jakiekolwiek ciało możemy go wyobrazić wtedy gdy już nie widzimy, — albo chcąc wyrobić jakie ciało: kostkę, kulę, walec i t. p., potrzeba wprzód je wyobrazić:—takie wyobrażalne ciało, czyli przedstawione w myśli, zowie się *bryłą*.

2. Bryłę wyobrażać można albo większą, albo mniejszą, — jeśli bryłę wyobrażać będziemy ciągle zmniejszającą się, to najmniejsza bryłka przy tym zmniejszaniu się, czyli granica zmniejszania się brył zowie się *punktem*. *Punkt* więc *nie jest niczem*, bo jeśli np. weźmiemy połowę bryły, następnie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ i t. d. część bryły, to nieprzyjdziemy do tego, aby którakolwiek część była niczém; lecz część najmniejsza jest tylko mniejszą od każdej wyobrażonej bryłki:—ztąd wynika, że *punktu mierzyć nie można* gdyż jakkolwiek wyobraziliśmy go małym, zawsze można wyobrazić mniejszym, i dla tego *punkt nie ma żadnego wymiaru*.

* * *

3. *Punkta bez przerwy po sobie idące zowią się linią*. Chcąc wiedzieć wielkość linii mierzymy tylko jéj długość, gdyż w żadnym kierunku poprzecznym mierzyć jéj nie możemy, bo punkt nie ma wymiaru. Linie zowią się wielkościami jednowymiarowemi, dla tego że chcąc poznać ich wielkość robimy jeden wymiar, czyli raz tylko mierzymy.

4. Linie różnią się od siebie tylko położeniem punktów, i tak: *w linii prostéj, leżą one w jednym*

kierunku, względem dwóch punktów, żaden nie leży ani z prawéj, ani z lewéj strony;—dla tego to przy prowadzeniu linii prostéj na gruncie ustawiamy dwie tyki inne zaś stawiamy tak aby względem tych dwóch tyk nie stały ani z prawéj ani z lewéj strony *w okręgu koła punkta składającego są równo oddalone od punktu zwanego środkiem koła i t. p.*

5. *Linie proste są to punkta bez przerwy po sobie leżące w jednym kierunku.* A ztąd:

a) *linia prosta jest najkrótszą odległością z jednego punktu do drugiego*: gdyż idąc po linii prostéj z jednego punktu do drugiego, nie zbaczamy w żadną stronę postępując po punktach leżących w jednym kierunku, a przeto przechodzimy do drugiego punktu najkrótszą drogą;—dla tego to mierząc odległość między dwoma punktami, mierzymy linię prostą łączącą te punkta. *Przeto, linia prosta jest najkrótszą ze wszystkich linii mających z nią końce wspólne.*

b) *Dwie linie proste mające dwa punkta wspólne przystają do siebie*; gdyż punkta leżące między wspólnemi punktami, jako też zewnątrz tych punktów, leżą w jednym kierunku z temi dwoma wspólnemi punktami; — przeto, *przez dwa punkta jedna tylko linia prosta przechodzić może.*

* * *

6. *Linie bez przerwy po sobie idące zowią się powierzchnią.* Powierzchnie w ogólności tworzą się posuwaniem linii po dwóch innych, stosownie do linii posuwającéj się, czyli tworzącéj powierzchnię; i stosownie do rodzaju linii po których się posuwa linia tworząca. Wielkość powierzchni zależy od wielkości posuwającéj się linii, i od odległości na którą posu-

nęła się ta linia. *Wielkość posuwającéj się linii zowie się długością powierzchni, odległość zaś na którą posunęła się, szerokością.* Dla poznania wielkości powierzchni potrzeba mierzyć ją, dwa razy: raz długość, drugi raz szerokość. *Powierzchnie* dla tego *zowią się wielkościami dwuwymiarowemi*, że chcąc wiedzieć ich wielkość uskutecznić potrzeba dwa wymiary.

7. *Powierzchnia utworzona posuwaniem się linii prostej, po dwóch liniach prostych przecinających się zowie się płaszczyzną. Płaszczyzną więc nazywamy linie proste bez przerwy po sobie idące i przechodzące przez dwie przecinające się linie proste.* Z opisania płaszczyzny wynika:

a) *Linia prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta wspólne, cała leży na téj płaszczyznie*: albowiem przez te dwa punkta przechodzić mogą dwie linie przecinające się, po których posuwana linia prosta utworzyła powierzchnię: — a zatem linia mająca te dwa punkta wspólne z płaszczyzną jest linią téj płaszczyzny, a tém samém cała na niéj leży.

* * *

8. *Powierzchnia posuwając się tworzy bryłę: bryła więc jest zbiorem powierzchni bez przerwy po sobie leżących.* Wielkość bryły zależy od wielkości powierzchni posuwającéj się, t. j. od jéj długości i szerokości i od odległości na którą powierzchnia posunęła się. Odległość tę nazywamy wysokością bryły; a zatem *wielkość bryły zależy od jéj długości, szerokości i wysokości. Chcąc ją poznać, potrzeba te trzy linie zmierzyć, które dla tego zowią się wymiarami bryl, bryła zaś wielkością trzywymiarową.*

9. *Jeometrya ma za przedmiot poznanie* linii, powierzchni i bryły *pod względem kształtu i wielkości.* *)

*) Tu zawarłem wstęp i § 1 *o linii prostéj*, tak, że po tym wstępie przystępuje się od § 2 *o linii łamanéj.*

PRZYPISEK.

Wszystkie części Jeometryi elementarnéj niemogą być wyłożonemi w zakładach publicznych z powodu ograniczoności czasu, wykłada się zazwyczaj główny zarys Nauki, będący z sobą w nieprzerwanym związku; części zaś zewnątrz stojące opuszczają się, chociaż nieustępują innym pod względem teorytycznym lub zastosowań.

Wyłożywszy z jednakowym rozwinięciem wszystkie części Jeometryi elementarnéj wskazać wniém powinienem, główny zarys téj Nauki przedstawiając co może być opuszczoném.

Z części saméj Jeometryi:

a) Linie poprzeczne od str. 142—155, stronic 14.

b) Połączenie okręgu koła z linią prostą zewnętrzną od str. 175—178, str. 3.

c) Punkta sprzężone z linią środków od str. 192—197, str 5.

d) Linie potęgowe od str. 197—203, str. 6; od str. 203 do 218 opuszczają się Nra: 232, 234, 235. 239, 240, str. 5

e) Zależność wielkości figur od ich kształtu od str. 274—284.

Przy krótszém rozwinięciu pozostałych części opuszczone lub zmienione być mogą następne Nra: 11, 12, 13 i 14 wykładają się jako wstęp proporcyonalności linii str. 115. *Do Nru* 21 *dodać: Uw. Dwa punkta* B i D albo B i F *leżące nad linią* AC, *nie są w jednakowéj odległości od tychże samych końców téj linii* gdyż w pierwszym razie dla równości AB z AD i CB z CD linia obejmująca ABC równałaby się objętéj ADC, co być nie może; w drugim, dla równości AB z AF i CF z CB, linie przecinające się AB+CF równałyby się liniom AF+CB łączącym ich końce, co także być nie może. Nra 23 i 24 opuszczają się.

Nra 25 przechodzimy do opisania w ten sposób: Okręgi kół równych promieni przystają do siebie, gdy środek i płaszczyznę jednego okręgu położonym na środek i płaszczyznę drugiego okręgu, dla tego że punkta obu okręgów leżą na jednej płaszczyźnie w jednakowéj odległości od wspólnego środka

Nr. 26 *od piątego wiersza dowodzenia zmienia się w ten sposób*; okręgi więc A i C mają dwa punkta wspólne, potrzeba tylko dowieść, że więcéj punktów wspólnych nie mają i że jeden z nich leży nad linią, drugi zaś pod linią AC łączącą środki kół.

Oba punkta wspólne nie mogą leżéć na linii środków AC, bo wtedy promienie koła A lub C do tych punktów poprowadzone nie byłyby sobie równe, przeto jeden z punktów wspólnych B leży nad linią AC. Gdyby oprócz punktu B, wspólnego dla dwóch okręgów, znajdował się nad linią AC drugi punkt wspólny F, to AF =AB, CF=CB jako promienie jednego koła, co być nie może gdyż dwa punkta B i F leżące nad linią AC nie mogą być w jednakowéj odległości od tychże samych końców linii AC (21 Uw.) Gdyby punkt wspólny leżał na linii AC, wtedy ta linia prosta składałaby się z dwóch promieni i równałaby się linii łamanéj ABC, co być nie może. Dla podobnéj przyczyny i pod linią AC, łączącą środki, jest tylko jeden punkt wspólny.

Wn. numeru 26 *jako umieszczony przy Nrze* 21 *opuszcza się;* dodaje się zaś do Nru 26 *Uw. Jeżeli summa promieni* AB i BC, *jest większa od linii* AC *łączącéj środki kół; i zarazem linia* AC *łącząca środki, z jednym z promieni* AB, *jest większa od drugiego promienia* (jako linia łamana od prostej mającéj z nią końce wspólne), *to okręgi kół przecinają się i nawzajem.*

Wn. 1 *Nru* 28 *dowieść można w ten sposób:* obracam półokrąg ROS około średnicy RS i kładę na półokrąg RKMS, to wszystkie punkta pierwszego półokręgu przystaną do drugiego półokręgu, jako równo oddalone od środka koła F.

Nr. 32 *wyłożyć po* 14 *za pomocą proporcyonalności linii.*

Nr. 44. *opuścić i z niego zrobić Wn.* 2. *Tw.* 45, dowodzący się w ten sposób: prostopadła wyprowadzona ze środka linii AC przechodzi przez punkta B i E, gdyż inaczéj one nie byłyby równo oddalone od końców linii.

Nr. 46 *można dowieść w ten sposób:* Kąty Przyległe CEF i FED zajmują tą samą płaszczyznę co i kąty proste CEB i BED, przeto summa pierwszych równa się summie drugich.

N⁰ 54 *odnieść do mierzenia innych kątów* t. j. pod N⁰ 175.

Nra 71, 72, 73, 74, *jako służące do zupełnego naukowego rozwinięcia teoryi linii równoległych, przy wykładzie szkolnym opuszczonemi być winny.*

We Wn. Nr. 76 *po wierszu drugim dodać:* i tak, GJD > GHB, lecz że GJD = GJH (48), przeto GJH > GHB czyli *kąty naprzemianległe wewnętrzne nie są sobie równe* i kąty naprzemianległe zewnętrzne nie są sobie równe; gdyż GJD > GHB, zaś GHB = FHA, przeto GJD > FHA. *Kąty jednostronne wewnętrzne nie równają się* II, gdyż GJD > GHB, a że GJD + DJF = II, to GHB + DJF < II i t. d.

Po piątym wierszu Wn. 1, *N.* 78 *przed;—dodać:* co podobnie dowiedlibyśmy jak w No 76. Wn., kładąc zamiast znaku nierówności znak równości.

Wn. 2 *i Uw w* N. 79. *opuścić.*

Wn. 4 *N.* 91. *opuścić.*

N⁰ 93 *na miejsce* 92 *i nawzajem. W takim razie Nr.* 93 *dowiedzie się w ten sposób:*

Przenoszę trójkąt ABC na DEF, tak aby punkt A padł na D, bok AC padł na bok DF, to punkt C padnie na punkt F, dla równości tych dwóch boków; punkt B padnie na punkt E:— gdyż inaczej nad linią EF znajdowałyby się dwa punkta B i E jednakowo oddalone od odpowiedaich jéj końców, co bydź nie może (21 Uw.); — to i bok AB padł na DE i CB na FE.

Uw. 1. *Nru* 98 *opuścić.*

Wn. 2, *N u* 102 *opuścić.*

N⁰ 101, 105, 106, 107, *z wnioskami opuścić.*

N⁰ 120 *opuścić.*

N⁰ 130, *opuścić.*

Przed N⁰ 138. *dodać:* Proporcya jeometryczna linii, nie zawiera w sobie wprost linii, ale wielkość ich wyrażoną w jedności, do któréj dodaliśmy dwa równe stosunki w liczbie lub jédności, którą się ograniczamy w przypadku niewspółmierności.

W N⁰ 138 *opuścić Wn.*

Po Wn. 8, N⁰ 139. *umieścić z Wn.* 3, *Nru* 262 *b) i c) w której zamiast fig.* 126, *powinna być fig.* 89; *lecz w niej litery zmienić należy w ten sposób:* za F, D; za G, E; za H, F; za D, G; za E, H.

Wn. 4, *Nru* 141. *opuścić.*

N⁰ 150. *opuścić.*

W Nrze 173. *nawzajem, a tém samém w dowodzeniu* 2, *opuścić.*

W Nrze 174 *opuścić Wn.* 1. *i Wn.* 2.

W Nrze 183 *opuścić Wn.* 2.

Ner 204. *opuścić.*

W Nrze 216. *Wn.* 2. *opuścić.*

Część II.

W Nrze 251, *opuścić w dowodzeniu* 2°

W Nrze 253, *opuścić Wn.* 5.

Symetryczność od str 226 — 230 *opuścić można w razie zupełnego braku czasu.*

W Nrze 261 *opuścić w dowodzeniu* 2° *a tem samem w twier:* lub z punktem oddalonym od dwóch odpowiednich.

W Nrze 262. *opuścić Wn.* 2., *zaś we Wn.* 3. *opuścić dowodzenie b*) i *c*) *jako umieszczone przy proporcyonalności figur.*

W Nrze 265. *we Wn.* 2. *zamiast fig.* 130, *poprawić fig.* 230.

W Nrze 289, *na miejsce Wn.* 5. *przenieść Wn.* 6. *który się wyrazi w ten sposób:*

Powierzchnia wiel. for. równa iloczynowi z obwodu przez połowę promienia koła wpisanego, gdyż wiel. for. przez promienie koła opisanego dzieli się na tyle trójkątów ile ma boków: powierzchnia zaś każdego trójkąta równa iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości, lecz że wysokości są sobie równe, jako promienie koła wpis., przeto zamiast każdą oddzielnie podstawę mnożyć przez jednakową wysokość, mnożymy summę podstaw, czyli obwód przez tą wysokość.*) *Wn.* 5. *można dowieść drugim sposobem:* Wielkość okręgu koła do jakiejkolwiek liczby znaków dziesiętnych nie różni się od obwodu stosownego wielokąta for., lecz że: i wielkość powierzchni koła możemy brać tylko do pewnéj liczby znaków dziesiętnych, zatém przy dochodzeniu wielkości koła biorąc zamiast okręgu, obwód wielokąta for. opis o stosownéj liczbie boków, otrzymamy zamiast koła wielokąt foremny, którego powierzchnia równa się iloczynowi z obwodu wiel. przez połowę promienia koła mierzonego, czyli z okręgu przez połowę promienia.

Trzeci sposób dowodzenia, czemu się równa powierzchnia koła; Jeśli w koło wpiszemy i opiszemy wielokąty foremne o jednakowéj liczbie boków, to *pow.* wiel. wpisanego jest mniejsza, zaś opisanego większa, od *pow.* koła, jako całość od części; a zatém różnica między powierzchnią wiel. opisanego a powierzchnią koła jest mniejszą od różnicy między *pow.* wielokąta opisanego i wpisanego. Przeto od ilu znaków dziesiętnych nie różnią się po-

*) *np* 357 5 = 7 5 + 300 5; *i nawzajem.*

wierzchnie tych wielokątów, to tém bardziéj od tylu znaków dziesiętnych nie różni się *pow.* wielokąta opis. od *pow.* koła, czyli do lu znaków dziesiętnych chcemy obliczyć *pow.* koła, do téj liczby znaków dziesiętnych obliczyć potrzeba *pow.* wiel. opis for. Im wielokąty będą o większej liczbie boków, tém ich powierzchnie będą się zgadzać w większéj liczbie znaków dziesiętnych; że zaś powierzchni koła nie możemy obrachowywać do nieskończonéj liczby znaków dziesiętnych: przeto zawsze zamiast powierzchni koła, obrachowywamy powierzchnię wiel. for. na nim opisanego o stosownéj liczbie boków.

Zwolennicy Euklidesa co do definicyi figur podobnych postąpią w ten sposób: *a*) opuszczą § O przystawaniu str. 218, zaś w *Czworokątach* umieszczą Nru 253. Wn. 4, *i w wielokątach* Wn. 5 tego samego numeru Definicyę równości wyrażoną. W Nrze 253. przenieść do opisania przy trójkątach—zagadnienia § *Przystawanie* pozostają te, które na mocy prawd wyłożonych dają się uskutecznić. *b*) Opuszczą § *Podobieństwo proste* zamiast tego na końcu proporcyonalności dodadzą: 1) przed twierdzeniami definicię podobieństwa: *wielokąty są podobne gdy mają kąty równe a boki odpowiednie proporcyonalne.* 2) Tw. *Wielokąty podobne składają się z równéj liczby trójkątów podobnych i podobnie położonych: i nawzajem* (fig. 224).

Z wierzchołków odpowiednich A i *a* prowadze przekątnie:—trójkąty ABC i *abc* są podobne bo mają po dwa boki i po kącie między niemi zawartym b i *b* z założenia równym—trójkąty CAD i *cad* są podobne: gdyż kąty ACD i *acd* są sobie równe jako różnice kątów z założenia równych BCD $=$ *bcd* zaś BCA$=$*bca* z podobieństwa poprzedzających trójkątów. Boki zawierające te kąty są proporcyonalne, gdyż AC: *ac*$=$BC: *bc* z poprzedzających trójkątów, zaś BC: *bc*$=$CD: *cd* z założenia, przeto i AC:*ac*$=$CD: *cd*. *I nawzajem*: 1^0 Kąty są sobie równe, gdyż kąt A$=$*a* jako składające się z czterech kątów równych, będących kątami trójkątów podobnych:—kąt B$=$*b* jako kąty trójkątów ABC i *abc* podobnych kąt C$=$*c* jako składające się z kątów równych BCA$=$*bca* i ACD $=$*acd* i t. d. 2 Boki są proporcyonalne: stosunek boków AB: *ab* równy stosunkowi boków BC, *bc*: jako leżących w trójkątach podobnych ABC i *abc*,—stosunek zaś boków BC: *bc* równy stosunkowi boków CD:*cd*, bo każdy z tych stosunków równa się stosunkowi AC *ac*, pierwszy z podobieństwa trójkątów ABC i *abc*, drugi z podobieństwa następnych po nich trójkątów i t. d.

Tw. Wielokąty foremne tego samego nazwania są podobne. Boki ich są proporcyonalne, bo w każdym z nich są sobie równe; kąty są sobie równe bo summa i liczba kątów w obu wielokątach jednakowa.

Warszawa dnia 18 *lutego* 1848

KSIĘGA I. PLANIMETRYA.

CZĘŚĆ I.

Linie uważane na płaszczyznie i ich połączenia.

ROZDZIAŁ I.

Linie uważane oddzielnie.

§ 1. Linia prosta.

1. *Linia prosta jest miejscem wszystkich punktów bez przerwy po sobie idących, jednakowo położonych względem dwóch jakichkolwiek jéj punktów.*

Jeśliby punkt C (fig. 1.) uważany od punktu A ku B, znajdował się z lewéj strony tych punktów, to uważany od punktu B ku A, leżałby z prawéj strony, a tém samem nie na prostéj, któréj punktami są A i B. W ogólności jeśli punkt C leży z boku punktów A, B, to uważany od punktu A leży z jednéj strony, uważany zaś od punktu B leży z przeciwnéj strony, a zatém nie jednakowo jest położony względem punktów A i B.

Jeśli punkt C uważany z dołu leży nad punktami A i B, to uważany z góry leży pod temi punktami, a tém samém nie leży na linii prostéj, któréj punktami są punkta A i B, gdyż nie jest jednako położony względem tych punktów. Wogólności, jeśli uważając z jakiejkolwiek strony punkta A i B, punkt C leży z boku tych punktów, to uważany z przeciwnéj strony, leży z przeciwnego boku tych punktów, przeto nie jednakowo względem nich jest położony, i niejest punktem prostéj, któréj punktami są punkta A i B.

2. *Tw. Jedno tylko jest jednakowe położenie punktów, względem dwóch innych jakichkolwiek.*

Uważając od punktu A do B, punkt C o tyle leży z lewéj strony tych punktów, o ile uważając od B do A leży z prawéj ich strony; gdyż lewa strona w odwrotném uważaniu staje się prawą. Jeśli więc punkt C posuwać się będzie ku prawéj stronie, to oddalenie jego w pierwszém uważaniu w lewą, a w drugiém w prawą stronę zmniejszać się będzie jednakowo, tak, że stanie się u C′ jednakowo oddalonym w obie strony, czyli niebędzie oddalony w żadną stronę; a przeto położenie jego będzie jednakowém względem punktów A i B. Jeśliby ten punkt posuwał się jeszcze daléj w prawo, to położenie jego u C″, względem punktów A i B stałoby się niejednakowem, gdyż uważając od A do B punkt C″, byłby z prawéj zaś od B do punktów A i B z lewéj strony, a zatém w jedném tylko położeniu punkt, może leżeć jednakowo względem dwóch punktów. To samo ściąga się i do innych położeń uważanych z góry i z dołu, ku prawéj i ku lewéj stronie punktów A i B. A że każdy punkt w jedném tylko położeniu leży jednakowo względem punktów A i B, przeto *jeden* jest tylko szereg punktów po sobie leżących, jednakowo położonych względem tych punktów.

Uw. Linia prosta pod względem kształtu jest miejscem punktów bez przerwy po sobie idących jednakowo położonych względem dwóch swoich punktów, pod tym więc względem wyraża *kierunek* w jakim się punkt posuwa, i względem niéj uważamy zboczenia tego punktu.

3. *Tw. Linia prosta jest najkrótszą odległością między dwoma punktami na niéj wziętemi.* (fig. 1).

Punkta prostéj przechodzącéj przez punkta A i B nie zbaczają w żadną stronę; przeto punkt A posuwając się po linii AB do punktu B nie zboczy w żadną stronę. Droga przez ten punkt przebieżona jest najkrótszą ze wszystkich, jakieby punkt A przebiegł, dla dojścia do punktu B, bo na każdéj innéj robiłby zboczenia dla tego, że tylko jeden jest szereg punktów, bez przerwy po sobie idących i nie mających żadnych zboczeń — przeto linia prosta jest najkrótszą odległością dwóch punktów.

Wn. 1. *Zmierzyć odległość między dwoma punktami, jest to zmierzyć linią prostą zawartą między temi punktami*, gdyż ona jako najkrótsza, jest prawdziwą odległością.

Wn. 2. Jeśli między dwoma punktami poprowadzimy linię prostą i inne jakiekolwiek linie, to prosta jest najkrótszą ze wszystkich tych linii — i to jest główna jéj własność pod względem wielkości.

4. *Tw. Linie proste* CB i FE *są sobie równe* czyli *jedna położona nad drugą, przystaje do niéj we wszystkich punktach.* (fig. 2).

Przenoszę prostą CB na FE, tak aby jakikolwiek punkt A prostej CB padł na punkt D prostéj FE. Obracam linię CB będącą w tém nowem położeniu około punktu D, póki jakikolwiek jéj punkt B nie padnie na punkt E linii FE. Wtedy linie DB i DE, będą miały dwa punkta E i D wspólne, przeto wszystkie punkta prostéj DB padną na prostą DE, gdyż punkta obu tych linii są jednakowo położone między punktami D i E, a jeden tylko może być szereg takich punktów bez przerwy po sobie idących (2).

Wn. 1. Ponieważ linie proste przystają do siebie, przeto mają wielkość i kształt jednąkowy, czyli są sobie równe i podobne.

Wn. 2. Dwie proste mające końce wspólne przystają do siebie, czyli przez dwa punkta jedna tylko linia prosta przechodzić może. Dwie więc proste, mogą mieć tylko jeden punkt wspólny, t. j. przecinają się w jednym punkcie, bo mając dwa lub więcéj punktów wspólnych zlewają się w jedną linię prostą.

Wn. 3 Przez jeden punkt dowolna liczba prostych przechodzić może, gdyż przez ten punkt i jakikolwiek punkt drugi może poprowadzić linię prostą; przez trzy punkta dowolnie wzięte A, C, B, niemożna poprowadzić prostéj; (fig. 3), gdyż poprowadziwszy przez każde dwa z tych punktów, proste AB, AC, CB, to: linia AB jest prosta, przeto linia ACB nie może być prostą, gdyż przez dwa punkta A i B niemożna poprowadzić dwóch prostych (Wn. 2). — Dla podobnéj przyczyny przez cztery i t. d. punktów dowolnie wziętych niemoże przechodzić linia prosta. Przeto przez dwa tylko punkta zawsze poprowadzić można prostą i tylko jedną, a zatém *dwa punkta oznaczają położenie linii prostéj*, i dla tego ona się czyta tylko dwoma punktami.

Wn. 4. *Końce dwóch prostych* AB i CD *jednakowo długich przystają do siebie* (fig. 4). Przenoszę prostą AB na CD tak aby punkt A padł na C i linia AB przystała do linii CD (4). Mam dowieść że punkt B padnie na punkt D; gdyby punkt B niepadł na punkt D, to padłby albo przed punktem D w punkcie F, albo za punktem D w E. W pierwszym przypadku linia AB równałaby się linii CF, — a że z założenia równa się linii CD, przeto dwie ilości CD i CF równe trzeciéj AB, byłyby sobierówne, co być niemoże; bo całość CD równałaby się jednéj ze swych części CF; a tém samém punkt B nie może paść przed punktem D. Dla podobnéj przyczyny punkt B nie może paść za punktem D, przeto pada na ten punkt. — W przenoszeniu więc figur *punkt pada na punkt dla równości linii prostych.*

Un. Jeżeli na prostéj nieograniczonéj obierzemy punkt, to części téj prostéj rachowane od tego punktu w jedną i drugą stronę zowią się odcinkami linii, które są także nieograniczone. Jeśli na jednéj z tych części AB, wezmiemy punkt B, to także utworzą się dwa odcinki (fig. 2) jeden BA ograniczony, a drugi BF nieograniczony. Każda więc linia ograniczona, jest tylko odcinkiem linii nieograniczonéj. Jeśli na linii ograniczonej CD (fig. 4) wezmiemy punkt F, to oba odcinki FC i FD są ograniczone i zawsze zawierają się między punktem wziętym F a końcami linii C i D, tak że jeśli punkt E wzięlibyśmy na przedłużeniu prostéj ograniczonéj CD, to odcinki przez ten punkt utworzone są EC i ED. — *Środkiem* prostéj ograniczonéj (fig. 1) AB zowie się taki punkt któren dzieli ją na dwa równe odcinki ĆA i ĆB; przeto linia prosta AB może mieć tylko jeden środek, gdyż jeśliby oprócz środka Ć, miała jeszcze środek D to: ĆA=ĆB i DA=DB a że ĆA > DA to CB > DB co być nie może.

5. *Zg. Nakreślić linię prostą, zapomocą liniału.* Uskuteczniamy to na téj zasadzie, że linie proste przystają do siebie (4), a tém samém że linia przystająca do prostéj, sama jest prostą. Uważając więc krawędź liniału za prostą, staramy się nakreślić taką linię, która przystawałaby do krawędzi. Dla tego, przykładamy do krawędzi ołówek, grafion i t. p. ostrze jego uważane za punkt kładziemy na płaszczyznie, na któréj leży liniał. Posuwając więc ołówek przy krawędzi, punkt ten utworzy szereg punktów bez przerwy po sobie idących, które składają linią przystającą do krawędzi, a zatém prostą.

Ztąd widzimy, że nakreślona linia tém bardziéj zbliża się do wyobrażalnéj, im bardziéj ostrze którém kreślimy zbliża się do punktu, czyli im jest delikatniejsze. Jeśli przy kreśleniu zmienialiśmy położenie ołówka, to ostrze jego robiło zboczenia w jedną lub drugą stronę, i nakreślona linia nie jest prostą. Dla uniknienia tego błędu przykładamy ołówek przy całéj płaszczyznie kantu, i prowadzimy go od początku do końca tą samą stroną.

6. *Zg. Przez punkt dany poprowadzić prostą.*

Ostrze narzędzia ustawiamy na punkcie danym, i postępujemy jak w N. 5.

7. *Zg. Przez dwa punkta dane poprowadzić prostą.*

Przykładamy tak liniał przy tych punktach, aby ostrze ołówka przylegającego do całéj krawędzi, z jednéj strony padało (fig. 4) na punkt A. z drugiéj zaś na B, i postępujemy jak w N 5.

8. *Zg. Znaleść linią równą dwóm lub ilukolwiek liniom danym* (fig. 5).

Kreślę linię nieograniczoną AB, biorę w cyrkiel linię *m* i przenoszę ją od punktu A do C, to linia *m* równa się linii AC, jako mająca z nią jednakową długość (4 wn 4); biorę w cyrkiel linię *n* i odcinam ją od C do D, to linia *n* równa się linii AD. Przeto linia AD równa się linii *m* więcéj *n* gdyż $AD = AC + CD = m + n$.

9. *Zg. Znaleść prostą równą różnicy dwóch linii.* (fig. 5).

Niech AD będzie większa od n, odcinam n na AD od punktu D do C, to prosta AC będzie szukaną; gdyż AC=AD—CD=AD—n.

10. *Zg. Daną linię prostą pomnożyć przez liczbę całą.*

Na prostéj nieograniczonéj AB, odcinam w jednym ciągu, linię daną n tyle razy, ile jest jedności w liczbie danéj 3. To każda z linii AC, CD i DE równa się linii danéj n. Prosta AE=AC+CD+DE=n+n+n=3n.

11. *Zg. Daną jednością* CD *zmierzyć linię prostą* AB (fig. 7).

Przenoszę jedność CD na prostą AB od A do E, od E do F i od F do G, i pozostaje jeszcze linia GB mniejsza od CD. Gdyby przy przenoszeniu nie zostało reszty, to linia AC równałaby się trzem liniom CD czyli trzem jednościom; lecz że postała reszta GB, przeto trzeba się dowiedzieć jaką częścią jedności CD jest ta reszta, gdyż linia AB oprócz trzech jedności AE, EF, FG, zawiera jeszcze linią GB mniejszą od jedności, czyli linią będącą pewną częścią jedności CD.

Aby się dowiedzieć jaką częścią jedności jest GB, potrzeba wiedzieć ile razy ona zawiera się w jedności, jeśli zawiera się dwa razy jest połową, jeśli trzy razy, jest trzecią częścią i t. p. W ogólności zaś ta część wyraża się ułamkiem mającym za licznik jedność a za mianownik liczbę pokazującą ile razy w CD zawiera się GB t. j. $\frac{1.}{\frac{CD}{GB}}$ Przenoszę więc GB na

CD, mieści się raz tylko od C do H, i pozostaje reszta HD mniejsza od GB; przeto $\frac{CD}{GB}=1+\cfrac{1}{\frac{GB}{HD}}$ a têm samém

$$\frac{AB}{CD}=3+\cfrac{1}{\frac{CD}{GB}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{GB}{HD}}}$$

Dla dowiedzenia się ile razy w GB zawiera się HD, przenoszę HD na GB, i zawiera się raz jeden, pozostaje zaś JB, przeto $\frac{GB}{HD}=1+\cfrac{1}{\frac{HD}{JB}}$ zatem $\frac{AB}{CD}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{HD}{IB}}}}$. Dla dowiedzenia się ile razy w HD zawiera się IB, przenoszę IB na HD i zawiera się w niéj 4 razy bez reszty, przeto $\frac{HD}{IB}=4$, zaś $\frac{AB}{CD}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=3\frac{5}{9}$.

Ztąd widzimy, że dla zmierzenia linii przenosi się jedność na tę linię, reszta pozostała na jedność i tak następnie, każdą resztę na tę linię, od któréj przenoszenia wypadła. Liczba zaś wyrażająca wielkość linii czyli stosunek jéj do linii przyjętéj za jedność, składa się z tylu jedności, ile razy linia przyjęta za jedność mieściła się w mierzonéj linii, i ułamkowi ciągłemu, wyrażającemu jaką częścią jedności jest reszta pozostała od jéj przeniesienia. W ułamku tym mianowniki ogniw wyrażają kolejno ile razy każda zreszt zawiera się w prostéj od przenoszenia któréj wypadła ta reszta. Tak że jeśli jedność w mierzonéj linii zawiera się 5 razy, pozostała reszta w jedności 3 razy, reszta ztąd pozostała w poprzedzającéj reszcie zawiera się 4 razy i t. d, to wielkość mierzonéj linii czyli stosunek jéj do jedności równa się $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}$ i t. d.

12. *Uw.* **1.** *Jeśli przenosząc* tyle razy ile się daje *linią mniejszą* CD (fig. 7) *na większą* AB, *resztę* GB *na linię przenoszoną* CD *i tak następnie* HD na GB, JB na HD, *otrzymujemy resztę* IB *mieszczącą się zupełnie w linii* HD, *od któréj przenoszenia wypadła, to ta reszta* IB a) *jest wspólną miarą dwóch linii danych* AB i CD czyli przeniesiona na te linie zawiera się w nich bez reszty b) żadna linia od niéj większa nie zawiera się w dawnych liniach bez reszty, czyli ta reszta GB *jest największą wspólną miarą* linii AB i CD. I tak:

a). IB zawiera się bez reszty w liniach CD i AB, gdyż IB zawiera się bez reszty w HD, przeto zawiera się także w HD + IB = GB; zawiera się więc także w GB + HD = CD, a tém samém w CD + CD + CD + GB = AB. Znalazłszy wspólną miarę IB mierzymy nią tak linię CD, jako też i AB, co możemy uskutecznić bez przenoszenia wspólnéj miary IB na obiedwie linie, bo $HD = 4\ IB$;—$GB = HD + IB = 4\ IB + IB = 5\ IB$;—$CD = GB + HD = 5\ IB + 4\ IB = 9\ IB$;—$AB = 3\ CD + GB = 3 \times 9\ IB + 5\ IB = 32\ IB$; zatem $\frac{AB}{CD} = \frac{32\ IB}{9\ IB} = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$ jak wyżéj

b) Prosta IB jest największą wspólną miarą linii CD i AB. Gdyż jeśliby linia p q > IB, zawierała się bez reszty wobudwu tych liniach, to zawierając się bez reszty w CD, zawierałaby się także w równych jéj liniach AE, EF, FG czyli w AG, a że zawiera się bez reszty i w $AB = AG + GB$ przeto zawiera się i w GB; zawierając się w $CH = GB$ i w $CD = CH + HD$ zawiera się i w HD, zawierając się w $GI = HD$ i w $GB = GI + IB$, musi się zawierać i w IB. Prosta p q z założenia większa od IB, nie może się wniéj zawierać a tém samem i w liniach AB i CD.

13. *Uw.* 2. Jeżeli mierząc linię prostą, linią przyjętą za jedność, czyli szukając stosunku dwóch linii, otrzymujemy resztę zawierającą się zupełnie w linii od przenoszenia któréj wypadła, to ta reszta mieści się zupełnie w mierzonéj linii i jedności, przeto otrzymamy zupełną jéj wielkość, czyli stosunek tych dwóch linii—i dla tego linia mierzona zowie się *wymierną*, że jednością można zmierzyć, lub *współmierną* z jednością: że mają wspólną miarę zawierającą się zupełnie w tych liniach. Jeśli zaś nieotrzymujemy takiéj reszty,

wtedy niemożemy ze wszelką ścisłością zmierzyć linii, gdyż niemożemy otrzymać ułamku ciągłego skończonego, wyrażającego, jaką częścią jedności jest reszta pozostała od jéj przeniesienia (11), a tem samem nie możemy liczebnie wyrazić stosunku mierzonéj linii do jedności. Linia mierzona wtedy zowie się *niewymierną*, czyli linia mierzona i przyjęta za jedność są *niewspółmierne*, gdyż wspólną ich miarą jest reszta, któréj niemożemy otrzymać. Lecz wielkość linii mierzonéj, czyli stosunek jéj do jedności wyrazi się tylko przez przybliżenie, i ta wartość może być większą lub mniejszą od rzeczywistéj a zarazem doniéj zbliżoną podług upodobania; co wynika z własności ułamków ciągłych.

14. *Uw.* 3. To cośmy powiedzieli o wynajdywaniu stosunku liczebnego dwóch prostych (11 i 12), ściąga się do wszystkich ilości jeometrycznych, mających tę własność, że przeniesione przystają do siebie; gdyż prawda ta wyłącznie wypływa z téj własności linii prostych. *Stosunki* zaś *wielkości jeometrycznych są sobie równe gdy liczebne ich wyrażenia są jednakowe*; bez względu na to czy wyrażają się liczbą całą, z ułamkiem zwyczajnym, ciągłym skończonym lub nieskończonym, w zwyczajnéj formie lub w formie niewymiernego arytmetycznego wyrażenia. Przeto *aby dowieść że stosunek dwóch wielkości jeometrycznych, równa się stosunkowi dwóch innych*, wyrażamy obadwa te stosunki liczbą, zazwyczaj w kształcie ułamku ciągłego — i *potrzeba dowieść że ułamki cią-*

gle będą jednakowe, czyli że reszty odpowiednie będą się zawierały jednakową liczbę razy w ilościach od przenoszenia których wypadły.

Na téj zasadzie dowodzi się równość wszelkich stosunków jeometrycznych, i chociaż ona wypada czasem z własności figur, jednak własność ta figur była wyprowadzona z równości stosunków dowiedzionych na powyższéj zasadzie: t. j. że wyrażają się jednakową liczbą.

15. *Zt.* Na téj zasadzie że linie proste są sobie równe czyli przystają do siebie, opiera się sposób sprawdzenia liniału. Prowadzimy przy sprawdzonéj krawędzi na płaszczyznie, linię, przykładamy tę krawędź z drugiéj strony poprowadzonéj linii, jeśli ona w tém nowem położeniu przykrywa poprowadzoną linię, to linia ta i krawędź sprawdzana, są prostemi — w przeciwnym razie nie są proste, gdyż nie maja własności przystawania (4).

Rzemieślnicy sprawdzają liniał innym sposobem. Umieściwszy liniał tak, aby oko było na przedłużeniu krawędzi, patrzą na tą krawędź; jeśli ona wydaje się punktem, to liniał jest prosty, gdyż punkta jego niezbaczają w żadną stronę (1). Ten sposób jako zależący od wprawy oka jest tylko przybliżony.

16. *Zt.* Ogrodnicy, mularze, brukarze prowadzą prostą za pomocą sznuru przytwierdzonego do tyk; lecz sznur powinien być jaknajbardziéj wyprężony, gdyż prosta jest najkrótszą odległością dwóch pun-

któw, zaś naciągając sznur zmniejszamy jego długość między tykami.

Cieśle do prowadzenia długich prostych używają sznura natartego kredą, okrą (farbą żółtą) lub sadzą rozpuszczoną w oliwie. Taki sznur przykłada się dwoma punktami do końców mającéj się prowadzić prostéj, naciąga się i przytrzymuje się mocno; po środku sznur podejmuje się prosto nad płaszczyzną i puszcza się go. Ślad utworzony na płaszczyznie tém bardziéj zbliża się do prostéj, im bardziéj sznur był naciągnięty. Jeśli pł. jest poziomą (jak powierzchnia spokojnie stojącéj wody) to sznur podnosi się w kierunku pionowym (nici na końcu z ciężarkiem) i wtedy ślad ten jest prawie linią prostą. Sposób takowy opiera się na téj saméj zasadzie co i poprzedzający.

17. *Zt.* W zdejmowaniu planów, podziale gruntu np. na morgi, oznaczają się tylko końce prostych. Dla oznaczenia innych punktów tych prostych, między dwoma tykami stojącemi na końcach pionowo, ustawiamy inne, tak, aby patrząc przez jedną z końcowych na drugą, środkowe zasłaniały drugą, czyli zakrywały ją; wtedy bowiem tyki nie zbaczają w żadną stronę, a ich punkta są na prostéj(1).

18. *Uw.* Płaszczyzna jest miejscem prostych przecinających się z dwoma zbiegającemi się prostemi. Ztąd wynika:

1º *Prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta wspólne cała leży na téj płaszczyznie*, gdyż te dwa punkta można wziąść za punkta, przez które przechodzą dwie zbiegające się.

2° *Płaszczyzny przechodzące przez trzy punkta są tylko jedną płaszczyzną*, czyli przystają do siebie we wszystkich punktach; gdyż połączywszy jeden z tych punktów C, z dwoma innemi A i B, każda z płaszczyzn przez nie przechodzących jest miejscem prostych przecinających linie zbiegające się AC i CB; proste więc przecinające są wspólnemi dla tych płaszczyzn, a zatém te płaszczyzny, są tylko jedną płaszczyzną.

3° *Dwie jakiekolwiek proste przechodzące przez jeden punkt, tudzież proste przecinające się zniemi leżą na jednéj płaszczyznie.*

§ II. Linia łamana.

19. Linia łamana jest to linia złożona z części linii prostych, z których każde dwie po sobie idące mają końce wspólne. Jeżeli końcowe proste mają końce wspólne, to łamana zowie się *zamkniętą*, w przeciwnym razie *otwartą*, i wtedy końce prostych skrajnych, zowią się końcami linii łamanéj.

Linia łamana zowie się *wypukłą*, gdy z prostą nieograniczoną może mieć tylko dwa punkta wspólne, w przeciwnym razie zowie się *zygzakowatą*. Każda z tych linii czyta się głoskami postawionemi u końców linii prostych, zwanych bokami linii łamanych.

Własności odnoszące się do kształtu linii łamanych, należą do połączeń prostych, tu tylko wskażemy główną własność odnoszącą się co do ich wielkości.

20. *Tw. Z linii łamanych wypukłych, mających końce wspólne, obejmująca jest większa od objętéj.*

1o Jeśli łamane składają się z dwóch prostych (fig. 8) Przedłużam AD do przecięcia się z BC, zatem $AB+BE > AD+DE$ (3) tudzież $DE+EC > DC$, do ilości nierównych dodawszy ilości nierówne, większe do większych zaś mniéjsze do mniéjszych, summa pierwszych będzie większa od summy drugich, przeto $AB+BE+DE+EC > AD+DE+DC$; odejmując z obu stron DE, będzie $AB+BE+EC > AD+DC$ czyli $AB+BC > AD+DC$.

2o Jakiekolwiek łamane (fig. 9). Przedłużam AE i EF do spotkania się z łamaną obéjmującą w punktach G i H. Uważam że $AB+BG > AE+EG$ (3), $EG+GC+CH > EF+FH$, i $FH+HD > FD$. Summa ilości większych jest większa od summy ilości mniéjszych, przeto $AB+BG+EG+GC+CH+FH+HD > AE+EG+EF+FH+FD$. Odéjmując z obu stron EG i FH, otrzymujemy $AB+BG+GC+CH+HD > AE+EF+FD$ czyli linia łamana $ABCD > AEFD$.

Wn. Linia łamana wypukła zamknięta obejmująca jest większa od objętéj (fig. 11).

Przedłużam GF i HI do przecięcia się z obejmującą w punktach L i M. Podług Tw. LB+BC+CD+DM > LF+FG+GH+HI+IM, podobnie IM+ME+EA+AL+LF > IK+KF, więc LB+BC+CD+DM+IM+ME+EA+AL+LF > LF+FG+GH+HI+IM+IK+KF. Odejmując po obu stronach FL i IM, będzie LB+BC+CD+DM+ME+AE+AL > FG+GH+HI+IK+KF czyli łamana AKCDE > FGHIK.

21. *Tw. Summa dwóch prostych przechodzących przez jeden punkt, jest większa od dwóch linii łączących ich końce* (fig. 10) AB+CD > AD+CB.

Uważam że AE+ED > AD (3); EB+EC > BC. Dodaję odpowiednie wyrazy i będzie AE+EB+DE+EC > AD+BC czyli AB+DC > AD+BC.

§ III. Okrąg koła.

22. *Okrąg koła jest to linia krzywa zamknięta, któréj punkta leżą na jednéj płaszczyznie, w jednakowéj odległości od punktu téj płaszczyzny zwanego środkiem koła.*

Proste, łączące środek koła z punktami okręgu, zowią się *promieniami*. Odległości środka koła od punktów okręgu są sobie równe, i mierzą się promieniami (3 *Wn.* 1), przeto promienie koła są sobie równe (4 wn. 4.)

Okrąg koła czyta się albo jedną głoską będącą w jego środku, albo trzema, leżącemi na samym okręgu, dla odróżnienia od prostéj, która się oznacza dwoma punktami. Później zobaczymy, że jak dwa punkta oznaczają prostą, tak trzy oznaczają zupełnie okrąg koła.

Każda część okręgu koła zowie się *łukiem*. Łuk czyta się trzema głoskami z których dwie leżą na jego końcach.

Prosta łącząca dwa końce łuku zowie się *cięciwą*. Cięciwa przechodząca przez środek koła zowie się *średnicą*, a łuki przez nią podparte: *półokręgami*.

Średnica przechodzi przez środek koła, zatém każdy z niéj dwóch odcinków (4 Uw.), zawartych między środkiem koła a jéj końcami, jest promieniem, przeto średnica równa się dwom promieniom, a tém samém średnice w kole są sobie równe. Przytem średnica jest największa ze wszystkich cięciw, gdyż każda cięciwa jest mniejsza od dwóch promieni poprowadzonych do jéj końców (3 Uw. 2), średnica zaś równa się summie dwóch promieni.

23. *Tw. Jeśli punkt leży wewnątrz okręgu koła, na okręgu, lub zewnątrz niego; to odległość tego punktu od środka, jest mniejsza, równa lub większa od promienia tego koła* (fig. 12.)

1° Prowadzę przez punkt B promień AC, prosta AB mierząca odległość punktu B od środka koła, jest mniejsza od promienia jako część od swojéj całości (Praw. oczy).

2° Jeśli punkt D leży na okręgu koła, to prosta AD, mierząca odległość tego punktu od środka koła jest promieniem.

3° Punkt E leży zewnątrz koła, łączę prostą EA ze środkiem koła, która przetnie ten okrąg w punkcie D, gdyż okrąg koła jest linią zamkniętą. Prosta EA mierząca odległość punktu E od środka koła, jest większa od promienia AD, jako całość od swojéj części.

24. *Tw. od. Jeśli odległość punktu od środka koła jest mniejsza, równa lub większa od promienia, wtedy ten punkt znajduje się wewnątrz, na okręgu lub zewnątrz okręgu koła* (fig. 12).

1° Punkt B nie może się znajdować ani na okręgu koła, ani zewnątrz niego, gdyż w pierwszym razie odległość tego punktu od środka równałaby się promieniowi, w drugim zaś razie byłaby większa od promienia, coby się sprzeciwiało założeniu; a zatém punkt B leży wewnątrz okręgu koła.

Podobnym sposobem można dowieść i dwóch innych przypadków.

Wn. Okrąg koła jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od środka gdyż każdy punkt jednakowo oddalony od środka koła leży na okręgu koła.

25. *Tw. gł. Okręgi kół równych promieni są sobie równe, czyli przystają do siebie we wszystkich punktach.* (fig. 13.)

Przenoszę okrąg koła F na A, tak aby środek F padł na środek A, i płaszczyzna pierwszego okręgu przystała do płaszczyny drugiego okręgu (18). Punkta okręgu F znajdują się w odległości promienia od środka A, gdyż z założenia promienie tych kół są sobie równe, przeto znajdują się na okręgu koła A (24. Przytém wszystkie punkta okręgu F przystają do okręgu A, gdyż jeśliby którykolwiek punkt okręgu F nie przystał do takiegoż punktu okręgu A, wtedy okrąg A, niezawierałby tego punktu, pomimo że on jest w odległości promienia od jego środka.

26. *Tw. Dwa okręgi kół przecinające się, mają tylko dwa punkta wspólne; jeden nad prostą a drugi pod prostą łączącą ich środki.* (fig. 14.)

Okrąg koła C przecinając okrąg koła A w punkcie B wchodzi wewnątrz tego okręgu: lecz że oba okręgi są liniami zamkniętemi, przeto okrąg koła C wychodząc z okręgu A przecina go także w punkcie E. Punkt B jest punktem wejścia, zaś E wyjścia okręgu koła C z okręgu A, przeto ani nad punktem B ani pod punktem E okręgi te nie mają wspólnego punktu, potrzeba więc tylko dowieść że niema punktu wspólnego tym dwóm okręgom między punktami B i E. Jeśli punkt D leżący nad linią środków AC byłby wspólny dla tych okręgów, to poprowadziwszy promienie do punktów B i D, $AB=AD$ i $CB=CD$ zatem i $AB+BC=AD+DC$ co być niemoże (20), przeto punkt wspólny nie może znajdować się nad linią AC. Niemoże się także znajdować na linii środków, gdyż $AC=AB+BC$ (3); przeto oprócz punktu B niema innego punktu wspólnego tym dwóm okręgom nad linią AC. Dla podobnéj przyczyny jeden tylko punkt E jest wspólny dla tych okręgów pod linią AC.

Wn. Jeden tylko jest punkt nad prostą w danéj odległości od jéj końców. Wszystkie punkta leżące w danéj odległości (fig. 14) AB od końca A prostéj AC, leżą na okręgu koła opisanego z punktu A promieniem AB, (24 Wn.); wszystkie punkta leżące w oddaleniu CB od końca C leżą na okręgu koła zakreślonego z punktu C, a zatem punkt leżący nad linią AC; oddalony od A na AB a od C na CB leży na wspólnem przecięciu się tych okręgów. Lecz okręgi te przecinają się w jednym tylko punkcie nad linią AC, przeto jeden jest tylko punkt nad linią w danem oddaleniu od końców téj linii.

27. *Tw. W kole albo w kołach równych, cięciwy równe podpierają łuki równe.* (fig. 13)

Zakładam, że okrąg koła F równy okręgowi koła A, i cięciwa KM=GI. *Twierdzę*, że łuk KLM = GHI. Posuwam okrąg F na płaszczyznie rysunku, tak aby punkt K padł na G, prosta KM na prostą GI, zatém punkt M padnie na punkt I, dla równości tych dwóch linii (4 Wn. 4); a że promienie tych kół są sobie równe (25), przeto punkt F równie jak i A znajdują się od końca G i I w odległości promienia, są więc jednym tylko punktem (26 Wn.), czyli punkt F padł na punkt A; a zatém okrąg koła F przystał do okręgu koła A, i łuk KLM do łuku GHI; że zaś te łuki mają końce wspólne, zatém przystają do siebie we wszystkich punktach czyli są sobie równe; to samo ściąga się i do łuków KOM i GCI.

Jeśliby cięciwy KM i PQ równe, należały do jednego koła, wtedy w okręgu A równym okręgowi F, poprowadziwszy cięciwę GI=KM a tém samém i cięciwie PQ, łuki KLM i POQ, jako równe podług twierdzenia łukowi GHI, będą sobie równe.

Uw. Na téj własności łuków okręgów równych, możemy na okręgu, odciąć łuk równy łukowi danemu.

28. *Tw. od. W kole albo w kołach równych, łuki równe mają cięciwy równe.* (fig. 13).

Zak. Okrąg F= okręgowi A i łuk KLM=łukowi GHI. Tw: Cięciwa KM=cięciwie GI.

Przenoszę okrąg F na A, tak aby ich środki i płaszczyzny przystały do siebie, zatém i okrąg F przystanie do okręgu A. Obracam okrąg F na płaszczyznie tak, aby punkt K padł na punkt G, łuk KLM poszedł po łuku GHI, to punkt M padnie na punkt I dla równości tych dwóch łuków a tem samém cięciwa KM przystaje do cięciwy GI i jest jéj równa.

Jeśli łuki równe KLM i POQ należą do jednego koła, wtedy poprodziwszy cięciwę GI, równą cięciwie PQ, łuk POQ będzie równy łukowi GHI, a tém samem i łukowi KLM, przeto podług poprzedzającego, cięciwa KM = GI, zaś GI=PQ z odcięcia, więc i KM=PQ.

Wn. Średnica RS dzieli okrąg koła F na dwie równe części, gdyż poprowadziwszy w okręgu A równym okręgowi F średnicę NT, ponieważ cięciwa

RS=NT, więc łuk RLS=NGT, bo po przeniesieniu średnic i środki ich kół przystają do siebie (4 Uw.). Dla podobnéj przyczyny i łuk ROS=NGT, przeto łuk RLS=ROS (Praw. oczy), i dla tego one zowią się półokręgami.

Wn. 2. *Cięciwa* K M *dzieli koło na dwie nierówne części*, czyli łuk KLM < KOM, pierwszy bowiem jest mniejszy, a drugi większy od półokręgu koła.

29. *Zg. Nakreślić okrąg koła.*

Jeżeli na płaszczyznie weźmiemy jeden punkt, zaś drugi na téj płaszczyznie posuwać będziemy tak, aby odległość tego punktu od wziętego na płaszczyznie niezmieniała się, to on opisze okrąg koła (22).

Narzędzie więc służące do kreślenia okręgu koła, powinno mieć dwa punkta, którym nadana odległość niezmieniałaby się, i gdy jeden zostaje w spoczynku; żeby drugi mógł swobodnie posuwać się po płaszczyznie. Punkta te są to ostrza, przeto im będą delikatniejsze, tembardziéj zbliżą się do punktu, a nakreślony okrąg koła do wyobrażalnego.

Błędy w kreśleniu okręgu z dwóch przyczyn pochodzić mogą: 1) jeśli punkt około którego obracamy, zmieni swoje położenie; gdyż wtedy punkta krzywéj opisanéj będą równo oddalone nie od jednego punktu; 2) Gdy w czasie obrotu zmieni się odległość punktów; gdyż wtedy punkta krzywéj nie będą równo oddalone od punktu mającego być środkiem.

Narzędzia do kreślenia koła są różne, podług tego jak wielki ma być okrąg koła. I tak: 1. Cerkiel metalowy lub drewniany. 2. liniał ze szpicem ruchomym i nieruchomym (fig. 15). Miejsce liniału zastąpić może tyka lub sznur.

30. *Zg. Na okręgu danym, odciąć łuk, równy łukowi danemu* (fig. 13).

Stawiam jedną nóżkę cerkla w jednym końcu G łuku danego GHI, zaś drugą w I, drugim końcu tego łuku i przenoszę otwartość cerkla na okrąg dany jednakowego promienia F, od K do M. Łuk KLM = GHI (27). Jeśli punkt K byłby dany na okręgu F, od którego odciąć potrzeba łuk GHI, wtedy przenosząc roztwartość cerkla, jedną nóżkę stawiamy w tym punkcie K.

31. *Zg. Obrotem płaszczyzny nakreślić okrąg koła*.

Płaszczyzny przystają do siebie we wszystkich punktach (18), przeto jeśli położymy jedną płaszczyznę na drugiéj, i na niéj będziemy obracali około punktu stałego, to każdy punkt obracanéj płaszczyzny, posuwać się będzie w jednakowéj odległości od punktu obrotu i opisze okrąg koła (22).

Jeśli obracając piérwszą płaszczyznę około punktu stałego, na drugiéj płaszczyznie w pewnéj odległości postawimy ostrze stałe, to wszystkie punkta pierwszéj płaszczyzny, oddalone jednakowo z ostrzem od punktu obrotu, przystawać będą do końca ostrza (4 Wn. 4), a że punkta płaszczyzny jednakowo oddalone od jednego punktu składają okrąg koła, przeto ostrze zakreśli na płaszczyznie okrąg koła.

32. *Zg. Stosunek dwóch łuków równych promieni wyrazić liczbą.* (fig. 17)

Łuk mniejszy CD Przeniesiony na większy AB, zawiera się w nim dwa razy od A do F i pozostaje FB $<$ CD. Przenoszę FB na CD zawiera się w nim 4 razy od C do K, i pozostaje KD $<$ FB; przenoszę KD na FB, zawiera się trzy razy od F do N i pozostaje NB $<$ KD.—Jeżeli narzędzie nie pozwala przenosić NB na KD, albo ścisłość rachunku tego niewymaga, opuszczamy NB i uważamy że KD mieściło się bez reszty 3 razy.

Przeto $\frac{AB}{CD} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{3}} = 2 + \frac{3}{13}$ (11)

błąd jest mniejszy od $\frac{1}{4 \times 13} = \frac{1}{52}$ (*)

Jeśli łuk CD przyjmujemy za jedność do mierzenia łuku AB to $2\frac{3}{13}$ wyraża ile razy jedność zawiera się w AB czyli wielkość tego łuku w danéj jedności.

(*) Własność ułamków ciągłych jest ta, że biorąc piérwszą przybliżoną wartość czyli piérwsze ogniwo $\frac{1}{4}$, drugą przybliżoną wartość t. j. dwa pierwsze ogniwa $\frac{1}{4+\frac{1}{3}} = \frac{3}{13}$ i t. d. popełniamy błąd mniejszy od jedności podzielonéj przez iloczyn mianownika téj wartości przez mianownik wartości poprzedzającéj $\frac{1}{13 \times 4} = \frac{1}{52}$

33. *Uw. Podział okręgu koła dawny i nowy; mierzenie łuku.*

Podług dawnego podziału, bardziéj używanego, cały okrąg koła jest podzielany na 360 części równych zwanych *stopniami*, stopień dzieli się na 60 części równych zwanych *minutami*, minuta na 60 części równych zwanych *sekundami* i t. d., i podziału tego zazwyczaj używamy tylko do sekund. Łuk wyraża się przez liczbę zawierających się w nim stopni minut i sekund. Stopnie oznaczają się zerem napisaném z prawéj strony nad liczbą, minuty jedną kréską, sekundy dwoma kréskami, tercye trzema kréskami i t. d. np. $25^{0}.3' 46''$

Podług nowego podziału okrąg koła dzieli się na 400 części równych zwanych *stopniami*, stopień na 10 części równych zwanych minutami i t. d. tak że stopień jest 400 częścią okręgu, minuta dziesiątą częścią stopnia, sekunda dziesiątą częścią minuty, czyli setną stopnia, tercya dziesiątą częścią sekundy czyli tysiączną częścią stopnia i t. d. Jeśli więc łuk podług tego podziału wyrazimy liczbą, stopnie będą liczbą całą, minuty zaś sekundy i tercye dziesiętnemi, setnemi i tysiącznemi częściami całości, tak że łuk oznaczy się w stopniach liczbą całą z ułamkiem dziesiętnym.

Dogodność piérwszego podziału jest ta, że więcej części okręgu koła wyraża się liczbą całą stopni, aniżeli podług drugiego, to samo ściąga się do liczby części stopni wyrażających się zupełnie w minutach, części minut wyrażających się w sekundach i t. d.

gdyż $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ zaś $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$. Podług piérwszego więc podziału 3cie, 6te, 9te, i t. d. części wyrażają się całą liczbą stopni, zaś podług drugiego nie, gdyż nie wchodzi czynnik 3; tak że podług piérwszego 23 części okręgu wyraża się całą liczbą stopni t. j. połowa, trzecia część, czwarta, piąta i t. d. podług drugiego tylko 14cie. Co do części stopnia $60 = 2. 2. 3. 5$; $10 = 2. 5$. t. j. podług dawnego, ośm części stopnia wyraża się całą liczbą minut, a podług nowego trzy tylko części.

Do mierzenia prostych, mogliśmy wziąć za jedność jakąkolwiek linję prostą, gdyż wszystkie te linje przystają do siebie; okręgi zaś przystają tylko wtenczas, gdy mają promienie równe; przeto łuk można tylko mierzyć łukiem tego samego promienia, czyli łukiem tego samego okręgu koła. Zmierzyć łuk jestto dowiedziéć się, jaką on jest częścią swego okręgu koła. Ogólny sposób (32), chociaż ścisły, jest zadługi, i dla tego łuki się mierzą stopniami, minutami i t. d. Podług dawnego podziału za jedność do mierzenia łuku bierzemy 360tą część jego okręgu koła. Jeślibyśmy przenieśli ten stopień na łuk mierzony, tyle razy, ile się on w nim zawiera, czyli dopókąd reszta nie będzie mniejsza od stopnia, jeżeli wtenczas stopień zawiera się 5 razy, to łuk zawiera w sobie 5 stopni i jeszcze łuk mniejszy od stopnia. Dla dowiedzenia się jaką częścią stopnia jest ten łuk, zamiast przenosić go na stopień (11), przenosimy na tę resztę 60tą część stopnia; jeśli ona zawiera się

3 razy, to łuk mierzony zawiera 5. stopni, 3 minuty i jeszcze łuk mniejszy od minuty. Dla poznania jaką część minuty łuk ten stanowi, przenosimy nań 60tą część minuty, na ten łuk dopóki reszta nie będzie mniejsza od téj części; jeśli sekunda zawiera się 4 razy, to łuk mierzony zawiera $5^0 3' 4''$ i jeszcze łuk mniejszy od sekundy, i t. d. Przeto: gdy poprzestaniemy na samych stopniach, opuścimy łuk mniejszy od stopnia, i wartość wynaleziona będzie mniejszą od rzeczywistéj o mniéj niżeli stopień czyli $\frac{1}{360}$ okręgu; jeżeli poprzestaniemy na stopniach i minutach, to opuścimy łuk mniejszy od minuty, i wartość jego będzie mniéjszą od rzeczywistéj o mniéj, aniżeli minuta, czyli $\frac{1}{60}$ stopnia $= \frac{1}{60} \times \frac{1}{360} = \frac{1}{360 \times 60} = \frac{1}{21600}$ okręgu; poprzestając na sekundach, dla podobnéj przyczyny, popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{21600 \times 60} = \frac{1}{1296000}$ okręgu i t. d.

Łuk więc $5^0 3' 4'' = \frac{5}{360} + \frac{3}{21600} + \frac{4}{129600}$ okręgu, jest summą ułamków, których jednostki są jedna od drugiéj o 60 razy mniejsze; biorąc zaś pierwszy, dwa pierwsze, trzy pierwsze ułamki, otrzymujemy pierwszą, drugą i trzecią przybliżoną wartość łuku i błąd jest coraz o 60 razy mniéjszy.

Mierząc tym sposobem łuk, przykładany do niego łuk jemu równy podzielony na stopnie, lub na stopnie i minuty, albo na stopnie minuty i sekundy, i łuk ten zowie się przenośnikiem, a ile stopni, minut i sekund zawiera łuk przenośnika równy mierzonemu, tyle stopni, minut i sekund zawiera łuk mierzony.

34 *Uw. Przenośnik.* (fig. 16)
Narzędzie to zazwyczaj miedziane składa się z półkola wydrążonego, i liniału EG będącego jego średnicą, wycięcie zaś D oznacza jéj środek; wyjęcia A i C służą do dokładnego przykładania wewnętrznego brzegu liniału do średnicy mierzonego koła. Brzeg okręgu dzieli się na stopnie, które często bywają podwójne, aby zarazem łuk można było czytać z prawéj i z lewéj strony. Chcąc zmierzyć łuk z wszelką dokładnością, kładziemy wewnętrzną stronę liniału przy średnicy mierzonego łuku, przechodzącéj przez jeden z jego końców, środek D przykładamy do środka koła, którego łuk jest częścią. Liczba stopni odpowiadająca drugiemu końcowi, wtenczas gdy pierwszemu odpowiada zero, jest liczbą stopni mierzonego łuku.

35 *Zt.* Na téj zasadzie że średnice w kole są sobie równe (22), sprawdzają się wydrążenia kołowe. Wkłada się największy liniał jaki może wejść w wydrążenie, a który jest jego średnicą, jako największy ze wszystkich cięciw, probuje się czy w każdym kierunku jednakowo przylega do ścian wydrążenia w tém tylko razie, ponieważ średnie są sobie równe, wypreżenie jest okręgiem

36 *Zt.* Koła równych promieni, mające środki wspólne i leżące na jednéj płaszczyznie, przystają od

siebie w każdem położeniu (25); przeto jeśli narysowawszy koło na tekturze, wytniemy je z tektury ostrém i cienkiém narzędziem, to otrzymamy dwa okręgi równe, zewnętrzny, wyciętego koła, i wewnętrzny, otworu pozostałego w tekturze. Krążek wycięty będzie się mógł obracać w otworze, przylegając do niego we wszystkich punktach. Ta własność wyłącznie należąca do okręgu koła, ma liczne zastosowania w rzemiosłach. Na téj zasadzie robią się krany, zatyczki w karafkach i t. p., których dokładność zależy od równości promieni kół wypukłych i wydrążeń.

W odlewaniu ciał okrągłych, wydrążenie modelu powinno mieć promień zupełnie równy promieniowi żądanego odlewu; aby zaś nie było nierówności, przy odlewie w piasku, wybiera się piasek bardzo miałki; jeżeli zaś model wyrabia się w ziemi, to wydrążenie wylewa się płynną gliną. Przed wyjęciem odlewu obracamy go w jedną i drugą stronę dla zrównania jego powierzchni.

Jeżeli na płaszczyznie mamy nakreślić łuk równy łukowi modelu danego w naturalnéj wielkości, wtedy jeśli środek łuku niemieści się na danéj płaszczyznie wycinamy ten łuk z modelu z jego cięciwą, kreślimy na płaszczyznie prostą mającą podpierać łuk żądany, przykładamy cięciwę łuku wyciętego z modelu do téj prostéj, i przy brzegu zewnętrznym kreślimy linię która będzie łukiem żądanym (35 i 27). Ten sposób jest zwykle używany przy wyrabianiu ornamentów.

Garncarze i tokarze kreślą koła zapomocą obrotu płaszczyzny.

ROZDZIAŁ II.

Linie proste połączone z prostemi.

§ 1. Prosta uważana z poprzeczną.

37. Wszelka linia prosta AB, (fig. 10) dzieli płaszczyznę na dwie części. Jeśli ją przetniemy drugą prostą, zwaną względem niéj *poprzeczną*, to ta przetnie prostą AB w jednym punkcie (4 wn 4), i rozdzieli obie części płaszczyzny utworzone przez AB na dwie części. Płaszczyzna więc dwóch prostych AB i CD (18), została przez te linie podzielona na cztery części, DEB, BEC, CEA i AED.

Odcinki nieograniczone ED, EB, EC, EA prostych AB i CD, rachowane od punktu przecięcia się E, zowią się liniami *zbiegającemi się*, punkt przecięcia się E, *punktem zbiegu*.

38. *Część płaszczyzny* DEB, *zawarta między dwoma prostemi* ED i EB *zbiegającemi się, zowie się kątem.*

Pod względem kształtu kąt jest nachyleniem się dwóch linii zbiegających się i dla tego mówiąc o kształcie wyłacznie tę własność w kącie uważać będziemy. Pod względem wielkości kąt jest pewną częścią całéj płaszczyzny; i dla tego zmierzyć jego wielkość jest to wyrazić jaką on stanowi część płaszczyzny *).

Punkt zbiegu E zowie się *wierzchołkiem kąta*, zbiegające się ED i EB, jego *ramionami*. Jeżeli kilka kątów mają wierzchołek wspólny, kąt czyta się trzema literami, jedną będącą w wierzchołku a dwoma na ramionach, wymawiając w środku wierzchołek tym sposobem czytamy oba ramiona BE i ED; jeśli zaś kąty niemają wierzchołków wspólnych czytają się jedną ploską, położoną przy wierzchołku. Wielkość kąta nie zależy od długości ramion, bo te są nieograniczone i oznaczają się jakiemikolwiek swemi dwoma punktami (4 wn. 3): jednym wspólnym dla obu ramion, a drugim leżącym na ramieniu o które nam idzie.

39 Łuk zakreślony z wierzchołka kąta i zawarty między jego ramionami, zowie się *łukiem odpowiednim*. Łuki odpowiednie dwóch kątów mają równe promienie.

40. Kąty CBA i FED, (fig 18) *zowią się równe*, jeżeli położywszy płaszczyznę kąta CBA na płaszczyznę kąta FED tak: aby wierzchołek B, padł na wierzchołek E i ramie BA na ED, drugie ramie BC przystaje do EF.

---

*) Rozbiór definicyi kąta znajduje się w Przeglądzie Naukowym z roku 1847, za miesiąc Wrzesień w rozprawie: *o dwóch liniach prostych leżących na płaszczyźnie*.

Kąt GED *jest większy* od kąta ABC, czyli ABC *jest mniejszy od* GED, jeżeli po przeniesieniu drugie ramie BC pada wewnątrz kąta GED. I nawzajem.

Ztąd widzimy *że linie przystają do linji dla równości kątów—równie linia pada wewnątrz lub zewnątrz kąta, z przyczyny nierówności kątów.*

41. Kąty utworzone przez poprzeczną CD (fig 10.) z prostą AB, leżą albo z jednéj strony poprzecznéj, DEB i BEC, albo też z przeciwnych jéj stron, BEC i AED. W pierwszym razie zowią się *przyległemi*, w drugim zaś, *wierzchołkiem przeciwległemi* albo *przeciwległemi.*

Kąty więc *przyległe są te które mają wierzchołek* E *wspólny, jedno ramię* EB, *wspólne, a dwa inne ich ramiona* ED i EC *stanowią jedną linię prostą* DC. W ogólności kąty przyległe DEB i BEC nie są równe; a ramie ich wspólne BE zowie sie linią *pochyłą* do linji dwóch ramion tych kątów t. j. linii CD. Im większa różnica między kątami BED i BEC, tém linia BE jest bardziéj pochyloną do CD. W tym szczególnym przypadku w którym (fig. 19) kąty przyległe DEB i BEC są sobie równe, kąty te zowią się *prostemi*, a ramie ich wspólne BE—linią *prostopadłą* do dwóch innych ramion, t. j. do linii CD.

Kąty BEC i AED (fig. 10) *wierzchołkiem przeciwległe są te, które mają wierzchołek* E *wspólny, a ramiona jednego są przedłużeniem ramion drugiego*: EA przedłużeniem BE zaś ED przedłużeniem EC.

42. *Tw. Z punktu* E *wziętego na linii* CD, *jedną tylko prostopadłą* EB *do téj linii poprowadzić można* (fig. 19.)

Jeżeli oprócz linii BE prostopadłéj do CD, byłaby inna linia EF do niéj prostopadła, to kąt CEB = BED i CEF = FED. Lecz kąt CEB < CEF, przeto i kąt równy pierwszemu, byłby mniejszy od kąta równego drugiemu, czyli BED < FED co być nie może. A zatem kąt CEF nie może być równy kątowi FED, a tem samem ani linia FE prostopadłą do CD.

43. *Tw. Wszystkie kąty proste są sobie równe*; CEB = GKI, BED = IKH, (fig. 20.)

1.) Odcinam EC = KG; 2.) przenoszę płaszczyznę linii GH i IK na płaszczyznę drugich dwóch linii (18), tak aby punkt G padł na punkt C, prosta GH poszła po prostéj CD, zatem punkt K padnie na punkt E, dla równości linii GK z linią CE (4 wn. 4). Po przystaniu tych dwóch płaszczyzn linia KI padnie na EB, gdyż z punktu E jedną tylko prostopadłą do CD poprowadzić można.

44. *Tw. gł. Punkta* E i B, *równo oddalone od końców linii* AC, *leżą na prostopadłéj* EB *przechodzącéj przez* D *środek téj linii* AC. (fig. 21.)

Zak: AE = EC i AB = BC. Tw. że kąt CDB = BDA i CD = AD.

Obracam płaszczyznę BDC (18) około linii BD aż póki nie padnie na płaszczyznę ABD. Wtedy oba punkta A i C leżą z jednéj strony linii BE w jednakowéj odległości od jéj końców B i E, przeto leżą w jednym punkcie (26 wn.); czyli punkt C padł na A i linia DC przystala do DA (4 Wn. 2); a zatem kąt CDB = BDA i linia BD jest prostopadłą do AC (41), tudzież DC = DA czyli punkt D jest środkiem linii AC (4. Uw.)

45. *Tw. odw. Każdy punkt* B *prostopadłéj* BD *wyprowadzonéj ze środka linii* AC, *jest równo oddalony od jéj końców*, czyli BC = BA (fig. 21.)

Obracając płaszczyznę BD, kładę ją na pł. BDA, linia DC padnie na DA, dla równości kątów CDB i BDA prostych z założenia, punkt C padnie na punkt A, dla równości linii DC i DA, linie więc BC i BA mające w tém położeniu końce wspólne są sobie równe.

Wn. Punkt F *wzięty nie na prostopadłéj* BD *wyprowadzonéj ze środka linii* AC, *nie jest równo oddalony od końców téj linii*, bo połączywszy punkt F z końcami linii A i C, jedna z nich przetnie prostopadłą w punkcie B. Punkt B z drugim końcem C, prostéj AC, łączę linią prostą. Linia FB + BC > FC (3. wn. 2); lecz BC = BA przeto i FB + BA > FC czyli FA > FC.

46. *Tw. Summa kątów przyległych* CEF i FED, *równa się dwom kątom prostym* (fig. 19).

Jeżeli kąty CEF i FED nie są sobie równe t. j. proste, wtedy z punktu E wyprowadziwszy prostopadłą EB, kąt CEF = CEB + BEF; dodawszy więc po kącie FED, mamy CEF + FED = CEB + BEF + FED; lecz kąt DEB=DEF+FEB, jeśli więc dodamy do obu stron po kącie BEC, otrzymamy DEB+BEC= DEF+FEB+BEC. Przeto tak kąty przyległe CEF+FED, jak i dwa kąty proste DEB+BEC, równają się sumnie trzech kątów CEB+BEF+FED, a zatem summa kątów przyległych równa się dwom kątom prostym.

Wn. 1. *Summa kątów po sobie idących, utworzonych z jednéj strony linii prostéj, równa się dwóm kątom prostym*; dla tego że składa dwa kąty przyległe.

Wn. 2. *Przedłużenie* fig. 20.) KL *prostopadłéj* IK *jest także prostopadłe do linii* GH; summa bowiem kątów przyległych IKH+HKL równa się dwóm kątom prostym, a że IKH jest prosty, przeto i HKL jest prosty; dla podobnéj przyczyny kąt LKG jest prosty przeto równy kątowi LKH i LK jest prostopadłą do GH (41).

Wn. 3. Linia prosta dzieli płaszczyznę na dwie równe części, gdyż tak z jednéj jak i z drugiej jéj strony summa kątów równa się dwom kątom prostym, cała zaś płaszczyzna około jednego punktu zapełnia się czterema kątami prostemi, tak, że kąt prosty jest czwartą częścią płaszczyzny.

Uw. 1. Kąt mniejszy od prostego zowie się *ostrym*, większy zaś od prostego *rozwartym*.

Uw. 2. Kąt czyniący z danym kąt prosty zowie się jego *spełnieniem*. Wszystkie kąty proste są sobie równe już to podług Nr. 43, lub jako czwarte części płaszczyzn, a które są sobie równe (18); przeto *jeśli kąty są równe, to i ich spełnienia są równe, kąta zaś większego spełnienie jest mniejsze.* Kąt czyniący z danym dwa kąty proste zowie się jego *dopełnieniem*. Kątów więc równych dopełnienia są równe, kąta zaś większego dopełnienie jest mniejsze.

Uw. 3. Dla krótkości, wielkość kąta prostego oznaczymy przez R, dwóch kątów prostych przez II; przeto R wyraża czwartą część płaszczyzny T, połowę płaszczyzny.

47. *Tw. od. Jeżeli summa dwóch kątów mających jedno ramię wspólne, równa się dwóm kątom prostym, to ramiona ich zewnętrzne składają jedną linię prostą* (fig. 19.)

Zak. CEF+FED=II. *Tw.* CE i ED składają jedną linię prostą CD.

Gdyby linia ED nie była przedłużeniem prostej CE, to przedłużeniem tem byłaby linia EM wtedy; CEF+FED=CEF+FEM; gdyż pierwsze z założenia, drugie jako przyległe z przypuszczenia zrównają się II. Odejmując po kącie wspólnym CEF, mamy FED=FEM, co być nie może, a zatem przedłużenie prostéj CE nie może być pod linią ED ani, dla podobnéj przyczyny, nad tą linią, więc linia ED jest przedłużeniem CD; czyli te dwie linie składają jedną linię prostą.

48. *Tw. Kąty wierzchołkiem przeciwległe* BED i AEC *są sobie równe* (fig. 10).

Kąt BED+DEA=II. jako przyległe (46); dla podobnéj przyczyny i kąt CEA+AED=II, przeto kąt BED+DEA=CEA+AED. Odjąwszy po kącie AED mamy BED=CEA.

49. *Tw. odw. Kąty równe* BED i CEA, *mające wierzchołek* E *wspólny, ramię jednego* ED *na przedłużeniu ramienia drugiego* CE, *a dwa inne ramiona z przeciwnych stron linii pierwszych ramion; są kątami przeciwległemi.* (fig 17.)

Gdyby ramie EA nie było przedłużeniem ramienia EB, to przedłużywszy ramię BE do F, kąt BED równałby się kątowi CEF, jako przeciwległemu, z założenia zaś jest równy kątowi CEA, przeto kąt CEF równałby się kątowi CEA, co bym nie może.

50. *Tw. Z punktu* C *wziętego nad prostą* AB, *jedną tylko prosto padłą* CE *do téj linii poprowadzić można* (fig. 22)

Jeżeliby można było poprowadzić i drugą CF, to przedłużenia ich byłyby także prostopadłe do linii AB. Obracając płaszczyznę CEF około linii EF, gdy położę ją na płaszczyznę ADB, prostopadłe CE i EF padną na swoje przedłużenia, dla równości kątów prostych (40); lecz że z przypuszczenia prostopadłe schodzą się w jednym punkcie C, więc i ich przedłużenia, schodziłyby się w jednym punkcie D; co być nie może, gdyż przez dwa punkta C i D można tylko poprowadzić jedną linię prostą (4 wn 2); a zatem z punktu C nie można poprowadzić dwóch prostopadłych do linii AB.

Uwaga. Z poprzedzających twierdzeń widzimy że 1. W jednem tylko położeniu poprzeczna jest jednakowo nachylona do obudwóch przez nią utworzonych odcinków linii (42, 46 wn. 2, 50.) 2. W tém położeniu poprzeczna jest miejscem wszystkich punktów, jednakowo oddalonych od końców równych sobie odcinków linii (41, 45). 3. Nachylenie się odcinków jakiejkolwiek poprzecznéj, do odcinków linii, jest jednakowe (48). Te własności poprzecznéj odnoszą się głównie do jéj położenia.

51. *Tw. Jeżeli z punktu* A *wziętego nad prostą, poprowadzimy prostopadłą* AB, *tudzież pochyłe* AC, AD *i* AE *to* 1. *Prostopadła* AB *jest najkrótszą ze wszystkich pochyłych.* 2. *Dwie pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj są sobie równe.* 3. *Z dwóch pochyłych ta jest dłuższą, która jest bardziéj oddalona od spodka prostopadléj.*(fig. 29.)

Na dowiedzenie tego przedłużam prostopadłą AB tak, aby jéj przedłużenie BF, równało się samej linii AB. Przedłużenie to jest prostopadłe do EB (46 wn. 2); przeto BE jest prostopadłą wyprowadzoną ze środka linii AF.

1°. Połączywszy punkt D z F, linia AD=DF (45). Lecz AD+DF > AB+BF (3. wn. 2); więc i AD > AB, gdyż pierwsza jest połową AD+DF druga zaś połową AB+BF.

2°. Jeżeli BD=BC to i AD=AC, gdyż AB jest prostopadłą do środka linii DC (45).

3°. AE > AD. Połączywszy punkt E z F, AE=EF jako mierzące oddalenie punktu prostopadłéj BE od końców linii AF. Lecz AE+EF > AD+DF, przeto połowa pierwszych jest większa od połowy drugich, czyli AE > AD.

Wn. 1. Prostopadła, jako najkrótsza ze wszystkich pochyłych, wskazuje najkrótsze a przeto prawdziwe oddalenie punktu A od linii EC. *Oddalenie punktu od linii, mierzy prostopadła wyprowadzona z tego punktu do linii.*

Wn. 2. Dwie tylko pochyłe równe, można poprowadzić z punktu do linii, gdyż linia prosta ma tylko jeden środek (4. Uw.)

52. *Tw. gł. Kątom równym odpowiadają łuki równe* (fig. 23,)

Posuwam kąt D po płaszczyznie, tak aby punkt D padł na A, ramię DF poszło po AC, tedy punkt F padnie na punkt C, dla równości tych ramion (4 wn. 4) Ramię DE przystanie do ramienia AB, dla równości kąta D z kątem A, i punkt E padnie na B, dla równości ramion DE i AB; a że środki A i D, i końce łuków równych promieni FE i BC przystały do siebie przeto i łuk FE przystał do BC (25) i jest jemu równy.

Wn. Gdy kąt GDF > BAC, to i łuk FG > CB; gdyż ramię DG po przeniesieniu padnie zewnątrz ramienia AB (40) i łuk FG=CH jest większy od łuku CB.

53. *Tw. od. Kąty odpowiednie łukom równym są sobie równe* (fig. 23).

Posuwam łuk EF po płaszczyznie, tak aby środek D padł na środek A, i promień DF poszedł po promieniu AC; zatem punkt F padnie na punkt C, dla równości promieni (4. wn. 4), łuk FE przystanie do CB (25) a że łuki te z założenia są sobie równe, przeto i punkt E padnie na B; zatem ramie DE padnie na AB i kąt D równy kątowi A.

Wn. Kąt GDF odpowiedni łukowi GF $>$ CB jest wiekszy od kąta BAC, gdyż koniec G, łuku GF po przeniesieniu padnie za końcem B w punkcie H, a tem samem i ramie DG, padnie w kierunku AH, zewnątrz ramienia AB; przeto kąt FDG $>$ CAB.

54. *Tw. gł. Stosunek kątów równa się stosunkowi łuków im odpowiednich* (fig. 24).

Przenoszę łuk DF na AB, zawiera się on w nim trzy razy i pozostaje łuk iB $<$ DF. Poprowadziwszy promienie do punktów g, h, i, kąty ACg, gCh, hCi, są równe kątowi DEF (53), kąt zaś iCB mniejszy od DEF (53 wn); przeto i kąt DEF zawiera się w kącie ACB trzy razy i pozostaje kąt iCB $<$ DEF, przenoszę łuk iB na DF zawiera się on w nim dwa razy od D dom i pozostaje łuk mF $<$ iB;—zatem kąt iCB zawiera się w kącie DEF dwa razy i pozostaje kąt mEF $<$ iCB. Podobnym sposobem przenosząc łuk mF na iB, to ile razy on będzie się zawierał w iB, tyle razy i kąt odpowiedni łukowi mF, zawierać się będzie w kącie odpowiednim łukowi iB; a zatem stosunek kątów równa się stosunkowi łuków odpowiednich (14).

Wn. 1. *Miarą kąta jest łuk jemu odpowiedni.* Stosunek kątów równa się stosunkowi odpowiednich łuków, czyli, kąt zawiera się w kącie tyle razy ile łuk odpowiedni zawiera się w łuku. Zmierzyć kąt, jest to dowiedzieć się ile razy kąt wzięty za jedność zawiera się w mierzonym kącie; dla zmierzenia więc kąta mierzymy łuk mu odpowiedni, łukiem odpowiednim jedności kąta, i dla tego łuk odpowiedni zowie się miarą kąta.

Kąt jednak nie jest wielkością jedno-wymiarową, gdyż wielkość jego zależy nietylko od długości łuku odpowiednego, ale i od długości ramion; a że ramiona, we wszystkich kątach, jako linie proste nieograniczone są sobie równe (4); przeto kąty, tak jak i wszystkie powierzchnie mające jeden wymiar równy, są w stosunku drugiego wymiaru, czyli łuku.

Uw. 1. Tworzenie się kąta jest takie jak każdéj powierzchni: odcinek, linii prostéj nieograniczonéj, mający koniec w środku łuku, posuwając się po tym łuku. utworzy kąt. *Kąt* więc, niezależnie od płaszczyzny, *jest miejscem prostych, bez przerwy po sobie idących, wychodzących ze środka łuku i przecinających się z łukiem.*

Uw. 2. Wyobraziwszy okrąg koła podzielony na stopnie, minuty sekundy i t. d., jeżeli ze środka koła poprowadzimy linie do końców pierwszych podziałów, t. j. stopni cała płaszczyzna podzieli się na 360 kątów równych, jako odpowiednich łukom równym (stopniom). Każdy więc z tych kątów jest 360tą częścią płaszczyzny; a że wielkość wszystkich płaszczyzn jest jednakowa (18), przeto 360-ta część płaszczyzny ma wielkość stałą i kąt ten zowiemy stopniem kąta. Poprowadziwszy promienie do podziałów stopnia okręgu, stopień kąta podzieli się na 60 części równych, zwanych minutami będących 60-tą częścią stopnia kątowego, czyli $360 \times 60 = 21600$-tą częścią płaszczyzny.—

Dla podobnéj przyczyny sekunda kąta jest 60-tą częścią minuty kąta czyli $21600 \times 60 = 1296000$-ną częścią płaszczyzny. Porównywając wielkość kąta z całą płaszczyzną zwaną *kątem pełnym*, będzie on taką częścią płaszczyzny, jaką częścią całego okręgu koła jest łuk jemu odpowiedni; a że jednostki kątów mają za łuki odpowiednie, jednostki okręgu koła zmniejszające się o 60 razy, przeto dla zmierzenia kąta mierzymy łuk mu odpowiedni, i ile on zawiera stopni, minut, sekund i t. d. okręgu, tyle kąt mierzony zawiera stopni minut i sekund kąta. Stopnie te minuty, sekundy i t. d. tak samo oznaczają się jak w łuku, i to niemoże nas w błąd wprowadzić dla tego, że ta wielkość kąta jest wyrażona w jego jedności, jedność zaś jest jednakowego gatunku z mierzoną ilością, a przeto jednością w kącie nie jest łuk, ale kąt. Kąt prosty jako czwarta część płaszczyzny ma 90^0, ostry mniej, a rozwarty więcéj od 90^0.

Uw. 3. *Łuki odpowiednie kątom równym, nierównych promieni zawierają jednakową liczbę stopni i t. d*; gdyż każdy z nich jest taką częścią okręgu koła, jaką kąt płaszczyzny; a że kąty równe są jednakową częścią płaszczyzny, przeto i łuki są jednakową częścią okręgów kół, czyli zawierają jednakową liczbę stopni i t. d.

Uw. 4. Linie proste i łuki okręgów równych mogliśmy dodawać, odejmować i mnożyć przez liczbę całą; podobne działania odbywać możemy i z kątami, i kąt jest summą dwóch innych, jeśli łuk mu odpowiedni jest summą odpowiednich łuków i t. p.

55. *Zg. Z punktu* D *danego na prostéj* AC *wyprowadzić do niéj prostopadłą* (fig. 21.)

Odcinam DA=DC, z punktu A promieniem większym od połowy linii AC zakreślam łuk, i tą samą otwartością z C przecinam łuk w B. Prosta BD jest żądaną; gdyż punkt B, jako równo oddalony od końców linii AC, leży na prostopadłéj przechodzącéj przez środek téj linii, czyli przez punkt leżący na linii AC, równo oddalony od końców (44).

56. *Zg. Daną linię prostą* AC *podzielić na dwie równe części* (fig. 21.)

Wynajduję dwa punkta B i E równo oddalone od końców linii danéj AC, one leżą na linii prostopadłéj do AC, przechodzącéj przez jéj srodek szukany D. (44).

57 *Zg. Z punktu* B *danego nad prostą, wyprowadzić do niéj prostopadłą* (fig. 21.)

Znajduję dwa punkta linii AC, jednakowo oddalone odpunktu B, (zakreślając z tego punktu łuk przecinający tę linię w punktach A i C,) punkt jakikolwiek E równo oddalony od A i C leży z punktem B, na szukanéj prostopadłéj. (44.)

58. *Zg. Kątdany* IDH *wyrazić w stopniach* (fig. 16)

Kładę wewnętrzną krawędź liniału przenośnika (34) przy ramieniu DH, a liczba stopni odpowiadająca ramieniowi DJ, jest liczbą stopni kąta IDH (54, Wn. i Uw. 2).

59. *Zg. Przez punkt dany na prostéj poprowadzić prostą pod kątem danym.*

1o. *Zapomocą cerkla* (fig. 23.) Między ramionami kąta danego EDF zwierzchołka D zakreślam łuk, tym samym promieniem z punktu danego A przy linii danéj AC zakreślam także łuk i odcinam na nim łuk CB równy łukowi FE (30),—CAB jest kątem żądanym (53.)

2o. Za pomocą węgielnicy z ruchomém prawidłem (fausse-equerre)(fig.25). Węgielnica taka jest to cerkiel którego nóżki są liniałami. Roztwieram liniały tak aby ich wewnętrzne krawędzie czyniły kąt żądany. Przenoszę je w tém położeniu nóżek na linię daną AB, wewnętrzny brzeg liniału przykładam do téj linii i posuwam, dopóki przecięcie się krawędzi wewnętrznych liniałów nie padnie w punkcie A. Przy drugiéj krawędzi poprowadzona linia AC czyni z daną AB kąt żądany (40.)

3o. Jeśli kąt dany jest w stopniach (fig. 16.) przykładam przenośnik i przy podziale jego, odpowiednim danéj liczbie stopni, stawiam punkt K. a linia DK będzie żądaną (54 wn.)

60. *Zg. Przez punkt dany* C *nad linią* AB, *poprowadzić linią pod kątem danym.* (fig. 25.)

Ustawiam węgielnicę z ruchomém prawidłem pod kątem danym, przykładam ją do linii danéj i posuwam dopóki drugie ramię węgielnicy, lub liniał będący na jego przedłużeniu, nie padnie na punkt dany C; linia poprowadzona przy krawędzi tego liniału, czyni z linią daną kąt dany.

2ro. *Za pomocą przenośnika* (fig. 16.) Przykładam przenośnik do linii danéj, tak, aby podział odpowiedniéj liczby stopni padł na punkt dany. Środek przenośnika jest wierzchołkiem żądanego kąta.

61. *Zl. Prowadzenie prostopadłych w rzemiosłach*. W rzemiosłach, w rysunkach nawet architektonicznych, prostopadłe zazwyczaj prowadzą się za pomocą węgielnicy rysunkowéj. (équerre), to jest narzędzia w którém dwa przyległe boki spotykają się pod kątem prostym. Jest kilka rodzajów węgielnic:

a.) Ciesielska, używana u kamieniarzy, składa się z dwóch liniałów żelaznych, spojonych końcami w ten sposób, że krawędzie spotykając się tworzą kąty proste (fig. 26.)

b.) Rysunkowa, deska gładka, jednakowéj grubości (fig. 27.)

c.) Stolarska, z listwą dozwalającą jéj przytykać się do dwóch ścian desek.

Te wszystkie ekierki używają się prawie jednakowym sposobem: przykładając jedną z prostopadłych krawędzi do linii, zaś przy drugiéj prowadząc linię kąt między temi liniami jest prosty, jako równy kątowi prostemu. Jeśli mamy dany punkt, przez który ma przechodzić prostopadła, ramię drugie lub liniał przy niem położony, powinno przezeń przechodzić.

62. *Zl. Sprawdzenie dokładności węgielnicy rysunkowéj.*

Prowadzi się prostopadła do linii, i jeśli oba kąty przystają do kąta ekierki, wtedy te kąty są sobie równe jako równe kątowi ekierki, a tem samem proste (41.) a zatém i kąt ekierki jako im równy (40) jest także prosty.

63. *Zł. Poziom mularski i jego sprawdzenie* (fig30.) Linia w któréj kierunku spada swobodnie padające ciało, a któréj kierunek oznacza nić z zawieszonym w końcu ciężarkiem zowie się *pionową*, wszelka linia do niej prostopadła zowie się *poziomą*. Płaszczyzna zawierająca w sobie linie poziome zowie się płaszczyzną poziomą, do któréj się zbliża powierzchnia spokojnie stojącéj wody.

W poziomie mularskim (fig. 30) potrzeba oznaczyć linię prostopadłą do nici CD z zawieszonym ciężarkiem, i końce liniałów równych CA i CB, będą leżały na téj linii, wtenczas, gdy nić przechodzi przez środek linii AB, czyli przez punkt D liniału EF. (44).

Dokładność tego narzędzia wymaga, aby długość ramion była niezmieną. Dla tego końce A i B podbijają się blachą.

Narzędzie to sprawdza się w ten sposób:

Na jakimkolwiek liniale IK ustawiam narzędzie i podnoszę koniec K, dopóki sznurek z ciężarkiem nie padnie na wyżłobienie D. W pewnéj odległości ustawiam liniał, patrzę w kierunku liniału AB, i naznaczam odpowiedni punkt G na liniale GH. Potem stawiam narzędzie przeciwną stroną;—jeśli nić z ciężarkiem nie pada na wyżłobienie D, to poziom jest fałszywy. Podnoszę lub zniżam końce liniału K, póki nić nie padnie w D, i uważam jaki punkt liniału HG jest w kierunku liniału AB; odległość zaś jego od punktu G, oznaczy wielkość fałszywości narzędzia.

64. *Zt. Znaleść różnicę w odległościach punktów wziętych na gruncie, od danego poziomu.* (fig. 28.)

Najprostsze narzędzia używane w tém celu są:

1°. *Poziom wodny.* Jest to rurka blaszana po obu końcach zakrzywiona pod kątem prostym w tych końcach osadzają się rurki szklanne. U spodu rurki blaszanéj w jednakowej odległości od końców, znajduje się rurka metaliczna, służąca do osadzenia narzędzia na trójnogu. Linia przechodząca przez powierzchnie wody będącéj w rurkach jest poziomą.

2°. Żerdź biała, podzielona na stopy, cale, linie, lub inne jednostki miar długości, z tarczą posuwalną pół białą a pół czarną.

Aby oznaczyć różnicę między odległościami punktów A i B od linii pozioméj, w jednakowéj odległości od tych punktów stawiam poziom wodny w G i tarczą naznaczam, na żerdzi stojącéj pionowo w punkcie A, punkt *a*, leżący w kierunku linii poziomėj mn;—podział odpowiedni punktowi *a* wskazuje na ile punkt A jest oddalony od linii poziomėj an (51 Wn. 1.) np. Aa=7 stóp. Ustawiając żerdź w B, znajdę podobnym sposobem oddalenie punktu B od linii pozoméj mn. Jeśli oddalenie to Bb=2 stóp, to różnica między oddaleniami punktów A i B od poziomu jest 5 stóp, czyli punkt A leży o 5 stóp niżej od punktu B.—Podobnym sposobem można oznaczyć o ile wyżéj leży punkt C od B, a tém samém od A i t. d.

65. *Zt. Posuwanie ciała po linii prostopadłéj do do linii danéj* AC. (fig 21.)

Jeżeli ciało B chcę posuwać w kierunku BD, przymocowywam do tego ciała dwa sznury równe BA i BC, które posuwam po punktach A i C tak aby się skracały jednakowo.

Jeśli zaś ciało E, należy posuwać w kierunku EB, to przytwierdzam do niego dwa drągi których części EA i EC, są sobie równe, i posuwam po punktach A i C tak aby te części powiększały się jednakowo.— Wobu razach posuwające się ciało będzie w jednakowéj odległości od końców linii AC, a przeto znajdować się będzie na linii do niéj prostopadłéj.

66. *Zt. Zmierzyć kąt między dwoma przedmiotami.*

Linia prosta na gruncie, jest to linia wyobrażalna łącząca dwa punkta leżące na gruncie. Jeżeli z punktu, zwanego *stanowiskiem* przedstawiemy sobie dwie proste, poziome do dwóch przedmiotów, kąt zawarty między niemi, zowie się *kątem zawartym między dwoma przedmiotami.* Kąta tego nie można zmierzyć czyli zdjąć zapomocą węgielnicy rysunkowéj z ruchomém prawidłem, ani zapomocą przenośnika, gdyż do narzędzi, wyobrażalnych jego ramion niemożna przyłożyć tych ale należy ramiona oznaczyć dotykalnie, t. j. mając wierzchołek oznaczyć po jednym punkcie na ramionach kąta.

Jeśli na płaszczyznie poziooméj (63) weźmiemy punkt leżący z punktem stanowiska na jednéj i tejże saméj pionowéj, to on zowie się *odpowiednim temu punktowi*; potrzeba więc tylko na téj płaszczyznie pozioméj oznaczyć po jednym punkcie, leżącym na linijach łączących punkt odpowiedni stanowisku z przedmiotami.

Kąt zawarty między przedmiotami można albo wyrysować na płaszczyznie pozioméj, albo wyrazić go w stopniach.

W pierwszym przypadku, w punkcie odpowiednim stanowisku wbijamy cienkie ostrze np. igłę, przykładamy do niéj brzeg liniału zwanego *Dioptrą*, opatrzonego w końcach pionowemi liniałami. Jeden z tych liniałów ma wązki podłużny otwór, z włosem przez jego środek przechodzącym, w drugim zaś znajduje się szczelina, w takiem położeniu, że włos pierwszego liniału leży z nią nad krawędzią liniału *dioptry*. Obracamy dioptrę około igły, dopóki włos, szczelina i przedmiot nie będą na jednéj linii prostéj (17) a wtenczas i krawędź dioptry znajdzie się na tejże prostéj, tém samém i linia nakreślona przy krawędzi dioptry. Poprowadziwszy na płaszczyznie poziomej linie w kierunku obudwóch przedmiotów, nakreślimy kąt zawarty między dwoma przedmiotami.

W drugim przypadku, kiedy chcemy kąt wyrazić w stopniach, używamy do tego *węgielnicy mierniczéj z ruchomém prawidłem* (60), któréj dwa liniały opatrzone są dioptrami. Linie odpowiednie dioptrom, przecinają się w punkcie obrotu liniałów, drugie zaś ich punkta oznaczają się na tych liniałach strzałkami. Prawidło nieruchome przechodzi przez zero przenośnika mającego środek w punkcie obrotu prawidła ruchomego. Narzędzie to zowie się *kątomiarem* (Graphomètre.)

Jeśli postawimy narzędzie poziomo i punkt obrotu zgodzimy ze stanowiskiem a prawidło nieruchome z jednym, ruchome zaś z drugim przedmiotem, to strzałka ruchomego prawidła wskaże na przenośniku liczbę stopni mierzonego kąta, gdyż strzałki leżą na jego ramionach.

67. *Zt. Do ustawienia płaszczyzny poziomo służy Libella* t. j. rurka szklanna, nieco wypukła, umieszczona na podstawie. Rurka ta napełnia się wodą, zostawując nieco powietrza, i zatyka się szczelnie z obu końców.

Powierzchnia wody jest płaszczyzną poziomą (63), przeto gdy podstawka Libelli leży na płaszczyznie poziomćj, to powierzchnia wody jest do niéj równoległą, a przeto powietrze znajduje się pośrodku rurki wypukłéj.

68. *Zt. Bussola.* Jest to czworograniasta puszka z igłą magnesową, mającą kierunek zbliżony do północno-południowego. Jeśli prawidło nieruchome zgodzimy z kierunkiem igły magnesowéj, to ruchome oznaczy kąt zawarty między przedmiotem a kierunkiem igły magnesowéj. Gdy z jednego stanowiska zdejmujemy kilka takich kątów, to bussola pokaże nam, czy narzędzie nie zostało zruszone w czasie roboty, gdyż wtedy igła magnesowa jako mająca stałe położenie nie będzie w kierunku zruszonego nieruchomego prawidła.

§. II. Dwie linie proste nieograniczone uważane ze wspólną ich poprzeczną.

69. Dwie linie proste, nieograniczone, leżące na jednéj płaszczyznie, albo mają jeden punkt wspólny (4 wn. 2), czyli *przecinają się*; albo też niemają żadnego punktu wspólnego czyli *nieprzecinają się*.

Jeśli obracamy jedną z przecinających się około punktu przecięcia, to oba jéj końce naprzód zbliżają się do drugiéj i przystaną do niéj, a następnie znowu linie staną się przecinającemi. *Przejście z przecinania się do przecinania się zowie się stycznością*, przeto przystawanie linii prostych jest ich stycznością, czyli *linia prosta jest styczną względem saméj siebie*.

Linie są równoległe wtenczas, gdy punkta jednéj linii znajdują się w jednakowéj odległości od linii drugiéj, a zatem równoległość jest tylko szczególnym przypadkiem nieprzecinania się.

70. Jeśli uważać będziemy na płaszczyznie *dwie proste* ze wspólną poprzeczną, spostrzeżemy, że każda tworzy cztery kąty, będące dwoma parami przyległych, lub dwoma przeciwległych. Ośm tych kątów względem poprzecznéj, są albo *jednostronne* albo *naprzemianległe*, to jest: po dwa brane leżą z jednéj, lub z przeciwnych stron poprzecznéj. Kąty tych dwóch rodzajów, mogą być trojakie: a) *wewnętrzne* b) *zewnętrzne* i c) *odpowiednie*, podług tego czy oba leżą wewnątrz, zewnątrz albo jeden wewnątrz a drugi zewnątrz linji przez poprzeczną przeciętych. Z ka-

żdéj strony linji są dwa kąty, przeto kątów tak wewnętrznych jako i zewnętrznych są dwie pary; odpowiednich zaś jako łączących po dwa, wszystkie ośm kątów, są cztery pary.—I tak (fig: 31 lub 32).

A) Kąty *jednostronne*, *a*) wewnętrzne: 1) AHJ z HJC, 2) BHJ z HJD; *b*) zewnętrzne: 1) FHA z CJG, 2) FHB z DJG; *c*) odpowiednie: zewnętrzne względem AB z wewnętrznemi względem CD, 1) AHF z CJH, 2) FHB z HJD; — wewnętrzne względem AB z zewnętrznemi względem CD, 3) AHJ z CJG, 4) BHJ z DJG.

B) Kąty *naprzemianległe*: *a*) wewnętrzne: 1) AHJ z HJD, 2) BHJ z HJC: *b*) zewnętrzne: 1) FHA z DJG; 2) FHB z CJG, *c*) odpowiednie: zewnętrzne względem AB z wewnętrznemi względem CD, 1) FHA z HJD, 2.) FHB z HJC, — wewnętrzne względem AB z zewnętrznemi względem CD 3) AHJ z DJG, 4) BHJ z CJG. W każdym więc rodzaju kątów jest ośm par, i one stanowią 16 warunków przecinania się, lub nieprzecinania się dwóch linji prostych.

71. *Tw. Kąty jednostronne wewnętrzne, zewnętrzne i naprzemianległe odpowiednie mają tę własność, że każda para jednych z parą drugich, czyni cztery kąty proste* (fig. 31 lub 32).

Kąt wewnętrzny AHJ z zewnętrznym AHF, jako przyległe względem poprzecznéj FG, utworzone przez linię AH, spełniają się do dwóch kątów prostych;— dla podobnéj przyczyny, drugi kąt wewnętrzny HJC, z drugim zewnętrznym CJG, spełniają się także do dwóch kątów prostych; przeto kąty wewnętrzne AHJ

+HJC z zewnętrznemi AHF+CJG czynią cztery kąty proste. Podobnie kąty wewnętrzne AHJ + HJC z naprzemianległemi odpowiedniemi FHA + HJD są równe 2 Π, — bo AHJ z FHA, równie jak HJC z HJD są kątami spełnienia (46). Własność ta służy dla wszystkich kątów tych trzech gatunków, gdyż tak jednostronne zewnętrzne AHF, CJG, jak i naprzemianległe odpowiednie AHF, HJD równają się drugiéj parze wewnętrznych BHJ, HJD (48), która w ich miejsce może być wzięta.

Uw. Te trzy gatunki kątów, jako mające jednakowy charakter, nazwiemy *pierwszą grupą* kątów utworzonych przez poprzeczną z dwoma liniami prostemi na płaszczyznie.

Wn. Ponieważ jedna para kątów pierwszéj grupy z drugą parą czyni cztery kąty proste, przeto jeśli jedna para równa się dwóm kątom prostym, to i każda z pozostałych równa się także dwóm kątom prostym,—tudzież jeśli jedna para nie równa się dwóm kątom prostym, to i każda z pozostałych także nie równa się dwom kątom prostym. Tak więc pierwsza grupa kątów daje albo ośm równości, albo też ośm nierówności, podług tego czy mamy jedną równość lub nierówność.

72. *Kąty naprzemianległe wewnętrzne, zewnętrzne i jednostronne odpowiednie, mają tę własność, że jeśli kąty jednéj pary są sobie równe, to i kąty każdéj z pozostałych par są także sobie równe; jeśli zaś kąty jednéj pary są nierówne, to i w pozostałych parach są nierówne* (fig 31 lub 32).

Kąty jednostronne odpowiednie FHA i HJC, dopełniają drugą parę jednostronnych odpowiednich FHB i HJD, tudzież AHJ i CJG, zaś względem BHJ i DJG kąty FHA i HJC są przeciwległe, przeto gdy kąty jednostronne odpowiednie jednéj pary są sobie równe albo nierówne: to takiemiż są i kąty pozostałych par. Kąty naprzemianległe BHJ, HIC pojedynczo wzięte równają się jednostronnym odpowiednim FHA i HJC, gdyż BHJ z FHA są przeciwległe, podobnie AHJ+HJD=FHB+HJD; a zewnętrzne GJD+AHF=CJH+AHF i GJC+BHF=DJH+BHF zatém taż sama własność ściąga się i do kątów naprzemianległych.

Uw. Kąty jednostronne odpowiednie, tudzież naprzemianległe, wewnętrzne i zewnętrzne jako mające jedną własność, nazwiemy *drugą grupą.*

Ta grupa daje albo ośm równości, albo ośm nierówności, podług tego, czy kąty jednéj jéj pary są sobie równe lub nierówne.

73. *Tw. Jeśli kąty jednostronne-wewnętrzne spełniają się, to jednostronne-odpowiednie są sobie równe; jeśli zaś wewnętrzne nie spełniają się, to i odpowiednie nie są równe* (fig. 31 lub 32).

1° Zk. że kąt AHJ + HJC=II. Tw. że kąt FHA=HJC.

Kąt FHA+AHJ=II jako przyległe, z założenia zaś kąt AHJ+HJC=II, przeto FHA+AHJ=AHJ+HJC. Od tych ilości równych odjąwszy kąt AHJ, pozostanie FHA=HJC.

2° Zk. że kąt AHJ + HJC nie = II. Twier. kąt FHA nie = HJC.

Kąt FHA + AHJ = II, z założenia mamy kąt AHJ + HJC nie = II, przeto kąt FHA + AHJ nie = kątowi AHJ + HJC. Od tych nierównych kątów odejmując kąt AHJ, pozostaną reszty nierówne kąt FHA nie = kątowi HJC.

Wn. Ponieważ kąty, tak pierwszéj jako i drugiéj grupy, dają ośm równości albo ośm nierówności, podług tego czy jedna równość lub niarówność ma miejsce (71 Wn. i 72 Uw.), przeto jeśli kąty któréjkolwiek pary pierwszéj grupy są kątami spełnienia, albo też niespełniają się, to kąty w każdéj parze drugiéj grupy są sobie równe lub nierówne, A zatem *kąty utworzone przez poprzeczną dają albo* 16 *równości, albo* 16 *nierówności, podług tego, czy pierwsza grupa daje jedną równość lub nierówność.*

74. *Tw.* odw. *Jeśli z kątów jednostronnych, odpowiednie są sobie równe, to wewnętrzne spełniają się do dwóch kątów prostych; jeśli zaś odpowiednie nie są równe, to i wewnętrzne nie spełniają się do do dwóch prostych.*

Zak. FHA = HJC, Tw. AHJ + HJC = II.

Kąt FHA + AHJ = II jako przyległe, aże kąt FHA = HJC z założenia, przeto zamiast FHA biorąc HJC, mamy kąt HJC + AHJ = II.

Zak. FHA nie = HJC; Tw. AHJ + HJC nie = II.

Kąt AHF + AHJ = II, biorąc więc zamiast kąta AHF kąt nierówny jemu HJC, otrzymamy kąt HJC + AHJ nie = II.

Kąty utworzone przez poprzeczną dają 16 równości lub nierówności, podług tego, czy druga grupa dadaje jedną równość lub nierówność.

Uw. Z poprzedzających dwóch wniosków widzimy: że *kąty utworżone przez poprzeczną dwóch linji prostych na płaszczyźnie, dają zawsze albo* 16 *równości, albo* 16 *nierówności, podług tego czy jedna równość lub nierówność ma miejsce.*

75. *Tw. Dwie proste czyniące z poprzeczną kąty jednostronne odpowiednie nierówne, przecinają się z téj strony poprzecznéj, z któréj kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego.* (fig. 31).

Niech poprzeczna FG przecina dwie linie proste nieograniczone AB i CD.—Zk. kąt DJG > BHG. Tw. linia AB przecina CD nad poprzeczną FG.

Ponieważ kąty jednostronne BHG i DJG mają po jedném ramieniu HG i JG na poprzecznéj FG, a drugie ich dwa ramiona HB i JD, znajdują się nad poprzeczną FG; przeto: jeśliby ramię HB kąta wewnętrznego BHG nie przecinało, czyli nie wychodziło za ramie JD kąta zewnętrznego DJG, to kąt BHG obejmując kąt DJG niebyłby od niego mniejszy; coby się sprzeciwiało założeniu.

Kąty GJC i GHA leżące z drugiéj strony poprzecznéj FG, są spełnieniami kątów GJD i GHB; przeto u spodu poprzecznéj, kąt zewnętrzny GJC, jest mniejszy od wewnętrznego GHA, a proste rozchodzą się.

76. *Tw. od. Dwie proste przecinające się uważa-*

ne z poprzeczną, czynią kąty jednostronne-odpowiednie nierówne—tak, że od strony przecięcia się, kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego. (fig. 31.)

Kąt zewnętrzny GJD, więcéj płaszczyzną HEJ ograniczoną odcinkami trzech przecinających się, równa się kątowi wewnętrznemu GHB więcéj kątem BED, jako części składające jedną płaszczyznę DEBHG. Jeżeli od dwóch ilości równych DJG+pł. HEJ=GHB +BED odejmiemy ilości nierówne: z pierwszéj strony pł. HEJ, zaś z drugiéj kąt BED, jako równy kątowi AEC (48), większy od téj płaszczyzny, będącéj częścią kąta AEC, zostanie kąt DJG większy od kąta GHB; bośmy mniéj odjęli z pierwszéj aniżeli z drugiéj strony. *)

Wn. Nierówność kątów jednostronnych odpowiednich, pociąga za sobą wszystkie 16 nierówności (74. Uw.); przeto linie proste przecinają się, gdy którekolwiek z kątów jednostronnych-wewnętrznych, zewnętrznych; równie jak i naprzemianległych-odpowiednich nie spełniają się do dwóch kątów prostych lub też jakiekolwiek z kątów naprzemianległych-we-

*) Dla okazania tego przybierano twierdzenie: że jakkolwiek małym byłby kąt, zawsze on zawiera się w płaszczyznie tylko ograniczoną liczbę razy; a następnie że płaszczyzna ograniczona zawsze jest mniejsza od kąta; jak Vincent w Cours de Geometrie, adopté par L'Université No 69 i 94. Drugiego wydania. Lecz jeśli płaszczyzna podzieloną zostanie na nieskończenie wielką liczbę części, równych, przez linie wychodzące z punktu na niéj wziętego, a nawet na *nieskończoną liczbę części*, to te będą kątami, niezawierającemi się ograniczoną liczbę razy w płaszczyznie.

wnętrznych i zewnętrznych, lub jednostronnych odpowiednich, są sobie nierówne i odwrotne.

77. *Tw. Dwie proste czyniące z poprzeczną kąty jednostronne odpowiednie równe, nie przecinają się* (fig. 32.)

Jeśliby te proste przecięły się z sobą z którejkolwiek strony poprzecznej, to kąty jednostronne byłyby nierówne, coby się sprzeciwiało założeniu.

78. *Tw. od Dwie proste nieprzecinające się czynią kąty jednostronne odpowiednie równe.*

Gdyby kąt zewnętrzny nie był równy wewnętrznemu, to byłby od niego albo większy, albo mniejszy,—w obu razach proste przecięłyby się z téj strony poprzecznej, z któréj kąt zewnętrzny większy od wewnętrznego (75), coby się sprzeciwiało założeniu.

Wn. 1. Równość kątów jednostronnych odpowiednich pociąga za sobą równość kątów naprzemianległych-wewnętrznych i zewnętrznych; tudzież spełnianie się jednostronnyzh wewnętrznych i zewnętrznych, równie jak i naprzemianległych odpowiednich;—a nawet wynika z każdej z tych równości (74. Uw.)—przeto: *warunkiem nieprzecinania się prostych jest każda z powyższych szesnastu równości, i nawzajem linie równoległe dają szesnaście równości.*

Wn. 2. *Dwie proste* AB i CD *nieprzecinające się z trzecią* KL (fig. 32.) *nie przecinają się z sobą*, gdyż kąty FHB i FJD jako równe kątowi FML (73), są sobie równe; a zatem proste nieprzecinają się (77).

Wn 3. *Proste* EG i HF, *prostopadłe do trzeciéj* CD (fig. 33.) *nieprzecinają się*; gdyż czynią kąty jednostronne DHF i DGE, równe, jako proste.

Wn. 4. *Prosta* HF *nie przecinająca się z prostopadłą* EG *sama jest prostopadłą*, gdyż kąt DHF jako równy kątowi DGE jest prosty.

Wn. 5. *Prostopadła* CD *do jednéj z nieprzecinających się* GE, *jest prostopadłą i do drugiéj* FH; dla równości kątów DHF i DGE, z których drugi jest prostym.

Wn. 6. *Przez punkt* H, (fig. 32.) *dany nad prostą* CD, *jedna tylko nieprzecinająca ją linia prosta* AB *przechodzić może*; w przeciwnym razie kąt jednostronny HJD równałby się każdemu z odpowiednich mu kątów FHB i FHP nierównych sobie.

Wn. 7. *Pochyła* FH (fig. 32.) *do jednéj z nieprzecinających się* AB, *jest pochyłą i do innych* CD i KL. przez punkt bowiem H, jedna tylko linia AB nieprzecinająca się z dwoma innnemi nieprzecinającemi się CD i KL przechodzić może (Wn. 6.) przeto linia FH przecina linie CD i KL. Przytem linia FH jest do nich pochyłą, gdyż kąty FHB, FJD, FML są sobie równe (78); że zaś kąt FHB nie jest prosty z założenia, zatem takiemi są i kąty FJD i FML. *)

Wn. 8. *Prostopadłe* (fig. 31.) HL i MJ *do przeci-*

---

*) Podług tego wniosku pochyła HN do AB nie przecinającéj się z CD, przecina CD, co stanowi twierdzenie: *że kąt* AHN, *jest większy od płaszczyzny* AHJC *zawartéj między równoległemi* AH i JC.

najacych się AB i CD, *same się przecinają*, gdyż każdy z kątów jednostronnych wewnętrznych LHJ i MJH, utworzonych przez poprzeczną HJ łączącą ich spodki, jest mniejszy od kąta prostego; a zatem kąty te LHJ i MJH nie spełniają się do dwóch kątów prostych.

Wn. 9. *Kąty mające ramiona nieprzecinające się skierowane w jedną lub przeciwne strony, są sobie równe, kąty zaś mające parę ramion skierowanych w jedną, zaś drugą parę w przeciwne strony, spełniają się do dwóch kątów prostych* (fig. 34).

a) ABC=FED, gdyż każdy z nich równa się kątowi EGB, jako naprzemianległe wewnętrzne, pierwszy względem ramienia AB, drugi zaś względem EG.

b) ABC = HEK, bo każdy z nich równy kątowi FED.

c) ABC+DEK=II, gdyż kąt ABC=FED (46).

Wn. 10. *Kąty mające wierzchołek wspólny* (fig. 35.), *a ramiona* AO z CO i BO z DO *prostopadłe są sobie równe, gdy jeden z tych kątów lub jemu przeciwległy nie obejmuje drugiego: w przeciwnym razie spełniają się.*

a) AOB=DOC, jako reszty pozostałe z odjęcia kąta BOC od kątów prostych AOC i BOD,

b) AOB+COd=II, gdyż kąt AOB=COD.

Kąty więc jakiekolwiek, mające ramiona prostopadłe, albo są równe, albo spełniają się, podług tego, czy przez wierzchołek jednego z nich poprowadzone nieprzecinające się do ramion drugiego kąta, będąc prostopadłemi (Wn. 4.)—czynią kąty równe lub spełnienia.

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że własność ta służy i dla kątów, w których ramiona jednego są jednakowo nachylone do ramion drugiego kąta.

79. *Tw. Dwie proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe, czyli punkta jednéj są jednakowo oddalone od prostéj drugiej.* (fig. 33.)

Biorę dowolne dwa punkta E i F na jednéj z nieprzecinających się AB, i z tych punktów, równie jak ze środka prostéj niemi ograniczonéj EF, wyprowadzam FH, JK i EG prostopadle do CD, a mam dowieść: że prostopadłe FH i EG są sobie równe.

Uważam że prostopadłe FH, JK i EG są zarazem prostopadłe do obu nieprzecinających się (78 Wn.5.) Obracam płaszczyznę BJKD około prostopadłéj JK i kładę ją na płaszczyznę AJKC, zatem odcinek JF przystanie do odcinka JE, HK do KG dla równości kątów prostych FJK z KJE, tudzież HKJ z JKG, punkt F padnie na E dla równości JF z JE; prostopadła FH przystanie do prostopadłej EG, dla równości kątów prostych F i E; a że prosta KH przystała do KG i FH do EG, przeto i punkt H padł na punkt G, gdyż proste KG i EG, z któremi zlewają się proste KH i FH, przecinają się w jednym tylko punkcie. Przeto prostopadłe FH i EG, z dowolnych punktów wyprowadzone, są sobie równe, czyli że dwa dowolne punkta jednéj linii, są jednakowo oddalone od drugiéj nieprzecinającéj się. Wszystkie więc punkta linji AB, jako jednakowo z punktem E oddalone od linii CD są w równéj odległości od téj linji; a zatém linie proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe.

Wn. 1. Z punktu, wziętego nad linią prostą, jedną tylko nieprzecinającą poprowadzić można (78 Wn. 6), przeto: *nie może być nieprzecinającéj się, którąby nie była równoległą.*

Wn. 2. *Linia prosta równoległa do drugiéj, jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od téj linji.*

Punkta A i E leżą na AE równoległéj do CD, potrzeba dowieść, że punkt jakikolwiek F jednakowo z niemi oddalony od prostéj CD, leży na równoległéj AE.

Punkta E i F łączę prostą EF, ze środka GH wyprowadzam KJ prostopadłą do CD. Obracam JFHK około JK i kładę na pł. EJKG, wtedy KH przystanie do KG, FH do EG i punkt F padnie na E, gdyż prostopadłe FH i EG są równe z założenia, przeto JF padło na JE, a kąty przy J przystające i przyległe są proste; linia więc EF jest równoległą do CD, bo kąty jednostronne wewnętrzne, J i K oba proste, spełniają się do II.—Jeśliby linia EF, nie zlewała się z linią AE, to z punktu E dwie równoległe EF i AE, czyli nieprzecinające się z CD, poprowadzićby można. Dla podobnéj przyczyny wszystkie punkta z punktem E jednakowo oddalone od linji CD, leżą na jednéj równoległéj do téj linji.

Uw. Jeżeli kąt FHB, (fig. 32). posuwać będziemy po płaszczyznie, tak, aby ramie jego FH, posuwało się po linii FG, gdy wierzchołek H padnie na wierzchołek I kąta HID, to i ramie HB, przystanie do ramienia ID, gdyż ono posuwając się nieprzestało być równoległem (77) czyli wszystkie jego punkta są jednakowo oddalone od linii CD (79 wn. 2); zatém gdy jeden punkt H padł na linię CD, to i wszystkie punkta padną na tą linię. Kąty więc FHB i FJD są sobie równe (40), gdyż ramiona ich przystają do siebie we wszystkich punktach, kąt więc FHB nie jest częścią kąta FJD, lecz każdy z nich jest jednakową częścią swojéj płaszczyzny t. j. płaszczyzny dwóch zbiegających się FH z HB i FJ z ID, które są sobie równe (18).

80. *Tw. Summa trzech kątów* EHJ, HJE, JEH, *zawartych między ograniczonemi odcinkami* HE, EJ, JH *dwóch przecinających się* AB, DC *i poprzecznéj* FG, *równa się dwóm kątom prostym.* (fig. 31.)

Na dowiedzenie tego przez punkt J prowadzę JN, równoległą do AB. Kąt HEJ=EJN jako kąty naprzemianległe wewnętrzne, dwóch równoległych AB i JN względem poprzecznéj DC (78 Wn. 1.), kąt EHJ= NJG, jako jednostronne odpowiednie tych samych równoległych, względem poprzecznej FG—przeto kąt HEJ+EHJ=EJN+NJG; — a że summa dwóch drugich kątów EJN+NJG z kątem EJH spełnia się do II, (46 Wn. 1.), zatem i summa pierwszych z tymże kątem EJH, spełnia się także do II, gdyż summa pierwszych, za summę drugich, może być wziętą.

Wn. 1. *Kąt zewnętrzny* EJG *równa się summie dwóch kątów wewnętrznych* JHE i HEJ *jemu nieprzyległych.*

Wn. 2. *Jeśli jeden z kątów wewnętrznych* JHE, HEJ i EJH, *jest prosty lub rozwarty, to dwa inne kąty są ostre*; gdyż summa ich jest równa lub mniejsza od kąta prostego.

Wn. 3. *Mając dwa kąty wewnętrzne, gdy summę ich odejmiemy od dwóch kątów prostych, otrzymamy kąt trzeci.*

81. *Zg. Przez punkt dany nad linią poprowadzić do niéj równoległą.*

1o. Na zasadzie No 79, Wn. 2 (fig. 33). Z punktu danego E prowadzę prostopadłą EG, i odcinam na dowolnéj prostopadłéj HF do linii danéj CD, część HF=GE, a linia EF jest żądaną.

2o. Na zasadzie No. 77, (fig. 32.) Przez punkt dany H prowadzę HJ przecinającą linię daną CD, i przy punkcie H kreślę kąt FHB=HJD (59), a linia HB jest żądaną.

Na zasadzie Wn. 1. No. 78. Kreślę kąt JHA=HJD zakreślając dla pierwszego łuk z punktu H, promieniem HJ, zaś dla drugiego z J promieniem HJ.

3o. *Za pomocą węgielnicy rysunkowéj* (61.) (fig. 36.)

Przykładam węgielnicę największą jéj stroną do linii danéj AB, zaś przy drugiéj stronie przykładam liniał i węgielnicę z liniałem posuwam po linii danéj AB, dopóki brzeg liniału nie padnie na punkt dany

C; — wtedy nie ruszając liniału, posuwam po jego krawędzi węgielnicę, aż póki największy jéj bok nie padnie na punkt C; — bok ten, a tém samem linia przy nim nakreślona jest równoległa do linii danéj, gdyż czynią z krawędzią liniału kąty jednostronne odpowiednie równe sobie, jako równe kątowi węgielnicy. Sposób ten nie zależy od dokładności węgielnicy. To samo można uskutecznić innym sposobem (fig. 37): przykładam krawędź jednéj węgielnicy ACB do linii danéj EF, i do największéj krawędzi AB przykładam największą krawędzią drugą, jéj równą, węgielnicę ADB. Krawędzie AC i DB są równoległe, dla równości kątów CAB i ABD, jako należących do równych węgielnic. Posuwam węgielnicę ADB po krawędzi AB aż krawędź DB padnie na punkt dany, a linia przy niéj nakreślona jest żądaną. Ten sposób zależy od równości węgielnic, i mniéj wymaga w prawy od poprzedzającego.

Obadwa te sposoby korzystnie używają się przy prowadzeniu wielu równoległych do linii danéj.

82. *Zg. Z punktu danego nad prostą, poprowadzić linię pod kątem danym* (fig. 32.)

Przez punkt dany H prowadzę równoległą AB do linii danéj CD (81), i przy punkcie H linii AB, kreślę kąt FHB, równy danemu (59). Linia FH jest żądaną gdyż przechodzi przez punkt H i czyni z linią CD kąt FJD, który jako równy kątowi FHB (78), jest równy kątowi danemu.

Albo jeśli do linii FG mamy poprowadzić przez punkt B linię pod kątem danym, to przez punkt dowolny J wzięty na téj linii, prowadzimy linią ID czyniącą z linią daną kąt dany DIF, zaś przez punkt dany B prowadzimy równoległą BH do linii DJ. Kąty DJF i BHF są sobie równe (78).

83. *Zt. Przez punkt dany poprowadzić na gruncie linię równoległą do linii danéj.*

1e. Jeżeli grunt jest równy, można prowadzić linię równoległą tak, jak w rysunku (81, 1o, 2o); łuki się kreślą za pomocą sznura (29), i dostatecznem jest wyznaczyć ich końce. Lecz błąd popełniony wielce wpływa na położenie linii, przeto tego sposobu używać można tylko przy prowadzeniu linii niewielkiéj długości.

2e. Jeśli grunt jest nierówny, to łuk nakreślony nie leży na płaszczyznie (fig. 32.), a przeto nie jest łukiem okręgu koła (22). Postępując podług sposobów podanych w No 81 doprowadzenia linii nachylonych pod kątem żądanym, używamy narzędzi służących do zdejmowania kąta na gruncie (66), i zdjąwszy z punktu I linii danéj CD, kąt HJD zawarty między punktem danym H a punktem téj linii D; z punktu danego H jako ze stanowiska, wytykamy za pomocą tego narzędzia linię HB, czyniącą kąt JHB dopełniający kąt HJD do II; t. j. ustawiwszy nieruchome prawidło w kierunku linii HJ ustawiamy ruchome względem pierwszego pod kątem JHB, i w tym kierunku wytykamy linię prostą HB i ta jest żądaną.

3e. W braku narzędzi do zdejmowania kąta na gruncie, prowadzi się równoległa zapomocą dwóch żerdzi, przecinających się pod jakimkolwiek kątem (fig. 38). Ustawiam kół z przecinającemi się żerdziami CA i CB na linii danéj CD (fig. 32.) w punkcie I, tak aby w poziomem położeniu jedna z nich CA, padała na linię JD, a druga CB na linię JH przechodzącą przez punkt dany H; następnie w punkcie H ustawia się narzędzie, żerdz CA zgadza się z HJ a linia HA wytknięta w kierunku żerdzi BC, jest żądaną.

4e. *Za pomocą węgielnicy* t. j. dwóch prawideł (liniałów) przecinających się pod kątem prostym, prowadzi się linia równoległa do danéj, *albo* używając jéj podobnie jak poprzedzającego narzędzia, tak, aby kąt zdejmowany (fig. 33), HGE i kąt GEA pod którym prowadzimy linię, były brane między temi samemi liniałami;—wtedy błąd narzędzia nie wpływa na wyprowadzoną linię EA, gdyż kąty HGE i GEA jako równe kątowi zawartemu między temi prawidłami są sobie równe, *albo* prowadzimy dwie równe prostopadłe jedną GE przechodzącą przez punkt dany E, drugą zaś jéj równą dowolną HF; końce ich E i F leżą na żądanéj linii (79 Wn. 2). Przytem dwie ostróżności zachować należy: 1) aby odległość między prostopadłemi była jak największa, gdyż wtedy niedokładność w mierzeniu prostopadłych mniéj wpływa na jednakowość oddalenia punktów linii EF od linii CD; 2) aby linie GE i FH były prowadzone podług jednego i tegoż samego kąta węgielnicy t. j. aby kąty DHF i HGE były równe jednemu i temuż samemu kątowi węgielnicy, gdyż wtedy, jeśli dla niedokładności i narzędzia kąty DHF i DGE nie będą proste, to przynajmniéj będą równe, a linie HF i GE równoległe; co jak zobaczymy nie pociąga za sobą błędu.

5te. *Zapomocą Bussoli* (68). (fig. 39). Ustawiam narzędzie w punkcie A, i uważam jaki kąt z igłą magnesową NM czyni liniał zgadzający się z linią daną AB; ustawiam narzędzie w punkcie danym C, i podług liniału, taki sam kąt z igłą magnesową czyniącego, wytykam linię CD i ta jest żądaną; gdyż kąty NAB i NCD są sobie równe, a że ramiona NA i NC są równoległe i skierowane w jedną stronę, przeto i ramiona CD i AB (78 Wn. 9) także są równoległe.

6te. W praktyce można uważać za równoległe dwie takie linie, które się przecinają w bardzo wielkiej odległości, dla tego, że nie da się ocenić różnica między odległościami punktów jédnéj linii od drugiéj.

Na téj zasadzie jeśli z dwóch punktów zapomocą lunety lub dioptry, wytkniemy linię w kierunku gwiazdy stałéj, lub widzianego w odległości przedmiotu, to można je uważać za równolegle.

Cień przedmiotów pada w kierunku ciała i punktu świecącego, przeto jeżeli z rana lub w wieczór, gdy cień jest największy, wytkniemy dwie linie współcześnie w kierunku cienia tyk pionowych, wysokich i dość grubych, to linie te, dla powyższéj przyczyny, można uważać za równoległe.

84. *Zl.* Punkta ciała posuwającego się zostają w jednakowéj odległości, a tem samem kreślą linie równoległe. Jeśli więc punkt ciała posuwa się po linii

prostéj, to wszystkie punkta posuwają po liniach do niéj równoległych i jéj równych. Z tego to powodu 1e Jeśli ciało mające jakąkolwiek powierzchnią potrzeba posuwać w wyżłobieniu, to dla każdego punktu powierzchni w wyżłobieniu, znajdować się powinna linia równoległa. 2. Chcąc narysować linię, równą danéj, przez punkta jéj prowadzimy proste równoległe równéj wielkości, a ich końce leżeć będą na linii równéj linii danéj; bo jeśli dana linia posuwa się punktami swemi po prostych równoległych, to kiedy jeden punkt padnie na koniec swéj prostéj, wtenczas i wszystkie jéj punkta przyjdą do końców swych równoległych, gdyż jednakowo oddalały się od pierwotnego położenia. Tym sposobem przy robieniu statków rzecznych przerysowują się na deskach linie modelu, podług których obciosują się te deski.

85. *Zt. Przerysowywanie linii krzywych* (fig. 40)

1. Punkta linii krzywéj łączymy z punktami dowolnéj prostéj AG liniami równoległemi, i zarazem prostopadłemi do prostéj AG (78 Wn. 5).—2) Na dowolnéj prostéj odcinamy ab=AB, bc=BC i t. d. i z punktów a, b, c i t. d. prowadzimy prostopadłe do linii ag, równe odpowiednim prostopadłym, ah=AH, bi=BI i t. d., punkta h, i, k i t. d. leżą na linii równéj linii danéj GJK...O; gdyż położywszy ag na AG, prostopadłe ah, bi i t. d. padną na AG, BI i t. d. (49) i końce ich przystaną do siebie (4 Wn. 4).

Podobnym sposobem możemy narysować krzywą, mając liczebną wielkość i wzajemne oddalenie prostopadłych. I tak: szukając różnicy między odległościami punktów A i F wziętych na gruncie, od przyjętego poziomu (fig. 28), gdy punkta A, B, C, D, E, F, są w kierunku linii prostéj (17), możemy oznaczyć kształt i wielkość linii krzywéj leżącéj na gruncie i przechodzącéj przez punkta A, B, C, D, E, F. Jeśli przyjęty poziom jest w odległości 30 stóp od punktu A (5 Wn. 1.), to punkt B leżący o 5 stóp bliżéj tego poziomu, jest od niego oddalony na 25 stóp, punkt C leżący o jedną stopę bliżej tego poziomu aniżeli punkt B, jest od niego oddalony o 24 stóp i t. d. Zmierzywszy odległość po linii prostéj pozioméj między tykami pionowemi A, B, C i t. d., otrzymamy długość linii MN, NO i t. d. (79. Wn. 3. i 51. Wn. 1.); gdy zatem na linii nieograniczonéj odetniemy linie równe liniom MN, NO i t. d. i wyprowadzimy prostopadłe. zawierające jednakową liczbę stopni z odpowiedniemi sobie prostopadłemi, otrzymamy punkta leżące na krzywéj, równéj krzywéj będącéj na gruncie.

86. *Zt. Rysowanie pochyłych konturów z prostych modeli* (fig. 41).

1. Z punktów modelu prostego prowadzę linie prostopadłe do prostéj XY, równoległéj do osi AB, a przez ich spodki linie równoległe czyniące z XY kąt spełnienia z kątem żądanéj pochyłości: 2). prowadzę oś pochyłego konturu ab równoległą do XY, i odcinam cd=CD, ef=EF; gh=GH i t. d. które się dzielą przez oś ab na dwie równe części. Punkta c,

d, e, f, g, h, i t. d. są punktami żądanego konturu, odpowiedniemi punktom C, D, E, F, G, G, i. t. d. modelu.

§. III. Połączenia linii prostych ograniczonych.

A.) *Odcinki dwóch linii prostych przecinających się, uważane z odcinkiem poprzecznej, czyli: trójkąt.*

87. Dwie linie proste nieograniczone przecinające się (fig. 31.) AB i CD, przecięte poprzeczną FG, tworzą trzy odcinki ograniczone EH, EJ, i HJ, leżące na płaszczyznie linii przecinających się AB i C,D składają linię łamaną, zamkniętą, złożoną z trzech linii prostych, zwaną *trójkątem.* Trójkąt HEJ ogranicza część płaszczyzny linii przecinających się AB i CD która to płaszczyzna także zowie sią trójkątem.

Trójkątem więc zowią się albo trzy linie ograniczone z których dwie po sobie idące mają końce wspólne; albo: trójkąt jest to płaszczyzna ograniczona trzema liniami, po dwie przecinającemi się. — *W téj części uważając tylko własności połączenia linii, określamy trójkąt jako połączenie linii. Linie* HE, EJ i JH, *składające trójkąt, zowią się bokami trójkąta. Kąty* JHE. HEJ i EJH *zawarte między bokami,* wyrażające wzajemne ich względem siebie położenie, *zowią się kątami wewnętrznemi trójkąta,* lub téż *kątami trójkąta;* wierzchołki zaś tych kątów H, E, I, wierzchołkami trójkąta. *Kąt* EIH *zawarty między bokiem* EI *trójkąta a przedłużeniem JG boku HJ z nim przecinającego* *się, zowie się kątem zewnętrznym trójkąta* HEJ. Jeśli boki trójkąta przedłużymy w jedną stronę, jak są przedłużenia JG, ED i HA, utworzą się trzy kąty zewnętrzne GJE, DEH i AHJ; przedłużywszy zaś w drugą stronę, jak JC, HF i EB, utworzą się także trzy kąty zewnętrzne CJH, FHE i BEJ, które są równe pierwszym, jako wierzchołkiem przeciwległe: GJE z CJH, DEH z BEJ i EHF z AHJ; mówiąc więc o kątach zewnętrznych rozumieć będziemy albo trzy pierwsze, albo trzy drugie kąty.

Kąt zewnętrzny jest dopełnieniem kąta wewnętrznego, mającego z nim wspólny wierzchołek; zatém wielkość kątów zewnętrznych zależy od wielkości kątów wewnętrznych i dla tego w trójkącie uważamy tylko kąty wewnętrzne.

Przy każdym wierzchołku kąt wewnętrzny z zewnętrznym czynią Π, przeto w trójkącie summa kątów wewnętrznych z zewnętrznémi równa się 3Π; a że summa kątów wewnętrznych równa Π (80), więc summa zewnętrznych równa 2Π, czyli czterem kątom prostym.

88. W trójkącie głównie zwracamy uwagę na jego boki i kąty i w tym względzie mamy do uważania sześć rzeczy: trzy boki i trzy kąty. Co do boków trójkąt może być *a*) *różnoboczny*, gdy żaden z boków niéma sobie równego; *b*) *równoramienny* (symetryczny), gdy ma dwa boki równe, a bok trzeci zowie się podstawą; *c*) *równoboczny* (foremny), gdy wszystkie boki są sobie równe. Co do kątów trójkąt

może być: *a*) *ostrokątny*, gdy wszystkie kąty są ostre; *b*) *prostokątny*, gdy jeden kąt jest prosty.(80 wn. 2); bok leżący naprzeciw kąta prostego zowie się *przeciwprostokątną*, zaś przy kącie prostym, *przyprostokątną* (ramię kąta prostego); *c*) *rozwartokątny*, gdy jeden z kątów jest rozwarty; bok leżący naprzeciw kąta rozwartego zowie się *przeciwrozwartokątną*, zaś przy kącie rozwartym, *przyrozwartokątną* (ramię kąta rozwartego). Wielkość kątów w trójkącie zależy od boków przeciwległych i dla tego co do kątów nieuważamy przypadków, odpowiednich pierwszym trzem rodzajom trójkąta.

W dwóch trójkątach, boki leżące naprzeciw kątów równych, lub kąty leżące naprzeciw boków równych, zowią się *odpowiedniemi*.

89. Prostopadła poprowadzona z wierzchołka kąta na bok przeciwległy, lub jego przedłużenie, zowie się *wysokością* trójkąta, zaś bok na który pada prostopadła, jego podstawą.

Linia dzieląca trójkąt na dwa inne, mające kąty i boki jednakowe, lecz położone w przeciwnym porządku, zowie się *osią symetryi*; przecięcie się osi symetryi zowie się *środkiem symetryi*; to samo ściąga się i do innych figur.

Punkt leżący wewnątrz figury, mający tę własność: że odcinki prostych przezeń przechodzących, utworzone przez boki, dzielą się w nim na dwie równe części, zowie się *środkiem figury*.

Linia przechodząca przez środek boku, zowie się linią *połowiącą bok*, a linia dzieląca kąt na dwie równe części, zowie się linią *połowiącą kąt*. Jeden jest środek linii (4 kw.), podobnie jedna jest tylko linia prosta połowiąca kąt.

90. Tw. *W trójkącie* 1° *naprzeciw boków równych* AB i BC *leżą kąty równe* A i C; 2° *naprzeciw boku większego* AF od FC *leży kąt większy* C od A (fig. 21).

Ze środka D trzeciego boku AC wyprowadziwszy prostopadłą:

1° Prostopadła przejdzie przez punkt B, jako równo oddalony od końców linii A i C (44). Obracając trójkąt BDC około BD, ramię DC padnie na ramie DA, dla równości kątów przy D, jako prostych, wierzchołek C padnie na wierzchołek A, dla równości linii DC i DA i ramię BC przystanie do AB, gdyż ma z niém dwa punkta A i B wspólne, a zatém kąty A i C są sobie równe. (40)

2° Prostopadła przetnie bok większy AF w punkcie B, gdyż punkt F leży z téj strony prostopadłéj, z któréj mniejsze jest jego oddalenie od końca boku AC (45 Wn.). Połączywszy punkt B z C, bok BC= AB (45), przeto i kąty A i BCA są równe, lecz że kąt BCA < FCA, a zatém i kąt A < FCA.

91. Tw. od. *W trójkącie* 1° *naprzeciw kątów równych* A i BCA *leżą boki równe* AB i BC; 2° *naprzeciw kąta* FCA *większego* od A, *leży bok* AF *większy* od FC.

1° Bok AB nie może być większy od BC, gdyż kąt BCA byłby większy od kąta A, równego mu z założenia; bok AB nie może być mniejszy od BC, gdyż kąt BCA byłby mniejszy od kąta A, a zatém bok AB jest równy bokowi BC.

2° Bok AF nie może być równy bokowi FC, gdyż kąt A równałby się kątowi FCA, większemu od siebie z założenia; bok AF nie może być mniejszym od boku CF, gdyż kąt A byłby większy od kąta FCA;—a zatém bok AF > FC.

Wn. 1. W trójkącie prostokątnym, kąt prosty jest największy ze wszystkich kątów (80 Wn. 2), przeto przeciwprostokątna jest największa ze wszystkich boków; podobnie w trójkącie rozwartokątnym, przeciwrozwartokątna jest największa ze wszystkich boków.

Wn. 2. Jeżeli trójkąt ma dwa boki równe, to ma także i dwa kąty równe, jeśli trzy boki równe, to ma zarazem i trzy kąty równe, czyli trójkąt równoboczny jest zarazem równokątnym i nawzajem.—Trójkąt równoboczny dla tego zowie się *foremnym*, że ma boki i kąty równe, a takie figury zowią się foremnemi.

Wn. 3. W trójkącie równoramiennym ABC, prostopadła wyprowadzona ze środka podstawy, jest *osią symetryi*, gdyż rozdziela go na dwa trójkąty DBC i DBA, mające boki i kąty równe, lecz przeciwnie położone, bok DC i DA, kąt C i A i kąty przy D, tak że kąty ich równe nie przystają do siebie przy posuwaniu jednego z trójkątów BDC po linii AC, zawierającéj w sobie dwa równe boki DA i DC, t. j. po położeniu spodniéj strony trójkąta BDC na wierzchnią trójkąta ABD, lecz po położeniu wierzchniéj na wierzchnią, lub spodniéj na spodnią, co uskuteczniamy obracając trójkąt KDC około osi symetryi,—przytém wierzchołki odpowiednie A i C leżą na jednéj linii AC, prostopadłéj do osi symetryi BD, w jednakowéj od niéj odległości, gdyż inaczéj wierzchołek C trójkąta BDC, w czasie obrotu około osi BD, nie padłby na wierzchołek A, bo linia pada na linię dla równości kątów (40), a kąty przyległe CDB i BDA nie będąc prostemi, nie mogą być sobie równe; zaś punkt C pada na punkt A, dla równości linii prostych (4. Wn. 4).—Oś symetryi BD, jak widzieliśmy 1) przechodząc przez bok AC połowi go i jest do niego prostopadłą; 2) przechodząc przez wierzchołek B, połowi kąt przy tym wierzchołku leżący. — Trójkąt równoramienny zowie się *symetrycznym*, dla tego że ma jedną oś symetryi.

Wn. 4. Trójkąt foremny (fig. 42) ABC, ma trzy osie symetryj: BD, CE i AF, gdyż każde dwa jego boki są sobie równe, przeto każdy bok można wziąść za podstawę. Prostopadłe BD i EC przecinają się w G (78. Wn. 8); lecz że punkta prostopadłéj DB, wyprowadzonéj ze środka linii AC, są równo oddalone od końców A i C (45), zaś punkta prostopadłéj EC są równo oddalone od końców A i B, przeto wspólny ich punkt G, tak jest oddalony od punktu A jak od C i od punktu A jak od B, czyli linia GA=GC i GA=GB, więc GC=GB; zatém linia łącząca środek F boku BC z punktem G jest prostopadłą do tego boku i przechodzi przez wierzchołek A, równo oddalony od końców B i C (44), czyli trzecia oś symetryi przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch pierwszych i wszystkie trzy przecinają się w jednym punkcie G, środku symetryi. *Środek symetryi* G jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta, gdyż CG=AG=BG. Zarazem widziemy, że w trójkącie foremnym; 1) linie połowiące kąty trójkąta; 2) prostopadłe wyprowadzone ze środka boków; 3) prostopadłe wyprowadzone z wierzchołków na boki przeciwległe, i 4) linie łączące wierzchołki ze środkami boków przeciwległych będąc wszystkie osiami symetryi, przecinają się w jednym punkcie. Ta ostatnia własność jak zobaczymy, wspólna jest wszystkim trójkątom.

W jakich przypadkach trójkąty mają wszystkie boki i kąty odpowiednie, równe.

92. *Tw.* 1szy Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* AB=DE, BC=EF *i po kącie między niémi zawartym równym* B=E, *mają pozostały bok i dwa kąty odpowiednie równe* (fig. 43), AC=DF i kąt A=EDF, C=EFD.

Przenoszę trójkąt ABC na DEF, tak, aby punkt A padł na punkt D, bok AB poszedł po boku DE, to:

punkt B padnie na punkt E, dla równości tych dwóch boków (4. Wn. 4); bok BC pójdzie po boku EF, dla równości kąta B z kątem E (40) i punkt C padnie na punkt F, dla równości boków BC i EF; a że punkt A padł na D i C na F, przeto bok AC przystaje do boku DF i jest mu równy; kąt zaś A=D i C=F, gdyż ramiona ich przystają do siebie.

Wn. Trójkąty prostokątne mające dwie przyprostokątne równe, mają pozostałe boki i kąty równe.

93. *Tw.* 2gi Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF, *mające po trzy boki równe* AB=DE, BC=EF i AC=DF, *mają i kąty odpowiednie równe* (fig. 43.).

Przenoszę trójkąt ABC na płaszczyznę trójkąta DEF, tak, aby bok AC przystał do równego sobie boku DF, zatém punkt B padnie w jakimkolwiek punkcie *b*. Łączę punkt E z punktem *b*; trójkąt ED*b* jest równoramienny, gdyż boki ED i D*b* pierwszy z założenia, zaś drugi z przeniesienia równe bokowi AB, są sobie równe, przeto kąt DE*b*=D*b*E (90); dla podobnéj przyczyny kąt FE*b*=F*b*E, przeto i kąt DEF=D*b*F; że zaś kąt D*b*F=ABC z przeniesienia, zatém, i kąt ABC=DEF, i trójkąty ABC i DEF, mające po kącie i po dwa boki zawierające go, równe, mają i pozostałe części równe, t. j. kąt A=EDF i C=EFD.

94. *Tw.* 3ci Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* AB=DE i BC=EF *i po kącie przeciwległym bokowi większemu równym*, kąt C=F a bok AB > BC a tém samém i DE > EF, *mają i pozostałe części równe.* (fig. 43).

Przenoszę trójkąt DEF na ABC, tak, aby wierzchołek kąta F padł na wierzchołek równego mu kąta C, bok FE poszedł po boku BC, to punkt E padnie na punkt B, dla równości tych boków; bok FD pójdzie po boku CA, dla równości kąta F z kątem C, a mam dowieść że punkt D nie padnie ani przed punktem A, w punkcie G, ani za punktem A w punkcie H, a zatém padnie na punkt A. W pierwszym razie, boki BA i BG byłyby sobie równe, gdyż pierwszy z założenia, zaś drugi z przeniesienia równałby się bokowi DE, więc i kąt A=BGA (90), a że kąt BGA > C (80. Wn. 1), to i kąt A > C, przeto i bok BC byłby większy od AB (90), co sprzeciwia się założeniu. W drugim razie, dla równości boków BA i BH, równych bokowi DE, kąt BHA równałby się kątowi BAH, większemu od kąta C, przeto byłby większy od tego kąta, a tém samém i bok BC byłby większy od boku BH, równego bokowi AB, coby się sprzeciwiało założeniu.

Punkt więc D pada na punkt A, a zatém bok FD= AC, kąt A=D i B=E, gdyż po przeniesieniu przystają do siebie.

Wn. 1. Trójkąty prostokątne mające po przeciwprostokątnéj i po boku równym, mają i pozostałe części równe. (91. *Wn.* 1).

95. *Tw.* 4ty Przyp. *Dwa trójkąty ostrokątne* ABC i EFG, *lub rozwartokątne* ABD i EFH, *mające po dwa boki równe* AB=EF, BC=FG lub BD=FH, *i po kącie leżącym na przeciw boku mniejszego, ró-*

równym, kąt A=E i bok AB > BC i BD, a tém samém FE > FG i FH, *mają i pozostałe części równe. Jeżeli zaś jeden tylko trójkąt* ABC *jest ostrokątny, to drugi* EFH *jest rozwartokątny, i kąt jego rozwarty* H *jest dopełnieniem kąta ostrego* C, *leżącego na przeciw boku większego* AB (fig. 44).

Przenoszę trójkąt EFG na ABC, tak, aby wierzchołek kąta E padł na wierzchołek równego mu kąta A, ramię EF poszło po ramieniu AB, to punkt F padnie na punkt B, dla równości tych boków, bok EG padnie na AC dla równości kąta E z kątem A, zaś bok FG mając jeden koniec w B, ma drugi na linii AC, a zatém może mieć tylko dwa położenia: albo padnie na bok BC=FG, lub na BD=BC, gdyż z punktu B jedną tylko pochyłą BD równą pochyłéj BC, a zatém i pochyłéj FG, poprowadzić można (51. Wn. 2); lecz że trójkąty z założenia są ostrokątne, przeto FG nie padnie na BD, gdyż wtedy kąt BDA, jako dopełnienie kąta BDC, równego kątowi BCD ostremu, byłby rozwarty a tém samém nierówny kątowi ostremu G;—a zatem i pozostałe części trójkątów są sobie równe. Jeżeliby trójkąty ABD i EFH były rozwartokątne, wtedy FH mogłoby paść albo na bok BD, lub téż na linię BC równą temu bokowi. Na linię zaś BC paść nie może, gdyż kąt C, jako równy kątowi BDC, będącemu dopełnieniem kąta rozwartego BDA, byłby ostry i niemógłby się równać kątowi rozwartemu FHE; a zatem bok FH pada na bok BD, i pozostałe części trójkątów są sobie równe. Jeżeli trójkąt ABC jest ostrokątny, zaś trójkąt EFH nie jest ostrokątny, to bok FH nie padnie na bok BC, bo wtedy kąt H, jako równy kątowi C byłby ostry, ale pada na linię BD, równą temu bokowi, i kąt FHE jako równy kątowi BDA, będąc dopełnieniem kąta BDC, równego kątowi C, jest dopełnieniem kąta C ostrego, przeciwległego bokowi większemu AB, i pozostałe części trójkątów nie są równe t. j. AC $>$ EH i kąt ABC $>$ EFH.

96. *Tw.* 5ty Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po jednym boku równym* AC$=$DF *i po dwa kąty przy nim leżące równe* A$=$D i C$=$F, *mają i pozostałe części równe*: *bok* AB$=$DE, BC$=$EF *i kąt* B$=$E, (fig. 43).

Przenoszę trójkąt DEF na ABC tak, aby wierzchołek F padł na C i bok FD poszedł po boku CA, to: wierzchołek D padnie na A, dla równości boków DF i CA, bok FE padnie na CB, dla równości kąta C z kątem F i bok DE padnie na AB dla równości kątów A i D, a zatem i wierzchołek E padnie na B, gdyż linie FE i DE, leżące na liniach CB i AB, przecinają się w tym samym punkcie B jak i linie BC i AB; pozostałe więc części trójkątów, jako przystające są sobie równe.

97. *Tw.* 6ty Przyp. *Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po jednym boku równym* AC$=$DF, *i po dwa kąty, z których jeden przeciwległy temu bokowi, równe*: C$=$F i B$=$E, *mają i pozostałe części równe* (fig. 43).

Kąty B$+$C dopełniają się kątem A do II; a że kąty B$+$C z założenia równają się kątom E$+$F, przeto i dopełnienia ich, czyli kąty A i D są sobie równe (46. Uw 2). Trójkąty więc ABC i DEF mające po jednym boku AC=DE i po dwa kąty przy nim leżące, równe, C=F, z założenia zaś A=D z poprzedzającego dowodzenia, mają i pozostałe części równe (96).

98. *Tw. Dwa trójkąty mające boki odpowiednie prostopadłe lub równoległe, mają i kąty odpowiednie, równe.* (fig. 46 i 47).

Kąty mające ramiona równoległe lub prostopadłe, albo są równe, albo się dopełniają (78. Wn. 9 i 10); przeto dowieść tylko potrzeba, że kąty odpowiednie nie mogą być kątami dopełnienia. Rzeczywiście kąty A, B i C nie mogą być dopełnieniem odpowiednich sobie kątów, gdyż summa kątów w tych dwóch trójkątach równałaby się 3II, co być nie może (80); dwa kąty jednego trójkąta A i B, nie mogą być dopełnieniem odpowiednich im kątów drugiego trójkąta, gdyż wtedy summa czterech tylko kątów w tych trójkątach równałaby się 2II, co być nie może. Przeto dwa kąty jednego trójkąta, są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, a tém samém i kąt trzeci równy kątowi trzeciemu. (80. Wn. 3).

Uw. 1. Kąty mające ramiona jednakowo względem siebie nachylone, mają tę samę własność jak i kąty mające ramiona prostopadłe (78. Wn. 10), przeto trójkąty, mające boki jednakowo nachylone, mają kąty równe; *i nawzajem* (fig. 46), gdyż jeśli kąt A=a, B=b i C=c, to jeśliby nachylenie boku BC do bc nie było takie, jak nachylenie boku AC do ac i AB do ab, wtedy przez punkta b i c, poprowadziwszy linie czyniące z bokami AB i AC takie kąty, jak bok cb z bokiem CB, kąty a'cb i a'bc, podobnie jak kąty trójkąta c i b, jako równe kątom C i B drugiego trójkąta, byłyby sobie równe, co być nie może.

Uw. 2. Równość kątów nie pociąga za sobą równości boków, lecz tylko oznacza jednakowość ich położenia tak, że gdy trójkąty mają kąty równe, to gdy jeden z boków jest prostopadły lub równoległy do odpowiedniego sobie, takiemiż są i pozostałe boki.

Uw. 3. W sześciu tylko przypadkach, z których czwarty jest szczególnym (gdyż ściąga się tylko do trójkątów ostrokątnych albo rozwartokątnych), trójkąty mające po trzy części równe, mają i pozostałe trzy części równe, zaś równość kątów nie pociąga równości boków. Do złożenia więc trójkąta nie można mieć 6ciu tych rzeczy dowolnie danych, choćby nawet summa kątów równała się II, a summa każdych dwóch boków była większa od trzeciego, gdyż wielkość trzech pierwszych, wyznacza zupełnie wielkość trzech pozostałych tak, że mając dwa boki i kąt zawarty, tém samém wyznaczamy bok trzeci, i kąty przy nim leżące i t. p.

99. *Tw. Dwa trójkąty* ABC i DEF lub DE'F lub DE"F *mające po dwa boki równe* AC=DF i AB=DE lub DE' lub DE" *i kąt* A *zawarty między temi bokami pierwszego trójkąta, większy od kąta* D *zawartego między odpowiedniemi bokami drugiego trójkąta, mają bok trzeci* BC *w pierwszym trójkącie, większy*

od boku trzeciego EF lub E'F lub E''F *w drugim trójkącie.* (fig. 45)

Przenoszę trójkąt ABC na drugi trójkąt tak, aby wierzchołek C padł na F, i bok CA poszedł po boku DF, to punkt A padnie na punkt D, dla równości tych boków, bok AB padnie zewnątrz odpowiedniego boku w drugim trójkącie, gdyż kąt A zawarty między bokiem AC i AB w pierwszym trójkącie, jest większy od odpowiedniego kąta w drugim trójkącie; bok zaś trzeci CB padnie albo zewnątrz boku trzeciego FE, jak dla trójkąta DEF, albo na boku, jak dla trójkąta DE'F, albo przed bokiem trzecim jak dla trójkąta DE''F.

W 1szym przypadku bok $DE+EF < DB+BF$ (20), odjąwszy z pierwszéj strony DE a z drugiéj $DB=DE$ z założenia, zostaje $EF < BF$.

W 2gim przypadku $E'F < BF$ jako część od swojéj całości.

W 3cim przyp. $DB+FE'' < DE''+FB$ (21), odjąwszy z pierwszéj strony DB a z drugiéj $DE''=BD$ z założenia, zostaje $FE'' < FB$.

100. *Tw. od. Dwa trójkąty* ABC i DEF *mające po dwa boki równe* $AC=DF$, $AB=DE$ *i bok trzeci* BC *pierwszego trójkąta, większy od boku trzeciego* FE *w drugim trójkącie, mają kąt* A *zawarty między bokami rownemi w pierwszym trójkącie, większy od odpowiedniego kąta* D *w drugim trójkącie* (fig. 45).

Kąt A nie może być równy kątowi D, gdyż wtedy bok BC byłby równy bokowi EF (92), mniejszemu od siebie z założenia, kąt A nie może być mniejszy od kąta D, gdyż wtedy bok BC byłby mniejszy od boku EF (98), co również sprzeciwiałoby się założeniu; a zatém kąt A jest większy od kąta D.

101. *Tw. Jeżeli z punktu* D *wziętego wewnątrz trójkąta poprowadzimy linie do końców jednego z boków* AC, *to kąt* D *między niemi zawarty jest większy od kąta* B *przeciwległego temu bokowi* AC (fig. 48).

Przedłużam linię AD do spotkania się z bokiem BC w punkcie E, to: kąt D > DEC jako zewnętrzny, jest większy od kąta wewnętrznego przecinających się CE i CD względem poprzecznéj AE (76); dla podobnéj przyczyny kąt DEC > B, a zatém kąt D tém bardziéj jest większy od kąta B.

102. *Tw.* 1° *Punkt* D *wzięty na linii* BD *połowiącéj kąt* ABC, *jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta* BA i BC. 2° *Punkt* E *wzięty nie na połowiące ten kąt, nie jest jednakowo oddalony od jego ramion.* (fig. 49).

1° Prowadzę z punktu D prostopadłe do ramion kąta (57); trójkąty DBC i DBA mające bok BD wspólny, kąty przy B równe z założenia i kąt C=A jako proste, mają i pozostałe części równe (97) przeto DC =DA.

2° Z punktu E wyprowadzam prostopadłe EC i EF do ramion kąta; — z punktu D przecięcia się jednéj z prostopadłych EC z linią połowiącą BD, wyprowadzam prostopadłą DA do ramion BF; — punkt E z A łączę prostą EA; — wtedy EF < EA, zaś EA < ED +

DA,—biorąc za DA prostopadłą DC, linia EA < EC a tém samém EF < EC.

Wn. 1. I nawzajem: *punkt równo oddalony od ramion leży na połowiącéj*, gdyż w przeciwnym razie nie byłby równo oddalony od ramion; *punkt nierówno oddalony od ramion nie leży na połowiącéj*; w przeciwnym bowiem razie byłby równo oddalonym od ramion. *Połowiąca* więc *jest miejscem wszystkich punktów jednakowo oddalonych od ramion kąta.*

Wn. 2. Prostopadłe wyprowadzone z punktu połowiącéj D, odcinają na ramionach odcinki równe BA i BC, przeto jeżeli z punktów A i C wyprowadzimy prostopadłe AD i CD, to punkt ich przecięcia się D leży na połowiącéj kąt B; trójkąty bowiem BDA i BDC, mające przeciwprostokątną wspólną i przyprostokątne BA i BC równe z założenia, mają i kąty przy B równe (94. Wn. 1).

103. *Tw. Linie* AF, BD i CE *połowiące kąty* A, B i C *trójkąta* ABC, *przecinają się w jednym punkcie* G, *równo oddalonym od boków* AB, BC i CA tego trójkąta (fig. 42).

Linie AF i BD, połowiące kąty A i B, czynią ze wspólną poprzeczną AB kąty jednostronne wewnętrzne, mniejsze od II, gdyż summa kątów A i B dwa razy od nich większych, jest mniejsza od II (80), przeto linie te przecinają się w punkcie G (76. Wn.). Punkt G, jako leżący na połowiącéj AF, jest równo oddalony od ramion AC i AB (102); zatém prostopadła wyprowadzona z tego punktu na bok AC równa się prostopadłéj wyprowadzonéj na bok AB; punkt G leży także na połowiącéj BD, przeto prostopadła wyprowadzona z tego punktu na bok AB, równa się prostopadłéj wyprowadzonéj do boku BC; a zatém prostopadłe wyprowadzone z punktu G do boków AC i BC, jako równe prostopadłéj do boku AB, są sobie równe; a przeto punkt G leży na połowiącéj kąt trzeci C (102. Wn. 1), czyli trzy połowiące przecinają się w jednym punkcie G i ten punkt jest równo oddalony od boków trójkąta, czyli: prostopadłe wyprowadzone z tego punktu na boki, są sobie równe.

104. *Tw. Prostopadłe* DG, EG i FG *wyprowadzone ze środka boków trojkąta* ABC *przecinają się w jednym punkcie, równo oddalonym od wierzchołków* A, B i C *trójkąta* (fig. 50).

Prostopadłe DG i EG przecinają się z sobą w punkcie G (78. Wn. 8); punkt G jako leżący na prostopadłéj DG jest równo oddalony od końców linii (45) B i A, czyli GA=GB, dla podobnéj przyczyny GB=GC, przeto GA=GC jako równe linii GB; punkt więc G leży na prostopadłéj, przechodzącéj przez środek linii AC czyli, linia łącząca punkt G ze środkiem linii AC, jest prostopadłą do téj linii, a zatém prostopadłe wyprowadzone ze środka boków przecinają się w jednym punkcie G i ten punkt jest równo oddalony od wierzchołków.

105. *Tw. W trójkącie* ABC *prostopadłe* BE, CF i AD *poprowadzene z wierzchołków kątów na boki przeciwległe, przecinają się w jednym punkcie* H (fig. 51).

Prowadzę przez wierzchołki trójkątów linię GK, KJ i JG, równoległe do boków przeciwległych, które zarazem są prostopadłe do linii BE, CF i AD (78. Wn. 5). Dla dowiedzenia że prostopadłe wyprowadzone z wierzchołków trójkąta ABC na boki przeciwległe przecinają się w jednym punkcie, potrzeba okazać, że one dla trójkąta GKJ są prostopadłemi, wyprowadzonemi ze środków boków (104). Uważam, że trójkąty BCK i BCA mające bok BC wspólny i kąty przy nim leżące, jako naprzemianległe, równe (78. Wn. 1), mają bok BK=AC; dla podobnéj przyczyny i bok GB=AC, przeto BK=BG czyli punkt B jest środkiem boku GK. Podobnym sposobem dowiedliśmy, że punkt A jest środkiem boku GJ, zaś C środkiem JH, a zatém i prostopadłe BE, AD i CF przecinają się w jednym punkcie.

106. *Tw. W trójkącie prostokątnym* ABC *środek* D *przeciwprostokątnéj* BC *jest jednakowo oddalony od trzech wierzchołków* A, B i C (fig. 52).

Przy punkcie A linii AB kreślę kąt BAD=B (59), to i kąt DAC=C, gdyż kąt A=B+C (80); trójkąt BDA jest równoramienny (91), przeto BD=DA; dla podobnéj przyczyny DA=DC a zatém BD=DC, czyli punkt D jest środkiem przeciwprostokątnéj i jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta.

Wn. 1. W trójkącie prostokątnym linia łącząca wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnéj, dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, mające za podstawy ramiona kąta prostego.

12

Wn. 2. Linie łączące środek przeciwprostokątnéj ze środkami przyprostokątnych są do nich prostopadłe, gdyż przechodzą przez dwa punkta równo oddalone od ich końców (44).

107. *Tw. od. Jeśli w trójkącie* ABC, *środek* D *jednego boku* BC *jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny, a środek boku, równo oddalony od wierzchołków, jest środkiem przeciwprostokątnéj.* (fig. 52).

Łączę punkt D z wierzchołkiem A kąta przeciwległego, i tym sposobem utworzyły się dwa trójkąty równoramienne BDA i ADC, gdyż z założenia DB=DA=DC; przeto kąt B=BAD i C=CAD (90), zatém kąt B+C=BAD+DAC czyli kątowi A. Lecz kąt A+B+C=II (80), a że A=B+C, przeto tak kąt A, jak i B+C równają się kątowi prostemu czyli trójkąt ABC jest prostokątny przy A.

Wn. 1. Jeżeliby kąt B=60°, to kąt BAD, jako jemu równy z wykreślenia, równa się także 60°, a zatém i kąt D=60° (80. Wn. 3), trójkąt więc BAD jest równoboczny (91. Wn. 2), i ramię BA kąta B równa się połowie przeciwprostokątnéj.

Wn. 2. *Jeżeli w trójkącie jeden z kątów* B *ma* 60°, *i jedno jego ramię* BA *jest połową drugiego ramienia* BC, *to trójkąt ten jest prostokątny, zaś ramię większe* BC, *jest przeciwprostokątną*; gdyż AB=BD przeto i kąt BDA=BAD, a że summa ich równa się 180°—60°, zatém każdy z nich ma po 60°; trójkąt więc BAD jest równobocznym i BD=DA; lecz BD=

DC, zatém punkt D jest równo oddalony od trzech wierzchołków trójkąta.

108. *Zg. Mając dwa kąty* d i f *trójkąta, wynaleźć kąt trzeci.* (fig. 53).

Przy dowolnéj linii BC, przy punkcie A, kreślę kąt BAE=d, i kąt DAC=f, to kąt EAD jest żądanym, jako dopełniający kąty dane do Π.

109. *Zg. Nakreślić trójkąt* (fig. 54) *mając:*

1° *dwa boki* a, b i *kąt* e *między niemi zawarty.*

Na linii nieograniczonej CA, kreślę kąt ACB=e (59), i odcinam CA=a i CB=b, punkt A z B łączę prostą AB, a trójkąt ABC jest żądanym.

2° *trzy boki* a, b, c.

Na linii nieograniczonéj odcinam AC=a, z punktu C, promieniem równym bokowi b, zakreślam łuk, z punktu A, promieniem równym bokowi c, przecinam ten łuk w punkcie B; punkt B z punktami A i C łączę liniami prostemi, a trójkąt ABC jest żądanym.

3° *Dwa boki* b, c i *kąt* f *przeciwległy bokowi większemu* b.

Przy linii nieograniczonéj AC kreślę kąt CAB=f, odcinam AB równe bokowi mniejszemu c i z punktu B promieniem równym bokowi większemu b, przecinam linię AC w punkcie C, a trójkąt ABC jest żądanym.

4° *dwa boki* b, c i *kąt* e *przeciwległy bokowi mniejszemu* c, *nakreślić trójkąt* 1) *ostrokątny,* 2) *rozwartokątny.*

Kreślę kąt ACB równy e, odcinam CB równe bokowi większemu b; z punktu B, promieniem równym bokowi mniejszemu c, zakreślam łuk, który przetnie ramię CA w dwóch punktach, gdyż z punktu B dwie równe pochyłe BA i BA' poprowadzić można, które są równo oddalone od spodka prostopadłéj BD, przeto jako mniejsze od pochyłéj BC, obie leżą przed tą pochyłą.—Żądanym trójkątem 1) *ostrokątnym* jest ABC, gdyż kąt A $<$ BDC zewnętrznego; 2) *rozwartokątny* jest trójkąt A'BC gdyż kąt zewnętrzny BA'C $>$ BDA prostego.

5° *jeden bok* a *i dwa kąty przy nim leżące* e *i* f.

Na linii nieograniczonej odcinam AC$=$a i kreślę kąt ACB$=$e zaś CAB$=$f; ramiona tych kątów przetną się w punkcie B, gdyż summa kątów wewnętrznych A i C, jako równych kątom e i f, mniejsza od II (80); a trójkąt ABC jest żądany.

6° *jeden bok* a *i dwa kąty*: f *leżący przy tym boku, zaś* d *przeciwległy temu bokowi.*

Na linii nieograniczonéj odcinam AC$=$a, kreślę kąt CAB$=$f i kąt ACB równy dopełnieniu kątów danych f i d do II (108), a trójkąt ABC jest żądany.

110. *Zg. Dany kąt podzielić na dwie równe części.*

a) Gdy wierzchołek A *znajduje się na rysunku.*

Odcinam AB$=$AC (fig 55), i z punktów B i C wyprowadzam prostopadłe do ramion, a punkt ich przecięcia się D leży na połowiącéj kąt A (102. Wn. 2), przeto AD jest linią żądaną.

Albo: odcinam AB=AC, trójkąt więc BAC jest symetryczny, a prostopadła do BC połowi kąt A (91. Wn. 3), przeto z punktu A prowadzę prostopadłą do BC (57).

b) *Gdy wierzchołek kąta nie znajduje się na płaszczyźnie rysunku.* (fig. 56).

1) Między dwiema linijami AB i CD prowadzę dowolną linię EF, 2) prowadzę linię FH połowiącą kąt CFE i EH połowiącą kąt AEF, to punkt H ich przecięcia się jest tak oddalony od linii FC jak i od FE, zaś od FE tak jak od EA (102); przeto punkt H jest równo oddalony od ramion FC i EA danego kąta i leży na połowiącéj ten kąt (102. Wn. 1). Podobnym sposobem wynajduję drugi punkt G leżący na połowiącéj, a linia HG jest żądaną.

111. *Zg. Z końca linii* CA *wyprowadzić prostopadłą.* (fig. 52).

Z punktu dowolnego D odległością tego punktu od punktu A zakreślam okrąg koła, przecinający się z daną linią w punkcie C, przez punkt C prowadzę średnicę CD, a koniec jéj B połączony z danym punktem A, daje prostopadłę żądaną BA; gdyż trójkąt BAC jest prostokątny. (107)

112. *Zt. Dany kąt* BAC *podzielić na trzy równe części.* (fig. 57).

Z wierzchołka kąta A, na jedném z ramion BA dowolnym promieniem zakreślam półokręgu koła; na liniale odcinam DE równe promieniowi, i przykładam liniał tak, aby on przechodząc przez punkt C, punktem D padł na okręgu koła, zaś punktem E na przedłużeniu średnicy; wtedy kąt DEA który on czyni z średnicą jest trzecią częścią kąta danego A; gdyż kąt A $=a+b$, jako zewnętrzny, $a=b+DAE=2b$ (90) jako równy kątowi CDA; przeto $A=2b+b=3b$.

B) *Odcinki czterech linii prostych przecinających się czyli: czworobok.*

113. *Czworobokiem zupełnym* zowiemy odcinki czterech prostych (fig. 58) FA, FD, EA, EB leżących na płaszczyznie, przecinających się po dwie, tudzież samą płaszczyznę ograniczoną temi odcinkami. On się czyta ABFCDE. Części jego ograniczające płaszczyznę zowią się także czworobokami, i tak: 1) ABCD zowie się *wypukłym* albo *czworokątem* od liczby kątów; 2) FAEC *wklęsłym* i 3) FBCED *podwójnie wklęsłym*. Głównie zajmować się będziemy czworobokiem wypukłym. *Czworokątem* takim *zowiemy cztery linie proste ograniczone, z których dwie po sobie idące mają końce wspólne*, lub też *płaszczyznę ograniczoną temi prostemi.* Linie te podobnie jak w trójkącie zowią się *bokami—boki przeciwległe* są te które nie mają końców wspólnych, a *kąty przeciwległe* te które niemają ramienia wspólnego. Odcinek wspólnéj poprzecznéj dla dwóch par boków, czyli linia łącząca wierzchołki kątów przeciwległych zowie się *przekątnią* czworokąta lub też czworoboku, i tak:

1) Czworobok zupełny ABFCDE ma trzy przekątnie: dwie wewnętrzne AC i BD, a trzecią zewnętrzną FE; 2) wypukły ABCD ma dwie przekątnie wewnętrzne: AC i BD, każda z nich dzieli czworokąt na dwa trójkąty, przeto summa jego kątów równa się 2Π; 3) wklęsły AFCE ma jedną przekątną wewnętrzną AC, zaś drugą zewnętrzną FE, i 4) podwójnie wklęsły FBCED ma dwie przekątne zewnętrzne: BD i FE. Czworobok wypukły zowie się jeszcze *czworobokiem pierwszego rzędu*; — jeżeli boki jego przeciwległe przedłużymy do spotkania się z sobą AD z BC w punkcia E, AB z DC w punkcie F, otrzymamy *czworobok drugiego rzędu* AFCE; ta sama własność służy i dla wielokątów.

114. *Równoległobok* jest to czworokąt w którym boki przeciwległe są równoległe. *Romb* jest czworokąt mający boki równe; *prostokąt* jest czworokąt mający kąty proste; *kwadrat* jest prostokąt mający dwa boki przy sobie leżące równe. *Trapez* jest czworokąt mający dwa boki równoległe, a dwa drugie nierównoległe. *Wysokością* tych figur jest prostopadła, spuszczona z jednego boku na bok do niego równoległy. Boki równoległe w trapezie zowią się jego *podstawami*—Trapez mający boki jednakowo nachylone do podstawy zowie się *symetrycznym*, mający zaś jeden bok prostopadły do postawy, *prostokątnym*.

115. W *równoległoboku*: a) *kąty przeciwległe są sobie równe*, b) *boki przeciwległe są sobie równe*,

c) *przekątnie dzielą się na dwie równe części*; d) *naprzeciw kąta większego leży przekątna większa.* (fig. 59).

a) Kąt B=D i kąt A=C jako mające ramiona równolegle i skierowane w przeciwne strony (78. Wn. 9).

b) Bok BC=AD i bok AB=DC, gdyż trójkąty BDA i BDC mają bok BD wspólny i dwa kąty przy nim leżące jako naprzemianległe równe (96).

c) Odcinek przekątnéj EB=ED i EC=EA, gdyż trójkąty BEC i AED mają bok BC=AD i kąty przy nich leżące jako naprzemianległe, równe.

d) Jeżeli kąt A$\prec$B to BD$\prec$AC; gdyż trójkąty BDA i ACB mają dwa boki równe AB wspólny, AD =BC a kąt A zawarty między temi bokami w pierwszym trójkącie, mniejszy od kąta B zawartego między odpowiedniemi bokami w drugim trójkącie (99).

116. *Tw. Czworokąt jest równoległobokiem gdy*: 1) *kąty przeciwległe są sobie równe*; 2) *boki przeciwległe są sobie równe*; 3) *przekątnie dzielą się na dwie równe części*; 4) *dwa boki przeciwległe równe i równoległe*; 5) *dwa kąty przeciwległe równe, a dwa boki przeciwległe równoległe* (fig. 59).

1) *Zak.* Kąt A=C, kąt B=D; uważam że kąt A+B +C+D=2Π, przeto 2A+2B=2Π a tém samém A+ B=Π i linia AD równoległa do BC, gdyż z poprzeczną AB czynią kąty jednostronne wewnętrzne dopełniające się (78. Wn. 1); dla podobnéj przyczyny i AB równoległe do DC.

2) *Zak*. Bok AB=DC i BC=AD. Trójkąty BDA i BDC mające po trzy boki równe, mają kąt ADB=DBC i kąt ABD=BDC (93), przeto linia AD równoległa do BC i AB do DC, jako czyniące kąty naprzemianległe równe.

3) *Zak*. EB=ED i EA=EC. Trójkąty AED i BEC, jako mające po dwa boki równe z założenia i kąty między nimi zawarte równe jako przeciwległe, mają kąt EDA=EBC a tém samém i AD równolegle do BC; dla podobnéj przyczyny i AB równoległe do DC.

4) *Zak*. Bok BC równy i równoległy do boku AD. Trójkąty BDC i BDA mające po dwa boki równe i po kącie zawartym równym t. j. bok BD wspólny, bok BC=AD z założenia i kąt CBD=BDA jako naprzemianległe, mają kąt BDC=DBA, przeto DC równolegle do AB.

5) *Zak*. Kąt C=A i bok DC równoległy do AB. Trójkąty BDC i BDA mające bok BD wspólny, kąt C=A z założenia i kąt BDC=DBA, jako naprzemianlegle, mają kąt DBC=BDA (97), przeto DA równolegle do CB, gdyż czynią z BD kąty naprzemianlegle równe.

Wn. *Romb* jest równoległobokiem, bo ma boki przeciwległe równe; *prostokąt* jest równoległobokiem, bo ma kąty przeciwległe, jako proste równe; *kwadrat* jest również równoległobokiem, bo ma kąty przeciwległe równe, jako proste; przytém ma wszystkie boki równe, gdyż boki przeciwległe w równoległoboku są sobie równe. Własności więc równoległoboków ściągają się do rombów, prostokątów i kwadratów.

117. *Tw. W rombie przekątne są do siebie prostopadłe* (fig. 60).

Trójkąty ACE i CED mające po trzy boki równe AE =ED, jako w równoległoboku (115. c.), EC wspólny i AC=CD z założenia, mają i kąt AEC=CED; a że te kąty są przyległe i równe, więc są proste a przekątnia CB prostopadła do AD.

Wn. Przekątnie w rombie połowią jego kąty, gdyż kąt ACE=ECD i są jego *osiami symetryi*, gdyż trójkąt CDB obracany około CB, przystanie do trójkąta CAB, prostopadła bowiem ED padnie na swoje przedłużenie dla równości kątów prostych DEC i CEA, zaś punkt D padnie na A, dla równości linii ED z EA. Punkt E przecięcia się osi jest *środkiem symetryi*, lecz że osie są prostopadłe, przeto on jest zarazem i środkiem figury. I tak linia GH połowi się w punkcie E, gdyż położywszy ADB na ADC, EB przystanie do EC i EH padnie na EH' tak, że kąt BEH= CEH'; położywszy CBD na CBA, EH' padnie na EG dla równości kątów H'EC i CEG równych kątowi HEB; a że EH=EH' z przeniesienia, zaś EH'=GE z przystawania, przeto EH=EG.

118. *Tw. W prostokącie przekątne są sobie równe* (fig. 61).

Trójkąty ACB i BDC mające po dwa boki i po kącie zawartym równym, bok AB=CD i BC wspólny, a kąty zawarte proste, mają i bok AC=BD.

Wn. 1. Prostopadłe HK i FG poprowadzone z punktu E przecięcia się przekątnych do boków równoległych, przechodzą przez środki tych boków, jako prostopadłe trójkątów równoramiennych AED i BEC tudzież DEC i AEB (90. Wn. 3), i są osiami symetryi prostokąta, gdyż HCDK obracane około HK przystaje do HBAK, podobnie i FBCG do FADG. Ośie te są względem siebie prostopadłe, jako równoległe, do linii AB i BC prostopadłych, przeto punkt ich przecięcia się jest środkiem symetryi i środkiem figury czyli wszystkie linie przez punkt E przechodzące połowią się w nim.

Wn. 2. Kwadrat ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste, przeto jest czworokątem foremnym a zarazem rombem i prostokątem, ma więc cztery osie symetryi: dwie przekątne (fig. 62) AD i BC, jak w rombie; dwie zaś równoległe do boków HK i FG, jak w prostokącie t. j. liczba osi symetryi równa liczbie boków.

119. *Tw. W trapezie* AC *linia* FE *łącząca środki* F i E *boków nierównoległych* AB i CD, *równa się połowie summy dwóch jego podstaw* BC i AD *i jest do nich równoległa* (fig. 63).

Prowadzę przez punkt E linię HG równoległą do AB; trójkąty CGE i HED mające po boku równym, CE=ED i po dwa kąty przy nim leżące równe CEG =HED, jako przeciwległe i GCE=EDH, jako naprzemianległe, mają HD=CG i GE=EH; a zatém GE=

BF jako połowy boków przeciwległych równoległoboku AG (115, 6.) i linia EF równoległa do BG (116, 4.)—Summa podstaw AD+BC=AH+BG, gdyż od pierwszéj AD odjęliśmy tyle, ile dodaliśmy do drugiéj podstawy BC; a że linia FE łącząca środki boków nierównoległych, równa się tak linii AH jak i BG (115, 6.), przeto jest równa połowie ich summy, a tém samém i połowie summy podstaw.

Uw. Jeżeli trapez AC jest symetryczny, to prostopadła KL wyprowadzona ze środka podstawy BC na drugą podstawę, jest jego *osią symetryi.* Kąt A=D to i kąt B=C, jako dopełnienia; obracając trapez prostokątny KCDL około KL, przystanie on do trapeza KBAL, gdyż KC przystanie do KB i t. d.

120. *Tw. W czworokącie* AC *mającym kąty przeciwległe* A i C *proste, środek* E *przekątnéj* BD *łączącéj dwa inne kąty, jest równo oddalony od jego wierzchołków* A, B C, D (fig. 64).

Punkt E jako środek przeciwprostokątnéj BD, jest równo oddalony od wierzchołków B, C, D i D, A, B, przeto od wszystkich wierzchołków czworokąta ABCD.

121. *Zg. Wykreślić* a) *Równoległobok*: 1) *mając dwa boki i kąt między niemi zawarty*; 2) *mając przekątne i kąt między niemi zawarty* (fig. 59).

1) Kreślę kąt dany BAD, na jedném ramieniu odcinam jeden bok dany AD, na drugiém zaś drugi bok dany AB; przez koniec pierwszego boku D prowadzę

DC równoległą do boku drugiego AB, zaś przez koniec drugiego boku B, prowadzę BC równoległą do pierwszego boku AD, a figura AECD jest żądanym równoległobokiem (114).

2) Kreślę kąt dany AEB, na ramieniu BE. odcinam połowę jednéj przekątnéj, na drugiém ramieniu połowę drugiéj przekątnéj, i przedłużam je za wierzchołek E o ich wielkość, punkta A, B, C, D łączę prostemi i otrzymam równoległobok żądany (116, 3.).

b) *Romb*: 1) *mając bok i kąt*; 2) *dwie przekątne* (fig. 60).

1) Kreślę kąt dany, na obu ramionach odcinam bok dany i postępuję jak z równoległobokiem; 2) kreślę linie AD i BC pod kątem prostym, od punktu E ich przecięcia się na pierwszą przenoszę, w obie strony połowę pierwszéj przekątnéj, zaś na drugą, połowę drugiéj przekątnéj, a linie łączące punkta A, C, D, B dają romb żądany.

c) *Prostokąt*. 1) *mając dwa boki*; 2) *przekątną i kąt między niemi zawarty* (fig. 61).

1) jak w równoległoboku; tylko że kąt zawarty między bokami danemi jest prosty; 2) że przekątne są równe.

d) *Trapez symetryczny, mając wysokość i podstawy* (fig. 63).

Na linii nieograniczonéj odcinam wysokość KL, z punktów K i L prowadzę prostopadle BC i AD a z obu ich stron odcinam połowę podstaw; punkt A z B i C z D łączę prostemi, a figura jest żądaną (78. Wn. 3).

122. *Zt.* Klucze sklepienia (fig. 65) płaskiego, ciosane z kamienia, w przecięciu pionowém mają kształt trapezów. Środkowy jest trapezem symetrycznym, końcowe zaś prostokątnemi.

123. *Zt. Za pomocą równoległoboku można ruch postępowy i wsteczny po prostéj zamienić na ruch postępowy i wsteczny po kole t. j. na ruch wahadłowy i nawzajem.* (fig. 66).

Niech promieniem ruchu wahadłowego będzie AE, a przestrzeń przebiegana ruchem po prostéj dd' t. j. drąg jakikolwiek podnosi się i opada w ten sposób, że koniec jego przebiega tą linię. Chcąc za pomocą tego ruchu, nadać ruch wahadłowy przez środek J prostéj dd' prowadzę prostopadłą JE, na któréj od dowolnego punktu A' odcinam A'E, równe danemu promieniowi i tym promieniem z E kreślę łuk AA'A", zaś promieniem mniejszym EB' z tego samego środka, łuk BB'B". Z punktem d i d' prowadzę prostopadłe do dd', aż do spotkania się z łukiem AA'A" w punktach A i A" i do tych punktów prowadzę promienie EA i EA" przecinające łuk BB'B" w B i B". Na prostych równych sobie, jako różnice równych promieni, AB, A'B i A"B" kreślę równoległoboki, których bok drugi, równy prostéj AD, tak, aby jego koniec znajdował się na linii dd'. Równoległoboki te mają boki równe, przeto gdy boki te są ruchome około wierzchołków, równoległobok B"D" posuwając się z promieniem EA", mając wierzchołek D" na dd', zamieni się na równoległobok B'D', skoro promień EA" przyjmie położenie EA', zaś na równoległobok BD, wtenczas gdy promień przyjmie położenie EA.

Umieściwszy więc, na drągu obracającym się około E, równoległobok i przytwierdziwszy jego wierzchołek do końca podnoszącego się drąga dd', drąg ten przy podnoszeniu się swojém podnosić będzie drąg A"E opisujący końcem A" łuk A"A'A.

W czasie tego ruchu wierzchołek C" opisuje łuk C"C'C, którego środek jest w G. Chcąc więc ruch wahadłowy po A"A'A zamienić na ruch po prostéj dd', przytwierdzamy drąg GC", a w czasie obrotu promienia EA" po łuku A"A'A, wierzchołek D posuwać się będzie po prostéj dd'—Cięciwa AA" łuku wahadłowego równa się prostéj dd' (115, 6).

124. *Zt.* Za pomocą rombu można zamienić ruch po prostéj GH, na ruch po prostéj EF, prostopadłéj do jéj środka (fig. 67). Przez dowolny punkt D prostéj EF, i końce prostéj GH prowadzę linie, na których odcinam DC=DA i dopełniam rombu, którego wierzchołek B znajduje się także na EF (117). Boki rombu swobodnie mogą się obracać około wierzchołków, przybliżając więc końce G i H do środka téj linii, wierzchołek B posuwać się będzie po prostopadłéj EF.

Aby ruch wahadłowy po łuku GFH (fig. 68), zamienić na prosty Db, po prostopadłéj do środka cięciwy tego łuku; punkt D przytwierdzam nieruchomie, to w czasie przybliżania się punktu G i H do F romb

AC zwęży się i punkt B posunie się w górę po Db prostopadłéj do GH.

125. *Zt.* Jeżeli boki kwadratu (fig. 69), podzielimy na równe części i poprowadzimy linie równoległe do boków, to kwadrat podzieli się na kwadraciki, których przekątnie stanowią jedną linię AD, gdyż one połowią kąty kwadracików. Podobnie przekątne prostokątów, utworzonych z dwóch kwadracików, mających kąty przeciwległe, stanowią jedną prostą jak TR; to samo ściąga się do prostokątów złożonych z trzech kwadracików i t. d. Dla téj to przyczyny podobna szachownica używa się przy zasadzaniu ogrodów spacerowych, drzewa bowiem zasadzone w punktach przecięcia się, w każdym kierunku stanowią gęstszą lub rzadszą aleję. Szczotki druciane do czesania wełny robią się w podobny sposób.

C) *Własności wielokątów.*

126. Wielokątem wypukłym zowie się linia łamana wypukła, leżąca na płaszczyznie, lub część płaszczyzny, ograniczonéj tą linią łamaną. Trójkąt i czworokąt są także wielokątami, jeden o trzech, zaś drugi o czterech bokach. Nazwiska: kąt, boki, przekątnia, mają toż samo znaczenie jak w czworokącie. Wielokąt bierze nazwisko od liczby boków lub kątów, i tak zowie się *pięciokątem* lub *pięciobokiem* gdy ma pięć boków a tém samém i pięć kątów, *sześciokątem* i t. d. Wielokąty te są wielokątami pierwszego rzę-

du. Jeżeli ich boki oddzielone jednym bokiem, przedłużymy do spotkania się z sobą, otrzymamy wielokąt drugiego rzędu; gdy przedłużymy boki oddzielone dwóma bokami do spotkania się z sobą, otrzymamy wielokąt trzeciego rzędu i t. d. Stąd widzimy, że boki wielokątów są odcinkami ograniczonémi prostych leżących na płaszczyznie. Wielokąty zowią się foremne, gdy mają wszystkie boki i kąty sobie równe. Widzieliśmy już trójkąt i czworokąt foremny—trójkąt równoboczny był zarazem i równokątny, czworokąt mógł być równoboczny nie będąc równokątny jak romb. W każdym gatunku wielokątów jest jeden foremny i tak: otrzymamy pięciokąt foremny zestawiając wierzchołkami pięć trójkątów równoramiennych równych, których kąty przeciwległe podstawie są piątą częścią 2II—podobnie otrzymamy foremny sześcio-kąt, siedmiokąt i t. d.

Wielokąt zowie się parzystym, gdy ma parzystą liczbę boków, w przeciwnym razie zowie się nieparzystym. Wielokąty drugiego, trzeciego i t. d. rzędu otrzymane z wielokątów foremnych, zowią się *gwiaździstemi.* Oś symetryi tak jak w trójkącie i czworokącie, jestto linia dzieląca wielokąt na dwie części, przystające w czasie obrotu jednéj z nich około téj linii, t. j. mające boki i kąty równe w przeciwnym porządku.

127. *Tw. Summa kątów w wielokącie równa się tyle razy wziętym dwóm kątom prostym, ile on ma więcéj boków od dwóch.*

Poprowadziwszy bowiem z wierzchołka jednego z kątów przekątnie do wierzchołków nieleżących przy ramionach tego kąta, wielokąt podzieli się na tyle trójkątów, ile ma boków, mniéj dwa; a że w każdym trójkącie summa kątów równa się dwom kątom prostym, przeto we wszystkich trójkątach czyli w wielokącie summa kątów równa się dwom kątom prostym, tyle razy wziętym ile wielokąt ma boków mniéj dwa.

Wn. 1. *Summa kątów zewnętrznych wielokąta równa się* 2Π;—gdyż przy każdym wierzchołku kąt wewnętrzny z zewnętrznym równa się dwom kątom prostym, przeto summa kątów wewnętrznych z zewnętrznemi równa się dwom kątom prostym, tyle razy wziętym, ile wielokąt ma boków; a że wewnętrzne równają się Π wziętemu tyle razy ile wielokąt ma boków bez dwóch, przeto na zewnętrzne pozostaje Π wzięte dwa razy, czyli cztéry kąty proste.

Wn. 2. Jeżeli kąty w wielokącie są sobie równe, to wielkość każdego otrzymuje się dzieląc summę wszystkich kątów przez ich liczbę. I tak w trójkącie summa kątów równa się Π raz wziętemu, to kąt trójkąta równokątnego równa się $^2/_3$ kąta prostego, kwadratu $^4/_4=1$ kątowi prostemu, pięciokąta, $\frac{(5-2)2}{5}=\frac{6}{5}$ kąta prostego, sześciokąta, $\frac{(6-2)\times 2}{6}=\frac{8}{6}$ kąta prostego i t. d.

128. *Tw. W wielokącie foremnym* ABCD... *linie* AO, BO, CO... *połowiące kąty* A, B, C... *są sobie równe i przecinają się w jednym punkcie* O. (fig. 70).

Prowadzę linie AO i BO polowiące kąty A i B, one przetną się w punkcie O, gdyż summa kątów jednostronnych wewnętrznych, jako równa kątowi wielokąta, jest mniejsza od II, linie te są sobie równe, jako leżące naprzeciw kątów równych (91). Punkt O łączę z wierzchołkiem następnego kąta C, trójkąty AOB i BOC mające po dwa boki i po kącie zawartym równym,—OB wspólny, BA=BC jako boki wielok. for., kąty przy B równe z wykreślenia,—mają i kąt OAB= OCB, a że OAB jest połową kąta A, więc i OCB jest połową kąta C równego kątowi A, czyli linia OC połowi kąt C i jest równa linii OA. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że linie OD, OE... połowią kąty D, E... i są równe liniom OA, OB...

Wn. 1. Punkt O leży na połowiących kąty wielokąta, przeto jest równo oddalony od jego boków (102) czyli *prostopadłe wyprowadzone z punktu O na boki wielokąta są sobie równe, przytém prostopadłe te połowią boki,* jako w trójkątach symetr. (91. Wn. 3).

Wn. 2. Kąty zawarte między liniami połowiącemi kąty wielok. są sobie równe, gdyż leżą w trójkątach mających po trzy boki równe; prostopadłe zaś na boki połowią te kąty jako osie symetrycznych trój. (91 Wn. 3), zatém kąty zawarte między liniami po sobie idącemi, połowiącemi kąty a prostopadłemi połowiącemi boki są sobie równe a tém samém i kąty zawarte między prostopadłemi są także równe. Przytém kąty te są częścią 2II wyrażoną przez liczbę boków.

129. *Tw. od. Wielokąt jest foremny, gdy linie połowiące jego kąty są sobie równe i schodzą się w jednym punkcie* (fig. 70).

Linie OA i OB są sobie równe, przeto kąt OAB= OBA, a że one są połowami kątów A i B, przeto kąt A=B, podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i wszystkie kąty są sobie równe. Trójkąty AOB i BOC mające bok OB wspólny, kąty przy B równe z założenia i kąt OAB=OCB, jako połowy kątów A i C równych, mają bok AB=BC (97); podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i pozostałe boki są sobie równe.

130. *W wielokącie foremnym liczba osi symetryi równa się liczbie boków.*

1° W wiel. parzystym linie połowiące kąty przeciwległe, stanowią jedną linię prostą, bo liczba kątów zawartych między idącemi po sobie liniami połowiącemi kąty, z obu stron tych linii jest jednakowa, gdyż przeciwległe wierzchołki są oddzielone z obu stron jednakową liczbą boków: a że te kąty są sobie równe, przeto i summy ich z obu stron linii połowiących przeciwległe kąty są sobie równe i równają się II; linia ta jest osią symetryi, bo jedna połowa wielokąta obracana około niéj przystaje do drugiéj; liczba tych osi równa się połowie liczby boków. Linie prostopadłe do środków boków przeciwległych dla podanéj przyczyny składają jedną linię prostą będącą osią symetryi, i liczba ich równa się liczbie poprzedzających.

2° W wiel. nieparzystym linia połowiąca kąt z prostopadłą do środka boku przeciwległego, stanowią jedną linię prostą, gdyż liczba kątów zawartych między liniami po sobie idącemi połowiącemi kąty a prostopadłemi do środka boków jest jednakowa—one są osiami symetryi a liczba ich równa się liczbie wierzchołków.

131. *Zg. Narysować na danym boku wielokąt foremny* (fig. 70).

Wynajduje kąt wewnętrzny wielokąta foremnego i przy boku danym AB prowadzę linie BC, pod tym kątem; odcinam BC=AB i przy punkcie C kreślę kąt równy kątowi B i t. d.

132. *Zg. Na danym wielokącie ABCD.. opisać wielokąt o podwójnéj liczbie boków* (fig. 70).

Przedłużam prostopadłe OL, OK i t. d. tak aby one z przedłużeniem równały się liniom półowiącym kąty wielokąta, i koniec ich łączę z wierzchołkami wielokąta, tym sposobem utworzy się wielokąt foremny, o podwójnéj liczbie boków Wielokąt NEP..jest foremny, gdyż linie NO,EO,PO i t. d. równe z wykreślenia połowią kąty N, EP. i t. d.; trójkąty bowiem NLF i NLE tudzież NLE i EPK mające po dwa boki i po kącie zawartym prostym: pierwsze mają kąty przy N równe, a drugie kąt NEL=PEK (129).

133. Zg. *W dany wielokąt foremny* ABCD... *wpisać* 1) *wielokąt o téj samej*, 2) *o podwójnej i* 3) *o dwa razy mniejszéj liczbie boków* (fig 71).

1) Końce linii poławiących boki ręczę liniami prostemi, i otrzymam wielokąt żądany; linie bowiem Oa, Ob... połowią kąty a, b... i są sobie równe, gdyż trójkąty fOa i Oab mające po dwa boki: Oa wspólny, Of=Ob i kąty między nimi zawarte równe, mają i kąt Oaf =Oab.

2). Na liniach połowiących kąty, odcinam linie Og, Oh, równe liniom połowiącym boki i końce ich łączę z końcami linii połowiących boki, a tym sposobem otrzymam wielokąt żądany; linie bowiem Oa, Og Ob, są sobie równe zwykreślenia i połowią kąty a, g, b...bo trójkąty Apa, aBg, gBb, pierwszy z drugim mają kąt paA=gaB, zaś drugi z trzecim kąty przy g równe (92)

3). Łączę wierzchołki linii połowiących kąty, opuszczając jeden, i otrzymam wielokąt żądany; gdyż w trójkątach BAF i FED bok BF=FD (92); w trójkątach FOB i FOD kąt OFB=OFD (93) czyli linia FO połowi kąt F, dla podobnej przyczyny OD połowi kąt D zaś te linie są sobie równe.

134. *Zg. Na danym boku narysować sześciokąt foremny* (fig 70).

Kąt sześciokąta foremnego $= \frac{8}{6}$ kąta prostego

czyli $\frac{8 \times 90}{6} = \frac{720}{6} = 120^0$, kąt zaś trójkąta foremnego$=60^0$, jeżeli więc narysuje sześć trójkątów foremnych na danym boku, mających wierzchołek wspólny otrzymam sześciokąt żądany.

Albo na boku (fig 72) AB, trzy razy większym od boku danego, kreslę trójkąt foremny ABC i na każdy bok jego przenoszę bok sześciokąta trzy razy; podziały odpowiednie łączę prostemi, i otrzymam sześciokąt żądany. Boki jego są sobie równe, z foremności trójkątów Aaf eCd, Bbc; kąty zaś są równe, jako równe dwom kątom trójkąta foremnego.

135. *Zg. W dany kwadrat* ABCD *wpisać ośmiokąt foremny* (fig. 73).

Prowadzę przekątnie AC i DB, i na każdym boku odcinam połowę przekątnéj, zakreślając nią łuk z każdego wierzchołka; punkta podziałów: I z H, G z E i t. d. łączę prostemi i otrzymam wielokąt żądany.

Trójkąty prostokątne EDG, FCM i t. d. są równoramienne, gdyż przyprostokątne są różnicą między bokami kwadratu a połową przekątniej, przeto kąty ich ostre mają po 45^0; kąty więc G, E, F... wielokąta jako kąty zewnętne tych trójkątów prostokątnych równają się $90^0+45^0=135^0$, są więc kątami ośmiokąta foremnego Linie OA, OD.. połowią kąty kwadratu przeto kąt OAG$=45^0$, w trójkącie więc AOG, bok AO $=$AG zwykreślenia, przeto kąt O$=$G, a że summa ich równa 180^0-45^0 (80. Wn. 3) t. j. 135^0 przeto kąt HGO równa się połowie kąta HGE, a zatém linia OG połowi ten kąt, dla podobnej przyczyny linia OE połowi kąt E i t. d. Trójkąty OGE,OEF i t. d. są równoramienne, gdyż kąty ich OGE, OEG jako połowy kątów wielokąta G, E.. równych, są sobie równe, więc linie OG, OE.. są także równe; a że one połowią kąty i przecinają się w jednym punkcie O, przeto wielokąt GEFM.. jest foremny (129).

136. *Zg. Z danego wielokąta foremnego narysować wielokąt gwiaździsty* 2^0, 3^0, i t. d. *rzędu* (fig. 74)

Przedłużam boki opuszczając jeden i otrzymam wielokąt 2^0 rzędu a' b' c' d'... opuszczając dwa otrzymam wielokąt 3^0 rzędu a'' b'' c'' d''... i t. d Z ośmiokąta więc abc... można otrzymać dwa tylko wielokąty; gdyż opuszczając trzy boki będziemy mieli boki fe z ab i t. d. równoległe, a tém samem nieprzecinające się; liczba więc wielokątów gwiaździstych, tworzących się z wielokątów foremnych jest ograniczona.

137. *Zt. Rysowanie taflowych posadzek za pomocą wielokątów foremnych i czworokątów.*

Gdybyśmy miejsce około jednego punktu, zapełnić chcieli kątami wielokątów foremnych, moglibyśmy wziąć kąty tylko pewnej liczby tych wielokątów, gdyż dla zapełnienia miejsca, potrzeba najmniej trzech kątów, a ich summa powinna się równać 2Π. Zapełnić więc możemy tylko kątami trójkąta, kwadratu i sześciokąta, kąt bowiem pięciokąta ma 108^0 (127. Wn. 2); przeto 3 czynią mniej od 2Π t. j. 324^0, zaś cztery więcéj t. j. 432^0; trzy kąty siedmiokąta, a tém bardziéj wielokąty o więcéj bokach; czynią więcéj od 2Π. Lecz używając kątów, niejednego wielokąta, do zupełnienia miejsca około punktu, w większéj liczbie przypadków możemy zapełnić to miejsce. To nam służy za zasadę do układania taflowych posadzek z wielokątów foremnych, i tak:

a). Z trójkątów foremnych (fig. 75)

1). Na linii nieograniczonéj przenoszę od A do B bok Ah trójkąta, mającego być taflą, dowolną liczbę razy t. j. 5: na tej linii kryślę trójkąt foremny ACB (109, 2^0) i na boki Ac i BC przenoszę ten sam bok Ah. 2) Punkta odpowiednie podziałów łączą liniami prostemi: h z punktami a, i, i z punktem b i t. d. a otrzymam posadzkę żądaną. Trójkąty bowiem Aih, cCa, bBk, są foremne gdyż bok Ah=Ai przeto kąt i=h; a że kąt A=60^0, jako kąt trójkąta foremnego BCA (91. Wn. 2), więc kąt $i+h=180^0-60^0=120^0$, czyli każdy z nich ma po 60^0. Bok Ah=ca, jako bok trójkątów foremnych Aih i cCa, mających bok Ai=cC; linia Ac=ha, gdyż każda z nich zawiera w sobie 4 razy bok tafli, przeto czworokąt Acah jest równoległobokiem (116,2) zatém ma boki równoległe, dla podobnej przyczyny i czworokąty Cahi, aCkb, caBk bBhi, bkAi są równoległobokami, i mają boki równoległe. Lecz że trójkąt hil jest foremny, jako równy trójkątowi Aih, gdyż czworokąt Al jest równoległobokiem (114); i trójkąt lid jest także foremny, jako mający boki id i il równe, kąt zaś i=A (78) jest kątem trójkąta foremnego. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że i drugie z porządku linie są równoległe do boków trójkąta i t. d., przeto boki utworzonych trójkątów są równe bokom trójkąta Aih, idl i t. d., jako równoległe zawarte między równoległemi (115, b). Posadzka taka jest nietrwała, gdyż sześcią kątami zapełniamy miejsce około jednego punktu.

Czworokąty Ailh, iled... są rombami, gdyż przekątnia Al prostopadła do przekątniéj ih (91. Wn. 4); przeto chcąc pokryć posadzkę taflami mającemi kształt rombu, łączymy podziały h z a.... i z b...; lub z rombami niezawartemi między równo liniami ległemi jak hilg i dile, i wtedy łączymy h z i.... i z b...

Sześciokąt defghi jest foremny, jako składający się z sześciu trójkątów foremnych (126); otrzymamy posadzkę złożoną z tafli sześciokątnych, gdyż boki trójkątów zrysowanych ołówkiem, naprowadzimy tuszem, opuszczając dwa.

Posadzka taka jest trwała, gdyż w niéj najmniejsza liczba kątów wchodzi do zapełnienia miejsca około jednego punktu.

Z tychże trójkątów otrzymamy posadzkę złożoną z sześciokątów i trójkątów (fig. 76), i miejsce około jednego punktu zapełniać się będzie dwoma kątami sześciokąta i dwoma trójkąta: jeżeli opuszczając jeden, naprowadzimy boki trójkąta, sześciokąt kagbhi z trójkątami bhl i hib. Przytém możemy jeszcze otrzymać w środku posadzki sześciokąt gwiazdzisty abcdef.

Otrzymamy zaś posadzkę złożoną z sześciokątów i rombów (fig. 77): jeżeli opuszczając jeden bok trójkąta inne naprowadzimy tuszem tak, aby boki naprowadzane leżały nad sobą. Miejsce przy jednych punktach c, d.. zapełnia się trzema kątami, a przy drugich b, e.. czterema.

b) *Z kwadratów, prostokątów i rombów.*

1) Przenoszę połowę boku kwadratu na długość, zaś cały bok kwadratu na szerokość prostokąta BAC (fig. 78), mającego się zapełnić kwadratami; przez podziały szerokości AC prowadzę linie ciągnione, równoległe do AB, zaś przez podziały długości AB przerywane, równoległe do AC i utworzy się posadzka żądana, gdyż czworokąty utworzone przez te linie mają boki równe z odcięcia i kąty proste, jako równe kątom prostokąta (78. Wn. 9).

2) *Z prostokątów. Albo*: podobnie jak z kwadratów, przenosząc połowę podstawy na AD (fig. 79), zaś wysokość na AB. *Albo*: jeżeli prostokąty mają iść w zygzak (fig. 80), na prostokącie ABCD mającym się pokryć prostokącikami, odcinam DF i CE równe wysokości DC, to czworokąt FDCE jest kwadratem a przekątnie jego FC i DE są prostopadłe (118. Wn. 2). Od punktu G, przecięcia się przekątnich, przenoszę na nie w obie strony wysokość prostokąta, będącego taflą, a przez punkta ztąd otrzymane jednéj, prowadzę ołówkiem linie równoległe do drugiéj; tym sposobem prostokąt ABCD podzieli

się na kwadraciki, mające za bok wysokość tafli.—Na przekątnię FC przenoszę podstawę tafli i przez punkta ztąd otrzymane prowadzę OH, JK... równolegle do AD. Proste równoległe do przekątniéj FC, naprowadzam tuszem aż do prostéj OH, poprowadzonéj ołówkiem; proste równoległe do ED, naprowadzam tuszem od prostych poprzednio naprowadzonych gf, hi... do JK i t. d. Lecz w takim kreśleniu podstawa tafli powinna być dwa, trzy i t. d. razy większa od wysokości, inaczéj proste OH, JK.. niebyłyby przekątniemi kwadracików, a tém samém nie leżałyby na nich kąty prostokątów. W tym przypadku naprowadzamy tuszem proste równoległe do ED, zawarte między AD i OH, a następnie przez punkta e, f, g, h, i.. prowadzimy równolegle do FC, zawarte między linią leżącą pod punktami f, i.. a prostą JK; i t. d.

3) *Z rombów.* Kreślę ołówkiem posadzkę, złożoną z trójkątów foremnych, mających bok tafli rombowéj a potém naprowadzam boki tuszem, opuszczając trzeci (fig. 81); posadzka ta jest zarazem gwiaździstą, gdyż romby po sześć schodzą się w jednym punkcie F, G, J... i jest zarazem złożona z sześciokątów, które można uwidocznić przy układaniu tafli.

c). *Z ośmiokątów i kwadratów* (fig. 82). Na podstawie i wysokości prostokąta AC, mającego zapełnić się taflami, odcinam oś symetryi tafli, łączącą środki boków równoległych, i przez punkta ztąd otrzymane jednego boku, prowadzę linie równoległe do boku drugiego, tym sposobem otrzymałem kwadraty, w które po wpisywać należy ośmiokąty foremne (135). Dla skrócenia roboty, po wpisaniu w pierwszy kwadrat AK, ośmiokąta aefMo... przenoszę linię Aa w obie strony, od każdego wierzchołka kwadratu F,H...q,f i punkta czg, dzh i t. d. łączę prostemi przerywanemi tak, aby ciągnione były zawarte między leżącemi przy sobie bokami kwadracików.

d). *Z dwunastokąta* i trójkątów foremnych (fig. 83). Na boku danym dwunastokąta AC, kreślę trójkąt foremny ABC, prowadzę oś jego symetryi DB, i na jéj przedłużeniu odcinam BE=AC i EF=BD. Z punktu E wyprowadzam HG prostopadłą do EF, i odcinam FG i FH równe połowie AC a trójkąt EHG, jest także foremny, jako przystający po położeniu podstaw do trójkąta ABC i t. d. Wielokąt tym sposobem utworzony eBEg...jest foremny, gdyż z wykreślenia ma boki równe, kąty zaś jego B, D... równają się II bez połowy kąta trójkąta foremnego t. j. $180^o-30^o=150^o$, jak w dwunastokącie.

D) *Odcinki zbiegających się połączonych z równoległémi czyli proporcyonalność linii.*

138. *Tw. linie równoległe* EF,GH,IK *dzielące jedną ze zbiegających się* AB, *na odcinki* EG i GI *równe, dzielą także i drugą* CD *na odcinki równe* FH i HK (fig. 84).

Przez punkta E i G prowadzę EL i GM, równoległe do CD (81), to EL=FH i GM=HK (115 b). Trójkąty GEL i JGM mające EG=GI, kąt EGL=GIM jako jednostronne względem poprzecznéj AB, równoległych GH i IK; kąt GEL=IGM, jako jednostronne, równoległych EL i GM (78 Wn 2), względem téj samej poprzecznéj;—mają i bok EL=GM, a tém samém FH=HK.

Wn. Jeżeli odcinek BG > GI, to i odcinek CH > HK. Prowadzę równoległe BN=CH i GM=HK, biorę GE=GI i prowadzę EF równolegle do GH, to EL =FH jest mniéjsze od CH, aże EL=GM=HK, przeto i HK < CH. *Równoległe* więc *dzieląc jedną ze zbiegających się* AB *na części nierówne, dzielą także i drugą tak, że naprzeciw większego odcinka jednéj, leży odcinek większy drugiéj.*

139. *Tw. gł. Odcinki* EG, GI FH, HK *zbiegających się* AB i CD, *utworzone przez równoległe* EF, GH i IK *są proporcyonalne;* czyli *stosunek odcinków* EG i GJ *jednéj linii, równa się stosunkowi odcinków* FH i HK *drugiéj linii* CD (fig. 85).

Odcinki EG i GI nie są równe i odcinek EG > GI, więc i odcinek FH > HK (138. Wn). Przenoszę odcinek IG na EG; zawiera się on w nim od G do L cztery razy i pozostaje LE < GI, przez punkta a,b,c, powstałe z przenoszenia odcinka G prowadzę równolegle do GH, aż do przecięcia się z drugą linią CD w punktach a', b', c', odcinki Ga, ab, bc i cL równają się odcinkowi IG, przeto i odcinki Ha', a'b', b'c', c'M równają się odcinkowi HK (138), lecz że odnek EL < GI, więc i odcinek FM < HK 138. Wn.),— a zatém ile razy odcinek IG zawiera się w GE, tyle razy i odcinek HK zawiera się w odcinku HF. Odcinek LE przenoszę na IG i zawiera się w nim dwa razy od I do e; przez punkta d i e prowadzę równoległe do HJK: odcinki Id, de równają się odcinkowi EL przeto i odcinki Kd'; d'e' są równe odcinkowi MF, odcinek zaś eG ≺ EL to i e'H ≺ MF,—a zatém ile razy reszta LE zawiera się w linii GI od któréj przenoszenia wypadła, tyle razy i reszta MF zawiera się w linii KH od któréj przenoszenia wypadła,... i t. d. Stosunek więc odcinka GE do IG taką samą wyraz się liczbą jak i stosunek odcinka HF do kH (11), przeto stosunki te są sobie równe (14) i składają proporcyą: EG: GI=FH: HK.

Wn. 1. Punkt zbiegu jest dowolny, przeto może być albo na jednéj ze skrajnych równoległych (fig. 86), albo na środkowéj (fig. 87): w pierwszym razie (fig. 86) stosunek odcinków IG i GB równa się stosunkowi odcinków KH i HB, czyli te odcinki są proporcyonalne, co się wyrazi: *w trójkącie* IBK *linia* GH *równoległa do podstawy, dzieli boki* IB i KB *trójkąta na części proporcyonalne* JG: GB=KH: HB, co można wprost dowieść podobnie jak dowiedliśmy twierdzenie,—w drugim razie (fig 87) stosunek odcinków IB i BF równa się stosunkowi odcinków BK i BE, co się wyrazi: *jeżeli dwie linie zbiegające się przetniemi dwoma liniami równoległemi, z przeciwnych stron punktu ich zbiegu, to one podzielą się na części proporcyonalne* IB: BF=KB: BE, co wprost można dowieść prowadząc FL równolegle do EK, bo podług pierwszego przypadku IB: BF= LH: HF, zaś LH=KB HF=BE (115,b).

Wn. 2. I nawzajem: *W trójkącie* (fig. 86) IBK *linia* GH *dzieląca boki trójkąta na części proporcyonalne jest równoległa do podstawy* IK. Jeśliby linia GN była równoległa do IK, to BG:GI=BN:NK, lecz z założenia BG:GI=BH:HK, w tych proporcyach pierwsze stosunki są sobie równe, więc i drugie jako im równe, byłyby także sobie równe t. j. BN: NK=BH: HK, co być nie może, gdyż BN > BH zaś NK < HK; azatém linia GN nie może być równoległą do JK. Podobnie *linie leżące z przeciwnych stron przecięcia się dwóch linii dzieląc te linie na części proporcyonalne, są względem siebie równoległe.*

Wn. 3. W trójkącie (fig. 86) JBK, linia GH równoległa do podstawy, dzieli boki trójkąta na części proporcyonalne t. j. JG: GB=KH: HB; w proporcyi téj można robić odmiany tak co do miejsca, jako téż co do wartości, mianowicie przez dodawanie, przeto: BG: GJ=BH: HK lub téż BG: BH=GJ: HK;—tudzież BG+GJ: JG=KH+HB: HK, czyli JB: JG=KB: KH t. j. *boki mają się do siebie jak odcinki*, i t. p. W proporcyi twierdzenia EG: GJ=FH: HK można robić podobne przemiany, tak co do miejsca, jako téż i co do wartości.

Wn. 4. *W trójkącie* ABD *linie* LM, JK, GH *równoległe do podstawy, dzielą boki trójkąta na części proporcyonalne*, gdyż stosunek BG do BH równa się stosunkowi GJ do HK (Wn. 2), a ten ostatni równa się stosunkowi JL do KM i t. d., przeto wszystkie stosunki są sobie równe i składają proporcyą ciągłą BG:BH

=GJ: HK=JL: KM=LA: MD czyli BG: GJ: JL: LA= BH: HK: KM: MD.

Wn. 5. *Odcinki* JK i GH *równoległych są proporcyonalne do odległości ich końców* J, G lub K, H od *punktu zbiegu* B, *lub też do odległości* RB i PB *samych równoległych* JK i GH *od tego punktu* B(fig. 86).

Co do pierwszego: Prowadzę równoległą GO do BK, to JK: OK = JB: GB: zamiast OK biorąc GH (115, 6) i otrzymuję JK: GH=JB: GB.—Jeśliby punkt zbiegu B był między równoległemi (fig. 87), to poprowadziwszy FL równolegle do EK, mamy: JK:KL =JB: BF; zamiast KL biorąc EF będzie JK: EF=JB: BF. *Co do drugiego*: Prowadzę z punktu zbiegu B prostopadłą BR (fig. 86) do równoległych JK i GH (78. Wn. 7), to stosunek linii BR do BP równa się stosunkowi linii JK do GH gdyż każdy z nich równa się stosunkowi BJ do BG, a przeto złożą proporcyę JK: GH=BR: BP.

Wn. 6. *Linie równoległe* AB i CD *dzielą się na części proporcyonalne, przez poprzeczne* EA, Ea, Eb, EB *wychodzące z jednego punktu* E (fig. 88); stosunek linii Aa i Ca', równie jak i stosunek linii ab i a'b', jako równe stosunkowi linii Ea i Ea', są sobie równe: podobnie stosunek linii ab i a'b' jest równy stosunkowi bB i b'D, gdyż każdy z nich równy stosunkowi Eb do Eb'; a zatém trzy stosunki Aa do Ca', ab do a'b' i bB do b'D są sobie równe i składają proporcyą ciągłą Aa: Ca'=ab: a'b'=bB: b'D.

Wn. 7. *Dwa trójkąty* ABC i FGH *mające po kącie równym i po dwa boki zawierające ten kąt propor-*

cyonalne, BA: GF=BC: GH, *mają i pozostałe kąty leżące naprzeciw boków proporcyonalnych, równe* A=F i C=H, *tudzież boki trzecie* AC i FH *w tym samym co dwa pierwsze stosunku* (fig. 89); przeniosłszy bowiem trójkąt FGH na ABC, tak aby kąt G przystał do kąta B równego sobie, punkta F i H padną na bokach AB i BC w punktach D i E; trójkąt DBE z trójkątem FGH mają boki i kąty równe (92). przeto BA: BD= BC: BE i linia DE jest równoległa do AC (Wn. 2), a tém samém kąt BDE=A i BED=C (78), tudzież AC: DE=AB: BD (Wn. 5).

Wn. 8. *Trójkąty* ABC i FGH *mające kąty równe* B=G, A=F, C=H *mają i boki naprzeciw tych kątów leżące proporcyonalne* AC: FH=BC: GH=AB: FG (fig. 89); przeniosłszy bowiem trójkąt FGH na ABC tak, aby kąty równe przystały do siebie, punkta F i H padną na boki tego trójkąta w D i E, i trójkąty DBE i FGH mające po kącie i po dwa boki z przeniesienia równe, mają wszystkie boki i kąty równe (92); lecz że kąt A=F=BDE, przeto linia DE równoległa do AC (77), a zatém AC: DE=BC: BE=AB: BD (Wn. 5), DE=FH, BE=GH, BD=GF; wstawiając za DE, BE, BD równe im linie, będzie: AC: FH=BC:GH= AB: FG.

Uw. Ztąd widzimy, że jeżeli jakakolwiek liczba zbiegających się przecina się z równoległemi, to odcinki ztąd wynikłe tak zbiegających się, jako i równoległych, są względem siebie proporcyonalne; odcinki zaś równoległych są zarazem proporcyonalne do odległości ich końców od punktu zbiegu.

140. *Tw. od: Jeżeli dwie zbiegające się* AB i CD *przecięte dwoma równoległemi* EF i GH, *przetniemy linią trzecią* JK *tak, że odcinki* JG i HK *przez nią utworzone są proporcyonalne, do odcinków zawartych między równoległemi, to linia ta* JK *jest równoległą do dwóch pierwszych* EF i GH (fig. 85).

Gdyby linia JK nie była równoległą do GH to byłaby inna linia JN równoległą, przeto EG: GJ=FH: HN a że z założenia EG: GJ=FH: HK przeto HN równałoby się HK, co być nie może.

141. *Tw. Przeciwprostokątnia* BC *przez prostopadłę* AD *wyprowadzoną z wierzchołka kąta przeciwległego dzieli się na dwa odcinki, tak że:* 1) *ramiona kąta prostego są średnio-jeometrycznie-proporcyonalne między przeciwprostokątnią a odcinkami przyległemi t. j.* BC: AC=AC: CD; 2) *prostopadła* AD *jest średnio-jeometrycznie-proporcyonalna pomiędzy dwoma odcinkami t. j.* CD: AD=AD: DB; 3) *przeciwprostokątnia tak się ma do jednego z ramion jak drugie ramię do prostopadłej* (fig. 90).

1) Trójkąty prostokątne ABC i ADC, mają kąt C wspólny, przeto jako równokątne mają boki proporcyonalne i BC: AC=AC: CD (40 Wn. 8), boki pierwszego stosunku leżą naprzeciw kątów prostych(43), drugiego zaś naprzeciw kątów równych B i DAC spełniających kąt C (46. Uw. 2).

2) Trójkąty prostokątne BAD i DAC mające kąty równe (gdyż kąt B=DAC), mają i boki proporcyonalne t. j. CD: DA=DA: DB; boki składające pier-

wszy stosunek leżą naprzeciw kątów równych DAC i B, zaś drugi, naprzeciw kątów równych C i DAB, jako spełniających pierwsze.

3) Trójkąty BAC i DAC równokątne mają boki odpowiednie proporcyonalne, przeto BC: AC= BA: AD, boki pierwszego stosunku leżą naprzeciw kątów prostych, zaś drugiego naprzeciw kąta wspólnego C.

Wn. 1. *Kwadrat* z liczebnéj wartości *przyprostokątniéj* AC *równa się iloczynowi* z liczebnych wartości *przeciwprostokątniéj* CB *przez odcinek* CD *leżący przy tym boku* t. j. $\overline{AC}^2 = BC.DC$, gdyż w proporcyi BC: AC=AC: CD iloczyn średnich równa się iloczynowi skrajnych; podobnie $\overline{AB}^2 = BC.BD$;—zatém $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC.DC + BC.BD$ czyli $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC(DC + BD) = BC.BC = \overline{BC}^2$ t. j. *kwadrat* z liczebnéj wartości *przeciwprostokątniéj równa się summie* podobnych *kwadratów z ramion kąta prostego.*

Wn. 2. *Kwadrat* z liczebnéj wartości *prostopadłéj na przeciwprostokątnią, równa się iloczynowi* z liczebnych wartości *odcinków przeciwprostokątniéj*, gdyż w proporcyi CD: AD=AD: BD iloczyn średnich równy iloczynowi skrajnych t. j. $\overline{AD}^2 = CD.BD$.

Wn. 3. *Kwadraty* z liczebnéj wartości *przyprostokątnich mają się do siebie* jak odcinki im przyległe; gdyż $\overline{AB}^2 = BC.BD$ i $\overline{AC}^2 = BC.DC$ przeto $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BC.BD : BC.DC$ czyli $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$. *Kwadrat z przeciwprostokątniéj tak się ma do kwadratu z przy-*

prostokątniéj jak przeciwprostokątnia do odcinka przyległego temu bokowi, w proporcyi bowiem $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC$, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 : AC^2 = BD + DC : DC$ czyli $\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : DC$.

Wn. 4. *Kwadrat z odcinka, tak się ma do kwadratu z prostopadłéj, jak ten odcinek do drugiego odcinka*, gdyż $\overline{AD}^2 = CD.DB$ i $\overline{CD}^2 = CD.CD$, przeto $\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 = CD.DB : CD.CD$ czyli $\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 = BD : CD$.

142. *Tw. W trójkącie* BAC *linia* AD *połowiąca kąt* A *wewnętrzny lub zewnętrzny, dzieli bok przeciwległy* BC *na dwa odcinki* BD i DC *proporcyonalne do boków* AB i AC *przy nich leżących* AB: AC= BD: DC (fig. 91).

1) Prowadzę z wierzchołków B i C prostopadłe BE i CF na połowiącą AE, trójkąty prostokątne BAE i ACF, mające kąty równe przy A z założenia, mają boki proporcyonalne: AB: AC=BE: CF (139. Wn. 8), dla podobnéj przyczyny trójkąty BED i DFC mają boki proporcyonalne t. j. BE: CF = BD: DC; w tych dwóch proporcyach dwa stosunki są równe, przeto i dwa drugie są także równe i składają proporcyą AB: AC=BD: DC.

2) *Linia* AD' *połowiąca kąt zewnętrzny* GAC, *dzieli także podstawę na dwa odcinki* D'B i D'C *proporcyonalne do boków im przyległych* AB i AC. Summa kątów BAC i CAG równa dwom kątom prostym, przeto połowa ich DAC+CAD=kątowi prostemu, czyli połowiąca AD kąt zewnętrzny, jest prostopadłą do

połowiącéj AD kąt wewnętrzny, połowiąca więc AD' wtedy tylko nie przetnie się z przedłużeniem podstawy BC, kiedy połowiąca AD kąt wewnętrzny A jest prostopadłą do podstawy, gdyż kąty jednostronne D'AD i D'DE, jako proste byłyby równe (75), t. j. gdy trójkąt ABC jest równoramienny (91. Wn. 3); w każdym zaś innym razie połowiąca AD' przecina przedłużoną podstawę BC w punkcie D'. Z dwóch innych wierzchołków B i C prowadzę prostopadłe BE' i CF' na E'D' połowiącą kąt zewnętrzny GAC; trójkąty ABE' i ACF' mające kąty równe, mają boki proporcyonalne t. j. AB: AC=BE': CF', podobnie trójkąty E'D'B i F'D'C dają: BE': CF'=D'B: D'C, aże dwa stosunki są jednakowe, przeto dwa drugie, jako im równe, są sobie równe i złożą proporcyę AB: AC =D'B: D'C.

143. *Uw.* Stosunek boków trójkąta równa się stosunkowi odcinków podstawy, utworzonych tak przez AD połowiącą kąt wewnętrzny BAC, jak i przez AD' połowiącą kąt zewnętrzny GAC, przeto stosunek pierwszych odcinków równa się stosunkowi drugich, czyli odcinki te są proporcyonalne t. j. DB: DC=D'B: D'C. *Punkta* D i D' *dzielące linie* BC *na odcinki proporcyonalne, zowią się punktami sprzężonemi*, linia zaś BC jest podzielona *harmonijnie* przez punkta D i D' i *proporcya* DB: DC=D'B: D'C zowie się *harmonijną* i w téj proporcyi biorąc poprzednik do poprzednika, zaś następnik do następnika, będzie BD: BD'=CD: CD' linia więc DD' przez punkta B i C jest podzielona *har-*

monijnie, czyli *punkta* B, C, D, D' są *harmonijne. Linie zbiegające się w jednym punkcie* AB, AC, AD i AD' *i dzielące linię* BC *harmonijnie, zowią się promieniami harmonijnemi*, AD względem kąta BAC, zaś AC względem kąta DAD', *wszelka linia przecinająca promienie harmonijne, jest podzielona harmonijnie*, gdyż warunkiem harmonii było to, aby AD połowiło kąt BAC, zaś AD' było do niéj prostopadłem, co i przy każdéj innéj podstawie ma miejsce.

Jeżeli promień harmonijny AD *połowi kąt* BAC, *to promień z nim sprzężony* AD' *jest do niego prostopadły.*

144. *Zg. Daną linię prostą* AB *podzielić na ilekolwiek części równych np. na pięć* (fig. 92).

1o. Przez koniec A danej linii prowadzę prostą AG i przenoszę na nią dowolną linią pięć razy od A do G; punkt E z B łączę prostą GB, zaś przez punkta F, E, D, C prowadzę równolegle FH, EJ.. do GB, które dzielą linię daną na części równe (138).

Sposób ten jest dogodny gdy równoległe prowadzą się zapomocą węgielnicy rysunkowej (81, 3).

2*re*. Odciąwszy na linii AG części równe, przez punkt B prowadzę BP równoległą do AG i przenoszę od punktu B linię, równą przenoszonéj na AG; punkta podziałów połączone prostemi FM, EP i t. d. dają linie równoległe do BG, gdyż czworokąty EB, EM są równoległobokami (116), przeto linia AB jest podzielona w punktach H, J K, L na części równe.

3*ie*. Do linii danéj AB (fig. 93) prowadzą równoległą CD, i odcinam na niej od C do D pięć części równych, koniec danej linii AB z końcami linii CD łączę prostemi, które przetną się w punkcie J, jeśli AB nie jest równa CD (116,4); linie łączące punkt J z podziałami linii CD, dzielą AB na części równe, gdyż w jakim stosunku są odcinki linii CD, w takim samym stosunku są odcinki linii AB (139. Wn 6), aże odcinki linii CD są sobie równe, przeto i odcinki AK,KL.. linii AB są sobie równe.

4*te*. Daną linię AB podzielić na trzy równe części (fig, 94). Prowadzę linię AC i odcinam na niéj od punktu A do C cztery części równe t. j. o jedną więcéj aniżeli linia AB ma mieć części, koniec ostatniego podziału z drugim końcem danej linii łączę prostą CB i przenoszę na jej przedłużenie od punktu B linię CB trzy razy t.j. tyle, na ile części ma być podzielona linia AB; punkta odpowiednie linii CA i CK łączę prostemi, a te podzielą linię AB na równe części, gdyż linie HJ, MG i NA są równoległe jako dzielące linie CA i CN na części proporcyonalne, — przeto linie BA i BN są przecięte równoleglemi HJ, MG i NA, a że linia BN jest podzielona na części BH, HM i MN równe, więc i linia BA jest także podzielona na części BL, LK i KA równe (138).

145. *Zg. Przez punkt dany* C *poprowadzić linię równoległą do* AB, *nieużywając kątów*(fig.95).

Punkt C z punktem A łączę linią prostą, przez środek E téj linii prowadzę prostą EB, przecinającą daną linię w B, i na jéj przedłużeniu odcinam ED=EB, a linia CD jest żądaną, gdyż linie AC i DB są podzielone na części proporcyonalne (139. Wn. 2).

Podobnym sposobem prowadzi się równoległa na gruncie.

146. *Zg. Do trzech linii danych* A, B, C *znaleść czwartą proporcyonalną* t. j. oznaczyć wielkość nieznanéj linii x takiéj aby A: C=B:x (fig. 96).

Prowadzę dwie zbiegające się DE i DF, na jedną przenoszę linię A od D do G, linię B od GH, na drugiéj zaś, linię C od D do J; punkt G z J łączę prostą GJ i przez punkt H prowadzę do niéj równoległą HK a linia JK jest żądaną, gdyż DG:GH=DJ:JK (139. Wn. 3), czyli A: B=C:JK, przeto x=JK.

Jeśliby linia szukana nie była czwartym wyrazem proporcyi, to za pomocą zmiany miéjsca w proporcyi, możemy zrobić ją czwartym wyrazem.

Proporcya A. B=C: x daje $x=\frac{B.\ C}{A}$ przeto znajdując x *wykreślimy stosunek iloczynu dwóch linij do linii trzeciéj*, stosunek ten jest linią, gdyż stosunek $\frac{B}{A}$ jest liczbą, przez którą pomnożone C (10) daje linię żądaną x, i tak jeśli $x=\frac{5}{3}C$, to linię C podzielilibyśmy na 3 części, a pięć tych części byłoby linią żądaną x.

Jeżeli linia B=C, to tym sposobem *do dwóch linii* A i B *znajdziemy trzecią proporcyonalną* (fig. 97).

147. *Zg. Daną prostą* AC *podzielić w stosunku danym* (fig. 98).

Przez końce A i C danéj prostéj AC prowadzę dwie równoległe AB i CD w przeciwnym kierunku; jeżeli stosunek jest dany w liniach, to jedną z nich przenoszę od A do B, a drugą od C do D, jeżeli zaś w liczbach np. 3:2 na AB przenoszę dowolną linię trzy razy od A do B, a na CD tę samą linię dwa razy od C do D, punkt B z D łączę prostą BD i ona podzieli linię AC w stosunku żądanym, gdyż AE: EC= AB: CD (139. Wn. 5), przeto stosunek linii AE i EC równa się albo stosunkowi linii danych, albo stosunkowi 3 i 2, bo AB ma takich linii trzy jakich CD dwie (12).

148. *Zg. Dane proste* a, b, c *podzielić razem na trzy części równe* (fig. 99).

Na linii AB większéj od każdej z linji danych odcinam trzy równe części od A do B i kreślę trójkąt foremny (109. 2°); od punktu C na dwóch innych bokach odcinam linie dane CF=CJ=a, CE=CH=b, CD=CG=c; linie więc FJ, EH i DG są równoległe, gdyż w trójkącie CEH, linia DG dzieląca boki trójkąta na części proporcyonalne jest równoległą do podstawy (139. Wn. 2), podobnie EH równoległa do FJ zaś FJ do AB. Linia FJ równa się linii a, gdyż AB: AC=FJ: FC (139. Wn. 5); aże AB=AC z wykreślenia przeto i FJ=FC, lecz FC=a to i FJ=a, podobnie EH =b, DG=c. Punkt C z punktami K i L łączę prostemi, a linie równoległe dzielą się przez nie na części proporcyonalne do odcinków linii AB (139. Wn. 6), a tém samém na części równe.

149. *Zg. Przez punkt dany* A *w kącie* BCD *poprowadzić prostą połowiącą się w tym punkcie* (fig. 100).

Przez punkt A prowadzą linię AE równoległą do jednego z ramion CD, przecinającą się z drugiém ramieniem w punkcie E, odcinam EF=EC, a linia FA jest żądaną, gdyż równoległe GC i AE dzieląc jedną zbiegającą się EF na części równe, dzielą także i drugą FG (138).

150. *Zg. W trójkącie równoramiennym* BAC *poprowadzić równoległą tak, aby odległość końcu jej odcinka od końca odpowiedniego podstawy, równała się odcinkowi równoległej* (fig. 101.)

Przedłużam podstawę BC tak, aby to przedłużenie CD równało się ramieniowi AC, punkt A z D łączę linią prostą AD i przez wierzchołek C prowadzę do niej równoległą CE, a ona na drugim boku wyznacza punkt E, przez który poprowadzona równoległa EF EF jest żądaną; poprowadziwszy FG równolegle do AD, linia EF=CG, jako równoległe zawarte między równoległemi (115, 6); lecz CD=CA z wykreślenia, przeto CG=CF; aże AC=AB założenia więc i FC=EB (139. Wn. 3), odcinek zaś CF=CG=EF przeto odcinki te równe odcinkowi EF równoległej.

151. *Zg. Do dwóch danych* a i b *znaleźć średnio-jeometrycznie-proporcyonalną* (fig. 102).

Na linii nieograniczonej odcinam linię *a* od B do D zaś *b* od D do C, z punktu D wyprowadzam prostopadłą, która ma przechodzić przez wierzchołek trójkąta prostokątnego, lecz że wierzchołek trójkąta prostokątnego znajduje się od środka przeciw prostokątnéj BC w takiéj odległości, jak końce B i C (107), przeto ze środka S prostej BC zakreślam łuk przecinający prostopadłą w A i linia DA jest żądaną gdyż w trójkącie prostokątnym BAC mamy, BD: DA =DA: DC (141. 2).

152. *Zg. Daną linię prostą* BC *podzielić harmonijnie* (fig. 91).

Na linii danéj BC kreślę trójkąt nierównoramienny BAC, połowię kąt A i do połowiącéj DA, przez punkt A prowadzę prostopadłą AD', a punkta D i D' są sprzężone i dzielą harmonijnie linię BC (143).

153. *Zt.* W przerysowywaniu figur często potrzeba je zmniejszać lub powiększać, przyczém linie proste, łączące odpowiednie wierzchołki narysowane lub wyobrażalne, powinny być jednakowo powiększane lub zmniejszane.

Stosunek linii przerysowanéj figury lub przedmiotu do linii kopii, może być liczebny lub linijny, b) niewiele lub wiele różniący się od jedności. Dla znalezienia każdej linii kopii odpowiedniéj linii figury potrzeba by do dwóch linii wyrażających stosunek i do każdéj z linii figury, szukać czwartej jeometrycznie proporcyonalnej. Dla uniknienia tego, jeżeli dany stosunek nie bardzo różni się od jedności, używamy.

1° *Kąta przywiedzenia* (angle de réduction). Jeżeli potrzeba aby linie proste figury do linji kopii były w stosunku prostych a : b lub liczby 5 : 2 co na jedno wychodzi, gdyż wtedy linia *a* zawierałaby 5 takich części, jakich *b* dwie; — to na linii nieograniczonéj od A do D (fig. 103) odcinam linię *a*, z punktu D promieniem *b* zakreślam łuk, zaś z punktu A promieniem *a* przecinam ten łuk w punkcie C, linia więc *b* nie może być dwa razy większą od linii *a*, gdyż koła nie przecięłyby się; punkt C z punktami A i D łączę prostemi i kąt CAD jest kątem przywiedzenia. Odcinki AD i AC są sobie równe, przeto i odcinki AE i AF utworzone przez wszelką równoległą EF do CD, jako będące w tym samym co odcinki AD i AC stosunku, są sobie równe. *Dla znalezienia linii odpowiedniéj prostéj* n *figury, przenoszę tę linię od wierzchołka* A *na ramiona kąta* CAD *przywiedzenia, a drugie ich końce* F i E *są końcami linii szukanej*; gdyż linie AE i AF, tak jak linie AD i AC, są sobie równe przeto stosunki ich jako równe jedności są jednakowe i one składają proporcyę, a tém samém linie DC i EF są równoległe (139. Wn. 2); a zatém stosunek prostych AD i DC równa się stosunkowi prostych AE i EF czyli linia EF jest w danym stosunku do linii *n*.

2re Żeby nie rysować za każdym razem kąta przywiedzenia, używamy w tym celu *cérkla proporcyonalnego*. Narzędzie to składa się z dwóch metalicznych liniałów złączonych zawiaską, na których są poprowadzone dwie linie proste przecinające się w środku sztyfcika, około którego obracają się te linialy; proste te są podzielone na części, z których tylko dziesiąte oznaczają się liczbami.—Użycie cérkla proporcyonalnego jest takież same jak i kąta przywiedzenia, którego ramionami są proste poprowadzone na linialach; na te linie od punktu ich przecięcia się przenosimy linię figury, i roztwieramy cérkiel tak, aby odległość między drugiemi ich końcami równała się linii kopii. Gdy stosunek jest liczebny np. 5:6, roztwieram cerkiel tak, aby odległość między 50temi podziałami prostych będących na linialach, równała się 60 podziałom, wtedy te linie są ramionami kąta przywiedzenia.

3cie Kąt przywiedzenia, równie jak cerkiel proporcyonalny, używa się tylko do pomniejszania przerysowywanego przedmiotu; do powiększania wtedy tylko służyć mogą, gdy stosunek jest mniejszy od dwóch. Narzędzie zarówno służące do powiększania i zmniejszania, zowie się *cérklem czterokończastym*. Urządza się na téj zasadzie, że stosunek równoległych będących z przeciwnych stron punktu zbiegu, równa się stosunkowi odległości ich końców od tego punktu. Jeśli linię EK (fig. 87) podzielimy w danym stosunku w punkcie B i z tego punktu promieniem BK zakreślimy łuk, zaś z punktu K promieniem równym linii przedmiotu, przetniemy ten łuk w punkcie J, punkt J z B połączymy prostą JB i przedłużymy ją tak, aby BF=BE, to linia EF jest równoległa do JK, gdyż stosunki odcinków JB, BK i BF, BE jako równe jedności są sobie równe:—przeto stosunek linii JK:EF równy stosunkowi KB:BE, czyli te linie są w stosunku danym; a zatém: *linii prostej figury zawartéj między jednemi dwóma końcami* JK, *odpowiada w kopii linia zawarta między drugiemi dwóma końcami* EF. Cerkiel czterokończasty składa się z dwóch liniałów równéj długości mających podłużne wyżłobienie w którém znajduje się sztyfcik posuwający się razem w obu wycięciach: obrączka obejmująca oba liniały łączy je z sobą. Z boków tego wycięcia przechodzą linie zakończone ostrzami cerkla, podzielone na równe części. Dla ustawienia nóżek przy danym stosunku, linię EK równą długości prostéj liniału dzielimy w tym stosunku (47), od ostrza przenosimy odcinek BK na prostą cerkla i jeśli ona pada na 60ty podział, to sztyft ustawiamy w przecięciu się 60tych podziałów linii prostych cerkla; wtedy odcinki z każdéj strony punktu przecięcia się są sobie równe, linie przez ostrza przechodzące są równoległe i znajdują się w danym stosunku.

4te Przerysowywane proste, mogą być tak długie, że nie możemy użyć żadnego z powyższych sposobów, *np.* linie proste wyobrażalnę wyrażające odległość poziomą między pionowemi liniami, przechodzącemi przez punkta wzięte na gruncie; do zmniejszania ich w jednakowym stosunku używamy *podziałki* czyli *skali*. Linie te nie zmniéjszają się wprost jak poprzedzające, ale naprzód ich długość wyraża się w sznurach i przy zdejmowaniu planu, niewymagającego wielkiéj ścisłości, mierzą się sznurem lub półsznurem czyli łańcuchem. Sznur składa się z dziesięciu prętów, pręt z dziesięciu pręcików, pręcik z dziesięciu ławek równających się trzem ćwierciom łokcia; sznur przeto ma łokci 75=ćwierci 300=cali 1800. Stosunek linii poziomej zawartéj między dwoma przedmiotami do linii prostéj rysunku, wyraża się liczbą. Dla zmniéjszenia linii pozioméj w danym stosunku zmniejszyć tylko potrzeba linię przyjętą za jedność do jéj mierzenia czyli sznur; np. gdy linię A długą 5 sznurów (zaś sznur jest linią prostą, długą 75 łokci) trzeba zmniejszyć o 12 razy, wtedy biorąc 5 razy dwunastą część sznura, otrzymamy linię 12 razy mniejszą od linii danej, gdyż stosunek można mnożyć przez jednakową liczbę, czyli: w jakim stosunku zmniejszymy wszystkie części linii poziomej, w takim samym zmniejszy się i cała linia. Skala więc służy do tego aby tak jedność przyjętą do mierzenia, jako téż i jéj jednostki, czyli części jedności, zmniejszyć jednakową liczbę razy, t. j. aby linię, daną liczbę razy mniejszą od linii przyjętéj za jedność, podzielić na takie części na jakie podzielona ta jedność np. łokieć jest podzielony na cztery części zwane ćwierciami, ćwierć na sześć części zwanych calami; podobnie sznur na 10 części równych zwanych prętami, pręt na dziesięć części równych zwanych pręcikami.

Jeżeli linię prostą ograniczoną, zwaną sznurem, chcemy zmniejszyć o 900 razy, to biorąc 900tną część długości tej linii wyrażonéj *np* w calach, otrzymamy długość linii o 900 razy mniejszéj od sznura t. j. dwa cale (fig. 104): Linia AB w rysunku wyraża sznur, dzielę ją na dziesięć części równych B1,12... to każda z nich w rysunku wyrażać będzie pręt, gdyż jest 900 razy mniejsza od dziesiątej części sznura: dla otrzymania dziesiątéj części linii B1, odpowiadającéj dziesiątej części pręta, z przyczyny małej długości tej linii niemożemy jéj dzielić wprost na 10 części równych, gdyż podziały zlewałyby się z sobą, ale uskuteczniamy to na zasadzie proporcyonalności linii. Na linii AB rysuję prostokąt AE lub równoległobok (121, a lub c), którego bok BE dowolny, bok BE i jemu przeciwległy AF dzielę na 10 części równych, bok FE przeciwległy bokowi AB dzielę także na 10 części równych; punkt pierwszego podziału linii AB z punktem drugiego podziału linii FE łączę linią prostą, drugiego AB, z trzecim—boku FE i t. d. punkta zaś odpowiednie podziałów dwóch drugich przeciwległych boków łączę liniami prostemi. Linia ac jest dziesiątą częścią linii DE a tém samém i równéj jej linii B1, gdyż linia Bc jest dziesiątą częścią linii BE (139, Wn. 5), a przeto odpowiada w rysunku dziesiątéj części pręta, czyli pręcikowi; podobnie linia *bd* jest dwoma dziesiątemi częściami lini B1=DE, gdyż linia Bd zawiera dwie dziesiąte części: *Bc* i *cd*, linii BE, przeto odpowiada w rysunku dwóm pręcikom; linia 3e trzem pręcikom, 4f czterem pręcikom i t. d.

Jeśli więc przerysowana linia zawiera w sobie sznur 1, prętów 5, i pręcików 4, to linia odpowiednia jéj w rysunku będzie KL, gdyż K4 jest 900 razy mniejsza od sznura fL=B5 (115, 6), jest 900 razy mniejszá od pięciu prętów, zaś 4f od 4 pręcików, a zatém KL jest 900 razy mniejsza od zamierzonéj linii na gruncie. Punkt L jest przecięciem się linii przechodzących przez podziały odpowiednie liczbie prętów 5 i pręcików 4.

Skala zazwyczaj robi się na metalu lub kości, żeby się nie zniszczyła przez częste używanie. Gdy skala jest zrobiona, dla znalezienia stosunku zmniejszania, mierzymy długość linii wyrażającéj sznur i szukamy ile razy jéj długość, wyrażona w liczbie, jest mniejsza od podobnie wyrażonéj długości sznura, np. jeśli równa się 15 linijkom, to ponieważ sznur zawiera w sobie linijek $12 \times 1800 = 21600$, a 15 linijek od 21600 linijek jest mniejsze 1440 razy, przeto za pomocą téj skali zmniejszymy linie brane na gruncie 1440 razy.

5te Podobnym sposobem robimy podziałkę do zmniejszania w danym stosunku i innych miar, i tak jeśli chcielibyśmy podzielić linię prostą AB, 72 razy mniéjszą od sążnia t. j. długą na cal na części odpowiednie stopom i calom, czyli na sześć części równych a jedną z tych części na dwanaście części równych, linię tę (fig. 105), dzielimy na sześć części równych BE, EF... i rysujemy na niéj prostokąt AH lub równoległobok,—bok BH leżący przy AB i jemu przeciwległy AF dzielimy na 12 części równych, podziały boków AB i FH łączymy prostemi BJ... zaś podziały boków BH i AF łączymy odpowiednio, a linia *ab* jest dwunastą częścią linii JH=EB, gdyż B*a* jest takąż częścią linii BH (139. Wn. 5), podobnie *cd* stanowi dwie dwunaste części linii JH=EB, gdyż B*c* zawiera dwie linie B*a* i *ac* będące dwunastą częścią linii BH i t. d. Chcąc mieć linię 72 razy mniejszą od sąż. 2, stop. 3, cali 8, od punktu K przecięcia się prostych przechodzących przez podziały odpowiednie liczbie stop i cali t. j. trzeci linii BA i ósmy linii BH, bierzemy linię KL równoległą do AB aż do linii DM przechodzącéj przez drugi podział D, otrzymany z przeniesienia linii AB na swoje przedłużenie, linia KL jest 72 razy mniejsza od sąż 2—stop. 3—cali 8, gdyż linia 8L jest 72 częścią 2 sążnie, K*o*=3B takąż częścią stop 3, zaś *o*8, cali 8miu.

154. *Zt.* Przez dwa punkta A i B (fig. 106) prowadząc linię prostą AB, gdy popełnimy błąd np. o piątą część linijki t. j. linia AB przechodząc przez punkt A przechodzi z boku punktu B w odległości ⅕ linijki (51. Wn. 1) przez punkt C, to przedłużając tę linię omyłka się powiększa tak, że jeśli linię AC przedłużymy o sto cali, omyłka powiększy się sto razy; czyli koniec E linii AC będzie w odległości ⅕ linii × 100=25 lin. od linii AB gdyż linie DE i BC są w stosunku odległości ich końców odpowiednich od punktu zbiegu A (139. Wn. 5). Dla zmniejszenia więc błędu potrzeba prowadzić prostą przez końcowe, nie zaś przez środkowe jej punkta, *np.* w kreśleniu skali, przez podziały boków przeciwległych prostokąta lub równoległoboku.

155. *Zt. Mierzenie linii prostéj* AB *za pomocą po-*

działu linii CD, *przyjętéj za jedność na części równe* (fig. 107).

Przenoszę linię CD na AB, zawiera się w niéj 3 razy od A do a i pozostaje linia aB $<$ CD;—dla dowiedzenia się jaką częścią aB jest jedności CD zamiast przenosić aB na CD (11), przenoszę połowę jedności Cc na aB zawiera się raz od a do b i pozostaje bB mniéjsze od Cc; przeto linia $AB = Aa + ab + bB = 3$ jednościom CD+połowie jedności i więcéj linią bB; dla dowiedzenia się jaką częścią linia bB jest jedności, przenoszę trzecią część jedności, Cd na bB; jeśli ona jest większa od bB, to przenoszę czwartą część jedności Ce, jeśli i ta jest większa od bB, przenoszę piątą część jedności Cf, która jeśli jest mniejsza od bB, to zawiera się w niéj raz tylko od b do g, gdyż $\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$, i t. d.—azatém linia $CD = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$... jedności CD, gdzie pierwsza przybliżona wartość jest 3, druga $3 + \frac{1}{2}$, trzecia $3\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ i t. d. Jeżeli tym sposobem otrzymamy jakąkolwiek część jedności zawierającą się zupełnie w reszcie, to linia AB jest wymierzoną względem jedności CD, w przeciwnym razie jest nie wymierną. Tym sposobem starożytni wyrażali stosunki wielkości.

Na téj zasadzie robią się wszelkie miary, i uskutecznia się za pomocą ich mierzenie, i tak: mierząc sążniem, przenosimy go na linię mierzoną, zaś na resztę ztąd pozostałą połowę łokcia, czyli stopę$=\frac{1}{6}$ sąż. na resztę ztąd otrzymaną, ćwierć$=\frac{1}{12}$ sąż.—następnie cal$=\frac{1}{6 \cdot 12}=\frac{1}{72}$ sąż. linię$=\frac{1}{12 \cdot 72}=\frac{1}{864}$ i t. d. Mierząc więc sążniem lub inną miarą, nie przenosimy jéj części kolejno po sobie idących t. j. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i t. d. ale tylko niektóre części jak w sążniu $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{72}$, $\frac{1}{864}$, przeto linia niewymierna przy tém mierzeniu sążniem może być wymierną np. $\frac{1}{5}$ sążnia, gdyż liczby 3, 6, 12, 72... niezawierają czynnika 5. Podział więc miary długości na jednostki tém jest lepszy, im więcéj ma czynników, gdyż więcéj części jedności przenosimy na mierzoną linię, a tém samém większe prawdopodobieństwo, że linia wymierna da się zupełnie zmierzyć jednością. Liczba 72=2 2 2.3.3, zaś 100=2.2. 5.5 i dla tego podział dziesiątkowy lubo dogodniejszy przy rachunku, przy mierzeniu jest niedogodny, gdyż trzecia część jedności podług niego nie da się zmierzyć. Przy dzieleniu miary na jednostki, na trzy rzeczy zwracać powinniśmy uwagę: *a*) aby liczby wyrażające części z jak najwięcéj składały się czynników *b*) aby czynniki początkowe 2, 3. 5. w ich skład wchodziły *c*) aby liczba podziałów była jak najmniejsza;—wszystkich tych warunków razem uskutecznić niemożna, lecz rachunek wskazuje jaki podług nich najdogodniejszy jest podział; dawny podział okręgu koła, piękny tym względzie przedstawia przykład.

Dla rachunku dogodniejszy jest ten drugi sposób mierzenia linii, lecz przy mierzeniu dogodniejszy jest pierwszy (11), chociaż prawie nieużywany nawet przy najściślejszém mierzeniu; łatwiéj bowiem przenosić linię, aniżeli ją dzielić na równe części.

156. Zt. *Zmierzyć wysokość pionowego przedmiotu* (fig. 108).

1⁰ Jeżeli grunt przy podstawie jest prawie poziomy w pewnej odległości dwie tyki CF i DE pionowo w kierunku linii prostéj AD i patrząc przez wierzchołek E drugiéj tyki DE na wierzchołek B mierzonego przedmiotu AB, naznaczony na pierwszéj tyce punkt F leżący na wyobrazalnéj prostéj EB; mierzymy wysokość tyk DE i CF do punktu F, tudzież proste poziome CD i CA. Wyobraziwszy prostą EH poziomą ta na przedmiocie AB odetnie AH=ED (115. Wn. 2) odcinki BH i GF równoległych są w stosunku odległości ich końców H i G do punktu zbiegu E (139 Wn. 5), przeto HB:FG=HE:GE; a ztąd $BH=\frac{FG.\ HF}{GE}$ dodawszy do wynalezionéj wartości wysokość tyki mniejszéj ED; otrzymamy wysokość AB mierzonego przedmiotu.

2⁰. Jeżeli grunt nie jest poziomy, lub mierzenie wymaga większéj scisłości (fig. 109), ustanawiam tyki DE i CF;— oznaczam różnicę odległości punktów A,F, D i C z D od poziomu (64), mierzę linie poziome *gh* i *hk* żerdzią ustawianą poziomo za pomocą poziomu mularskiego (63) lub libelli (67), podobnie jak poprzednio wynalazłszy wysokość *n*B, dodawszy do niej A*c*—*cn*, otrzymamy wysokość AB—Przytem trzeba uważać że od wysokości żerdzi CF, odejmuje się lub dodaje się, różnica odległości punktów C i D od poziomu, podług tego czy punkt C, jest bardziej oddalony, lub bliżéj leży poziomu a niżeli punkt D.

E) *Odcinki dowolnego połączenia prostych, czyli linie poprzeczne.*

157. *Tw. W trójkącie* BAC *poprzeczna* ED *przecinająca boki lub ich przedłużenia, dzieli te boki na sześć odcinków tak, że iloczyn z trzech odcinków niemających końców wspólnych* EA, FC i DB *równa się iloczynowi trzech pozostałych* (fig. 110).

Poprzeczna ED przecinając bok, dzieli go na dwa odcinki rachowane od punktu przecięcia się do końców boku (4.Uw), przeto trzy boki trójkąta dzielą się na sześć odcinków; biorąc z każdego boku kolejno po jednym do wierzchołków po sobie idących z boku BA do wierzchołka A, odcinek EA, z boku AC do wierzchołka C odcinek FC, z boku CB do wierzchołka B odcinek DB, otrzymamy trzy odcinki nie mające końców wspólnych; biorąc zaś wierzchołki w przeciwnym porządku otrzymamy trzy inne odcinki; EB, DC; FA—pozostaje tylko dowieść że iloczyn z trzech pierwszych odcinków równa się iloczynowi z trzech drugich.

Przez punkt C prowadzę CG równolegle do AB; stosunek odcinków równoległych równa się stosunkowi odległości ich końców od punktu zbiegu (139 Wn.5), przeto: EA:CG=FA:FC tudzież CG:EB=DC:DB; pomnożywszy te dwie proporcye, będzie EA. CG CG. EB,=FA.DC:FC.DB; dzieląc pierwszy stosunek przez CG, i biorąc iloczyny średnich i skrajnych, otrzymamy: EA. FC. DB=EB. CD. FA.)

Wn. W trójkącie EAF uważając BD za poprzeczną mamy: BA.CF.DE=BE·CA.DF; poprzeczna AC trójkąta CFD daje; BD. EF. AC=BC. ED. AF. poprzeczna AC trójkąta BDE daje: AE. FD. CB=AB. FE. CD.

158. *Tw. od. Jeżeli trzy punkta* E, F, D *leżące na trzech bokach trójkąta lub ich przedłużeniu, dzielą te boki na takie odcinki, że: iloczyny z trzech niemających wspólnych końców są sobie równe* EA. FC. DB =EB. FA. DC, *to trzy te punkta leżą na jednej linii prostéj* ED.

Gdyby punkt F nie leżał na prostéj ED, toby ona przecinała bok AC w innym punkcie H, a wtedy podług poprzedzającego twierdzenia EA. HC. DB=EB. HA. DC. lecz z założenia mamy: EA. FC. DB=EB. FA. DC, przeto: EA. HC. DB: EB. HA. DC=EA. FC. DB:EB. FA. DC; dzieląc poprzedniki przez EA i DB, zaś następniki przez EB i DC, otrzymamy: HC: HA=FC: FA; a że poprzednik HC większy od poprzednika FC więc i następnik HA powinien być większy od następnika FA co być niemoże.

159. *Tw. Jeżeli z punktu* D *wziętego na płaszczyznie trójkąta* ABC, *poprowadzimy linie do jego wierzchołków* A, B, C, *to one podzielą boki na takie odcinki że iloczyn z trzech niemających końców wspólnych równa się iloczynowi podobnych trzech innych odcinków*, EA. GC. FB=EB. GA. FC. (fig. 11 lub 12).

Uważam dwa trójkąty BAF i FAC, na które dzieli się dany trójkąt ABC przez jedną z poprzecznych AF, zaś dwie inne poprzeczne biorę za poprzeczną tych trójkątów; to trójkąt BAF z poprzeczną CE daje EA. DF. CB=EB. DA. CF (157); trójkąt FAC z poprzeczną BG daje: GC. DA. BF=GA. DF. BC, iloczyny ilości równych są sobie równe, mnożę te równości tak, aby linie jednakowe były z przeciwnych stron równości: EA. DF. CB. GC. DA. BF=EB. DA. CF. GA. DF. BC; dzieląc obie strony przez DF. CB. DA. otrzymamy: EA. GC. BF=CF. AG.

Wn. 1. Względem trójkąta BDC linii AB, AD,. AC są poprzeczne, przeto: GB. FC. ED=GD. FB EC; i t. p.

W*n*. 2. Jeżeli by poprzeczna (fig. 113.) BG przechodziła przez środek boku AC t. j. AG=GC, to wrówności EA. GC. FB=EB. GA. FC podzieliwszy pierwszą stronę przez GC zaś z drugą przez AG, otrzymamy: EA. FB=EB. FC. gdyż ilorazy ilości równych są sobie równe; czyli AE : EB=FC: FB, więc linia EF równoległa do AC (139. Wn. 2); a zatem: *jeżeli jedna poprzeczna* BG *przechodzi przez środek boku* AC *to końce dwóch innych dzielą dwa pozostałe boki na części proporcyonalne, i leżą na linii równoległej do boku pierwszego*; i nawzajem: *jeżeli dwie poprzeczne* AF i CE *dzielą boki* AB i BC *na części proporcyonalne, to punkt ich przecięcia się* D *leży na poprzecznéj połowiącéj bok* AC; gdyż założenia mamy że BE : EA=BF: FC czyli BE. FC=EA. BF a podług twierdzenia BE. FC. GA=EA. BF. GC. przeto podzieliwszy pierwszą stronę przez BE. FC zaś drugą przez EA. BF, zostaje GA=GC. *Jeżeli z końców boku* AC *prowadzimy linie do końców linii do* *niego równoległych* e'f', EF, ef, *to punkta ich przecięcia się* d', D. d, *leżą na linii* BG *łączącéj środek tego boku* AC *z punktem przecięcia się dwóch innych boków* AB i CB; linia ta GB połowiąc bok AC połowi zarazem i równoległe e'f', EF, ef, gdyż linie równoległe dzielą się przez linie wychodzące z jednego punktu B na części proporcyonalne (139. Wn. 6). Z téj przyczyny w trapezie prosta łącząca środki podstaw przechodzi przez punkt przecięcia się boków nierównoległych.

160. *Tw. od. Linie* AF, BG i CE *przechodzące przez wierzchołki trójkąta* ABC *i przecinające boki lub ich przedłużenia tak, że iloczyny z trzech odcinków niemających końców wspólnych są sobie równe,* EA. GC. FB=EB. FC. GA *przecinają się w jednym punkcie* D (fig. 111).

Gdyby linia AF nie przechodziła przez punkt D przecięcia się dwóch innych poprzecznych BG i CE, to linia przechodząca przez ten punkt D nie przecinałaby boku BC w punkcie F, lecz w innym punkcie H, przeto AE. GC. HB=EB. HC. GA (159), z założenia zaś EA. GC. FB=EB. FC. GA a zatém: AE.CG. HB: EB. HC. GA=EA. GC. FB: EB. FC. GA; dzieląc poprzedniki przez AE. GC zaś następniki przez EB. GA, otrzymamy: HB: HC=FB: FC, co być nie może, gdyż HB < FB zaś HC > FC.

Wn. 1. *Linie proste* FA, CE i BG *poprowadzone z wierzchołków trójkąta* ABC *do środków boków przecinają się w jednym punkcie* D *tak, że odległość tego* *punktu od środka podstawy jest dwa razy mniejsza od odległości do wierzchołka*, czyli punkt przecięcia się jest w odległości jednéj trzeciéj od podstawy. *a)* Linie te przecinają się w jednym punkcie, gdyż odcinki każdego boku są sobie równe z założenia, a że jeden wchodzi do jednego iloczynu trzech odcinków, drugi zaś do drugiego, przeto te iloczyny są sobie równe. *b)* Linia DA jest dwa razy większa od DF, gdyż w trójkącie FAC poprzeczna BG daje: AG. CB. FD=CG. AD. FB, a że AG=CG przeto: CB. FD=AD. FB, czyli CB: FB=AD: DF; bok CB jest dwa razy większy od swojéj połowy FB, to i AD dwa razy większe od DF.

161. *Tw. W czworoboku zupełnym* ADECFB, *punkta przecięcia się* G i G' *dwóch przekątnich* AC, BD *z trzecią* FE *są jéj punktami sprzężonemi*: GE: GF=G'E: G'F (fig. 114).

W trójkącie AEF poprzeczna G'B daje: AB. FG'. ED =AD. EG' FB (157); w tym samym trójkącie poprzeczne CA, CF, CE wyprowadzone z punktu C do wierzchołków dają: AD. EG. FB=AB. FG. ED; iloczyny ilości równych są sobie równe, przeto: AB. FG'. ED. AD. EG. FB=AD. EG'. FB. AB. FG. ED; podzieliwszy obie strony przez AB. ED. AD. FB otrzymamy: FG'. EG=EG'. FG czyli GE: GF=G'E: G'F.

Wn. 1. Podobnie G''C: G''A=GC: GA i G''B: G''D =G'B: G'D. Punkta sprzężone G i G'' jednéj przekątniéj AC mają tę własność, że przecięcie się dwóch innych przekątnich EF i DB jest ich wspólnym punktem sprzężonym dla punktów G i G'', względem tychże przekątnich.

Wn. 2. *Jeden tylko być może punkt* G *sprzężony z punktem* G' *względem linii* EF; bo gdyby oprócz punktu G był punkt g, to G'E: G'F=GE: GF i G'E: G'F=gE: gF, przeto GE: GF=gE: gF; lecz GE> gE zaś GF < gF, co być nie może.

Wn. 3. Punkt G linii EF dla którego szukamy punktu sprzężonego, nie może leżeć w środku téj linii, gdyż wyrazy pierwszego stosunku byłyby sobie równe, zaś w drugim stosunku nie mogą być sobie równe; jeżeli GE < GF, to punkt sprzężony G' leży ze strony końca E, gdyż G'E powinno być mniejsze od G'F.

Wn. 4. Połączywszy wierzchołek A z punktem G' przecięcia się przekątnich FE i BD, otrzymamy cztery promienie harmonijne: AF, AG, AE, AG', dzielące linię G'F harmonijnie; *promienie* te podobnie jak n^{ro} 143 *dzielą harmonijnie każdą prostą g'b względem nich poprzeczną*, gdyż poprowadziwszy przez punkt G' linię G'B' równoległą do $g'b$, i dopełniwszy czworoboku zupełnego AD'EC'FB' przez linie D'F i B'E, linie te przetną się na linii AG; gdyż jeśliby się przecięły nie na téj linii, to AG' nie byłaby przekątnią tego czworoboku, i przekątnia jego dałaby inny punkt sprzężony g z punktem G' względem linii EF, co być nie może (Wn. 2), a że linia G'B' dzieli się harmonijnie, więc podobnie się dzieli i linia $g'b$ do niéj równoległa (139. Wn. 6).

162. *Zg. Za pomocą liniału przez punkt dany* E, *poprowadzić linię równoległą do linii danéj* AC (fig. 113).

W trójkącie gdy jedna z poprzecznych przechodzących przez wierzchołek połowi bok przeciwległy, drugie dwie dzielą dwa inne boki na części proporcyonalne (159. Wn. 2), przeto biorę linię AC za bok przez którego środek G ma przechodzić poprzeczna, przez punkta A i E prowadzę drugi bok AB, trzeci zaś BC dowolnie; kreślę poprzeczną BG przez środek G boku AC i poprzeczną CE, ta poprzeczna trzecia, AD podzieli bok BC w tym samym stosunku, w jakim punkt E podzielił bok AB, a tém samém linia EF jest równoległą do AC (139. Wn. 2).

163. *Zg. Ze środka linii prostéj ograniczonéj* AC *wyprowadzić prostopadłą* (fig. 113).

Prostopadła ze środka linii AC wyprowadzona ma wszystkie swe punkta równo oddalone od końców linii AC (44); położenie prostéj oznacza się dwoma jéj punktami;—jeden z nich znajdziemy kreśląc na linii AC trójkąt równoramienny przez poprowadzenie linii AB i CB pod jednakowemi kątami (91), na zasadzie n° 59 lub 66; drugi zaś znajdując środek linii AC. W tym celu przez punkt dowolny E prowadzę EF równoległą do AC, tak jak w n° 162 lub 81, 83, 145, a przecięcie się poprzecznych AF i CE daje punkt D leżący na linii BG przechodzącéj przez środek boku AC (159. Wn. 2), a tém samém prostopadłéj do linii AC

164. *Zg. Znaleźć punkt sprzężony z punktem* G *leżącym na prostéj ograniczonéj* EF (fig. 114).

Punkt dowolny A łączę z punktem danym G i z końcami linii danéj; uważając więc EF, AG za przekątnie czworoboku zupełnego, którego bokami są linie AE i AF dla znalezienia trzeciéj przekątniéj, dopełniam czworoboku prowadząc linie FD i EB przecinające się na przekątniej AG, a linia DB łącząca ich końce jest trzecią przekątnią czworoboku i przetnie przekątnią EF w punkcie żądanym G' (161).

165. *Zg. Znaleźć dwa punkta leżące na przedłużeniu prostéj danéj* AB (fig. 116).

Chcąc znaleźć dwa punkta leżące w kierunku AB, biorę na téj linii punkt G ze strony końca B (161. Wn. 3), to punkt z nim sprzężony leży na przedłużeniu téj linii od końca B. Dla znalezienia punktu sprzężonego z punktem G, prowadzę DB, DG i DA i dopełniam czworoboku przez linie Ba i Ab, które dają trzecią przekątnią *ab*, przechodzącą przez punkt sprzężony z G,— dopełniwszy czworoboku przez inne linie Ba' i Ab' otrzymamy przekątnią *a'b'* która przechodzi także przez punkt sprzężony, przeto przekątnie *ab* i *a'b'* przecinają się w punkcie sprzężonym G', który jest na przedłużeniu linii AB. Podobnym sposobem biorąc drugi punkt *g* bliżéj końca Ba niżeli A, otrzymamy drugi punkt *g'* z nim sprzężony, a tym sposobem będziemy mieli dwa punkta G' i g' leżące na przedłużeniu linii AB.

166. *Znaleźć punkt leżący na prostéj przechodzącej przez punkta przecięcia się boków przeciwległych czworokąta* ABCD, *gdy punkta przecięcia się tych boków nie są dane* (fig. 117).

Punkta przecięcia się boków przeciwległych AB z CD i AD z BC są wierzchołkami czworoboku zupełnego, utworzonego z tego czworokąta, a linia łącząca te wierzchołki jest jego przekątnią zewnętrzną; poprowadziwszy więc dwie przekątnie wewnętrzne AC i BD, te przetną przekątnią zewnętrzną w punktach sprzężonych,—trzeba więc tylko znaleźć drugą linię przechodzącą przez punkt sprzężony zewnętrzny, a ta przecinając się z przekątnią BD, oznaczy punkt żądany, leżący na przekątniéj zewnętrznéj. Punkt szukany jest zarazem sprzężonym punktu G'' przekątniéj wewnętrznéj (161. Wn. 1); dopełniwszy więc czworoboku przez linie B*d* i D*b*, przekątnia wewnętrzna *db'* przejdzie przez ten punkt, a przeto przetnie przekątnią BD w punkcie szukanym G'.

167. *Zg. Przez punkt dany* Y *poprowadzić linię przechodzącą przez punkt przecięcia się dwóch prostych danych* BD i bd *nie mając tego punktu przecięcia się* G' (fig. 117).

W czworoboku zupełnym przekątnia wewnętrzna z wewnętrzną przecinają się w punkcie sprzężonym zewnętrznym, który jest ich wspólnym punktem sprzężonym względem punktów ich przecięcia się z trzecią przekątnią (161. Wn. 1); jedną linię daną BD biorę za przekątnię wewnętrzną czworoboku zupełnego, który otrzymuje się: prowadząc dowolne zbiegające się AY i AD i łącząc punkta ich przecięcia się z liniami danemi, B z *d* i D z *b*; linia A*c* jest trzecią przekątnią tego czworoboku. Punkt Y biorę za wierzchołek drugiego czworoboku zupełnego przez który przechodzi przekątnia jego zewnętrzna, a którego dwoma bokami są linie AY i AD zaś przekątniemi wewnętrznemi BD i A*c*; linia YD łącząca punkt Y z punktem przecięcia się boku AD z przekątnią BD, daje bok trzeci, czwarty zaś BC przechodzi przez punkt B i punkt C przecięcia się boku trzeciego YD z przekątnią AC; bok czwarty YC przecinając się z bokiem przeciwległym AD daje punkt X, przez który przechodzi linia żądana YX. Linia ta bowiem przechodzi przez punkt G' przecięcia się linii danych DB i *db*, gdyż on jest punktem sprzężonym punktów G'' i *g* przekątnich BD i bd czworoboku A*b*B*c*D*d*, tudzież punktem sprzężonym względem punktów G'' i G przekątnich BD i YX czworoboku BDYCXD.

168. *Zg. Społowić kąt zawarty między dwoma danemi liniami* EB i FC (fig. 113).

W trójkącie równoramiennym linia łącząca wierzchołek kąta ze środkiem podstawy, połowi kąt tego trójkąta (91. Wn. 3), tudzież jeśli w trójkącie dwie poprzeczne przechodzące przez wierzchołki dzielą boki na części proporcyonalne, to trzecia przechodzi przez środek boku (159. Wn. 2): przeto jeżeli 1°. wierzchołek kąta B jest dany, odcinam BA=BC, przez punkt dowolny E prowadzę EF równoległą do CA, to poprzeczne AF i CE przecinając się w D dają punkt leżący na linii przechodzącéj przez środek boku AC, przeto linia BD jest żądaną; 2° jeśli wierzchołek B nie jest dany, to przez punkt *b* wzięty na ramieniu

AE, prowadzę bc równolegle do drugiego ramienia FC i odcinam $bA=bc$; linia Ac jest podstawą trójkąta równoramiennego, gdyż kąt $A=c$ jako leżące naprzeciw boków równych (90), zaś $c=C$ jako jednostronne odpowiednie, przeto $A=C$ i trójkąt któryby się utworzył z przecięcia się boków AE i CF jest równoramienny (91); podobnie jak w pierwszym przypadku znalazłem punkt D leżący na połowiącéj podstawę, wynajduję dwa punkta D i d leżące na tej linii, a ona jest żądaną.

169. *Zt.* N° 165 używa się czasami korzystnie przy prowadzeniu drogi przez las, dla pośpiechu potrzeba wycinać las z obu stron, na ten koniec z przeciwnéj strony lasu trzeba mieć dwa punkta leżące na prostéj w kierunku któréj prowadzimy drogę: wyłącznie zaś używa się w miernictwie do przedłużania prostéj za przeszkodę, przez którą tyki nie mogą być widzialne. N° 166 używa się w artyleryi do sypania bateryi, przy zdobywaniu warowni armaty powinny być ustawione w kierunku ściany fortecy. Jeżeli końce ściany XY (fig. 117) nie są wyraźnie widzialne, oznaczają się dwie rysy utworzone na gruncie od kul wypuszczonych z armaty stojącéj w końcu X t. j. DA i CB a następnie dwie pochodzące od armaty stojącej w końcu Y, a tym sposobem oznaczy się kierunek téj ściany przez punkt G, i drugi punkt znaleziony takimże sposobem. N° 168 używa się w miernictwie do połowienia kąta na gruncie, w artyleryi zaś do połowienia kąta między dwoma ścianami warowni, których kierunek oznacza się za pomocą

N° 165 gdyż najbezpieczniéj jest postępować w czasie szturmu po linii połowiącéj ten kąt.

170. *Zt. Zmierzyć długość linii* G'Y *poziomej widziałnéj, niedostępnéj z końca* G' (fig. 117).

Kierunek linii prostéj oznacza się dwoma punktami czyli tykami. Przedłużam prostą G'Y t. j. ustawiam dowolną tykę X w kierunku przedmiotów Y i G' z punktu dowolnego A prowadzę linie AY i AX t. j. ustawiam dowolną tykę A; przez punkt dowolny C leżący z téj saméj strony linii YX co i punkt A, lecz bliżéj punktu Y aniżeli X (161. Wn. 3) prowadzę linie XB i YD t. j. zatknąwszy tykę w punkcie C, posuwam się z tyką po linii XC tak, aby moja tyka zakrywając tykę C, zakrywała zarazem i tykę X, aż póki stanę w kierunku linii AY t. j. póki tyka A zakrywając tykę Y, zakryje zarazem i moją tykę—podobnym sposobem ustawiam i tykę D,—przedłużam linię AC do przecięcia się z linią XY t. j. posuwam się z tyką w kierunku linii AC czyli tak, aby moja tyka zakrywając tykę C, zakrywała i tykę A, aż póki ona zakryje przedmioty Y i G'. Tyka G jest w punkcie sprzężonym punktu G', względem linii XY, przeto GY: GX =G'Y : G'X zatém GY: GX—GY=G'Y: G'X—G'Y.— Zmierzywszy odległości poziome GY=p i GX=P, zaś długość linii szukaną G'Y oznaczywszy przez d będzie: p: P-p = d : P+p przeto $d = p \times \frac{P+p}{P-p}$ t. j. *równa się odległości punktu sprzężonego od dostępnego końca linii, pomnożonéj przez odległość te-*

go końca od punktu przybranego na kierunku tej linii, podzielonemu przez różnicę odległości punktu sprzężonego od końca linii i punktu wziętego na téj linii. Sposób ten używa się do mierzenia szerokości rzeki i odległości dwóch tyk od mierzonego przedmiotu pionowego (156), gdy spodek jego jest niedostępny.

171. *Zł. Zmierzyć odległość między dwoma punktami* Y i G', *z których jeden jest niewidzialny z punktu drugiego* (fig. 117).

1° Stawiam tykę w punkcie B, z którego oba końce linii danéj są widzialne, w kierunku linii YB stawiam dwie tyki w dowolnych punktach *b* i *A*; w kierunku prostéj G'*b* ustawiam tykę *d*, po linii A*d* postępuję z tyką dopóty dopóki ona nie będzie na przedłużeniu prostéj G'B; ustawiam tykę w punkcie *c* przecięcia się prostych B*d* i D*b*, następnie w przecięciu się C prostych YD i A*c*, tudzież prostych BC i AD w punkcie X, a naostatek w G przecięciu się prostych AC z XY. Punkta *g* i G'' przekątniéj czworoboku zupełnego A*b*B*c*D*d* mają wspólny punkt sprzężony w G', podobnie punkta G'' i G przekątniéj czworoboku ABYCXD mają punkt sprzężony w tym samym punkcie G' a zatem punkt G' jest sprzężonym punktu G linii XY a tém samém $G'Y = \frac{GY.\ XY}{GX - GY}$ Sposób ten używa się z korzyścią do mierzenia odległości między punktami leżącemi z przeciwnych stron góry, miasta i t. d.

2°. Obieram punkt C, (fig. 118) z którego końce linii AB są widzialne, mierzę długość linii AC i CB niedostępnych z jednego tylko końca (169), i odległość między punktami *a* i *b* leżącemi w ½, ⅓, ¼ téj i t. p. odległości od punktu C t. j. między punktami dzielącemi te linie na części proporcyonalne, linia *ab* jest równoległą do AB przeto AB: *ab*=AC: *a*C, a ztąd AB=*ab*. AC: *a*C—sposób ten jest dogodny przy mierzeniu linii będącéj w znacznéj odległości, lub gdy do niej nie możemy się zbliżyć.

3°. Jeżeli z punktu D leżącego w kierunku linii AB są widzialne oba jej końce, wtedy od długości linii DB z jednego końca niedostępnej, odejmujemy długość linii DA także z jednego końca niedostępnéj.

ROZDZIAŁ III.

Połączenia okręgu koła z liniami prostemi.

§ 1. Ogólne własności.

172. Okrąg koła może się przecinać lub nie przecinać z linią prostą, w pierwszym przypadku linia zowie się sieczną, w drugim oddzielną. Sieczna AB (fig. 119) przecina okrąg koła C w dwóch tylko punktach, gdyż promienie poprowadzone do punktów D, E.. wspólnych dla siecznéj i okręgu są sobie równe, a dwa

tylko mogą być takie promienie, gdyż z punktu C wziętego nad linią AB dwie tylko pochyłe równe poprowadzić można (51. Wn. 2). Jeżeli sieczną AB obracamy około jednego z punktów przecięcia się D, to punkt przecięcia się E zbliża do punktu D, przystanie do niego, a następnie oddala się tak, że linia AB znowu staje się sieczną; szczególnym więc przypadkiem przecinania się jest styczność t. j. gdy dwa punkta przecięcia się siecznéj zlewają się w jeden punkt. *Linia styczna z okręgiem koła, jest linią mającą z nim jeden tylko punkt wspólny*; ona jest prostopadłą do promienia CD, gdyż inaczéj prostopadła wyprowadzona ze środka koła C do stycznéj A'' B'' byłaby mniejszą od promienia, a jéj spodek byłby w okręgu koła (34), przeto linia A'' B'' w punkcie D wchodziłaby do okręgu koła, z którego wychodząc musiałaby go przeciąć i w drugim punkcie, a więc nie byłaby styczną; i nawzajem: linia A'' B'' prostopadła do promienia jest styczną z okręgiem koła, gdyż ma tylko jeden punkt D wspólny z okręgiem koła, jako będący w odległości promienia od środka koła; promień prostopadły CD jest najkrótszą odległością środka C od liniii A'' B'', przeto wszystkie punkta linii A'' B'' są w odległości od środka kąta większéj od promienia, a tém samém leżą zewnątrz okręgu.

Jeżeli więc odległość linii od środka koła jest mniéjsza, równa lub większa od promienia, to linia ta jest sieczną, styczną lub oddzielną względem tego okręgu koła, spodek prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka okręgu do téj linii w piérwszym przypadku leży wewnątrz koła, przeto linia wchodząc i wychodząc z okręgu koła przecina go w dwóch punktach—w drugim na okręgu koła, linia więc jest prostopadłą do promienia—w trzecim zewnątrz okręgu, a tém samém i inne punkta jako bardziéj oddalone od okręgu leżą zewnątrz okręgu. I nawzajem: Jeżeli linia jest sieczną, styczną lub oddzielną, to oddalenie jéj od środka jest mniéjsze, równe lub większe od promienia; gdyż prostopadła poprowadzona ze środka koła, dla siecznéj, jest mniéjsza od promienia, bo dwa promienie poprowadzone do punktów przecięcia się są liniami pochyłemi,—dla stycznéj jest promieniem, bo jest prostopadłą do promienia, a z jednego punktu t.j. środka, jedną tylko prostopadłą do linii poprowadzić można,—dla oddzielnéj jest większa od promienia, gdyż w przeciwnym razie byłaby albo styczną. albo sieczną. Koła i linie oddzielne nie mogą być względem siebie równoległe, gdyż linia równoległa do linii prostéj, sama jest linią prostą.

§ II. Sieczne.

173. *Tw. gł. Środek* B *łuku* ABC *i środek* F *cięciwy* AC *znajdują się na średnicy* BE *prostopadłéj do téj cięciwy i nawzajem* (fig. 120).

1° Punkta F i B linii BE są równo oddalone od końców cięciwy AC, pierwszy jako jéj środek, drugi zaś dla równości cięciw BA i BC odpowiednich łukom równym AB i BC (28); przeto linia BE jest prostopadłą do cięciwy (44); lecz na linii BE leżą wszystkie punkta równo oddalone od punktów A i C, przeto na niéj leży i środek koła, czyli linia BE jest średnicą.

2° Średnica EB jest prostopadłą do cięciwy AC, aże przechodzi przez punkt D, równo oddalony od końców cięciwy AC, więc prostopadła ta przechodzi przez środek F cięciwy AC. Punkt B jako leżący na prostopadłéj EB przechodzącéj przez środek linii AC jest równo oddalony od końców téj linii, przeto cięciwy, a tém samém i łuki AB i BC są sobie równe, czyli punkt B jest środkiem łuku ABC.

Wn. 1. Do oznaczenia położenia linii prostéj potrzeba dwóch tylko warunków, przeto: *a*) prostopadła wyprowadzona ze środka cięciwy przechodzi przez środek koła; *b*) linia łącząca środek łuku ze środkiem koła jest prostopadłą do środka cięciwy; *c*) linia łącząca środek cięciwy ze środkiem koła jest do niéj prostopadłą i przechodzi przez środek łuku.

Wn. 2. Łuki AG i CH zawarte między cięciwami równoległemi AC i GH są sobie równe, gdyż średnica do nich prostopadła połowi łuki im odpowiednie t. j. łuk BG=BH i BA=BC przeto i różnice ich czyli łuki AG i CH są sobie równe.

174. *Tw. Cięciwy równe są równo oddalone od środka okręgu, z nierównych zaś mniéjsza jest bardziéj oddalona od tego punktu* (fig. 121).

1° Prostopadłe OF i OH poprowadzone ze środka okręgu do cięciw równych DE i AB, mierzą ich oddalenie od środka; prostopadłe te są sobie równe, gdyż trójkąty prostokątne AOF i HOD mają równe przeciwprostokątnie OA i OD jako będące promieniami i przyprostokątnie AF i DH, jako połowy cięciw z założenia równych.

2° Przenoszę mniejszą cięciwę DE na łuk większéj cięciwy AC od A do B, aby obiedwie miały koniec A wspólny; ze środka okręgu C prowadzę do nich prostopadle OG i OF a prostopadła OF jest od strony końca A, gdyż kąt OAB > OAC, przeto jego dopełnienie AOF < AOG. Prostopadła OG < OK zaś OK < OF przeto OG < OF.

Wn. 1. *I nawzajem*: jeśli prostopadłe OH i OF są równe, to takiemiż są i cięciwy AB i DE, gdyż inaczéj prostopadłe nie mogłyby być równe; podobnie jeśli OH > OG to DE < AC, gdyż nie może być ani równe, ani większe.

Wn. 2. *Jeżeli z punktu* E *wziętego wewnątrz okręgu poprowadzimy średnicę i cięciwy to*: 1° *cięciwy czyniące z średnicą kąty równe, są sobie równe*, 2 *z czyniących kąty nierówne, ta jest mniéjsza, która czyni kąt większy tak, że czyniąca kąt prosty jest najmniejszą, zaś czyniąca kąt zero czyli sama średnica, jest największą ze wszystkich cięciw* (fig. 122). 1° Kąty KED i DEM są sobie równe, przeto prostopadłe OF i OG są także równe, jako mierzące oddalenie punktu O leżącego na połowiącéj (102); 2° kąt DEP > DEM, przeto poprowadziwszy prostopadłe OH i OG, kąt EOH < EOG, gdyż im kąt jest większy tem spełnienie mniéjsze (46. Uw. 2), aże OG < OK zaś OK < OH przeto i OG < OH, a tém samém LM > NP. Cięciwa AB dla tego jest najmniéjszą, że prostopadła OE jako pochyła do wszystkich innych cięciw jest dłuższa od prostopadłych wyprowadzonych na te cięciwy; średnica jest największą z cięciw jak okazano w nº 22.

175. *Tw. Przez trzy punkta* A, B i C *nieleżące w kierunku linii prostéj jeden tylko okrąg koła poprowadzić można* (fig. 123).

1º Dane punkta po dwa łączę liniami prostemi, które utworzą trójkąt ABC; prowadzę prostopadłe ze środka linii AB, BC i CA te przecinają się w jednym punkcie D równo oddalonym od wierzchołków A, B i C, przeto okrąg nakreślony z tego punktu promieniem DB przejdzie przez dwa inne punkta; a zatém przez trzy punkta zawsze można poprowadzić okręg koła. 2º Przez te trzy punkta nie można poprowadzić drugiego okręgu koła różniącego się od okręgu koła D; gdyż przez trzy punkta jedna tylko płaszczyzna przechodzi (18); zaś nie może być punktu oprócz D równo oddalonego od punktów danych, gdyż prostopadła ED zawiera wszystkie punkta równo oddalone od A i B, przeto punkt równo oddalony od punktów danych, jest także równo oddalony od punktów A i B a zatém leży na téj prostopadłéj a z boku jéj leżeć nie może; dla podobnéj przyczyny punkt ten nie może leżeć z boku prostopadłéj FD, a zatém leży tylko na wspólném ich przecięciu się w punkcie D, a linie proste przecinają się w jednym punkcie.

176. *Tw. Kąt zawarty między siecznemi, ma za miarę połowę summy łuków zawartych między jego*

ramionami gdy wierzchołek leży wewnątrz okręgu koła; zaś połowę różnicy, gdy leży za okręgiem koła.

Jeżeli wierzchołek kąta O znajduje się: a) *w środku koła* (fig. 124), to łuk AB zawarty między jego ramionami, jest łukiem jemu odpowiednim; a przeto zamiast mierzyć kąt AOB jego jednością, mierzymy łuk AB jednością łuku (54. Wn. 1), czyli połowę łuków AB i *ab* sobie równych, zawartych między siecznemi A*a* i B*b*; — b) *między środkiem i okręgiem koła* (fig. 125); przez środek C prowadzę sieczne E*e* i D*d* równoległe do siecznych A*a* i B*b*, to kąt ECD=AOB (78. Wn. 9); a że zamiast mierzyć kąt ECD mierzymy połowę łuku ED+*de* t. j. połowę EA+AD+*db* +*be*, przeto zamiast mierzyć kąt AOB mierzymy także połowę summy tych łuków, czyli połowę łuku *ea* +AD+DB+*be* gdyż EA=*ea* (173. Wn. 2) i *db*=DB; biorąc za AD+DB łuk AB, zaś zamiast *ea*+*be* łuk *ba*, widzimy że miarą kąta AOB jest połowa łuków AB+*ab*; c) *na okręgu koła* t. j. *jeżeli kąt jest wpisany w koło* (fig. 126); przez środek E prowadzę średnice B'O' i CD równoległe do ramion kąta wpisanego AOB, zaś przez koniec O' jednéj średnicy cięciwę O'A' równoległą do drugiéj, to kąt AOB=DEB' =A'O'B'; miarą kąta DEB' jest połowa łuków DB' +O'C=DB+BB'+OC'; a że BB'=OO'=AA' zaś O'C=A'D to miarą kąta AOB jest połowa łuku DB+ AA'+A'D czyli połowa łuku AB; d) *za okręgiem koła* t. j. *jeśli kąt jest zakołowy* (fig. 127); przez punkt *b* przecięcia się siecznéj OB prowadzę równoległą *b*C do drugiéj siecznéj, to kąt AOB=C*b*B; lecz miarą kąta

CbB jest połowa łuku CB będącego różnicą łuków AB —AC czyli AB—*ab*; przeto miarą kąta AOB jest połowa różnicy łuków AB i *ab* zawartych między siecznemi.

Wn. Wszystkie kąty wpisane w półkole, czyli opierające się swemi ramionami na średnicy, są proste, gdyż mają za miarę połowę półokręgu koła t.j. ćwierć okręgu koła.

177. *Tw. Odległości punktu zbiegu dwóch siecznych od punktów przecięcia się ich z okręgiem koła, są odwrotnie proporcyonalne* t. j. dwie części jednéj są skrajnemi, zaś dwie części drugiéj średniemi wyrazami proporcyi fig. 128 lub 129).

1° *Punkt zbiegu w okręgu koła* (fig. 128): prowadzę cięciwy BA i *ba*, trójkąty AOB, *a*O*b* równokątne,— kąty przy O przeciwległe, kąty A i *b* mierzą się połową łuku B*a*,—mają boki odpowiednie proporcyonalne: AO: O*b*=BO: O*a* (139. Wn. 8). 2° *Punkt zbiegu za okręgiem koła* (fig. 129); prowadzę cięciwy A*b* i B*a*; trójkąty OA*b* i O*a*B są równokątne,—kąt O wspólny, kąty A i B mierzą się połową łuku *ab*, mają boki przeciwległe kątom równym proporcyonalne: AO: OB= O*b*: O*a*.

Wn. 1. Prostopadła wyprowadzona z punktu D fig. 115) okręgu koła do średnicy AB jest średnio jeometrycznie proporcyonalną między odcinkami téj średnicy; gdyż przedłużywszy prostopadłą DC do spotkania się z okręgiem koła w E, mamy: BC: CD=CE: CA, lecz DC=CE (173); przeto BC: CD=CD: CA.

Wn 2. Iloczyny z liczebnéj wartości dwóch odcinków siecznych rachowanych od punktu zbiegu, są sobie równe.

178. *Zg. Przez trzy punkta* A, B, C *nakreślić okręg koła* (fig. 123).

Punkta A, B, C łączę liniami prostemi, ze środka dwóch którychkolwiek wyprowadzam prostopadłe, a one przecinając się dadzą środek D żądanego koła; jeżeli ze środka trzeciéj linii wyprowadzona prostopadła przechodzi przez punkt D przecięcia się dwóch, pierwszych, to rysunek był dobrze uskuteczniony. Aby narysować okręg koła danego promienia, przecinający linię daną AB w punktach A i B, z końców linii ograniczonéj AB, danym promieniem, zakreślam łuki przecinające się w punkcie D, i punkt ten jest środkiem żądanego okręgu koła.—Dla znalezienia środka okręgu ABC, prowadzę dwie cięciwy, a prostopadłe wyprowadzone z ich środków, jako średnice, przechodzą przez środek koła, a tém samém przecinając się oznaczą środek szukany D.

179. *Zg. Społowić dany łuk* AB (fig. 130).

Jeśli środek C okręgu tego łuku jest dany, szukam punktu D równo oddalonego od końców łuku, a linia DC spółowi ten łuk, gdyż jest średnicą prostopadłą do jego cięciwy. Jeżeli środek okręgu nie jest dany, przez dwa punkta równo oddalone od końców łuku AB poprowadzona prosta CD jest średnicą prostopadłą do cięciwy tego łuku, a zatém połowi ten łuk.

180. *Zg. Bez cérkla nakreślić łuk przez trzy punkta dane* A, B, C (fig. 131).

Wierzchołki kątów równych, opierających się na linii AC leżą na okręgu koła, gdyż kąty te jako równe, uważając je za wpisane w koło, mierzą się łukami równemi, zaś cięciwie AC odpowiadające łuki równe, są łukami jednego okręgu koła, gdyż łuki odpowiadające cięciwie AC nierównych promieni, nie zawierają jednakowéj liczby stopni. Aby mieć kąty równe opierające się na linii AC, prowadzę linie AD i CD, czyniące z liniami AB i CB kąty BAD i BCD równe, jedną pod pierwszém, zaś drugą nad drugiém ramieniem kąta ABC, kąt więc A+C=DAC+ACD, gdyż tyle odjęliśmy od pierwszego kąta, ile dodano do drugiego, a tém samém kąty B i D są sobie równe (46. Uw. 2) i punkt D leży na żądanym okręgu koła. Podobnym sposobem wynaleźlibyśmy i więcéj punktów leżących na tym okręgu, a linia poprowadzona przez tę punkta tém bardziéj zbliża się do łuku, im więcéj punktów oznaczamy. Granicę za którą łuk nie może wychodzić są proste AF i CG, pierwsza czyniąca kąt BAF=BCA, druga BCG=BAC, gdyż największy kąt, jaki można nakreślić pod linią CB jest BCA; zaś pod AB, kąt BAC. — Na téj saméj zasadzie bez cérkla ruchem ciągłym kreśli się łuk przez punkta A, B, C; spajam dwa liniały AB i BC pod kątem ABC i obracam je około punktów A i C tak, aby te punkta przylegały do krawędzi liniałów.— Za pomocą tego zagadnienia przez dwa punkta dane A i B kreśli się łuk danéj liczby stopni np. 148, gdyż jeśli łuk będący nad linią AC zawiera 148, to pod tą linią ma 360°—148=212°, zaś kąt wpisany mający wierzchołek nad linią AC i obejmujący ją ramionami mierzy się połową łuku 212°, czyli zawiera 106°; trójkąt więc symetryczny mający za podstawę AC, a kąt jéj przeciwległy 106°, ma kąty przy podstawie 37°, poprowadziwszy przez punkta A i C linie AD i CD pod 37°; otrzymamy punkt D leżący na tym łuku, przeto albo zapomocą cérkla przez trzy punkta A, D, C nakreślimy łuk żądany, albo téż podług mniejszego zagadnienia.

181. *Zg. Z punktu* C *danego nad linią* AB *poprowadzić do niéj prostopadłą* (fig. 132).

Z punktu dowolnego A linii danéj, promieniem AC zakreślam łuk i odcinam ED=EC, a linia CD jest żądaną, gdyż środek koła i środek łuku znajdują się na średnicy prostopadłéj do środka cięciwy tego łuku (173. Wn. 1).

§ III. Styczne.

182. *Tw. Z punktu* B *wziętego za okręgiem dwie styczne równe, zwane parzystemi, poprowadzić można* (fig. 133).

Styczna poprowadzona z punktu B do okręgu D, jest prostopadłą do końca promienia tegoż koła(172); kąt zawarty między promieniem okręgu D a styczną przechodzącą przez punkt B, jako prosty, jest kątem mającym wierzchołek na okręgu koła, którego średnicą jest BD, opierającym się na téj średnicy; lecz wierzchołek tego kąta mieści się także i na okręgu D, jako leżący w końcu promienia tego koła, przeto znajduje się we wspólném przecięciu się okręgu danego B z okręgiem mającym za średnicę linię łączącą punkt dany ze środkiem danego koła, a że okręgi te przecinają się tylko w dwóch punktach C i A, przeto zawsze dwie styczne BC i AB poprowadzić można.

Wn. 1. a) *Linia łącząca punkt dany* B *ze środkiem okręgu danego* D *połowi kąt zawarty między stycznemi* BA i BC *parzystemi*, gdyż prostopadłe ze środka D wyprowadzone do stycznych są sobie równe jako promienie; b) *styczne te są sobie równe* (102. Wn. 2), przeto c) *linia* BD *połowiąca kąt* B *jest prostopadłą do cięciwy* (44) AC *łączącéj punkta zetknięcia się stycznych.*

183. *Tw. Kąt* ABC *zawarty między styczną* AB *a cięciwą* CB *ma za miarę połowę łuku* CB *zawartego między jego ramionami* (fig. 134).

Przez punkt C prowadzę cięciwę CD równoległą do stycznéj AB, to kąt ABC=BCD, jako naprzemianległe, kąt BCD mierzy się połową łuku BD (176, *c*), łuk zaś BD=CB, gdyż prostopadła do śródka cięciwy CD jest średnicą prostopadłą i do stycznéj AB (78. Wn. 5), przeto przechodzi przez punkt jéj zetknięcia się B i połowi łuk CBD, zatém miarą kąta BCD, a tém samém i jemu równego kąta ABC, jest połowa łuku BC.

Wn. 1. Kąt ABE jest spełnieniem kąta ABC, przeto miarą jego jest połowa łuku BDC, gdyż połowa całego okręgu jest miarą Π.

Wn. 2. *I nawzajem:* Jeżeli kąt ACB zawarty między cięciwą a linią AB ma za miarę półowę łuku BC to linia ta jest styczną, gdyż jeśliby ona nie była styczną, to przez punkt B poprowadziwszy styczną BA', dwa kąty nierówne ABC i A'BC miałyby za miarę ten sam łuk BC, co być nie może.

184. *Tw. Kąt* B *zawarty między stycznemi* AB i BC *ma za miarę połowę różnicy łuków* ADC i AC *zawartych między jego ramionami* (fig. 135).

Przez punkt C zetknięcia się jednéj stycznéj, prowadzę cięciwę równoległą do drugiéj stycznéj AB to kąt ABC=DCE, a że kąt DCE ma za miarę połowę łuku CD będącego różnicą łuków AC i ADC, gdyż łuki AC i AD są sobie równe, — przeto i kąt ABC ma za miarę połowę różnicy łuków ADC i AC zawartych między punktami zetknięcia A i C.

185. *Tw. Jeżeli z punktu* C *wziętego za kołem poprowadzimy styczną* CD *i sieczną* CA, *to styczna jest średnio-jeometrycznie-proporcyonalna między odcinkami siecznéj* AC *rachowanemi od punktu zbiegu* C (fig. 136.

Trójkąty ACD i BCD mające kąt wspólny, kąt CAD =BDC, jako mające za miarę połowę łuku BD, mają i kąty pozostałe ADC=DBC równe, a tém samém boki naprzeciw nich leżące, proporcyonalne (139. Wn. 8), t. j. AC: CD=CD: CB.

Wn. Iloczyn z liczebnéj wartości odcinków siecznéj, rachowanych od punktu zbiegu, równa się kwadratowi ze stycznéj.

186. *Zg. Poprowadzić styczną do okręgu koła przez punkt* B *dany*: a) *na okręgu koła* (fig. 134).

Przez punkt dany kreślę promień FB i z końca jego B wyprowadzam prostopadłą (172); albo téż z punktu C rysuję dwie cięciwy, jedną CB przechodzącą przez punkt dany B, drugą zaś CD dowolną; prowadzę linię AB równoległą do CD, a ona jest żądaną, gdyż czyni kąt ABC=BCD, a przeto mający za miarę połowę łuku BC (183. Wn. 2); b) *za okręgiem koła* (fig. 133). Na linii łączącéj punkt dany ze środkiem koła, jako na średnicy kreślę okręg koła, a linie BA i BC łączące punkt dany z dwoma punktami przecięcia się okręgów są żądane, jako prostopadłe do promieni DA i DC koła danego (176. Wn.); c) *równoległą do prostéj danéj* AB (fig. 137). Prowadzę średnicę ED prostopadłą do linii danéj AB, a z końców jéj E i D wyprowadzone prostopadłe EG i DF są żądane, gdyż są stycznemi jako prostopadłe wyprowadzone z końca promienia, i są równoległe do linii danéj, jako prostopadłe do téj saméj prostéj ED co i linia dana; d) *prostopadłą do prostéj danéj* AB (fig. 137). Prowadzę średnicę HJ równoległą do linii danéj AB, a prostopadłe JA i HB poprowadzone przez jéj końce, są stycznemi żądanemi, gdyż będąc prostopadłemi do średnicy są zarazem prostopadłe i do linii AB do niéj równoległéj.

187. *Zg. Daną linię prostą* AB *podzielić w średnim i skrajnym stosunku*, t. j. aby część większa była średnio-jeometrycznie-proporcyonalną między całą linią, a częścią jéj mniejszą (fig. 138).

Z końca linii AB wyprowadzam prostopadłą BC, równą połowie linii danéj AB, i z punktu C promieniem CB zakreślam łuk, z punktu A prowadzę sieczną AH przez środek tego koła i odcinam AE=AD mniejszemu odcinkowi téj siecznéj; to punkt E dzieli linią AB na odcinki żądane; gdyż linia AB jest styczna zaś AH sieczna, przeto AH: AB=AB: AD, ztąd AH—AB: AB =AB—AD: AD; lecz AB jako dwa razy większe od promienia CB równa się średnicy DH, przeto AH—AB=AH—DH=AD=AE,—linia AB—AD=AB—AE =BE,—zaś linia AD=AE;—azatém AE: AB=EB:AE czyli AB: AE=EB.—Przytém linia AH jest także podzielona w stosunku skrajnym i średnim gdyż AH:AB =AB: AD zaś AB=DH przeto AH: DH=DH: AD.— Odcinek będący wyrazem skrajnym jest mniejszy od odcinka będącego wyrazem średnim, gdyż w pierwszym stosunku poprzednik jest większy od następnika, przeto i w drugim to samo ma miejsce.

188. *Zg. Nakreślić łuk taki, aby kąt dany* CDE, *mając wierzchołek na tym łuku, opierał się na jego cięciwie* fig. (139).

Prowadzę linię AF, czyniącą z daną cięciwą AB kąt dany BAF=CDE, uważając więc AF za styczną tego koła którego cięciwą jest AB, kąt BAF będzie miał za miarę połowę łuku AB, i kąt wpisany w koło mający wierzchołek nad cięciwą AB, opierający się na niéj, będzie miał za miarę połowę tego samego łuku, a tém samém równa się kątowi danemu CDE; środek zaś tego koła znajduje się tak na prostopadłéj HG wyprowadzonéj ze środka cięciwy, jako téż na prostopadłéj AG do stycznéj wyprowadzonéj z punktu jéj dotknięcia się A, a zatém w punkcie G ich przecięcia się. Za pomocą tego zagadnienia kreśli się trójkąt symetryczny, mając jego podstawę i kąt przeciwległy; podstawa bierze się za cięciwę, i kreśli się trójkąt symetryczny, którego wierzchołek oznaczy prostopadła wyprowadzona ze środka podstawy, przecinając się z łukiem odpowiednim téj cięciwie.

189. *Zg. Danym promieniem* DE *zakreślić okręg, przechodzący przez punkt dany* C *i styczny do prostéj danéj* AB (fig. 140).

Gdy punkt dany C *leży a*) *na prostéj danéj*, z punktu tego wyprowadzam prostopadłą CF i odcinam CF=DE, a punkt F jest środkiem żądanego okręgu którego promieniem jest FC; *b*) *nad linią* AB (fig. 141), to środek tego koła znajduje się w odległości promienia DE od punktu C, przeto leży na okręgu koła opisanego z C tym promieniem (24); a że jest styczny do linii AB, przeto środek jego znajduje się w odległości promienia od linii AB (72), a zatém leży na linii FG równoległéj do AB, będącéj w odległości promienia (79. Wn. 2), którą otrzymamy wyprowadzając prostopadłą AF=DE i prowadząc FG prostopadlą do FA;—środek więc żądany znajdując się na okręgu HKJ i na linii FG, leży na wspólném ich przecięciu się w punkcie H lub w punkcie J, przeto okręg zakreślony danym promieniem z każdego z tych dwóch punktów przechodzi przez punkt C i jest styczny do prostéj AB.

190. *Zg. Przez dwa punkta dane* A i B *poprowadzić okręg koła styczny do linii danéj* CD (fig. 142).

Jeżeli a) jeden z punktów A *leży na linii danéj* CD, to środek tego okręgu znajduje się na linii AE prostopadłéj do stycznéj wyprowadzonéj z punktu jéj dotknięcia i na prostopadłéj FG wyprowadzonéj ze środka cięciwy AB, które się przecinają (78. Wn. 8), zatém leży w punkcie ich przecięcia się H; okręg zakreślony z tego punktu promieniem AH, jest styczny do linii CD (172) i przechodzi przez punkta A i B, gdyż leży na prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka linii AB; *b) oba punkta leżą na linii równoległéj do linii danéj* (fig. 143), to środek okręgu leży na prostopadłéj FE do środka cięciwy AB, i jest styczny do linii CD w punkcie E, gdyż FE jest średnicą prostopadłą do stycznéj CD, przeto przechodzi przez trzy punkta A, B i E (78); *c) oba punkta leżą na linii zbiegającéj się z daną linią* CD (fig. 144), wtedy linia EB jest sieczną tego koła przecinającą go w punktach A i B a linia ED jest styczną, dla znalezienia punktu dotknięcia się stycznéj, szukamy linii średnio-jeometrycznie-proporcyonalnéj między odcinkami siecznéj, rachowanemi od punktu zbiegu E (185), zakreślając na AB jako na średnicy okręg i prowadząc styczną EG (187), odciąwszy więc EF=EG, w jedną lub drugą stronę od punktu E, pozostaje przez trzy punkta A, B i F nakreślić okręg koła.

191. *Zg. Danym promieniem* EF *nakreślić okręg styczny do dwóch prostych danych* AB i CD.

Gdy proste dane a) zbiegają się (fig. 145), dla znalezienia środka, prowadzimy do tych linii równoległe HJ i GJ będące od nich w odległości promienia EF t. j. prostopadła DH=BG=EF, to punkt ich przecięcia się J leży w odległości promienia od obu linii, przeto jest środkiem żądanym; z punktu więc J, promieniem danym zakreślam okręg koła *b) równoległe* (fig. 146), promień równa się połowie wspólnéj ich prostopadłéj GH, przeto dowolnym być nie może.

192. *Zg. Do trzech danych prostych* AB, CD i EF *poprowadzić okręg styczny* (fig. 147).

Trzy linie przecinając się tworzą trójkąt GHJ, połowiące zaś kąty trójkąta przecinają się w punkcie O równo oddalonym od boków (103), przeto ten punkt jest środkiem żądanego okręgu, promieniem zaś jego jest prostopadła, wyprowadzona z punktu O na bok którykolwiek HG. Okręg koła styczny do linii EH, HG i GC, ma środek na połowiących kąty EHG i HGC, gdyż prostopadłe wyprowadzone z tego punktu do HE i HG tudzież GH i HC, są sobie równe; punkt ten K leży na przedłużeniu połowiącéj kąt EJC, gdyż jest równo oddalony od jego ramion JE i JC (102.

Wn. 1) Ztąd widzimy że do trzech linii danych AB, CD i EF można poprowadzić cztery okręgi styczne. Jeśliby dwie z tych linii AB i CD były równoległe (fig. 148), to można poprowadzić dwa tylko okręgi styczne, których środkami są punkta G i H, leżące w przecięciu się półowiących kąty jednostronne wewnętrzne.

193. *Zl.* W rysunku arkad zupełnych t. j. półkołowych, linie proste wyrażające mury oporowe są styczne w końcach średnicy do półokręgu, a tem samém do niéj prostopadłe; w rysowaniu bloków ruchomych lub nieruchomych (fig. 149), linie proste CD i AB wyrażające sznur podnoszący ciężar, są także stycznemi. Jeżeli drąg (fig. 150) AB jest styczny do okręgu C, i ściśle do niego przylega *np.* za pomocą zębów, to w czasie obrotu okręgu C, drąg AB nie przestając być stycznym, posuwać się będzie w górę lub na dół, podług tego w którę stronę obraca się koło,—i nawzajem posuwając drąg AB obracać będziemy koło i to jest jeden z głównych sposobów zamiany ruchu kołowego na prosty i wzajemnie.

194. *Zl.* Narzędzie służące do dzielenia kąta na trzy równe części (fig. 151), składa się z półkola ADB, z liniału BE prostopadłego w końcu B jego średnicy i węgielnicy rysunkowéj mającéj za podstawę BC promień tego koła. Aby podzielić kąt JHG na trzy równe części, przy krawędzi liniału BE przykła-

damy węgielnicę i ustawiamy narzędzie tak, aby punkt C leżał na ramieniu kąta HG zaś krawędź liniału BE przechodziła przez wierzchołek tego kąta i w tém położeniu posuwamy narzędzie tak, żeby drugie ramię kąta było styczne do półokręgu ADB;—linie HB i HF dzielą kąt JHG na trzy równe części, gdyż w trójkącie symetrycznym FHC oś symetryi połowi kąt H t. j. CHB=BHF, kąt zaś BHF=FHJ, bo linia łącząca punkt zbiegu stycznych parzystych HB i HJ ze środkiem koła połowi kąt BHJ (182. Wn.); azatém te trzy kąty są sobie równe.—Jeśli kąt dany JHG jest bardzo mały, to prowadzimy linię HK prostopadłą do ramienia HJ, a różnica pomiędzy trzeciemi częściami kątów JHK i GHK, jest trzecią częścią kąta JHG. — Narzędzie to służy i do dzielenia łuku na trzy równe części, gdyż kątom równym odpowiadają łuki równe.

195. *Zt. Oznaczyć na planie punkt opuszczony w czasie pomiaru* (fiig. 152).

Z punktu opuszczonego D jako ze stanowiska zdejmuję kąty położeń ADB i BDC między trzema przedmiotami oznaczonemi na planie A, B i C; na linii *ab* łączącéj na planie punkta odpowiednie punktom A i B, kreślę okręg koła tak, aby kąt wpisany w łuk *agb* równał się kątowi ADB (188), na linii *bc* kreślę łuk *cfb* tak, aby kąt wpisany w ten łuk równał się kątowi BDC,—punkt *d* przecięcia się tych okręgów jest żądanym, gdyż poprowadziwszy linie *db*, *dc* i *da*, kąty *adb*=ADB, *bdc*=BDC.

§ IV. Połączenie okręgu koła z linią prostą zewnętrzną.

196. Jeżeli na średnicy weźmiemy punkt to on z punktem swym sprzężonym, zowią się *sprzężonemi względem okręgu koła*; prostopadła wyprowadzona z jednego z tych punktów zowie się *biegunową drugiego punktu*, a zarazem *biegunową okręgu koła.*

197. *Tw. Najkrótszą odległością okręgu koła od linii zewnętrznéj, jest odcinek prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka koła na tę linię* (fig. 153).

Linia $OA+AB < OD < OC+CD$; a że $OC=OA$ przeto $AB < CD$.

198. *Tw. Promień koła jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między odległościami środka koła od punktów sprzężonych* P i Q (fig. 154).

Z założenia mamy $AP: PB=AQ: BQ$ przeto i $AP: AQ=PB: BQ$ czyli $AO-OP: OQ-AO=AO+OP: OQ+AO$; lecz w proporcyi różnica lub summa wyrazów pierwszego stosunku, z różnicą lub summą wyrazów drugiego stosunku, składają ten sam co i te wyrazy stosunek, przeto AO i OP są wyrazami pierwszego, zaś OQ i AO drugiego stosunku, tak że $AO: OP=OQ: AO$ czyli $OP: AO=AO: OQ$.

I nawzajem: *jeśli promień koła jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między odległościami środka od punktu* P *wziętego na średnicy i punktu* Q *leżącego na jéj przedłużeniu, to punkta te są sprzężo-*

ne; gdyż z założenia: OP: AO=AO: OQ czyli AO OP =OQ: AO a ztąd AO—OP: OP=OQ—AO: AO i AO+OP: OP = OQ+AO : AO, następniki równe, przeto i poprzedniki złożą proporcyę:

AO—OP: OQ—AO=AO+OP: OQ+AO t. j.

AP: AQ=BP: BQ.

199. *Tw. Cięciwa łącząca punkta dotknięcia stycznych parzystych, jest linią biegunową punktu przecięcia się stycznych* (fig. 154).

Prowadzę promień OM i odcinam na nim OP'=OP, trójkąty więc OMP i OAP' mające kąt O wspólny zawarty między bokami równemi OM=OA, OP=OP' mają i pozostałe części równe t. j. kąt P=P'; kąt M jest prosty i kąt P' prosty, przeto linia P'A równoległa do MQ daje: OP': OM=OM: OQ czyli OP: OA=OA: OQ, azatém punkta P i Q są sprzężone (198. W.), zaś prostopadła MP przechodząca przez jeden z nich P, jest biegunową drugiego punktu Q.

200. *Tw. Jeżeli cięciwa* mn *łącząca punkta zetknięcia się stycznych parzystych* Q'm i Q'n, *przechodzi przez punkt sprzężony* P, *to punkt zbiegu* Q *stycznych leży na biegunowéj* QQ' fig. 154).

Z punktu Q prowadzę styczne parzyste QM i QN, odpowiednia im cięciwa MN jest prostopadła do QO i wyznacza punkt P sprzężony z Q; prowadzę cięciwę *mn* przez punkt P, i z punktów *m* i *n* wyprowadzam styczne przecinające się w punkcie Q', a mam dowieść że linia QQ' jest prostopadła do QO, czyli że jest biegunową punktu P.— Dla stycznych parzystych wychodzących z punktu Q mamy: OP: OA=OA: OQ czyli OA: OP=OQ: OA, dla wychodzących z Q', Op: OC=OC: OQ'; mnożę przez siebie dwie ostatnie proporcye, zaś wypadłą proporcyę dzielę przez promień i będzie Op: OP=OQ : OQ'; trójkąty więc OP*p* i OQQ' mające kąt O wspólny a boki zawierające ten kąt proporcyonalne, mają i kąt O*p*P=OQQ' (139. Wn. 7), lecz kąt O*p*P jest prosty (182. Wn. c), przeto i kąt OQQ' jest także prosty i linia OQ' prostopadła do QO.

Wn. Ilekolwiek cięciw poprowadzimy przez punkt P, to styczne im odpowiednie przecinają się na prostopadłéj do połowiącéj kąt stycznych parzystych, wyprowadzonéj z punktu ich zbiegu i przechodzącéj przez punkt P.

201. *Zg. Mając punkt, znaleźć drugi punkt z nim sprzężony względem danego okręgu koła* (fig. 154).

Jeżeli punkt dany leży *a*) *wewnątrz okręgu*, to przez ten punkt P prowadzę cięciwę MN a punkt przecięcia się stycznych MQ i NQ, wyprowadzonych z końca cięciwy jest żądanym (198); *b*) *zewnątrz okręgu*, to przez ten punkt prowadzę styczne parzyste ON i QM, a przecięcie się linii OQ połowiącej kąt, z odpowiednią im cięciwą MN daje punkt żądany.

202. *Zt.* Na własności linii polarnéj punktu leżącego wewnątrz okręgu koła, opiera się sposób zamiany ruchu kołowego na ruch po prostéj i wzajemnie; jeśli cię-

ciwa MN obracać się będzie około punktu P w wyżłobionym okręgu koła O, zaś drągi QN i QM' nie mogą oddalić się od okręgu koła, to punkt ich przecięcia się Q posuwać się będzie po linii QQ' równoległéj do pierwotnego położenia drąga MN — i nawzajem jeśli punkt Q posuwa się po linii QQ', to drągi QM i QN nie mogące oddalić się od drąga MN, przecięciem się z drągiem MN opiszą łuk okręgu koła.

§ V. Połączenie okręgu koła z liniami łamanemi.

203. Wielokąty mające wszystkie wierzchołki na okręgu koła zowią się *wpisanemi w koło*, mające zaś wszystkie boki styczne do okręgu, zowią się opisanemi na kole; z poprzedzającego wynika: 1° *trójkąt* a) *może być wpisany w koło*, gdyż punkt przecięcia się prostopadłych wyprowadzonych ze środka boków, jest równo oddalony od wierzchołków (104), przeto jeżeli z tego punktu przez jeden z wierzchołków zakreślimy okręg koła, to on przejdzie i przez dwa inne, jako będące w odległości promienia od środka okręgu (24); b) *może być opisany na kole*, gdyż punkt przecięcia się połowiących kąty, jest w jednakowéj odległości od boków (103), czyli że prostopadłe wyprowadzone z tego punktu na boki są sobie równe, biorąc więc ten punkt za środek, zaś jedną z prostopadłych za promień, dwie drugie prostopadłe, jako jéj równe, będą także promieniami, a boki trójkąta jako prostopadłe do promieni są stycznemi.

2º *Prostokąt może być wpisany w koło*, gdyż środek jego przekątniéj, jako środek przeciwprostokątniéj, jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków (106). 3º *W czworokącie wpisanym w koło, kąty przeciwległe, jako mające za miarę połowę okręgu, spełniają się.* 4º *Wielokąt foremny może być* a) *wpisany w koło*, gdyż linie połowiące kąty są sobie równe (128); b) *opisany na kole*, bo linie połowiące boki są do nich prostopadłe i równe sobie; osie symetryi połowiące kąty są średnicami koła opisanego, zaś połowiące boki, wpisanego. 5º Łuki odpowiednie bokom wielokąta for. wpis. są sobie równe, dla równości cięciw (27); i nawzajem: jeśli okręg podzielimy na równe części, to cięciwy tych łuków składają wielokąt for., jako mający boki równe (28) i kąty równe, bo mające za miarę cały okręg koła, bez łuków odpowiednich ramionom kąta, które z założenia są sobie równe. 6º Podzieliwszy okręg koła na części równe (fig. 156), i przez punkta podziałów A, B, C, D, E poprowadziwszy styczne, one złożą wielokąt foremny opisany na kole; gdyż linie OF, OG... połowiące kąty stycznych parzystych przechodzą przez środek koła (182. Wn.), są sobie równe, linie bowiem łączące punkta A z B... składają wielokąt for. wpis. w koło, przeto OL=OM, zaś LF=MG jako boki trójkątów prostokątnych mających BL=BM, kąt FBL=GBM, bo spełnienia ich LBO i OBM równe. 7º Mając wielokąt foremny wpisany w koło, aby wpisać wielokąt o podwójnéj liczbie boków, połowimy łuki odpowiednie bokom i łączymy je z wierzchołkami wielokąta; liczba jego boków będzie dwa razy większa, bo każdemu bokowi danego, odpowiadają dwa boki w powstałym tym sposobem wielokącie,— on zaś jest foremny, bo łuki odpowiednie bokom są sobie równe. Podobnie mając wielokąt for. opisany na kole, chcąc opisać wielokąt o podwójnéj liczbie boków, połowimy łuki zawarte między punktami zetknięcia, i przez te punkta prowadzimy styczne.

204. *Tw.* (Ptolomeuszowe). *W czworoboku wpisanym w koło, iloczyn z dwóch przekątnich równa się iloczynowi z boków przeciwległych*: AD.BE=AB.ED +BD AE fig. 155).

Prowadzę cięciwę EK=BD; trójkąty ABD i AFE mające kąt D=E jako mierzące się połową łuku AB, kąty A równe dla równości łuków BD i KE,— mają i boki proporcyonalne (139. Wn. 8): AD: DB = AE: EF, a ztąd AD.EF=DB.AE; trójkąty DAE i BAF mające kąt D=B jako mierzone połową łuku AE,—kąt EAK=DAB, dodawszy więc kąt KAD, będzie kąt EAD=FAB,—mają boki proporcyonalne: AD: DE= AB: BF, a ztąd AD.BF=DE.AB;— dodając te dwie równości do siebie otrzymamy AD.EF+AD.BF=DB. AE+DE.AB czyli: AD.(EF+BF)=DB.AE+DE.AB, albo AD.BE=DB.AC+DE.AB.

105. *Tw. Obwód wielokąta foremnego wpisanego w koło, jest mniejszy od okręgu tego koła,—opisanego zaś jest większy od okręgu koła* (fig. 156).

a) Obwód wielokąta foremnego ma tyle boków równych sobie, z ilu łuków równych składa się okręg koła, lecz że każden bok jest mniejszy od odpowiedniego łuku (3. Wn. 2), przeto i obwód jest mniejszy od okręgu. *b*) Linia łamana AFB jest większa od łuku AB, uważając go za linię łamaną złożoną z najdrobniejszych części linii prostej (20), przeto obwód wielok. opis. jest większy od okręgu; *albo*: obwód wielokąta opisa. GHJ... nie może być równy okręgowi, bo obwód opisanego o podwójnéj liczbie boków, jako mniejszy od obwodu tego wielokąta (20. Wn.), byłby mniejszy od okręgu koła, i to tém mniéjszy im bardziéjby się zbliżał do okręgu t. j. że różnica między obwodem wielok. a okręgiem powiększałaby się w miarę zbliżania się tych linii, przeto obwód wielokąta opisan. nie może być ani równy, ani mniejszy, a zatém jest większy od okręgu koła.

106. *Tw. W wielokątach for. równoobwodowych, różnica między promieniem a prostopadłą do boku tém jest mniejsza, im wielokąt ma większą liczbę boków* (fig. 157).

Linia AB jest bokiem wielokąta, bok więc wielokąta równoobwodowego o podwójnéj liczbie boków, równać się będzie połowie AB, zaś kąt odpowiedni mu we środku koła będzie połową kąta AOB odpowiedniego bokowi AB. Dla znalezienia boku wielokąta o podwójnéj liczbie boków, ze środka cięciwy AB wyprowadzam prostopadłą PC i punkt C przecięcia się jéj z okręgiem z punktami A i B łączę prostemi i ze środka linii AC prowadzę A'B' równolegle do AB; linia więc A'B' jest bokiem wielokąta o podwójnéj liczbie boków (139. Wn. 5), potrzeba dowieść że różnica między promieniem CA' a prostopadłą CP' jest mniejsza aniżeli między promieniem CA a prostopadłą CP. *a*) Widzimy, że CP' $=\frac{1}{2}$ CP $=\frac{1}{2}$ (CO + OP), przeto CP' $>$ OP, gdyż w CP' wchodzi połowa OP z połową promienia która jest większa od połowy OP. *b*) W trójkącie prostokątnym CA'O, — CO : CA' = CA' : CP' a że CP' $<$ CA' przeto i CA' $<$ CO. Mamy więc dwie nierówności OA $>$ OP i CA' $>$ CP' lecz że OA $>$ CA' i OP $<$ CP', przeto większa jest różnica pomiędzy OA i OP aniżeli między CA' i CP'.

207. *Tw. Stosunek boku kwadratu opisanego do promienia równa się stosunkowi* $\sqrt{2} : 1$ (fig. 158).

Przekątnie w kwadracie są prostopadłe (118. Wn. 2 i 117), przeto w trójkącie prostokątnym AOB, — $\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$ czyli $2\ \overline{AO}^2 = 1.\ \overline{AB}^2$, a ztąd $\overline{AB}^2 : \overline{AO}^2 = 2 : 1$ albo AB: AO $= \sqrt{2} : 1$.

Wn. 1. Stosunek średnicy do boku równa się stosunkowi boku do promienia, gdyż $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ czyli $2\ \overline{AB}^2 = 1.\ \overline{AC}^2$, ztąd $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = 2 : 1$ lub AC: AB $= 2\sqrt{2} : 1$

Wn. 2. Prostopadła OE równa się połowie boku AB, bo linia łącząca środki boków EF równa się bokowi.

208. *Tw. Bok sześciokąta for. wpisanego w koło, równa się promieniowi tego koła* (fig. 159).

Trójkąt AOB, ma kąt O równy $\frac{1}{6}$ czterech kątów prostych, czyli $\frac{1}{3}$ II, przeto kąt $A+B=\frac{2}{3}$ II, a że one są sobie, jako leżące naprzeciw promieni, przeto i każdy z nich jest $\frac{1}{3}$ II, a zatém bok AB sześciokąta, równa się promieniowi OA.

Wn. $\overline{OE}^2+\overline{EA}^2=\overline{AO}^2$ czyli $\overline{EO}^2=\overline{AO}^2-\overline{EA}^2=\overline{AO}^2-\frac{1}{4}\overline{AO}^2=\frac{3}{4}\overline{AO}^2$ czyli prostopadła $OE=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AO}^2$.

209. *Tw. Bok dziesięciokąta for. wpisanego w koło, równa się większéj części promienia podzielonego w średnio-skrajnym stosunku* (fig. 160).

Linia AB jest bokiem dziesięcioboku for. wpisanego w koło, przeto w trójkącie BOA kąt O jest $\frac{1}{10}$ częścią 2II czyli $\frac{2}{10}$ II, przeto dwa pozostałe kąty czynią $\frac{8}{10}$ II, a że są sobie równe, więc każdy jest $\frac{4}{10}$ częścią II, azatém dwa razy większy od kąta AOB; poprowadziwszy linię BJ połowiącą kąt B, linia BJ=JO jako leżące naprzeciw kątów równych O i JBO; w trójkącie ABJ bok BJ=AB dla równości kątów przeciwległych, kąt bowiem zewnętrzny BJO równa się $\frac{6}{10}$ II (80. Wn.), przeto wewnętrzny BJA $=\frac{4}{10}$ II $=$ A;— w trójkącie OBA linia BJ połowiąca kąt B, dzieli podstawę na odcinki proporcyonalne do boków (142): OB: AB=OJ. AJ czyli OA: AB=AO: JA, a zatém bok AB dziesięciokąta for. wpis. w koło równa się większéj i t. d.

210. *Tw. Łuk odpowiedni bokowi piętnastokąta for. wpis. w koło, równa się różnicy łuków, odpowiednich bokom sześciokąta i dziesięciokąta.*

Łuk odpowiedni bokowi sześciokąta jest $\frac{1}{6}$ okręgu zaś dziesięciokąta $\frac{1}{10}$ okręgu, przeto różnica ich $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{10-6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ okręgu koła.

211. *Tw. Jeżeli bok* AB *wielokąta for. wpisanego w koło przyjmiemy za bok wielokąta o podwójnéj liczbie boków, to środek koła opisanego na tym drugim wielokącie leży na przecięciu się prostopadłéj* ED *wyprowadzonéj ze środka boku z okręgiem opisanym na pierwszym wielokącie* (fig. 161).

Kąt środkowy w wielokącie o podwójnéj liczbie boków, jest połową kąta środkowego danego wielokąta, gdyż podwójną liczbę razy zawięra się w 2R, przytém środki obudwóch wielokątów leżą na prostopadłéj do środka boku AB, jako wspólnéj średnicy kół opisanych na tych wielokątach, przeto środek drugiego wielokąta leży na przecięciu się téj linii z okręgiem C, bo w tym tylko razie kąt jego środkowy ADB jest połewą kąta środkowego ACB.

212. *Zg. W dane koło wpisać* a) *kwadrat* (f. 158.) Prowadzę średnice prostopadłe AC i DB i końce ich łączę prostemi, to czworobok jest kwadratem, gdyż przekątnie są prostopadłe, przeto wszystkie boki równe, a że przekątnie są sobie równe, przeto kąty proste (118. Wn. 1). b) *Sześciokąt for.* przenoszę promień koła na okręg sześć razy, i otrzymam wielokąt szukany, gdyż bok sześciokąta równa się promieniowi (208). c) *Ośmiokąt for.* (fig. 158), wpisuję kwadrat ABCD

i połowię łuki odpowiednie bokom przez prostopadłe OE.. wyprowadzone do tych boków, środki łuków połączone z wierzchołkami kwadratu dają wiel. żądany (203. 5°); *albo*: środki L, M... łuków AG, GB i t. d. łączę prostemi. d) *Dziesięciokąt for.*; promień tego okręgu dzielę w stosunku średnio-skrajnym i część większą przenoszę na okręg (209). e) *Piętnastokąt for.* (fig. 160); Z końca A promieniem boku AB dziesięciokąta, zakreślam łuk OC, a on na okręgu O odetnie łuk BC odpowiedni bokowi wielok. żądanego (210).

213. *Zg. Na danym boku narysować* a) *sześciokąt foremny* (fig. 157); na danym boku AB kreślę trójkąt foremny AOB, z wierzchołka O promieniem OA zakreślam okręg, na który bok AB przenoszę sześć razy; b) *ośmiokąt foremny* (fig. 162); ze środka boku AB wyprowadzam prostopadłą i odcinam na niéj EC=EB, a punkt C jest środkiem koła opisanego na kwadracie, którego bokiem jest AB, gdyż prostopadła równa się połowie boku; biorąc więc AB za bok ośmiokąta, środek koła opisanego na tym wielokącie leży na przecięciu się prostopadłéj EC z okręgiem opisanym na kwadracie t.j. w punkcie D, pozostaje więc z punktu D promieniem DB zakreślić okręg, i przenieść na niego bok dany AB ośm razy; c) *dziesięciokąt foremny* (fig. 163); promieniem równym połowie boku danego, kreślę okręg styczny do tego boku w punkcie A i prowadzę sieczną BC przez środek tego koła, to BC:AB=AB:DB czyli BC:CD=CD:DB, linia więc CB jest pro-

mieniem podzielonym w średnio-skrajnym stosunku, którego część większa równa się bokowi danemu,—pozostaje tylko tym promieniem zakreślić okręg koła i przenieść na niego bok AB dziesięć razy; d) *pięciokąt foremny* (fig. 163); środek koła wielokąta o podwójnéj liczbie boków znajduje się na okręgu opisanym na wielokącie o dwa razy mniejszéj liczbie boków, przeto znalazłszy środek koła opis. na dziesięciokącie foremnym, którego bok CF=AB, uważam ten bok za bok pięciokąta foremnego, przeto okręg koła opisany na pięciokącie przechodzi przez trzy punkta C, F, B—i pozostaje tylko na ten okręg przenieść bok CF pięć razy; e) *dwunastobok foremny* (fig. 164), bok dany AB biorę za bok sześciokąta for., którego środek jest na prostopadłéj CD i na łuku zakreślonym z punktu A promieniem AB;—okręg więc zakreślony promieniem DA jest okręgiem opisanym na sześciokącie, przeto środek koła opisanego na szukanym dwunastokącie jest w punkcie E przecięcia się prostopadłéj z okręgiem D,—pozostaje tylko z punktu E promieniem EB zakreślić okręg i przenieść nań bok AB dwanaście razy.

ROZDZIAŁ IV.

Połączenia okręgów kół.

§ I. Warunki nieprzecinania się i równoległości; przecinania się i styczności.

214. Prosta łącząca środki dwóch okręgów zowie się *linią środków*, linia ta może być albo mniejsza, albo równa, albo większa od różnicy promieni; będąc większą od różnicy promieni, może być mniejszą, równą lub większą od summy promieni. Z tych sześciu stosunków linii środków do promieni, wynikają warunki wzajemnego położenia okręgów leżących na płaszczyznie. Koła leżące na płaszczyznie mogą mieć dwa punkta wspólne (26) i zowią się *przecinającemi się*, gdy zaś te dwa punkta zlewają się w jeden, okręgi zowią się *stycznemi*; albo też okręgi nie mają żadnego punktu wspólnego i są *oddzielnemi*, jeśli zaś punkta jednego okręgu są jednakowo oddalone od okręgu drugiego, okręgi zowią się *równoległemi* jakiemi są *współ-środkowe*. Okręgi mogą być styczne i oddzielne wewnętrznie lub zewnętrznie, podług tego, czy punkta jednego leżą wewnątrz lub zewnątrz drugiego.

215. *Tw. gł. Okręgi kół są: a) oddzielne lub b) styczne wewnętrznie, c) przecinające się, d) styczne lub e) oddzielne zewnętrznie,— gdy linia środków jest:* a) *mniejsza lub* b) *równa różnicy promieni*—c) *większa od różnicy, lecz mniejsza od summy*—d) *równa lub* e) *większa od summy promieni.*

a) Zak. AB $<$ AC—BD. *Tw.* że wszystkie punkta okręgu B leżą wewnątrz okręgu A (fig. 165).

Przedłużam linię środków AB do przecięcia się z okręgami w punktach D i C; punkt D leży w okręgu A, gdyż odległość jego DA od środka tego koła, jest mniejsza od promienia AC, bo z założenia różnica promieni jest większa od linii środków AB. Punkt H okręgu B leży wewnątrz okręgu A, gdyż oddalenie jego AH od środka tego okręgu, jest mniejsze od promienia AC, bo AH $<$ AB+BH czyli od AD, lecz AD $<$ AC to tém bardziéj AH $<$ AC.

b) Zak. AB=AC—BC. *Tw.* że okręgi A i B są styczne wewnętrznie (fig. 166).

Przedłużam linię środków AB do przecięcia się z okręgami; punkt C przecięcia się téj linii z okręgiem B, leży na okręgu A, gdyż odległość jego od środka tego koła równa się promieniowi,—bo jeśli linia środków AB równa się różnicy promieni, to promień koła mniejszego BC, powiększony linią środków, równa się promieniowi okręgu A większego; punkt H okręgu koła B leży wewnątrz okręgu A, gdyż AH $<$ AB+BH czyli od AC, przeto wszystkie punkta okręgu koła B, oprócz punktu C leżącego na okręgu A, leżą wewnątrz tego okręgu, a tém samém okręg B jest styczny wewnętrznie z okręgiem koła A.

c) Zak. AB $>$ AC—BD czyli AB+BD $>$ AC i AB $<$ AC+BD czyli AB—BD $<$ AC. *Tw.* że okręgi przecinają się (fig. 167).

Punkt D okręgu koła B leży wewnątrz okręgu A, gdyż AD=AB—BD, a że AB—BD podług założenia jest mniejsze od promienia okręgu A to i AD < AC; punkt K okręgu B leży zewnątrz okręgu A, gdyż AK= AB+BK, a że podług założenia linia środków z promieniem koła mniejszego, jest większa od promienia koła większego A to i AK > AC; a zatém okręg B jako mający jeden punkt wewnątrz zaś drugi zewnątrz okręgu A, przecina się z tym okręgiem.

d) *Zak.* AB=AC+BC. *Tw.* że okręgi są styczne zewnętrznie (fig. 168).

Punkt D przecięcia się z okręgiem B znajduje się na okręgu A gdyż CA=AB—BD, t. j. promieniowi koła większego, dla podobnéj przyczyny i punkt C przecięcia się z okręgiem koła A leży na okręgu B, przeto te punkta przecięcia się linii środków z okręgami są jednym punktem wspólnym dla tych obu okręgów; wszystkie inne punkta okręgu B leżą zewnątrz okręgu A, gdyż połączywszy punkt H ze środkami kół A i B, linia AH+HB > AC+CB czyli AH > AC.

e) *Zak.* AB > AC+BD. *Tw.* że okręgi są oddzielne zewnętrznie (fig. 169).

Punkt D przecięcia się linii środków AB z okręgiem B leży zewnątrz okręgu A, gdyż AD=AB—BD, a że z założenia promień okręgu A jest mniejszy od linii środków zmniejszonéj promieniem drugiego okręgu, przeto AD > AC; wszystkie inne punkta okręgu koła B leżą zewnątrz okręgu koła A, gdyż AH+HB > AD+DB czyli AH > AD zaś AD > AC, to tém bardziéj AH > AC.

216. *Tw. od. W okręgach:* a) *oddzielnych, linia środków jest mniejsza od różnicy, lub większa od sum-*

my promieni; b) *w przecinających się, większa od różnicy, lecz mniejsza od summy*; c) *w stycznych równa różnicy lub summie promieni.*

a) Linia środków jest mniejsza od różnicy promieni lub większa od summy; gdyż jeśliby była równa różnicy, to okręgi byłyby styczne wewnętrznie, jeśliby była większa od różnicy a mniejsza od summy, okręgi przecinałyby się i nakoniec jeśliby była równa summie, okręgi byłyby styczne, co się sprzeciwia założeniu. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy innych przypadków.

Wn. 1. Punkt C dotknięcia się okręgów stycznych leży na linii środków, gdyż jeśliby leżał zewnątrz téj linii w punkcie H (fig. 166 i 168), to poprowadziwszy promienie do tego punktu, w pierwszym razie różnica promieni byłaby mniejszą, w drugim summa promieni większą od linii środków AB, a tém samém okręgi niebyłyby styczne; styczna więc w punkcie zetknięcia się okręgów, jest ich wspólną styczną, jako linia prosta prostopadła do obudwóch promieni.

Wn. 2. *W okręgach oddzielnych zewnętrznie, odcinki linii środków, utworzone przez okręgi, mierzą najmniejsze i największe oddalenie się punktów tych okręgów*; *w oddzielnych zaś wewnętrznie, odcinek od strony środka mniejszego okręgu, mierzy najkrótsze oddalenie*; dla oddzielnych wewnętrznie (fig. 165) linia $CD = AC - (AB + BD)$, zaś $HE + HB + AB > AE$ czyli $HE > AE - (HB + BA)$ przeto $CD < HE$; dla oddzielnych zewnętrznie (fig. 169), *a*) $Bd + dc + cA >$

BD+DC+CA czyli $dc > DC$, *b*) $Bd' + BA + Ac' > d'c'$ czyli $D'C' > d'c'$.

Wn. 3. W kołach przecinających się (fig. 167), linia środków jest prostopadłą do cięciwy łączącéj punkta E, H przecięcia się, gdyż środki kół A i B są równo oddalone od końców téj cięciwy.

217. *Tw. Okręgi oddzielne wewnętrznie, mające środki w jednym punkcie, są względem siebie równolegle* (fig. 170).

Odcinek CD wspólnego promienia zawarty między temi okręgami, mierzy najkrótsze oddalenie się punktu D jednego okręgu od okręgu drugiego; gdyż CD równa się różnicy promieni, zaś każda inna linia DE jest od niéj większa; linie te mierzące najkrótsze oddalenie punktów jednego okręgu od okręgu drugiego są sobie równe, jako różnice równych promieni, przeto i oddalenia punktów jednego okręgu od współśrodkowego są jednakowe, czyli okręgi współśrodkowe są względem siebie równeległe.

Wn. Łuki GC i FD okręgów współśrodkowych, zawarte między promieniami koła większego, zawierają jednakową liczbę stopni, jako odpowiednie kątowi CAG zawartemu między temi promieniami.

218. *Zg. Względem okręgu danego* A, *danym promieniem* BD *nakreślić okręg* a) *oddzielny wewnętrznie albo zewnętrznie*. Na promieniu (fig. 165) AC okręgu, albo (fig. 169) od punktu D wziętego na przedłużeniu promienia AC odcinam promień dany DB i

tym promieniem z punktu B zakreślam okręg koła; b) *przecinający go w punktach* H i E (fig. 167). Z punktu B leżącego w odległości promienia BD od punktów H i E zakreślam okręg koła i ten jest żądanym; c) *styczny wewnętrznie lub zewnętrznie.* Od końca promienia C na tym promieniu (fig. 166) lub jego przedłużeniu (fig. 168) odcinam promień dany od C do B to punkt B jest środkiem żądanego okręgu.

219. *Zt.* W rzemiosłach, koła współśrodkowe kreślą się na téj zasadzie, że są względem siebie równoległe; do okręgu koła wytoczonego A przykłada się prostokąt niemający boku BC, opatrzony liniałem FG, prostopadłym do środka boku DE; gdy końce liniałów BC leżą na okręgu, cięciwa łuku BC jest czwartym bokiem prostokąta, przeto liniał FG jest także prostopadły i do jéj środka, a zatém przechodzi przez środek koła A,—umieściwszy więc ostrze w pewnéj odległości na liniale FG, ono zakreśli okręg współśrodkowy, gdyż różnica promieni KG dla okręgu A i rysowanego ostrzem G, jest jednakowa.

§ II. Punkta sprzężone z linią środków.
(Centre de similitude directe et inverse).

220. *Tw. Linie łączące końce promieni równoległych, skierowanych w jedną stronę, przecinają się z linią środków w punkcie sprzężonym zewnętrznym, zaś łączące końce promieni skierowanych w przeciwne strony, przecinają się w punkcie sprzężonym zewnętrznym względem linii środków.*

1° Linie łączące końce promieni równoległych przecinają się w jednym punkcie (fig. 172); linia Aa przecina się z linią środków Oo, bo promienie równoległe OA i oa są nierówne,—linie GA i GO przecięte równoległemi, dają (139. Wn. 5): OA: oa=OG: oG a ztąd OA—oa: oa=OG—oG: oG; trzy wyrazy téj proporcyi dla wszystkich promieni równoległych nie zmieniają się, przeto i czwarty oG jest stały, czyli wszystkie linie łączące końce promieni równoległych przecinają się w jednym punkcie. Podobnie promienie OD i od skierowane w przeciwne strony dają: OD: od=Og: go, a ztąd OD+od: od=Og+og: og, dla wszelkich promieni skierowanych w przeciwne strony trzy wyrazy téj proporcyi nie zmieniają się, przeto i czwarty og jest stały, czyli linie łączące końce tych promieni przecinają się w jednym punkcie. 2° Punkta G i g są sprzężone względem linii środków Oo, gdyż tak stosunek odległości punktu G, jak i punktu g od końców téj linii, jako równe stosunkowi promieni, są sobie równe, przeto GO: Go=gO: go.

Wn. Proporcyje OA—oa: oa=Oo: oG tudzież OD+od: od=Oo: og pokazują, że dla kół a) *oddzielnych wewnętrznie* OA—oa > Oo przeto i oa > oG, t.j. punkt sprzężony zewnętrzny jest wewnątrz koła mniejszego, gdyż odległość jego oG od środka tego koła mniejsza od promienia, podobnie i punkt sprzężony wewnętrzny; b) *stycznych wewnętrznie*, OA—oa=Oo przeto i oa=oG t.j. zewnętrzny w punkcie dotknięcia się, zewnętrzny zaś wewnątrz mniejszego, gdyż OD+od > Oo to od > og; c) *przecinających się*, OA—oa <

Oo to $oa < oG$ zewnętrzny leży zewnątrz koła mniejszego wewnętrzny wewnątrz, gdyż $OD + od > Oo$ to i $od > og$; d) *stycznych zewnętrznie*, $OA - oa < Oo$ to i $oa < oG$ zewnątrz mniejszego, zaś wewnętrzny w punkcie dotknięcia się, gdyż $OD + od = Oo$ to i $od = og$; e) *dla oddzielnych zewnętrznie*, zewnętrzny zewnątrz mniejszego—wewnętrzny między okręgami.

Uw. Punkta sprzężone linii środków wyznaczane przez linie łączące końce promieni równoległych, najdokładniéj wyznaczają się przez wspólne styczne do tych okręgów, gdyż przecinają linię środków pod kątem większym od innych linii.

221. *Tw. Punkta sprzężone zewnętrzne, względem linii środków trzech okręgów* A, B i C, *leżą na jednéj linii prostéj* (fig. 173).

Do okręgów A i B, A i C, B i C prowadzę wspólne styczne KL, MN i ON łączące końce promieni równoległych i skierowanych w jedną stronę, które przecinając się z liniami środków AB, AC i BC dają trzy punkta D, E, F sprzężone zewnętrzne względem tych linii, potrzeba dowieść że te trzy punkta leżą na jednéj linii prostéj. Dla okręgów A i B mamy: $AD : DB = AK : BL$ zaś dla A i C, $EC : EA = CN : AM$, mnożąc te proporcye otrzymamy: $AD.EC : DB.EA = CN : BL$ gdyż drugi stosunek ma wspólny czynnik AK i AM; lecz $CN : BL = FC : FB$, przeto i $AD.EC : DB.EA = FC : FB$ a ztąd $AD.EC.FB = DB.EA.FC$, azatém trzy punkta D, E i F leżące na przedłużeniu boków trójkąta ACB, są w kierunku linii prostéj (158).

Wn. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że punkta sprzężone wewnętrzne dwóch linii środków z punktem sprzężonym zewnętrznym trzeciéj, leżą na jednéj linii prostéj. Linie przechodzące przez podobne punkta sprzężone zowią się *osiami sprzężonemi* (axe de similitude directe et inverse), trzy więc okręgi mają cztery osie sprzężone: jedną zewnętrzną, a trzy wewnętrzne.

222. *Zg. Znaleźć punkta sprzężone dwóch okręgów* O i *o* (fig. 172).

Prowadzę promienie równoległe OA i *oa* skierowane w jedną stronę, a linia łącząca ich końce A*a* przecinając się z linią środków O*o* daje punkt G sprzężony zewnętrzny, linia zaś E*e* łącząca końce promieni skierowanych w przeciwne strony, przecinając się z linią środków daje punkt *g* wewnętrzny.

223. *Zg. Do dwóch danych okręgów* O i *o poprowadzić linie styczne.*

Gdy promienie okręgów danych a) *znacznie się różnią* (fig. 172), wynajduję ich punkta sprzężone G i *g* (222) a styczne G*a*, G*c*, *ge* i *gd* poprowadzone do jednego okręgu *o* są zarazem stycznemi i do drugiego O, gdyż jeden jest tylko punkt sprzężony; b) *mało się różnią* (fig. 174); różnicą promieni tych okręgów, ze środka A koła większego, zakreślam okręg, do którego ze środka koła mniejszego B prowadzę styczną BC, przedłużam promień AC prostopadły do téj stycznéj, a on przecinając się z okręgiem A daje punkt D, przez który przechodzi styczna żądana; poprowadziwszy promień BE równoległy do AD, otrzymamy i drugi punkt E leżący na téj stycznéj DE;— czworokąt bowiem CE jest równoległobokiem (116, 4), a że w nim kąt C jest prosty, przeto on jest prostokątem, a zatém linia DE prostopadła do promieni okręgów, jest ich wspólną styczną;—c) *nieróżnią się* (fig. 175) czyli są sobie równe; do linii środków AB prowadzę promienie AC i BD prostopadłe, a linia CD łącząca ich końce jest żądaną, gdyż czworokąt AD jest prostokątem.

224. *Zg. Przez punkt dany J nakreślić koło styczne do dwóch prostych zbiegających się* (fig. 176).

Prowadzę linię EF połowiącą kąt zawarty między danemi prostemi AB i CD, która jako równo oddalona od ramion kąta (102. Wn.1), zawiera środki wszystkich okręgów stycznych do obu tych linii; punkt J łączę z punktem zbiegu prostych danych AB i CD (167), a że punkt zbiegu jest sprzężonym zewnętrznym dla okręgów stycznych do linii danych (220), przeto linia JN łącząca punkt J, mającego się nakreślić okręgu, z punktem sprzężonym, przechodzi przez końce promieni równoległych w okręgach stycznych do linii danych;—jeśli więc z punktu dowolnego K połowiącéj EF, promieniem równym prostopadłéj KG, wyprowadzonéj z tego punktu na ramię CD, zakreślimy okręg koła, to on będzie stycznym do linii danych, jako będących w odległości promienia od środka tego koła (172), promienie zaś KN i KL są równoległe do promieni kół stycznych, łączących punkta przecięcia się tych okręgów z linią JN, przeto przez punkt J żądanego okręgu poprowadziwszy linie równoległe do tych promieni, one przecinając się z połowiącą FE dają środek S i F żądanego koła i pozostaje tylko z tego punktu zakreślić okręg styczny do jednéj z linii danych CD. Jeśli punkt dany J (fig. 177), leży na linii połowiącéj EF to prostopadła JG wyprowadzona z tego punktu do linii EF jest styczną do okręgu żądanego, a że i linia CD jest także styczną, przeto punkt G jest zbiegiem stycznych parzystych; odciąwszy więc GH równe GJ otrzymamy punkt H dotknięcia się stycznéj CD z okręgiem szukanym (182. *b*), a linia HS prostopadła do stycznéj CD w punkcie jéj dotknięcia H, przecinając się z linią środków EF, daje środek S żądanego okręgu. Odcinając GD=GJ otrzymamy drugi okręg styczny do linii danych.

225. *Zt.* Jeżeli dwa bloki (fig. 178) połączymy sznurem lub rzemieniem wyprężonym DCGF z połączonemi końcami, wtedy obracając jeden z nich, obracamy i drugi, w tym samym lub w przeciwnym kierunku, podług tego, jak te sznury styczne leżą z téj saméj, lub z przeciwnych stron sznura.

§ III. Linie potęgowe okręgów.
(Axe radical,—Potenzlinien).

226. Linią potęgową dwóch okręgów zowie się taka prosta, z któréj wyprowadzone styczne do tych

okręgów, są sobie równe; zowie się tak dla tego, że iloczyny z odcinków siecznych tych kół, rachowane od punktu ich przecięcia się z dwoma ze stycznych równych, jako równe kwadratom z tych stycznych (185. Wn.) są sobie równe, a iloczyny te zowią się *potęgami okręgów* (Potenz der Kreise), a że styczne poprowadzone z każdego punktu linii potęgowéj do dwóch okręgów, są sobie równe, przeto i sieczne poprowadzone z każdego punktu téj linii względem tych dwóch okręgów, mają równe iloczyny ze swych odcinków, rachowanych od tego punktu linii potęgowéj. Przecięcie się linii potęgowych zowie się *środkiem potęgowym* (centre radical). Okręg zowie się potęgowym (orthogonalnym) względem drugiego okręgu, gdy jego promień jest średnio-jeometrycznie proporcyonalnym między odległościami jego środka od końców średnicy leżącéj na linii środków — Okręg może być potęgowym wewnętrznie lub zewnętrznie podług tego, czy środek jego leży wewnątrz lub zewnątrz drugiego okręgu. I tak: *a*) jeśli (fig. 115) ze spodka prostopadłéj DC do średnicy AB zakreślimy okręg koła, to promień jego CD jest śred.-jeom.-prop. między odległościami CA i CB (177. Wn. 1). *b*) Z punktu zbiegu stycznych parzystych (fig. 179) BD i BC zakreśliwszy okręg, styczne te będą prostopadłemi do promieni okręgu A, i nawzajem promienie okręgu A jako prostopadłe do promieni okręgu B są styczne względem tego okręgu; tak promień okręgu B jest średnio-jeom. prop. między odległościami swego środka od końców średnicy GF okręgu A, jako téż i promień okręgu A jest śred.-prop. między odległościami środka A od końców średnicy EH (185), i dla tego okręgi potęgowe zewnętrznie, są wzajemnie potęgowemi. Okręgi mające środek potęgowy w punkcie sprzężonym linii środków dwóch innych okręgów, zowią się *okręgami wzajemnemi* (cercle reciproque).

227. *Tw. Cięciwy łączące punkta dotknięcia linii stycznych wspólnych, dwóch okręgów, są względem siebie równoległe* (fig. 180).

W każdym z tych dwóch okręgów, styczne wyprowadzone z punktu sprzężonego, jako parzyste, są sobie równe (182. Wn. 6), przeto stosunek dwóch stycznych jednego, równa się stosunkowi dwóch stycznych drugiego, czyli styczne te są proporcyonalne, a zatém linie łączące ich końce są względem siebie równoległe (139. Wn. 2).

228. *Tw. Równoległa i równo oddalona od dwóch cięciw łączących punkta dotknięcia się dwóch stycznych wspólnych dla dwóch okręgów,—jest linią potęgową tych okręgów* (fig. 180. I. II i III).

Prowadzę styczne wspólne A*a* i B*b* do dwóch okręgów C i *c*, których cięciwy AB i *ab* są względem siebie równoległe (227) i zarazem prostopadłe do linii środków, jako przechodzącéj przez punkt O zbiegu stycznych parzystych (182. Wn. c); ze środka L linii P*p* mierzącéj oddalenie się cięciw równoległych AB i *ab* wyprowadzam prostopadłą LK, a mam dowieść że styczne KH i Kh wyprowadzone z punktu K téj linii do okręgów C i c są sobie równe.

Punkt K i punkt G przecięcia się linii LK ze wspólną styczną Aa, ze środkami okręgów C i c łączę liniami prostemi i uważam że: $\overline{CK}^2-\overline{CL}^2=\overline{cK}^2-\overline{cL}^2$ jako równe kwadratowi z $\overline{KL}^2$ (141. Wn. 1), podobnie $\overline{CG}^2-\overline{CL}^2=\overline{cG}^2-\overline{cL}^2$, przeto $(\overline{CK}^2-\overline{CL}^2)-(\overline{CG}^2-\overline{CL}^2)=(\overline{cK}^2-\overline{cL}^2)-(\overline{cG}^2-\overline{cL}^2)$, lecz różnica dwóch liczb nie zmienia się gdy odjemną i odjemnik powiększymy o jednakową liczbę, przeto powiększywszy odjemną i odjemnik z pierwszéj strony o $\overline{CL}^2$ zaś z drugiéj o $\overline{cL}^2$ mamy $\overline{CK}^2-\overline{CG}^2=\overline{cK}^2-\overline{cG}^2$. Linia AG$=Ga$, gdyż PL$=Lp$ (138), przeto $\overline{CG}^2-\overline{CA}^2=\overline{cG}^2-\overline{ca}^2$, jako równe kwadratom z liczebnéj wartości linji sobie równych AG i Ga; dodając ostatnią równość do poprzedzającéj otrzymamy: $\overline{CK}^2-\overline{CG}^2+\overline{CG}^2-\overline{CA}^2=\overline{cK}^2-\overline{cG}^2+\overline{cG}^2-\overline{ca}^2$ czyli $\overline{CK}^2-\overline{CA}^2=\overline{cK}^2-\overline{ca}^2$ t.j. $\overline{CK}^2-\overline{CH}^2=\overline{cK}^2-\overline{ch}^2$ gdyż CA$=c$H zaś $ca=ch$; a że $\overline{CK}^2-\overline{CH}^2=\overline{KH}^2$ zaś $\overline{cK}^2-\overline{ch}^2=\overline{Kh}^2$ przeto $\overline{KH}^2=\overline{Kh}^2$ czyli KH$=$Kh.

Wn. 1. *Linia równooddalona od cięciw równoległych, jest miejscem wszystkich punktów z których można poprowadzić styczne równe do dwóch okręgów*, gdyż $\overline{KL}^2+\overline{CL}^2=\overline{CK}^2$ i $\overline{KL}^2+\overline{cL}^2=\overline{Kc}^2$, odejmując otrzymamy: $\overline{CL}^2-\overline{cL}^2=\overline{CK}^2-\overline{cK}^2$ tudzież $\overline{KH}^2+\overline{CH}^2=\overline{CK}^2$ i $\overline{Kh}^2+\overline{hc}^2=\overline{Kc}^2$, odejmując mamy: $\overline{CH}^2-$

$\overline{hc}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{Kc}^2$ gdyż podług twierdzenia KH=K*h*, przeto $\overline{CL}^2 - \overline{cL}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{ch}^2$, jako dwie ilości równe trzeciéj $\overline{CK}^2 - \overline{Kc}^2$, a że różnica promieni $\overline{CH}^2 - \overline{ch}^2$ jest stałą, przeto i $\overline{CL}^2 - \overline{cL}^2$ jest także stałą, czyli przez punkt L przechodzą wszystkie prostopadłe wyprowadzone z takich punktów, z których poprowadzić można styczne równe do dwóch okręgów, czyli że te wszystkie punkta są na jednéj prostopadłéj KL.

Wn. 2. W okręgach przecinających się (fig. 180. III), wspólna cięciwa FJ jest linią równo oddaloną od cięciw AB i *ab*, gdyż z punktu K leżącego na téj cięciwie poprowadzone styczne KH i K*h* są sobie równe, bo kwadraty z liczebnéj wartości tych stycznych równają się iloczynowi KF, KJ.

Wn. 3. Do okręgów stycznych zewnętrznie lub wewnętrznie wspólna styczna GC (fig. 166 i 168) jest linią potęgową, gdyż styczne GL i LM z punktu jéj poprowadzone, jako równe stycznéj GC są sobie równe.

Wn. 4. Dla okręgów oddzielnych równych, linia potęgowa połowi linię środków, gdyż cięciwy łączące punkta dotknięcia stycznych wspólnych, są średnicami prostopadłemi do linii środków.

229. *Tw. Osie zasadnicze trzech okręgów* A, B i C *brane po dwie przecinają się w jednym punkcie, czyli mają jeden środek zasadniczy* (fig. 181).

Linie potęgowe LD i ND okręgów A z B i A z C przecinają się w punkcie D, a mam dowieść że linia potęgowa okręgów C i B przechodzi przez punkt D. Punkt D leży na linii potęgowéj DL, przeto styczne poprowadzone z punktu D do okręgów A i B są sobie równe, dla podobnéj przyczyny styczne D*b* i D*c* do okręgów A i C są także równe, przeto D*a*=D*b* =D*c*, a zatém punkt D znajduje się na potęgowéj okręgów B i C.

230. *Tw. Jeżeli dwa okręgi* A i B *przetniemy siecznemi* JD i JC, *wychodzącemi z punktu sprzężonego* J, *to dwa punkta jednéj siecznéj, wejścia i wyjścia, wzięte nie na jednym okręgu, z podobnemi dwoma punktami drugiéj siecznéi, leżą na jednym okręgu.* (fig. 182).

Aby dowieść że cztery punkta F, E, D, C znajdują się na jednym okręgu, potrzeba dowieść że odległości punktu zbiegu J od tych punktów, są odwrotnie proporcyonalne, t. j. JD: JC=JF: JE. Promienie AD i BG są równoległe (220), przeto JG: JD=JB: JA, podobnie JH: JC=JB: JA, a zatém JG: JD=JH:JC, czyli JG: JH=JD: JC; dla okręgu B sieczne JG i JH dają JG: JH=JF: JE (177); w dwóch ostatnich proporcyach piérwsze stosunki równe, więc i drugie są także równe: JD: JC=JF: JE. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że i punkta E, D, H, L;—D, E, L, H;—G, K, F, C;—G, K, H, L leżą na jednym okręgu.

Wn. Jeśli do okręgów A i B poprowadzimy styczne wspólne JN i JO, to punkta ich dotknięcia się M, N, O, P leżą na okręgu, gdyż JN=JO i JM=JP (182. Wn. 6), przeto JN: JO=JP: JM.

231. *Tw. Wszystkie okręgi obopólne dwóch kół danych, mają środek potęgowy w punkcie sprzężonym tych kół* (fig. 182).

Okręgi obopólne przechodzące przez punkta E, D i F, C lub H, L; tudzież okręgi przechodzące przez punkta G, K i F, C lub H, L, mają cięciwę wspólną JD za linię potęgową; podobnie okręgi przechodzące przez punkta F, C i E, D lub G, K tudzież przez H, L i E, D lub G, K mają cięciwę wspólną JC za linię potęgową — a zatém punkt przecięcia się J linii potęgowych, jest środkiem potęgowym wszystkich okręgów obopólnych.

232. *Zg. Do trzech okręgów danych* A, B, C, *poprowadzić okręg styczny* (fig. 183).

1) Oznaczam punkta sprzężone zewnętrzne tych trzech okręgów branych po dwa: A z B, w punkcie D, — A z C w D' i B z C w D'', — które leżą na osi podobieństwa prostego D''D (221); 2) Prowadzę okręg obopólny do danych trzech okręgów A, B i C kreśląc z punktu zewnętrznie sprzężonego okręgów A i B sieczną DE, która oznaczy punkta F i E leżące na tym okręgu i z punktu D'' sprzężonego okręgów B i C sieczną D''F, która oznacza punkta F i G, — okręg *o* przechodzący przez punkta E, F, G, jest obopólnym dla okręgów A z B i B z C, a zatém jest obopólnym dla tych trzech okręgów. 3) Cięciwa FJ wspólna dla okręgów B i *o* jest ich osią potęgową, a że linia DD'' jest osią potęgową wszystkich okręgów obopólnych względem trzech kół danych, a tém samém i szukanych

okręgów stycznych, przeto punkt L ich przecięcia się jest środkiem potęgowym czterech okręgów B, *o* i szukanych stycznych, t.j. że linie potęgowe tych okręgów branych po dwa, przechodzą przez punkt L; — linią potęgową okręgu B i okręgów z nim stycznych, jest wspólna ich styczna (228. Wn. 3), przeto styczne LM i LN poprowadzone z punktu L do okręgu B, są zarazem stycznemi do szukanych okręgów, LM do stycznego zewnętrznie dla A, B, C, zaś LN do stycznego wewnętrznie. Otrzymawszy podobnym sposobem środek potęgowy okręgów *o*, C i szukanych stycznych, otrzymamy linię potęgową tych stycznych i okręgu C prowadząc styczne L'M' i L'N', pozostaje tylko do linii LM i L'M' nakreślić okręg styczny w punktach M i M' i drugi okręg styczny do linii LN i L'N' w punktach N i N' których środki O i O' leżą na liniach prostopadłych, wyprowadzonych z punktów dotknięcia M, M' i N, N'.

Jeśliby okręgi A, B i C były równych promieni (fig. 184), wtedy przez środki tych zakreślam okręg (178) i środek jego O łączę ze środkami A, B, C okręgów równych, a odcinki ich zawarte między środkiem O a punktami przecięcia się z okręgami danemi, dają promienie OD, OF, OE tudzież OJ, OH, OG okręgów stycznych; — gdyż *a*) linie OD, OF, OE są sobie równe, jako różnice pomiędzy promieniami okręgu przechodzącego przez środki i okręgów A, B, C równych — okręg zakreślony promieniem OD jest styczny wewnętrznie do okręgów danych, bo linie środków OC, OA, OB równają się summie promieni OD

+DC, OF+FA, OE+EB; *b*) linie OJ, OH, OG są równe, jako summy promieni okręgu przechodzącego przez środki A, B, C i okręgów danych równych; okręg zakreślony promieniem OJ jest styczny, gdyż linie środków OC, OA i OB są różnicą promieni: OJ—OD, OH—OA, OG—OB. Jeśliby okręg styczny miał być takim, żeby okręgi B i C były do niego stycznemi wewnętrznie zaś A zewnętrznie lub nawzajem, wtedy zamiast prowadzić linie przez trzy punkta sprzężone zewnętrzne, poprowadzilibyśmy przez dwa wewnętrzne okręgów A z B i A z C a na niéj leży i zewnętrzny okręgów B z C i postępujemy tak jak poprzednio (fig. 185).

233. *Zg. Danym promieniem nakreślić okręg styczny do dwóch okręgów*: *a*) *zewnętrznie* (fig. 186). Na przedłużeniu promienia AB odcinam BF równe promieniowi okręgu C i z punktu C promieniem AF zakreślam łuk, odcinam BE=JD i z punktu D promieniem AE przecinam ten łuk w punkcie G, który jest środkiem żądanego okręgu, gdyż proste środków GC i GD równają się summie promieni; *b*) *wewnętrznie* (fig. 187). Ze środka pierwszego okręgu C różnicą promieni danego AB i okręgu C zakreślam łuk, ze środka zaś drugiego D podobną różnicą promieni przecinam łuk w punkcie G, a on jest środkiem żądanego okręgu, gdyż linie środków GC i GD są różnicą promieni GJ i JC tudzież GH i HD; *c*) *do okręgu* C *styczne wewnętrznie, zaś do* D *zewnętrznie* (fig. 188); ze środka C różnicą promieni, zaś z D summą promieni zakreślamy łuki, które przecinając się w G

dają środek żądanego okręgu, gdyż dla okręgów G i C linia środków GC równa różnicy, zaś dla G i D summie promieni.

234. *Zg. Przez punkt dany* C *poprowadzić koło styczne do dwóch okręgów* A i B (fig. 189).

Punkt C można uważać za okręg zlewający się z swoim środkiem, który jest punktem sprzężonym względem okręgu A i C, B i C — połączywszy go z punktem sprzężonym okręgów A i B otrzymamy linię potęgową okręgów obopolnych do A i B przechodzących przez punkt C, postępujemy daléj jak N° 232, pamiętając że punkt C zastępuje miejsce punktów D' i D''. Jeżeli okręgi mają być styczne w jednakowy sposób, to bierzemy punkt D sprzężony zewnętrzny okręgów A i B, w przeciwnym razie wewnętrzny.

235. *Zg. Nakreślić okręg styczny do dwóch okręgów* A, B *i prostéj* C'C (fig. 190).

Jeżeli prostą C'C uważać będziemy za łuk okręgu bardzo wielkiego, to styczne jego zlewają się z prostą CC' (69), punkt więc sprzężony okręgu A i linii CC' jest na średnicy okręgu A prostopadłéj do CC', bo wtedy ona przechodzi i przez środek okręgu za łuk którego bierzemy CC', jako prostopadła do jego stycznéj, punkta sprzężone są końcami średnicy, wewnętrzny od strony linii, zewnętrzny z przeciwnéj strony, gdyż jeśli promień jednego okręgu jest tak wielki, że przy nim opuścić można promień drugiego okręgu, to poprzedniki w proporcyi N⁰ 220 można uważać za równe t. j. promień okręgu większego i linią środków okręgów a zatém i następniki, czyli promień okręgu mniejszego i odległość punktu sprzężonego od środka tego okręgu. Zagadnienie więc to rozwiązuje się jak N⁰ 232, t. j. 1) prowadzi się oś sprzężona zewnętrzna DD'D''; 2) sieczne DE i D'F, to okręg GFE jest obopolnym okręgów A, B i prostéj CC'; 3) oznaczam punkta L i L' przecięcia się cięciw wspólnych z osią sprzężoną; 4) punkta N, M i *n*, *m* stycznych parzystych wyprowadzonych z punktu L i L' do okręgów A i B, a one są stycznemi do okręgów szukanych w punktach N i *n* tudzież M i *m*.

Jeśliby okręg miał być stycznym wewnętrznie do okręgów A i B, to wzięlibyśmy punkta sprzężone wewnętrzne okręgów A, B z prostą CC'; jeśliby zaś do okręgów A, B było styczne nie w jednakowy sposób, wzięlibyśmy dla okręgów A i B punkt sprzężony wewnętrzny, dla linii i jednego okręgu wewnętrzny, zaś dla linii i drugiego okręgu zewnętrzny.

236. *Zg. Danym promieniem* AB *nakreślić okręg styczny do drugiego* C *i przechodzący przez punkt* D *leżący: a) na okręgu* C (fig. 191); przez punkta C i D prowadzę linię i od puktu D odcinam promień dany w jedną lub drugą stronę podług tego, czy okręg ma być stycznym wewnętrznie lub zewnętrznie (215); *b*) *za okręgiem* (fig. 192); summą lub różnicą promieni zakreślam okręg ze środka okręgu danego i

z punktu D danym promieniem przecinam ten okręg w dwóch punktach.

237. *Zg. Promieniem* AB *nakreślić okręg styczny do okręgu* C *i prostéj* DE (fig. 193).

Okręg promienia AB ma być stycznym do okręgu C, przeto odległość jego środka od środka C jest równa summie lub różnicy promieni podług tego, czy ma być stycznym zewnętrznie lub wewnętrznie; z punktu więc C promieniem równym summie zakreślam okręg, a na nim leżą środki wszystkich okręgów promienia AB, stycznych do okręgu C. Okręg szukany jest stycznym do prostéj DE, przeto jego środek leży w odległości promienia AB od téj linii (172), a zatém środek stycznego okręgu do okręgu C i linii DE znajduje się w wspólném przecięciu się K i J okręgu zakreślonego z C z linią KJ równoległą do DE w odległości AB.

238. *Zg. Nakreślić okręg styczny do okręgu* A *w punkcie* B *i przechodzący przez punkt* C (fig. 194).

Okręg ma być stycznym do okręgu A w punkcie B, przeto środek jego znajduje się na promieniu AB; a że ma przechodzić przez punkta B i C przeto środek jego znajduje się także na prostopadłéj wyprowadzonéj ze środka linii CB, a zatem na wspólném przecięciu się linii AB z prostopadłą DE.

239. *Zg. Przez dwa punkta* B i C *nakreślić okręg styczny do okręgu* A (fig. 195).

Uważając punkta B i C za okręgi zlewające się ze swemi środkami, punkta ich sprzężone z okręgiem A znajdować się będą w samychże punktach B i C; punkta B i C jako okręgi równe mają punkt sprzężony wewnętrzny w środku linii BC (220. Wn.), przeto linia BC jest osią sprzężoną punktów B, C, uważanych za okręgi w granicy zmniejszania się i okręgu A; okręg przechodzący przez punkta B, C i przecinający okręg A jest okręgiem obopólnym, bo linie BE i BC są sieczne wychodzące z punktu sprzężonego C do punktu B zaś z tego punktu do okręgu A; środki więc okręgów obopólnych i szukanego okręgu leżą na prostopadłéj, wyprowadzonéj ze środka linii BC i na promieniach okręgu A przechodzących przez punkta N i M dotknięcia stycznych parzystych, wyprowadzonych z punktu L przecięcia się wspólnéj cięciwy z osią BC potęgową okręgów obopólnych.

240. *Zg. Przez punkt dany* B *nakreślić okręg styczny zewnętrznie do okręgu* A *i do prostéj* CC (fig. 196).

Uważając punkt B i prostą CC za granicę zmniejszania i powiększania się okręgu: 1) oznaczam punkta sprzężone D i D' okręgu A i prostéj CC, zaś sam punkt B jest punktem sprzężonym okręgu A i punktu B; — prosta BD jest osią sprzężoną, a tém samém potęgową okręgów obopolnych względem okręgu A, punktu B i prostéj CC; 2) prowadzę sieczne DE i DB i przez punkta GEB okręg *o* tudzież cięciwę EL wspólnego przecięcia się tego okręgu z A; 3) oznaczam punkta M i N dotknięcia się stycznych LM i LN, a okręgi przechodzące przez punkta N, B lub M, B styczne do prostéj CC (190), są żądane.

241. *Zt.* Przy kreśleniu połączenia kół w maszynach, mianowicie zębczastych, w celu zamienienia ruchu obrotowego około jednéj osi, na ruch obrotowy około drugiéj; rysunek zasadza się na zagad. poprzedzających, a obracanie się kół na téj własności: że gdy odległość środków równa się summie lub różnicy promieni, okręgi są stycznemi, przeto jeśli środki okręgów niezmienne, koła styczne w jednym położeniu, są stycznemi w ciągu ruchu. Obrót jednego okręgu nadaje drugiemu ruch w przeciwną stronę, jak okręg A okręgowi B (fig. 197), lub w tę samą jak okręg A okręgowi B (fig. 198), lub okręg E okręgowi C za pośrednictwem koła D (fig. 199).

242. *Zt.* Ozdoby architektoniczne wklęsło-wypukłe (doucine renversée) można rysować za pomocą N° 256, *a*; lecz że promienie rownają się połowie linii pochyłéj AB (fig. 200), i okręgi są stycznemi w jéj środku, przeto na połowach linii AE i EB kreślę trójkąty foremne ACE i EDB i z ich wierzchołków C i D promieniami CE i ED zakreślam łuki, a one są stycznemi w punkcie E, gdyż kąt AEC=DEB, przeto linie CE i ED są jedną prostą (49), i linia środków CD równa summie promieni.

243. *Zt.* Rysunek muru utrzymującego nakrycie kuchennego komina, wymaga niekiedy kreślenia łu-

ków stycznych. Niech (fig. 201) EC przedstawia zewnętrzną ścianę komina mającego kształt kosza przewróconego, K mur utrzymujący komin, J lisztwę utrzymującą ten mur, BM' sztabę żelazną danéj wielkości i położenia, opierającą się na postumencie G;— potrzeba koniec sztaby M' połączyć z krawędzią dolną lisztwy J za pomocą łuków stycznych (*zgodzonych*) zewnętrznie. Przedłużam BM' do spotkania się z dolną krawędzią lisztwy LJ w F,—promieniem AJ prawie równym połowie M'F zakreślam łuk,—prowadzę promień AD tego łuku, prostopadły do M'F i koniec jego D z punktem M' łączę prostą przecinającą łuk A w M; zaś do linii BM' w M' środek łuku stycznego do łuku A w punkcie M' leży na prostopadłéj do BM' wyprowadzonéj z punktu M' (172), na linii środków AM (216. Wn. 1), przeto we wspólnym ich przecięciu się O.

244. *Zł. Kreślenie owalów używanych przy rysowaniu lęków arkady.*

a) *Linia trzech środków* (fig. 202). Linie AM i BN wyrażają mury podpierające arkadę, AB szerokość zaś DC wysokość arkady. Na połowie szerokości AC kreślę trójkąt foremny i odcinam CF=CD, przez punkta D i F prowadzę prostą do przecięcia się z EA w punkcie G i przez G prowadzę równoległą do CE przecinającą DC w J, zaś AB w H; punkta J i H są środkami łuków żądanych mających za promienie JD i HA. Linia JD=JG bo ich stosunek równa się stosunkowi linii CD i CF (139. Wn. 5) równych z wykreślenia, linia HA=HG jako boki trójkąta równokątnego;—łuk DG styczny do GA, gdyż linia środków JH równa JG—HG różnicy promieni, łuk zaś GA styczny do AM, gdyż promień jego jest prostopadły do téj linii. Łuk GA=60° jako odpowiedni kątowi GHA trójkąta foremnego, łuk DG=30° jako odpowiedni kątowi J równemu DCF=DCA—FCA=90°--60 *b*) Gdy wysokość arkady nie jest daną (fig. 203), długość AB dzielę na trzy części równe i z punktów C i D kreślę okręgi, a punkta ich przecięcia się C, D, E, F są środkami łuków GH, KJ, GJ, HK stycznych(216), a że trójkąt CFD jest równoboczny, przeto łuki HA, HK, KB mają po 60°. *c*) Jeśli owal ma być bardziéj podłużnym, wtedy szerokość jego AB (fig. 204) dzielę na cztery części i z punktów C, D i E czwartą częścią szerokości zakreślam okręgi, ze środka AB wyprowadzam prostopadłą do spotkania się z cięciwami EN i EM w punktach L i K i te punkta są środkami okręgów stycznych do okręgów C i E w punktach F, G i H, J. Trójkąt DNE jest foremny, jako mający promienie za boki, przeto łuk JB=60°, łuk PG=30° gdyż kąt PKG trójkąta KDE jest dopełnieniem kąta DEK do 90°; a zatém łuki JBG i HAF mają po 120°, zaś FPG i HOJ po 60°. *d*) Powyższe sposoby dają owal złożony z łuków znacznie różniących się promieni; chcąc zaś nakreślić owal dowolnie zbliżony do utworzonego ciągłym ruchem, ze środka szerokości B, wyprowadzam prostopadłą BC (fig. 205), połową AB szerokości i połową BS wysokości zakreślam okręgi współśrodkowe i ich ćwiartk

AC i RS dzielę na jednakową liczbę równych części,—odpowiednie podziały okręgu większego łączę cięciwami DF, EU, FV równoległemi do średnicy CX (173. Wn. 2), w okręgu mniejszym prowadzę cięciwy równoległe do drugiéj średnicy AB, które przecinając się z cięciwami okręgu większego dają punkta K, L, M leżące na żądanym owalu, pozostaje tylko przez punkta A, K; K, L... nakreślić łuki styczne wewnętrznie. Środek łuku AK jako przechodzącego przez punkta A i K leży na prostopadłéj do środka cięciwy AK (173), jako zaś stycznego do następnego łuku w punkcie K, leży na prostopadłéj do stycznéj przez punkt K poprowadzonéj (172). przeto leży we wspólném ich przecięciu się N; środek łuku przechodzącego przez punkta K, L, leży także na prostopadłéj do cięciwy KL i na linii KN (216. Wn. 1) t. j. we wspólném ich przecięciu się O; środek łuku LM leży na przedłużonym promieniu łuku KL przechodzącym przez punkt dotknięcia się L i na prostopadłéj do środka cięciwy LM i t. d. *e*) Owal ciągłym ruchem kreśli się w ten sposób: ze środka szerokości AB (fig. 206) wyprowadzam prostopadłą CD i odcinam CE równe wysokości, z punktu C połową szerokości AB zakreślam łuk przecinający się z AB w punktach F i G,—w tych punktach zatykam dwa ostrza i nić z łączonemi końcami wkładam na te ostrza; nić ta powinna być tak długą, aby po naciągnięciu jéj końcem ołówka, koniec ten padł na punkt A;—prowadząc koniec ołówka tak, aby nić obracająca się około ostrzów F i G była wyprężoną, narysujemy owal. Im dokładniéj kreślenie to będzie wykonane, tém bardziéj owal będzie się zbliżał do linii krzywéj zwanéj *Elipsą*.

245. *Zt. Kreślenie pochyłych owalów.*

Gdy podstawa arkady nie jest poziomą, czyli prostopadłą do jéj uszaków, wtedy półokręg nie może służyć za arkadę, gdyż styczne do okręgu względem siebie równoległe, są zawsze prostopadłe do średnicy, łączącéj ich punkta dotknięcia; arkada więc w tym razie składa się z dwóch łuków spojonych (stycznych wewnętrznie), stycznych do uszaków w końcach podstawy AB; wspólna styczna do tych okręgów zowie się *linią wierzchołkową*. Przy kreśleniu takiego owalu, jeżeli jest dana *a) podstawa* AB *co do kierunku i wielkości, zaś spojenie leży na prostéj* CD *pionowéj przechodzącéj przez jéj środek* (fig. 207); odcinam CD=CA i przez punkt D prowadzę KG równoległe do AB; jeden więc łuk będzie stycznym do uszaku w punkcie B zaś do KG w D tak, że linie GD i GB sobie równe, jako boki rombu,—są jego stycznemi parzystemi,—przeto środek jego leży na promieniach prostopadłych do tych stycznych przechodzących przez punkta dotknięcia B i D t. j. w punkcie F, podobnie środek drugiego okręgu tycznego do KG w punkcie D zaś do uszaku w punkcie A, leży w punkcie E przecięcia się prostopadłych wyprowadzonych z punktów zetknięcia;—łuki te mają w punkcie D styczną wspólną, przeto są stycznemi. *b) Prosta wierzchołkowa* KG *co do wielkości i położe-*

nia względem uszaków i punkt D *spojenia łuków* (fig. 208); odcinam GB=DG i DK=KA i linie te będą styczne parzyste; podstawą zaś jest AB,—promienie więc BF i DF prostopadłe do stycznych w punktach dotknięcia B i D dają środek F jednego łuku, zaś promienie DE i AE punkt E środek drugiego łuku;—*c*) *podstawa* AB *i położenie linii wierzchołkowéj* K'G' (fig. 209); odcinam K'd'=AK' i G'd=G'B, a punkt D przecięcia się linii Ad' i Bd jest punktem spojenia okręgów, gdyż poprowadziwszy przez ten punkt linią KG równoległą do K'G' ona jest wierzchołkową, gdyż KD=KA jako będące w tym samym stosunku co Ak' i K'd' (139. Wn. 5), podobnie DG=GB a zatém te linie są stycznemi parzystemi, a punkta E i F środkami łuków; *d*) *położenie stycznéj spojenia* KG *i podstawy* AB, *tudzież jeden uszak* AM (fig. 210); odcinam KD=AK to będą styczne parzyste łuku pierwszego, którego środek E,—dla znalezienia środka drugiego łuku, a tém samém i uszaka, odcinam EL=ED i prowadzę DL do spotkania się z daną podstawą w B i z tego punktu prowadzę prostopadłą do KA, która przecinając się z ED, daje środek szukany F, prosta bowiem DF=FB gdyż DE=EL a łuk zakreślony którąkolwiek z nich jest styczny do DG i GB w punktach D i B. *e*) Aby narysować cały owal skośny (fig. 211) na liniach równych AB i DD' połowiących się w punkcie C,—z końców jednéj linii prowadzę prostopadłe na drugą, które przecinając się dadzą cztery środki łuków: E i F łuków AD i DB, E' i F' łuków BD' i D'A.

246. *Zl. Kreślenie woluty jonicznéj* (fig. 212).

Niech BC oznacza promień oka woluty, t. j. koła do którego ta krzywa ma być styczną,—promieniem tym BC kreślę koło, prowadzę średnice do siebie prostopadłe BC i BE i końce ich łączę cięciwami, ze środka B prowadzę prostopadłe do tych cięciw 2, 4 i 1, 3 i dzielę je na sześć równych cięciw, podziały te oznaczam liczbami 1, 2, 3... 12, a punkta te wzięte w odwrotnym porządku są środkami łuków stycznych wewnętrznie, których proste środków są 12, 11; 11, 10... 2, 1. Promieniem pierwszego łuku jest zazwyczaj 12C, lecz w takim razie łuk ten nie jest stycznym do oka, lepiéj więc brać 12D, albo *a* C, bo wtedy będzie styczny; łuk ten skończy się w R na linii 12, 11 środek przejdzie do punktu 11 i promień powiększy się o linię 11, 12; promieniem 11R kreślę łuk do punktu Q, środek przejdzie do punktu 10 zaś promień powiększy się o linię 11, 10 i t. d.

247. *Zl. Linia Jajowata* (*ove*) fig. 213).

Linia AB jest szerokością krzywéj, ze środka jéj C wyprowadzam prostopadłą CK, linię CB połowię w punkcie D i odcinam AF i BE równe AD t. j. $^3/_4$ szerokości; na linii AB jako średnicy zakreślam okręg i przez punkta H i G połowiące ćwiartki dolne BN i NA z punktami E i F łączę prostemi i z punktów E i F promieniami EA i FB zakreślam łuki AL i BM; z punktów G i H promieniami GM i HL zakreślam łuki przez środek cięciwy GH równoległéj do AB, będącéj linią środków tych łuków; prostą NK połowię w J i prowadzę linie GJ, a ta daje promień JS łuku SO, stycznego do łuków LO i MS.

248. *Zl.* Krzywą zbliżoną do spiralnéj kreślimy dwoma sposobami, albo rozwijając, albo zwijając obwód wielokąta. W pierwszym razie, wierzchołki linii łamanéj są środkami łuków stycznych wewnętrznie, promieniem pierwszego jest bok a następnie promień powiększa się o bok idący po tym wierzchołku—przeto im mniejsze boki, tém linia bardziéj zbliża się do spiralnéj; za pomocą tego sposobu można nakreślić arkadę, niemającą poziomėj podstawy, zbliżoną do linii ciągnionéj. Niech AB (fig. 214) wyraża wzniesienie jednego końca arkady nad poziomą przechodzącą przez drugi koniec i AC szerokość krzywéj; arkada powinna zawierać 180°, przeto potrzeba rozwinąć połowę tylko wielokąta. Chcąc aby krzywa składała się z ośmiu łuków, na AB kreślę dziewięciokąt, mający bok pierwszy i ostatni prostopadły do téj linii, dla tego aby łuki były styczne do AB i linii do niéj równoległéj t. j. do drugiego uszaku. Odcinam AD równe obwodowi wielokąta bez jego podstawy AB i odcinam CE=AD,—wyprowadzam prostopadłą EF i rysuję na niéj wielokąt AG zrysowany na AB, a wierzchołki jego, wzięte za środki łuków stycznych, dają żądany owal.

PLANIMETRYI CZĘŚĆ II.

Płaszczyzny ograniczone liniami.

ROZDZIAŁ I.

Równość.

§ 1. Przystawanie.

249. Płaszczyzna ograniczona liniami nosi też same nazwiska jak linie ograniczające ją i zowie się trójkątem, czworokątem i t.d.; summa zaś linii ograniczających płaszczyznę zowie się jéj obwodem. Obwód figury różni się od figury, uważanéj jako połączenie linii tém, że w połączeniu linii uważaliśmy własności kształtu czyli zależność jednych od drugich co do wielkości i położenia wyrażanego przez kąty, zaś obwód wyraża tylko summę tych linii. Płaszczyzna ograniczona okręgiem, zowie się *kołem*,—ograniczona łukiem i jego cięciwą, *odcinkiem*,—zaś łukiem i promieniami przez jego koniec przechodzącemi, *wycinkiem*. Figury są równe gdy mają kształt i wielkość jednakową—takiemi są figury przystające we wszystkich punktach i figury sy-

metryczne. Płaszczyzny mające trzy punkta wspólne, mają wszystkie punkta wspólne czyli stanowią jedną płaszczyznę (18, 2°), przeto płaszczyzny ograniczone przystają, gdy ich obwody przystają do siebie. Przystawanie figur ograniczonych liniami prostemi, uskutecznia się na téj zasadzie, że punkt pada na punkt dla równości linii prostych (4. Wn. 4), zaś linia prosta przystaje do linii dla równości kątów (40); lecz dla innych figur to nie ma miejsca, ich przeto przystawanie zasadza się na własności punktów i linii odpowiednich, jak w kołach na własności ich środków. Płaszczyzny ograniczone tak prostemi, jako téż i krzywemi jeometrycznemi liniami (punkta bez przerwy po sobie idące, mające jednakową własność), mają pewne punkta odpowiednie, jak w okręgach środek,—w owalu utworzonym ciągłym ruchem czyli hiperboli (244) dwa punkta, od których summa odległości każdego punktu owalu jest jednakowa i t. d., w ograniczonych prostemi liniami, wierzchołki kątów: równych zawartych między równemi bokami, przeciwległych bokom równym, odpowiednie części boków i t. d. Jeśli z punktu jednéj figury poprowadzimy dowolne proste do jéj obwodu, z punktu zaś odpowiedniego drugiéj figury linię główną odpowiednią któréjkolwiek linii pierwszéj figury, a inne tak, aby kąty rachowane od dwóch linii głównych odpowiednich tych figur kolejno były sobie równe, linie te zowią się nachylonemi, a punkta zbiegu punktem *nachylenia* (Convergenzpunkt); przeto *nachylone odpowiednie w dwóch figurach są te* *które czynią z odpowiedniemi głównemi liniami kąty równe*, punkta zaś przecięcia się ich z obwodem lub z sobą zowią się *odpowiedniemi* (homologe), różnica między pierwszemi punktami odpowiedniemi, przez które poprowadziliśmy główne linie odpowiednie, — a ostatniemi, wyznaczonemi przez inne linie odpowiednie, jest ta, że pierwsze wskazuje nam sam kształt figury t. j. główną własność różniącą ją od innych figur, zaś ostatnie, są punkta jednakowo położone względem pierwszych. — Figurami równemi mogą być tylko figury tego samego nazwiska, trójkąty, prostokąty, pięciokąty, okręgi, wycinki i t. d. gdyż takie tylko pod względem kształtu mają jednakową główną własność, a tém samém i odpowiednie główne punkta.

250. *Tw. gł. Gdy nachylone odpowiednie są sobie równe*: AD=ad, AF=af.., *to i oddalenia odpowiednich punktów są jednakowe*: EG=eg, EF=ef, GC =gc (fig. 215).

Linie łączące odpowiednie punkta są sobie równe jako boki trójkątów mających z założenia po dwa boki i po kącie zawartym równym (92).

Wn. Kąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta są sobie równe, gdyż kąt EDA=*eda*, ADF=*adf* jako kąty trójkątów mających po dwa boki i po kącie zawartym równym, zatém i kąt EDF=*edf* i t. d. Kąt AHC=*ahc*, gdyż kąt HAC=*hac* i ACG=*acg*.

251. *Tw. od. Gdy oddalenia odpowiednich punktów* A, E, G, D,.., a, e, g, d.., *są jednakowe, to linie łączące te punkta z którymkolwiek z nich, lub z punktem jednakowo oddalonym od dwóch odpowiednich, są nachylone odpowiednie* (fig. 241).

1° Linie AE i *ae*, AG i *ag*, AD i *ad*.., są nachylone odpowiednie, gdyż trójkąty AEG i *aeg*, AGD i *agd*.., jako mające z założenia po trzy boki równe, mają kąty A i *a* równe. 2° W figurach EDCB i *edcb* punkta A i *a* są równo oddalone od punktów odpowiednich E, B i *e*, *b*, a linie AE, AG, AD.., *ae*, *ag*, *ad*.., są nachylone odpowiednie, gdyż kąt A=*a* jako w trójkątach EAB i *eab* mających po trzy boki z założenia równe;—bok AC=*ac* i kąt CAB=*cab* jako w trójkątach mających boki AB=*ab*, BC=*bc* i kąt B=ABE+EBC, równy kątowi *b*=*abe*+*ebc* gdyż ABE=*abe* z poprzedzających trójkątów i EBC=*ebc* (250. Wn.)—linia AF=*af* i kąt FAC=*fac* jako w trójkątach mających boki AC=*ac*, CF=*cf* i po kącie zawartym równym jako będącym różnicą kątów FCB i ACB, *fcb* i *acb*, i t.d.

252. *Tw. gl. Gdy nachylone odpowiednie są sobie równe, figury przystają do siebie i nawzajem* (f. 214).

1° Linie odpowiednie główne AD i *ad* są sobie równe, prowadzę z punktu A dowolne linie AE, AG, AF.., zaś z punktu *a* linie *ae*, *ag*, *af*.., tak aby kąt EAD=*ead*, GAD=*gad*, DAF=*daf*.., i zakładam że one odpowiednio są sobie równe AE=*ae*, AG=*ag*, AF=*af*.., a mam dowieść że figura *ad* przystaje do AD.—Przenoszę figurę *ad* na AD tak aby punkt *a* padł na

A, linia główna *ad* padła na linię główną AD, to punkt *d* padnie na D dla równości tych linii, wtedy linia *ae* przystanie do linii AE dla równości kątów EAD i *ead* i punkt *e* padnie na E dla równości tych linii; dla podobnéj przyczyny wszystkie odpowiednie linie, a tém samém i punkta, przystają do siebie, a że punkta E, G, F.., są dowolne, przeto wszystkie punkta obwodu figury *ad* przystają do obwodu figury AD, a zatém figury te przystają we wszystkich punktach (149).

2⁰ I nawzajem: gdyż po przeniesieniu figury *ad* na AD, jeśli z jakiegokolwiek punktu poprowadzimy linie do obwodu jednéj figury, one będą wspólne dla obu figur, a przeto w obu figurach są sobie równe i czynią z jedną z nich kąty równe.

Wn. Wielokąty przystają do siebie gdy ich wierzchołki przystają, są więc sobie równe gdy linie poprowadzone do ich wierzchołków, są nachyleniami odpowiedniemi. Odpowiedniemi punktami wielokątów są punkta dzielące boki równe na jednakowe części; odpowiedniemi zaś liniami, są linie dzielące kąty równe na części odpowiednie — w figurach więc równych tak linie łączące punkta odpowiednie, jako też same linie odpowiednie, są sobie równe.

253. *Tw. Wielokąty przystają, gdy mają boki i kąty idące w tym samym porządku równe* (fig. 215). Poprowadziwszy przekątnie z wierzchołków odpowiednich A i *a*, one są pochyłemi odpowiedniemi AD i *ad* jako leżące w trójkątach EAD i *ead* mających po dwa boki równe i po kącie E i *e* zawartym między

temi bokami równym,— linie AC i *ac* dla téj saméj przyczyny są odpowiednie, kąt bowiem ADC=*adc* gdyż EDC=*edc*, z założenia, zaś EDA=*eda* z poprzedzającego trójkąta i t. d.

Wn. 1. Wielokąty równe składają się z jednakowéj liczby trójkątów równych i podobnie położonych i nawzajem.

Wn. 2. Trójkąty są równe gdy mają po dwa boki i po kącie zawartym równym, gdyż te dwa boki są pochyłemi odpowiedniemi; lecz że trójkąty, w sześciu przypadkach, mając trzy części równe mają i pozostałe części równe, przeto w tych wszystkich przypadkach № 92, 93... 97, trójkąty są sobie równe i dla tego one zowią się: *sześcioma przypadkami przystawania trójkątów*; te 6 przyp. przystawania trójkątów od poprzedzających różnią się tém, że tam równość trzech części pociągała za sobą tylko równość trzech pozostałych, tu zaś równość trzech części, pociąga za sobą równość wszystkich linii odpowiednich (252. Wn.) i kątów między temi liniami zawartych.

Wn. 3. *Czworokąty są sobie równe gdy mają po pięć części równych, gdyż składają się z trójkątów równych i podobnie położonych* (253. Wn. 1). A głównie: *a*) *wszystkie boki kolejno równe i po jednym kącie* (fig. 216), bo poprowadziwszy przekątnie BD i FH przeciwległe kątom równym A i E, — pierwsze dwa trójkąty DAB i HEF są równe jako mające po dwa boki i kącie zawartym równym z założenia, drugie zaś jako mające po trzy boki równe, dwa z założenia a trzeci z poprzedzających trójkątów; *b*) *trzy* *boki i dwa kąty między niemi zawarte równe*: AB=EF, BC=FG, CD=GH i kąt B=F, C=G, gdyż trójkąty BCD i FGH z założenia mają po dwa boki i kącie zawartym, zaś trójkąty ABD i EFH mają bok AB=EF z założenia, BD=FH z poprzedzających trójkątów, i kąt zawarty ABD=EFH jako różnice kątów równych: czworokąta i pierwszego trójkąta; *c*) *po trzy kąty i dwa boki przy nich leżące równe*: kąt A=E, B=F, D=H i bok AB=EF, AD=EH; trójkąty ABD i EFH, mają z założenia po dwa boki i po kącie zawartym, zaś BCD i FGH bok BD=EH i kąty przy nim leżące jako różnice, kątów równych z założenia i kątów dwóch pierwszych trójkątów; *d*) *po cztery boki i przekątniéj*, gdyż tak dwa pierwsze jako też i dwa drugie trójkąty mają po trzy boki równe.

Wn. 4. *Równoległoboki są równe gdy mają po trzy części równe*, gdyż równoległość boków przeciwległych zastępuje dwa pozostałe warunki—a głównie *dwa boki i kąt zawarty*, *dwa boki i przekątnia łącząca ich końce*. *Prostokąty są równe gdy mają po dwa boki przyległe* równe, gdyż prostopadłość boków zastępuje miejsce trzeciego warunku; *kwadraty ukośne* czyli *romby są równe, gdy mają po boku i kącie równym*,—równość boków zastępuje miejsce trzeciego warunku. Kwadraty są równe gdy mają po boku równym,—równość boków i kątów zastępuje miejsce dwóch innych warunków.

Wn. 5. *Wielokąty są równe gdy mają wszystkie części równe, prócz trzech niebędących samemi bokami*—co miało miejsce w trójkątach i czworokątach:

a) *dwóch boków i kąta między niemi zawartego* (fig. 215): DE i *de*, EA i *ea* i kąt E i *e*: poprowadziwszy z wierzchołków A i *a* przekątnie, trójkąty ABC i *abc*, mają po dwa boki i kącie między niém zawartym równym z założenia, podobnie trójkąty ACD i *acd* mają bok AC=*ac* z poprzedzających trójkątów, CD=*cd* z założenia i kąty między niemi zawarte równe, jako różnice kątów wielokąta i trójkąta poprzedzającego i t. d. ostatnie zaś trójkąty DEA i *dea* mają bok AD=*ad* z poprzedzających trójkątów i kąty przy nim leżące równe D=*d*, jako różnice kątów równych, DAE =*dea* różnice między kątami wielokąta a summą kątów poprzedzających trójkątów mających wierzchołek w A i *a*; *b*) *dwóch kątów i boku będącego wspólnym ich ramieniem*: D i *d*, E i *e* i boku DE i *de*, pierwsze trójkąty są równe jak poprzednio, ostatnie zaś ADE i *ade* mają po dwa boki i po kącie zawartym równym: AD=*ad* z poprzedzającego trójkąta, AE=*ae* z założenia, kąt DAE=*dae* jako różnice kątów równych wielokąta i summy kątów mających wierzchołki w A i *a* poprzedzających trójkątów; *c*) *trzech kątów kolejno idących*: D i *d*, E i *e*, A i *a*; pierwsze są równe jak poprzednio, ostatnie zaś ADE i *ade* jako mające po trzy boki równe. *d*) *Wielokąty są także równe gdy mają boki i przekątnie równe*, gdyż trójkąty z założenia mają po trzy boki równe. *e*) *Wielokąty foremne są sobie równe, gdy mają po boku równym*, bo wtedy wszystkie boki i kąty są także równe.

Wn. 6. *Koła są sobie równe, gdy mają promieni równe* (fig. 217). Poprowadziwszy w jedném z nich dowolne promienie OA, OC, OD, OB.., w drugim zaś dowolny promień *oa*, a inne promienie tak, aby czyniły z tym promieniem takie kąty, jakie w kole O czynią inne promienie z OA t. j. *aoc*=AOC, *aod*=AOD, AOB=*aob*.., to promienie te są nachylone odpowiednie, a że są sobie równe, przeto i koło *o* równe kołu O (252). *Wycinki* AOB i *aob* okręgów równych zawierające jednakową liczbę stopni są sobie równe, gdyż poprowadziwszy w jednym z nich dowolne promienie, zaś w drugim odpowiednie, co uskutecznić można z przyczyny równości kątów AOB i *aob*, nachylone te są sobie równe. *Odcinki* kół równych i równych łuków ADB i *adb* są sobie równe, gdyż poprowadziwszy odpowiednie pochyłe, one są sobie równe, przeto łuk *adb* przystaje do łuku ADB, i cięciwa *ab* do cięciwy AB z przyczyny przystawania punktów A z *a* i B z *b*.

§ 11. Symetryczność.

254. Figury symetryczne tém się różnią od przystających, że ich punkta odpowiednie idą w przeciwnym porządku, linie więc łączące odpowiednie punkta, równie jak i nachylone, są sobie równe, i zawierają kąty równe, tak jak w figurach przystających, tylko leżą w przeciwnym porządku. Linia połowiąca kąt zawarty między dwoma liniami odpowiedniemi dwóch figur symetrycznych, wychodzącemi z ich punktu wspólnego odpowiedniego, lub odpowiednio położonego zowie się *osią symetryi*, figury zaś *symetrycznie polo-*

*żonemi względem téj osi.**) Tylko figury symetryczne płaskie przystają do siebie, gdyż płaszczyzny jakkolwiek położone, wierzchnią lub spodnią stroną do wierzchniéj, mając trzy punkta wspólne przystają do siebie,—przystawanie to uskutecznia się położeniem wierzchniéj strony płaszczyzny na wierzchnią. W powierzchniach np. wypukłych, wierzchnia strona różni się od spodniéj, gdyż jedna jest wypukłą a druga wklęsłą, a przeto ani wierzchnia do wierzchniéj, ani spodnia do spodniéj części nie przystaje, lecz tylko spodnia do wierzchniéj—ztąd widzimy, że przystawanie figur symetrycznych płaskich wynika z wyłącznéj własności płaszczyzn. W ogólności więc figury symetryczne mają kształt i wielkość jednakową lecz nie przystają do siebie. Nazwawszy równemi figury mające kształt i wielkość jednakową, odróżnić należy własność figur przystających, od własności figur nieprzystających, lecz równych przez symetryją.

255. *Tw. gł. Wierzchołki figur symetrycznych leżą na linii prostopadłéj do osi symetryi w równéj od niéj odległości.*

*) Podług dawniejszych Jeometrów, figury symetryczne są te, których punkta odpowiednie leżą na liniach prostopadłych do osi lub płaszczyzny symetryi, w równéj od niéj odległości; definicya więc ta nie ściąga się do figur symetrycznych bezwzględnie uważanych, które w każdém położeniu są symetrycznemi np. dwa trójkąty prostokątne powstałe z trójkąta symetrycznego, z których jeden posuwany po płaszczyznie, nie przystaje do drugiego w żadném położeniu,—lecz ściąga się do szczególnego położenia względem linii lub płaszczyzny dwóch figur symetrycznych.

1° Jeżeli punkt C, odpowiedni i wspólny dla obu figur symetrycznych leży na ich obwodzie ABC i *a'b'*C lub *a''b''*C (fig. 218), to dla pierwszéj z drugą osią symetryi jest linia CX' połowiąca kąt między liniami odpowiedniemi CA i C*a'* wychodzącemi z punktu C, a tém samém i między wszystkiemi liniami łączącemi ten punkt z punktami odpowiedniemi B, *b*... bo jeśli kąt ACX'=*a'*CX, to i kąt BCX'=*b'*CX', gdyż dodaliśmy kąty równe ACB i *a'*C*b'* jako zawarte między liniami odpowiedniemi (250. Wn.); połączywszy więc punkta odpowiednie A z *a'* otrzymamy trójkąt równoramienny AC*a'*, gdyż linie CA i C*a'* łączące punkta odpowiednie figur symetrycznych są sobie równe, a zatem oś CX' dzieląca kąt tego trójkąta jest prostopadła do środka jego podstawy A*a'*; dla podobnéj przyczyny linia CX' jest prostopadłą do środka podstawy B*b'* trójkąta symetrycznego BC*b'* i t. d. 2° Jeżeli punkta symetrycznie i odpowiednio położone względem dwóch odpowiednich punktów dwóch figur symetrycznych (fig. 219), umieściemy w jednym punkcie C' i z tego punktu poprowadzimy odpowiednie pochyłe C'A, C'B, C'C.., C'*a*, C'*b*, C'*c*.., to linia C'X połowiąca kąt między odpowiedniemi pochyłemi C'A i C'*a* jest osią symetryi;—oś symetryi połowiąca kąt dwóch odpowiednich pochyłych, połowi kąty zawarte między innemi pochyłemi, gdyż kąt AC'B =*a*C'*b*, AC'C=*a*C*c*.., przeto w trójkątach równoramiennych AC'*a*, BC'*b*, linia C'X połowiąca kąt jest prostopadłą do środka podstawy.

Uw. Jeżeli dwa wielokąty symetryczne mają jeden bok odpowiedni wspólny, to on jest osią symetryi, gdyż połowi kąt zawarty między liniami łączącemi koniec tego boku (lub jakikolwiek punkt jego) z dwoma punktami odpowiedniemi tych figur, bo każda z nich CB i C*b* czyni ze wspólnym odpowiednim bokiem CA kąty równe (250. Wn.).

256. *Tw. od. Figury* ABC i *a'b'c' mające punkta na prostopadłéj do linii* C'X' *w równéj od niéj odległości, są symetryczne, zaś linia* C'X' *jest osią symetryi* (fig. 219).

Z punktu dowolnego C' linii C'X' do któréj poprowadzone prostopadłe A*a'*, B*b'* C*c'*, zawarte między obwodami figur ABC i *a'b'c'*, są sobie równe;—prowadzę linie C'A, C'*a'*, C'B, C'*b'*.., a mam dowieść że one są odpowiedniemi nachylonemi. Trójkąty AC'*a'*, BC'*b'*, CC'*c'*.., są symetryczne, gdyż z założenia prostopadła X'C' połowi ich podstawy, przeto C'A=C'*a'*, C'B=C'*b'*,=C'C=C'*c'*, i kąty CC'X'=*c*'C'X', BC'X'=*b'*C'X, AC'X'=*a'*C'X' jako różnice kątów równych utworzonych przez oś symetryi w trójkątach równoramiennych (91. Wn. 3); linie więc C'A, C'B, C'C i C'*a'*, C'*b'*, C'*c'* jako równe i tworzące odpowiednio kąty równe są nachylone odpowiednie, a że idą w przeciwnym porządku, przeto figury ABC i *a'b'c'* są symetryczne, linia zaś C'X' połowiąca kąt CC'*c* jest osią symetryi.

Wn. Figury symetryczne i symetrycznie położone, obracane około osi symetryi przystają do siebie, gdyż linie łączące odpowiednie punkta, jako prostopadłe do téj osi przystają dla równości kątów równych, zaś punkta odpowiednie przystają dla równości prostostopadłych; *albo* nachylone odpowiednie przystają dla równości kątów zawartych między temi liniami a osią, zaś punkta odpowiednie przystają dla równości tych linii.

257. *Zg.* Wykreślić wielokąt równy danemuABCD... za pomocą *a*) *trójkątów równych i jednakowo położonych* (fig 220). Z wierzchołka A prowadzę przekątnie AD, AC, AB, i na linii *ae*=AE kreślę trójkąt *aed* =AED, zapomocą trzech boków albo téż dwóch i kąta zawartego(109); następnie trójkąt *adc*=ADC i t.d. *b*) *prostopadłych na linie odpowiednie*; prowadzę linię dowolną XY, i na nią z wierzchołków wielokąta prostopdałe, na linii *xy* odcinam *xf*=XF, FJ=*fi*, JG=*ig*, GH=*gh* i z punktów *f*, *i*, *g*, *h*, wyprowadzam prostopadle równe odpowiednim *fb*=FB, *gc*=GC.., a wielokąt *bcdea* jest żądany, gdyż po położeniu linii *kh* na KH, wielokąty przystają do siebie; *c*) *prostopadłych na boki trójkąta, czworokąta* i t. p. (fig. 221); kreślę trójkąt AEG mający za wierzchołki trzy wierzchołki wielokąta, zaś z innych na boki trójkąta prowadzę prostopadłe, kreślę trójkąt *aeg*=AEG i odcinam *ai*=AJ, *ik*=JK i t. d. i z punktów ztąd otrzymanych prowadzę prostopadle równe odpowiednim *ib*=JB, *kc*=KC.., a wielokąt *abcd*.., równa się wielokątowi ABCD.., gdyż po położeniu trójkąta *aeg* na AEG, wierzchołki przystają do siebie; *d*) *równoległych* (fig. 222); przez wierzchołki wielokąta prowa-

dzę równoległe równe sobie A*a*, B*b*, C*c*.. a wielokąt *abcde* ma z danym boki i kąty równe, gdyż czworoboki A*c*, E*d*... jako mające dwa boki równe i równolegle, sąrównoległobokami; *e*) *opisania figury prostokątem podzielonym na kwadraty* (fig. 223); kreślę prostokąt *fi*=FJ, i dzielę go na takie kwadraty na jakie podzieliłem FJ; dla oznaczenia w prostokącie *hg* punktów odpowiednich punktom ABCD.., w odpowiednich kwadratach znajduję punkta jednakowo położone względem któregokolwiek boku tego kwadratu np. w 1*k* punkt *a* odpowiedni punktowi A kwadra- 1K, zakreślając z *l* promieniem LA łuk, przecinając go z *k* promieniem KA;—po przeniesieniu więc prostokąta *hg* na HG, kwadraty a tém samém punkta odpowiednie przystają do siebie.

Uw. Podług powyższych sposobów otrzymamy figury symetryczne, biorąc linie odpowiednie w przeciwnym porządku i tak w *a*) biorąc punkt *e* za odpowiedni z A, zaś *a* z E i trójkąty idące z prawéj ku lewéj stronie rysując w porządku od lewéj ku prawéj w *b*) prostopadłe będące nad XH, prowadząc pod *xh* lub ten sam zostawiając kierunek prostopadłych, odcinki linii XH wziąć na linii *xh* od punktu *h* do *x*; w *c*) biorąc punkt *a* za odpowiedni z G zaś *g* za odpowiedni z *a*; w *d*) prowadząc linię C'X' (fig. 219) prostopadłą do linii równoległych, poprowadzonych z wierzchołków figury ABC tak, aby przedłużenia ich nad linią prostopadłą równały się samym liniom rachowanym do téj prostopadłéj; w *e*) biorąc bok *gi* za odpowiedni bokowi FH.

258. *Zł.* Chcąc figurę daną przenieść na kamień, blachę i t. p. tak aby po położeniu powierzchni kamienia na powierzchnią figury przystały do siebie, potrzeba odrysować na kamieniu figurę symetryczną z daną, bo takie tylko figury przystają po położeniu na sobie jednakowych stron płaszczyzny figur (254 i 256. Wn.). Jeśli figurę litografowaną na papierze przeniesiemy na kamień, to ona na kamieniu będzie symetryczną względem danéj, zaś kamień przy odbiciu da symetryczną względem figury będącéj na kamieniu, a tém samém równą zrysowanéj na papierze, gdyż w obu tych figurach linie odpowiedniesą w odwrotnym porządku z liniami figury będącéj na kamieniu, a zatém idą w jednakowém porządku.—W Budownictwie ozdoby robią się zazwyczaj symetrycznie.

ROZDZIAŁ II.

Podobieństwo.

§ 1. Podobieństwo proste.

259. Jak figury równe są te w których odległości odpowiednich punktów (249) są proporcyonalne, tak podobnemi są te w których odległości odpowiednich punktów są proporcyonalne.

Figury równe mogły być albo przystające, albo równe przez symetryą podług tego, czy punkta odpowiednie leżały w tym samym lub w przeciwnym porządku, również figury podobne mogą mieć punkta odpowiednie leżące w tym samym lub w przeciwnym porządku, a podług tego może zachodzić *podobieństwo proste* lub *odwrotne*.

260. *Tw. gł. Jeżeli nachylone odpowiednie, są w jednakowym stosunku, to i oddalenia odpowiednich punktów są w tymże samym stosunku* (fig. 224).

Trójkąty AEF i *aef* mające z założenia dwa boki AF i *af*, AE i *ae* w jednakowym stosunku i po kącie zawartym, równym,—mają i dwa pozostałe boki FE i *fe* w tym samym co pierwsze stosunku i kąty odpowiednio równe, trójkąty ADE i *ade*, dla téj saméj przyczyny mają boki ED i *ed* w tym samym co i linie nachylone stosunku i kąty równe i t. d.

Wn. 1. Kąty AFE i *afe*, FED i *fed*, zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta, są sobie równe, czyli że położenie odpowiednich linii jest jednakowe, pierwsze kąty są równe, jako leżące w trójkątach AFE i *afe* naprzeciw boków odpowiednich AE i *ae*, drugie jako summy kątów równych z pierwszych i drugich trójkątów.

Wn. 2. Figury są podobne, gdy nachylone odpowiednie są proporcyonalne.

261. *Tw. od. Gdy oddalenia odpowiednich punktów* A, B, C.., *a*, *b*, *c*.., *są w jednakowym stosunku, to linie łączące te punkta z którymkolwiek z nich lub z punktem proporcyonalnie oddalonym od dwóch odpowiednich, są nachylonemi odpowiedniemi* (fig.224).

1° Linie AF i *af*, AE i *ae*, AD i *ad*.., są nachylone odpowiednie, gdyż trójkąty AFE i *afe* mające po kącie F i *f* równym (260. Wn. 1), zawartym między bokami proporcyonalnemi mają kąt EAF=*eaf*; trójkąty EAD i *ead* dla téj saméj przyczyny mają kąt DAE=*dae* i t. d. 2° W figurach BCDEF i *bcdef* z punktu dowolnego A prowadzę linie AB, AC.., do punktów jednéj figury, w drugiéj zaś dla znalezienia punktu odpowiedniego punktowi A, z punktu *f* prowadzę linię *fa* czyniącą kąt *bfa*=BFA i z punktu *b*, linię *ba* czyniącą kąt *fba*=FBA, to punkt *a* jest odpowiedni punktowi A, gdyż odległości ich od punktów odpowiednich B z *b* i F z *f* są proporcyonalne do odległości samychże punktów BF i *bf* (139. Wn. 8), a potrzeba dowieść że linie AB, AC, AD.., *ab*, *ac*, *ad*.., są pochylonemi odpowiedniemi. Trójkąty ABC i *abc* mające kąt B=*b* jako summy kątów ABF=*abf* z wykreślenia, FBC=*fbc* (160. Wn. 1), i boki zawierające te kąty, proporcyonalne, mają kąt BAC=*bac*; dla podobnéj przyczyny kąt CAD=*cad* i t. d.

Wn. 1. W figurach podobnych nachylone odpowiednie są proporcyonalne.

Uw. W wielokątach punkta odpowiednie biorą się tylko w wierzchołkach wielokątów, gdyż boki jako linie proste są podobne (4. Wn. 1), przeto i pochylone odpowiednie prowadzą się tylko do tych punktów.

262. *Tw. Wielokąty są podobne gdy mają kąty równe i boki odpowiednie proporcyonalne idące w tym samym porządku* (fig. 224).

Poprowadziwszy przekątnie z wierzchołków odpowiednich A i *a*, będą one nachylonemi odpowiedniemi, bo kąt BAC=*bac*, CAD=*cad*.., jako kąty trójkątów mających po kącie równym zawartym między bokami proporcyonalnemi.

Wn. 1. Wielokąty podobne składają się z jednakowéj liczby trójkątów podobnych i podobnie położonych,—i nawzajem.

Wn. 2. Gdy wielokąty podobne położymy tak aby miały punkt odpowiedni lub punkt nachylenia i dwie linie lub nachylone, odpowiednie wspólne, to wszystkie linie odpowiednie tych wielokątów są względem siebie równoległe(fig.225, i III lub II), gdyż punkt odpowiedni A można wziąć za punkt nachylenia, to nachylone odpowiednie, jako czyniące z liniami przystającemi AB i *ab* kąty równe, przystają do siebie, zaś linie odpowiednie łączące ich końce, jako dzielące nachylone AB, AC, AD. , na części proporcyonalne są względem siebie równoległe—*i nawzajem*: dwa wielokąty mające jeden punkt i linie łączące ten punkt z wierzchołkami, wspólne, zaś boki równoległe, są podobne gdyż te linie, odpowiednie pochyłe, są proporcyonalne, jako odcinki przecinających się, przeciętych równoległemi.

Wn. 3. *Trójkąty są podobne gdy mają po dwa boki proporcyonalne zawierające kąty równe*, gdyż te dwa boki są pochyłemi odpowiedniemi; a zatém trójkąty są podobne gdy mają: *a*) *po trzy kąty równe*, co może wynikać z równoległości lub prostopadłości boków, albo z jednakowego ich nachylenia (98. Uw. 1), bo mają po trzy boki proporcyonalne, *b*) *trzy boki proporcyonalne* (fig. 126), gdyż odciąwszy BG i BH równe DE i EF, trójkąt BGH z trójkątem DEF mają po trzy boki równe, bo i GH=DF, jako cztwarte wyrazy dwóch proporcyi,—AB: DE=AC: DF z założenia, i AB:BG=AC: GH dla równoległości linii GH (139. Wn. 2 i 5),—mających trzy wyrazy jednakowe, przeto i kąt A=G=D i C=H=F;—*c*) *dwa boki proporcyonalne* AB: DE=AC: DF *po kącie niezawartym równym, byle druga para kątów niezawartych była jednogatunkowa*; gdyż odciąwszy ED na BA przez punkt G prowadzę GH, równolegle do AC, to trójkąt ABC podobny trójkątowi GBH,—trójkąt zaś GBH równy trójkątowi EDF (95), bo mają bok GH=DF jako czwarte wyrazy proporcyi mających trzy wyrazy równe, kąt E =B z założenia: a że kąty F i C są jednogatunkowe, przeto i kąty F i H są jednogatunkowe, zatem te oba trójkąty są albo ostrokątne, albo rozwartokątne. W czterech więc przypadkach trójkąty są podobne i w tych przypadkach od trzech części danych nietylko zależą trzy pozostałe części, ale i wszystkie linie łączące punkta odpowiednie, których stosunek równą się stosunkowi boków i kąty zawarte między temi liniami są sobie równe.

Wn. 4. Czworokąty są podobne gdy mają pięć części danych, w których boki proporcyonalne zaś kąty równe, między któremi znajdują się przynajmniej dwa boki, gdyż wtedy składają się z trójkątów podobnych i odpowiednio położonych; — zachodzą tu podobne przypadki jak w równości (253, Wn. 3) i podobnie się dowodzą.

Równoległoboki są podobne gdy mają po trzy części dane, gdyż równoległość boków zastępuje dwa pozostałe warunki, a mianowicie: po dwa boki proporcyonalne zawierające kąty równe, dwa boki przy sobie leżące i przekątnią łączącą ich końce proporcyonalne. *Prostokąty* są podobne gdy mają po dwa boki przy sobie leżące proporcyonalne, gdyż kąty między temi bokami zawarte, jako proste są sobie równe: *kwadraty ukośne* czyli *romby* są podobne, gdy mają po jednym kącie równym, gdyż stosunki ich boków są sobie równe, bo w jednym i w drugim, boki nie różnią się od siebie. Wszystkie kwadraty są podobne, bo kąty ich proste są sobie równe, a stosunki boków jednakowe, dla téj saméj jak i w rombach przyczyny.

Wn. 5. Wielokąty są podobne gdy mają wszystkie części dane, prócz trzech niebędących samemi bokami, w danych zaś częściach stosunek boków jest jednakowy a kąty równe — przypadki są odpowiednie jak w równości i podobnie się dowodzą (253. Wn. 5).

Uw. 1. *Wszystkie koła są podobne*, bo ich pochylone odpowiednie, wychodzące ze środków, jako w jednym i drugim równe między sobą, są w jednakowym stosunku (260. Wn. 2). Dla podobnej przyczyny *wycinki i odcinki kół*, których łuki są jednakową częścią swoich okręgów, są podobne.

Wn. 2. Figury są odwrotnie podobne, gdy punkta odpowiednie idą w przeciwnym porządku t. j. jeśli jedna figura jest podobną z figurą symetryczną drugiéj. Figury podobne mające wspólny punkt nachylenia O i nachylone odpowiednie na liniach prostych, tak położone w jednym kierunku (fig. 226), jako téż i w przeciwnym (fig. 227) są podobnemi wprost, gdyż w drugim razie obracając jedną figurę około punktu nachylenia, gdy nachylona odpowiednia O*a* przystanie na OA, to i inne przystaną do siebie. Punkt nachylenia O bezzasadnie zowią punktem *podobieństwa prostego* gdy on leży zewnątrz figur (fig. 226), zaś *podobieństwa odwrotnego* gdy leży między figurami (fig. 227), albowiem w obu razach figury jednakowo są podobne, tylko niejednakowe mają położenie, a mowa jest nie o położeniu, lecz o samych figurach. Dla téj to przyczyny w połączeniu okręgów, punkta przecięcia się stycznych wspólnych do dwóch okręgów, nienazywamy punktem podobieństwa prostego lub odwrotnego, lecz punktem sprzężonym z linią środków zewnętrznym lub wewnętrznym, podług tego czy leży na przedłużeniu lub na saméj linii środków. Figury odwrotnie podobne (fig. 228), jeżeli mają nachylone na liniach prostych, to odpowiednie nie są na tych samych liniach, lecz w przeciwnym porządku, linia OX połowiąca kąt między odpowiedniemi pochyłemi OD i *od* jest osią symetryi i podobnie jak w równości, figura jedna *ad* obracana z swoją płaszczyzną około téj osi i położona na płaszczyznie drugiéj figury staje się jéj podobną, zaś obracana około punktu nachylenia O na płaszczyznie obu tych figur, w żadném położeniu nie jest do niéj podobną. — Przeto w figurach odwrotnie podobnych, wierzchnia strona jednéj figury jest podobna do spodniéj części drugiéj, podobnie jak w równych, wierzchnia strona jednéj przystaje do spodniéj strony drugiéj.

263. *Zg. Na linii danéj wykreślić wielokąt podobny danemu za pomocą: a) trójkątów podobnych i podobnie położonych* (fig. 224); na linii danéj *af* kreślę trójkąt *afe* podobny trójkątowi AFE, albo za pomocą dwóch boków AF i FE i przekątniéj AE zmniejszonych w stosunku AF: *af* (153), t. j. z trzech boków zmniejszonych kreślę trójkąt *afe* (109); albo z dwóch boków zmniejszonych AF i FE w stosunku boku AF do linii danéj i kąta między niemi zawartego; — na linii *ae* kreślę trójkąt *aed* z boków zmniejszonych w tym samym stosunku trójkąta AED i t. d. *b*) *Za pomocą nachylonych* (fig. 226); do boku BC odpowiedniego linii danéj prowadzę równoległą *bc* równą téj linii, i dwie zbiegające się B*b* i C*c*, to punkt O jest punktem nachylenia dla wielokąta danego ABCDE i szukanego; — pozostaje tylko z punktu O poprowadzić nachylone OA, OB, OC.., i równoległe *ba*, *ae*, *ed*, *dc*, do boków odpowiednich wielokąta danego. Wielokąty AD i *ad* są podobne gdyż nachylone OA i O*a*; OB i O*b*.., jako przecięte równoległemi, są proporcyonalne (260. Wn. 2).

Przypadki odpowiednie przypadkom równości wielokątów kreślą się tak jak N⁰ 257 *b*), *c*), *d*), *e*), tylko zamiast linii danych figury danéj, biorą się linie zmniejszone w danym stosunku; dla tego że podobieństwo od równości różni się tém tylko, że w równości stosunek linii odpowiednich równa się jedności, zaś w podobieństwie jest dowolny.

264. *Zt.* W zdejmowaniu planów potrzeba nakreślić figurę podobną figurze gruntu t. j. żeby linie proste poziome, łączące ważniejsze przedmioty lub miejsca wzięte na gruncie, były zmniejszone w danym stosunku. Jeżeli główniejsze punkta na gruncie (fig. 229) są A, C, D, E, B, F, G, H, wtedy wyobraziwszy linie proste poziome łączące te punkta, otrzymamy na gruncie wielokąt ACD ., a plan tego gruntu jest wielokątem podobnym pierwszemu, mającym linie łączące odpowiednie punkta w danym stosunku np. w planie 900 razy mniejsze od linii na gruncie. Uskuteczniając to za pomocą stolika, t. j. deski takiéj jak rajzbret mogącéj obracać się poziomo na trójnogu i mieć ruch pionowy, obieramy dwa z tych punktów A i B lub inne takie, aby z nich znaczniejsze punkta były widzialne i aby linie z tych dwóch punktów A i B poprowadzone do innych, przecinały się pod kątami zbliżonemi do prostych, gdyż linie przecinające się pod kątem prostym, najdokładniéj oznaczają punkt przecięcia się. W punkcie A ustawiamy stolik i w punkcie stolika, leżącym na pionowéj przechodzącéj przez punkt A, wbijamy cienką igłę; ustawiamy stolik poziomo, punkt stolika przystający do punktu A gruntu, bierzemy za punkt nachylenia figur podobnych gruntu i planu. Z punktu A za pomocą dioptry (66, *b*) prowadzimy na stoliku ołówkiem linie do przedmio-

łów gruntu C, D, E... których przedłużenia wyobrażalne, linie te są poziome, jako leżące na płaszczyznie pozioméj, i są nachylonemi wspólnemi dla obu figur, pozostaje tylko na nachylonych planu odciąć 900-tne części nachyłonych gruntu. W tym celu mierzę linię AB sznurem i za pomocą skali biorę linię 900 razy od niéj mniejszą i odcinam ją od A do *b*, ustawiam stolik w punkcie B poziomo, zgadzam punkt *b* stolika z punktem B gruntu, zaś obracając stolik poziomo zgadzam linie B*a* stolika z linią BA gruntu, i z punktu B prowadzę na płaszczyznie stolika proste do punktów C, D, E.., które przecinając się z nachylonemi w *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, dają punkta odpowiednie punktom wziętym na gruncie, gdyż linie *ac*, *ad*, *ae* i t. d. są 900-mi częściami linii odpowiednich, bo trójkąty BCA i B*ca*, BDA i B*da*.., mają kąty przy B wspólne, zaś kąty przy A i *a* równe, a przeto boki ich są w jednakowym stosunku AB: *a*.

Jeśli potrzeba oznaczyć tylko położenie punktów A, C, D... to plan byłby już skończonym,—jeśli zaś oprócz tych punktów są inne do oznaczenia, które albo są niewidzialne z punktów A i B, lub dla innych miejscowych przyczyn nie mogły być zdjętemi, wtedy pozostałe punkta oznaczają się za pomocą prostopadłych na linie łączące oznaczone punkta, jak to zazwyczaj robi się przy oznaczeniu kierunku rzek, brzegów jezior i t. p.

Jeżeli znaczniejsze punkta gruntu jedne z drugich są niewidzialne, jak to ma miejsce przy zdejmowaniu planu lasów, gór i t. p. to zdejmowana przestrzeń opisuje się wielokątem, który oznacza się na planie za pomocą boków i kątów między niémi zawartych, zdejmowanych albo za pomocą stolika, lub narzędzi służących do zdejmowania kątów (66), zaś inne punkta za pomocą prostopadłych na boki wielokąta, a pozostałe ograniczenie rysuje się na miejscu od ręki.

Zamiast stolika użyć można narzędzi do zdejmowania kątów, co w rozleglejszym pomiarze jest niezbędnem i wtedy kąty zawarte między nachylonemi odpowiedniemi oznaczają się w stopniach, i w tém tylko to postępowanie różni się od poprzedzającego.

Dla poznania dokładności pomiaru, mierzymy odległość między jakiemikolwiek dwoma zdjętemi punktami, i oznaczamy o ile 900-tna część téj linii różni się od odpowiedniéj linii planu.

§ 11. Stosunek obwodów.

265. *Tw. Obwody wielokątów podobnych mają się do siebie jak boki, lub téż jak linie, łączące odpowiednie punkta.*

Stosunki boków odpowiednich wielokątów podobnych są sobie równe, lecz że w stosunkach równych summa poprzedników tyle razy jest większa lub mniejsza od summy następników, ile razy którykolwiek poprzednik jest większy lub mniejszy od swego następnika *),— przeto summa boków jednego wielokąta

*) Gdyż w stosunkach 10:5, 8:4, 6:3 poprzednik równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik stosunku — 10=5. 2, 8=4. 2, 6=3. 2,

z summą boków drugiego wielokąta stanowi stosunek równy stosunkowi dwóch boków odpowiednich; lecz że stosunek dwóch boków odpowiednich równa się stosunkowi dwóch linii łączących odpowiednie punkta, a zatém i stosunek obwodów równa się stosunkowi linii łączących odpowiednie punkta.

Wn. 1. Obwody jakichkolwiek figur są w stosunku linii łączących odpowiednie punkta, gdyż na obwodach biorąc odległość dowolnie małą punktów odpowiednich, summy linii prostych łączących kolejno te punkta są w stosunku linii prostych łączących którekolwiek dwa punkta odpowiednie, a zatém i same obwody są w stosunku tych linii. Ztąd wynika, że okręgi kół są w stosunku promieni, średnic, cięciw podpierających łuki mierzące kąty równe, lub w stosunku tych łuków mierzących kąty równe jako zawartych między nachylonemi odpowiedniemi kół podobnych; gdyż stosunek summy wszystkich linii łączących odpowiednie punkta obwodów równa się stosunkowi summ jednakowéj liczby tych linii odpowiednich. Łuki wycinków i odcinków podobnych t.j. łuki zawarte między ramionami kątów równych, są w stosunku promieni lub cięciw tychże łuków.

---

a że stosunki są sobie równe, przeto następniki są pomnożone przez jednakową liczbę, zaś summa poprzedników 10+8+6 równa się summie następników pomnożonych przez tę samą liczbę (5+4+3) 2, gdyż mnożąc tę summę przez 2, mnożymy każdą liczbę oddzielnie, bo mnożenie jest skróconém dodawaniem, zaś dodając 5+4+3 do 5+4+3, możemy dodawać 3 do 3ch, 4 do 4ch, 5 do 5ciu i tego wziąć summę.

Wn. 2. Łuki AB i A'B' okręgów nierównych promieni OA i OA' są w stosunku iloczynów kątów odpowiednich przez promienie (fig. 130), gdyż AB: AB'' =AOB: A'OB' (54), tudzież AB''. A'B'=OA: OA' to i AB. AB'': AB.''A'B'=AOB.OA: A'OB.' OA' czyli AB: A'B'= AOB. AO: A'OB.' OA'. Dzieląc poprzedniki przez AO zaś następniki przez A'O otrzymamy, że stosunek kątów równa się stosunkowi łuków podzielonych przez ich promienie.

266. *Zg.* Stosunek średnicy do okręgu koła wyrazić liczbą.

Zagadnienie to rozwiązać możemy dwoma sposobami, albo *dla danego promienia znaleść wielkość okręgu*, lub téż *dla danego okręgu znaleść wielkość promienia.*

a) *Jeżeli dany promień okręgu koła jest jednością a szukamy okręgu*, wpisujemy w to koło wielokąt foremny np. kwadrat, sześciokąt, dziesięciokąt, i opisujemy na okręgu podobny wielokąt, to obwód wielokąta wpisanego jest mniejszy od okręgu, zaś opisanego większy od okręgu (105). Mierząc te obwody promieniem, t. j. wyrażając liczbą całą i ułomkiem dziesiętnym, w ilu cyfrach dziesiętnych te obwody nie różnią się od siebie, to tém bardziéj w tylu dziesiętnych cyfrach nie różnią się od okręgu zmierzonego promieniem. Wpisując i opisując wielokąt o dwa razy większéj liczbie boków, obwody ich w większéj liczbie cyfr nie będą różnić się od siebie, a tém samém otrzymamy liczbę z więcéj cyframi dziesiętnemi wyrażającą wielkość okręgu mierzonego promieniem, a zatém podług wymaganéj ścisłości możemy zmierzyć okręg promieniem, mierząc obwody wielokątów wpisanych i opisanych. I tak: obwód 6cio-kąta for. zawiera promieni 6,000000, opisanego zaś 6,928272, przeto okręg kół zawiera 6 promieni; obw. 48-ta for. zawiera promieni 6,278696, opis. zaś 6,289248, przeto okręg koła zawiera 6,2 promieni; obwód 96-kąta for. zawiera promieni 6,282066, opis. zaś 6,285212, przeto okręg koła zawiera 6,28 promieni; obwód 384-kąta for. zawiera 6,283169, opis. 6,283314, przeto okręg koła zawiera 6,283 promieni i t. d. Stosunek więc promienia do okręgu jest 1:6,283, zaś dwóch promieni czyli średnicy 2:6,283 czyli 1:3,141.

a) *Jeżeli dany okręg koła ma cztery jedności a szukamy ile tych jedności ma jego promień*, bierzemy wielokąt foremny którego obwód ma cztery tych jedności i szukamy promienia okręgu koła wpisanego i opisanego na tym wielokącie; a że okręg koła wpisanego jest mniejszy, zaś opisanego większy od obwodu tego wielokąta a tém samém i od okręgu danego, przeto i promień szukany jest mniejszy od promienia okręgu opisanego, zaś większy od promienia okręgu wpis. Wyraziwszy więc ile te promienie mają tych jedności których okręg ma 4, liczbą całą i ułamkiem dziesiętnym, w ilu cyfrach dziesiętnych te promienie nie różnią się od siebie, to tem bardziéj w tylu cyfrach dziesiętnych nie różnią się od szukanego promienia. Lecz im wielokąt ma więcéj boków, tem różnica między temi promieniami jest mniejsza (206), a tém samém więcéj cyfr dziesiętnych jest jednakowych w wartościach dwóch promieni, przeto więcéj cyfr dziesiętnych ma liczba wyrażająca wielkość promienia szukanego. Tym sposobem możemy znaleść liczbę wyrażającą wielkość szukanego promienia z tylu cyframi dziesiętnemi ile się nam podoba. I tak: niech 4 będzie obwód kwadratu, to bok jego jest 1, promień koła wpisanego jako połowa boku jest $\frac{1}{2}$ 0,5000000 opisanego jako połowa przekątniéj $\frac{1}{2}\sqrt{2}=0,7071068$, przeto promień szukany jest większy od połowy jedności; bok 8mio-kąta for. którego obwód 4 jest $\frac{1}{2}$, promień koła wpisanego równa się połowie summy promieni okręgów wpisanego i opisanego na kwadracie (206, *a*) t. j. *jest średnio-arytmetycznie proporcyonalny między temi promieniami* równa się więc $\frac{1}{2}(0.5000000+0,7071068)=0,6035534$; *promień zaś koła opisanego jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między promieniami koła opisanego na kwadracie i wpis. w 8-kąt* (206, *b*) przeto równa się $\sqrt{0,7071068 . 0,6035534}=0,6532815$, a zatém promień szukany jest 0,6; w 16to-kącie for. prom. wpis. $=\frac{1}{2}(0,6035534+0,6532815)=0,6284174$, opisanego zaś $\sqrt{0,6532815 . 0,6284174}=0,6407289$, przeto nie dają części setnych; w 32-kącie prom. wpisan. $=\frac{1}{2}(0,6284174+0,6407289)=0,6345731$, opisanego $=\sqrt{0.6035534 . 0,6345731}=0,6376435$ a zatém promień szukany jest 0,63; w 64-kącie wpis $=0,6361083$ opis. $=0,6368754$, przeto promień szukany jest 0,636 i t. d. stosunek więc okręgu do promienia wyrazi się

4:0,636, zaś do okręgu średnicy 4:1,272=3,14.. Stosunek ten dla krótkości oznaczamy przez Π = 3,14159265358979323846, log. Π=0,497149872694153854335. Stosunek ten wyrażony ułamkiem ciągłym daje następne przybliżone wartości 3: 1; 22: 7, 333 : 106, 355 : 113..; pierwszy nieużywa się wcale, gdyż jest zbliżony o $1/7$, drugi *Archimedesa* jest używany i jest zbliżony mniéj jak o jedną tysięczną, trzeci *Riwarda* nie jest używany, czwarty zaś *Metiusa* często używany, jest zbliżony mniéj jak o połowę milionowéj,—ten ostatni łatwy do spamiętania otrzymuje się, gdy liczbę złożoną z porządkowych liczb nieparzystych branych po dwie 113355, przetniemy w półowie cyfr 113/355.

267. *Znaleźć linię prostą równą okręgowi koła* (fig. 231).

Prowadzę dwie średnice prostopadłe AB i CD; przez A prowadzę linię AE równoległą do CD i na półokręgu CAD przenoszę promień jako cięciwę trzy razy; przez punkt G prowadzę promień FG do spotkania się z linią AE w punkcie H i od tego punktu do J na linię HE przenoszę promień trzy razy; punkt B z J łączę linią prostą a ona równa się połowie okręgu, a tém samém linia dwa razy od niéj dłuższa równa się całemu okręgowi ADBC.

Dla okazania że linia BJ=3,1415 promieniom, oznaczam go przez R i uważam że $\overline{BJ}^2=\overline{AB}^2+\overline{AJ}^2$; lecz AB=2R, AJ=HJ—AH i HJ=3R przeto: $\overline{BJ}^2=4R^2+(3R-AH)^2$. Dla otrzymania AH prowadzę GL bok sześciokąta foremnego, który jest równoległy do CD gdyż łuki CG i LD są sobie równe, — to $GM = \frac{1}{2}R$. Lecz $AH:GM = FA:FM$ i $\overline{FG}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{MG}^2$ czyli $\overline{FM}^2 = \overline{FG}^2 - \overline{GM}^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2$ zaś samo $FM = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$; przeto z proporcyi $AH = \frac{1}{2}R \,.\, R : \frac{1}{2}R.\sqrt{3} = R:\sqrt{3}$, po zniesieniu wspólnego czynnika $\frac{1}{2}R$; wstawiając za AH wartość, będzie: $\overline{BJ}^2 = 4R^2 + (3R - R:\sqrt{3})^2$; lecz $\sqrt{3} = 1732051$ zaś $R:1,732051 = 0,5773502\ R$, przeto $\overline{BJ}^2 = 4R^2 + (3R - 0,5773502\ R)^2 = 4R^2 + (2,4226498R)^2 = 4R^2 + 5,86923205344R^2 = 9,86923205344\ R^2$, a samo $BJ = \sqrt{9,86923205344\ R^2} = 3,141533\ R$, przeto tylko różni się od rzeczywistéj wartości okręgu mniéj jak o pół stotysięcznéj, co w praktyczném użyciu jest dostateczném.

268. *Zd. Znaleźć okręg koła którego promień ma 8 łokci.*

Okręgi kół mają się do siebie jak średnice przeto śred. 113: śred. 16 = okręg 355: okręg x. Ztąd okręg szukany $= \frac{355}{113} \cdot 16$ Łok. $= \Pi\ 16 = 2\Pi\ R$.

269. *Znaleźć średnicę okręgu zawierającego łokci 25.*

Okręg 355: okręgu 25 = średnica 113: śred. szukanéj, a ztąd śred. szukana $= \frac{133}{355} \cdot 25 = \frac{1}{\Pi}$ okręg.

270. *Zd. Mając promień 8 znaleść łuk 75°.*

Okręg koła $= 2\Pi R = \frac{355}{113} \cdot 16 = 360^0 ; 75^0 = 2\Pi R :$ $x = \frac{2\Pi R . 75^0}{3600^0}$.

271. *Zd. Mając łuk 35° zawierający 10 łok., znaleźć średnicę.*

Łuk 35^0: łuku $360^0 = 10$ łok: x łok. $= \frac{360^0}{35^0} \cdot 10$ łok., średnica zaś $= \frac{1}{\Pi} \cdot \frac{360^0}{35^0} \cdot 10$ łok. (269).

272. *Zg. Łuk* BS *okręgu* C *wyrazić przez przybliżenie w linii prostéj* (Archimedes) (fig. 232).

Przez końce łuku BS prowadzę z jednej strony środka C cięciwy równoległe AB i PS i styczne SU i BT do przecięcia się z temi cięciwami, a łuk BS$=\frac{1}{2}$(BT $+$SU). Cięciwa bowiem BS $>$ SU, bo w trójkącie BSU kąt U jest rozwarty jako dopełnienienie kąta jednostronnego ostrego PSU, przeto SU $<$ łuku BS; linia BT $>$ łuku BS, jako większa od BW$+$WS gdyż WS $<$ WT leżącego naprzeciw kąta WST rozwartego, a przeto połowa tych linii zbliża się do łuku.

273. *Zl.* Za pomocą № 269 wynajduje się promień rotundy, kloca drzewa i t. p., których obwód mierzy się sznurem.

ROZDZIAŁ III.

Równoważność i stosunek figur.

§ 1. Równoważność.

274. *Tw. gł. Linia łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoważne* (fig. 233).

Ze środka podstawy prowadzę dwie linie równoległe do boków, które połowią te boki (138); trójkąty DCE i DAF są równe, bo mają po trzy boki równe: DC=AD z założenia, EC=BE=FD, i DE=FB =AF; dla podobnéj przyczyny i trójkąt DEB=DFB.

Wn. 1. Dzieląc podstawę AB (fig. 234) trójkąta ACB na trzy równe części i prowadząc linie z wierzchołka kąta przeciwległego do środka tych podziałów, podzielimy trójkąt na trzy trójkąty równoważne, gdyż podług twierdzenia środkowy jest równoważny z każdym ze skrajnych. Jeżeli z punktów D i E podziału, poprowadzimy linie równoległe do boków tych trójkątów, to one podzielą je na części równoważne i tak: trójk. AKD=DHE gdyż w trójkącie ACE linia CD poprowadzona do środka podstawy AE i linie DK, DH są równoległe do boków CE i CA; trójkąt DNE= AFD bo mają po boku i po dwa kąty przy nim leżące równe, przeto i trójkąty HNE i KFD jako ich różnice są sobie równe; — podobnie trójk. DHC= DKC i DGN=GLC, jako mające kąty przy G równe (48), kąt GDN=GCL (78. Wn. 9.) i bok GD=GC, bo równoległe CB, GE, dzielące DB na części równe, dzielą i DC na części równe, a przeto i ich różnice,—t. j. czworokąty KLGD i NHCG są sobie równe. Podobnie dowiedlibyśmy że: DNE=EMB, DNG=EMJ, ENH=HPC i CGNH=HPJE t. j. *odpowiednie części trójkątów są sobie równe.* Gdybyśmy podstawy podzielili na ilekolwiek części równych, podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że trójkąty równoważne powstałe z połączenia wierzchołka z punktami podziałów podstawy, przez linie równoległe do boków tych trójkątów dzielą się na części odpowiednie równe.

Wn. 2. Trójkąty mające podstawy i wysokości równe są równoważne (fig. 235, I, II i III). Przykładam podstawy AB trójkątów tak, aby przystawały,—to wtedy albo *a*) dwa boki AC i AD są na jednéj linii prostéj (fig. 235, I.), albo nie na jednéj linii prostéj; w drugim przypadku albo *b*) obie wysokości padają na podstawę (fig. 235, II), albo *c*) jedna na podstawę, zaś druga na jéj przedłużenie (fig. 235, III).

a) Wysokość DF=CE to i DA=AC (139. Wn. 5) i trójk. CBD przez BA jest podzielony na części równoważne (174). *b*) Dla równości prostych CG=GD trój. CAG z GAD i CBG z BGD są równoważne a tém samém i ich summy CAG+CBG z GAD+BGD są równoważne. *c*) Podobnie trój. CAG z GAD i CBG z BGD są równoważne, przeto i ich różnice CAB z BAD są równoważne.

Wn. 3. I nawzajem, dwa trójkąty mające podstawy i powierzchnię równe, mają i wysokości równe (fig. 236).

Zestawiwszy trójkąty na wspólnéj podstawie AB tak, aby wierzchołki ich C i D były z jednéj strony téj linii, jeśliby wysokości ich nie były równe, linia DC nie byłaby równoległą do AB; poprowadziwszy więc linię CE równoległą do AB do spotkania się z bokiem AD lub jego przedłużeniem w punkcie E, trójkąt AEB jako równoważny trójkątowi ACB byłby równoważny i trójkątowi ADB, co być niemoże.

Wn. 4. *Równoległoboki mające podstawy i wysokości równe są równoważne*, gdyż podzieliwszy każdy z nich przekątnią na dwa trójkąty mające z niémi podstawy i wysokości równe, trójkąty jednego są równoważne trójkątom drugiego.

Wn. 5. Dzieląc podstawę równoległoboku na ilekolwiek części równych, i przez punkta podziału prowadząc linie równoległe do boku leżącego przy podstawie, równoległobok podzieli się na równoległoboki równe, jako mające podstawy i wysokości równe.

Wn. 6. Trójkąt mający z równoległobokiem równą podstawę i wysokość jest jego połową, gdyż równoległobok dzieli się na dwa trójkąty mające z danym podstawę i wysokość równą.

Wn. 7. Trójkąt jest równoważny równoległobokowi mającemu z nim równą podstawę a wysokość dwa razy mniejszą, lub równą wysokość a podstawę dwa razy mniejszą — gdyż przedłużywszy bok przyległy podstawie równoległoboku tak, aby przedłużenie równało się temu bokowi i dokończywszy tego nowego równoległoboku, ten mieć będzie wysokość równą wysokości trójkąta (138), przeto jest dwa razy większy od trójkąta i od równoległoboku danego, a zatém trójkąt jest równoważny równoległobokowi danemu; podobnie jeśli podstawa jest dwa razy mniejsza, przedłużam ją tak, aby przedłużenie równało się saméj podstawie, prowadzę równoległą do boku przyległego podstawie i dokończam równoległoboku, a ten równoległobok jest dwa razy większy tak od trójkąta jak od danego równoległoboku.

275. *Tw. Z punktu przekątniéj równoległoboku poprowadziwszy linie równoległe do boków, otrzymamy cztery równoległoboki, z których dwa nie mające téj przekątniéj* zwane dopełnieniami równoległoboku, *są równoważne* (fig. 237).

Trójkąty JED i DEG równie jak i trójkąty BFE i BHE są sobie równe, przeto JED + BFE równe DEG + BHE; jeśli więc od trójkątów równych DAB i BCD odejmiemy te ilości równe, reszty pozostaną równe AE = EC.

Wn. 1. Jeśli równoległobok jest kwadratem, dopełnienia są prostokątami (fig. 238), a niedopełnienia JF i HG kwadratami, gdyż przekątnia AC połowi ich kąty.

276. *Tw. Kwadrat z summy dwóch linii równa się summie kwadratów z tych linii, powiększonéj dwoma prostokątami z tychże linii* (fig. 238).

Na linii AD będącéj summą dwóch linii AJ + JD wystawiam kwadrat BD, z punktu J wyprowadzam prostopadłą JH do przecięcia się z przekątnią AC w E i przez E, linię FG równoległą do AD. Figura

FJ jest kwadratem z linii AJ, HG kwadratem z linii HC=JD (175. Wn. 1), zaś prostokąty FH i JG mają podstawy FE i EJ równe linii AJ, jako boki kwadratu FJ; wysokości EG i HE równe, jako boki kwadratu HG i równe drugiéj linii JD, przeto: $AD^2=AJ^2+JD^2+2.AJ.JD$.

Wn. Jeśli obie linie są sobie równe, to prostokąt mający jedną z nich za podstawę a drugą za wysokość, jest kwadratem, zatém kwadrat z summy tych linii równa się czterem kwadratom wystawionym na jednéj z tychże linii i nawzajem.

277. *Tw. Kwadrat z różnicy dwóch linii, równa się summie kwadratów z tych linii, zmniejszonéj dwoma prostokątami z tychże linii* (fig. 238).

Linia AJ jest różnicą linii AD i JD, kwadrat zaś FJ otrzymamy, odejmując od kwadratu BD prostokąt BG i GJ; dodając do odjemnika i odjemnéj kwadrat HG, mamy: kwadrat FJ równy summie kwadratów BD i HG, zmniejszonéj prostokątem BG i prostokątem JG z kwadratem HG; lecz prostokąt JG z kwadratem HG składają prostokąt HD, mający z prostokątem BG podstawy BC i CD równe AD jako boki kwadratu BD; zaś wysokości GC i CH równe sobie i linii JD, — przeto kwadrat FJ równa się summie kwadratów BD i HG zmniejszonéj dwoma prostokątami mającemi za podstawę AD a za wysokość JD; co przez skrócenie wyrazi się $AJ^2=AD^2+JD^2-2\,AD.JD$.

278. *Tw. Prostokąt* AH *mający za podstawę summę dwóch linii* $AC+CB$ *a za wysokość różnicę tychże*

linii $AC-CB=AD$, *równa się różnicy kwadratów z tych linii* (fig. 239).

Na linii AC kreślę kwadrat AF, odcinam $CD=CB$ i z punktu D wyprowadzam prostopadłę DK; prostokąt $AH=AL+LB$, lecz $LB=EJ$ gdyż $AC=AE$ z wykreślenia, $AD=AG$ z założenia, przeto różnice ich GE i DC są sobie równe t. j. $DC=CB=GE$,—wysokość $BH=AD$ z wykreślenia zaś $AD=GJ$ (115, 6) to i $BH=GJ$; a zatém prostokąt $AH=AL+EJ$ czyli równy kwadratowi AF mniéj kwadratem KL, czyli prostokąt mający za podstawę $(AC+CB)$, a za wysokość $(AC-CB)=AC^2-CB^2$.

279. *Tw. Kwadrat z przeciwprostokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta prostego* (Pythagoras) (fig. 240).

Bok kwadratu BH z ramieniem kąta prostego AB są na jednéj linii prostéj, gdyż kąty HBC i CBA jako proste są równe II (47), podobnie JB i BC są jedną linią prostą. Poprowadziwszy linie KC i BD trójk. KAC i BAD są sobie równe, jako mające po dwa boki i po kącie zawartym równym (253. Wn 2; $KA=AB$, $AC=AD$ jako boki kwadratów zaś kąty są kątami prostemi powiększonemi kątem BAC; lecz że pierwszy trójkąt jest połową kwadratu JA zaś drugi połową prostokąta AF, bo mają z niémi podstawy KA i AD wspólne i wierzchołki na liniach JC i FB równoległych do podstaw,—przeto kwadrat AJ jest równoważny prostokątowi AF. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że kwadrat HC jest równoważny prostokątowi CF, a zatém summa kwadratów JA i HC równoważna summie prostokątów AF i FC czyli kwadratowi AE z przekątniéj AC.

Wn. Kwadrat z ramienia kąta prostego równa się kwadratowi z przeciwprostokątniéj zmniejszonemu kwadratem z drugiego ramienia kąta prostego.

Uw. Wn. ten od 141 Wn. 1 różni się tém, że tam kwadrat z liczby wyrażającéj przeciwprostokątnią równał się podobnym kwadratom z ramion, tu zaś powierzchnia figury zwanéj kwadratem równa się powierzchni dwóch takich figur wystawionych na ramionach kąta prostego. Jak późniéj zobaczymy jedna z tych prawd pociąga za sobą drugą.

280. *Tw. Kwadrat z przeciwrozwartokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta rozwartego zwiększonéj podwójnym prostokątem jednego z nich przez odległość prostopadłéj nań spuszczonéj od wierzchołka kąta rozwartego* (fig. 241).

Poprowadziwszy prostopadłą na przedłużony bok AC mamy $AB^2 = BD^2 + AD^2$, lecz $BD^2 = BC^2 - CD^2$ (279. Wn.), zaś $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + CD^2 + 2.AC.CD$ (276), to $AB^2 = BC^2 - CD^2 + AC^2 + CD^2 + 2.AC.CD = BC^2 + AC^2 + 2.AC.CD$.

281. *Tw. Kwadrat z przeciwostrokątniéj równa się summie kwadratów z ramion kąta ostrego, zmniejszonéj podwójnym prostokątem jednego z nich, przez odległość prostopadłéj nań spuszczonéj od wierzchołka kąta ostrego* (fig. 242).

Poprowadziwszy prostopadłą BD, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ lecz $BD^2 = BC^2 - DC^2$ zaś $AD^2 = (AC - DC)^2 = AD^2 + DC^2 - 2.AD.DC$ (277), przeto postawiwszy za BD^2 i AD^2 ich wartości, będzie: $AB^2 = BC^2 - DC^2 + AD^2 + DC^2 - 2.AD.DC = BC^2 + AD^2 - 2.AD.DC$.

282. *Tw. W trójkącie, summa kwadratów z dwóch boków równa się podwójnemu kwadratowi z połowiącéj bok trzeci, zwiększonemu podwójnym kwadratem z połowy boku trzeciego* (fig. 243).

Poprowadziwszy prostopadłę BE, połowiąca BD jest pochyłą, a zatém kąt BDA jest rozwarty zaś BDC ostry; przeto: $AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2\,AD.DE$ i $BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2\,DC.DE$ lecz że $AD = DC$ z założenia, przeto: $AB^2 + BC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$.

283. *Tw. W równoległoboku, kwadraty z dwóch przekątnich, są równe kwadratom z czterech boków* (fig. 244).

Przekątnie w równoległoboku połowią się (115, *c*) przeto: $AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$ tudzież $CD^2 + DA^2 = 2\,AE^2 + 2\,ED^2$ przeto $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4\,AE^2 + 4\,BE^2 = AC^2 + BD^2$ (276. Wn.)

284. *Tw. Czworokąt jest połową równoległoboku z jego przekątnich i kąta między niemi zawartego* (fig 250).

Przez wierzchołki A, B, C, D prowadzę linie równoległe do przekątnich a równoległobok HF ma boki przy sobie leżące EH i HG równe przekątnim (115, *b*) i kąt między nimi zawarty H równy kątowi BJC zawartemu pomiędzy przekątniemi. Czworokąt ABCD jest połową równoległoboku HF, gdyż równoległobok przez przekątnie czworokąta dzieli się na cztery równoległoboki, czworokąt zaś na cztery trójkąty będące połowami tych równoległoboków: AJD połową HJ, DJC połową GJ i t. d.

Wn. Na téj własności opiera się sposób zamiany czworokąta na równoległobok.

285. *Zg. Zamienić a) trójkąt* ABC *na inny z nim równoważny* 1) *pod danym kątem* (fig. 236); przez wierzchołek C trójkąta ABC prowadzę linię CD równoległą do podstawy i linię AD czyniącą z podstawą AB kąt dany, to trójkąt ADB jest równoważny danemu i ma bok AD czyniący z podstawą kąt dany; 2) *pod danym bokiem*; poprowadziwszy równoległą CD przecinam ją z punktu A promieniem równym bokowi danemu w punkcie D, to trójkąt ADB jest żądany, gdyż ma bok dany AD; bok więc dany nie może być mniejszy od wysokości danego trójkąta.

b) trójkąt na równoległobok (fig. 245); na trójkącie ABC dopełniam równoległoboku AD, który jest dwa razy większy od trójkąta ABC (274. Wn. 6) połowiąc ten równoległobok linią EF równoległą do boku i przechodzącą przez środek podstawy AC, otrzymam równoległobok AF równoważny trójkątowi (274. Wn. 7).

c) równoległobok AF *na trójkąt*; przedłużam podstawę AE o nią samą i punkt B z C łączę prostą a trójkąt ABC jest żądany (274. Wn. 7).

d) równoległobok AD *na inny* 1) *pod danym kątem* (fig. 245); z końców podstawy AC prowadzę linię AG i CH pod danym kątem do spotkania się z przedłużoną podstawą górną, a równoległobok AH jest żądany (274. Wn. 4); 2) *o danym boku*; z końca A podstawy, promieniem równym danemu bokowi przecinam w G przedłużoną podstawę górną i dokończam równoległoboku GACH, którego bok AG jest dany.

e) wielokąt ABCDE *na trójkąt* (fig. 246); jeśli chcemy aby podstawa trójkąta leżała na prostéj AE, zaś wierzchołek był w wierzchołku C, z punktu C prowadzę przekątnie CE, CA, przez punkta D i B równolegle do odpowiednich przekątnich aż do spotkania się w F i G z bokiem przedłużonym mającym z przekątnią koniec wspólny, a trójkąty CFE i CGA równoważne z trójkątami CDE i CBA (274. Wn. 2), w miejsce ich wzięte, dają trójkąt GCF równoważny wielokątowi; takim samym sposobem postępujemy z wielokątami mającemi więcéj boków.

f) równoległobok na inny pod danym bokiem i kątem (fig. 247); prowadzę linię AE czyniącą z podstawą AD kąt dany, i odcinam EF równe bokowi danemu,—prowadzę DG równoległą do AF i punkt przecięcia się G z przedłużoną podstawą gorną z punktem F łączę linią,—na trójkącie ACH dokończam równoległoboku AJ a równoległobok GJ dopełnienia z AG jest żądanym, gdyż AC równoważne z AG(274.Wn.4) zaś AG z GJ (275) w którym kąt KGL=EAD danemu i bok GK=EF danemu.

286. *Zg. Znaleźć kwadrat równy a) summie ilukolwiek kwadratów danych lub ilekolwiek razy większy od kwadratu danego* (fig. 248). Na ramionach kąta prostego odcinam od wierzchołka boki kwadratów danych, punkta B i C otrzymane z odcięcia łączę linią prostą BC, a kwadrat z téj linii jest równy summie dwóch kwadratów, których boki odcięliśmy na ramionach kąta prostego (279), — z końca linii BC wyprowadzam prostopadłą CD i odcinam na niéj bok trzeciego kwadratu, a kwadrat wystawiony na linii BD równa się summie trzech kwadratów danych i t. d. Jeśliby kwadraty były równe, to tym sposobem otrzymamy bok kwadratu większego daną liczbę razy od kwadratu danego; *b) różnicy dwóch kwadratów danych*; na ramieniu AC kąta prostego odcinam bok kwadratu mniejszego AC od A do C i z punktu C promieniem równym bokowi kwadratu większego przecinam drugie ramię kąta w punkcie B, a linia AB jest bokiem kwadratu szukanego (279. Wn.)

287. *Zt.* Na własnościach równoważności figur opiera się sposób dzielenia wielokątów na pewną liczbę części równych lub proporcyonalnych, mający zastosowanie przy podziale gruntu stosownie do danych warunków.

§ 11. Stosunek powierzchni figur.

288. *Tw. gł. Prostokąty mające równe podstawy mają się do siebie jak wysokości*; t. j. liczba wyraża-

jąca stosunek wielkości prostokątów, równa się liczbie wyrażającéj stosunek ich wysokości (fig. 249).

Dowodzenie 1sze. Przenoszę wysokość EG na wysokość AC, zawiera się ona w niéj od A do *b* dwa razy i pozostaje *b*C < EG; przez punkta *a* i *b* prowadzę linie równoległe do podstawy AB, które odetną od prostokąta AD dwa prostokąty B*a* i *cb* równe prostokątowi FG (253, Wn. 4), tak, że pozostały prostokąt *b*D < FG; przeto ile razy wysokość GE zawiera się w wysokości AC, tyle razy i prostokąt FG zawiera się w prostokącie AD. Przenoszę *b*C na wysokość EG, zawiera się w niéj raz jeden od E do *g* i pozostaje G*g* < *b*C, — równoległa przez punkt *g* do podstawy odcina prostokąt F*g* równy prostokątowi *b*D i pozostaje prostokąt *g*H < *b*D; przeto reszta *b*C tyle razy zawiera się w wysokości EG, od przenoszenia któréj wypadła, ile razy reszta *b*D zawiera się w prostokącie FG i t. d. A zatém stosunki wysokości i powierzchni tych prostokątów jednakową wyrażają się liczbą (11) czyli stosunki te są sobie równe.

Dowodzenie 2gie. Prostokąt AD tworzy się posuwaniem podstawy jego AB po liniach równoległych AC i BD, równoległym od pierwotnego swego położenia, lecz że wielkość linii AB zależy tylko od jéj długości, przeto wielkość prostokąta zależy jedynie od długości posuwającéj się linii AB i od dległości na którą ona posunęła się, mierzonéj wspólną prostopadłą AC, tak, że jeśli w dwóch prostokątach A*c* i EH tak posuwające się linie AB i EF jak i odległości A*a* i EG są sobie równe, to wielkości tych prostokątów są także równe. Jeżeli tworzące linie AB i EF w dwoch prostokątach AD i EH są sobie równe a oddalenia AC i EG nierówne, to prostokąt AD tém jest większy od prostokąta EH, im odległość AC jest większa od odległości EG, gdyż na ile razy większą odległość posunie się linia AB, tyle razy większą przebieży drogę, czyli tyle razy większy utworzy prostokąt — to samo ściąga się i do równoległoboków, tylko że oddalenia mierzy nie bok lecz prostopadła.

Wn. 1. W prostokącie podstawa może być wzięta za wysokość, przeto prostokąty mające wysokości rowne mają się jak podstawy.

Wn. 2. Ponieważ równoległoboki są równoważne prostokątom mającym z niémi równe podstawy i wysokości, przeto i równoległoboki mające wspólne podstawy mają się do siebie jak wysokości, mające zaś wspólne wysokości mają się do siebie jak podstawy.

Wn. 3. Trójkąty są połową prostokątów mających z niémi wspólne podstawy i wysokości, przeto i trójkąty mające podstawy równe, są w stosunku wysokości, i nawzajem.

289. *Tw. gł. Dwa jakiekolwiek prostokąty mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości,* czyli jeden prostokąt tyle razy zawiera się w drugim, ile razy iloczyn z liczebnéj wartości podstawy przez wysokość jednego, zawiera się w podobnym iloczynie drugiego, byleby podstawy były mierzone jednakową miarą, podobnie i wysokości.

Nazwawszy jeden prostokąt dany przez A drugi przez *a*, podstawę pierwszego przez P drugiego *p*, wysokość przez W i *w*, i kreśląc trzeci prostokąt B mający za podstawę P a za wysokość *w* mamy: A : B = W : *w* (288), gdzie W i *w* jako składające jeden stosunek są jednorodne czyli mierzone jednakową miarą; podobnież B : *a* = P : *p*; mnożąc te dwie proporcye otrzymujemy A. B : B. *a* = W. P : *w*. *p*; czyli: A : *a* = W. P : *w*. *p*.

Wn. 1. To dowodzenie ściąga się do równoległoboków i trójkątów; biorąc zamiast prostokąta *a* równoległobok jemu równoważny mający za podstawę *p* a za wysokość *w* mamy że *prostokąt* A *tyle razy zawiera się w równoległoboku a, ile razy liczba wypadła z pomnożenia podstawy przez wysokość prostokąta, zawiera się w podobnym iloczynie równoległoboku*; biorąc zaś zamiast prostokąta *a* trójkąt *a'* jemu równoważny, mający z nim równą podstawę *p*, a wysokość *w'* dwarazy większą od *w*, możemy także zamiast wysokości *w* wstawić $\frac{1}{2}w'$ i będzie A : *a'* = P.W : $\frac{1}{2}pw$ t.j. *prostokąt* A, *tyle razy zawiera się w trójkącie a', ile razy liczba* P.W *wypadła z pomnożenia jego podstawy przez wysokość, zawiera się w połowie iloczynu p.w' z podstawy przez wysokość trójkąta.* Podobnym sposobem zamiast prostokąta A moglibyśmy wziąść równoważny z nim równoległobok lub trójkąt.

Wn. 2. Zmierzyć jakąkolwiek powierzchnię znaczy dowiedzieć się ile razy powierzchnia przyjęta za edność czyli miarę zawiera się w mierzonéj powierzchni; mierzenie więc powierzchni, podobnie jak linii należałoby uskutecznić przez nakładanie powierzchni przyjętéj za jedność np. prostokąta na powierzchnię, tyle razy ile się daje,—tak jak nakładają się tafle na posadzkę, aby się dowiedzieć ile razy tafla zawiera się w posadzce. Bez poznania własności figur pod względem proporcyonalności, tym tylko sposobem moglibyśmy się dowiedzieć, ile razy powierzchnia przyjęta za jedność, zawiera się w mierzonéj powierzchni; mimo niedogodności pochodzącéj z samego uskuteczniania podobnego mierzenia, ono może być tylko przybliżoném, gdyż w ogólności jedność niezawiera się zupełnie w mierzonéj powierzchni lub choćby się zawierała, kształt ograniczenia nie dozwala z ścisłością uskutecznić tego nakładania np. prostokąta na trójkąt. Lecz na zasadzie wniosku poprzedzającego dla dowiedzenia się ile razy prostokąt A zawiera się w prostokącie *a* lub równoległoboku, niepotrzebujemy nakładać jedności A na mierzoną powierzchnię *a* lecz tylko dowolną linijną jednością zmierzyć ich podstawy (11 lub 135), następnie tą samą lub inną miarą zmierzyć wysokości; dla A i *a* zrobić iloczyny z liczebnych wartości podstawy przez wysokość i przez arytmetyczne dzielenie dowiedzieć się ile razy iloczyn W, P dla A zawiera się w liloczynie *w.p* dla *a*, gdyż tyle razy i prostokąt A zawiera się w równoległoboku *a*. Podobnie aby się dowiedzieć ile razy prostokąt zawiera się w trójkącie, potrzeba zmierzyć ich podstawy i wysokości i dowiedzieć się ile razy iloczyn prostokąta zawiera się w połowie iloczynu trójkąta. Ztąd widzimy że dla zmierzenia powierzchni mierzą się tylko dwie linie podstawa i wysokość od których wielkość powierzchni zależy, i dla tego one zowią się wymiarami.

Wn. 3. Za jedność do mierzenia powierzchni używamy zazwyczaj kwadratu, którego podstawa i wysokość równa się jedności czyli mierze linijnéj, a który zowie się sążniem łokciowym, stopą, calem kwadratowym. Iloczyn więc z podstawy przez wysokość dla tego prostokąta równa się jedności, a zatem jedność ta, tyle razy zawiera się w powierzchni, ile razy jedność arytmetyczna zawiera się w iloczynie podstawy przez wysokość zmierzonych miarą linijną czyli bokiem kwadratu t. j. ile ten iloczyn zawiera jedności. W takiém rozumieniu przez skrócenie mówimy, że *powierzchnia równoległoboku równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość, powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość, lub iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości, albo z połowy podstawy przez wysokość; powierzchnia kwadratu równa się kwadratowi z boku, gdyż podstawa równa wysokości.*

Wn. 4. Trapez przez przekątnię dzieli się na dwa trójkąty, mające za wysokość, wysokość trapeza a za podstawy, jeden podstawę dolną, zaś drugi podstawę górną trapeza; a że powierzchnia każdego z nich zawiera w sobie tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile jedności zawiera iloczyn z połowy podstawy przez wysokość przeto powierzchnia ich summy, czyli tra-

34

peza zawiera tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile ma jedności summa iloczynów z połowy jednéj, tudzież z połowy drugiéj podstawy, przez wysokość; czyli iloczyn z połowy summy podstaw przez wysokość t. j. *powierzchnia trapezu równa się iloczynowi z połowy summy podstaw, lub linii łączącéj środki boków nierównoległych, przez wysokość.*

Wn. 5. Powierzchnia koła tworzy się posuwaniem bez przerwy zmniejszającego się okręgu równolegle do pierwotnego położenia t. j. mającego środek nieruchomy, który to okręg zmniejsza się w stosunku promienia (265. Wn. 1); — podobnie powierzchnia trójkąta tworzy się posuwaniem bez przerwy zmniejszającéj się podstawy równolegle do pierwotnego położenia, mającéj swe końce na dwóch bokach, która to podstawa zmniejsza się w stosunku wysokości (139. Wn. 5); lecz że bezwzględna wielkość równie jak i stosunek powierzchni zależy jedynie od wielkości posuwającéj się linii i od odległości na którą się posunęła, przeto jeśli okręg koła równy podstawie trójkąta a promień równa się jego wysokości, to wielkość powierzchni koła i trójkąta jest jednakowa a tém samém kwadrat przyjęty za miarę tyle razy zawiera się w powierzchni koła, ile jedności ma iloczyn z okręgu przez połowę promienia, mierzonych bokiem tego kwadratu, czyli *powierzchnia koła równa się iloczynowi z okręgu koła przez połowę promienia.* Okręg koła równa się $2\Pi R$ (268) przeto powierzchnia równa się $2\Pi R \cdot \frac{R}{2} = \Pi R^2$. Dla podobnéj przyczyny *powierzchnia wycinka równa się iloczynowi z łuku przez po-*

łowę promienia czyli jest taką częścią powierzchni całego koła, jaką łuk jego okręgu; a przeto otrzymuje się mnożąc powierzchnię koła przez stosnek łuku do okręgu. *Powierzchnia zawarta między okręgami oddzielnemi wewnętrznie, jako różnica kół równa się*, $\Pi R^2 - \Pi r^2 = \Pi (R^2 - r^2)$, t.j. *stosunkowi okręgu do średnicy pomnożonemu przez różnicę kwadratów promieni. Powierzchnia odcinka równa się różnicy pomiędzy powierzchnią wycinka tego samego koła mającego ten łuk za podstawę, a powierzchnią trójkąta mającego za podstawę cięciwę tego łuku a wierzchołek w środku koła.*

Wn. 6. Wielokąt for. przez linie połowiące kąty dzieli się na tyle trójkątów równych ile ma boków, a że powierzchnia każdego trójkąta zawiera w sobie tyle kwadratów przyjętych za miarę, ile ma jedności iloczyn z podstawy przez połowę wysokości, zmierzonych bokiem tego kwadratu, przeto znajdziemy liczbę kwadratów zawierających się w wiel. for., mnożąc liczbę kwadratów zawierających się w jednym z trójkątów, przez liczbę tych trójkątów, czyli przez liczbę boków.

Wn. 7. Powierzchnia nieforemnego wiel. znajduje się, *a*) dzieląc go na trójkąty lub trapezy i dochodząc ich pwierzchni; *b*) dzieląc na same trapezy (fig. 252) przez prostopadłe CD, EF.. do linii AB łączącéj dwa najodleglejsze punkta, których podstawami są prostopadłe CD, EF, GH... wysokości zaś są odcinkami linii AB. Gdy odcinki te są sobie równe, to i wysokości trapezów są także równe, a zatém w summie ich powierzchni, wysokość wspólna NO mnoży się przez summę podstaw EF, GH, JK, służących dla dwóch trapezów, powiększoną połową podstaw CD i LM służących dla jednego tylko trapeza jak w figurze CDML, gdyż powierzchnia $CDML = \frac{1}{2}(CD+EF).NO + \frac{1}{2}(EF+GH).NO + \frac{1}{2}(GH+JK).NO + \frac{1}{2}(JK+LM).NO = \frac{1}{2}(CD+EF+EF+GH+GH+JK+JK+LM).NO = \frac{1}{2}(CD+2EF+2GH+2JK+LM).NO = (\frac{1}{2}CD+EF+GH+JK+\frac{1}{2}LM).NO$.

290. *Tw. Trójkąty* ABC i DBE *mające po kącie równym mają się do siebie jak iloczyny z boków zawierających te kąty* (fig. 253).

Kładę jeden trójkąt na drugi tak, aby kąty równe przystały do siebie i końce D i C boków BD i BC zawierających kąty równe łączę linią prostą DC; trójkąty ABC i DBC jako mające wysokości równe mają się do siebie jak podstawy (288. Wn. 3) $ABC:DBC = AB:DB$; podobnie $DBC:DBE = BC:BE$ przeto $ABC.DBC:DBC.DBE = AB.BC:DB.BE$, dzieląc zaś pierwszy stosunek przez DBC będzie: $ABC:DBE = AB.BC:DB.BE$.

Wn. Podobnie i równoległoboki EK i DL (fig. 247) mające po kącie równym, mają się do siebie jak iloczyny z boków zawierających te kąty, gdyż zestawiwszy je tak, aby kąty równe DGL i EGK były wierzchołkiem przeciwległe i dokończywszy na bokach GK i GL równoległoboku KL, równoległoboki DL i GJ jako mające wysokości równe mają się jak podstawy: $DL:GJ = DG:GK$ podobnie $GJ:EK = GL:GE$

przeto i $DL.GI:GI.EK = DG.GL:GK.GE$ czyli $DL:EK = DG.GL:GK.GE$.

291. *Tw. gł. Powierzchnie figur podobnych mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich.*

1° Oznaczywszy powierzchnie trójkątów podobnych przez T i t, ich podstawy przez P i p, wysokości przez W i w, to $T:t = P.W:p.w$ (289. Wn. 1); lecz $P:p = W:w$ przeto pomnożywszy poprzedniki przez P a następniki przez p, lub poprzedniki przez W a następniki przez w otrzymamy: $P^2:p^2 = WP:wp$ lub $P.W:pw = W^2:w^2$ a zatém w pierwszéj i tych proporcyach dwa stosunki równe trzeciemu $P.W:p.w$ są sobie równe t. j. $T:t = P^2:p^2$ lub $T:t = W^2:w^2$. Ponieważ linie odpowiednie w figurach podobnych są proporcyonalne, przeto $P:p = L:l$ czyli $P^2:p^2 = L^2:l^2$ przeto i $T:t = L^2:l^2$ t. j. powierzchnie trójkątów mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich.

2° Wielokąty podobne mają się do siebie jak kwadraty z linii odpowiednich, gdyż składają się z równéj liczby trójkątów podobnych i podobnie położonych (262. Wn. 1), a że każde dwa trójkąty odpowiednie są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich, przeto i summy ich są w tymże samym stosunku.

3° Powierzchnie kół są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich, gdyż one równają się iloczynowi z okręgu przez połowę promienia, a zatém są w stosunku tych iloczynów t. j. $K:k = \frac{1}{2}OR:\frac{1}{2}or = OR:or$; lecz $O:o = R:r$, przeto mnożąc poprzedniki przez R

a następniki przez r będzie: OR: $or = R^2$: r^2 przeto i K: $k = R^2$: r^2. Podobnie wycinki i odcinki kół, których łuki zawierają jednakową liczbę stopni, są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich.

Wn. Jeżeli kwadrat z dwóch linii równa się kwadratowi z linii trzeciéj, to i summa figur podobnych, których liniami odpowiedniemi są dwie pierwsze linie, równa się figurze im podobnéj w któréj linia trzecia jest odpowiednią pierwszéj; oznaczywszy bowiem trzy figury podobne przez A, B, C ich linie odpowiednie przez a, b, c mamy: $A : B = a^2 : b^2$ to i $A + B : B = a^2 + b^2 : b^2$; podobnie $C : B = c^2 : b^2$ przeto jeśli $c^2 = a^2 + b^2$ to te dwie proporcye mają trzy wyrazy równe a tém samém i czwarty $A + B$ równy czwartemu C.

292. *Zg. Wykreślić* 1) *kwadrat równoważny a*) *równoległobokowi.* Między podstawą a wysokością równoległoboku szukam linii średnio proporcyonalnéj (151 lub 177. Wn. 1, albo 185), a ona jest bokiem szukanego kwadratu (289. Wn. 3); *b*) *trójkątowi*: bok jego jest średnio proporcyonalny między podstawą a połową wysokości trójkąta; a że każdy wielokąt można zamienić na trójkąt jemu równoważny (285, *e*), przeto kwadrat równoważny z tym trójkątem jest równoważny i z danym wielokątem; *c*) *wykreślić kwadrat któryby się miał do danego* AB *w stosunku danym* $m : n$ (fig. 254); na linii nieograniczonéj odcinam $EF = m$ i $FG = n$, z punktu F wyprowadzam prostopadłą do spotkania się w H z okręgiem koła, którego średnicą EG, trójkąt EKG jest prosto-

kątny (176. Wn.), przeto $EK^2 : KG^2 = EF : FG$; na ramieniu EK kąta prostego odcinam KH=AC i prowadzę HJ równolegle do EG to KJ jest bokiem kwadratu szukanego, gdyż $KE \cdot KG = KH : KJ$ czyli $KE^2 : KG^2 = KH^2 : KJ^2$ przeto dwa stosunki $KH^2 : KJ^2$, $EF : FG$ równe trzeciemu $KE^2 : KG^2$ są sobie równe; a że $KH^2 = AB$ przeto KJ^2 jest z danym kwadratem w stosunku $m:n$. 2) *Wykreślić prostokąt równoważny z kwadratem danym, a) którego summa boków przy sobie leżących równałaby się linii danéj* AB (fig. 255). Na linii danéj AB jako na średnicy kreślę pół okręgu koła i z końca A wyprowadzam prostopadłą AE równą bokowi kwadratu danego, zaś z końca jéj E linię EG równoległą do linii danéj AB, to prostopadłe FC i GD wyprowadzone do linii danéj z punktów F i G przecięcia się równoległej z okręgiem, są równe bokowi kwadratu danego (79. Wn. 2), a tém samém prostokąt z BC przez AC jest żądanym (177. Wn. 1); — *b) różnica boków przy sobie leżących równałaby się linii danéj* AB (fig. 256); na linii danéj AB jako na średnicy kreślę okręg koła i z końca A wyprowadzam prostopadłą AE równą bokowi kwadratu danego przez punkt E prowadzę sieczną EC przechodzącą przez środek a prostokąt z EC przez ED jest żądanym (185. Wn.).

293. *Zg. Wykreślić wielokąt a) równoważny summie dwóch danych wielok. podobnych, im podobny.* Bok kwadratu równoważnego summie kwadratów z dwóch boków odpowiednich figur danych jest bo-

kiem szukanego wielokąta odpowiednim tym bokom (291. Wn.), który znajdziemy jak w N° 256, pozostaje tylko na tym boku wykreślić wiel. foremny (263). Jeśli wielokąt szukany ma być równym różnicy dwóch wielok., to szukamy boku kwadratu będącego różnicą kwadratów z boków odpowiednich. Podobnie wynajduje się wielokąt ilekolwiek razy większy lub mniejszy od danego: *b*) *któryby z danym wielokątem był w stosunku danym*; bok kwadratu będącego w stosunku danym z kwadratem z boku wielokąta danego (292, *c*) jest bokiem odpowiednim wielokąta szukanego; *c*) *podobny danemu wielokątowi* P *i który byłby z wielokątem danym* K *był w stosunku danym* $m:n$. Dla znalezienia boku wielokąta danego 1) wielokąty P i K zamieniam na kwadraty (292, *b*) których bokami są linie p i k; 2) wynajduję bok a, kwadratu będącego z kwadratem K w stosunku $m:n$ a tém samém równoważnego wiel. szukanemu (292. *c*); 3) znajduję linię x będącą w takim stosunku do boku a kwadratu równoważnego z szukanym wielokątem, w jakim jest bok b danego wielokąta P, do boku p kwadratu z nim równoważnego, a ona jest bokiem szukanego wielokąta; gdyż $x:a=b:p$ czyli $x^2:a^2=b^2:p^2$ a że $a^2=$ wiel. szukanemu X zaś $p^2=$ P, przeto $x^2:X=b^2:P$, lecz że a^2 z wielokątem K jest w stosunku danym $m:n$, i figury podobne mają się jak kwadraty z boków odpowiednich, przeto x jest bokiem wielokąta szukanego. Jeśliby wielokąt szukany był równoważny wielokątowi K, wtedy k byłoby bokiem kwadratu równoważnego danemu wielokątowi.

294. *Zg. Dany trójkąt podzielić na części proporcyonalne do linii danych, przez proste wychodzące z wierzchołka.*

Podstawę trójkąta dzielę na części proporcyonalne do linii danych (147), a punkta podziałów połączone z wierzchołkiem, dzielą trójkąt na trójkąty żądane; gdyż one jako mające równe wysokości, mają się do siebie jak podstawy.

295. *Zg. Znaleść prostą* n *będącą z daną* m *w stosunku kwadratów danych* $KH^2 : KJ^2$ (fig. 254.).

Na ramionach kąta prostego EKG odcinam boki kwadratów danych KH i KJ, i z wierzchołka kąta prostego prowadzę prostopadłą KL a ona podzieli linię HJ w stosunku kwadratów danych (279), a zatém linia szukana *n* jest proporcyonalna do linij HL, LJ i *m*.

296. *Zt.* *a*) Powierzchnia kwadratu równa się kwadratowi z liczebnéj wartości z boku, przeto łokieć kwadratowy ma ćwierci kwadr. 16, ćwierć 36 cali i t. d. t. j. miara wyższa na niższą zamienia się mnożąc przez kwadrat z liczby wyrażającéj podziały i nawzajem. *b*) Jeśli skala wyraża 900-tne części miary, to plan zrobiony podług téj skali jest $(900)^2 = 810000$ razy mniejszy od mierzonéj przestrzeni: gdyż figury podobne są w stosunku kwadratów z linii odpowiednich. *c*) Chcąc obliczyć powierzchnię zmierzonéj przestrzeni, obrachowywamy trójkąty, trapezy i t.d. i dochodzimy ich powierzchni mierząc linie mia-

rą wziętą ze skali, a ile ona zawiera miar kwadratowych linii z któréj zrobiona skala, tyle grunt zawiera miar kwadratowych jedności któréj skala jest częścią. *d*) Podział gruntu niewymagający wielkiej ścisłości uskutecznia się na planie, a następnie linie dzielące przez punkta odpowiednie wytykają się na gruncie.

ROZDZIAŁ IV.

Zależność wielkości figur od kształtu.

297. Wielkość figur zależy od ich kształtu i tak, figury mające obwody jednakowe nie mają jednakowéj wielkości, mające zaś jednakową wielkość mają nierówne obwody. Dwa główne pytania należy tu roztrząsnąć: z figur mających jednakowe obwody, t. j. równoobwodowych (izoperymetrycznych), jakiego kształtu figury mają wielkość największą (maximum); nawzajem z mających wielkość jednakową, jakiego kształtu figury mają obwód najmniejszy (minimum), i dla tego to własności te figur znane są pod nazwą Izoperymetryczności lub maximów i minimów.

298. *Tw. gł. Z trójkątów stojących na jednéj podstawie i mających wierzchołki na jednéj linii prostéj, ten ma najmniejszą summę dwóch innych boków, w którym te boki są równo nachylone do linii wierzchołków* (fig. 257).

Zak. kąt ADB = CDE. *Tw.* AD + DC < AB + BC.

Z końca C podstawy AC wyprowadzam prostopadłę do linii wierzchołków BD i odcinam EF = EC; punkt F łączę z punktami D i B. Linia CD = DF i CB = BF jako równo oddalone od spodka prostopadłéj DE (51), przeto kąt CDE = EDF (91. Wn. 3), zaś linie AD i DF stanowią jedną linię prostą, gdyż kąt ADB = FDE jako równe kątowi CDE (49), a tém samém AD + DF < AB + BF czyli AD + DC < AB + BC.

Wn. 1. Gdy linia wierzchołków jest równoległą do podstawy, wysokości trójkątów są sobie równe a tém samém i ich powierzchnie, a trójkąt ADC mający boki równo nachylone do równoległéj linii wierzchołków BE, ma także boki równonachilone i do wysokości DG, gdyż te kąty nachylenia są dopełnieniami kątów pierwszych, czyli trójkąt ADC jest równoramienny (91. Wn. 3); a zatém *z trójkątów równoważnych mających podstawy rowne, trójkąt symetryczny ma najmniejszy obwód.* I nawzajem: *z trójkątów równo-obwodowych o jednakowych podstawach, trójkąt symetryczny jest największym* (fig. 258); poprowadziwszy z wierzchołka D, niesymetrycznego trójkąta, linię DE równoległą do podstawy AC, aż do przecięcia się w E z wysokością trójkąta symetrycznego ABC i połączywszy ten punkt z końcami podstawy AC, utworzy się trójkąt symetryczny AEC, równoważny trójkątowi ADC, a zatém podług poprzedzającego AE + EC < AD + DC, lecz AD + DC = AB + BC przeto AE + EC < AB + BC, więc linia AEC jest objętą przez ABC i trójkąt

ABC, jako całość, większy od trójkąta AEC równoważnego z ADC.

Wn. 2. *Ze wszystkich trójkątów równoważnych, trójkąt foremny ma najmniejszy obwód.* Jeśli bowiem na boku trójkąta foremnego wystawimy jakikolwiek trójkąt z nim równoważny, to obwód jego jest większy od obwodu danego trójkąta. I nawzajem: *ze wszystkich trójkątów równo-obwodowych foremny ma największą powierzchnię*, gdyż powierzchnia jakiegokolwiek trójkąta wystawionego na jego boku jest mniejsza.

Wn. 3. *Z wielokątów równoważnych o jednakowéj liczbie boków, równoboczny ma najmniejszy obwod* (fig. 259); gdyż wielokąt ABCDE niemający boków równych nie może mieć najmniejszego obwodu; jeśli bowiem bok BC nierówny bokowi CD, to wystawiwszy trójkąt BFD równoramienny równoważny trójkątowi BCD, summa boków BF + FD < BC + CD a tém samém obwód ABFDE < ABCDE. I nawzajem: *z wielokątów równoobwodowych równoboczny ma największą powierzchnię*; gdyż wielokąt ABCDE nierównoobwodowy niemoże mieć największéj powierzchni; jeśli bowiem BC i CD nie są równe, to wystawiwszy trójkąt równoramienny BFD równoobwodowy z trójkątem BCD, powierzchnia BFD > BCD a tém samém i powierzchnia ABFDE > ABCDE.

Wn. 4. *Z trapezów równoważnych symetryczny ma najmniejszy obwód* (fig. 260); dopełniwszy bowiem trójkąta AED i nakreśliwszy na *ad*=AD trójkąt symetryczny *aed*, z nim równoważny, linia *bc* równoległa do podstawy ad i oddalona od niéj na wysokość danego trapeza AC, odcina trapez $abcd$ symetryczny i równoważny z danym trapezem, gdyż bc=BC jako będące do równych podstaw AD i ad w jednakowym stosunku, równym stosunkowi wysokości całego do wysokości odciętego trójkąta (139. Wn. 5); lecz że AE+ED > $ae+ed$ to i jednakowe części pierwszych boków AB+CD > $ab+dc$ gdyż stosunki AE:AB, ED CD i $ea:ab$, $ed:cd$ równają się stosunkowi $ef:gf$ przeto AE+ED: AB+CD=$ea+ed$: $ab+cd$, bo każdy z tych stosunków równy $ef:gf$, a że poprzednik większy od poprzednika przeto i następnik większy od następnika.

299. *Tw. Z trójkątów* ABC i DEF *mających wysokości i summy dwóch boków równe, symetryczny* ABC *ma największą podstawę* AC (fig. 261).

Wystawiwszy na podstawie DF trójkąta niesymetrycznego DEF, trójkąt symetryczny DHF mający z nim równą wysokość DH+HF < DE+EF (298, Wn. 1), przeto i DH+HF < AB+BC a tém samém DH < AB, odciąwszy więc JK=GD, linia JK < JA, gdyż w tym tylko razie pochyła BK=HD jest mniejszą od BA.

300. *Tw. Z trójkątów mających jednakowe dwa boki, ten jest największy, w którym te boki tworzą kąt prosty.* Gdyż biorąc jeden z nich za podstawę, ten trójkąt ma największą powierzchnię w którym wysokość największa, a zatém w którym ta wysokość

równa się bokowi przyległemu podstawie, gdyż prostopadła będąc najkrótszą ze wszystkich pochyłych, byłaby krótszą od każdego innego boku.

Wn. 1. Ze wszystkich równoległoboków mających boki dane prostokąt jest największy, gdyż składa się z największych dwóch trójkątów.

301. *Tw. gł. Jeśli w wielokącie* ABC *poprowadzimy dowolną linię* BT *i weźmiemy oś symetryi df prostopadłą do téj linii, zaś z wierzchołków poprowadzimy linie prostopadłe do osi i odetniemy na nich odcinki połowiące się na osi i równe odcinkom tych linii, zawartym między obwodem danego wielokąta, to końce połowiących się odcinków, są wierzchołkami wielokąta równoważnego, mającego mniejszy obwód* (fig. 362).

1° W trójkącie ABC linia dowolna BT, do któréj oś symetryi df jest prostopadłą, połowi podstawę AC; odcinam eg=BT połowiące się w O i punkta d i f, oznaczone na osi przez prostopadłe Ad i Cf, łączę z punktami e, g i otrzymałem kwadrat skośny $defg$, którego punkt O jest środkiem symetryi, gdyż osie są prostopadłe i dO=Of dlatego, że AT=TC (138). Kwadrat ten jest równoważny trójkątowi ABC i ma od niego mniejszy obwód, gdyż trójkąt efg równoramienny, jest równoważny trójkątowi BTC zaś deg trójk. ABT.

2° Prowadzę linię JK połowiącą kąt między osiami symetryi i oś symetryi lh prostopadłą do téj linii, to wielokąt P jest równoważny skośnemu kwadratowi, gdyż tr. symetr. ihn równoważny trójkątowi Hfg, prostokąt Ln równoległobokowi eg i t. d.

Wn. 1. Im daléj posuwamy podobnym sposobem przemianę wielokąta, tém więcéj on ma osi symetryi i tém mniéj one różnią się od siebie, a tém samém bardziéj wielokąt zbliża się do figury równoważnéj mającéj najmniejszy obwód. Lecz że w téj przemianie liczba boków powiększa się tak, że w ogólności każden z wierzchołków, prócz dwóch skrajnych, tworzy w następnéj dwa wierzchołki, przeto zarazem wielokąt zbliża się do linii krzywéj.

Wn. 2. Wielokąt foremny ma mniejszy obwód od równoważnego z nim wielokąta nieforemnego o téj saméj liczbie boków; gdyż ma tyle równych sobie osi symetryi ile wierzchołków (130), co niema miejsca w nieforemnym o téj saméj liczbie boków; z wielokątów zaś foremnych ten ma mniejszy obwód, który ma większą liczbę boków, gdyż więcéj ma sobie równych osi symetryi.

Wn. 3. Figura niemająca w jakimkolwiek kierunku osi symetryi, lub w któréj osie symetryi nie są sobie równe, niemoże mieć najmniejszego obwodu, gdyż w tym kierunku poprowadziwszy linię i oś symetryi do niéj prostopadłą, otrzymamy figurę jéj równoważną mającą mniejszy obwód a zatém figura, w któréj we wszystkich kierunkach są osie symetryi przechodzące przez środek i równe sobie, ma najmniejszy obwód. Koło więc ma najmniejszy obwód ze wszystkich figur, gdyż średnice są jego osiami symetryi.

302. *Tw. gł. Z wielokątów mających wszystkie boki dane prócz jednego, ten jest największy, który*

jest wpisany w półkole, a tém samém za bok nieoznaczony ma średnicę.

Wielokąt, w którym, którykolwiek z wierzchołków nieleży na okręgu, nie może być największym; gdyż dwie przekątnie poprowadzone z końców boku niedanego do tego wierzchołka, nietworzą kąta prostego, a zatém trójkąt prostokątny mający te przekątnie za przyprostokątnie, jest większy od trójkąta odpowiedniego danego wielokąta; wystawiwszy więc na przyprostokątnich wielokąty równe wielokątom stojącym na przekątnich danego wielokąta, otrzymamy wielokąt większy od danego i mający boki dane.

Wn. 1. Z wielokątów mających boki równe w jednakowym porządku ten jest największy, który może być wpisanym w koło; gdyż średnica poprowadzona przez jeden z jego wierzchołków, dzieli go razem z trójkątem mającym za podstawę bok przecięty przez tą średnicę a za wierzchołek drugi koniec téj średnicy, na dwa wielokąty wpisane w pólokręgu; przekątnia zaś poprowadzona z wierzchołka odpowiedniego wielokąta niemogącego być wpisanym w koło, do wierzchołka trójkąta równego trójkątowi dodanemu do pierwszego wielokąta i wystawionego na odpowiednim boku, dzieli wielokąt nie mogący być wpisanym w koło, na dwa wielokąty niemogące być wpisane w półkole a mające boki równe i w tym samym porządku co w wielokącie wpisanym; lecz że wielokąty pierwsze są większe od drugich, przeto wielokąt wpisany w koło z trójkątem, jest większy od wielokąta niemogącego być wpisanym z tymże samym trójkątem, czyli wielokąt pierwszy jest większy od drugiego.

Wn. 2. Wielkość wielokąta wpisanego w koło mającego boki dane, niezależy od porządku tych boków; gdyż w jakimkolwiek porządku będą boki, trójkąty utworzone z tych boków i promieni poprowadzonych do ich końców, są sobie równe, jako mające po trzy boki rowne, a zatém i ich summy są sobie równe.

Wn. 3. Z wielokątów rownoobwodowych o jednakowéj liczbie bokow największym jest foremny; gdyż jako mający boki równe jest większy od niemającego boków równych (298. Wn. 3) a jako wpisany w koło jest większy od równobocznego niemogącego być wpisanym. I nawzajem: *z wielokątow rownoważnych o jednakowéj liczbie bokow foremny ma najmniejszy obwod*; gdyż nie może mieć obwodu równego, bo miałby większą powierzchnię, ani większego bo wielokąt równoobwodowy z foremnym, a podobny nieforemnemu byłby mniejszy od foremnego, zaś większy od niefor. jako mu podobny i mający obwód większy; a zatém i wielokąt foremny témbardziéj byłby większy od nieforemnego.

303. *Tw. Powierzchnia koła jest średnioproporcyonalna między powierzchniami dwoch wielokątow podobnych z ktorych jeden opisany na kole, zaś drugi rownoobwodowy z kołem.*

Powierzchnia koła rowna się iloczynowi z okręgu przez połowę promienia $\frac{1}{2}O \times r$; zaś wielokąta opisanego, z obwodu Ob równa się iloczynowi przez połowę wysokości jednego z trójkątów składających ten wielokąt, mających wierzchołki we środku koła, równéj promieniowi; gdyż każdego trójkąta powierzchnia równa się iloczynowi z podstawy przez wspólną wysokość; powierzchnia zaś wielokąta równoobwodowego z kołem równa się iloczynowi z obwodu przez połowę prostopadłéj jednego z trójkątów mających wierzchołek w środku i podobnych trójkątom opisanego wielokąta t. j. $\frac{1}{2}Ok.w$; zatém Pow. wiel. opis: Pow. koła$=$ $\frac{1}{2}Ob.r : \frac{1}{2}Ok.r = Ob : Ok$, i Pow. koła: Pow. wiel. równoobw.$=\frac{1}{2}Ok.r : \frac{1}{2}Ok.w = r : w$; lecz w wielokątach podobnych obwody są w stosunku wysokości, więc $Ob : Ok = r : w$; przeto w dwóch poprzednich proporcyach drugie stosunki są sobie równe, to i pierwsze są równe, czyli Pow. wiel. opis: Pow. koła$=$Pow. koła: Pow. wiel. równoobw. z kołem.

Wn. gł. Powierzchnia koła jest największą ze wszystkich wielokątow równoobwodowych; gdyż wszelki wielokąt wpisany w koło jest większy od wszelkiego innego wielokąta o tych samych bokach, zaś koło jest większe od wielokąta z nim równoobwodowego mogącego być wpisanym w koło, gdyż powierzchnia wielokąta opisanego na kole jest większa od powierzchni koła jako całość od swojéj części, a te powierzchnie są w jednakowym stosunku. I nawzajem (301. Wn. 3), co moglibyśmy jeszcze dowieść podobnie jak w N. 302. Wn. 3.

303. *Tw. Z wielokątów foremnych opisanych na*

kole ten jest większy który ma mniejszą liczbę boków (fig. 263).

Linia AD jest połową boku wielokąta forem. o n. bokach opisanego na kole, którego promień SA, zaś AC połową boku takiegoż wielokąta mającego jednym bokiem więcéj t. j. $n+1$ boków. Kąt ASD jako połowa kąta środkowego, wielokąta, jest taką częścią Π jaką kąt środkowy 2Π t. j. $\frac{\Pi}{n}$; dla podobnéj przyczyny kąt ASC jest $\frac{\Pi}{n+1}$; zatém kąt ASD: ASC $=\frac{\Pi}{n}:\frac{\Pi}{n+1}=\frac{(n+1)\Pi}{n(n+1)}:\frac{n\Pi}{(n+1)n}=n+1:n$ czyli kąt ASD ma takich kątów $n+1$, jakich ASC ma n. Poprowadziwszy linie dzielące kąt ASD na $n+1$ części, linia CD jest większa od $\frac{AD}{n+1}$, gdyż jest większą od części poprzedzającéj BC będąc z nią w stosunku linii SD : SB (142); przeto i pozostała część AC jest mniejsza od n takich części $\frac{AD}{n+1}$ t.j. $AC < n.\frac{AD}{n+1}$; zkąd $AC(n+1) < n.AD$ czyli pół obwodu wielokąta o większéj liczbie boków jest mniejsze od półobwodu wielokąta mającego boków jednym więcéj a tém samém i cały obwód, większy od obwodu. Lecz powierzchnia każdego z nich równa się iloczynowi z obwodu przez połowę promienia koła wspieranego, przeto i powierzchnia wielokąta mającego więcéj boków jest mniejsza od powierzchni wiel. mającego mniéj boków.

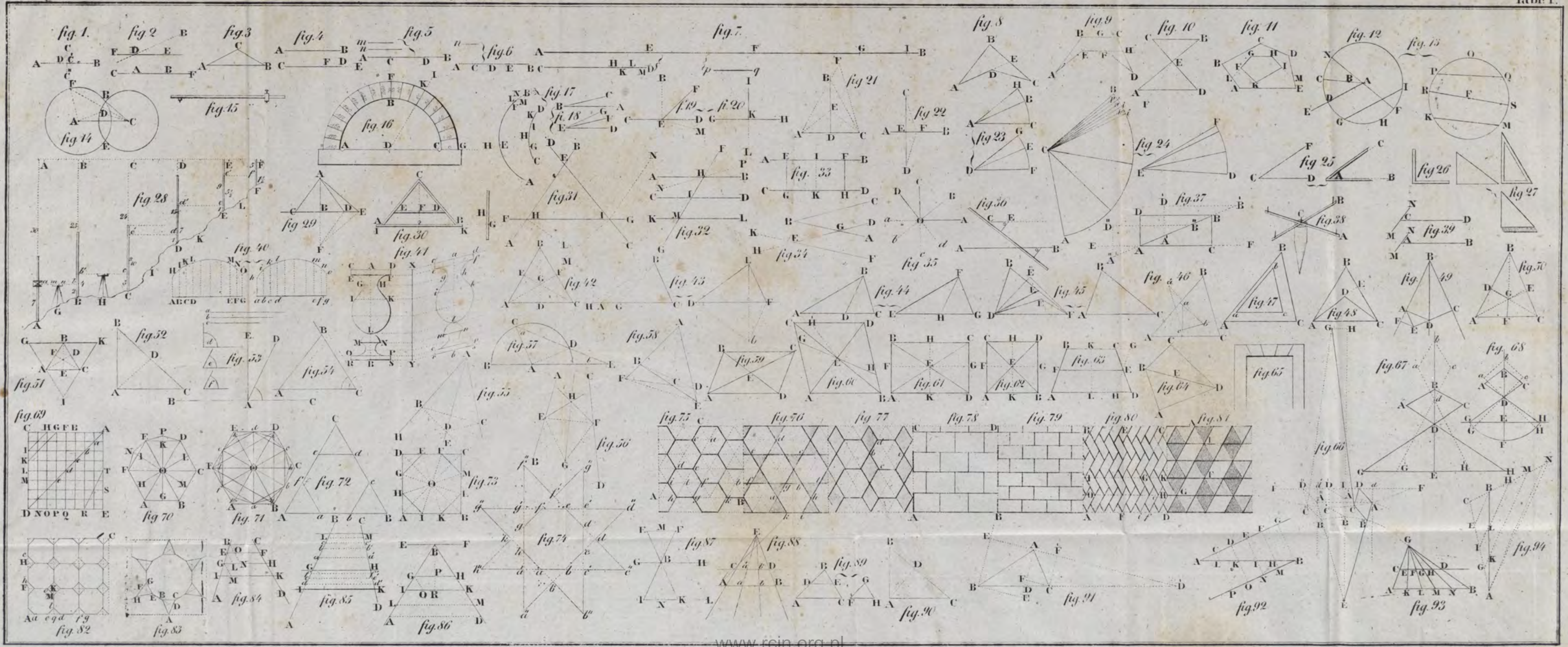
304. *Tw. Opisawszy na kole K dwa wielokąty A i B, to dwa inne wielokąty C i D rownoobwodowe z kołem K i im podobne A z C, B z D, są względem ich w stosunku odwrotnym t. j.* D : C=A : B.

Koło jest średnio proporcyonalne między wielokątem opisanym i podobnym mu równoobwodowym (302), przeto A: K=K : C i B : K=K : D czyli K : B =D: K, pomnożywszy tę proporcyę przez pierwszą i podzieliwszy wszystkie wyrazy wypadłéj proporcyi przez K, otrzymamy: A:B=D: C.

Wn. 1. *Z wielokątów foremnych* C i D *równoobwodowych, wielokąt* C *mający więcéj boków ma większą powierzchnię*; albowiem na kole z nimi równoobwodowym opisawszy wielokąty im podobne A i B wielokąt A jako mający większą liczbę boków jest mniejszy od wielokąta B, a zatém i wielokąt D < C gdyż A: B=D: C. I nawzajem: *Z wielokątow foremnych rownoważnych wielokąt* E *mający więcéj boków od* F, *ma obwód mniejszy*; gdyż jeśliby obwód E=ob. F to E > F; jeśliby zaś ob. E > ob. F, to wielokąt G podobny E a równoobwodowy z F byłby mniejszy od E, bo ich powierzchnie są w stosunku kwadratów z obwodów, a *ob.* E > *ob.* F jest także większy i od *ob.* G=*ob.* F; lecz G > F jako równoobwodowe, to tém bardziéj E byłoby większe od F, coby się sprzeciwiało założeniu.

KONIEC KSIĘGI PIERWSZÉJ.

SPIS PRZEDMIOTÓW.



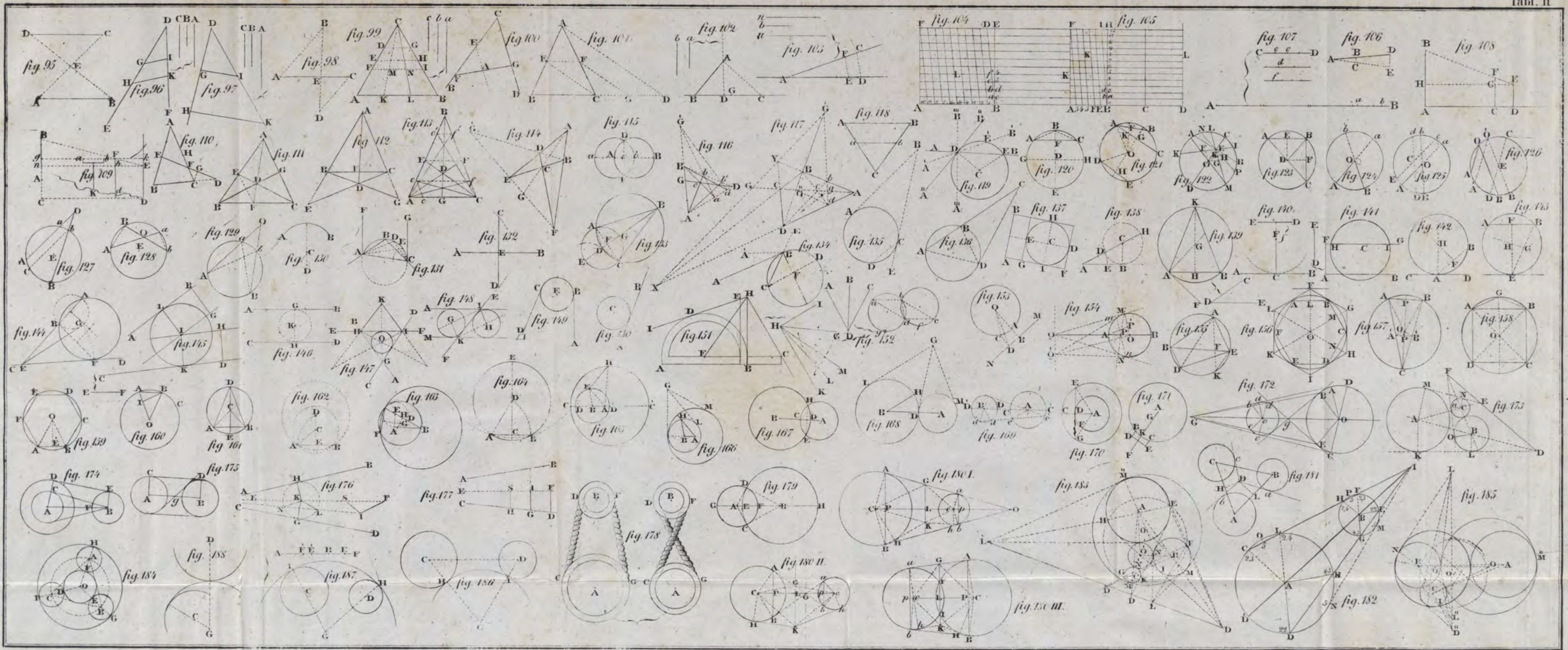


fig. 95
fig. 96
fig. 97
fig. 98
fig. 99
fig. 100
fig. 101
fig. 102
fig. 103
fig. 104
fig. 105
fig. 107
fig. 106
fig. 108
fig. 109
fig. 110
fig. 111
fig. 112
fig. 113
fig. 114
fig. 115
fig. 116
fig. 117
fig. 118
fig. 119
fig. 120
fig. 121
fig. 122
fig. 123
fig. 124
fig. 125
fig. 126
fig. 127
fig. 128
fig. 129
fig. 130
fig. 131
fig. 132
fig. 133
fig. 134
fig. 135
fig. 136
fig. 137
fig. 138
fig. 139
fig. 140
fig. 141
fig. 142
fig. 143
fig. 144
fig. 145
fig. 146
fig. 147
fig. 148
fig. 149
fig. 150
fig. 151
fig. 152
fig. 153
fig. 154
fig. 155
fig. 156
fig. 157
fig. 158
fig. 159
fig. 160
fig. 161
fig. 162
fig. 163
fig. 164
fig. 165
fig. 166
fig. 167
fig. 168
fig. 169
fig. 170
fig. 171
fig. 172
fig. 173
fig. 174
fig. 175
fig. 176
fig. 177
fig. 178
fig. 179
fig. 180 I.
fig. 181
fig. 183
fig. 182
fig. 184
fig. 188
fig. 187
fig. 186
fig. 180 II.
fig. 180 III.
fig. 185