

3.1.7. — stateczność

2.2.1. — mechanika punktu i układów
nieodkształconych

Krzysztof L. Janicki

ZJAWISKA BIFURKACJI SUBHARMONICZNYCH,
UCIECZKI I PRZEJŚCIA DO CHAOSU
W NIELINIOWYM OSCYLATORZE
METODY PERTURBACYJNE
A EKSPERYMENT NUMERYCZNY

16/1994
PRACA DOKTORSKA

P. 269



W A R S Z A W A 1 9 9 4

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 kwietnia 1994 r.

Praca doktorska
recenzent – Doc. dr hab. inż. Andrzej Turski

Promotor – Prof. dr hab. inż. Wanda Szemplińska-Stupnicka



56633



Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 6,5 Ark. druk. 8,00
Oddano do drukarni w czerwcu 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Krzysztof L. Janicki

Samodzielna Pracownia Dynamiki Stosowanej

**ZJAWISKA BIFURKACJI SUBHARMONICZNYCH,
UCIECZKI I PRZEJŚCIA DO CHAOSU W NIELINIOWYM OSCYLATORZE
Metody perturbacyjne a eksperyment numeryczny**

1. WPROWADZENIE

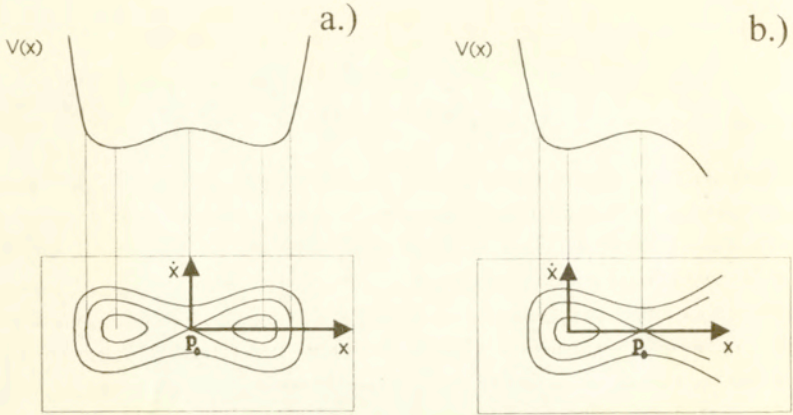
W ostatnich latach ma miejsce znaczny wzrost znaczenia teorii nieliniowych układów dynamicznych. Składa się na to nie tylko rozwój samej dyscypliny, ale przede wszystkim przenikanie jej pojęć i rezultatów do innych nauk: technicznych, biologicznych, czy ekonomicznych. Szczególnie spektakularne są te rezultaty tej teorii, które wskazują na złożoność zachowań stosunkowo prostych systemów - budzą one nadzieję na możliwość użycia nieliniowych modeli matematycznych o stosunkowo niskim wymiarze do opisu, przynajmniej jakościowego, skomplikowanych zjawisk różnej natury, jak np. niestabilności hydrodynamiczne, dynamika populacji lub katastrofy statków. Badania prostych modeli wydają się również niezbędnym etapem wstępnym, poprzedzającym poznanie zjawisk występujących w bardziej złożonych układach.

1.1 BADANY UKŁAD, JEGO ZNACZENIE PRAKTYCZNE I TEORETYCZNE

Do najważniejszych obiektów badań teorii układów dynamicznych należy nieliniowy oscylator o jednym stopniu swobody poddany zewnętrznemu wymuszeniu. Mimo znacznych postępów w zrozumieniu dynamiki takich oscylatorów są one wciąż intensywnie badane. W szczególności dotyczy to klasy zagadnień, w których rozważany układ można uznać za pewne zaburzenie autonomicznego układu Hamiltona, w którym istnieje więcej niż jedno położenie równowagi. Oznacza to, że układ niezaburzony opisany jest hamiltonianem postaci:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) ,$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma kilka ekstremów odpowiadających stabilnym lub niestabilnym położeniom równowagi. Przykładowe potencjały tego typu oraz wynikające z nich portrety fazowe układów niezaburzonych przedstawiono na Rys. 1.1a,b.



Rys. 1.1. Typowe potencjały o kilku ekstremach i odpowiadające im portrety fazowe układów Hamiltona:

- a.) $V(x) = -\alpha x^2/2 + \beta x^4/4$, $\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = 0$;
 b.) $V(x) = \alpha x^2/2 - \beta x^3/3$, $\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 = 0$;

W wielu zagadnieniach pojawia się problem zbadania dynamiki oscylatorów opisywanych takimi potencjałami w obecności dodatkowych sił: zewnętrznego wymuszenia periodycznego i tłumienia. Często zakłada się sinusoidalne wymuszenie i liniowe tłumienie - rozważa się więc równania postaci

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \frac{dV}{dx} = F \cos \nu t. \quad (*)$$

Niniejsza praca będzie poświęcona układowi (*), w którym potencjał $V(x)$ ma dwa minima i jedno maksimum (Rys. 1.1a). Oscylator taki służy jako model następujących problemów fizycznych:

- a.) drgania geometrycznie nieliniowych belek (patrz Dodatek A),
- b.) drgania plazmy [Mahaffey 1976],
- c.) zagadnienia przewodnictwa [Huberman, Crutchfield 1979],
- d.) dynamiczna niestabilność statków pod działaniem fal [Falzarano et al. 1992],
- e.) wahadło magnetyczne [Kudrewicz 1993].

W Dodatku A pokazano, w jaki sposób potencjał tego typu pojawia się przy badaniu drgań belek. Otrzymano tam równanie postaci

$$\ddot{x} + h\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = F \cos \nu t, \quad (1.1a)$$
$$h, \alpha, \beta > 0, \quad T = \frac{2\pi}{\nu},$$

które będzie przedmiotem analizy w niniejszej pracy. W dalszych rozdziałach abstrahujemy od fizycznej interpretacji jego parametrów. Będziemy je nazywać równaniem Duffinga.

Wiele rezultatów teorii układów dynamicznych sformułowanych jest dla układów równań pierwszego rzędu

$$\dot{x} = f(x),$$

gdzie:

- $x \in \mathbb{R}^n$ lub, bardziej ogólnie, $x \in \mathbb{M}$, gdzie \mathbb{M} jest n-wymiarową rozmaitością;
- f jest polem wektorowym klasy C^r , $r \geq 1$.

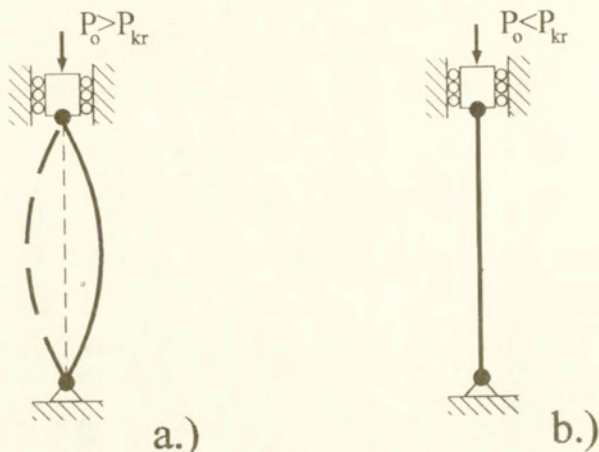
Z tego względu równanie (1.1a) zapiszemy również jako układ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha x - \beta x^3 - hy + F \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= 1. \end{aligned} \quad (1.1b)$$

Z uwagi na T-periodyczność w zmiennej ψ naturalna jest "toroidalna" przestrzeń fazowa $\mathbb{R}^2 \times S^1 \ni (x, y, \psi)$, gdzie $S^1 = \mathbb{R}/T$ jest okręgiem o długości T.

Równanie (1.1a) ma dla $F=0$ trzy punkty równowagi: dwa stabilne dla $x = \mp \sqrt{\alpha/\beta}$ i jeden niestabilny dla $x=0$. W terminach opisanej w Dodatku A jednomodalnej dyskretyzacji równania belki odpowiada to Rysunkowi 1.2a, gdzie widzimy dwa stabilne i jedno

niestabilne położenie równowagi. Jest to możliwe tylko dla siły ściskającej większej od krytycznej. Dla siły mniejszej od krytycznej występuje tylko jedno, stabilne położenie równowagi, odpowiadające $x=0$ (Rys. 1.2b). Do tej ostatniej sytuacji należałoby zastosować równanie (1.1) z $\alpha < 0$.

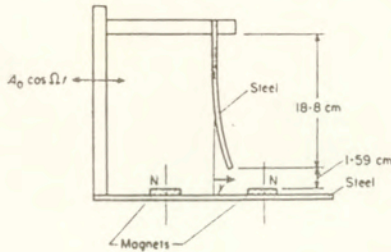


Rys. 1.2. Równowaga ściskanej belki dla siły ściskającej P_0 :

- a.) powyżej siły krytycznej P_{kr} ,
- b.) poniżej siły krytycznej P_{kr} .

Problem drgań belki był przedmiotem licznych badań eksperymentalnych, analitycznych i numerycznych. W [Tseng, Dugundji 1971] przeprowadzono obszerne badania rezonansów podstawowych i superharmonicznych. Autorzy zwracali szczególną uwagę na obserwowane eksperymentalnie i numerycznie nieregularne przeskokki między drganiami raz wokół jednego, raz drugiego położenia równowagi. Wyjaśnienie tych nieregularnych ruchów stało się celem wielu prac eksperymentalnych i teoretycznych zapoczątkowanych przez F.C. Moona i P.J. Holmesa [Moon, Holmes 1979] i wykorzystujących koncepcje teorii układów dynamicznych, a w szczególności pojęcie dziwnego atraktora. Schemat badanego

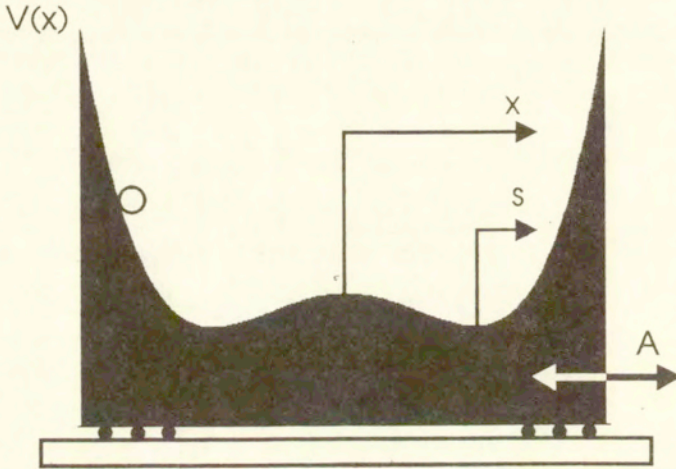
tam układu przedstawiono na Rys. 1.3. Wymuszenie realizowano magnetycznie, co daje dodatkowy wkład do sześcienniej nieliniowości w modelu (1.1). Związki równania Duffinga z problemem drgań belki omówiono również w wielu późniejszych pracach, m.in. [Holmes 1979], [Moon 1980], [Holmes, Moon 1983], [Tang, Dowell 1988], [Pezeshki, Dowell 1989].



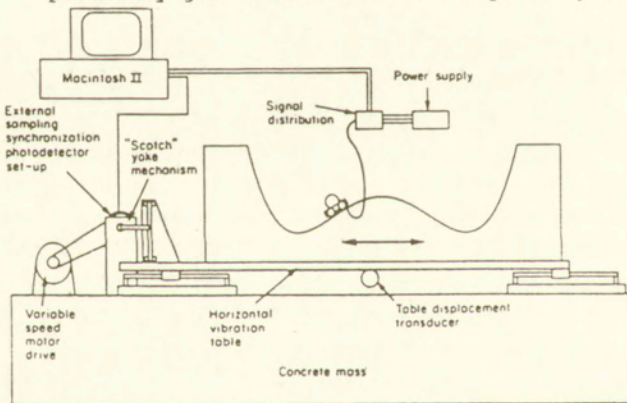
Rys. 1.3. Stanowisko eksperymentalne F.C. Moona.

Najprostszy koncepcyjnie układ mechaniczny opisywany (w przybliżeniu) równaniem Duffinga przedstawiono na Rys. 1.4. Stanowi on model fizyczny, do którego będziemy się odwoływać w dalszej części tekstu. Podobny układ rzeczywiście wykonano (Rys. 1.5) [Gottwald, Virgin, Dowell 1992], starannie dobierając parametry mechaniczne, tak aby jak najdokładniej realizować zależność (1.1). To "modelowanie fizyczne równania" jest świadectwem dużego znaczenia oscylatora (1.1) w teorii drgań nieliniowych. Znaczenie to wykracza poza zastosowania fizyczne - układ (1.1) jest ważnym obiektem badań teoretycznych dotyczących uniwersalnych własności zarówno regularnych rozwiązań okresowych, jak i skomplikowanych ruchów chaotycznych. Poniżej nakreślimy najważniejsze kierunki i rezultaty tych badań w aspekcie ich zastosowania do oscylatora (1.1), mając na celu omówienie związków między tą, a innymi pracami.

Do układu (1.1) stosowano metodę Mielnikowa [Mel'nikow 1963]. Metoda ta pozwala, dla pewnej klasy systemów, uzyskać istotne informacje dotyczące dynamiki układu na drodze czysto



Rys. 1.4. Kulka w potencjale o dwóch "dołkach". Potencjał poruszany jest sinusoidalnie z amplitudą A .



Rys. 1.5. Stanowisko doświadczalne [Gottwald et al. 1992].

analitycznej. Dzięki niej można badać pewne rozwiązania okresowe, a także udowodnić istnienie transwersalnych punktów homoklinicznych, powstających w tzw. bifurkacji homoklinicznej. Ta ostatnia własność pociąga za sobą istnienie w pewnej skończonej iteracji odwzorowania Poincaré układu niezmienniczego

zbioru typu podkowy Smale'a. Analityczny warunek pojawienia się transwersalnych punktów homoklinicznych nosi nazwę kryterium Mielnikowa. Metodę Mielnikowa zastosowano do równania Duffinga w pracach [Holmes 1979] (bifurkacja homokliniczna) i [Greenspan, Holmes 1983] (bifurkacje subharmonicznych). Nieco inne ujęcie tej metody podaje [Wiggins 1990]. Obszerne informacje na temat zjawisk towarzyszących bifurkacji homoklinicznej można znaleźć w monografii [Palis, Takens 1993].

Przy analizie własności przestrzeni fazowej, a także struktury bifurkacji w przestrzeni parametrów, nieodzowne są badania numeryczne. Standardem w badaniach zjawisk nieliniowych są, oprócz symulacji, opartych na różnych metodach całkowania numerycznego, badania widm Fouriera sygnału i przekrojów Poincaré [Arecchi, Lisi 1982], [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab]. W badaniach zjawisk chaotycznych duże znaczenie ma obliczanie wykładników Lapunowa, będących miarą wrażliwości rozwiązań na warunki początkowe, oraz wymiaru fraktalnego atraktora, będącego miarą jego geometrycznej złożoności. Te dane dla oscylatora (1.1) można znaleźć w [Moon, Li 1985a], [Pezeshki, Dowell 1989], [Gafka, Tani 1991]. Oprócz tradycyjnych metod symulacyjnych, wykrywających zasadniczo tylko stabilne rozwiązania okresowe, stosowane są metody pozwalające analizować również rozwiązania niestabilne i ich bifurkacje [Parker, Chua 1989].

Ważną dziedziną badań numerycznych jest analiza obszarów przyciągania rozwiązań regularnych i chaotycznych, a także analiza niezmienniczych różnicowości rozwiązań regularnych. Badania te pozwoliły m.in. zinterpretować kryterium Mielnikowa jako kryterium pojawienia się tzw. przejściowego chaosu (transient chaos) oraz wystąpienia fraktalnych brzegów obszarów przyciągania rozwiązań regularnych [Moon, Li 1985b], [Pezeshki, Dowell 1987, 1988]. Oprócz bifurkacji homoklinicznej opisywanej przez kryterium Mielnikowa pojawiają się dalsze bifurkacje homo- i heterokliniczne. Niektóre z nich są odpowiedzialne za zjawiska kryzysu (crisis) atraktora chaotycznego lub bifurkacji nieokreślonych (indeterminate bifurcations) [Ueda et al. 1990],

[Stewart, Ueda 1991].

Wraz z narastającą ilością obserwacji ruchów chaotycznych zaczęto interesować się możliwościami przybliżonej analizy teoretycznej, pozwalającej przewidywać możliwość wystąpienia takich ruchów w układach. Wspomniano już kryterium Mielnikowa, pozwalające wykryć bifurkację homokliniczną. Bifurkacja ta powoduje znaczną komplikację struktury przestrzeni fazowej, nie implikuje jednak pojawienia się atraktora chaotycznego, najbardziej interesującego z punktu widzenia powyżej omówionych eksperymentów. Podanie matematycznych warunków istnienia takiego atraktora jest bardzo poważnym i nierozwiązanym problemem teoretycznym. Pojawiły się więc prace, których autorzy starają się dostarczyć heurystycznych kryteriów pojawienia się chaosu [Moon 1987], [Dowell, Pezeshki 1988].

Prócz wystąpienia ruchów chaotycznych, na dużą uwagę zasługuje zjawisko ucieczki z "dołka" potencjału. Polega ono na tym, że na skutek ciągłej, quasistatycznej zmiany jakiegoś parametru może nastąpić skokowe przejście od drgań ustalonych ograniczonych do jednego "dołka" do drgań ustalonych obejmujących dwa "dołki" (Rys. 1.4). Czasami efektem ucieczki jest ruch chaotyczny; może to być jednak również ruch regularny (periodyczny). Zjawisko to ma zasadnicze znaczenie dla zastosowań; w szczególności w mechanice może oznaczać nagłe przejście do ruchu o większej amplitudzie, powodującego zniszczenie konstrukcji lub wywrócenie statku.

Zainteresowanie wzbudzają więc kryteria ucieczki z "dołka" potencjału - przybliżone analityczne określenie w przestrzeni parametrów układu tych miejsc, w których ucieczka występuje. Pewne kryterium energetyczne postulują [Virgin, Plaut, Cheng 1992], a inne, wykorzystujące pojęcia teorii Mielnikowa [MacRobie, Thompson 1994].

W. Szemplińska-Stupnicka proponuje kryterium ucieczki oparte na badaniu metodami przybliżonymi lokalnej stateczności rozwiązań periodycznych ograniczonych do jednego "dołka", utworzonych w rezonansach niskich rzędów. Zgodnie z nim ucieczka ma mieć miejsce wtedy, gdy żadna z tych orbit nie jest

stateczna. [Szemplińska-Stupnicka 1987, 1988, 1992, 1994], [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab], [Clifford, Bishop 1994].

1.2 CEL I ZAKRES PRACY

W niniejszej pracy analizowane są zjawiska występujące w subharmonicznym zakresie częstości wymuszenia ν w równaniu (1.1). Mimo dużej liczby prac dotyczących układu Duffinga ten zakres częstotliwości nie został kompleksowo zbadany - większość autorów koncentruje się na zjawiskach związanych z rezonansem podstawowym i rezonansami superharmonicznymi. Z teoretycznego punktu widzenia jest interesujące zbadanie różnic i podobieństw między tymi ostatnimi, a rezonansami subharmonicznymi, tym bardziej, że w subharmonicznym zakresie parametrów należy oczekiwać dużej różnorodności zjawisk, związanej z występowaniem rozwiązań o różnych okresach. Badania takie są celowe również ze względów praktycznych - zdarza się na przykład, że konstruktor, chcąc uniknąć niebezpiecznego rezonansu podstawowego, napotyka rezonanse subharmoniczne.

Badania mają charakter teoretyczny (metody perturbacyjne) i numeryczny. Istotną częścią pracy jest dyskusja możliwości metod teoretycznych (klasycznej metody perturbacyjnej i metody Mielnikowa) w zakresie wykrywania różnego typu rozwiązań periodycznych i ich bifurkacji. Wyniki tych metod porównuje się z eksperymentem numerycznym, analizując jednocześnie skuteczność kryteriów ucieczki opartych na analizie bifurkacji lokalnych.

W SZCZEGÓLNOŚCI CELEM PRACY JEST:

- Zbadanie (w przestrzeni parametrów układu) obszarów istnienia najważniejszych atraktorów regularnych i chaotycznych.
- Uzyskanie metodą perturbacyjną rozwiązań periodycznych odpowiadających rezonansom subharmonicznym niskich rzędów tzw. Małej i Dużej Orbits i analiza stabilności tych rozwiązań.
- Analityczne wyznaczenie obszarów istnienia atraktorów

periodycznych powstałych w tych rezonansach.

- Rozszerzenie klasycznej metody perturbacyjnej tak, aby dawała się zastosować do analizy orbit subharmonicznych o dużej amplitudzie (Duża Orbita).
- Porównanie wyników metod perturbacyjnych (klasycznej i Mielnikowa), zastosowanych do bifurkacji orbit subharmonicznych, z eksperymentem numerycznym. Dyskusja stosowalności tych metod.
- Analiza efektywności metod przybliżonych w przewidywaniu zjawiska ucieczki z "dołka potencjału".
- Zbadanie scenariuszy przejścia do chaosu dla obszarów parametrów odpowiadających różnym rezonansom.

W Rozdz. 2. omówiona jest procedura metody perturbacyjnej KBM (Kryłow-Bogoliubow-Mitropolski). W Rozdz. 3. używamy tej metody w celu uzyskania rozwiązań periodycznych równania (1.1) odpowiadających rezonansom subharmonicznym niskich rzędów, zaś w Rozdz. 4. przeprowadzamy analizę stabilności tych rozwiązań używając równań wariacyjnych typu Hilla. Łączne wyniki Rozdziałów 3. i 4. pozwalają wyznaczyć podstawowe bifurkacje otrzymanych rozwiązań. W Rozdz. 5. omawia się wyniki teorii Mielnikowa, zarówno dla bifurkacji homoklinicznej, jak i bifurkacji rozwiązań periodycznych. W Rozdz. 6. rozważa się w przestrzeni parametrów obszary istnienia i bifurkacje atraktorów periodycznych o niskich okresach. Wyznacza się je numerycznie i porównuje z wynikami analitycznymi, otrzymanymi w Rozdz. 3. i 4. Ponadto bifurkacje tych atraktorów porównuje się z wynikami metody Mielnikowa, przedstawionymi w Rozdz. 5. W Rozdz. 7. omawia się wyniki numeryczne dotyczące zjawisk ucieczki i scenariuszy przejścia do chaosu oraz analizuje efektywność kryteriów ucieczki opartych na analizie bifurkacji lokalnych.

2. KLASYCZNA METODA ASYMPTOTYCZNA KBM. WŁASNOŚCI OGÓLNE.

Dla celów dalszej analizy teoretycznej (badania bifurkacji, analizy przybliżonych kryteriów ucieczki itp.) potrzebujemy przede wszystkim rozwiązań równania (1.1a). Będziemy ich szukać używając klasycznej metody asymptotycznej KBM (Kryłow-Bogoliubow-Mitropolski). W Rozdz. 2.1 opisana zostanie procedura otrzymania przybliżonych rozwiązań. W Rozdz. 2.2 i 2.3 przedstawiona zostanie analiza ich lokalnej stabilności i bifurkacji.

2.1 ROZWIĄZANIA PERIODYCZNE

Klasyczne metody perturbacyjne rozważają równania postaci ([Bogoliubov, Mitropol'skij 1963], [Guckenheimer, Holmes 1983], [Szemplińska-Stupnicka 1990], [Murdock 1991])

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + \mu G(u, \dot{u}, t; \mu) = 0 \quad , \quad (2.1)$$

gdzie μ jest małym parametrem, funkcja G jest dostatecznie regularna, a Ω^2 nie zależy od u , \dot{u} , t . Ponadto zakładając będziemy, że funkcja G jest T -periodyczna w zmiennej t ($T=2\pi/\nu$). Naszym zadaniem będzie badanie tylko rozwiązań periodycznych (2.1), choć przedstawiony formalizm pozwala również rozważać rozwiązania nieperiodyczne, np. związane z procesami przejściowymi. Będziemy używać następujących szczególnych postaci (2.1):

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + \mu f(u, \dot{u}, \nu t) = 0 \quad (2.2a)$$

lub

$$\ddot{u} + \Omega^2 u + \mu f(u, \dot{u}, \nu t) + \mu^2 g(u, \dot{u}, \nu t) = 0 \quad . \quad (2.2b)$$

Poniżej zostanie omówiona metoda asymptotyczna, często nazywana metodą KBM. Szuka ona przybliżonych rozwiązań (2.2a), (2.2b) w postaci [Bogoliubov, Mitropol'skij 1963], [Szemplińska-

Stupnicka 1990]

$$u(t) = a \cos v + \sum_{i=1}^k \mu^i u_i(a, v, vt) , \quad (2.3)$$

gdzie: $v \equiv \omega t + \varphi$, $\omega \equiv n\nu/m$;
 n, m są względnie pierwsze, zaś u_i są 2π -periodyczne w v i vt .
 Zadaniem metody jest wyznaczenie nieznaney amplitudy a i fazy φ ,
 a także korekcyjnych funkcji u_i . Amplituda i faza szukane są w postaci

$$\dot{a} = \sum_{i=1}^k \mu^i M_i(a, \varphi) , \quad (2.4a)$$

$$\dot{\varphi} = \sum_{i=1}^k \mu^i N_i(a, \varphi) , \quad (2.4b)$$

gdzie M_i, N_i są 2π -periodyczne w φ . Funkcje M_i, N_i są również nieznanne i wyznacza się je w trakcie obliczeń. Zależności (2.3), (2.4) mogą opisywać zarówno drgania periodyczne, jak i nieperiodyczne. Zauważmy, że jeśli

$$\dot{a} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\dot{\varphi} = 0, \quad (2.5b)$$

to $u(t)$ dane wzorem (2.3) jest periodyczne. Widzimy, że okres rozwiązania jest wtedy związany raczej z okresem zaburzenia, niż z okresem drgań własnych układu niezaburzonego. W istocie, można pokazać [Murdock 1991], że wszystkie orbity okresowe oscylatora (1.1) mają najmniejszy okres postaci mT ($m=1,2,3,\dots$). Orbity takie nazywamy subharmonicznymi.

Poszukiwanie rozwiązania w formie (2.3) powoduje niezgodność, polegającą na tym, że dla $\mu=0$ (2.3) nie jest rozwiązaniem (2.2). Niezgodność tę można ominąć, przyjmując dodatkowe założenie:

$$\Omega^2 - \omega^2 = \mu\sigma \quad \text{dla (2.2a)} \quad (2.6a)$$

lub

$$\Omega^2 - \omega^2 = \mu^2\sigma \quad \text{dla (2.2b)} , \quad (2.6b)$$

gdzie $\sigma = O(1)$ - parameter rozstrojenia. Zależności (2.6) ograniczają w przestrzeni parametrów równania obszar częstości ν do tych, które są bliskie $m\Omega/n$. Po podstawieniu (2.6) do (2.2) otrzymujemy

$$\ddot{u} + \omega^2 u + \mu(f + \sigma u) = 0 \quad (2.7a)$$

lub

$$\ddot{u} + \omega^2 u + \mu f + \mu^2(g + \sigma u) = 0. \quad (2.7b)$$

W ten sposób, przy założeniu małej różnicy $\Omega^2 - \omega^2$, wliczyliśmy ją w zaburzenie problemu (2.7). W odróżnieniu od (2.2), częstość drgań niezaburzonych jest tu związana z częstością perturbacji ν , a nie z częstością drgań własnych układu liniowego Ω . Dla $\mu=0$ wyrażenie (2.3) jest rozwiązaniem (2.7).

Zgodnie z klasyczną terminologią literatury dotyczącej metod perturbacyjnych będziemy używać pojęcia rezonansu w kontekście zależności (2.6). Rezonans $n:m$ oznacza tu, że rozważamy częstotliwości wymuszenia ν bliskie $m\Omega/n$, oczekując jednocześnie, że odpowiedź układu będzie bliska sinusoidalnej z dominującą harmoniczną o częstości $\omega = n\nu/m$.¹

Po wykonaniu następujących operacji:

- 1.) Różniczkujemy (2.3) względem t , wykorzystując (2.4). Otrzymujemy wyrażenia na \dot{u} , \dot{u} .
- 2.) Podstawiamy u , \dot{u} do f i g , po czym rozwijamy f i g w szereg potęgowy względem μ wokół punktu $(\text{acos}\nu, -\text{awsin}\nu)$,
- 3.) Podstawiamy u, \dot{u} oraz f i g do (2.7),
- 4.) Przyrównujemy wyrażenia o jednakowych potęgach μ , otrzymujemy układ k równań drugiego rzędu

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega^2 u_1 &= f^0 + 2\omega M_1 \sin\nu + (2a\omega N_1 - \sigma a) \cos\nu, \\ \ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 &= h + (2\omega M_2 + a N_{1,a} M_1 + a N_{1,\varphi} N_1 + 2M_{1,N}) \sin\nu + \\ &\quad (2\omega N_2 - M_{1,a} M_1 - M_{1,\varphi} N_1 + a^2 N_1^2) \cos\nu, \\ \text{itd.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Rezonanse typu 1:1 nazywa się podstawowymi, typu $n:1$ superharmonicznymi, typu $1:m$ subharmonicznymi, a typu $n:m$ ultrasubharmonicznymi. W niniejszej pracy badane są tylko rezonanse typu $1:m$.

gdzie

$$\dot{f}^0 \equiv -f(\text{acos}v, -a\omega \text{sin}v, vt) \quad , \quad \dot{q}^0 \equiv -g(\text{acos}v, -a\omega \text{sin}v, vt)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}^1 &\equiv -f_{,x}(\text{acos}v, -a\omega \text{sin}v, vt)u_1 - \\ & f_{,x}(\text{acos}v, -a\omega \text{sin}v, vt)(M_1 \text{cos}v - aN_1 \text{sin}v + u_1) - \\ & \sigma u_1 - 2M_1 \dot{u}_{1,a} - 2N_1 \dot{u}_{1,\varphi} \quad , \end{aligned}$$

$$h \equiv \dot{f}^1 \quad \text{dla (2.7a),}$$

$$h \equiv \dot{f}^1 + \dot{q}^0 \quad \text{dla (2.7b).}$$

Równania (2.8) są liniowe, z prawymi stronami 2π -periodycznymi w vt oraz v ($v = \omega t + \varphi$). Możemy je rozwiązywać jedno po drugim, rozwijając prawe strony w podwójne szeregi Fouriera i wykorzystując liniowość.

Prawe strony równań (2.8) zawierają składniki o częstości ω , występującej również po lewej stronie w charakterze częstości własnej problemu jednorodnego. Jak wiadomo, sytuacja taka prowadzi do pojawienia się w rozwiązaniu wyrażeń rosnących liniowo w czasie (człony sekularne). Zadaniem metody jest niedopuszczenie do ich powstania - możemy tego uniknąć dobierając odpowiednio funkcje M_i, N_i (przyrównując do zera współczynniki przy $\text{sin}\omega t, \text{cos}\omega t$). W istocie jest to powód, dla którego amplituda i faza są poszukiwane w postaci (2.4).

Po wyznaczeniu M_i, N_i ($i=1, 2, \dots$) otrzymujemy prawe strony (2.4). Oznaczmy je

$$M(a, \varphi; \nu) \equiv \mu M_1(a, \varphi) + \dots + \mu^k M_k(a, \varphi) \quad ,$$

$$N(a, \varphi; \nu) \equiv \mu N_1(a, \varphi) + \dots + \mu^k N_k(a, \varphi) \quad .$$

Podkreślono tutaj, że ν jest parametrem układu równań (2.4). Otrzymaliśmy więc układ dynamiczny na płaszczyźnie

$$\begin{aligned} \dot{a} &= M(a, \varphi; \nu) \quad , \\ \dot{\varphi} &= N(a, \varphi; \nu) \quad . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Warunek (2.5) periodyczności rozwiązania (2.3) ma postać

$$\begin{aligned} M(a, \varphi; \nu) &= 0, \\ N(a, \varphi; \nu) &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Rozwiązanie algebraicznego układu (2.10) oznaczmy (a_0, φ_0) . Jest ono punktem równowagi (2.9) i odpowiada periodycznej funkcji $u(t)$ w (2.3).

UWAGA 1.

Z reguły uzyskanie wzoru na ogólny wyraz szeregu (2.3) jest nadzwyczaj trudne [Mitropol'skij, Choma 1983]. Dlatego też w świetle zastosowań interesująca jest nie tyle zbieżność (2.3) do rozwiązania przy $k \rightarrow \infty$, co ocena błędu przybliżenia rozwiązania wyrażeniem (2.3), który jest rzędu (asymptotycznego) $O(\mu^k)$. Oznacza to, że istnieją stałe C i μ_0 , takie, że dla $\mu < \mu_0$ błąd Δu ma oszacowanie $|\Delta u| < C\mu^k$. Niestety, znalezienie bardziej precyzyjnego (ilościowego) związku między wielkością błędu, a wielkością małego parametru wydaje się zadaniem bardzo złożonym [Shapiro, Sethna 1977]. W związku z tym rezultaty przybliżonych metod analitycznych najłatwiej zweryfikować porównując je z wynikami numerycznymi.

UWAGA 2.

W literaturze dotyczącej metod perturbacyjnych najlepiej dopracowaną pod względem teoretycznym (twierdzeń o istnieniu i stabilności, oszacowań błędu itp.) wydaje się metoda uśrednienia. Wiele rezultatów dotyczących tej metody jest również podanych w [Bogoliubov, Mitropol'skij 1963]. Algorytm metody opisanej w rozdz. 2.1 różni się od algorytmu metody uśredniania (wydaje się prostszy), w niektórych przypadkach rezultaty tych metod są jednak identyczne, w tym sensie, że otrzymuje się w obu metodach identyczny układ (2.9). W szczególności dla równania (2.2a), w przypadku ograniczenia się do $k=1$ w (2.3) i (2.4), można pokazać, że równanie (2.9) jest takie samo, jak równanie wynikające z metody uśrednienia [Bogoliubov, Mitropol'skij 1963], [Mitropol'skij, Choma 1983]. Wynika z tego znany wniosek, dotyczący orbit periodycznych

(patrz np. [Guckenheimer, Holmes 1983]):

Jeśli (a_0, φ_0) jest hiperbolicznym² punktem stałym (2.9), to istnieje $\varepsilon_0 > 0$, takie, że dla $\varepsilon < \varepsilon_0$ (2.2a) posiada hiperboliczną orbitę periodyczną $\gamma(t) = (a_0, \varphi_0) + O(\varepsilon)$ o tym samym typie stabilności, co (a_0, φ_0) .

UWAGA 3.

Problem (2.1) przedstawia perturbację układu liniowego. Metody badające takie problemy będziemy nazywać blisko-liniowymi. W niektórych zagadnieniach rozważa się perturbacje (całkowalnych) układów nieliniowych. Spotkamy się z takim podejściem w Rozdz. 5.

2.2 ANALIZA STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ PERIODYCZNYCH

Zbadamy teraz stabilność rozwiązania (a_0, φ_0) układu (2.9), które, zgodnie z Uwagą 2, może dostarczyć informacji o stabilności rozwiązań równań (2.2). W tym celu rozważymy zaburzone rozwiązanie

$$a = a_0 + \delta a, \quad \varphi = \varphi_0 + \delta \varphi. \quad (2.11)$$

Dynamika zaburzenia $\delta a, \delta \varphi$ jest opisana, w otoczeniu (a_0, φ_0) , zlinearyzowanym równaniem

$$\begin{aligned} (\delta a)' &= M_a \delta a + M_\varphi \delta \varphi, \\ (\delta \varphi)' &= N_a \delta a + N_\varphi \delta \varphi, \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdzie pochodne cząstkowe policzono w (a_0, φ_0) . Szukając rozwiązań w postaci

$$\delta a = A_0 e^{\sigma t}, \quad \delta \varphi = \Phi_0 e^{\sigma t}; \quad A_0, \Phi_0 = \text{const}; \quad (2.13)$$

otrzymujemy wartości własne układu (2.12) (tzw. wykładniki

²Punkt równowagi nazywamy hiperbolicznym, jeśli żadna z wartości własnych układu zlinearyzowanego wokół tego punktu nie leży na osi urojonej. Orbitę periodyczną nazywamy hiperboliczną, jeśli żaden z jej multiplikatorów Floqueta (patrz Rozdz. 4) nie leży na okręgu jednostkowym [Perko 1991].

charakterystyczne):

$$\sigma_1 = -b - \sqrt{b^2 - 4c} \quad , \quad \sigma_2 = -b + \sqrt{b^2 - 4c} \quad , \quad (2.14a)$$

gdzie

$$b \equiv -(M_{,a} + N_{,\varphi}) \quad , \quad c \equiv M_{,a}N_{,\varphi} - N_{,a}M_{,\varphi} \quad . \quad (2.14b)$$

Jeśli $\text{Re}\sigma_1 \neq 0$ i $\text{Re}\sigma_2 \neq 0$ tzn. (a_0, φ_0) jest punktem hiperbolicznym (2.9), to układ zlinearyzowany (2.12) pozwala wnioskować o stabilności rozwiązania (a_0, φ_0) układu (2.9):

Jeśli

$$\text{Re}\sigma_1 < 0 \quad \text{i} \quad \text{Re}\sigma_2 < 0 \quad (2.15a)$$

to jest ono asymptotycznie stabilne;

jeśli

$$\text{Re}\sigma_1 > 0 \quad \text{lub} \quad \text{Re}\sigma_2 > 0 \quad (2.15b)$$

to jest ono niestabilne.

W szczególności, jeśli układ (2.9) jest dysypatywny, to $b > 0$. Wówczas $\text{Re}\sigma_1 < 0$ dla wszystkich c , a $\text{Re}\sigma_2 < 0$ dla $c > 0$ i $\text{Re}\sigma_2 > 0$ dla $c < 0$. Jeśli więc, na skutek zmiany parametrów, c zmienia znak, to

$$c = 0 \quad (2.16)$$

jest wartością bifurkacyjną, odpowiadającą zmianie stabilności rozwiązania.

Znaczenie warunku (2.16) można wyjaśnić w kontekście krzywych rezonansowych $a = a_0(\nu)$ w płaszczyźnie (a, ν) . Różniczkując (2.9) względem ν dostajemy

$$M_{,a} \frac{da}{d\nu} + M_{,\varphi} \frac{d\varphi}{d\nu} + M_{,\nu} = 0 \quad ,$$

$$N_{,a} \frac{da}{d\nu} + N_{,\varphi} \frac{d\varphi}{d\nu} + N_{,\nu} = 0 \quad ,$$

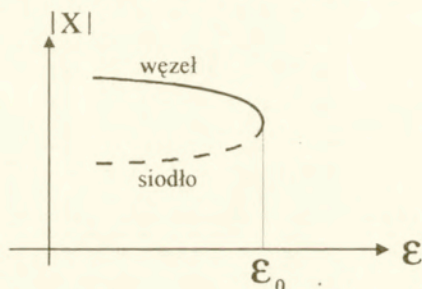
i rozwiązując na $\frac{da}{d\nu}$

$$\frac{da}{d\nu} = -(M_{,\nu}N_{,\varphi} - M_{,\varphi}N_{,\nu}) / (M_{,a}N_{,\varphi} - M_{,\varphi}N_{,a}) \quad . \quad (2.17)$$

Z (2.14b) i (2.17) wynika, że punkty, w których $a = a_0(\nu)$ ma pionową styczną, odpowiadają granicy stabilności $c = 0$.

2.3 BIFURKACJA SIODŁOWO-WĘZŁOWA W METODZIE PERTURBACYJNEJ

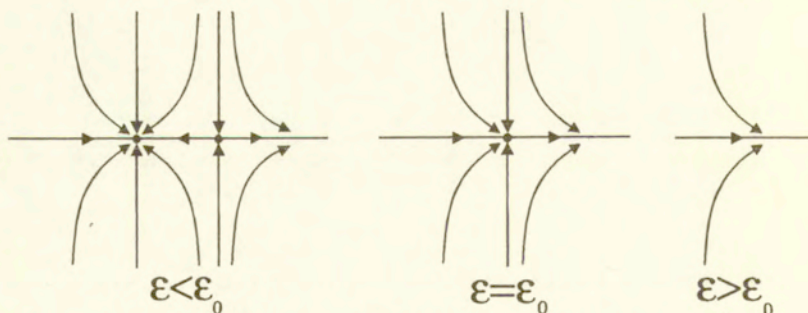
We wszystkich badanych dalej typach rozwiązań periodycznych będziemy mieli do czynienia z bifurkacją siodłowo-węzłową. Przedstawiono ją schematycznie na Rys 2.1 .



Rys. 2.1. Bifurkacja siodłowo-węzłowa: $|x|$ - pewna miara położenia punktu równowagi lub orbity periodycznej, ϵ - parametr bifurkacyjny.

W bifurkacji tej dwa rozwiązania: stabilne i niestabilne, łączą się ze sobą przy zmianie pewnego parametru ϵ i znikają. Możemy rozważać bifurkację siodłowo-węzłową zarówno punktów równowagi, jak i orbit periodycznych pól wektorowych. Wielkość $|x|$ na Rys 2.1 należy traktować jako uogólnioną miarę położenia bifurkującego rozwiązania.

Na Rys 2.2 przedstawiono pole wektorowe płaskiego układu dynamicznego, dla którego zachodzi bifurkacja siodłowo-węzłowa

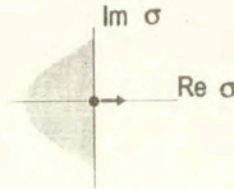


Rys. 2.2. Bifurkacja siodłowo-węzłowa punktu równowagi. Portrety fazowe dla różnych wartości parametru bifurkacyjnego.

punktów równowagi. Zajmujemy się tym przypadkiem, gdyż metoda perturbacyjna pozwala nam zamienić badanie bifurkacji siodłowo-węzłowej orbit periodycznych w układach trójwymiarowych na badanie bifurkacji siodłowo-węzłowej punktów równowagi układów płaskich. Wynika to z (podanego dla metody uśrednienia) twierdzenia [Guckenheimer-Holmes 1993]:

Przyjmijmy, że układ (2.2) zależy dodatkowo od parametru ϵ . Załóżmy, że równanie (2.9) ulega, dla pewnej wartości ϵ_0 , bifurkacji siodłowo-węzłowej punktu równowagi. Wówczas, dla dostatecznie małych μ i dla ϵ bliskiego ϵ_0 , również układ (2.2a) ulega bifurkacji siodłowo-węzłowej orbity periodycznej.

Klasyfikacja bifurkacji punktów równowagi pól wektorowych wiąże te bifurkacje ze sposobem zmiany stabilności równania zlinearyzowanego wokół tego punktu (patrz np. [Thompson, Stewart 1986]). Dla bifurkacji siodłowo-węzłowej ta zmiana stabilności polega na przejściu jednego z wykładników charakterystycznych σ z półpłaszczyzny $\text{Re}\sigma < 0$ do półpłaszczyzny $\text{Re}\sigma > 0$ przez punkt $(0,0)$ (Rys. 2.3). Widzimy, że przechodzenie c przez 0 - warunek (2.16) - odpowiada takiej sytuacji dla σ_2 . Dla $c < 0$ punkt równowagi ma stabilność typu węzła, a dla $c > 0$ typu siodła.



Rys. 2.3. Utrata stabilności przy bifurkacji siodłowo-węzłowej. Graniczne położenie wykładnika charakterystycznego σ .

W Rozdz. 3, do badania bifurkacji siodłowo-węzłowej orbit periodycznych będziemy używać tego właśnie podejścia, sprowadzającego problem do badania bifurkacji punktów równowagi.

UWAGA

Rozwiązania periodyczne mogą podlegać różnym bifurkacjom w

zależności od sposobu zmiany parametrów równania. Spotkamy się dalej na przykład z sytuacją, gdy orbita T-periodyczna przy zwiększaniu częstotliwości wymuszenia traci stabilność w bifurkacji siodłowo-węzłowej, a przy zmniejszaniu w bifurkacji podwojenia okresu. Zachodzi pytanie, czy analiza stabilności oparta na badaniu stabilności punktów równowagi układu (2.9) opisuje również zmiany stabilności rozwiązań periodycznych towarzyszące innym bifurkacjom.

Przykłady rozpatrzone w Rozdz. 3. i 4. pokazują, że analiza układu (2.9) nie wykrywa niestabilności rozwiązań układu (2.2) wynikających z bifurkacji typu podwojenia okresu oraz złamania symetrii, mimo że niestabilności takie zarówno obserwuje się numerycznie (Rozdz. 6), jak znajduje przy pomocy innych sposobów analizy przybliżonej (Rozdz. 4).

Pewną ilustrację tego faktu można uzyskać, badając wpływ zaburzeń δa , $\delta \varphi$ na spektra częstotliwościowe rozwiązań. Poniżej pokażemy, że odpowiedzialne za utratę stabilności zaburzenie rozwiązania otrzymane w analizie perturbacyjnej zawiera tylko te składowe harmoniczne, jakie występują w samym rozwiązaniu. Tymczasem, od bifurkacji podwojenia okresu i złamania symetrii oczekujemy (patrz również Rozdz. 4) pojawienia się w zaburzeniu nowych harmonicznych. Załóżmy, że otrzymaliśmy metodą asymptotyczną rozwiązanie typu (2.3) i rozwinęliśmy je w szereg Fouriera względem $\nu t/m$

$$u(a, \varphi, t) = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} p_i(a, \varphi) \cos(i\nu t/m) + q_i(a, \varphi) \sin(i\nu t/m). \quad (2.18)$$

Jeśli zaburzymy a i φ zgodnie z (2.11) i rozwiniemy p_i, q_i w szereg potęgowy wokół (a_0, φ_0) , to dostaniemy z (2.18)

$$u(a, \varphi, t) = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} p_i(a_0, \varphi_0) \cos(i\nu t/m) + q_i(a_0, \varphi_0) \sin(i\nu t/m) + \sum_{i=0,1,2,3,\dots} P_i \cos(i\nu t/m) + Q_i \sin(i\nu t/m), \quad (2.19)$$

gdzie P_i, Q_i oznaczają składniki rozwinięcia zawierające pochodne p_i, q_i policzone w (a_0, φ_0) i różne potęgi $\delta a, \delta \varphi$. Pierwsza suma w

(2.19) jest rozwiązaniem periodycznym odpowiadającym $u(a_0, \varphi_0, t)$, druga zaś jest zaburzeniem wynikającym z zaburzeń δa , $\delta \varphi$ amplitudy i fazy. Ten drugi składnik oznaczymy

$$\delta u(a_0, \varphi_0, t) \equiv \sum_{i=0,1,2,3,\dots} P_i \cos(ivt/m) + Q_i \sin(ivt/m) . \quad (2.20)$$

Zauważmy teraz, że z analizy stabilności przeprowadzonej w Rozdz. 2.2 wynika, że zaburzenie δu nie może zawierać rosnących w czasie składowych P_i , Q_i o częstościach innych, niż te, które występują w rozwinięciu $u(a_0, \varphi_0, t)$. Istotnie, nowe częstości mogłyby pojawić się tylko dla zespolonych wartości własnych λ (patrz (2.13)), tzn. w przypadku $b^2 - 4c < 0$. Dla układu dysypatywnego ($b > 0$) wymagałoby to $c > 0$, lecz wówczas rozwiązanie byłoby stabilne i zaburzenia małyby, a nie rosły.

Tak więc, analiza przeprowadzona w Rozdz. 2.2 nie jest w stanie oddać, nawet tylko w sposób formalny, efektu niestabilności rozwiązania polegającego na wzroście zaburzeń o innych częstotliwościach niż samo rozwiązanie. Takie efekty są jednak obserwowane np. przy okazji bifurkacji podwojenia okresu lub bifurkacji łamania symetrii. Aby je zbadać teoretycznie, użyjemy innych sposobów analizy, niż opisane w Rozdz. 2.2 (patrz Rozdz. 4.). Fakt ten nie jest sprzeczny z twierdzeniem cytowanym w Uwadze 2. Rozdz. 2.1 - zasadność analizy stabilności wynikająca z tego twierdzenia jest gwarantowana tylko dla małych μ . Może się więc zdarzyć, że dla pewnych $\mu \neq 0$ ta analiza stabilności nie daje już prawidłowych wyników, a inny rodzaj analizy daje wyniki zgodne z symulacjami.

3. RÓWNANIA Z MAŁYM PARAMETREM. ROZWIĄZANIA METODĄ KBM.

Układ (1.1), będący przedmiotem naszych badań, nie zawiera, jak dotąd, małego parametru, nie jest więc w postaci nadającej się do stosowania metod perturbacyjnych. Aby je zastosować, musimy założyć, że pewne wielkości są "małe". Założenia takie mogą być traktowane jako pewnego rodzaju modelowanie [Murdock 1991], wymagające z jednej strony wstępnej wiedzy o zjawiskach zachodzących w "rzeczywistym układzie", z drugiej zaś strony wiedzy o tym, czy zawierający mały parametr "model" jest w stanie te zjawiska wyjaśnić.

W rozdziale niniejszym:

- przedstawimy równania zawierające mały parametr,
- zastosujemy procedurę perturbacyjną,
- omówimy otrzymane rozwiązania.

3.1 REZONANS PODSTAWOWY MAŁEJ I DUŻEJ ORBITY

W rozdziale tym omówimy rezonanse podstawowe, tzn. typu 1:1. Rezonanse typu 1:m, $m > 1$ omawiane będą w Rozdz. 3.2.

Mając na uwadze model fizyczny oscylatora (1.1) (Rys. 1.4) możemy wyróżnić dwa rodzaje ruchów periodycznych:

- drgania wokół stabilnego punktu równowagi układu niezaburzonego ($x = \sqrt{\alpha/\beta}$ lub $x = -\sqrt{\alpha/\beta}$), pozostające cały czas w jednym "dołku" tzn. $x(t) \geq 0$ (ew. $x(t) \leq 0$) dla wszystkich t . Za [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab] będziemy je nazywać Małą Orbitą (w skrócie MO).
- drgania przechodzące przez wszystkie trzy położenia równowagi układu niezaburzonego ($x = \sqrt{\beta/\alpha}$, $x=0$, $x = -\sqrt{\beta/\alpha}$), obejmujące więc dwa "dołki". Będziemy je nazywać Dużą Orbitą (w skrócie DO).

Mały parametr będziemy wprowadzać do równania (1.1) w zależności od tego, czy opisujemy drgania Małej, czy Dużej Orbity. Zauważmy, że równanie (1.1a) zlinearyzowane wokół $x=0$ ma ujemną sztywność, podczas, gdy równania (2.2) mają dodatnią sztywność. Fakt ten musi zostać uwzględniony przy wprowadzaniu

małego parametru.

a.) MAŁA ORBITA

Zauważmy, że drgania te można w naturalny sposób opisać w terminach odchylenia od stabilnego punktu równowagi układu niezaburzonego $s \equiv x \mp \sqrt{\alpha/\beta}$ (Rys. 1.4). Na s otrzymujemy równanie

$$\ddot{s} + h\dot{s} + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 = F \cos vt, \quad (3.1)$$

gdzie $\alpha_1 \equiv 2\alpha$, $\alpha_2 \equiv \mp 3\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha_3 \equiv \beta$. W odróżnieniu od (1.1a), równanie (3.1) ma dodatnią liniową sztywność α_1 i posiada nieliniowość zarówno sześcienną, jak i kwadratową. Do równania takiego mały parametr wygodnie jest wprowadzić następująco [Nayfeh, Mook 1979], [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992b]:

$$\ddot{s} + \alpha_1 s + \mu \bar{\alpha}_2 s^2 + \mu^2 (\bar{h}\dot{s} + \bar{\alpha}_3 s^3 - \bar{F} \cos vt) = 0, \quad (3.2)$$

gdzie $\alpha_2 \equiv \mu \bar{\alpha}_2$, $\dot{h} \equiv \mu \bar{h}$, $\alpha_3 \equiv \mu^2 \bar{\alpha}_3$, $F \equiv \mu^2 \bar{F}$. Pojawienie się członów rzędu μ i μ^2 przy, odpowiednio, drugiej i trzeciej potędze s wynika z pewnych przeskalowań. Umieszczenie efektów tłumienia i wymuszenia w wyrażeniu rzędu μ^2 jest dodatkowym założeniem. Jego konsekwencją jest uproszczenie algebry obliczeń i możliwość uzyskania rozwiązań w postaci zamkniętej.

Zauważmy, że równanie (3.2) jest postaci (2.2b).

b.) DUŻA ORBITA

W zagadnieniu Małej Orbity sprowadzenie (1.1a) do postaci (2.2b) było dosyć naturalne, jako że w istocie, w okolicy $x = \mp \sqrt{\beta/\alpha}$, mieliśmy do czynienia z klasycznym przypadkiem drgań o umiarkowanej amplitudzie opisywanych zaburzonym potencjałem oscylatora liniowego (patrz Rys. 1.4). W przypadku Dużej Orbity drgania mają jednak dużą amplitudę. W związku z tym używamy pewnej modyfikacji klasycznego podejścia. Modyfikacja ta nawiązuje do pomysłu przedstawionego w [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab] i ma dwa etapy:

1. Rozpatrujemy najpierw swobodne (nietłumione, niewymuszone)

drżania oscylatora (1.1a). Oznacza to, że zajmujemy się równaniem:

$$\ddot{x} - \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad (3.3)$$

Szukamy równania liniowego, będącego przybliżeniem (3.3). Operacja taka znana jest pod nazwą równoważnej linearyzacji [Bogoliubov, Mitropol'skij 1963]. Tego równania liniowego poszukujemy metodą bilansu harmonicznych. Zakładając rozwiązanie (3.3) w postaci $x(t) = a \cos \Omega t$ i podstawiając je do (3.3) dostajemy

$$- a \Omega^2 \cos \Omega t + \beta a^2 (3 \cos \Omega t + \cos 3 \Omega t) / 4 - \alpha a \cos \Omega t = 0.$$

Opuszczając człon o częstości 3Ω otrzymujemy:

$$\ddot{x} + \Omega^2(a)x = 0, \quad \text{gdzie } \Omega^2(a) = -\alpha + 3\beta a^2/4. \quad (3.4)$$

Otrzymaliśmy układ liniowy względem x , z częstością drgań własnych zależną od amplitudy a . Układ (3.4) jest aproksymacją układu (3.3). Zauważmy, że sztywność $\Omega^2(a)$ jest dodatnia, gdy amplituda a jest dostatecznie duża, tj.

$$a > \sqrt{\frac{4\alpha}{3\beta}}.$$

2. Problem wyjściowy zapisujemy jako perturbację zlinearyzowanego równania (równanie (1.1a) jako perturbację (3.4)). Najpierw zapiszemy (1.1) jako:

$$\ddot{x} + \Omega^2(a)x + [-\alpha x + \beta x^3 - \Omega^2(a)x] + h\dot{x} - F \cos \nu t = 0 \quad (3.5)$$

Załóżmy, że $h = O(\mu)$, $F = O(\mu)$. Przyjmijemy również, że $[-\alpha + \beta x^2 - \Omega^2(a)]x = O(\mu)$, gdyż aproksymowaliśmy $-\alpha x + \beta x^3$ przez $\Omega^2(a)x$ w punkcie 1. Możemy więc napisać:

$$\ddot{x} + \Omega^2(a)x + \mu \left[[(-\bar{\alpha} + \bar{\beta}x^2 - \bar{\Omega}^2(a))]x + \bar{h}\dot{x} - \bar{F} \cos \nu t \right] = 0, \quad (3.6)$$

gdzie $\alpha = \mu \bar{\alpha}$, $\Omega^2 = \mu \bar{\Omega}^2$, $\beta = \mu \bar{\beta}$ and $h = \mu \bar{h}$, $F = \mu \bar{F}$. Ω^2 zależy tu od amplitudy poszukiwanego rozwiązania.

Równanie (3.6) jest formalnie postaci (2.2a).

3.1.1 REZONANS 1:1 MAŁEJ ORBITY

Punktem wyjściowym do analizy tego rezonansu jest równanie (3.2). Jest ono postaci (2.2b). Zakładamy $m=n=1$ i ograniczamy się do obszaru częstotliwości ν , gdzie

$$\alpha_1 - \nu^2 = \sigma \mu^2 \quad (3.7)$$

Powyższa relacja jest typu (2.6b). Pozwala ona przekształcić (3.2) do postaci odpowiadającej (2.7b):

$$\ddot{s} + \nu^2 s + \mu \bar{\alpha}_2 s^2 + \mu^2 (\sigma + \bar{h}s + \bar{\alpha}_3 s^3 - \bar{F} \cos \nu t) = 0. \quad (3.8)$$

Założymy przybliżone rozwiązanie równania (3.8) w postaci:

$$s = a \cos(\nu t + \varphi) + \mu s_1(a, \varphi, t) + \mu^2 s_2(a, \varphi, t). \quad (3.9)$$

Dla tego rezonansu omówimy kolejne kroki procedury nieco bardziej szczegółowo. W dalszych rozdziałach ograniczymy się tylko do podania wyników. Z równań (2.8) dostajemy:

1.) z wyrazów rzędu μ^1 :

$$\ddot{s}_1 + \nu^2 s_1 = 2M_1 \nu \sin u + 2N_1 a \cos u - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 a^2 (1 - \cos 2u),$$

gdzie $u \equiv \nu t + \varphi$.

- warunkiem usunięcia członów sekularnych jest:

$$M_1 = N_1 = 0$$

- po usunięciu członów sekularnych dostajemy μs_1 :

$$\mu s_1(a, \varphi, t) = -\mu \frac{\bar{\alpha}_2 a^2}{2\nu^2} + \mu \frac{\bar{\alpha}_2 a^2}{6\nu^2} \cos 2(\nu t + \varphi); \quad (3.10a)$$

Uwagi:

- W rozwiązaniu (3.10a) nie uwzględnia się członu z częstotliwością ν . Należy to do metody. Można uważać, że jest on wliczony w człon rzędu μ^0 w rozwiązaniu (3.9) [Nayfeh 1973].

- Często w wyrażeniach na funkcje korekcyjne (3.10a) uwzględnia się zależność rozstrojenia (3.7) [Bogoliubov, Mitropol'skiy 1963]. W tym przypadku możemy wyeliminować częstotliwość ν^2 z mianownika i zastąpić ją α_1 . Błąd wyrażenia (3.10a) jest wówczas rzędu μ^3 .

- Uwzględniając powyższe, oraz relację $\bar{\mu} \bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ możemy napisać:

$$\mu s_1(a, \varphi, t) = \frac{\alpha_2 a^2}{2\alpha_1} \left(\frac{1}{3} \cos 2(\nu t + \varphi) - 1 \right); \quad (3.10b)$$

2.) z wyrazów rzędu μ^2 :

$$\begin{aligned} \ddot{s}_2 + \nu^2 s_2 &= (2M_2 \nu + \bar{h} a \nu + \bar{F} \sin \varphi) \sin \nu + \\ & (2N_2 a \nu - 3\bar{\alpha}_3 a^3 / 4 - \sigma a + \bar{F} \cos \varphi) \cos \nu + \\ & - 2\bar{\alpha}_2 a s_1 \cos \nu - \frac{1}{4} \bar{\alpha}_3 a^3 \cos 3\nu, \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie $s_1 \cos \nu$, z s_1 danym wzorem (3.10b) ma wpływ na człony sekularne. Warunkiem ich eliminacji jest:

$$\mu^2 2\nu M_2 + \bar{h} a \nu + \bar{F} \sin \varphi = 0,$$

$$\mu^2 2\nu a N_2 + \frac{5\alpha_2^2}{6\alpha_1} a^3 - 3\alpha_3 a^3 / 4 - (\alpha_1 - \nu^2) a + \bar{F} \cos \varphi = 0.$$

W tym kroku otrzymujemy również wyrażenie na $\mu^2 s_2$, ale będziemy je pomijać w dalszych obliczeniach.

Równanie (2.9) ma postać:

$$\dot{a} = -\frac{1}{2} \bar{h} a - \frac{1}{2\nu} \bar{F} \sin \varphi = 0, \quad (3.11)$$

$$\dot{\varphi} a = -\frac{5\alpha_2^2}{12\nu\alpha_1} a^3 + \frac{3}{8\nu} \alpha_3 a^3 + \frac{1}{2\nu} (\alpha_1 - \nu^2) a - \frac{\bar{F}}{2\nu} \cos \varphi = 0.$$

Warunki ruchu ustalonego $\dot{a} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ dają:

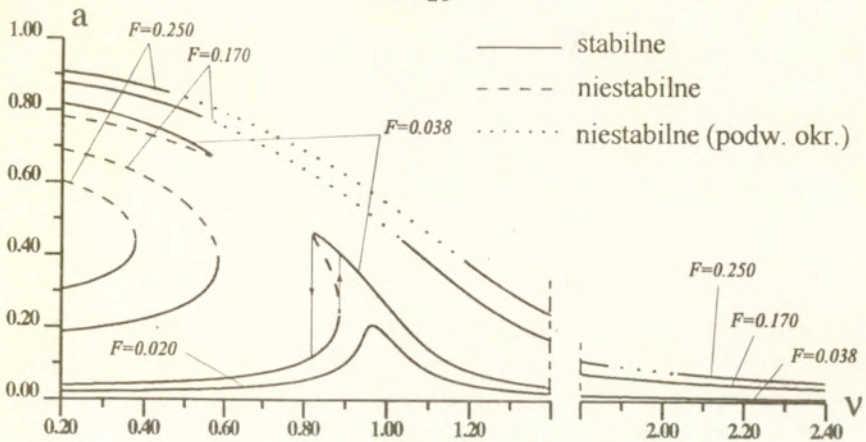
$$\begin{aligned} a &= F / \sqrt{(\Gamma^2(a) - \nu^2)^2 + (\bar{h}\nu)^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\bar{h}\nu / (\Gamma^2(a) - \nu^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie oznaczyliśmy:
$$\Gamma^2(a) = -\left(\frac{5\alpha_2^2}{6\alpha_1} - \frac{3}{4}\alpha_3 \right) a^2 + \alpha_1.$$

Ostatecznie, poszukiwane rozwiązanie ma postać:

$$s(t) = s(t+T) = a \cos(\nu t + \varphi) + \mu s_1(a, \varphi, t), \quad (3.13)$$

gdzie a i φ są dane wzorem (3.12), a μs_1 wzorem (3.10b).



Rys. 3.1. Krzywe rezonansowe rezonansu 1:1 Małej Orbits.

Na Rys. 3.1 pokazano krzywe rezonansowe rezonansu podstawowego Małej Orbits $a(v)$. Dla niewielkich wymuszeń ($F=0.020$) krzywa wygląda podobnie, jak dla oscylatora liniowego. Dla większych sił ($F=0.038$) możliwe jest współistnienie dwóch rozwiązań stabilnych¹ (linia ciągła) i jednego niestabilnego (linia kreskowana). W związku z tym możemy obserwować przeskoکی między rozwiązaniami stabilnymi, a w szczególności uzyskać efekt histerezy. Przeskoکی te odpowiadają kryterium stabilności pionowej stycznej (Rozdz. 2.2). Przeprowadzając, zgodnie z Rozdz. 2.3, analizę punktów równowagi płaskiego układu (3.11) możemy zidentyfikować punkty przeskoکی, jako odpowiadające bifurkacji siodłowo-węzłowej.

Zgodnie z Uwagą w Rozdziale 2.3, analiza równań (3.11) nie wykazuje wszystkich możliwych niestabilności rozwiązań. Niestabilności wynikające z podwojenia okresu są zaznaczone linią kropkowaną. Ich analiza będzie przeprowadzona w Rozdz. 4.

3.1.2 REZONANS 1:1 DUŻEJ ORBITS

Dla celów analizy rezonansu 1:1 Dużej Orbits przygotowaliśmy

¹Rozwiązanie o większej amplitudzie nosi nazwę rezonansowego, a o mniejszej amplitudzie nierezonansowego.

równanie (3.6). Ma ono postać (2.2a). Zgodnie z Rozdz.2.1 kładziemy $m=n=1$, zakładamy $\Omega^2(a) - \nu^2 = \mu\sigma$ (warunek rozstrojenia (2.6a)), i przekształcamy (3.6) do postaci

$$\ddot{x} + \nu^2 x + \mu \left([\sigma - \bar{\alpha} + \bar{\beta}x^2 - \bar{\Omega}^2(a)]x + \bar{h}\dot{x} - \bar{F}\cos\nu t \right) = 0. \quad (3.14)$$

Zakładamy rozwiązanie w postaci zawierającej składniki rzędu μ^0 i μ^1 :

$$x(t) = a\cos(\nu t + \varphi) + \mu x_1(a, \varphi, t). \quad (3.15)$$

Procedura perturbacyjna zawiera tutaj jeden krok (jedno równanie (2.8)):

-z warunku uniknięcia członów sekularnych dostajemy wyrażenia pozwalające wyznaczyć M_1, N_1 :

$$2\mu M_1 \nu + h\nu a + F\sin\varphi = 0$$

$$a[2\mu N_1 \nu - \Omega^2(a) + \nu^2] + F\cos\varphi = 0$$

-funkcja korekcyjna wynosi:

$$\mu x_1(a, \varphi, t) = \frac{\beta a^3}{32\nu^2} \cos 3(\nu t + \varphi). \quad (3.16)$$

Warunek na rozwiązania periodyczne (2.10) redukuje się do warunku $M_1 = N_1 = 0$, co daje rozwiązania na amplitudę i fazę:

$$a = F / \sqrt{(\Omega^2(a) - \nu^2) + (h\nu)^2}, \quad (3.17)$$

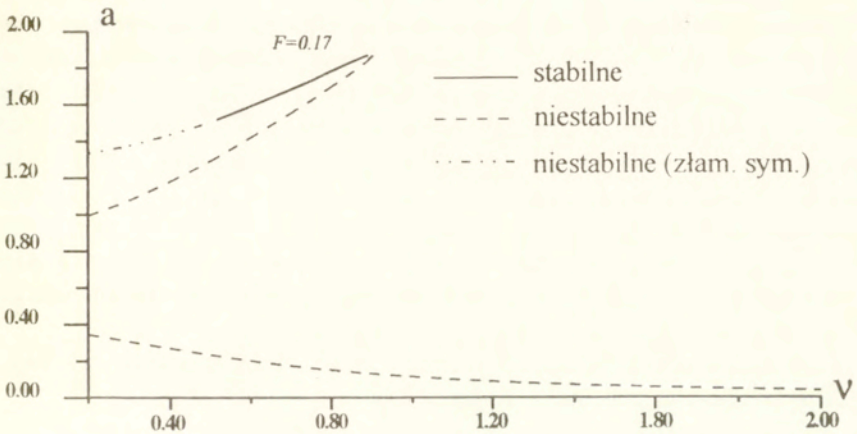
$$\operatorname{tg}\varphi = -h\nu / (\Omega^2(a) - a^2)$$

Ostatecznie rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = x(t+T) = a\cos(\nu t + \varphi) + \mu x_1(a, \varphi, t), \quad (3.18)$$

gdzie a, φ są dane zależnością (3.17), a μx_1 wzorem (3.16).

Przykładową krzywą rezonansową $a(\nu)$ dla $F=0.17$ przedstawiono na Rys. 3.2. Podobnie jak w Rozdz 3.1.1, punkt zwrotny krzywej rezonansowej odpowiada bifurkacji siodłowo-węzłowej. Gałąź rozwiązania o małej amplitudzie odpowiada niestabilnej orbicie periodycznej, powstałej z punktu siodłowego p_0 (Rys. 1.1a).



Rys. 3.2. Krzywa rezonansowa rezonansu 1:1 Dużej Orbity.

Gałąź stabilna rozwiązania z Rys. 3.2 może przy zmniejszaniu częstotliwości utracić stabilność na skutek bifurkacji złamania symetrii (linia kropki-kreski). Jak podkreślono w Rozdz. 2.3, wykrycie tej niestabilności wymaga dodatkowej analizy (patrz Rozdz. 4.).

3.2 REZONANSE SUBHARMONICZNE

Rezonanse subharmoniczne 1:m, m>1 wymagają z reguły wyższych rzędów przybliżenia niż rezonanse podstawowe. W celu uniknięcia stosowania wyższych przybliżeń można zmienić nieco sformułowanie problemu i założyć, że siła zewnętrzna F jest rzędu μ^0 , a nie μ^1 , jak poprzednio (patrz [Bogoliubov, Mitropol'skij 1963], [Guckenheimer, Holmes 1983]). W związku z tym, dla potrzeb analizy rezonansów subharmonicznych zapiszemy:

- równanie Małej Orbity (3.1) w postaci:

$$\ddot{s} + \alpha_1 s + \mu \bar{\alpha}_2 s^2 + \mu^2 (\bar{h} \dot{s} + \bar{\alpha}_3 s^3) = F \cos vt. \quad (3.19)$$

zamiast postaci (3.2);

- równanie Dużej Orbity (3.5) w postaci:

$$\ddot{x} + \Omega^2(a)x + \mu \{ [-\bar{\alpha} + \bar{\beta}x^2 - \bar{\Omega}^2(a)]x + \bar{h}\dot{x} \} = F \cos vt \quad (3.20)$$

zamiast postaci (3.6).

Należy podkreślić, że w analizie rezonansów podstawowych nie można było założyć siły F rzędu μ^0 , gdyż wówczas mielibyśmy do czynienia z problemem członów sekularnych (powstających dla $\nu \approx \Omega$) już w zerowym rzędzie przybliżenia, gdzie nie można tego problemu uniknąć. Zakładając siłę rzędu μ^1 mogliśmy pozbyć się członów sekularnych, dobierając odpowiednio M_1, N_1 . W przypadku rezonansów subharmonicznych częstotliwość ν jest z założenia daleko od Ω (relacja (2.6)) i niebezpieczeństwo pojawienia się członów sekularnych w zerowym rzędzie przybliżenia nie zachodzi.

Przekształcimy teraz (3.19), (3.20) do postaci (2.2a), (2.2b), wymaganej przez metodę KBM.

- w równaniu Małej Orbits (3.19)

zastosujemy zamianę zmiennych:

$$s(t) = z(t) + z_0(t), \quad z_0(t) = C \cos \nu t, \quad (3.21a)$$

gdzie

$$C = F / (\alpha_1 - \nu^2). \quad (3.21b)$$

Zamiana ta pozwala usunąć zewnętrzne wymuszenie rzędu μ^0 . Na $z(t)$ otrzymujemy

$$\ddot{z} + \alpha_1 z + \mu \bar{\alpha}_2 (z+z_0)^2 + \mu^2 [\bar{h}(\dot{z}+\dot{z}_0) + \bar{\alpha}_3 (z+z_0)^3] = 0. \quad (3.22)$$

- w równaniu Dużej Orbits (3.20)

stosujemy analogiczną zamianę zmiennych:

$$x(t) = Z(t) + Z_0(t), \quad Z_0(t) = C \cos \nu t, \quad (3.23a)$$

gdzie

$$C = F / (\Omega^2(a) - \nu^2), \quad (3.23b)$$

otrzymując równanie na $Z(t)$

$$\ddot{Z} + \Omega^2(a)Z + \mu [\bar{h}(\dot{Z}+\dot{Z}_0) + (-\bar{\alpha} - \bar{\Omega}^2)(Z+Z_0) + \bar{\beta}(Z+Z_0)^3] = 0. \quad (3.24)$$

Zauważmy, że w równaniach (3.22), (3.24) pojawia się tzw. wymuszenie parametryczne: iloczyn szukanej funkcji z, Z i zadanej funkcji czasu z_0, Z_0 .

Poniżej policzone zostaną rezonanse 1:3 i 1:2 Małej Orbits i

1:3 Dużej Orbity.

3.2.1 REZONANS 1:3 MAŁEJ ORBITY

Dla tego rezonansu $n=1$, $m=3$ i możemy wprowadzić parametr rozstrojenia postaci:

$$\mu\sigma^2 = \alpha_1 - \nu^2/9.$$

Przy tym założeniu można przekształcić (3.22) do postaci

$$\begin{aligned} \ddot{z} + (\nu/3)^2 z + \\ + \mu \bar{\alpha}_2 (z+z_0)^2 + \mu^2 [\sigma z + \bar{h}(\dot{z}+\dot{z}_0) + \bar{\alpha}_3 (z+z_0)^3] = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Szukając rozwiązania w postaci:

$$z = a \cos(\nu t/3 + \varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t) + \mu^2 z_2(a, \varphi, t), \quad (3.26)$$

otrzymujemy w algorytmie KBM:

- z wyrazów rzędu μ^1 :

$$M_1 = N_1 = 0,$$

oraz

$$\mu z_1 = -\frac{9}{2\nu^2} \alpha_2 (a^2 + C^2) + \frac{3}{2\nu^2} \alpha_2 a^2 \cos\left(\frac{2}{3}\nu t + 2\varphi\right) + \frac{9}{70\nu^2} \alpha_2 C^2 \sin 2\nu t \quad (3.27)$$

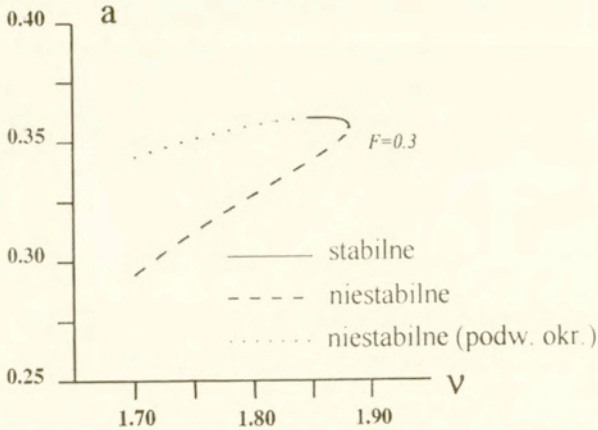
(C jest dane wzorem (3.21))

- z wyrazów rzędu μ^2 :

$$\begin{aligned} \dot{a}\nu = & \left[\frac{9}{8} \alpha_3 C a^2 + \frac{27}{4\nu^2} C \alpha_2^2 a^2 \right] \sin 3\varphi + \frac{9}{2\nu^2} \alpha_2^2 C^2 a \sin 6\varphi + \\ & - \frac{h a \nu}{2}, \end{aligned} \quad (3.28a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} a \nu = & \left[\frac{9}{8} \alpha_3 C a^2 + \frac{27}{4\nu^2} C \alpha_2^2 a^2 \right] \cos 3\varphi + \frac{9}{2\nu^2} \alpha_2^2 C^2 a \cos 6\varphi + \\ & - \frac{27}{2\nu^2} \alpha_2 a (a^2 + C^2) + \frac{9}{4\nu^2} \alpha_2^2 a^2 + \frac{9}{8} \alpha_3 a^3 + \frac{9}{4} \alpha_3 C^2 a + \frac{3}{2} \alpha_1 a + \\ & - \frac{2}{3} a \nu^2 + \frac{9}{10\nu^2} \alpha_2 C^2 a \end{aligned} \quad (3.28b)$$

W tym kroku możemy otrzymać również człon $\mu^2 z_2$, ale pomijamy go w dalszych obliczeniach.



Rys. 3.3. Krzywa rezonansowa rezonansu 1:3 Małej Orbitsy.

Kładąc w ostatnich równaniach (3.28a), (3.28b) $\dot{a}=0$, $\dot{\varphi}=0$, dostajemy dwa równania algebraiczne na amplitudę a i fazę φ . Widzimy, że jeśli (a_0, φ_0) jest punktem równowagi (3.28), to $(a_0, \varphi_0 + 2\pi/3)$ i $(a_0, \varphi_0 + 4\pi/3)$ też są punktami równowagi. Te trzy punkty odpowiadają tej samej subharmonicznej o okresie $3T$.

Interesują nas tylko punkty równowagi (3.28) o niezerowej amplitudzie a . Przykładowa krzywa rezonansowa otrzymana z tych równań jest przedstawiona na Rys. 3.3. Podobnie jak w poprzednich przypadkach, punkt zwrotny krzywej odpowiada bifurkacji siodłowo-węzłowej. Górna, stabilna gałąź traci stabilność w bifurkacji typu podwojenia okresu, wyznaczony teoretycznie w Rozdz. 4.

Podobnie jak w przypadku rezonansu 1:1 Małej Orbitsy, w dalszych rozważaniach uwzględnimy w ostatecznym rozwiązaniu tylko składniki rzędu μ^0 and μ^1 , otrzymując:

$$s(t) = s(t+3T) = C \cos vt + a \cos(vt/3 + \varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t), \quad (3.29)$$

gdzie C jest określone wzorem (3.21); a, φ wzorami (3.28a), (3.28b) przy $\dot{a}=0$, $\dot{\varphi}=0$; μz_1 wzorem (3.27).

3.2.2 REZONANS 1:2 MAŁEJ ORBITSY

Moglibyśmy badać ten rezonans w ten sam sposób co poprzedni przypadek, tzn. używając równania (3.22), kładąc $n=1$, $m=2$, przyjmując relację rozstrojenia

$$\alpha_1 - v^2/4 = \sigma\mu^2$$

i zakładając rozwiązanie:

$$z = a \cos(vt/2 + \varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t) + \mu^2 z_2(a, \varphi, t) . \quad (3.30)$$

Poniżej pozostawimy tę formę rozwiązania i relacji rozstrojenia, ale uprościmy nieco rozwiązanie, przesuwając składnik $2zz_0$ z wyrażenia μ^1 do μ^2 . Otrzymujemy wtedy

$$\ddot{z} + \alpha_1 z + \mu \alpha_2 (z_0^2 + z^2) + \mu^2 (2\bar{\alpha}_2 z z_0 + \bar{h}(\dot{z}_0 + \dot{z}) + \bar{\alpha}_3 (z_0 + z)^3) = 0, \quad (3.31)$$

gdzie $\mu^2 \bar{\alpha}_2 = \alpha_2$.

Bez tej modyfikacji otrzymujemy skomplikowane równania algebraiczne na amplitudę i fazę rozwiązań, które mogą być rozwiązane tylko numerycznie. Z uwagi na ważność tego rezonansu chcielibyśmy jednak mieć w tym wypadku rozwiązania w postaci zamkniętej, umożliwiające dalsze badania analityczne. Mimo uproszczenia okazuje się, że zachowujemy zadowalającą zgodność z rezultatami numerycznymi.

Przekształcenie postaci (2.2b) do postaci (2.7a) odpowiada przekształceniu (3.31) do postaci:

$$\ddot{z} + (v/2)^2 z + \mu \alpha_2 (z_0^2 + z^2) + \mu^2 [\sigma z + 2\bar{\alpha}_2 z z_0 + \bar{h}(\dot{z}_0 + \dot{z}) + \bar{\alpha}_3 (z_0 + z)^3] = 0. \quad (3.32)$$

W procedurze perturbacyjnej dostajemy:

- z równań rzędu μ^1 :

$$M_1 = N_1 = 0$$

oraz

$$\mu z_1(a, v, t) = -\frac{2}{v^2} \alpha_2^2 a + \frac{2}{3v^2} \alpha_2 a^2 \cos(vt + 2\varphi) \quad (3.33)$$

- z równań rzędu μ^2 :

$$-\mu^2 M_2 v - \frac{1}{2} a h v + \alpha_2 a C \sin 2\varphi = 0 ,$$

$$-\mu^2 N_2 v a - \frac{4}{v^2} \alpha_2^2 a (a^2 + C^2) + \frac{2}{3v^2} \alpha_2^2 a^3 + \frac{3}{4} \alpha_3 a +$$

$$\left(\frac{3}{2}\alpha_3 C^2 + \alpha_1 - \nu^2\right)a + \alpha_2 a C \cos 2\varphi = 0 ,$$

W tym kroku otrzymujemy również człon $\mu^2 z_2$, który pomijamy w dalszej analizie.

Układ na $\dot{a}, \dot{\varphi}$ ma postać:

$$\dot{a}\nu = -\frac{1}{2}ah\nu + \alpha_2 a C \sin 2\varphi , \tag{3.34}$$

$$\dot{\varphi}\nu a = -\frac{4}{\nu^2}\alpha_2^2 a(a^2 + C^2) + \frac{2}{3\nu^2}\alpha_2^2 a^3 + \frac{3}{4}\alpha_3 a + \left(\frac{3}{2}\alpha_3 C^2 + \alpha_1 - \nu^2\right)a + \alpha_2 a C \cos 2\varphi ,$$

Ostatnia para równań daje w przypadku stacjonarnym ($\dot{a}=0, \dot{\varphi}=0$) zamknięte niezerowe rozwiązanie na amplitudę:

$$a^2(\nu) = (-s \pm \sqrt{p^2 - q^2})/r , \tag{3.35a}$$

$$\text{gdzie } p \equiv C\alpha_2, \quad q \equiv h\nu/2, \quad s \equiv \alpha_1 - \nu^2/4 + 3\alpha_3 C^2/2 - 4\alpha_2^2 C^2/\nu^2,$$

$$r \equiv -10\alpha_2^2/(3\nu^2) + 3\alpha_3/4 ;$$

i fazę:

$$\text{tg}2\varphi = \pm q/\sqrt{p^2 - q^2} . \tag{3.35b}$$

Widzimy, że jeśli (a_0, φ_0) jest punktem równowagi (3.34), to $(a_0, \varphi_0 + \pi)$ też jest punktem równowagi. Te punkty odpowiadają tej samej subharmonicznej o okresie $2T$.

Można pokazać, że:

1. Wyrażenie c w (2.14) wynosi:

$$c = \pm(2a^2\sqrt{p^2 - q^2})/r , \tag{3.36}$$

gdzie r jest ujemne w rozpatrywanym zakresie częstości. Dlatego gałąź $+$ ($-$) krzywej rezonansowej danej równaniem (3.35a) jest niestabilna (stabilna) w sensie kryteriów (2.15).

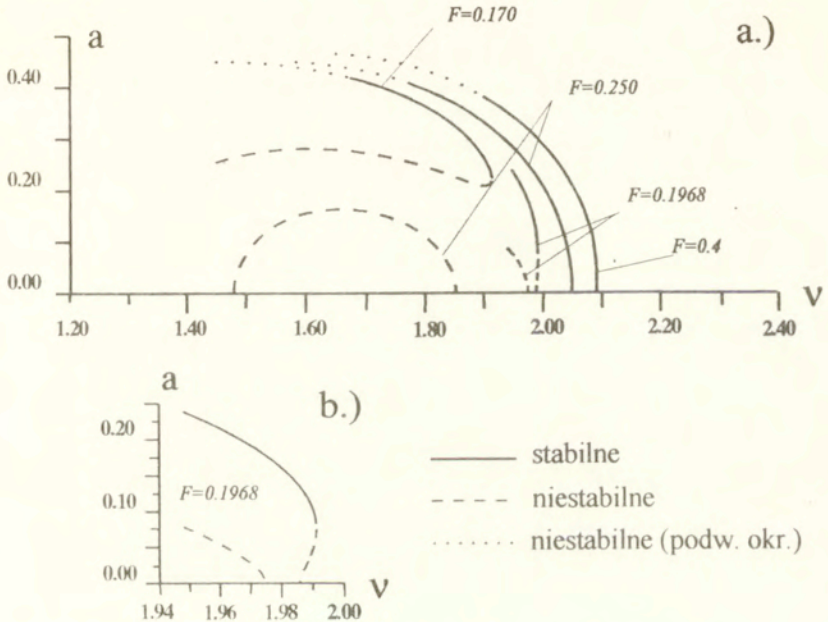
2. W punkcie, gdzie gałęzie te się stykają, jak również w punktach, dla których $a(\nu)=0$, krzywa (3.35a) ma pionową styczną.

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie:

$$s(t) = s(t+2T) = C \cos \nu t + a \cos(\nu t/2 + \varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t) , \tag{3.37}$$

gdzie C jest dane wzorem (3.21), a, φ wzorami (3.35a), (3.35b) i μ_1 wzorem (3.33).

Krzywe rezonansowe odpowiadające rozwiązaniom $2T$ -periodycznym wykreślono na Rys. 3.4. Rozwiązania stabilne oznaczono linią ciągłą, niestabilne w sensie warunków (2.15) przerywaną. Niestabilności związane z podwojeniem okresu górnych (stabilnych) gałęzi rozwiązania (patrz Rozdz. 4) oznaczono linią kropkowaną.



Rys. 3.4. Krzywe rezonansowe rezonansu 1:2 Małej Orbitsy.

a.) dla $F = 0.17, 0.1968, 0.25, 0.4$;

b.) powiększenie dla $F = 0.1968$.

Dla małych sił ($F = 0.17$) rozwiązania $2T$ periodyczne są tworzone w bifurkacji siodłowo-węzłowej (punkt zwrotny krzywej). Przy wzroście siły punkt ten opada i w końcu dotyka osi ν . W wąskim zakresie parametrów (Rys. 3.4b) pojawiają się dwa nowe punkty o pionowej stycznej, odpowiadające $a(\nu) = 0$, współistniejące z punktem zwrotnym. Dla większych sił ($F = 0.25$)

bifurkacja siodłowo-węzłowa nie ma już miejsca i pozostają tylko dwa punkty, gdzie $a(\nu)=0$. Dla jeszcze większych sił ($F=0.4$) istnieje tylko górna (-) gałąź rozwiązania (3.35a) i na Rys. 3.4 obserwujemy tylko jeden punkt przecięcia z osią ν .

Zauważmy, że $a=0$ jest także rozwiązaniem (3.34). Odpowiadające mu rozwiązanie (3.36) ma postać $s=C\cos\nu t$, jego okres wynosi więc $1T$. Rozwiązanie $a=0$ jest stabilne dla $F=0.17$. W sytuacji, gdy na Rys 3.4 występują dwa punkty $a(\nu)=0$ o pionowej stycznej ($F=0.1968$, $F=0.25$), jest niestabilne między tymi punktami, a stabilne dla pozostałych ν . Dla $F=0.4$ jest niestabilne na lewo od punktu o pionowej stycznej, a stabilne na prawo.

3.2.3 REZONANS 1:3 DUZEJ ORBITY

W tym przypadku przyjmiemy $n=1$, $m=3$. Relacja rozstrojenia ma postać

$$\mu\sigma = \Omega^2 - \nu^2/9 \quad ,$$

która oznacza, że rozważamy obszar częstotliwości ν bliskich 3Ω . Uwzględniając tę relację zapisujemy (3.20) jako:

$$\ddot{z} + (\nu/3)^2 z + \mu[\sigma z + \bar{h}(\dot{z} + \dot{z}_0) + (-\bar{\alpha} - \bar{\Omega}^2)(z + z_0) + \bar{\beta}(z + z_0)^3] = 0 \quad . \quad (3.38)$$

Szukamy przybliżonego rozwiązania w postaci:

$$z = a\cos(\nu t/3 + \varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t) \quad . \quad (3.39)$$

Metoda perturbacyjna daje:

$$\mu z_1(a, \varphi, t) =$$

$$\frac{9}{8\nu^2} \left(h\nu C \cos 3\varphi + \left[\frac{3}{2} a^2 C \beta + \frac{3}{4} \beta C^3 - (\alpha + \Omega^2) C \right] \sin 3\varphi \right) \sin(\nu t + 3\varphi) +$$

$$\frac{9}{8\nu^2} \left(h\nu C \sin 3\varphi + \left[\frac{3}{2} a^2 C \beta + \frac{3}{4} \beta C^3 - (\alpha + \Omega^2) C \right] \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \beta a^3 \right) \cos(\nu t + 3\varphi) +$$

$$\frac{27}{56\nu^2}\beta Ca^2 \cos\left(\frac{5}{3}\nu t + 2\varphi\right) + \frac{27}{56\nu^2}\beta Ca^2 \cos\left(\frac{5}{3}\nu t - \varphi\right) +$$

$$\frac{27}{96\nu^2}\beta Ca^2 \cos\left(\frac{7}{3}\nu t + \varphi\right) + \frac{9}{120\nu^2}\beta C^3 \cos 3\nu t, \quad (3.40)$$

oraz

$$-\frac{2}{3}\mu M_1 \nu - \frac{1}{3}h a \nu + \frac{3}{4}\beta Ca^2 \sin 3\varphi = 0, \quad (3.41)$$

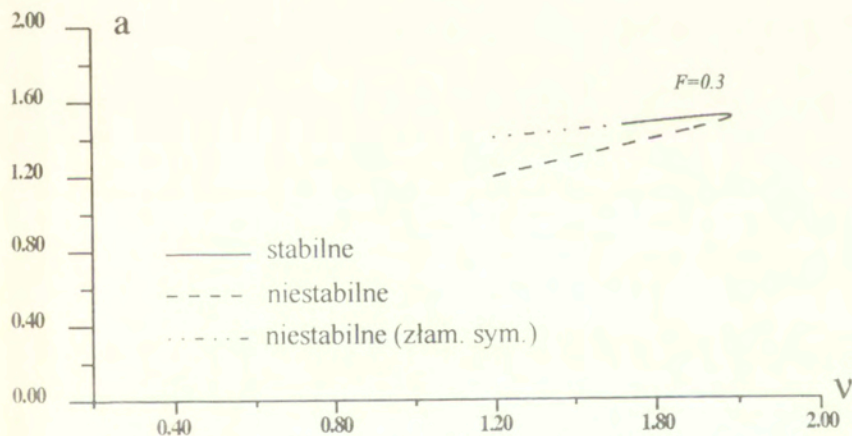
$$-\frac{2}{3}\mu N_1 \nu a + [\Omega^2(a) - (\nu/3)^2]a + \frac{3}{2}\beta a C^2 + \frac{3}{4}\beta Ca^2 \cos 3\varphi = 0.$$

Warunki istnienia rozwiązań periodycznych mają postać:
 $M_1 = N_1 = 0$, dając:

$$a = \frac{4}{3\beta C^2} \left(\left[\frac{h\nu}{3} \right]^2 + \left[[\Omega^2(a) - (\nu/3)^2]a + \frac{3}{2}\beta C^2 \right]^2 \right)^{1/2}, \quad (3.42a)$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = - \left[\frac{h\nu}{3} \right] / \left[\Omega^2(a) - (\nu/3)^2 + \frac{3}{2}\beta C^2 \right]. \quad (3.42b)$$

Widzimy, że jeśli (a_0, φ_0) jest punktem równowagi wynikającym z (3.41), to $(a_0, \varphi_0 + 2\pi/3)$ i $(a_0, \varphi_0 + 4\pi/3)$ też są punktami równowagi. Te trzy punkty odpowiadają tej samej subharmonicznej o okresie $3T$. Rozwiązaniem $a=0$ się nie zajmujemy.



Rys. 3.5. Krzywa rezonansowa rezonansu 1:3 Dużej Orbity.

Typowa krzywa rezonansowa wynikająca z powyższych równań

została przedstawiona na Rys. 3.5. Obserwujemy tu bifurkację siodłowo-węzłową. Rozwiązanie stabilne utworzone w tej bifurkacji podlega, dla malejących częstotliwości, bifurkacji złamania symetrii (patrz Rozdz. 4.).

Ostatecznie dostajemy na $x(t)$:

$$x(t) = x(t+3T) = C \cos vt + \operatorname{acos}(vt/3+\varphi) + \mu z_1(a, \varphi, t), \quad (3.43)$$

gdzi C dane jest wzorem (3.23), a, φ wzorami (3.42a), (3.42b) i μz_1 wzorem (3.40).

UWAGA

Nie liczyliśmy metodą blisko-liniową rezonansów rzędu 1:m, $m > 3$. W tej metodzie analiza takich rezonansów wymaga wyższych rzędów przybliżenia [Holmes, Holmes 1981].

4. RÓWNANIA WARIACYJNE O WSPÓŁCZYNNIKACH ZALEŻNYCH OD CZASU. STABILNOŚĆ I BIFURKACJE ROZWIĄZAŃ PERIODYCZNYCH.

4.1 INFORMACJE OGÓLNE

W Rozdz. 3. zbadaliśmy teoretycznie głównie te niestabilności rozwiązań, które związane są z bifurkacją siodłowo-węzłową. Na przedstawionych tam krzywych rezonansowych przedstawiono już, co prawda, efekty niestabilności złamania symetrii i podwojenia okresu, nie zamieszczono jednak żadnego wyjaśnienia tych obliczeń. Dostarczymy go w tym rozdziale, prezentując metodę badania stabilności wykorzystującą teorię Floqueta.

Równanie oscylatora o jednym stopniu swobody i stałym tłumieniu zapiszemy w postaci

$$\ddot{x} + h\dot{x} + P(x) = G(t), \quad (4.1)$$

gdzie funkcja G jest T -periodyczna w zmiennej t .

Założymy, że $x^0(t)$ jest periodycznym rozwiązaniem (4.1) i zaburzymy to rozwiązanie o $X(t)$. Podstawiając $x(t) = x^0(t) + X(t)$ do (1.1) i linearyzując względem X dostajemy równanie na zaburzenie X (tzw. równanie wariacyjne):

$$\ddot{X} + h\dot{X} + L(t)X = 0, \quad (4.2a)$$

gdzie

$$L(t) = \frac{\partial P}{\partial x}(x^0(t)). \quad (4.2b)$$

Równanie to jest liniowe o współczynnikach zależnych okresowo od czasu. Najmniejszy okres $L(t)$ oznaczmy τ . Na skutek nieliniowości nie musi on być taki sam jak najmniejszy okres x^0 . Z uwagi na to, że najczęściej teoria Floqueta wykładana jest dla układów równań pierwszego rzędu, zapiszemy (4.1) jako

$$\dot{v} = f(v, t), \quad (4.3a)$$

gdzie

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad f = \left[-P(v_1) - hv_2 + G(t) \right]. \quad (4.3b)$$

Jeśli $v^0(t)$ jest periodycznym rozwiązaniem (4.3), to równanie wariacyjne opisujące dynamikę zaburzenia V ma postać

$$\dot{V} = A(t)V, \quad (4.4a)$$

gdzie

$$A(t) \equiv \left. \frac{\partial f(v, t)}{\partial v} \right|_{(v^0(t), t)}. \quad (4.4b)$$

W naszym zadaniu macierz A ma postać

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L(t) & -h \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

i jest τ periodyczna.

TEORIA FLOQUETA

W wielu przypadkach analiza równania (4.4) pozwala wnioskować o stabilności rozwiązań układu (4.3). Poniżej przedstawimy więc podstawowe pojęcia teorii Floqueta, zajmującej się liniowymi równaniami różniczkowymi o współczynnikach okresowych (patrz np. [Jakubovič, Staržinskij 1972], [Hartmann 1964], a w kontekście układów dynamicznych [Meirovitch 1970], [Perko 1991]).

Macierzą fundamentalną układu (4.4) nazywa się macierz $\Phi(t)$ spełniającą równanie:

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi, \quad (4.6)$$

której kolumnami są liniowo niezależne rozwiązania układu (4.4). Twierdzenie Floqueta mówi, że:

Istnieje τ periodyczna nieosobliwa macierz $Q(t)$, oraz stała macierz B , takie, że

$$\Phi(t) = Q(t) \exp(Bt). \quad (4.7)$$

Macierz $R = \exp(B\tau)$ nazywa się macierzą monodromii. Jej wartości własne λ_1, λ_2 , nazywane multiplikatorami Floqueta, są wyznaczone jednoznacznie przez $A(t)$ w (4.4). Pozwalają one sformułować

TWIERDZENIE LAPUNOWA

pozwalające wnioskować o stabilności rozwiązań periodycznych równania nieliniowego na podstawie analizy liniowego równania wariacyjnego (patrz np. [Cesari 1959], [Hale 1963]). Mówi ono, że stabilność rozwiązania periodycznego v^0 układu (4.3) jest określona przez układ (4.4), wtedy, gdy żaden z multiplikatorów Floqueta nie ma modułu równego jeden. Wówczas:

- jeśli dla wszystkich λ_i ($i=1,2$)

$$|\lambda_i| < 1,$$

to v^0 jest asymptotycznie stabilne w sensie Lapunowa;

- jeśli choć dla jednego λ_i

$$|\lambda_i| > 1,$$

to v^0 jest niestabilne.

Zadaniem naszym będzie wyznaczenie krytycznych wartości parametrów układu dla których zachodzi zmiana stabilności (bifurkacja), określona powyższym twierdzeniem. Wypiszemy więc

RÓWNANIE NA WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY MONODROMII

Można pokazać, że macierz fundamentalną można dobrać tak, aby $\phi(0)=I$ ([Perko 1991], [Hartmann 1964]). Przy tym założeniu, podstawiając $t=\tau$ do (4.7) dostajemy

$$\phi(\tau) = R.$$

Równanie charakterystyczne macierzy R ma postać

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr} \phi(\tau) + \det \phi(\tau) = 0, \quad (4.8a)$$

przy czym z twierdzenia Liouville'a (np. [Arnold 1975]) wiadomo, że

$$\det \phi(\tau) = \exp \int_0^\tau \text{tr} A(t) dt. \quad (4.8b)$$

W tym miejscu wykorzystamy konkretną postać (4.5) dla $A(t)$, otrzymując dla klasy oscylatorów opisanych równaniem (4.1) równanie na wartości własne macierzy monodromii

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr} \Phi(\tau) + \exp(-h\tau) = 0 . \quad (4.9)$$

Równanie (4.9) nie pozwala na wyznaczenie λ_1, λ_2 (wciąż nie znamy macierzy $\Phi(\tau)$), pozwala jednak na wysnuć pewnych wniosków co do charakteru rozwiązań. Poniżej, zamiast analizować równanie (4.2), sprawdzimy je do lepiej zbadanego problemu.

RÓWNANIE HILLA

Zastosujmy do (4.2) zamianę zmiennych [Bolotin 1964], [Jakubovič, Staržinskij 1972]

$$\delta x(t) = \eta(t) e^{-ht/2} . \quad (4.10)$$

Otrzymujemy równanie Hilla

$$\ddot{\eta} + \gamma(t)\eta = 0 , \quad (4.11)$$

z τ periodyczną funkcją

$$\gamma(t) = L(t) - h^2/4 .$$

Łatwo pokazać (dowód w Dodatku B), że między wartościami własnymi λ_1 równania (4.2), a wartościami własnymi ρ_1 równania Hilla zachodzi związek

$$\lambda_1 = \rho_1 \exp(-h\tau/2) ; \quad (4.12)$$

kryterium zmiany stabilności równania (4.1)

$$|\lambda_1| = 1 , \quad (4.13a)$$

może więc być wyrażone jako

$$|\rho_1| = \exp(h\tau/2) , \quad (4.13b)$$

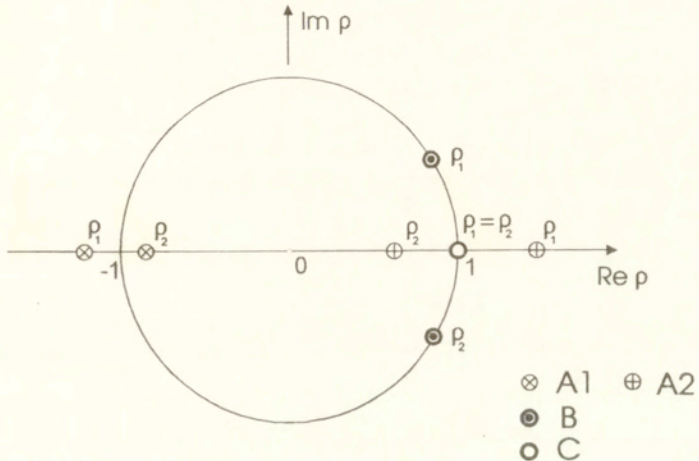
dla pewnego $i=1,2$.

W związku z tym ograniczymy się do badania wartości własnych równania Hilla. Równanie na wartości własne ma postać (patrz (4.9))

$$\rho^2 - 2K\rho + 1 = 0 , \quad (4.14)$$

gdzie K , równe połowie śladu macierzy monodromii równania Hilla, jest nieznanne i zależy od parametrów równania (1.1). Symbolami

$\theta_1(t), \theta_2(t)$ oznaczymy dwa liniowo niezależne rozwiązania (4.10). W zależności od K możemy wyróżnić następujące przypadki [Bolotin 1964] - patrz Rys. 4.1:



Rys. 4.1. Równanie Hilla. Przykładowe położenia pary multiplikatorów ρ_1, ρ_2 na płaszczyźnie zespolonej.

A) $|K| > 1$

θ_k mają postać:

$$\theta_k(t) = \Xi(t) e^{t(\ln|\rho_k| + i \arg \rho_k) / \tau}, \quad (4.15)$$

gdzie $k=1,2$ i $\Xi(t)$ jest pewną funkcją τ periodyczną. Oznaczając

$$\phi_k(t) \equiv \Xi(t) e^{t / \tau \arg \rho_k},$$

zapiszemy (4.15) jako

$$\theta_k(t) = e^{\ln|\rho_k| t / \tau} \phi_k(t). \quad (4.16)$$

Dla $|K| > 1$ pierwiastki (4.14) są rzeczywiste $\rho_1 = 1/\rho_2$, $|\rho_1| > |\rho_2|$ i θ_1 rośnie wykładniczo w czasie, θ_2 dąży do zera. Mamy dwie możliwości:

A1) ρ_k są rzeczywiste ujemne. Wtedy

$$\phi_k(t) = -\phi_k(t+\tau) = \phi_k(t+2\tau). \quad (4.17)$$

Z (4.16), (4.17) wynika, że rosnącą funkcję θ_1 można przedstawić jako

$$\eta_1 \equiv \theta_1 = e^{\kappa t} \sum_{n=1,3,5,\dots} [\eta_n^c \cos(n\pi t/\tau) + \eta_n^s \sin(n\pi t/\tau)], \quad (4.18)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\kappa \equiv \ln|\rho_1|/\tau \quad (\epsilon \text{ rzeczywiste}) \quad (4.19)$$

Zauważmy, że η_1 ma dwa razy większy okres, niż γ w (4.11).

A2) ρ_k są rzeczywiste dodatnie. Wtedy

$$\phi_k(t) = \phi_k(t+\tau). \quad (4.20)$$

Z (4.16), (4.19) i (4.20) wynika, że możemy wyrazić θ_1 jako

$$\eta_2 \equiv \theta_1 = e^{\kappa t} \sum_{n=0,2,4,\dots} [\eta_n^c \cos(n\pi t/\tau) + \eta_n^s \sin(n\pi t/\tau)]. \quad (4.21)$$

W tym przypadku η_2 ma ten sam okres, co funkcja $\gamma(t)$. Wyrażenia (4.18), (4.21) reprezentują dwie różne postacie nieograniczonych rozwiązań równania (4.11). Postacie te odpowiadają większym co do modułu multiplikatorom Floqueta.

B) $|K| < 1$

Pierwiastki ρ_1, ρ_2 równania (4.11) są zespolone sprzężone, $\rho_1 = \rho_2^*$, $\text{Im } \rho_1 \neq 0$, $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$.

Rozwiązania θ_k mają również postać (4.15), są ograniczone i, na ogół, prawie-periodyczne.

C) $|K| = 1$

Mamy $\rho_1 = \rho_2 = 1$ lub $\rho_1 = \rho_2 = -1$.

θ_k mają postać

$$\theta_1(t) = \Xi_1(t), \quad \theta_2(t) = \Xi_2(t) + t\Xi_3(t),$$

gdzie Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 są periodycznymi funkcjami t .

Zgodnie z (4.13) i (4.19) w badaniu niestabilności interesują nas te przypadki, dla których

$$\kappa = h/2 . \quad (4.22)$$

Widzimy, że ten ostatni warunek może być spełniony tylko dla rozwiązań omówionych w punkcie A (dla przypadków B i C mamy $\kappa=0$). Dla $\lambda_1 = 1$, czyli $\rho_1 = \exp(h\tau/2)$, odpowiada on rozwiązaniom typu (4.18), a dla $\lambda_1 = -1$, czyli $\rho_1 = -\exp(h\tau/2)$, typu (4.21). Przekroczenie koła jednostkowego przez zespolone wartości λ_1 z $\text{Im}\lambda_1 \neq 0$ nie jest możliwe.

WYZNACZENIE KRYTYCZNYCH WARTOŚCI PARAMETRÓW

Powyższe informacje zostaną wykorzystane do wyznaczenia w przestrzeni parametrów równania (1.1) tych miejsc, w których następuje zmiana stabilności x^0 . Wykorzystamy w tym celu metodę bilansu harmonicznym. Dzięki periodyczności funkcji $\gamma(t)$ w (4.11) możemy ją rozwinąć w szereg Fouriera. Rozwiązania w pobliżu granicy stabilności mamy już przedstawione wyrażeniami (4.18) albo (4.21). Po podstawieniu tych rozwinięć do (4.11) i porównaniu współczynników przy $\cos(n\pi t/\tau)$, $\sin(n\pi t/\tau)$ do zera otrzymujemy nieskończony jednorodny układ równań liniowych na η_n^s, η_n^c . Koniecznym i wystarczającym warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań typu η_1 (albo η_2) jest zerowanie się wyznacznika tego układu. Warunek ten oznaczmy

$$\Delta(\kappa^2) = 0 . \quad (4.23)$$

(W rozważanych przypadkach z przyczyn rachunkowych wygodnie jest przyjąć zależność wyznacznika raczej od κ^2 , niż od κ).

Na granicy stabilności musi być ponadto spełniony warunek (4.22). Parametry układu muszą więc tam spełniać równanie algebraiczne

$$\Delta(h^2/4) = 0 . \quad (4.24a)$$

Aby stwierdzić, po której stronie tej granicy rozwiązania są niestabilne, a po której stabilne, rozwijamy (4.23) w szereg Taylora wokół $\kappa^2 = h^2/4$:

$$\Delta(h^2/4) + \frac{\partial \Delta}{\partial \kappa^2} \Big|_{\kappa^2 = h^2/4} (\kappa^2 - h^2/4) + O((\kappa^2 - h^2/4)^2) = 0 .$$

Np. w rejonach niestabilnych $\kappa^2 > h^2/4$, czyli

$$\Delta(h^2/4) \text{ i } \frac{\partial \Delta}{\partial \kappa^2} \Big|_{\kappa^2=h^2/4} \text{ muszą mieć przeciwne znaki.} \quad (4.24b)$$

Reasumując, warunku (4.24a) możemy użyć w celu znalezienia granicy stabilności w przestrzeni parametrów, a warunku (4.24b) w celu stwierdzenia, po której stronie granicy są rozwiązania niestabilne.

UWAGA 1.

Nie znamy dokładnych rozwiązań periodycznych $x^0(t)$, zmuszeni więc będziemy używać przybliżeń uzyskanych w Rozdz. 3.

UWAGA 2.

W wielu przypadkach (w zależności od funkcji γ w (4.11)) dowodzi się zbieżności nieskończonych wyznaczników [Whittaker, Watson 1952]. W naszych przybliżonych obliczeniach będziemy jednak używać skończonych wyznaczników, powstałych na skutek ograniczenia się do skończonych reprezentacji (4.18) albo (4.21). W celu ustalenia sensownego rzędu obciążenia wyrażen η_1 , (η_2) przypomnimy niektóre własności równania Hilla zapisanego w postaci

$$\ddot{\eta} + [\Omega_0^2 + \mu \bar{\gamma}(t)]\eta = 0, \quad (4.25)$$

gdzie $\bar{\gamma}(t)$ τ -periodyczna; $\bar{\nu} = 2\pi/\tau$; $\Omega_0 = \text{const}$; $\mu, \bar{\nu}$ -parametry. Obszary występowania w przestrzeni parametrów rozwiązań nieograniczonych typu (4.18), (4.19) będziemy nazywać obszarami niestabilności, mając na względzie, że odpowiadają niestabilnemu rozwiązaniu zerowemu równania Hilla. O obszarach tych na płaszczyźnie $(\bar{\nu}, \mu)$ wiadomo że dotyczą osi $\bar{\nu}$ i rozszerzają się ze wzrostem parametrycznego zaburzenia μ . Rozwiązania te są postaci:

η_1 dla obszarów "wyrastających" z punktów

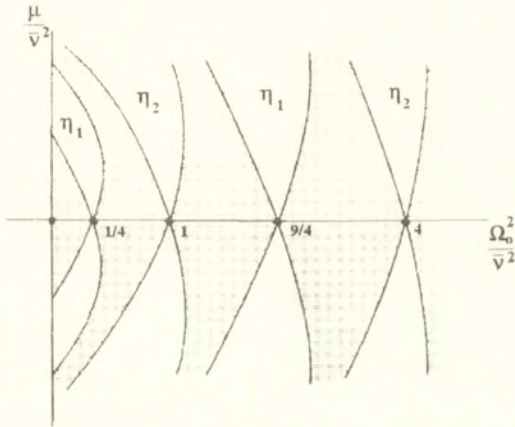
$$\bar{\nu} = 2\Omega_0/n, \quad n=1,3,5,\dots, \quad (4.26a)$$

η_2 dla obszarów "wyrastających" z punktów

$$\bar{\nu} = 2\Omega_0/n, \quad n=2,4,6,\dots. \quad (4.26b)$$

Na Rys. 4.2. przedstawiono obszary niestabilności równania Hilla. Z reguły wyniki prezentowane w literaturze dotyczą nieco

innych postaci tego równania, niż rozważane tutaj. Poniżej umieszczono rysunek z pracy [Jakubovič, Staržinskij 1972], adaptowany do oznaczeń równania (4.25). Jest to jakościowy szkic - szczególnie granic obszarów niestabilności zależą od postaci funkcji $\bar{\gamma}$.



Rys. 4.2. Obszary niestabilności równania Hilla. Adaptowane do równania (4.25) z pracy [Jakubovič, Staržinskij 1972].

Kształt obszarów niestabilności odpowiadających konkretnej funkcji $\bar{\gamma}$ możemy otrzymać używając opisanej powyżej metody bilansu harmonicznych. W odniesieniu do układu (4.25) metoda ta ma następującą własność [Hayashi 1964], [Meirovitch 1970]:

Powiedzmy, że użyliśmy N -składnikowej sumy typu (4.18), albo (4.21). Otrzymujemy wtedy N obszarów odpowiadających nieograniczonym rozwiązaniom danego typu, dotyczących osi \bar{v} w punktach danych relacją (4.26). Jeśli teraz użyjemy $N+1$ składników, to otrzymamy nowy, $N+1$ szy obszar, zaś kształty N obszarów uzyskanych w poprzednim przybliżeniu ulegną korekcji.

Na przykład:

Załóżmy, że badane równanie Hilla ma postać (4.25) z $\Omega_0 \approx 1$ i że jesteśmy zainteresowani nieograniczonymi rozwiązaniami mającymi dwa razy większy okres, niż funkcja $\bar{\gamma}$. Jeśli więc weźmiemy postać (4.18) i ograniczymy się do $n=1$, to otrzymamy jeden obszar niestabilności w okolicy $\bar{v}=2$. Jeśli chcemy znaleźć

rozwiązania niestabilne tego typu dla niższych częstości $\bar{\nu}$, to powinniśmy wziąć $k=1,3$. Otrzymamy wtedy nowy obszar niestabilności "wyrastający" w okolicy $\bar{\nu}=2/3$. Granice obszaru otrzymanego w poprzednim przybliżeniu ulegają korekcji.

Przytoczone w niniejszym rozdziale twierdzenie Lapunowa dotyczy zmiany stabilności rozwiązania periodycznego przy przechodzeniu multiplikatorów Floqueta przez graniczną wartość $|\lambda|=1$. Nie charakteryzuje ono jednak typu bifurkacji - nie podaje jakie nowe rozwiązania powstają lub zanikają i jaka jest ich stabilność. Jest to związane z faktem, że twierdzenie to wykorzystuje analizę równania zlinearyzowanego, określenie typu bifurkacji wymaga natomiast zbadania zachowania problemu nieliniowego w otoczeniu parametru odpowiadającego granicznej wartości $|\lambda|=1$. Okazuje się jednak [Arnold 1983], [Iooss, Adelmeyer 1992], że w typowych przypadkach określone sposoby przechodzenia multiplikatorów przez koło jednostkowe są związane z określonymi bifurkacjami. Wówczas zbadanie zachowania multiplikatorów, otrzymanych z analizy liniowej, pozwala na stwierdzenie rodzaju bifurkacji orbity periodycznej. W przeprowadzonej poniżej analizie nie będziemy jednak korzystać bezpośrednio z tych rezultatów. Wynika to z tego, że rozważany w niniejszej pracy problem nie jest typowy - posiada on pewną symetrię, wymagającą szczególnego potraktowania.

W dalszych rozdziałach będziemy poszukiwać w sposób przybliżony tych wartości parametrów, dla których zachodzą różne bifurkacje. W celu zidentyfikowania tych bifurkacji rozpatrzmy postacie rozwiązań liniowego równania wariacyjnego odpowiadające przechodzeniu $|\lambda|$ przez okrąg jednostkowy. Będziemy je nazywać postaciami niestabilności. Jak podkreślaliśmy, dla rozważanego tu równania Duffinga może wystąpić $\lambda=-1$ (przypadek A1 na str. 45) i $\lambda=1$ (przypadek A2). W poszukiwaniach tych wykorzystamy fakt, że przy przechodzeniu przez te krytyczne wartości postacie niestabilności mają charakter oscylacji o okresie dwa razy większym (A1) lub równym (A2) okresowi równania wariacyjnego τ i o zmieniającej się wykładniczo amplitudzie.

Ponieważ bifurkacje siodłowo-węzłowe znaleźliśmy już przy

okazji wyznaczania rozwiązań metodą perturbacyjną, w kolejnych Rozdziałach 4.2 i 4.3 skoncentrujemy się na przybliżonym wyznaczeniu tych wartości parametrów, dla których zachodzą zjawiska podwojenia okresu i złamania symetrii.

4.2 PODWOJENIE OKRESU

Rozpatrzmy rozwiązanie periodyczne o okresie \bar{T} . W bifurkacji podwojenia okresu na skutek zmiany parametrów pojawia się nowe rozwiązanie o okresie $2\bar{T}$. Dla spektrum Fouriera rozwiązania oznacza to, że jeśli przed bifurkacją zawierało ono harmoniczne postaci $2\pi k/\bar{T}$ ($k=1,2,\dots$), to po bifurkacji pojawią się dodatkowo harmoniczne typu $\pi k/\bar{T}$ ($k=1,3,5,\dots$).

W rozdziale tym zajmiemy się teoretycznym znalezieniem w przestrzeni parametrów tych miejsc, gdzie zachodzi niestabilność towarzysząca podwojeniu okresu. Zauważmy, że rozwiązania Małej Orbity odpowiadające rezonansom 1:1, 1:2, 1:3 (wzory 3.13, 3.37, 3.29) mogą być zapisane w bardziej zwartej formie jako:

$$x(\zeta(t)) = \sum_{i=0,1,2,3,\dots} [p_i \cos i\zeta + q_i \sin i\zeta] , \quad (4.28)$$

gdzie $p_i = p_i(a, \varphi, \nu, F)$, $q_i = q_i(a, \varphi, \nu, F)$ oraz:

$$\zeta = \nu t \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{dla rezonansu 1:1,}$$

$$\zeta = \nu t/2 \quad i = 0, 1, 2 \quad \text{dla rezonansu 1:2,}$$

$$\zeta = \nu t/3 \quad i = 0, 1, 2, 6 \quad \text{dla rezonansu 1:3.}$$

Tutaj $\frac{\partial P}{\partial X} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2$ i $x(t)$ jest wyrażone przez (4.28). Otrzymujemy więc równanie Hilla typu (4.25), gdzie

$$\Omega_0^2 = -h^2/4 + \lambda_0 , \quad (4.29a)$$

$$\bar{\mu}_i = \sum_{i=1,2,3,\dots} [\lambda_i^c \cos i\zeta + \lambda_i^s \sin i\zeta] , \quad (4.29b)$$

gdzie $\lambda_0, \lambda_1^c, \lambda_1^s$ są znanymi funkcjami p_i, q_i , a przynajmniej jedna z funkcji λ_1^c, λ_1^s nie jest tożsamościowo zerem. Wynika stąd, że $\bar{\gamma}(t)$ jest mT periodyczna ($m=1,2,3$ jest tu numerem rezonansu), czyli ma ten sam okres, co samo rozwiązanie periodyczne ($\tau = \bar{T}$).

Biorąc pod uwagę dwie możliwe postacie niestabilności (4.18), (4.21) widzimy, że postać η_1 daje nam rosnące harmoniczne o

częstościach $n\pi/(mT)$ (m , ustalone, jest numerem rezonansu; $n=1,3,5\dots$) - jest to więc niestabilność, jakiej oczekujemy w bifurkacji podwojenia okresu. W obliczeniach użyjemy przybliżenia wyrażenia (4.18) zawierającego dwie harmoniczne $n=1$ i $n=3$:

$$\eta(t) = e^{\kappa t} (\eta_{1/2}^c \cos \zeta/2 + \eta_{1/2}^s \sin \zeta/2 + \eta_{3/2}^c \cos 3\zeta/2 + \eta_{3/2}^s \sin 3\zeta/2) \quad (4.30)$$

gdzie ϵ jest rzeczywiste.

Oznaczmy

$$\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, \kappa^2) = \begin{vmatrix} \kappa^2 - \frac{h^2}{4} - \left(\frac{\nu}{2m}\right)^2 + \frac{\lambda_1^c}{2} + \lambda_0 & \frac{\kappa\nu}{m} + \frac{\lambda_1^s}{2} & \frac{\lambda_1^c + \lambda_2^c}{2} & \frac{\lambda_1^s + \lambda_2^s}{2} \\ -\frac{\kappa\nu}{m} + \frac{\lambda_1^s}{2} & \kappa^2 - \frac{h^2}{4} - \left(\frac{\nu}{2m}\right)^2 - \frac{\lambda_1^c}{2} + \lambda_0 & \frac{\lambda_2^s - \lambda_1^s}{2} & \frac{\lambda_1^c + \lambda_2^c}{2} \\ \frac{\lambda_1^c + \lambda_2^c}{2} & \frac{\lambda_2^s - \lambda_1^s}{2} & \kappa^2 - \frac{h^2}{4} - \left(\frac{3\nu}{2m}\right)^2 + \frac{\lambda_3^c}{2} + \lambda_0 & \frac{3\kappa\nu}{m} + \frac{\lambda_3^s}{2} \\ \frac{\lambda_1^s + \lambda_2^s}{2} & \frac{\lambda_1^c - \lambda_2^c}{2} & -\frac{3\kappa\nu}{m} + \frac{\lambda_3^s}{2} & \kappa^2 - \frac{h^2}{4} - \left(\frac{3\nu}{2m}\right)^2 + \frac{\lambda_3^c}{2} + \lambda_0 \end{vmatrix}$$

gdzie $m=1,2,3$ odpowiadają rezonansom typu 1:m Dużej Orbitsy.

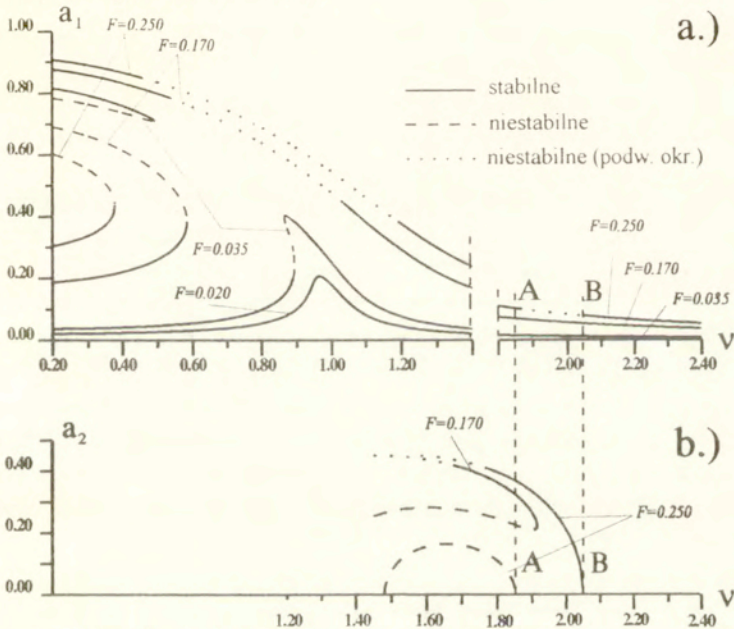
Warunek (4.23) możemy zapisać

$$\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, \kappa^2) = 0.$$

Amplituda a i faza φ są funkcjami parametrów równania (1.1). Przy ustalonych F i h wyznacznik $\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, h^2/4)$ jest więc funkcją ν . W naszych obliczeniach badamy warunki (4.24a) i (4.24b) licząc ten wyznacznik i jego pochodną na krzywych rezonansowych. W ten sposób wyróżniliśmy niestabilne (w sensie niestabilności wynikającej z podwojenia okresu) fragmenty krzywych na Rys. 3.1, 3.3, 3.4.

Zauważmy, że przypadek bifurkacji podwojenia okresu Małej Orbitsy 1T obserwowanej w subharmonicznym obszarze częstości policzyliśmy nie tylko przy pomocy wariacyjnego równania Hilla (Rys. 4.3a) ale również metodą perturbacyjną (Rys 4.3b). Charakterystyki amplitudowe rezonansu 1:2 MO opisują bowiem

amplitudy rozwiązania 2T-periodycznego, oddzielającego się od 1T-periodycznego, odpowiadającego trywialnemu rozwiązaniu $a=0$. Widzimy również, że dopiero analiza pełnego problemu nieliniowego pozwala rozróżnić między subkrytycznym (linia AA) i superkrytycznym (linia BB) podwojeniem okresu. Na Rys. 4.3a i b bifurkacje te zostały wyznaczone w dwóch niezależnych podejściach przybliżonych. Istnieje więc (niewielka) różnica w rezultatach tych dwóch metod.



Rys. 4.3. Podwojenie okresu w subharmonicznym obszarze częstotliwości:

a.) - analiza wariacyjna orbity 1T MO,

b.) - analiza perturbacyjna rezonansu 1:2 MO.

A-A bifurkacja subkrytyczna, B-B superkrytyczna.

4.3 ZŁAMANIE SYMETRII

Układ (1.1) posiada pewną symetrię: wyraża się ona tym, że równanie (1.1a) nie zmienia postaci przy transformacji

$$t \rightarrow t + T/2, \quad x \rightarrow -x.$$

Symetria taka powoduje możliwość wystąpienia w układzie symetrycznych rozwiązań periodycznych:

Rozwiązanie \bar{T} periodyczne $x(t)$ będziemy nazywać symetrycznym, jeśli

$$x(t+\bar{T}/2) = -x(t). \quad (4.31)$$

Można pokazać [Räty et al. 1986], że w układzie Duffinga symetryczne mogą być tylko rozwiązania periodyczne o nieparzystych okresach tzn. $\bar{T}=mT$ ($m=1,3,5\dots$), gdzie T jest okresem wymuszenia. Zauważmy, że wzory (3.18) i (3.43), opisujące rezonanse 1:1 i 1:3 Dużej Orbitsy spełniają warunek (4.31).

Relacja (4.31), definiująca periodyczne orbity symetryczne może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy spektrum Fouriera $x(t)$ ma tylko nieparzyste harmoniczne o częstościach $2\pi k/\bar{T}$ ($k=1,3,5\dots$). Powstawaniu orbity niesymetrycznej towarzyszy pojawienie się parzystych składowych $2\pi k/\bar{T}$ ($k=0,2,4\dots$) w spektrum rozwiązania.

W rozdziale tym zajmiemy się teoretycznym znalezieniem w przestrzeni parametrów tych miejsc, gdzie zachodzi niestabilność towarzysząca złamaniu symetrii. Zauważmy, że rozwiązania rezonansów 1:1 i 1:3 Dużej Orbitsy (3.18), (3.43) można ogólnie zapisać:

$$x(\zeta(t)) = \sum_{i=1,3,5\dots} [p_i \cos i\zeta + q_i \sin i\zeta], \quad (4.32)$$

gdzie $p_i=p_i(a,\varphi,\nu,F)$, $q_i=q_i(a,\varphi,\nu,F)$ oraz

$$\zeta=\nu t \quad i=1,3 \quad \text{dla rezonansu 1:1;}$$

$$\zeta=\nu t/3 \quad i=1,3,5,7,9 \quad \text{dla rezonansu 1:3.}$$

Rozwiązania te są symetryczne i $x(\zeta)=-x(\zeta+\pi)$. W naszym przypadku, dla x danego wzorem (4.31) i $\frac{\partial P}{\partial x} = -\alpha+3\beta x^2$, równanie Hilla ma postać (4.25), przy czym

$$\Omega_0^2 = -h^2/4 + \lambda_0, \quad (4.33a)$$

$$\mu\bar{y} = \sum_{i=2,4,6\dots} [\lambda_i^c \cos i\zeta + \lambda_i^s \sin i\zeta], \quad (4.33b)$$

gdzie λ_0 , λ_1^c , λ_1^s są znanymi funkcjami p_1, q_1 . Funkcja $\bar{\gamma}(t)$ jest tu $mT/2$ periodyczna w zmiennej t dla rezonansów typu 1:m ($m=1,3$). Tak więc okres $\bar{\gamma}$ jest połową okresu rozwiązania $x(t)$, tzn. ($\tau=\bar{T}/2$).

Porównując możliwe postacie niestabilności (4.18), (4.21) wnioskujemy, że postać η_2 daje rosnące zaburzenia posiadające parzyste harmoniczne typu $2\pi n/(mT)$ (m , ustalone, jest numerem rezonansu; $n=0,2,4,\dots$). Takiej niestabilności oczekujemy przy bifurkacji złamania symetrii. Użyjemy przybliżenia wyrażenia (4.21) zachowując tylko składniki $n=0$ i $n=2$:

$$\eta(t) = e^{\kappa t}(\eta_0 + \eta_2^c \cos 2\zeta + \eta_2^s \sin 2\zeta) \quad , \quad (4.34)$$

(κ rzeczywiste). Wyznacznik we wzorze (4.23) przybiera postać

$$\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, \kappa^2) \equiv$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 + \kappa^2 - \frac{h^2}{4} & \lambda_c^2/2 & 0 \\ \lambda_c^2/2 & -4\left(\frac{\nu}{m}\right)^2 + \lambda_0 + \kappa^2 - \frac{h^2}{4} + \lambda_c^4/2 & 4\nu\kappa \\ 0 & -4\nu\kappa & -4\left(\frac{\nu}{m}\right)^2 + \lambda_0 + \kappa^2 - \frac{h^2}{4} - \lambda_c^4/2 \end{vmatrix}$$

gdzie $m=1$ lub $m=3$ odpowiadają rezonansom Dużej Orbitsy typu 1:m. Warunek (4.23) ma postać

$$\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, \kappa^2) = 0 \quad m=1,3.$$

Na granicy stabilności musi być spełniony warunek (4.24a):

$$\Delta_m(a, \varphi, \nu, F, h^2/4) = 0.$$

Ostatecznie, warunki (4.24a,b), liczone analogicznie jak w Rozdz. 4.2, pozwoliły wyróżnić niestabilne (w sensie niestabilności związanej ze złamaniem symetrii) fragmenty krzywych z Rys. 3.2 i 3.5.

4.4 Dyskusja wyników wariacyjnej analizy stabilności

W rozdziale 4.2 rozpatrywaliśmy zagadnienie rezonansów Małej Orbits. Orbits te były niesymetryczne. Dla równania wariacyjnego rozpatrzyliśmy tam tylko rozwiązanie η_1 , odpowiadające podwojeniu okresu, a nie zajmowaliśmy się zmianą stabilności odpowiadającą rozwiązaniu η_2 . W rozdziale 4.3 natomiast rozpatrzyliśmy rezonanse symetrycznej Dużej Orbits. Tu, z kolei, badaliśmy rozwiązanie η_2 równania wariacyjnego, odpowiadające złamaniu symetrii, a nie zajmowaliśmy się zmianą stabilności odpowiadającą rozwiązaniu η_1 . Zachodzi pytanie jakim bifurkacjom odpowiadają pominięte postacie niestabilności.

Bifurkacje w układach symetrycznych omawiają [Swift, Wiesenfeld 1984]. Z pracy tej wynika, że (przy uwzględnieniu liniowego tłumienia) w oscylatorze typu Duffinga możliwe są następujące bifurkacje kowymiaru jeden:

- dla orbit niesymetrycznych bifurkacja podwojenia okresu i siodłowo-węzłowa,
- dla orbit symetrycznych bifurkacja złamania symetrii i siodłowo-węzłowa.

Wynika stąd, że pominięte sposoby zmiany stabilności są związane, zarówno dla orbit symetrycznych, jak i niesymetrycznych, z bifurkacją siodłowo-węzłową. Fakt ten odzwierciedlony jest w naszych badaniach przybliżonych: zauważmy, że zarówno postacie niestabilności pominięte w Rozdz. 4.2 (η_2), jak i pominięte w Rozdz. 4.3 (η_1) mają te same harmoniczne, co samo rozwiązanie, którego stabilność badamy. Tę samą własność ma wzór (2.20), uzyskany przy okazji analizy bifurkacji siodłowo-węzłowej metodą perturbacyjną.

Bifurkację siodłowo-węzłową badaliśmy wcześniej metodą perturbacyjną i dlatego już nie rozważamy odpowiadających jej postaci niestabilności. Należy tu zaznaczyć, że w metodzie perturbacyjnej otrzymujemy tę bifurkację przy okazji wyznaczania stabilności rozwiązań, natomiast analiza wariacyjna wymaga dodatkowego znacznego nakładu obliczeń. Co więcej, są to różne metody przybliżone i ogólnie nie dają tych samych wyników - analiza wariacyjna rozwiązania otrzymanego metodą perturbacyjną mogłaby prowadzić do dziwnych efektów, np. granica stabilności

mogłaby się pojawić obok punktu o pionowej stycznej na krzywej rezonansowej.

W pewnych przypadkach można uzyskać dla bifurkacji siodłowo-węzłowej spójność między przybliżonymi rozwiązaniami równania nieliniowego, a przybliżoną analizą równania wariacyjnego [Hayashi 1964], [Szemplińska-Stupnicka 1990]. W pracach tych spójność taka ma miejsce pod warunkiem, że:

- rozwiązania periodyczne $x(t)$ równania nieliniowego są poszukiwane metodą bilansu harmonicznego;
- postacie niestabilności $\eta(t)$ są poszukiwane również metodą bilansu harmonicznego i zawierają te same harmoniczne, co $x(t)$; i wyraża się tym, że:
- punkty zwrotne na krzywej rezonansowej są jednocześnie granicami stabilności odpowiadającymi rozwiązaniom $\eta(t)$.

W niektórych przypadkach metoda perturbacyjna daje tę samą postać rozwiązań równania nieliniowego, co bilans harmonicznego [Szemplińska-Stupnicka 1990], ogólnie jednak nie należy oczekiwać takiej zgodności.

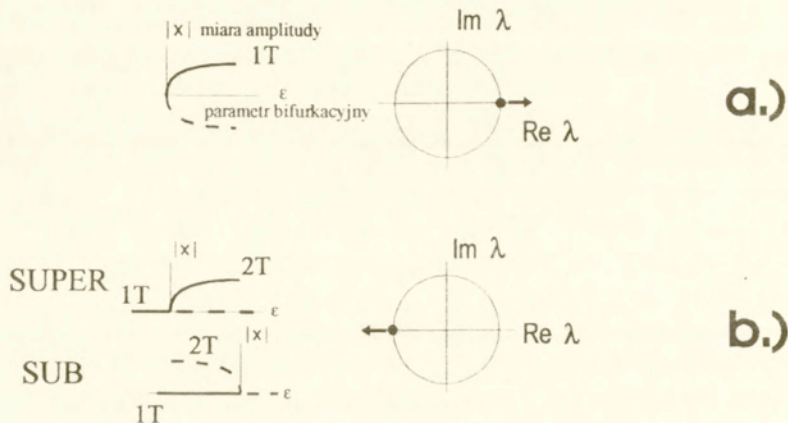
W Rozdz. 2. podkreślaliśmy trudności związane z wykryciem niestabilności podwojenia okresu w analizie stabilności rozwiązań wynikającej z badania układu (2.9). Nie przeczy temu fakt wykrycia tej bifurkacji metodą KBM przy okazji badania rezonansu 1:2 Małej Orbity (Rys. 4.3b). Zauważmy, że w tym przypadku w celu znalezienia tej bifurkacji musieliśmy rozważyć osobny problem (osobny rezonans), gdyż perturbacyjna analiza stabilności rozwiązania $1T MO$ jej nie wykryła.

Podsumowując wyniki zawarte w Rozdz. 4.1-4.3 należy zwrócić uwagę na fakt pojawienia się dwóch rodzajów równań wariacyjnych, różniących się okresem funkcji periodycznej w równaniu Hilla:

1. $\tau = mT$, $m = 1, 2, 3$. Orbity niesymetryczne.

Stosowaliśmy tu równanie (4.25) określone zależnościami (4.29). Okres funkcji \bar{y} w równaniu wariacyjnym jest taki sam, jak orbity periodycznej. Multiplikatory Floqueta -1 i $+1$ odpowiadają bifurkacji podwojenia okresu i siodłowo-węzłowej (Rys. 4.4).

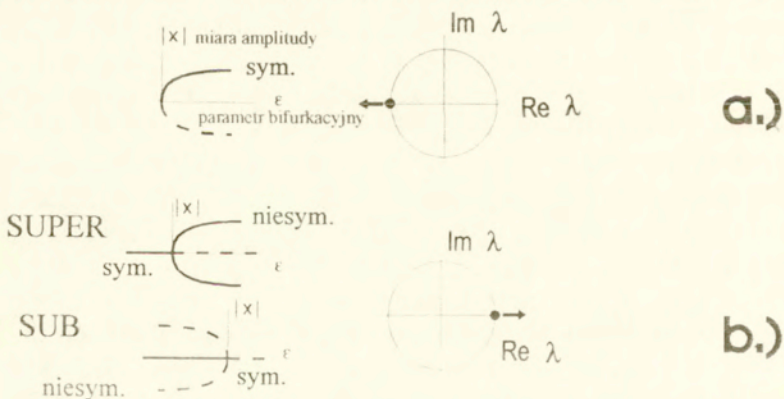
Jest to typowa relacja między multiplikatorami i bifurkacjami spotykana w literaturze [Arnold 1983], [Ioos, Adelmeyer 1992].



Rys. 4.4. Bifurkacje orbit niesymetrycznych: diagramy bifurkacyjne i multiplikatory Floqueta na płaszczyźnie zespolonej; a.) siodłowo-węzłowa, b.) podojenia okresu (wyróżniono przypadek super- i subkrytyczny).

2. $\tau = mT/2$, $m = 1, 3$. Orbity symetryczne.

Stosowaliśmy tu równanie (4.25) określone zależnościami (4.33). Okres funkcji \bar{y} w równaniu wariacyjnym jest połową okresu orbity periodycznej. Multiplikatory Floqueta -1 i $+1$ odpowiadają bifurkacji siodłowo-węzłowej i złamania symetrii (Rys. 4.5).



Rys. 4.5. Bifurkacje orbit symetrycznych: diagramy bifurkacyjne i multiplikatory Floqueta na płaszczyźnie zespolonej; a.) siodłowo-węzłowa, b.) złamania symetrii (wyróżniono przypadek super- i subkrytyczny).

Przypadek ten jest nietypowy z uwagi na symetrię. W tym przypadku zastosowanie do analizy stabilności równania wariacyjnego z okresem równym okresowi orbity periodycznej (patrz np. [Iooss, Adelmeyer 1992]) nie pozwala odróżnić bifurkacji siodłowo-węzłowej od złamania symetrii, gdyż obydwie mają multiplikator Floqueta równy 1. W naszej analizie wykorzystanie równania Hilla o okresie $\tau = mT/2$ pozwoliło na rozróżnienie tych bifurkacji.

Na konieczność specjalnego traktowania bifurkacji orbit symetrycznych zwracali uwagę [Swift, Wiesenfeld 1984], analizując odwzorowania dyskretne (Poincarè) skojarzone z potokiem fazowym. W niniejszej pracy stosuje się jednak zupełnie inne podejście, bezpośrednio dostosowane do problemu wyznaczania granic stabilności w przestrzeni parametrów.

Jak wynika z podanych na początku tego rozdziału wyników [Swift, Wiesenfeld 1984], orbita symetryczna w układach typu równania Duffinga nie może przechodzić bifurkacji podwojenia okresu. Zauważmy, że przybliżona analiza tego rozdziału odzwierciedla tę własność: dla równania (4.25) określonego zależnościami (4.33) formy niestabilności η_1, η_2 nie zawierają harmonicznych o okresie dwa razy mniejszym od okresu badanego rozwiązania periodycznego. Orbita symetryczna przechodzi więc najpierw złamanie symetrii; dopiero powstałe tak orbity niesymetryczne mogą przejść podwojenie okresu. Ilustrację numeryczną takiego zachowania znajdziemy w Rozdz. 6 i 7.

Nie zajmowaliśmy się bifurkacją Nejmarka (inaczej Hopfa dla orbit periodycznych). Wymaga ona $|\lambda_1 \lambda_2| = 1$ (patrz np. [Guckenheimer, Holmes 1983]). Jej wystąpienie w układzie Duffinga jest niemożliwe z uwagi na relację (4.9): mamy zawsze

$$|\lambda_1 \lambda_2| = \exp(-h\tau) < 1. \quad (4.35)$$

Na zakończenie podkreślimy, że analiza tego rozdziału ma charakter przybliżony, przy czym przybliżenia są dwójakiego rodzaju:

- rozwiązanie periodyczne zadania nieliniowego jest przybliżone,
- rozwiązanie wariacyjnego równania o współczynnikach zależnych

od czasu jest przybliżone.

Nie podajemy tu twierdzeń o istnieniu, ani oszacowań błędów - nie pojawiają się one zresztą w znanej Autorowi literaturze dotyczącej zbliżonych problemów. Weryfikacja wyników tego rozdziału będzie polegała na porównaniu z wynikami numerycznymi (Rozdz. 6).

5. TEORIA MIELNIKOWA

Równanie Duffinga (1.1) jest ważnym przykładem zastosowań teorii Mielnikowa [Mel'nikov 1963]. Zastosowania te omówiono w pracach [Holmes 1979], [Greenspan, Holmes 1983], a także [Guckenheimer, Holmes 1983], [Wiggins 1990]. W rozdziale tym zostaną w skrócie przytoczone, a także częściowo przedyskutowane zamieszczone w powyższej literaturze rezultaty. W dalszych rozdziałach będziemy spoglądać na te rezultaty zarówno z perspektywy obliczeń numerycznych, jak i teorii omówionej w Rozdz. 3.

Nie wchodząc w szczegóły licznych możliwych uogólnień, przedstawimy poniżej założenia metody.

Rozważany jest układ

$$\dot{w} = f(w) + \mu g(w, t), \quad (5.1)$$

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1(x, y, t) \\ g_2(x, y, t) \end{pmatrix},$$

gdzie $w, f, g \in \mathbb{R}^2$; f, g są dostatecznie regularne, g jest T periodyczna w t , μ jest małym parametrem, zaś układ niezaburzony ($\mu=0$) ma hamiltonian $H(x, y)$ tzn.

$$f_1 = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (5.2)$$

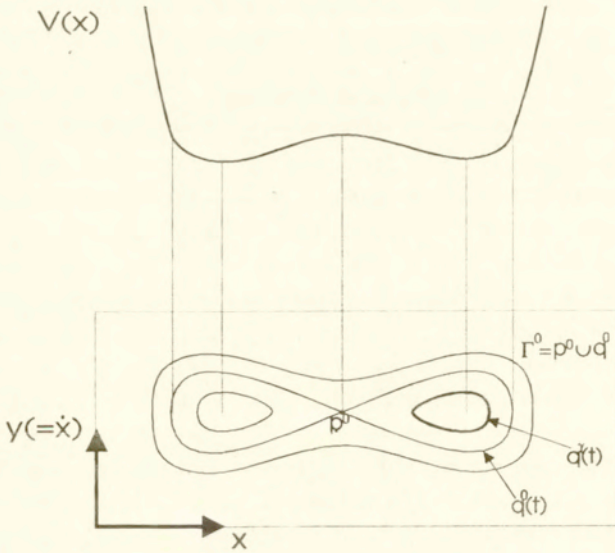
Układ (5.1), (5.2) redukuje się do (1.1) dla

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{4}x^4; \quad g_1 = 0, \quad g_2 = -\hat{h}y - \hat{F}\cos vt; \quad (5.3)$$

gdzie $\mu\hat{F}=F, \mu\hat{h}=h$.

Metoda Mielnikowa zakłada szczególną strukturę przestrzeni fazowej układu niezaburzonego, odpowiadającego $\mu=0$ (szczegółowe warunki znaleźć można np. w [Guckenheimer, Holmes 1983], [Greenspan, Holmes 1983], [Wiggins 1990]). Między innymi zakłada się, że układ niezaburzony (patrz Rys. 5.1):

- A. Posiada orbitę homokliniczną q^0 do punktu siodłowego p_0 ;
- B. Oznaczmy $\Gamma^0 \equiv q^0 \cup p_0$. Wnętrze Γ^0 jest wypełnione jednoparametrową rodziną orbit periodycznych q^j o okresach T^j ,



Rys. 5.1. Portret fazowy układu niezaburzonego.

gdzie γ jest parametrem (często przyjmuje się $\gamma \in (-1, 0)$). Orbity tej rodziny dążą do q^0 dla $\gamma \rightarrow 0$. (W następującym sensie: Niech $d(a, \Gamma^0) \equiv \inf_{w \in \Gamma^0} |a - w|$. Mamy $\sup_{t \in \mathbb{R}} d(q^\gamma(t), \Gamma^0) \rightarrow 0$ dla $\gamma \rightarrow 0$.);
 C. Jeśli przez \tilde{H}^γ oznaczymy (stałą) wartość hamiltonianu na orbicie q^γ , to

$$\frac{d\tilde{H}^\gamma}{d\gamma} > 0 .$$

Wszystkie te założenia są spełnione przez układ (5.1)-(5.3). W tym przypadku mamy trzy rodziny orbit periodycznych: dwie wewnątrz, jedną na zewnątrz "ósemki" utworzonej przez orbity homokliniczne i punkt p_0 (Rys. 5.1).

Rezultaty teorii są formułowane w języku odwzorowania Poincaré związanego z układem (5.1). Odwzorowanie to można zdefiniować następująco:

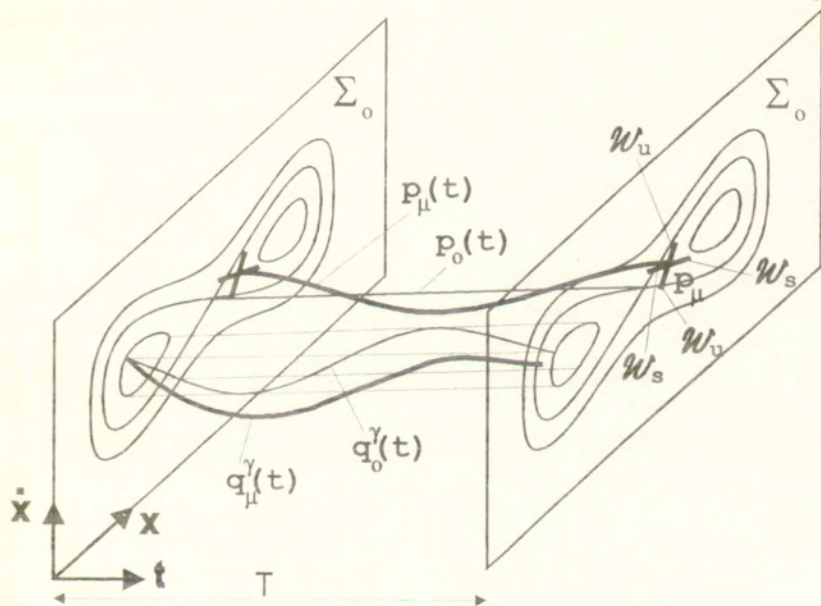
1. Podobnie, jak w Rozdz. 1 definiujemy dla (5.1) "toroidalną" przestrzeń fazową $\mathbb{R}^2 \times S^1 \ni (w, \psi)$, gdzie $S^1 = \mathbb{R}^1 / T$. W przestrzeni tej definiujemy płaszczyznę (przekrój) Poincaré Σ_{t_0} :

$$\Sigma_{t_0} \equiv \left\{ (w, \psi) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \mid \psi = t_0 \in [0, T) \right\} ;$$

2. Potok fazowy zadaje odwzorowanie

$$P_{\mu}^{t_0}: \Sigma_{t_0} \ni (w(t_0), t_0) \rightarrow (w(t_0 + T), t_0) \in \Sigma_{t_0},$$

zwane odwzorowaniem Poincaré. Indeks t_0 wybiera tu konkretną płaszczyznę w przestrzeni $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Odwzorowanie przekształca tę płaszczyznę na siebie. Obszerne omówienie konstrukcji i własności odwzorowania Poincaré można znaleźć np. w [Wiggins 1988]. W szczególności odwzorowanie to jest dyfeomorfizmem Σ_{t_0} .



Rys. 5.2. Odwzorowanie Poincaré.
Linia cienka - układ niezaburzony,
linia gruba - zaburzony.

Działanie odwzorowania zilustrowano na Rys. 5.2, przy czym okrąg S^1 przecięto dla $t_0 = 0$ i "wyprostowano". Narysowane tu dwie płaszczyzny Σ_0 należy więc utożsamiać. Na rysunku tym wyróżniono następujące rozwiązania:

1. orbitę $p_0(t) = p_0 = \text{const}$ (linia cienka) dla $\mu=0$ oraz jej perturbację $p_\mu(t)$ (linia gruba) dla $\mu \neq 0$.

2. orbitę $q_0^x(t)$ (linia cienka) dla $\mu=0$ oraz jej perturbację $q_\mu^x(t)$ (linia gruba) dla $\mu \neq 0$.

Zaznaczono ponadto na płaszczyźnie Poincarè linie niezmiennicze odpowiadające układowi niezaburzonemu, tzn. odwzorowaniu \mathcal{P}_0^t . Są one tożsame z liniami przedstawiającymi rozwiązania na Rys. 5.1.

W metodzie Mielnikowa możemy wyróżnić dwa nurty, związane z powyższymi rozwiązaniami typu 1 i 2:

1. teorię homokliniczną, dotyczącą pojawienia się bifurkacji homoklinicznej;
2. teorię subharmoniczną, dotyczącą istnienia i bifurkacji orbit periodycznych.

W dalszej części odwzorowanie Poincarè będziemy oznaczać w skrócie \mathcal{P} , pomijając zależność od t_0 i perturbacji μ .

5.1 TEORIA HOMOKLINICZNA

Przedmiotem zainteresowania teorii są rozmaitości niezmiennicze (stabilna W_s i niestabilna W_u) punktu siodłowego p_μ . Punkt ten jest "śladem" na płaszczyźnie Poincarè niestabilnej orbity periodycznej $p_\mu(t)$ będącej perturbacją p_0 (Rys. 5.2).

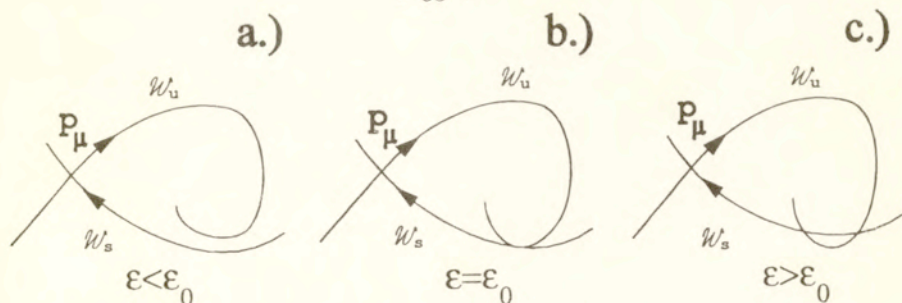
Rozmaitości te możemy zdefiniować [Palis, Takens 1993]:

$$W_s \equiv \left\{ w \in \Sigma_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}^n(w) = p_\mu \right\},$$
$$W_u \equiv \left\{ w \in \Sigma_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}^{-n}(w) = p_\mu \right\},$$

a ich istnienie wynika z hiperboliczności p_μ (patrz np. [Guckenheimer, Holmes 1983]).

Rozmaitości niezmiennicze mogą podlegać tzw. [Palis, Takens 1993] bifurkacji homoklinicznej (Rys. 5.3): jeśli ε jest pewnym parametrem bifurkacyjnym (np. siłą F), to przy przechodzeniu tego parametru przez wartość ε_0 występują sytuacje:

- a.) W_s i W_u nie mają punktów wspólnych;
- b.) W_s i W_u mają punkty wspólne, przy czym rozmaitości te są styczne (styczne punkty homokliniczne),
- c.) W_s i W_u mają punkty wspólne, przy czym rozmaitości te przecinają się pod kątem różnym od zera (transwersalne punkty homokliniczne).



Rys. 5.3. Bifurkacja homokliniczna (schemat).

Na Rys. 5.4 przedstawiono numerycznie wygenerowane rozmaitości W_s i W_u . Na Rys. 5.4a rozmaitości W_s i W_u nie mają punktów wspólnych. Po zmianie siły F obserwujemy jednak transwersalne punkty homokliniczne (Rys. 5.4b).

Istnienie transwersalnych punktów homoklinicznych implikuje, na mocy twierdzenia Smale'a-Birkhoffa [Guckenheimer, Holmes 1983], [Palis, Takens 1993], istnienie, dla pewnej iteracji \mathcal{P} , niezmienniczego zbioru typu podkowy Smale'a. Dynamika na takim zbiorze charakteryzuje się dużym stopniem komplikacji oraz wrażliwością na warunki początkowe. Z tego względu wykrycie istnienia w układzie transwersalnych punktów homoklinicznych ma duże znaczenie teoretyczne, będąc matematyczną podstawą rozważań na temat "chaosu".

W przypadku Rys. 5.4b istnienie transwersalnych punktów homoklinicznych pokazaliśmy numerycznie. Dla wielu układów można jednak udowodnić ich istnienie również na drodze analitycznej, posługując się homokliniczną teorią Mielnikowa. W teorii tej definiuje się funkcję

$$M^0(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[q^0(t-t_0)] \wedge g[q^0(t-t_0), t] dt, \quad (5.4)$$

gdzie

$$f \wedge g = f_1 g_2 - f_2 g_1.$$

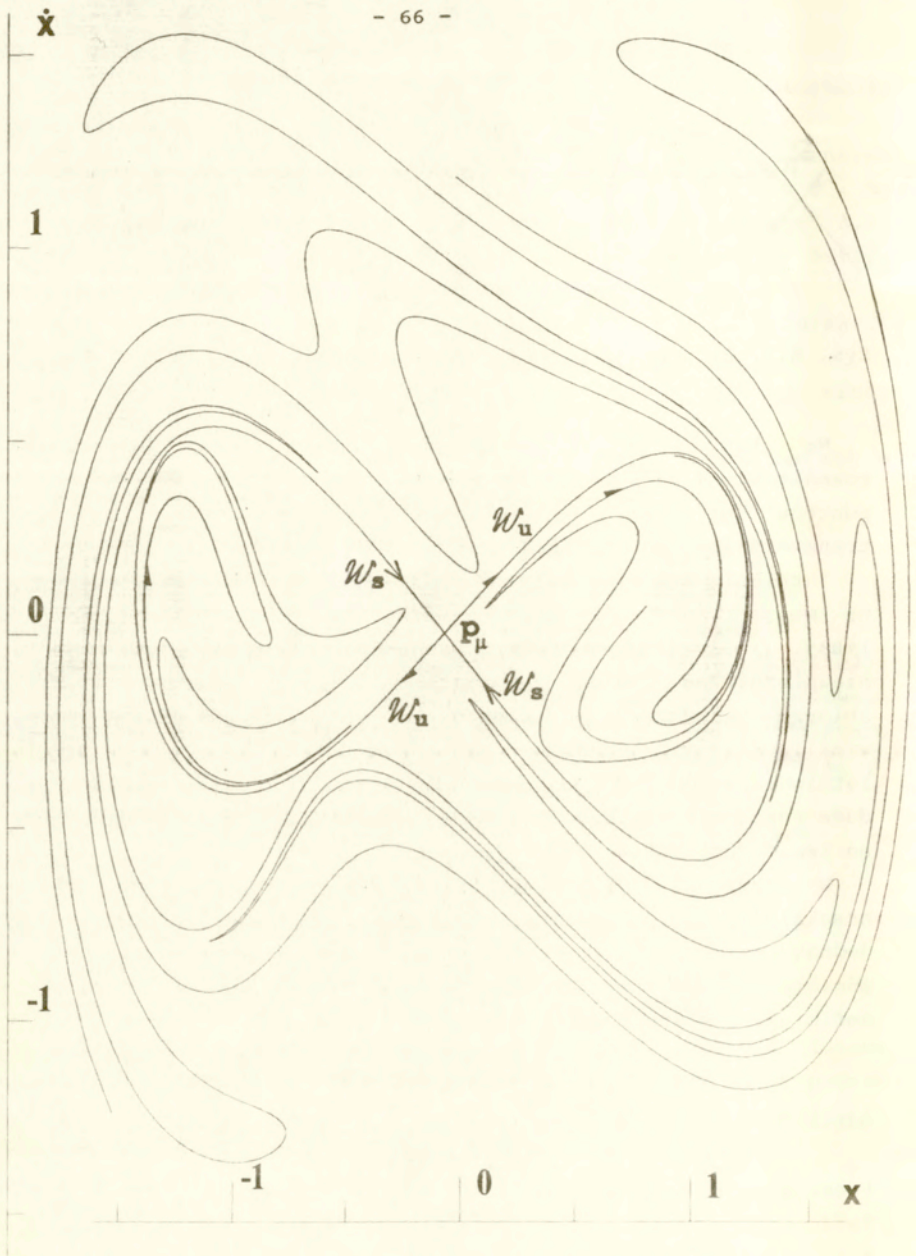
Funkcja ta pozwala sformułować

Tw.1

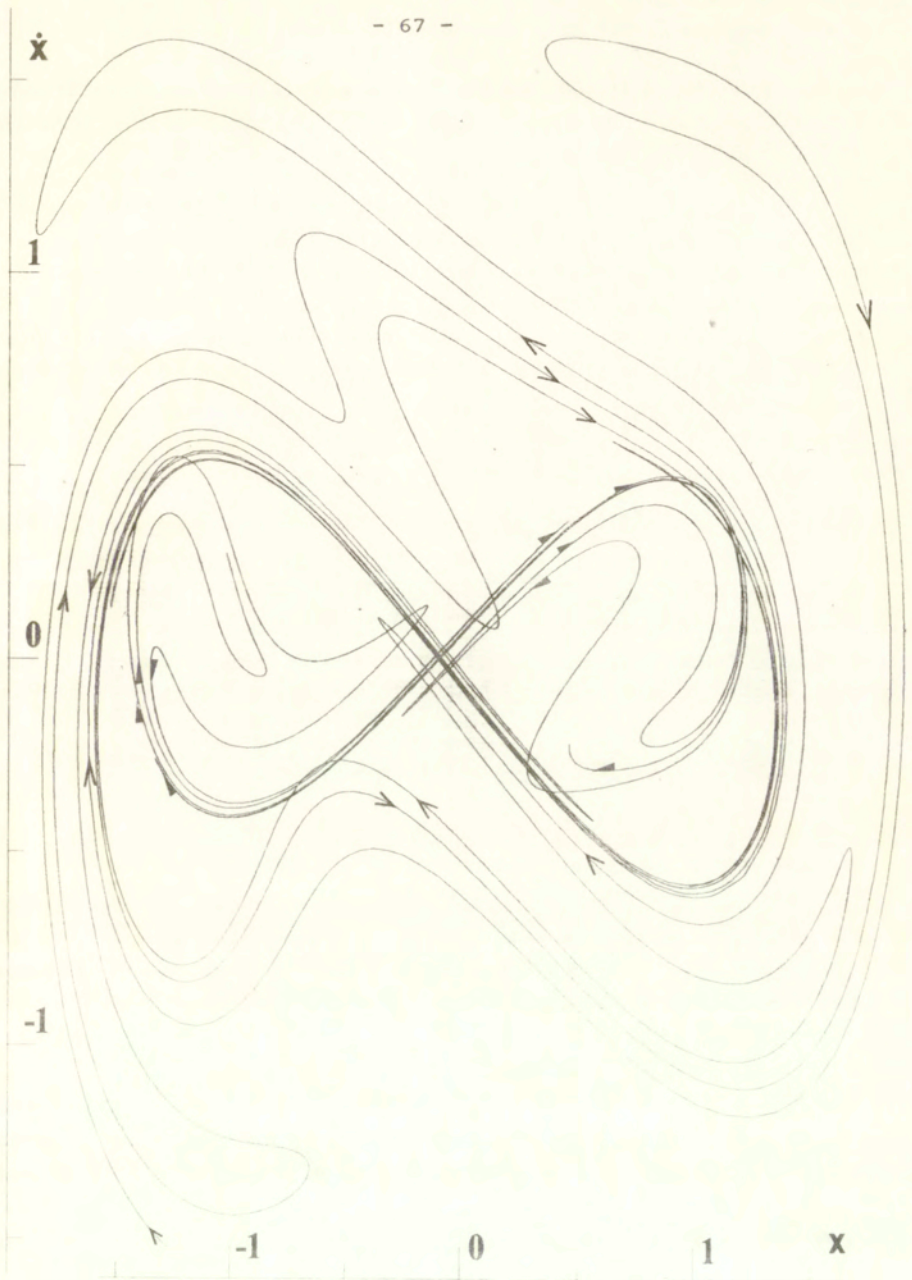
A.) Jeśli $M^0(t_0)$ ma pojedyncze zera, tzn. dla pewnego \bar{t} :

$$M^0(\bar{t}) = 0; \quad \frac{\partial M^0}{\partial t} \Big|_{t=\bar{t}} \neq 0;$$

to W_s i W_u przecinają się transwersalnie.



Rys. 5.4a. Rozmaitości niezmiennicze punktu p_μ dla $F=0.25$, $\nu=1.9$; $\alpha=\beta=0.5$, $h=0.1$.



Rys. 5.4b. Rozmaitości niezmiennicze punktu p_μ dla $F=0.30$, $\nu=1.9$, $\alpha=\beta=0.5$, $h=0.1$.

B.) Jeśli rozważamy rodzinę układów zależnych od skalarne go parametru ϵ : $\dot{w} = f(w) + \mu g(w, t; \epsilon)$ i $M^0(t_0, \epsilon)$ ma podwójne zero w $(\bar{t}, \bar{\epsilon})$, tzn.

$$M^0(\bar{t}, \bar{\epsilon}) = \frac{\partial M^0}{\partial t} \Big|_{(\bar{t}, \bar{\epsilon})} = 0; \quad \text{przy czym}$$

$$\frac{\partial^2 M^0}{\partial t^2} \Big|_{(\bar{t}, \bar{\mu})} \neq 0; \quad \frac{\partial M^0}{\partial \epsilon} \Big|_{(\bar{t}, \bar{\epsilon})} \neq 0;$$

to dla pewnej wartości parametru bifurkacyjnego $\epsilon_B = \bar{\epsilon} + O(\mu)$ układ ma styczne punkty homokliniczne. Styczność jest typu kwadratowego.

Dla układu (5.1)-(5.3) funkcja (5.4) ma postać

$$M^0(t_0) = -\hat{h}J_1(\nu) \mp \hat{F}J_2(\nu)\sin\nu t_0, \quad (5.5)$$

gdzie J_1, J_2 są danymi dodatnimi funkcjami ν (patrz Dodatek C), a znak przed J_2 zależy od wyboru "dołka". Jeśli oznaczymy

$$R^0(\nu) \equiv J_1(\nu)/J_2(\nu),$$

to warunkiem istnienia miejsc zerowych $M^0(t_0)$ jest

$$0 = -\hat{h}R^0(\nu) \mp \hat{F}\sin\nu t_0$$

lub

$$|\hat{h}R^0(\nu)/\hat{F}| \leq 1$$

lub

$$\hat{F}/\hat{h} \geq R^0(\nu).$$

Widzimy więc, że dla

$$\hat{F}/\hat{h} < R^0 \quad (5.6a)$$

$M^0(t_0)$ nie ma miejsc zerowych, dla

$$\hat{F}/\hat{h} = R^0 \quad (5.6b)$$

$M^0(t_0)$ ma podwójne miejsca zerowe, dla

$$\hat{F}/\hat{h} > R^0. \quad (5.6c)$$

$M^0(t_0)$ ma pojedyncze miejsca zerowe.

Potraktujmy \hat{F} jako parametr bifurkacyjny. Wówczas przypadek (5.6b) odpowiada części B powyższego twierdzenia, a więc Rys. 5.3b. W bardziej szczegółowej analizie pokazuje się [Holmes 1979], [Guckenheimer, Holmes 1983], że jeśli zmieniając \hat{F} będziemy przechodzić kolejno przez przypadki (5.6a,b,c), to przechodzić będziemy przez konfiguracje różnaitości niezmienniczych odpowiadające kolejnym Rys. 5.3a,b,c. Warunek graniczny (5.6b) jest nazywany kryterium Mielnikowa.

Odpowiadającą mu krzywą w przestrzeni (ν, F) przedstawiono na Rys. 7.1 w Rozdz. 7.

Należy zwrócić uwagę, że kryterium (5.6b) jest otrzymane w rachunkach perturbacyjnych, jest więc kryterium przybliżonym. Warto więc postawić pytanie o zgodność tego kryterium z wynikami numerycznymi. W szczególności w pracy [Soliman, Thompson 1989] rozważa się bifurkację homokliniczną w szerokim zakresie parametrów pewnego oscylatora i pokazuje jakościowe rozbieżności między kryterium typu (5.6b) i wynikami numerycznymi. Dlatego też Rys. 5.4b ma na celu nie tylko ilustrację bifurkacji homoklinicznej, ale także sprawdzenie, czy stosowanie tego kryterium jest jeszcze sensowne w subharmonicznym zakresie parametrów $\nu=2$. Na jego podstawie przekonujemy się, że dla $\nu=1.9$ tak jest, gdyż

$$0.25 < hR^\circ(1.9) < 0.3 ,$$

tj. teoretyczna wartość graniczna siły leży między eksperymentalnie wyznaczonymi siłami odpowiadającymi brakowi przecięć i przecięciom transwersalnym. W zakresie $\nu < 1$ równania Duffinga zgodność kryterium Mielnikowa z wynikami numerycznymi została potwierdzona w [Moon, Li 1985b].

5.2 TEORIA SUBHARMONICZNA

Przedmiotem zainteresowania teorii jest istnienie i bifurkacje orbit periodycznych. Jej rezultaty formułuje się wykorzystując następująco zdefiniowaną funkcję:

$$M^{m/n}(t_0) = \int_0^{mT} f[q^j(t-t_0)] \wedge g[q^j(t-t_0), t] dt . \quad (5.7)$$

W odróżnieniu od wyrażenia (5.4), gdzie całkuje się wzdłuż orbity homoklinicznej układu niezaburzonego, w (5.7) całkuje się wzdłuż orbity periodycznej. Indeks m/n wyraża tu fakt, że do policzenia całki z wszystkich możliwych rozwiązań periodycznych q^j wybiera się tylko te, dla których zachodzi warunek

$$T^j = m/nT ; \quad m, n \text{ względnie pierwsze} . \quad (5.8)$$

Przykładem takiej orbity jest $q_0^j(t)$ na Rys. 5.2, gdzie $m=n=1$.

Funkcja $M^{m/n}(t_0)$ pozwala na sformułowanie twierdzenia analogicznego do zamieszczonego w Rozdz. 5.1.

Tw. 2.

A.) Jeśli $M^{m/n}(t_0)$ ma pojedyncze zero, tzn. dla pewnego \bar{t}

$$M^{m/n}(\bar{t}) = 0; \quad \left. \frac{\partial M^{m/n}}{\partial t} \right|_{t=\bar{t}} \neq 0;$$

to, dla $0 < \mu < \mu(n)$, układ (5.1) ma orbitę mT -periodyczną. Jeśli $n=1$, to oszacowanie to jest jednostajne względem m ($0 < \mu < \mu(1)$).

B.) Jeśli rozważamy rodzinę układów zależnych od skalarnego parametru ε : $\dot{w} = f(w) + \mu g(w, t; \varepsilon)$ i $M^{m/n}(t_0, \varepsilon)$ ma podwójne zero w $(\bar{t}, \bar{\varepsilon})$, tzn.

$$M^{m/n}(\bar{t}, \bar{\varepsilon}) = \left. \frac{\partial M^{m/n}}{\partial t} \right|_{(\bar{t}, \bar{\varepsilon})} = 0; \quad \text{przy czym}$$

$$\left. \frac{\partial^2 M^{m/n}}{\partial t^2} \right|_{(\bar{t}, \bar{\varepsilon})} \neq 0; \quad \left. \frac{\partial M^{m/n}}{\partial \varepsilon} \right|_{(\bar{t}, \bar{\varepsilon})} \neq 0;$$

to dla pewnej wartości parametru $\varepsilon_B = \bar{\varepsilon} + O(\mu)$ w układzie tym występuje bifurkacja siodłowo-węzłowa orbity mT -periodycznej.

Dla układu (5.1)-(5.3) funkcję (5.7) można zapisać w postaci

$$M^m(t_0) = \hat{F}_2^m(\nu) \sin \nu t_0 - \hat{h}_1^m(\nu). \quad (5.9)$$

W istocie są to trzy rodziny funkcji, odpowiadających dwóm rodzinom Małej Orbitsy i jednej rodzinie Dużej Orbitsy (Dodatek C). Jeśli oznaczymy

$$R^m(\nu) = J_1^m(\nu) / J_2^m(\nu),$$

to warunek B w powyższym twierdzeniu można zapisać jako

$$\hat{F} / \hat{h} = R^m(\nu). \quad (5.10)$$

Jak wynika z Dodatku C w istocie mamy tu do czynienia z dwoma rodzinami funkcji $R^m(\nu)$. Jedna odpowiada perturbacjom orbit wewnątrz pętli homoklinicznej Γ^0 (Mała Orbita) i jest tam oznaczana $\underline{R}^m(\nu)$. Druga odpowiada perturbacjom orbit na zewnątrz Γ^0 (Duża Orbita) i jest oznaczana $\overline{R}^m(\nu)$. Indeks n nie występuje w wyrażeniu (5.10); okazuje się że bifurkacje siodłowo-węzłowe można otrzymać tylko dla tych orbit spełniających (5.8), dla których $n=1$. Wykrywa się tu zatem tylko rezonanse typu $1:m$. Co więcej, dla Małej Orbitsy bifurkacje te są możliwe dla $m=1, 2, 3, \dots$, zaś dla Dużej Orbitsy tylko dla $m=1, 3, 5, \dots$. Kilka krzywych odpowiadających warunkom (5.10), pokazano na Rys. 6.1-6.5, gdzie porównano je z wynikami numerycznymi i z wynikami Rozdz. 3.

Autor chciałby w tym miejscu podkreślić pewne ograniczenia metody. Posłużmy się przykładem układu (5.1)-(5.3), przyjmując $\alpha=\beta=0.5$. Częstotliwości orbit układu niezaburzonego, odpowiadającego $\mu=0$ oznaczymy

$$\omega_{\gamma} \equiv \frac{2\pi}{T_{\gamma}} .$$

Wykorzystamy dwie informacje:

1.) Można sprawdzić (Dodatek C), że dla Małej Orbitsy ω_{γ} są zawarte w przedziale $(0,1)$, tj.

$$\omega_{\gamma} \in (0,1) . \quad (5.11)$$

2.) Mamy warunek (5.8), wiążący okresy (częstotliwości) orbit układu niezaburzonego i wymuszenia.

Z 1.) i 2.) wynika, że

$$\nu \in (0, m/n) . \quad (5.12a)$$

Warunek ten oznacza, że jeśli rozważamy rezonans n/m MO, to metoda może wykryć istnienie orbit periodycznych odpowiadających temu rezonansowi tylko dla tych częstości wymuszenia, które należą do przedziału (5.12a). Na przykład:

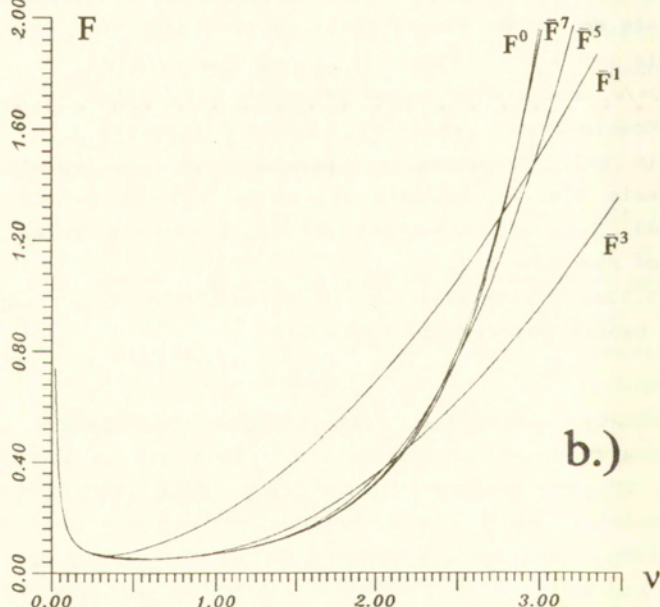
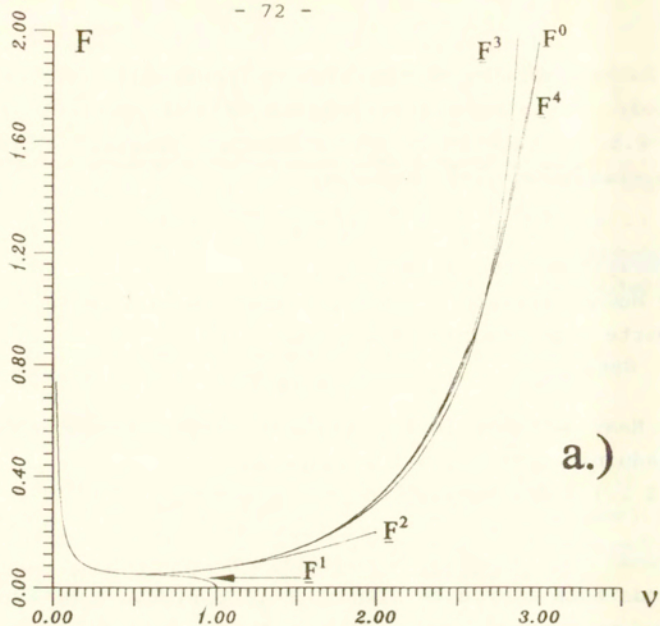
- Dla $\nu=0.9$ w układzie niezaburzonym istnieje orbita o okresie $T^{\gamma}=2\pi/\nu$, można więc badać rezonans 1:1. Istnieje również orbita o okresie $2*2\pi/\nu$, można więc badać rezonans 1:2.

- Dla $\nu=1.1$ w układzie niezaburzonym nie istnieje orbita o okresie $T^{\gamma}=2\pi/\nu$, badanie rezonansu 1:1 tą metodą nie ma więc sensu. Istnieje natomiast orbita o okresie $2*2\pi/\nu$, można więc badać rezonans 1:2.

Z (5.12a) wynika również, że Mała Orbita mT -periodyczna może w tej teorii pojawić się tylko dla

$$\nu < m . \quad (5.12b)$$

Rezultaty numeryczne, jak również teoretyczne z Rozdz. 3 wskazują jednak na istnienie rozwiązań $1T$ periodycznych MO dla $\nu>1$, $2T$ periodycznych dla $\nu>2$, itp. Fakt ten można wytłumaczyć, zauważając, że teoria Mielnikowa stwierdza tylko, które z orbit periodycznych, istniejących w układzie niezaburzonym, zachowały się pod wpływem perturbacji. W istocie perturbacja sama kreuje orbity mT periodyczne, również w tych zakresach parametrów, w których orbity takie nie występują w układzie niezaburzonym.



Rys. 5.5. Bifurkacja homokliniczna F^0 i siodłowo-węzłowe
a.) Małej Orbity F^m $m=1,2,3,\dots$; b.) Dużej Orbity F^m $m=1,3,5,\dots$;
w teorii Mielnikowa. Przestrzeń (ν, F) przy $\alpha=\beta=0.5$, $h=0.1$.

UWAGA

Istnieje pewna spójność między rezultatami homoklinicznej i subharmonicznej teorii Mielnikowa [Guckenheimer, Holmes 1983], [Greenspan, Holmes 1983]. W naszym zadaniu przejawia się ona tym, że krzywa opisująca w przestrzeni parametrów bifurkację homokliniczną (5.6b) jest granicą ciągu krzywych opisujących bifurkacje siodłowo-węzłowe orbit periodycznych (5.10) tzn.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \underline{R}^m(\nu) = R^0(\nu), \quad (5.13a)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{R}^m(\nu) = R^0(\nu). \quad (5.13b)$$

Jest to cenna własność teoretyczna, wiążąca analizę bifurkacji lokalnych z analizą bifurkacji globalnych. Własność ta wyróżnia metodę Mielnikowa spośród innych metod perturbacyjnych. Kilka pierwszych krzywych $\underline{F}^m \equiv h\underline{R}^m(\nu)$, $\bar{F}^m \equiv h\bar{R}^m(\nu)$ i krzywą $F^0 \equiv hR^0(\nu)$ przedstawiono na Rys. 5.5 ($\alpha=\beta=0.5$, $h=0.1$).

Jak pokazuje [Yagasaki 1994] nie każda granica ciągu bifurkacji siodłowo-węzłowych odpowiada bifurkacji homo- lub heteroklinicznej. Np. relacja (5.13b) nie zajdzie, jeśli naruszymy symetrię "dołków" układu niezaburzonego.

6. BIFURKACJE ATRAKTORÓW PERIODYCZNYCH - PORÓWNANIE WYNIKÓW METOD PERTURBACYJNYCH Z EKSPERYMENTEM NUMERYCZNYM.

W wielu zastosowaniach przedmiotem badania są stany ustalone układów dynamicznych, tj. zachowania układów przy $t \rightarrow \infty$. Zachowania takie są związane z pojęciem atraktora. Nazywamy tak [Guckenheimer, Holmes 1983], [Perko 1991] podzbiór A przestrzeni fazowej M o następujących własnościach:

- a.) A jest domknięty,
- b.) A jest niezmienniczy pod działaniem potoku fazowego ϕ_t ,
- c.) istnieje otoczenie U zbioru A , takie że dla wszystkich $x \in U$:
 $\phi_t(x) \in U$ dla $t > 0$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) \rightarrow A$,
- d.) A zawiera orbitę gęstą.

Zbiór $\bigcup_{t \leq 0} \phi_t(U)$ nazywamy obszarem przyciągania atraktora A .

Wyróżnia się następujące atraktory:

1. Punkty równowagi pola wektorowego - A jest punktem
Widzimy, że równanie (1.1b) nie ma punktów równowagi.
2. Orbity okresowe - A jest krzywą zamkniętą
Zarówno analiza teoretyczna, jak i badania numeryczne wskazują na istnienie w układzie Duffinga tego typu atraktorów.
3. Orbity quasiperiodyczne - A jest torusem
Fakt, że (1.1b) ma stałą ujemną dywergencję, powoduje nieistnienie w przestrzeni fazowej niezmienniczych torusów [Guckenheimer, Holmes 1983], a więc i orbit quasiperiodycznych.
4. Atraktory chaotyczne (dziwne)

W wielu układach obserwuje się nieregularne ruchy aperiodyczne w ograniczonej przestrzeni, nie należące do żadnej z grup 1, 2, 3. Rozwiązania takie nazywa się potocznie chaotycznymi. W praktyce, w eksperymencie fizycznym lub numerycznym, po pominięciu początkowych (przejściowych) fragmentów trajektorii, można uważać, że trajektoria leży na atraktorze i odzwierciedla jego własności. W literaturze pojawiają się bardzo różne definicje; w szczególności [Grebogi et al. 1984] odnoszą słowo "chaotyczny" do dynamiki na atraktorze a słowo "dziwny" do struktury geometrycznej atraktora.

Nawiązując do tej koncepcji atraktor często nazywa się [Ott 1993]:

- chaotycznym, jeśli charakteryzuje się on wrażliwością na warunki początkowe. Miarą tej wrażliwości są wykładniki Lapunowa;

- dziwnym, jeśli jest fraktalem, co stwierdza się obliczając tzw. wymiar fraktalny atraktora, np. wymiar Hausdorffa lub pojemnościowy.

Te oraz inne charakterystyki atraktorów (wymiar informacyjny, entropia) są omówione np. w [Eckmann, Ruelle 1985].

W wielu przypadkach atraktory chaotyczne są jednocześnie dziwne i pojęć tych można używać zamiennie. Tak też postępujemy w tej pracy. Numeryczne obliczenia wykładników Lapunowa [Pezeshki, Dowell 1989] i wymiaru fraktalnego [Moon, Li 1985a] sugerują, że obserwowane w oscylatorze Duffinga ustalone ruchy nieregularne odpowiadają atraktorowi chaotycznemu. Problemy matematyczne związane z istnieniem i analizą tego atraktora, a także jego modele są omówione w [Holmes 1979], [Greenspan, Holmes 1983], [Guckenheimer, Holmes 1983], [Holmes, Whitley 1983]. Zagadnienia te nie są bezpośrednim tematem niniejszej pracy.

Poniżej zajmować się będziemy bifurkacjami orbit periodycznych, odpowiadających badanym w poprzednich rozdziałach rezonansom 1:1, 1:2, 1:3 MO i 1:1, 1:3 DO. Ograniczymy się do asymptotycznie stabilnych rozwiązań periodycznych - są one z definicji atraktorami. Bifurkacje atraktorów chaotycznych będą omówione w następnym rozdziale.

Wykresy bifurkacyjne atraktorów periodycznych przedstawimy w przestrzeni parametrów (ν, F) zakładając stałe $\alpha = \beta = 0.5$. Są to znormalizowane współczynniki, pojawiające się np. w [Moon, Holmes 1979], [Moon, Li 1985ab], [Pezeshki, Dowell 1987, 1988], [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab], [Gottwald et al. 1992]. Inne współczynniki można sprowadzić do tych poprzez przeskalowanie współrzędnych czasu i położenia w równaniu (1.1a) - patrz Dodatek A. Zakłada się również stałe tłumienie $h = 0.1$.

W rozdziale tym zbierzemy i porównamy wyniki otrzymane:

- a.) metodą perturbacyjną (Rozdz. 3) przy wykorzystaniu wariacyjnej analizy stabilności (Rozdz. 4),
- b.) metodą Mielnikowa (Rozdz. 5),
- c.) przy użyciu symulacji komputerowych.

W celu znalezienia atraktorów stosowano symulacje oparte na metodach całkowania typu Runge-Kutty. Używano głównie programu symulacyjnego LAHYSS [Niezgodzki 1986].

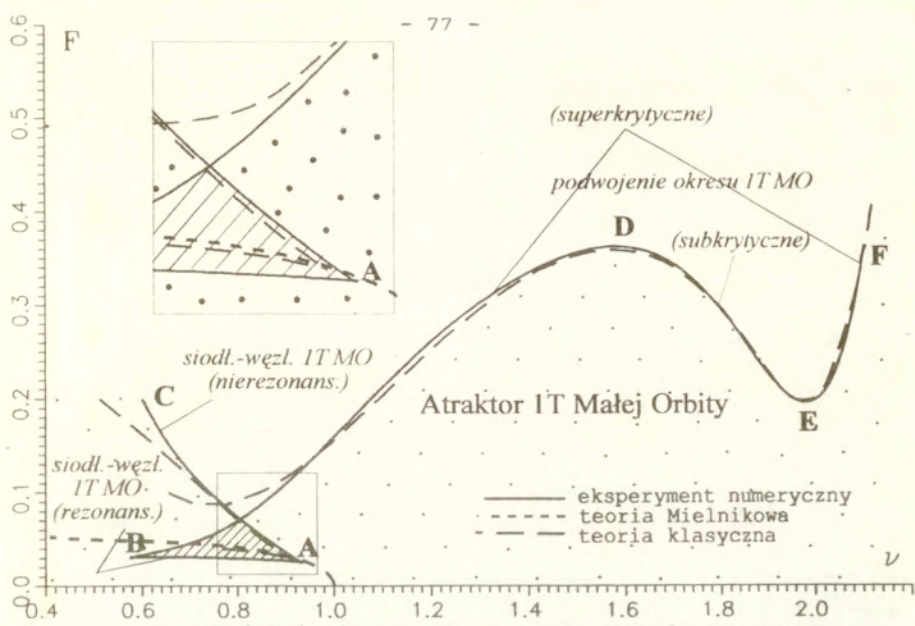
REZONANS 1:1 MAŁEJ ORBITY

Na Rys. 6.1 pokazano wyznaczony numerycznie obszar istnienia 1T periodycznych atraktorów odpowiadających rezonansowi 1:1 MO. W obszarze zakropkowanym występuje jeden atraktor, w obszarze zakreskowanym dwa atraktory, rezonansowy i nierezonansowy¹. Obszary te są ograniczone liniami ciągłymi, odpowiadającymi różnym bifurkacjom tych rozwiązań, znalezionym numerycznie. Linie przerywane odpowiadają bifurkacjom wyznaczonym teoretycznie.

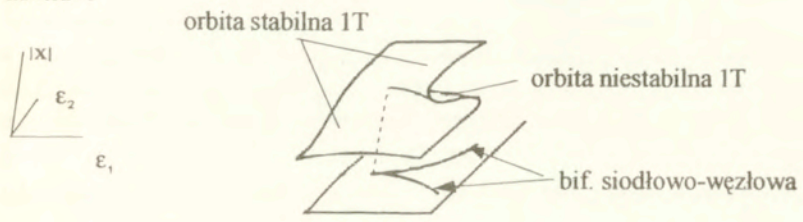
Linie AB i AC odpowiadają bifurkacjom siodłowo-węzłowym. Bifurkacja AB rozwiązania rezonansowego jest wykrywana przez obie metody perturbacyjne, choć w metodzie Mielnikowa występuje ona przy tłumieniu $h \neq 0$ dla dowolnie małych sił, co nie jest zgodne z obserwacjami numerycznymi. Bifurkacja AC rozwiązania nierezonansowego jest wykrywana tylko przez metodę blisko-liniową i nie pojawia się w teorii Mielnikowa. Oznacza to, że analiza Mielnikowa nie oddaje efektu histerezy między rozwiązaniem rezonansowym i nierezonansowym, charakterystycznego dla oscylatorów nieliniowych. Bifurkacja siodłowo-węzłowa rozwiązania nierezonansowego jest również istotna z innych powodów:

- w pewnym zakresie parametrów jest ona związana ze zjawiskami ucieczki i przejścia do chaosu (Rys.7.1),
- może ona być związana z pojawieniem się bifurkacji nieokreślonych (prace [Thompson, Soliman 1991], [Soliman 1993] dla układu opisanego potencjałem z Rys. 1.1b).

¹Liczby te dotyczą jednego "dołka". W drugim mamy symetryczne odpowiedniki tych orbit.



Rys. 6.1. Obszar istnienia atraktora 1T MO. Obszar kropkowany - jeden atraktor, kreskowany - dwa atraktory 1T MO w każdym "dołku".



Rys. 6.2. Bifurkacja szpica (cusp) - szkic.

- Diagram bifurkacyjny: uogólniona amplituda rozwiązania $|x|$ jako funkcja dwóch parametrów ϵ_1, ϵ_2 ;
- Rzut diagramu bifurkacyjnego na płaszczyznę parametrów.

Linie AB i AC wychodzą z punktu A odpowiadającego bifurkacji typu szpica²(cusp) [Marek, Schreiber 1991]. Bifurkacja ta jest kowymiaru dwa: w dwuwymiarowej przestrzeni parametrów (ν, F) jest widoczna jako punkt, w odróżnieniu od bifurkacji siodłowo-węzłowych, które są kowymiaru jeden i w tej przestrzeni są

²Taka polska nazwa pojawia się w [Okniński 1990].

widoczne jako pewne krzywe (por. Rys. 6.2).

Bifurkacja podwojenia okresu BDEF jest dosyć dobrze przybliżona linią teoretyczną otrzymaną z analizy blisko-liniowej. Bifurkacja ta w różnych obszarach parametrów ma różny przebieg:

- na linii BD jest superkrytyczna,
- na linii DE jest subkrytyczna,
- na linii EF jest superkrytyczna.

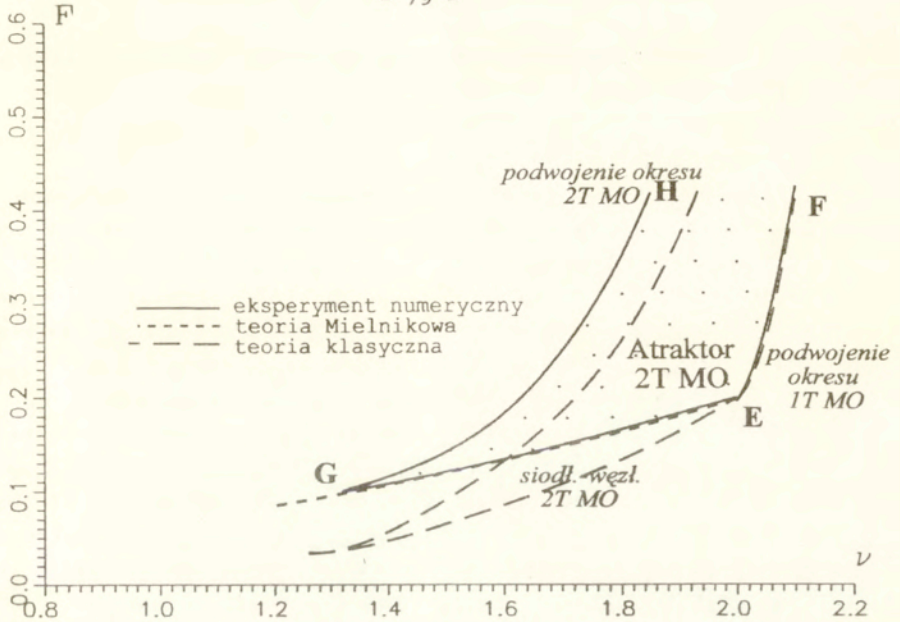
Jak zobaczymy w Rozdz. 7, również bifurkacja na linii DE jest bezpośrednio związana ze zjawiskami ucieczki i chaosu.

Zauważmy, że zgodnie z uwagami w Rozdz. 5. metoda Mielnikowa w ogóle nie wykrywa istnienia orbity 1T MO dla $\nu > 1$. Klasyczną metodą perturbacyjną otrzymaliśmy rozwiązania zarówno dla $\nu < 1$, jak i $\nu > 1$; ściśle jednak biorąc, ich poprawność daje się uzasadnić tylko blisko $\nu = 1$, z uwagi na zależność rozstrojenia (3.7). Argumenty natury topologicznej pozwalają nam jednak dowieść istnienia tej orbity dla dowolnego $\nu > 0$, jeśli tylko siła F jest dostatecznie mała:

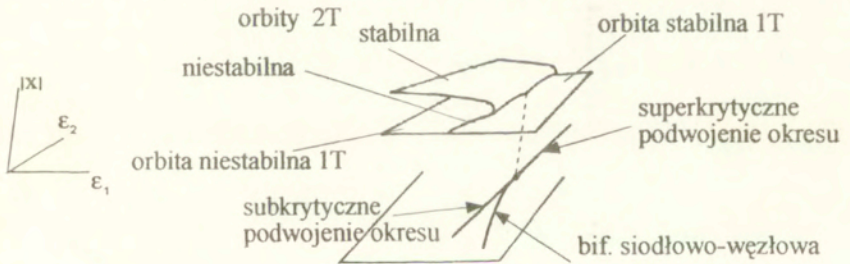
Rozpatrzmy układ (1.1a) dla $F = 0$. Wówczas punkty równowagi $(\pm\sqrt{\alpha/\beta}, 0)$ mają wartości własne $\sigma_{1,2} = (-h \pm (h^2 - 8\alpha)^{1/2})/2$. W przestrzeni $\mathbb{R}^2 \times S^1$ punkty te stanowią trywialne (stałe) stabilne orbity 1T-periodyczne. Multiplikatory Floqueta tych orbit wynoszą $\exp(\sigma_{1,2} T)$, orbity te są więc hiperboliczne i będą zachowane (patrz np. [Guckenheimer, Holmes 1983]) przy działaniu małej perturbacji $F \neq 0$.

REZONANS 1:2 MAŁEJ ORBITY

Na Rys. 6.3 przedstawiono obszar istnienia atraktora 2T periodycznego. Atraktor ten może być utworzony albo w bifurkacji siodłowo-węzłowej (linia GE), albo w bifurkacji podwojenia okresu orbity 1T (linia EF). Metoda Mielnikowa dobrze przybliża linię GE, ale jej zakres kończy się na $\nu = 2$. Występująca dalej na linii EF bifurkacja podwojenia okresu jest dobrze aproksymowana metodą blisko-liniową. Na linii GH atraktor 2T bifurkuje w 4T. Punkt E odpowiada tu bifurkacji kowymiaru dwa - przejściu z subkrytycznego podwojenia okresu w superkrytyczne [Marek, Schreiber 1991] (Rys. 6.4).



Rys. 6.3. Obszar istnienia atraktora 2T MO.



Rys. 6.4. Przejście między sub- i superkrytycznym podwojeniem okresu - szkic.

- Diagram bifurkacyjny: uogólniona amplituda rozwiązania $|x|$ jako funkcja dwóch parametrów ϵ_1, ϵ_2 ;
- Rzut diagramu bifurkacyjnego na płaszczyznę parametrów.

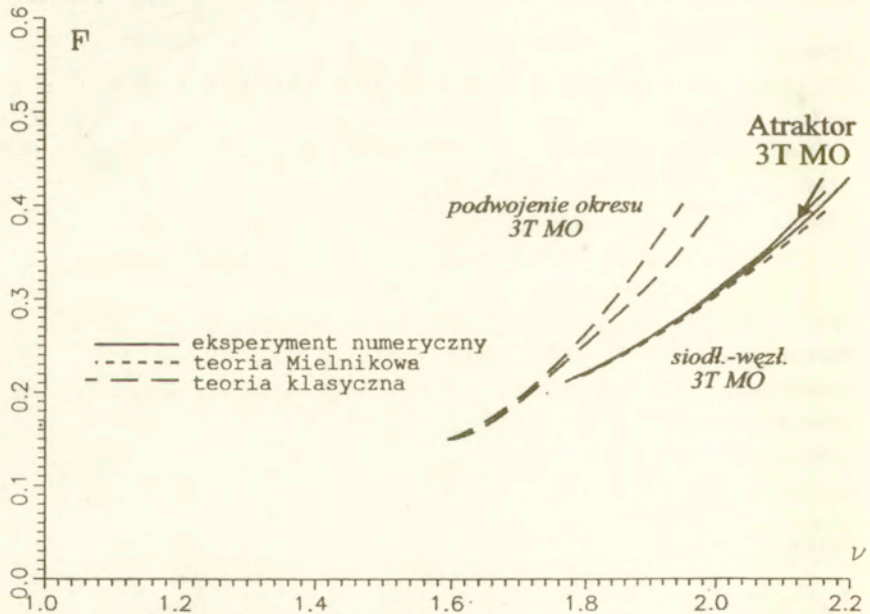
UWAGA 1

Teoretyczne przybliżenie linii EF na Rys. 6.3 odpowiada obliczeniom rezonansu 1:2 Małej Orbity (sytuacja z Rys. 4.3b), podczas gdy teoretyczny wynik dla tej linii na Rys. 6.1 analizie wariacyjnej stabilności rozwiązania 1T MO (sytuacja z Rys.

4.3a). W obu przypadkach obserwujemy dobrą zgodność obliczeń teoretycznych z numerycznymi.

UWAGA 2

Przedstawione na Rysunku 6.3 wyniki mogą być porównane z pracą [Holmes, Holmes 1981]. Pewna różnica polega na tym, że otrzymane tam przybliżenie linii GE maleje ze wzrostem częstotliwości, podczas gdy uzyskane tutaj rośnie. Przepuszczalnym powodem tej różnicy jest przyjęcie w [Holmes, Holmes 1981], że amplituda harmonicznej o częstotliwości $\nu/2$ jest rzędu μ w porównaniu z harmoniczną o częstotliwości wymuszenia ν . W rzeczywistości w większej części zakropkowanego obszaru harmoniczna o częstotliwości wymuszenia jest tego samego rzędu wielkości, co harmoniczna o częstotliwości $\nu/2$ (patrz Rys. 7.3b). Założenie [Holmes, Holmes 1981] stosuje się więc raczej tylko do obszaru blisko linii EF. W niniejszej pracy zakłada się, że harmoniczne te są tego samego rzędu w małym parametrze (wzór 3.21a).



Rys. 6.5. Obszar istnienia atraktora 3T MO.

REZONANS 1:3 MAŁEJ ORBITY

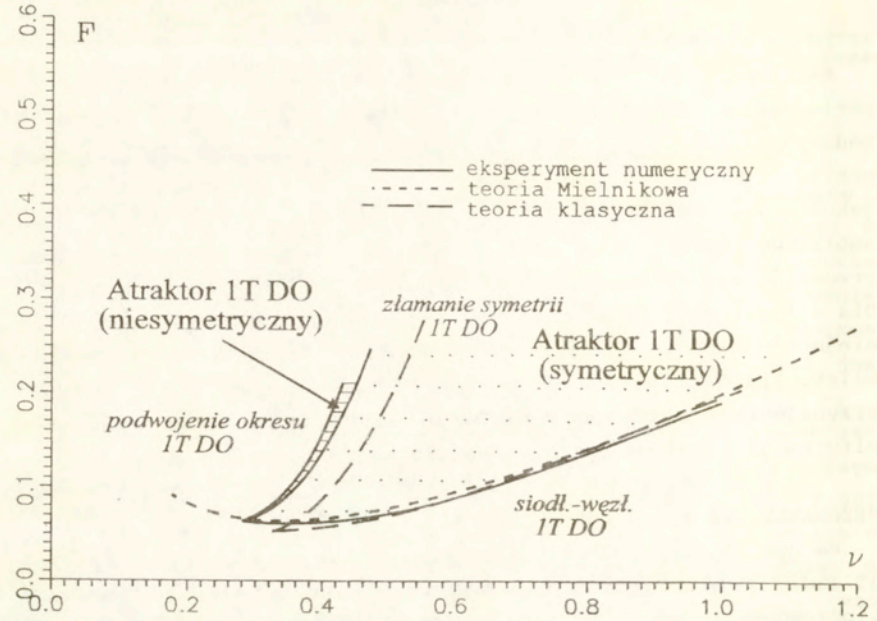
Na Rys. 6.5 pokazano obszar istnienia atraktora 3T periodycznego Małej Orbits. Teoria Mielnikowa dobrze przybliża w badanym zakresie parametrów bifurkację siodłowo-węzłową tej orbity, metoda blisko-liniowa daje co najwyżej zgodność jakościową. Należy podkreślić, że orbita ta ma dosyć dużą amplitudę (patrz Rys. 7.2 punkt 2) i model blisko-liniowy przestaje być wystarczający do zapewnienia ilościowej zgodności. Dla sił znacznie poza badanym w tej pracy zakresem parametrów ma miejsce jakościowa niezgodność metody Mielnikowa z metodą blisko-liniową, przy czym metoda blisko-liniowa lepiej oddaje, przynajmniej jakościowo [MacRobie 1993], rzeczywisty przebieg bifurkacji siodłowo-węzłowej utworzonej w tym rezonansie.

REZONANSE 1:1 i 1:3 DUŻEJ ORBITY

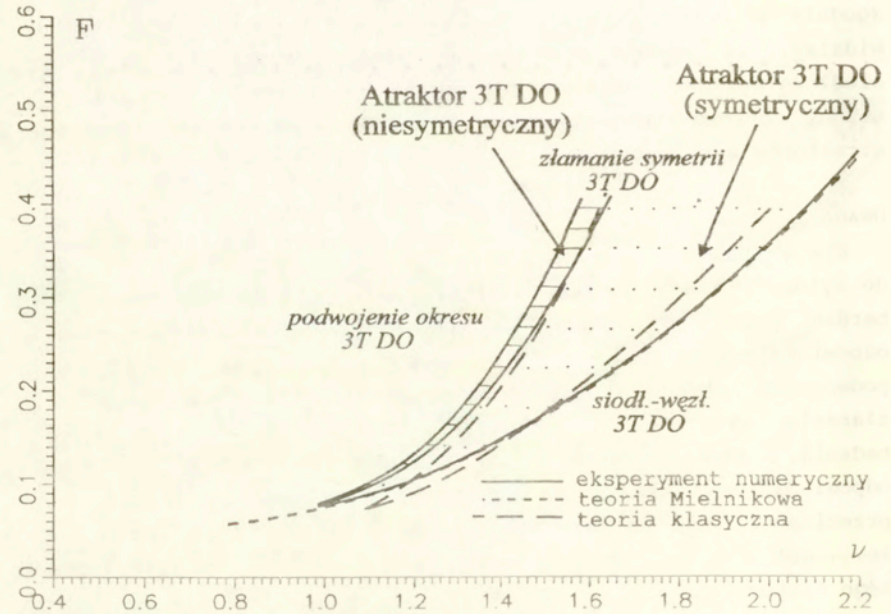
Na Rys. 6.6. i 6.7 przedstawiono, odpowiednio, atraktory 1T i 3T Dużej Orbits. Atraktor symetryczny tworzy się w bifurkacji siodłowo-węzłowej i przechodzi w niesymetryczny w bifurkacji złamania symetrii. Atraktor niesymetryczny podlega dalej, zgodnie z uwagami Rozdz. 4.4, bifurkacji podwojenia okresu. Widzimy, że metoda Mielnikowa dobrze przybliża bifurkację siodłowo-węzłową, oraz że proponowana w Rozdz. 3. modyfikacja metody blisko-liniowej daje zadowalający obraz bifurkacji atraktorów symetrycznych.

UWAGA

Dla wszystkich opisanych w tym rozdziale rezonansów dochodzi do sytuacji kiedy obszar istnienia pewnego atraktora staje się bardzo wąski na skutek zbliżania się do siebie linii odpowiadających różnym bifurkacjom tego atraktora, np. podwojenia okresu i siodłowo-węzłowej, siodłowo-węzłowej i złamania symetrii. Z przyczyn numerycznych urywamy wtedy badania, gdyż atraktor jest trudny do wykrycia. Linie odpowiadające takim parom bifurkacji nie mogą się łączyć, ani przecinać z uwagi na zależność (4.34) - należy jednak zaznaczyć, że obliczenia przybliżone mogą nie odzwierciedlać tego faktu.



Rys. 6.6. Obszar istnienia atraktora 1T DO.



Rys. 6.7. Obszar istnienia atraktora 3T DO.

PODSUMOWANIE

W rozdziale tym zwróciliśmy uwagę na różnice między wynikami dwóch różnych teorii perturbacyjnych: Mielnikowa i klasycznej metody perturbacyjnej. Pierwsza z tych metod ma duże znaczenie teoretyczne - jak podkreślaliśmy w poprzednim rozdziale, wiąże ona bifurkacje lokalne z globalnymi; w większości przypadków daje również (dla rozważanego zakresu parametrów) lepsze oszacowania ilościowe. Metoda blisko-liniowa wykrywa jednak pewne efekty jakościowe: rozwiązania i bifurkacje, obserwowane numerycznie, a nie występujące w metodzie Mielnikowa. Co więcej, szczegółowe badania numeryczne pokazują, że niektóre z tych bifurkacji mają bezpośredni związek ze zjawiskami globalnymi: ucieczką, przejściem do chaosu lub bifurkacjami nieokreślonymi.

Niektóre wyniki, dotyczące obrazu bifurkacji subharmonicznych w metodach blisko-liniowej i Mielnikowa [Janicki 1993], [Janicki, Szemplińska-Stupnicka 1994ab], zostały uogólnione na przypadek dowolnego "oscylatora z dołkiem potencjału" przez [Yagasaki 1994]. Autor ten stosuje metodę uśrednienia drugiego rzędu.

7. WYKRES BIFURKACYJNY W PRZESTRZENI PARAMETRÓW (ν, F)

CHARAKTERYSTYKA ATRAKTORÓW PERIODYCZNYCH I CHAOTYCZNYCH

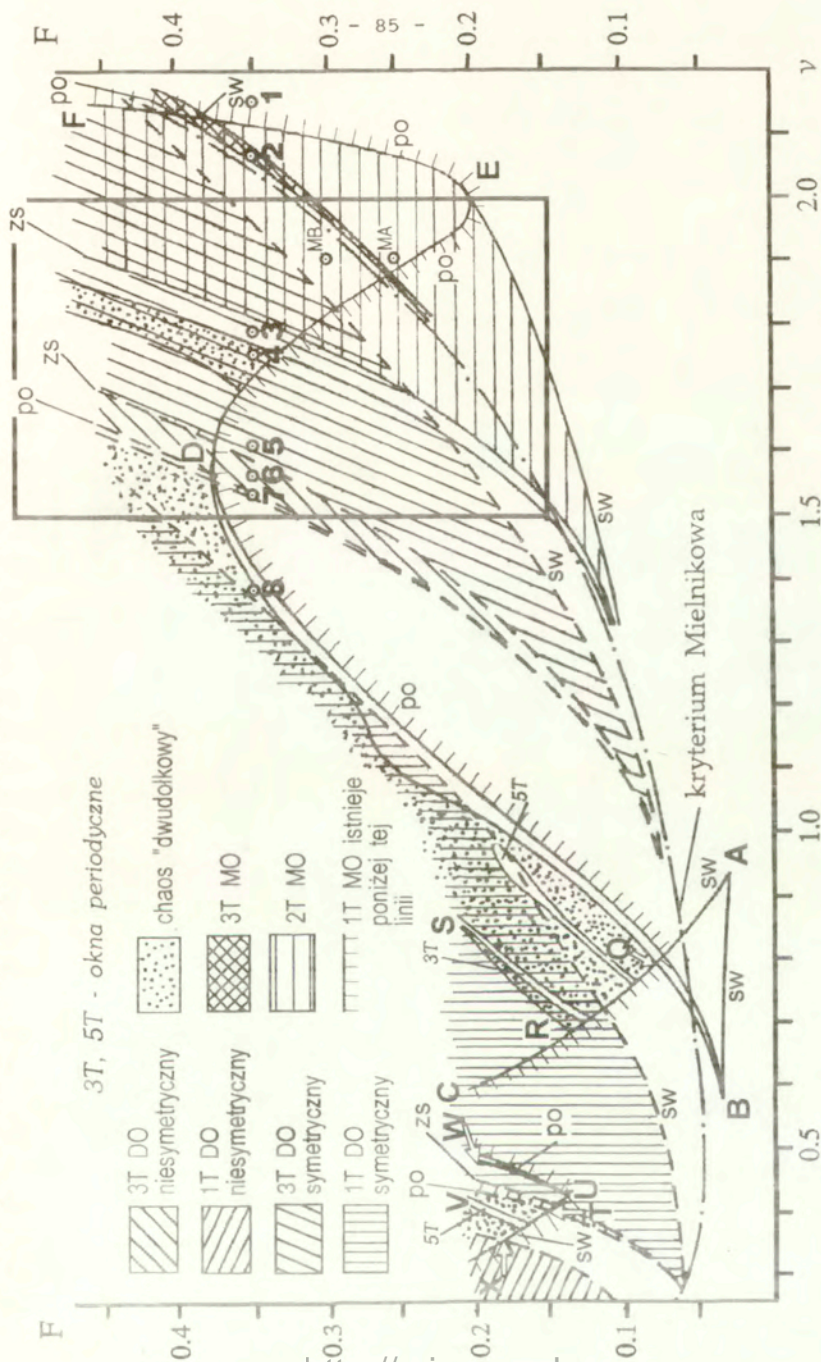
W rozdziale tym zaprezentujemy wyniki numeryczne dotyczące obszarów istnienia w przestrzeni parametrów atraktorów periodycznych i chaotycznych. Część tych wyników, dotycząca bifurkacji atraktorów periodycznych, została już przedstawiona w Rozdz. 6., tu jednak zbierzemy je na jednym Rysunku 7.1. i omówimy charakter przejść między różnymi atraktorami, włączając również atraktory chaotyczne. Podkreślić należy, że staramy się omówić tylko te atraktory, które są najbardziej interesujące z punktu widzenia eksperymentu, tzn. występują w stosunkowo szerokich obszarach zarówno przestrzeni fazowej, jak i przestrzeni parametrów. Na ogół nie będziemy więc stosować sukcesywnego powiększania fragmentów tych przestrzeni w celu ujawnienia różnych subtelnych efektów. Z reguły badanie takich efektów jest związane z dużym nakładem obliczeń komputerowych. Do prac takich w miarę potrzeby się odwołujemy.

Na Rys. 7.1 ponownie przestrzenną przestrzeń parametrów jest (ν, F), przy stałych $\alpha=\beta=0.5$ i $h=0.1$. Rozpoczniemy od prezentacji różnych atraktorów, odpowiadających punktom 1-8. Dla siły $F=0.35$ możemy obserwować najważniejsze typy atraktorów w subharmonicznym obszarze częstotliwości wymuszenia. Dla obszaru rezonansu głównego i superharmonicznego podobną prezentację można znaleźć w [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992ab]. Na Rys. 7.2 ilustrujemy te atraktory, używając rzutów orbit na płaszczyznę (x, \dot{x}) dla orbit periodycznych i przekrojów Poincaré dla orbit chaotycznych.

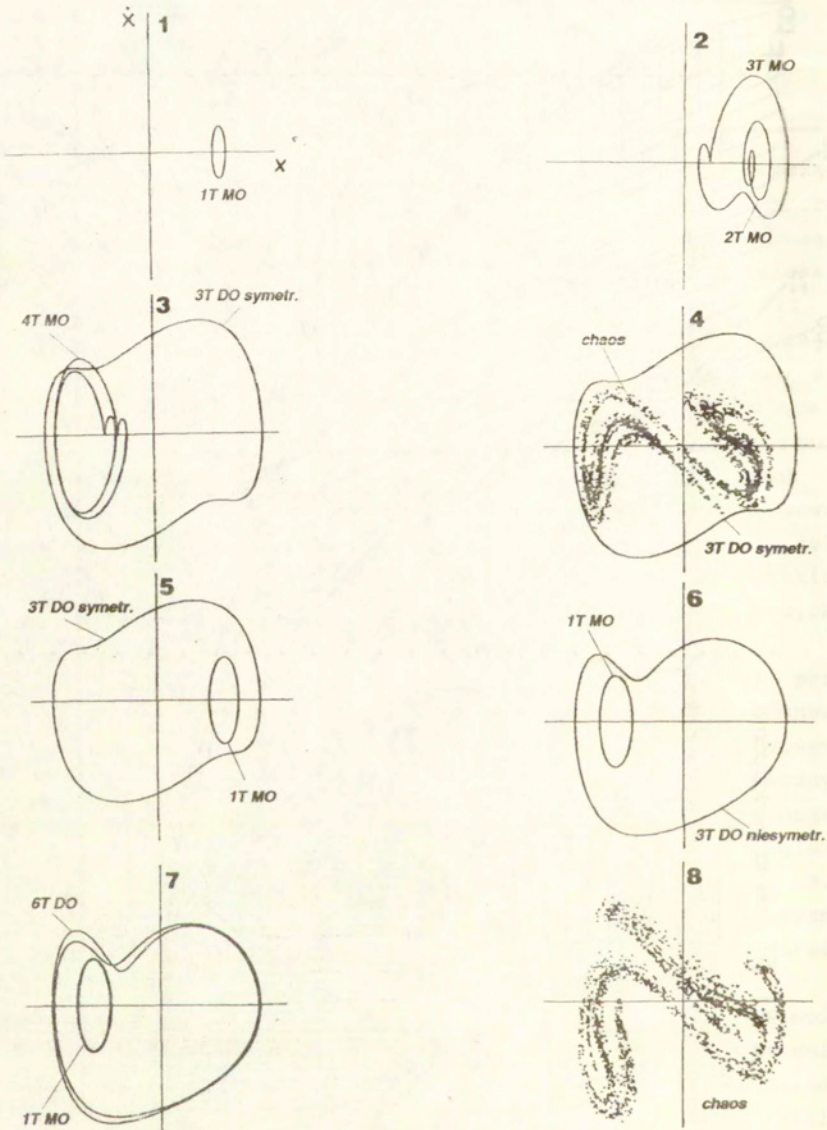
Na uwagę zasługuje fakt, że kilka różnych atraktorów może istnieć jednocześnie w przestrzeni fazowej. To współistnienie atraktorów jest istotną własnością odróżniającą układy nieliniowe od liniowych¹. Symetria układu powoduje, że wszystkie

¹Interesujący rezultat Newhouse'a (np. [Palis, Takens 1993]) gwarantuje, dla pewnych parametrów bliskich bifurkacji homoklinicznej, współistnienie nawet nieskończenie wielu atraktorów periodycznych o dowolnie długich okresach.

Bifurkacje: sw - siódmosto-węzłowa, po - podwojenia okresu, zs - złamania symetrii



Rys. 7.1. Obszary występowania i bifurkacje różnych atraktorów.



Rys. 7.2. Atraktory odpowiadające punktom 1-8 na Rys. 7.1.

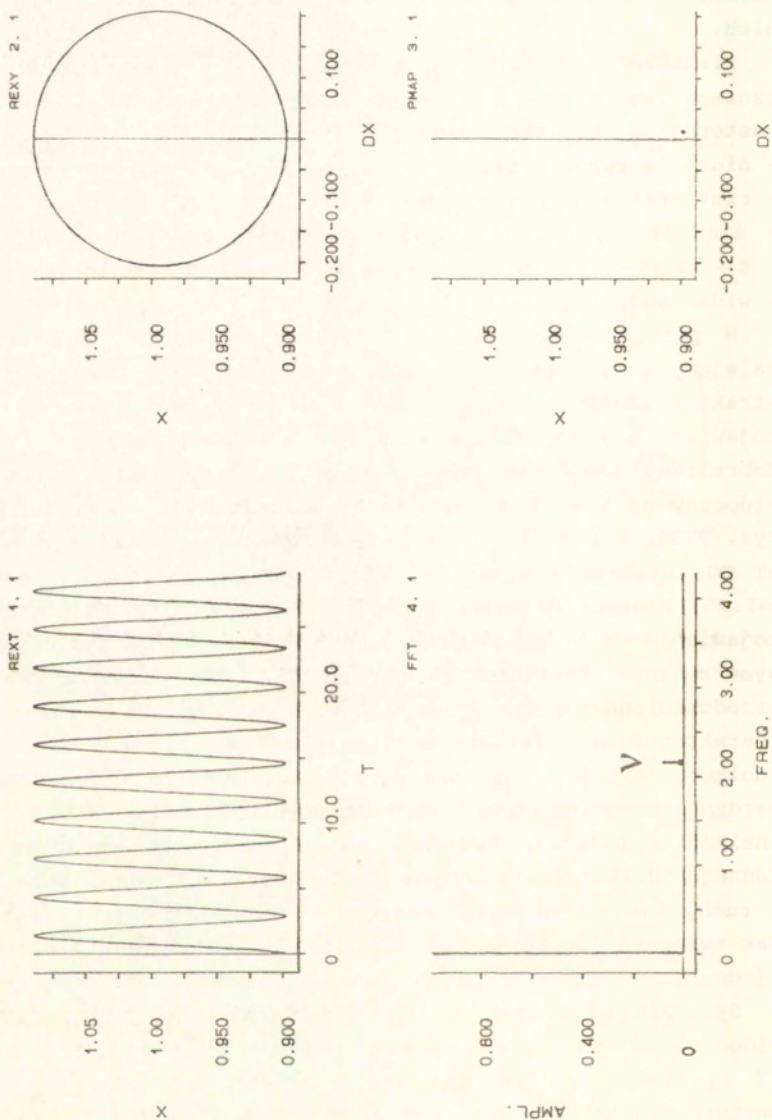
przedstawione periodyczne orbity niesymetryczne występują parami; dla większej czytelności rysujemy tylko po jednej z nich.

Niektóre z atraktorów z Rys. 7.2. są pokazane bardziej szczegółowo na Rys. 7.3, gdzie dla każdej orbity przedstawiono następujące charakterystyki:

- historię ruchu $x(t)$,
- rzut orbity na płaszczyznę (\dot{x}, x) ,
- ślad orbity na płaszczyźnie Poincaré, brany dla chwil czasu $t_n = nT$ (T -okres wymuszenia, n -kolejne liczby całkowite),
- widmo mocy sygnału $x(t)$.

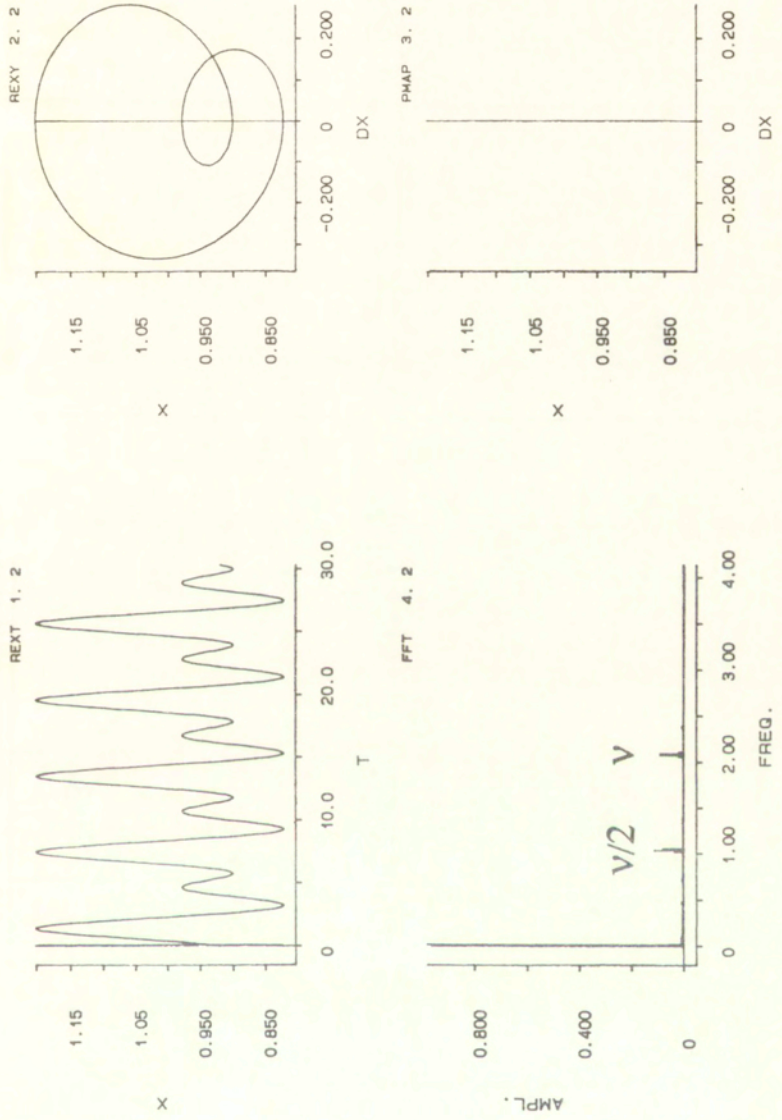
W punkcie 1 obserwujemy atraktor 1T MO (Rys. 7.3a). Dla malejących częstości przechodzi on podwojenie okresu, tworząc atraktor 2T MO - punkt 2, Rys 7.3b. Charakterystyczne jest tu pojawienie się w widmie mocy nowej harmonicznej $\nu/2$. Punkt 2 dobraliśmy tak, aby pokazać współistniejący atraktor 3T MO, widoczny na Rys. 7.3c. Orbita 2T MO bifurkuje do 4T - punkt 3, Rys. 7.3d. W punkcie 3 obserwujemy również symetryczny atraktor 3T DO, utworzony wcześniej w bifurkacji siodłowo-węzłowej dla $\nu \approx 1.95$. Kaskada dalszych podwojeń okresu orbity 4T prowadzi do pojawienia się atraktora chaotycznego, współistniejącego z symetrycznym atraktorem 3T DO - punkt 4. Ten atraktor chaotyczny przedstawiono na Rys 7.3e. Jak widać z Rys. 7.3e chaos ma tu charakter nieregularnych oscylacji raz w jednym, raz w drugim "dołku". W tej pracy wykrywamy tylko taki ruch chaotyczny. W bardzo szczegółowych badaniach numerycznych można jednak również znaleźć w układzie Duffinga ruchy chaotyczne ograniczone do jednego "dołka" (patrz [Ueda et al. 1990], [Stewart, Ueda 1991]) - ruchy takie występują jednak w wąskich zakresach parametrów. Jak twierdzą [Sommerer, Grebogi 1992], przejście między chaosem "jednodółkowym", a "dwudółkowym" jest pewnym rodzajem kryzysu.

Symetria atraktora 3T DO, odpowiadającego punktowi 5 jest widoczna na Rys 7.3f. Atraktor ten współistnieje z rozwiązaniem 1T periodycznym Małej Orbity. Jak wynika z analizy perturbacyjnej rezonansu 1:2 MO, jest to "ten sam" atraktor, co w punkcie 1 - przy malejącej częstotliwości atraktor z punktu 1 najpierw stracił stabilność w superkrytycznej bifurkacji podwojenia okresu, a później ją odzyskał w bifurkacji

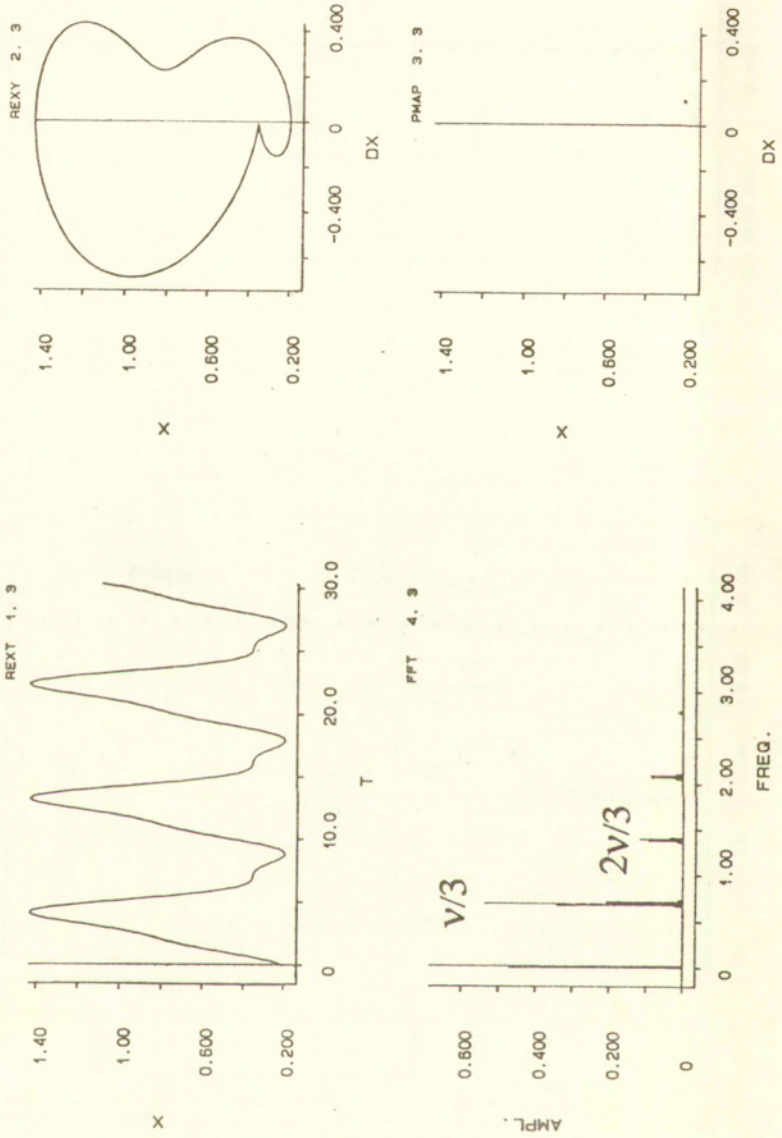


Rys. 7.3. Charakterystyki wybranych atraktorów.

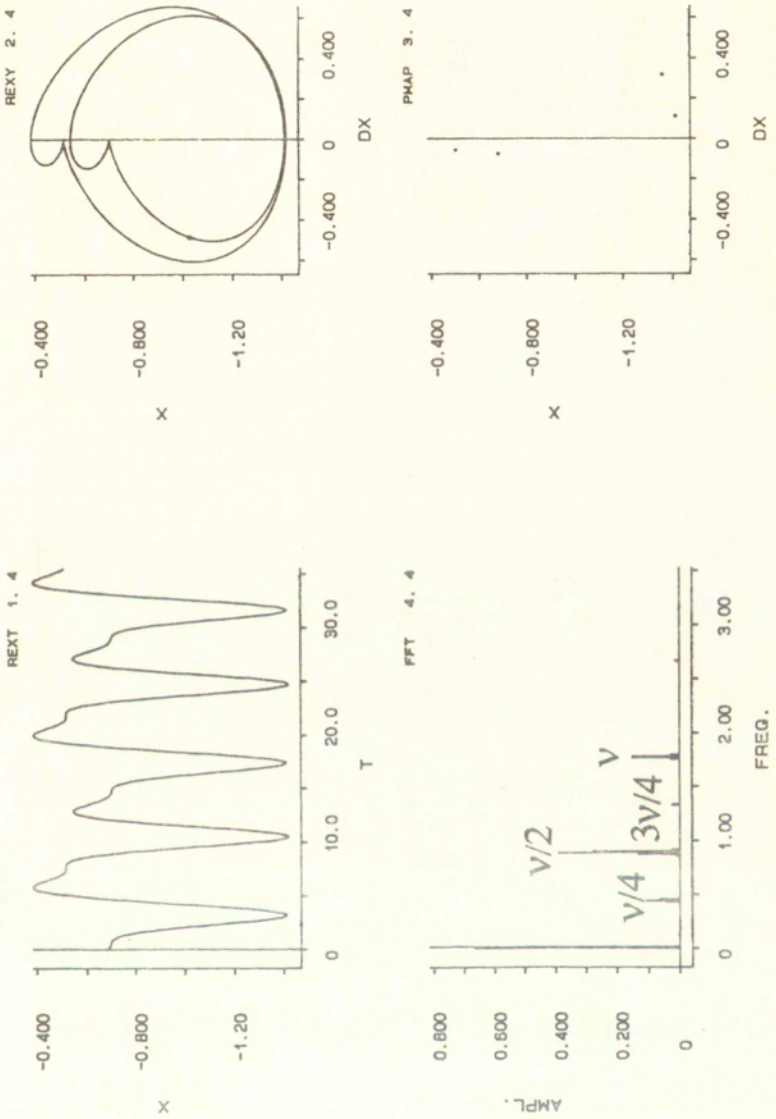
Rys. 7.3a. Punkt 1, 1T MO, $\nu=2.15$.



Rys. 7.3b. Punkt 2, 2T MO, $\nu=2.075$.



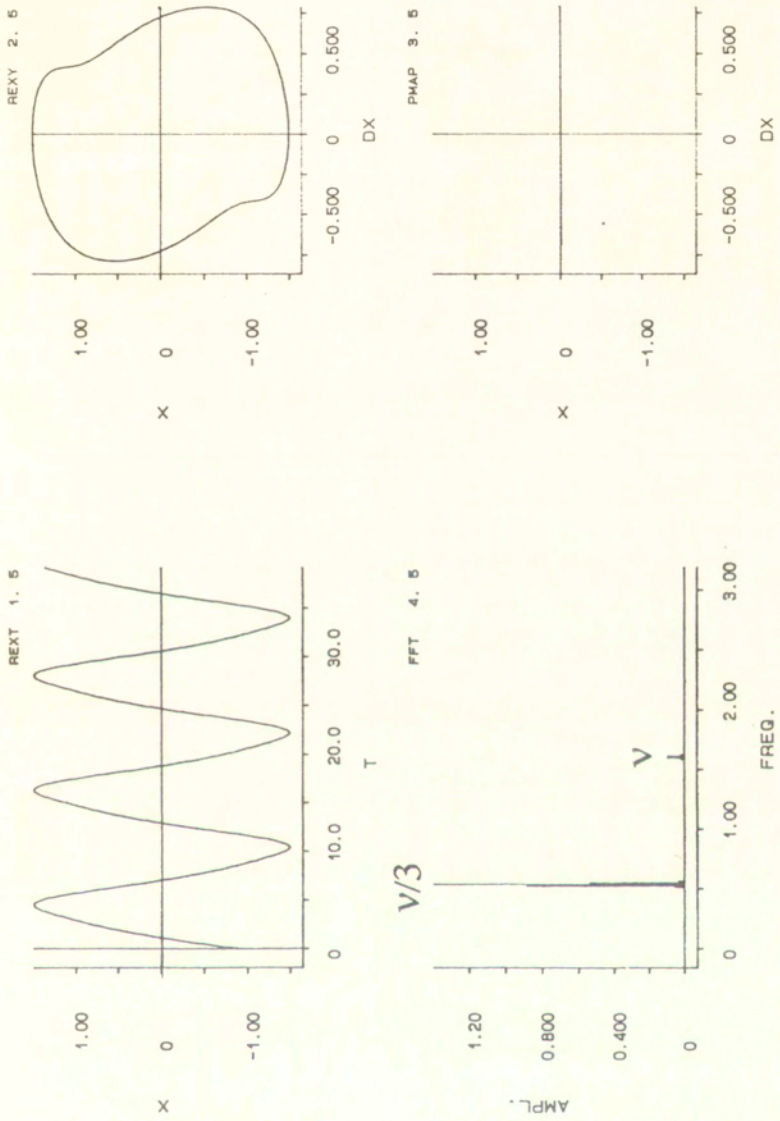
Rys. 7.3c. Punkt 2, 3T MO, $\nu=2.075$.



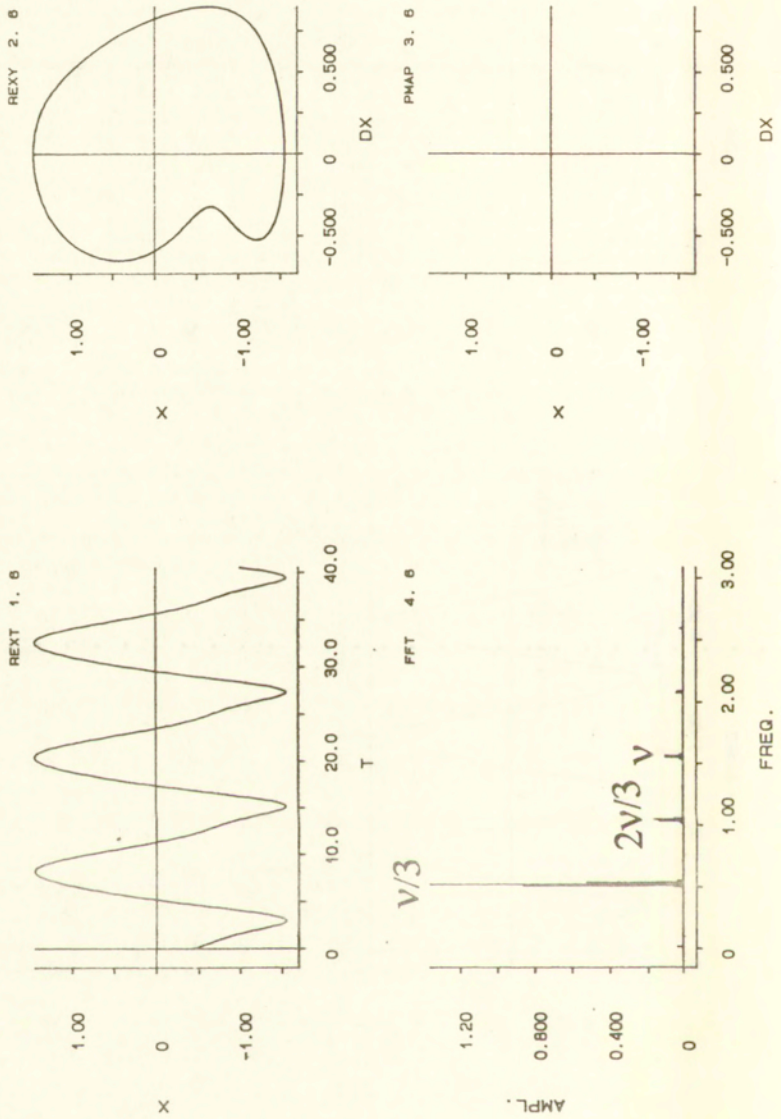
Rys. 7.3d. Punkt 3, 4T MO, $v=1.775$.



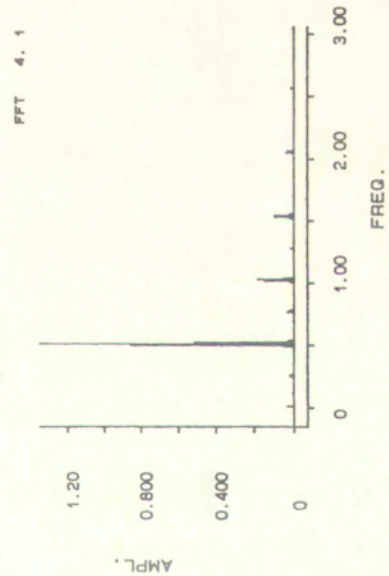
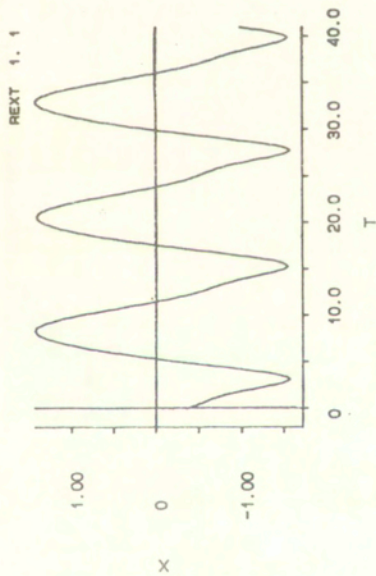
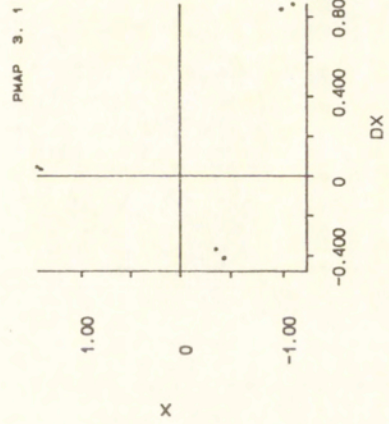
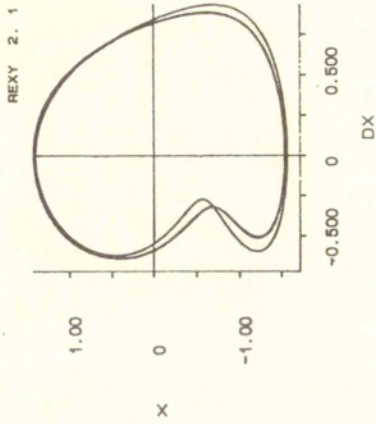
Rys. 7.3e. Punkt 4, chaos "dwudolkowy", $\nu=1.75$.



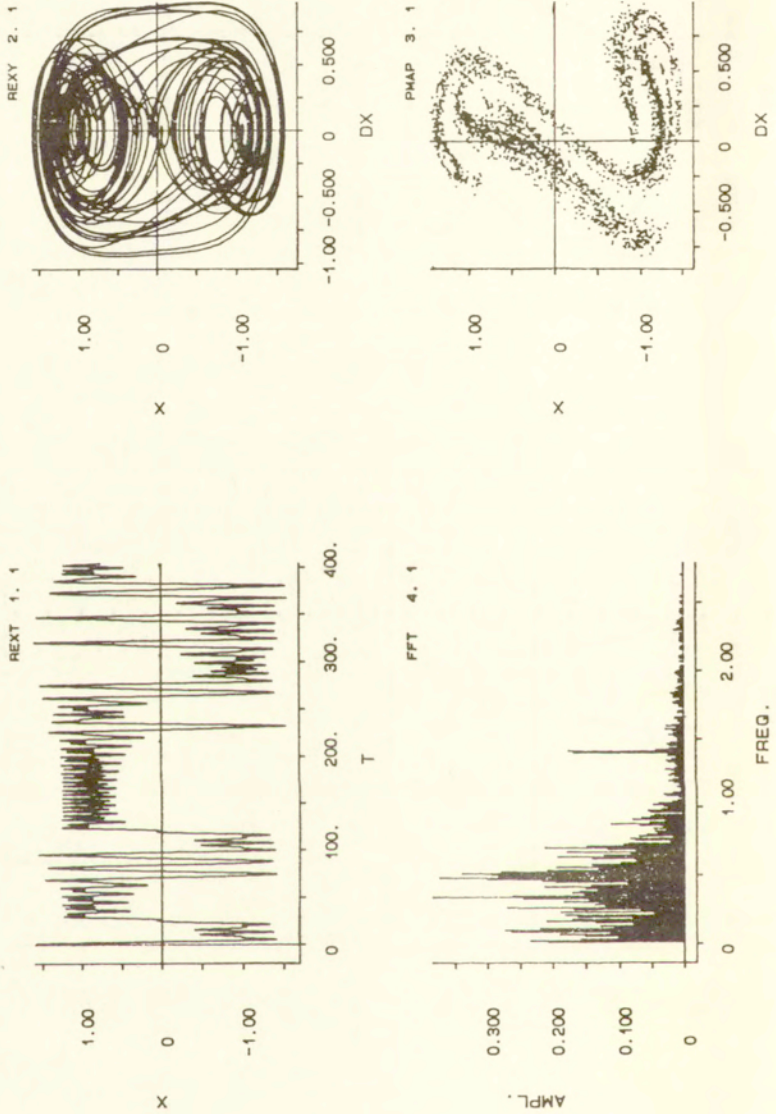
Rys. 7.3f. Punkt 5, symetryczny atraktor 3T DO, $\nu=1.6$.



Rys. 7.3g. Punkt 6, Niesymetryczny atraktor 3T DO, $\nu=1.55$.



Rys. 7.3h. Punkt 7, 6T DO, $\nu=1.533$.



Rys. 7.3i. Punkt 8, chaos "dwudołkowy", $\nu=1.4$.

subkrytycznej. Symetryczny atraktor 3T DO bifurkuje w niesymetryczny, odpowiadający punktowi 6 (Rys. 7.3g), również współistniejący z atraktorem 1T MO. Obserwujemy pojawienie się w widmie mocy nowych harmonicznych, odpowiadających złamaniu symetrii. Niesymetryczny atraktor 3T DO przechodzi podwojenie okresu, prowadząc do utworzenia atraktora 6T periodycznego DO (punkt 7), pokazanego na Rys. 7.3h. W badaniach numerycznych obserwowane są dalsze podwojenia okresu atraktora 6T DO i przeskok do rozwiązania 1T Małej Orbits. Dokładny charakter tego przeskoku nie jest Autorowi znany. Można np. przypuszczać (przez analogię do [Stewart, Ueda 1991]), że powodem przeskoku jest utworzenie w kaskadzie podwojeń okresu atraktorów Dużej Orbits pewnego atraktora chaotycznego, istniejącego w bardzo wąskim zakresie częstości, a następnie jego kryzys. Punkt 8 odpowiada atraktorowi chaotycznemu "wyrastającemu" w przestrzeni parametrów z obszaru rezonansu podstawowego (Rys. 7.3i). Utworzenie tego atraktora przy malejącej częstotliwości jest zapoczątkowane kaskadą podwojeń okresu rozwiązania 1T MO.

Na Rys. 7.1 naniesiono również krzywą odpowiadającą kryterium Mielnikowa (5.6b). Punkty MA, MB odpowiadają parametrom Rys. 5.4a i 5.4b. W punkcie MB obserwujemy transwersalne punkty homokliniczne, co jak podkreśliliśmy w Rozdz. 5.1 zgadza się z przewidywaniami teorii Mielnikowa. Mamy tu więc "chaos" w sensie podkowy Smale'a. Należy jednak zaznaczyć, że w punkcie MB eksperymentator w symulacjach nie obserwuje "chaosu" w sensie atraktora chaotycznego; wręcz przeciwnie, odpowiedź układu dąży tu do rozwiązań regularnych typu 2T MO. Skomplikowany zbiór niezmienniczy Λ , wynikający z konstrukcji Smale'a, nie przyciąga tu rozwiązań - nie jest częścią atraktora chaotycznego. Atraktorami są jedynie rozwiązania periodyczne. Występują natomiast inne obserwowalne konsekwencje bifurkacji homoklinicznej:

- tzw. chaos przejściowy: długotrwałe przejściowe fragmenty "chaotyczne" dla trajektorii startujących blisko Λ [Pezeshki, Dowell 1987, 1988];

- fraktalne granice basenów przyciągania atraktorów regularnych [Moon, Li 1985b].

Obserwowalny "chaos" pojawia się znacznie powyżej bifurkacji

homoklinicznej (obszary zakropkowane na Rys. 7.1). Jego tworzenie jest związane z tzw. scenariuszami przejścia do chaosu, omówionymi szerzej w dalszej części rozdziału.

Zwrócimy również uwagę na pewną różnicę między bifurkacją podwojenia okresu na linii BD i na linii EF (Rys. 7.1). W badaniach numerycznych obserwujemy, że atraktor 2T MO utworzony na linii BD bardzo szybko bifurkuje do 4T itd. w kaskadzie podwojeń okresu. Przejście do chaosu następuje tutaj przy stosunkowo niewielkiej zmianie parametrów. Atraktor 2T utworzony na linii EF utrzymuje się natomiast w dosyć szerokim zakresie częstotliwości. Fakt, że atraktor 2T-periodyczny utrzymuje się w szerszym zakresie parametrów w subharmonicznym zakresie częstości, należy uznać za typowy efekt rezonansu subharmonicznego, opisywany w literaturze dotyczącej metod przybliżonych, np. [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1993].

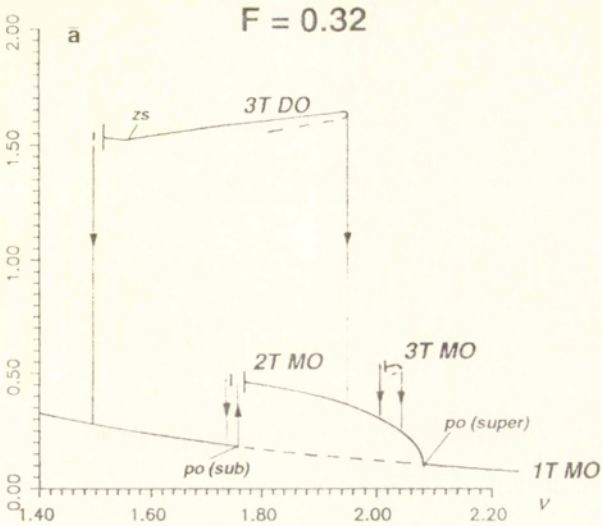
ZJAWISKA UCIECZKI

Patrząc na Rys. 1.4 możemy sobie wyobrazić, że mamy do czynienia z drganiami ustalonymi w jednym "dołku". Na skutek quasistatycznej zmiany jakiegoś parametru może nastąpić skokowe przejście do drgań ustalonych obejmujących dwa "dołki". Zjawisko to będziemy nazywać ucieczką². Ponieważ "dwudołkowy" ruch ustalony może być zarówno regularny, jak i chaotyczny, zjawisko to wiąże się z problematyką przejścia do chaosu, będąc jednym z istotnych powodów zainteresowania dynamiką oscylatorów z "dołkami" potencjału. Poniżej opiszemy bliżej te zjawiska korzystając z danych numerycznych, oraz zajmiemy się przybliżonymi "kryteriami ucieczki". Skoncentrujemy się na subharmonicznym obszarze parametrów ($1.5 < \nu < 2$, $0.15 < F < 0.5$).

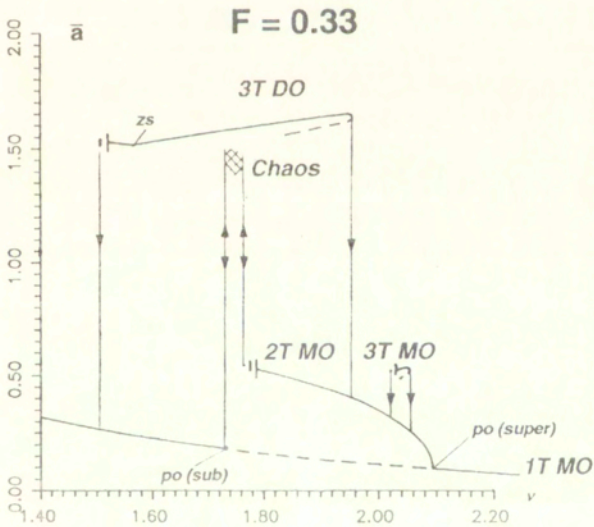
Zjawiska przejść między różnymi typami atraktorów omówimy najpierw używając eksperymentalnych charakterystyk amplitudowych. Na Rys. 7.4 na osi rzędnych odłożono

²1. Słowa tego używa się również w nieco innych znaczeniach np. [Stewart, Ueda 1991], [Ueda et al. 1990].

2. W układzie (1.1) wszystkie rozwiązania są ograniczone [Holmes 1979]. W odróżnieniu od problemu odpowiadającego potencjałowi z Rys. 1.1b nie ma tu więc ucieczki do nieskończoności.

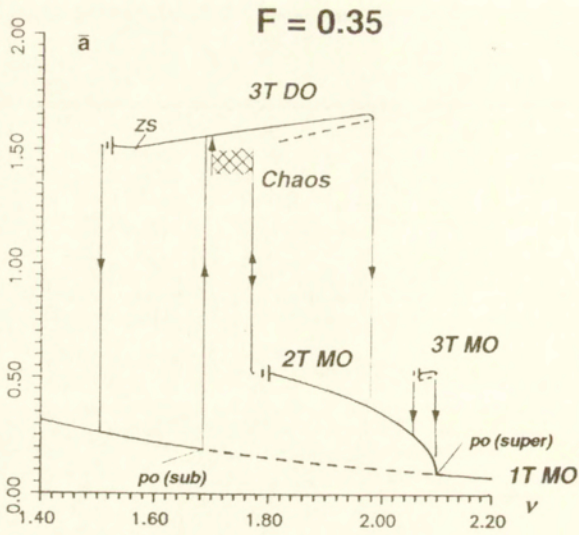


Rys. 7.4a.

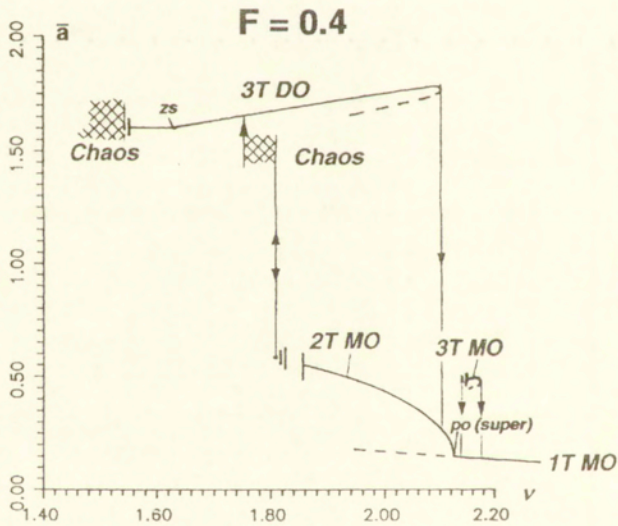


Rys. 7.4b.

Rys. 7.4. Eksperymentalne krzywe rezonansowe.



Rys. 7.4c.



Rys. 7.4d.

częstotliwość, na osi odciętych uogólnioną amplitudę ruchu, rozumianą jako

$$\bar{a} = |x_{\max} - x_{\min}|/2.$$

Maksimum i minimum są brane w skończonym czasie symulacji. Dla orbit niesymetrycznych rysujemy tylko amplitudę jednej z nich.

Na Rys. 7.4a widzimy zjawiska znane już z analizy perturbacyjnej: bifurkacje siodłowo-węzłowe 3T DO i 3T MO, superkrytyczne i subkrytyczne podwojenie okresu 1T MO oraz z analizy wariacyjnej: złamanie symetrii 3T DO i pierwsze podwojenie okresu 3T MO i 2T MO. Istotne dla obserwowanych zjawisk są jednak również "skoki w dół" rozwiązań 2T MO i 3T MO oraz 3T DO, poprzedzone kaskadami podwojeń okresu, których nie potrafimy wykryć analitycznie. Jeden z tych skoków jest odpowiedzialny za histerezę między atraktorem 1T MO i atraktorem 4T MO, utworzonym z 2T MO. Podobny skok, występujący w obszarze rezonansu podstawowego (linia BQ na Rys. 7.1) został zidentyfikowany w [Stewart, Ueda 1991] jako kryzys istniejącego w bardzo wąskim obszarze parametrów "jednodółkowego" atraktora chaotycznego.

Na Rys. 7.4b kaskada podwojeń okresu 2T MO kończy się skokiem w górę, do chaosu "dwudółkowego", a nie w dół, jak poprzednio. Należy sądzić, że w istocie jest to złożony proces, obejmujący najpierw utworzenie dwóch atraktorów chaotycznych Małej Orbitsy (po jednym dla każdego "dółka"), a później ich połączenie [Sommerer, Grebogi 1992]. Chaos "dwudółkowy" jest obserwowany w pewnym zakresie ν i dla częstotliwości odpowiadającej subkrytycznej bifurkacji 1T MO chaos przechodzi skokowo (w sensie amplitudy \bar{a}) w regularny ruch 1T MO. Ten ostatni proces jest odwracalny, tj. zwiększając częstotliwość powodujemy przeskok z powrotem do chaosu bez histerezy. Gałęzi atraktora 3T DO nie można osiągnąć startując z atraktorów o mniejszej amplitudzie.

Na Rys. 7.4c atraktor 3T DO może zostać osiągnięty na skutek przeskoku z innego typu atraktorów:

▷ regularnego 1T MO - przeskok jest związany z subkrytycznym podwojeniem okresu,

▷ chaotycznego - podobny przeskok występujący w obszarze rezonansu podstawowego został rozpoznany jako kryzys atraktora chaotycznego [Ueda et al. 1990].

Przeskoki te nie są odwracalne i powrót na te atraktory z orbity 3T DO wymaga histerezy:

▷ aby osiągnąć z powrotem orbitę 1T MO trzeba zmniejszać częstotliwość, przejść przez złamanie symetrii i kaskadę podwojeń okresu, zeskokczyć w dół na 1T MO (przypuszczalnie jest to pewien kryzys) i zwiększać częstotliwość, aż do zamknięcia pętli histerezy;

▷ aby wrócić do chaosu należy zwiększać częstotliwość, zeskokczyć w dół w bifurkacji siodłowo-węzłowej i ponownie zmniejszać częstotliwość, przechodząc przez kaskadę podwojeń okresu do chaosu.

Rys. 7.4d jest podobny do poprzedniego dla większych częstotliwości, dla niższych atraktor 1T MO nie istnieje, natomiast kaskada podwojeń okresu atraktora 3T DO prowadzi do chaosu. W płaszczyźnie (ν, F) chaos ten wychodzi z obszaru parametrów odpowiadającego rezonansom podstawowym (Rys. 7.1)

Na wszystkich Rys. 7.4a-d widzimy istniejący w wąskim zakresie atraktor 3T MO. Przesuwanie się po jego krzywej rezonansowej kończy się skokiem w dół.

Poniżej przedstawimy w przestrzeni (ν, F) bifurkacje prowadzące do chaosu i ucieczki. Omówimy również skuteczność "kryteriów ucieczki" opartych na analizie bifurkacji lokalnych. Jak wspomniano w Rozdz. 1., problem ucieczki z dołka potencjału jest jednym z najbardziej interesujących aspektów zachowania oscylatorów nieliniowych. W cytowanych tam pracach W. Szemplińska-Stupnicka proponowała przybliżony opis analityczny tego zjawiska poprzez badania stabilności rozwiązań periodycznych uzyskanych w rezonansach niskich rzędów. W podejściu tym zakłada się, że struktura bifurkacji rozwiązań Małej Orbity jest określona głównie przez takie właśnie rozwiązania, stosunkowo dobrze dostępne metodom przybliżonym teorii drgań nieliniowych. Rysunek 7.1 może służyć weryfikacji tego założenia - widzimy, że w istocie rozwiązania 1T- i 2T-

periodyczne zajmują największe obszary przestrzeni parametrów. Rozwiązania Małej Orbity o wysokich okresach, a tym bardziej "jednodółkowy" atraktor chaotyczny, występują w obszarach pomijalnych w skali rysunku. Tak więc, choć abstrahujemy w tym podejściu od skomplikowanych zjawisk globalnych, niewątpliwie podstawowych z punktu widzenia mechanizmów ucieczki i chaosu, to możemy uzyskać ilościowo zadowalającą charakterystykę zachowania układu - zadowalającą wobec braku ścisłych narzędzi matematycznych pozwalających badać przejścia między różnymi (w tym chaotycznymi) atraktorami. Wydaje się, że można wyróżnić w tego rodzaju "przybliżonych kryteriach ucieczki" następujące główne elementy:

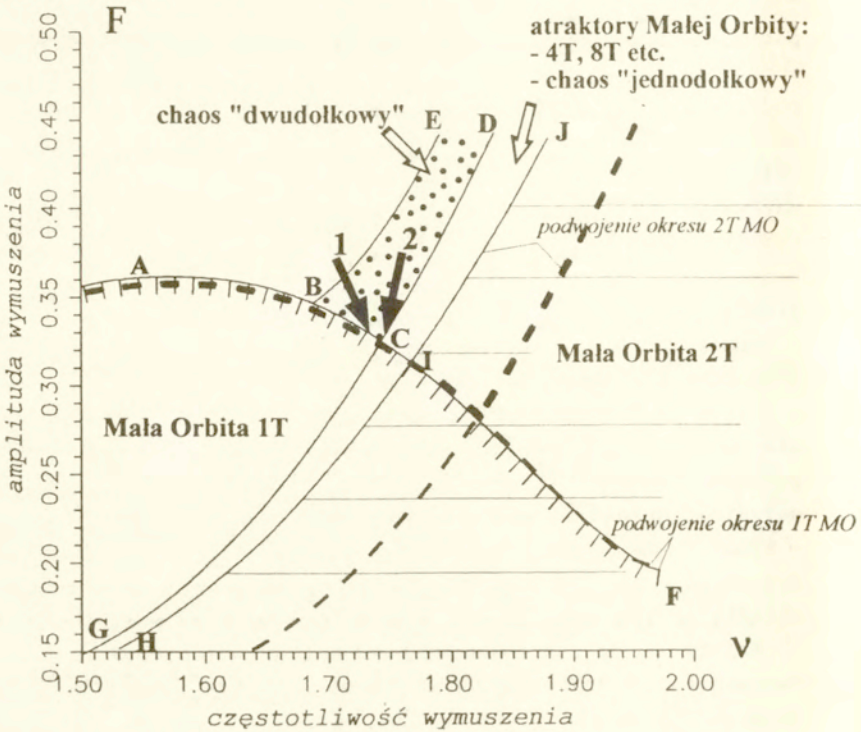
- Ograniczenie się do rozważenia orbit periodycznych o niskich okresach. Konsekwencją tego jest
- Przyjęcie, że zbiór tych punktów przestrzeni parametrów, gdzie nie ma już ani jednego stabilnego rozwiązania periodycznego, wyznacza "obszar ucieczki" w tej przestrzeni - obszar gdzie wszystkie atraktory są typu Dużej Orbity,
- Wybór odpowiednich metod przybliżonych, pozwalających wyznaczyć te rozwiązania periodyczne i ich stabilność, określając tym samym analitycznie "obszar ucieczki".

Należy tu jednak zauważyć, że czasem ucieczka może nastąpić "wcześniej", tzn. również wtedy, gdy istnieją jeszcze rozwiązania stabilne odpowiadające orbitom periodycznym niskich rzędów. Zjawiska takie są szeroko omówione w pracach dotyczących tzw. bifurkacji nieokreślonych (indeterminate bifurcations), np. [Thompson, Soliman 1991], [Soliman 1993]. Występują one, jak się wydaje, w niewielkich obszarach przestrzeni parametrów.

Rys. 7.5, odpowiadający prostokątowi zaznaczonemu na Rys. 7.1, obejmuje tylko te atraktory, które bezpośrednio biorą udział w zjawiskach ucieczki: atraktory 1T i 2T MO. Inne atraktory, jak 3T MO, 3T DO i orbity z nich bifurkujące nie są tu narysowane.

Z ucieczką mamy do czynienia wzdłuż linii ABC (przekraczając ją z lewej ku prawej) oraz wzdłuż linii CD (przekraczając ją z prawej ku lewej). Pierwsza z nich odpowiada subkrytycznej

bifurkacji podwojenia okresu, druga jest związana z kaskadą podwojeń okresu.



Rys. 7.5. Zjawiska ucieczki i przejścia do chaosu w subharmonicznym obszarze częstości wymuszenia.

- Na linii ABCF bifurkacja podwojenia okresu (z lewej ku prawej) może prowadzić do następujących atraktorów:
 - ▷ Duża Orbita 3T (odcinek AB)
 - ▷ chaos (odcinek BC)
 - ▷ Mała Orbita typu $2^k T$ ($k=1,2,3,\dots$) lub chaos "w jednym dołku" (odcinek CF)

Linią przerywaną narysowano przybliżenie tej linii, otrzymane z wariacyjnej analizy stabilności rozwiązania 1T MO, omówionej w Rozdz. 4.2.

- Na linii GCD mamy do czynienia z zakończeniem kaskady podwojeń okresu, przypuszczalnie związanym z pewnym kryzysem. Jest interesujące, że na odcinku GC kaskada ta kończy się skokiem amplitudy rozwiązania w dół, a na odcinku CD skokiem w górę. Punkt C jest więc miejscem wystąpienia pewnej bifurkacji kowymiaru dwa. Analogiczne zachowanie występuje w obszarze rezonansu podstawowego (punkt Q na Rys. 7.1) i było badane w [Stewart et al. 1991], choć nie wydaje się aby mechanizm tej bifurkacji został tam w pełni wyjaśniony.

Analiza stabilności rozwiązania $2T MO$ (Rozdz. 4.2) pozwoliła nam na przybliżenie linii HIJ, odpowiadającej pierwszemu podwojeniu okresu (linia przerywana). Następne podwojenia okresu leżą blisko siebie w przestrzeni parametrów - tym bliżej, im mniejsza siła F .

Granice litery "V", utworzonej przez linie przerywane na Rys. 7.5 (grubsza kreska przerywana) odpowiadają więc "przybliżonym kryteriom ucieczki" w sensie prac W. Szemplińskiej-Stupnickiej. Widzimy jakościową zgodność z wynikami eksperymentu numerycznego. Zgodność ta wynika z faktu, że:

- Dla mechanizmu ucieczki związanego z bifurkacją subkrytyczną (linia ABC) badamy teoretycznie bezpośrednio tę bifurkację. Popełniany błąd jest więc tylko błędem rachunku przybliżonego.

- Dla mechanizmu zapoczątkowanego kaskadą podwojeń okresu (linia CD) rozważamy tylko pierwsze z tych podwojeń. Od rzeczywistej ucieczki dzieli więc nas zarówno kaskada podwojeń okresu, jak i obszar istnienia "jednodobkowego" atraktora chaotycznego. Kaskada podwojeń okresu charakteryzuje się tym, że wartości parametru bifurkacyjnego odpowiadającego kolejnym podwojeniom okresu leżą coraz bliżej siebie, zgodnie z geometrycznym skalowaniem [Collet et al. 1981], [Testa et al. 1982], [Lanford 1983], [Räty et al. 1986] i często odrzucenie dalszych wyrazów ciągu podwojeń okresu nie prowadzi do grubego błędu. O ile jednak w analogicznym kryterium dla rezonansu podstawowego wystarczy policzyć tylko podwojenie okresu rozwiązania $1T MO$ [Szemplińska-Stupnicka, Rudowski 1992b], [MacRobie, Thompson 1994], to w subharmonicznym obszarze parametrów należy uwzględnić podwojenie okresu orbity $2T MO$, gdyż tu orbita $2T$ istnieje w szerokim zakresie parametrów. Jak wspomnieliśmy

wcześniej, obszar występowania "jednodobkowego" atraktora chaotycznego można również pominąć - atraktor ten jest trudno zaobserwować. Widzimy jednak, że w przypadku linii CD na Rys. 7.5 różnica między nią, a jej aproksymacją wynika nie tylko z zastosowania analitycznej metody przybliżonej, ale również z tego, że badamy w istocie inne zjawisko.

SCENARIUSZE PRZEJSCIA DO CHAOSU

W literaturze dotyczącej układów nieliniowych ważne miejsce zajmuje problem scenariuszy pojawiania się (lub znikania) atraktorów chaotycznych na skutek zmiany parametrów układu. W subharmonicznym obszarze częstości równania Duffinga wyróżnić można następujące mechanizmy tego typu:

- Kaskady podwojeń okresu (odcinek HJ Rys. 7.5)

Występuje nieskończony ciąg superkrytycznych bifurkacji podwojenia okresu prowadzący do utworzenia dziwnego atraktora. Mechanizm ten został najpełniej opisany dla tzw. odwzorowań unimodalnych - są to jednowymiarowe odwzorowania dyskretne odcinka, spełniające określone warunki (patrz np. [Feigenbaum 1978], [Bai-Lin 1990], [Marek, Schreiber 1991]). W wielu przypadkach dysypatywne wielowymiarowe układy dynamiczne dają się zredukować do odwzorowań jednowymiarowych i wówczas taki scenariusz możemy obserwować również w układach wielowymiarowych [Collet et al. 1981], [Testa et al. 1982], [Lanford 1983], [Räty et al. 1986]. Należy podkreślić, że redukcję taką nie zawsze daje się przeprowadzić - jedną z obserwowanych konsekwencji może być wówczas "urwanie" ciągu podwojeń okresu [Thompson, Stewart 1986]. Obszerną dyskusję relacji między jedno- i dwuwymiarowymi odwzorowaniami dyskretnymi można znaleźć w [Holmes, Whitley 1984]. Autorzy pokazują, że obecność bifurkacji homoklinicznych w odwzorowaniach dwuwymiarowych powoduje istotne różnice w stosunku do przypadku jednowymiarowego.

Jest to najczęściej obserwowany mechanizm przejścia do chaosu, zarówno w eksperymentach fizycznych, jak i numerycznych np. [Schuster 1984], [Thompson, Stewart 1986], [Nejmark, Landa

1987], [Lichtenberg, Lieberman 1992], [Marek, Schreiber 1991].

Prócz odcinka HJ na Rys 7.5 scenariusz ten obserwuje się na linii QD na Rys. 7.1, odpowiadającej rezonansowi podstawowemu. Jak wspomniano wcześniej, należy przypuszczać, że utworzony w takiej kaskadzie atraktor chaotyczny Małej Orbitsy, istniejący w bardzo wąskim zakresie przestrzeni parametrów, łączy się ze swoim sąsiadem z drugiego "dołka", tworząc atraktor chaotyczny Dużej Orbitsy, istniejący w szerokim zakresie parametrów. Przy zmianie parametru bifurkacyjnego w odwrotnym kierunku atraktor "dwudołkowy" przejdzie z powrotem w "jednodółkowy", choć niekoniecznie do tego samego "dołka", co poprzednio.

Obserwuje się również przejście do chaosu "dwudołkowego" następujące w kaskadzie podwojeń okresu Dużej Orbitsy, tak jak na Rys. 7.4d. Podobna sekwencja bifurkacji ma miejsce w obszarze rezonansu superharmonicznego (linia TV na Rys. 7.1).

Scenariusz przejścia do chaosu w kaskadzie podwojeń okresu przebiega w sposób odwracalny.

- Kryzys (brzegowy) atraktora chaotycznego (odcinek BE Rys. 7.5) przejawia się skokowym zniknięciem atraktora chaotycznego na skutek zmiany parametru i zastąpieniem go innym atraktorem. Dzieje się tak na skutek "kolizji" atraktora chaotycznego z orbitą niestabilną znajdującą się na brzegu atraktora chaotycznego. "Kolizja" ta jest z reguły bifurkacją homo- lub heterokliniczną rozmaitości niezmienniczych tej orbity niestabilnej. Pojęcie kryzysu pojawiło się w pracach grupy badaczy z uniwersytetu Maryland np. [Grebogi et al. 1983, 1987ab]. Do identyfikacji numerycznej tego zjawiska używa się [Sommerer, Grebogi 1992]:

- badań charakterystycznych skalowań przebiegów przejściowych lub/oraz

- badań rozmaitości niezmienniczych orbit niestabilnych.

W niniejszej pracy nie przeprowadzano tego typu analizy numerycznej; częściowo wynika to z przyczyn technicznych, częściowo zaś z faktu, że oczekujemy podobieństw z już uzyskanymi wynikami innych autorów.

Jak pokreślaliśmy przy okazji omawiania Rys. 7.4, dla układu (1.1) obserwuje się zarówno kryzys brzegowy atraktora

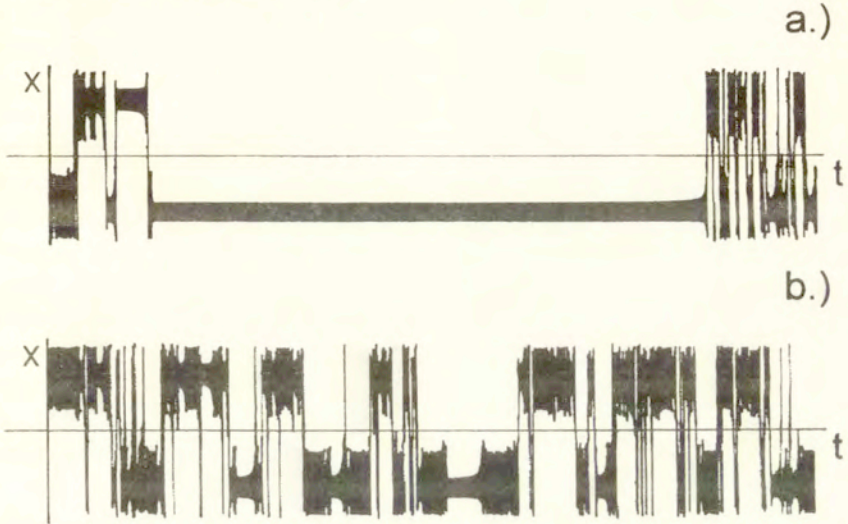
chaotycznego Małej, jak Dużej Orbity. Kryzys atraktora Dużej Orbity obserwuje się na odcinku BE Rys. 7.5 (rezonans subharmoniczny) i na odcinku RS na Rys. 7.1 (rezonans podstawowy). Przykłady kryzysu atraktora Małej Orbity obserwujemy na liniach BQ (rezonans podstawowy) i UW (rezonans superharmoniczny) na Rys. 7.1, a także CG na Rys. 7.5 (rezonans subharmoniczny). Zjawisko kryzysu brzegowego nie jest odwracalne (Rys.7.2c,d) i towarzyszy mu pewna histereza.

Nie zajmujemy się tu szerzej tzw. kryzysem wewnętrznym (interior crisis). Wspomniane powyżej łączenie dwóch "jednodółkowych" atraktorów chaotycznych w "dwudółkowy" bywa zaliczne do tej grupy bifurkacji [Ueda et al. 1990]. Należy jednak zaznaczyć, że symetria układu nadaje tu szczególny charakter temu zjawisku i niektórzy autorzy [Sommerer, Grebogi 1992], [Ott 1993] klasyfikują je odrębnie używając terminu "kryzys łączenia atraktorów" (attractor merging crisis).

-Intermittencja (odcinek BC Rys. 7.5)

W wielu przypadkach atraktor periodyczny traci stabilność tak, że po przejściu krytycznego parametru bifurkacyjnego nie ma ciągłej kontynuacji atraktora. Takie bifurkacje atraktorów nazywa się nieciągłymi [Thompson, Stewart 1986]. W dotychczasowej analizie napotkaliśmy już bifurkacje lokalne tego typu: siodłowo-węzłową i subkrytyczne podwojenie okresu. Często zdarza się, że bifurkacje takie powodują skok (jump) do innego atraktora, istniejącego już wcześniej w przestrzeni fazowej. Zdarza się jednak również, że te bifurkacje lokalne są częścią pewnego procesu globalnego, prowadzącego do utworzenia atraktora chaotycznego. Obserwuje się wtedy charakterystyczne przebiegi czasowe, składające się na przemian z odcinków "regularnych" i "chaotycznych". Przebiegi takie nie są procesami nieustalonymi - obserwuje się je po pominięciu dowolnie długich początkowych odcinków trajektorii. Zjawisko to nazywamy intermittencją [Pomeau, Manneville 1980]. Odcinki "regularne" są pozostałościami nieistniejącej już orbity periodycznej; istnienie odcinków "chaotycznych" wynika z globalnych własności przestrzeni fazowej - przede wszystkim z wcześniejszego istnienia w układzie struktury typu podkowy Smale'a.

W przestrzeni parametrów zjawiska takie obserwujemy na linii BC na Rys. 7.5, gdzie występuje subkrytyczne podwojenie okresu, a także na liniach QR i TX na Rys. 7.1, gdzie ma miejsce bifurkacja siodłowo-węzłowa.



Rys. 7.6. Przebiegi czasowe w punktach 1 i 2 na Rys. 7.5. Zaznaczono fragment długości 3500 okresów wymuszenia.

Na Rys. 7.6a, odpowiadającym punktowi 1 na Rys. 7.5 obserwujemy fragmenty regularne, które z dokładnością eksperymentu mogą zostać uznane za $1T$ periodyczne, przemieszane z odcinkami nieregularnymi. Przy oddalaniu się od bifurkacji lokalnej odcinki regularne stają się coraz krótsze (Rys. 7.6b, odpowiadający punktowi 2 na Rys. 7.5). Taki zanik regularności przebiegu czasowego przy oddalaniu się od parametru krytycznego jest charakterystyczny dla intermityencji [Pomeau, Maneville 1980].

Klasyfikację różnych typów intermityencji, jak również ich jednowymiarowe modele podano w [Pomeau, Maneville 1980]. Zgodnie z nią intermityencja związana z bifurkacją siodłowo-węzłową ma typ 1, zaś intermityencja związana z subkrytycznym podwojeniem okresu typ 3. W literaturze podaje się również charakterystyczne

dla różnych typów intermityncji prawa skalowania średniego czasu odcinków regularnych w zależności od parametru bifurkacyjnego [Lichtenberg, Liebermann 1992]. Teoria renormalizacji grup pozwala pokazać (dla odwzorowań jednowymiarowych), że kaskady podwojeń okresu i intermityncja są w istocie zjawiskami silnie związanymi [Bai-Lin 1990]. Przykłady występowania intermityncji, zarówno w eksperymentach fizycznych, jak i numerycznych można znaleźć np. w [Schuster 1984], [Thompson, Stewart 1986], [Marek, Schreiber 1991].

Zjawisko intermityncji nie jest związane z histerezą.

Podsumowując, zauważmy, że powyższe trzy scenariusze przejścia do chaosu są obserwowane zarówno w obszarze rezonansu subharmonicznego, jak i podstawowego i superharmonicznego. Wskazuje to zarówno na uniwersalność tych scenariuszy, jak i na podobieństwa między różnymi rezonansami. Zaobserwowaną różnicą było to, że intermityncja w obszarze subharmonicznym jest typu 3, a w pozostałych typu 1.

8. WNIOSKI

W pracy zbadano silnie nieliniowy oscylator typu Duffinga w subharmonicznym zakresie częstotliwości wymuszenia. Charakterystyczny jest fakt, że przy T-okresowym wymuszeniu zewnętrznym ustalona odpowiedź układu jest mT-okresowa ($m=1,2,3,\dots$) lub chaotyczna. Układ posiada pewną symetrię, występują jednak zarówno symetryczne, jak i niesymetryczne stany ustalone. Obserwuje się różne bifurkacje tych rozwiązań, a także związane z nimi efekty histerezy. Praca poświęcona jest badaniu rozwiązań układu i bifurkacji, w których te rozwiązania powstają lub zanikają. Wnioski z tych badań dotyczą zarówno zjawisk zachodzących w układzie, jak i przydatności różnych metod do analizy tych zjawisk.

1. W pracy pokazano, że klasyczna metoda perturbacyjna, połączona z analizą stabilności rozwiązań, wykorzystująca równania wariacyjne o współczynnikach zależnych od czasu, pozwala na wyznaczenie w przestrzeni parametrów obszarów istnienia atraktorów periodycznych utworzonych w rezonansach subharmonicznych niskich rzędów. Atraktory te są ważne z punktu widzenia eksperymentatora - łatwo jest je napotkać, gdyż pojawiają się w stosunkowo dużych obszarach przestrzeni parametrów, a także są przyciągane ze stosunkowo dużych obszarów przestrzeni fazowej.

2. Rozwiązania Małej Orbity w sposób naturalny dają się zapisać jako perturbacje oscylatora liniowego. Do badania ruchów o dużej amplitudzie (Duża Orbita) zaproponowano natomiast modyfikację klasycznej metody perturbacyjnej. Metoda ta dała zadowalającą zgodność z wynikami numerycznymi.

3. Bifurkacje orbit analizowanych klasyczną metodą perturbacyjną porównano z subharmoniczną metodą Mielnikowa. Okazało się że klasyczna metoda perturbacyjna uzupełnia wyniki teorii Mielnikowa, wykrywając pewne dodatkowe rozwiązania i bifurkacje kowymiaru jeden i dwa. Bifurkacje te są istotne:

- mogą być odpowiedzialne za zjawiska histerezy;
- mogą być związane ze zjawiskami ucieczki i przejścia do chaosu;

4. Podkreślono podobieństwa i różnice w stosunku do wyników prac dotyczących rezonansu podstawowego i superharmonicznego równania Duffinga:

- W obszarze rezonansu podstawowego i superharmonicznego struktura bifurkacji w przestrzeni parametrów była związana bifurkacją typu szpica (cusp); w badanym tutaj obszarze subharmonicznym jest związana z przejściem subkrytycznego podwojenia okresu w superkrytyczne.

- Scenariusze przejścia od/do chaosu wydają się mieć podobny charakter w różnych obszarach parametrów. Wykryto mechanizmy podwojenia okresu, kryzysu atraktora chaotycznego oraz intermittencji. Ta ostatnia w subharmonicznym obszarze częstości jest typu 3, podczas gdy w obszarach superharmonicznym i podstawowym jest typu 1.

5. Kryteria ucieczki z "dołka potencjału" oparte na badaniach stabilności rozwiązań utworzonych w rezonansach niskich rzędów dały jakościową zgodność z symulacjami komputerowymi. Zgodność ta wynika z faktu, że mogliśmy wyznaczyć

- podwojenia okresu zapowiadające kaskady bifurkacji,
- bifurkacje nieciągłe towarzyszące zjawiskom przeskoku lub intermittencji.

W szczególności okazało się, że zjawisko ucieczki w subharmonicznym obszarze parametrów jest związane z subkrytycznym podwojeniem okresu oraz kaskadą podwojeń okresu, podczas gdy w innych obszarach parametrów związane jest odpowiednio z bifurkacją siodłowo-węzłową oraz kaskadą podwojeń okresu.

PERSPEKTYWY

1. W pracy tej omówiono dwie teorie perturbacyjne, których wyniki się wzajemnie uzupełniają. Interesującym, choć trudnym problemem byłoby skonstruowanie teorii łączącej zalety tych metod.

2. Dla przedstawionej modyfikacji metody KBM należałoby zbadać własności matematyczne metody (oszacowanie błędu, twierdzenie o istnieniu itp.). Wydaje się również, że jej zastosowanie poprawiłoby (w sensie zgodności z symulacjami) wyniki dla ruchów Małej Orbitsy, w szczególności 3T MO, gdzie amplituda drgań jest

stosunkowo duża.

3. Dla niektórych rozwiązań wykryto niestabilności typu podwojenia okresu i złamania symetrii. Otwarty jest problem znalezienia nowych rozwiązań powstających przy tych niestabilnościach (np. 4T MO lub niesymetryczne rozwiązanie 1T DO).

4. Autor uważa że kryteria oparte na badaniu bifurkacji lokalnych mogą dostarczyć cennych informacji o zachowaniu układu, choć natura zjawisk ucieczki i chaosu jest związana z bifurkacjami globalnymi. W szczególności trudno sobie wyobrazić teorię lokalną pozwalającą zlokalizować w przestrzeni parametrów zjawisko kryzysu. Być może w tym wypadku efektywne byłoby zastosowanie analizy typu Mielnikowa (do wykrycia bifurkacji homoklinicznych towarzyszących temu zjawisku). Teorię taką należałoby skonstruować - wciąż nie ma metody typu Mielnikowa pozwalającej analizować bifurkacje homo- i heterokliniczne powstające po zajściu "pierwszej" bifurkacji homoklinicznej, opisanej w Rozdz. 5.1.

5. Równanie Duffinga wciąż wydaje się być interesującym przedmiotem badań numerycznych. Do otwartych problemów należą np.:

- charakter zjawisk towarzyszących rezonansom wyższych rzędów;
- charakter bifurkacji w punktach C na Rys. 7.5 oraz T i Q na Rys. 7.1;
- dokładne zbadanie przejść między chaosem "jednodółkowym" a "dwudółkowym";

PODZIĘKOWANIA

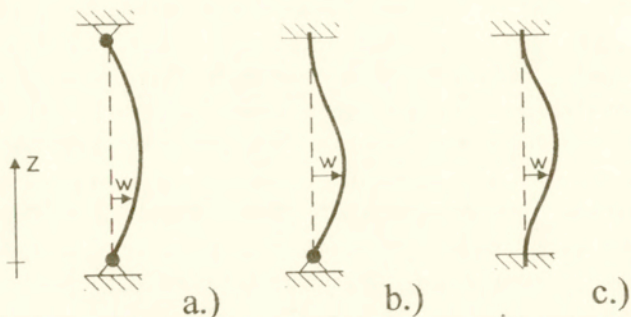
Badania te były finansowane przez Komitet Badań Naukowych w latach 1992-1994 (Projekt nr 3 3303 92 03).

Autor chciałby również podziękować:

- Dr. Jackowi Szumbarowskiemu (ITLiMS PW) za inspirujące rozmowy i udostępnienie bogatego prywatnego księgozbioru;
- Dr. Jerzemu Rudowskiemu za konsultacje komputerowe;
- Prof. Kazuyuki Yagasaki (Uniwersytet Tamagawa, Tokio) za udostępnienie algorytmu do liczenia rozmierności niezmienniczych i interesujące dyskusje.

DODATEK A

W dodatku tym pokażemy, w jaki sposób równanie Duffinga pojawia się przy badaniu drgań ściskanych belek geometrycznie nieliniowych.



Rys. A.1. Różne warianty podparcia belek.

Przypadki przedstawione na Rys. A.1a-c różnią się tylko warunkami brzegowymi. Można je opisać równaniem cząstkowym na poziome przemieszczenie $w(z,t)$, patrz np. [Huang, Nachbar 1968], [Tseng, Dugundji 1971], [Lewandowski 1993]:

$$\rho A \ddot{w} + \left[P_0 - \gamma \int_0^L (w')^2 dz \right] w'' + EI w^{IV} + \delta \dot{w} = f(z,t), \quad (A1)$$

gdzie: ρ - gęstość masy,
 A - pole przekroju,
 E - moduł Younga,
 I - moment bezwładności belki,
 L - długość belki,
 δ - tłumienie,
 P_0 - wprowadzona zewnętrznie siła osiowa (ściskająca)
 $\gamma = AE/(2L)$,
 f - pozioma siła zewnętrzna.

Kropka oznacza różniczkowanie względem czasu, kreska względem zmiennej przestrzennej.

Aby wyjaśnić związek równania (A1) z potencjałem na Rys. 1.1a użyjemy metody Galerkina. Nieznane przemieszczenie $w(z,t)$ jest tu wyrażone przy pomocy (ortogonalnych) funkcji bazowych $u_m(z)$ ($m=1,2,3\dots$), spełniających warunki brzegowe

$$w(z,t) = \sum_m x_m(t) u_m(z) . \quad (A2)$$

Podstawienie (A2) do (A1), a następnie obliczenie iloczynów skalarnych otrzymanego wyrażenia z funkcjami $u_k(z)$ ($k=1,2,3\dots$) prowadzi do nieskończonego układu (sprzężonych) równań zwyczajnych drugiego rzędu - zamieniamy więc problem ciągły na pewien problem dyskretny. Poniżej założymy

$$f(z,t) = \cos(\nu t) \sum_m f_m u_m(z) . \quad (A3)$$

W szczególności, dla przykładu przedstawionego na Rys. A.1a warunki brzegowe mają postać:

$$u_m(0) = u_m(L) = u_m'(0) = u_m'(L) = 0 \quad (A4)$$

i są spełnione np. przez funkcje

$$u_m(z) = \sin(m\pi z/L) . \quad (A5)$$

Ograniczymy się do $m=1$ i opuścimy indeks m . W procedurze Galerkina dostajemy:

$$\ddot{x} + \left[\frac{E I c}{\rho A a} - P_0 \frac{b}{\rho A a} \right] x + \frac{\gamma b^2}{\rho A a} x^3 + \delta \dot{x} = \frac{\bar{f}}{\rho A} \cos \nu t , \quad (A6)$$

$$\text{gdzie } a = \int_0^L u^2 dz , \quad b = \int_0^L (u')^2 dz , \quad c = \int_0^L (u'')^2 dz , \quad \bar{f} = f a .$$

Nieliniowość jest tu związana ze zmianą naprężeń osiowych w belce na skutek poziomych odkształceń. Widzimy również, że dla dostatecznie dużych P_0 współczynnik przy x może być ujemny. Jest tak wtedy, gdy zewnętrzna siła osiowa jest większa od siły krytycznej:

$$P_{kr} \equiv \frac{E I c}{b} .$$

W szczególności dla funkcji bazowej u_1 danej wzorem (A5) :

$$P_{k1} = E I \pi^2 / L^2 .$$

Przy założeniu $P_0 > P_{k1}$ równanie (A6) można zapisać w postaci

$$\ddot{x} + h\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = F \cos \nu t, \quad (A7)$$

$$h, \alpha, \beta > 0, \quad T \equiv \frac{2\pi}{\nu},$$

gdzie definicje h, α, β, F wynikają z przyrównania odpowiednich współczynników w (A6). Postać (A7) jest identyczna z (1.1a) w Rozdz. 1. Równanie (A7) możemy przekształcić dalej do postaci bezwymiarowej stosując zamianę zmiennych

$$x = a_0 \bar{x}, \quad t = \bar{t} / \omega_0,$$

gdzie charakterystyczne skale położenia i czasu

$$a_0 \equiv (\alpha/\beta)^{1/2}, \quad \omega_0 \equiv (2\alpha)^{1/2}.$$

reprezentują położenie równowagi belki wyboczonej i liniową częstotliwość drgań wokół tego położenia. W nowych zmiennych (A7) ma postać

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \bar{h} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} - \frac{1}{2} \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{x}^3 = \bar{F} \cos \bar{\nu} \bar{t}, \quad (A8)$$

gdzie $\bar{h} = h/\omega_0$, $\bar{F} = F/(\omega_0^2 a_0)$, $\bar{\nu} = \nu/\omega_0$.

Uzasadnia to fakt przyjęcia w obliczeniach numerycznych współczynników $\alpha = \beta = 0.5$ w równaniu (1.1a).

DODATEK B

Uzasadnimy tu zależność (4.11) między wartościami własnymi "tłumionego" (4.2) i "nietłumionego" (4.10) równania Hilla.

Równanie (4.2) ma postać macierzową:

$$\dot{V} = A(t)V, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L(t) & -h \end{pmatrix}. \quad (B1)$$

gdzie $L(t)$ ma okres τ . Zamianę zmiennych (4.19) można zapisać w postaci macierzowej jako

$$V(t) = d(t)\Gamma\bar{V}(t), \quad d(t) \equiv \exp(-ht/2), \quad \Gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zamiana ta prowadzi do równania

$$\dot{\bar{V}} = \bar{A}(t)\bar{V}, \quad (B2)$$

gdzie $\bar{A} \equiv \Gamma^{-1}A\Gamma + hI/2$, tzn. $\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L(t)+h^2/4 & 0 \end{pmatrix}$.

Równanie (B2) jest macierzowym zapisem "nietłumionego" równania Hilla (4.10). Łatwo sprawdzić, że jeśli $\Phi(t)$ jest macierzą fundamentalną układu (B1), to

$$\bar{\Phi}(t) \equiv \frac{1}{d(t)} \Gamma^{-1}\Phi(t) \quad (B3)$$

jest macierzą fundamentalną (B2). Na mocy twierdzenia Floqueta macierze te można wyrazić następująco

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= Q(t)\exp(Bt), \\ \bar{\Phi}(t) &= \bar{Q}(t)\exp(\bar{B}t). \end{aligned}$$

Z (B3) wynika

$$Q(t)\exp(Bt) = \Gamma d(t)\bar{Q}(t)\exp(\bar{B}t). \quad (B4)$$

Załóżmy, że dobrano $Q(0)=I=Q(\tau)$. Podstawmy w (B4) $t=0$. Wówczas $\bar{Q}(0)=\Gamma^{-1}=\bar{Q}(\tau)$. Podstawmy w (B4) $t=\tau$. Otrzymujemy relację między macierzami monodromii równań (B1) i (B2):

$$\exp(B\tau) = d(\tau)\exp(\bar{B}\tau).$$

Jeśli przez ρ_1 oznaczymy wartości własne $\exp(B\tau)$, a przez λ_1 wartości własne $\exp(\bar{B}\tau)$, to oczywista jest zależność (4.11):

$$\lambda_1 = \rho_1 \exp(-h\tau/2).$$

DODATEK C

Wypiszemy tu homokliniczną i subharmoniczne funkcje Mielnikowa dla $\alpha=\beta=0.5$. Sposób wyznaczania tych funkcji i wskazówki techniczne są omówione np. w [Greenspan, Holmes 1983], [Guckenheimer, Holmes 1983], [Wiggins 1990]. Operacje algebraiczne związane z wyznaczaniem funkcji Mielnikowa wymagają znajomości całek prowadzących do funkcji eliptycznych [Gradštejn, Ryżik 1962] oraz własności funkcji eliptycznych [Antoniewicz 1969].

FUNKCJA HOMOKLINICZNA

otrzymywana jest z wzoru (5.14). Do jej obliczenia potrzebne są funkcje $q^0(t)$ opisujących orbity homokliniczne układu niezaburzonego (Rys 5.1). Całkowanie układu (5.1)-(5.3) dla $\mu=0$ daje w tym przypadku

$$q^0(t) = (\pm\sqrt{2}\operatorname{sech}(t/\sqrt{2}), \mp\operatorname{sech}(t/\sqrt{2})\tanh(t/\sqrt{2})) . \quad (C1)$$

Po podstawieniu (C1) do (5.14) otrzymujemy homokliniczną funkcję Mielnikowa:

$$M^0(t_0) = -\hat{h}J_1(\nu) \pm \hat{F}J_2(\nu)\sin(\nu t_0) , \quad (C2)$$

gdzie

$$J_1(\nu) = \frac{4\sqrt{2}}{3} , \quad J_2(\nu) = 4\pi\nu\operatorname{sech}(\pi\nu/\sqrt{2}) .$$

Funkcja

$$\hat{F}/\hat{h} = R^0(\nu) = \frac{J_1(\nu)}{J_2(\nu)}$$

określająca w przestrzeni parametrów miejsca pojawienia się bifurkacji homoklinicznej ma więc postać

$$R^0(\nu) = \frac{\sqrt{2}}{3\pi\nu}\operatorname{Cosh}(\pi\nu/\sqrt{2}) .$$

We wzorach (C1-C2), a także w dalszej części Dodatku, zakładamy, że górne (dolne) znaki dotyczą prawego (lewego) "dołka".

FUNKCJE SUBHARMONICZNE

wyliczamy ze wzoru (5.7). Potrzebujemy tu orbit $q^Y(t)$ opisujących rozwiązania periodyczne układu (5.1)-(5.3) dla $\mu=0$. Rozpatrzmy oddzielnie przypadek Małej i Dużej Orbity.

Mała Orbita

Orbity periodyczne układu wewnątrz krzywej Γ^0 na Rys. 5.1 mają postać:

$$g^k(t) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2-k^2}} \operatorname{dn}\left(t/\sqrt{2(2-k^2)}, k\right), \right. \\ \left. \mp \frac{k}{2-k^2} \operatorname{sn}\left(t/\sqrt{2(2-k^2)}, k\right) \operatorname{cn}\left(t/\sqrt{2(2-k^2)}, k\right) \right) , \quad (C3)$$

gdzie $k \in (0,1)$ jest modułem całek eliptycznych; sn , cn , dn są funkcjami eliptycznymi Jacobiego.

Jak podkreślaliśmy w Rozdz. 5, $\gamma \in (-1,0)$ było pewnym umownym parametrem służącym do oznaczania orbit tej rodziny. Moduł eliptyczny k jest bardziej naturalnym parametrem, gdyż pojawia się bezpośrednio w rozwiązaniach. W tym przypadku możemy go związać z γ relacją: $k=\gamma+1$.

Wyrażenie (C3) pozwala wypisać wzór na okres T^k jednoparametrowej rodziny orbit periodycznych $g^k(t)$

$$T^k = 2\sqrt{2(2-k^2)} K(k), \quad (C4)$$

gdzie $K(k)$ jest całką eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju.

Dla $k \rightarrow 0$ ($\gamma \rightarrow -1$) mamy $T^k \rightarrow 2\pi$, a dla $k \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 0$) mamy $T^k \rightarrow \infty$. Wynik ten jest uzasadnieniem wzoru (5.11). Subharmoniczna funkcja Mielnikowa ma postać

$$\underline{M}^{m/n}(t_0) = -\hat{h}\underline{J}_1^{m/n}(\nu) \pm \hat{F}\underline{J}_2^{m/n}(\nu)\sin(\nu t_0), \quad (C5)$$

gdzie

$$\underline{J}_1^{m/n}(\nu) = \frac{4\sqrt{2}[(2-k^2)E(k)-2k'^2K(k)]}{3(2-k^2)^{3/2}},$$

$$\underline{J}_2^{m/n}(\nu) = \begin{cases} 4\nu \operatorname{sech} \frac{m\pi K(k')}{K(k)} & \text{dla } n=1, \\ 0 & \text{dla } n \neq 1. \end{cases}$$

$E(k)$ jest tu całką eliptyczną zupełną drugiego rodzaju, a $k'^2 = 1-k^2$.

Ponieważ dla $n \neq 1$ teoria nie wykazuje istnienia orbit subharmonicznych, indeks n zwyczajowo się opuszcza. Funkcja

$$\hat{F}/\hat{h} = \underline{R}^m(\nu) \equiv \frac{J_1^m(\nu)}{J_2^m(\nu)}$$

określa w przestrzeni parametrów miejsca wystąpienia bifurkacji siodłowo-węzłowej Małej Orbitsy.

Duża Orbita

Rozwiązania periodyczne układu niezaburzonego na zewnątrz orbity homoklinicznej Γ^0 mają postać

$$\bar{q}^k(t) = \left(+ \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{2k^2-1}} \operatorname{cn}\left(t/\sqrt{2(2k^2-1)}, k\right), \right. \\ \left. - \frac{k}{2k^2-1} \operatorname{sn}\left(t/\sqrt{2(2k^2-1)}, k\right) \operatorname{dn}\left(t/\sqrt{2(2k^2-1)}, k\right) \right), \quad (C6)$$

gdzie $k \in (1/\sqrt{2}, 1)$. Pomiedzy modułem k a umownym parametrem γ zachodzi relacja: $k = \gamma(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}+1$. Okres orbit $\bar{q}^k(t)$ wynosi

$$\bar{T}^k = 4\sqrt{2(2k^2-1)} K(k). \quad (C7)$$

Dla $k \rightarrow 1/\sqrt{2}$ ($\gamma \rightarrow -1$) mamy $\bar{T}^k \rightarrow 0$, a dla $k \rightarrow 1$ ($\gamma \rightarrow 0$) mamy $\bar{T}^k \rightarrow \infty$.

$$\bar{M}^{m/n}(t_0) = -\hat{h}J_1^{m/n}(\nu) + \hat{F}J_2^{m/n}(\nu)\sin(\nu t_0), \quad (C8)$$

gdzie

$$\bar{J}_1^{m/n}(\nu) = \frac{4\sqrt{2}[(2k^2-1)2E(k)+2k'^2K(k)]}{3(2k^2-1)^{3/2}},$$

$$\bar{J}_2^{m/n}(\nu) = \begin{cases} 4\nu \operatorname{sech} \frac{m\pi K(k')}{2K(k)} & \text{dla } n=1, m \text{ nieparzyste,} \\ 0 & \text{dla pozostałych } m, n. \end{cases}$$

Tu również opuszcza się indeks n . Funkcja

$$\hat{F}/\hat{h} = \bar{R}^m(\nu) \equiv \frac{\bar{J}_1^m(\nu)}{\bar{J}_2^m(\nu)}$$

określa w przestrzeni parametrów miejsca wystąpienia bifurkacji siodłowo-węzłowej Dużej Orbitsy.

LITERATURA

- ANTONIEWICZ J. 1969 Tablice funkcji dla inżynierów. Warszawa: PWN.
- ARECCHI F.T., LISI F. 1982 Phys. Rev. Letters 49, 94-98. Hopping mechanism generating $1/f$ noise in nonlinear systems.
- ARNOLD W.I. 1975 Równania różniczkowe zwyczajne. Warszawa: PWN.
- ARNOLD W.I. 1983 Teoria równań różniczkowych. Warszawa: PWN.
- BAI-LIN H. 1990 Chaos II. Singapore: World Scientific.
- BOGOLIUBOV N.N., MITROPOL'SKIJ Ju.A. 1963 Asimptotičeskie metody v teorii nielinielnych kolebanij. Moskwa: Nauka.
- BOLOTIN V.V. 1964 Dynamic Stability of Elastic Systems. San-Francisco: Holden-Day.
- CESARI L. 1959 Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin: Springer-Verlag.
- CLIFFORD M.J., BISHOP S.R. 1994. Approximating the escape zone for the parametrically excited pendulum. Złożone do druku w J. of Sound and Vib.
- COLLET P., ECKMANN J.-P. and KOCH H. 1981 J. of Stat. Phys. 25, 1-14. Period doubling bifurcations for families of maps on \mathbb{R}^n .
- DOWELL E.H., PEZESHKI C. 1988 J. of Sound and Vib. 121, 195-200. On necessary and sufficient conditions for chaos to occur in Duffing's equation: a heuristic approach.
- ECKMANN J.-P., RUELLE D. 1985 Reviews of Modern Physics 57 617-656. Ergodic theory of chaos and strange attractors.
- FALZARANO J.M., SHAW S.W., TROESH A.W. 1992 Int. J. of Bif & Chaos 2, 101-115. Application of global methods for analyzing dynamical systems to ship rolling motion and capsizing.
- FEIGENBAUM M.J. 1978 J. of Stat. Phys. 19, 25-52. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations.
- GAFKA D., TANI J. 1991, Rep. Inst. Fluid Sci., Tohoku Univ. 3 1-17. Chaos in multi-well potential magnetoelastic systems.
- GOTTWALD J.A., VIRGIN L.N. and DOWELL E.H. 1992 J. of Sound and Vib. 158, 447-467. Experimental mimicry of Duffing's equation.
- GRADŠTEJN I.S., RYZIK I.M. 1962 Tablice integralow, summ, riadow i proizvedenij. Moskwa: Fizmatgiz

- GREBOGI C., OTT E., PELIKAN S. and YORKE J.A. 1984 *Physica* 13D 261-268. Strange attractors that are not chaotic.
- GREBOGI C., OTT E. and YORKE J.A. 1983 *Physica* 7D 181-200. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos.
- GREBOGI C., OTT E. and YORKE J.A. 1987a *Physica* 27D, 243-262. Basin boundary metamorphoses: changes in accessible boundary orbits.
- GREBOGI C., OTT E. and YORKE J.A. 1987b *Science* 238, 632-638. Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics.
- GREENSPAN B.D., HOLMES P.J 1983 *Nonlinear Dynamics and Turbulence* (G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph editors) 172-214. Boston: Pitman. Homoclinic orbits, subharmonics and global bifurcations in forced oscillations.
- GUCKENHEIMER J., HOLMES P.J 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer Verlag.
- HALE J.K. 1963 *Oscillations in nonlinear systems* New York: McGraw-Hill.
- HARTMANN P. 1964 *Ordinary differential equations*. New York: J.Wiley&Sons.
- HAYASHI C. 1964 *Nonlinear oscillations in physical systems*. New York: McGraw-Hill.
- HOLMES C., HOLMES P.J. 1981, *J. of Sound and Vib.* 78, 161-174. Second order averaging and bifurcations of subharmonics in Duffing's equation.
- HOLMES P.J. 1979 *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 292, 419-448. A nonlinear oscillator with a strange attractor.
- HOLMES P.J., MOON F.C. 1983, *Journal of Applied Mechanics* 50, 1021-1032. Strange attractor and chaos in nonlinear mechanics.
- HOLMES P.J., WHITLEY D. 1983, *Physica* 7D 111-123. On the attracting set for Duffing's equation II. A geometrical model for moderate force and damping.
- HOLMES P.J., WHITLEY D. 1984, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A.* 311 43-102. Bifurcations of one- and two-dimensional maps.
- HUANG N.C., NACHBAR W. 1968 *Journal of Applied Mechanics* 34, 289-296. Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches.
- HUBERMAN B.A., CRUTCHFIELD J.P. 1979 *Physical Review Letters* 43 1743-1747. Chaotic states of anharmonic systems in periodic fields. - IOOSS G., ADELMEYER M, 1992 *Topics in bifurcation theory*. Singapore: World Scientific.
- JAKUBOWIĆ V.A., STARZINSKIJ V.M. 1972 *Liniejnye differencial'nye uravnenija s periodičeskimi koefficientami i ich prilozhenija*. Moskva: Nauka.

- JANICKI K. 1993 1st European Nonlinear Oscillations Conference, Technical University Hamburg-Harburg, Germany. Bifurcations of subharmonics in nonlinear oscillators: near-linear and near-Hamiltonian methods.
- JANICKI K., SZEPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1994 Subharmonic resonances and criteria for escape and chaos in a driven oscillator. Przyjęte do druku w Journal of Sound and Vibration.
- JANICKI K., SZEPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1994 Bifurcations of subharmonics in a nonlinear oscillator: perturbation methods versus numerical experiment. Ukaże się w Nonlinear Science: B vol.7, Chaos and Nonlinear Mechanics, World Scientific.
- KUDREWICZ J. 1993 Chaos i fraktale. Warszawa: PWN.
- LANFORD O.E. III 1983 Physica 7D 124-125. Period doubling in one and several dimensions.
- LEWANDOWSKI R. 1993 Okresowe drgania konstrukcji geometrycznie nieliniowych. Poznań: Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej.
- LICHTENBERG A.J., LIEBERMANN M.A. 1992 Regular and chaotic dynamics. Berlin: Springer-Verlag.
- MacROBIE F.A. 1993 Informacja prywatna.
- MacROBIE F.A., J.M.T. THOMPSON 1994. Criteria for escape phenomena in driven oscillators. Złożone do druku w Nonlinear Dynamics.
- MAHAFFEY R.A. 1976 Physics of Fluids 19, 1387-1391. Anharmonic oscillator description of plasma oscillations.
- MAREK M., SCHREIBER I. 1991. Chaotic behaviour of deterministic dissipative systems. Praha: Academia.
- MEIROVITCH L. 1970 Methods of analytical dynamics. New York: MacGraw-Hill.
- MEL'NIKOV V.K. 1963 Trudy Mos. Mat. Obščestva 12, 3-52. Ob ustojčivosti centra pri periodičeskich po vremenii vozmuščenijach.
- MITROPOL'SKIJ. Ju.A, CHOMA G.P., 1983 Matematičeskoje obosnovanie asimptotičeskich metodov nelinejnoj mehaniki. Kiev: Naukova Dumka.
- MOON F.C. 1980, Journal of Applied Mechanics 47 638-644. Experiments on chaotic motions of a forced nonlinear oscillator: strange attractors.
- MOON F.C. 1987 Chaotic vibrations. New York: J.Wiley&Sons.
- MOON F.C., HOLMES P.J. 1979 J. of Sound and Vib. 65, 275-296. A magnetoelastic strange attractor.
- MOON F.C., LI G.-X. 1985a Physica 17D, 99-108. The fractal dimension of the twin-well potential strange attractor.

- MOON F.C., LI G.-X. 1985b Physical Review Letters 55 1439-1444. Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential.
- MURDOCK J.A 1991 Perturbations: theory and methods. New York: J.Wiley&Sons.
- NAYFEH A.H. 1973 Perturbation Methods. New York: J.Wiley&Sons.
- NAYFEH A.H, MOOK D.T. 1979 Nonlinear oscillations. New York: J.Wiley&Sons..
- NEJMARK Ju.N., LANDA P.S. 1987 Stochastičeskie i chaotičeskie kolebanija. Moskva: Nauka.
- NIEZGODZKI P. 1986 Prace IPPT 19/1986. Język symulacyjny LAHYSS w badaniach drgań chaotycznych nieliniowych układów mechanicznych.
- OKNIŃSKI A. Teoria katastrof w chemii 1990. Warszawa: PWN.
- OTT E. 1993 Chaos in dynamical systems. Cambridge: University Press.
- PALIS J., TAKENS F. 1993, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations. Cambridge: University Press.
- PARKER T.S., CHUA L.O. 1989 Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag.
- PERKO L. 1991 Differential equations and dynamical systems. New York: Springer-Verlag.
- PEZESHKI C., DOWELL E.H. 1987 J. of Sound and Vib. 117, 219-232. An examination of initial condition maps for the sinusoidally excited buckled beam modeled by the Duffing's equation.
- PEZESHKI C., DOWELL E.H. 1988 Physica 32D, 194-204. On Chaos and Fractal Behavior in a Generalized Duffing's System.
- PEZESHKI C., DOWELL E.H. 1989 Int. J. of Non-Linear Mech. 24, 79-97. Generation and analysis of Lyapunov exponents for the buckled beam.
- POMMEAU Y., MANNEVILLE P. 1980 Commun. Math. Phys. 74 189-197. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems.
- RÄTY R., von BOEHM J., ISOMÄKI H.M. 1986 Physical Review A 34 4310-4315. Chaotic motion of a periodically driven particle in an assymmetric potential well.
- SCHUSTER H.G. 1984 Deterministic chaos: an introduction. Weinheim: Physik-Verlag.
- SHAPIRO S.M., SETHNA P.R. 1977, Int. J. of Non-Linear Mech. 12, 127-140. On the estimate for the small parameter in the asymptotic analysis of nonlinear systems by the method of averaging.

- SOLIMAN M.S. 1993 Journal of Applied Mechanics 60, 669-676. Jumps to resonance: long chaotic transients, unpredictable outcome and the probability of restabilization.
- SOLIMAN M.S., THOMPSON J.M.T. J. of Sound and Vib. 1989 135, 453-475. Integrity measures quantifying the erosion of smooth and fractal basins of attraction.
- SOMMERER J.C., GREBOGI C. 1992 Int. J. of Bif. & Chaos 2 383-396. Determination of crisis parameter values by direct observation of manifold tangencies.
- STEWART H.B., THOMPSON J.M.T., LANSBURY A.N., UEDA Y. 1991 Int. J. of Bif. & Chaos 1 265-267. Generic patterns of bifurcation governing escape from potential wells.
- STEWART H.B., UEDA Y., 1991 Proc. R. Soc. Lond. A 432, 113-123. Catastrophes with indeterminate outcome.
- SWIFT J., WIESENFELD K. 1984 Phys. Rev. Letters 52, 705-710. Suppression of period doubling in symmetric systems.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1987 J. of Sound and Vib. 113, 155-172. Secondary resonances and approximate models of routes to chaotic motion in non-linear oscillators.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1988 Ing.-Archiv 58, 354-366. The refined approximate criterion for chaos in a two-state mechanical oscillator.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1990 The Behavior of Non-linear Vibrating Systems vol I. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1992 Nonlinear Dynamics 3, 225-243. Cross-well chaos and escape phenomena in driven oscillators.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W. 1994. The analytical predictive criteria for chaos and escape in nonlinear oscillators: a survey. Przyjęto do druku w Nonlinear Dynamics.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W., RUDOWSKI J. 1992a J. of Sound and Vib. 152, 57-72. Local methods in predicting an occurrence of chaos in the two-well potential system: superharmonic frequency region.
- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W., RUDOWSKI J. 1992b Prace IPPT 40/1992 lub 1993 Chaos 3, 375-385. Steady States in the Twin-Well Potential Oscillator: Computer Simulations and Approximate Analytical Studies.

- SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA W., RUDOWSKI J. 1993 *Physica* 66D, 368-380. Bifurcations phenomena in a nonlinear oscillator: approximate analytical studies versus computer simulation results.
- TANG D.M., DOWELL E.H. 1979 *Journal of Applied Mechanics* 65, 190-196. On the threshold force for chaotic motions for a forced buckled beam.
- TESTA J., PEREZ J. and JEFFRIES C. 1982 *Phys. Rev. Letters* 48, 714-717. Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator.
- THOMPSON J.M.T., STEWART H.B. 1986 *Nonlinear dynamics and chaos*. Chichester: J.Wiley&Sons.
- THOMPSON J.M.T., SOLIMAN M.S. 1991 *Proc. R. Soc. Lond. A* 432, 101-111. Indeterminate jumps to resonance from a tangled saddle-node bifurcation.
- TSENG W.Y., DUGUNDJI J. Nonlinear vibrations of a buckled beam under harmonic excitation. *Journal of Applied Mechanics* 38, 1971, 467-476.
- UEDA Y., YOSHIDA S., STEWART H.B. and THOMPSON J.M.T. 1990 *Phil. Trans. of the Roy. Soc. Lond. A* 332, 169-186. Basin explosions and escape phenomena in the twin-well Duffing oscillator: compound global bifurcations organizing behavior.
- WIGGINS S. 1988 *Global bifurcations and chaos*. New York: Springer-Verlag.
- WIGGINS S. 1990 *Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.
- WHITAKER E.T., WATSON G.N. 1952 *A Course of Modern Analysis*. Cambridge: University Press.
- VIRGIN L.N., PLAUT R.H., CHENG C.-C. 1992 *Int. J. Non-Linear Mech.* 27, 357-365. Prediction of escape from a potential well under harmonic excitation.
- YAGASAKI K. 1994. Second order averaging and Melnikov analyses for forced nonlinear oscillators. Preprint.

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	3
1.1 Badany układ, jego znaczenie praktyczne i teoretyczne	3
1.2 Cel pracy	11
2. Klasyczna metoda asymptotyczna KBM. Własności ogólne	13
2.1 Rozwiązania periodyczne	13
2.2 Analiza stabilności rozwiązań periodycznych	18
2.3 Bifurkacja siodłowo-węzłowa w metodzie perturbacyjnej	20
3. Równania z małym parametrem. Rozwiązania metodą KBM	24
3.1 Rezonans podstawowy Małej i Dużej Orbity	24
3.1.1 Rezonans 1:1 Małej Orbity	27
3.1.2 Rezonans 1:1 Dużej Orbity	29
3.2 Rezonanse subharmoniczne	31
3.2.1 Rezonans 1:3 Małej Orbity	33
3.2.2 Rezonans 1:2 Małej Orbity	34
3.2.3 Rezonans 1:3 Dużej Orbity	38
4. Równania wariacyjne o współczynnikach zależnych od czasu. Stabilność i bifurkacje rozwiązań periodycznych	41
4.1 Informacje ogólne	42
4.2 Podwojenie okresu	51
4.3 Złamanie symetrii	53
4.4 Dyskusja wyników wariacyjnej analizy stabilności	56
5. Teoria Mielnikowa	61
5.1 Teoria homokliniczna	64
5.2 Teoria subharmoniczna	69
6. Bifurkacje atraktorów periodycznych - porównanie wyników metod perturbacyjnych z eksperymentem numerycznym	74
7. Wykres bifurkacyjny w przestrzeni parametrów (ν, F)	84
8. Wnioski	111
Dodatek A	114
Dodatek B	117
Dodatek C	118
Literatura	121