SWIERZBIENSKI

JEOMETRYA

KURS
JEOMETRYI ELEMENTARNÉJ
Z RYSUNKIEM JEOMETRYCZNYM
I ZASTOSOWANIAMI

PRZEZ

M. Swierzbienskiego,

Kand. Fil. Nauczyciela Matematyki.

w Gimnazyum Realnem Warszawskiem.

KSIĘGA DRUGA
SOLIDOMETRYA.

WARSZAWA

Nakladem Autora.

w DRUKARNI JÓZEFA TOMASZEWSKIEGO

przy ulicy Bielańskiej Nr. 600.

1849.

WOLNO DRUKOWAĆ

z warunkiem złożenia w Warszawskim Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu prawem przepisanej liczby egzemplarzy.

w Warszawie d. 23 Kwietnia (5 Maja) 1848. r.

Cenzor,

L. T. Tripplin.

KSIĘGA II. SOLIDOMETRYA.

CZĘŚĆ I.

Linie i powierzchnie uważane w przestrzeni i ich połączenia.

ROZDZIAŁ I.

Powierzchnie uważane oddzielnie.

§ I. Wiadomości ogólne.

306. Jak Planimetrya dzieli się na dwie części: *Liniometryą* zajmującą się własnościami linii leżących na płaszczyznie i *Planimetryą właściwą*, zajmującą się własnościami płaszczyzny ograniczonej temi liniami, będącą wypływem pierwszéj, tak równie i *Solidometrya, nauka linii, powierzchni i brył uważanych w przestrzeni pod względem kształtu i wielkości*, dzieli się na *naukę własności kształtu tych wielkości przestrzennych i ich połączeń* i na *naukę własności, pod względem wielkości, przestrzeni ograniczonej temi powierzchniami.*

Lecz jak w księdze pierwszéj wykrywaliśmy własności połączeń dwóch tylko linii, *prostéj i okręgu koła*, służących za zasadę do poznania wszystkich innych linii, tak również i w solidometryi rozważać będziemy powierzchnie z tych tylko dwóch linii zrodzone i ich połączenia dające tylko linię prostą i okręg koła. Powierzchnie te jako utworzone przez linie nieograniczone, są także nieograniczone, ograniczają się zaś, podobnie jak linie, przecinając się z innemi powierzchniami.

§. II. Płaszczyzna uważana oddzielnie.

307. *Linie proste bez przerwy po sobie idące, przechodzące przez dwie przecinające się linie proste, stanowią płaszczyznę* (fig. 264). Z tego opisania płaszczyzny wynika:

1) *Przez trzy punkta* A, B, C, *nieleżace na linii prostéj, jedna tylko płaszc. przechodzić może* (fig. 264); gdyż z jednego z tych punktów B poprowadziwszy przez dwa inne A i C linie proste, każda z płaszczyzn przechodzących przez te trzy punkta jest szeregiem linii prostych, bez przerwy po sobie idących, przechodzących przez linie BA i BC, a zatém linie tworzące jedną z tych płaszczyzn tworzą i inne płaszczyzny, a tém samém wszystkie te płaszczyzny są tylko jedną płaszczyzną.

2) *Przecięcie się dwóch płaszczyzn jest linia prostą*; gdyż jeśliby którykolwiek punkt wspólny dla dwóch płaszczyzn (fig. 265) AC i AE z dwoma innemi wspól-

nemi punktami A i B nie leżał na linii prostej, wtedy te dwie płaszczyzny tworzyłyby jedną tylko płaszczyznę czyli przystawałyby we wszystkich punktach.

3) Płaszczyznę można zawsze położyć na drugą, tak aby miała z nią trzy punkta wspólne: położywszy płaszczyznę AE na AC tak aby z nią miała dwa punkta A i B wspólne, obracam ją około linii prostéj AB dopóki punkt jéj E padnie na płaszczyznę AC w punkcie F; wtedy te dwie płaszczyzny mają trzy punkta wspólne A, B, F; — a zatém *wszystkie płaszczyzny są sobie równe, czyli przystają do siebie we wszystkich punktach*, gdyż zawsze można położyć jedną na drugą, tak aby miały trzy punkta wspólne, a mając trzy punkta wspólne, stanowią jedną tylko płaszczyznę.

4) *Linia prosta mająca z płaszczyzną dwa punkta A i C wspólne* (fig. 264), *przystaje do téj płaszczyzny we wszystkich punktach*, czyli jest linią téj płaszczyzny; gdyż przez dwa punkta A i C i jakikolwiek punkt trzeciej B danej płaszczyzny poprowadzona inna płaszczyzna, jest zbiorem linii prostych przechodzących przez linie BA i BC; a zatém linia AC wchodzi w skład tej płaszczyzny, a tém samém i danej jako przystającéj do poprowadzonej we wszystkich punktach. Tę własność płaszczyzny przyjmowano za główną, mówiąc że *płaszczyzna jest taka powierzchnia z którą linia prosta mając dwa punkta wspólne, cała leży na téj powierzchni*; lecz własność ta nie daje pojęcia o tworzeniu się płaszczyzny, nie przedstawiając jej jako szczególny przypadek powierzchni. Jeśliby powierzchnie będące szeregiem linii bez przerwy po sobie

idących, mających jednakową własność, odróżniały się jedne od drugich tém, że do jednéj linia prosta, zaś do innéj inna linia przystaje we wszystkich punktach, wtedy definicja ta płaszczyzny byłaby odpowiednią całéj nauce. lecz my odróżniamy powierzchnie jedne od drugich liniami tworzącemi te powierzchnie, a następnie własnością tych linii, przeto w takiém uważaniu powierzchni, płaszczyzna tworzy się linią prostą, mającą tę własność, że przechodzi przez dwie przecinające się linie proste.

5) Płaszczyzna ograniczona jest zbiorem linii prostych łączących punkta ograniczenia, inna zaś powierzchnia jest zbiorem innych linii łączących też samo punkta; a że linia prosta jest najkrótszą ze wszystkich linij mających z nią końce wspólne, przeto i *płaszczyzna jest najmniejszą ze wszystkich powierzchni mających to samo ograniczenie.*

308. Widzimy więc, że własności płaszczyzny są odpowiednie własnościom linii prostéj, przeto ona między powierzchniami zajmuje takie miejsce, jakie linia prosta między liniami. Położenie jéj oznacza się dwoma przecinającemi się liniami prostemi, albo trzema punktami nieleżącemi w kierunku linii prostéj, podobnie jak położenie linii prostéj dwoma punktami, tak że przez jeden punkt, dwa punkta, czyli linię prostą, dowolna liczba płaszczyzn przechodzić może, zaś przez cztery punkta lub dwie dowolne linie proste płaszczyzna przechodzić nie może. Dwie linie przecinające się lub równoległe oznaczają się trzema punktami, gdyż przez punkt do linii prostéj jedną równo-

ległę poprowadzić można, tak na płaszczyznie (78. Wn. 6 i 79) jako też i w przestrzeni jak później zobaczymy.

309. *Zt.* Płaszczyzna tworzy się posuwaniem się linii prostéj, jak przy strychowaniu zboża, robieniu cegieł, heblowaniu, gdyż *np.* ostrze hebla jest linią prostą. Na mocy téj własności że wszystkie płaszczyzny przystają do siebie, robi się płaszczyzna przy tynkowaniu. Na zasadzie własności że płaszczyzna jest najmniejszą ze wszystkich powierzchni mających to samo ograniczenie tworzy się płaszczyzna naciąganiem obić na bębnach, parawanach i t. p.

§ III. Powierzchnia walca.

310. *Powierzchnię walca, stanowią linie proste, bez przerwy po sobie idące, przechodzące przez punkta okręgu koła, i równoległe do prostéj przechodzącéj przez środek tego koła, zwanéj osią walca.* Z opisania pow. walca wynika:

1) Powierzchnia walca tworzy się: *a*) posuwaniem się linii prostéj, po dwóch okręgach równych i równoległych leżących na odmiennych płaszczyznach, równolegle do pierwotnego swego położenia; *b*) posuwaniem się linii prostéj równolegle i w jednakowéj odległości od linii zwanéj osią walca, przeto prostokąt obracany około jednego boku bokiem przeciwległym, opisuje tę powierzchnię; *c*) posuwaniem się okręgu koła, mającego środek na linii prostéj równo-

legle do pierwotnego swego położenia; *d*) posuwaniem się równoległém okręgu po trzech liniach prostych równoległych.

311. *Zt.* Przy toczeniu walca ostrze dłuta czyli linia prosta, jest równoległą do linii prostéj około któréj obraca się toczone ciało; przy wydrążaniu pow. walca okrąg koła posuwa się równolegle i ma środek na linii prostéj około któréj obraca się świder.

§ IV. Powierzchnia ostrokręgu.

312. *Powierzchnię ostrokręgu stanowią linie proste, bez przerwy po sobie idące, przechodzące przez punkt i okręg koła*; prosta łącząca ten punkt ze środkiem okręgu koła zowie się osią. Z opisania pow. ostrokręgu wynika, że ona tworzy się: *a*) obrotem prostéj około stałego punktu, tak aby dotykała się okręgu; przeto trójkąt prostokątny obracany około przyprostokątniéj, przeciwprostokątnią utworzy powierzchnią ostrokręgu, gdyż koniec drugiéj przyprostokątniéj opisze okręg koła. *b*) Posuwaniem się równoległém zmniejszającego się okręgu koła po trzech liniach prostych wychodzących z jednego punktu i nieleżących na jednéj płaszczyznie.

§. V. Powierzchnia kuli.

313. *Powierzchnią kuli są równe okręgi kół, bez przerwy po sobie idące, mające wspólny środek, zwa-*

ny środkiem kuli. Ona więc tworzy się obrotem półokręgu koła około średnicy nieruchomej.

314. *Uw.* Płaszczyzna, powierzchnia walca i ostrokręgu tworzą się linią prostą i dla tego należą do powierzchni *prostokreślnych*; powierzchnia zaś kuli tworzy się linią krzywą i należy do powierzchni *krzywokreślnych*, przytém dwie linie proste, trzech pierwszych powierzchni leżą na pł., przeto one są powierzchniami *rozwijalnemi* t. j. mogą się rozwinąć na płaszczyznie, tak pow. walca przecięta po linii prostéj tworzącéj, daje się położyć na płaszczyznie, tak jak papier w trąbkę zwinięty, to samo ściąga się i do powierzchni ostrokręgu. Powierzchnia kuli należy do powierzchni *nierozwijalnych*, bo ani z płaszczyzny utworzyć jéj nie można, ani ona rozwiniętą na płaszczyznie być nie może; — przytém trzy ostatnie powierzchnie należą do powierzchnii *obrotowych*, bo każda z nich tworzy się obrotem linii około osi.

ROZDZIAŁ II.

Połączenie płaszczyzny z liniami i płaszczyznami.

§ 1. Połączenie płaszczyzny z liniami.

A) *Linie prostopadłe do płaszczyzny.*

315. Linia prosta może się przecinać lub nieprzecinać z płaszczyzną; przecinając się ma z nią tylko

jeden punkt wspólny, gdyż mając dwa punkta przystawałaby do płaszczyzny. Linia prosta AB przecinająca, (fig. 266) z płaszczyzną MN nie ogranicza ani płaszczyzny — jak dwie proste przecinające się, ani przestrzeni — jak dwie przecinające się płaszczyzny, lecz z liniami leżącemi na płaszczyznie BC, BD, BE, przechodzącemi przez punkt przecięcia się, tworzy kąty, będące częścią płaszczyzn ABC, ABD, ACE... które dla odróżnienia od innych kątów zowią się kątami płaskiemi. A zatém linia z płaszczyzną nie tworzy kąta, t. j. połączenie linii z płaszczyzną nie daje żadnej ilości przestrzennéj, przeto tylko oznaczyć należy położenie linii względem płaszczyzny.

316. Położenie płaszczyzny zależy jedynie od położenia dwóch linii prostych przecinających, po których jakkolwiek posuwana linia prosta utworzy płaszczyznę, położenie więc linii prostéj względem płaszczyzny zależy od położenia téj linii względem dwóch linii prostych przecinających się wziętych na płaszczyznie; lecz że linia prosta, co do położenia, oznacza się tylko dwoma warunkami, przeto *linię prostą prostopadłą do dwóch linii leżących na płaszczyznie w punkcie ich przecięcia się*, *zowiemy liniją prostopadłą do płaszczyzny*, *i nawzajem*: *płaszczyzna któréj dwie linie są prostopadłe do linii ją przecinającéj, jest prostopadła do téj linii.*

317. *Tw. gł. Linia prostopadła do dwóch linii przecinających się w jéj spodku, jest prostopadłą do*

wszystkich linii przechodzących przez jéj spodek na płaszczyznie dwóch pierwszych (fig. 266).

Z punktu B linii AB wyprowadzam dwie linie prostopadle BD i BC, leżące na dwóch odmiennych płaszczyznach przechodzących przez linię AB i mam dowieść że linia BE leżąca na płaszczyznie MN dwóch linij BC i BD, jest prostopadłą do linii AB.

Przedłużam linię AB tak, aby BA'=BA; punkt C z D łączę linią prostą, przecinającą linię BE w punkcie E i punta C, D i E z punktami A i A' łączę liniami prostemi. Linia BC jest prostopadłą wyprowadzoną ze środka linii AA' na pł. ACA' przeto CA=CA'; dla podobnéj przyczyny i AD=A'D; trójkąty więc ACD i A'CD jako mające po trzy boki równe są sobie równe, zatém i AE=A'E, bo te linie po przystaniu trójkątów przystają do siebie; a że punkta B i C leżą w równéj odległości od końców linii AA', przeto znajdują się na linii BE prostopadłéj do AA' (44).

Wn. 1. *Punkta płaszczyzny* MN *prostopadłéj do linii* AA' *i przechodzącéj przez jéj środek, są w równéj odległości od jéj końców* A i A', gdyż leżą na prostopadłych przechodzących przez środek tej linii; punkt zaś wzięty nie na płaszczyznie, nie jest równo oddalony od końców linii, dla tego, że nie leży na prostopadłéj przechodzącéj przez środek linii.

Wn. 2. *Jeżeli z punktu wziętego na linii, wyprowadzimy do niéj prostopadle, to one leżą na jednéj płaszczyznie*; gdyż jeśliby linia BE nie leżała na płaszczyznie MN dwóch innych linii BC i BD, to poprowadziwszy przez linie AB i BE płaszczyznę, ta przecięłaby pł. MN w kierunku linii BF. Wtedy linia AB jako prostopadła do dwóch linii BC i BD leżących na pł. MN, byłaby prostopadłą i do linii BF a zatém na pł. ABE dwie linie BE i BF prostopadłe do linii AB poprowadzićby można, co być nie może (42).

Wn. 3. *Z punktu* B *wziętego na pł.* MN *jedną tylko prostopadłą* BA *wyprowadzić można* (fig. 267); bo gdyby można było wyprowadzić i drugą prostopadłą BD, to przez dwie linie przecinające się BA i BD poprowadzona płaszczyzna, przecięłaby się z płaszczyzną MN w kierunku linii BE, a zatém na płaszczyznie ABE dwie linie BA i BD do linii BE wyprowadzićby można, co być nie może.

Wn. 4. *Z punktu* A *wziętego nad pł.* MN, *jedną tylko prostopadłą* AB *wyprowadzić można* (fig. 267); bo gdyby można było wyprowadzić i drugą prostopadłą AC, to przez dwie linie AB i AC poprowadzona płaszczyzna przecięłaby się z płaszczyzną MN po linii CB, a tém samém z punktu A na pł. CAB dwie linie AC i AB prostopadłe do CB wyprowadzićby można, co być nie może (50).

318. *Tw. Jeżeli z punktu* A *wziętego nad pł.* MN *poprowadzimy do niéj prostopadłą* AB *tudzież pochyłe* AC, AD, AE... *to* a) *prostopadła* AB *jest najkrótszą ze wszystkich pochyłych*; b) *dwie pochyłe* AC *i* AE *równo oddalone od spodka prostopadłéj są sobie równe*; c) *pochyła* AD *bardziéj oddalona od spodka prostopadłéj* AB *jest dłuższą od pochyłéj* AC (fig. 268).

a) Prostopadła AB jest krótszą od pochyłéj AC, bo połączywszy punkt B z punktem C, na pł. BAC linia AB jest prostopadłą zaś AC pochyłą do linii BC (51); *b*) pochyłe AC i AE są sobie równe, jako leżące w trójkątach ABC i ABE mających po dwa boki i po kącie zawartym, jako prostym (317), równym; *c*) Pochyła AD jest dłuższa od pochyłéj AC mniéj oddalonéj od spodka prostopadłéj, gdyż odciąwszy BH=BC, pochyła AH=AC, zaś AH < AD jako leżąca na płaszczyznie BAD w mniejszéj odległości od spodka B prostopadłéj AB.

Wn. 1. I nawzajem: a) *pochyłe równe są równo oddalone od spodka prostopadłéj*; bo gdyby nie były równo oddalone, bardziéj oddalona byłaby dłuższą; b) *pochyła dłuższa jest bardziéj oddalona od spodka prostopadłéj*; gdyż nie może być tak samo oddalona, ani mniéj jak pochyła krótsza, dla podobnéj jak poprzednio przyczyny.

Wn. 2. *Pochyłe równe* AC, AE *czynią z prostopadłą* AB *kąty równe*, dla równości trójkątów ABC i ABE; a że dopełnienia kątów równych są sobie równe, przeto *kąty* ACB i AEB *zawarte między równemi pochyłemi a liniami łączącemi ich spodki ze spodkami prostopadłéj, są sobie równe. Pochyła większa* AD *czyni z prostopadłą* AB *kąt większy* BAD *od kąta* BAH jako, obejmujący od objętego, i dopełnienie pierwszego mniejsze od dopełnienia drugiego kąta.

Wn. 3. *Punkt* A *równo oddalony od trzech punktów* C, H, E, *pł. leży na linii* AB *prostopadłéj do téj płaszczyzny, przechodzącéj przez środek koła ozna-*

czonego temi trzema punktami: gdyż wszelka inna linia AG wychodząca z punktu A do pł., nie może być prostopadłą dla tego, że pochyłe równe AC, AH, AE byłyby równo oddalone od jéj spodka G, co być nie może, bo przez trzy punkta C, H, E, jeden tylko przechodzi okręg koła (175).

Wn. 4. Linia AB *czyniąca z trzema liniami* BC, BH, BE, *leżącemi na pł.* MN, *kąty równe, jest do niéj prostopadłą*: gdyż odciąwszy BC=BH=BE, linie AC, AH, AE są sobie równe, jako leżące w trójkątach mających po dwa boki i po kącie zawartym, z założenia rownym, a zatém linia AB jest prostopadłą, bo punkt A jest równo oddalony od trzech punktów C, H, E, (Wn. 3).

319. *Tw. Płaszczyzna* ABC *dwóch linii: jednéj* AB *prostopadłéj do pł.* MN, *i drugiéj* BC *przechodzącéj przez jéj spodek i prostopadłéj do linii* DE *leżażącéj na tejże płaszczyznie, jest prostopadłą do téj linii* DE (fig. 269).

Dla dowiedzenia że płaszczyzna ABC jest prostopadłą do linii DE, do któréj linia BC jest prostopadłą, potrzeba dowieść, że linia AC leżąca na téj płaszczyznie, jest prostopadłą do linii DE. Odcinam CE =CD i prowadzę linie BD, BE tudzież AD, AE. Linia BD=BE, jako równo oddalone od spodka C prostopadłéj BC do DE; linia AE=AD, jako równo oddalone od spodka B prostopadłéj AB; a że punkta A i C są równo oddalone od końców linii DE przeto linia AC jest prostopadłą do téj linii.

Wn. 1. *Jeżeli z punktu* A *wziętego nad pl.* MN, *poprowadzimy linię prostopadłą* AB, *i przez jéj spodek* B, *linię* BC *prostopadłą do linii* DE *leżącéj na pł.*, *to linia* AC, *łącząca spodek téj prostopadłéj z którymkolwiek punktem pierwszéj prostopadłéj*, *jest prostopadłą do linii* DE *leżącéj na pł.* MN.

Wn. 2 *Jeśli do linii* DE *leżącéj na płaszczyznie* MN *z jakiegokolwiek punktu* C *poprowadzimy dwie linie prostopadłe*; *jedną* CB *na pł.* MN, *zaś drugą* CA *na innéj płaszczyznie przechodzącéj przez tę linię* DE, *to prostopadła* AB *wyprowadzona z jakiegokolwiek punktu* A *drugiéj prostopadłéj na pierwszą*, *jest prostopadłą do pł.* MN; gdyż linia DE jest prostopadłą do płasz. ACB, a zatem ona z linią CB przechodzącą przez jéj spodek i prostopadłą do linii AB leżącéj na téjże pł. ACB, znajdują się na pł. MN prostopadłéj do linii AB.

320. *Zg. Poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do linii* AB (fig. 266).

a) *Z punktu* B *danego na téj linii*; z punktu B prowadzę dwie linie BD i BC prostopadłe do linii danéj AB, na dwóch odmiennych płaszczyznach przechodzących przez tą linię, a płaszczyzna MN przechodząca przez te dwie prostopadłe BD i BC jest żądaną (316); *b*) *z punktu* D *leżącego za linią*; na pł. przechodzącéj przez punkt D i linię AB prowadzę linię DB prostopadłą do AB, i z punktu B wyprowadzam drugą linię BC prostopadłą do AB leżącą na innéj płaszczyznie przechodzącéj przez AB, a płaszczyzna MN dwóch linii BD i BC jest żądaną.

321. *Zg. Poprowadzić linię prostopadłą do pł.* MN (fig. 266), Przez punkt dany prowadzę płaszczyznę AEB prostopadłą do linii DC leżącéj na płaszczyznie danéj MN i na niéj z punktu danego (B na płaszczyznie lub A nad pł.) wyprowadzona linia prostopadła, do linii BE prostopadłéj na płaszczyznie danéj do DC, (320) jest żądaną, gdyż linia DC prostopadła do pł. ABE z linią EB przechodzącą przez jéj spodek E, prostopadłą do linii AB leżącéj na tejże płaszczyznie, znajdują się na płaszczyznie MN prostopadłéj do linii AB (319).

322. *Zt.* W praktyce linia ustawia się prostopadle do płaszczyzny, na téj zasadzie że punkta linii prostopadłéj do płaszczyzny są w równéj odległości od trzech punktów téj płaszczyzny (318. Wn. 3); przeto jeśli jest punkt dany na płaszczyznie, biorą się trzy punkta w równéj od niego odległości, w tych trzech punktach przytwierdzają się trzy równe linie proste, drągi lub sznurki, a punkt zejścia się końców tych trzech linii, daje drugi punkt żądanéj prostopadłéj; jeśli zaś punkt dany jest nad pł., w tym punkcie przytwierdza się linia i oznaczają się na płaszczyznie trzy punkta, którym odpowiada koniec przytwierdzonéj linii, a środek koła oznaczonego temi trzema punktami jest drugim punktem żądanéj prostopadłéj.

B) *Linia nachylona do płaszczyzny.*

323. Linia przecinająca się z płaszczyzną, niepro-

stopadła, zowie się linią nachyloną; jak oddalenie dwóch punktów mierzy linia prosta jako najkrótsza ze wszystkich innych linii, podobnie *nachylenie linii do płaszczyzny, mierzy kąt zawarty między tą linią a linią łączącą spodek nachylonéj ze spodkiem prostopadłéj wyprowadzonéj z jéj punktu na płaszczyznę*, dla tego, że jest najmniejszy ze wszystkich kątów które nachylona czyni z liniami płaszczyzny, przechodzącemi przez jéj spodek: odciąwszy bowiem na innéj linii AD (fig. 270) linię AC łączącą spodki, i połączywszy punkt D ztąd powstały z punktem B z którego wyprowadziliśmy prostopadłę BC, linia BD $>$ BC (318), a tém samém i kąt BAD $>$ BAC (100). — *Prostopadłe wyprowadzone z punktów pochyłéj* AB *do ramienia* AC *kąta nachylenia, są prostopadłe do płaszczyzny* MN; gdyż ze spodka pochyłéj wyprowadzona prostopadła GH do ramienia AC na pł. MN, jest prostopadłą i do pochyłej AB (319), a zatem prostopadła EF wyprowadzona z punktu pochyłej do ramienia jest prostopadłą do pł. MN (319. Wn. 1); *wszystkie więc prostopadłe wyprowadzone z punktów pochyłéj do pł.*, jako prostopadłe do ramienia kąta nachylenia (317. Wn. 4), *leżą na jednéj płaszczyznie.*

324. *Tw. Kąt* DAE *zawarty między dwoma pochyłemi* DA i AE, *jest mniejszy od kąta* DBE *zawartego między liniami* BD i EB, *łączącemi ich spodki ze spodkiem prostopadłéj do pł., wyprowadzonéj z punktu ich przecięcia się* A (fig. 269).

Ze spodka B prostopadłéj AB wyprowadzam linię

BC, prostopadłą do linii DE łączącéj spodki pochyłych i łączę punkt C z punktem A przecięcia się pochyłych, to linia AC jest prostopadłą do ED (319); obracam trójkąt DAE około linii DE, to w czasie obrotu linia AC będzie także prostopadłą do DE a zatém leżeć będzie na płaszczyznie ACB prostopadłéj do DE (317. Wn. 2), przeto gdy trójkąt DAE padnie na pł. MN, prostopadla AC padnie na prostopadłę CB, zaś punkt A padnie za punktem B, gdyż AC > CB, jako pochyła do linii AB; kąt więc DFE=DAE jest mniejszy od kąta DBE (101).

325. *Zg. Przez punkt dany, poprowadzić linię nachyloną do pł.* MN *pod kątem danym* (fig. 269).

a) *Punkt* C *na płaszczyznie*; przez punkt C prowadzę dowolną linię DE i do niéj w tym punkcie prostopadłą płaszczyznę ACB (320), zaś na niéj linię CA czyniącą z linią CB kąt dany. *b*) *Punkt* A *nad pł.*; przez punkt A prowadzę płaszczyznę ABC prostopadłą do dowolnéj linii DE leżącej na danéj płaszczyznie MN i na niéj przez punkt A linię AC czyniącą z linią BC kąt dany.

326. *Zt.* W praktyce linia AC nachylona do płaszczyzny, oznacza się długością linii BC, łączącéj jéj spodek ze spodkiem prostopadłéj wyrażoną długością prostopadłéj, i tak jeśli BC=AB to nachylenie się równa się 1; jeśli BC=2AB to nach. 2; jeśli 3BC=7AB to nach.=$^7/_3$ i w ogólnosci nach. = BC : AB.

C) *Linia prosta równoległa do płaszczyzny.*

327. Linia prosta nieograniczona niemająca pun-

ktu wspólnego z nieograniczoną płaszczyzną zowie się *linią nieprzecinającą się z płaszczyzną; linią zaś równoległą do pl. zowie się linia, któréj wszystkie punkta są równo oddalone od płaszczyzny*; jak linie proste nieprzecinające się są względem siebie równoległe, tak podobnie zobaczymy, że i linia nieprzecinająca się z płaszczyzną, jest względem niéj równoległa.

328. *Tw. Jeżeli z dwóch linii* CA i DB *równoległych leżących na jednéj płaszczyznie, jedna* CA *jest prostopadłą do płaszczyzny* MN, *to i druga* DB *jest także prostopadłą* (fig. 371).

Prowadzę FG prostopadłą do linii AB łączącej spodki równoległych CA i DB, to pł. CAB jest prostopadłą do linii FG (319), a tém samém i linia DB leżąca na téj płaszczyznie jest prostopadłą do linii FG; a że linia DB jest także prostopadłą i do linii AB jako równoległa do linii CA, przeto DB jest prostopadłą do płaszczyzny MN.

329. *Tw. Z punktu* A, *wziętego nad linią prostą* CD *w przestrzeni, jedną tylko linię do niéj równoległą poprowadzić można* (fig. 271).

Z punktu A na pł. DCA, prowadzę linię AB równoległą do CD, i mam dowieść że oprócz linii AB, innéj równoległéj być nie może. Z punktu A prowadzę linię prostopadłą do CD, która, jako wspólna prostopadła, mierzy odległość punktów linii CD od linii AB; jeśliby więc oprócz linii AB była inna linia równoległa do linii CD, to odległość punktu A od linii CD i odległość punktu C od drugiéj równoległéj AE byłaby jednakową, a zatém i linia AE byłaby także prostopadłą do linii CA, czyli linia ta leżałaby na pł. MN prostopadłéj do linii CA; potrzeba więc dowieść że punkta linii CD nie są równo oddalone od linii AE.

Prowadzę z punktu D linię DB prostopadłą do AB, to ona jest prostopadłą i do pł. MN (328), a zatem z punktu D wyprowadzona prostopadła DE do linii AE, jako pochyła do pł. MN jest dłuższa od DB=CA, a tém samém, punkta linii CD nie są jednakowo oddalone od linii AE, czyli te dwie linie nie są względem siebie równoległe.

Wn. 1. *Dwie linie równoległe w przestrzeni leżą na jednéj płaszczyznie*; bo gdyby nieleżały na jednéj płaszczyznie, wtedy poprowadziwszy przez jedną z nich i punkt drugiéj linii płaszczyznę, przez ten punkt moglibyśmy poprowadzić linię równoległą do pierwszéj, a tém samém przez ten punkt dwie linie równoległe do pierwszéj poprowadzićby można.

Wn. 2. *Dwie linie* CA i DB *prostopadłe do pł.* MN (fig. 271), *są względem siebie równoległe*; gdyż obie te linie są prostopadłe do linii AB łączącej ich spodki, i leżą na jednéj płaszczyznie CAB (78. Wn. 3), bo jeśliby linia DB nie leżała na pł. CAB, to poprowadziwszy na téj pł. z punktu B linię prostopadłą do AB, ona jako równoległa do AC, byłaby także prostopadłą do pł. MN, co być nie może (317. Wn. 3),

Wn. 3. *Dwie linie* AB i EF *równoległe do trzeciéj* DC, *leżącéj na odmiennéj płaszczyznie, są względem siebie równoległe* (fig. 272); gdyż poprowadziwszy pł. OP prostopadłą do linii trzeciéj CD, ona będzie prostopadłą i do dwóch pierwszych linii AB i EF, a zatém te linie jako prostopadłe do pł. OP, są względem siebie równoległe.

Uw. Linie nieprzecinające się w przestrzeni, albo są równoległe i wtedy leżą na jednéj płaszczyznie, albo są krzyżujące się i nie leżą na jednéj płaszczyznie; dawna więc definicja że *linie nieprzecinające się na płaszczyznie, są względem siebie równoległe*, dla tego nawet nie może być definicją, że te same linie proste nieprzecinające się w przestrzeni, mogą być lub nie być równoległe, a nawet w szczególnym tylko przypadku, t. j. gdy leżą na jednéj płaszczyznie są równoległe.

330. *Tw. Linia* CD *prostopadła do linii* CA *prostodadłéj do pł.* MN *jest równoległa do téj płaszczyzny* (fig. 271).

Wyprowadziwszy na pł. ACD z punktu jéj D linię DB prostopadłą do linii AB wspólnego przecięcia się płaszczyzn MN i ACD, linie AC i BD leżące na jednéj płaszczyznie ACD i prostopadłe do linii AB są względem siebie równoległe, a zatém DB jest także prostopadłą do pł. MN. Linia DB=CA jako równoległe zawarte między równoległemi CD i AB, gdyż AB i CD są prostopadłe do AC i leżą na jednéj płaszczyznie ACD.

Wn. 1. Prostopadłe wyprowadzone z punktów linii CD do wspólnego przecięcia się AB płaszczyzn MN i ACD są prostopadłe do pł. MN, a zatém nawzajem: *prostopadłe wyprowadzone do pł.* MN *z pun-*

któw linii CD *równoległéj do téj płaszczyzny,* mają swe spodki na linii AB, czyli *leżą na jednéj płaszczyznie* ACD (317. Wn. 4).

Wn. 2. *Z punktu* C *wziętego nad pł.* MN *można poprowadzić dowolną liczbę linii równoległych do płaszczyzny*; gdyż z punktu C do linii CA można poprowadzić dowolną liczbę linii prostopadłych.

Wn. 3. *Linia* CD *równoległa do linii* HK *leżącéj na pł.* MN. *jest równoległą i do pł.* MN; gdyż wyprowadziwszy z punktu C linię CA prostopadłą do płas. MN, i przez jéj spodek A linię AB równoległą do HK, ona będzie równoległą i do linii CD (329. Wn. 3) a tém samém linia CD jest prostopadłą do lini CA.

331. *Tw. Jeżeli przez linię* CD *równoległą do pł.* MN. *poprowadzimy pł.* DCH *przecinającą się z pierwszą po linii* HK, *to przecięcie się to, jest równoległe do pierwszéj linii* CD (fig. 271).

Linia CD, jako nieprzecinająca się z płaszczyzną MN, nieprzecina się z linią HK; a że leży znią na jednej pł., przeto jest względem niéj równoległą (79).

Wn. 1. *Jeżeli przez pnukt* H *wzięty na pł. poprowadzimy linię* HK *równoległą do linii* CD *równoległéj do pł.* MN, *to linia ta leży na pł.* MN; bo gdyby nieleżała na téj płaszczyznie, wtedy płaszczyzna poprowadzona przez linię CD i punkt H przecięłaby pł. MN po linii równoległéj do CD, a tém samém przez punkt H dwie równoległe do lini CD poprowadzićby można, co być nie może (329).

Wn. 2. *Dwie linie równoległe* CA i DB, *zawarte między linią* CD *i płaszczyzną* MN *do niéj równoległą, są sobie równe*; bo płaszczyzna poprowadzona przez dwie linie równoległe CA i DB przecina pł. MN po linii AB równoległéj do linii CD, zaś linie równoległe CA i DB zawarte między liniami równoległemi CD i AB są sobie równe (115, *b*).

Uw. Jak położenie dwóch linii prostych zależało od kątów które czynią ze wspólną poprzeczną, tak położenie linii względem pł., zależy od położenia téj linii względem linii tworzących płaszczyznę, a zatém opiéra się na połączeniu linii prostych.

332. *Zg. Przez punkt dany* C *poprowadzić linię równoległą do pł.* MN (fig. 271).

a) Z punktu C prowadzę linię AC prostopadłą do pł. MN i drugą linię prostopadłą do téj płaszczyzny lub równoległą do linii AC, i odcinam DB=AC, a linia CD jest żądaną; *b*) Prowadzę z punktu danego linię prostopadłą do pł. MN, i do téj linii, linię prostopadłą w punkcie C (330); *c*) Przez punkt C prowadzę płaszczyznę przecinającą pł. MN, a do ich przecięcia się, przez punkt C, linię równoległą (330. Wn. 3). *d*) Na płaszczyznie danéj prowadzę dowolną linię, a przez punkt dany linię równoległą do téj linii.

333. *Zg. Przez punkt lub linię daną poprowadzić płaszczyznę równoległą do linii danéj.* Przez punkt dany lub punkt linii danéj, prowadzę linię równole-

głą do linii danéj, a płaszczyzna przez nią przechodząca jest równoległa do linii danéj.

§. II. Połączenie płaszczyzn z płaszczyznami, nieograniczającemi przestrzeni.

A) *Płaszczyzny prostopadłe.*

334. Dwie płaszczyzny w przestrzeni mogą się przecinać lub nieprzecinać; płaszczyzny przecinające się stają się stycznemi, gdy przystają do siebie, dla tego że przystawanie jest przejściem z przecinania się do przecinania się, podobnie jak w liniach prostych (69); płaszczyzny zaś nieprzecinające się, są równoległemi gdy punkta jednéj leżą w jednakowéj odległości od drugiéj płaszczyzny czyli gdy linie proste jednéj płaszczyzny są równoległe do drugiéj, — jak linie proste nieprzecinające się na pł. są względem siebie równoległe (79), tak podobnie zobaczymy, że i płaszczyzny nieprzecinające się, są względem siebie równoległe.

335. Dwie płaszczyzny BD i BF (f. 265) przecinające się ograniczają z dwóch stron przestrzeń, która zowie się kątem *dwuściennym* EBAC; *kąt* więc *dwuścienny* jako *przestrzeń zawarta między dwoma przecinającemi się płaszczyznami*, pod względem *kształtu* wyraża *nachylenie się jednéj płaszczyzny do drugiéj*, pod względem zaś *wielkości*, *pewną część nieograniczonéj przestrzeni, tak że poznać wielkość kąta dwuściennego, jest to dowiedzieć się jaką on jest częścią całéj przestrzeni.*

Przecięcie się dwóch płaszczyzn zowie się *krawędzią kąta*, płaszczyzny zaś przecinające się, *ścianami kąta. Kąty dwuścienne przyległe zowią się te które mają krawędź wspólną, jedną ścianę wspólną, zaś dwie ściany inne na jednéj płaszczyznie; kąty wierzchołkiem przeciwległe, są te które mają krawędź wspólną, zaś ściany jednego kąta, są przedłużeniem ścian drugiego. Kąty dwuśc. są równe, gdy są jednakową częścią przestrzeni, i mogą być równe tylko przez przystawanie, nie zaś przez symetryą, bo składają się z dwóch ścian. Kąty dwuśc. przyległe równe zowią się prostemi, płaszczyzna zaś czyniąca z drugą kąty przyległe równe, zowie się prostopadłą. Kąt płaski mający ramiona na ścianach kąta dwuściennego, prostopadłe do krawędzi tego kąta, zowie się kątem odpowiednim kątowi dwuściennemu.*

336. *Tw. Jeżeli kąty dwuścienne* ABCD i *abcd są sobie równe, to i kąty płaskie im odpowiednie* DBE i *dbe, są także równe i nawzajem* (fig. 273).

a) Przenoszę kąt *abcd* na ABCD, tak aby punkt *b* padł na punkt B, ramię *bd* padło na ramię BD, to ramię *bc* padnie na ramie BC dla równości kątów prostych *dbc* i DBC; płaszczyzna *ba* padnie na pł. BA dla równości kątów dwuściennych i linia *be* padnie na BE dla równości kątów *cbe* i CBE prostych, a zatém kąty odpowiednie *dbe* i DBE przystały do siebie.

b) Kąt dwuścienny *abcd* przenoszę na kąt dwuścienny ABCD tak, aby punkt *b* padł na punkt B i ramię *bd* przystało do ramienia BD, to ramię *be* przystanie do ramienia BE dla równości kątów odpowiednich *dbe* i DBE; krawędź *bc* przystanie do krawędzi BC, gdyż pł. *dbe* przystała do DBE i punkt *b* do punktu B, przeto obie te krawędzie *bc* i BC są prostopadłe do płaszczyzny DBE w punkcie B i są tylko jedną linią (317. Wn. 3), a tém samém i ściany ich przystały do siebie.

337. *Tw. gł. Kąty dwuścienne* ABCD i abcd *mają się do siebie jak odpowiednie im kąty pł.* DBE i dbe (fig. 274).

Przenoszę kąt *dbe* na kąt DBE,— t. j. kreślę kąt DBG, GBJ równy kątowi *dbe*, — zawiera się w nim dwa razy i pozostaje kąt EBJ ≺ *ebd*; poprowadziwszy przez linie BG, BJ, i krawędź BC płaszczyzny, otrzymamy kąty dwuścienne DBCG, GBCJ równe kątowi dwuścien. *dbce* a tém samém, ile razy kąt odpowiedni *dbe* zawiera się w kącie DBE, tyle razy i kąt dwuścienny *dbce* zawiera się w kącie dwuściennym DBCE; podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że ile razy kąt JBE zawiera się w kącie *dbe*, tyle razy i kąt dwuścienny *dbce* zawiera się w kącie dwuściennym DBCE i t. d.; przeto stosunek kątów pł. *dbe* i DBE tudzież kątów dwuśc. *dbce* i DBCE wyraża się jednakową liczbą, czyli stosunki te są sobie równe i składają proporcyę.

Wn. 1. Poprowadziwszy do wspólnego przecięcia się dwóch pł. płaszczyznę prostopadłą, przecięcia się jéj z temi pł. są prostopadłe do krawędzi, a zatém kąty zawarte między temi przecięciami są kątami odpowiedniemi kątom dwuściennym; ztąd wynika *a*) summa kątów przyległych dwuściennych równa się II dwuściennym; *b*) kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe. Podobnie jak w kątach pł. kąt mniejszy od prostego zowie się ostrym, większy zaś rozwartym.

Wn. 2. *Miarą kąta dwuściennego* DBCE *jest odpowiedni mu kąt płaski* DBE, gdyż ile razy jedność kąta płaskiego *dbe* zawiera się w kącie płaskim DBE, tyle razy jedność *dbce* kąta dwuściennego zawiera się w kącie dwuściennym DBCE; a zatém aby się dowiedzieć, ile razy jedność kąta dwuścien. *dbce* zawiera się w mierzonym kącie DBCE t. j. aby zmierzyć ten kąt, mierzymy kąt płaski DBE jemu odpowiedni, jednością kąta płaskiego. Lecz mierząc kąt płaski DBE mierzymy łuk mu odpowiedni, i jeśli on zawiera 85^0 czyli $^{85}/_{360}$ części okręgu, to kąt DBE zawiera 85 kątów z których każdy jest 360^0 częścią pł., zwanych stopniami kąta płaskiego, a tém samém kąt DBCE zawiera 85 kątów dwuściennych z których każdy jest 360 częścią przestrzeni. Kąty więc dwuścienne wyrażają się stop., minut., sek., i t. d. podobnie jak łuki okręgu lub kąty płaskie, bez dodania jakie są te stopnie. Wiedząc bowiem, że jedność jest jednakowego gatunku z mierzoną wielkością, wiemy tém samém, że łuk jest częścią okręgu, jedność więc czyli stopień jest 360-tą częścią okręgu; kąt płaski jest częścią płaszczyzny, jedność więc czyli stopień jest 360-tą częścią płaszczyzny; kąt dwuścienny jest częścią przestrzeni, jedność więc czyli stopień jest 360tą częścią przestrzeni;—zaś minuty, sekun. i t. d. są częściami jedności.

338. *Tw. Płaszczyzna* OP *przechodząca przez linię* AB *prostopadłą do drugiéj pł.* MN, *jest prostopadłą do téj płaszczyzny* MN (fig. 275).

Poprowadziwszy bowiem ze spodka B prostopadłéj AB, linię BC prostopadłą do wspólnego przecięcia się BP płaszczyzn, linia ta jest prostopadłą i do linii BC (316 i 317), a tém samém kąt ABC jest prosty.

Wn. 1. *Linia* AB *prostopadła do wspólnego przecięcia się* BP *płaszczyzn prostopadłych, leżąca na jednéj z nich* OP *jest prostopadłą do drugiéj* MN; gdyż poprowadziwszy na drugiéj pł. MN linię BC prostopadłą także do wspólnego przecięcia się BP w punkcie B, kąt zawarty między liniami BA i BC jako odpowiedni kątowi dwuściennemu tych pł., jest prosty, a tém samém linia AB prostopadłą do linii BC; a że ta linia z założenia jest prostopadłą do wspólnego przecięcia się BP, przeto jest prostopadłą i do pł. MN. I nawzajem: *z punktu leżącego na wspólnem przecięciu się dwóch pł. prostopadłych* OP i MN, *poprowadzona linia* AB *prostopadła do jednéj* MN, *leży na drugiéj pł.* OP; gdyż poprowadziwszy na drugiéj pł. OP linię BD prostopadłą do wspólnego przecięcia się BP w punkcie B, podług poprzedzającego onaby była by także prostopadłą do pierwszéj pł. MN, co być nie może (317. Wn. 3).

Wn. 2. *Przez linią* BP *daną na pł.* MN, *jedną tyl-*

ko pł. OP *do niéj prostopadłą poprowadzić można*; gdyż z punktu B téj linii, linia leżąca na pł. OP, prostopadła do linii BP, jest prostopadła do pł. MN, zaś z punktu B do pł. MN jedną tylko linię prostopadłą poprowadzić można.

Wn. 3. *Przez linię* OA *daną nad pł.* MN, *jedną tylko pł.* OP *do niéj prostopadłą poprowadzić można*; gdyż jeśliby można było poprowadzić dwie pł. prostopadłe, to na każdéj z nich z punktu A danéj linii, poprowadzona linia prostopadła do wspólnego przecięcia się z pł. daną MN, byłaby prostopadłą do téj pł., a tém samém z tego punktu dwie linie prostopadłe do pł. MN poprowadzićby można, co być nie może (317. Wn. 4).

Wn. 4. *Linia* AB *przecięcia się dwóch pł.* OP i QR *prostopadłych do trzeciéj* MN, *jest do niéj prostopadła* (fig. 276); gdyż wyprowadziwszy z punktu B wspólnego dla przecięcia się dwóch pł. OP i QR z pł. trzecią MN linię prostopadłą do téj pł., ona leży tak na pierwszéj jako i na drugiéj pł. (338. Wn. 1), a zatém jest ich wspólném przecięciem się.

339. *Zg. Przez linię daną* AO, *poprowadzić pł. prostopadłą do pł. danéj* MN. (fig. 276).

Z punktu A danéj linii prowadzę linię AB prostopadłą do pł. N*N* (321) a pł. przechodząca przez linie AO i AB jest żądaną (338).

340. *Zt.* Aby belkę postawić prostopadle do pł. danéj, przy zacięciu robimy krawędzie podstawy pro-

stopadłe do bocznych krawędzi, wtedy każda boczna krawędź jest prostopadłą do dwóch linii podstawy, a zatém i ściany są prostopadłe do podstawy (338); postawiwszy więc podstawę belki na pł. danéj, ściany jéj są także prostopadłe do téj pł. Chcąc ustawić belkę tak aby krawędzie jéj boczne były pionowe, podług pionu ustawiamy jedną, a następnie drugą ścianę, a przecięcie się ich będzie pionowe (338. Wn. 4).

B) *Płaszczyzny nachylone.*

341. *Tw. Płaszczyzna* AD *przechodząca przez krawędź* AB *i linią* JF *połowiącą kąt* GJH *odpowiedni kątowi dwuściennemu* CBAE, *połowi ten kąt* (fig. 277).

Kąty DBAE i CBAD mające odpowiednie kąty HJF i FJG równe są sobie.

Wn. 1. *Punkta pł.* AD *połowiącéj kąt dwuścienny* CBAE *są równo oddalone od ścian tego kąta*; poprowadziwszy bowiem z punktu F téj pł. linie FH i FG prostopadłe do ścian kąta CBAE, płaszczyzna GJH przechodząca przez te linie jest prostopadłą do obudwóch ścian (338), przeto krawędź AB, jako przecięcie się dwóch płaszczyzn CA i AE prostopadłych do pł. GJH, jest prostopadła do téj pł. (338. Wn. 4), a zatém kąty HJF i FJG jako odpowiednie kątom dwuściennym (317) CBAD i DBAE, są sobie równe, a tém samém i prostopadłe FH i FG są sobie równe (102).

Wn. 2. Punkt K *wzięty zewnątrz pł.* AD, *połowiącéj kąt dwuścienny, nie jest równo oddalony od ramion tego kąta*; gdyż poprowadziwszy z tego punktu linie KG i KL prostopadłe do ścian kąta, pł. przez nie przechodząca jest prostopadłą do krawędzi AB, a zatém kąty HJF i FJG jako odpowiednie kątom dwuściennym równym są sobie równe, punkt zaś K nieleżący na JF połowiącéj kąt płaski GJH nie jest równo oddalony od ramion czyli KL ⋗ KG.

Wn. 3. *Jeśli z punktu* F *poprowadzimy dwie linie* FH i FG *prostopadłe do dwóch pł.* AE i AD *przecinających się, to kąt* GFH *między niemi zawarty jest dopełnieniem kąta* GJH *odpowiedniego kątowi dwuściennemu tych pł.*; gdyż w czworokącie FJ, dwa kąty są proste, przeto dwa inne spełniają się do dwóch kątów prostych.

342. *Tw. Jeżeli przez linię nachyloną do pł.* MN *poprowadzimy pł. prostopadłą* ABS, *tudzież pochyłe* ABF, ABC, ABD..., *to jeśli przecięcia* BF i BC *dwóch pł.* ABF i ABC *czynią z przecięciem* BS *prostopadłéj kąty* a) *równe* SBF i SBC, *nachylenia się tych pł. do pł.* MN, *równie jak i kąty pł. zawarte między pochyłą* AB *i z przecięciami się* BF i BC *są sobie równe*; b) *jeśli zaś nierówne*, SBD ⋗ SBC *tworząca kąt większy, jest bardziéj nachyloną do pł.* MN *i linia nachylona* AB *z jéj przecięciem* BD *tworzy kąt większy* ABD ⋗ ABC (fig. 278).

Z punktu A linii nachylonéj AB prowadzę linię AS prostopadłą do przecięcia się BS pł. prostopadłéj

ABS, która jest zarazem prostopadłą i do pł. MN (338. Wn. 1); przez spodek S téj prostopadłéj AS prowadzę linie prostopadłe SF, SC, SD do przecięcia się płaszczyzn pochyłych z pł. MN i punkt A łączę z ich spodkami, to linie AF, AC, AD... są także prostopadłe do tych przecięć (319), a tém samém kąty SFA, SCA, SDA... są odpowiednie kątom dwuściennym zawartym między pł. pochyłemi a pł. MN (335). A zatém potrzeba dowieść a) jeśli kąt SBF=SBC, to kąt SFA=SCA i ABF=ABC. Trójkąty SBF i SBC mające przeciwprostokątnią BS wspólną i po dwa kąty równe, jedne jako proste a drugie z założenia, mają pozostałe części równe, SF=SC; trójkąty więc prostokątne SAF i SAC mające bok AS wspólny, bok SF=SC, mają i pozostałe części równe (92) a tém samém kąt SFA=SCA, czyli nachylenia się pł. ABF i ABC do pł. MN są jednakowe.—Trójkąty prostokąta ABF i ABC mające przeciwprostokątnią AB wspólną i bok AF=AC, jako leżące w trójkątach ASF i ASC, mają kąt ABF=ABC, czyli nachylona AB czyni z przecięciami się pł. ABF i ABC z pł. MN, kąty równe.

b) Jeśli kąt SBC < SBD, to kąt SCA > SDA i ABC < ABD. Linia SD > SG, jako całość od części, zaś SG > SC, jako pochyła od prostopadłéj, przeto SD > SC a tém samém i AD > AC (318), zatém i kąt SAD > SAC (318. Wn. 2), a dopełnienie pierwszego ADS < ACS, czyli pł. ABD bardziéj nachylona do pł. MN aniżeli pł. ABC.—Odcinam BH=BC, to AH > DA > AC; a zatém trójkąty ABH i ABC mające po dwa boki równe lecz bok trzeci AH > AC, mają i kąt ABD > ABC (100), czyli linia nachylona AB czyni kąt większy z AD aniżeli z AC.

Wn. 1. I nawzajem: *przecięcia się pł.* ABF i ABC *z trzecią* MN *czynią z przecięciem się pł. prostopadłéj przechodzącéj przez linię wspólnego ich przecięcia się kąty równe, jeśli nachylenie się tych płaszczyzn do trzeciéj są jednakowe*; gdyż jeśliby nie czyniły kątów równych, to i nachylenia nie byłyby jednakowe i t. d.

343. *Dwie pł.* A*ac*C i A*ad*D *przecinające się, przecięte trzecią* D*dc*C *dają krawędzie* A*a*, D*d*, C*c* *albo równoległe, albo przecinające się w jednym punkcie* (fig. 284).

Krawędź D*d* albo jest równoległą albo przecina pł. A*ac*C; w pierwszym razie ona będąc równoległą do pł. A*ac*C jest równoległą tak do krawędzi A*a* jako też i do *c*C (331), a zatém linie A*a* i C*c* równoległe do trzeciéj D*d*, są równoległe (329. Wn. 3); w drugim razie kwrawędź D*d* przecina pł. A*ac*C w punkcie B, punkt więc B leży naprzód na pł A*ac*C, powtóre leży na pł. A*ad*D i D*dc*C, gdyż krawędź D*d* jako wspólne ich przecięcie się leży na tych pł.; punkt więc B jest wspólny dla trzech krawędzi i trzech pł. czyli te pł. przecinają się w jednym punkcie.

344. *Zg. Pod kątem danym poprowadzić płaszczyznę do pł. danéj* MN (fig. 279).

a) *Dowolną*; na danéj pł. MN prowadzę dowolną linię BC, i do niéj pł. prostopadłą ASC (320); na niéj kreślę linię AC czyniącą kąt dany z linią CS przecięcia się pł. prostopadłéj z płaszczyzną daną; a płaszczyzna przechodząca przez tę linię AC i poprowadzoną dowolnie BC jest żądaną.

b) *Przez punkt dany*; jeśli punkt dany B, leży na pł. MN, przez ten punkt prowadzę dowolną linię BC, i postępuję jak poprzednio, *jeśli zaś dany punkt* A *nad pł.*, to przez ten punkt A prowadzę linię AC pochyloną do pł. MN pod kątem danym (325) i do ramienia SC kąta nachylenia, prowadzę na danéj pł. MN, przez spodek C nachylonéj, linię prostopadłą CB, to płaszczyzna przechodząca przez linię nachyloną AC i prostopadłą BC do ramienia kąta nachylenia, jest żądaną, gdyż kąt nachylenia ACS jest kątem odpowiednim kątowi dwuściennemu MBCA zawartemu między pł. daną MN i poprowadzoną BCA. *c*) *Przez linię daną*; *jeśli linia dana* AB *nachylona do pł.* MN, 1) przedłużam ją do przecięcia się z tą płaszczyzną w punkcie B, i przez punkt jéj A prowadzę linię AC czyniącą z pł. daną MN kąt dany ACS; 2) z punktu A prowadzę linię AS prostopadłą do pł. MN i odległością SC jéj spodka od spodka pochyłéj zakreślam łuk na danéj pł, do którego z punktu B prowadzę styczną BE; 3) punkt A z punktem E łączę linią prostą, a pł. przechodząca przez linie BE i AE jest żądaną; gdyż pochyłe AE, AC, jako równo oddalone od spodka prostopadłéj AS, czynią z tą prostopadłą, kąty SAE i SAC równe (318. Wn. 2), przeto i kąty AES=ACS jako ich dopełnienia, czyli że linia AE jest nachyloną do pł. MN pod kątem danym; linia zaś BE jako styczna jest prostopadła do promienia SE, przeto i linia AE jest prostopadłą do BE (319), a zatem kąt AES jest odpowiednim kątowi dwuściennemu MBEA zawartemu między płaszczyznami MN i BEA.—*Jeżeli linia dana jest równoległa do pł.* MN to linię styczną do okręgu S, prowadzę równolegle do danéj linii, a płaszczyzna przechodząca przez linię pod kątem danym i tą równoległę, przejdzie przez linię daną, gdyż dwie linie równoległe leżą na jednéj płaszczyznie.

C) *Płaszczyzny równoległe.*

345. *Tw. Dwie pł.* MN i OP *prostopadłe do linii* AB *nieprzecinają się z sobą*, i nawzajem: *linia* AB *prostopadła do jednéj z płaszczyzn nieprzecinających się, jest prostopadłą i do drugiéj* MN (fig. 280).

a) Dwie pł. MN i OP prostopadłe do linii AB, gdyby się przecięły z sobą w kierunku linii CD,, to połączywszy punkt E téj linii ze spodkami prostopadłéj AB, otrzymalibyśmy linię BE jako mającą dwa punkta B i E na pł. OP, leżącą na téj pł., a zatém prostopadłą do linii AB; dla podobnéj przyczyny linia AE leżałaby na pł. MN i byłaby prostopadłą do linii AB;—a zatém z punktu E do linii prostéj AB dwie prostopadłe poprowadzićby można, co być nie może.

b) Przez linię AB prostopadłą do pł. OP, prowadzę płaszczyznę AG, przecinającą się z danemi po liniach BG i AF; linia BG jest prostopadłą do linii AB

(316 i 317), przeto jeśliby linia AF nie była także prostopadłą do AB to dwie linie BG i AF nie byłyby względem siebie równoległe, a zatém przecięłyby się z sobą na pł. AG, a że jedna z nich leży na jednéj, zaś druga na drugiéj pł., przeto punkt wspólny dla tych dwóch linii, byłby wspólnym dla pł. OP i MN, czyli te dwie pł. przecięłyby się z sobą, coby się sprzeciwiało założeniu,—a zatém linia AF jest prostopadłą do AB. Poprowadziwszy przez linię AB drugą pł. AJ, linia BJ jest prostopadłą do linii AB, a dla podobnéj jak poprzednio przyczyny, linia AH jest także prostopadłą do linii AB, a tém samém pł. MN przechodząca przez dwie linie AF i AH prostopadłe do AB jest do niéj prostopadłą (316).

Wn. 1. *Dwie pł.* MN i OP *nieprzecinające się, są względem siebie równoległe*: poprowadziwszy z punktu A jednéj pł., linię AB prostopadłą do drugiéj, linia ta jako ich wspólna prostopadła, mierzy odległość punktu jednéj pł. od pł. drugiéj; poprowadziwszy z drugiego punktu F linię FG prostopadłą do pł. OP, linia ta jest także wspólną prostopadłą dla tych dwóch pł. i jest równoległą do linii AB (329. Wn. 2), przeto one leżą na jednéj pł. (329. Wn. 1), i są sobie równe, jako zawarte między liniami AF i BG, prostopadłemi do AB a zatém równoległemi;—punkta więc A i F jednéj pł. MN, są równo oddalone od pł. OP drugiéj.

Wn. 2. *Dwie pł.* MN i OP *równoległe, przecięte jakąkolwiek pł. trzecią* AG, *dają przecięcia równoległe*; bo gdyby te przecięcia przecinały się z sobą, to i pł. MN i OP na których one leżą, także przecięłyby się z sobą. *Dwie pł. przecięte trzecią niedające przecięć równoległych, przecinają się z sobą*; gdyż punkt przecięcia się tych linii jest wspólnym i dla pł.

Wn. 3. *Linie równoległe* BA i GF, *zawarte między pł. równoległemi* MN i OP, *są sobie równe*; dla tego że poprowadziwszy przez te linie pł. AG, ona się przetnie z pł. MN i OP po liniach AF i BG równoległych, a linie równoległe zawarte między liniami równoległemi są sobie równe.

Wn. 4. *Jeśli linia* AB *prostopadła do jednéj pł.* OP, *nie jest prostopadłą do drugiéj* MN, *to te dwie pł. przecinają się*; gdyż poprowadziwszy przez tę linię pł., ona się przetnie z dwoma pł. OP i MN po liniach czyniących z linią AB kąty jednostronne wewnętrzne nierówne II, a tém samém po liniach przecinających się, zaś punkt ich przecięcia się, jest wspólny i dla pł. danych.

Wn. 5. *Z punktu* A *danego nad pł.* OP, jedną tylko pł. MN do niéj równoległą poprowadzić można; gdyż poprowadziwszy z punktu A linię prostopadłą do pł. OP, pł. MN prostopadła do téj linii w punkcie A, podług Tw. jest równoległą, zaś pł. nieprostopadła nie jest równoległą (Wn. 4); a że z punktu A, do linii AB jedną tylko pł. prostopadłą poprowadzić można (317. Wn. 3), przeto i z punktu A do pł. OP jedną tylko pł. równoległą i t. d.

Wn. 6. *Dwie pł. równoległe do trzeciéj są względem siebie równoległe*; gdyż poprowadziwszy do trzeciéj pł., linię prostopadłą, ona jest zarazem prostopadłą do dwóch pierwszych (345, *b*), a zatém te dwie pł. jako prostopadłe do linii, są względem siebie równoległe (345, *a*).

346. *Tw. Dwa kąty* BAC i EDF *leżące na odmiennych pł. mające ramiona równoległe i skierowane w jedną stronę, są sobie równe* (fig. 281).

Odcinam AB=DE i AC=DF i punkta B z C, E z F tudzież A z D, B z E, C z F łączę liniami prostemi. Linia AB jest równa i równoległa do DE, przeto i AD jest równa i równoległa do BE (329. Wn. 1; 116. 4; 115. *b*); dla podobnéj przyczyny i AD jest równa i równoległa do CF; każda więc z dwóch linii BE i CF jest równa i równoległa do trzeciéj AD, a zatém te linie BE i CF są równe i równoległe, a tém samém i linie BC i EF, łączące ich końce, są równe i równoległe. Trójkąty ABC i DEF mające po trzy boki równe, mają i kąty równe czyli kąt BAC=EDF.

Wn. 1. *Dwa kąty leżące na odmiennych pł.*, podobnie i dla podobnéj przyczyny jak kąty leżące na jednéj pł., *są sobie równe, gdy mają ramiona równoległe skierowane w przeciwne strony*; *są zaś kątami spełnienia, gdy dwa ramiona są skierowane w jedną, zaś dwa drugie w przeciwne strony.*

347. *Tw. Płaszczyzna* MN *przechodząca przez dwie linie przecinające się* AB i AC *równoległe do drugiéj pł.* OP, *jest względem niéj równoległą* (fig. 281).

Poprowadziwszy z punktu przecięcia się A linij równoległych, linię AD prostopadłą do pł. OP.

ona będzie zarazem prostopadłą do linii DF i DE wynikających z przecięcia się płaszczyzn CAD i BAD z płaszczyzną OP; a że te przecięcia się DF i DE, są równoległe do linii AC i AB (331), przeto te linie jako równolegle, do linij prostopadłych są także prostopadłe do AD, a tém samém pł. MN, jako prostopadła do linii AD, jest równoległą do pł. OP (345. Wn. 1).

Wn. 1. *Dwie pł. prostopadłe do trzeciéj, przechodzące przez dwie linie równoległe, nieprostopadłe do téj pł., są względem siebie równoległe*; gdyż poprowadziwszy na tych pł. linie prostopadłe do ich przecięcia się z pł. trzecią, one jako prostopadłe do téj pł. (338. Wn. 1), są względem siebie równoległe, a zatém jedna z nich przechodzi przez dwie linie równoległe do drugiéj.

Wn. 2. *Płaszczyzny przecinające się z trzecią po liniach równoległych i jednakowo nachylone do téj pł., są względem siebie równoległe*; gdyż poprowadziwszy pł. prostopadłą do jednéj linii wspólnego przecięcia się, ona jest także prostopadłą i do drugiéj (328), i przecina te dwie pł. po liniach równoległych, jako czyniących z przecięciem się z trzecią kąty równe; a zatém dwie linie jednéj pł. są równoległe do pł. drugiéj.

Uw. Dwie pł. przecięte płaszczyzną trzecią, dają warunki odpowiednie warunkom przecinania się lub nieprzecinania się linii prostych, jeśli te przecięcia się są względem siebie równoległe; tak, że wtedy tylko równość lub nierówność kątów utworzonych przez te pł. ze wspólną przecinającą je pł. pociąga za sobą przecinanie się lub nieprzecinanie się tych płaszczyzn.

348. *Tw. Linie proste* AC i DF *przecięte pł.* MN, OP, QR *równoległemi, są podzielone na części proporcyonalne* (fig. 282).

Końce linii AC i DF łączę linią prostą DC przecinającą się z pł. OP w punkcie G; przez linie CA i CD prowadzę pł. przecinającą się z pł. OP i MN po liniach równoległych BG i AD; przez linie DC i DF prowadzę pł. przecinającą się z pł. OP i QR po liniach równoległych GE i CF. W trójkącie ACD, linia BG równoległa do podstawy, dzieli boki trójkąta na części proporcyonalne; przeto AB:BC=DG:GC podobnie DG:GC=DE:EF, przeto stosunki AB:BC i DE:EF równe stosunkowi DG:GC, są sobie równe.

Wn. 1. Płaszczyzny równoległe (fig. 283) MN i OP, przecięte pł. SAE... dają przecięcia AE i *ae* równoległe, a zatém, przecięte są w stosunku odcinków SE, S*e*.. linii zbiegających się, rachowanych od punktu zbiegu S; *jeżeli więc linie* SA, SE, SD..., *wychodzące z jednego punktu* S, *przetniemy pł.* MN i OP *równoległemi i połączymy punkta ich przecięcia się, to wielokąty ztąd otrzymane* ABCDE i *abcde są podobne*, gdyż stosunki odcinków linii wychodzących z punktu S są sobie równe, a przeto i boki ich będące w takim samym stosunku jak odcinki, są proporcyonalne, kąty zaś są równe jako mające ramiona równoległe i skierowane w jedną stronę. *Stosunek* *obwodów tych wielokątów* równy stosunkowi boków, *równa się także stosunkowi odcinków linii wychodzących z jednego punktu lub stosunkowi odcinków prostopadłéj wyprowadzonéj z punktu zbiegu na pł. równoległe*, gdyż trzy ostatnie stosunki są sobie równe; *stosunek powierzchni wielokątów* ABCED i *abcde* równy stosunkowi kwadratów z boków, dla podobnéj przyczyny *równa się stosunkowi kwadratów z odcinków linii wychodzących z jednego punktu, lub z odcinków prostopadłéj poprowadzonéj z tego punktu do pł. równoległych.*

Wn. 2. *Jeśli trzy linie proste, leżące po dwie na jednéj pł. lub dwie nieleżące na jednéj pł. przecięte dwoma pł. równoległemi, pł. trzecia dzieli na części proporcyonalne, to pł. ta jest równoległa do dwóch pierwszych*; gdyż poprowadziwszy przez te linie (fig. 282) CA i CD pł. ACD, ona przetnie się z pł. OP po linii BG równoległéj do AD (139. W. 2); podobnie linia GE jest równoległą do CF, tém samém do pł. OR i do niéj równoległéj pł. MN, a zatém dwie linie BG i GE równoległe do pł. MN, przeto: *jeśli i trzy linie wychodzące z jednego punktu, przez dwie pł. są podzielone na części proporcyonalne, te dwie pł. są względem siebie równoległe*; gdyż przez punkt zbiegu można wyobrazić pł. równoległą do jednéj z pł. dzielących na części proporcyonalne.

Wn. 3. *Jeśli dwa wielokąty podobne* ABCDE i *abcde, leżą na pł.* MN i OP *równoległych, to linie* A*a*, B*b*.. *łączące ich wierzchołki odpowiednie, schodzą się w jednym punkcie* S; gdyż dwie linie A*a* i

Ee, przecinają się jako łączące końce linii równoległych AE i ae nierównych, przeto jeśli punkt przecięcia się Aa z Ee oznaczymy przez S zaś przecięcia się Ee z Dd przez S', to: $AS:aS=SE:Se$, gdyż oba te stosunki równają się stosunkowi $AE:ae$ (239. Wn. 5); podobnie $S'E:S'e=S'D:S'd$ jako stosunki równe stosunkowi $ED:ed$;—lecz stosunek $AE:ae=ED:ed$, przeto i stosunki powyższych proporcyi są sobie równe czyli $SE:Se=S'E:S'e$, ztąd $SE-Se:Se=S'E-S'e:S'e$ t. j. $Ee:S'e=Ee:Se$; a że poprzedniki są sobie równe, przeto S i S' są jednym punktem.

349. *Zg. Poprowadzić pł. równoległą do pł. danéj, a) dowolną*; prowadzę z dowolnego punktu dwie linie równoległe do pł. danéj, a pł. przez nie przechodząca jest żądaną (347); jeśli więc pł. dana przecina się z dwoma pł. przecinającemi się, z punktu leżącego na linii ich przecięcia się, prowadzę linie równoległe do przecięcia się pł. danéj z dwoma pł., a pł. przechodząca przez te linie jest żądaną; *b) przez punkt dany*; dwie linie równoległe do pł. danéj poprowadzone przez punkt dany leżą na żądanéj pł. — albo przez punkt dany prowadzę linię prostopadłą do pł. danéj, i do téj linii przez ten sam punkt dwie linie prostopadłe, one są równoległe do danéj pł. i leżą na żądanéj pł. (345); *c) przez linię daną*, wtedy tylko można poprowadzić pł. równoległą do pł. danéj, gdy ta linia jest równoległą do pł. danéj, i wtedy przez punkt téj linii poprowadzona linia równoległa do pł. danej leży z daną linią na pł. szukanéj.

350. *Zg. Znaleźć najkrótszą odległość między dwoma krzyżującemi się liniami* (nierównoległemi i nieprzecinającemi się).

Z punktu wziętego na jednéj linii, prowadzę linię równoległą do drugiéj, i przez te dwie linie poprowadzę pł., która jest równoległą do drugiéj linii (330. Wn. 3); przez drugą linię prowadzę pł. prostopadłą do poprowadzonéj pł. (339), a z punktu przecięcia się jéj z daną pierwszą linią wyprowadzona linia prostopadła do pł. równoległéj, leży na pł. prostopadłéj (338. Wn. 1) i jest prostopadłą tak do pierwszéj (317) jako téż i do drugiéj linii, jako prostopadła do linii poprowadzonéj do niéj równolegle; przeto mierzy ich najkrótszą odległość.

351. *Zl.* Podług N° 349 prowadzą się pł. równoległe w praktyce.

D) *Płaszczyzny przecinające się w jednym punkcie — kąt bryłowy.*

352. Trzy płaszczyzny przecinające się po dwie, dają krawędzie albo równoległe i ograniczają przestrzeń tak zwaną pryzmatyczną, albo przecinające się w jednym punkcie (343), i ograniczają przestrzeń zwaną kątem bryłowym, w pierwszym razie pł. ograniczone temi krawędziami są jakby równoległoboki ciągnące się bez końca, w drugim zaś, są to kąty płaskie schodzące się wierzchołkami w jednym punkcie. Płaszczyzny ograniczające przestrzeń zowią się *ścianami,*

ich przecięcia się *krawędziami.* W przestrzeni pryzmatycznéj zależność ścian od kątów dwuściennych nie przedstawia nowych własności, gdyż przeciąwszy ją pł. prostopadłą do jednéj krawędzi, ta będzie prostopadłą i do innych, przeto da trójkąt w którym kąty są kątami odpowiedniemi kątom dwuściennym, zaś boki oznaczają położenie ścian; dla podobnéj przyczyny i przestrzeń ograniczona ilukolwiek pł., mającemi krawędzie równoległe, nieprzedstawia szczególnych własności. W kącie bryłowym ograniczonym trzema ścianami czyli *trójściennym*, mamy do uważania trzy kąty płaskie ograniczające kąt bryłowy i trzy kąty dwuścienne zawarte między jego ścianami; zależność kątów płaskich i dwuściennych chociaż, jak zobaczymy, jest odpowiednią zależności boków i kątów trójkąta, jednak nie sprowadza się wprost do niego, gdyż pł. prostopadła do jednéj krawędzi nie jest prostopadłą do innych, a zatém nie daje trójkąta któregoby kąty były odpowiedniemi kątom dwuściennym. Przez jeden punkt można poprowadzić dowolną liczbę płaszczyzn, przeto kąt bryłowy może być ograniczony ilukolwiek kątami pł.; *kąt ten pod względem kształtu, wyraża zależność kątów płaskich od dwuściennych i ich szczególne własności; a pod względem wielkości pewną część przestrzeni, tak że poznać jego wielkość, jest to dowiedzieć się jaką on jest częścią przestrzeni.* Jeżeli kąt prosty dwuścienny przetniemy pł. prostopadłą do krawędzi, utworzą się dwa kąty trójścienne zwane prostemi, przystające a tém samém równe, a że kąt prosty dwuścienny jest czwartą częścią przestrzeni, przeto kąt prosty trójścienny jest ósmą częścią przestrzeni; — kąty proste dwuścienne przystawały do siebie, przeto i kąty proste trójścienne są przystające; — kąt bryłowy mniejszy od prostego czyli zawierający przestrzeń mniejszą od $\frac{1}{8}$ przestrzeni zowie się ostry, zaś większą od $\frac{1}{8}$, rozwarty. Kąt płaski razem z łukiem odpowiednim mógł być przenoszony na inny kąt płaski jemu nierówny, podobnie i kąt dwuścienny, przez przenoszenie odpowiedniego kąta płaskiego; a przeto pod względem wielkości miały tę własność, że kąty tak płaskie jako i dwuścienne równej wielkości miały kształt jednakowy czyli były równe, równoważność więc dla tych kątów nie miała miejsca; — kąty zaś bryłowe równe mogą nie przystawać do siebie, a przeto mogą być równe albo przez przystawanie, albo przez symetryę, a przytém mogą być równoważne, tak że kąt będący $\frac{1}{8}$ częścią przestrzeni może nie mieć żadnego kąta dwuściennego prostego, i taki kąt nie jest prostym ale tylko równoważny prostemu; podobnie kąt zawarty iląkolwiek ścianami może zawierać $\frac{1}{8}$ przestrzeni, chociaż ma kształt zupełnie różny od kąta prostego, a zatém jest mu tylko równoważny.

353. Kąty bryłowe zowią się wierzchołkiem przeciwległe, gdy kąty płaskie jednego są wierzchołkiem przeciwległe z kątami pł. drugiego; kąty te (fig. 285) SABC i S*abc* są symetryczne, gdyż mają kąty płaskie równe, jako wierzchołkiem przeciwległe $ASB = aSb$, $ASC = aSc$ i $BSC = bSc$, i kąty dwuścienne równe, ja-

ko zawarte między temi samemi pł. CASB=$caSb$, ACSB=$acSb$, ABSC=$abSc$,— lecz idące w przeciwnym porządku, tak że kąty te nieprzystają do siebie. Przeniosłszy bowiem kąt $Sacb$ na SACB, tak aby ściana aSb przystała do ściany ASB, jeśli położymy te ściany tak, aby odpowiednie krawędzie przystały do siebie Sa z SA i Sb z SB, co uskutecznimy obracając ścianę bSa na jej płaszczyznie ASB około punktu S, to wtedy krawędź trzecia Sc nieprzestanie być pod pł. bSa i niepadnie na krawędź SC leżącą nad tą pł.; wtedy przy krawędziach SA i SB znajdują się ściany równe SAC i SAc, SBC i SBc, co jest charakterystycznym znakiem symetryczności. Jeślibyśmy zaś ścianę bSa położyli na ścianę ASB tak aby krawędzie SC i Sc, znajdowały się nad pł. ASB, wtedy krawędzie nieodpowiednie tych ścian przystałyby do siebie Sb do SA, Sa do SB i ściana Sbc nie przystałaby do SAC, gdyż nachylenie ścian nie jednakowe, podobnie i Sac nieprzystanie do ściany SBC. *Kąty brytowe symetryczne trójścienne* SABC, *Sabc wtedy tylko są sobie równe, gdy dwa kąty dwuścienne* SAC i SBC *są równe,* gdyż wtedy ściany chociaż nieodpowiednie, przystają do ścian drugiego kąta.

354. *Kąt brytowy zowie się biegunowym względem drugiego kąta gdy jego krawędzie są prostopadłe do ścian tego kąta*; zazwyczaj krawędzie te prowadzą się z wierzchołka kąta. I tak (fig. 285): jeśli krawędź cS prostop. do ściany ASB, Sa do CSB i Sb do ASC, to ściana cSa jest prostopadła tak do ścia-

ny ASB jako też i do ściany CSB (338), a tém samém jest prostopadłą i do krawędzi SB (338. Wn. 4), a zatém i *kąt* SABC *jest biegunowym kąta* Sabc, czyli dwa kąty są wzajemnie biegunowe. *Kąty biegunowe mają tę własność, że kąty pl. jednego są dopełnieniami kątów odpowiednich kątom dwuściennym drugiego*, jako kąty zawarte między liniami prostopadłemi do ścian tego kąta (341. Wn. 3).

355. *Tw. W kącie bryłowym trójściennym* SABC, *summa dwóch kątów płaskich* ASC i CSB, *jest większa od trzeciego* ASB (fig. 286).

Na kącie pł. ASB, przy krawędzi SB, kreślę kąt DSB=CSB, i odcinam SB=SC=SD, przez punkta BCD prowadzę pł. przecinającą się ze ścianami kąta po liniach BA, BC i AC. Trójkąty BSC i BCD mające po dwa boki równe i po kącie zawartym między temi bokami z wykreślenia równym, mają bok BD=BC; lecz BC+CA > BD+DA, to po odjęciu ilości równych BC i BD pozostaje CA > DA; trójkąty więc ASC i ASD mające bok AS wspólny, bok SC=SD z wykreślenia, a bok trzeci AC > AD, mają i kąt ASC > ASD (100), dodając z pierwszéj strony kąt CSB, a z drugiéj kąt jemu równy DSB otrzymamy: ASC+CSB> ASD+DSB czyli ASC+CSB > ASB.

Wn. 1. *W kącie bryłowym trójściennym kąt płaski jest większy od różnicy dwóch innych kątów*; gdyż od ilości nierównych ASC+CSB > ASB odjąwszy kąt ASC pozostaje CSB > ASB—ASC.

Wn. 2. *W dwóch kątach trójściennych* SABC i

SABD, *mających ścianę* SAB *wspólną a krawędź przeciwległą* SD *jednego leżącą wewnątrz kąta drugiego, summa dwóch innych kątów płaskich pierwszego jest mniejsza od summy dwóch kątów drugiego* (fig. 287). Przedłużam ścianę ASD do przecięcia się z ścianą BSC po prostéj SE, to ASC+CSE > ASD +DSE i BSE+DSD > BSD, dodając ilości większe do większych, zaś mniejsze do mniejszych, i odejmując po kącie DSE, otrzymamy: ASC+CSE+BSE > ASD+BSD, czyli ASC+BSC > ASD+BSD.

Wn. 3. *Jeżeli dwie pł.* ASB i DSC *przecinające się po linii* SJ, *przetniemy dwoma pł.* DSA i BSC *z przeciwnych stron linii* SJ *wspólnego przecięcia się i przechodzącemi przez punkt* S *téj linii, to summa kątów płaskich* ASB i DSC *płaszczyzn przecinających się jest większa od summy kątów* DSA i BSC *leżących z przeciwnych stron linii* JS *wspolnego przecięcia się* (fig. 288). Summa kątów ASJ+DSJ > DSA, tudzież JSB+JSC > BSD przeto ASJ+JSB+DSJ+JSC > DSA+BSC czyli ASB+DSC > DSA+BSC.

356. *Tw. Summa kątów płaskich składających kąt bryłowy jest mniejsza od czterech kątów prostych* (fig. 289).

Prowadzę linię prostą SO wewnątrz kąta bryłowego i do niéj pł. prostopadłą przecinającą ściany kąta po liniach AB, BC, CD i t. d. i łączę spodek prostopadły O ze spodkami krawędzi przez linie OA, OB, OC...; kąt AOB > ASB, jako zawarty między liniami łączącemi spodek prostopadłéj wyprowadzonéj z punktu S przecięcia się pochyłych ze spodkami tych pochyłych (324), podobnie i kąt BOC > BSC i t. d. przeto summa kątów przy O jest większa od summy kątów pł. kąta bryłowego S, a że summa kątów przy O równa się 2Π, przeto summa kątów przy S jest mniejsza od 2Π.

357. *Tw. W kącie bryłowym trójściennym summa kątów dwuściennych jest większa od dwoch kątów prostych a mniejsza od sześciu.*

W kącie bryłowym trójściennym kąty dwuścienne z kątami płaskiemi kąta biegunowego spełniają się do Π, a że tych kątów jest trzy przeto trzy kąty dwuścienne jednego kąta z trzema kątami płaskiemi kąta trójściennego biegunowego równają się 3Π; a że kąty płaskie są mniejsze od 2Π, przeto dwuścienne są większe od Π lecz mniejsze od 3Π gdyż summa trzech kątów płaskich ma pewną wielkość.

Wn. Kąt bryłowy wielościenny płaszczyznami przechodzącemi przez przeciwległe krawędzie, dzieli się na tyle kątów trójściennych ile ma ścian mniej dwie; a że summa kątów dwuściennych w każdym kącie trójściennym jest większa od Π, przeto w kącie wielościennym summa kątów dwuściennych jest większa od Π wziętych tyle razy ile jest ścian, mniéj dwie; dla podobnéj przyczyny summa kątów dwuściennych jest mniejsza od 3Π, wziętych tyle razy ile wielokąt ma ścian, mniéj dwie.

358. *Tw. W kącie bryłowym trójściennym naprze-*

ciw ścian równych leżą kąty dwuścienne równe, na przeciw ściany większéj leży kąt dwuścienny większy, i nawzajem.

Gdyż ściany równo nachylone do ściany trzeciéj przechodzą przez krawędź przeciwległą ścianie trzeciéj, a zatém gdy nachylenia się są równe, to i kąty zawarte między linią nachyloną a przecięciami z pł. trzecią są sobie równe i gdy nachylenie się płaszczyzny jest większe czyli jeśli czyni kąt większy ze ścianą trzecią, to i kąt zawarty między linią nachyloną i przecięciem się jest większy (342. Wn.). I nawzajem.

359. *Tw.* 1szy Przyp. *Kąty trójścienne mające po dwa kąty płaskie i po kącie dwuściennym między niemi zawartym w tym samym porządku równym mają i pozostałe części równe* (fig. 290).

Zak. Kąt pł. ASC=*asc*, CSB=*csb*, i kąt dwuśc. ACSB=*acsb*.

Przenoszę kąt dwuścienny *sabc* na SABC, tak aby punkt s padł na S, krawędź *sc* przystała do krawędzi SC i ściana *sac* przystała do odpowiedniéj ściany SAC, to wtedy krawędź *sa* przystanie do krawędzi SA dla równości kątów *asc* i ASC; ściana *scb* przystanie do ściany SCB dla równości kątów dwuś. *acsb* i ACSB i krawędź *sb* przystanie do krawędzi SB dla równości kątów pł. *csb* i CSB,—a zatém i ściana *asb* przystaje do ściany ASB i pozostałe części kątów trójściennych są sobie równe.

Wn. Jeśliby ściany były w przeciwnym porządku to kąty trójścienne mają także pozostałe części równe, gdyż kąt symetryczny z jednym, ma ściany równe z drugim w tym samym porządku—zatem ma z nim pozostałe części równe.

360. *Tw.* II. Przyp. *Kąty trójścienne mające po trzy kąty płaskie w tym samym porządku równe, mają i pozostałe części równe* (fig. 290).

Kąt trójścienny *sa'b'c'* symetryczny z kątem *sabc*, ma z nim, a tém samém i z kątem SABC ściany równe lecz w przeciwnym porządku; położywszy więc ścianę *sa'b'* na SAB, tak aby krawędzie odpowiednie przystały do siebie, i przez krawędzie SC i S*c'* poprowadziwszy pł., otrzymamy dwa kąty trójścienne SAC'*c* i SBC'*c* mające po dwie ściany równe ASC=AS*c'* i CSB=*c'*SB; a że naprzeciwścian równych leżą kąty dwuśc. równe, przeto kąt zawarty między ścianami CSA i CS*c'* równy kątowi zawartemu między ścianami *c'*SA i *c'*SC,—podobnie kąt zawarty między ścianami *c'*SB i *c'*SC równy kątowi zawartemu między ścianami *c'*SB i *c'*SC a tém samém i kąt dwuś. ACSB=A*c'*SB;--kąty więc trójścienne SABC i SAB*c'* mające po dwie ściany i po kącie zawartym między temi ścianami równym, mają i pozostałe części równe (360. Wn.), przeto i kąty trójścienne SABC i S*abc* mają pozostałe części równe, jako równe częściom kąta symetrycznego.

361. *Tw.* III. Przyp. *Dwa kąty trójścienne, mające w téj saméj kolei, po dwie ściany równe i po kącie dwuś. niezawartym odpowiednim równym, dru-*

gie zaś dwa kąty dwuś. niezawarte, oba ostre lub rozwarte t. j. niespełniające się, mają i pozostałe części równe (fig. 291).

Zakł. kąt pl. ASB=*asb*, CSB=*csb* i kąt dwuś. CASB=*casb* lecz BCSA+*bcsa* nie=II.

Przenoszę kąt trójścienny SACB na *sabc* tak aby kąt ASB przystał do kąta *asb*, to wtedy ściana ASC przystanie do ściany *asc*, dla równości kątów dwuś. CASB i *casb* i krawędź SC przystanie do krawędzi *sc*, gdyż nie może paść ani przed tą krawędzią jak *sd*,—bo wtedy kąty pl. *csb* i *dsb*, jako równe kątowi CSB pierwszy z przeniesienia a drugi z założenia, byłyby sobie równe, a tém samém i dwuścienne im przeciwległe (358), tak że kąt dwuścienny *bcsd* jednego kąta trójściennego, jako równy kątowi *cdsb*, byłby dopełnieniem kąta *bdsa* drugiego kąta trójśc., co się sprzeciwia założeniu; — ani za krawędzią *sc* dla podobnéj przyczyny;—a zatém i ściana BSC przystaje do ściany *bsc* i pozostałe części są sobie równe.

362. *Tw.* IV. Przyp. *Kąty trójścienne mające po jednéj ścianie i po dwa kąty dwuścienne przy niéj leżące równe, mają i pozostałe części równe* (fig. 291).

Zakł. Ściana asb=ASB, *i kąty dwuś. casb*= CASB, *cbsa*=CBSA.

Przenoszę kąt trójścienny *sacb* na SACB tak aby ściana *asb* przystała do ściany ASB, to ściana *asc* padnie na ścianę ASC dla równości kątów dwuśc. *casb* i CASB, ściana *bsc* padnie na ścianę BSC dla podobnéj przyczyny, a zatém i krawędź *sc* przystanie do krawędzi SC, gdyż płaszczyzny *bsc* i *asc* leżące na pł. BSC i ASC, przecinają się po téj saméj, co i one, linii.

363. *Tw.* Vty Przyp. *Kąty trójścienne mające po jednéj ścianie i po dwa kąty dwuścienne nie przy niéj leżące, w téj saméj kolei równe, lecz dwa inne kąty płaskie przeciwległe kątom dwuśc. równym, oba albo ostre albo rozwarte* t. j. *nie spełniające się—mają i pozostałe części równe* (fig. 290).

Zakł. Kąt pł. ASB=*asb i kąty dwuśc.* CBSA=*cbsa*, BCSA=*bcsa* lecz kąt pł. ASC+*asc* nie=Π.

W kątach bryłowych biegunowych, kąty płaskie są dopełnieniem kątów dwuściennych, przeto kąty SA'B'C' i *sa'b'c'* biegunowe z danemi mają kąt dwuś. A'C'SB'=*a'c'sb'* i dwa kąty płaskie A'SC'=*a'sc'* i A'SB' =*a'sb'*; lecz że kąty płaskie ASC+*asc* nie=Π przeto i kąty dwuś. A'B'Sc'+*a'b'sc'* dopełniające je czyli czyniące z nim 2Π, nie równają się Π; przeto kąty trójścienne SA'B'C' i *sa'b'c'* mają części pozostałe równe (361), a tém samém i kąty trójścienne z nimi biegunowe SABC i S*abc*.

364. *Tw.* VIty Przyp. *Kąty trójścienne mające po trzy kąty dwuścienne w téj saméj kolei równe, mają i pozostałe części równe.*

Kąty biegunowe kątów trójściennych mających kąty dwuścienne równe, mają kąty pł. równe, a tém samém i kąty dwuś. równe (359), a że kąty płaskie danych kątów trójściennych są dopełnieniem tych kątów dwuścieennych, przeto także są sobie równe.

Uw. 1. Widzimy więc że przypadki równości trójkątów odpowiadają przypadkom w których kąty trójścienne mają kąty płaskie i dwuścienne równe ztąd tylko różnica *a*) że w trójkątach równość dwóch kątów pociągnęła za sobą równość trzecich, co w kątach trójściennych nie ma miejsca, przeto trójkąty mające po boku i po dwa kąty nie przy nim leżące równe, zawsze miały pozostałe części równe, kąty zaś trójścienne mające po ścianie i dwa kąty dwuścienne nie przy niej leżące równe, wtedy tylko mają pozostałe części równe gdy drugie kąty płaskie leżące naprzeciw kątów dwuś. równych, oba są ostre lub rozwarte; *b*) że trójkąty mające po trzy kąty równe miały tylko kształt jednakowy, kąty zaś trójścienne mają i pozostałe części równe t. j. kształt i wielkość jednakową.

Uw. 2. W tych wszystkich sześciu przypadkach gdy części dane równe leżą w tym samym porządku, kąty trójścienne przystają do siebie: gdyby zaś części równe leżały w przeciwnym porządku, pozostałe części byłyby sobie równe, gdyż symetryczny kąt trójścienny z jednym ma z drugim części równe w tym samym porządku, a zatém i pozostałe części.

Uw. 3. Kąty bryłowe wielościenne, przez płaszczyzny wychodzące z jednéj krawędzi do innych, dzieli się na kąty trójścienne i kąty wieloś. są sobie równe jeśli te trójścienne są sobie równe, gdyż po przystaniu kątów trójściennych w tym samym porządku i wielościenne przystają do siebie; tak, że jak równość kątów trójściennych odpowiada równości trójkątów tak równość wielościennych odpowiada równości wielokątów.

365. *Tw. Kąty trojścienne symetryczne* SABC i *sabc zawierają rowną przestrzeń* (fig. 292).

1) Odcinam na krawędziach tych kątów części równe SA=SB=SC=S*a*=S*b*=S*c* i prowadzę pł. ABC i *abc*, które są względem siebie równoległe jako dzielące trzy linie wychodzące z jednego punktu na części proporcyonalne (348. Wn. 2; 2) Z wierzchołka S prowadzę linię D*d* prostopadłą do tych pł., której spodki D i *d* są równo oddalone od końców pochyłych równych (318. Wn. 3); oddalenia te dla jednego spodka są takie jak i dla drugiego, gdyż trójkąty DSB i *dsb* mają bok SB=*sb* i dwa kąty jedne proste D i *d* drugie wierzchołkowe przeciwległe przy S, równe; 3) Przez prostopadłą D*d* i krawędzie prowadzę pł. i tym sposobem otrzymam dla każdego kąta trójściennego danego trzy kąty trójścienne, mające za ścianę jedną ze ścian kątów trójściennych danych, a prostopadłą za krawędź przeciwległą tej ścianie,—kąty te jak SDBC mają dwa kąty pł. równe BSD i DSC jako leżące w trójkątach mających po trzy boki równe. Kąty trójścienne SDCB i S*dcb* są symetryczne lecz zarazem i równe, gdyż ściana DSB =*d*S*b*=*d*S*c*, DSC=*d*S*b* i kąt CSB=*c*S*b*; podobnie kąt trójścienny SDAB=S*dab* i SDAC=S*dac*;—przeto kąty trójścienne SABC i S*abc* symetryczne zawierają równą przestrzeń jako złożone z kątów trójściennych równych.

Gdyby prostopadła Dd padła na przedłużenie płaszczyzn ABC i abc (fig. 293), to kąt trójś. SABC=Sabc jako różnice ilości równych: SABC=SDAB+SDBC—SDAC zaś Sabc=Sdbc+Sdab—Sdac.

366. *Tw. Kąt trójścienny* SABC *jest równoważny połowie summy trzech swoich kątów dwuściennych, zmniejszonéj kątem prostym dwuściennym* (fig. 285).

Niech proste Aa, Bb, Cc wyrażają przecięcie się trzech pł. ABab, ACac, BCbc tworzących ośm kątów trójściennych, dla których mamy:

Kąty dwuśc. CAaB=kąt dwuś. CAaB.

Kąty trójśc. SABC+SAbc=kąt dwuś. ABbC.

Kąty trójsc. SABC+SABc=kąt dwus. ACcB.

Dodając te ilosci równe do siebie otrzymamy:

Kąt dwuś. CAaB+(SAbC+SABc)+2SABC=trzem kątom dwuściennym kąta trójściennego; zamiast kąta SABc biorąc kąt z nim symetryczny SabC a następnie zamiast kątów bryłowych SAbC+SabC mających scianę CSb wspólną a za krawędzic przeciwległe téj ścianie SA i Sa, kąt dwuscienny CAab zawarty między dwoma płaszczyznami, jedną przechodzącą przez krawędź Aa i linię SC, drugą przechodzącą przez krawędź Aa i linię Sb; — otrzymamy: kąty dwusc. CAaB+CAab+2 kąty trójsc. SABC=trzem kątom dwusc. kąta trójściennego. Lecz kąty CAaB+CAab jako mające ścianę CAa wspólną, a dwie inne ściany AaB i Aab na jednéj pł., jako przechodzące jedna przez linię A*a* i SB, druga przez tę samą linię A*a* i linię S*b* będącą przedłużeniem linii SB, a tém samém obie ściany przechodzące przez te same dwie linie A*a* i B*b*, są przyległe i równają się dwom kątom prostym dwuściennym (335), przeto: *dwa kąty proste dwuścienne powiększone dwa razy wziętym kątem trójściennym, równają się trzem kątom dwuściennym kąta trójściennego, to i ich połowy są równe, a zatém kąt trojścienny rowna się* i t. d.

Wn. 1. *Kąt trojścienny mający trzy kąty proste rowna się połowie kąta prostego dwuściennego*, gdyż połowa trzech kątów prostych zmniejszona kątem prostym czyni połowę kąta dwuściennego.

Wn. 2. *Kąt trojś. mający dwa kąty proste równa się połowie kąta dwuściennego nieprostego.*

Wn. 3. *Kąt trojś. mający jeden kąt prosty, równa się połowie summy kątów dwuściennych nieprostych zmniejszonych kątem trojś. prostym.*

Wn. 4. *Kąt wielokątny wypukły, równy połowie summy swych kątów dwuściennych, zmniejszonych tyloma kątami dwuściennemi prostemi, ile jest ścian mniéj dwie*; gdyż kąt wielościenny roskłada się na tyle kątów trójściennych, ile ma kątów dwuściennych mniéj dwa, przeto kąt wielościenny równa się summie tych kątów trójściennych, których kąty dwuścienne składają kąty dwuścienne kąta wielościennego; a że każdy z kątów trójśc. równa się połowie summy swych kątów dwuściennych zmniejszonych kątem prostym dwuściennym, przeto kąt wielościenny równa się i t. d

Wn. 5. *Kąty wielościenne symetryczne są równe co do wielkości*, gdyż ta zależy tylko od liczby i wielkości kątów dwuściennych, jednakowych dla obu kątów.

367. *Zg. W kącie trójściennym mając a) trzy kąty pł. oznaczyć kąty odpowiednie kątom dwuściennym* (fig. 295).

Odcinam w kącie trójściennym krawędzia równe SA=SB=SC i do krawędzi SA prowadzę pł. prostopadłą przecinającą się ze ścianami kąta trójśc. A, po liniach PM, PN i MN. Linie PM i PN prostopadłe do krawędzi SA zawierają kąt odpowiedni kątowi dwuściennemu krawędzi SA (337. Wn. 1), przeto aby mieć ten kąt potrzeba wykryślić trój. MPN. Na ten cel kreślę kąty pł. dane: csa=CSA, asb=ASB. bsc'=BSC, które nie zawierają całej pł. (356), i z wierzchołka s promieniem sc=SC zakreślam łuk, odcinający na ramionach kąta krawędzie kąta trójściennego; trójkąty csa, asb i bsc' są równe odpowiednim trójkątom kąta trójściennego, a zatém i ca =CA, ab=AB i bc'=BC; kreślę trójkąt abc'' równy trójkątowi ABC. Aby mieć w naturalnej wielkości boki PM i PN trójkąta MPN, odcinam ap=AP i prowadzę linię nm prostopadłą do as to np=NP, gdyż trójkąty npa i NPA mają bok ap=AP i kąt pan =PAN, jako kąty trójkątów ASC i asc równych, apn =APN jako proste; dla podobnej przyczyny i bok pm=PM;—dla znalezienia boku MN oddcinam an'= AN to mn'=MN, gdyż trójkąty NAM i $n'am$ mają po dwa boki i po kącie zawartym man'=MAN. Nareście aby mieć kąt równy kątowi MPN kreślę trójkąt mpn'' mający z trójkątem MPN trzy boki równe; a kąt mpn'' jest żądany.

b) *Kąty odpowiednie dwuściennym, oznaczyć kąty płaskie.* Kąty odpowiednie kątom dwusciennym są dopełnieniami kątów płaskich kąta trójściennego biegunowego z danym, przeto w kącie biegunowym oznaczywszy kąty odpowiednie dwuśc., dopełnienia ich są żądanemi kątami plas. kąta danego trójściennego (354).

c) *Dwa kąty płaskie* ASC i ASB *i kąt dwuścienny między nimi zawarty, znaleść trzeci kąt płaski.* Odcinam krawędzie równe SA, SB, SC, jedną z nich zakreślam z punktu *s* łuk, i kreślę kąty *csa* i *asb* równe kątom danym; prowadzę linię *nm* prostopadłą do krawędzi *sa*, a linia *pm* i *pn* są ramionami kąta odpowiedniego kątowi dwuściennemu, jako prostopadłe do krawędzi; z tych boków *pn* i *pm* i kąta danego odpowiedniego kątowi dwuściennemu, kreślę trójkąt mpn'', a następnie z boków am, mn'' i *an* trójkąt amn' odpowiedni trójkątowi ANM; tym sposobem otrzymamy kąt *man* odpowiedni kątowi NAM, a zatém możemy narysować trójkąt $ac''b$ odpowiedni trójkątowi ACB; — pozostaje tylko nakreślic trójkąt bsc' równoramienny, mający za ramiona *sb* a za podstawę bc'', a kąt jego bsc' jest żądany.

d) *Dwa kąty dwuścienne i kąt pł. zawarty między ich krawędziami, oznaczyć pozostałe części*; kąt trójścienny biegunowy z danym, ma dwa kąty płaskie dopełniające kąty odpowiednie kątom dwuściennym danego, zaś kąt odpowiedni dwuściennemu zawartemu między témi ścianami, jest dopełnieniem kąta płaskiego; w tym więc kącie trójściennym biegunowym znalazłszy pozostałe części, mamy zarazem i pozostałe części kąta danego (354).

368. *Zl.* Na zasadzie zależności w kątach bryłowych kątów pł. z dwuściennemi, wyrabiamy w praktyce bryły podług danego rysunku.

§. II. Płaszczyzny ograniczające przestrzeń.

369. Trzy płaszczyzny jakkolwiek przecinające się nieograniczają przestrzeni, gdyż dają przecięcia albo równoległe ograniczające przestrzeń pryzmatyczną, ciągnącą się jak same linie równoległe, bez granic,—albo przecinające się w jednym punkcie, czyli ograniczające kąt bryłowy trójścienny. Jeśli przetniemy kąt trójścienny pł. przecinającą trzy jego ściany, to otrzymamy przestrzeń ograniczoną czterema ograniczonemi pł., czyli trójkątami, zwaną czworościanem—i to jest najmniejsza liczba pł. ograniczających przestrzeń. Przestrzeń pryzmatyczną ograniczamy dwoma pł. równoległemi, przecinającemi trzy jéj ściany, zwaną *graniastosłupem trójkątnym*; czworościan i graniastosłup trójkątny, są dwie najprostsze bryły, na które bryły płaskościenne dają się podzielić.

370. Jeżeli jakikolwiek kąt bryłowy, ograniczymy pł. przecinającą jego krawędzie, otrzymamy ostrosłup wielościenny, wierzchołek kąta zowie się wierzchołkiem ostrosłupa, a ściana jego przeciwległa wierzchołkowi, *podstawą*; ostrosłup ten zowie się trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym i t. d. podług tego czy jego podstawa jest trójkątem, czworokątem, pięciokątem i t. d.; ostrosłup więc jakikolwiek otrzymamy prowadząc płaszczyzny przez punkt wzięty nie na płaszczyznie wielokąta, i boki tego wielokąta, którego krawędziami są proste łączące punkt z wierzchołkami wielokąta, — *ostrosłup* więc *jest to bryła mająca za podstawę wielokąt, a za ściany trójkąty, mające za podstawy boki wielokąta, a wierzchołki w jednym punkcie.* Dzieląc podstawę ostrosłupa na trójkąty i prowadząc pł. przez wierzchołek i linie podziału podstawy, podzielimy ostrosłup na ostrosłupy trójkątne czyli czworościany. Jeżeli ostrosłup przetniemy pł. równoległą do podstawy, bryła zawarta między tą pł. a podstawą zowie się *klocem ostrosłupowym*, podstawa ostrosłupa zowie się *podstawą dolną*, zaś pł. równoległa, *podstawą górną*; kloc ostrosłupowy jest więc różnicą między dwoma ostrosłupami, mającemi wspólny wierzchołek a za podstawy jeden podstawę dolną, zaś drugi podstawę górną kloca; — podstawa górna kloca, jest wielokątem podobnym podstawie dolnéj (348. Wn. 1), przeto jeśli weźmiemy dwa wielokąty podobne leżące na odmiennych pł. mające boki odpowiednie równoległe i skierowane w jedną stronę i przez ich boki odpo-

wiednie poprowadzimy płaszczyzny, to otrzymamy kloc ostrosłupowy, którego krawędzie przedłużone przecinają się w jednym punkcie (349. Wn. 3); krawędziami więc kloca są linie łączące wierzchołki odpowiednie podstaw, ścianami zaś, trapezy; *ostrosłup ścięty* czyli *kloc ostrosłupowy, jest bryłą mającą za podstawy dwa wielokąty podobne mające boki równoległe i skierowane w jedną stronę a za ściany trapezy.* Wysokością ostrosłupa jest prostopadła wyprowadzana z jego wierzchołka na podstawę, która jeśli pada na środek podstawy, ostrosłup zowie się *prostym* zaś każdy inny *pochyłym.* Ostrosłup prosty zowie się *foremnym* gdy podstawa jest wielokątem foremnym; a że środek wielokąta foremnego jest równo oddalony tak od wierzchołków jako też i od środka boków tego wielokąta (129. Wn), przeto krawędzie boczne ostrosłupa foremnego, jako równo oddalone od spodka prostopadłej, są sobie równe czyli ściany boczne ostrosłupa foremnego są trójkątami symetrycznemi; wysokości tych trójkątów przechodzą przez środki podstaw, będących bokami podstawy, a że i środki boków wiel. for. są równo oddalone od środka wielokąta, przeto wysokości ścian ostrosłupa foremnego, jako równo oddalone od spodka wysokości ostrosłupa, są sobie równe. Wysokością kloca ostrosłupowego jest prostopadła wyprowadzona z jednej podstawy na drugą, która jest ich wspólną prostopadłą.

371. Graniastosłup trójkątny otrzymamy prowa-

dząc płaszczyzny przez boki odpowiednie dwóch trójkątów równych leżących na odmiennych płaszczyznach, mających ramiona równoległe i skierowane w jedną stronę, gdyż *krawędzie boczne*, jako linie łączące odpowiednie wierzchołki czyli końce równych i równoległych boków trójkątów, są równoległe, a ściany są równoległobokami (116, 4); jeżeli zamiast trójkątów weźmiemy czworokąty, pięciokąty i t. d. równe leżące na pł. równoległych, mające boki równoległe i skierowane w jedną stronę, i przez boki odpowiednie poprowadzimy płaszczyzny, to otrzymamy graniastosłupy czworokątne, pięciokątne i t. d. których krawędziami są linie łączące odpowiednie wierzchołki a które płaszczyznami przechodzącemi przez linie dzielące wielokąty na odpowiednie równe trójkąty, dzielą się na graniastosłupy trójkątne. *Graniastosłup* więc *jest bryłą mającą za podstawy dwa wielokąty równe, mające boki równoległe i skierowane w jedną stronę a za ściany równoległoboki. Wysokością graniastosłupa* jest prostopadła wyprowadzona z jednéj podstawy na drugą;—graniastosłup jest *prosty*, gdy jego wysokość równa się krawędzi t. j. gdy krawędzie są prostopadłe do podstawy (329. Wn. 2 i 345. Wn. 3);—w przeciwnym razie zowie się *pochyłym*;—granias. prosty mający za podstawę wielokąt foremny, zowie się *graniastosłupem foremnym*. W graniastosłupie prostym, krawędzie będąc prostopadłe do podstawy, są zarazem prostopadłe i do boków podstawy, przeto *ściany są prostokątami*. Graniastosłup mający za podstawy równoległoboki, zowie się *Równoległościanem*; *równoległościan jest prosty*, gdy krawędzie są prostopadłe do podstawy; zowie się *prostokątnym*, gdy podstawa jest prostokątem, zaś *prostym i prostokątnym*, gdy podstawa jest prostokątem a krawędzie boczne do niéj prostopadłe. Równoległościan prosty prostokątny, mający za podstawę kwadrat, zaś krawędzie równe bokowi tego kwadratu, zowie się *sześcianem*; mający zaś za podstawę kwadrat ukośny, a krawędzie boczne równe jego bokowi zowie się sześcianem ukośnym. Jeżeli graniastosłup przetniemy pł. nachyloną do podstawy, otrzymamy *graniastosłup ścięty* (fig. 296) ACB*a'c'b'*, który przecięty pł. *acb* równoległą do podstawy i przechodzącą przez wierzchołek *a* najmniejszéj krawędzi A*a*, dzieli się na graniastosłup ABC*abc* i ostrosłup czworokątny *acbb'c'* mający za podstawę czworokąt *cbb'c'* zaś wierzchołek w punkcie *a*.

372. Bryły wielościenne biorą nazwisko od liczby ścian, i zowią się czworościanem, pięciościanem i t. d.; one są *foremne, gdy mają za ściany wielokąty forem. i równe, jednakowo nachylone*; a zatém w bryłach foremnych kąty bryłowe i krawędzie są sobie równe.

373. *Bryły są symetryczne gdy mają ściany równe, jednakowo nachylone lecz idące w przeciwnym porządku*; przeto kąty ich bryłowe są symetryczne. *Płaszczyzną symetryi w bryle zowie się ta, która dzieli bryłę na dwie bryły symetryczne*; przecięcie

się płaszczyzn symetryi zowie się *osią symetryi*, których przecięcie się zowie się *środkiem symetryi*.

A) *Bryły foremne.*

374. Chociaż wielokątów foremnych jest liczba nieograniczona, jednak wielościanów foremnych jest tylko pięć, dla tego że do złożenia kąta bryłowego potrzeba najmniej trzech kątów płaskich, których summa jest mniejsza od 2Π (356); z tego powodu biorąc trójkąty foremne za ściany bryły foremnéj, do złożenia kąta bryłowego możemy wziąć tylko *trzy*, *cztery* i *pięć* kątów trójkąta foremnego, gdyż *sześć* kątów, z których każdy jest $\frac{1}{3}\Pi$, czyniłoby 2Π;—biorąc czworokąty foremne czyli kwadraty, do złożenia kąta bryłowego możemy brać trzy tylko kąty płaskie, bo cztery, równają się 2Π;—biorąc pięciokąty foremne, do złożenia kąta bryłowego możemy brać trzy tylko kąty, bo cztery jako większe od kątów czworokąta foremnego, są większe od 2Π;—sześciokąta trzy kąty równają się 2Π a zatém z sześciokąta a tém bardziéj wielokątów o większéj liczbie boków, bryły foremnéj złożyć nie można.

375. Bryły foremne mające za ściany trójkąty foremne są: *a*) *czworościan foremny* (*Tetraeder*) który otrzymuje się składając trzy trójkąty foremne równe, tak aby miały wierzchołki w jednym punkcie, i dwa po sobie idące, bok wspólny; podstawy tych trójkątów składają trójkąt foremny, równy pierwszym, ja-

ko mający z nimi boki równe. Kąty bryłowe czworościanu for. są sobie równe, jako złożone z kątów pł. równych, a zatém i nachylenie się ścian jednakowe. Czworościan foremny ma: kątów trójściennych 4, gdyż w 4 trójkątach jest 12 kątów a z nich każde trzy składają kąt bryłowy; krawędzi 6, gdyż w 4ch trójkątach jest boków 12 a każde dwa składają krawędź. Czworościan for. składa się z trójkątów w ten sposób, jak wskazano na fig. 297.

b) Aby otrzymać *ośmiościan foremny* (*Octaëder*) (fig. 298) wyprowadzam ze środka O kwadratu ABCD prostopadłę OE i na pł. OEA przechodzącéj przez tę prostopadłę z punktu A promieniem równym bokowi kwadratu ABCD, przecinam prostopadłę w punkcie E, linia EA równa się bokowi kwadratu, a że wierzchołki A, B, C, D są równo oddalone od środka kwadratu O, przeto linie EA, EB, EC i ED są sobie równe i równe bokowi kwadratu a tém samém AED, DEC i t. d. są foremne i nachylenia się ścian jednakowe dla równości kątów trójściennych nadpodstawnych;—podobnym sposobem wystawiwszy i drugi ostrosłup pod kwadratem ABCD, w którym nachylenie ścian jest takie co w pierwszym, dla równości kątów przypodstawnych ostrosłupów czworościennych,—otrzymamy ośmiościan foremny. Kątów pł. w ośmiośc. jest 24 i tyleż boków trójkątów, a że cztery kąty pł. idą na jeden bryłowy, zaś dwa boki na jedną krawędź, przeto ośmioś. for. *ma kątów bryłowych* 6 *a krawędzi* 12.

c) Dla otrzymania *Dwudziestościanu foremnego*

(*Icosaeder*) (fig. 299); 1) na pięciokącie foremnym BCJKD wystawiam ostrosłup ABCJKD mający za ściany trójkąty foremne, których boki są równe bokom pięciokąta, nachylenie się ścian tego ostrosłupa są jednakowe, dla równości kątów trójściennych, leżących przy podstawie ostrosłupa; 2) przy wierzchołkach podstawy BCJKD z trójkątów for. równych pierwszych składam kąty bryłowe równe kątowi A a tém samém mające nachylenie się ścian jednakowe, — podstawy tych trójkątów składają pięciokąt LMGFE którego boki są sobie równe jako boki równych trójkątów, i kąty są równe jako kąty pł. kątów trójściennych mających z kątami trójściennemi pierwszego ostrosłupa ABCJKD pięciokątnego, po dwa kąty pł., jako trójkątów foremnych równych, i po kącie dwuściennym zawartym między niemi, równym;—pięciokąt więc LMGFE jest równy pięciokątowi BCJKD; 3) na pięciokącie LMGFE wystawiam ostrosłup SLMGFE równy ostrosłupowi ABCJKD i tym sposobem otrzymam dwudziestościan foremny, jako mający za ściany trójkąty foremne równe i nachylenie się tych ścian jednakowe. Trójkąty 1, 2, 3, 4, 5 złożone razem tworzą ostrosłup pięciokątny ABCJKD, podobnie trójkąty 16, 17, 18, 19, 20 ostrosłup SLMGFE, pozostałe zaś dopełniają kąty trójścienne pierwszego do kątów pięciościennych. Dwudziestokąt foremny ma kątów płaskich 60 i tyleż boków trójkątów, a że pięć kątów płaskich idzie na każdy kąt bryłowy, a dwa boki na jedną krawędź, przeto ma kątów bryłowych 12 a krawędzi 30.

376. Bryła for. mająca za ściany kwadraty, zowie się *sześcianem* (*Cubus*) (fig. 300), którą otrzymamy składając na kwadracie ABCD cztery równe mu kwadraty i z wierzchu kładąc kwadrat EFGH; on jest foremny, bo wszystkie kąty bryłowe trójścienne składają się z równych kątów płaskich. Bryła ta ma kątów pł. 24, przeto zawiera 8 kątów bryłowych a krawędzi 12.

377. Bryła foremna mająca za ściany pięciokąty for. zowie się *Dwunastościanem foremnym* (*Dodekaëder*) (fig. 301). Jeżeli na bokach pięciokta for. 1, ustawiemy pięć równych mu pięciokątów, tak aby dwa po sobie idące miały bok wspólny, podobnie i na bokach pięciokąta 8, równego pięciokątowi 1, pięć takichże pięciokątów, to kąty trójścienne A, B, C, D, E i *a*, *b*, *c*, *d*, *e* są sobie równe jako mające po trzy kąty pł. równe, przeto nachylenie się ścian jest jednakowe;—dwie te niedopełnione bryły zestawiając w jedną zupełną bryłę t. j. kładąc kąty pięciokątów przeciwległe bokom pięciokątów 1 i 8 na kąty zawarte między bokami pięciokątów 7, 9, 10, 11, 12, i 2, 3, 4, 5, 6 leżącemi przy bokach przystających, czyli tworzących krawędź; — gdyż kąty te są równe kątom pięciokąta, jako tworzące kąty trójścienne mające z kątami A, B, C... po dwa kąty pł. i po kącie dwuściennym zawartym równym; — otrzymamy dwunastościan foremny. W dwunastościanie forem. jest kątów płaskich i boków 60, przeto kątów bryłowych jest trzy razy mniéj t. j. 20, a krawędzi 30.

378. *Tw. W wielościanie foremnym prostopadłe wyprowadzone ze środka ścian są sobie równe i przecinają się w jednym punkcie* (fig. 301).

Niech będzie dwunastościan for. D*b*, uważam jego ściany DA, DK i DO tworzące kąt bryłowy D i mam dowieść że prostopadłe wyprowadzone ze środków *r*, *r'* i *r''* tych ścian przecinają się w jednym punkcie i są sobie równe. Prowadzę pł. *rur'* prostopadłą do środka krawędzi DC, przecinającą się ze ścianami po liniach *ur* i *ur'*, prostopadłych do środka téj krawędzi, a tém samém przechodzących przez środki wielokątów *r* i *r'* (128. Wn. 1); wyprowadziwszy więc na pł. prostopadléj *rur'* do ścian bryły, tworzących krawędź DC, ze środków, linie *r*S i *r'*S prostopadłe do linii *ur* i *ur'* przecięcia się téj pł. ze ścianami, one są prostopadłe do tych ścian (338. Wn. 1) i przecinają się w punkcie S (78. Wn. 8), tworząc kąt *r*S*r'* dopełniający kąt *rur'* odpowiedni kątowi dwuściennemu ścian DA i DK; prostopadłe te są sobie równe, gdyż linia S*u* połowi kąt *rur'*, trójkąty bowiem prostokątne S*ru* i S*r'u* mają przeciwprostokątnią S*u* wspólną i bok *ru*=*r'u* jako linie odpowiednie równych wielokątów DA i DK (252. Wn.) Przez punkt *r* prowadzę drugą pł. prostopadłą do krawędzi ED, która przechodzi przez środek *w* téj krawędzi, gdyż prostopadła wyprowadzona ze środka *r* wiel. for., do jego boku, połowi bok (128. Wn.);— pł. *rwr''* prostopadła do krawędzi ED jest prostopadłą do ścian DA, DO i przecina ścianę DO po linii *wr''* prostopadléj do środka boku ED; a tém samém przechodzącéj przez środek r'' tego wielokąta;—linia rS leży na pł. rwr'', jako prostopadłéj do ściany DA (338. Wn. 1). Połączywszy więc punkt S z r'', otrzymamy linię Sr'' prostopadłą do środka wielokąta DO i równą linii Sr;—gdyż kąty dwuścienne których krawędziami są DC i DE są sobie równe jako kąty brył foremnych, przeto i kąty odpowiednie rur'=rur'', lecz kąt Swr=Sur jako leżące w trójkątach Sur i Swr mających po dwa boki i po kącie r między nimi zawartym równym (128. Wn. 2), przeto linia Sw połowi kąt rwr'' i trójkąty Swr i Swr'' mające po dwa boki i po kącie w między niemi zawartym równym mają Sr''=Sr i kąt Srw=S$r''w$ czyli linia Sr'' jest prostopadłą do wr'' a tém samem i do ściany DO (338. Wn. 1). Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że linia łącząca punkt S ze środkiem ściany EF jest do niéj prostopadła i równa prostopadłéj Sr.

Wn. 1. *Linie łączące środek brył for.* S *z wierzchołkami wielokątów i ze środkami krawędzi są sobie równe*, jakó pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłych wyprowadzonych z tego punktu na ściany.

Wn. 2. *Pł. przechodzące przez środek bryły i krawędzie, połowią kąty dwuścienne*, jako przechodzące przez linie Su, Sw połowiące kąty im odpowiednie (341).

B) *Graniastosłupy.*

379. *Tw. Przecięcie graniastosłupa płaszczyzną*

równoległą do podstawy, jest wielokątem równym podstawie.

Wielokąty te bowiem mają: 1) kąty równe, jako mające ramiona równoległe i skierowane w jedną stronę; 2) boki równe, jako linie równoległe zawarte między krawędziami równoległemi.

380. *Tw. Płaszczyznami symetryi graniastosłupa prostego są, płaszczyzny: a) przechodzące przez odpowiednie osie symetryi podstaw, b) równoległe i równo oddalone od jego podstaw* (fig. 302).

a) Płaszczyzna A*ah*H dzieli graniastosłup A*c*, na dwa graniastosłupy symetryczne, gdyż podstawy ich są symetryczne, ściany równe, jako prostokąty mające podstawy i wysokości równe, A*e* z A*b*, E*d* z B*c*, D*h* z C*h*, idą w przeciwnym porządku; — kąty dwuścienne zawarte między odpowiedniemi ścianami są sobie równe.

b) Graniastosłupy AD' i A'*d* są symetryczne, gdyż podstawy ich górne ABCDE i *abcde* są symetryczne, przeto ściany ich równe, jako prostokąty mające podstawy i wysokości równe, idą tak jak boki podstaw w przeciwnym porządku.

Wn. 1. Płaszczyzny symetryi przechodzące przez osie symetryi podstaw, przecinając się z sobą, dają jedną oś symetryi łączącą środki symetryi podstaw, zaś przecinając się z pl. sym. równooddaloną od podstaw, dają tyle osi symetryi ile jest tych płaszczyzn. Osie więc sym. przecinają się w jednym punkcie t. j. środku symetryi bryły.

381. *Tw. W równoległościanie* a) *ściany przeciwległe są sobie równe i równoległe*; b) *pl. przechodzące przez krawędzie równoległe są równoległobokami przecinającemi się w jednym punkcie równooddalonym od ścian przeciwległych*; c) *kąty bryłowe przeciwległe są symetryczne, zaś pl. przechodząca przez krawędzie przeciwległe, dzieli równoległościan na dwa graniastosłupy trójkątne symetryczne* (fig. 303).

a) Równoległobok A*b*=D*c*, jako mające po dwa boki i po kącie zawartym równym (253. Wn. 4), bok AB=DC jako boki równoległoboku AC, bok A*a*=D*d* jako boki równoległoboku A*d* i kąt *a*AB=*d*DC jako mające ramiona równoległe i skierowane w jedną stronę (346); przytém ściana A*b*. równoległa do ściany D*c*, jako przechodząca przez dwie linie A*a* i AB równoległe do linii D*d* i DC ściany drugiej (347).

b) Płaszczyzna B*bd*D jest równoległobokiem, bo ma dwa boki B*b* i D*d* równe i równoległe (116, 4), jako równe i równoległe boku A*a*. Przekątnie B*d* i D*b* równoległoboku B*bd*D, przecinają się w środku jego przekątni B*d* t. j. w punkcie S, podobnie przekątnie B*d* i C*a* równoległoboku B*ad*C przecinają się w punkcie S, jako środku przekątni B*d*; przekątnie A*c* i C*a* równoległoboku A*ac*C, przecinają się w punkcie S jako środku przekątni C*a* i t. d. a zatém wszystkie linie łączące wierzchołki przeciwległe przecinają się w jednym punkcie S, przeto i pł. przekątnie na których one leżą przecinają się w tém samém punkcie. Poprowadziwszy z punktu S linię prostopadłą do ścian przeciwległych Dc i Ab, linia ta w punkcie S dzieli się na dwie równe części, gdyż części te są przyprostokątnemi w trójkątach, mających przeciwprostokątne, jako połowy przekątniej, równe—i kąty przy S, jako wierzchołkiem przeciwległe równe.

c) Kąt trójścienny A jest symetryczny z kątem trójściennym c; gdyż kąty pł. są równe: aAB$=dc$C,—gdyż aAB$=ab$B, jako kąty przeciwległe równoległoboku Ab, zaś abB$=dc$C, jako mające ramiona równoległe skierowane w jedną stronę—przeto i aAB dcC;-podobnie dowiedlibyśmy że kąt BAD$=bcd$ i aAD bcC. Kąty te idą w przeciwnym porządku, bo przedłużywszy krawędzie kąta trójściennego c otrzymujemy kąt trójścienny $cc'd'b'$, przystający do kąta A, a symetryczny z kątem trójściennym c. Płaszczyzna BbdD, dzieli równoległościan Ac na dwa graniastosłupy trójkątne symetryczne; gdyż bryła ABD abd jest graniastosłupem, bo ma za podstawy trójkąty ABD i abd równe i równoległe,—dla podobnej przyczyny i bryła BDC bdc jest także graniastosłupem;—graniastosłupy te mają ściany odpowiednie równe: Db wspólną, Ab= Dc, Ad=Bc, tudzież ABD$=cdb$, abd=CDB, jako trójkąty równych równoległobów, będące ścianami kątów symetrycznych A i c,—lecz ściany te idą w przeciwnym porządku, co okazuje symetryczność kątów.

Wn. Z *a*) wynika że w równoległościanie każdą ścianę można wziąść za podstawę.

382. *Tw. W równoległościanie prostym prostokątnym* Ac, *kwadrat z przekątniej* Bd *równa się summie*

trzech kwadratów, z krawędzi składających kąt brytowy D (fig. 303).

Figura Db jest prostokątem, gdyż boki Bb i Dd będąc prostopadłe do podstawy AC są zarazem prostopadłe i do linii BD, przeto: $\overline{Bd}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{Dd}^2$; w trójkącie zaś prostokątnym CBD, $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$, czyli zamiast $\overline{BC}^2$ biorąc $\overline{DA}^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2$; — wstawując więc w wartości na $\overline{Bd}^2$ zamiast $\overline{BD}^2$ jego wartość, mamy $\overline{Bd}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{Dd}^2$.

Wn. 1. Trzy krawędzie każdego kąta trójściennego są sobie równe, przeto i przekątnie, jako równe pierwiastkowi z summy ich kwadratów są także równe.

Wn. 2. W sześcianie krawędzie są sobie równe, przeto *kwadrat z przekątni sześcianu, równa się potrójnemu kwadratowi z krawędzi.*

C) *Ostrosłupy.*

383. *Tw. W ostrosłupie trójkątnym płaszczyzny:* a) *prostopadłe do podstawy i przechodzące przez krawędzie*; b) *połowiące kąty dwuścienne kąta brytowego,—przecinają się po jednéj linii.*

a) Poprowadziwszy z wierzchołka linię prostopadłą do podstawy, płaszczyzny przechodzące przez krawędź i tą linię są prostopadłe do podstawy, i mają tę prostopadłą wspólną.

b) Linia przecięcia się dwóch pł. połowiących dwa kąty dwuścienne, ma wszystkie punkta równo oddalone od ścian tego ostrosłupa, przeto leży na pł. połowiącéj kąt trzeci.

384. *Zg. Znaleść wysokość ostrosłupa trójkątnego za pomocą jego krawędzi* (304).

Poprowadziwszy wysokość ostrosłupa SO i przez jéj spodek linię OD prostopadłą do krawędzi AC, to pł. tych dwóch linii jest prostopądłą do krawędzi AC (319), podobnie poprowadziwszy pł. prostopadłe do dwóch innych krawędzi AB i BC otrzymamy trzy linie OD, OE i OF prostopadłe do boków podstawy, przecinające się w spodku O wysokości SO, będące przyprostokątniemi, trójkątów prostokątnych, których przeciwprostokątniami są wysokości ścian, a trzecim bokiem szukana wysokość. Jeśli więc z 3ch krawędzi podstawy wyrysujemy trójkąt *abc* równy podstawie, zaś z krawędzi ścian, trójkąty *s'ac*, *s''cb*, *sba* równe ścianom, to wysokości *s'd*, *se*, *s''f* trójkątów odpowiednich ścianom, przetną się na trójkącie podstawy w jednym punkcie, gdyż trójkąty *sac*... są ścianami ostrosłupa SABC położenemi na pł. podstawy ABC, na któréj linie SD i DO, jako prostopadłe wyprowadzone z jednego punktu do linii AC, są jedną linią prostą. Tym sposobem otrzymaliśmy rzeczywistą wielkość przeciwprostokątni *s''f* i przyprostokątni *fo*, pozostaje tylko wyrysować trójkąt prostokątny *sfg*, którego przyprostokątnia *s''g* jest żądaną wysokością.

385. *Zd. Mając dany stosunek m:n boków pod.*

staw ostrosłupa ściętego i jego wysokość a, znaleść wysokość całego ostrosłupa H.

Oznaczywszy wysokość odciętego ostrosłupa przez h, mamy $H:h=m:n$ (348. Wn. 1) przeto $H-h$ czyli $a:H=m-n:n$ a ztąd $H=\frac{an}{m-n}$ t. j. *iloczynowi z wysokości kloca przez krawędź podstawy górnéj, podzielonemu przez różnicę między odpowiednią krawędzią podstawy dolnéj a tą krawędzią.*

D) *Powierzchnie brył płaskościennych.*

386. Powierzchnia bryły płaskościennéj, jest summą powierzchni wielokątów ograniczających tę bryłę; w graniastosłupach i ostrosłupach tak całych jako też ściętych *powierzchnią boczna* zowiemy, summę samych ścian bocznych bez podstaw. Z własności niektórych brył wynikają sposoby łatwiejszego obrachowania ich powierzchni, które tu wyłożemy; w innych zaś potrzeba dochodzić powierzchni dodaniem wynalezionych powierzchni ścian.

387. *Tw. Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego, równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez krawędź.*

Pow. bocz. grn. prostego składa się z prostokątów mających za podstawę krawędzie podstawy a za wysokość krawędzie boczne graniastosłupa; a że powierzchnia prostokąta równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość, a wysokości w tych prostokątach są sobie równe i równe wysokości grn., przeto pow. bocz. grn. prostego równa się summie iloczynów wysokości przez boki jego podstawy, który iloczyn wypadł z pomnożenia wysokości przez summę boków podstawy, czyli obwód podstawy.

Wn. Pow. bocz. równoległościanu prostego prostokątnego, równa się iloczynowi z wysokości przez podwójną summę dwóch boków przy sobie leżących, podstawy,—gdyż boki przeciwległe podstawy są sobie równe.

388. *Tw. Powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego, równa się iloczynowi z krawędzi przez obwód przecięcia prostopadłego do krawędzi.*

Ściany boczne graniastosłupa pochyłego są równoległobokami, mającemi za podstawy krawędzie boczne, a za wysokość, prostopadłą wyprowadzoną z jednéj podstawy na drugą; a że krawędzie boczne są sobie równe, przeto pow. bocz. grn. pochyłego równa się summie iloczynów z krawędzi, przez prostopadłe wyprowadzone z każdéj krawędzi na następną, a ten iloczyn otrzymuje się mnożąc krawędź przez summę tych prostopadłych; lecz summa tych prostopadłych, równa się obwodowi przecięcia pł. prostopadłéj do krawędzi, bo ta będąc prostopadłą do wszystkich krawędzi (328) przecina się ze ścianami po liniach do krawędzi prostopadłych,—preto pow. i t.d.

Uw. Powierzchnię całego graniastosłupa otrzymamy dodając do pow. bocz., podwójną powierzchnię podstawy.

389. *Tw. Powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego równa się iloczynowi z obwodu podstawy, przez wysokość jednéj ze ścian bocznych.*

W ostrosłupie foremnym podstawa jest wielo. for. a wysokość pada na środek podstawy, a że środek wiel. for. jest równo oddalony od wierzchołków i od środka boków (128. Wn.), przeto krawędzie i linie do ich środków poprowadzone, jako pochyłe równo oddalone od spodka wysokości, są sobie równe; ściany więc boczne są trójk. symetr. równemi, których wysokościami są linie łączące wierzchołek ze środkiem podstawy (90. Wn. 3). Powierzchnia ściany równa się iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości, a zatém pow. bocz. ostr. for. równa się summie iloczynów z boków podstawy przez połowę wysokości któregokolwiek trójkąta, który iloczyn powstał z pomnożenia summy boków podstawy przez połowę wysokości jednego z trójkątów.

Wn 1. Powierzchnia ostr. pros. mającego za podstawę wielokąt mogący się opisać na kole, równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez połowę wysokości któregokolwiek trójkąta; gdyż wysokości tych trójkątów, jako równo oddalone od spodka wysokości ostrosł. (319. Wn.), są sobie równe.

Wn. 2. Powierzchnia cała grn. for. jako summa powierzchni bocznéj i powierzchni wielokąta podstawy, równa się summie iloczynów: z obwodu podstawy przez połowę wysokości trójkąta i z obwodu podstawy przez połowę promienia koła wpis. w wielokąt, która summa wypada z pomnożenia obwodu podstawy przez połowę summy wysokości trójkąta i promienia.

Wn. 3. *Powierzchnia boczna kloca ostrosłupu for., równa się iloczynowi z połowy sumy obwodu dwoch jego podstaw, przez wysokość jednéj ściany*; gdyż oznaczywszy podstawę dolną ściany przez P, górną przez p, wysokość trapeza przez w, liczbę ścian przez n, powierzchnia kloca ostr. for. jako składająca się z równych trapezów, równa się powierzchni ściany $\left(\frac{P}{2}+\frac{p}{2}\right) w$, pomnożonéj przez liczbę ścian n t. j. $n\left(\frac{P}{2}+\frac{p}{2}\right) w=\left(\frac{nP}{2}+\frac{np}{2}\right) w=\frac{nP+np}{2}\cdot w$ czyli iloczynowi z połowy i t. d. *Albo: iloczynowi z przecięcia równo oddalonego od dwóch podstaw przez wysokość ściany*, gdyż każdy bok tego przecięcia równa się połowie summy podstaw ściany.

390. *Zt.* Mury zazwyczaj mają kształt równoległościanów prostych prostokątnych, i ich powierzchnia dochodzi się podług N⁰ 387. Wn. Dachy zazwyczaj są albo złożone z dwóch prostąkątów równych, albo z dwóch trapezów symetrycznych, ich więc powierzchnia równa się podwójnéj powierzchni jednéj z tych figur.

ROZDZIAŁ III.

Powierzchnie krzywe połączone z płaszczyznami.

§ 1. Powierzchnia walca.

391. Koło po którego okręgu posuwając się linia prosta zrodziła, pow. walca zowie się podstawą walca. Walec jest *prosty*, jeżeli oś jest prostopadłą do podstawy, w przeciwnym razie zowie się *pochyły*.— *Płaszczyzna mająca z powierzchnią walca jedną linię prostą tworzącą wspólną*, jako będąca przejściem od pł. przecinającéj do przecinającéj, *zowie się styczną.* Graniastosłup którego podstawy są wielokątami wpisanemi lub opisanemi na podstawie walca, zowie się *Graniastosłupem wpisanym lub opisanym na walcu.*

392. *Tw. Płaszczyzna przechodząca przez oś walca lub do niéj równoległa, przecina go po liniach prostych równoległych do osi.*

Płaszczyzna przecinająca walec i równoległa do osi dla tego przecina go po linii równoległéj, gdyż przez punkt przecięcia się poprowadzona linia równoległa do osi, leży na téj płaszczyznie (331. Wn. 1), i jest zarazem linią prostą wchodzącą w skład powierzchni walca (310); przeto jako wspólna dla powierzchni i pł. jest ich wspólnym przecięciem się; podobnie i druga linia przecięcia się jest równoległą do osi, a tém samém i do pierwszéj linii prostéj przecięcia.

393. *Tw. Przecięcie pow. walca płaszczyzną równoległa do podstawy, jest kołem równym podstawie* (fig. 305).

Pł. FH przechodząca przez oś FE, walca, przecina płaszczyzny równoległe AHB i CJD po liniach EH i FJ równoległych (345. Wn. 2), które jako zawarte między liniami JH i FE równoległemi (392), są sobie równe; przeto wszystkie punkta linii przecięcia się CJD, tak jak podstawy, są równo oddalone od jednego punktu, przeto przecięcie jest okręgiem, równym pierwszemu, jako mającym z nim równe promienie.

Wn. 1. Linie tworzące pow. walca zawarte między podstawą a linią do niéj równoległą, są sobie równe (345. Wn. 3).

Wn. 2. *W powierzchni walca płaszczyzna nierównoległa do podstawy, przecina ją nie po okręgu*; gdyż poprowadziwszy przez oś walca płaszczyzny OA i OH one w ogólności przecinają tą pł. i podstawę po liniach nierównoległych OP z EH, OM z AE, które zawarte między liniami równoległemi w ogólności są nierówne. Przecięcie pł. nierównoległą wtedy tylko jest kołem, gdy płaszczyzna ta leży symetrycznie z podstawą, względem jakiéjkolwiek pł. prostopadłéj do osi t. j. gdy punkta przecięcia z punktami okręgu podstawy leżą na prostopadłych do téj pł. w równéj od niéj odległości;— wtedy bowiem przeciąwszy walec przez oś otrzymamy trapezy symetryczne, mające boki nierównoległe, równe.

Wn. 3. Przestrzeń ograniczona pł. podstawy i pow. walca, a pł. do niéj równoległą,—zowie się *walcem*, którego wysokością jest prostopadła wyprowadzona z jednéj podstawy na drugą, a która w walcu prostym równa się osi. Przestrzeń zawarta między pł. podstawy a pł. do niéj nierównoległą zowie się klocem walca, lecz że pł. ta nie jest kołem, t. j. linią będącą przedmiotem Jeometryi Elementarnéj, przeto i sama bryła nie jest jéj przedmiotem.

394. *Tw. Płaszczyzna* JHR *przechodząca przez linię* HR *styczną do podstawy pow. walca i linię prostą* JH *tworzą tę powierzchnię, przechodzącą przez punkt dotknięcia, jest styczną do téj powierzchni i nawzajem* (305).

Jeśliby pł. JHR, oprócz punktów tworzącéj JH miała jakikolwiek punkt C wspólny z powierzchnią walca, to przez ten punkt poprowadzona linia CA równoległa do JH leżałaby na tej pł. i byłaby linią tworzącą pow. walca, a tém samém byłaby wspólną dla pł. i powierzchni, a przeto przecięcie się linii CA z styczną HR leżałoby na powierzchni walca, czyli na podstawie, zatém linia HR nie byłaby styczną. Pł. styczna do powierzchni walca przecina pł. podstawy po linii stycznéj do okręgu téj podstawy, gdyż jeśliby linia przecięcia HR nie była styczną, lecz miala z okręgiem podstawy punkt A wspólny, wtedy tworząca przechodząca przez punkt A, jako równoległa do HJ, leżałaby na téj pł., przeto ta pł. przecinałaby walce, bo miałaby z nim dwie wspólne tworzące.

Wn. 1. Jeśli pł. JHR styczną do powierzchni walca AD obracam po téj powierzchni tak, aby nieprzestała być styczną, to linie proste tworzące tę powierzchnię kolejno przystają do pł., tak że skoro ona powróci do tworzącéj JH, to cała powierzchnia walca AD rozwinie się na téj płaszczyznie. W walcu pochyłym linie proste tworzące, z liniami stycznemi do podstawy, czynią kąty nierówne, a że tworzące są względem siebie równoległe, przeto styczne te w czasie rozwijania się podstawy czyniąc z równemi i równoległemi tworzącemi coraz inne kąty, bez przerwy zmieniają swój kierunek, tak że podstawa AHB po rozwinięciu się z walcem na pł., jest linią krzywą;—przeciwnie w walcu prostym (fig. 306) A*b*, linie proste tworzące powierzchnię walca, będąc prostopadłe do pł. podstawy, są zarazem prostopadłe i do stycznych CE... przeto styczne te przy rozwijaniu powierzchni walca, jako prostopadłe do linii prostych równoległych i równych są na jednéj linii prostéj prostopadłéj do linii tworzących prostych,—tak że powierzchnia ta rozwinięta jest prostokątem C*ce*E, mającym za wysokość wysokość walca a podstawę równą okręgowi podstawy walca; podstawa tego prostokąta wyraża oddalenie się prostéj tworzącéj pow. walca, na którą ona posunęła się od pierwotnego swego położenia, aby utworzyć tą powierzchnię. Dla téj więc powierzchni wiemy wielkość linii prostéj tworzącéj i jéj oddalenie się, a zatém *powierzchnia walca prostego* jako równa powierzchni prostokąta, *równa się iloczynowi z okręgu podstawy przez wysokość*, a że okręg podstawy równa się $2\Pi R$, przeto oznaczywszy wysokość walca przez W., pow. wal.prost.$=2\Pi RW$. Przeciwnie dla walca pochyłego wiemy wielkość linii tworzącéj, lecz linia wyrażająca oddalenie się, jako prostopadła do tworzącéj jest obwodem przecięcia prostopadłego do osi, przeto nierówna się okręgowi podstawy i nie jest okręgiem (393. Wn. 2), a tém samém obrachowanie téj powierzchni nie należy do Jeom. Elem.

§ 11. Powierzchnia ostrokręgu.

395. Okręg koła po którym posuwając się linia prosta, przechodząca przez punkt stały, tworzy pow. ostrokręgu, zowie się jego *podstawą*; ona jest *prostą* gdy oś jest prostopadłą do pł. koła podstawy i *ostrokrąg* czyli przestrzeń ograniczona zawarta między powierzchnią ostrokręgu a pł. podstawy zowie się wtedy *ostrokręgiem prostym*, w innym razie zowie się pochyłym. Jeśli ostrokrąg przetniemy pł. równoległą do podstawy, bryła ztąd utworzona, zawarta między tą pł. a pł. podstawy, zowie się *klocem ostrokręgowym*, który jest *prosty* lub *pochyły*, podług tego jakim był ostrokrąg z którego on powstał. Płaszczyzna mająca z ostrokręgiem jedną tylko tworzącą wspólną, jako przejście z przecinającéj do przecinającéj, w czasie obrotu około tworzącéj, zowie się *pł. styczną ostrokręgu.* Ostrosłup mający z ostrokręgiem wierzchołek wspólny, a za podstawę wielokąt

wpisany lub opisany na podstawie ostrokręgu, zowie się *ostrosłupem wpisanym lub opisanym na ostrokręgu.*

396. *Tw. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrokręgu, przecina go po linii prostéj* (fi. 307).

Połączywszy wierzchołek S z punktem E przecięcia się téj pł. z okręgiem podstawy, linia prosta SE ma z pł. przecinającą dwa punkta wspólne, przeto leży na téj pł., a jako przechodząca przez wierzchołek i okrąg podstawy, jest jedną z linii tworzących powierzchnię ostrokręgu czyli leży na téj powierzchni,— a tém samém jest wspólną dla pł. przecinającéj i pow. ostrokręgu czyli jest ich wspólnym przecięciem się.

397. *Tw. Płaszczyzna abc równoległa do podstawy, przecina ostrokrąg po okręgu koła* (fig. 307).

Pł. równoległa *abc* dzieli tak linie tworzące ostrokrąg SA, SC, SB... jako i oś SD w jednakowym stosunku, tak że stosunki SA:S*a*, SB:S*b*... SD:S*d* są sobie równe; lecz stosunki te równają się stosunkom DA:*da*, DC:*dc*, DB:*db*... przeto i te stosunki są także równe, a że w tych stosunkach, poprzedniki, jako promienie, są sobie równe—przeto i następniki *da*, *dc*, *db* są także równe czyli linia *acb* jest okręgiem.

Wn. Pł. nierównoległa do podstawy przecina ostrokrąg nie po okręgu koła; pł. nierównoległe przecięte pł. przechodzącemi przez wierzchołek dają przecięcia nierównoległe, które nie są proporcyonalne do promieni podstawy, a przeto nie są sobie równe.

398. *Tw. Płaszczyzna* SEF *przechodząca przez linię* EF *styczną do okręgu podstawy i linię prostą* SE *tworzącą ostrokrąg przechodzącą przez punkt* E *dotknięcia się stycznéj, jest styczną do powierzchni ostrokręgu, i nawzajem* (fig. 307).

Jeśliby pł. SEF, oprócz punktów linii SE, miała jakikolwiek punkt *b* wspólny z pow. ostrokręgu, to poprowadziwszy przez wierzchołek S i punkt *b* linię prostą SB tworzącą ostrokrąg, linia ta jako mająca z pł. SEF dwa punkta wspólne S i *b*, leżałaby na téj pł., a jako leżąca na ostrokręgu byłaby wspólnym przecięciem się pł. SEF z ostrokręgiem, przeto i punkt B leżałby na linii EF czyli byłby wspólny dla stycznéj EF i okręgu AEB co być nie może. Jeśliby pł. styczna SEF przecięłaby się z pł. podstawy po linii EF przecinającéj okręg téj podstawy, to linia łącząca punkt przecięcia z wierzchołkiem ostrokręgu, jako tworząca—leżałaby na téj powierzchni,—a jako mająca z pł. styczną dwa punkta wspólne, leżałaby na téj pł.; przeto byłaby ich wspólnym przecięciem i pł. SEF nie byłaby styczną.

Wn. 1. Jeżeli pł. SEF styczna do pow. ostrokręgu SAEB, obracamy po téj powierzchni, tak aby w następnych położeniach była styczną, to linie proste rodzące tą powierzchnię kolejno przystają do pł., tak, że po powróceniu pł., do tworzącéj SE, cała powierzchnia ostrokręgowa rozwinie się na téj pł. W czasie tego rozwijania się wierzchołek S pozostaje niezmienny, a końce tworzących SA, SE, SB... rozwiną podstawę, albo po łuku okręgu koła jeśli są sobie równe, albo po linii krzywéj jeśli nie są sobie równe; w pierwszym razie *powierzchnia ostrokręgu* rozwinięta jest wycinkiem koła mającego za promień tworzącą, a którego łuk równa się okręgowi podstawy; a zatém *równa się iloczynowi z okręgu podstawy przez połowę tworzącéj*, przeto oznaczywszy promień podstawy przez r, rodzącą przez R, okręg podstawy $= 2\Pi r$ a *pow. ostr. pros.* $= 2\Pi r\, R/_2 = \Pi r R$.

W drugim razie, okręg podstawy rozwinięty jest linią nienależącą do Jeom. Elem., a tém samém i pow. ostr. pochył. nienależy do téj nauki.

Wn. 2. W czasie rozwiania się okręgu podstawy ostrokręgu prostego, okręg przecięcia równoległego do podstawy rozwinie się po łuku współśrodkowym z rozwiniętą podstawą równym okręgowi przecięcia równoległego od podstawy, a zatém powierzchnia kloca ostros. prostego równa się powierzchni pasa zawartego między dwoma łukami kół współśrodkowych mających za promienie tworzące ostrokręgów całego i odciętego. Oznaczywszy promień podstawy dolnéj przez R górnéj przez r. tworzącą kloca ostrokr. prost. przez W, a ostrokr. odciętego przez a, tworząca, więc ostrokręgu całego będzie $W+a$; przeto pow. kloca, jako różnica wycinków kołowych równa się $2\Pi R.\, ½(W+a) - 2\Pi r\, \frac{a}{2} = \Pi Rr(W+a) - \Pi ra$, potrzeba więc tylko wynaleść wartość na a. Promienie podstaw są w stosunku tworzących przeto: $R:r = W+a:a$, a ztąd $Ra = rW + ra$, odejmując od tych ilości równych po ra będzie: $Ra - ra = rW$ czyli $(R-r)a = rW$, dzieląc zaś te ilości równe przez $R-r$ będzie $a=\frac{rW}{R-r}$. W wartości na pow. wstawiwszy zamiast a równą mu ilość, mamy: *Pow.bocz.kl.ost.pro.*$=\Pi R\left(W+\frac{rW}{R-r}\right)-\frac{\Pi r.rW}{R-r}$ w nawiasie zamieniając całość W z ułamkiem $\frac{rW}{R-r}$ na ułamek, będzie: $\Pi R\left(\frac{RW-rW+rW}{R-r}\right)-\frac{\Pi r^2W}{R-r}=\frac{\Pi R.RW-\Pi r^2W}{R-r}=\frac{\Pi(R^2-r^2)W}{R-r}$; lecz różnica kwadratów R^2-r^2 z dwóch linii, równa się prostok. mającemu za podstawę, summę a za wysokość różnicę tych linii (278) t.j. $R^2-r^2=(R+r)(R-r)$ przeto: Pow. bocz. kl. ostrkrę. prost.$=\frac{\Pi(R+r)(R-r)W}{R-r}=\Pi(R+r)W=(\Pi R+\Pi r)W$. A że ΠR wyraża połowę okręgu podstawy dolnéj, zaś Πr połowę okręgu podstawy górnéj, przeto *pow. bocz. równa się połowie summy okręgów dwóch podstaw kloca, pomnożonéj przez linię prostą tworzącą.* Jeżeli pow. kl. ostrokr. przetniemy pł. równo oddaloną od podstaw, i oznaczymy promień tego okręgu przez R' to $R'=\frac{1}{2}(R+r)$ czyli $2R'=R+r$, jako linia łącząca środki dwóch boków nierównoległych trapeza, mającego za podstawy promienie okręgów podstaw, a za boki nierównoległe wysokość i linię tworzącą kloc; przeto *Pow. bocz. klo.* $=\Pi 2R'W$, t. j. *iloczynowi z okręgu koła równo oddalonego od dwóch podstaw, przez linię prostą tworzącą.*

Dodając do pow. bocz. kloca ostrokręgu prostego powierzchnię dwóch podstaw ΠR^2 i Πr^2, otrzymamy całą powierzchnię $= \Pi(R^2 + r^2 + 2R'W)$ albo $\Pi(R^2 + r^2 + (R + r)W)$.

399. *Zt.* Powierzchnię dachów baszt, stogów ostrokręgowych i t. p. obrachowywamy tak jak powierzchnię ostrokręgu.

§ III. Powierzchnia kuli.

A) *Płaszczyzna połączona z kulą.*

400. Płaszczyzna z powierzchnią kuli może mieć punkta wspólne i wtedy jest albo *przecinającą*, gdy rozdziela pow. kuli na dwie części, albo *styczną*, gdy ma z nią jeden punkt wspólny, bo wtedy ta płaszczyzna jest przejściem od przecinającéj do przecinającéj, przy obracaniu płaszczyzny o koło jednego z punktów wspólnych; — pł. nie mająca punktów wspólnych z pow. kuli, zowie się *oddzielną* i nie przedstawia szczególnych własności — ona nie może być równoległą do kuli, bo powierzchnia równoległa do pł., sama jest płaszczyzną. Pow. kuli tworzy się obrotem półokręgu około osi (313), przeto jéj położenie względem pł. oznacza się podobnie jak położenie okręgu względem linii prostéj (172), t. j. *gdy pł. jest przecinającą, styczną lub oddzielną, odległość jéj od środka kuli, jest mniejszą, równą lub większą od promienia; — i nawzajem.*

401. *Tw. Przecięcie się powierzchni kuli z płaszczyzną, jest okręgiem koła* (fig. 308.).

Poprowadziwszy ze środka kuli linię prostopadłą do pł. przecinającéj, i linie proste do punktów przecięcia A, C, B... linie te, jako promienia kuli są sobie równe, a jako równe, równo oddalone od spodka prostopadłéj DE (318. Wn.),—a zatém spodek prostopadłéj jest równo oddalony od puuktów linii przecięcia się, przeto ta linia ABC jest okręgiem.

Jeśli pł. przecinająca przechodzi przez środek kuli, to oddalenia środka kuli od punktów linii wspólnego przecięcia, jako promienie kuli, są sobie równe i to przecięcie jest okręgiem.

Wn. 1. Prostopadła wyprowadzona ze środka kuli na pł. koła przechodzi przez środek tego koła, przeto ta prostopadła wypełnia trzy warunki *a*) przechodzi przez środek kuli, *b*) przez środek koła; *c*) jest prostopadłą do pł koła; a że do oznaczenia linii prostéj potrzeba tylko dwóch warunków, przeto linia prosta wypełniająca dwa z tych warunków, wypełnia i trzeci t. j. 1) *linia łącząca środek kuli ze środkiem koła, jest prostopadłą do pł. tego koła*; 2) *prostopadła wyprowadzona ze środka koła, przechodzi przez środek kuli.* Własność ta jest odpowiednią własności cięciwy w kole (173. Wn. 1); podobnie jak tamta służy do oznaczenia środka kuli, lub poprowadzenia kuli przez cztery punkta dane nie na jednéj pł. Dla oznaczenia powierzchni kuli potrzeba najmniéj czterech punktów dla tego że jak linia prosta oznacza się dwoma punktami a tém samém dwie linie proste można poprowadzić najmniéj przez trzy punkta,—tak okrąg koła oznacza się trzema punktami, a zatém dwa okręgi koła można poprowadzić najmniéj przez cztery punkta t. j przez trzy punkta jeden okrąg, a przez dwa z tych punktów i czwarty, drugi;—cztery te punkta nie mogą leżeć na jednéj pł., gdyż wtedy linie prostopadłe do ich środków byłyby równoległe, a przeto nieprzecinałyby się z sobą i nie dałyby środka kuli. Jeśli dwa koła A i B (fig. 309) nie leżą na jednéj pł., to prostopadłe AC i BC wyprowadzone z ich środków A i B przecinają się z sobą, gdyż poprowadziwszy promienie prostopadłe do wspólnéj cięciwy DE, one spotkają się w jéj środku F a pł. przez nie przechodząca, jako prostopadła do wspólnéj cięciwy, jest zarazem prostopadłą do płaszczyzn kół A i B, jako przechodzących przez cięciwę DE prost. do pł. AFB (338), a zatém linie prostopadłe AC i BC leżą na téj pł. (338 Wn. 1) a jako prostopadłe do linii AF i BF przecinających się, przecinają się z sobą..

Wn. 2. Koło przechodzące przez środek kuli zowie się *kołem wielkiém* kuli, zaś nie przechodzące przez środek, *kołem małym*, dla tego że *koło przechodzące przez środek, jest największe ze wszystkich kół kuli*;—*koło małe tém jest większe im bliższe środka kuli.*—Naprzód *koła małe równo oddalone od środka kuli są sobie równe*, gdyż ich promienie jako przyprostokątnie w trójkątach prostokątnych, mających za przeciwprostokątnie promienie kuli, a za przyprostokątnie prostopadłe równe, poprowadzone ze środka kuli na pł.

ich kół,—są sobie równe;—położywszy więc w kuli koła tak, aby ich pł. były względem siebie równoległe, i przeciąwszy kołem wielkiém prostopadle do tych płaszczyzn, ona jako przechodząca przez linię prostopadłą wyprowadzoną ze środka kuli do ich pł., t. j. przez pł. nieprzechodzącą przez ich środki, przecina te koła po średnicach, które są cięciwami koła wielkiego przecinającego; a że w kole wielkiém prostopadłém przecięcie koła wielkiego równoległego do małych jest średnicą, zaś kół małych cięciwami które są dla bliższych środka, bliżej środka koła wiel. przecinającego, a zatém większe, zaś powierzchnie kół są w stosunku kwadratów z swych średnic, przeto: *a*) koło wiel. jest największe bo ma średnicę największą; *b*) koło małe bliższe środka jest większe od koła dalszego, bo ma średnicę większą od średnicy tego koła.

Uw. Koła małe równoległe w kuli zowią się *równoleżnikami*, a koło wielkie do nich równoległe *równikiem* (ekwatorem), linia wyprowadzona ze środka kuli do pł. tych kół, przechodząca przez ich środek (Wn. 1) zowie się *osią kuli*, a koło wielkie przechodzące przez oś, a zatém prostopadle do równika *południkiem*. Do oznaczenia południka potrzeba jednego punktu, gdyż dwa t. j. końce osi są dane; podobnie do oznaczenia równoleżnika potrzeba jednego punktu, gdyż przez punkt jedną pł. prostopadłą do osi poprowadzić można. Końce osi tak równika jako też i równoleżników, zowią się *biegunami*, bo one jako leżące na prostopadłéj wyprowadzonej ze środka koła, są równo oddalone od okręgu (318). Przecięcie się równika z południkiem jest ich wspólną średnicą do któréj oś kuli jest prostopadłą, przeto okrąg południka, przez te dwie średnice do siebie prostopadłe dzieli się na cztery części równe, zwane *kwadrantami*, tak że odległość bieguna od okręgu równika, na każdym południku zawiera 90^0. Łuki południka zawarte między biegunem a równoleżnikiem są sobie równe, bo ich cięciwy t. j. linie poprowadzone z bieguna do okręgu równoleżnika, są sobie równe, podobnie łuki południka zawarte między równoleżnikami są sobie równe, jako różnice łuków równych zawartych między południkiem a równoleźnikami.

Część powierzchni kuli zawarta między dwoma równoleżnikami zowie się *strefą*, a część powierzchni kuli zawarta między dwoma południkami *pasmą* czyli *pasem* albo *dwukątem* kulistym.

402. *Tw. Punkta* A, C, B, F... *równo oddalone od punktu* G *powierzchni kuli* D *leżą na okręgu koła* (fig. 308).

Prowadzę przez trzy punkta A, C, B pł. przecinającą powierzchnię kuli D po okręgu ACB, i z punktu G prowadzę linię GE prostopadłą do téj pł. przechodzącą przez środek E koła ACB (318. Wn. 3), a tém samem i przez środek kuli D (401. Wn. 1). Potrzeba dowieść że punkt F leży na okręgu ACB i trójkąty GFD i GAD maja bok GD wspólny, GA=GF z założenia i DA=DF jako promienie kuli, przeto kąt

FDG=ADG;— trójkąty DAE i DFE mają więc po dwa boki i po kącie zawartym D równym, mają bok EA=EF i kąty przy E równe, przeto linia EF jest prostopadłą do DE, leży więc na jednej pł. z liniami EA, EB (317. Wn. 2), a punkt F leżący w odległości promienia od środka, leży na okręgu ABC.

Wn. Jeśli z punktu wziętego na pow. kuli jako z bieguna roztwartością 90° koła wielkiego kuli, na jej powierzchni zakreślimy linię krzywą, to ona będzie kołem wiel. tej kuli, gdyż promień kuli z linią łączącą biegun ze środkiem kuli, czyni kąt mający zamiarę 90°, a tem samem pł. koła przechodzi jako prostopadła do osi, przez środek kuli. Zakreśliwszy z bieguna łuk otwartością mniejszą od 90° koła wiel. kuli, otrzymamy koło male.

403. *Tw. Płaszczyzna prostopadła do promienia przechodząca przez jego koniec, jest styczna.*

Linie poprowadzone ze środka kuli do tej pł. jako pochyłe, są dłuższe od prostopadłej, t. j. promienia kuli, a przeto ich końce leżą za pow. kuli.

Wn. I nawzajem: pł. styczna jest prostopadłą do promienia, gdyż jeśliby prostopadła do tej pł. wyprowadzona ze środka kuli nie była promieniem, to byłaby albo większą od promienia, przeto spodek jej byłby za pow. kuli, a tem bardziej spodki pochyłych poprowadzonej do pł., przeto pł. nie miałaby punktu wspólnego z pow. kuli; jeśliby zaś linia prostopadła była mniejszą od promienia, to jej spodek były wewnątrz kuli i pł. byłaby przecinającą.

404. *Tw. Powierzchnie kul równych promieni przystają do siebie.*

Położywszy środek kuli na środek kuli, okręgi tworzące tych kul mają środki wspólne, a tém samem przystają do siebie.

405. *Zt.* 1) W rzemiosłach kula wytacza się za pomocą hebla półkolowego stałego, a ciało toczone obraca się około linii równoległéj do średnicy hebla: hebel ścinający stopniowo nierówności ciała zbliża się do osi obrotu i skoro oś ta przystanie do średnicy półkola hebla, ciało toczone jest kulą. 2) Pow. kuli nie należy do rozwijalnych, przeto nie można przyłożyć do niéj pł.; przy robieniu więc globu, aby na kulę nakleić papiér, papiér wykraja się w wązkie dwukąty kuliste i tym sposobem nakleja się. 3) Południki, równiki i równoleżniki, kreślą się na globie na zasadzie N° 402 Wn.

F) *Dwukąt kulisty.*

406. Prowadząc dwie pł. ADBC i AFBE przez środek kuli G, otrzymamy dwa koła wielkie, których linia przecięcia się jako przechodząca przez środek G jest średnicą kuli i tych kół; okręgi więc tych kół w punktach A i B połowią się, czyli te okręgi przecinają się w odległości 180°. Okręgi ADBC i AFBE dzielą powierzchnię kuli na cztery części: ADBF, AFBC, ACBE i AEBD, każda z nich zowie się dwu-

kątem kulistym odpowiednim kątowi dwuściennemu zawartemu między pł. kół.

407. *Tw. W kuli albo w kulach równych kątom dwuściennym równym odpowiadają dwukąty równe, i nawzajem*: (fig. 311).

Przenoszę kąt dwuścienny AB na *ab* tak, aby krawędź AB przystała do równej jéj krawędzi *ab* i pł. ADB przystała do pł. *adb*, jako pólokręgi równe leżące na jednéj pł. i mające średnice wspólne; 2) pł. ACB przystanie do pł. *acb*, dla równości kątów dwuściennych AB i *ab*, i 3) półokręgu ACB przystanie do półokręgu *acb*; 4) powierzchnia dwukąta ADBC przystanie do dwukąta *adbc*, gdyż kule E i *e* mają środki wspólne, a że i ich ograniczenia przystały do siebie, przeto te dwukąty przystają we wszystkich punktach.

I nawzajem: 1) Przenoszę kulę E na *e* tak, aby oś AB przystała do *ab*, to wtedy i środek E przystanie do *e* dla równości promieni AE i *ae*; 2) Obracam kulę E około wspólnéj osi *ab* tak, aby pólokrąg ADB przystał do równego mu półokręgu *adb*, wtedy i półokrąg ACB przystanie do półokręgu *acb* dla równości dwukątów ADBC i *adbc*;—a zatém i pł. kół przystały do siebie i kąty dwuś. AB i *ab* są sobie równe.

408. *Tw. gł. Stosunek dwukątów kuli lub kul równych, równa się stosunkowi odpowiednich im kątów dwuściennych* (fig. 312).

Przenoszę kąt dwuś. *acbd* na ACBD tak, aby krawędź *ab* przystała do równéj krawędzi AB i półkole *acb* do półkola ACB, półkole *adb* weźmie położenie AEB; następnie przenoszę kąt dwuśc. *acbd* na AEBD tak, aby półkole *acb* przystało do półkola AEB i t. d. dopóki niepozostanie kąt AGBD mniejszy od *acbd*; to wtedy kąty dwuśc. ACBE, AEBF i t. d. są równe kątowi *acbd* przeto i dwukąty ACBE, AEBF i t. d. są równe dwukątowi *acbd* t. j. ile razy kąt dwuś. *cbad* zawiera się w kącie CBAD, tyle razy i dwukąt *acbd* zawiera się w dwukącie ACBD. Podobnie dowiedlibyśmy że ile razy reszta pozostała od przenoszenia kąta dwuś. zawiera się w tym kącie, tyle razy i reszta pozostała od przenoszenia dwukąta *acbd* zawiera się w tym dwukącie i t. d.; przeto stosunki kątów dwuś. i dwukątów, jako wyrażające się jednakową liczbą, są sobie równe (14).

Wn. 1. Stosunek kątów dwuś. równa się stosunkowi odpowiednich im kątów płaskich, ten zaś ostatni stosunek równa się stosunkowi łuków odpowiednich, przeto jeśli ze środka kuli poprowadzimy promienie prostopadłe *nc* i *nd* tudzież NC i ND na ścianach katów dwuściennych, lub z punktów *b* i B linie styczne do półokręgów, stosunek kątów *dnc* i DNC lub *hbi* i HBJ równa się tak stosunkowi kątów dwuś. jako też stosunkowi dwukątów. Jeśli promieniem *nc* i NC zakreślimy łuki odpowiednie *cd* i CD kątom *cnd* i CND, to stosunek tych łuków równa się stosunkowi dwukątów, jako równy stosunkowi kątów *cnd* i CND;—ztąd wynika, że miarą dwukąta jest albo kąt pł. zawarty między stycznemi wyprowadzonemi do półokręgów z punktu jch przecięcia się, albo łuk zakreślony z wierzchołka w odległości 90°, t. j. łuk równika, zawarty między półokręgami.

Kąty zawarte między stycznemi, przez oba wierzchołki poprowadzonemi, są sobie równe, jako mające ramiona równoległe skierowane w jedną stronę; przeto którekolwiek można wziąć za miarę.

Uw. Dwukąt kulisty jest rzeczywiście kątem kulistym, gdyż jak kąt płaski jest płaszczyzną zawartą między dwoma liniami prostemi tworzącemi pł., tak podobnie *kąt kulisty jest częścią powierzchni kuli zawartą między dwoma przecinającemi sie okręgami kół wiel. tworzących pow. kuli.* Różnica kąta kulistego od płaskiego wynika ztąd, że okręgi kół wielkich na powierzchni kuli przecinają się w dwóch punktach, a tym sposobem ograniczają ze wszystkich stron część powierzchni kuli między niemi zawartéj, kiedy linie proste na pł. przecinając się w jednym punkcie nie ograniczały płaszczyzny. Wielkość kąta kulistego nie zależy od długości ramion, bo te wyobrażamy przedłużone do przecięcia się; —za przecięciem się powierzchnia kuli zawarta między przedłużeniami ramion, nie należy do kąta, podobnie jak kąty wierzchołkiem przeciwległe są oddzielnemi kątami. Punkt przecięcia się półokręgów zowie się *wierzchołkiem* kąta kulistego, a półokręgi *ramionami*; kąt kulisty zowie się *prostym*, *ostrym* lub *rozwartym* podług tego jakim jest odpowiedni kąt płaski zawarty między stycznemi do jego ramion Z własności kątów pł. wynika że *summa kątów kulistych przyległych równa się* Π, *a kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe.*

C) *Trójkąty i wielokąt kulisty.*

409. Pow. kuli (fig. 310) przeciętéj dwoma pł. BDAC i BFAE dzieli się na cztery dwukąty czyli kąty kuliste (406), jeśli ją przetniemy pł. trzecią przechodzącą przez środek G, i przecinającą piérwsze dwie pł., to każdy kąt podzieli się na dwie części, a zatém powierzchnia kuli podzieli się na ośm części zwanych *trójkątami kulistemi. Trójkąt* więc *kulisty jest częścią powierzchni kuli, zawartą między łukami kół wielkich, z których dwa po sobie następujące mają końce wspólne;* łuki zawierające trójkąt kulisty zowią się jego *bokami,*—ich przecięcia się *wierzchołkami,*— a pow. kuli zawarta między bokami, zowie się *kątem trójkąta kulistego.* Kąt trójścienny (fig. 313) DABC *zawarty między pł. boków trójkąta kulistego* ABC, *zowie się kątem bryłowym odpowiednim trójkątowi;*—boki AB, BC i AC trójkąta są łukami odpowiedniemi kątów pł. ADB, BDC i ADC kąta trójściennego, zaś kąty trójkąta są odpowiednie kątom dwuściennym kąta trójściennego DABC,—przeto dwa trójkąty ABC i *abc* kuli lub kul równych mające kąty trójścienne DABC i *dabc* równe, mają boki i kąty odpowiednie równe, a nawet przystają do siebie po przystaniu kątów trójściennych im odpowiednich.

Wielokątem kulistym zowie się część pow. kuli zawarta między ilukolwiek łukami kół wielkich, z których dwa po sobie idące mają końce wspólne; od liczby kątów, wiel. kulisty zowie się czworokątem, pięciokątem i t. d. Trójkąt lub wielokąt kulisty mające kąty i boki równe w przeciwnym porządku, zowią się *symetrycznemi*, przeto i kąty bryłowe im odpowiednie są także symetryczne. Jeżeli z wierzchołka trójkąta lub wielok. kulistego w odległości 90° zakreślimy łuki, to utworzy się *trójkąt* lub *wielokąt biegunowy* z danym. Kąty bryłowe odpowiednie trójkątom lub wiel. biegunowym, są biegunowemi kątów bryłowych odpowiednich danym trójkątom lub wielokątom, gdyż (fig. 314) dla trójkąta ABC nakreśliwszy trójkąt biegunowy *abc* i odpowiedni mu kąt trójścienny S*abc*, krawędź S*c* jest prostopadłą do pł. ASB, gdyż kąty AS*c* i BS*c* jako mające za miarę łuki 90° (punkt *c* od A i B leży w odległości 90°) są proste,—podobnie i krawędź S*b* jest prostopadłą do ściany ASC, S*a* do BSC.

411. Kąty pł. kąta bryłowego odpowiedniego trójkątowi lub wiel. kulistemu, są taką częścią płaszczyzny, jaką częścią okręgu koła są boki tych figur; kąty zaś trójkąta lub wielokąta są taką częścią powierzchni kuli jaką kąty dwuś. są całéj przestrzeni, przytém trójkąty i wielokąty kuliste przystają do siebie, gdy odpowiednie im kąty bryłowe przystają do siebie, przeto: 1) *W trójkącie kulistym summa dwóch boków jest większa od trzeciego* (355); 2)

w wiel. kulistym summa boków jest mniejsza od okręgu koła, a bok trójkąta, a tém samém wiel. jest mniejszy od półokręgu koła, bo gdyby był równy to z summą innych boków od niego większą, czyniłby więcéj od okręgu koła; 3) *w trócareful. kulistym summa kątów jest mniejsza od trzy razy wziętéj półkuli, a większa od półkuli*, w wielokącie zaś, jako dzielącym się, przez okręgi kół wielkich poprowadzonych z jednego wierzchołka do innych, na tyle trójkątów ile ma boków mniéj dwa,—summa kątów zawiera się między poprzedzającemi wielkościami tyle razy wziętemi, ile wielokąt ma boków mniéj dwa (357. Wn.); 4) *w trójkącie kulist. na przeciw boków równych leżą i kąty równe, na przeciw boku większego leży i kąt większy, i nawzajem* (358); 5) *trójkąty kuliste są równe*, czyli *mają boki i kąty odpowiednio równe, gdy mają równe*: a) *dwa boki i kąt zawarty* (359), b) *trzy boki* (360), c) *po dwa boki i kącie niezawartym, a dwa inne kąty przeciwległe bokom równym, oba ostre lub rozwarte* (361); d) *po boku i dwa kąty przy nim leżące* (362), *po boku i dwa kąty nie przy nim leżące, lecz dwa inne boki przeciwległe kątom równym oba ostre lub rozwarte* (363), f) *po trzy kąty* (364). 5) *Wielokąty kuliste składające się z równéj liczby trójkątów równych i jednakowo położonych są sobie równe* (364. Uw. 3).

412. *Tw. Łuk* JLK *koła wielkiego kuli wyraża najkrótszą odległość na powierzchni kuli między dwoma punktami* J, K (fig. 308).

Jeśli przez punkta J, K poprowadzimy koło wielkie JLK i małe JMK, pł. tych kół przetną się po linii JK będącéj ich wspólną cięciwą; obracając pł. koła małego około wspólnéj cięciwy JK, gdy położymy ją na pł. koła wielkiego, otrzymamy dwa koła przecinające się i łuk JM'K koła małego (z téj strony środka kuli, z któréj leży cięciwa JK) obejmuje łuk koła wielkiego JLK i dla podobnéj przyczyny jak linie łamane, jest od niego większy; przeto łuk koła małego nie może wyrażać najkrótszéj odległości punktów J i K.

Linia krzywa poprowadzona od punktu J do K na pow. kuli, jest dłuższą od łuku JLK koła wielkiego kuli; gdyż przez punkta po sobie idące téj krzywéj poprowadziwszy łuki kół wielkich, summa ich jest większa od łuku JLK, dla podobnéj przyczyny jak linia łamana obejmująca jest większa od objętéj,— gdyż summa dwóch boków trójkąta kulistego jest większa od boku trzeciego.—A zatém łuk koła wiel. JLK, jako najkrótszy ze wszystkich linii poprowadzonych na pow. kuli między dwoma punktami, wyraża ich najkrótszą odległość.

413. *Tw. Łuki odpowiednie hg, ed, ki kątom trójkąta kulistego* ABC *z bokami przeciwległemi trójkąta biegunowego czynią* 180^0, *i nawzajem* (fig. 314).

Łuk *bc* jest zakreślony na pow. kuli z punktu A w odległości 90^0, podobnie łuk *ac* z punktu B w odległości 90^0, przeto punkt ich przecięcia się *c* jest oddalony od punktu A i B o 90^0, przeto i od wszystkich punktów okręgu $dABh$, a zatém punkt c jest biegunem boku AB; i łuki ch i cd zawierają 90^0;—dla podobnéj przyczyny i punkt b jest biegunem boku AC i łuki bg i bk zawierają po 90^0, punkt a jest biegunem boku BC i łuki ai i ae zawierają po 90^0. Trójkąty więc ABC i abc są wzajemnie biegunowe a zatém potrzeba tylko dowieść, że łuki odpowiednie kątom trójkąta ABC z bokami przeciwległemi trójkąta abc spełniają się do 180^0. Łuk $hc = 90^0$, dodawszy do niego łuk bh, otrzymamy bok bc trójkąta biegunowego abc, t. j. $bc = 90^0 + bh$, dodając zaś z obu stron po łuku hg odpowiednim kątowi A, mamy: $bc + hg = 90^0 + bh + hg$; lecz $bh + hg = 90^0$ przeto $bc + hg = 90^0 + 90^0 = 180^0$— podobnie dowiedlibyśmy że i $ac + de = 180^0$, $ab + ki = 90$.

Uw. Własność ta jest odpowiednią własności kątów trójściennych (354).

414. *Tw. Trójkąty kuliste symetryczne są jednakową częścią powierzchni kuli czyli są sobie równe* (fig. 315).

Koła małe przechodzące przez wierzchołki trójkątów ABC i abc sa równoległe, gdyż linie SA, SB, SC, Sa, Sb, Sc są sobie równe (348. Wn. 2), poprowadziwszy więc ze środka kuli S linię prostopadłą po pl. tych okręgów, ona przetnie powierzchnię kuli w punktach D i d będących biegunami tych kół małych (402. Wn.). Poprowadziwszy przez bieguny D i d i wierzchołki trójkątów koła wielkie, trójkąty symetr. podzielą się na trójkąty równoramienne, gdyż kąty pł. DSA i DSB są sobie równe jako utworzone przez pochyłe SA i SB równo oddalone od spodka linii SD prostopadłéj do pł. koła małego ABC (318. Wn. 2), przeto i łuki im odpowiednie DA i DB są sobie równe; trójkąty więc ABD i *abd* są sobie równe, jako mające po trzy boki równe w tym samym porządku (411, 4, *b*): AB=*ab* jako odpowiednie kątom wierzchołkiem przeciwległym, *bd*=BD=DA i *ad*=AD=BD,— podobnie trójkąt DBC=*dbc* i DAC=*dac*. Trójkąty więc kuliste ABC i *abc* są sobie równe jako złożone z trójkątów równoramiennych równych.

415. *Tw. Powierzchnia trójkąta kulistego, równa się połowie summy powierzchni swych kątów zmniejszonéj kątem prostym kulistym.* (fig. 310).

W trójkącie kulistym EAC kąt A=EAC+EBC, kąt C=ECA+EDA i kąt E=AEC+AFC, gdyż okręgi kół wielkich zawierających ten kąt przecinają się w końcach średnicy EF. Dodając te ilości równe, otrzymamy: kąty kuliste A+C+E=EAC+EBC+ECA+EDA+AEC+AFC. Zamiast EAC+EBC biorąc BEACB, zamiast EDA+AFC czyli EDA+DEB, gdyż trójkąty AFC i EDB mające wierzchołki A z B, F z E i C z D na przeciwnych końcach średnic jako symetryczne są sobie równe (413), — biorąc kąt kulisty AEBDA otrzymamy: kąt kulisty BEACB+AEBDA+2 trójkąty AEC=kątom kulist. A+C+D, lecz kąty przyległe BEACB+AEBDA składające półkuli, równają się dwóm kątom prostym kulistym, przeto: 2 kąt. pros. kuli+2 trój. AEC=trzem kątom trójkąta kulistego; — a zatém dwa razy wzięty trójkąt kulisty, równa się trzem swoim kątom zmniejszonym dwoma kątami prostemi, czyli trójkąt kulisty równa się połowie trzech swoich kątów zmniejszonych kątem prostym kulistym.

Wn. Wielokąt kulisty składa się z tylu trójkątów kulistych ile ma kątów, mniéj dwa, i kąty tych trójkątów składają kąty wielokąta, przeto powierzchnia wielokąta kulistego równa się połowie summy jego kątów zmniejszonéj tylu kątami prostemi, ile wielokąt ma kątów, mniéj dwa.

416. *Tw. Miarą kąta bryłowego jest odpowiedni mu wielokąt kulisty.*

Kąt wielościenny równa się połowie summy swych kątów dwuściennych zmniejszonej tylu kątami dwuściennemi prostemi, ile ma ścian, mniéj dwie (366. Wn. 4); przeto kąt wielościenny jest taką częścią przestrzeni, jaką częścią jest przestrzeni summa jego kątów dwuściennych, zmniejszona tylu kątami prostemi ile ma ścian, mniéj dwie, albo jaką jest częścią płaszczyzny summa kątów odpowiednich kątom dwuściennym, które są zarazem odpowiednie kątów kulistym wielokąta, odpowiedniego kątowi bryłowemu (408. Wn. 1 i 409), a że wielokąt kulisty jest taką częścią pow. kuli, jaką jéj częścią jest summa jego kątów kulistych zmniejszona tylu kątami prostemi ile jest boków, mniéj dwa, albo jaką częścią płaszczyzny jest summa kątów płas. odpowiednich kątom kulistym, zmniejszona tylu kątami prostemi, ile ma wielokąt boków mniej dwa, przeto wielokąt kulisty jest taką częścią kuli, jaką kąt bryłowy jemu odpowiedni jest częścią przestrzeni, a przeto aby wiedzieć jaką częścią kąt bryłowy jest przestrzeni, potrzeba się dowiedzieć jaką częścią pow. kuli jest odpowiedni mu wielokąt kulisty, czyli potrzeba zmierzyć ten wielokąt i nawzajem; a przeto kąt bryłowy ma za miarę odpowiedni mu wielokąt kulisty.

D) *Obrachowanie powierzchni kuli.*

417. *Powierzchnia utworzona obrotem połowy symetrycznéj* ABCDEF *wielokąta forem. parzystego około osi* AF, *równa się iloczynowi z okręgu koła wpisanego w ten wielokąt, przez oś łączącą przeciwległe wierzchołki* (fig. 316).

Z wierzchołków B, C, D, E połowy wielokąta poprowadziwszy linie prostopadłe na oś obrotu AF, linie te w czasie obrotu nieprzestaną być prostopadłe, a tém samém leżeć będą na jednej pł. (317. Wn. 2) ograniczonej okręgiem koła, mającego za promień prostopadłę. Powierzchnia więc utworzona obrotem połowy ABCDEF wielokąta około osi AF, składa się z powierzchni ostrokręgu prostego mającego za wysokość Aa, a za promień podstawy Ba;—powierzchni kloca ostrokręgowego prostego, mającego, mającego za wysokość ab a za promienie podstaw Ba i Cb;—powierzchni walca prostego mającego za wysokość bc, a za promień podstawy Dc i t.d. a zatém poprowadziwszy ze środków boków linie prostopadłe na oś i nazwawszy pow. bryły utworzonéj obrotem połowy ABCDEF wielokąta przez P, mamy: $P=2\Pi Ba.LA+2\Pi Me.CB+2\Pi ON.DC+2\Pi Wg.DE+2\Pi Ed.PF=2\Pi(Ba.LA+Me.CB+ON.DC+Wg.DE+Ed.PF)$. Trójkąty BA$a$ i OAL prostokątne mające kąt A wspólny, mają boki proporcyonalne, $Ba:Aa=OL:LA$ a ztąd $Ba.LA=OL.Aa$, podobnie $Ed.PF=OP.Fd$; — trójkąty CBh i OMe mające boki prostopadłe dają $CB:Bh=MO:Me$, to $Me.BC=MO.Bh$, podobnie $Wg.DE=WO.Ek$. Wstawiwszy wynalezione wartości, otrzymamy: $P=2\Pi(OL.Aa+OM.Bh+ON.CD+OW.Ek+OP.Fd)$; w téj wartości OL, OM, ON, OW, OP są promieniami koła wpisanego w wielokąt, który oznaczywszy przez r, i jako wspólny czynnik wynosząc za nawias, otrzymamy: $P=2\Pi r(Aa+Bh+CD+kE+Fd)$; lecz $Bh=ab$, $CD=bc$, $Ek=cd$ zaś $Aa+ab+bc+cd+dF=AF$ przeto $P=\Pi r AF$.

Wn. Podobnie pow. utworzona przez obrót części BCDE pół wielokąta for. równa się okręgowi koła wpisanego przez część osi ad, zawartą między prostopadłemi, wyprowadzonemi z końców téj części na oś, sym. łączącą wierzchołki półwielokąta.

418. *Tw. Powierzchnia kuli równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego kuli, przez średnicę* (fig. 316).

1szy *Sposób.* Powierzchnia utworzona przez obrot półwielokąta około osi symetryi AF, łączącej wierzchołki wielokąta, tém jest większą, im liczba boków wiel. parzystego jest większa, dla tego że oś symetryi AF pozostaje ta sama a promień koła czyli pro stopadła do boku powiększa się z powiększaniem się liczby boków, gdyż cięciwa mniejsza bardziéj jest oddalona od środka koła; a zatém powierzchnia utworzona przez obrot połowy wiel. for parzyst., jest mniejsza od powierzchni utworzonéj przez pólkol opisany na tym wielokące, dla tego że powierzchnia ta nie może być ani równą, ani większą od pow. utworzonéj przez półokręg; w pierwszym bowiem razie jeśliby powierzchnia utworzona przez obrot wiel. ABCEF, była równa, to utworzona przez obrot wielokąta o podwójnéj liczbie boków, byłaby mniejszą od pow. utworzonéj przez okręg i tém mniejszą, im wielokąt bardziej zbliżałby się do koła, a ta powierzchnia do pow. kuli, co być nie może,—w drugim razie jeśliby powier. utworzona przez obrot wiel. ABCDEF była większą od pow. kuli, to utworzona przez obrot wielokąta o dwa razy większéj liczbie boków, jako mniejsza od pow. utworzonéj przez poprzedzający wiel. mniejby się różniła od kuli pow. i z czasem stałaby się jéj równą,—co podług pierwszego przypuszczenia miejsca mieć nie może.— Ztąd wynika, że powierzchnia utworzona obrotem półwiel. for. tém bardziéj zbliża się do pow. kuli utwor. obrotem półkola opisanego na wielokącie, im ten wiel. bardziéj się zbliża do okręgu koła. A że przy obrachowaniu wielkości półokręgu koła, z powodu jego niewspółmierności z promieniem, zamiast jego wielkości bierzemy wielkość wielok. wpis., do tylu cyfr dziesiętnych do ilu liczba wyrażająca tą wielkość nie różni się od liczby wyrażającéj wielkość obw. wiel. opis. o téj samej liczbie boków,—dowiedlibyśmy zaś, że pow. utworzone przez obroty półwiel. i koła co do wielkości mają tę własność wielokąt i koło,—przeto biorąc za półokręgu koła pół obw. wiel. wpis. o tylu bokach ile ścisłość rachunku wymaga, bierzemy zarazem zamiast pow. kuli, powier. utworzoną przez ten wielokąt która równa się okręgowi przez połowę średnicy.

2gi *Sposób*. W obrachowaniu wielkości półokręgu koła, zamiast półokręgu braliśmy półwielokąta wpis. w koło o tylu bokach ile wymagała ścisłość rachunku; a zatém zamiast półokręgu koła tworzącego powierzchnię kuli biorąc półwielokąta wpis. o wielkiéj liczbie boków, otrzymamy z tém samém przybliżeniem z jakiém jest ten wiel. do koła, powierzchnię kuli, która równa się, tak jak pow. obrotowa wielokąta, średnicy przez okręg koła wpis. w wielokąt, czyli przez okręg koła téj saméj średnicy, gdyż liczebna wielkość okręgu wpis. do żądanéj liczby cyfr dziesiętnych, nie różni się tak od okręgu opis. jako i wpis. w ten wielokąt (266).

Wn. 1. Powierzchnia kuli równa się więc $2\Pi r \times 2r = 4\Pi r^2$, a że powierzchnia koła $= \Pi r^2$, przeto *pow. kuli równa się pow. czterech kół wielkich.*

Wn. 2. To co powiedzieliśmy o pow. utworzonéj przez obrot połowy wielokąta, ściąga się i do pow. utworzonéj przez część wielokąta, gdyż w ilu cyfrach dziesiętnych okręg nie różni się od obwodu wielok. opisanego, w tyluż cyfrach nie różnią się i jednakowe ich części, a przeto powierzchnia *odcinka*, czyli części powierzchni odciętej kołem, *równa się okręgowi* *kuli przez jego wysokość,* powierzchnia odcinka o dwóch podstawach, czyli części pow. kuli zawartéj między dwoma kołami równoległemi, *równa się okręgowi koła wielkiego kuli przez wysokość.*

Wn. 3. *Powierzchnia taśmy, dwukąta* czyli *kata kulistego, równa się takiéj części powierzchni kuli, jaką częścią okręgu koła jest łuk odpowiedni kątowi,* przeto jeśli łuk ma a^0 to $360^0 : a^0 = 4\Pi r^2 : x$ a ztąd $x = \frac{4\Pi r^2 a^0}{360^0}$.

Wn. 4. *Powierzchnia trójkąta kulistego jest taką częścią powierzchni kuli, jaką częścią okręgu koła jest summa łuków odpowiednich jego kątom zmniejszona półokręgiem,*—przeto oznaczywszy łuki odpowiednie kątom przez a^0, b^0, c^0, mamy $360^0 : a^0 + b^0 + c^0 - 180^0 = 4\Pi r^2 : x$, a ztad $x = \frac{4\Pi r^2 (a^0 + b^0 + c^0 - 180^0}{360^0}$.

Wn. 5. Powierzchnia wiel. kulistego, jest taką częścią powierzchni kuli jaką summa jego kątów zmniejszona tylu półokręgami, ile wielokąt ma boków mniéj dwa, jest okręgu koła; przeto oznaczywszy n kątów wielokąta przez a^0, b^0, c^0, d^0... mamy: $360^0 : a^0 + b^0 + c^0 + d^0 + .. - (n-2)180^0 = 4\Pi r^2 : x$, ztąd $x = \frac{4\Pi r^2 (a^0 + b^0 + c^0 + d^0 + \dots (n-2)180^0)}{360^0}$.

ROZDZIAŁ IV.

Powierzchnie krzywe z krzywemi.

419. *Tw. Powierzchnie dwóch walców, mających osie równoległe, przecinają się po dwóch prostych tworzących.*

Przez punkt wspólny dla tych dwóch powierzchni poprowadziwszy dwie pł. równoległe do ich podstaw, one przetną powierzchnie po okręgach równych podstawom; okręgi te jeśli leżą na jednéj pł., jako mające punkt wspólny przecinają się w dwóch punktach, przez które poprowadzone linie proste równoległe do osi, są wspólnemi tworzącemi powierzchnie walców, a przeto są ich wspólném przecięciem się, których to przecięć jest tylko dwa dla tego, że okręgi przecinają się tylko w dwoch punktach,—jeśli okręgi przecięć nie leżą na jednéj pł., to pł. ich przecinają się po linii przechodzącéj przez punkt okręgów, a zatém okręgi i w tym razie mają tylko dwa punkta wspólne, a tém samém pow. walców dwie proste tworzące.

Wn. 1. Jeśli pow. jednego walca obracać będziemy około linii prostéj wspólnéj tworzącéj, to druga będzie się do niéj zbliżała, nie przestając być równoległą, a gdy zleje się z nią, pow. walców staną się stycznemi, a zatém *dwie powierzchnie walców mających osie równoległe są styczne, gdy mają jedną prostą tworzącą wspólną.* Jeśli powierzchnie styczne dwóch walców prostych mających osie równoległe, obracają się około osi, to one w czasie obrotu nie przestają być stycznemi, podobnie jak okręgi ich podstaw leżące na pł. prostopadłéj do osi. Jeżeli przez punkt dotknięcia się podstaw, lub okręgów do nich równoległych przechodzących przez punkt wspólny, poprowadzimy linię prostą, wspólną ich styczną, to pł. przechodząca przez styczną i wspólną tworzącą, jest pł. wspólną styczną pow. walcowych.

Wn. 2. Podobnie dowieść można, że dwa ostrokr. mające wierzchołek wspólny, przecinają się po dwóch liniach prostych tworzących, i w tym razie mając jedną tylko tworzącą wspólną są stycznemi; wspólna ich pł. styczna przechodzi przez linię prostą wspólną styczną ich podstaw i wspólną tworzącą. Dwa ostrokręgi proste styczne po linii prostéj tworzącéj obracając sie około osi nieprzestają być stycznemi, dla tego że i okręgi ich podstaw w czasie obrotu około osi są styczne.

Wn. 3. Pow. walca są styczne, gdy mają jedną tworzącą wspólną, t. j. gdy mają wspólną styczną płaszczyznę.

Wn. 4. Pow. walcowe niemające osi równoległych jako i ostrokręgowe niemające wierzchołków wspólnych mogą być styczne tylko w jednym punkcie, lecz ten przypadek nie przedstawia szczególnych własności i jest przejściem do przecinania się tych powierzchni po liniach nie należących do Jeom. Elem.

420. *Tw. Powierzchnie walca i ostrokręgu prostego, mające oś wspólną, przecinają się po kole* (fig 317).

Przez punkt A wspólny dla powierzchni walca i ostrokręgu, poprowadziwszy pł. prost. do osi SD, ona jako równoległa do pł. podstaw przetnie tak jedną jaką i drugą pow. po kole wspólném, gdyż oba te koła leżąc na pł. prostopadłej do osi w punkcie D, mają środek D i promień AD wspólny.

421. *Tw. Powierzchnia walca prostego, mającego oś przechodzącą przez środek kuli, przecina pow. kuli po kole.*

Poprowadziwszy przez punkt wspólny tych pow. pł. prostopadłą do osi walca, pł. ta przecina tak jedną jak i drugą po kole, którego środkiem jest przecięcie się pł. z osią, koła te są sobie równe, jako mające równe promienie, a zatém są jedném tylko kołem, gdyż trzy warunki: punkt wspólny, środek i prostopadłość pł. koła do osi walca, zupełnie oznaczają koło.

Wn. 1. Jeśli promień walca prostego będzie się powiększał, to dwa okręgi przecięcia się z kulą będą się także powiekszały, a tém samém jako wieksze. będą bliżej leżały środka kuli,—tak że gdy promień walca stanie się równy promieniowi kuli, okręgi te, zleją się w jeden okręg koła wielkiego, prostopadłego do osi walca i walec będzie styczny, tak że w tym przypadku styczność walca jest przejściem od przecinania się do nieprzecinania się.

Wn. 2. Podobnie dowieść można że pow. ostrokręgu prostego, którego oś przechodzi przez środek kuli, przecina tę powierzchnię po dwóch kołach, tak że proste tworzące ostrokręgu są siecznemi do kół południkowyh, względem punktów przecięcia się osi ostrokręgu z pow. kuli. Jeśli z punktu wziętego za kulą, poprowadzimy linię przechodzącą przez oś kuli, i linię styczną do południka kuli przechodzącego przez bieguny utworzone przez tę oś, to ona jest tworzącą pow. ostr. prostego stycznego do powierzchni kuli, gdyż półkole tego południka obracane z linią styczną około osi, utworzy kulę, a punkt dotknięcia się koło równoleżnikowe, będące podstawą ostrokręgu.

Uw. 1. Położenie wzajemne kul, jako utworzonych obrotem półkola, oznacza się temi samemi warunkami co i położenie kół.

Uw. 2. Walce proste mające osie wspólne, są równoległe, dla téj saméj przyczyny co i koła ich podstaw.

Uw. 3. Ostrokręgi proste mające osie na jednéj linii prostéj a wierzchołki nie wspólne, albo się przecinają po kole, albo są równoległe, podług tego czy dwie proste ich tworzące są przecinające się lub równoległe, gdyż proste tworzące czynią z osią kąty równe.

422. *Zt.* Własności połączeń pow. krzywych mają obszerne zastosowanie w konstrukcyi maszyn i tak: walce styczne po prostéj. w maszynach do walcowania, ostrokręgi styczne po prostéj w zamianie ruchu około jednéj osi na ruch około innéj nie prostopadłéj i nierównoległéj. Ostrokręgi przecinające się po kole, w konstrukcyi młynów, w wyrabianiu zatyczek i t. p. kule styczne do walca przy kalibrowaniu i t.d.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZÉJ.

SOLIDOMETRYI CZĘŚĆ II.

Własności brył.

ROZDZIAŁ I.

Równość.

§ 1. Przystawanie.

423. W części piérwszéj uważaliśmy tworzenie się brył głównych przy połączeniu powierzchni ograniczających przestrzeń i z własności tych połączeń wynikły własności ograniczeń brył, płaszczyzn je przecinających, co następnie podało sposób obrachowywania powierzchni brył. W części drugiéj uważać będziemy własności samychże brył, które są kształtem i wielkością w jedni, a przeto uważać będziemy warunki przy których bryły są: *a*) *równe* t. j. mają kształt i wielkość jednakową; *b*) *podobne* t. j. mają tylko kształt jednakowy; *c*) *równoważne* t. j. mają wielkość jednakową; lecz że jednakowa wielkość jest

tylko szczególnym przypadkiem stosunku wielkości, przeto przechodząc od szczególu do ogółu, uważać będziemy łącznie *stosunek wielkości brył*, z którego wynika sposób obrachowania wielkości brył, biorąc jedną z nich za jedność i wskazując stosunek jéj do innych. *d*) Nareszcie *zależność wielkości od kształtu brył* czyli jakiego kształtu bryły przy równym ograniczeniu mają wielkość największą lub w bryłach jednakowéj wielkości jaki kształt daje najmniejsze ograniczenie.

424. *Bryły równe*, jak powiedzieliśmy, *są te które mają wielkość i kształt jednakowy*, takiemi są albo *a*) *przystające*, które włożone jedna w drugą zlewają się, czyli przystają we wszystkich punktach, t. j. ich ograniczenia przystają do siebie,—albo *b*) *symetryczne*, jakiemi są dwie ręce, lub dwie rękawiczki, części odpowiednie maszyn, statków wodnych, budowli i t.p.

425. Przystawanie brył płaskościennych uskutecznia się przenoszeniem jednéj na drugą, ściany ich bowiem, jako wielokąty przystają gdy są sobie równe; płaszczyzny ścian przystają gdy kąty dwuścienne są równe, krawędzie przystają gdy kąty bryłowe są równe, wierzchołki kątów przystają gdy krawędzie są sobie równe. Lecz przenoszenie brył niepłaskościennych nie może uskutecznić się podług powyższych zasad, przeto jak w planimetryi przy przenoszeniu figur płaskich braliśmy linie główne odpowiednie, wynikające z własności samychże figur (249),

i inne czyniące z nimi kąty równe,—tak w Solidometryi w dwóch danych bryłach do przenoszenia bierzemy po dwie linie główne odpowiednie z własności brył, a inne wyznaczające z nimi kąty trójścienne, równie: w ogólności *w dwóch bryłach, linie wyznaczające z dwoma liniami odpowiedniemi tych brył, kąty trójścienne równe, zowią się nachylonemi odpowiedniemi brył*, zaś *wierzchołek kątów trójściennych punktem nachylenia*. Główne linie odpowiednie brył są: krawędzie dwóch ścian równych — linie łączące wierzchołki kątów równych — linie odpowiednie ścian równych, wysokości w ostrosłupach, osie w walcach, ostrokręgach i t. p. Nachylone odpowiednie przecinając się z ograniczeniami bryły lub z sobą, dają punkta odpowiednie. Bryłami przystającemi mogą być tylko bryły tego samego nazwiska: graniastosłupy trójkątne, czworokątne i t. d.—ostrosłupy, walce, ostrokręgi i kloce tych brył i t. p. gdyż takie tylko bryły pod względem kształtu mają jednakową główną własność, a tém samém i odpowiednie główne linie.

426. *Tw. gł. Gdy nachylone odpowiednie są sobie równe, to i oddalenia odpowiednich punktów są jednakowe* (fig. 318).

Zak. CD$=$*cd*, CA$=$*ca*, CE$=$*ce*,... *Tw.* DA$=$*da*, AE$=$*ae*, EF$=$*ef*,... Oddalenia odpowiednich punktów DA, *da*; AE, *ae*; EF, *ef*,.. są sobie równe, jako boki trójkątów DAC, *dac*; AEC, *aec*; EFC, *efc*,... mających z założenia po dwa boki i po kącie C i *c* zawartym między temi bokami równym.

Wn. Kąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta są sobie równe, jako kąty trójkątów mających po trzy boki równe.

427. *Tw. od. Gdy oddalenia odpowiednich punktów* C, D, A, E, F... i *c, d, a, e, f,... są jednakowe, to linie łączące te punkta z którymkolwiek z nich* C i *c lub z punktem jednakowo oddalonym od trzech punktów odpowiednich,—są nachylone odpowiednie* (fig. 318).

1⁰ W bryłach CDABEFKGH i *cdabefkgh* linie łączące punkta odpowiednie C i *c* z innemi odpowiedniemi punktami z założenia są sobie równe, i zawierają kąty równe (426. Wn.) przeto są nachylone odpowiednie (425) a punkta C i *c* punktami nachylenia.

2⁰ W bryłach DABEFGK i *dabefgk* biorąc punkta C i *c* jednakowo oddalone od trzech punktów odpowiednich D, A, B i *d, a, b*,—t. j. biorę punkt C dowolny i na trójkącie *dab* ustawiam trójkąty równe trójkątom DAC, ABC i DBC tak, aby po dwa miały wspólną krawędź, wierzchołki ich tak jak w ostrosłupie CDAB zejdą się w jednym punkcie *c* odpowiednim punktowi C:—łączę je z odpowiedniemi punktami brył liniami CD, CA, CB, CE.... *cd, ca, cb, ce,...* i mam dowieść że linie te są nachylone a odpowiednie, zaś punkta C i *c* punktami nachylenia. Linie CD, CA, CB i *cd, ca, cb* z wykreślenia są nachylone odpowiednie. Kąty trójścienne DEAC i *deac* mające kąt EDA =*eda* jako zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta—kąt ADC=*adc* jako kąty trójkątów

CDA i *cda* z wykreślenia równych—i kąty dwuścienne zawarte między pł. EDA, ADC i *eda*, *adc* równe jako summy kątów dwuśc. EDAB=*edab* w kątach trójśc. DEAB i *deab* i BADC=*badc* w kątach trójśc. DABC i *dabc*, mających po trzy kąty pł. równe—mają kąt CDE=*cde*, a tém samém trójkąty EDC i *edc* mające po dwa boki i po kącie między nimi zawartym równym, mają bok EC=*ec* i kąt ECD=*ecd*, kąt zaś ECA =*eca* jako leżące w trójkątach mających po trzy boki równe: CA=*ca* z wykreślenia, CE=*ce* z poprzedzającego dowodzenia i AE=*ae* jako linie łączące odpowiednie punkta, przeto linie CE i *ce* są nachylone odpowiednie równe. Linie CF i *cf* są nachylone odpowiednie; gdyż trójkąty CEF i *cef* mające bok CE =*ce*, EF=*ef* jako linie łączące odpowiednie punkta, i kąt między nimi zawarty CEF=*cef* jako między liniami odpowiedniemi, mają bok FC=*fc* i kąt FCE=*fce*,—kąt zaś FCA=*fca* jako leżące w trójkątach mających po trzy boki równe i t. d.

428. *Tw. gł. Gdy nachylone odpowiednie są sobie równe bryły przystają do siebie i nawzajem* (fig. 318).

Przenoszę brylę *dg* na DG tak aby punkt nachylenia *c* padł na punkt nachylenia C, nachylona *cd* padła na nachyloną CD, to wtedy nachylona *ca* padnie na nachyloną CA dla równości kątów *dca* i DCA,—nachylona *ce* padnie na nachyloną CE dla równości kątów trójściennych *cdae* i CDAE,—*cf* padnie na CF dla równości kątów trójściennych *caef* i CAEF i t. d.; a że one są równe, przeto końce ich przystają do siebie.

I nawzajem: po przystaniu brył *dg* i DG gdy z jakiegokolwiek punktu poprowadzimy linie nachylone do punktów brył, one są wspólne dla ich obu, a przeto i po oddzieleniu brył one nie przestaną być równe i czynić z sobą kątów równych.

Wn. 1. Bryły składające się z równéj liczby ostrosłupów trójkątnych równych jednakowo położonych, i mających wierzchołek wspólny są sobie równe i nawzajem.

Uw. 1. Dowiedliśmy, że gdy nachyl. odpowiednie są równe, bryły są sobie równe, i mają oddalenie odpowiednich punktów jednakowe (126), i nawzajem; przeto równość linii łączących odpowiednie punkta pociąga za sobą równość brył.

Uw. 2. W bryłach płaskościenych odpowiednie nachylone prowadzą się tylko do wierzchołków, gdyż skoro te przystają do siebie, to tém samym krawędzie, a następnie ściany przystają do siebie.

429. *Tw. Bryły płaskościenne* ABCDEFKGH *i abcdefkgh przystają do siebie gdy mają ściany w tym samym porządku równe, i nachylenie się ścian równych jednakowe* (fig. 318).

Po położeniu ściany ABCD na równą jéj ścianę *abcd*, ściany je ograniczające przystaną do siebie dla równości kątów dwuściennych i t. d.

Wn. Z podobnego przenoszenia wynika, że bryły płaskościenne są równe gdy mają ściany i kąty dwuścienne równe, oprócz jednéj i kątów dwuśc. przy niéj leżących.

430. *Tw. Ostrosłupy trójkątne mające po kącie bryłowym i jego krawędzie równe, są sobie równe.*

Biorąc wierzchołek kąta za punkt nachylenia, krawędzie są nachylone odpowiednie, a że one są sobie równe, przeto i ostrosłupy przystają do siebie (425).

Wn. Kąty trójścienne w sześciu przypadkach są sobie równe 359 do 361, przeto *ostrosłupy trójkątne są sobie równe: gdy w tym samym porządku mają równe trzy ściany*, gdyż kąty trójścienne złożone z trzech kątów pł. równych, są sobie równe, krawędzie zaś jako boki trójkątów równych są także równe; 2) *trzy kąty dwuśc. kątów trójśc. wierzchołkowych i krawędzie tych kątów*; 3) *dwie ściany i kąty dwuścienne między nimi zawarte*; 4) *jedną ścianę i dwa kąty dwuś. przy niéj leżące, tudzież krawędzie przeciwległe téj ścianie*; 5) *dwie ściany i po kącie dwuś. przeciwległym odpowiednim ścianom równym,—kąty zaś dwuś. przeciwległe drugim ścianom równym nie spełniające się do* II; 6) jedną ścianę i dwa kąty dwuś., jeden przy niej leżący zaś drugi przeciwległy, zaś kąty pł. przeciwległe drugim kątom dwuś. nie spełniające się do II, —przytem krawędzie przeciwległe téj ścianie równe.

431. *Tw. Ostrosłupy wielokątne są sobie równe gdy mają kąty bryłowe wierzchołkowe i ich krawędzie równe.*

Biorąc wierzchołki ostrosłupów za punkta nachylenia, krawędzie tych kątów są nachylone odpowiednie, gdyż kąty bryłowe równe składają się z kątów trójś. równych (364. *Uw.* 3), a te nachylone z założenia są sobie równe.

Wn. 1. Kąty bryłowe są sobie równe gdy mają wszystkie kąty pł. i dwuś. równe, oprócz dwóch pł. i dwuś. między niemi zawartego, lub dwóch dwuśc. i kąta pł. zawartego między ich krawędziami; pł. zaś podstaw ostrosłupów przystają do siebie, gdy końce trzech krawędzi bocznych przystają do siebie (307), przeto *ostrosłupy wielokątne są sobie równe, gdy mają po dwie ściany i kącie dwuś. między nimi zawartym równym, tudzież kąty bryłowe przy wierzchołkach równe.*

Wn. 2. *Ostrosł. wielokątne są sobie równe gdy mają podstawy i wysokości przechodzące przez odpowiednie punkta równe*; biorąc bowiem końce wysokości za punkta nachylenia, linie poprowadzone z tego punktu do odpowiednich wierzchołków podstaw są sobie równe, jako przeciwprostokątnie w trójkątach mających przyprostokątnie równe, kąty zaś zawarte między temi nachyleniami są sobie równe, jako leżące w trójkątach mających po trzy boki równe, dwie nachylone i linie łączące odpowiednie punkta podstaw. *Ostrosłupy więc forem. są równe, gdy mają podstawy i wysokości równe*, gdyż wysokości przechodzą przez środki podstaw.

Wn. 3. Ostros. wiel. są równe gdy mają podstawy i kąty trójścienne przy nich leżące równe, gdyż przeniosłszy ostrosł. tak, aby ich podstawy przystały, ściany boczne przystaną dla równości kątów dwuśc. przy podstawie, a tem samem krawędzie, jako przecięcia się ścian przystających i wierzchołki jako przecięcia się przystających krawędzi, przystaną do siebie.

432. *Tw. Graniastosłupy są sobie równe gdy mają po trzy ściany równe, zawierające kąty bryłowe* A *i* a (fig. 319).

Kąty bryłowe A i *a* są sobie równe, jako składające się z kątów pł. równych. Przenoszę graniast. *ai* na AJ tak, aby podstawa *abcde* przystała do równéj sobie podstawy ABCDE, wtedy ściana *ag* przystanie do ściany AG dla równości kątów dwuśc. przy krawędziach *ab* i AB; ściana *ak* przystanie do ściany AK dla równości kątów dwuś. przy krawędziach *ae* i AE, krawędź *af* przystanie do AF gdyż pł. *ag* i *ak* leżące na pł. AG i AK, przecinają się tak jak one po linii AF; równoległobok *ag* przystał do równego z nim równoległoboku AG, gdyż dwa boki *ab*, AB i *af*, AF przystały do siebie,—podobnie i równoległobok *ak* przystał do równoległoboku AK,—a zatém wielokąty *fi* i FJ równe, jako równe podstawom, przystają do siebie, gdyż boki *fg* i *fk* przystały do boków FG i FK,—a tém samém i graniastosłup *ai* przystał do graniastosłupa AJ.

Wn. Graniast. proste przystają do siebie gdy mają podstawy i wysokości równe; gdyż ściany ich boczne jako prostokąty mają wtedy podstawy będące bokami podstaw i wysokości będące wysokościami graniastosłupa, równe; a zatém takie graniastosłupy mają po trzy ściany równe zawierające kąt trójścienny.

433. *Tw. Bryły foremne są sobie równe, gdy mają po jednéj krawędzi równéj.*

Sciany brył foremnych są sobie równe, jako wielokąty for. mające po boku rownym; kąty bryłowe są sobie rowne, gdyż jeśli są trojścienne, składają się z kątów pł. rownych,—jeśli zaś wielościenne są sobie równe, jako kąty wierzchołkowe ostrosłupów for. mających podstawy i kąty bryłowe przy podstawie równe; w ośmiościanie, ostrosłupy te mają za podstawę kwadrat, w dwudziestościanie pięciokąt for. (375. *b* i *c*).

434. *Tw. Walce przystają do siebie gdy mają podstawy i osie równe, tudzież nachylenie się osi do podstaw jednakowe* (fig. 320).

Przez osie CH i *ch* prowadzę pł. FB i *fb* prostopadłe do podstaw walców, to kąty CHG i *chg* mierzące nachylenie się osi do podstaw są sobie równe. Przenoszę podstawę *fkg* na jéj równą podstawę FKG, tak aby średnica *fg* przystała do średnicy FG, i żeby okręg *fkg* przystał do okręgu FKG,— wtedy pł. *fb* przystanie do FB, gdyż po przeniesieniu obie są prostopadłe do pł. FKG i przechodzą przez linię FG (338. Wn. 2), a że kąt *ghc*=GHC, przeto i oś *hc* przystała do HC, i punkt *c* padł na C dla równości osi, pł. koła *c* przystała do pł. koła C, gdyż obie z nich po przeniesieniu przechodzą przez punkt C i są równoległe do pł. FKG (345. Wn. 5), a że okręgi *c* i C jako równe podstawom są sobie równe, a po przeniesieniu środki ich i pł. przystały do siebie, przeto podstawa górna *c* przystała do podstawy górnéj C, czyli że walec *fb* przystał do walca FB.

Wn. Walce proste przystają do siebie gdy mają *podstawy i osie równe*, gdyż osie ich prostopadłe czynią z podstawami kąty równe.

435. *Tw. Ostrokręgi przystają do siebie, gdy mają podstawy i osie równe, tudzież nachylenie się osi do podstaw jednakowe.*

Poprowadziwszy przez osie płaszczyzny prostopadłe do podstaw, i przeniosłszy jeden ostrokręg na drugi, tak aby podstawy i płaszczyzny do nich prostopadłe przystały, osie przystaną do siebie dla równości kątów nachyleń, a wierzchołki ostrokręgów dla równości osi; a że ostrokręg oznacza się wierzchołkiem i podstawą, przeto gdy te przystały do siebie, to i ostrokręgi przystały we wszystkich punktach.

Wn. Ostrokręgi proste przystają do siebie gdy mają podstawy i osie równe, gdyż osie prostopadłe są jednakowo nachylone.

436. *Tw. Kule są równe, gdy mają promienie równe.*

Biorąc środki kul za punkta nachylenia, a dwa promienie czyniące kąty równe, za główne nachylone, jakikolwiek promień poprowadzimy w jednéj kuli, zawsze w drugiéj możemy poprowadzić promień tak, aby kąty trójścienne wyznaczone témi promieniami w obu kulach były sobie równe; promienie te są więc nachylone odpowiednie, a że z założenia są sobie równe, przeto i kule przystają do siebie.

Wn. Odcinki i wycinki kul równych promieni są sobie równe, gdy koła służące za podstawę odcinkowi lub części pow. kuli służącéj za podstawę wycinkowi są sobie równe;—odcinki o dwóch podstawach są sobie równe, gdy koła służące im za podstawę są sobie równe i oddalenia ich jednakowe; gdyż poprowadziwszy promienie kul do okręgów podstaw odcinków, czyniące kolejno w obu kulach kąty równe, one czynią i z promieniami prostostopadłemi do kół podstaw kąty równe, jako leżące w trójkątach prostokątnych mających przeciwprostokątnie i przyprostokątnie równe; przeto one są nachylone odpowiednie, a z założenia równe;—dla podobnej przyczyny i promienie kul poprowadzone do okręgów kół przecinających odcinki równolegle do podstaw i przechodzących przez odpowiednie punkta promieni prostopadłych, są nachylone odpowiednie i równe.

437. *Zt.* Podług warunków przystawania brył wyrabiają się bryły równe danym.

§ 11. Symetryczność.

438. Bryły symetryczne są te, które mają oddalenia odpowiednich punktów jednakowe, lecz idące w przeciwnym porządku, przeto nachylone odpowiednie w tych bryłach są sobie równe, lecz także idą w przeciwnym porządku; a zatem w bryłach płaskościennych symetrycznych ściany są symetr., kąty dwuś. są równe w przeciwnym porządku także tworzą kąty bryłowe symetryczne.

439. *Tw. Bryły symetryczne płaskościenne zestawione równemi ścianami, mają wierzchołki odpo-*

wiednie na linii prostopadłéj do pł. ściany wspólnéj, w równéj od niéj odległości (fig. 321).

Bryły płaskościenne symetryczne mają nachylone odpowiednie równe, lecz idące w przeciwnym porządku; przeto jeśli za punkt nachylenia weźmiemy jeden z wierzchołków, a za dwie główne nachylone odpowiednie, dwie nachylone odpowiednie ściany leżącéj przy tym wierzchołku,—obie bryły symetryczne składać się będą z ostrosłupów symetr. mających podstawy na ścianie leżącéj przy punkcie nachylenia, a wierzchołki w wierzchołkach bryły, czyli obie składać się będą z ostrosłupów trójkątnych sym. wyznaczających wierzchołki tych brył. Zestawiwszy te bryły ścianami odpowiedniemi, na których leżą podstawy ostrosłupów wyznaczających wierzchołki, podstawy te przystaną do siebie, gdyż dolną część położyliśmy na dolną, a zatém potrzeba tylko dowieść, że wierzchołki ostroslupów symetrycznych zestawionych podstawami, leżą na linii prostopadłéj do pł. podstaw w równéj od niéj odległości. Dwa ostrosłupy symetryczne DABC i *d*ABC zestawiam równemi podstawami, wierzchołki ich D i *d* łączę linią prostą D*d*, i prowadzę linie z jéj środka O do wierzchołków podstawy. W trójkącie sym. DA*d*,—jako mającym boki AD i A*d*, będące krawędziami ścian symetrycznych, równe—linia AO poprowadzona do środka podstawy D*d* jest do niéj prostopadłą (91. Wn. 3), podobnie w trójkątach DB*d* i DC*d*, linie BO i CO są prostopadłe do D*d*, przeto te trzy linie leżą na jednéj płaszczyznie prostopadłéj do linii D*d* w punkcie O (217. Wn. 2), a że pł. ta przechodzi przez punkta A, B, C, przeto jest płaszczyzną podstawy ABC (307. 1).

Wn. 1 Bryły mające wierzchołki odpowiednie na linii prostopadłéj do pł. i w równéj od niéj odległości zowią się *bryłami symetrycznie położonemi względem téj płaszczyzny*, zaś pł. *płaszczyzną symetryi*; płaszczyna symetryi może nie być ścianą wspólną, gdyż jeśli podstawy, niezmieniając ich położenia, oddalać będziemy tak aby były równoległe, i poprowadzimy płaszczyznę w równéj od nich odległości, to ta pł. jest pł. symetryi, albowiem prostopadłe do podstaw nie przestaną być równe, a przedłużenia ich od podstaw do pł. sym. są także równe. Lecz bryły symetryczne mogą nie być symetrycznie położone, przeto dawna definicja: „bryły symetryczne są te, których odpowiednie wierzchołki leżą na linii prostopadłéj do pł. w równéj od niéj odległości," jest fałszywą jako ściągająca się do szczególnego położenia brył.

Wn. 2. Bryły niepłaskościenne symetryczne względem pł. symetryi mają punkta odpowiednie na linii prostop. do téj pł. w równéj od niéj odległości; gdyż biorąc punkt nachylenia zewnątrz brył i przez ten punkt i dwie nachylone odpowiednie prowadząc pł., tak w jednéj jako i w drugiéj, te dwie nachylone odpowiednie z linią łączącą odpowiednie punkta wyznaczone temi nachyleniami, tworzą trójkąty będące podstawą ostrosłupów wyznaczających punkta brył: ostrosłupy te wyznaczające punkta odpowiednie są symetryczne, a przeto zestawiwszy podstawy tych ostrosłupów, względem pł. ich podstaw, punkta odpowiednie leżą na linii prostopadłéj do téj pł. będącéj pł. sym. w równéj od niéj odległości.

440. *Tw. od. Bryły płaskościenne mające wierzchołki odpowiednie na linii prostopadłéj do pł. w równéj od niéj odległości, są symetryczne* (fig. 322).

Oznaczam przez $a, b, c, d...$ i $a' b' c' d'...$ wierzchołki brył leżące na liniach $aa' bb' cc'...$ prostopadłych do pł MN, w równej odległości od téj pł., a mam dowieść że ściany tych brył są równe przez symetryą, i kąty bryłowe symetryczne.

Linie łączące odpowiednie wierzchołki są sobie równe: $ab=a'b'$ jako boki przeciwległe trapezu symetrycznego $a'b$, mającego AB za oś symetryi, zaś linie te równe łączące odpowiednie wierzchołki idą w przeciwnym porządku, bo są bokami trapezów symetrycznych. Trójkąty zawarte między trzema odpowiedniemi liniami są równe przez symetryą, jako mające w przeciwnym porządku po trzy boki równe: trójkąty $abc=a'b'c'$, $adc=a'd'c'...$ przeto ściany i kąty są symetryczne; gdyż jeśli trójkąty abc i acd leżą na jednéj pl. to i trójkąty $a'b'c'$ i $a'c'd'$ leżą także na jednéj płaszczyznie; kąt $bca=b'c'a'$, $acd=a'c'd'$ z symetryczności poprzedzających trójkątów i $bcd=b'c'd'$ z symetryczności trójkątów bdc i $b'd'c'$ przeto jeśli $bca+acd=bcd$ to i $b'c'a'+a'c'd'=b'c'd'$ i ściany symetryczne, jeśli zaś kąty przy c składają kąt trójścienny t.j. $bca+acd>bcd$ to dla podobnéj jak poprzednio przyczyny i kąty $b'c'd'+a'c'd'>b'c'd'$ a zatém dają kąt trójścienny, symetryczny z pierwszym jako składający się z kątów pł. równych idących w przeciwnym porządku.

Wn. Bryły niepłaskościenne mające punkta na liniach prostopadłych do pł. w równéj od niéj odległości są symetryczne, gdyż mając odległości odpowiednich punktów równe w przeciwnym porządku, mają i nachylone odpowiednie równe w przeciwnym porządku.

441. *Zt.* Warunki symetryczności brył, a szczególniéj symetrycznego ich położenia (440), używają się w budowli maszyn, statków wodnych i t. p. dla rozłożenia ich ciężaru jednakowo względem pł. symetryi.

ROZDZIAŁ II.

Podobieństwo.

§ 1. Podobieństwo proste.

442. Jak bryły równe są te w których odległości odpowiednich punktów są jednakowe (427; 428), tak *podobnemi są te w których odległości odpowiednich punktów są proporcyonalne*; one są tylko równo-kształtne i tem się różnią od brył równych że w nich stosunek wielkości jest dowolny, kiedy w równych jest stały t. j. równy jedności. Jak bryłami równemi tak i podobnemi mogą być tylko bryły tego samego nazwania.

Równe bryły mogą być albo przystające, albo równe przez symetryą, podług tego czy punkta odpowiednie leżą w tym samym lub przeciwnym porządku;— również i bryły podobne mogą mieć punkta odpowiednie leżące w tym samym lub przeciwnym porządku i podług tego może zachodzić *podobieństwo proste* lub *odwrotne* czyli *podobieństwo przez symetryę*—takie jest podobieństwo obrazu przedstawiającego się w zwierciadle zmniejszającém lub powiększającém ze swym przedmiotem.

443. *Tw. Jeżeli nachylone odpowiednie są w jednakowym stosunku, to i oddalenia odpowiednich punktów są w tymże samym stosunku* (fig. 323.)

Linie łączące odpowiednie punkta AB i *ab* są bokami trójkątów podobnych, mających po kącie równym ADB=*adb*, jako zawarte między nachylonemi odpowiedniemi, i dwa boki zawierające te kąty z założenia proporcyonalne,—a przeto są w tym samym stosunku co i nachylone.

Wn. 1. Kąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta lub linią łączącą odpowiednie punkta z nachyloną przechodzącą przez jéj koniec, są sobie równe jako leżące w trójkątach mających po trzy boki proporcyonalne.

Wn. 2. *Bryły są podobne gdy nachylone odpowiednie są proporcyonalne*, gdyż wtedy i oddalenia odpowiednich punktów są w tymże samym stosunku.

444. *Tw. od. Gdy oddalenia odpowiednich pun-*

któw są w jednakowym stosunku, to linie łączące te punkta z którymkolwiek z nich, lub z punktem proporcyonalnie oddalonym od trzech odpowiednich, są nachylonemi odpowiedniemi proporcyonalnemi do linii pierwszych (fig. 323).

1° W dwóch bryłach ABCDEF... i *abcdef*... łączę punkta D i *d* odpowiednie z innemi punktami, a mam dowieść że DA, DB, DE... i *da*, *db*, *de*... są w tym samym stosunku co i linie łączące odpowiednie punkta, AB, BF... i *ab bf*... i są nachylone odpowiednie. Punkta D i *d* są punktami odpowiedniemi brył, przeto linie DA, DB, DE... i *da*, *db*, *de* jako linie łączące odpowiednie punkta, podług założenia są z innemi liniami w jednakowym stosunku; a że kąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta są sobie równe (443. Wn. 1), przeto i kąty trójścienne których te linie są krawędziami są także równe (360), a zatem one są nachylone odpowiednie.

2° Zewnątrz bryły ABCDEFGKH mającej z bryłą *abcdefgkh* oddalenia odpowiednich punktów w jednakowym stosunku biorę dowolny punkt D i prowadzę linie DA, DB, DC, DE... do punktów téj bryły; kreślę kąt trójścienny *dabc*=DABC i biorę w nim krawędzie, będące z krawędziami DABC kąta w stosunku linii odpowiednich, to kąt ten ma podstawę *abc* podobną trójkątowi ABC, gdyż inaczéj ściany *adb* i ADB, *bdc* i BDC, *adc* i ADC, nie były sobie podobne, a one mają z wykreślenia po dwa boki proporcyonalne i po kącie między niémi zawartym równym; punkt *d* z punktami *e*, *f*, *g*, *h*, *k* odpowiedniemi punktom E, F, G, H, K, łączę liniami prostemi, i mam dowieść że linie DA, DB, DC, DE... i *da*, *db*, *dc*, *de*, są nachylone odpowiednie i że są między sobą w takim stosunku, w jakim i linie łączące odpowiednie punkta.

Linie DA, DB, DC i *da*, *db*, *dc*, są z wykreślenia nachylone odpowiednie w stosunku żądanym. Kąt dwuś. przy krawędzi AB, mający ściany BAC i BAD, równa się kątowi dwuśc. przy krawędzi *ab*, mającemu za ściany *bac* i *bad*,—gdyż kąty trójścienne ABCD i *abcd*, składają się z trzech kątów pł. równych: BAD=*bad*, CAD =*cad*, jako leżące w trójkątach podobnych, będących ścianami kątów trójś. D i *d*, zaś BAC=*bac* jako zawarte między liniami odpowiedniemi;—kąt dwus. przy krawędzi AB, mający za ściany BAE i BAC równa się kątowi dwus. przy krawędzi *ab*, mającemu za ściany *bae* i *bac*, gdyż kąty trójśc. ACBE i *acbe*, mają po trzy kąty pł. równe, jako kąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta,— a zatem kąty dwuśc. EABD i *eabd* będące ich summą lub różnicą, są sobie równe; kąty więc trójśc. AEBD i *aebd* mające po dwa kąty pł. i po kącie dwuś. między niemi zawartym z poprzedzającego dowodzenia równym, mają kąt pł. DAE=*dae*;— trójkąty więc DAE i *dae* mające po dwa boki proporcyonalne i po kącie zawartym równym, mają boki DE i *de* w tym samym stosunku co i linie AE i *ae* tudzież kąt EDA=*eda*;—lecz kąt EDB=*edb* jako leżące w trójkątach EDB i *edb* mających po trzy boki proporcyonalne, przeto linie DE i *de* są nachylone odpowiednie. Linie DK i *dk* są nachylone odpowiednie, gdyż trójkąty DEK i *dek* są podobne, jako mające po dwa boki proporcyonalne i po kącie między niemi zawartym równym: kąt DEK=*dek* (443. Wn. 1) i t. d.

Wn. 1. W bryłach podobnych nachylone odpowiednie są proporcyonalne.

Wn. 2. *Wielokąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta są podobne, i czynią z sobą kąty bryłowe równe*; gdyż trójkąty zawarte między liniami łączącemi odpowiednie punkta są podobne, jako mające po trzy boki proporcyonalne, przeto mają kąty równe; zatém jeśli trójkąty EFG i EGH leżą na jednej pł., to i trójkąty *efg* i *egh* leżą także na jednéj pł., bo kąt FGE=*fge*, EGH=*egh*, FGH=*fgh* (443. Wn.), przeto jeśli FGE+EGH=FGH, to i *fge*,+*egh*=*fgh* i wielokąty FH i *fh* jako składające się z trójkątów podobnych są podobne; kąty bryłowe są sobie równe, bo kąty trójścienne je składające, jako mające po trzy kąty pł. równe, są sobie równe. Bryły więc płaskościenne podobne, mają ściany podobne i kąty bryłowe równe.

445. *Tw. Bryły płaskościenne są podobne gdy mają ściany podobne i kąty bryłowe równe* (fig 323).

Z wierzchołków kątów równych D i *d* prowadzę linie do wszystkich innych wierzchołków. Linie CD, CA, CB i *cd*, *ca*, *cb* są nachylone odpowiednie i proporcyonalne, jako leżące w wielokątach podobnych AC i *ac*. Linie DE i *de* są nachylone odpowiednie proporcyonalne, jako leżące w wiel podobnych AH i *ah*, przytém kąt EDB=*edb*, jako leżące w trójkątach

EDB i *edb* mających po trzy boki proporcyonalne. Kąt FBC=*fbc*, CBD=*cbd*, i nachylenia się ich pł. z założenia jednakowe, przeto i kąt FBD=*fbd*, trójkąty więc FBD i *fbd* mające po dwa boki proporcyonalne i po kącie między niemi zawartym równym, mają kąt FDB=*fdb*, i boki FD i *fd* w takim samym jak dwa inne stosunku; przytem kąt FDE=*fde* jako leżące w trójkątach mających po trzy boki proporcyonalne, a zatém linie DF i *df* czyniące z dwoma nachylonemi DE, DB i *de*, *db* kąty równe, są odpowiednie, a zarazem proporcyonalne do krawędzi ścian. Kąt dwuśc DAEF=*daef* jako zawarte między odpowiedniemi ścianami, podobnie kąt dwuś. FEAK=*feak*, przeto i kąty dwuś DAEK i *daek* będące ich summą są sobie równe, kąty więc trójścienne EKDA i *ekda*, mające po dwa kąty pl. równe: KEA=*kea*, AED=*aed* i kąty dwuś. między niémi zawarte równe, mają kąt pł. KED=*ked*,—trójkąty więc KED i *ked* mające po dwa boki proporcyonalne KE : *ke*=ED : *ed* i po kącie między niémi zawartym równym, mają kąt KDE =*kde* i linie DK i *dk* w takim jak dwa inne boki stosunku, przytém kąt KDF=*kdf* jako leżące w trójkątach mających po trzy boki proporcyonalne,— a zatém linie DK i *dk* są nachylone odpowiednie proporcyonalne i t. d. A że nachylone odpowiednie są proporcyonalne, przeto bryły są podobne (443. Wn. 2).

446. *Tw. Ostrosłupy trójkątne są podobne, gdy mają po kącie bryłowym równym i krawędzie tych kątów proporcyonalne.*

1szy *Sposób.* Biorąc wierzcholki kątów trójsc. równych za punkta nachylenia, ich krawędzie są nachylone odpowiednie, a że są proporcyonalne, przeto bryły podobne; 2gi *Sposób.* Biorąc kąty równe za wierzchołki, ściany boczne są podobne, jako mające po dwa boki proporcyonalne i po kącie zawartym równym, przeto i krawędzie podstaw jako ich boki są także proporcyonalne, a tém samém podstawy podobne, przytém kąty trójśc. w obu ostrosłupach są sobie równe jako składające się z kątów pł. równych, a zatém ostrosłupy jako mające ściany podobne i kąty brylowe równe, są podobne (445).

Wn. Odpowiednio warunkom równości kątów trójśc., ostrosłupy są podobne gdy mają: 1) trzy ściany podobne; 2) trzy kąty dwuś. równe a ich krawędzie proporcyonalne; 3) dwie ściany podobne i kąty dwuś. między niémi zawarte równe; 4) po jednéj ścianie podobnéj, kąty dwuś. przy nich leżące równe, i krawędzie przeciwległe ścianom podobnym proporcyonalne z krawędziami ścian podobnych; 5) Dwie ściany podobne i kąty dwuśc. przeciwległe jednéj z nich równe, zaś przeciwległe drugiéj nie spełniające się do Π; 6) po dwa kąty dwuś. i po ścianie przeciwległéj jednemu z nich podobnéj, zaś kąty pł. przeciwległe drugiemu nie spełniające się do Π, tudzież krawędzie przeciwległe ścianom podobnym w tym samym co i krawędzie tych ścian stosunku.

Uw. Również bryły są podobne gdy mają nachylone odpowiednie proporcyonalne i nawzajem, przeto bryły podobne składają się z ostrosłupów trójkątnych podobnych i podobnie położonych—i nawzajem.

447. *Tw. Ostrosłupy wielokątne są podobne, gdy mają kąty bryłowe przy wierzchołkach równe i ich krawędzie proporcyonalne.*

Ściany boczne są podobne jako mające po dwa boki proporcyonalne i po kącie między niemi zawartym równym, a że nachylenia tych ścian z założenia są równe, przeto kąty trójśc. przy podstawach mające po dwa kąty pł. równe, jako kąty trójkątów podobnych, i po kącie dwuś. między niemi zawartym równym są równe i mają kąty trzecie pł. równe, a zatém podstawy ostrosłupów są podobne, gdyż mają kąty równe, a boki proporcyonalne, jako boki trójkątów podobnych.

Uw. Ostrosłupy wiel. są także podobne gdy mają: 1) *Podstawy podobne i wysokości przechodzące przez odpowiednie punkta podstaw, proporcyonalne*; gdyż wtedy krawędzie boczne są proporcyonalne jako boki trójk. prostokątnych podobnych, mających przyprostokątnie proporcyonalne, ściany boczne są podobne, jako mające po trzy boki proporcyonalne, nachylenie się ich jednakowe, bo kąty trójśc. nadpodstawne mają po trzy kąty pł. równe, przeto i kąty przy wierzchołkach są równe; 2) *podstawy podobne i kąty trójśc. przy nich leżące równe*, gdyż wtedy ściany boczne są podobne, jako mające po dwa kąty równe, nachylenia ich są jednakowe, a tém samém i kąty bryłowe przy wierzchołkach są równe. Ostrosłupy więc foremne są podobne, gdy mają wysokości proporcyonalne do boków podstaw, gdyż podstawy jako wiel. for. o równéj liczbie boków są podobne, zaś wysokości przechodzą przez ich środki.

448. *Tw. Graniastosłupy są podobne gdy mają po trzy ściany podobne, zawierające kąt trójścienny* (fig. 324).

Zak. Ściany AD, AG, AK podobne ścianom *ad*, *ag*, *ak*. Kąt bryłowy A=*a* jako mające po trzy kąty pł. równe, przeto kąt dwuś. FABE=*fabe*, kąt bryłowy B=*b* jako mające po dwa kąty pł. równe GBA =*gba* i ABC=*abc* z założenia i nachylenie się tych ścian jednakowe z poprzedzającego dowodzenia,— przeto równoległobok BH podobny równoległobokowi *bh*, gdyż mają po dwa boki proporcyonalne zawierające kąt GBC=*gbc* (262. Wn. 4) i t. d.

Podstawy górne FJ i *fi* są podobne jako równe podstawom dolnym, kąty zaś trójścienne przy tych podstawach są sobie równe, jako mające po trzy kąty pł równe. A zatem gran. AJ i *ai* są podobne (445).

Wn. Graniastosłupy proste są podobne gdy mają podstawy podobne i wysokości proporcyonalne do boków podstaw, gdyż ściany jako prostokąty są podobne gdy mają po dwa boki przy sobie leżące proporcyonalne (362. Wn. 4), jednym zaś z tych boków jest wysokość a drugim bok podstawy.

449. *Tw. Bryły foremne jednakowego nazwania są podobne.*

Ściany ich są podobne jako wielokąty foremne tego samego nazwania, mające boki proporcyonalne a kąty rowne. Kąty bryłowe są sobie równe,—gdyż jeśli są trójścienne składają się z kątów pł. równych,—jeśli zaś wielościenne są sobie równe, jako kąty wierzchołkowe ostrosłupów mających podstawy podobne i kąty trójścienne przy podstawie równe, jako mające po trzy kąty pł. równe (447. Uw. 2). W ośmiościanie ostrosłupy te mają za podstawy kwadraty,—w dwunastościanie pięciokąty for. (375. *b i c*).

450. *Tw. Walce są podobne, gdy mają osie jednakowo nachylone do podstaw, i proporcyonalne do promieni* (fig. 325).

Biorę środki O i *o* osi walców za punkta nachylenia i prowadzę linie OE i *oe* do końców promieni GE i *ge* będących ramionami kątów OGE i *oge* nachylenia osi do podstaw górnych. Trójkąty OEG i *oeg* mające po dwa boki z założenia proporcyonalne i po kącie między niemi zawartym równym EGO=*ego*, mają boki trzecie OE i *oe* w takim samym jak dwa inne stosunku i kąt EOG=*eog*. Prowadzę w kołach promienie odpowiednie GH i *gh* czyniące kąt EGH=*egh*, to linie EH i *eh* łączące odpowiednie punkta okręgów są proporcyonalne do ich promieni, a że linie EH, EO i *eh*, *eo* są odpowiednie dla walców, przeto kąt HEO =*heo* (443. Wn.) i trójkąty HEO i *heo* mające po dwa boki proporcyonalne zawierające kąty równe, mają boki OH i *oh* w takim samym jak dwa inne stosunku, i kąt HOE=*hoe*; przytém kąty HOG i *hog* są sobie równe, jako leżące w trójkątach mających po trzy boki proporcyonalne, a zatém kąt trójśc. OEHG=*oehg* czyli krawędzie ich są nachylone odpowiednie, a podług dowodzenia proporcyonalne. A że linie OH i *oh* są dowolne, zatém to ściąga się do wszystkich linij łączących punkta nachylenia z odpowiedniemi punktami okręgów podstaw, a nawet okręgów równoległych do podstaw przechodzących przez odpowiednie punkta osi GC i *gc*, gdyż jednakowe części osi są w tym samym co i całe osie stosunku. Przeto nachylone jednego walca, mają odpowiednie w drugim i są proporcyonalne; a zatém walce te są podobne(443.Wn.2).

Wn. 1. Walce proste są podobne gdy mają osie proporcyonalne do promieni podstaw, gdyż kąty nachylenia tych osi, jako proste, są sobie równe.

Uw. Takim samym sposobem można dowieść, że *ostrokręgi pochyłe są podobne, gdy mają osie jednakowo nachylone do podstaw i proporcyonalne z ich promieniami, proste zaś gdy mają osie proporcyonalne do promieni podstaw*,—biorąc za punkta nachylenia ich wierzchołki, lub odpowiednie punkta osi.

451. *Tw. Kule są sobie podobne.*

Biorę środki kul za punkta nachylenia, jeśli poprowadzimy w nich dwa promienie pod jednakowym kątem i przyjmiemy je za główne nachylone, wtedy jakikolwiek promień trzeci poprowadzimy w jednej kuli, zawsze w drugiéj można poprowadzić promień tak, aby kąt trójścienny wyznaczony przez promienie piérwszéj kuli, równał się kątowi trójśc. wyznaczonemu promieniami drugiéj kuli; przeto te promienie są nachylone odpowiednie; a że są w jednakowym stosunku, przeto bryły są podobne.

Wn. 1. Trójkąty i wielokąty kuliste są podobne w tych wszystkich przypadkach w jakich były równe (411), tylko zamiast równości boków trzeba wziąć ich proporcyonalność, t. j. powinny zawierać jednakową liczbę stopni...; gdyż w tych wszystkich przypadkach odpowiednie im kąty bryłowe są sobie równe, bo łukom jednakowej liczby stopni odpowiadają kąty pł. równe,— krawędzie więc tych kątów są nachylonemi odpowiedniemi, a że jako promienie są proporcyonalne, przeto i t. d.

Wn. 2. *Odcinki kul mające promienie swych podstaw proporcyonalne do promieni kul, są podobne*;— gdyż biorąc środek kuli za punkta nachylenia, promienie kul poprowadzone do okręgu podstaw tak, aby kolejno czyniły kąty równe, są nachylone odpowiednie,—gdyż i z promieniem przechodzącym przez środek okręgu, czynią kąty równe, jako leżące w trójkątach prostokątnych mających z założenia po dwa boki proporcyonalne i po kącie przeciwległym bokowi większemu równym jako prostym (401. Wn. 1, i 262. Wn. 3, *c*). Poprowadziwszy w tych dwóch odcinkach przez odpowiednie punkta promieni, przechodzących przez środek okręgu podstaw, kolejno okręgi,— promienie kuli poprowadzone do tych okręgów czyniące z sobą kolejno jednakowe kąty są także nachylone odpowiednie, gdyż nie tylko kolejno z sobą, ale i promieniem przechodzącym przez środki okręgów czynią kąty równe, jako leżące w trójkątach prostokątnych mających po dwa boki proporcyonalne, promień kuli i prostopadłę, i po kącie prostym przeciwległym bokowi większemu równym (262. Wn.3, *c*); a że te nachylone są proporcyonalne, przeto odcinki są podobne. Podobnie dowiedlibyśmy że: *odcinki o dwóch podstawach*, mające swe podstawy z jednej, albo z przeciwnych stron środka, i ich promienie proporcyonalne do promieni kul, są podobne; *wycinki* mające za podstawy odcinki podobne, są podobne.

Uw. 1. Tak jak w bryłach równych, mających ściany z powierzchniami przystającemi, równość zależała od przystania ograniczeń ścian, tak podobnie w bryłach podobnych mających za ściany powierzchnie podobne—których jest tylko dwie: płaszczyzny które jako zawsze przystające mają kształt jednakowy i powierzchnie kul,—podobieństwo zależy od podobieństwa ograniczeń tych ścian i proporcyonalności linii głównéj ograniczenia do linii głównéj bryły, i dla tego w bryłach płaskościennych nachylone prowadzą się tylko do wierzchołków kątów.

Uw. 2. Podobieństwo przez symetryą, czyli podobieństwo odwrotne, jest wtedy gdy nachylone odpowiednie idą w przeciwnym porządku, wtedy ściany są podobne przez symetryą i kąty symetryczne; lecz ten rodzaj podobieństwa nie przedstawia szczególnych własności. Jak bryły podobne składają się z ostrosłupów trójkątnych podobnych i podobnie położonych (446. Uw.), tak też i bryły symetryczne składają się z ostrosłupów trójk. sym. i symetrycznie położonych.

452. *Tw. Powierzchnie brył podobnych mają się do siebie jak kwadraty z linij odpowiednich.*

a) Oznaczywszy powierzchnię jednéj kuli przez Q, drugiéj przez q, promień jednéj przez R drugiéj przez r, to *pow.* $Q=4\Pi R^2$ zaś *pow.* $q=4\Pi r^2$; przeto *pow.* Q: *pow.* $q=4\Pi R^2 : 4\Pi r^2$ czyli *pow.* Q: *pow.* $q=R^2 : r^2$.

b) Oznaczywszy powierzchnię walca przez P jego promień podstawy przez R, wysokość przez W,—powierzchnię zaś walca z nim podobnego przez p, promień jego podstawy przez r, wysokość przez w; mamy $P=2\Pi RW$ i $p=2\Pi rw$, przeto $P:p=2\Pi RW : 2\Pi rw$ czyli $P:p=RW:rw$; lecz w walcach podobnych $R:r = W:w$ (450), to pomnożywszy poprzedniki przez W zaś następniki przez w, mamy $RW:rw=W^2:w^2$, — przeto zamiast stosunku $RW:rw$ można wziąść stosunek jemu równy $W^2:w^2$ a tém samém $P:p=W^2:w^2$. Podobne dowodzenie ściąga się do ostrokręgów.

c) W bryłach podobnych płaskościennych, ściany są wielokątami podobnemi (444. Wn. 2), a że wielokąty podobne mają się jak kwadraty z linii odpowiednich (291), przeto i ich summy czyli powierzchnie brył płaskościen. podobnych mają się jak kwadraty z linii odpowiednich.

453. *Zt.* Prawdy wyłożone w tym rozdziale służą do wyrabiania z modeli brył zmniejszonych lub powiększonych tak, aby odpowiednie linie były w danym stosunku, przeto w rzemiosłach mają obszerne zastosowanie. Maszyny służące do wyrabiania brył podobnych danym, opierają się także na tych prawdach.

ROZDZIAŁ III.

Równoważność i stosunek brył.

§ 1. Równoważność brył.

454. *Tw. Dwa ostrosłupy trójkątne mające podstawy równoważne i wysokości równe*, 1^0 *dają przecięcia równooddalone od podstaw równoważne*; 2^0, *są sobie rownoważne* (fig. 326).

1^0 Jeżeli ostrosłup SABC przetniemy pł. równoległą do podstawy ABC, trójkąt ztąd otrzymany *abc* jest podobny podstawie i stosunek tego trójkąta do podstawy równa się stosunkowi kwadratów wysokości odciętego i całego ostrosłupa (348. Wn. 1) t. j. $abc : ABC = Sg^2 : SG^2$, podobnie $def : DEF = sh^2 : sH^2$; jeśli więc $Sg = sh$, czyli jeśli przecięcia ostrosłupów są w jednakowej odległości od podstaw, to drugie stosunki tych proporcyi, jako składające się z równych wyrazów są sobie równe, a tém samém piérwsze składają proporcyę $abc : ABC = def : DEF$;—w téj proporcyi następniki ABC i DEF z założenia są sobie równe, przeto i poprzedniki *abc* i *def* są także równe czyli *w ostrosłupach mających wysokości równe a podstawy równoważne, przecięcia równoodalone od podstaw są równoważne.*

2^0 Ostrosłup SABC otrzymamy, jeśli podstawa ABC posuwać się będzie równoodlegle od pierwotnego położenia, zmniejszając się tak, aby wierzchołki miała na krawędziach SA, SB i SC; a zatem wielkość ostrosłupa SABC zależy tylko od wielkości podstawy, i od odległości SG na którą się ona posunęła dla utworzenia ostrosłupa,—gdyż od tej odległości, jak widzieliśmy, zależy wielkość tworzącego trójkąta w każdém położeniu,—podobnie wielkość ostrosłupa *s*DEF zależy tylko od wielkości podstawy DEF i wysokości *s*H,—a że w tych dwóch ostrosłupach podstawy są równoważne a wysokości równe, zkąd zarazem wynika, że wszystkie trójkąty tworzące je, równooddalone od podstaw są równoważne,—przeto i same ostrosłupy są równoważne.

Wn. Ostrosłupy trójkątne symetryczne są równoważne, bo mają podstawy równe i wysokości; a zatém tak ostrosłupy symetryczne jakiekolwiek, jako też wszystkie bryły symetryczne są równoważne, jako składające się z ostrosłupów trójkątnych symetrycznych, (451. Uw. 2). Ztąd wynika, że dwa gran. trójk. na które dzieli się równoległościan pł. przekątnią, (381, *c*) są równoważne.

455. *Tw. Dwa równoległościany* DF i DK *mające podstawy wspólne, zaś podstawy górne na jednéj płaszczyznie, zawarte między dwoma liniami równoległemi—są równoważne* (fig. 327).

Bryła HDMEAJ jest graniastosłupem, gdyż podstawa HDM=EAJ jako trójkąty mające po dwa boki i po kącie między niémi zawartym równym: AE=DH, AJ=DM (115, *b*) i kąt HDM=EAJ (346),—podobnie bryła GCLFBK jest także graniastosłupem,—graniastosłupy te trójkątne są sobie równe, jako mające po trzy ściany zawierające kąty bryłowe DAHM i CBGL równe: HDM=GCL bo mają po dwa boki i po kącie HDM i GCL między niemi zawartym równym (346), ściana AH=BG i AM=BL (381, *a*),—przeto od całej bryły AL jeżeli odejmiemy pierwszy czy drugi graniastosłup, reszty będą jednakowe czyli równoległościan DF jest równoważny równoległościanowi DK.

Wn. 1. *Równoległościany* (fig. 328) DF i DK *mające podstawy wspólne i wysokości równe są równoważne;* wysokości równoległościanów są sobie równe, przeto ich podstawy górne jako równoległe do podstawy dolnéj i będące w równej od niej odległości leżą na jednéj pł. (345. Wn. 5);—przedłużam boki przeciwległe EF i HG równoległoboku HF do przecięcia się z przedłużonemi bokami JM i KL równoległoboku MK i tym sposobem utworzy się równoległobok *db* równy równoległobokowi DB, gdyż bok *ad* jako przedłużenie boku JM jest równoległy od AD a tém samém i do FG i dla tego równy bokowi FG=AD (115, *b*),—podobnie bok *dc* jest równy i równoległy do boku DC,—równoległościan więc D*b* podług twierdzenia jest równoważny tak równoległościanowi DF jak i DK, a zatém równoległościany DF i DK są równoważne.

Wn. 2. *Każdy równoległościan można zamienić na prosty prostokątny mający z nim podstawę równoważną a wysokość równą. a*) Równoległościan (fig. 328) DK zamieniam na prosty, wyprowadzając z wierzchołków podstawy prostopadłe AE, DH, BF, CG równe wysokości równoległościanu danego i dokończając na nich równoległościan. *b*) Równoległościan prosty DF (fig. 329) zamieniam na prosty prostokątny, biorąc prostokąt AF służący za ścianę równoległoś. DF za podstawę i wyprowadzając z jéj wierzchołków prostopadłe do spotkania się z przedłużoną ścianą przeciwległą. Równoległościan więc KM jest prosty prostokątny, bo wszystkie ściany są prostokąty—i jest równoważny równoległościanowi DF, mającemu z nim tę samą podstawę AF i wspólną wysokość,—równoległośc. zaś DF jest równoważny danemu równoległoś. DK, przeto i równoległoś. DK jest równoważny prostemu prostokątnemu KM mającemu z nim podstawę rownoważną i wspólną wysokość.

456. *Tw. Graniastosłup trójkątny* AE *jest równoważny prostemu ae, mającemu z nim krawędzie równe* AD=*ad, a za podstawę przecięcie abc prostopadłe do krawędzi* (fig. 330).

Przedłużam ściany graniastosłupa pochyłego AE, prowadzę pł. *abc* prostopadłą do przedłużonéj krawędzi DA tak aby krawędzie *ad*=AD, *cf*=CF i *be*=BE były zewnątrz gran. AE. Gran. prosty ścięty *acb*-ACB jest równy takiemuż gran. *dfe*DFE, gdyż krawędzie ich odpowiednie są sobie równe: *a*A=D*d*, *c*C=*f*F i *b*B=*e*E, przeto postawiwszy podstawę *acb* na podstawie *dfe*, krawędzie jako prostopadłe przystaną do siebie, a że są równe, przeto i wierzchołki odpowiednie podstaw górnych przystają do siebie; a zatém czy od pierwszego, czy od drugiego gran. prostego ściętego, odejmiemy granias. ścięty *dfe*ACB im wspólny, reszty pozostaną równe t. j. gran. poch. AE równoważny prost. *ae*.

Wn. 1. Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że wszelki gran. poch. jest równoważny prostemu mającemu z nim krawędzie równe a za podstawę przecięcie prostopadłe do krawędzi.

Wn. 2. Dwa gran. trójkątne pochyłe, mające krawędzie i przecięcia pł. prostopadłą do krawędzi równe, są równoważne, gdyż każdy z nich jest równoważny gran. prostemu mającemu te przecięcia za podstawę a za wysokość krawędź pochyłych gran. Równoległościan, przez pł. przekątnią, dzieli się na dwa gran. trójk. sym. (381, *c*), pł. prostopadła do krawędzi równoległościanu jest równoległobokiem (345.Wn.2) przez którego przekątnię przechodzi pł. prostokątnia, a zatém przecięcia prostopadłe do krawędzi dla obu granias. sym. są sobie równe, a że i krawędzie tych gran. są także równe, przeto *dwa gran. sym. na które dzieli się równoległościan przez pł. przekątnią, są równoważne.*

457. *Tw. Graniastosłup trójkątny jest równoważny równoległościanowi, mającemu z nim tą samą wysokość a podstawę równoważną.*

Dokończam równoległościanu na danym gran. trójkątnym, to gran. dany jest połową tego równoległościanu, a jego podstawa, połową podstawy równoległościanu; jeśli więc nakreślony równoległościan, podzielimy na dwa równe równoległościany, podstawy ich będą połowami podstawy całego równoległościanu, a każdy z nich jest równoważny danemu gran.;— lecz że równoległościany mające podstawy i wysokości równe są równoważne, przeto gran. trój. jest równoważny każdemu równoległościanowi mającemu z nim równą wysokość i podstawę równoważną.

Wn. Gran. wielokątny jest równoważny równoległościanowi, mającemu z nim podstawę równoważną i wysokość równą; gdyż podzieliwszy gran. wiel. na gran. trójk., kreślę równoległościan równoważny pierwszemu, przy nim pod tymże samym kątem i między temi samemi dwoma ścianami przeciwległemi drugi równoległościan równoważny drugiemu trój. grn. i t. d. a tym sposobem otrzymam równoległościan równoważny gran. wiel. i jego podstawa jako składająca się z równoległobów kolejno równoważnych podstawom gran. trójk. jest równoważna podst. gran. wiel. a wysokość równa wysokości.

458. *Tw. Dwa jakiekolwiek graniastosłupy mające podstawy równoważne a wysokości równe, są równoważne.*

Kreślę równoległościan równoważny pierwszemu gran. t. j. mający z nim podstawę równoważną i równą wysokość, to on zarazem jest równoważny i drugiemu gran. (457. Wn. 1), a zatém graniastosłupy te są równoważne.

Uw. Za pomocą tego twierdzenia można dowieść że *ostrosłupy trójkątne, mające podstawy równoważne a wysokości równe są równoważne* (454). (fig.

326, *a*). Ostrosłupy SABC i *s*DEF są równoważne, bo nie mogą się różnić żadną bryłowością; gdyż jeśliby się różniły bryłowatością graniast. mającego za podstawę ABC a wysokość dowolną, wtedy wysokości ostrosłupów dzielę na równe części mniejsze od téj wysokości, prowadzę przez punkta podziałów pł. równoległe do podstawy, to trójkąty *abc* i *def*, *ikl* i *pqr*, *mno* i *tuw* równo oddalone od podstawy są równoważne (454, 1°); przeto jeśli w ostrosłupie SABC na trójkątach ABC, *abc*... jako na podstawach dolnych wystawiemy granias. mające jedną krawędź na krawędzi SB, to one wychodzą z ostrosłupa SABC i obejmują go;—jeśli zaś w ostrosłupie *s*DEF na trójkątach *tuw*, *pqr*, *def* jako na podstawach górnych wystawiemy grn. mające jedną krawędź na krawędzi *s*E, to one są objęte przez ostrosłup *s*DEF bo każdy trójkąt niższy jest większy od wyższego; przeto różnica między summą tych gran. jednego i drugiego ostrosłupa, jest mniejsza od różnicy samych ostrosłupów, a ta różnica jest grn. stojący na podstawie ABC bez ostrosłupa *stuw* gdyż inne gran. mające za podstawy trójkąty równoważne, kolejno idące od wierzchołka, są równoważne; a że sam gran. mający za podstawę ABC jest mniejszy od grn. mającego być różnicą bryłowatości danych ostrosłupów, przeto te ostrosłupy nie mogą się różnić przypuszczonym gran., a że on miał wysokość dowolną, przeto nie mogą się różnić żadną bryłowatością, a tém samém są równoważne.

459. *Tw. Ostrosłup trójkątny jest trzecią częścią*

gran. trójkątnego mającego z nim tą samą podstawę i wysokość (fig. 331).

Przez punkta A, F, B prowadzę pł., która odetnie od gran. trójkątnego ABCDEF ostrosłup trójkątny FABC mający z gran. podstawę ABC wspólną i wysokość, gdyż wierzchołek znajduje się na podstawie górnej; po odjęciu gran. FABC pozostaje ostrosłup czworoboczny FABED,—przez punkta A, F, E prowadzę pł. która podzieli ostr. FABED na dwa ostrosłupy równoważne FADE i FABE jako mające podstawy i wysokości równe,—lecz w pierwszym z tych ostrosłupów FADE, można wziąść za podstawę ścianę DFE a wierzchołek w punkcie A, przeto ma z grn. CD podstawę i wysokość wspólną, wszystkie więc trzy ostrosłupy są równoważne;—a zatém ostr. FABC jest trzecią częścią gran. CD mającego z nim i t.d.

Wn. Ostrosłup wiel. jest trzecią częścią grn., mającego z nim równą podstawę i wysokość; dzielę ich podstawy na trójkąty przez linie wychodzące z odpowiednich wierzchołków, trójkąty podstaw odpowiednie są sobie równe, przeto jeśli ostrosłup wiel. podzielimy na ostrosłupy trój. mające te trójkąty za podstawy, zaś grn., na grn trójkątne mające odpowiednie trój. za podstawy, to biorąc kolejno, ostrosłup pierwszego z grn. drugiego mają podstawy i wysokości równe, a zatém każdy z ostr. trój. jest trzecią częścią odpowiedniego grn. trój. a tém samém i summa ostr. trój. czyli ostr. wiel., jest trzecią częścią summy grn. trój. czyli grn. mającego z ostr. wiel. podstawę i wysokość równą.

460. *Tw. Graniastosłup trójkątny ścięty* ABCDEF, *jest równoważny trzem ostrosłupom mającym za podstawę podstawę graniastosłupa a za wysokość każdy inną z trzech wysokości graniastosłupa* (fig. 332).

Prowadzę płaszczyzny CDB i CDE dzielące gran. ścięty na trzy ostrosłupy DABC, BCDE i CDEF. Pierwszy ma za podstawę ABC a wierzchołek w punkcie D; drugi można uważać że ma za podstawę BCE, a wierzchołek w punkcie D, jest więc równoważny ostrosłupowi mającemu tę samę podstawę a wierzchołek w punkcie A, gdyż punkta D i A leżą na linii AD równoległej do pł. podstawy (330. Wn. 3), ten zaś ostatni można uważać że stoi na podstawie ABC a ma wierzchołek w punkcie E;—trzeci ostrosłup CDEF można uważać jako mający za podstawę CEF a za wierzchołek D, on więc jest równoważny ostrosłupowi, mającemu tą samą podstawę a wierzchołek w punkcie A, który można uważać że stoi na podstawie ACF a ma wierzchołek w punkcie E. W końcu ostrosłup EACF jest równoważny ostrosłupowi mającemu z nim tą samą podstawę ACF a wierzchołek w punkcie B, który można uważać że stoi na podstawie ACB a ma wierzchołek w punkcie F.

461. *Tw. Ostrosłup trójkątny ścięty* ABCDEF, *jest równoważny trzem ostrosłupom mającym z nim równą wysokość a za podstawy, jeden podstawę górną, drugi dolną a trzeci średnio jeom. proporcyonalną między temi podstawami* (fig. 333).

Prowadzę płaszczyzny CDB i CDE, które podzielą ostr. ścięty na trzy ostrosłupy: DABC, CEFD i CEBD. Pierwszy ma za podstawę podstawę dolną kloca a wierzchołek w punkcie D; drugi można uważać że stoi na podstawie FDE a ma wierzchołek w punkcie C; trzeci zaś mający za podstawę trójkąt CBE a wierzchołek w punkcie D jest równoważny ostrosłupowi mającemu z nim tą samą podstawę a wierzchołek w punkcie G na linii DG równoległej do krawędzi EB a tém samém i do pł. podstawy (330. Wn. 3), który to ostrosłup można uważać że stoi na podstawie CGB a ma wierzchołek w punkcie E. Podstawa CGB jest średnio jeom. proporcyonalna między podstawami kloca, gdyż poprowadziwszy GJ równoległe do DF otrzymamy trójkąt JBG równy DEF jako mające bok GB=DE i kąty równe (346); trój. ABC:CGB =BA : BG (288. Wn. 3), podobnie CGB:JGB=BC:BJ, lecz linia GJ równoległa do DF jest równoległą i do AC a przeto BA : BG=BC : BJ, a zatém drugie stosunki tych dwóch proporcyi są sobie równe, przeto i pierwsze, jako równe, złożą proporcyą: ABC : CGB = CGB : JGB.

Wn. Kloc ostrosłupowy wiel. jest równoważny trzem ostrosłupom mającym z nim wysokość wspólną, a za podstawy jeden podstawę dolną, drugi górną a trzeci średnio-jeom. proporcyonalną między temi podstawami. Ostrosłup wiel. jest równoważny trój. mającemu z nim podstawę równoważną a wysokość równą, gdyż każdy z nich jest trzecią częścią grn. mającego tą samą podstawę a wysokość równą (459. Wn.), graniastosłupy zaś mające podstawy równoważne a wysokości równe są równoważne (458); jeśli więc dwa ostrosłupy mające podstawy równoważne a wysokości równe,—przetniemy pł. równoległą od podstawy, przecięcia ztąd otrzymane w obu ostrosłupach są równoważne (454, 1°), a przeto tak całe jako i odcięte ostrosłupy są równoważne, a tém samém i klocy mające wysokości równe a podstawy równoważne są równoważne; a że kloc ostrosłupa trój. jest równoważny trzem ostrosłupom, przeto i wielok. jest także równoważny odpowiednim trzem ostrosłupom, gdyż ostrosł. tych dwóch kloców, mające za podstawy podstawy dolne, górne i średniojeom proporcyonalne są sobie równoważne.

462. *Zt.* Na zasadzie prawd tego § możemy jedne bryły zamieniać na inne im równoważne.

§ 11. Stosunek brył i dochodzenie ich bryłowatości.

463. *Tw. Dwa graniastosłupy* DG i MP *proste prostokątne mające podstawy równe, mają się w stosunku wysokości* (fig. 334).

Przenoszę wysokość JN na AE zawiera się w niéj dwa razy i pozostaje $eE < JN$; jeśli przez punkta podziałów a i e poprowadzimy pł. równoległe do podstawy AC, to otrzymamy równoległościany Ab i af równe równoległościanowi MP (432. Wn.); a zatem ile razy wysokość JN zawiera się w wysokości AE, tyle razy i równoległościan MP zawiera się w równoległościanie DG;—resztę eE przenoszę na linię JN, od któréj przenoszenia ona wypadła,—zawiera się dwa razy i pozostaje $m\mathrm{N}<e\mathrm{E}$; jeśli przez punkta r i m podziałów, poprowadzimy pł. równoległe do podstawy JL, to otrzymamy równoległościany Mi i rn równoważne równoległościanowi hF będącemu resztą i t. d. przeto ilorazy wypadłe, od przenoszenia wysokości i równoległościanów są jednakowe, tém samém stosunki ich wyrażają się jednakową liczbą, a zatém są sobie równe.

464. *Tw. Dwa równoległościany* Ac i Ge *proste prostokątne, mające wysokości* Cc *równe, mają się do siebie jak podstawy* AC i GE (fig. 335).

Równoległościan Ge zestawiam z równoległościanem Ac, tak aby krawędzie Cc i ściany GC i Dc przystały do siebie, to ściany ich Bc i Ce leżą na jednéj pł., gdyż kąty dwuś. które te ściany czynią ze ścianą Dc, równają się Π (337. Wn. 1). Przedłużam ścianę Gf wewnątrz równoległościanu Ac, która podzieli go na dwa równ. Ag. i Hc. Równoległościany Ac i Hc mające podstawę Cb wspólną, mają się jak wysokości, t. j. $Ac:Hc=CD:CG$; podobnie równoległościany Hc i Ge mające podstawę Gc wspólną, dają: $Hc:Ge=CB:CE$; pomnożywszy te dwie proporcye, mamy: $Ac.Hc:Hc.Ge=CD.CB:CG.CE$,—podzieliwszy pierwszy stosunek przez Hc, widzimy że $Ac:Ge=CD.CB:CG.CE$;—a że Ac i Ge są prostokąty, przeto te iloczyny z podstawy przez wysokość wyrażają powierzchnię ich podstaw.

465. *Tw. Dwa równoległościany proste prostokątne, mają się do siebie jak iloczyny z trzech wymiarów.*

Oznaczam jeden równoległościan przez R, jego długość, czyli długość podstawy przez D,—jego szerokość czyli odległość na którą linia D posunęła się dla utworzenia podstawy, przez S,—wysokość, czyli odległość na którą posunęła się podstawa dla utworzenia równoległościanu, przez W;—drugi równoległościan przez *r*, jego długość przez *d*, szerokość przez *s*, wysokość przez *w*. Wystawiam równoległościan prosty prostokątny R′ mający długość D, szerokość S, zaś wysokość *w*, t. j. mający podstawę pierwszego a wysokość drugiego. Równoległościany R i R′ mające równe, podstawy, są w stosunku wysokości $R:R'=W:w$; równoległościany zaś R′ i *r* mające wysokości równe, mają się do siebie jak podstawy $R':r=D.S:d.s$; mnożąc te dwie proporcye otrzymam: $R.R':R'.r=D.S.W:d.s.w$, po zniesieniu zaś w pierwszym stosunku wspólnego czynnika R′ pozostaje $R:r=D.S.W:d.s.w$.

466. *Tw. Bryłowatość równoległościanu prostego prostokątnego równa się iloczynowi z trzech wymiarów, czyli iloczynowi z powierzchni podstawy przez wysokość.*

Zmierzyć równoległościan R, znaczy dowiedzieć się ile razy równoległościan przyprostokątny r wzięty za miarę zawiera się w mierzonym równoległościanie. Tego przez proste nakładanie uskutecznić nie można, nie tylko w przypadku niewspółmierności wymiarów, ale nawet gdy wymiary równolegl. r nie mieściły się zupełnie w wymiarach równoległościanu R. Oznaczmy przez D i d liczbę jedności linijnych zawierającą się w długościach (długości tak jak inne odpowiednie wymiary są mierzone jednakową linijną miarą), S i s w szerokościach i przez W i w, liczbę jedności linijnych zawierających się w wysokościach równoległościanów R i r, to $R:r = D.S.W : d.s.w$ (465) a zatém *równolegt. r przyjęty za jedność tyle razy zawiera się w mierzonym równoległościanie* R *ile razy iloczyn d.s.w wypadły z pomnożenia liczb wyrażających wymiary jedności r, zawiera w podobnym iloczynie* D.S.W *liczb wyrażających wymiary mierzonego równoległościanu* R.

Zazwyczaj do mierzenia brył używamy równoległościanu prostego prostok. r, w którym d, s i w równają się jedności linijnéj t. j. *bieżącéj*, łokciowi, ćwierci, calowi i t.p. równoległościan taki jest *sześcianem*, który w tym razie zowie się łokciem sześciennym, ćwiercią, calem sześciennym i t. p. a przeto w nim $d=1$, $s=1$, $w=1$, a tém samém i iloczyn $d.s.w=1$; jednością tą linijną mierzymy D, S i W mierzonego prostokąta, przeto *iloczyn d.s.w czyli* 1, *zawiera się w iloczynie* D.S.W *tyle razy, ile ten iloczyn ma jedności,—a tém samém i sześcian r, w mierzonym równoległościanie* R, *zawiera się tyle razy ile iloczyn* D.S.W.

ma jedności. A zatém aby zmierzyć równoległościan R sześcianem, *r* nie mierzymy równ. R t.j. nie zapełniamy sześcianem czyli nie nakładamy sześcianu *r*,—ale mierzymy w równoległ. R, długość, szerokość i wysokość, krawędzią tego sześcianu, gdyż liczba jedności iloczynu D.S.W. pokazuje ile razy zawiera się sześcian. Aby więc mieć wielkość równoległ.prostego prostok., potrzeba trzy razy mierzyć za każdym razem inną linię, dla tego on jak inne bryły, zowie się wielkością trzy-wymiarową,—zaś długość, szerokość i wysokość zowią się jego wymiarami, raz dla tego że je wymierzać potrzeba, powtóre, że od nich miara czyli wielkość bryły zależy.

Uw. 1. Wyrażenie: *bryłowatość równoległościanu prostego prostokątnego, równa się iloczynowi z trzech wymiarów albo z powierzchni podstawy przez wysokość* jest skróceniem tego wyrażenia: *w równoległościanie prostym prostokątnym, tyle razy zawiera się sześcian, ile jedności ma iloczyn z trzech wymiarów równoległościanu, zmierzonych krawędzią kwadratu.*

Uw. 2. Sam wyraz *bryłowatość, znaczy liczbę kwadratów zawierających się w bryle*, czyli *wielkość bryły.*

Wn. 1. *Bryłowatość równoległościanu, równa się iloczynowi z powierzchni podstawy przez wysokość;* gdyż równoległościan jest równoważny równoległościanowi prostemu prostokątnemu, mającemu z nim podstawę równoważną i wysokość równą (455. Wn. 2), przeto ile kwadratów zawiera się w równoległościanie prostym prostokątnym, tyleż zawiera się i w równoległościanie danym, t. j. ile jest jedności w iloczynie z powierzchni podstawy przez wysokość równoległościanu danego,—bo zamiast podstawy rów. prost. prostokątnego, można wziąć równoważną jéj podstawę równoległościanu danego, a wysokości są równe.

Wn. 2. *Bryłowatość graniastosłupa równa się iloczynowi z powierzchni podstawy przez wysokość*; gdyż gran. jest równoważny równoległościanowi mającemu z nim podstawę równoważną a wysokość równą (457. Wn.), przeto ile zawiera się kwadratów w równoległościanie, tyle i w gran., t. j. ile jest jedności w iloczynie z podstawy przez wysokość,—bo zamiast podstawy równoległościanu, można wziąć podstawę graniastosłupa.

Wn. 3. *Bryłowatość ostrosłupa równa się trzeciéj części iloczynu z podstawy przez wysokość*, gdyż ostrosłup jest trzecią częścią gran. mającego z nim tę samą podstawę i wysokość (459. Wn.).

Wn. 4. *Bryłowatość graniastosłupa* G *trójkątnego ściętego, równa się iloczynowi z trzeciéj części podstawy, przez summę trzech wysokości.* Oznaczam podstawę gran. przez P, wysokość jedną przez W, drugą przez W′, trzecią przez W″;—grn. G jako równoważny trzem ostrosłupom mającym z nim podstawę P wspólną a za wysokości: jeden W, drugi W′, trzeci W″ (460), zawiera w sobie tyle sześcianów ile te trzy ostrosłupy razem t. j. $\frac{1}{3}PW+\frac{1}{3}PW'+\frac{1}{3}PW''=\frac{1}{3}P(W+W'+W'')$.

Wn. 5. *Bryłowatość* S *ostrosłupa ściętego równa* *się iloczynowi z trzech jego podstaw: dolnéj* P, *górnéj p i średnio proporcyonalnéj między temi podstawami, przez trzecią część wysokości.* Ostroslup ścięty jest równoważny trzem ostroslupom mającym z nim równą wysokość W, a za podstawy każdy inną z trzech podstaw (461. Wn.); przeto zawiera tyle kwadratów ile te ostrosłupy razem t. j. $S = \frac{1}{3} PW + \frac{1}{3} pW + \frac{1}{3}\sqrt{P.p}.W = \frac{1}{3} W(P+p+\sqrt{P.p})$.

467. *Tw. Bryłowatość walca równa się iloczynowi z powierzchni koła służącego za podstawę przez wysokość.*

Biorąc wielkość koła, bierzemy ją do pewnéj liczby znaków dziesiętnych, przeto do téj liczby znaków dziesiętnych obwód odpowiedniego wielokąta foremnego opisanego na kole, nie różni się co do wielkości od okręgu (266, *a*) a tém samém do tylu znaków dziesiętnych i pow. koła nie różni się od powierzchni wielokąta opisanego, gdyż pow. wiel. równa iloczynowi z obwodu przez promień koła wpisanego; z tego to powodu przy obrachowaniu bryłowatości walca, czyli przy wyrażeniu jego wielkości liczbą, zamiast koła służącego za podstawę walcowi, bierzemy stosowny wiel. for. opisany, a tém samém zamiast walca bierzemy gran. mający za podstawę ten wiel.; przeto bryłowatość walca, tak jak grn. równa się iloczynowi z powierzchni podstawy grn.,—równéj pow. koła,—przez wysokość. Oznaczywszy promień podstawy walca przez R, wysokość przez W, *bryt. walca*$=\Pi R^2 W$.

Wn. 1. Dla podobnéj przyczyny przy wyrażeniu wielkości ostrokręgu liczbą, zamiast koła jego podstawy bierzemy wielokąt for. na nim opisany, o liczbie boków odpowiedniéj ścisłości rachunku; powierzchnie koła i wielokąta, do żądanéj liczby znaków dziesiętnych, są sobie równe, a zatém *bryłowatość ostrokręgu* tak jak ostrosłupa mającego ten wielokąt za podstawę, *równa się iloczynowi z powierzchni podstawy przez trzecią część wysokości.* Oznaczywszy promień podstawy ostrokręgu przez R, wysokość przez W,—*bry. ostr.*$=\frac{1}{3}\Pi R^2 W$.

Wn. 2. Do żądanéj liczby znaków dziesiętnych bryłowatość ostrokręgu nie różni się od bryłowatości ostrosłupa, mającego za podstawę stosowny wiel. for., przeto do téj liczby znaków, kloc ostrokręgu nie różni się od kloca tego ostrosłupa równéj z nim wysokości, przeto *bryłowatość kloca ostrokręgowego* tak jak ostrosłupowego *równa się iloczynowi z trzeciéj części wysokości przez summę trzech podstaw.* Oznaczywszy wysokość przez W, promienie podstaw R i r, *bryt. kloca ostrokręgowego* $=\frac{1}{3}W(\Pi.R^2+\Pi r^2+\sqrt{\Pi R^2.\Pi r^2})=\frac{1}{3}W(\Pi R^2+\Pi r^2+\sqrt{\Pi^2 R^2 r^2})=\frac{1}{3}W(\Pi R^2+\Pi r^2+\Pi R r)=\frac{1}{3}\Pi W(R^2+r^2+Rr)$.

Uw. Nie można w ogólności uważać koła za wielokąt for., tém bardziej za wiel. for. o nieskończonéj liczbie boków, gdyż o liczbie nieskończenie wielkiéj w niższéj matematyce nie mamy jasnego pojęcia; zaś przeciwnie z opisania koła i wielokąta wiemy że to są dwie różne rzeczy;—ztąd wynika że walca za grn., ostrokręgu za ostrosłup, uważać nie można bez popełnienia błędu przeciw ścisłości matematycznéj; wyrażając liczbą wielkość koła, nie możemy jéj wyrażać do nieskończonéj liczby znaków dziesiętnych, bo to jest niemożliwém, — lecz wyrażamy ją do pewnéj liczby znaków dziesiętnych, do któréj to liczby znaków dziesiętnych, obwód wiel. for. wpis. i opis. o stosownéj liczbie boków zupełnie nie różni się od okręgu, a powierzchnia wiel. for. opis., od pow. koła, i dla tego w tym szczególnym przypadku t. j. *przy mierzeniu*, jedno za drugie ze wszelką ścisłością matematyczną może być wzięte; następnie zaś przy mierzeniu walców i ostrokręgów, biorąc zamiast podstaw, nieróżniące się od nich wielokąty, będziemy mieli graniastostosłupy i ostrosłupy do żądanej liczby znaków dziesiętnych nie różniące się od walców i ostrokręgów.

468. *Tw. Bryłowatość bryły utworzonéj obrotem trójkąta około osi przechodzącéj przez wierzchołek na jego płaszczyznie, równa się trzeciéj części iloczynu z powierzchni utworzonéj przez obrot podstawy tego trójkąta, czyli przez bok przeciwległy temu wierzchołkowi,—przez wysokość padającą na tę podstawę* (fig. 336, 337 i 338).

Położenie trójkąta ABC względem osi MN może być *trojakie*:

1° Oś MN *przechodząca przez wierzchołek* C przystaje do boku trójkąta (fig. 336).

Prowadzę wysokość CP i z wierzchołka B przeciwległego osi, linię B*b* do niéj prostopadłą; oznaczam *pow.* AB, powierzchnię utworzoną przez podstawę AB, w czasie obrotu trójkąta ABC około osi MN,— *kl.*B*b*, powierzchnia koła mającego za promień B*b*, *bryl.* ABC, bryłowatość bryły utworzonéj przez obrót trójkąta ABC około osi MN, i t. p.; mamy: *bryl.* ABC $=$*bryl.* AB*b*$+$*bryl.* *b*BC; lecz trójkąty prostokątne w czasie obrotu około ramienia kąta prostego, tworzą ostrokręgi proste, przeto biorąc ich wartość będzie: *bryl.* ABC$=\frac{1}{3}$*kl.*B*b*. A*b*$+\frac{1}{3}$*kl.* B*b*. *b*C$=\frac{1}{3}$*kl.* B*b* (A*b*$+$*b*C)$=\frac{1}{3}$*kl.* B*b*. AC. Lecz *pow.* AB$=\Pi$ B*b*.AB (398. Wn. 1) *kl.* B*b*$=\Pi$Bb^2, przeto, *pow.* AB:*kl.* B*b*$=$ Π.B*b*. AB: Π.B$b^2$$=$AB: B*b* po zniesieniu w drugim stosunku wspólnego czynnika Π.B*b*,— trójkąty prostokątne AB*b* i APC mające kąt wspólny są podobne, to drugi stosunek ostatniéj proporcyi AB:B*b*$=$AC: CP, a zatem *pow.* AB: *kl.* B*b*$=$AC : CP z kąt *kl.* B*b*. AC$=$ *pow.* AB.CP. W ostatniéj wartości na *bryl.* ABC zamiast *kl.* B*b*.AC można wziąść pow. AB.CP, a zatem *pow.* ABC$=\frac{1}{3}$ *pow.* AB.CP.

2°. Podstawa BA przedłużona przecina oś w punkcie D (fig. 337).

Bryła utworzona przez obrót trójkąta ABC około osi MN, jest różnicą pomiędzy bryłą utworzoną obrotem trój. DBC i DAC, przeto *bryl.* ABC$=\frac{1}{3}$*pow.*DB. CP$-\frac{1}{3}$*pow.* DA.CP$=\frac{1}{3}$(*pow.*DB$-$*pow.* DA) CP$=\frac{1}{3}$ *pow.* AB.CP.

3°. Podstawa równoległa do osi (fig. 338).

Z wierzchołków A i B prowadzę linie A*a* i B*b* prostopadłe do osi, to bryła utworzona obrotem trójkąta ABC jest równoważna walcowi utworzonemu przez obrót prostokąta *Ab* zmniejszonemu dwoma ostrokręgami prostemi utworzonemi przez obrót trój. prostokątnych BC*b* i AC*a*, przeto: *bryt.* ABC$=$*kt.* PC.*ab* $-\frac{1}{3}$*kt.* PC.*a*C$-\frac{1}{3}$*kt.* PC.C*b*$=$*kt.*PC.*ab*$-$*kt.*PC(*a*C$+$C*b*)$=$*kt.* PC.*ab*$-\frac{1}{3}$*kt.*PC.*ab*$=\frac{2}{3}$*kt.*PC.AB. Lecz *kt.* PC$=\Pi$.PC^2, *pow.* AB$=2\Pi$PC.AB, przeto: *kt.* PC: *pow.* AB$=\Pi$.PC^2: 2ΠPC.AB$=$PC: 2AB po zniesieniu w drugim stosunku wspólnego czynnika Π.PC,—z tej proporcyi 2*kt* PC.AB$=$*pow.* AB.PC, wstawiwszy to w ostatnią wartość na *bryt.* ABC będzie *bryt.* ABC$=$ $\frac{1}{3}$ *pow.* AB.PC.

Uw. Położenie wysokości w żadnym z tych przypadków niezmienia dowodzenia.

469. *Tw. Brylowatość bryły utworzonéj przez obrót części wielokąta foremnego około osi przechodzącéj przez jego środek, równa się trzeciéj iloczynu z powierzchni utworzonéj przez jego obwód, przez promień koła wpisanego* (fig. 339).

Bryła utworzona obrotem cześci wiel. for. OABCD równa się summie brył utworzonych przez obrot składających ją trójkątów, lecz że wysokości tych trójkątów są sobie równe (128. Wn. 1), przeto nazwawszy je przez R: będzie: *bryt.* OABCD$=\frac{1}{3}$*pow.*AB.R $+\frac{1}{3}$*pow.* BC.R$+\frac{1}{3}$*pow.* CD.R$=\frac{1}{3}$(*pow.* AB$+$*pow.* BC$+$*pow.* CD)R$=\frac{1}{3}$*pow.* ABCD.R.

Wn. 1. Podobnie dowiedlibyśmy że *bryła utworzona przez obrót półwielokąta foremnego parzystego około osi odcinającéj tą połowę, równa się trzeciéj części iloczynu z powierzchni utworzonéj przez* *obwód połowy tego wielokąta, przez promień koła wpisanego.*

470. *Tw. Bryłowatość kuli równa się iloczynowi z powierzchni kuli przez trzecią część promienia.*

Kula tworzy się obrotem półkola około osi, a że przy dochodzeniu wielkości okręgu koła, zamiast okręgu braliśmy wielokąt na niém opisany o stosownéj liczbie boków: zamiast półokręgu tworzącego kulę z tym samym przybliżeniem czyli téj saméj wielkości bierzemy półwielokąta opisanego na témże półkolu; bryłowatość kuli, tak jak bryłowatość bryły tworzonéj obrotem części wielokąta foremnego około osi, równa się powierzchni utworzonéj obwodem tego wielokąta przez $\frac{1}{3}$ promienia koła wpisanego; a że w tym przypadku obwód wielokąta równa się obwodowi półokręgu, przeto bryłowatość kuli równa się powierzchni kuli przez trzecią część promienia. Oznaczywszy promień kuli przez R, *pow. kuli* $= 4\Pi R^2$ zaś bryłowatość $4\Pi R^2 . \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\Pi R^3$.

Uw. 2. Biorąc walec opisany na kuli, któréj promień R, i ostrokrąg mający z walcem podstawę i wysokość wspólną, będzie *bryt. wal.* $= \Pi R^2 2R = 2\Pi R^3$, *bryt. kuli* $= \frac{4}{3}\Pi R^3$, *bryt. ostr.* $= \frac{1}{3}\Pi R.2R = \frac{2}{3}\Pi R^3$, przeto wal. kuli: ostr. $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 6 : 4 : 2$.

Wn. 1. Bryłowatość wycinka kulistego równa się trzeciéj części iloczynu z powierzchni kuli obejmującéj go przez trzecią część promienia; jako bryła utworzona obrotem części powierzchni wielokąta foremnego o stosownéj liczbie boków, około osi przechodzącéj przez wierzchołek.

Wn. 2. Bryłowatość odcinka kulistego, równa się bryłowatości wycinka mającego z nim tęż samą powierzchnię kuli za podstawę, mniej bryłowatością ostrokręgu mającego koła odcinka za podstawę, a wierzchołek w środku kuli.

Wn. 3. Bryłowatość odcinka o dwóch podstawach równa się bryłowatości większego mniej bryłowatością mniejszego odcinka.

471. *Tw. Bryły podobne mają się do siebie jak sześciany z wymiarów odpowiednich.*

1° *Równoległościany proste prostokątne.* Oznaczywszy przez R i r dwa równoległościany i przez D i d, S i s, W i w ich odpowiednie wymiary, będzie: *bryt.* R.$=$D.S.W, *bryt. r.*$=d.s.w.$, przeto *bryt.* R : *bryt. r.* $=$ D.S.W: $d.s.w$; lecz D : $d =$ W: w i D : d $=$S : s i D : d=D : d, to pomnożywszy te proporcye będzie: $D^3 : d^3 = S.W.D : s.w.d.$; a tém samém *Bryt.* R : *bryt. r* $= D^3 : d^3$.

2° *Ostrosłupy* trójkątne mające podstawy podobne, i wysokości przez odpowiednie punkta podstaw przechodzące proporcyonalne do boków podstaw, mają się do siebie jak iloczyny z trzech wymiarów. Oznaczywszy przez P i p podstawy, W i w wysokości, K i k krawędzie podstaw czyli podstawy trójkątów służących za podstawy ostrosłupom,—będzie: Brył. ostr.$=$P.W, *bryt. ostr. p.w.*; lecz $P : p = K^2 : k^2$ i $W : w$ $= K : k$, z podobieństwa ostrosłupów, pomnożywszy te dwie proporcye, mamy: $P.W : pw = K^3 : k^3$, czyli *Bryt. ostr* : *bryt. ostr.* $= K^3 : k^3$.

3° Inne bryły płaskościenne podobne, jako składające się z ostrosłupów podobnych, mają się w stosunku tych ostrosłupów, czyli sześcianów z wymiarów odpowiednich.

4° *Walce.—bryl. Wal*$=\Pi R^2.W$, *bryl. wal*$=\Pi r^2.w$; przeto: *bryl. Wal* : *bryl. wal*$=R^2W:r^2w$ a że $R:r=W:w$, pomnożywszy poprzedniki przez R^2a następniki przez r^2, będzie $R^3:r^3=R^2W:r^2w$, a zatem *bryl. Wal* : *bryl. wal*$=R^3:r^3$. To samo ściąga się do ostrosłupów, jako trzecich części walców, i kloców ostrosłupowych jako składających się z trzech ostrosłupów podobnych.

5° *Kule. Bryl. Kuli* $=\frac{4}{3}\Pi R^3$, *bryl. kuli* $=\frac{4}{3}\Pi r^3$ przeto: *bryl. Kuli* : *bryl. kuli* $=R^3:r^3$.

472. *Zd.* Znaleść bryłowatość: *a*) *równoległościanu prostego prostokątnego*, którego dług. 5 Łok. szer. 3 Łok., wys. 6 Łokci;—za jednośé do mierzenia téj bryły przyjęty jest łokieć sześcien. gdyż wymiary są mierzone łokciem, przeto łokieć sześcien. tyle razy zawiera się w bryle ile iloczyn z trzech wymiarów ma jedności (466), t. j. 5.3=15, 15.6=90 razy zawiera się łokieć sześcienny czyli bryłowatość =90 Łok. sześc.; *b*) *równoległościanu pochyłego*, którego podstawa zawiera 30 cali kwad. a wysokość 8 cali; liczba 30 wypadła z pomnożenia dwóch wymiarów podstawy będących zarazem wymiarami bryły, długością i szerokością, przeto pozostaje ją pomnożyć przez trzeci wymiar 8 dla otrzymania bryłowatości równoległościanu, która równa się 30.8=240,—podobnym sposobem wynajduje się bryłowatość gran.;—*sążnia sześciennego, biorąc za jednośé*

stopę sześcienną; długość sążnia sześciennego jest stóp 6, podobnie szerokość i wysokość; przeto bryła zawiera w sobie stóp sześciennych $6.6=36$, 36.6 216; na téj zasadzie miary sześcienne wyższe, zamieniają się na niższe; i tak jeden sążeń sześcienny ma tyle np. stóp, ile sześcian z liczby stóp zawierających się w sążniu jedności;—*d*) *Ostrosłupa*, którego podstawa ma 8 Łok. a wysokość 6; bry. ostr. $=\frac{1}{3} . 8 . 6=16$ Ł. sześ. (466. Wn. 3); — *e*) *graniastosłupa trójkątnego* ściętego, którego podstawa ma łokci 15, jedna wysokość 2 Łok. druga 3 a trzecia 4; *bryt.* $=\frac{1}{3}(2+3+4)15=\frac{1}{3} . 9 . 15=3 . 15=45$ Łok. sześ. (466. Wn. 4);—*f*) *Ostrosłupa ściętego*, którego podstawa dolna 20 Łok, górna 12, a wysok. 6,— bryt.$=\frac{1}{3}(20+12+\sqrt{20.12}) . 6=\frac{1}{3}(20+12+15.811) . 6=\frac{1}{3} . 47.811 . 6=47.811 . 2=94.622$ Sąż. sześ. (466. Wn. 5); — *g*) *Walca*, którego promień podstawy 4 Łok. a wysok. 10 Łok., — *bryt.* $=\frac{355}{113} . 4^2 . 10=\frac{355}{113} . 16 . 10=502\frac{74}{113}$ (467); — *h*) *Ostrokręgu*, mając promień podstawy 3 Łok. a wysokość 8 Łok.,—bry. $=\frac{1}{3} . \frac{355}{113} . 3^2 . 8=\frac{1}{3} . \frac{355}{113} . 9 . 8=\frac{355}{113} . 3 . 8=57\frac{79}{113}$ Łok. sześ. (467. Wn. 1);—*i*) *klocaostrokręgowego*, którego promień podstawy dolnéj 7 Ł., górnéj 3 Łok. a wysokość 15 Łokci,—bryłow. $=\frac{1}{3} . \frac{355}{113}(7^2+3^3+7 . 3) . 15=\frac{355}{113} . (49+9+21) . 5=\frac{355}{113} . 79 . 5=1240\frac{105}{113}$ Łok. sześcien. (467. Wn. 2);— *k*) *bryły utworzonéj przez połowę sześciokąta for., opierającego się na osi sym. łączącéj przeciwległe wierzchołki obrotem około téj osi*, którego bok ma 6 łokci,—powierzchnia utworzona przez obrót obwodu sześciokąta równa się okręgowi koła wpisanego, przez oś (417), lecz promień ten jest przyprostokątnią trójkąta prostokątnego, którego bok sześc., jako równy prom. koła opisanego, jest przeciwprostokątnią, zaś połowa tego boku drugą przyprostokątnią, tak że $R^2=36-9=25$ a $R=\sqrt{25}=5$ przeto *pow. utworzona przez sześciokąt*$=2.{}^{335}/_{113}\,.\,5\,.\,12={}^{355}/_{113}\,.\,120=385.84.$, a *bryl.*$={}^{1}/_{3}\,.\,385.84\,.\,5={}^{1}/_{3}\,.\,1929.20=643.06$ Łok. sześ. (469. Wn. 1); — *l*) *kuli*, której promień 5 Łok., — *bryl.* $={}^{4}/_{3}\,.\,{}^{355}/_{113}\,.\,125={}^{1420}/_{339}\,.\,125={}^{177500}/_{339}=523.59$ Łokci sześciennych (470); — *m*) *Wycinka kulistego*, którego promień kuli 10 Łok. a wysokość odcinka służącego za podstawę 3 Łok. — powier. odcinka równa $2\,.\,{}^{355}/_{113}\,.\,10^2\,.\,3={}^{21300}/_{113}=188.49$ Łokci kwadr. (418. Wn. 2), bryłowatosć wycinka$=$ ${}^{1}/_{3}\,.\,188.49\,.\,10=628.30$ Łok. sześ. (470. Wn. 1); — *n*) *Odcinka o jednéj podstawie*, gdy promień kuli równy 8 Łok. a wysokość odcinka 2 Łok., — pow. odcin. $=2\,.\,{}^{355}/_{113}\,.\,8\,.\,2=100.53$, *bryłowatość wycinka* któremu on służy za podstawę$={}^{1}/_{3}100.53\,.\,8=268.08$ Łok. sześ., — wysokość ostrokręgu mającego koło odcinka za podstawę $=8-2=6$, promień zaś tego koła jest przyprostokątnią w trójkącie prostokątnym, w którym promień kuli jest przeciwprostokątnią a wysokość drugą przyprostokątnią, przeto $r=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=5.29$ a bryłowatość ostrokręgu $={}^{1}/_{3}\,.\,{}^{335}/_{113}\,.\,28\,.\,6={}^{355}/_{113}\,.\,56=157.92$ Łokci sześc., — a zatém bryłowatość odcinka, jako różnica pomiędzy bryłowatością wycinka i walca, $=268.08-$

175.92=92.16 Łokci sześciennych; — *o*) *Odcinka o jednéj podstawie*, gdy promień kuli równy 8 Łok. zaś wysokość 12 Łokci, — odcinek ten jest większy od pół kuli, przeto do bryłowatości wycinka trzeba dodać bryłowatość ostrokręgu.

Pow. wycin. $= 2 \,.\, {}^{355}/_{111} \,.\, 8 \,.\, 12 = 523.539$

Wys. ostrok. $= 12 - 8 = 4$

Prom. pods. $= \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 6.92$

Bryl. wycinka $= {}^{1}/_{3} \,.\, 523.539 \,.\, 8 = {}^{1}/_{3} \,.\, 4188.312 =$ 1396.104 Łok. sześ.

Bryl. ostrok. $= {}^{1}/_{3} \,.\, {}^{355}/_{113} \,.\, 48 \,.\, 4 = {}^{355}/_{113} \,.\, 16 \,.\, 4$ $=201.061$ Łok. sześ.

Bryl. odcinka = 1195.043 Łokci sześciennych.

Uw. Jeśliby dana była bryłowatość i dwa wymiary, a szukalibyśmy wymiaru trzeciego, to ponieważ bryl. jest iloczynem trzech wymiarów, przeto podzielona przez iloczyn z dwóch wymiarów daje wymiar trzeci.

473. *Zd.* Znaleść trzy wymiary równoległościanu, któryby miał Łok. sześ. 405 i aby jego wymiary były w stosunku 1, 3, 5. Bryłowatość równoległościanu mającego za wymiary 1, 3, 5 równa się 15 Ł. sześ.; a że bryły podobne mają się jak sześciany z wymiarów odpowiednich, przeto

$$15 : 405 = 1^3 : x^3;\ x^3 = 27$$

$$15 : 405 = 3^3 : x^3;\ x^3 = 729$$

$$15 : 405 = 5^3 : x^3;\ x^3 = 3375$$

Przeto wymiary żądane są 3, 9, 15.

474. *Zast.* Ciała mające kształt zbliżony do brył jeometrycznych przyjmują się za jeometryczne i na

téj zasadzie obrachowywa się ich wielkość, np. ściany, belki za równoległościany proste prostokątne, kloce drzewa za walce mające za podstawę środkowe przecięcie kloca i t. d.;—ciała składające się z części mających kształt jeometryczny, obrachowują się przez obrachowanie tych części;—ciało nie mające kształtu podobnego do bryły, może być zmierzone w ten sposób: kładzie się je do naczynia walcowego i nalewa się wodą lub zasypuje piaskiem—następnie wyjmuje się ciało i mierzy się różnica wysokości wody, to walec mający za podstawę naczynie walca, a za wysokość różnicę wysokości, jest równoważny z mierzonym ciałem.

475. *Zast.* Przy użyciu prawd solidometrycznych w zastosowaniu, zdarza się potrzeba z wagi ciała dojść bryłowatości; dla uskutecznienia tego wiedzieć potrzeba że *stopa sześc. polska wody dystylowanéj*, przy największéj gęstości, waży funt. 58,909090909, ciężkość zaś względna ciał pokazuje ile razy ciało cięższe od téj wody np. *Złoto* 19,258,—*Ołów* 11,352, —*Srebro* 10,474,—*Miedź* 8,895,—*Mosiądz* 8,395,— *Żelazo lane* od 7,645 do 7,788, — *Żelazo kute* od 7,875 do 8,778.—*Stal* 7,767.—*Cyna* 7,264,—*Cynk* 6,862,—*Marmur kararyjski* 2717,—*Granit Egipski*, 2,761, — *Gips* od 1.87 do 2.29, — *Drzewo dębowe świeże* 0,93, *suche* 1,67,—*Buk* 0,85,—*Sosna* 0,55 i t. d.; a zatém chcąc wiedzieć 5000 fun. miedzi ile ma stóp sześciennych uważam: ponieważ miedź jest 8,895 razy cięższa od wody, przeto woda téj saméj co miedź dana objętości ważyłaby 8,895 razy mniéj

t. j. $^{5000}/_{8893} = 562$ fun., a że funtów wody 58.9 czyni jedną sześcienną stopę pols., przeto funt. 562 czyni stóp tyle ile razy 58.9 zawiera się 362 t. j. $^{562}/_{584} = 9^{319}/_{589}$ stóp sześ.; ztąd widziemy, że dla otrzymania liczby stóp metalu, jego wagę w funtach dzielimy przez ciężkość względną i ciężar stopy sześ. wody;— żądanie przeciwne, t.j. z objętości dojść ciężaru metalu, rozwiązuje się, mnożąc objętość przez ciężkość względną i wagę wody.

476. *Zt.* Bryłowatość ziarna zsypanego w zasiekach obrachowywa się podług kształtu zasieki i jednostajnéj lub nie jednostajnéj wysokości warstwy ziarna, tak że warstwa ta może mieć kształt równoległościanu prostego prostokątnego, gran. ściętego i t. p. Zboża zsypanego w kształcie ostrokręgu bryłowatość obrachowywa się mnożąc powierzchnię podstawy przez średnio-arytmetyczną wysokość z wysokości branych w równych odstępach np. o stopę, łokieć, tak że te wysokości przypadają w wierzchołkach stóp, łokci kwadr. na które tym sposobem podzieliłaby się podstawa zboża. Jakimkolwiek sposobem obrachujemy bryłowatość zboża w miarach sześciennych, potrzebuje zamienić na właściwe miary objętości, *Korce*, *Ćwiercie*, *Garnce* i t. p. — W tym celu wiedzieć potrzeba że *Garniec* ma *cali sześciennych* $289^{19}/_{54}$,— *Korzec zaś*=*Cali sześ.* $9259\frac{1}{4}$=*Ćw. sześ.* 257 *cali* $7\frac{1}{4}$=*Stóp sześ.* 64, *Ćwier.* 1, *Cali* $7\frac{1}{4}$; czyli ściśle zamiast $\frac{1}{4}$ brać trzeba $\frac{7}{27}$.

477. *Zd. Obrachować bryłowatość beczki.*

1szy *Spos.* Przy dochodzeniu bryłowatości beczki elementarnie uważamy ją za średnio-arytmetycznie proporcyonalną pomiędzy dwoma walcami opisanym *abcfgh* mającym środkowe koło beczki za podstawę i wpisanym w beczkę ABCFHG mającym dna beczki za podstawę,—oba zaś oś beczki JK za wysokość.— Oznaczywszy więc brył. beczki przez B, jéj wysokość przez w, promień koła środkowego przez R zaś dna przez r, mamy $B = \frac{1}{2}(\Pi R^2 w + \Pi r^2 w^2) = \frac{1}{2}\Pi w(R^2+r^2) = \frac{1}{8}\Pi w(4R^2+4r^2) = \frac{1}{8}\Pi w[(2R)^2+(2r)^2]$ t. j. *bryłowatość beczki równa się połowie iloczynu stosunku średnicy do okręgu przez wysokość, pomnożonemu przez summę kwadratów z promieni dna największéj objętości* lub ósméj części iloczynu ze stosunku średnicy, przez wysokość, pomnożonego przez summę kwadratów ze średnic.

2gi *Spos.* Dla zmierzenia beczki potrzeba mierzyć bryłowatość dwóch walców, która wyraża się miarami sześciennemi a nie miarami objętości — garniec, kwarta i t. p.—Do takiego więc mierzenia walca najdogodniéj wziąść za jedność walec mający objętosci garniec, kwartę i t. p.—Garniec jest to walec mający bryłowatości *Cali sześ.* $289\frac{19}{54} = \Pi R^2 W = \frac{355}{113}.16.W$, biorąc promień R równy 4 calom; czyli $\frac{15625}{54} = \frac{5680}{113}.W$: a ztąd wysokość garnca mającego 4 cale za promień czyli $W = \frac{15625 \times 113}{54 \times 5680} = \frac{1765625}{306720} = 5.7564$ czyli $5\frac{3}{4}$ cala z przybliżeniem mniéj jak o 0.01.

Biorąc drugi walec mający tą samą wysokość 5,7564... zawierający zaś dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. garncy i promienie ich oznaczywszy przez r, r',

r'', r'''.... będzie $\Pi r^2W : \Pi R^2W = 2:1$; $\Pi r'W : HR^2W^2 = 3:1$; $\Pi r''^2W : HR^2W = 4:1$; $Hr'''^2W : HR^2W = 5:1$ i t. d. czyli znosząc w pierwszym stosunku wspólny czynnik HW będzie $r^2 : R^2 = 2:1$; $r'^2 : R^3 = 3:1$; $r'' : R^2 = 4:1$; $r'''^2 : R^2 = 5:1$ i t. d. a ztąd $r^2 = 2R^2 = R^2 + R^2$ czyli promień walca zawierającego dwa garnce jest przeciwprostokątnią trójkąta w którym przyprostokątnie są promienie garnca; — $r'^2 = 3R^2 = 2R^2 + R^2 = r^2 + R^2$, promień trzech garncy jest przeciwprostokątnią trójkąta w którym przeciwprostokątnią i przyprostokątnie są promienie dwóch i jednego garnca: — $r''^2 = 4R^2 = 3R^2 + R^2 = r'^2 + R^2$ i t.d. od punktu (fig.341) A do 1 odcinam 2R; do 2, $2r$; do 3, $2r'$; do 4, $2r''$; do 5, $2r'''$ i t. d. i otrzymam średnice walców 2, 3, 4, 5 i t. d. razy większych od garnca przy równéj z nim wysokości. Jeśliby wysokości nie były równe, to walec który przy równych wysokościach zawiera 5 garncy przy 6 razy większéj wysokości zawiera 6 razy więcéj garncy t.j. 5.6=30. Zamiast mierzyć zwyczajnie walce wpisane i opisane mierzymy je na garnce, kwarty lub kwaterki, podług tego jak podziałka zrobiona, — mierzenie zaś tém jest ściślejsze im mniejszéj miary zrobiona podziałka, — i tak, jeśli średnica dna dolnego równa A4, największa A6, wysokość B5, to *beczka = garncom* $\frac{1}{2}(4.5 + 6.5) = \frac{5}{2}(4 + 6)$.

477. *Zd. Znaleść ciężar zdolny zanurzyć łódź.* Zamiast ciężaru drzewa łodzi, biorę ciężar wody mający z tém drzewem jednakową objętość i dodaję do niego ciężar wody wypełniającéj łódź, a otrzymam ciężar zdolny łódź zanurzyć, jako równy ciężarowi

wody wypchniętéj przez całą łódź przy jéj zatapianiu się *). Przy robieniu łodzi waży się użyte drzewo, albo po zrobieniu łódź cała, która waży 10,000 funt. łódź zawiera w sobie wody garncy 500,000. Drzewo sosnowe waży 10,000, a 0.55 funtów tego drzewa ma taką objętość, że woda téj objętości 1 funt by ważyła; przeto woda objętości drzewa waży tyle funtów ile 0.55 funtów zawiera się w 10,000 funt. t. j. 10,000 : 0.55 = 18181.81... *Garniec wody dystylowanéj waży* funtów 9.8642, przeto garncy 500,000 ważą funtów 4932100; a zatém statek zanurzy się od funta 18181.818...+4932100=4950281.818... Chcąc wiedzieć bryłowatość tak drzewa użytego na statek jako też objętość samego statku, trzeba wagę wody podzielić przez 58,909... gdyż każde 58,909 funtów wody stanowi stopę sześcienną.

477. *Zd. Ile kosztować powinien sążeń sześcienny drzewa sosnowego, gdy sztuka mająca długości stóp* 24, *zaś średnicę w środku długości* 33 *Cali, kosztuje Rs.* 7.29.

Uważając sztukę za walec, wysokość jego jest 24 stopy=288 cali, to *bryl.*$=\frac{355}{113}\cdot\left(\frac{33}{2}\right)^2\cdot 288=\frac{355}{113}1089.288$ $=246326$ cali sześcien.; lecz sążeń sześcienny =

*) Z Fizyki wiemy: że ciało tyle traci ze swego ciężaru ile waży wypchnięta woda, przeto jeśli ciało lżejsze od wody, jaką jest łódź napełniona powietrzem, to woda wypchnięta częścią łodzi tyle waży co łódź cała i dla tego część jéj jest w wodzie, a część nad wodą czyli ona pływa; lecz jeśli ciężar łodzi jest taki że się równa massie wody wypchniętéj przez całą łódź, to łódź dla wypchnięcia téj wody musi się zanurzyć.

373248 calów sześ. przeto 246326 : 373248 = Rs $7.29 : x = \frac{373248 \times 7.29}{246326} = 11.04$ Rs.

Sążnie sześcienne drzewa leśne mają w sobie sążeń sześcienny samego drzewa, miejskie zaś są drzewem złożonym, zajmującym *sąż. sześ.*, a przeto od 8 do 12 procentów potrąca się na nie ścisłość w składaniu.

478. *Zd. Znaleść powierzchnię i bryłowatośc kuli ziemskiéj, któréj promień wynosi* 859½ *mil jeogr.*

Pow. $= 4Hr^2 = 4.\frac{355}{113}(859\frac{1}{2})^2 = 9283050$ *mil kwadr.*

Bry. $= \frac{4}{3}Hr^3 = \frac{4}{3}\frac{355}{113}(859.5)^3 = 2659583000$ *mil sześ.*

Uw. 1. *Podział miar sześciennych.*

a) 1 *Sąż.* = 215 *Stóp* = 373248 *Calów* = 644972544 *Linii* = 5159780352 *Milim.*

b) 1 *Łok.* = 8 *St.* = 64 *Cw.* = 13821 *Cal.* = 23887873 *Lin.* = 191102976 *mil.*

c) 1 *Stop* = 1728 *Cal.* = 2985984 *lin.* = 23887872 *mil.*

Uw. 2. *Zamiana miar objętości ciał sypkich na sześcienne.*

a) 1 *Korzec* = $9259\frac{7}{27}$ *Calów* = 16000000 *linii* = 128000000 *milim.*

b) 1 *Ćwierć* = $2314\frac{22}{27}$ *Calów* = 4000000 *linii* = 32000000 *mil.*

c) 1 *Garniec* = $289\frac{19}{54}$ *Calów* = 500000 *linii* = 4000000 *mil.*

d) 1 *Kwarta* = $72\frac{73}{216}$ *Calów* = 125000 *linii* = 1000000 *mil.*

(*e* 1 *Kwatérka* = $18\frac{13}{864}$ *Calów* = 31250 *linii* = 25000 *mil.*

ROZDZIAŁ IV.

Wzajemna zależność wielkości kształtu bryl.

479. *Tw. Z równoległościanów mających podstawy i wysokości równe, równoległościan prosty ma najmniejszą powierzchnię i nawzajem.*

Z krawędzi podstawy, na ścianach równoległościanów prostego i pochyłego wyprowadzam prostopadłe do téj wspólnéj krawędzi, to one są wysokościami prostokąta i równoległoboku służących za ścianę równoległościanom prostemu i pochyłemu (371), ściany te są w stosunku wysokości, jako mające podstawy równe (288. Wn. 2); lecz wysokość prostokąta jako prostopadła do podstawy dolnéj (338. Wn. 1), jest zarazem prostopadłą i do podstawy górnéj (345); wysokość równoległoboku w ścianie prostopadłéj nie jest prostopadła do podstawy dolnéj, a tém samém jest pochyłą do podstawy górnéj, a zatém większa od wysokości prostokąta; przeto i summa ścian równoległościanu pochyłego jest większa od summy ścian prostego.

I nawzajem: Oznaczam przez A i B dwa równoległościany prosty i pochyły, mające podstawy i powierzchnie równe, a mam dowieść, że bryłowatość, czyli wysokość, równoległościanu prostego A, jest większa od bryłowatości równoległościanu pochyłego B; na podstawie równoległościanu pochyłego B wystawiam równoległościan prosty C mający z nim równą wysokość, równoległościan ten C jest równoważny równoległościanowi B (455. Wn. 1), lecz powierzchnia równoległościanu C jest, podług poprzedzającego, mniejsza od powierzchni równoległościanu B, a tém samém i A, bo powierzchnie te są sobie równe; a że równoległościany A i C są oba proste, mają podstawy równe, a powierzchnia równoległościanu C, jako mniejsza od powierzchni równoległościanu B, jest mniejsza i od powierzchni równoległościanu A:—przeto i bryłowatość równoległościanu C jest mniejsza od bryłowatości równoległościanu A, a tém samém i bryłowatość równoległościanu B mniejsza od bryłowatości równoległościanu A.

Wn. Twierdzenie to ściąga się i do graniastosłupów.

480. *Tw. Z równoległościanów prostych, mających równą bryłowatość i wysokość a tém samém i podstawy, ten który ma za podstawę kwadrat, ma najmniejszą powierzchnię.*

Powierzchnie boczne równoległościanów prostych, mających wysokości równe, są w stosunku obwodów podstaw, a że z równoległoboków równoważnych kwadrat ma najmniejszy obwód (301. Wn. 2), przeto i powierzchnia boczna równoległościanu prostego mającego kwadrat za podstawę, jest najmniejsza.

481. *Tw. Z równoległościanów prostych mających jednakową wysokość i powierzchnię ten jest największy który ma za podstawę kwadrat.*

Z równoległościanów prostych A i B jednakowéj wysokości i powierzchni, pierwszy ma za podstawę kwadrat, drugi jakikolwiek inny równoległobok. Wystawiam równoległościan C mający za podstawę kwadrat równoważny podstawie równoległościanu B, a za wysokość, wysokość tego równoległościanu, to: równoległościany B i C są równoważne(455. Wn.1). powierzchnia równoległościanu C jest mniejsza od powierzchni równoległościanu B (480), a tém samém od powierzchni równoległościanu A:—lecz równoległościany A i C oba mają za podstawę kwadraty i wysokości równe: przeto podstawa, a tém samém bryłowatość równoległościanu A, większa od podstawy równoległościanu C, bo bez tego i pow. boczna nie mogłaby być większą: a zatém bryłowatość równoległościanu A większa jest i od bryłowatości równoległościanu B równego C.

482. *Tw. gł. Z równoległościanów mających równą bryłowatość, sześcian ma najmniejszą powierzchnię; i nawzajem, z równoległościanow mających równą powierzchnię, sześcian ma największą bryłowatość.*

Każda ściana równoległościanu, mającego najmniejszą powierzchnię, przy danéj bryłowatości, dla tego jest kwadratem, bo gdyby nim nie była którakolwiek ze ścian to wziąwszy ją za podstawę, równoległościan mający za podstawę kwadrat równoważny téj ścianie, a wysokość równą z piérwszym równoległościanem, byłby z nim równoważny i miałby mniejszą powierzchnię (480). Odwrotna własność dowodzi się tak samo, tylko opiéra się na No 481.

483. *Tw. Z graniastosłupów prostych mających podstawy równoważne, a wysokości równe, ten ma*

najmniejszą powierzchnię, którego podstawa ma boki równe.

Powierzchnie boczne graniastosłupów prostych jednakowej wysokości są w stosunku obwodu podstaw lecz wielokąt równoboczny ma obwód mniejszy od równoważnego mu nie równobocznego (298.Wn.3), przeto i powierzchnia boczna graniastosłupa mającego ten wielokąt za podstawę, jest mniejszy od powierzchni bocznej innego graniastosłupa.

Uw. Podobnie dowiedlibyśmy że: *a) z graniastosłupów prostych jednakowej wysokości, mających podstawy równoważne o jednakowej liczbie boków, mającę podstawę foremną ma najmniejszą powierzchnię* (301. Wn. 2); *b) z mających zaś podstawy będące wielokątami foremnemi, ten ma mniejszą powierzchnię którego wielokąt ma większą liczbę boków* (301. Wn. 2).

484. *Tw. Powierzchnia walca prostego jest najmniejszą z powierzchni graniastosłupów prostych, mających z nim równą wysokość i podstawy równoważne.*

Powierzchnie boczne graniastosłupów prostych i walców mających równe wysokosci, są w stosunku obwodu podstaw, y że obwód koła jest najmniejszy z obwodów wielokątów jemu równoważnych, przeto i pow. boczna walca prostego jest najmniejszą z powierzchni i t. d.

485. *Tw. Pomiędzy graniastosłupami prostemi, jednakowej wysokości powierzchni i liczby ścian, mający podstawę foremną, ma największą objętość.*

Oznaczam przez A graniastosłup z podstawą foremną, przez B granias. z podstawą nieforemną. Wystawiam graniastosłup C mający z granias. B podstawy równoważne o jednakowej liczbie boków i równéj z nim wysokości: to graniastosłup C ma mniejszą powierzchnię od gran. B, a tém samém i od gran. A. Lecz graniastosłupy A i C mają za podstawy wielokąty foremne o jednéj liczbie boków; przeto, jeśli powierzchnia gran. C jest mniejsza od powierzchni grn, A, to i bryłowatość A jest większa od bryłowatości grn. C:—a tém samém od granias. B. z nim równoważnego.

Wn. 1. Z pomiędzy graniastosłupów prostych jednakowéj wysokości, powierzchni i podstaw foremnych, ten ma największą bryłowatość, w którego podstawie jest najwięcej boków, — co się podobnie dowodzi jak twierdzenie.

Wn. 2. Walec prosty ma większą bryłowatość od jakiegokolwiek bądź graniastosłupa jednej z nim wysokości i powierzchni równéj.

486. *Tw. Bryłowatość graniastosłupa prostego opisanego na takimże walcu, tak się ma do bryłowatości tegoż walca, jak cała powierzchnia graniastosłupa, do całej powierzchni walca.*

Bryłowatość walca i graniastosłupa opisanego mają się w stosunku ich podstaw, gdyż wysokości są jednakowe, zaś podstawy są w stosunku obwodów, albowiem promienie są jednakowe: a zatém i bryłowatości są w stosunku obwodów.

Powierzchnia krzywa walca i boczna graniastosłupa mają się jak obwody podstaw, lecz i powierzchnie podstaw są w tymże stosunku: przeto cała powierzchnia walca i graniastosłupa są w stosunku obwodu podstaw. Zatém stosunki bryłowatości i całych powierzchni walca prostego i graniastosłupa opisanego na nim, są równe stosunkowi obwodów podstaw tychże ciał. Przeto te stosunki są równe.

487. *Tw. Pomiędzy walcami prostemi jednakowej całej powierzchni, ten którego wysokość równa jest średnicy podstawy, ma największą objętość.* I przeciwnie: *Pomiędzy walcami prostemi równemi, ten którego wysokość równa się średnicy podstawy, ma całą powierzchnię najmniejszą.*

1° Jeśli walce proste opiszemy równoległościanami prostego mającemi podstawy kwadratowe, to stosunek bryłowatości walca równoległościanu na nim opisanego, równa się stosunkowi ich powierzchni lub też stosunkowi obwodów podstaw, t. j. stosunkowi kwadratu opisanego na okręgu koła, do tegoż okręgu, który to stosunek jest stały.

Dla tego, walec będzie największy kiedy będzie wpisany w największy równoległościan. Objętość równoległościanu jest największa, jeśli on jest sześcianem, to jest jeśli jego wysokość równa się średnicy podstawy walca weń wpisanego zatem objętość walca prostego, danéj całéj powierzchni jest największa, kiedy walec może być wpisanym w sześcian.

2. *Odwrotnie.* Jeśli dana jest objętość walca, i równoległościanu na nim opisanego: to stosunek powierzchni tych ciał jest stały. Dla tego cała powierzchnia walca prostego będzie najmniejszą, kiedy cała powierzchnia równoległościanu będzie najmniejszą,

to jet, kiedy równoległościan będzie sześcianem: I tak więc znowu wysokość walca będzie równa średnicy jego podstawy.

488. *Tw. Z ostrosłupów trójkątnych prostych,* (fig 342.) *jednakowej wysokości i podstaw równoważnych, mający trójkąt foremny za podstawę, ma najmniejszą powierzchnię.*

Oznaczam przez A ostrosłup mający za podstawę trójkąt foremny, przez B mający za podstawę trójk. nieforemny,—obwód pierwszego przez o, drugiego przez O; promień koła wpisanego przez R i r, wysokość trojkątów służących za ściany, W i w.

Środki kół wpisanych są spodkami wysokości; powierzchnia każdéj podstawy równa się obwodowi przez połowę promienia, t. j. $\frac{1}{2}o.R=\frac{1}{2}O.r$, z kąd $o:O=r:R$, czyli że obwody są w stosunku odwrotnym promieni. Gdyby powierzchnie boczne tych ostrosłupów były sobie równe, to $o.W=O.w$, a z tąd $o:O=w:W$; lecz $o:O=r:R$, przeto i $w:W=r:R$. W téj proporcyi wyraz W jest za mały, gdyż tylko linie ró-równoległe dzielą się na części proporcyonalne, zatém, wtedy tylko powierzchnia boczna o. W ostrosłupa mającego trójkąt foremny za podstawę, równałaby się powierzchni bocznéj ostrosłupa nie mającego trójkąta foremnego za podstawę, gdyby W równało się równoległej W'; lecz że W jest mniejsze od W', to powierzchnia ta jest mniejsza od powierzchni ostrosłupa niemającego trójkąta foremnego za podstawę.

489. *Tw. Z ostrosłupów trójkątnych jednakowéj bryłowatości, foremny ma najmniejszą powierzchnię.*

Bo gdyby ostrosłup mający najmniejszą powierzchnię, nie miał za ścianę trójkąta foremnego, to ostrosłup mający z nim też samą wysokość, a za ściany trójkąt foremny miałby mniejszą powierzchnię.

490. *Tw. Z ostrosłupów równéj wysokości i podstaw równoważnych foremnych, ten ma mniejszą powierzchnię, który ma większą liczbę boków.*

Dowodzenie jak Tw. 488.

Wn. A zatém ostrokrąg ma najmniejszą powierzchnię ze wszystkich ostrosłupów równéj wysokości i podstaw równoważnych.

Uw. gł. Podobnie jak w Planimetryi powierzchnie tak tu każda bryła da się zamienić, za pomocą płaszczyzn symetryi, na inną mającą z nią równą bryłowatość, lecz mniejszą powierzchnię. Zamiana ta tém jest prędsza, im płaszczyzny symetryi bliżéj rozdzielają kąty na dwie równe części, przecinają się w środku i co do wielkości zbliżają się do siebie: a zatém, im ciało ma więcej płaszczyzn symetryi, tém ma powierzchnię mniejszą; jakoż wszystkie bryły foremne mają mniejszą powierzchnię od brył nieforemnych, mających z niemi jednakową liczbę ścian i równą objętość. A że kula ma dowolną liczbę osi symetryi, przeto ma najmniejszą powierzchnię ze wszystkich ciał jednakowéj z nią objętości;—i nawzajem.

Chcących bliżéj poznać ten przedmiot odsyłam głównie do dzieła Szymona Lhuiliera pod tytułem: *De relatione mutua capacit. et terminor. figurarum geometric considerata.* Varsa. 1782. i do rozprawy Von Steinera — Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze—w piśmie czasowém. Mathematische Abhandl. der Kon. Akad. der Wissen. zu Berlin z roku 1836.

KONIEC.

PRZYPISEK

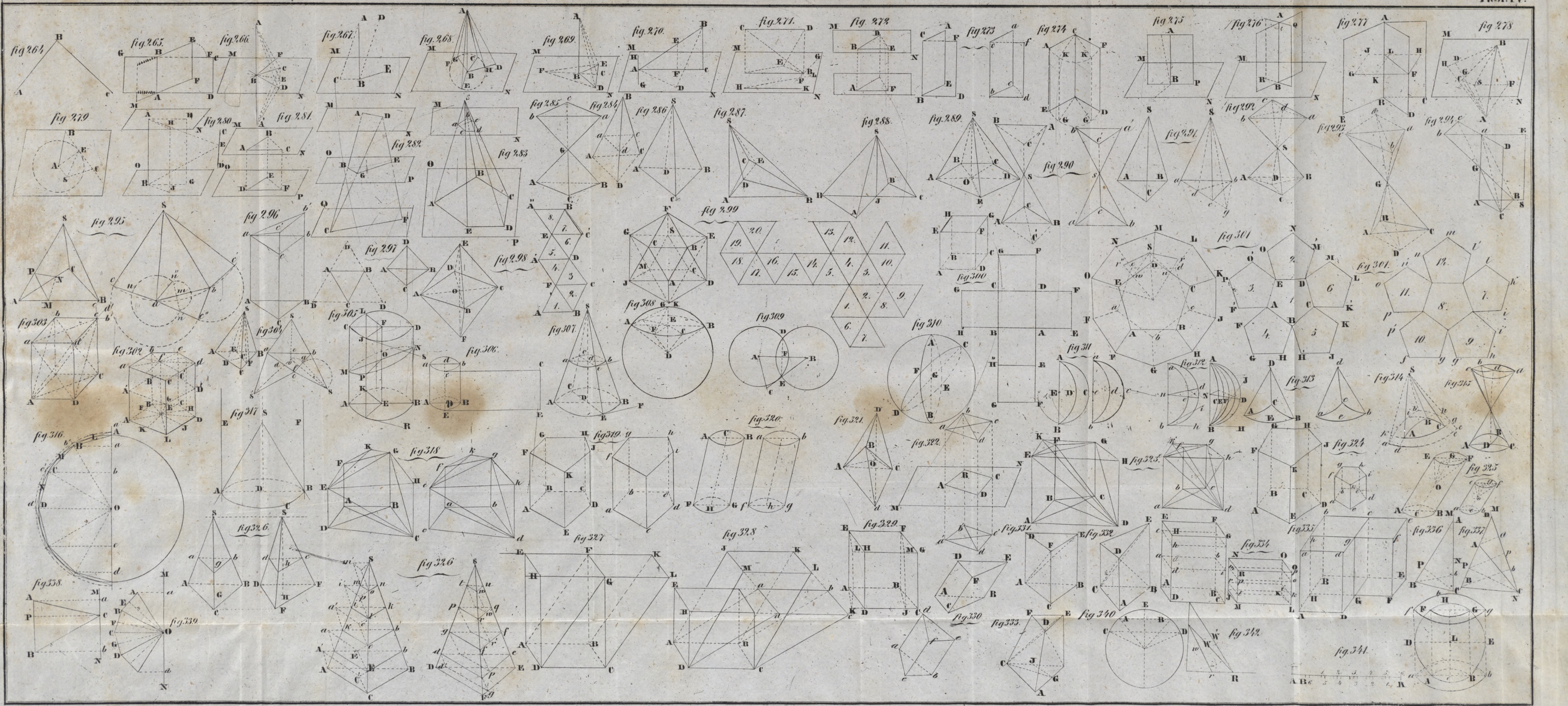
Przy wykładzie można opuścić Nra: 432, 355. Wn. 2 i 3, 361, 363, 365 i 6, 402. Tam gdzie się nie wykłada trygonometrya kulista można opuścić Nra 406 do 407, nadto Rozdział: *o połączeniu powierzchni krzywych z krzywemi.* Zwolennicy staréj metody opuszczają Nra: 425, 6, 7, i 8, i 436 wraz z wnioskami. O podobieństwie trzymający się dawnego systematu wyłożą podług niego, chociaż go nie umieszczam.

SPIS PRZEDMIOTÓW

CZĘŚĆ I. **Linie i powierzchnie uważane w przestrzeni i ich połączenia.**

SOLIDOMETRYI CZĘŚĆ II.

Własności bryły.



w Lit. T. Kosmińskiego