Sur le raisonnement dans les sciences déductives

par

Jean Sleszyński.

Ya-t-il quelque chose de plus remarquable que le rôle de l'intuition dans les recherches mathématiques? Non seulement les vérités, mais leurs démonstrations aussi sont très souvent découvertes par l'intuition. L'existence de lacunes dans les raisonnements mathématiques est dès lors tout à fait compréhensible. Dans sa production créatrice le mathématicien avance comme un somnambule!

C'est à M. Peano et à son école, que nous devons principalement l'explication de la partie inconsciente dans les raisonnements mathématiques.

Les mathématiciens les plus éminents de tous les temps se sont toujours efforcés de saisir les traits généraux du raisonnement. Mais Descartes, par exemple, trouvait que quoique la logique „contienne... beaucoup de préceptes très vrais et très bons, il y en a toutefois tant d'autres mêlés parmi qui sont ou nuisibles ou superflus, qu'il est presque aussi malaisé de les en séparer que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché". [1])

La logique nouvelle, après les recherches de M. Frege nous mit en état de présenter des démonstrations complètes. [2]) Mais comme

[1]) Oeuvres choisies (Garnier) p. 13.

[2]) V. Zaremba: Essai sur la théorie de la démonstration dans les sciences mathématiques. L'enseignement mathématique. Nr. 1. 1916.

e font craindre les remarquables „Principia mathematica“ de M. M. Whitehead et Russell, cette logique semble devoir nous obliger à rendre nos raisonnements longs et subtils à un degré inquiétant. Il est absolument certain que dans les recherches sur les fondements des mathématiques, il est impossible de se passer de démonstrations complètes, mais d'autre part il semble que ces recherches sont plutôt d'ordre philosophique que d'ordre mathématique et que les résultats de ces recherches ont seuls une valeur essentielle pour les sciences mathématiques. En effet, le sens concret et clair des vérités mathématiques est évidemment en désaccord avec des choses aussi subtiles, abstraites et obscures que, par exemple, „the hierarchy of types“. Il faut avouer que si nous nous éloignons de l'intuition spaciale (ou du moins de l'intuition schématique) le raisonnement tend à devenir impossible.

Malgré les efforts considérables des savants comme, par exemple, Abel, pour simplifier et élucider les théories mathématiques, la complication des idées et des méthodes, loin de décroître, croît au contraire sans cesse. Pour reconnaître qu'il en est bien ainsi, il suffit de rappeler qu'il y a des mathématiciens très distingués, qui nient le principe du milieu exclu et croient constater des contradictions inextricables dans l'analyse mathématique. En résumé nous sommes en danger de nous enfoncer de plus en plus dans les ténèbres de la scolastique.

Un des moyens les plus efficaces pour prévenir cette catastrophe est le principe „pauca sed matura“. Il consisterait donc à s'abstenir de publier des choses qui n'ont pas été travaillées jusqu'à les rendre claires et faciles. Malheureusement les oeuvres des mathématiciens les plus distingués prouvent que souvent leurs auteurs ne voient pas les liens logiques très compliqués dont ils se sont servis intuitivement.

Les anteurs des „Principia mathematica“ disent qu'en Mathématique la clarté ne peut pas apparaître dès le début, mais seulement dans les chapitres ultérieurs de cette science. La notion de clarté et de simplicité est indubitablement très relative, il est néanmoins certain que l'on doit s'efforcer de rendre les théories scientifiques aussi claires et simples que possible. Il me semble cependant que l'attention des savants est très rarement dirigée de ce côté. Voici avec quelle sévérité s'exprime Galois à ce sujet: „Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention“ [1]).

Il ne faudrait pas croire qu'il s'agisse de simples défauts de forme de l'exposition. En fait, de profondes recherches scientifiques seules pourraient dissiper ces obscurités. Il faudrait par exemple élucider les notions fondamentales et générales comme celle de „proposition“ ou „d'implication“.

Le manque de place nous interdit de présenter une critique de ce qui a été fait dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons simplement à présenter quelques réflexions à ce sujet.

Aristote définit la proposition, comme une énonciation (λόγος), qui est vraie ou fausse. Mais cela signifie simplement qu'il adopte la loi du milieu exclu. En réalité nous avons deux valeurs logiques: „le vrai“ et „le faux“ et deux propositions fondamentales: la loi du milieu exclu et la loi de contradiction, qui constituent, prises ensemble, la disjonction fondamentale. La première loi nous apprend que si une proposition n'est pas vraie, elle est fausse et si elle n'est pas fansse, elle est vraie. La seconde loi exprime que si une proposition est vraie, elle n'est pas fausse et que si elle est fausse, elle n'est pas vraie. — Nous sommes tellement accoutumés à ces lois que, par exemple, deux phrases telles que les suivantes: „cette proposition est vraie“ et „cette proposition n'est pas fausse“ nous semblent exprimer la même chose. Nous ne remarquons pas dans ce cas l'intervention de la loi de contradiction.

C'est à M Frege que revient le mérite d'avoir établi la notion de l'implication. Nous disons que p implique q, quand la proposition p est fausse ou la proposition q est vraie. Nous écrivons $p \supset q$. Quand p implique q et q implique p, les propositions p et q sont dites équivalentes. Nous écrivons $p \equiv q$. On sait qne toutes les déductions sont fondées exclusivement sur un seul mode d'inférence: le traditionnel „modus ponens“, c'est à dire: (1) la proposition p étant vraie et (2) ayant „p implique q“, la proposition q est vraie.

Il est facile maintenant de comprendre, pourquoi Aristote et, après lui, Leibniz, ont considéré la loi de la contradiction comme

[1]) Manuscrits, p. 28.

fondamentale pour toute la science: nous verrons dans un instant, que si une seule proposition p était à la fois vraie et fausse, chaque proposition q serait vraie et, par conséquent, les recherches scientifiques seraient complétement inutiles. En effet: puisque la proposition p est fausse, l'implication „p implique q" est vraie par définition; par conséquent, p étant vraie (on n'oubliera pas que, par hypothèse, la proposition p est à la fois vraie et fausse, il en sera de même (par le „modus ponens") de q.

M. Frege a insisté avec raison sur la nécessité de distinguer une proposition p de la proposition q qui en apprécie la valeur logique et par conséquent est l'une des suivantes: „p est vrai" ou „p est faux". La première de ces propositions est exprimée, selon M. Frege, par $\vdash p$. Pour la seconde nous employerons le symbole $\dashv p$.

Introduisons maintenant le symbole $\sim$ de négation pour exprimer qu'une relation affirmée par une proposition n'a pas lieu. Par exemple si la proposition p est $a = b$, $\sim p$ sera $a \neq b$. D'après ce qui précède „$\sim \dashv p$" signifie „p n'est pas faux" et „$\sim \vdash p$" signifie „p n'est pas vrai".

Nous pouvons maintenant exprimer la loi de la contradiction par

$$\vdash p \supset \sim \dashv p, \quad \dashv p \supset \sim \vdash p,$$

et la loi du milieu exclu par

$$\sim \vdash p \supset \dashv p, \quad \sim \dashv p \supset \vdash p.$$

Il importe de faire remarquer, que les propositions $\vdash \sim p$ et $\dashv \sim p$ sont respectivement équivalentes aux propositions $\sim \vdash p$ et $\sim \dashv p$. (Voir la fin de l'article).

Actuellement nous pouvons compléter ce que nous avons dit au sujet des conséquences de l'hypothèse qu'il existe au moins une proposition p qui est à la fois vraie et fausse. Je dis que dans cette hypothèse toute proposition q est non seulement vraie, comme nous l'avons déjà constaté, mais encore fausse. Pour s'assurer qu'il en est bien ainsi, substituons dans la démonstration de la vérité de q la négation, $\sim q$, de q à la proposition q elle-même; nous trouverons ainsi que $\sim q$ est vrai, autrement dit nous aurons $\vdash \sim q$ et par conséquent, (en vertu de ce que nous avons dit il y a un instant) nous aurons $\sim \vdash q$, donc (par la loi du milieu exclu) nous aurons aussi $\dashv q$ ou bien q est faux.

Il est difficile de trouver un exemple plus propre à faire apprécier la différence entre p et $\vdash p$ ou $\dashv p$, que l'aporie connue „le menteur“. Désignons par p une proposition quelconque et par q la proposition suivante: „p est faux“. Alors si p est vrai, q sera faux et si p est faux, q sera vrai. S'il était permis d'identifier q avec p, nous trouverions que si p est vrai, p est faux et si p est faux, p est vrai. C'est précisément le cas du „menteur“, où p désigne la proposition: „ce que je dis maintenant est faux“. Dans cette phrase nous identifions l'appréciation logique d'une proposition avec cette proposition elle-même; en d'autres termes nous identifions p avec $\dashv p$. Or cette identification est inadmissible, comme le serait celle de p et $\vdash p$, bien que ces deux propositions-là soient équivalentes entre elles et bien que la phrase „ce que je dis maintenant est vrai“ ne conduise pas à une contradiction.

Nous avons ainsi l'explication d'une contradiction qu'on envisage souvent au même point de vue que l'aporie toute différente de M. Russell[1]).

Remarquons encore que, à cause de l'équivalence de p et de $\vdash p$, on ne les distingue ordinairement pas dans le calcul logique. Si nous écrivons p au lieu de $\vdash p$, nous aurons $\sim p$ au lieu de $\dashv p$, car $\sim p$ signifie alors la même chose que $\sim | \; p$.

Les démonstrations complètes des propositions mathématiques ne sont pas possibles sans l'usage de propositions logiques telles que la contraposition, le syllogisme, le polylemme etc. Qnant aux „démonstrations incomplètes“, elles ne sont pas des démonstrations, mais elles en sont seulement des abrégés. J'estime qu'il y a grand

---

[1]) Si a est une classe, nous écrivons, avec M. Peano, $x \varepsilon a$ pour exprimer que x est un élément de a. Supposons que la classe R des classes dont aucune n'est son propre élément, soit une chose déterminée. Voici quelle serait alors la définition de la classe R:

$$K \varepsilon R \supset \sim (K \varepsilon K), \quad \sim (K \varepsilon K) \supset K \varepsilon R.$$

C'est à dire: si une classe quelconque K est un élément de la classe R, alors elle n'est pas son propre élément et, inversement, si une classe quelconque K n'est pas son propre élément, elle est un élément de la classe R. Posons maintenant R au lieu de K. Nous aurons alors

$$R \varepsilon R \supset \sim (R \varepsilon R), \quad \sim (R \varepsilon R) \supset R \varepsilon R.$$

C'est l'aporie remarquable de M. Russell, qui nous montre, il me semble, que notre supposition est (à cause d'intermination de l'univers du discours) fausse.

intérêt à attirer l'attention des logiciens sur le procédé d'abréviation des démonstrations qui consiste à supprimer les chaînons logiques pour passer intuitivement d'un chaînon mathématique au chaînon mathématique suivant. Toutefois les abrégés de démonstrations obtenus par cette voie sont beaucoup trop longs pour l'usage des mathématiciens. Il se pose donc le problème important et difficile à la fois de pousser l'abréviation de la démonstration beaucoup plus loin et pourtant de telle manière, qu'un abrégé de démonstration permette de rétablir la démonstration d'après des règles fixes.

Les chaînons logiques que, selon nous, il y a lieu de supprimer dans les démonstrations mathématiques proprement dites, mais que l'on est obligé de conserver dans les recherches sur les fondements de la Mathématique, reposent sur les prémisses logiques, lesquelles sont fournies par la théorie de la déduction. C'est de cette théorie que, pour terminer, je me propose de dire quelques mots. Elle est extrêmement remarquable en ce que, dans le domaine qui lui est propre, la science dispose de moyens simples et sûrs, permettant de vérifier l'exactitude d'une proposition arbitrairement donnée et permettant, par cela même, aussi de découvrir des propositions nouvelles.

La théorie de la déduction est la théorie des conjonctions „et“ et „ou“. Nous écrivons avec les auteurs de „Principia mathematica: „.“ et „v“ au lieu de „et“ et „ou“. Nous adoptons à titre d'axiomes les propositions que l'on pourra regarder (après les explications que nous donnerons dans un instant) comme rassemblées dans les tableaux suivants:

(1)

	p	$\sim p$	$\vdash p$	$\dashv p$
1	+	−	+	−
2	−	+	−	+

(2)

	p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	−	−	+	−	−
3	−	+	−	+	+	−
4	−	−	−	−	+	+

Les signes „$+$" et „$-$" incrits dans une colonne remplacent respectivement les assertions que la proposition marquée en haut de la colonne est vraie ou fausse; le premier tableau contient des propositions faisant respectivement connaître des conséquences de la vérité et de la fausseté de p. Le second tableau fait connaître des conséquences des diverses combinaisons de la vérité et de la fausseté des propositions p et q. D'après cela par exemple la troisième ligne du tableau (2) exprime les quatre propositions suivantes: 1° lorsque, p étant faux, q est vrai, la proposition $p.q$ est fausse. 2° dans la même hypothèse, la proposition $p \vee q$ est vraie, 3° toujours dans la même hypothèse, la proposition $p \supset q$ est vraie, 4° enfin encore dans la même hypothèse, la proposition $p \equiv q$ est fausse. S'il y a plus de deux propositions on procéde de la même manière.

Voici quelques exemples de l'application des tableaux précédents. Examinons en premier lieu si la proposition

$$p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$$

est vraie. En vertu des tableaux (1) et (2) nous avons le tableau suivant:

p	q	$p \supset q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \supset \sim p$	$p \supset q . \equiv . \sim q \supset \sim p$
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Nous expliquons seulement la formation de la colonne pour $\sim q \supset \sim p$ au moyen des colonnes pour $\sim q$ et pour $\sim p$. Cela se fait d'après la règle renfermée dans le tableau (2), qui exprime que dans la colonne pour l'implication il faut poser le signe „$-$" seulement dans le cas où l'hypothèse de l'implication a le signe „$+$" et la thèse le signe „$-$". Ce tableau nous apprend que la proposition qu'il faudrait examiner est vraie.

Comme second exemple, envisageons la proposition

$$q . \supset . p \supset q .$$

Nous avons

p	q	$p \supset q$	$q . \supset . p \supset q$
+	+	+	+
+	—	—	+
—	+	+	+
—	—	+	+

Donc la proposition est vraie

Comme 3-me exemple cherchons à vérifier l'équivalence des propositions $\sim \vdash p$ et $\vdash \sim p$ et aussi des propositions $\sim \dashv p$ et $\dashv \sim p$. Nous avons:

p	$\sim p$	$\vdash p$	$\dashv p$	$\sim \vdash p$	$\vdash \sim p$	$\sim \dashv p$	$\dashv \sim p$	$\sim \vdash p \equiv \vdash \sim p$	$\sim \dashv p \equiv \dashv \sim p$
+	—	+	—	—	—	+	—	+	+
—	+	—	+	+	+	—	+	+	+

Donc les propositions examinées sont vraies.

Dans les exemples précédents nous avons examiné des propositions qui se sont trouvées être vraies. Assurons-nous maintenant que la propositîon

$$p . \supset . p \supset q$$

est fausse. Nous avons le tableau suivant:

p	q	$p \supset q$	$p . \supset . p \supset q$
+	+	+	+
+	—	—	—
—	+	+	+
—	—	+	+

Tous les signes de la dernière colonne n'étant pas „+", la proposition examinée est bien fausse.

Il me semble intéressant du faire remarquer que la machine logique de Jevons à quatre termes permet (comme je l'explique dans un article devant paraître prochainement en langue polonaise) d'effectuer, sans aucun raisonnement, la vérification de toute proposition d'une théorie de la déduction qui (comme celle de „Principia mathematica") ne renferme pas plus de quatre termes.