O wartościach charakterystycznych równań całkowych potencjału logarytmicznego.

Napisał

Włodzimierz Stożek.

Zagadnienia teorji potencjału.

Niech będzie dana krzywa nieprzecinająca się, zamknięta (C), położona w skończoności. Zakładamy, że równania tej krzywej dadzą się przedstawić w formie:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

przyczem parametr s oznacza długość łuku krzywej (C), liczoną w kierunku dodatnim. [1]) Nadto przypuszczamy, że funkcje $x(s)$ i $y(s)$ posiadają pierwsze pochodne ciągłe i że krzywizna uważana jako funkcja łuku, jest funkcją ograniczoną.

Będziemy oznaczać dla krótkości dowolny punkt płaszczyzny przez p, a ogólnie przez $f(p)$ funkcję spółrzędnych (x, y) tego pnnktu. Jeżeli punkt p znajduje się na krzywej (C), to jego położenie jest w zupełności określone przez wartość parametru s, którą w razie potrzeby także literą t lub u oznaczać będziemy.

Oznaczmy w dalszym ciągu przez (D) obszar otwarty, wewnętrzny, ograniczony krzywą (C), przez (D') obszar otwarty zewnętrzny, a przez $F(p)$ jakąkolwiek funkcję zmiennych x i y, która

[1]) Parametr s w przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, oznacza ekscentryczną anomalję.

posiada określone pochodne rzędu pierwszego: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Uważajmy normalną w dowolnym punkcie krzywej (C), jako oś skierowaną do wnętrza. Niech α i β będą dostawy kierunkowe tej normalnej. Jeżeli wyrażenie $\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y}$ zmierza do oznaczonej granicy wówczas, gdy puukt p zmierza wzdłuż normalnej do punktu ograniczenia (C), nie opuszczając jednak obszaru (D), względnie obszaru (D'), to mówimy, że istnieje pochodna normalna wewnętrzna, albo też pochodna normalna zewnętrzna funkcji $F(p)$. Pochodną normalną wewnętrzną oznaczamy przez $\frac{dF}{dn_+}$, zewnętrzną zaś przez $\frac{dF}{dn_-}$. Jeżeli dana jest znów funkcja $f(p)$, określona w zupełności w płaszczyźnie x, y, to oznaczamy analogicznie przez $f_+(s)$, względnie $f_-(s)$ granicę, do której zmierza $f(p)$, gdy punkt p zmierza do punktu ograniczenia (C), nie opuszczając jednak obszaru (D), względnie obszaru (D').

Oznaczmy przez $r_{ps} = r_{sp}$ odległość punktu p od punktu s, położonego na krzywej (C), a przez $\mu(s)$ i $\nu(s)$ dwie ciągłe funkcje parametru s, które zwą się odpowiednio gęstościami warstwy pojedynczej lub podwójnej. Przy tych oznaczeniach:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}} \mu(t)\, dt$$ [1])

przedstawia potencjał warstwy pojedynczej, przyczem funkcja r_{pt} pod znakiem całki jest uważana za funkcję zmiennej t; gdy punkt p znajduje się na krzywej (C) i odpowiada wartości parametru $s = s_0$, to dla $t = s_0$ otrzymujemy pod znakiem całki nieciągłość logarytmiczną, przy której całka zachowuje sens.

Podobnie:

$$w(p) = \int \nu(t) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y(t)}{x - x(t)}\, dt$$ [2])

przedstawia potencjał warstwy podwójnej.

Funkcje $v(p)$ i $w(p)$ uważane jako funkcje zmiennych x

---

[1]) Wszędzie, gdzie nie ma podanych granic całkowania, należy przyjąć przedział od 0 do l, przyczem l oznacza długość krzywej (C).

[2]) Omówienie kwestji wielowartościowości funkcji arc tg. znajduje się w rozdziale 3.

i y, to jest spółrzędnych punktu p posiadają następujące własności:

1°) W każdym punkcie obszaru (D) lub obszaru (D') czynią zadość równaniu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2°) Funkcja $v(p)$ jest ciągła w każdym punkcie p płaszczyzny $x\,y$, pochodne zaś $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ są ciągłe w każdym punkcie obszaru (D), jak też obszaru (D'). Zachowanie się tych pochodnych w punktach ograniczenia (C), jak też w wypadku, gdy punkt p zmierza nie opuszczając obszaru (D), względnie obszaru (D') do punktu ograniczenia (C), charakteryzują następujące związki:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dn_-} - \dfrac{dv}{dn_+} = 2\pi\,\mu(s)\ ^{1)} \\[2ex] \dfrac{dv}{dn_+} + \dfrac{dv}{dn_-} = 2 \displaystyle\int \mu(t) \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)}\, dt \end{cases}$$

skąd wynika, że funkcje $\frac{dv}{dn_+}$ i $\frac{dv}{dn_-}$ są funkcjami ciągłemi parametru s, bo funkcja mnożąca $\mu(t)$ pod znakiem całki jest ciągła, gdy $s \neq t$ i wszędzie ograniczona. [2])

3°) Funkcja $w(p)$ jest ciągła w każdym punkcie obszaru (D) i w każdym punkcie obszaru (D'), funkcje zaś $w_+(s)$ i $w_-(s)$ są funkcjami ciągłemi parametru s, ponieważ zachodzą związki:

$$(2) \qquad \begin{cases} w_+(s) - w_-(s) = 2\pi\,v(s)\ ^{3)} \\[1ex] w_+(s) + w_-(s) = 2 \displaystyle\int v(t) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}\, dt \end{cases}$$

4°) W każdym punkcie obszaru (D) i obszaru (D') istnieją pochodne cząstkowe dowolnego rzędu tak funkcji $v(p)$, jak też funkcji $w(p)$ i pochodne te są ciągłe, a nadto obie te funkcje są regularnie analityczne w otoczeniu każdego punktu, należącego do obszaru (D) lub do obszaru (D'). Funkcją potencjalną, albo krótko

---

[1]) Dr J. Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen. Teubner in Leipzig 1911 str. 25 wzór 17a. W dalszym ciągu pracę tę oznaczamy literą P.

[2]) Wynika to z założeń o krzywej (C) i wzorów (36), (55).

[3]) P. str. 22 wzór A_2.

potencjałem, określonym w pewnym danym obszarze (otwartym lub zamkniętym) nazywamy taką funkcję $f(p)$, która posiada pierwsze pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ i drugie pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ określone jednoznacznie w każdym punkcie danego obszaru i która nadto w każdym punkcie tego obszaru czyni zadość równaniu $\Delta f = 0$.

W przypadku, gdy dany obszar jest położony w skończoności, funkcja potencjalna nazywa się regularna i obszar, w którym a funkcja jest zdefiniowana, nazywa się regularny, jeśli pochodne pierwszego rzędu są ciągłe jednostajnie w tym obszarze i jeśli istnieją pochodne rzędu drugiego $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ całkowalne.

Przypuśćmy, że dany obszar rozciąga się nieograniczenie i że nadto obszar, który rozciąga się do koła o promieniu dowolnie dużym, jest regularny, to obszar ten jest regularny w nieskończoności (i wogóle regularny), a funkcja $f(p)$ jest funkcją potencjalną regularną w nieskończoności (i wogóle regularną w danym obszarze), jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\lim_{R=\infty} f(p) = c$$ [1]

$$\lim_{R=\infty} R . \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \lim_{R=\infty} R \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

przyczem c oznacza stałą w zupełności określoną, a R jest to odległość początku spółrzędnych od punktu p.

Jeżeli dla dostatecznie dużych R funkcja $f(p)$ da się przedstawić w formie:

$$f(p) = m \log \frac{1}{R} + \varphi(p)$$

gdzie m jest stałą, a $\varphi(p)$ jest funkcją potencjalną, regularną w nieskończoności, to m nazywa się masą, od której potencjał $f(p)$ pochodzi.

Stosując powyższą definicję do potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej, dochodzimy do wniosku:

5°) Potencjał warstwy pojedynczej i podwójnej jest funkcją potencjalną, regularną w obszarze (D). Potencjał warstwy pojedynczej jest funkcją potencjalną, regularną w obszarze (D'), jeśli:

---

[1]) P. str. 3 § 2.

$$m = \int \mu(t)\, dt = 0$$

Potencjał warstwy podwójnej jest funkcją potencjalną regularną w obszarze (D').

W teorji potencjału ważne zastosowanie ma:

I. Twierdzenie Greena.[1])

Oznaczmy przez $U(p)$ i $W(p)$ funkcje, posiadające pierwsze pochodne ciągłe jednostajnie w obszarze (D), a drugie pochodne $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ w zupełności określone i całkowalne w tym obszarze. Uważajmy nadto normalną w dowolnie obranym punkcie krzywej (C) jako oś, skierowaną do wnętrza.

W takim razie:

$$\iint\limits_{(D)} \left\{\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial W}{\partial y}\right\} dxdy + \iint\limits_{(D)} \left\{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right\} dx\, dy =$$

$$= - \int\limits_{(C)} U \frac{dW}{dn_+} ds$$

przyczem całka krzywolinjowa wzdłuż krzywej (C) jest wzięta w kierunku dodatnim, to jest takim, że styczna po obrocie o $\frac{\pi}{2}$ ma kierunek zgodny z kierunkiem normalnej. Przy pomocy wzoru Greena można udowodnić następujące twierdzenia:

II. Twierdzenie. Jeżeli funkcje $U(p)$ i $W(p)$ są funkcjami potencjalnemi, regularnemi w obszarze (D), to wówczas:

$$\int\limits_{(C)} \left(W \frac{dU}{dn_+} - U \frac{dW}{dn_+}\right) ds = o$$

III. Twierdzenie. Każda funkcja ciągła $\mu(s)$, która czyni zadość warunkom:

(3) $$\int_0^l \int_0^l \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt = 0$$

---

[1]) P. str. 5 § 3.

$$\int_{0}^{l} \mu(t)\, dt = 0$$

równa się identycznie zeru.

Aby to wykazać, zwróćmy uwagę, że $v(p) = -\int\limits_{(C)} \log r_{sp} \mu(s) ds$ jest potencjałem warstwy pojedynczej, a zatem na podstawie pierwszego ze wzorów (1) można całkę (3) przedstawić w formie:

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(C)} v(t) \left\{ \frac{dv}{dn_+} - \frac{dv}{dn_-} \right\} dt = \int_{0}^{l} \int_{0}^{l} \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt.$$

Zastosujmy teraz wzór Greena do obszaru (D), przyjmując $U(p) = W(p) = v(p)$, a następnie do obszaru, zawartego między krzywą (C), a kołem o promieniu R, dostatecznie dużym.

Jeżeli przyjmiemy w obu wypadkach normalną jako oś, skierowaną do wnętrza obszaru (D), to uwzględniając wzór Greena i własność 1⁰) potencjału warstwy pojedynczej, znajdziemy w granicy, gdy promień R rośnie nieograniczenie:

$$\int\int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = \int\limits_{(C)} v(t) \left\{ \frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} \right\} dt$$

przyczem całka, znajdująca się po lewej stronie, jest rozciągnięta na całą płaszczyznę xy.

Z ostatniego związku na podstawie (4) wynika, że:

$$(5) \qquad \int\int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = -2\pi \int_{0}^{l} \int_{0}^{l} \log r_{st}\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt.$$

Aby zatem warunek (3) był spełniony, musi zachodzić identyczność: $\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. Stąd wnosimy, że potencjał $v(p)$ jest stały wewnątrz krzywej (C) i na zewnątrz krzywej (C), a ponieważ znika w nieskończoności i jest ciągły w całej płaszczyźnie xy, więc znika identycznie, co jest tylko wówczas możliwe na podstawie pierwszego wzoru (1), jeśli $\mu(s)$ równa się identycznie zeru.

IV. Twierdzenie. Każda funkcja $\mu(s)$ ciągła i czyniąca **zadość warunkom:**

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\int \mu(t)\, dt = 0 \\ &\int\limits_{(C)} \log r_{st}\, \mu(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

równa się identycznie zeru.

Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że z identyczności (6) wynika natychmiast związek (3), a stąd na podstawie twierdzenia poprzedzającego: $\mu(s) \equiv 0$.

V. Twierdzenia Plemelja.[1]) Funkcja:

$$\int\limits_{(C)} \log r_{su} \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(u) - y(t)}{x(u) - x(t)}\, du$$

jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Ze względu na ważne zastosowanie tego twierdzenia, podajemy jego dowód.

W tym celu kładziemy we formule:

$$\int\limits_{(C)} \left\{ U \frac{dW}{dn_+} - W \frac{dU}{dn_-} \right\} ds = 0$$

w miejsce funkcji U i W:

$$U(p) = \log r_{pq_1} \qquad W(p) = \log r_{pq_2}$$

Jako obszar wewnętrzny przyjmujemy obszar (D), albo obszar ograniczony krzywą (C) i kołem o promieniu R, dostatecznie dużym. W obu wypadkach punkty q_1 i q_2 są zewnętrzne. Całka krzywolinjowa, wzięta wzdłuż obwodu koła zmierza do zera, gdy promień R rośnie nieograniczenie. Uwzględniając tę okoliczność i wzór następujący:

$$\frac{d}{dn} \log r_{sq} = - \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(q)}{x(s) - x(q)}$$

oraz wprowadzając oznaczenie:

$$g(q_1 q_2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(C)} \log r_{q_1 t} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(t) - y(q_1)}{x(t) - x(q_2)}\, dt$$

znajdujemy:

$$g(q_1 q_2) = g(q_2 q_1)$$

[1]) P. str. 27 § 13.

Jeżeli przyjmiemy, że punkt q_2 jest stały, to funkcja $g(q_1 q_2)$ przedstawia potencjał warstwy pojedynczej, jeżeli zaś punkt q_1 jest stały, to $g(q_1 q_2)$ przedstawia potencjał warstwy podwójnej. Ponieważ potencjał warstwy pojedynczej jest ciągły w całej płaszczyźnie a potencjał warstwy podwójnej czyni zadość związkom (2), więc mamy:

$$g(ts_+) = g(st_+)$$
$$g(ts_-) = g(st_-)$$

Dodając te dwie równości i dzieląc przez dwa, znajdziemy ostatecznie:

$$g(st) = g(ts).$$

skąd wynika natychmiast słuszność twierdzenia Plemelja. Główne zagadnienia teorji potencjału są następujące:

I. Problemat Robina-Poincarego.

Dana jest ciągła funnkcja $f(s)$, zależna od parametru s t. j. długości łuku krzywej (C). Udowodnić istnienie potencjału warstwy pojedynczej $v(p)$, który w każdym punkcie ograniczenia (C) czyni zadość równaniu:

(7) $$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_-} - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\frac{dv}{dn_+} = f(s)$$

przyczem λ oznacza dowolny parametr. Nadto zbadać własności funkcji $v(p)$, uważanej jako funkcja zmiennej zespolonej λ.

II. Problemat Neumana-Poincarego.

Udowodnić istnienie potencjału warstwy podwójnej $w(p)$, który w każdym punkcie ograniczenia (C) czyni zadość równaniu:

(8) $$\frac{1+\lambda}{2\lambda} w_+(s) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} w_-(s) = f(s)$$

i zbadać własności funkcji $w(p)$, uważanej jako funkcja zmiennej zespolonej λ.

Równania całkowe.

A. Jądra ogólne.

Oznaczmy przez $K(st)$ funkcję zmiennych s i t, kwadratowo całkowalną i ciągłą z wyjątkiem ewentualnie odcinka $s = t$, a określoną w obszarze ($a \leqq {s \atop t} \leqq b$). Funkcję tę w dalszym ciągu będziemy nazywali „jądrem". Niech $f(s)$ oznacza funkcję ciągłą zmiennej s, określoną w przedziale ($a \leqq s \leqq b$).

Równania:

$$
(9) \qquad \begin{cases} f(s) = \varphi(s) + \lambda \int\limits_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt \\ f(s) = \psi(s) + \lambda \int\limits_a^b K(ts)\, \psi(t)\, dt \end{cases}
$$

nazywają się równaniami całkowemi, ze sobą sprzężonemi Funkcje $f(s)$ i $K(st)$ są dane funkcje zaś $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ są funkcjami szukanemi; λ oznacza dowolny parametr. Istnieje pewna funkcja $K(\lambda; st)$, zależna od parametru λ i zmiennych s i t, która nazywa się „funkcją rozwiązującą" a którą wyznacza w zupełności jądro $K(st)$, jak to zobaczymy niżej. Zapomocą funkcji rozwiązującej można rozwiązać równania (9) przy dowolnie zadanej funkcji $f(s)$. Funkcja rozwiązująca jest funkcją ciągłą zmiennych s i t w każdym punkcie, w którym jądro $K(st)$ jest ciągłe, ze względu zaś na parametr λ jest funkcją meromorficzną w całej zespolonej płaszczyźnie λ. Funkcja $K(\lambda; st)$ da się przedstawić w formie:

$$
K(\lambda; st) = \frac{D(\lambda; st)}{D(\lambda)} \text{ [1]}
$$

przyczem $D(\lambda; st)$ i $D(\lambda)$ są to całkowite funkcje parametru λ. Można zatem położyć: [2]

$$
D(\lambda; st) = a_0(st) + \frac{\lambda}{1} a_1(st) + \dots \frac{\lambda^n}{n!} a_n(st) + \dots
$$

$$
(10) \qquad D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1} a_1 + \dots \frac{\lambda^n}{n!} a^n + \dots
$$

gdzie:

$$
a_0(st) = K(st)
$$

[1]) Tr. Lalesco. Introduction a la Théorie des Equations Intégrales. Paris 1912. str. 27 wzór ostatni. W dalszym ciągu książkę tę oznaczamy literą L.

[2]) L. str 28 wzór 17.

$$a_n(st) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(st) & K(t_1 t) \dots & K(t_n t) \\ K(st_1) & K(t_1 t_1) \dots & K(t_n t_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(st_n) & K(t_1 t_n) \dots & K(t_n t_n) \end{vmatrix} dt_1 \, dt_2 \dots dt_n$$

$$(11) \quad \left| \begin{aligned} a_1 &= \int_a^b K(tt)\, td \\ a_n &= \underbrace{\int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1 t_1) & K(t_2 t_1) \dots & K(t_n t_1) \\ K(t_1 t_2) & K(t_2 t_2) \dots & K(t_n t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K(t_1 t_n) & K(t_2 t_n) \dots & K(t_n t_n) \end{vmatrix} dt_1 \, dt_2 \dots dt_n \end{aligned} \right.$$

Ponieważ funkcja rozwiązująca jest ilorazem dwu funkcji całkowitych, zależnych od parametru λ, więc oczywiście funkcja ta posiada jako punkty osobliwe te wartości na parametr λ, które $D(\lambda)$ obracają w zero. Wartości te będziemy nazywali „wartościami charakterystycznemi“, a wiadomem jest o tych wartościach że tworzą one mnogość przeliczalną z jedynem punktem skupienia w nieskończoności, jak to wynika z teorji funkcji analitycznych. O ile na λ nie przyjmujemy wartości charakterystycznych, to funkcja rozwiązująca czyni zadość następującym związkom:

$$K(\lambda; st) + \lambda \int_a^b K(su)\, K(\lambda; ut)\, du = K(st)$$

$$K(\lambda; st) + \lambda \int_a^b K(\lambda; su)\, K(ut)\, du = K(st)$$

skąd wynika także, że rozwiązanie powyższych równań zapomocą funkcji zależnej od dowolnego parametru λ i zmiennych s i t jest jednoznacznie określone.

VI. Twierdzenie Fredholma.[1]) Równania (9) posiadają odpowiednio następujące rozwiązanie:

$$\varphi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(\lambda; st) f(t)\, dt$$

[1]) L. str. 27 § 8

$$\psi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b f(t)\, K(\lambda; ts)\, dt\,.$$

dla każdej wartości na parametr λ, różnej od którejkolwiek z wartości charakterystycznych i dla każdej ciągłej funkcji $f(s)$. Z wartościami charakterystycznemi łączą się ściśle równania całkowe tak zwane „jednorodne“ kształtu:

$$\varphi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \varphi_0(t)\, dt = 0$$

$$\psi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(ts)\, \psi_0(t)\, dt = 0$$

przyczem przez λ_0 oznaczyliśmy jedną z wartości charakterystycznych, a przez $\varphi_0(s)$ i $\psi_0(s)$ szukane funkcje. W odróżnieniu od tych równań, równania (9) zwą się równaniami całkowemi niejednorodnemi.[1])

Oznaczmy:[2])

$$f\begin{pmatrix} s_1\, s_2 \ldots s_n \\ t_1\, t_2 \ldots t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1 t_1) & K(s_2 t_1) & \ldots & K(s_n t_1) \\ K(s_1 t_2) & K(s_1 t_2) & \ldots & K(s_n t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(s_1 t_n) & K(s_2 t_n) & \ldots & K(s_n t_n) \end{vmatrix}.$$

$$D\left(\lambda; \begin{matrix} s_1\, s_2 \ldots s_n \\ t_1\, t_2 \ldots t_n \end{matrix}\right) = f\begin{pmatrix} s_1\, s_2 \ldots s_n \\ t_1\, t_2 \ldots t_n \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{1} \int_a^b f\begin{pmatrix} s_1\, s_2 \ldots s_n\, u \\ t_1\, t_2 \ldots t_n\, u \end{pmatrix} du +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b f\begin{pmatrix} s_1\, s_2 \ldots s_n\, u_1\, u_2 \\ t_1\, t_2 \ldots t_n\, u_1\, u_2 \end{pmatrix} du_1\, du_2 + \ldots$$

Przypuśćmy, że λ_0 jest pierwiastkiem równania $D(\lambda) = 0$ wielokrotności n; w takim razie λ_0 musi być biegunem funkcji rozwiązującej, gdyż zachodzi związek:[3])

---

[1]) Przypuszczamy zawsze, że $f(s)$ nie znika identycznie, gdyż, jeśli $f(s) = 0$, a λ nie jest wartością charakterystyczną, to $\varphi(s) = \psi(s) = 0$.

[2]) P. str. 32 wzór (η) i (ϑ).

[3]) P. str. 33 wzór (c).

$$\frac{d^n D(\lambda)}{d\lambda^n} = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n} D\begin{pmatrix}\lambda; & u_1 \dots u_n \\ & u_1 \dots u_n\end{pmatrix} du_1\, du_2 \dots du_n$$

Niech rząd tego bieguna będzie m. W otoczeniu bieguna λ_0, funkcja rozwiązująca da się zatem przedstawić w kształcie: [1])

$$K(\lambda; st) = \frac{h_m(st)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{h_{m-1}(st)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \dots \frac{h_1(st)}{\lambda - \lambda_0} + P(\lambda; st)$$

przyczem funkcja $h_m(st)$ na pewne nie znika identycznie, a funkcja $P(\lambda; st)$ ze względu na parametr λ jest szeregiem potęgowym, zbieżnym w kole, którego środek leży w λ_0 i którego promień równa się odległości bieguna λ_0 od najbliższego bieguna funkcji rozwiązującej.

Wprowadźmy następujące określenia: [2])

1⁰) Dwa jądra $K_1(st)$ i $K_2(st)$ kwadratowo całkowalne i ciągłe w każdym punkcie obszaru $(a \leqq {s \atop t} \leqq b)$ — z wyjątkiem ewentualnie odcinka $s = t$ — są „ortogonalne“ albo „nawpółortogonalne“ zależnie od tego, czy zachodzą obie, czy tylko jedna z nastąpujących tożsamości:

$$\int_a^b K_1(su)\, K_2(ut)\, du \equiv 0$$

$$\int_a^b K_2(su)\, K_1(ut)\, du \equiv 0$$

2⁰) Zbiór funkcji ciągłych w przedziale (a, b):

$$\Phi_1(s)\, \Phi_2(s) \dots \quad \Phi_n(s) \dots$$
$$\Psi_1(s)\, \Psi_2(s) \dots \quad \Psi_n(s) \dots$$

tworzy tak zwany system biortogonalny, jeśli czyni zadość następującym warunkom:

$$\int_a^b \Phi_p(s)\, \Psi_q(s)\, ds = \delta_{pq}$$

[1]) L. str. 44. wzór 15.
[2]) L. str. 40 § 4.

przyczem $\delta_{pq} = 0$, jeśli $p \neq q$, albo też równa się $+1$, jeśli $p = q$.

3°) Wyrażenie:

$$H(0; st) = \frac{h_m(st)}{(-\lambda_0)^m} + \ldots + \frac{h_1(st)}{-\lambda_0}$$

nazywa się częścią jądra $K(st)$, odnoszącą się do bieguna λ_0, a:

$$H(\lambda; st) = \frac{h_m(st)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \ldots + \frac{h_1(st)}{\lambda - \lambda_0} \tag{12}$$

jest funkcją rozwiązującą jądra $H(0; st)$.

4°) Jądro (12) nazywa się jądrem kanonicznem[1]) rzędu m, jeśli istnieje $m-1$ stałych $a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}$, różnych od zera i taki układ biortogonalny

$$\Phi_1(s) \ldots \Phi_m(s)$$

$$\Psi_1(s) \ldots \Psi_m(s)$$

iż zachodzą związki:

$$h_1(st) = \sum_{p=1}^{m} \Phi_p(s)\, \Psi_p(t)$$

$$h_2(st) = \sum_{p=1}^{m-1} a_p\, \Phi_p(s)\, \Psi_{p+1}(t)$$

$$h_3(st) = \sum_{p=1}^{m-2} a_p\, a_{p+1}\, \Phi_p(s)\, \Psi_{p+2}(t).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_m(st) = a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}\, \Phi_1(s)\, \Psi_m(t).$$

Przy tych określeniach można wysłowić następujące twierdzenia:

VII. Twierdzenie. Jądro $H(o, st)$ jest ortogonalne do jądra $P(o; st)$, które nie posiada już λ_0 jako wartości charakterystycznej.

VIII. Twierdzenie. W przypadku, gdy jądro $H(o; st)$ jest kanoniczne, mamy:

---

[1]) L. str. 55 § 10.

$$\Phi_1(s) + \lambda_0 \int_a^b H(o; st)\, \Phi_1(t)\, dt = 0$$

$$\Psi_m(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi_m(t)\, H(o; ts)\, dt = 0$$

i równocześnie:

$$\Phi_1(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \Phi_1(t)\, dt = 0$$

$$\Psi_m(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi_m(t)\, K(ts)\, dt = 0.$$

Funkcje $\Phi_1(s)$, $\Psi_m(s)$ nazywają się „funkcjami charakterystycznemi“, należącemi do wartości charakterystycznej λ_0. One stanowią parę rozwiązań równań całkowych jednorodnych, ze sobą sprzężonych.

IX. Twierdzenie. W przypadku ogólnym jądro $H(o; st)$ jest sumą skończonej liczby jąder kanonicznych, między sobą ortogonalnych. Możemy więc położyć:

$$H(o; st) = H^{(1)}(st) + \ldots H^{(r)}(st))$$

przyczem $H^{(p)}(st)$ $(p = 1, 2 \ldots r)$ jest jądrem kanonicznem rzędu m_p. Mamy:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$$

Ponieważ każde z jąder kanonicznych dostarcza jedną parę rozwiązań równań całkowych jednorodnych, ze sobą sprzężonych, a tych jąder jest r, więc istnieje r par rozwiązań. Liczba r nazywa się stopniem wartości charakterystycznej λ_0. Rząd wartości charakterystycznej λ_0 równa się największej z liczb $m_1\, m_2 \ldots m_r$.

Z powyższych twierdzeń wynika:

X. Twierdzenie Fredholma[1]). Jeżeli λ_0 jest wartością charakterystyczną stopnia r, to równania całkowe jednorodne:

$$\Phi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \Phi(t)\, dt = 0$$

[1]) L. str. 59. § 13.

$$\Psi(s) + \lambda_0 \int_a^b \Psi(t)\, K(t\, s)\, dt = 0$$

posiadają dokładnie r par rozwiązań, przyczem r rozwiązań Φ i r rozwiązań Ψ są linjowo od siebie niezależne. Każde inne rozwiązanie tego układu równań wyraża się linjowo zapomocą funkcji Φ, względnie Ψ.

XI. Twierdzenie [1]). Funkcje Φ i Ψ tworzą system biortogonalny wtedy i tylko wtedy, jeśli rząd wartości charkterystycznej równa się jedności.

XII. Twierdzenie Fredholma [2]). Równanie całkowe niejednorodne:

$$\varphi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, jeżeli funkcja $f(s)$ czyni zadość warunkom:

$$\int_a^b f(s)\, \Psi(s)\, ds = 0$$

dla wszystkich Ψ, należacych do λ_0. Podobnie równanie całkowe:

$$\Psi(s) + \lambda_0 \int_a^b K(ts)\, \Psi(t)\, dt = f(s)$$

posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, jeśli:

$$\int_a^b f(s)\, \Phi(s)\, ds = 0,$$

dla wszystkich Φ, nalezących do λ_0.

XIII. Twierdzenie Goursata [3]). Jeżeli jądra $K_1(st)$ i $K_2(st)$ są ortogonalne, albo nawpółortogonalne, to zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K_1(st) + K_2(st)$ jest utworzony ze sumy zbioru wartości charakterystycznych, należących do

---

[1]) L. str. 58 § 11.
[2]) L. str. 61 § 14.
[3]) L. str. 40 § 4.

jądra K_1 i zbioru wartości charakterystycznych, należących do jądra K_2. Nadto funkcja rozwiązująca jądra $K_1(st) + K_2(st)$, równa się sumie funkcji rozwiązujących, należących do jąder $K_1(st)$ i $K_2(st)$, jednak tylko wówczas, gdy jądra są ortogonalne.

XIV. Twierdzenie. Istnieją jądra, które posiadają wartości charakterystyczne i istnieją takie jądra, które ich nie posiadają. Aby to wykazać wystarczy podać przykłady. Otóż jądro $K(st)$, równe stałej (różnej od zera) posiada jedną wartość charakterystyczną, jak to wynika z rozwinięcia (10). Podobnie jądro $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$ posiada wartości charakterystyczne, jak to wykażemy w rozdziale III. Inny przykład mamy, przyjmując:

$$K(st) = u_1(s)\, v_1(t) + u_2(s)\, v_2(t) + \ldots u_n(s)\, v_n(t), \tag{13}$$

gdzie $u_k(s), v_k(t)$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ są funkcjami ciągłemi, określonemi w przedziale (a, b). Jądro (13) może posiadać tylko skończoną ilość wartości charakterystycznych, gdyż wszystkie a_k dla $k > n$ równają się zeru, a zatem rozwinięcie (10) na $D(\lambda)$ redukuje się do wielomianu. Wynika to natychmiast ze wzoru (11), jeżeli zwrócimy uwagę na to, że wyznaczniki pod znakiem całkowym stopnia $k > n$ znikają. Jeżeli więc w tym wypadku przynajmniej jedno a_k $(k = 1, 2 \ldots n)$ jest od zera odmienne, to jądro (13) posiada wartości charakterystyczne, w przeciwnym razie wyrażenie $D(\lambda)$ jest identycznie równe jedności i wtedy jądro (13) nie posiada oczywiście żadnej wartości charakterystycznej. Ten ostatni wypadek zachodzi dla jądra: [1])

$$K(st) = A(s) \,.\, B(t)$$

gdzie funkcje $A(s), B(s)$ są ciągłe w przedziale (a, b) i takie, że

$$\int_a^b A(s) \,.\, B(s)\, ds = 0.$$

B. Jądra symetryczne.

Niech będzie dana funkcja $K(st)$, o której zakładamy:

1°) Funkcja $K(st)$ jest symetryczna względem zmiennych s i t, to znaczy, że $K(st) = K(ts)$.

2° Funkcja $K(st)$ jest ciągła w każdym punkcie obrazu $\left(a \leqq {s \atop t} \leqq b\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$. Jeżeli ta nieciągłość

---

[1]) L. str. 62 § 17.

ma miejsce, to w takim razie $|s-t|^{\alpha} |K(st)|$ jest ograniczone, przyczem liczba α czyni zadość nierówności $o < \alpha < \frac{1}{2}$ i jest niezależna od zmiennych s i t. Jeżeli funkcję $K(st)$ przyjmiemy jako jądro równania całkowego, to w takim razie równania (9) redukują się do jednego równania całkowego:

$$f(s) = \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(st)\, \varphi(t)\, dt. \tag{14}$$

Funkcja rozwiązująca $K(\lambda; st)$, należąca do jądra symetrycznego jest również funkcją symetryczną zmiennych s i t.

XV. Twierdzenie Hilberta[1]. W przypadku jądra symetrycznego istnieć musi przynajmniej jedna wartość charakterystyczna, a nadto wartości charakterystyczne są rzeczywiste i rzędu pierwszego.

Jądro $K(st)$ jest „zamknięte", jeśli nie można wyznaczyć takiej funkcji $g(s)$, różnej od zera, aby spełniona była identyczność:

$$\int_a^b K(st)\, g(t)\, dt = 0, \tag{15}$$

i aby przytem istniała całka $\int_a^b g^2(s)\, ds$ od zera odmienna.

XVI. Twierdzenie Hilberta[2]. Jądro zamknięte musi posiadać nieskończenie wiele wartości charakterystycznych.

Dowód. Gdyby jądro $K(st)$ posiadało skończoną liczbę wartości charakterystycznych, mielibyśmy:

$$K(st) = \frac{\varphi_1(s)\, \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \ldots \frac{\varphi_n(s)\, \varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

gdzie $\lambda_1\, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ są wartości charakterystyczne, a $\varphi_1(s) \ldots \varphi_n(s)$ odpowiadające im funkcje charakterystyczne. Jeżeli do układu funkcji $\varphi_1(s) \ldots \varphi_n(s)$ dołączymy dowolną funkcję $f(s)$, linjowo od nich niezależną i kwadratowo całkowalną i położymy:

$$\varphi_{n+1}(s) = f(s) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s) \cdot \int_a^b f(s)\, \varphi_k(s)\, ds.$$

[1] Dawid Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1904. Heft 1. str 72. Satz 3. W dalszym ciągu pracę tę oznaczamy D. H.

[2] D. H. str. 74 pierwsze zdanie z góry.

to znajdziemy:

$$\varphi_{n+1}(s) \neq 0$$

$$\int_a^b K(st)\, \varphi_{n+1}(s)\, ds \equiv 0$$

wbrew założeniu.

Jądro $K(st)$ nazywa się „co do znaku oznaczone" albo krótko „oznaczone", jeżeli nie istnieje funkcja $g(s)$ kwadratowo całkowalna, od zera odmienna i taka, aby:

$$\int_a^b \int_a^b K(st)\, g(s)\, g(t)\, ds\, dt = 0. \tag{16}$$

XVII. Twierdzenie [1]). Jądro oznaczone jest zamknięte i posiada wartości charakterystyczne tego samego znaku.

C. Jądra, dające się usymetrycznić.

Niech będzie dane jądro $K(st)$, różne od zera, ciągłe w każdym punkcie obszaru $(a \leqq {s \atop t} \leqq b)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$ i nadto ograniczone w tym obszarze. Jądro takie da się usymetrycznić, jeśli istnieje takie oznaczone jądro $N(st)$, że przynajmniej jedna z funkcji:

$$H_1(st) = \int_a^b K(su)\, N(ut)\, du$$

$$H_2(st) = \int_a^b N(su)\, K(ut)\, du$$

jest symetryczna.

Funkcje $H_1(st)$ i $H_2(st)$ nie mogą znikać identycznie, co wynika z tego faktu, że jądro $N(st)$ jest oznaczone.

XVIII. Twierdzenie Marty.[2]) Jądro $K(st)$, dające się usymetrycznić posiada następującą własność:

[1]) L. str. 70 § 8.

[2]) L. str. 78 § 14 i § 15.

Jeżeli λ_0 jest wartością charakterystyczną. a $\varphi_0(s)$ funkcją charakterystyczną równania całkowego:

$$\varphi_0(s) + \lambda_0 \int_a^b K(su)\,\varphi_0(u)\,du = 0 \tag{17}$$

to wówczas:

$$\psi_0(s) = \int_a^b N(s,u)\,\varphi_0(u)\,du \tag{18}$$

jest funkcją charakterystyczną równania całkowego, z niem sprzężonego.

XIX. Twierdzenie (pomocnicze).[1]) Dla dowolnych funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ w przedziale $(0 \leqq s \leqq l)$ i czyniących zadość warunkom:

$$\int \varphi(s)\,ds = \int \psi(s)\,ds = 0 \tag{19}$$

zachodzi nierówność:

$$\left[\int\int \log r_{st}\,\varphi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt\right]^2 \leqq \int\int \log r_{st}\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt\,. \tag{20}$$

$$.\int\int \log r_{st}\,\psi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt$$

Dowód. Dla dowolnego λ i dowolnych funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$, czyniących zadość warunkom (19) ma miejsce na podstawie wzoru (5), jedno z nierówności:

$$\int\int \log r_{st}\,[\varphi(s) + \lambda\,\psi(s)]\,.\,[\varphi(t) + \lambda\,\psi(t)]\,ds\,dt > 0$$

$$\int\int \log r_{st}\,[\varphi(s) + \lambda\,\psi(s)]\,.\,[\varphi(t) + \lambda\,\psi(t)]\,ds\,dt < 0.$$

Stąd:

$$\left[\int\int \log r_{st}\,\varphi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt + \int\int \log r_{st}\,\psi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt\right]^2 \gtrless$$

$$4\int\int \log r_{st}\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt\,.\int\int \log r_{st}\,\psi(s)\,\psi(t)\,ds\,dt.$$

Jeśli uwzględnimy, że:

---

[1]) C. Marty C. R. 150 str. 515, 1910. — (U Marty w miejsce funkcji log r_{st} figuruje jądro oznaczone. Stąd u nas jeszcze dodatkowy warunek (19)).

$$\int\int \log r_{st}\, \varphi(s)\, \psi(t)\, ds\, dt = \int\int \log r_{st}\, \psi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt,$$

znajdziemy nierówność (20). Nierówność ta zachodzi dla wszelkich funkcji ciągłych $\varphi(s)$ i $\psi(s)$, spełniających warunki (19), a nazywać ją będziemy uogólnioną nierównością Schwarza. Niech będzie dana funkcja $A(st)$, ciągła w każdym punkcie obszaru $\left(0 \leqq \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \leqq l\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$, i przytem ograniczona w tym obszarze. Niech nadto funkcja $A(st)$ spełnia warunki:

$$\int A(st)\, ds \equiv 0 \tag{21}$$

$$\int \log r_{su}\, A(ut)\, du = \Phi_1(st) \tag{22}$$

gdzie $\Phi_1(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Przy tych założeniach co do funkcji $A(st)$, można wysłowić następujące twierdzenie:

XX. Twierdzenie.[1]) Jądro $A(st)$ musi posiadać przynajmniej jedną wartość charakterystyczną.

Dowód. Połóżmy:

$$\left.\begin{aligned} & A^{(1)}(st) = A(st) \\ & A^{(p)}(st) = \int A(su)\, A^{(p-1)}(ut)\, du \\ & \Phi_p(st) = \int \log r_{su}\, A^{(p)}(ut)\, du \end{aligned}\right\} (p = 2, 3 \ldots) \tag{23}$$

Funkcje $A^{(p)}(st)$ $(p \geqq 2)$ nazywają się iteracjami rzędu p jądra $A(st)$, są ciągłe i posiadają tę własność, że:

$$A^{(\mu+\nu)}(st) = \int A^{(\mu)}(su)\, A^{(\nu)}(ut)\, du$$

$$\int A^{(p)}(t\, s)\, dt \equiv 0 \quad (p = 1, 2 \ldots) \tag{24}$$

Funkcje $\Phi_p(st)$ są funkcjami ciągłemi i posiadają następujące własności:

---

[1]) M. J. Marty C. R. t. 150 str. 1031 i 1499 przy nieco odmiennych założeniach, niż te, które przyjęliśmy o funkcji $A(st)$.

1) Funkcja $\Phi_p(st)$ są symetryczne względem zmiennych s i t. $\Phi_1(st)$ jest funkcją symetryczną według założenia (związek 22). Przypuśćmy, że $\Phi_p(st)$ jest funkcją symetryczną; udowodnimy, że funkcja $\Phi_{p+1}(st)$ musi być też funkcją symetryczną.

Mamy na podstawie (23):

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p)}(uz)\, A(zt)\, du\, dz.$$

Ponieważ

$$\Phi_p(st) = \int \log r_{su}\, A^{(p)}(uz)\, du = \Phi_p(zs)$$

więc:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{zu}\, A^{(p)}(us)\, A(zt)\, du dz.$$

Ze symetrji $\log r_{zu}$ wynika w dalszym ciągu:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{uz}\, A(zt)\, A^{(p)}(us)\, du\, dz$$

Uwzględniając wreszcie symetryczność funkcji $\Phi_1(ut)$, otrzymujemy:

$$\Phi_{p+1}(st) = \int\int \log r_{tz}\, A(zu)\, A^{(p)}(us)\, du\, dz$$

$$= \int \log r_{tz}\, A^{(p+1)}(z, s)\, ds = \Phi_{p+1}(ts).$$

2) Zachodzi nierówność:

$$[\Phi_{2p}(ss)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss)\, \Phi_{2p-2}(ss)$$

dla każdej wartości na zmienną s, wybranej w przedziale (o, l) i dla każdego wskaźnika $p \geqq 2$.

Aby to udowodnić, uważajmy:

$$\Phi_{2p}(st) = \int\int \log r_{su}\, A^{(p+1)}(uz)\, A^{(p-1)}(zt)\, du\, dz$$

Ponieważ:

$$\Phi_{p+1}(sz) = \Phi_{p+1}(zs)$$

więc:

$$\Phi_{2p}(st) = \int\int \log r_{zu}\, A^{(p+1)}(us)\, A^{(p-1)}(zt)\, du\, dz$$

Uwzględniając wzór (24) i kładąc w uogólnionej nierówności Schwarza:

$$\varphi(u) = A^{(p+1)}(us)$$
$$\psi(z) = A^{(p-1)}(zt)$$

otrzymujemy:

$$[\Phi_{2p}(st)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss) \,.\, \Phi_{2p-2}(tt)$$

a stąd przyjmując $s = t$:

(25) $$[\Phi_{2p}(ss)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(ss)\, \Phi_{2p-2}(ss).$$

3) Istnieje taka wartość $s = s_1$, iż dla wszystkich $p \geqq 2$ $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ jest od zera odmienne.

Wybierzmy na p wskaźnik stały większy lub równy 2. — W takîm razie $\Phi_{2p}(ss)$ jest różne od zera dla każdej wartości s, zawartej w przedziale (o, l), albo też dla pewnego $s = s_0$, $\Phi_{2p}(s_0 s_0)$ obraca się w zero.

Jeśli:

$$\Phi_{2p}(s_0 s_0) = \int\int \log r_{zu}\, A^{(p)}(zs_0)\, A^{(p)}(us_0)\, du\, dz = 0$$

to z uwagi na związek (24) i twierdzenie III, otrzymujemy:

(26) $$A^{(p)}(u s_0) \equiv 0$$

dla wszystkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Ze wzoru:

$$A^{(p+1)}(u s_0) = \int A(ut)\, A^{(p)}(ts_0)\, dt$$

po uwzględnieniu tożsamości (26) wynika:

$$A^{(p+1)}(us_0) \equiv 0.$$

Ponieważ jeden ze wskaźników p i $p+1$ jest parzysty, a więc równy 2μ, zatem:

$$\Phi_{2\mu}(s_0 s_0) = \int\int \log r_{zu}\, A^{(\mu)}(zs_0)\, A^{(\mu)}(us_0)\, du\, dz$$
$$= \int \log r_{s_0 u}\, A^{(2\mu)}(us_0)\, du = 0$$

Powtarzając dla $\Phi_{2\mu}(s_0 s_0) = 0$ to samo rozumowanie, które zastosowaliśmy dla $\Phi_{2p}(s_0 s_0) = 0$ dochodzimy do wniosku:

$$A^{(\mu)}(us_0) \equiv 0.$$

Jeżeli to rozumowanie dostateczną ilość razy powtórzymy, znajdziemy ostatecznie:

$$A(us_0) \equiv 0$$

dla wszelkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Ponieważ $A(us)$ nie równa się identycznie zeru dla wszystkich wartości na u i s w obszarze $(0 \leqq {s \atop u} \leqq l)$, więc istnieje takie $s = s_1$, że $A(us_1)$ nie równa się identycznie zeru dla wszystkich wartości na u, zawartych w przedziale (o, l). Stąd wynika w dalszym ciągu, że $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ jest od zera odmienne dla wszystkich $p \geqq 2$; gdyby bowiem $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ równało się zeru, musiałoby:

$$A(us_1) \equiv 0.$$

Przejdźmy do dowodu twierdzenia XX.

Jeśli jądro $A(st)$ nie posiada wartości charakterystycznych, to funkcja rozwiązująca $K(\lambda; st)$ da się przedstawić w kształcie:

$$K(\lambda; st) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^{(p+1)}(st) \tag{26}$$

przyczem szereg po prawej stronie jest funkcją całkowitą ze względu na parametr λ i jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$.

Ze wzoru (26) i określenia funkcji $\Phi_p(st)$ wynika:

$$\int \log r_{su}\, K(\lambda; ut)\, du = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \cdot \int \log r_{su}\, A^{(p+1)}(ut)\, du$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p\, \Phi_{p+1}(st).$$

Jeżeli zatem przyjmiemy $s = t = s_1$, gdzie s_1 jest wartością wyżej określoną, to szereg:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \, \Phi_{p+1}(s_1 s_1)$$

przedstawia też funkcję całkowitą parametru λ.

Wynika stąd, że szereg:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{2p-1} \, \Phi_{2p}(s_1 s_1)$$

powinien też przedstawiać funkcję całkowitą. Udowodnimy, że tak nie jest. Rzeczywiście na podstawie nierówności (25) dla $s = s_1$, mamy:

$$[\Phi_{2p}(s_1 s_1)]^2 \leqq \Phi_{2p+2}(s_1 s_1) \, . \, \Phi_{2p-2}(s_1 s_1).$$

Stąd, ponieważ $\Phi_{2p}(s_1 s_1)$ odmienne od zera dla $p \geqq 2$:

$$\left| \frac{\Phi_{2p+2}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p}(s_1 s_1)} \right| \geqq \left| \frac{\Phi_{2p}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p-2}(s_1 s_1)} \right| > 0 \; (p \geqq 2),$$

a tem bardziej:

$$\left| \frac{\Phi_{2p+2}(s_1 s_1)}{\Phi_{2p}(s_1 s_1)} \right| \geqq \left| \frac{\Phi_4(s_1 s_1)}{\Phi_2(s_1 s_1)} \right| > 0 \; (p \geqq 2).$$

Z nierówności tej wynika, że szereg $\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{2p-1} \, \Phi_{2p}(s_1 s_1)$ dla dostatecznie dużych λ jest szeregiem rozbieżnym, co nie mogłoby mieć miejsca, gdyby jądro $A(st)$ nie posiadało żadnej wartości charakterystycznej. Jądro $A(st)$ posiada zatem przynajmniej jedną wartość charakterystyczną.

W n i o s e k I. Jądro $A(st)$, które nie posiada żadnej wartości charakterystycznej, musi znikać identycznie.

D. Jądro, które jest pochodną funkcji symetrycznej, perjodycznej.

Niech będzie dana funkcja $K(st)$, posiadająca następujące własności:

1°) $K(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t.

2°) $K(st)$ jest względem s i t funkcją perjodyczną, to jest:

istnieje taka liczba l różna od zera, że dla dowolnych całkowitych k i k' zachodzi identyczność:

$$K(s+kl, t+k'l) \equiv K(st).$$

3°) $K(st)$ posiada ciągłe pochodne pierwszego rzędu: $\dfrac{\partial K(st)}{\partial s}$, $\dfrac{\partial K(st)}{\partial t}$ w każdym punkcie obszaru $\left(o \leqq \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \leqq l\right)$ z wyjątkiem ewentualnie linji $s=t$; nadto pochodne te są ograniczone w całym obszarze.

XXI. Twierdzenie.[1]) Jeżeli równanie całkowe:

$$\varphi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \varphi(t)\, dt = 0 \tag{27}$$

$$\psi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial t} \psi(t)\, dt = 0 \tag{28}$$

posiadają wartości charakterystyczne, to w takim razie te wartości charakterystyczne leżą symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny zespolonej λ.

Dowód. Zcałkujmy równanie (27) od o do s i połóżmy:

$$\chi(s) = \int_o^s \varphi(s)\, ds - \lambda \int K(ot)\, \varphi(t)\, dt, \tag{29}$$

to w takim razie:

$$\chi(s) + \lambda \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0. \tag{30}$$

Połóżmy w ostatniej równości w miejsce $s : s + kl$.

Znajdziemy:

$$\chi(s+kl) + \lambda \int K(s+kl, t) \varphi(t)\, dt = 0,$$

albo na podstawie założenia 2°) o funkcji $K(st)$:

$$\chi(s+kl) + \lambda \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0. \tag{31}$$

---

[1]) To ogólne tw. figuruje u Plemelja tylko w odniesieniu do jądra $\dfrac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y(s)-y(t)}{x(s)-x(t)}$. P. str. 85 § 34. — Wzory (33) i (34) u Plemelja nie figurują.

Ze związków (30) i (31) wynika, że funkcja $\chi(s)$ jest perjodyczna.

Zauważmy na podstawie (29), że $\chi'(s) = \varphi(s)$, to przez całkowanie przez części otrzymamy ze związku (30):

$$\chi(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \chi(t)\, dt = 0$$

Ostatnie równanie uczy, że $-\lambda$ musi być wartością charakterystyczną, jeżeli $+\lambda$, jest wartością charakterystyczną.

Ten sam rezultat można otrzymać jeszcze inną drogą, ale przy mniej ogólnych założeniach co do funkcji $K(st)$. Przyjmijmy mianowicie, że funkcja $K(st)$ spełnia warunki 1^0) i 2^0) a nadto następujący:

3^0) $K(st)$ posiada ciągłe pochodne pierwszego rzędu $\frac{\partial K(st)}{\partial s}$, $\frac{\partial K(st)}{\partial t}$ i drugą pochodną $\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial K(st)}{\partial t}\right]$ ciągłą w każdym punkcie obszaru $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$, z wyjątkiem ewentualnie linji $s = t$; nadto pochodna ta jest ograniczona w danym obszarze.

Uwzględniając tę okoliczność, że $\psi(s)$ jest funkcją perjodyczną, otrzymujemy z (28) przez całkowanie przez części:

$$\psi(s) - \lambda \int K(st)\, \psi'(t)\, dt = 0.$$

Stąd przez wzięcie pochodnej:

$$\psi'(s) - \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \psi'(t)\, dt = 0.$$

Z tego równania otrzymujemy ten sam rezultat, co i z równania (32).

Przyjmując ogólniejsze założenia co do funkcji $K(st)$, można otrzymany rezultat wyrazić w następujących związkach:

Jeżeli:

$$(33) \qquad \begin{cases} \varphi'(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial s} \varphi'(t)\, dt = 0 \\ \psi(s) + \lambda \int \frac{\partial K(st)}{\partial t} \psi(t)\, dt = 0 \end{cases}$$

to:

$$
(34) \qquad \left|\begin{array}{l}
\psi'(s) - \lambda \int \dfrac{\partial K(st)}{\partial s} \psi'(t)\, dt = 0 \\[2ex]
\varphi(s) - \lambda \int \dfrac{\partial K(st)}{\partial t} \varphi(t)\, dt = 0
\end{array}\right.
$$

skąd wynika, że przez kwadratury i branie pochodnych znajdujemy funkcje charakterystyczne dla wartości charakterystycznych $-\lambda$, o ile są znane funkcje charakterystyczne dla wartości charakterystycznych $+\lambda$ i naodwrót.

Zagadnienia Neumanna i Robina.

Równania (7) i (8) prowadzą na podstawie związków (1) i (2) do następujących równań całkowych ze sobą sprzężonych:

$$
(35) \qquad \left|\begin{array}{l}
\mu(s) + \lambda \int K(st)\, \mu(t)\, dt = f(s) \\[2ex]
\nu(s) + \lambda \int \nu(t)\, K(t\,s)\, dt = f(s)
\end{array}\right.
$$

przyczem:

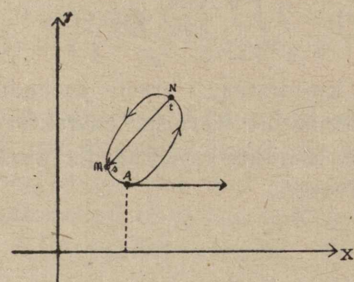
$$
(36) \qquad K(st) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}
$$

a nadto spełniony jest warunek:

$$
(37) \qquad \int K(s\,t)\, dt = 1.
$$

Równania (35) są zupełnie równoważne z równaniami (7 i 8). Każde bowiem rozwiązanie równań (35) określa takie gęstości $\mu(s)$ i $\nu(s)$ warstwy pojedynczej lub podwójnej, iż potencjał od nich pochodzący czyni zadość równaniom (7 i 8). Naodwrót każde rozwiązanie równań (7 i 8) zapomocą potencjału warstwy pojedynczej względnie podwójnej określa takie gęstości $\mu(s)$ i $\nu(s)$, że spełnione są związki (1) względnie (2), a tem samem znalezione jest rozwiązanie równań (35).

Funkcja $\operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$ nie jest jednocześnie określona. Dla określenia jednej gałęzi tej funkcji, obieramy tak, jak na ry-



sunku kierunek rachowania dodatnich łuków, a na zmienne s i t przyjmujemy wartości zawarte w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$. Niech m będzie dokładną dolną granicą wartości $y(s)$ $(o \leqq s \leqq l)$, odpowiadających krzywej (C). Istnieje w takim razie przynajmniej jeden taki punkt A, położony na krzywej (C), którego rzędna jest m i w którym styczna jest równoległa do osi x. Punkt ten obieramy za początek łuków s i t. Jeżeli punktowi N odpowiada wartość parametru t, a punktowi M wartość parametru $s > t$, to odcinkowi, łączącemu punkty N i M nadajemy kierunek od N do M.

Kąt zawarty między osią x. a wektorem $\overline{NM}$, jest to kąt dodatni, mniejszy od 2π, o który trzeba obrócić oś x w kierunku dodatnim, aby nakryła zgodnie wektor $\overline{NM}$. Przy tych umowach, budujemy nową funkcję $f(st)$ w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$. w następujący sposób:

1°) Przyjmujemy $f(o, o) = o$.

2°) Funkcja $f(ss)$ równa się kątowi dodatniemu, mniejszemu od 2π, o który trzeba obrócić oś x w dodatnim kierunku, aby nakryła zgodnie styczną do krzywej (C) w punkcie s, przyczem ta styczna ma kierunek rosnących łuków.

Dla $s \neq t$, niech $f(st) \equiv f(ts)$. Wobec tego założenia wystarczy funkcję $f(st)$ zdefiniować dla $s > t$. Otóż w tym wypadku przyjmujemy jako wartość funkcji $f(st)$ kąt, zawarty między osią x, a wektorem $\overline{NM}$. Mając zdefiniowaną funkcją $f(st)$ w obszarze

$(o \leqq {s \atop t} \leqq l)$ rozszerzamy obszar zmienności na całą płaszczyznę s, t, przyjmując:

$$f(s't') \equiv f(st) + (k + k')\pi$$

przyczem:

$$s' = s + kl$$
$$t' = t + k'l$$

gdzie k i k' są to jakiekolwiek liczby całkowite.

Funkcja $f(st)$ posiada następujące własności:

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial s} f(st)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(st).$$

Połóżmy:

$$N_1(st) = f(st) - \frac{(s+t)\pi}{l}$$

$$N_2(st) = \frac{(s+t)\pi}{l}$$

Funkcja $N_1(st)$ jest perjodyczna względem zmiennych s i t, a mianowicie mamy:

$$N_1(s + kl, t + k'l) \equiv N_1(st) \equiv N_1(ts)$$

Nadto:

$$K(st) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial N_1(st)}{\partial s} + \frac{1}{l}$$

(38) $$\int \frac{\partial N_1(st)}{\partial t} dt = 0.$$

Wartości charakterystyczne jądra $\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$.

XXII. Twierdzenie.[1]) Jądro $K(st)$ posiada -1 jako wartość charakterystyczną stopnia pierwszego i rzędu pierwszego.

[1]) P. str. 54 § 25.

Dowód. Ze związku (37) wynika natychmiast, że równanie całkowe:

$$\psi(s) - \int \psi(t)\, K(ts)\, dt = 0 \tag{39}$$

posiada jako funkcję charakterystyczną, należącą do wartości charakterystycznej -1, liczbę stałą, różną od zera. Wobec tego równania jednorodne, z równaniem (39) sprzężone:

$$\varphi(s) - \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{40}$$

posiada też rozwiązanie $\varphi(s) = m(s)$, które nie znika identycznie; -1 jest zatem wartością charakterystyczną. Ponieważ stała jest rozwiązaniem równania (39) a funkcja $m(s)$ jest rozwiązaniem równania (40), więc aby wykazać, że -1 jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego, wystarczy na podstawie twierdzenia XI udowodnić, że całka $\int m(s)\, ds$ jest różna od zera. Przypuśćmy, że $\int m(s)\, ds = 0$. Potencjał:

$$v(p) = \int \frac{1}{\log r_{pt}}\, m(t)\, dt \tag{41}$$

czyni zadość na podstawie (1) i (2) następującym związkom:

$$\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\, m(s)$$

$$\frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-} = 2\pi \int K(st)\, m(t)\, dt = 2\pi\, m(s)$$

skąd po uwzględnieniu twierdzenia Greena wynika, że potencjał $v(p)$ jest wewnątrz krzywej (C) stały. Ponieważ potencjał jest wewnątrz krzywej (C) stały, a nadto jest funcją ciągłą i regularną w nieskończoności, ($\int m(s)\, ds = 0$), musi zatem znikać identycznie, co pociąga za sobą, że $m(s) \equiv 0$ wbrew temu, co udowodniliśmy o funkcji $m(s)$. Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że -1 jest wartością charakterystyczną stopnia pierwszego. Z uwagi na to, że $\int m(s)\, ds$ jest różna od zera, można wyznaczyć stałą c tak, żeby:

$$\int [cm(s) + m_1(s)]\, ds = 0$$

przyczem przypuściliśmy, że $\varphi(s) = m_1(s)$ czyni też zadość równaniu (40). Potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}} [cm(t) + m_1(t)]\, dt$$

posiada te same własności, co i potencjał (41), a zatem $c \, . \, m(s) + m_1(s) = 0$, czyli funkcja $m(s)$, czyniąca zadość równaniu (40) jest określona w zupełności aż do współczynnika stałego.

Przyjmujemy w dalszym ciągu jako funkcję charakterystyczną równania (39) liczbę stałą $+1$, wobec czego funkcja charakterystyczna równania (40) ma tę własność, że

$$\int m(s)\, ds = 1.$$

XXIII. Twierdzenie.[1]) Liczba $+1$ nie może być wartością charakterystyczną jądra $K(st)$.

Dowód. Przypuśćmy, że równanie całkowe:

$$\varphi(s) + \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

posiada rozwiązanie $\varphi(s) = n(s)$, nie znikające identycznie. W takim razie potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, n(t)\, dt$$

czyni zadość związkom:

$$\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\, n(s)$$

$$\frac{dv}{du_+} + \frac{dv}{du_-} = 2\pi \int K(st)\, n(t)\, dt = -2\pi\, n(s)$$

stąd wynika, że:

(42) $$\frac{dv}{dn_-} = 0$$

(43) $$\int n(s)\, ds = 0$$

Na podstawie wzoru Greena wnosimy z (42) i z (43), że potencjał $v(p)$ znika identycznie zewnątrz krzywej (C), a ponieważ jest funkcją ciągłą znika także i na krzywej (C), a tem samem wewnątrz krzywej (C), co pociąga za sobą, że $n(s) \equiv 0$ wbrew założeniu.

---

[1]) P. str. 54 § 25. Ograniczenie (C) składa się z jednej krzywej zamkniętej.

XXIV. Twierdzenie. Wartości charakterystyczne, należące do jądra $K(st)$ są rzeczywiste, rzędu pierwszego.

Dowód. Na podstawie wzorów (39) i (40) i twierdzenia XXII możemy położyć:

$$K(st) \equiv \frac{1}{l} + \frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s} \equiv m(s) + A(st) \tag{44}$$

przyczem $A(st)$ jest funkcją ciągłą zmiennych s i t w obszarze $(0 \leqq {s \atop t} \leqq l)$, gdy $s \neq t$ i wszędzie ograniczoną. Uwzględniając związki:

$$m(s) - \int K(st)\, m(t)\, dt = 0 \tag{45}$$

$$1 - \int K(ts)\, dt = 0$$

$$\int m(t)\, dt = 1$$

znajdziemy:

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

$$\int A(ts)\, dt = 0 \tag{46}$$

Położmy:

$$m(s) = \frac{1}{l} - \frac{dm_1(s)}{ds} \tag{47}$$

gdzie $\frac{dm_1(s)}{ds}$ jest funkcją ciągłą, czyniącą zadość warunkowi:

$$\int \frac{dm_1(s)}{ds}\, ds = 0$$

Z tożsamości (44) i (47) wynika:

$$A(st) \equiv \frac{\partial}{\partial s}\left[m_1(s) + \frac{1}{\pi} N_1\,(s\,t)\right]$$

a więc $A(st)$ jest pochodną cząstkową rzędu pierwszego. Na podstawie twierdzenia (V):

$$\int \log r_{ut}\, K(ut) = H(st)$$

gdzie $H(st)$ jest funkcją symetryczną zmiennych s i t. Podstawiając za $K(ut)$ wyrażenie (44), znajdziemy:

$$\int \log r_{su} \left[m(u) + A(ut)\right] du = H(st)$$

Lecz:

$$\int \log r_{su}\, m(u)\, du = \alpha = \text{Constans}$$

a zatem:

$$\int \log r_{su}\, A(ut)\, du = H(st) - \alpha \tag{48}$$

czyli $A(ut)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji $\log r_{su}$. — Niech będzie $\varphi_1(s) = p(s) +$ i $q(s)$ funkcja charakterystyczna zespolona, należąca do wartości charakterystycznej λ_1 też zespolonej. Istnieje w takim razie funkcja charakterystyczna $\overline{\varphi}_1(s) = p(s) -$ i $- q(s)$, która należy do wartości charakterystycznej $\overline{\lambda}_1$, sprzężonej z λ_1. Mamy:

$$\varphi_1(s) + \lambda_1 \int A(st)\, \varphi_1(t)\, dt = 0. \tag{49}$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia XVIII:

$$\psi_1(s) = \int \log r_{su}\, \varphi_1(u)\, du \tag{50}$$

jest funkcją charakterystyczną równania:

$$\psi_1(s) + \lambda_1 \int \psi_1(u)\, A(us)\, du = 0 \tag{51}$$

i nadto $\lambda_1 \neq \overline{\lambda}_1$, więc funkcja $\varphi_1(s)$ musi być ortogonalna do funkcji $\psi_1(s)$, to jest musi zachodzić równość:

$$\int\int \log r_{st}\, \varphi_1(s)\, \varphi_1(t)\, ds\, dt = 0$$

albo:

$$\int\int \log r_{st}\, p(s)\, p(t)\, ds\, dt + \int\int \log r_{st}\, q(s)\, q(t)\, ds\, dt = 0 \tag{52}$$

Z drugiej strony na podstawie (46) i (49):

$$\int \varphi_1(s)\, ds = 0$$

a tem samem:

(53) $$\int p(s)\,ds = \int q(s)\,ds = 0.$$

Obie całki, figurujące po lewej stronie równości (52) mają na podstawie wzoru (5) ten sam znak, więc:

$$\int\int \log r_{st}\, p(s)\, p(t)\, ds\, dt = \int\int \log r_{st}\, q(s)\, q(t)\, ds\, dt = 0$$

Z uwagi na związki (53), znajdujemy na podstawie twierdzenia III:

$$p(s) \equiv q(s) \equiv 0$$

Pozostaje jeszcze do udowodnienia, że wartości charakterystyczne są rzędu pierwszego. Przypuszczamy w tym celu, aby nie wprowadzać nowych oznaczeń, że w związkach (49) i (51) λ_1 jest liczbą rzeczywistą i funkcje $\varphi_1(s)$ i $\psi_1(s)$ są funkcjami rzeczywistemi zmiennej s. Na podstawie twierdzenia XI λ_1 jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego, jeżeli całka $\int \varphi_1(s)\,\psi_1(s)\,ds$ jest od zera odmienna. Przyjmujemy, że:

$$\int \varphi_1(s)\,\psi_1(s)\,ds = 0$$

albo na podstawie (50):

$$\int\int \log r_{st}\, \varphi_1(s)\, \varphi_1(t)\, ds\, dt = 0$$

przyczem:

$$\int \varphi_1(s)\, ds = 0$$

Podobnie, jak wyżej, wynika stąd:

$$\varphi_1(s) \equiv 0$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że jądro $A(st)$ posiada wartości charakterystyczne rzeczywiste i rzędu pierwszego. Ze związków:

$$K(st) = m(s) + A(st)$$

$$\int m(t)\, dt = 1.$$

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

i z twierdzenia XIII wynika, że zbiór wartości charakterystycznych jądra $K(st)$ równa się zbiorowi wartości charakterystycznych jądra $A(st)$ i liczbie -1, o której wiemy na podstawie twierdzenia XXII, że jest wartością charakterystyczną rzędu pierwszego. Twierdzenie XXIV jest zatem w zupełności udowodnione.

XXV. Twierdzenie.[1] Wartości charakterystyczne, należące do jądra $K(st)$ są co do bezwzględnej wartości większe albo też równe $+1$.

Dowód. Niech będzie

$$\varphi_k(s) + \lambda_k \int K(st)\, \varphi_k(t)\, dt = 0$$

przyczem $\varphi_k(s)$ oznacza funkcję charakterystyczną, należącą do wartości charakterystycznej $+\lambda_k$.

Potencjał:

$$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, \varphi_k(t)\, dt$$

czyni zadość na podstawie wzorów (1) i (7) związkowi:

$$\lambda_k \left[\frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-}\right] = \frac{dv}{dn_+} - \frac{dv}{dn_-} \tag{54}$$

Połóżmy:

$$I^+ = -\int v \frac{dv}{du_+}\, ds; \quad I^- = \int v \frac{dv}{du_-}\, ds$$

Jeżeli pomnożymy obie strony związku (54) przez $v(s)$ i zcałkujemy, znajdziemy:

$$\lambda_k [I^+ - I^-] = I^+ + I^-$$

Z uwagi na to, że całki I^+ i I^- są dodatnie, z ostatniej równości wynika:

$$|\lambda_k| \geqq 1.$$

XXVI. Twierdzenie.[2] Zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K(st)$, składa się z liczby -1, i z liczb

---

[1]) H. B. Heywood-M. Fréchet. L'équation de Fredholm. Paris 1912. p. 112.

[2]) P. str. 85 § 34.

co do bezwzględnej wartości większych od $+1$ i położonych symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny λ.

Dowód. Tożsamość (38) orzeka, że jądro $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ jest ortogonalne do jądra $\frac{1}{l}$, a zatem na podstawie twierdzenia XIII-go i związku (44), zbiór wartości charakterystycznych, należących do jądra $K(st)$, równa się sumie zbiorów wartości charakterystycznych, należących do jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ i do jądra $\frac{1}{l}$. Lecz $\frac{1}{l}$ posiada jedną wartość charakterystyczną -1, jądro zaś $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ na podstawie twierdzenia XXI posiada wartości charakterystyczne położone symetrycznie ze względu na punkt zerowy płaszczyzny λ. Nadto -1 nie może być wartością charakterystyczną jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$, gdyż wówczas i $+1$ musiałoby być wartością charakterystyczną jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$, a tem samem jądra $K(st)$, co sprzeciwia się twierdzeniu XXIII. — Wszystkie wartości charakterystyczne jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ są zatem co do bezwzględnej wartości większe od $+1$.

XXVII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ posiada oprócz -1, przynajmniej dwie wartości charakterystyczne, o ile $A(st)$ nie równa się identycznie zeru.

Dowód. Ze związku (46) i (48) wynika na podstawie twierdzenia XX, że jądro $A(st)$ posiada przynajmniej jedną wartość charakterystyczną. Ponieważ jądro $K(st) = m(s) + A(st)$ posiada -1 jako wartość charakterystyczną rzędu i stopnia pierwszego (twierdzenia XXII) i zachodzi związek

$$\int A(st)\, m(t)\, dt = 0$$

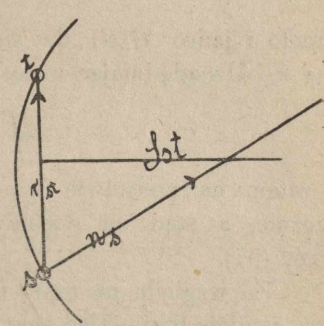
przeto na podstawie twierdzenia XIII. zbiór wartości charakterystycznych jądra $K(st)$ równa się liczbie -1 i zbiorowi wartości charakterystycznych jądra $A(st)$. Stąd i z twierdzenia poprzedniego wynika, że zbiory wartości charakterystycznych jądra $A(st)$ i jądra $\frac{1}{\pi}\frac{\partial N_1(st)}{\partial s}$ są identyczne, a zatem istnieć muszą oprócz -1 przynajmniej dwie wartości charakterystyczne jądra $K(st)$, o ile oczywiście funkcja $A(st)$ nie znika identycznie. Naodwrót, jeśli jądro $K(st)$ posiada jedną jedyną wartość charakterystyczną -1, to $A(st)$ nie posiada żadnej wartości charakterystycznej, a tem samem na podstawie wniosku I musi znikać identycznie.

XXVIII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ posiada nieskończenie wiele wartości charakterystycznych w przypadku, w którym krzywa (C) czyni zadość warunkom, które dotychczas przyjęliśmy i jeżeli nadto jej promień krzywizny, uważany jako funkcja łuku, posiada przynajmniej jeden punkt nieciągłości. Jeśli nieciągłość ma miejsce dla $s = s_0$, to przypuszczamy, że istnieją określone granice promienia krzywizny, gdy s zmierza do s_0 w ten sposób, że $s > s_0$ względnie $s < s_0$.

Dowód. Jądro $K(st)$ można przedstawić w formie:

$$K(st) = \frac{1}{\pi r_{st}} \cos (\widehat{n_s\, r_{st}}) \tag{55}$$

przyczem $\widehat{n_s\, r_{st}}$ oznacza dodatni kąt, zawarty między normalną w punkcie s skierowaną do wnętrza, a promieniem r_{st}, mającym kierunek od s do t, jak to uwidocznione na rysunku. Poprowadźmy normalną w środku odcinku r_{st} aż do punktu przecięcia się jej z normalną n_s. Oznaczmy ją przez ϱ_{st}.



W takim razie:

$$r_{st} = 2\varrho_{st} \operatorname{cotg} (\widehat{u_s\, r_{st}})$$

Na podstawie (55) mamy zatem:

$$K(st) = \frac{1}{2\pi\varrho_{st}} \cdot \sin (\widehat{n_s\, r_{st}}) \tag{56}$$

Ze związku (56) wynika, że granica, do której zmierza $K(st)$ gdy t zmierza do s, równa się $\frac{1}{2\pi R}$, jeśli przez R oznaczymy promień krzywizny krzywej (C) w punkcie s. W punktach nieciągłości promienia krzywizny istnieją dwie granice (prawa i lewa) zależnie od tego, czy $s > t$, czy też $s < t$. Przypuśćmy przy tych założeniach, że jądro $K(st)$ posiada skończoną liczbę wartości charakterystycznych $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ i odpowiadające im funkcje charakterystyczne: $\varphi_1(s)\, \psi_1(t) \ldots \varphi_n(s)\, \psi_n(t)$, przyczem niektóre z pomiędzy

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ mogą być sobie równe, a funkcje φ i funkcje ψ są między sobą liniowo niezależne.

Udowodnimy, że jądro $K(st)$ da się przedstawić w formie:

(57) $$K(st) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t)}{-\lambda_n}$$

Rzeczywiście najogólniejsze jądro, które posiada powyższe wartości i funkcje charakterystyczne, musi być kształtu:

(58) $$K(st) = K_1(st) + G(st)$$

gdzie:

(59) $$K_1(st) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t)}{-\lambda_n}$$

(60) $$\int K(ts)\,dt \equiv 1$$

Ponieważ jądro $K(st)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji log r_{st} i podobnie jądro $K_1(st)$ ze względu na związek:

$$\psi_n(s) = \int \log r_{st}\, \varphi_n(t)\,dt$$

przeto i jądro $G(st)$ da się usymetrycznić przy pomocy funkcji log r_{st}. Uwzględniając związki (37) i (60) mamy:

$$\int G(ts)\,dt = 0$$

a zatem na podstawie wniosku I, jądro $G(st)$ musi znikać identycznie, a stąd na podstawie wzorów (58) i (59), otrzymujemy wzór (57).

Ze względu na to, że funkcje φ i funkcje ψ są liniowo niezależne, istnieje taki układ wartości na zmienną t np. $t_1 \dots t_n$, że wyznacznik układu równań, otrzymanych ze związku (57):

(61) $$K(st_k) = \frac{\varphi_1(s)\,\psi_1(t_k)}{-\lambda_1} + \dots \frac{\varphi_n(s)\,\psi_n(t_k)}{-\lambda_n} \quad (k = 1, \dots n)$$

jest od zera odmienny. Inaczej funkcje $\psi_1 \dots \psi_n$ byłyby liniowo zależne. Rozwiązując układ równań (61) względem $\varphi_1(s) \dots \varphi_n(s)$ wyrażamy te funkcje liniowo zapomocą $K(st_k)$. Analogicznie można postąpić z funkcjami $\psi_1 \dots \psi_n$ i wyrazić je liniowo zapomocą $K(s_k t)$ $(k = 1, 2 \dots n)$.

Ponieważ nadto funkcje φ i ψ czynią zadość równaniom całkowym jednorodnym:

$$\begin{aligned} \varphi_k(s) + \lambda_k \int K(st)\, \varphi_k(t)\, dt = 0 \\ \psi_k(s) + \lambda_k \int \psi_k(t)\, K(ts)\, dt = 0 \end{aligned} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

więc funkcje $\varphi_k(s)$ i $\psi_k(s)$ muszą być ciągłe w przedziale $(o \leqq s \leqq l)$.

Niech będzie s_0 punktem nieciągłości promienia krzywizny krzywej (C). Wyrażenie:

$$K(s_0 t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}\Bigg|_{s=s_0} = \frac{1}{2\pi\varrho_{s_0 t}}$$

nie zmierza wówczas do określonej granicy, gdy t zmierza do s_0; jeśli jednak uwzględnimy wzór (57) i ten fakt, że funkcje φ i ψ są ciągłe, wyrażenie to musi zmierzać do określonej granicy. Sprzeczność tę możemy usunąć jedynie, przyjmując, że jądro $K(st)$ posiada nieskończenie wiele wartości charakterystycznych.

XXIX. Twierdzenie. Jedyną krzywą, która posiada tylko — 1 jako wartość charakterystyczną, jest koło.

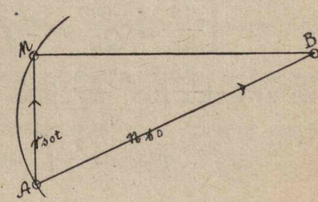
Dowód. Na podstawie wzoru (44) i twierdzenia XXVII mamy

$$K(st) = m(s)$$

albo na podstawie (56):

$$\frac{1}{\pi r_{st}} \cos \widehat{(n_s r_{st})} = m(s) \tag{62}$$

Obierzmy na s wartość stałą s_0. Niech punkt A odpowiada wartości s_0 a punkt M wartości t, jak zaznaczono na rysunku. Nakreślmy w punkcie M prostopadłą do odcinka $r_{s_0 t}$ aż do punktu przecięcia się B z normalną ns_0 do krzywej (C) w punkcie A. W takim razie:



$$r_{s_0 t} = AB.\ \cos \widehat{(n_{s_0} r_{s_0 t})}$$

Stąd i na podstawie (62):

$$\frac{1}{\pi.\ AB} = m(s_0)$$

Niech punkt M opisze łuk krzywej (C); wówczas z ostatniego związku wynika, że normalna do r_{s_0t} w punkcie M zawsze przechodzi przez punkt B, a zatem krzywa (C) musi być kołem.

Jądro log r_{st}.

XXX. Twierdzenie. Jądro $\log r_{st} + m(s)\, m(t)$ gdzie $m(s)$ jest funkcją ciągłą, określoną wzorem (45) jest zamknięte.

Dla dowodu przypuśćmy, że istnieje taka ciągła funkcja $\varphi(s)$, że:

(63) $$\int \log r_{st}\, \varphi(t)\, dt = 0$$

Jeśli utworzymy potencjał warstwy pojedynczej:

(64) $$v(p) = \int \log \frac{1}{r_{pt}}\, \varphi(t)\, dt$$

to w takim razie potencjał ten przyjmuje na krzywej (C) wartość zero, a tem samem jest wewnątrz krzywej (C) stały, równy zeru. Wnosimy stąd, że:

(65) $$\frac{dv}{dn_+} \equiv 0$$

Ze związków:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du_-} - \dfrac{dv}{du_+} = 2\pi\varphi(s) \\ \dfrac{dv}{du_+} + \dfrac{dv}{du_-} = 2\displaystyle\int \varphi(t) \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}\, dt \end{cases}.$$

i ze związku (63) wynika, że:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int \varphi(t) \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}\, dt$$

albo na podstawie (36):

(66) $$\varphi(s) - \int K(st)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

Funkcja zatem $\varphi(s)$, która czyni zadość związkowi (63) musi czynić zadość związkowi (66), czyli być funkcją charakterystyczną jądra $K(st)$ dla wartości charakterystycznej -1. Jedyna taka funkcja, jak widzieliśmy na podstawie twierdzenia XXII. jest $\varphi(s) =$

$= m(s)$. Naodwrót, jeżeli spełniony jest związek (66), to potencjał, określony wzorem (64) czyni zadość związkom:

$$\frac{dv}{dn_-} - \frac{dv}{dn_+} = 2\pi\varphi(s)$$

$$\frac{dv}{dn_+} + \frac{dv}{dn_-} = 2\pi\varphi(s)$$

skąd:

$$\frac{dv}{dn_+} \equiv 0.$$

a zatem na podstawie wzoru Greena, $v =$ Constans.

Ponieważ potencjał $v(p)$ jest wewnątrz krzywej (C) stały i jest funkcją ciągłą, więc i na krzywej (C) jest też stały. Mamy zatem:

$$\int \log r_{st}\, \varphi(t)\, dt = \alpha = \text{Constans}.$$

O ile stała α nie równa się zeru, nie istnieje taka funkcja $\varphi(s)$, aby spełniony był warunek (63), czyli jądro $\log r_{st}$ jest zamknięte, jeżeli zaś stała $\alpha = 0$, to taka funkcja istnieje i równa się $\varphi(s) = m(s)$, a zatem w tym drugim wypadku $\log r_{st} + m(s)\, m(t)$ jest jądrem zamkniętem.

Udowodnimy, że w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem zachodzić mogą oba wypadki, zależnie od wielkości promienia koła. Ponieważ w tym wypadku $m(s) =$ Constans, więc wystarczy obliczyć całkę $I = \int \log r_{st}\, ds$ wziętą wzdłuż obwodu koła o promieniu R. Wartość tej całki jest jednak niezależna od t, więc przyjmujemy $t = 0$. Dla $0 \leqq s \leqq R\pi$ mamy:

$$r_{s0} = 2R \sin \frac{s}{2R}$$

a dla $R\pi \leqq s \leqq 2R\pi$ mamy:

$$r_{s0} = 2R \cos\left(\frac{s}{2R} - \frac{\pi}{2}\right) = 2R \sin \frac{s}{2R}$$

Całkę I można zatem przedstawić w formie:

$$I = \int_{o}^{R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds + \int_{R\pi}^{2R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds$$

$$= \int_{o}^{2R\pi} \log\left(2\,R\ \sin\ \frac{s}{2R}\right) ds$$

Połóżmy $\frac{s}{2R} = \sigma$, to znajdziemy:

$$I = 2R \int_{o}^{\pi} \log\,(2R\ \sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi \log 2R + 2R \int_{o}^{\pi} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi \log 2R + 2R \int_{o}^{\pi} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma$$

$$= 2R\pi \log 2R + 2R \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin \sigma)\, d\sigma + 2R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin \sigma)\, d\sigma$$

Połóżmy w drugiej całce $\sigma = \pi - \tau$; w takim razie:

$$I = 2R\pi \log 2R + 2R \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sin\ \sigma)\ d\sigma + 2R \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sin\ \tau)\ d\tau.$$

Lecz:

$$\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin \tau)\, d\tau = \tfrac{\pi}{2} \log \tfrac{1}{2}$$ [1])

Zatem:

$$I = 2R\pi\ (\log 2R - \log 2)$$

Widoczną jest stąd rzeczą, że całka I obraca się w zero dla $R = 1$; dla $R < 1$ całka I jest ujemna, a dla $R > 1$ całka I jest

[1]) F. Frenet. Recueil d'exercices. Str. 259. Zadanie 439. Paris 1904. — Gauthier-Villars.

dodatnia. Jądro log r_{st} w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem, jest zawsze zamknięte, z wyjątkiem wypadku, gdy $R = 1$. Wówczas wystarczy do log r_{st} dodać dowolną stałą, różną od zera, aby otrzymać jądro zamknięte.

XXXI. T w i e r d z e n i e. W przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, jądro log r_{st} posiada jako funkcje charakterystyczne: stałą, sin (ns), cos (ns) $(n = 1, 2 \ldots)$ przyczem s i t zmieniają się w obszarze $(o \leqq {s \atop t} \leqq 2\pi)$.

Dowód. Funkcja rozwiązująca, odpowiadająca problematom teorji potencjału w przypadku, gdy ograniczenie jest elipsą, da się przedstawić w formie: [1])

$$K(\lambda; st) = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(ns)\cos(nt)}{\lambda + k_n} + \tag{67}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(ns)\sin(nt)}{\lambda - k^n}$$

przyczem $k = \frac{a+b}{a-b}$, oznaczając przez a i b dłuższą i krótszą półoś elipsy.

Z wzoru tego wynika, że wartości charakterystyczne jądra $K(st)$, odpowiadającego elipsie, to jest jądra: [2])

$$K(st) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} g^n \cos n(s+t) \tag{68}$$

gdzie $g = \frac{1}{k}$, są:

$$-1,\ k,\ k^2 \ldots,\quad -k,\ -k^2 \ldots$$

a odpowiadające im funkcje charakterystyczne:

$$\text{stała, } \sin s,\ \sin 2(s) \ldots,\ \cos s,\ \cos(2s), \ldots \tag{69}$$

Zbiór tych funkcji tworzy system zupełny. Jądro (68) da się usymetrycznić przy pomocy funkcji log r_{st}, a z tego faktu na podstawie twierdzenia XVIII wynika:

---

[1]) P. str. 72 wzór (π).
[2]) P. str. 72 wzór (ν).

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st} \sin(nt)\, dt = a_n \sin(ns)$$

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st} \cos(nt)\, dt = b_n \cos(nt)$$

$$\int_0^{2\pi} \log r_{st}\, dt = \text{Constans}$$

przyczem stałe a_n i b_n są odmienne od zera, a występują one dzięki tej okoliczności, że funkcje charakterystyczne są określone w zupełności aż do współczynnika stałego. Związki powyższe wyrażają, że zbiór funkcji (69) jest identyczny ze zbiorem funkcji charakterystycznych jądra $\log r_{st}$.

Przypadki, w których $K(st)$ jest symetryczne.

XXXII. Twierdzenie. Jądro $K(st)$ jest symetryczne wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczenie (C) jest kołem lub elipsą.

Dowód. Wiadomą jest rzeczą, że jądro $K(st)$, odpowiadające problematom teorji potencjału w przypadku, gdy ograniczenie jest kołem, ma postać:

$$K(st) = \frac{1}{2\pi}$$

w przypadku zaś, gdy ograniczenie jest elipsą, określone jest wzorem (68). Stąd wynika, że jądro $K(st)$ jest symetryczne, gdy ograniczenie jest kołem lub elipsą. Odwrotność tego twierdzenia jest też słuszną.

Aby jądro $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)}$ było funkcją symetryczną, musi zachodzić, jak łatwo sprawdzić, następująca identyczność:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = F(s+t)$$

a stąd:

$$\frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = F_1(s+t) \tag{70}$$

Przypuszczamy w dalszym ciągu, nie zmieniając jednakże oznaczeń, że zmienna s określona jest w przedziale $(0 \leqq s \leqq 2\pi)$, co zawsze można osiągnąć przez proste przekształcenie.

Kładąc w związku (70) odpowiednio w miejsce liter s i t, litery $s+h$, $s-h$, znajdziemy:

$$\frac{y(s+h)-y(s-h)}{x(s+h)-x(s-h)}=F_1(2s).^{1)}$$

[1]) Dowód ten zawdzięczam uprzejmości Pana Profesora S Zaremby. — Pierwotnie podałem dowód, w którym musiałem założyć ciągłość pochodnych funkcji $x(s)$ i $y(s)$ aż do piątego rzędu. Dowód ten jest następujący:

Obliczmy w związku ostatnim pierwszą i drugą pochodną względem h:

$$[y'(s+h)+y'(s-h)].[x(s+h)-x(s-h)]=[x'(s+h)+(x'(s-h)].$$
$$.[y(s+h)-y(s-h)]$$

$$(\alpha)\quad [y''(s+h)-y'(s-h)].[x(s+h)-x(s-h)]=[x''(s+h)-x''(s-h)].$$
$$.[y(s+h)-y(s-h]$$

Ponieważ wyznacznik tych równań znika, więc:

$$\frac{x''(s+h)-x''(s-h)}{2h}[y'(s+h)+y'(s-h)]=[x'(s+h)+x'(s-h)].$$
$$.\frac{y''(s+h)-y''(s-h)}{2h}$$

Niech h zmierza do zera, wówczas w granicy:

$$(\beta)\quad x'''y'-y'''x'=0 \quad \text{albo} \quad (\gamma)\quad x''y'-y''x'=a_1$$

gdzie a_1 jest stałą całkowania.

Ze związku (70) i (α)wynika, że także:

$$\frac{y''(s)-y''(t)}{x''(s)-x''(t)}=F_1(s+t)$$

Widzimy stąd, że funkcje;

$$(\delta)\qquad \begin{cases}\eta(s)=y''(s)\\ \xi(s)=x''(s)\end{cases}$$

czynią zadość tym samym związkom, którym czynią zadość funkcje $x(s)$ i $y(s)$. Możemy zatem na podstawie (β) i (γ) położyć:

$$(\varepsilon)\quad \xi'''\eta'-\eta'''\xi'=0$$
$$(\zeta)\quad \xi''\eta'-\eta''\xi'=b_1$$

gdzie b_1 jest stałą całkowania. Uwzględniając wzory (δ) można związek (ε) przedstawić w formie:

$$(\vartheta)\qquad x^{\mathrm{v}}y'''-y^{\mathrm{v}}x'''=0.$$

Rozróżniamy w dalszym ciągu dwa przypadki:

Obliczmy w ostatnim związku pochodną względem h i powróćmy do dawnych oznaczeń, otrzymamy:

(71) $\{y'(s)+y'(t)\}.\{x(s)-x(t)\}-\{x'(s)+x'(t)\}.\{y(s)-y(t)\}=0.$

Połóżmy:

$$(72)\quad \begin{cases} A_m=\int\limits_0^{2\pi} x(s)\cos(ms)\,ds & B_m=\int\limits_0^{2\pi} x(s)\sin(ms)\,ds \\ P_m=\int\limits_0^{2\pi} y(s)\cos(ms)\,ds & Q_m=\int\limits_0^{2\pi} y(s)\sin(ms)\,ds \end{cases} \qquad (m=1,2\ldots)$$

---

a) Funkcje $x'''(s)$ i $y''(s)$ znikają identycznie. Wówczas:

$$x(s)=ms^2+ns+p$$
$$y(s)=m_1s^2+n_1s+p_1$$

gdzie $m\ n\ p\ m_1\ n_1\ p_1$ oznaczają stałe dowolne.

Ponieważ dopuszczalne są tylko krzywe zamknięte, położone w skończoności, więc powyższe równania mogą przedstawiać tylko koło lub elipsę.

b) Funkcje $x'''(s)$ i $y'''(s)$ nie znikają identycznie równocześnie. W tym wypadku na podstawie (β) i (ϑ) mamy:

$$(\lambda)\qquad x^{V}y'-y^{V}x'=0$$

Zróżniczkujmy związek (β). Otrzymamy:

$$x^{IV}y'+x'''y'''-x'y^{IV}=0$$
$$2(x^{IV}y''-x''y^{IV})+y'x^{V}-x'y^{V}=0$$

Z ostatniego związku na podstawie (λ) wynika:

$$(\mu)\qquad x^{IV}y''-x''y^{IV}=0$$

Wprowadźmy do związku (μ) znaczenia (δ); znajdziemy:

$$(\nu)\qquad \xi''\eta-\xi\eta''=0$$

Skąd:

$$(\sigma)\qquad \xi'\eta-\xi\eta'=c_1$$

gdzie c_1 jest stałą całkowania. Ze związków (ζ), (ν) i (σ) wynika:

$$b_1\xi+c_1\xi''=0$$
$$b_1y+c_1y''=0$$

Jeśli uwzględnimy ten warunek, że szukana krzywą ma być zamknięta i położona w skończoności, to całkując ostatnie równania, dochodzimy do wniosku, że krzywa:

$$x=x(s)$$
$$y=y(s)$$

może być tylko kołem lub elipsą.

Uwzględniając perjodyczność funkcji $x(s)$, $y(s)$ znajdujemy:

$$(73) \quad \begin{cases} \int_o^{2\pi} x'(s)\cos(ms)\,ds = -mB_m; & \int_o^{2\pi} x'(s)\sin(ms)\,ds = mA_m \\ & (m=1,2\ldots) \\ \int_o^{2\pi} y'(s)\cos(ms)\,ds = -mQ_m; & \int_o^{2\pi} y'(s)\sin(ms)\,ds = mP_m \end{cases}$$

Pomnóżmy równanie (71) kolejno jednym z iloczynów:

$$\begin{matrix} \cos(ms)\cos(pt)\,ds\,dt, & \cos(ms)\sin(pt)\,ds\,dt \\ \sin(ms)\cos(pt)\,ds\,dt, & \sin(ms)\sin(pt)\,ds\,dt \end{matrix} \qquad (m, p = 1, 2..)$$

i zcałkujmy za każdym razem w obszarze:

$$o \leqq s \leqq 2\pi$$
$$o \leqq t \leqq 2\pi$$

Otrzymamy cztery następujące związki:

$$(74) \quad \begin{cases} mQ_mA_p - pQ_pA_m - mB_mP_p + pB_pP_m = 0 \\ mQ_mB_p + pP_pA_m - mB_mQ_p - pA_pP_m = 0 \\ -mP_mA_p - pQ_pB_m + mA_mP_p + pB_pQ_m = 0 \\ -mP_mB_p + pP_pB_m + mA_mQ_p - pA_pQ_m = 0 \end{cases} \quad (m, p = 1, 2\ldots)$$

Wszystkie powyższe związki redukują się dla $m = p$ do zwykłych identyczności; przypuszczamy więc w dalszym ciągu:

$$(75) \qquad m \neq p.$$

Równania (74) są linjowe i jednorodne względem:

$$(76) \qquad A_p \quad B_p \quad P_p \quad Q_p$$

i pominąwszy znak, wyznacznik tych równań, uważanych jako równania względem niewiadomych (76) jest równy:

$$(m^2 - p^2)(P_m B_m - Q_m A_m)^2$$

Jeżeli zatem dla oznaczonej wartości p, nie wszystkie liczby (76) są zerami, to z równań (74) na podstawie nierówności (75) wynika:

$$(77) \qquad P_m B_m - Q_m A_m = 0.$$

Ponieważ w rozumowaniu powyższem wolno przestawić wskaźniki m i p, więc widoczną jest także słuszność twierdzenia następującego:

Jeśli nierówność (75) jest spełniona i jeśli dla uważanej wartości na m, nie wszystkie liczby:

(78) $$A_m\ B_m\ P_m\ Q_m$$

są zerami, to:

(79) $$P_p B_p - Q_p A_p = 0.$$

Z poprzedniego wynika zatem lemmat następujący:

I. Lemmat: Jeśli istnieją dwie wartości różne, całkowite, dodatnie r takie, że dla każdej z nich nie wszystkie liczby:

(80) $$A_r\ B_r\ P_r\ Q_r$$

są zerami, to mamy:

(81) $$P_r B_r - Q_r A_r = 0$$

dla wszystkich całkowitych dodatnich r.

Połóżmy:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_p & B_m \\ P_p & Q_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_p & A_m \\ Q_p & P_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} B_p & B_m \\ Q_p & Q_m \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} A_m & A_p \\ P_m & P_p \end{vmatrix}$$

Przy tych oznaczeniach równania (74) można napisać w formie:

$$\begin{gathered} m\Delta_1 + p\Delta_2 = 0 \\ p\Delta_1 + m\Delta_2 = 0 \\ m\Delta_1 + p\Delta_4 = 0 \\ p\Delta_1 + m\Delta_4 = 0 \end{gathered}$$

Stąd i na podstawie nierówności (75) mamy:

(82) $$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$$

Z lemmatu I. i z równań (82) wynika lemmat następujący:

Lemmat II. Jeśli istnieją dwie wartości różne liczby całkowitej r takie, że dla każdej z nich nie wszystkie liczby (80) są zerami, to każdy wyznacznik 2-go stopnia, należący do macierzy nieskończonej:

$$\left\{ \begin{matrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 & \dots \\ P_1 & Q_1 & P_2 & Q_2 & \dots \end{matrix} \right.$$

jest zerem.

Jeżeli założenia powyższego lemmatu są spełnione, można, jak to wynika z tego lemmatu, wyznaczyć dwie stałe a i b, nie równe zeru jednocześnie i takie, że przyjmując:

$$\varphi(s) = ax(s) + by(s)$$

mamy:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(s) \cos(ms)\, ds = \int_0^{2\pi} \varphi(s) \sin m(s)\, ds = 0 \quad \text{dla} \quad m = 1, 2 \ldots$$

W tym wypadku znajdujemy więc:

$$\varphi(s) = \text{const.} = c$$

i punkt $x(s)$, $y(s)$ opisuje odcinek, położony na prostej:

$$ax + by = c.$$

Aby zatem punkt $x(s)$, $y(s)$ opisywał krzywą, spełniającą warunki zadania, potrzeba, aby istniała jedna wartość r i tylko jedna taka, dla której nie wszystkie liczby (80) są zerami; ta wartość na r musi być równa jedności, ponieważ perjod fundamentalny funkcji szukanej równa się 2π. Nadto, jeśli te warunki są spełnione, potrzeba i wystarcza, aby

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ P_1 & Q_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ażeby krzywa opisana punktem $x(s)$, $y(s)$ czyniła zadość warunkom zadania; krzywa ta jest zatem elipsą.