Funkcja nadlogarytmowa
w związku z określeniem pewnej klasy funkcji całkowitych.

Napisał
Juljusz Rudnicki.

WSTĘP.

Cel pracy. — Główniejsze otrzymane wyniki.

Cel tej pracy jest podwójny:

1) W pierwszej części zajmuję się badaniem funkcji odwrotnej do funkcji nadwykładniczej, t. j. funkcją nadlogarytmową $T(Z)$.

2) W drugiej części określam pewną klasę funkcji całkowitych, posiadających pewną wspólną własność analityczną.

Dodatek zawiera pewne twierdzenie pomocnicze.

Główniejsze wyniki.

1) Co do punktu pierwszego. Dowodzę, iż funkcja nadlogarytmowa jest funkcją wielowartościową, której jedynemi punktami osobliwemi (krytycznemi) są punkty płaszczyzny zmiennej zespolonej położone na osi liczb rzeczywistych o odciętej $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = a$, $\omega_4 = a^{\omega_3}, \ldots\ldots, \omega_n = a^{\omega_{n-1}}, \ldots.$ i oprócz tego punkt e^β, który jest punktem granicznym poprzednich, gdyż $\lim\limits_{n=\infty} \omega_n = e^\beta$; oprócz tego punkt w nieskończoności jest także punktem osobliwym.

Dla gałęzi głównej, którą oznaczam $T(Z)$, wszystkie powyżej wymienione punkty (ω) są punktami osobliwymi. Okrążając punkt ω_1, otrzymamy nowe gałęzie, które nie posiadają żadnych innych punktów osobliwych, prócz punktów 0 i ∞, czyli ω_1 i ∞. Przez okrążanie punktu ω_2 otrzymamy nowy ciąg gałęzi o punktach osobliwych 0, 1 i ∞. W ten sam sposób przez okrążanie punktu ω_3

otrzymamy gałęzie o punktach osobliwych 0, 1, a, ∞ i t. d. Tak punkt ω_n da nam gałęzie o punktach osobliwych ω_1, ω_2, ω_3, ..., ω_n i ∞. Ogół otrzymanych w ten sposób gałęzi wyczerpuje, jak to okazuję, wszystkie gałęzie funkcji nadwykładniczej $\mathfrak{C}(Z)$.

Stąd wynika w bardzo prosty sposób schemat wzajemnego powiązania gałęzi funkcji wielowartościowej $\mathfrak{C}(Z)$, jako też możność dania bardzo prostego znakowania dla otrzymania nomenklatury wszystkich gałęzi funkcji nadlogarytmowej.

Co do punktu drugiego. Wiadomo, iż każda funkcja $H(Z)$ całkowita bez miejsc zerowych jest kształtu $H(Z) = e^{\Theta(Z)}$, gdzie $\Theta(Z)$ jest funkcją całkowitą dowolną. Innemi słowy, logarytm takiej funkcji jest także funkcją całkowitą. Otóż funkcja nadwykładnicza posiada tę samą własność, ale jakgdyby uwielokrotnioną do nieskończoności, t. j. ta własność utrzymuje się przy iterowaniu logarytmowania; Log $H(z)$ nie tylko jest funkcją całkowitą, ale i jej logarytm Lg $\{$Lg $H(z)\}$ także i t. d. do nieskończoności. — Połóżmy więc Log $H(z) = \Theta_1(z)$, Log $\Theta_1(z) = \Theta_2(z)$, Log $\Theta_2(z) = \Theta_3(z)$, ..., $\Theta_n(z) =$ Log $\Theta_{n-1}(z)$,.... Funkcja $\Theta_n(z)$ jest dla jakiegokolwiek wskaźnika n funkcją całkowitą. Udawadniam teraz twierdzenie odwrotne, t. j. że każda funkcja $H(z)$, posiadająca tylko wzmiankowaną własność, jest koniecznie kształtu $\mathcal{E}\{\Theta(z)\}$, gdzie $\mathcal{E}(z)$ jest symbolem funkcji nadwykładniczej, a $\Theta(z)$ oznacza dowolną funkcję całkowitą.

Znakowanie i symbole.

Ponieważ w dalszych wywodach i wzorach funkcja logarytmowa posiadać będzie częste zastosowanie, więc dla uniknięcia nieporozumień przyjmiemy następujące symbole przy znakowaniu.

lg z oznaczać będzie logarytm naturalny.

$\lg_\alpha z$ oznaczać będzie logarytm przy zasadzie α.

Log z oznaczać będzie logarytm przy zasadzie a.

$\mathrm{Log}_n\, z$ oznaczać będzie n-krotną iterację logarytmu;

tak iż $\mathrm{Log}_2\, z = \mathrm{Log}\{\mathrm{Log}\, z\}$, $\mathrm{Log}_3\, z = \mathrm{Log}\{\mathrm{Log}_2\, z\}$ i t. d.; zasadą jest tu zawsze liczba a. Na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Log z, $\mathrm{Log}_2\, z$,..., $\mathrm{Log}_n\, z$,... będą oznaczały odpowiednie funkcje wielowartościowe. Często chodzić nam będzie o funkcję jednowartościową; wtedy określimy tak zwaną gałęź główną naszej funkcji. Gałęź główną funkcji Log z oznaczać będziemy przez Lg z, gałęź główną funkcji $\mathrm{Log}_2\, z$ — przez $\mathrm{Lg}_2\, z$; wogóle, gałęź główną funkcji $\mathrm{Log}_n\, z$ oznaczymy przez $\mathrm{Lg}_n\, z$.

Tak samo, za pomocą $\mathfrak{T}(Z)$ oznaczać będziemy funkcję wielowartościową, jako zespół wszystkich gałęzi funkcji nadwykładniczej; gałęź główną zaś oznaczymy zapomocą symbolu $T(Z)$.

CZĘŚC PIERWSZA.

Funkcja nadlogarytmowa.

1. Określenia i uwagi wstępne.

Funkcją nadlogarytmową nazywać będziemy funkcję otrzymaną przez odwrócenie funkcji nadwykładniczej $\mathcal{E}(z) = Z$ i oznaczać będziemy przez $z = \mathfrak{T}(Z)$. Gałęzią główną nazywać będziemy tę gałęź, dla której funkcja przyjmuje wartość $z = 0$, gdy zmienna $Z = e^{\alpha}$. Dokładne określenie podane będzie niżej. Gałęź główną oznaczać będziemy przez $z = T(Z)$.

Przez odwrócenie zależności $\mathcal{E}(z) = Z$ w otoczeniu punktu $z = 0$, $Z = e^{\alpha}$, otrzymamy szereg potęgowy, rozwinięcie funkcji z według potęg różnicy $Z - e^{\alpha}$ i szereg ten, jak okażemy, jest zbieżny wewnątrz pewnego koła. Szereg ten przyjmiemy jako element zasadniczy badanej funkcji analitycznej; funkcję $\mathfrak{T}(Z)$ określimy jak ogół wszystkich wartości, które można osiągnąć przez przedłużenie analityczne naszego elementu zasadniczego, szeregu potęgowego, o którym była mowa wyżej.

2. Odwrócenie zależności $\mathcal{E}(z) = Z$.

Niech η oznacza liczbę rzeczywistą zawartą między liczbami e^{β} i e^{α}, dalej Z_0 niech będzie liczbą, spełniającą warunek $X > Z_0 > \eta$, gdzie X oznacza liczbę tak wielką, jak się podoba. Niech teraz z_0 oznacza liczbę (rzeczywistą), spełniającą warunek $\mathcal{E}(z_0) = Z_0$; taka liczba rzeczywista istnieje i jest określoną jednoznacznie, ponieważ $Z_0 > e^{\beta}$.

Gdy Z_0 zawarte jest w przedziale (η, X), t. j. gdy $\eta \leqslant Z_0 \leqslant X$, to $|z_0|$ pozostaje mniejsze od liczby, którą oznaczymy przez Y, tak iż będziemy mieli zawsze $|z_0| < Y$. Niech M oznacza maximum modułu funkcji $\mathcal{E}(z)$ na kole C o promieniu $Y + r$, gdzie r jest liczbą dodatnią zresztą dowolną; niech m oznacza liczbę dodatnią, posiadającą tę własność, iż $\mathcal{E}'(z) > m$, gdy zmienna z jest wewnątrz lub na kole C. Taka liczba m istnieje, ponieważ równanie $\mathcal{E}'(z)$ nie posiada pierwiastków. Używając metody funkcji zwyższającej (fonction majorante), udowodnimy w znany sposób (patrz np. Goursat, Cours d'An. t. I. l. 187 i 190), iż szereg o spółczynnikach rzeczywistych, t. j. rozwinięcie

$$(1) \quad z - z_0 = a_1 (Z - Z_0) + a_2 (Z - Z_0)^2 + \ldots + a_n (Z - Z_0)^n + \ldots$$

funkcji odwrotnej jest zbieżne; promień zbieżności ϱ tego szeregu jest większe od pewnej określonej liczby ϱ_0, niezależnej od Z_0; to ma miejsce o ile, oczywiście, $\eta \leqslant Z_0 \leqslant X$; (liczba ϱ_0 zależy od η i X za pośrednictwem liczb m i M.).

Stąd wynika, że funkcja odwrotna za pomocą rozważań tylko co wyłożonych została przez nas określona wewnątrz pewnego obszaru (B). Obszar ten otrzymać można w sposób następujący: Niech w szeregu (1) Z_0 ma wartość, należącą do przedziału (η, X); dla każdego z tych punktów Z_0 utwórzmy rozwinięcie (1) i połączmy razem obszary zbieżności tych szeregów; są to koła o promieniu co najmniej równym ϱ_0; zbiór tych kół da nam obszar jednospójny (B), zawierający między innemi odcinek (η, X) osi liczb rzeczywistych. Oznaczmy przez $T(Z)$ funkcję tak określoną wewnątrz (B). Funkcja $T(Z)$ spełnia równanie $T(a^Z) = \alpha\, T(Z)$, co jest bezpośrednio widoczne, o ile np. Z i a^Z należą do odcinka (η, X) osi liczb rzeczywistych; lecz w takim razie równanie funkcyjne

$$(2) \qquad T(a^Z) = \alpha\, T(Z)$$

spełnione jest także i dla wartości zespolonych, o ile należą do (B).

W tym wypadku, gdy $Z_0 = e^\alpha$, równanie funkcyjne (2) z łatwością daje możność otrzymania współczynników $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ w rozwinięciu (1). Wygodnie nam będzie zamiast funkcji $T(Z)$ wprowadzić funkcję $t(Z) = e^{-\alpha} . T(Ze^\alpha)$; wtedy $t'(1) = T'(e^\alpha) = 1$, $\ldots$, $t^{(n)}(1) = e^{\alpha(n-1)}\, T^{(n)}(e^\alpha)$. Połóżmy $\alpha_n = (-1)^{n-1}\, t^{(n)}(1)$. Przez kolejne różniczkowanie wzoru (2) i po podstawieniu następnie $Z = e^\alpha$, otrzymamy wzór redukcyjny:

$$(3) \quad \alpha_{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha^n - 1} A_1^{(n+1)} \alpha_n + \frac{\alpha^2}{\alpha^n - 1} A_2^{(n+1)} \alpha_{n-1} + \ldots + \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} A_n^{(n+1)} \alpha_1,$$

gdzie $A_p^{(n)}$ oznacza sumę wszystkich iloczynów po p czynników utworzonych z liczb 1, 2, 3,...., $n-2$, $n-1$. Ponieważ $\alpha_2=1$, otrzymujemy kolejno

$$\alpha_2=\frac{\alpha}{\alpha-1},\quad \alpha_3=\frac{\alpha^2(1+2\alpha)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\ \text{i t. d.}$$

Co się tyczy spółczynników α_n, ze wzoru (3) przy pomocy indukcji wnosimy, iż $\alpha_n>0$ dla każdego n.

Otrzymujemy więc rozwinięcie funkcji nadlogarytmowej na szereg w postaci następującej:

$$(4)\quad t(1+x)=x-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{x^2}{2!}+\frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\cdot\frac{x^3}{3!}+\dots+$$
$$+\dots+(-1)^{n+1}\frac{\alpha^{n-1}Q_n(\alpha)}{(\alpha^{n-1}-1)\dots(\alpha-1)}\cdot\frac{x^n}{n!}+\dots,$$

gdzie $Q_n(\alpha)$ oznacza wielomian względem α stopnia $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Szereg nadlogarytmowy (4) analogiczny jest do znanego szeregu logarytmowego

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\dots$$

3. Zbieżność szeregu nadlogarytmowego.

Wiemy już z poprzedniego, że szereg (4) jest zbieżny. Ustalimy teraz, że promień zbieżności tego szeregu równa się $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$. Dla udowodnienia tego twierdzenia podstawmy w (4) na miejsce Z liczbę przeciwną $-Z$. Wtedy wszystkie współczynniki rozwinięcia są tego samego znaku, a stąd wniosek, iż na kole zbieżności z lewej strony punkt leżący na osi liczb rzeczywistych jest z pewnością punktem osobliwym. Gdyby więc promień zbieżności szeregu nadlogarytmowego (4) był $\varrho<\frac{\alpha-\beta}{\beta}=1-\frac{e^\beta}{e^\alpha}$, to punkt Z_0 tego koła, na osi liczb rzeczywistych między $\frac{e^\beta}{e^\alpha}$ i 1, byłby punktem osobliwym, co jest w sprzeczności z otrzymanem poprzednio wynikiem, iż szereg (1) jest zbieżny dla wszystkich wartości Z_0 większych od e^β. Z drugiej strony punkt $\frac{\beta}{\alpha}$ nie może być punktem regularnym dla badanej gałęzi funkcji $t(Z)$; w rzeczy samej, gdyby promień zbieżności ϱ szeregu (4) był większy od $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, to funkcja $e^{-\alpha}\mathcal{E}(ze^{\alpha})$ przyjmowała by wartość $\frac{\beta}{\alpha}$ dla pewnej wartości zmiennej z, a funkcja $\mathcal{E}(z)$ przybierałaby wartość e^{β} dla pewnej określonej wartości rzeczywistej zmiennej z, co jest niemożliwe, gdyż $\mathcal{E}(z) > e^{\beta}$ dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej z. — Twierdzenie o promieniu zbieżności szeregu nadlogarytmowego jest więc udowodnione.

4. Określenie obszarów D i D'.

Wyodrębnijmy na osi liczb rzeczywistych zbiór punktów utworzonych w sposób następujący: najprzód punkt 0, a następnie punkty otrzymane przy pomocy kolejnego zastosowania przekształceń $z_1 = a^z$ do punktu początkowego 0; oznaczymy te punkty: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$, tak iż $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = a, \ldots$, $\omega_n = a^{\omega_{n-1}}, \ldots$ Zamknijmy ten zbiór, przyłączając doń punkt graniczny e^{β}, W ten sposób otrzymany zbiór oznaczać będziemy (ω).

Zakreślmy teraz, na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z koło C o promieniu R dowolnie wielkim z punktu 0 jako ze środka; zakładamy $R > e^{\beta}$, tak iż wszystkie punkty (ω) są wewnątrz C. Zakreślmy następnie n kół $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, otaczających odpowiednio punkty $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, — przyczem ω_p niech będzie środkiem koła C_p dla $p = 1, 2, \ldots, n$. Promienie tych kół mogą być dowolnie małe, w każdym razie o tyle, że wzajemnie nie zachodzą na siebie. Nakreślmy wreszcie koło γ_n z punktu e^{β} jako ze środka tak, by to koło przechodziło między punktami ω_n i ω_{n+1}, nie przecinając koła C_n. Wewnątrz tych kół C_p i γ_n znajdują się więc wszystkie punkty zbioru (ω).

Możemy teraz określić obszar D. Utworzony jest ze wszystkich punktów płaszczyzny zmiennej zespolonej leżących wewnątrz koła C lub na kole C, a zewnątrz kół C_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ i koła γ_n lub na obwodzie jednege z tych kół. Można krótko powiedzieć, że obszar D otrzymujemy przez usunięcie z płaszczyzny zmiennej zespolonej obszarów, stanowiących otoczenia punktów (ω) i punktu w nieskończoności.

Określmy teraz kontur zamknięty L; utworzymy linję L przy pomocy obwodów kół C, C_p, γ_n i odcinków osi liczb rzeczywistych, łączących obwody tych kół, przyczem odcinki te będziemy brali podwójnie w dwóch przeciwnych sobie zwrotach. Niech A i B oznaczają dwa punkty przecięcia się koła C z osią liczb rzeczywistych, przyczem A niech oznacza ten z tych dwóch punktów, którego odcięta jest dodatnia. Kontur L przebiegniemy w sposób następujący, zacząwszy od punktu A po kole C w kierunku dodatnim obrotów do punktu B, od punktu B przebiegniemy odcinek CC_1 osi liczb rzeczywistych w zwrocie dodatnim do koła C_2, potem opiszemy półkole C_1 w kierunku ujemnym, następnie odcinek C_1C_2, potem wykonamy pół obrotu po kole C_2 i t. d. aż do koła γ_n, które zatoczymy całkowicie, tak by wrócić z powrotem do punku połączenia γ_n z odcinkiem $C_n\gamma_n$; następnie wracamy, przebiegając powtórnie odcinek $C_n\gamma_n$, ale w zwrocie przeciwnym, następnie idziemy po kole C_n, zakreślając to półkole, które dotychczas nie zużytkowaliśmy, następnie biegniemy po odcinku $C_n\, C_{n-1}$, potem zakreślamy półkole C_{n-1} i t. d., aż wrócimy do punktu B; kierunek obrotu na kołach C_p, (dla $p = 1, 2, 3, \ldots, n$) jest więc zawsze ujemny. Od punktu B biegniemy znów po kole C, tak by wrócić w kierunku obrotów dodatnich do punktu początkowego A.

Określiwszy kontur L, możemy teraz przystąpić do określenia obszaru D'. Obszar D' jest w zasadzie identyczny z obszarem D, a tem tylko od niego różne, że odcinki prostolinijne konturu L są tu cięciami i posiadają skutkiem tego dwa brzegi, z których jeden tylko (brzeg) należy do D', a drugi — nie. Przyjmiemy, jako należące do D' te punkty brzegowe, które są granicą punktów wewnętrznych o rzędnej dodatniej. Tak więc obszar D' w przeciwieństwie do D nie jest zamknięty.

5. Twierdzenie pomocnicze.

Chodzi nam teraz o to, by przedłużyć poza dotychczasowy zakres istnienia element funkcji analitycznej, wyrażony przez szereg nadlogarytmowy. W tym celu potrzebnem nam będzie pewne twierdzenie pomocnicze, które tutaj podamy. Przekształceniu $z_1 = a^z$ odpowiada przekształcenie odwrotne $z_{-1} = \mathrm{Lg}\, z$; by to przekształcenie uczynić jednoznacznem, podzielmy płaszczyznę zmiennej zespolonej na pasma prostemi równoległemi do osi liczb rzeczywistych; wzajemna odległość tych prostych niech równa się $\frac{2\pi}{m}$. Jako pierwsze pasmo przyjmiemy obszar punktów $z = x + iy$, dla których $-\frac{\pi}{m} < y \leqslant \frac{\pi}{m}$. Jeżeli teraz umówimy się brać pod uwagę z pośród punktów, które powstają przez poddanie punktu dowolnego M przekształceniu $z_{-1} = \mathrm{Lg}\, z$, tylko ten punkt, który znajduje się w paśmie pierwszem, to ten punkt M_{-1}, o ile istnieje, jest, oczywiście określony jednoznacznie. Stosując to samo przekształcenie parokrotnie kolejno, otrzymamy kolejno M_{-1}, M_{-2}, $M_{-3}, \ldots$, M_{-n} i t. d. Otóż $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$.

W tej postaci to twierdzenie o punkcie granicznym nam nie wystarcza, gdyż chodzić nam będzie o zbieżność jednostajną. Zresztą punkt graniczny nie istnieje lub jest różny od e^{α} o ile punkt M jest jednym z punktów (ω).

Ostatecznie twierdzenie pomocnicze, o które nam chodzi jest następujące:

Jeśli punkt M należy do obszaru D, to $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$, *przyczem zbieżność jest jednostajna.*

Dla zachowania ciągłości, twierdzenie to udowodnimy na końcu tej pracy w „dodatku“.

6. O pewnej własności obszaru D'.

Zależność $Z = a_n(z)$ określimy w sposób następujący: dla $n = 1$, oznacza $Z = a^z$, dla $n > 1$, $a_n(z) = a^{a_{n-1}(z)}$. W ten sposób określona funkcja $Z = a_n(z)$ jest funkcją jednowartościową zmiennej z. Zastanówmy się teraz nad tem, w jakich warunkach odwrócenie tej zależności będzie także jednowartościowe. W przypadku, gdy $n = 1$, wystarczy przeprowadzić w tym celu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z jedno cięcie (coupure), uniemożliwiające obrót naokoło punktu początkowego 0. Gdy $n = 2$, by odwrócenie było jednoznaczne, trzeba już dwóch cięć, by obrót nie tylko naokoło punktu 0, ale także naokoło punktu 1 stał się niemożliwy. W wypadku ogólnym, należy przeprowadzić n cięć, by uniemożliwić obrót naokoło któregokolwiek z punktów $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Otóż z określenia obszaru D' wynika, iż nie wychodząc z D' nie jest możliwe otoczyć którykolwiek z punktów ω_n. Tak więc obszar D' posiada tę własność, iż zależność między wartościami z i Z, związanymi równaniem $z = \mathrm{Log}_n Z$ t. j. $Z = a_n(z)$, gdy Z zmienia się po jakiejkolwiek drodze w sposób ciągły wewnątrz D', jest odwracalnie jednoznaczna, t. j. nietylko jednej wartości z odpowiada jedna wartość Z, ale i odwrotnie, jednej wartości Z odpowiada jedna tylko wartość dla z. Ogół wartości, który osiągamy powyżej wymieniony sposób dla z stanowi jedną gałęź wielowartościowej funkcji $z = \mathrm{Log}_n Z$; jeśli, oprócz tego, dla $Z = e^{\alpha}$, także $z = e^{\alpha}$, to mamy gałęź „główną", którą oznaczymy przez $z = \mathrm{Lg}_n Z$.

Jasna rzecz, iż własność wspomniana ma miejsce jakąkolwiek byłaby liczba całkowita dodatnia n w zależności badanej $Z = a_n(z)$.

7. Rozszerzenie poprzedniej własności obszaru D' na przypadek, gdy zamiast zależności $Z = a_n(z)$ mamy zależność $Z = \mathcal{E}(z)$ Określenie gałęzi głównej funkcji nadlogarytmowej.

Znamy rozwinięcie funkcji $T(Z)$ w szereg według potęg różnicy $Z - e^{\alpha}$; promień zbieżności tego szeregu równa się $e^{\alpha} - e^{\beta}$ jak to wynika z porównania tego szeregu z pokrewnym mu szeregiem nadlogarytmowym. Udowodnimy teraz, że, wychodząc z tego rozwinięcia, jako z elementu funkcji analitycznej, możemy otrzymać przedłużenie naszej funkcji wewnątrz całego obszaru D' nie napotykając żadnego punktu osobliwego, a więc otrzymamy funkcję określoną jednoznacznie wewnątrz D', którą to funkcję nazwiemy gałęzią główną funkcji $\mathcal{T}(Z)$ i oznaczymy przez $T(Z)$. Wzmiankowane przedłużenie analityczne osiągniemy, opierając się na równaniu funkcyjnem, któremu czyni zadość funkcja nadlogarytmowa i które pozwoliło obliczyć współczynniki szeregu nadlogarytmowego.

Szereg, służący nam za punkt wyjścia jest kształtu:

$$T(Z) = (Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)\, e^{\alpha}} (Z - e^{\alpha})^2 + \qquad (6)$$

$$+ \frac{\alpha^2 (2\alpha + 1)}{3!\, (\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)\, e^{2\alpha}} (Z - e\ )^3 - \ldots,$$

zbieżny wewnątrz koła U o promieniu $e^{\alpha} - e^{\beta}$.

Utwórzmy teraz nowy szereg, mnożąc współczynniki poprzedniego szeregu przez α i zastępując Z przez $\mathrm{Lg}\, Z$, gdzie $\mathrm{Lg}\, Z$ oznacza gałęź główną funkcji $\mathrm{Log}\, Z$.

Otrzymany w ten sposób szereg jest zbieżny wewnątrz pewnego obszaru, który już nie jest kołem U o środku e^{α} i o promieniu $e^{\alpha} - e^{\beta}$, lecz, jak łatwo sprawdzić, zawiera punkta, znajdujące się zewnątrz U; niech U_1 oznacza ten nowy obszar, a $f(Z)$ — funkcję określoną przez ten szereg wewnątrz U_1.

Mamy:

$$f(Z) = \alpha(\mathrm{Lg}\, Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha^2 (\mathrm{Lg}\, Z - e^{\alpha})^2}{2!(\alpha - 1)e^{\alpha}} + \tag{7}$$
$$+ \frac{\alpha^3 (2\alpha + 1)(\mathrm{Lg}\, Z - e^{\alpha})^3}{3!(\alpha^3 - 1)(\alpha - 1)e^{2\alpha}} - \ldots$$

W badaniu funkcji $f(Z)$ ograniczymy się do tej części obszaru U_1, która znajduje się wewnątrz D'. Ponieważ wtedy Z nie może otoczyć punktu początkowego 0 na skutek przekrojów obszaru D', gałęź logarytmu Lg Z nie może zmienić się na inną, gdy Z przebiega jakąkolwiek drogę wewnątrz D', tak iż w szeregu (7) gałęź Lg Z nie ulega zmianie.

Obszary zbieżności szeregów (6) i (7), mianowicie U i U_1 mają z pewnością część wspólną, ponieważ Lg Z dąży do granicy e^{α}, gdy Z dąży do e^{α}. Niech σ oznacza tę część wspólną. Niech Z należy do σ; wtedy Z i Lg Z należą jednocześnie do obszaru U. Lecz szereg (7) można napisać w postaci

$$\alpha\, \mathrm{Lg}\left(1 + \frac{Z - e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right) - \frac{\alpha^2}{2!(\alpha - 1)e^{\alpha}}\left\{\mathrm{Lg}\left(1 + \frac{Z - e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)\right\}^2 + \ldots \tag{8}$$

W szeregu (8) możemy $\mathrm{Lg}\left(1 + \frac{Z - e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)$ zastąpić rozwinięciem na szereg według potęg rosnących różnicy $Z - e^{\alpha}$ i w szeregu podwójnym (à double entrée) tak otrzymanym uporządkować wyrazy według potęg $Z - e^{\alpha}$; otrzymamy wtedy właśnie szereg (6) na mocy związków wzajemnych, jakie zachodzą między spółczynnikami szeregu nadlogarytmowego.

Szeregi (6) i (7) są więc identyczne wewnątrz σ. Jeśli teraz obierzemy Z tak, by Lg Z należało do obszaru U, lecz Z — nie, to tym samym osiągamy przedłużenie analityczne funkcji $T(Z)$ wewnątrz obszaru U_1 (z uwzględnieniem cięć D').

W ten sam sposób ustalimy, iż szereg:

$$\alpha^2(\mathrm{Lg}_2\, Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha^3 . (\mathrm{Lg}_2\, Z - e^{\alpha})^2}{2!(\alpha - 1)e^{\alpha}} + \ldots\ldots$$

gdzie $$\mathrm{Lg}_2\, Z - e^{\alpha} = \mathrm{Lg}\left\{1 + \frac{\mathrm{Lg}\left(1 + \frac{Z - e^{\alpha}}{e^{\alpha}}\right)}{e^{\alpha}}\right\},$$

daje przedłużenie analityczne $T(Z)$ wewnątrz obszaru U_2.

W ogólności:

$$\alpha^{p}(\mathrm{Lg}^{p} Z - e^{\alpha}) - \frac{\alpha^{p+1}(\mathrm{Lg}_{p} Z - e^{\alpha})^{2}}{2!(\alpha-1)e^{\alpha}} + \frac{\alpha^{p+2}(2\alpha+1)(\mathrm{Lg}_{p} Z - e^{\alpha})^{3}}{3!(\alpha^{2}-1)(\alpha-1)e^{2\alpha}} - \ldots \tag{9}$$

da nam przedłużenie $T(Z)$ wewnątrz U_p.

Otóż, według twierdzenia pomocniczego, o którym była mowa w ustępie 5, istnieje taka liczba całkowita dodatnia N, iż $\mathrm{Lg}_N Z$ znajduje się wewnątrz obszaru U, o ile tylko Z należy do D i to niezależnie od położenia punktu Z wewnątrz D. Jeśli więc w szeregu (9) liczba $p = N$, mamy przedłużenie analityczne funkcji $T(Z)$, rozciągające się na cały obszar D'. Wewnątrz obszaru D' $\mathrm{Lg}_p Z$ nie może zmienić się na inną gałęź, nie napotkamy również wewnątrz D' żadnego punktu osobliwego; dla każdej wartości zmiennej zespolonej Z wewnątrz D' gałęź główna $T(Z)$ jest więc określona w sposób jednoznaczny.

Osiągnęliśmy w zupełności określenie gałęzi głównej funkcji nadlogarytmowej. Z natury obszaru D' wynika, że $T(Z)$ nie ma punktów osobliwych poza punktami (ω), o ile ograniczymy się do punktów w odległości skończonej. Teraz łatwo sprawdzić, iż punkty (ω) i punkt ∞ są wszystkie punktami osobliwemi (krytycznemi). W rzeczy samej punkt $\omega_1 = 0$ i punkt ∞ są z pewnością punktami osobliwemi, i to nie tylko dla tej gałęzi, ale i dla każdej innej, gdyż $\mathcal{E}(z)$ jest funkcją całkowitą, i przytem taką funkcją całkowitą, która nie posiada zer w odległości skończonej. Co do innych punktów (ω), że są punktami osobliwemi, wywnioskować można z równania funkcyjnego, któremu czyni zadość omawiana gałęź $T(Z)$:

$$T(Z) = \alpha^{n} \,.\, T\{\mathrm{Lg}_{n} Z\}. \tag{10}$$

Jeśli $\mathrm{Lg}_n Z$ jest wewnątrz U, to zależność (10) wynika wprost z samego określenia funkcji $T(Z)$. Jeśli zaś $\mathrm{Lg}_n Z$ nie jest wewnątrz U, to niech p oznacza taką liczbę całkowitą dodatnią, by $\mathrm{Lg}_{n+p} Z$ było wewnątrz U.

W takim razie:

$$T(Z) = \alpha^{n+p} \,.\, T\{\mathrm{Lg}_{n+p} Z\}; \tag{11}$$

oznaczmy: $\mathrm{Lg}_n Z = Z'$; w takim razie $\mathrm{Lg}_p Z' = \mathrm{Lg}_{n+p} Z$ znajduje się w U i

$$(12)\qquad T(Z') = T\{\mathrm{Lg}_n Z\} = \alpha^p . T\{\mathrm{Lg}_p Z'\} = \alpha^p\, T\{\mathrm{Lg}_{n+p} Z\};$$

porównywując związki (12) i (11), otrzymamy (10).

Widzimy więc, iż dla gałęzi głównej $T(Z)$, zależność $Z = \mathcal{E}(z)$ jest jednoznacznie odwracalna, t. j. o ile dla każdej wartości Z bierzemy jako odpowiadającą tę wartość z, która wynika z równania $z = T(Z)$, przyczem Z należy do obszaru D'. Przejdźmy teraz do innych gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$.

8. Określenie i nomenklatura ogółu wszystkich gałęzi funkcji nadlogarytmowej.

Dla otrzymania innych gałęzi funkcji nadlogarytmowej będziemy używali tej samej metody przedłużenia analitycznego, co w ustępie poprzednim, ale odrzucimy ograniczenie, polegające na nieprzekraczaniu cięć należących do konturu L obszaru D', jakkolwiek pozostaniemy zawsze wewnątrz D. Na początek, okrążmy, naprzykład punkt ω_1, t. j. punkt 0. Wyjdziemy z punktu $Z = e^\alpha$, i z wartością główną na $z = T(Z)$, która jest tu równa zeru i dojdziemy w sposób ciągły do dowolnego punktu Z obszaru D, zakreśliwszy drogę, która daje się sprowadzić do pętelki (laçet), otaczającej jeden tylko punkt osobliwy ω_1, i do drogi bezpośredniej (chemin direct), łączącej punkt e z rozważanym punktem Z. Wszystkie rozumowania poprzednie stosują się i tutaj, z tą tylko różnicą, że $\mathrm{Lg}\, Z$ staje się $\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} i$, zależnie od kierunku obrotu; $\mathrm{Lg}_n\, Z$ staje się $\mathrm{Lg}_{n-1} \{\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} i\}$.

Zwróćmy się teraz do wzoru (10); niech liczba n będzie obrana dostatecznie wielką, by $\mathrm{Lg}_n\, Z$ znajdował się stale wewnątrz koła U, gdy Z opisuje naszą drogę, otaczającą punkt ω_1. W chwili, gdy przekraczamy podczas obrotu cięcie, wyraz po stronie lewej we wzorze (10) przestaje wyobrażać gałęź główną funkcji $\mathfrak{T}(Z)$ i otrzymujemy wartość należącą do nowej gałęzi, którą oznaczać będziemy $T_1(Z)$ lub odpowiednio $T_{-1}(Z)$, zależnie od kierunku obrotu, gdy tymczasem po stronie prawej wzoru (10) będziemy mieli w dalszym ciągu gałęź główną, tak iż, powróciwszy do punktu wyjścia Z, będziemy mieli:

$$T_1(Z) = \alpha^n\, T\{\mathrm{Lg}_{n-1} (\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} i)\} = \alpha . T\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} i\},$$

Tak samo:

$$T_{-1}(Z) = \alpha\, T\{\mathrm{Lg}\, Z - \frac{2\pi}{m} i\}.$$

Po k obrotach otrzymamy:

$$T_{\pm k}(Z) = \alpha\, T\{\mathrm{Lg}\, Z \pm \frac{2\pi}{m} ki\},$$

lub po prostu:

$$T_k(Z) = \alpha \,.\, T\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}, \tag{11}$$

ale liczba całkowita k może tu być dodatnia i ujemna. Wzór (11) daje nam wszystkie gałęzie, które otrzymać można, wychodząc z gałęzi głównej, przez obrót naokoło ω_1. Wszystkie te gałęzie mają tę wspólną własność, iż nie mają innych punktów osobliwych, prócz punktów $Z = 0$ i $Z = \infty$; wynika to odrazu ze wzoru (11), będącego określeniem gałęzi $T_k(Z)$.

Przejdźmy teraz do gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$, które można otrzymać przez obrót naokoło punktu $\omega_2 = 1$. Otrzymamy w sposób analogiczny wzór, będący określeniem odpowiedniej gałęzi, w postaci:

$$T_{k,\,o}(Z) = \alpha^2 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_2\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

Dla tych wszystkich gałęzi jedynemi punktami osobliwemi są trzy punkty: $Z = 1$, $Z = 0$, $Z = \infty$. W ten sam sposób, gałęzie, otrzymane przez obrót naokoło punktu $\omega_3 = a$, są określone przez wzór:

$$T_{k,o,o}(Z) = \alpha^3 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_3\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

Jedynemi punktami osobliwemi są tu $Z = \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\ \infty$.

Obrót naokoło ω_4 daje:

$$T_{k,o,o,o}(Z) = \alpha^4 \,.\, T\{\mathrm{Lg}_4\, Z + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

By we wskaźniku uniknąć szeregu zer, będziemy używali innego sposobu znakowania, pisząc, np. $T_{k/1}(Z)$ zamiast $T_k(Z)$, $T_{k/2}(Z)$ zamiast $T_{k,o}(Z)$, $T_{k/3}(Z)$ zamiast $T_{k,o\,o}(Z)$ i t. d.

W wypadku najogólniejszym będziemy mieli:

$$T_{k/p}(Z) = \alpha^{\nu} . T\{\mathrm{Lg}_p Z + \frac{2\pi}{m} ki\},$$

dla oznaczenia gałęzi, którą otrzymujemy, wychodząc z gałęzi głównej i okrążając k razy punkt osobliwy ω_p i ten tylko. W ten sposób otrzymana gałęź niema innych punktów osobliwych, prócz punktów ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$, ω_p i ∞. Tak np., $T_{3/10}(Z)$ oznacza gałęź, którą otrzymamy, krążąc trzykrotnie w kierunku dodatnim naokoło punktu ω_{10}.

Zauważmy teraz, że droga zamknięta, okrążająca pewną liczbę punktów (ω) daje nam, jeśli wyjdziemy, jak zawsze, z gałęzi głównej, ten sam wynik, co okrążenie jednego tylko z pośród tych punktów, mianowicie punktu (ω) o wskaźniku najmniejszym. Dla tego też upada ograniczenie tyczące się warunku, by okrążać jeden tylko punkt osobliwy. Tak np., dla otrzymania gałęzi $T_{2/5}(Z)$ powinniśmy, wychodząc z gałęzi głównej, okrążyć dwa razy punkt ω_5, przyczem możemy drogę tak wybrać, by oprócz punktu ω_5 okrążyć jeszcze dowolną liczbę (i nawet nieskończoną) punktów ω_p, byle tylko dla wszystkich tych punktów $p > 5$; nie wpłynie to wcale na otrzymany wynik.

Zauważmy także, że obrót naokoło punktu ∞ daje to samo, co obrót naokoło punktu 0, ze zmianą zwrotu jedynie.

Wychodząc z gałęzi głównej nie ma już możności otrzymania bezpośrednio gałęzi nowych; punkt e^{β} nie wchodzi w rachubę, gdyż nie da się punkt e^{β} otoczyć bez okrążenia nieskończonej liczby punktów (ω) i dla wyświetlenia wyniku tego okrążania wystarczy zastosować poprzednią uwagę o najmniejszym wskaźniku.

Ponieważ jednak gałęź $T_{k/p}(Z)$ posiada punkty osobliwe, możemy otrzymać nowe gałęzie wychodząc z $T_{k/p}(Z)$ i okrążając punkty osobliwe ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_p tej gałęzi.

Gałęzie $T_{k/1}(Z)$ nie mogą, oczywiście, dać nic nowego, ale już wychodząc z gałęzi $T_{k/2}(Z)$, przez okrążanie punktu $\omega_1 = 0$, otrzymamy szereg nowych gałęzi, które oznaczymy zapomocą wskaźnika $(k/2, \nu/1)$. Gałęź tę otrzymamy, wychodząc z gałęzi głównej, jeśli najprzód okrążymy k razy punkt ω_2 a następnie ν razy punkt ω_1, przyczem liczby k i ν mogą być dodatnie lub ujemne, zależnie od zwrotu. Mamy więc dla określenia tej gałęzi wzór

$$T_{k/2,\nu/1}(Z) = \alpha^2 . T\{\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m}\nu i) + \frac{2\pi}{m} ki\}.$$

W podobny sposób rozumując dalej, dojdziemy do gałęzi $T_N(Z)$, w której wskaźnik N ma postać

$N = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1)$, tak iż $T_N(Z)$ będzie gałęzią, określoną przez wzór:

$$T_N(Z) = \alpha^p . T\{\mathrm{Lg}\,[\mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\ldots\{\mathrm{Lg} < \mathrm{Lg}\,(\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m} k^{(1)} i) + \frac{2\pi}{m} k^{(2)} i > +$$

$$+ \frac{2\pi}{m} k^{(3)} i\}\ldots) + \frac{2\pi}{m} k i^{(p-1)}] + \frac{2\pi}{m} k i^{(p)}\}.$$

Gałęź tę otrzymamy z gałęzi głównej, otaczając najprzód $k^{(p)}$ razy z rzędu punkt ω_p, następnie okrążymy punkt ω_{p-1} zrzędu $k^{(p-1)}$ razy i t. d. ..., wreszcie $k^{(2)}$ razy zrzędu naokoło ω_2 i $k^{(1)}$ naokoło ω_1.

Wszystkie te gałęzie są funkcjami jednowartościowemi zmiennej Z wewnątrz D'.

9. Z u p e ł n o ś ć p o d a n e j e n u m e r a c j i i n o m e n k l a t u r y g a ł ę z i f u n k c j i $\mathfrak{T}(Z)$.

Niech Z oznacza wartość, należącą do obszaru D; w ustępie poprzednim otrzymaliśmy pewien zbiór wartości funkcji odwrotnej $z_N = T_N(Z)$, gdzie N wskaźnik oznacza $(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1)$, odpowiadający danej wartości zmiennej Z. Zbiór ten, jest przeliczalny, możemy więc go uporządkować w postaci ciągu (A): $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k, \ldots$ Udowodnimy teraz, że te gałęzie zbioru (A) wyczerpują ogół wszystkich wartości funkcji $\mathfrak{T}(Z)$.

Na mocy założenia, mamy $\mathcal{E}(z_k) = Z$, ponieważ z_k należy do (A). Przypuśćmy, iż istnieje jeszcze jakaś wartość z', nie ujęta zbiorem (A), a czyniąca zadość temu samemu warunkowi $\mathcal{E}(z') = Z$, Z równania funkcyjnego, któremu czyni zadość funkcja nadwykładnicza, otrzymujemy

$$\mathcal{E}\left(\frac{z'}{\alpha^n}\right) = \mathrm{Log}'_n\, Z, \tag{13}$$

gdzie po drugiej stronie równości $\mathrm{Log}'_n\, Z$ oznacza pewną, zupełnie określoną wartość funkcji wielowartościowej $\mathrm{Log}_n\, Z$, wartość, którą nie potrzebujemy zresztą bliżej się zajmować. Ponieważ $\mathcal{E}(o) = e^\alpha$, i funkcja $E(z)$ jest ciągła, we wzorze (13) możemy wziąść liczbę całkowitą n dostatecznie wielką, by $\left|\frac{z'}{\alpha^n}\right|$ było tak małe, jak się podoba, a więc tak, by nierówności:

$$(14) \qquad \left|\frac{z'}{\alpha^n}\right| < \varepsilon \text{ i } \left|\mathcal{E}\left(\frac{z'}{\alpha^n}\right) - e^{\alpha}\right| < \eta$$

były spełnione, jakkolwiek małemi byłyby liczby dodatnie ε i η.

Istnieje jedna tylko gałęź funkcji odwrotnej $\mathcal{T}(Z)$, przyjmująca wartość $= 0$ dla $Z = e^{\alpha}$. Punkt analityczny $Z = e^{\alpha}$, $z = 0$ jest punktem regularnym; istnieje więc koło o środku w punkcie $z = 0$ na płaszczyźnie zmiennej z takie, że wszystkie punkty wewnątrz tego koła należą do gałęzi głównej. Jeśli więc we wzorze (14) wybierzemy liczbę dodatnią ε mniejszą od promienia wspomnianego koła, $\frac{z'}{\alpha^n}$ będzie należeć do gałęzi głównej, a więc, przez odwrócenie zależności (13), otrzymamy:

$$(15) \qquad \frac{z'}{\alpha^n} = T\{\mathrm{Log}'_n Z\}, \text{ t. j. } z' = \alpha^n . T\{\mathrm{Log}'_n Z\}.$$

Zauważymy teraz, że $\alpha^n . T\{\mathrm{Log}'_n (Z)\}$ we wzorze (15) po stronie drugiej, nie jest niczem innem, jak jedną z wartości funkcji odwrotnej z_k, należącą do zbioru (A); aby utożsamić z' z jedną z wartości z_k ciągu (A), należy tylko uwzględnić, którą z gałęzi funkcji $\mathrm{Log}_n Z$ przedstawia wchodząca w skład wzoru (15) gałęź $\mathrm{Log}'_n Z$. Twierdzenie nasze zostało więc udowodnione.

10. Uogólnienie zależności funkcyjnej, której czyni zadość funkcja nadlogarytmowa.

Dla wartości rzeczywistych zmiennej Z zachodzi zależność funkcyjna podstawowa:

$$T(a^Z) = a . T(Z),$$

gdzie po obu stronach występuje gałęź główna. Chodzi nam teraz o postać, jaką przyjmuje ta zależność, gdy nie będziemy się ograniczali do gałęzi głównej i do wartości rzeczywistych zmiennej Z. Używając zwykłych znakowań, mamy $\mathcal{E}(z) = Z$, $\mathcal{E}(az) = a^Z$, a więc, przez odwrócenie $z = T_N(Z)$, $az = T_{N'}(a^Z)$, tak ostatecznie otrzymujemy

$$T_N(a^Z) = a . T_{N'}(Z),$$

gdzie N i N' zastępują wskaźniki złożone, o których była mowa w ustępie 8, przy enumeracji gałęzi funkcji $\mathfrak{T}(Z)$.

Należy znaleźć związek, między wskaźnikami N i N'; związek ten, jak zobaczymy za chwilę, zależy od położenia punktu Z na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W tym celu podzielmy płaszczyznę zmiennej zespolonej na pasma prostemi równoległemi, jak w ustępie 5. Podporządkujmy liczbę zero pasmu środkowemu, zawierającemu oś liczb rzeczywistych; liczby 1, 2, 3,... i t. d. podporządkujemy kolejno pasmom następnym ponad osią liczb rzeczywistych, a liczby -1, -2,... pasmom poniżej tej osi. Niech Z znajduje się w pasmie ν. Wychodząc z wartości $Z = e^{\alpha}$, niech Z opisze drogę C, okrążającą $k^{(p)}$ razy z rzędu punkt krytyczny ω_p, następnie $k^{(p-1)}$ razy punkt $\omega_{p-1}, \ldots$, wreszcie $k^{(1)}$ razy punkt ω_1 i kończącą się w punkcie Z w paśmie ν. Jeśli teraz w zależności

$$T(a^Z) = \alpha . T(Z),$$

która ma miejsce dla $Z = e^{\alpha}$ i w otoczeniu tego punktu, przedłużymy analitycznie funkcje, stojące po obu stronach równości, po drodze l aż do punktu Z w paśmie ν, to zauważymy, że $T(Z)$ zamieni się na $T_{N'}(Z)$, a $T(a^Z)$ na $T_N(a^Z)$, przyczem na skutek drogi l będziemy mieli:

$$N' = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ k^{(p-2)}/p-2, \ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1), \text{ a}$$

$$N = (k^{(p)}/p+1,\ k^{(p-1)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots,\ k^{(1)}/2,\ \nu/1),$$

tak iż otrzymujemy:

$$T_N(a^Z) = T_{N'}(Z).$$

Wzorowi temu można nadać postać $T_N(Z) = \alpha . T_{N'}\{\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m}\nu i\}$, gdzie N i N' mają te same znaczenia, co poprzednio.

Tak samo znajdziemy:

$$T_\lambda(Z) = \alpha^2 . T_{N'}\{\mathrm{Lg}(\mathrm{Lg}\, Z + \frac{2\pi}{m}\nu_1 i) + \frac{2\pi}{m}\nu_2 i\},$$

gdzie

$$N' = (k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1), \text{ a}$$

$$N = (k^{(p)}/p+2,\ k^{(p-1)}/p+1,\ k^{(p-2)}/p, \ldots,\ k^{(1)}/3,\ \nu_2/2,\ \nu_1/1).$$

I tak dalej.

CZĘSC DRUGA.

Określenie pewnej klasy funkcji całkowitych.

11. O funkcji analitycznej $\mathrm{Log}^{(z)}\, \mathcal{E}(z)$.

$\mathrm{Log}\, \mathcal{E}(z)$ może być określona jako funkcja analityczna zmiennej z, pod warunkiem, jak zobaczymy za chwilę, że w $\mathrm{Log}\, \mathcal{E}(z)$ występująca gałęź funkcji logarytmowej była zmienną wraz ze zmienną z, wskutek czego, dla zaznaczenia tego faktu, pisać będziemy $\mathrm{Log}^{(z)}\, \mathcal{E}(z)$. Określenie nasze będzie następujące: dla $z=0$ i w otoczeniu tego punktu weźmiemy gałęź główną $\mathrm{Lg}\, \mathcal{E}(z)$, tak iż $\mathrm{Log}^{(o)}\, \mathcal{E}(o) = e^{\alpha}$. W ten sposób, w otoczeniu punktu $z = o$ możemy określić element funkcji analitycznej, gdyż w punkcie $z = o$ znana jest wartość funkcji $\mathrm{Lg}\, \mathcal{E}(z)$ i jej kolejnych pochodnych wszystkich rzędów. Ponieważ funkcja określona przez ten element jest, jak wiemy, funkcją całkowitą, więc odpowiadający temu elementowi szereg jest zbieżny w całej płaszczyźnie i identyczny z rozwinięciem na szereg funkcji $\mathcal{E}\left(\frac{z}{a}\right)$. Mamy więc

$$\mathrm{Log}^{(z)}\, \mathcal{E}(z) = \mathcal{E}\left(\frac{z}{a}\right). \tag{1}$$

Oznaczmy $\mathcal{E}(z)$ przez Z. Wtedy z musi być jedną z wartości $I_{N'}(Z)$, przyczem niech będzie

$$N' = (\nu^{(n)}/n,\ \nu^{(n-1)}/n-1, \ldots,\ \nu^{(2)}/2,\ \nu^{(1)}/1);$$

w takim razie, jak wiemy z ustępu 10,

$$N = (\nu^{(n)}/n-1,\ \nu^{(n-1)}/n-2, \ldots,\ \nu^{(3)}/2,\ \nu^{(2)}/1),$$

a gałęź $\mathrm{Log}^{(z)}\, \mathcal{E}(z)$ jest wtedy właśnie równa

$$\mathrm{Lg}\, \mathcal{E}(z) + \frac{2\pi}{m} . \nu^{(1)} . i.$$

W ten sam sposób traktowalibyśmy funkcje

$$\mathrm{Log}_2^{(z)}\, \mathcal{E}(z),\ \mathrm{Log}_3^{(z)}\, \mathcal{E}(z), \text{ i t. d.}$$

12. Określenie pewnej klasy funkcji całkowitych. Warunek dostateczny przynależności funkcji do tej klasy.

Zajmiemy się teraz pewnem twierdzeniem teorji funkcji analitycznych ogólniejszej natury; tem nie mniej w rozważaniach naszych będziemy posługiwali się własnościami funkcji $\mathfrak{C}(Z)$. Niech $\Theta(\zeta)$ będzie funkcją daną; utwórzmy ciąg funkcji $\Theta(\zeta)$, $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta),\ldots$, $\Theta_n(\zeta),\ldots$, przyczem $\Theta_1(\zeta)=\mathrm{Log}^{(\zeta)_1}\Theta(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta)=\mathrm{Log}^{(\zeta)_2}\Theta_1(\zeta),\ldots$, $\Theta_n(\zeta)=\mathrm{Log}^{(\zeta)_n}\Theta_{n-1}(\zeta)\ldots$. Funkcję $\Theta(\zeta)$ zaliczymy do klasy K wtedy i tylko wtedy, jeśli wszystkie funkcje ciągu nieskończonego $\Theta(\zeta)$, $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta),\ldots$, $\Theta_n(\zeta),\ldots$ są funkcjami całkowitemi. Należy jeszcze określić ściśle, co oznaczają symbole $\mathrm{Log}^{(\zeta_1)}\Theta(\zeta)$, $\mathrm{Log}^{(\zeta_2)}\Theta(\zeta)$ i t. d. Uczynimy to podobnie, jak w ustępie 11. Niech ζ_1 oznacza liczbę, spełniającą równanie $\Theta(\zeta_1)=b$, gdzie $b>e^\beta$ i rzeczywiste. Dla $\zeta=\zeta_1$, przyjmiemy $\Theta_1(\zeta_1)=\mathrm{Lg}\ b$, $\Theta_2(\zeta_1)=\mathrm{Lg}_2\ b,\ldots$, $\Theta_n(\zeta_1)=\mathrm{Lg}_n\ b,\ldots$; wszystkie te liczby $\mathrm{Lg}_n\ b$ są rzeczywiste, ponieważ $b>e^\beta$. Dla $\zeta=\zeta_2$ i w otoczeniu dostatecznie małem tego punktu bierzemy $\mathrm{Log}^{(\zeta)}$ równe Lg; funkcja $\Theta_1(\zeta)$ ma wartość Lg b w punkcie ζ_1; pochodne wszystkich rzędów tej funkcji mają też wartości w zupełności określone i rzeczywiste dla $\zeta=\zeta_1$; widzimy więc, iż odpowiadający element funkcji analitycznej, mianowicie szereg potęgowy rozwinięcia $\Theta_1(\zeta)$ jest w zupełności przez nasze założenia określony; ponieważ zaś zakładamy oprócz tego, że $\Theta_1(\zeta)$ jest funkcją całkowitą, jest ta funkcja określona przez otrzymany szereg w całej płaszczyźnie zmiennej ζ. W ten sam sposób określimy $\Theta_2(\zeta)$ $\Theta_3(\zeta)$ i t. d. Te wyjaśnienia konieczne były dla wyjaśnienia znaczenia symbolu Log we wzorach, określających $\Theta_1(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta)$, i t. d. Widzimy, iż symbol Log oznacza wartość, która może być wartością główną, np., jeśli ζ należy do otoczenia punktu ζ_1, ale może być jakąkolwiek wartością inną, w zależności od ζ.

Czy klasa K nie jest pusta? By funkcja $\Theta_2(\zeta)$ była funkcją całkowitą, trzeba i wystarcza, by $\Theta(\zeta)=a^{\Theta_1(\zeta)}=e^{m\Theta_1(\zeta)}$; by, oprócz tego, $\Theta_2(\zeta)$ było funkcją całkowitą, musimy wziąść $\Theta(\zeta)=a_2[\Theta_2(\zeta)]$ i t. d. Nie jest wcale widocznem, a priori, że można uczynić zadość warunkowi, by wszystkie funkcje $\Theta_n(\zeta)$, jakąkolwiek byłaby liczba całkowita dodatnia n, były funkcjami całkowitemi.

Otóż jest to w istocie możliwe. Wystarczy wziąść $\Theta(\zeta)=\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, gdzie $\mathcal{E}(z)$ oznacza funkcję nadwykładniczą, a $H(\zeta)$ dowolną funkcję całkowitą zmiennej ζ. W rzeczy samej, wtedy

$$\Theta_1(\zeta)=\mathcal{E}\left\{\frac{1}{a}H(\zeta)\right\};\quad \Theta_2(\zeta)=\mathcal{E}\left\{\frac{1}{a^2}H(\zeta)\right\},\ \ldots\ldots,$$

$\Theta_n(\zeta) = \mathcal{E}\left\{\frac{1}{\alpha^n} H(\zeta)\right\}, \ldots$, i wszystkie te fuunkcje są funkcjami całkowitemi.

Klasa K nie jest więc pusta.

13. Warunek konieczny i dostateczny przynależności funkcji do klasy K.

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne, iż każda funkcja, należąca do klasy K jest kształtu $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, gdzie $H(\zeta)$ jest funkcją całkowitą.

Przypuśćmy więc, iż $\Theta(\zeta)$ należy do klasy K. Utwórzmy funkcję $H(\zeta)$ przy pomocy funkcji nadlogarytmowej i funkcji $\Theta(\zeta)$, przyczem określimy ją w otoczeniu punktu $\zeta = \zeta_1$, (patrz 12); mianowicie w punkcie ζ_1 i w otoczeniu punktu ζ_1 funkcja $H(\zeta)$ będzie określona przez $T\{\Theta(\zeta)\}$; mamy w ten sposób element łunkcji analitycznej, określony przez pewien szereg, zbieżny wewnątrz pewnego koła o środku w punkcie ζ_1. Określmy funkcję $H(\zeta)$ w całym obszarze istnienia, jako funkcję analityczną, którą otrzymamy przez przedłużenie analityczne tylko co wspomnianego elementu; jasna rzecz, $T\{\Theta(\zeta)\}$ zmieni się na $T_N\{\Theta(\zeta)\}$, gdzie wskaźnik gałęziowy N zależeć będzie od ζ i od drogi, wzdłuż której uskutecznialiśmy przedłużenie od ζ_1 do ζ, przynajmniej od tej drogi zależeć by mógł. Lecz w danym razie droga wpływu mieć nie będzie; funkcja $H(\zeta)$ jest funkcją jednowartościową. W rzeczy samej, dla $\zeta = \zeta_1$, mamy $\Theta(\zeta_1) = b$ i $H(\zeta_1) = T(b)$, czyli wartość rzeczywistą. Począwszy od punktu $\zeta = \zeta_1$, wyobraźmy sobie jakąkolwiek drogę l po której dojść można do punktu ζ. — Mamy $H(\zeta) = \mathfrak{T}(Z)$, gdzie $Z = \Theta(\zeta) = a_n\{\Theta_n(\zeta)\}$, ponieważ $\Theta(\zeta)$ należy do klasy K, tak, iż $H(\zeta) = \mathfrak{T}\{a_n[\Theta_n(\zeta)]\}$; gdy ζ opisuje kontur zamknięty, jakikolwiek zresztą, $\Theta_n(\zeta)$ opisuje także kontnr zamknięty w odległości skończonej, a więc $Z = a_n\{\Theta_n(\zeta)\}$ opisze kontur zamknięty, który nie otacza żadnego z punktów $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, (patrz 6). Ponieważ w poprzedniem rozumowaniu n jest liczbą dowolną, więc możemy poprzedni wynik zastosować do wszystkich punktów zbiorn (ω); tak więc, gdy ζ opisuje drogę zamkniętą l, $Z = \Theta(\zeta)$ opisze też drogę zamkniętą l', nie otaczającą żadnego z punktów (ω). Nie można ztąd wnioskować, oczywiście, iż l' nie przecina cięć konturu L, ograniczającego obszar D', tak iż funkcja $H(\zeta)$, identyczna z funkcją $T\{\Theta(\zeta)\}$ w otoczeniu punktu $\zeta = \zeta_1$, staje się równą funkcji $T_N\{\Theta(\zeta)\}$ przy odpowiedniej wartości ζ.

Tem nie mniej twierdzić możemy, że funkcja $H(\zeta)$ jest funkcją jednowartościową w zakresie istnienia. Pozostaje zbadać, jakie okoliczności zachodzą, gdy droga l' którą opisuje Z przechodzi przez którykolwiek z punktów (ω). Zauważmy przedewszystkiem, iż przez punkt ω_1 kontur l' przejść nie może, gdyż równanie $\Theta(\zeta)=\omega_1=0$ nie ma pierwiastków. Zbadajmy teraz, co będzie miało miejsce, gdy od punktu ζ_1 począwszy, zbliżać się będziemy do punktu ζ_2, przyczem $\Theta(\zeta_2)=\omega_2=1$; drodze l od ζ_1 do ζ_2 odpowiada w płaszczyźnie zmiennej Z droga l' od punktu b do punktu ω_2. Twierdzę, iż droga l' musi przeciąć kontur L na odcinku między kołami C i C_1. W rzeczy samej, z $\Theta(\zeta_2)=1$ wynika, iż $\Theta_1(\zeta_2)=$ $=\frac{2\pi}{m}ki$, przyczem $k=\pm 1, \pm 2, \ldots.$ *ale wartość liczbowa* $k=0$ *jest wykluczona (K).* W otoczeniu punktu ζ_1 mamy

$$H(\zeta)=T(Z)=a\,T(Z'), \tag{2}$$

gdzie $Z=\Theta(\zeta)$, $Z'=\mathrm{Lg}^{(\zeta)}\,\Theta(\zeta)=\mathrm{Lg}^{(\zeta)}\,Z$, przyczem tu $\mathrm{Lg}^{(\zeta)}$ oznacza Lg. Gdy teraz ζ opisuje drogę l, a Z drogę l', we wzorze (2) współczynnik przy i w Z' zmienia się od 0 do $\frac{2\pi}{m}k$, (przyczem $k \neq 0$). Dowodzi to, iż droga l', którą nakreślił punkt Z w płaszczyźnie zmiennej zespolonej Z, musiała przeciąć przynajmniej raz cięcie na konturze L, i to na odcinku między kołami C i C_1; oczywiście, droga l' może oprócz tego przeciąć kontur L i w innych miejscach. Gdy więc, przedłużając funkcję $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_2 wzdłuż drogi l, dojdziemy do punktu ζ_2, to otrzymamy jednocześnie zmianę gałęzi głównej $T(Z)$ na gałęź $T_N(Z)$, przyczem wskaźnik gałęziowy N ma wartość:

$$N=(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1, \ldots, k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1),$$

przyczem $k^{(p)}, k^{(p-1)}, \ldots, k^{(2)}$ mogą być dowolnemi liczbami ciągu $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$, gdy tymczasem $k^{(1)}=k \neq 0$.

Tak więc w otoczeniu punktu ζ_2 mamy: $H(\zeta)=T_N\{\Theta(\zeta)\}$; lecz dla każdej gałęzi funkcji nadlogarytmowej o wskaźniku N, w którym $k^{(1)} \neq 0$, punkt $Z=1$ jest punktem regularnym. W punkcie $a=\zeta_2$ funkcja jest regularna i ma wartość w zupełności określoną $H(\zeta_2)=T_N(1)$.

Tak samo udowodnimy, że funkcja $H(\zeta)$ jest regularna w punkcie ζ_3, gdzie ζ_3 spełnia warunek $\Theta(\zeta_3)=\omega_3$. Przedłużając funkcję $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_3, przekonamy się, że funkcja $\Theta_2(\zeta)$ w otoczeniu punktu ζ_3 osiągnie wartość, którą można przedstawić w postaci: $\mathrm{Lg}\,[\mathrm{Lg}\ \Theta(\zeta)+\frac{2\pi}{m}\nu_1 i]+\frac{2\pi}{m}\nu_2$, gdzie liczby ν_1 i ν_2 nie mogą jednocześnie mieć wartości zerowe, gdyż inaczej w punkcie ζ_3 mielibyśmy $\Theta_2(\zeta_3)=0$, co jest niemożliwe. Przedłużając więc $H(\zeta)$ od ζ_1 do ζ_3 wzdłuż drogi l, dojdziemy do punku ζ_3 z wartością $T_N(Z)$ funkcji nadlogarytmowej, przyczem

$$N=(k^{(p)}/p,\ k^{(p-1)}/p-1,\ldots,\ k^{(2)}/2,\ k^{(1)}/1),$$

przyczem $k^{(2)}=\nu_2$, $k^{(1)}=\nu_1$, tak iż $k^{(2)}$ i $k^{\ )}$ nie mogą być jednocześnie zerami. W otoczeniu więc punktu ζ_3 mamy $H(\zeta)=T_N\{\Theta(\zeta)\}$, a w samym punkcie ζ_3 mamy $H(\zeta_3)=T_N(\omega_3)$. Regularność funkcji $H(\zeta)$ w punkcie ζ_3 wynika ztąd, iż punkt ω_3 jest punktem regularnym dla omawianej gałęzi $T_N(Z)$ funkcji nadlogarytmowej. To samo rozumowanie stosuje się do każdego punktu ζ_n, spełniającego równanie $\Theta(\zeta)=\omega_n$. Dochodząc do punktu ζ_n, otrzymamy wartość funkcji $H(\zeta)$, która — przez pośrednictwo funkcji nadlogarytmowej — wyraża się gałęzią o wskaźniku N, przyczem wskaźnik ten jest tego rodzaju, iż dla gałęzi $T_N(Z)$ punkt $Z=\omega_n$ jest punktem regularnym i $H(\zeta_n)=T_N(\omega_n)$.

Przejdźmy teraz do punktów ζ_β, spełniających warunek $\Theta(\zeta_\beta)=e^\beta$. Punkty te są odosobnione. Ztąd wnioskujemy, iż zakres istnienia funkcji $H(\zeta)$ obejmuje z pewnością całą płaszczyznę zmiennej ζ. — Ponieważ funkcja $H(\zeta)$ jest jednowartościowa, więc punkty ζ_β, o ile nie są punktami regularnymi, mogą być tylko punktami istotnie osobliwymi lub biegunami. Gdyby punkt ζ_β był więc punktem osobliwym dla $H(\zeta)$, to musiałby być [1]) punktem istotnie osobliwym dla funkcji $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, co jest niemożliwe, bo jak łatwo sprawdzić, funkcja $\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$ jest funkcją całkowitą, t. j. regularną w całej płaszczyźnie. Tak więc $H(\zeta)$ jest funkcją całkowitą. Ponieważ $H(\zeta)=\mathcal{T}\{\Theta(\zeta)\}$, wnioskujemy, iż $\Theta(\zeta)=\mathcal{E}\{H(\zeta)\}$, co trzeba było udowodnić.

---

[1]) Dowód tego twierdzenia jest bardzo łatwy i pomieszczony będzie w dodatku.

DODATEK.

Dowód twierdzenia pomocniczego.

1. Wysłowienie twierdzenia pomocniczego i znakowanie.

Mamy zamiar udowodnić w tym dodatku twierdzenie pomocnicze, którem posługiwaliśmy się w ciągu niniejszej pracy. Twierdzenie to jest następujące: niech M oznacza dowolny punkt obszaru D; w takim razie $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^{\alpha}$, przyczem zbieżność ma miejsce jednostajnie.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Punkt M odpowiada wartości $z = x + iy$ na płaszczyźnie zmiennej zespolonej; punkt M_{-n} odpowiada w ten sam sposób punktowi $z_{-n} = x_{-n} + iy_{-n}$, przyczem $z_{-n} = \mathrm{Lg}_n\, z$, Lg_n ma to samo znaczenie, jakie nadaliśmy temu symbolowi poprzednio. Wprowadźmy jeszcze spółrzędne biegunowe r_{-n} i Θ_{-n} punktu M_{-n}, tak iż $x_{-n} = r_{-n} \cos \Theta_{-n}$, $y_{-n} = r_{-n} \sin \Theta_{-n}$. Twierdzenie nasze może więc wysłowić w sposób następujący: dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$, istnieje liczba N, niezależna od położenia punktu M wewnątrz D, taka, iż dla każdego $n > N$, zachodzą nierówności

$$|\Theta_{-n}| < \varepsilon, \quad |x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon$$

2. Dowód twierdzenia pomocniczego w wypadku, gdy punkt M znajduje się w obszarze, stanowiącym pewną część obszaru D.

Dowód twierdzenia pomocniczego podzielimy na dwie części. Nakreślmy na płaszczyźnie zmiennych x, y prostą $x = e^{\beta} + \varepsilon_0$; prosta ta podzieli płaszczyznę zmiennej zespolonej z na dwie półpłaszczyzny Q_1 i Q_2. W tym ustępie ograniczymy się do punktów M, należących do Q_2; w takim razie $x \geqslant e^{\beta} + \varepsilon_0$, gdzie $\varepsilon_0 > 0$, i może być liczbą tak małą, jak się podoba, w każdym razie mniejsza od $\dfrac{e^{\alpha} - e^{\beta}}{2}$.

Zauważmy przedewszystkiem, iż jeśli M należy do obszaru Q_2, to punkty $M_{-1}, M_{-2}, \ldots$ i wszystkie następne należą do tegoż obszaru Q_2.

W rzeczy samej, $x_{-1} = \mathrm{Lg}\, r \geqslant \mathrm{Lg}\,(e^{\beta} + \varepsilon_0) > e^{\beta} + \varepsilon_0$; tak więc x_{-1} należy do Q_2 i t. d.

Możemy przyjąć, bez zmniejszenia ogólności dowodu, iż $\Theta \geqslant 0$; w takim razie będzie zawsze $\Theta_{-n} \geqslant 0$, przyczem, o ile M należy do Q_2, to również $\Theta_{-n} < \frac{\pi}{2}$.

Podamy teraz szereg prostych zależności, którymi posługiwać się będziemy w toku rozumowania.

Z równości:

$$x_{-(n+1)} = \mathrm{Lg}\, r_{-n}, \tag{1}$$

wynikają następujące nierówności:

$$x_{-(n+1)} \geqslant \mathrm{Lg}\, x_{-n}, \tag{2}$$

$$r_{-(n+1)} \geqslant \mathrm{Lg}\, r_{-n}, \tag{2'}$$

przyczem równość zachodzi tylko wtedy, gdy punkt M, należąc do Q_2, leży na osi liczb rzeczywistych. Dalej, mamy:

$$my_{-(n+1)} = \Theta_{-n}, \quad \text{gdzie } m = ae^{-a} \tag{3}$$

Wreszcie z poprzednich otrzymamy

$$\frac{e^\alpha}{\alpha r_{-(n+1)}} < \frac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}} < \frac{e^\alpha}{\alpha x_{-(n+1)}} \tag{4}$$

Ze wzorów (1), (2), (3) i (4) wysnujemy teraz szereg wniosków.

1°. Weźmy pod uwagę dwa ciągi:

$$r,\ r_{-1},\ r_{-2}, \ldots,\ r_{-n}, \ldots \tag{5}$$

$$x,\ x_{-n},\ x_{-2}, \ldots,\ x_{-n}, \ldots \tag{6}$$

Na mocy (1) liczby drugiego ciągu są logarytmami liczb pierwszego ciągu. Jeśli więc jeden z tych ciągów dąży do granicy e^α, to i drugi posiada tę samą granicę; tak samo oba ciągi są jednocześnie rosnące lub jednocześnie malejące, o ile to ma miejsce dla jednego z nich.

2°. Jeśli $\Theta = 0$, ciągi (5) i (6) są identyczne. Ciąg jest rosnący, o ile $x < e^\alpha$ (lecz $x > e^\beta + \varepsilon_0$); ciąg jest malejący; jeśli $x > e^\alpha$; jeśli $x = e^\alpha$, wszystkie wyrazy ciągu są sobie równe. W każdym z tych trzech przypadków granica jest e. Niech N oznacza większą z dwóch liczb

$$E\left\{\lg_\alpha \frac{T(R)}{T(e^\alpha + \varepsilon)}\right\} + 1 \quad \text{i} \quad E\left\{\lg_\alpha \frac{T(e^\beta + \varepsilon_0)}{T(e^\alpha - \varepsilon)}\right\} + 1,$$

gdzie R jest promieniem koła C, a $E(z)$ oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w z. O ile $n > N$ i M należy zarazem do D i Q_2, to

$$|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon.$$

Tak więc we wszystkich rozważaniach następnych możemy przyjąć, iż $\Theta > 0$.

3°. Jeśli w ciągu (6) mamy $x_{-k} \geqslant e^{\alpha}$, to wszystkie następne wyrazy spełniają ten sam warunek, t. j. $x_{-(k+l)} > e^{\alpha}$, (dla $l > 0$). To samo się stosuje do ciągu (5). To wynika z (2) i (2').

4°. Jeśli w (6) mamy $x_{-k} < e^{\alpha}$, to $x_{-(k+1)} > x_{-k}$; tak samo nierówność $r_{-k} < e^{\alpha}$ pociąga nierówność $r_{-(k+1)} > r_{-k}$. Wynika to też z (2) i (2').

5°. Jeśli założymy, że wszystkie wyrazy ciągów (5), a więc i (6) są mniejsze od e^{α}, to na zasadzie poprzedniego ciągi te są rosnące, i jak łatwo udowodnić, dążą do granicy e^{α}. W rzeczy samej, połóżmy $x < e^{\alpha}$; wtedy

$$x_{-1} = \operatorname{Lg} r \geqslant \operatorname{Lg} x, \quad \text{czyli } x_{-1} > p_1, \quad \text{gdzie } p_1 = \operatorname{Lg} x;$$

$$x_{-2} = \operatorname{Lg} r_{-1} > \operatorname{Lg} x_{-1} > \operatorname{Lg} p_1, \text{ czyli } x_{-2} > p_2, \text{ gdzie } p_2 = \operatorname{Lg} p_1;$$

. . . .

$$x_{-(l+1)} = \operatorname{Lg} r_{-l} > \operatorname{Lg} x_{-l} > \operatorname{Lg} p_l, \text{ czyli } x_{-(l+1)} > p_l, \text{ gdzie } p_l = \operatorname{Lg} p_{l-1};$$

. . . .

Lecz $\lim\limits_{l=\infty} p_l = e^{\alpha}$, a jednocześnie $p_l < x_{-(l+1)} < e^{\alpha}$; ztąd wynika, iż $\lim\limits_{n=\infty} x_{-n} = e^{\alpha}$.

6°. Tak więc, albo wszystkie wyrazy ciągów (5) i (6) są mniejsze od e^{α}, i wtedy ciągi zmierzają do granicy e, albo też, zacząwszy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągu są większe od e^{α}. Połóżmy $\nu_0 = E\left\{\lg_{\alpha} \dfrac{T(e^{\beta} + \varepsilon_0)}{T(e^{\alpha} - \varepsilon)}\right\} + 1$; jeśli $n > \nu_0$, to z pewnością $x_{-n} > e^{\alpha} - \varepsilon$, gdyż ta nierówność jest spełniona w obu wymienionych przypadkach, które wyczerpują wszystkie możliwości.

7°. Weźmy teraz pod uwagę kąty biegunowe Θ_{-k}; zacząwszy od pewnego miejsca stanowią one ciąg malejący. W rzeczy samej, na mocy (4), wystarczy, by $x_{-(n+1)} > \dfrac{e^{\alpha}}{\alpha}$, bo wtedy $\dfrac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}}$ [mniejsze jest od jedności. Jeśli $n > \nu_0$ i jeśli $\varepsilon < \frac{e^\alpha(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}}$, to

$\frac{\Theta_{-(n+1)}}{\Theta_{-n}} < \frac{e^\alpha}{a x_{-(n+1)}} \leqslant k_0 < \frac{1}{\sqrt{a}} < 1$, gdzie $k_0 = \frac{e^\alpha}{a(e^\alpha - \varepsilon)} < 1$; ponieważ to się stosuje do każdego $n > \nu_0$, mamy, postępując w tenże sposób kolejno

$$\Theta_{-(n+l)} \leqslant k_0^l \cdot \Theta_{-n} < k_0^l \frac{\pi}{2}; \text{ (dla } l > 0).$$

Jeśli więc $l > E\left\{\frac{\lg \frac{2\varepsilon}{\pi}}{\lg k_0}\right\}$, to $\Theta_{-(n+l)} < \varepsilon$.

Połóżmy więc $\nu_1 = \nu_0 + E\left\{\frac{\lg \frac{2\varepsilon}{\pi}}{\lg k_0}\right\} + 1$.

Udowodniliśmy więc, iż skoro tylko $n > \nu_1$, to niezawodnie

$$0 < \Theta_{-n} < \varepsilon.$$

Biorąc pod uwagę, cośmy dotąd otrzymali, widzimy iż dowód możemy uważać za osiągnięty w przypadku, gdy wszystkie wyrazy ciągu (5) i (6) są $< e^\alpha$.

8°. Pozostaje do zbadania przypadek, gdy od pewnego miejsca wszystkie wyrazy ciągów (5) i (6) są większe od e^α.

Przypuśćmy, iż $n > \nu_0$ i że oprócz tego $x_{-(n+1)} \leqslant x_{-n}$; w takim razie, twierdzę, mamy także takąż nierówność $x_{-(n+l+1)} < x_{-(n+l)}$, (dla $l > 0$), dla następnych kolejnych wyrazów. W rzeczy samej:

$$x_{-(n+2)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} + \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}},$$

$x_{-(n+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-n} + \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-n}}$; lecz $x_{-(n+1)} \leqslant x_{-n}$ pociąga $\mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} \leqslant \mathrm{Lg}\, x_{-n}$; tak samo $n > \nu_0$ pociąga $\mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-(n+1)}} < \mathrm{Lg} \frac{1}{\cos \Theta_{-n}}$; dodając do siebie stronami tylko co napisane nierówności, otrzymamy $x_{-(n+2)} < x_{-(n+1)}$; tak samo $x_{-(n+3)} < x_{-(n+2)}$ i t. d. Ten sam dowód dla ciągu (6).

9°. Poprzednio otrzymany wynik wysłowić można w sposób następujący: w rozpatrywanym przypadku ciągi (5) i (6) albo są stale rosnące, albo zacząwszy od pewnego miejsca stale maleją. Zobaczymy zaraz, iż pierwsze z tych dwóch przypuszczeń jest niemożliwe, t. j. że ciągi nasze nie mogą być stale rosnącemi; gdyby bowiem było $x_{-(n+1)} > x_{-n}$ dla każdego n począwszy od pewnego miejsca, to nasz ciąg albo posiadałby granicę $\lambda > e^{\alpha}$, albo też rósł nieograniczenie, tak iż $\lim\limits_{n=\infty} x_{-n} = \infty$. Lecz ani jedno ani drugie nie może mieć miejsca, gdyż, w pierwszym przypadku, λ musiałoby być liczbą, czyniącą zadość równaniu $\lambda = \mathrm{Lg}\,\lambda$, jak to widać, przechodząc do granicy w równości $x_{-(n+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-n} + \mathrm{Lg} \cos \Theta_{-n}$. Z drugiej strony, $x_{-(k+1)} > x_{-k}$ pociąga:

$$0 < x_{-k} - \mathrm{Lg}\, x_{-k} < \mathrm{Lg} \frac{1}{\mathrm{Cos}\, \Theta_{-k}},$$

co jest sprzeczne z przypuszczeniem, iż liczby ciągu x_{-k} nie są ograniczone od góry.

Tak więc wyrazy ciągów (5) i (6) począwszy od pewnego miejsca stale maleją; ale w takim razie posiadają granicę, która to granica nie może być różną od e^{α}, jako spełniająca równanie $\lambda = \mathrm{Lg}\,\lambda$. Tak więc istnienie granicy i w tym przypadku zostało udowodnione. Pozostaje ustalić jednostajną zbieżność.

10°. Nierówność $x_{-(k+1)} > x_{-k}$ pociąga za sobą nierówności $x_{-k} - \mathrm{Lg}\, x_{-k} < \mathrm{Lg} \dfrac{1}{\cos \Theta_{-k}}$ i $x_{-(k+1)} - \mathrm{Lg}\, x_{-(k+1)} < \mathrm{Lg} \dfrac{1}{\cos \Theta_{-k}}$; niezależnie od tego, czy $x_{-k} < e^{\alpha}$, czy też $x_{-k} < e^{\alpha}$, druga z tych nierówności będzie spełniona, o ile tylko $x_{-(k+1)} > e^{\alpha}$.

Ztąd można otrzymać następujący wniosek: istnieje liczba ν_2, posiadająca tę własność, iż w ciągu (5) dla $n \geqslant \nu_2$, $|x_{-n} - e^{\alpha}| < \varepsilon$, o ile wszystkie wyrazy rosną aż do wyrazu x_{-p}, gdzie $p \geqslant \nu_2$.

Liczbę ν_2 otrzymamy w sposób następujący: niech ν' oznacza liczbę taką, że $n \geqslant \nu'$ pociąga $\mathrm{Lg} \dfrac{1}{\cos \Theta_{-n}} < \eta$, gdzie liczba η jest w ten sposób dobrana, by warunki

$$\xi > e^{\alpha} \quad \text{i} \quad \xi - \mathrm{Lg}\, \xi < \eta$$

pociągały
$$\xi - e^{\alpha} < \varepsilon;$$

łatwo sprawdzić, iż taka liczba ν' istnieje; liczbę ν_2 wybieramy tak, by była równą większej z pomiędzy dwóch liczb $\nu' + 1$ i ν_0; ta ostatnia ma znaczenie, ustalone poprzednio.

By uzasadnić nasze twierdzenie, powróćmy do ciągu (5). Niech x_{-k} oznacza ostatni wyraz tego ciągu mniejszy od e^α, tak iż już $x_{-(k+1)} > e^\alpha$; przypuściliśmy, iż wyrazy ciągu (5) rosną aż do x_{-p}, tak iż jeszcze $x_{-(p-1)} < x_{-p}$, lecz już $x_{-p} > x_{-(p+1)}$, począwszy od tego miejsca, jak wiemy, wyrazy stale maleją; oczywiście $p > k$. Podzielmy wartości $n \geqslant \nu_2$ na trzy grupy, mianowicie: 1) $\nu_2 \leqslant n \leqslant k$; 2) $k < n \leqslant p$; 3) $n > p$; pierwsza grupa może nie istnieć, druga zawiera przynajmniej jedną liczbę, ponieważ przypuściliśmy, iż $p \geqslant \nu_2$; trzecia grupa obejmuje wszystkie pozostałe wartości n.

Udowodnimy słuszność nierówności

$$|x_{-n} - e^\alpha| < \varepsilon,$$

rozpatrując po kolei wartości n pierwszej, drugiej i trzeciej grupy

Niech więc $\nu_2 \leqslant n \leqslant k$; ponieważ $\nu_2 \geqslant \nu_0$, więc $n \geqslant \nu_0$ a więc, dla tych wartości n, na mocy poprzednich rozważań

$$0 < e^\alpha - x_{-n} < \varepsilon,$$

jak należało udowodnić.

Niech teraz $k < n \leqslant p$; w takim razie

$$0 < x_{-n} - \mathrm{Lg}\, x_{-n} < \mathrm{Lg}\, \frac{1}{\cos \Theta_{-(p-1)}} < \eta,$$

ponieważ $n > \nu_2$ i $p - 1 \geqslant \nu'$, a więc

$$0 < x_{-n} - e^\alpha < \varepsilon,$$

co jest równoważne z $|x_{-n} - e^\alpha| < \varepsilon$ w danym przypadku.

Niech wreszcie $n > p$; w takim razie

$$e^\alpha < x_{-n} < x_{-p}, \quad \text{a więc} \quad 0 < x_{-n} - e < x_{-p} - e^\alpha < \varepsilon.$$

Osiągnęliśmy więc pożądany wynik.

11°. Pozostaje nam udowodnić zbieżność jednostajną ciągu (5) ku granicy e^α. w przypadku nieobjętym poprzedniem rozumowaniem, t. j. gdy w ciągu (5) wyrazy zaczynają maleć począwszy od wyrazu o wskaźniku $p < \nu_2$,

Niech ν_3 oznacza liczbę, spełniającą warunek $\nu_3 \geqslant \nu_2$ i taką, że $0 < \Theta_{-n} < \varepsilon' = \dfrac{a-1}{2a}\varepsilon$ jak tylko $n > \nu_3$; wiemy, że taka liczba ν_3 istnieje.

Weźmy pod uwagę zależności następujące:

$$x_{-(\nu_3+l+1)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(\nu_3+l)} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(\nu_3+l)}},$$

dla $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i zastosujmy do nich nierówność:

$$\mathrm{Lg}\,(A+B) < \mathrm{Lg}\,A + B,$$

która sprawdza się dla $A > \frac{e^\alpha}{\alpha}$ i $B > 0$; wszystkie liczby $x_{-(\nu_3+l)}$ spełniają nierówność $x_{-(\nu_3+l)} > \frac{e^\alpha}{\alpha}$, gdyż ciąg nasz jest malejący, co może mieć miejsce, gdy wyrazy są $\geqslant e^\alpha$ i tylko wtedy. Otrzymamy:

$$x_{-(n+2)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+1)} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+1)}} < \mathrm{Lg}_2 x_{-n} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-n}} + $$
$$+ \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+1)}},$$

$$x_{-(n+3)} = \mathrm{Lg}\, x_{-(n+2)} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+2)}} < \mathrm{Lg}_3\, x_{-n} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-n}} + $$
$$+ \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+1)}} + \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+2)}},$$

i t. d. Wreszcie mamy:

$$x_{-(n+l)} < \mathrm{Lg}_l\, x_{-n} + \sum_{i=0}^{i=l-1} \mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\,\Theta_{-(n+i)}}; \text{ liczba } n \geqslant \nu_3.$$

Wprowadźmy teraz liczbę

$$l_0 = E\left\{\lg_\alpha \frac{T(R)}{T\left(e^\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right\} + 1;$$

jeśli $l \geqslant l_0$, to zachodzi nierówność

$$e^\alpha < \mathrm{Lg}_l\, x_{-n} < e^\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ gdzie } n \geqslant \nu_3.$$

Z drugiej strony, ponieważ $\Theta_{-n} < \varepsilon' < \varepsilon$, to zasadzie poprzedniego $\Theta_{-(n+1)} < k_0 \Theta_{-n}$, $\Theta_{-(n+2)} < k_0^2 \cdot \Theta_{-n}, \ldots, \Theta_{-(n+i)} < k_0^i \cdot \Theta_{-n} < k_0^i \cdot \varepsilon'$, dla $i = 1, 2, 3, \ldots$ Dalej,

$$\mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}=\frac{\Theta^2_{-(n+i)}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\{\vartheta.\Theta_{-(n+i)}\}}<\frac{k_0^{2i}.\varepsilon'^2}{2\cos^2\Theta_{-(n+i)}},$$

gdzie $0<\vartheta<1$. Możemy przyjąć $\varepsilon'<\frac{\pi}{4}$, tak iż $2\cos^2\Theta_{-(n+i)}>1$: w takim razie mamy nierówność:

$$\mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<k_0^{2i}\varepsilon'^2<k_0^{2i}\varepsilon';$$

Sumując szereg podobnych nierówności, otrzymamy:

$$\sum_{i=0}^{=l-1}\mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<\varepsilon'\{1+k_0^2+k_0^4+\dots\}<\frac{1}{1-k_0^2}\varepsilon'<\frac{\alpha}{\alpha-1}\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{2},$$

ponieważ $k_0<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; ($k_0$ ma wartość, która była określona poprzednio, patrz w tymże ustępie 7°). Stąd ostatecznie:

$$x_{-(n+l)}<\mathrm{Lg}_l\,x_{-n}+\sum_{i=0}^{i=l-1}\mathrm{Lg}\frac{1}{\cos\Theta_{-(n+i)}}<e^\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{o ile } n\geqslant\nu_3$$

i $l\geqslant l_0$, t. j.

$$e^\alpha<x_{-n}<e^\alpha+\varepsilon,$$

dla każdego $n\geqslant\nu_3+l_0$, co trzeba było udowodnić.

12°. Dowód jednostajnej zbieżności, o ile dotyczy części Q_2 obszaru D jest więc doprowadzony do końca. Zanim przejdziemy do rozszerzenia dowodu na cały obszar D, zauważymy, iż dla punktów, znajdujących się wewnątrz koła Γ' zatoczonego z punktu e^α jako ze środka promieniem $e^\alpha-e^\beta-\varepsilon_0$ można dać bezpośredni dowód zbieżności, nadzwyczajnie prosty.

Weźmy pod uwagę funkcję:

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{Log}\,z-e^\alpha}{z-e^\alpha}=\frac{\mathrm{Lg}\,z-e^\alpha}{z-e^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\left\{1-\tfrac{1}{2}\frac{z-e^\alpha}{e^\alpha}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{z-e^\alpha}{e^\alpha}\right)^2-\dots\right\}$$

gdzie rozwinięcie na szereg jest zbieżne dla $\frac{|z-e^\alpha|}{e^\alpha}<1$ i zbadajmy tę funkcję na kole Γ o promieniu $e^\alpha-e^\beta$, zakreślonem z punktu e^α. Maximum modułu funkcji analitycznej $\Phi(z)$ na kole Γ ma miejsce, jak widać z szeregu, w punkcie $z=e^\beta$ tego koła, i wartość ta równa się 1. Tak więc, na kole Γ' współśrodkowem o promieniu mniejszym i wewnątrz tego koła Γ', mamy $|\Phi(z)|<K<1$.

Jeśli więc z jest wewnątrz Γ', to $|\mathrm{Lg}\, z - e^{\alpha}| < K \, . \, |z - e^{\alpha}|$, tak iż $\mathrm{Lg}\, z$ należy do tego obszaru. Mamy dalej

$$|\mathrm{Lg}_2\, z - e^{\alpha}| < K \, . \, |\mathrm{Lg}\, z - e^{\alpha}| < K^2 \, . \, |z - e^{\alpha}|, \ldots .$$

$$|\mathrm{Lg}_n\, z - e^{\alpha}| < K\, |\mathrm{Lg}_{n-1}\, z - e^{\alpha}| < K^n \, . \, |z - e^{\alpha}|.$$

Ponieważ $K < 1$, wnioskujemy ztąd, iż $\lim\limits_{n=\infty} \mathrm{Lg}_n\, z - e^{\alpha}$ jednostajnie.

3. Stopniowe rozszerzenie dowodu na cały obszar D.

a) Pierwsze rozszerzenie.

Przekształcenie $z_1 = \mathrm{Lg}\, z$ zamienia punkty, leżące zewnątrz koła σ o promieniu $= e^{\beta} + \varepsilon_1$ i zakreślonego z punku początkowego spółrzędnych jako ze środka na punkty obszaru Q_2, przyczem $\varepsilon_1 = e^{\beta}(a^{\varepsilon_0} - 1)$, może być dowolnie małą liczbą wraz z ε_0. Tak więc istnienie punktu granicznego e^{α} jest zapewnione dla wszystkich punktów zewnątrz koła σ. Jeśli teraz chcemy oprócz tego zabezpieczyć zbieżność jednostajną, to ograniczymy się do punktów, leżących wewnątrz koła C o promieniu R, które to koło wchodzi w skład konturu L, okalającego obszar D. W rzeczy samej, punkty wewnątrz koła C przekształcają się na punkty, których odcięta $x < \mathrm{Lg}\, R$; ponieważ oprócz tego $y \leqslant \frac{\pi}{m}$, więc punkt, leżący w pierścieniu między okręgami σ i C, przekształci się na punkt leżący nie tylko wewnątrz Q_2, ale także wewnątrz C, t. j. należeć będzie do D, ponieważ, zakładamy, iż R jest dostatecznie wielkie, tak że spełniona jest nierówność $(\mathrm{Lg}\, R)^2 + \frac{\pi^2}{m^2} < R^2$.

b) Drugie rozszerzenie.

Na mocy poprzedniego, przy dalszych rozszerzeniach możemy brać pod uwagę punkty, leżące wewnątrz σ, i tylko te punkty.

Zauważmy, iż jeśli w ciągu M, M_{-1}. M_{-2}, $M_{-3}, \ldots$, którykolwiek z punktów, dajmy na to punkt M_{-k}, wyjdzie z σ, to i wszystkie następne punkty $M_{-(k+1)}$, $M_{-(k+2)}, \ldots$, będą leżeć zewnątrz σ.

Wydzielmy wewnątrz σ zbiór punktów, dla których kąt biegunowy Θ spełnia nierówność $|\Theta| > \Theta_0$, gdzie $\Theta_0 > 0$ jest liczbą dowolnie małą, w każdym razie tak małą, by spełniała pewne warunki, które niebawem określimy.

Twierdzę, iż istnieje liczba N, posiadająca tę własność, iż każdy punkt M obszaru σ, dla którego $|\Theta| > \Theta_0$, „wyjdzie" z σ conajmniej po N przekształceniach, przyczem to wyrażenie „wyjdzie" oznacza, iż punkt M_{-N} już do σ nie należy.

W rzeczy samej, jeśli Θ_{-n} jest kątem biegunowym punktu M_{-n}, położonego wewnątrz σ, w takim razie, na mocy (4) mamy

$$\frac{\Theta_{-n}}{\Theta_{-(n-1)}} > \frac{e^{\alpha}}{\alpha r_{-n}} = \frac{e^{\beta}}{\beta r_{-n}} > 1,$$

ponieważ $r_{-n} < \frac{e^{\beta}}{\beta}$, co z pewnością będzie miało miejsce, jeśli $\varepsilon_1 < e^{\beta}\,\frac{1-\beta}{\beta}$, co zakładamy. Tak więc

$$\frac{\Theta_{-n}}{\Theta_{-(n-1)}} > k_0 > 1,$$

gdzie $k_0 = \frac{e^{\beta}}{\beta\,(e^{\beta}+\varepsilon_1)}$ jest liczbą, zawartą między $\frac{1}{\beta}$ i 1. Ponieważ tylko co otrzymana nierówność stosuje się do wszystkich wskaźników, mniejszych od n, więc stąd otrzymamy

$$\Theta_{-n} > k_0^n \,.\, \Theta.$$

Niech teraz $n = N$, gdzie N oznacza liczbę całkowitą dodatnią, spełniającą nierówność $k_0^{N-1}\,\Theta_0 > 1$. W takim razie otrzymamy $\Theta_{-(N-1)} > 1$, a więc dalej

$$r_{-N} \geqslant y_{-N} = \frac{1}{m}\,\Theta_{-(N-1)} > \frac{e^{\beta}}{\beta} > e^{\beta} + \varepsilon_1,$$

co dowodzi, iż nie wszystkie punkty $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ mogą należeć do σ.

Możemy więc uważać za udowodnione istnienie granicy e^{α} dla wszystkich punktów M spełniających warunek $|\Theta| > \Theta_0$; punkt początkowy należy, oczywiście, uważać za wykluczony. Lecz jeśli chodzi o zbieżność jednostajną, należy okazać nietylko, iż punkt M_{-N} będzie leżał zewnątrz σ, jak to zrobiliśmy przed chwilą, ale że pozostanie wewnątrz D, t. j. że będzie wewnątrz C. W tym celu należy wykluczyć otoczenie punktu początkowego przy pomocy koła, któremu damy promień $= \frac{1}{R}$. W rzeczy samej, jeśli punkt M jest zewnątrz koła C_1, to i punkt M_{-1} będzie spełniał ten sam warunek, o ile $R\Theta_0 > m$, co przyjmiemy, ponieważ $y_{-1} = \frac{\Theta}{m}$ i w takim razie $|y_{-1}| \geqslant \frac{\Theta_0}{m} > \frac{1}{R}$. — Z drugiej strony $x_{-1} = = \operatorname{Lg} r > -\operatorname{Lg} R$, a więc $r_{-1}^2 < (\operatorname{Lg} R)^2 + \frac{\pi^2}{m^2} < R^2$, czyli $r_{-1} < R$, co dowodzi, iż punkt M_{-1} jest rzeczywiście wewnątrz C.

Tak więc twierdzenie o punkcie granicznym e^{α} możemy uważać za udowodnione dla wszystkich punktów obszaru D, z wyjątkiem tych, dla których promień wodzący $r \leqslant \frac{1}{R}$ i tych, dla których kąt biegunowy Θ spełnia warunek $|\Theta| \leqslant \Theta_0$. Obszar ten dotychczas nie objęty naszym dowodem zawiera wewnątrz punkty $\omega_1, \omega_2, \ldots$ i punkt e^{β}.

c) *Trzecie rozszerzenie.*

Przyłączymy teraz punkty, których odległość od punktu początkowego zawarta jest między $\frac{1}{R}$ i $a^{-\frac{\lambda}{R}}$, gdzie $\lambda > 1$ jest liczbą, która zależy od obszaru D za pośrednictwem liczby całkowitej n, (n jest liczbą kół $C_1, C_2, \ldots, C_n$ należących do określenia D); wartość tej stałej w zależności od n ustalimy później. Tak więc okażemy, iż twierdzenie o granicy e^{α} stosuje się i do punktów, dla których $|\Theta| \leqslant \Theta_0$, byleby tylko $\frac{1}{R} < r < a^{-\frac{\lambda}{R}}$.

W rzeczy samej, punkty, dla których $\frac{1}{R} < r < a^{-\frac{\lambda}{R}}$, przekształcają się na skutek podstawienia $z' = \operatorname{Lg} Z$ na punkty pasma, zawartego między prostemi równoległemi $x = -\operatorname{Lg} R$ i $x = -\frac{\lambda}{R}$, które to punkty leżą całkowicie w tej części obszaru D, dla której twierdzenie o granicy na mocy poprzedniego rozszerzenia stosuje się w zupełności; należy, oczywiście, przyjąć także pod uwagę, iż $\frac{\pi}{m} \leqslant y < -\frac{\pi}{m}$.

Zauważmy, iż przez tylko co wykonane rozszerzenie osiągnęliśmy obszar, który można utożsamić z obszarem D w wypadku, gdy $n=1$, t. j. możemy uważać nasze twierdzenie za udowodnione w przypadku, gdy obszar D utworzony jest przy pomocy C, C_1 i γ_1.

d) Stopniowe dalsze rozszerzenie przez indukcję.

W przypadku, gdy $n=2$, t. j. gdy D utworzymy przy pomocy C, C_1, C_2 i γ_2, do poprzednio otrzymanego obszaru dołączymy punkty, których odległość od początku spółrzędnych zawarta jest między $a^{\frac{1}{R}}$ i $a^{a^{-\frac{1}{R}}}\cos\Theta_0$. W rzeczy samej, twierdzenie o granicy e^{α} stosuje się i do punktów, dla których $a^{\frac{1}{R}} < r < a^{a^{-\frac{1}{R}}}\cos\Theta_0$, gdyż po zastosowaniu jednego przekształcenia $z' = \mathrm{Lg}\, z$ punkty te zamieniają się na punkty, leżące wewnątrz pasma utworzonego przez dwie proste równoległe $x=\frac{1}{R}$ i $x=a^{-\frac{\lambda}{R}}\cos\Theta_0$, które to punkty całkowicie mieszczą się w obszarze, dla którego istnienie granicy e^{α} zostało udowodnione na mocy poprzedniego rozszerzenia.

W podobny sposób postępujemy kolejno dalej. Nowe rozszerzenie daje nam obszar, który można utożsamić z D dla $n=3$; następne rozszerzenie pozwoli osiągnąć przypadek $n=4$ i t. d.

Obszary pierścieniowe, które kolejno przyłączamy są

$$\frac{1}{R} \leqslant r \leqslant a^{-\frac{\lambda}{R}}; \qquad a^{\frac{1}{R}} \leqslant r \leqslant a^{a^{-\frac{\lambda}{R}}}\cos\Theta_0;$$

$$a_2\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_2(a^{-\frac{\lambda}{R}}); \ldots, \text{ wreszcie } a_{n-1}\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_{n-1}(a^{-\frac{\lambda}{R}}),$$

gdzie $b_1(a^{-\frac{\lambda}{R}}) = b_1(u) = a^{u\cos\Theta_0}$, $b_2(u) = a^{b_1(u)\cos\Theta_0}$,

$b_3(u) = a^{b_2(u)\cos\Theta_0}, \ldots, b_{n-1}(u) = a^{b_{n-2}(u)\cos\Theta_0}$.

By szczegóły rachunków doprowadzić do końca, wygodnie jest zmienić nieco wspomniane wyżej obszary pierścieniowe, zwężając je nieco. Zamiast $a^{-\frac{\lambda}{R}}$ weźmiemy $1-\frac{m\lambda}{R} < a^{-\frac{\lambda}{R}}$ zamiast $a^{\frac{1}{R}}$ weźmiemy $1+\frac{m}{R}e_1$, gdzie $e_1 = e-1$; zamiast $b_2(a^{-\frac{\lambda}{R}})$, weźmiemy $a^{1-\frac{m\lambda}{R}}$. Taka zamiana będzie uprawomocniona, o ile odpowiada rzeczywiście zwężeniu, co będzie miało miejsce, o ile $R > 1 + m\lambda$

i $1 - m\frac{\lambda}{R} < e^{-\frac{m\lambda}{R}} \cos \Theta_0$; połóżmy $\frac{m\lambda}{R} = w < 1$; warunek poprzedni przyjmuje postać:

$$1 - w < e^{-w} \cos \Theta_0; \tag{8}$$

nierówność ta będzie spełniona, o ile $\Theta_0 \leqslant w = \frac{m\lambda}{R}$.

Następne rozszerzenie daje nam obszar pierścieniowy

$$a_2\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_2\left(a^{-\frac{\lambda}{R}}\right),$$

który zastąpimy obszarem:

$$a^{1+\frac{m e_1}{R}} \leqslant r \leqslant a^a \cdot a^{-\frac{am^2\lambda}{R}},$$

co jest uprawomocnione, o ile $1 - \frac{m^2\lambda}{R} < e^{-\frac{m^2\lambda}{R}} \cos \Theta_0$; kładąc $\frac{m^2\lambda}{R} = w$, odnajdujemy znów ten sam warunek (8), który więc będzie spełniony, o ile $\Theta_0 \leqslant \frac{m^2\lambda}{R}$; pozatem musimy założyć, iż

$$R > \frac{m(e_1 + a\lambda m)}{a - 1}.$$

Strefą pierścieniową $a_3\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_3\left(a^{-\frac{\lambda}{R}}\right)$ zastąpimy następującą węższą

$$a^{a\left(1 + m^2\frac{e_1^2}{R}\right)} \leqslant r \leqslant a^{(a^a)\left(1 - \frac{m^3 a\lambda}{R}\right)}$$

pod warunkiem, iż po pierwsze

$$R > \frac{\omega_3 m^2 (e_1^2 + \omega_4 m\lambda)}{\omega_4 - \omega_3},$$

(gdzie $\omega_3 = a$, $\omega_4 = a^a$ i t. d.), a po drugie

$$1 - \frac{am^3\lambda}{R} < e^{-am^3\frac{\lambda}{R}} \cos \Theta_0; \text{ kładąc } w = \frac{am^3\lambda}{R},$$

odnajdujemy zawsze jeden i ten sam warunek (8), wskutek czego musimy założyć warunek $\Theta_0 \leqslant \frac{am^3\lambda}{R}$.

Strefa $a_4\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_4(a^{-\frac{\lambda}{R}})$ zastąpiona będzie przez obszar pierścieniowy

$$a^{\omega_4\left(1+\omega_3\frac{m^3 e_1^3}{R}\right)} \leqslant r \leqslant a^{\omega_5\left(1-\frac{\omega_4\omega_3 m^4\lambda}{R}\right)},$$

pod warunkiem, iż po pierwsze

$$1-\frac{\omega_4\omega_3 m^4\lambda}{R} < e^{-\frac{\omega_4\omega_3 m^4\lambda}{R}} \cos\Theta_0$$

a po drugie

$$R > \frac{\omega_4\omega_3 m^3 (e_1^3 + \omega_5 m\lambda)}{\omega_5 - \omega_4}; \text{ kładąc } w = \frac{\omega_4\omega_3 m^4\lambda}{R},$$

odnajdziemy znów warunek (8), a więc należy przyjąć, iż $\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_4\omega_3 m^4\lambda}{R}$.

Za pomocą indukcji możemy sprawdzić, iż strefa

$$a_k\left(\frac{1}{R}\right) \leqslant r \leqslant b_k(a^{-}\ )$$

może być zastąpiona przez strefę

$$a^{\omega_k\left\{1+\frac{\omega_{k-1}\omega_{k-2}\cdots\omega_3 m^{k-1} e_1^{k-1}}{R}\right\}} \leqslant r \leqslant a^{\omega_{k+1}\left\{1-\frac{\omega_k\omega_{k-1}\cdots\omega_3 m^k\lambda}{R}\right\}}$$

z dołączeniem warunków

$$R > \frac{\omega_k\omega_{k-1}\dots\omega_3 m^{k-1}(e_1^{k-1} + \omega_{k+1} m\lambda)}{\omega_{k+1} - \omega_k}$$

(9) i $$\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_k\omega_{k-1}\dots\omega_3 m^k\lambda}{R}.$$

Ostatnią strefę będzie można zastąpić strefą

$$a^{\omega_{n-1}\left\{1+\frac{\omega_{n-2}\omega_{n-3}\cdots\omega_3 m^{n-1} e_1^{n-1}}{R}\right\}} \leqslant r \leqslant a^{\omega_n\left\{1-\frac{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\cdots\omega_3 m^{n-1}\lambda}{R}\right\}}$$

z dołączeniem warunków

$$R > \frac{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\dots\omega_3 m^{n-2}(e_1^{n-2} + \omega_n m\lambda)}{\omega_n - \omega_{n-1}}$$

(9') i $$\Theta_0 \leqslant \frac{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\dots\omega_3 m^{n-1}\lambda}{R}.$$

Zwężając jeszcze bardziej pierścień, można poprzednią strefę jeszcze zastąpić następującą

$$\omega_n \left\{ 1 + \frac{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\ldots\omega_3 m^{n-1} e_1^{n-1}}{R} \right\} \leqslant r \leqslant \omega_{n+1} \left\{ 1 - \frac{\omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_3 m^n \lambda}{R} \right\} \quad (10)$$

co wymaga dodatkowego warunku:

$$R > \frac{\omega_n \omega_{n-1} \ldots \omega_3 m^{n-1} (e_1^{n-1} + \omega_{n+1} m \lambda)}{\omega_{n+1} - \omega_n}. \quad (11)$$

Wzór (10) uwidacznia okoliczność, iż nasza strefa rozpościera się między punktami ω_n i ω_{n+1}, nie sięgając do tych punktów, lecz zbliża się do nich dowolnie blizko, o ile obierzemy R dostatecznie wielkie.

Ponieważ wraz z n^{ta} strefą osiągnęliśmy kres naszych kolejnych rozszerzeń, nie pozostaje nam nic innego, jak ustalić liczbę λ, która dotychczas nie była określona dokładnie. Możemy naprzykład, uczynić następujący wybór, kładąc

$$\lambda = \frac{1}{\omega_{n-1}\omega_{n-2}\ldots\omega_3 m^{n-1}} > 1.$$

Przy takim wyborze liczby λ warunek (9′) przyjmuje postać $\Theta_0 R \leqslant 1$; wziąwszy pod uwagę, iż musieliśmy założyć poprzednio $\Theta_0 R > m$, otrzymamy ostatecznie warunek

$$m < R\Theta_0 \leqslant 1, \quad (12)$$

który to związek pozwoli nam ustalić kąt Θ_0 po uprzednim wyborze promienia R.

Łatwo teraz sprawdzić, iż spełnienie nierówności (11) i (12), tyczących się R i Θ_0 pociąga za sobą spełnienie się podobnych nierówności, któreśmy napotkali przy przechodzeniu od jednej strefy do drugiej, jako warunek słuszności naszych rozumowań i przekształceń; mianowicie warunki (8) będą spełnione dla każdego $k \leqslant n-1$, gdyż $\omega_{k-1}\omega_{k-2}\ldots\omega_3 m^k$ maleje, gdy k rośnie, gdy tymczasem $\dfrac{\omega_k \omega_{k-1}\ldots\omega_3 m^{k-1}(e_1^{k-1} + \omega_{k+1} m \lambda)}{\omega_{k+1} - \omega_k}$ rośnie wraz z k. To ostatnie łatwo udowodnić, zauważywszy, iż

$m\,\omega_k < \dfrac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\omega_k - \omega_{k-1}} < m\,\omega_{k+1}$; (a więc $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\omega_n - \omega_{n-1}} = \beta$). Patrz **dodatek III**).

Warunek (11) może być zastąpiony prostszym

$$R > e_1^{n-1} + \left(\frac{e^\beta}{\beta}\right)^{n-1}. \tag{13}$$

Gdy dany jest obszar D, znaną jest odpowiadająca mu liczba n. Promień R koła C bierzemy dowolnie wielki, w każdym razie większy od liczby danej przez wzór (13). Gdy R zostało w ten sposób ustalone, wybieramy Θ_0, tak by zadość uczynić warunkowi (12). Jeśli R jest dostatecznie wielkie, obszary wykluczone, do których nie sięgają nasze rozszerzenia, a które otaczają punkty (ω) i zawierają je, będą całkowicie się mieścić wewnątrz kół C_1, C_2, $C_3, \ldots, C_n$ i γ_n. Tak więc w obszarze D, t. j. wewnątrz koła C, a zewnątrz kół $C_1, C_2, \ldots, C_n$ i γ_n zbieżność będzie jednostajna, t. j. $\lim\limits_{n=\infty} M_{-n} = e^\alpha$ jednostajnie, co trzeba było udowodnić.

DODATEK II.

Mamy funkcję złożoną $F(z) = \mathcal{E}\{H(z)\}$, gdzie $\mathcal{E}(\zeta)$ jest funkcją całkowitą przestępną, funkcja $H(z)$ jest funkcją jednowartościową, o punktach osobliwych odosobnionych.

Trzeba okazać, że punkt $z = z_0$ nie może być dla funkcji $H(z)$ punktem osobliwym, o ile tenże punkt jest punktem regularnym dla funkcji złożonej $F(z)$.

W rzeczy samej, gdyby $z = z_0$ było punktem osobliwym, to mielibyśmy w tym punkcie biegun lub punkt istotnie osobliwy funkcji $H(z)$. Rozpatrzmy po kolei oba te przypuszczenia.

Niech $z = z_0$ będzie punktem istotnie osobliwym funkcji $H(z)$. Niech a i b oznaczają dwie liczby, spełniające warunek $\mathcal{E}(a) \neq \mathcal{E}(b)$ i oprócz tego takie, iż w dowolnie małem otoczeniu punktu $z = z_0$ funkcja $H(z)$ przyjmuje wartości a i b; jest to możliwe na zasadzie twierdzenia Picard'a. Stąd wniosek, iż i funkcja $F(z)$ w dowolnie małem otoczeniu $z = z_0$ przyjmuje wartości $\mathcal{E}(a)$ i $\mathcal{E}(b)$, nierówne sobie. Otóż to nie jest możliwe, jako sprzeczne z zasadniczą własnością funkcji regularnej w punkcie danym. Tak więc punkt $z = z_0$ nie może być punktem istotnie osobliwym. Tak samo nie może być i biegunem. Gdyby bowiem w punkcie $z = z_0$ był biegun funkcji $H(z)$, to byłyby w dowolnie małem otoczeniu punktu $z = z_0$ wartości zmiennej z, dla których $\zeta = H(z)$ przyjmuje wartości dowolnie mało różniące się od dowolnej liczby o modulu dostatecznie wielkim. Lecz istnieją wartości ζ_1 i ζ_2 zmiennej ζ o modulu większym od dowolnie wielkiej liczby, takie, że $\mathcal{E}(\zeta_1) = a$ i $\mathcal{E}\zeta_2) = b$, przyczem $a \neq b$. Stąd wniosek, że w dowolnie małem otoczeniu punktu $z = z_0$ istnieją także wartości z, dla których $F(z)$ przyjmuje wartości dowolnie mało różniące się od a i od b. Ponieważ $a \neq b$, nie da się to pogodzić z regularności funkcji $F(z)$ w punkcie $z = z_0$.

DODATEK III.

Liczby m, a, α, β, e^α, e^β są związane licznemi równościami i nierównościami, któremi nieraz posiłkowaliśmy się w toku pracy, a których zestawienie podajemy tu dla ułatwienia przy czytaniu tekstu.

$$a = e^m < \sqrt[e]{e};\quad m = \frac{\alpha}{e^\alpha} = \frac{\beta}{e^\beta};\quad \alpha > 1,\ \beta < 1;\quad m < \frac{1}{e};$$

$$1 < e^m < e^\beta < \frac{e^\alpha}{\alpha} < e^\alpha;\quad \frac{\alpha}{\beta} = e^{\alpha-\beta};\quad a^{e^\alpha} = e^\alpha;\quad a^{e^\beta} = e^\beta;$$

$$\omega_2 = 1,\ \omega_3 = a,\ \omega_4 = a^{\omega_3}, \ldots\ldots, \omega_{k+1} = a^{\omega_k}$$

$$1 \leqslant \omega_k < e^\beta;\quad \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \ldots, < \omega_k < \omega_{k+1} < \ldots,.$$

$$\frac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}} < \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k},\ \text{dla } k \geqslant 2;\ \text{stąd } \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} \leqslant a < e - 1 = e_1.$$

$$m\omega_{k+1} < \frac{\omega_{k+2} - \omega_{k+1}}{\omega_{k+1} - \omega_k} < m\omega_{k+2}.$$