Józef Lewandowski

AKUSTYCZNE METODY BADANIA STRUKTURY NIEJEDNORODNYCH CIAŁ STAŁYCH

18/1976

WARSZAWA 1976

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 marca 1976 r.

Zarejestrowana pod nr 18/1976

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark. wyd. 0,6. Ark. druk. 1,5
Oddano do drukarni w marcu 1976 r.
Nr zamówienia 256/0/76

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Józef Lewandowski
Pracownia Technologii i Struktur Materiałowych
Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN

AKUSTYCZNE METODY BADANIA STRUKTURY NIEJEDNORODNYCH CIAŁ STAŁYCH

1. Wstęp

W związku z prowadzonymi od roku w Pracowni Technologii i Struktur Materiałowych badaniami nad strukturą i własnościami ceramiki /porcelany/ elektrotechnicznej stało się celowe opracowanie metody pozwalającej wnosić - na podstawie pomiarów prędkości i tłumienia dźwięku - o strukturze badanej próbki tego materiału i jego własnościach sprężystych. Niniejsza praca zawiera dwie propozycje takiej metody.

Zadanie opracowania akustycznej metody wyznaczania koncentracji niejednorodności w ciele stałym i ich wpływ na własności sprężyste było już wcześniej podejmowane przez niektórych autorów /por. (1) /. Metody zaproponowane w niniejszej pracy różnią się jednak w sposób zasadniczy od metod wspomnianych poprzednio autorów. Autorzy ci na podstawie rozważań o charakterze statycznym starali się określić współzależność pomiędzy parametrami charakteryzującymi niejednorodność struktury ciała stałego i jego własności sprężyste a prędkością fazową fali akustycznej. W niniejszej pracy zależność pomiędzy tymi samymi parametrami i wielkościami fizycznymi znajduje się na podstawie rozważań o charakterze dynamicznym rozpatrując proces rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w niejednorodnym ciele stałym łącznie z procesem jej rozpraszania na niejednorodnościach.

Punktem wyjścia niniejszej pracy jest wykorzystanie formalnej analogii w matematycznym opisie procesu rozchodzenia się fal sprężystych w ciele stałym i w płynie, traktowanych jako ośrodki ciągłe. W obu wypadkach pole fali sprężystej można bowiem przedstawić w postaci sumy bezwirowego pola fal podłużnych i bezźródłowego pola fal poprzecznych, przy czym w obu przypadkach oba te pola opisuje się takimi samymi równaniami różniczkowymi liniowymi typu Helmholtza z tą tylko różnicą, że stałe współczynniki /składowe wektora propagacji/ występujące w tych równaniach są w przypadku ciała stałego określone innymi wzorami niż w przypadku płynu. Na możliwość wykorzystania tej formalnej analogii zwrócił już uwagę K.F. Herzfeld (2) , (3) tworząc jednolitą teorię opisującą rozchodzenie płaskiej fali akustycznej w zawiesinie kulistych cząstek zarówno cieczy jak i ciała stałego, zawieszonych w cieczy. W niniejszej pracy przedstawimy propozycje dalszego wykorzystania tej formalnej analogii, a mianowicie dokonamy adaptacjii dwóch metod stosowanych w teoretycznej akustyce zawiesin i emulsji do układu dwufazowego, jaki stanowi ciało stałe ze sferycznymi niejednorodnościami, wypełnionymi innym ciałem stałym, płynem lub pustką.

W punkcie 2 niniejszej pracy podamy adaptację do przypadku niejednorodnego ciała stałego metody stosowanej przez R.J. Uricka i W.S. Amenta (4) przy obliczaniu prędkości fazowej i współczynnika tłumienia fali płaskiej w zawiesinie kulistych cząstek sztywnych w cieczy lepkiej. Zajmiemy się początkowo ogólnym przypadkiem niejednorodnego ciała stałego traktowanego jako ośrodek, w którym zachodzi dyssypacja energii mechanicznej i podamy metodę pozwalającą obliczyć prędkość fazową i współczynnik tłumienia fali w tym ośrodku, jeżeli znamy wektory propagacji fali podłużnej /podłużnika/ i poprzecznej /poprzecznika/ w fazie rozproszonej i w fazie dominującej objętościowo. Metoda ta może być również stosowana zarówno w przypadku, gdy niejednorodnościami są sferyczne pustki, jak i w przypadkach, gdy obie fazy /dominującą objętościowo i rozproszoną/ lub jedną tylko z tych dwóch faz traktujemy jako materiał bezstratny. W końcowej części punktu 2 niniejszej pracy podamy również adaptację do przypadku niejednorodnego ciała stałego - traktowanego jako ośrodek bezstratny - metody stosowanej przez K.F. Herzfelda (3) przy obliczaniu prędkości fazowej fali płaskiej w zawiesinach kulistych cząstek cieczy i ciała stałego, zawieszonych w cieczy.

W punkcie 3 niniejszej pracy przeprowadzono obliczenia numeryczne dla modelu porcelany elektrotechnicznej w postaci bezstratnego ciała stałego zawierającego sferyczne pustki, zajmujące niewielki ułamek b objętości badanego ciała. Obliczenia te wykonano dla szerokiego przedziału wartości współczynnika Poissona ν, zawierającego wartości interesujące ze względu na zastosowania techniczne /$0.15 \leq \nu \leq 0.30$/, metodą podaną w pracy (1) oraz dwoma metodami zaproponowanymi w niniejszej pracy i porównano uzyskane rezultaty. Dla $b \lesssim 0,1$ uzyskujemy dobrą zgodność wyników otrzymanych trzema wspomnianymi metodami.

2. Propagacja fal sprężystych w niejednorodnym ciele stałym.

Rozpatrywać będziemy niejednorodne ciało stałe ze sferycznymi izotropowymi niejednorodnościami. O niejednorodnościach tych zakładamy, że ich łączna objętość V_R /objętość fazy rozproszonej/ jest dużo mniejsza od całkowitej objętości V badanego ośrodka niejednorodnego, tj.

$$/2.1/ \quad b = \frac{V_R}{V} \ll 1 .$$

$V - V_R$ jest objętością fazy dominującej objętościowo, o której zakładamy, że jest jednorodnym i izotropowym sprężystym ciałem stałym o stałych Lamego λ_1, μ_1 i gęstości ϱ_1. Wartość liczbową promieni R sferycznych niejednorodności traktujemy jako zmienną losową, której gęstość rozkładu prawdopodobieństwa g (R) jest z założenia znana, przy czym

$$/2.2/ \quad g(R) = \frac{N(R)}{N} ,$$

gdzie N (R) jest liczbą sferycznych niejednorodności o promieniu R w jednostce objętości, natomiast N wyraża się wzorem

$$/2.3/ \quad N = \int_0^\infty N(R)\,dR \, .$$

Ułamek objętości b zajętej przez fazę rozproszoną możemy teraz wyrazić wzorem

$$/2.4/ \quad b = \frac{4}{3}\pi N \overline{R^3}$$

gdzie

$$/2.5/ \quad \overline{R^3} = \int_0^\infty R^3 g(R)\,dR$$

Zakładamy ponadto, że w najogólniejszym przypadku w materiale zarówno fazy dominującej objętościowo jak i fazy rozproszonej, jeżeli nie jest nią pustka, może zachodzić dyssypacja energii mechanicznej. O fazie rozproszonej zakładamy ponadto, że znamy jej gęstość ϱ_2 oraz współczynniki Lamego λ_2 i μ_2 w przypadku gdy jest sprężystym ciałem stałym, lub współczynniki lepkości η i ξ (6) w przypadku, gdy fazą rozproszoną jest płyn lepki.

Rozpatrywane przez nas akustyczne fale sprężyste są płaskimi falami harmonicznymi, w najogólniejszym przypadku tłumionymi, rozchodzącymi się w rozważanym ośrodku niejednorodnym w dodatnim kierunku osi z. Przemieszczenia związane z taką falą sprężystą dane są wzorami

$$/2.6/ \quad \vec{S}_L = \vec{s}_L e^{i\omega t}$$

oraz

$$/2.7/ \quad \vec{S}_t = \vec{s}_t e^{i\omega t} ,$$

odpowiednio dla składowej podłużnej /podłużnika/ i poprzecznej /poprzecznika/ rozpatrywanej fali. ω jest częstością kołową, t oznacza czas, e jest podstawą logarytmów naturalnych, natomiast $\vec{s}_L$ i $\vec{s}_t$ określone są wzorami:

$$/2.8/ \quad \vec{s}_L = -\vec{\nabla}\Psi_L ,$$

/2.9/ $\vec{S}_t = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_t$.

Potencjały skalarny Ψ_L składowej fali podłużnej i wektorowy $\vec{\Pi}_t$ składowej fali poprzecznej spełniają odpowiednio równania

/2.10/ $\Delta \Psi_L + k^2 \Psi_L = 0,$

/2.11/ $\Delta(\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_t) + K^2(\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_t) = 0,$

gdzie k i K są modułami wektorów propagacji odpowiednio dla podłużnika i poprzecznika w badanym niejednorodnym ciele stałym. Rozchodzącą się w badanym ośrodku niejednorodnym falę płaską traktujemy jako wypadkową fali pierwotnej /padającej/ i fal rozproszonych na niejednorodnościach. Zakładamy przy tym, że odległości wzajemne pomiędzy każdymi dwoma sąsiednimi sferami rozpraszającymi są bardzo duże w porównaniu z długością fali. Zakładamy również rozproszenie pojedyńcze, tj. zakładamy, że fala padająca rozprasza się tylko na jednej z napotkanych na swej drodze niejednorodności. O fali padającej zakładamy, że jest to płaska fala podłużna rozchodząca się w kierunku dodatnim osi z o jednostkowej amplitudzie przemieszczenia $\vec{S}_L$. O płaskiej fali padającej zakładamy zatem, że jest ona określona równaniem

/2.12/ $\vec{S}_L = \vec{s}_L e^{i\omega t},$

gdzie

/2.13/ $\vec{s}_L = \vec{z}_o e^{ik_1 z}$

lub

/2.14/ $\vec{s}_L = -\vec{\nabla} \Psi_L,$

/2.15/ $\Psi_L = \varphi_o e^{ik_1 z},$

gdzie

/2.16/ $\varphi_0 = \frac{i}{k_1}$.

$\vec{z}_0$ jest wersorem w kierunku dodatnim osi z.

Tak sformułowane modele ośrodka niejednorodnego i rozchodzącej się w nim płaskiej fali sprężystej pozwalają nam znaleźć związek pomiędzy modułem k wektora propagacji fali podłużnej w niejednorodnym ciele stałym a modułami k_i oraz K_i, i = 1, 2, wektorów propagacji odpowiednio podłużnika oraz poprzecznika w fazie dominującej objętościowo /i = 1/ i w fazie rozproszonej /i = 2/.

Aby znaleźć wspomniany związek, rozpatrzmy najpierw falę płaską /2.15/ rozchodzącą się w nieograniczonym ośrodku jednorodnym takim samym jak faza dominująca objętościowo badanego ośrodka niejednorodnego. Prędkość fazową płaskiej fali podłużnej w tym ośrodku /tj. w fazie dominującej objętościowo/ będziemy oznaczali przez c_1. W tym nieograniczonym ośrodku jednorodnym jest umieszczona nieograniczona płyta /rys.1/ jednorodna o gęstości ϱ_x i impedancji akustycznej $\varrho_x c_x$. Rozpatrywana fala o potencjale /2.15/ pada na tę płytę w kierunku normalnym do jej powierzchni /płaszczyzny z=0/. Materiał płyty tak dobrano, aby współczynniki odbicia od powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki był mały, tj. aby spełnione były nierówności

/2.17a/ $$R_{I/II} = \left(\frac{\varrho_x c_x - \varrho_1 c_1}{\varrho_1 c_1 + \varrho_x c_x}\right)^2 = \frac{|\varphi_1|^2}{|\varphi_0|^2} \ll 1,$$

/2.17b/ $$R_{II/III} = \left(\frac{\varrho_1 c_1 - \varrho_x c_x}{\varrho_1 c_1 + \varrho_x c_x}\right)^2 = \frac{|\varphi_{(-)}|^2}{|\varphi_{(+)}|^2} \ll 1,$$

gdzie φ_1 i $\varphi_{(-)}$ są amplitudami potencjałów $\Psi_I^{(-)}$ i $\Psi_{II}^{(-)}$ fal odbitych odpowiednio w płaszczyźnie z = 0 i z = a /rys.1/, natomiast φ_0 i $\varphi_{(+)}$ są amplitudami potencjałów Ψ_L i $\Psi_{II}^{(+)}$ fal padających odpowiednio na płaszczyznę z = 0 i z = a.

Amplitudę potencjału $\Psi_{III}^{(+)}$ fali po przejściu przez płytę oznaczamy przez φ_3. Potencjał Ψ_L dany jest wzorami /2,15/ i /2.16/, natomiast pozostałe z wyżej wymienionych potencjałów dane są następującymi wzorami

/2.18a/ $$\Psi_I^{(-)} = \varphi_1 e^{-ik_1 z},$$

/2.18b/ $$\Psi_{II}^{(+)} = \varphi_{(+)} e^{ik_x z},$$

/2.18c/ $$\Psi_{II}^{(-)} = \varphi_{(-)} e^{-ik_x z},$$

/2.18d/ $$\Psi_{III}^{(+)} = \varphi_3 e^{ik_1 z}.$$

k_x jest modułem wektora propagacji fali podłużnej w ośrodku II /rys. 1/. O grubości a płytki zakładamy, że jest ona dostatecznie mała, aby były spełnione nierówności:

/2.19a/ $$|k_1 a| \ll 1,$$

/2.19b/ $$|k_x a| \ll 1.$$

Z warunków ciągłości potencjałów i ich pochodnych normalnych na powierzchniach rozgraniczających dwa ośrodki /płaszczyzny z = 0 i z = a/ otrzymujemy po wykorzystaniu /2.19a/ i /2.19b/ następujące związki:

/2.20a/ $$\varphi_0 + \varphi_1 + ik_x a \frac{\varrho_x k_1}{\varrho_1 k_x}(\varphi_0 - \varphi_1) = \varphi_3(1 + ik_1 a),$$

/2.20b/ $$\varphi_0 - \varphi_1 + ik_x a \frac{\varrho_1 k_x}{\varrho_x k_1}(\varphi_0 + \varphi_1) = \varphi_3(1 + ik_1 a).$$

Stąd po wykorzystaniu /2.16/ i /2.17a/ otrzymujemy

$$/2.21/ \quad \left(\frac{k_x}{k_1}\right)^2 a^2 = \left(\varphi_3 + \varphi_3 i k_1 a - \varphi_0 - \varphi_2\right)\left(\varphi_3 + \varphi_3 i k_1 a - \varphi_0 + \varphi_2\right).$$

Dokonajmy teraz w opisywanym przez nas eksperymencie myślowym następnego kroku: płytę jednorodną zastąpmy płytą wykonaną z badanego przez nas niejednorodnego ciała stałego, przy czym grubość tej płyty została tak dobrana, że nierówności /2.19a/, /2.19b/ pozostają nadal słuszne. Z teorii rozpraszania (2), (4), (5) wynika, że wypadkowy potencjał fal rozproszonych w punktach D i -D /rys.1/, tj. fal rozproszonych w kierunku wstecz i w przód w stosunku do kierunku fali padającej wyraża się odpowiednio wzorem:

$$/2.22a/ \quad \Phi_{(+D)} = a\int_0^{\infty} N(R) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(R,k_1,K_1,k_2,K_2)\,dR \iint_{-\infty}^{+\infty} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos\theta)\,dx\,dy \Big|_{z=D},$$

$$/2.22b/ \quad \Phi_{(-D)} = a\int_0^{\infty} N(R) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(R,k_1,K_1,k_2,K_2)\,dR \iint_{-\infty}^{+\infty} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos\theta)\,dx\,dy \Big|_{z=-D}.$$

$P_n(\cos\theta)$ oznacza wielomian Legendre'a n-tego rzędu, $h_n^{(1)}(k_1 r)$ jest funkcją sferyczną Hankela pierwszego rodzaju n-tego rzędu, natomiast współczynniki podłużnej fali rozproszonej $C_n(R,k_1,K_1,k_2,K_2)$ są w najogólniejszym przypadku dane wzorami /23/, /26a/ w pracy (5). Ponieważ (4) dla $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, $\cos\theta = \frac{z}{r}$

$$/2.23/ \quad \iint_{-\infty}^{+\infty} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos\theta)\,dx\,dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{k_1^2}(-i)^n e^{ik_1 D}, & \text{gdy } z = D, \\ \frac{2\pi}{k_1^2}(i)^n e^{-ik_1 D}, & \text{gdy } z = -D, \end{cases}$$

zatem

$$/2.24 \quad \Phi_{(+D)} = a\,\varphi_{(+D)}\,e^{ik_1 D},$$

$$/2.25/ \quad \Phi_{(-D)} = a\,\varphi_{(-D)}\,e^{-ik_1 D},$$

gdzie amplitudy $\Phi_{(+D)}$ i $\Phi_{(-D)}$ wypadkowych potencjałów fal podłużnych rozproszonych na niejednorodnościach płytki w kierunku w przód i wstecz wyrażają się odpowiednio wzorami:

/2.26/ $$\Phi_{(+D)} = \frac{2\pi}{k_1^2}\int_0^{\infty} N(R)\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n C_n(R, k_1, K_1, k_2, K_2)\,dR\,,$$

/2.27/ $$\Phi_{(-D)} = \frac{2\pi}{k_1^2}\int_0^{\infty} N(R)\sum_{n=0}^{\infty}(i)^n C_n(R, k_1, K_1, k_2, K_2)\,dR\,.$$

Definiujemy teraz moduł wektora propagacji k rozważanego przez nas ośrodka niejednorodnego w taki sposób, aby związek /2.21/ pozostał słuszny dla płytki ośrodka niejednorodnego, jeśli położymy w /2.21/:

/2.28/ $$\varphi_1 = \Phi_{(-D)}\,a\,,$$

/2.29/ $$\varphi_3 = \varphi_0 + \Phi_{(-D)}\,a\,,$$

/2.30/ $$k_x = k\,.$$

Otrzymujemy w ten sposób

/2.31/ $$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \left[\varphi_0 ik_1 + \Phi_{(+D)}(1+ik_1a) - \Phi_{(-D)}\right]\left[\varphi_0 ik_1 + \Phi_{(+D)}(1+ik_1a) + \Phi_{(-D)}\right].$$

W granicach, w których spełniona jest nierówność

$$\left|\Phi_{(+D)}\right| \leq \left|ik_1a\right|\,,$$

czyli, ze względu na /2.19/, nierówność

/2.32/ $$\left|\Phi_{(+D)}\right| \ll 1\,,$$

poszukiwana przez nas zależność przyjmuje z dokładnością do wyrazów rzędu nie mniejszego niż $|k_1a|$ postać:

$$\left(\frac{k}{k_1}\right)^2 = \left\{1+\frac{2\pi}{k_1^2}\int_0^\infty N(R)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(i)^n-(-i)^n\right]C_n(R,k_1,K_1,k_2,K_2)\,dR\right\}\cdot \tag{2.33}$$
$$\cdot\left\{1-\frac{2\pi}{k_1^2}\int_0^\infty N(R)\sum_{n=0}^{\infty}\left[(i)^n+(-i)^n\right]C_n(R,k_1,K_1,k_2,K_2)\,dR\right\}.$$

W przypadku, gdy rozpatrujemy niejednorodne ciało stałe zakładając bezstratność zarówno niejednorodnego ciała jako całości, jak i każdej z dwu jego faz, nie potrzebujemy posługiwać się dość złożonym wzorem /2.33/, lecz możemy uzyskać znacznie prostszy wzór na moduł k wektora propagacji fali podłużnej w niejednorodnym ciele stałym. W tym celu wracamy do poprzednio opisanego eksperymentu myślowego z płytą z niejednorodnego ciała stałego, umieszczoną w nieograniczonym ośrodku wypełnionym materiałem fazy dominującej i przeprowadzimy rozumowanie podobne do tego, jakie przeprowadził K.F. Herzfeld (3) obliczając prędkość dźwięku w zawiesinach. Niech na płytę pada, tak jak poprzednio, w kierunku normalnym do jej powierzchni fala podłużna, której potencjał dany jest wzorami /2.15/ i /2.16/. Przyjmujemy w dalszym ciągu założenia /2.17a/, /2.17b/, /2.19a/, 2.19b/, a ponadto zakładamy, że w warstwie o grubości a nie zachodzi, podobnie jak i w ośrodku otaczającym - tłumienie drgań. Moduły wektorów propagacji podłużnika k_i i poprzecznika K_i, $i = 1,2$, w fazie dominującej /$i = 1$/ i rozproszonej /$i = 2$/ są teraz liczbami rzeczywistymi i w przypadku, gdy faza rozproszona jest także ciałem stałym, wyrażają się ogólnie znanymi wzorami:

$$k_i^2 = \frac{\omega^2 \varrho_i}{\lambda_i + 2\mu_i}, \tag{2.34}$$

$$K_i^2 = \frac{\omega^2 \varrho_i}{\mu_i}. \tag{2.35}$$

Moduł wektora propagacji k w tym przypadku jest również liczbą rzeczywistą i wyraża się wzorem:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2 \varrho}{\lambda + 2\mu}, \tag{2.36}$$

gdzie ϱ /gęstość/, λ i μ /współczynniki Lamego/, c /fazowa prędkość fali podłużnej/ są stałymi materiałowymi charakteryzującymi badany ośrodek niejednorodny. Ze względu na brak dyssypacji jedynym efektem przejścia fali podłużnej przez płytkę jest przesunięcie fazowe spowodowane tym, że $c \neq c_1$. Jeżeli zatem potencjał fali podłużnej w ośrodku I ma postać funkcji

$$/2.37/ \quad \Psi_I^+ = \varphi_0 e^{i\omega \frac{z}{c_1}},$$

to w ośrodku III potencjał tej samej fali wyraża się funkcją

$$/2.38/ \quad \tilde{\Psi}_{III}^+ = \varphi_0 e^{i\omega\left(\frac{z-a}{c_1}+\frac{a}{c}\right)} = \varphi_0 e^{i\omega\frac{z}{c_1}} e^{-i\omega\left[\frac{a}{c_1}\left(1-\frac{c_1}{c}\right)\right]}$$

Wykorzystując założenie /2.17a/ otrzymujemy stąd

$$/2.39/ \quad \tilde{\Psi}_{III}^+ = \varphi_0\left[1-\frac{i\omega a}{c_1}\left(1-\frac{c_1}{c}\right)\right]e^{i\omega\frac{z}{c_1}}.$$

Z drugiej strony zgodnie z /2.29/ mamy

$$/2.40/ \quad \tilde{\Psi}_{III}^+ = \left[\varphi_0 + \phi_{(+D)}\, a\right] e^{i\omega\frac{z}{c_1}}.$$

Po podstawieniu do /2.39/ i po uwzględnieniu /2.16/ otrzymujemy ostatecznie

$$/2.41/ \quad \frac{c}{c_1} = \frac{1}{1-\phi_{(+D)}},$$

gdzie $\phi_{(+D)}$ jest dane wzorem /2.26/.

Obliczenia numeryczne i dyskusja

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla przypadku, w którym fazą dominującą jest izotropowe ciało sprężyste, a fazę rozproszoną stanowią sferyczne pustki. Obliczenia numeryczne wykonano niezależnie na podstawie wzoru /4/ z pracy (1), który ma postać:

/3.1/ $$\frac{c}{c_1}=\left(\frac{1}{1-b}\right)^{1/2}\left[\frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_1+\frac{1}{2}b(1+\nu_1)}-\frac{10b(1-2\nu_1)}{7-5\nu_1+2(4-5\nu_1)b}\right],$$

gdzie

$$\nu_1=\frac{\lambda_1}{2(\lambda_1+\mu_1)}$$

jest współczynnikiem Poissona, oraz na podstawie wzorów /2.33/ i /2.41/ wyprowadzonych w naszej pracy. Zakładając, że

/3.2/ $$k_1R\ll 1,\qquad K_1R\ll 1,$$

przyjęto współczynniki podłużnej fali rozproszonej w postaci [(5) wzory /34a/, 34b/, 34d/, /34f/] :

/3.3/ $$C_0=\frac{1}{3}\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{K_1}{k_1}\right)^2\right]\frac{1}{k_1}(k_1R)^3,$$

/3.4/ $$C_1=-i\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{k_1}(k_1R)^3,$$

/3.5/ $$C_2=-\frac{15}{9}\,\frac{1}{1-\frac{9}{4}\left(\frac{K_1}{k_1}\right)^2}\,\frac{1}{k_1}(k_1R)^3,$$

/3.6/ $$C_n=(-i)^n(4n^2-1)\left[2^n\frac{n!}{(2n)!}\right]^2\frac{\frac{1}{k_1}(k_1R)^{2n-1}}{1-\frac{2n^2-1}{2n(n-1)}\left(\frac{K_1}{k_1}\right)^2},$$

$n = 2, 3, 4, \ldots$

Z wzoru /3.5/ wynika, że wartości C_n, $n = 2, 3, 4, \ldots$, szybko maleją ze wzrostem n. Dlatego też sumowanie we wzorze /2.33/ i /2.41/ urwano na wyrazach proporcjonalnych do C_2.

Wzór /2.33/ przyjmuje wtedy postać

/3.7/ $$\left(\frac{c_1}{c}\right)^2=\left[1+\frac{4\pi i}{k_1^2}\int_0^\infty N(R)C_1(R,k_1,K_1)\,dR\right]\left\{1-\frac{4\pi}{k_1^2}\int_0^\infty\left[C_0(R,k_1,K_1)-C_2(R,k_1,K_1)\right]N(R)\,dR\right\}$$

Stąd

$$/3.8/\quad \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 = \frac{1}{(1+b)\{1-[H(\nu_1)+1]b\}},$$

gdzie b jest dane wzorem /2.4/, natomiast $H(\nu)$ jest następującą funkcją

$$/3.9/\quad H(\nu) = \frac{5-\frac{3}{2}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\left[1-\frac{9}{2}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\right]}{1-\frac{9}{2}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)}, \qquad 0 \le \nu \le \frac{1}{2}.$$

Funkcja H jest w przedziale $0 \le \nu \le \frac{1}{2}$ ujemna, przy czym $H(\nu) \to -\infty$, gdy $\nu \to \frac{1}{2}$, a w punkcie $\nu = \frac{1}{11}$ funkcja H osiąga maksimum równe $H(\frac{1}{11}) = -\frac{35}{12}$. Wykres funkcji H przedstawiono na rys. 2.

Podobnie wzór /2.41/ możemy ze względu na założenia /3.2/ napisać w postaci

$$/3.10/\quad \frac{c}{c_1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}bH(\nu_1)}.$$

Gdy $\nu_1 \to \frac{1}{2}$ /faza dominująca objętościowo jest nieściśliwa/, to zgodnie z wzorami /3.1/, /3.8/ i /3.10/ $\frac{c}{c_1} \to 0\ (c_1 \to \infty)$, natomiast gdy $b \to 0$, to zgodnie z tymi wzorami $\frac{c}{c_1} \to 1\ (c \to c_1)$

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono wyniki numeryczne uzyskane na podstawie wzoru /3.8/, przy czym rys. 3 przedstawia $\frac{c}{c_1}$ w funkcji ν_1 przy parametrze b, natomiast rys. 4 przedstawia $\frac{c}{c_1}$ w funkcji b przy parametrze ν_1. Te same obliczenia numeryczne wykonano również korzystając z wzoru /3.10/ oraz wzoru /3.1/. Ze względu na to, że wszystkie trzy wspomniane wzory dają ten sam charakter zmienności $\frac{c}{c_1}$ w funkcji ν_1 lub b, nie podajemy w naszej pracy wykresów, które byłyby uzyskanymi w oparciu o wzory /3.1/ i /3.10/ odpowiednikami krzywych przedstawionych na rys. 3 i 4, lecz podajemy tylko na rys. 5 względne różnice $\Delta\left(\frac{c}{c_1}\right)/\frac{c}{c_1}$ pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą wzoru /3.1//wartość odniesienia/ oraz za pomocą wzorów /3,8/ /krzywe ciągłe/ i /3.10/ /krzywe przerywane/. Dla danych v_1 i b wzór /3.1/ daje największe wartości $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, natomiast wzór /3.10/ daje wartości najmniejsze. Podobną ilościowo zgodność wykazują uzyskane przez nas wyniki numeryczne z wynikami pracy (7). Z wykresów przedstawionych na rys. 5 widać, że im mniejsze jest b, tym lepsza jest zgodność wyników uzyskanych za pomocą wzoru /3.1/ oraz wzorów /3.8/ i /3.10/, a w granicy $b \to 0$ uzyskujemy zgodność całkowitą / $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \to 1$ /. Jest to zgodne z tym, że im mniejsze jest b, tym lepszym przybliżeniem rzeczywistego rozpraszania jest pojedyńcze rozpraszanie i tym lepszym przybliżeniem amplitudy potencjału płaskiej fali odbitej φ_2 i przepuszczonej przez płytę φ_3 są amplitudy wyliczone odpowiednio za pomocą wzorów /2.28/ i /2.29/.

Określimy jeszcze zakres wartości b i v_1, w którym są spełnione nierówności /2.17a/ i /2.32/. W tym celu wykażemy najpierw, że spełnienie nierówności /2.32/ pociąga za sobą ze względu na /2.16/ i /2.19a/ spełnienie warunku /2.17a/.

W rozpatrywanym przez nas przypadku /3.2/ wzory /2.26/ i /2.27/ przyjmują postać

/3.11/ $$\varphi_{(+D)} = \frac{1}{2} b H(v_1),$$

/3.12/ $$\varphi_{(-D)} = \varphi_{(+D)} + b$$

Założenie /2.17a/ zapiszemy teraz w postaci

/3.13/ $$|\varphi_{(+D)} + b|^2 |k_1 a|^2 \ll 1,$$

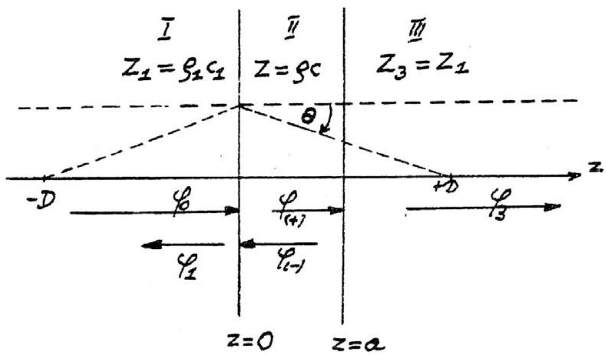
czyli po uwzględnieniu /2.19/

/3.14/ $$|\varphi_{(+D)} + b| \leq 1.$$

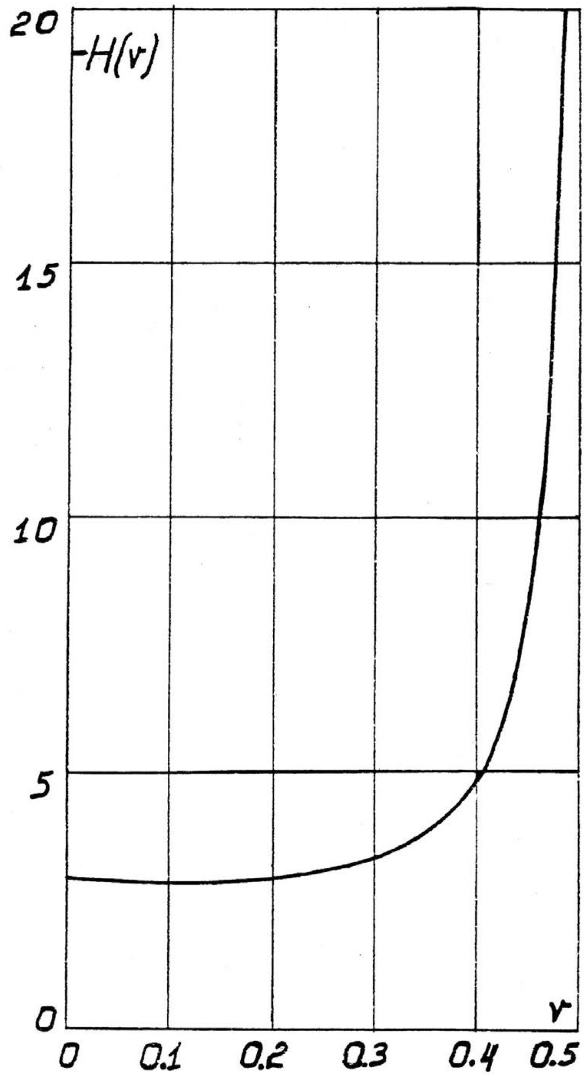
Ponieważ zgodnie z /3.11/ $b < |\varphi_{(+D)}|$, zatem spełnienie założenia /2.32/ pociąga za sobą spełnienie warunku /3.14/, a więc założenia /2.17a/. Nierówność /2.32/ zapiszemy teraz w postaci

/3.15/ $\quad -\frac{1}{2} b H(\nu_1) \ll 1.$

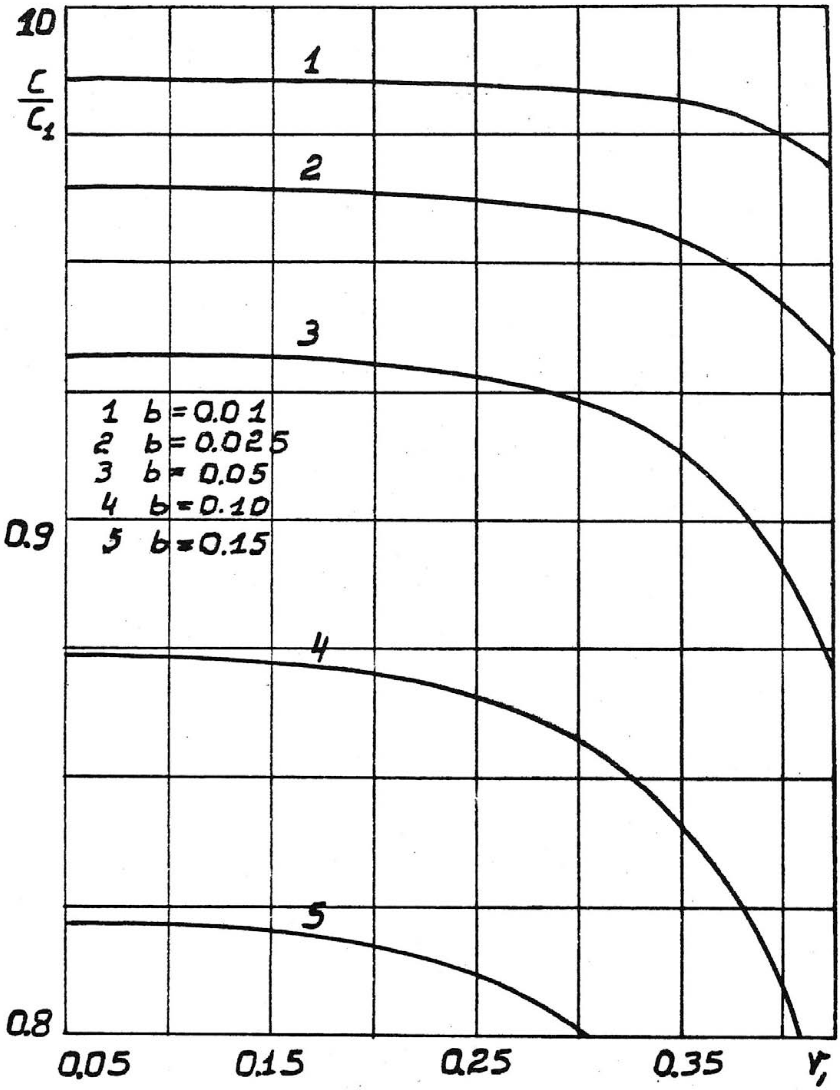
Nierówność ta określa zakres wartości b i ν_1, w którym jest spełnione założenie /2.32/. Wykres funkcji $H(\nu_1)$ przedstawiony na rys. 2 pozwala w każdym konkretnym przypadku ustalić dla danego ν_1 i b, czy nierówność /3.15/ jest spełniona.



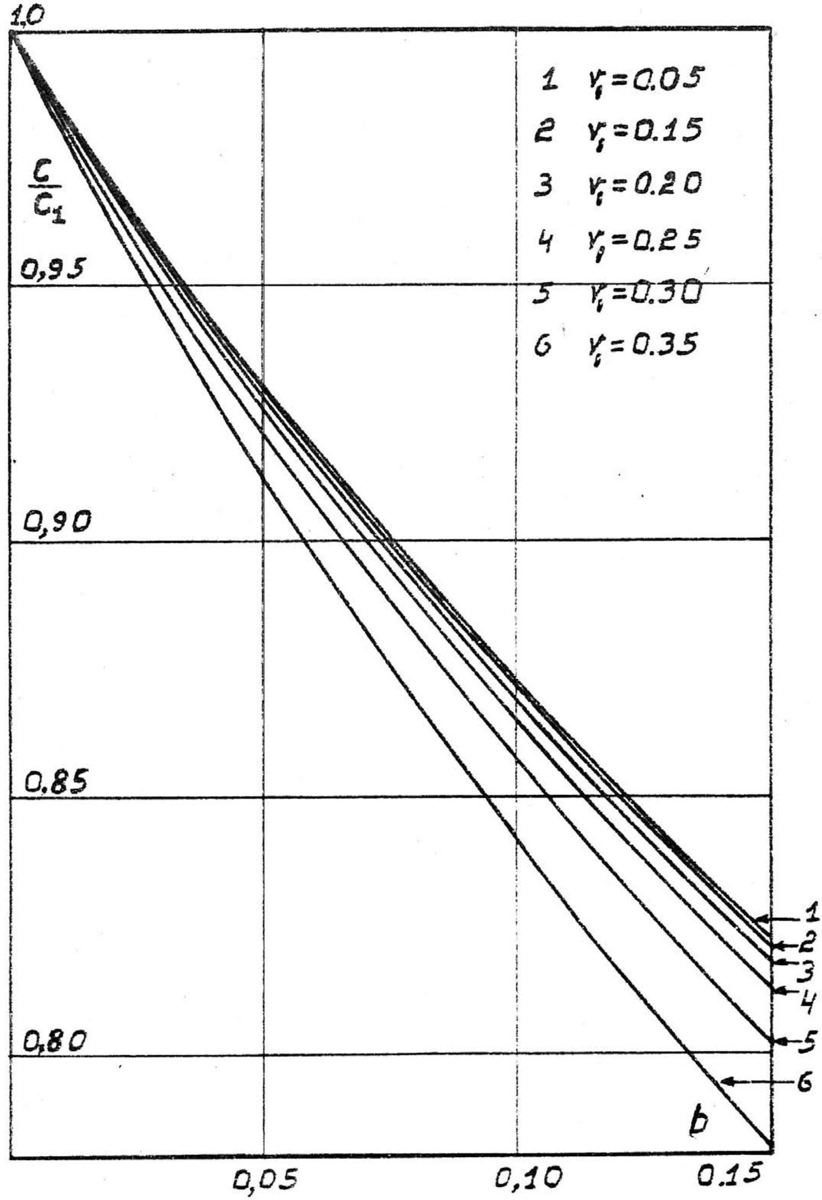
Rys.1.



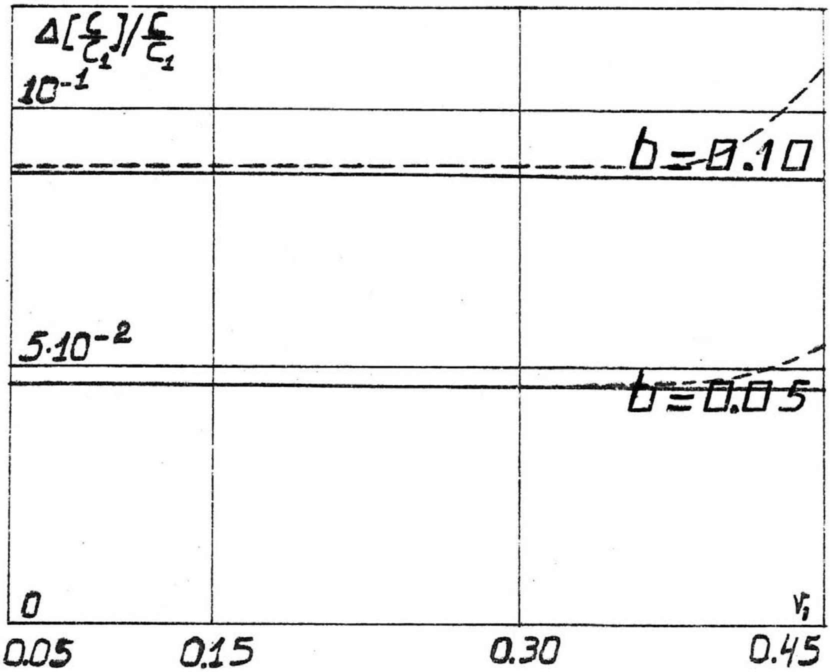
Rys.2.


10
c / c1
0.9
0.8
1
2
3
4
5
1 b = 0.01
2 b = 0.025
3 b = 0.05
4 b = 0.10
5 b = 0.15
0.05
0.15
0.25
0.35
r1

Rys.3.


1,0
$\frac{c}{c_1}$
0,95
0,90
0,85
0,80
1 $\gamma_1 = 0.05$
2 $\gamma_1 = 0.15$
3 $\gamma_1 = 0.20$
4 $\gamma_1 = 0.25$
5 $\gamma_1 = 0.30$
6 $\gamma_1 = 0.35$
1
2
3
4
5
6
b
0,05
0,10
0.15

Rys.4



——————— względna rożnica pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą wzorów /3.1/ i /3.8/,

- - - - - - - - względna rożnica pomiędzy wynikami uzyskanymi za pomocą wzorów /3.1/ i /3.10/.

Rys.5.

L i t e r a t u r a

(1) C.Sve, "Elastic Wave Propagation in a Porous Laminated Composite", Internal Jpurnal of Solids and Structures, Vol.9, No 8, str. 937-950, 1973.

(2) K.F. Herzfeld, "The Scattering of Sound-Waves by Small Elastic Spheres", Phil.Mag. and Journ of Sci., Vol. IX, seventh series, str. 741-752, 1930.

(3) K.F. Herzfeld, "Propagation of Sound in Suspensions", Phil.Mag. and Journ of Sci., Vol.9, seventh series, str. 752-768.

(4) R.J. Ament, W.S. Urick, "The Propagation of Sound in Composite Media", Journ.Aconst.Soc.of Amer., Vol. 21, 2, 115-119, 1949.

(5) C.F. Ying, Rohn Truell "Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Spherical Obstacle in an Isotropically Elastic Solid", Journ. of Appl.Phys., Vol. 27. No 9, str. 1086-1097, 1956.

(6) L.Landau i E.Lifszic "Mechanika ośrodków ciągłych", PWN, Warszawa 1958.

(7) J. Ranachowski, "Propagation of ultrasonic waves in porous ceramics", Ultrasonics, September 1975, str. 203-2[illegible]

Spis treści