Józef Lewandowski

AKUSTYKA MIESZANINY TRÓJFAZOWEJ JEDNOSKŁADNIKOWEJ DLA MAŁYCH LICZB KNUDSENA

38/1974

WARSZAWA

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 maja 1974 r.

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 180 egz. Ark. wyd. 1. Ark. druk. 1,5.
Oddano do drukarni w maju 1974 r.
Nr zamówienia 444/0   W - 108.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Józef Lewandowski
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów

AKUSTYKA MIESZANINY TRÓJFAZOWEJ JEDNOSKŁADNIKOWEJ DLA MAŁYCH LICZB KNUDSENA

1. Wstęp

Praca niniejsza jest kontynuacją prac [1 - 5], zajmujących się przepływem wielofazowych mieszanin wieloskładnikowych [1] i jednoskładnikowych [4] oraz rozchodzeniem się w tych mieszaninach małych / w porównaniu do wartości równowagowych/ zaburzeń parametrów termodynamicznych [2,3,5]. Wszystkie te prace jak również i obecnie przedstawiona praca opierają się na jednym i tym samym modelu mieszaniny wielofazowej zaproponowanym przez A.Szaniawskiego [1].

Autor pracy [1] podał model mieszanin wielofazowych o specyficznej strukturze: jedna faza /ciecz lub gaz/ jest spójna i dominuje objętościowo, a pozostałe fazy są w niej jednorodnie rozproszone w postaci kuleczek /cząstek/ o różnych promieniach. Kuleczki o tych samych promieniach nazywa się frakcjami. W modelu tym [1] zakłada się, że odległość pomiędzy cząstkami jest z jednej strony bardzo duża w porównaniu z wymiarami cząstek /promieniami kuleczek/, a z drugiej strony jest bardzo mała w porównaniu z charakterystyczną długością przepływu, co pozwala rozpatrywać mieszaninę wielofazową jako ośrodek ciągły posiadający pewną wewnętrzną strukturę "frakcyjną". O odległościach pomiędzy cząstkami faz rozproszonych zakłada się ponadto, że są one dostatecznie duże, aby cząstki te można było traktować jako izolowane uwzględniając jedynie oddziaływanie pomiędzy tymi cząstkami a otaczającą fazą spójną. Przyjmuje się również, że wewnątrz tych cząstek nie zachodzą żadne przemiany fazowe. O wymiarach cząstek zakłada się ponadto, że są one wystarczająco duże, aby uzasadnić zaniedbywalność ruchów Browna. W modelu [1] zakłada się również zaniedbywalność wpływu napięcia powierzchniowego na oddziaływanie przylegających do siebie faz, co oznacza, że ciśnienie wewnątrz każdej fazy jest takie samo, a energia wewnętrzna całej mieszaniny jest równa sumie energii wewnętrznych poszczególnych frakcji. W modelu [1] zakłada się dalej zaniedbywalność niejednorodności parametrów termodynamicznych wewnątrz fazy spójnej i wewnątrz każdej frakcji faz rozproszonych. W pracy [2] zajmowano się jednoskładnikową mieszaniną dwufazową, składającą się ze spójnej fazy gazowej i rozproszonej w postaci jednej tylko frakcji fazy ciekłej. W pracy [3] zajmowano się mieszaniną jednoskładnikową trójfazową, w której każda z dwu faz rozproszonych występuje w postaci jednej tylko frakcji. Taką samą mieszaniną zajmujemy się i w niniejszej pracy.

W modelu [1] zakłada się, jak to już wspomniano, że zaburzenia są małe w porównaniu z wartościami równowagowymi, uzasadniając tym samym zarówno linearyzację /ze względu na zaburzenia/ równań opisujących przepływ zaburzony, jak i stosowanie zasad liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych przy obliczaniu strumieni termodynamicznych /masy, enrgii i pędu/ wywołanych przez zaburzenia.

Rozpatrując zagadnienie rozchodzenia się małych zaburzeń w ośrodkach jednorodnych posługiwano się w pracach [2,3], jak również i w niniejszej pracy oraz w pracy [5], powszechnie stosowaną metodą polegającą na tym, że poszukiwane funkcje /zaburzenia/ przyjmuje się w postaci płaskich fal harmonicznych. Przyjmując taką postać zaburzeń /funkcje periodyczne w przestrzeni i w czasie/ sprowadzamy układ równań różniczkowych jednorodnych /w przypadku braku sił masowych/ akustyki do układu takiej samej liczby liniowych i jednorodnych równań algebraicznych z amplitudami zaburzeń jako niewiadomymi. Warunek konieczny istnienia nietrywialnych rozwiązań tego układu równań algebraicznych wyraża się w postaci równania charakterystycznego, które pozwala nam wyznaczyć prędkość rozchodzenia się dźwięku i tłumienie jako funkcje częstości /dyspersja ośrodka/. Zmniejszając liczby frakcji, składników i faz zapewniamy sobie większą prostotę i przejrzystość rachunków wykonywanych tą metodą. Rozpatrując w pracy [2] rozchodzenie się fal akustycznych w jednoskładnikowej mieszaninie dwufazowej założono, że średnica d kulistych kropelek cieczy jest znacznie mniejsza od średniej drogi swobodnej l cząstek gazu, tzn. założono, że liczba Knudsena $\frac{d}{l}$ jest mała. Założenie to pozwoliło wyliczyć współczynniki fenomenologiczne występujące w równaniach transportu masy, energii i pędu, przenoszonych pomiędzy fazami pod wpływem zaburzeń akustycznych. W pracy [3] rozpatrywano rozchodzenie się fal akustycznych w mieszaninie jednoskładnikowej trójfazowej podając jedynie ogólne wyniki uzyskane również dla przypadku małych liczb Knudsena. W niniejszej pracy pragniemy bardziej wyczerpująco przedstawić niektóre problemy i wyniki numeryczne związane z rozchodzeniem się małych zaburzeń w jednoskładnikowej mieszaninie trójfazowej w przypadku $\frac{d}{l} \ll 1$.

2. Równania akustyki mieszaniny trójfazowej jednoskładnikowej. Równanie charakterystyczne.

Zgodnie z [1] przepływ zaburzony w rozpatrywanym przez nas przypadku można opisać za pomocą 4 termodynamicznych parametrów perturbacji i 3 funkcji wektorowych, określających zaburzenia rozkładów prędkości mieszaniny jako całości /1 funkcja/ i poszczególnych jej frakcji /dwie funkcje/. Za parametry perturbacji przyjmujemy następpujące różnice pomiędzy wartościami parametrów termodynamicznych stanu zaburzonego i stanu równowagi, którym w naszym przypadku jest stan współistnienia trzech faz /"punkt potrójny"/:

$$/1/ \quad \Delta p = p - \bar{p}; \quad \Delta T^n = T^n - \bar{T}, \quad n = 0, 1, 2.$$

p oznacza tu ciśnienie a T temperaturę. Poziomą kreską nad symbolem jakiejkolwiek wielkości fizycznej będziemy odtąd zawsze oznaczali wartość tej wielkości w stanie równowagi. Podobnie górnym wskaźnikiem n = 0, 1 i 2 będziemy odtąd zawsze oznaczali odpowiednio fazę gazową /faza spójna i dominująca objętościowo/, ciekłą /faza rozproszona w postaci jednej frakcji/ i stałą /również faza rozproszona w postaci jednej tylko frakcji/. Zgodnie z [1] liczba różnic pomiędzy wartościami parametrów termodynamicznych stanu zaburzonego i stanu równowagi, których wartości można przyjąć dowolnie, wynosi 2. Różnicami tymi mogą być:

$$/2/ \quad \Delta \xi^n = \xi^n - \bar{\xi}^n, \quad n = 1, 2.$$

Przez ξ^n, n=0,1,2 będziemy oznaczali stosunek masy M^n n-tej frakcji fazy skondensowanej /n=1,2/ lub fazy gazowej /n=0/ do masy całej mieszaniny M, czyli

$$/3/ \quad \xi^n = \frac{M^n}{M}, \quad n = 0, 1, 2,$$

gdzie

$$/3a/ \quad M = \sum_{n=0}^{N} M^n$$

Zbiór funkcji opisujących przepływ zaburzony mieszaniny wielofazowej [1] będą stanowiły parametry perturbacji /1/ oraz trzy funkcje wektorowe $\vec{u}^n$, n=0, 1, 2 gdzie $\vec{u}^0$ oznacza prędkość fazy gazowej, natomiast $\vec{u}^1$ i $\vec{u}^2$ oznaczają prędkość odpowiednich frakcji faz skondensowanych.

Wprowadzamy teraz do modelu [1] dalsze założenia [3] , a mianowicie przyjmujemy, że:

1. objętość właściwa faz skondensowanych $\frac{1}{\rho^n}$, n=1,2 jest zaniedbywalnie mała w porównaniu do objętości właściwej fazy gazowej $\frac{1}{\rho^0}$, tj.:

$$\frac{\rho^0}{\rho^n} \ll 1; \quad \left(\frac{\xi^1}{\rho^1} + \frac{\xi^2}{\rho^2}\right)\frac{\rho^0}{\xi^0} \ll 1, \quad n=1,2; \tag{4}$$

2. faza gazowa jest gazem nielepkim, nie przewodzi ciepła i spełnia równanie Clapeyrona

$$p = \rho^0 R T^0; \tag{5}$$

3. fazy skondensowane są nieściśliwe, tj.:

$$\rho^n = const, \quad n=1,2, \tag{6}$$

i są rozproszone w fazie spójnej gazowej w postaci kulek o stałych promieniach r^1, r^2 i pomijalnych efektach obrotów;

4. średnica cząstek jest bardzo mała w porównaniu ze średnią drogą swobodną cząsteczek gazu, tj.:

$$\frac{d}{l} \ll 1. \tag{7}$$

Zakładamy dodatkowo, że rozpatrywana mieszanina wielofazowa jest początkowo /tzn. przed zaburzeniem równowagi/ w spoczynku, tj.:

$$\vec{u} = 0; \qquad \Delta\vec{u} \equiv \vec{u} \tag{8}$$

gdzie $\vec{u}$ oznacza prędkość środka masy mieszaniny, przy czym

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{N} \xi^n \vec{u}^n. \tag{9}$$

Zakładamy również, że siły masowe są równe zeru. Zaburzenie równowagi powoduje pojawienie się względnego ruchu faz, który będziemy charakteryzowali za pomocą prędkości:

$$\vec{w}^n = \vec{u}^n - \vec{u}, \qquad n = 0, 1, 2. \tag{10}$$

Wykorzystując wszystkie poprzednio podane założenia otrzymujemy z równań przepływowych [1,4] mieszaniny wielofazowej [1] następujący układ równań rozchodzenia się zaburzeń akustycznych [2,3] :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bar{\xi}^{0} R\bar{T}\vec{\nabla}\left(\frac{\Delta p}{\bar{p}}\right) = 0,\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\bar{\xi}^{n}\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\right)\frac{\Delta p}{\bar{p}} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\bar{\xi}^{n}\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\right)\frac{\Delta T^{0}}{\bar{T}}\\
&\quad - \frac{1}{\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\bar{\xi}^{n}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\frac{\Delta T^{n}}{\bar{T}} - \frac{1}{\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\bar{\xi}^{n}\vec{\nabla}\cdot\vec{w}^{n} = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\bar{\xi}^{n}\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\right)\frac{\Delta p}{\bar{p}} - \left\{C^{0}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\xi}^{n}}{\tau_0^{n}}\left[Q^{n}\alpha^{n} + \left(C^{0}-\frac{1}{2}\right)\beta^{n}\right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{2}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\alpha^{n}\right]\right\}\frac{\Delta T^{0}}{\bar{T}} + \frac{1}{\bar{\xi}^{0}}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\xi}^{n}}{\tau_0^{n}}\left[\left(C^{0}-\frac{1}{2}\right)\beta^{n} - \frac{1}{2}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\alpha^{n}\right]\frac{\Delta T^{n}}{\bar{T}} = 0,\\
&\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\frac{\Delta p}{\bar{p}} + \left[\left(C^{0}-\frac{1}{2}\right)\beta^{n} - \frac{1}{2}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\alpha^{n}\right]\frac{1}{\tau_0^{n}}\frac{\Delta T^{0}}{\bar{T}}\\
&\quad - \left\{C^{n}\frac{\partial}{\partial t} + \left[\left(C^{0}-\frac{1}{2}\right)\beta^{n} - \frac{1}{2}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\alpha^{n}\right]\frac{1}{\tau_0^{n}} + Q^{n}\left(Q^{n}-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha^{n}}{\tau_0^{n}}\right\}\frac{\Delta T^{n}}{\bar{T}} = 0,\\
&\bar{\xi}^{0} R\bar{T}\vec{\nabla}\left(\frac{\Delta p}{\bar{p}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1-\bar{\xi}^{m}}{\bar{\xi}^{0}}\frac{\gamma^{m}}{\tau_0^{n}}\right)\vec{w}^{n} - \frac{\bar{\xi}^{m}}{\bar{\xi}^{0}}\frac{\gamma^{n}}{\tau_0^{n}}\vec{w}^{m} = 0,\\
&\qquad m, n = 1, 2,\\
&\qquad m \neq n,
\end{aligned}\tag{11}$$

gdzie

$$\tau_0^{n} = \frac{\bar{\xi}^{n}}{3\bar{\xi}^{0}}\sqrt{\frac{2\pi}{R\bar{T}}} \tag{12}$$

oraz

$$C^0 = \frac{c_p}{R}, \qquad /13/$$

$$C^n = \frac{c^n}{R}, \qquad /14/$$

$$Q^n = \frac{q^n}{R\bar{T}}, \qquad /15/$$

przy czym R jest stałą gazową, c_p^0 - ciepłem właściwym fazy gazowej przy stałym ciśnieniu, q^n jest ciepłem parowania /n=1/ lub sublimacji /n=2/, zaś stałe α^n, β^n, γ^n są współczynnikami oddziaływania molekularnego fazy gazowej z powierzchnią fazy rozproszonej ciekłej /n = 1/ lub stałej /n=2/. Współczynniki te charakteryzują odpowiednio transport masy /α^n/, energii /β^n/ i pędu /γ^n/. Spełniają one nierówności [2] :

$$0 \leq \alpha^n \leq 1, \quad 0 \leq \beta^n \leq 1, \quad \frac{4+\pi}{6} \leq \gamma^n \leq 2, \quad \alpha^n < \beta^n < 1 \qquad /16/$$

Do równań /11/ podstawiamy zaburzenia harmoniczne w postaci fal płaskich:

$$\Delta F(x,t) = (\Delta F)_0 \, e^{i(\omega t + kx)}, \qquad /17/$$

gdzie $(\Delta F)_0$ jest amplitudą zaburzenia, ω jest częstością kołową, x jest współrzędną przestrzenną mierzoną w kierunku rozchodzenia się fali, t oznacza czas, a k jest modułem wektora propagacji. Moduł ten wyraża się wzorem:

$$k = -\frac{\omega}{a} + i\mu, \qquad /18/$$

gdzie a oznacza prędkość fazową fali zaburzeniowej, a μ jest współczynnikiem tłumienia fali. Po podstawieniu /17/ do układu równań /11/ otrzymujemy układ równań algebraicznych jednorodnych z amplitudami zaburzeń jako niewiadomymi. Z takiego układu równań otrzymujemy z kolei natychmiast równanie charakterystyczne. Z równania charakterystycznego otrzymujemy:

/19/ $$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 R\bar{T} = P\frac{L}{M},$$

gdzie

/20/ $$P = \frac{1}{\bar{\xi}^0}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma^1}{i\omega\tau_0^1}\right)\frac{1}{\bar{\xi}^1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma^2}{i\omega\tau_0^2}\right)\frac{1}{\bar{\xi}^2}}\right],$$

natomiast L i M są wielomianami odpowiednio czwartego i trzeciego stopnia ze względu na ω^{-1} / ze względu na $(i\omega\tau_0^n)^{-1}$/, przy czym w przeciwieństwie do P nie zależą od współczynników wymiany pędu lecz zależą od współczynników wymiany masy i energii / α^n i β^n /. L i M wyrażają się wzorami:

$$L = (1+L^1+L^2)M + \left[1+\tfrac{1}{2}(L^1+L^2)\right]M_1 - (Q^1-\tfrac{1}{2})L^1M_2 + (Q^2-\tfrac{1}{2})L^2M_3,$$

$$M = -\left[C^c + (B^1+B^2) + \tfrac{1}{4}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^1 + B^1 + (Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\tilde{C}^2 + B^2 + (Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right] + \left[B^2 - \tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right]^2\left[\tilde{C}^1 + B^1 +\right.$$
$$\left. + (Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right] + \left[B^1 - \tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]^2\left[\tilde{C}^2 + B^2 + (Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right],$$

/21/

$$M_1 = \left[1+\tfrac{1}{2}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^1 + B^1 + (Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right]\left[\tilde{C}^2 + B^2 + (Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right]$$
$$+ \left[B^2 - \tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right]\left[\tilde{C}^1 + B^1 + (Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right](Q^2-\tfrac{1}{2})L^2$$
$$+ \left[B^1 - \tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]\left[\tilde{C}^2 + B^2 + (Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right](Q^1-\tfrac{1}{2})L^1,$$

$$
\begin{aligned}
M_2 = &-\left[1+\tfrac{1}{2}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^2+B^2+(Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right]\left[B^1-\tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]\\
&+\left[B^2-\tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right]^2(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\\
&-\left[B^1-\tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]\left[B^2-\tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right](Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\\
&-\left[C^0+B^1+B^2+\tfrac{1}{4}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^2+B^2+(Q^2-\tfrac{1}{2})^2L^2\right](Q^1-\tfrac{1}{2})L^1,
\end{aligned}
$$

/21/

$$
\begin{aligned}
M_3 = &\left[C^0+B^1+B^2+\tfrac{1}{4}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^1+B^1+(Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right](Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\\
&+\left[B^1-\tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]\left[B^2-\tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right](Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\\
&-\left[B^1-\tfrac{1}{2}(Q^1-\tfrac{1}{2})L^1\right]^2(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\\
&+\left[1+\tfrac{1}{2}(L^1+L^2)\right]\left[\tilde{C}^1+B^1+(Q^1-\tfrac{1}{2})^2L^1\right]\left[B^2-\tfrac{1}{2}(Q^2-\tfrac{1}{2})L^2\right],
\end{aligned}
$$

$$L^n = \frac{\alpha^n}{i\omega\tau_0^n}\,\frac{\bar{\xi}^n}{\bar{\xi}^0},$$

$$B^n = \frac{1}{i\omega\tau_0^n}\,\frac{\bar{\xi}^n}{\bar{\xi}^0}\,(C^0-\tfrac{1}{2})\beta^n,$$

$$\tilde{C}^n = \frac{\bar{\xi}^n}{\bar{\xi}^0}\,C^n,$$

$$n = 1, 2.$$

3. Prędkość fazowa i współczynnik tłumienia.

Równanie /19/ można przepisać w postaci:

/22/ $$-\frac{1}{a^*} + i\frac{u^*}{\omega\tau_0^n} = \sqrt{P\frac{L}{M}},$$

gdzie

/23/ $$a^* = \frac{a}{(R\bar{T})^{1/2}},$$

/24/ $$\mu^* = (R\bar{T})^{1/2} \mu \tau_0^n$$

jest odpowiednio bezwymiarową prędkością i bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia. Z równania /21/ otrzymujemy wzory na prędkość dźwięku i współczynnik tłumienia w następującej postaci:

/25/ $$a^* = -\left[Re \sqrt{P \frac{L}{M}} \right]^{-1},$$

/26/ $$\mu^* = \omega \tau_0^n \, Im \sqrt{P \frac{L}{M}} .$$

Re i Im oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej. Wzory /25/ i /26/ pozwalają nam wyliczyć numerycznie wartość prędkości dźwięku i tłumienia w funkcji częstości w mieszaninie trójfazowej danej substancji chemicznej /tzn. dla danych stałych materiałowych C^0, C^1, C^2, Q^1, Q^2/ przy parametrach α^n, β^n, γ^n, ξ^n, n=1,2 /rys.1-4/. Analiza wzoru /25/ wykazuje, że w granicznym przypadku $\omega\tau_0^n \to \infty$ prędkość dźwięku a^* nie zależy od parametrów $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \xi^n$ i dąży do wartości stałej a^*_∞, przy czym:

/27/ $$a^*_\infty = \sqrt{\frac{C^0}{C^0 - 1}} .$$

W granicy, gdy $\omega\tau_0^n \to 0$ oraz jednocześnie $\alpha^n \to 0$, $\beta^n \to 0$, $\gamma^n \to 0$ prędkość a^* dąży do wartości a^*_0, przy czym pomiędzy

a_0^* i a_∞^* zachodzi prosty związek

$$a_0^* = a_\infty^* (\bar{\xi}^0)^{1/2} \tag{28}$$

W pracy [5] wykazano, że wzory /19/-/26/ są słuszne również w przypadku mieszaniny dwufazowej z dwoma frakcjami jednej tylko fazy rozproszonej tj. dla przypadku, gdy $Q^1 = Q^2$. Równość ta pociąga bowiem za sobą, jak wykazano w pracy [5] , zmniejszenie się stopnia wielomianu L ze względu na ω^{-1} o 1 i przejście wzorów /21/ w analogiczny wzór dla przypadku mieszaniny dwufazowej z jedną fazą rozproszoną w postaci dwu frakcji. W pracy [5] dokonano również wyczerpującej analizy wzoru /19/ /w pracy [5] wzór /6// badając jego zachowanie się w obszarze małych częstości. W szczególności wykazano, że:

$$\lim_{\omega \to 0} P \frac{L}{M} = \left(\frac{Q^2 - Q^1}{Q^2 + Q^1} \frac{1}{\bar{\xi}^0} \right)^2 \frac{1}{\frac{\tau^1}{\bar{\xi}^1} + \frac{\tau^2}{\bar{\xi}^2}} \frac{1}{i\omega} , \tag{29}$$

$$\lim_{\omega\tilde{\tau} \to 0} a^* = \frac{\sqrt{\omega\tilde{\tau}}}{\Lambda} , \tag{30}$$

$$\lim_{\omega\tilde{\tau} \to 0} \mu^* = \Lambda \sqrt{\omega\tilde{\tau}} , \tag{31}$$

gdzie

$$\tilde{\tau} = \sqrt{\tau^1 \tau^2} , \tag{32}$$

$$\Lambda = \frac{Q^2 - Q^1}{Q^1 + Q^2} \frac{1}{\bar{\xi}^0} \left[\frac{\frac{1}{2}(1 - \bar{\xi}^0)}{\frac{(\tau^1/\tau^2)^{1/2}}{\bar{\xi}^1/(\bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^2)} + \frac{(\tau^2/\tau^1)^{1/2}}{\bar{\xi}^2/(\bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^2)}} \right]^{1/2} \tag{33}$$

przy czym w rozpatrywanym przez nas przypadku małych liczb Knudsena podane w pracy [5] wzory na τ^1 i τ^2 przyjmują postać

$$/34/ \qquad \frac{\tau^{1,2}}{\tau_p^{1,2}} = \frac{1}{\alpha^{1,2}} + \frac{(Q^{1,2}-\frac{1}{2})^2}{C^c-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\beta^{1,2}},$$

gdzie

$$/35/ \qquad \tau_p^{1,2} = \left(\frac{Q^{2,1}}{Q^1+Q^2}\right)^2 \tau_0^{1,2}.$$

$\tau_0^{1,2}$ jest dane wzorem /12/.

Z wzorów /30/-/31/ widać, że $a^* \to 0$, $\mu^* \to 0$, gdy $\omega \to 0$, tzn. gdy układ dąży do równowagi. Czasy charakterystyczne τ^n, n=1,2, dane wzorem /34/ zależą od wymiany masy i energii pomiędzy fazami rozproszonymi i fazą spójną gazową, jak również od promieni r^n cząstek frakcji rozproszonych. Współczynnik Λ jest zgodnie z [5] miarą wpływu efektów trójfazowych na własności akustyczne mieszaniny; współczynnik ten znika gdy $Q^1-Q^2 \to 0$, a więc, gdy znikają efekty związane z trójfazowością. Zgodnie z [5] nierówność

$$/36/ \qquad \omega \ll \frac{\Lambda^2}{\tilde{\tau}}$$

wyznacza obszar częstości, w którym efekty trójfazowe wywierają silny wpływ na własności akustyczne mieszaniny wielofazowej.

4. Wyniki numeryczne

Przedstawiamy obecnie niektóre rezultaty obliczeń numerycznych wartości prędkości dźwięku i tłumienia w funkcji częstości jakich dokonano dla wody korzystając z wzorów /25/-/26/. Podamy również wartości τ^n/τ_p^n w funkcji α^n, wyliczone na podstawie wzoru /34/ dla wody, dwutlenku węgla i amoniaku. Wykonując obliczenia numeryczne korzystano z wartości liczbowych stałych Q^n i C^o podanych niżej w tabeli I [4] .

Tabela I

	Q^1	Q^2	C^o
H_2O [6]	19,80	22,73	4,18
CO_2 [7]	8,56	13,44	5,15
NH_3 [7]	15,80	19,33	10,00

Na rys.1-4 podano dla wody wykresy zależności a^* i μ^* /rys.1/ lub $\frac{\mu^*}{\omega\tau_o^n}$ /rys.2-4/ od $\omega\tau_o^n$ dla $\tau_o^1=\tau_o^2=\tau$ dla różnych zakresów częstości i różnych wartości parametrów $\alpha^1=\alpha^2=\alpha$, $\gamma^1=\gamma^2=\gamma$, $\bar{\xi}^o=1-\bar{\xi}^1-\bar{\xi}^2$, $\bar{\xi}^1=\bar{\xi}^2$. Przy doborze wykresów funkcji a^* i μ^* lub $\mu^*/\omega\tau$, przedstawionych na rys. 1-4, kierowano się pragnieniem uzyskania zestawienia krzywych odpowiadających takiemu doborowi wartości parametrów α, β, γ, $\bar{\xi}^o$, który pozwalałby poprzez porównanie ze sobą odpowiednich wykresów wnioskować o wpływie zmian poszczególnych parametrów na przebieg badanych funkcji. Wartości parametrów α , β , γ , $\bar{\xi}^o$ odpowiadające różnym krzywym z rys.1-4 podano w tabeli II.

Tabela II

	Nr krzywej	α	β	γ	$\bar{\xi}^o$
Rys.1	1	0,0015	0,5	1,9	0,8
	2	0,015	0,5	1,9	0,8
	3	0,0015	0,5	1,9	0,5
	4	prędkość a_o^* dla		$\bar{\xi}^o$ = 0,8	
	5	prędkość a_c^* dla		$\bar{\xi}^o$ = 0,5	
Rys.2	1	0,15	0,5	0,0	0,8
	2	0,0	0,0	1,9	0,8
	3	0,15	0,5	1,9	0,8
	4	0,015	0,5	1,9	0,8
	5	0,0015	0,5	1,9	0,8
Rys.3	1	0,15	0,5	0,05	0,8
	2	0,15	0,5	0,5	0,8
	3	0,15	0,5	1,0	0,8
	4	0,15	0,5	1,9	0,8
	5	0,15	0,5	1,9	0,8
Rys.4	1	0,15	0,0	1,9	0,8
	2	0,15	0,25	1,9	0,8
	3	0,15	0,5	1,9	0,8
	4	0,15	0,5	1,9	0,5

Wykresy przedstawione na rysunku 1 uwidaczniają paraboliczny charakter zależności a^* /linie ciągłe/ i μ^* /linie przerywane/ od $\omega\tau$ dla małych częstości, zgodny z wzorami /30/-/31/. Na rys.1 podano również prędkość a_c^* dla $\bar{\xi}^o$ =0,8 i $\bar{\xi}^o$ = 0,5.

Rysunki 2-4 przedstawiają wykresy a^* /linie ciągłe/ i $\mu^*/\omega\tau$ /linie przerywane/ jako funkcje $\omega\tau$ dla $10^{-3} \leq \omega\tau \leq 10^2$, a więc w zakresie częstości, w którym do badania przebiegu omawianych funkcji nie można stosować, jak to widać z rys.1, wzorów /30/-/31/, lecz trzeba się posługiwać wzorami /25/-/26/.

Zgodnie z tabelą II krzywe 1 z rys.2 przedstawiają zależności a^* i $\mu^*/\omega\tau$ od $\omega\tau$ dla przypadku, gdy brak wymiany pędu /γ = 0/, natomiast krzywe 2 są wykresami tych samych zależności dla γ =1,9, α = β = 0 /brak wymiany masy i energii między fazami/. Krzywe 3 z rys.2 przedstawiają zależności a^* i $\mu^*/\omega\tau$ od $\omega\tau$ dla przypadku, gdy zachodzi superpozycja wpływów wymiany pędu /$\gamma \neq 0$/ oraz wymiany masy /$\alpha \neq 0$/ i energii /$\beta \neq 0$/ na charakter przebiegu badanych zależności. Porównując krzywe 3 z krzywymi 1 i 2 /rys.2/ można ocenić, jak silnie zaznacza się wpływ wspomnianych procesów transportu na przebieg omawianych zależności. Porównując ze sobą krzywe 3-5 można z kolei dostrzec zmiany w przebiegu a^* i $\mu^*/\omega\tau$ jako funkcji $\omega\tau$, wywołane przez zmianę współczynnika wymiany masy między fazami. Podobnie porównanie odpowiednich krzywych z rys. 3 i 4 uwidacznia zmiany w przebiegu omawianych funkcji wywołane odpowiednio zmianą wymiany pędu /rys.3 krzywe 1-4/, zmianą wymiany energii /rys.4 krzywe 1-3/ oraz zmianą parametru ξ^0 /rys.4 krzywe 3 i 4/.

Na rys. 5 przedstawiono wykresy ilustrujące zależność bezwymiarowych czasów charakterystycznych τ^n/τ_p^n, n = 1, 2, danych wzorem /34/ , od współczynnika wymiany masy dla wody /krzywe 1-4/, amoniaku /krzywe 5-8/ i dwutlenku węgla /krzywe 9-12/ oraz dla β^n= 1 /linie ciągłe/ i $\beta^n = \alpha^n$ /linie przerywane/. Krzywe 1, 2, 5, 6, 9, 10 odpowiadają fazie rozproszonej ciekłej /n=1/, natomiast krzywe 3, 4, 7, 8, 11, 12 odpowiadają fazie rozproszonej stałej /n=2/. Z rys. 5 widać, jak silnie wydłuża się czas powrotu układu do równowagi w miarę jak maleje wymiana masy w rozpatrywanym przepływie zaburzonym. W tabeli IV podano wartości liczbowe τ_p^n/r^n dla wody, amoniaku i dwutlenku węgla.

Tabela IV

	T [°K]	$\bar{p}$ [dyna/cm²]	$\varrho^1 = \varrho^2$ [g/cm³]	τ_p^1/r^1 [sek/cm]	τ_p^2/r^2 [sek/cm]
H_2O	273,1 [8]	630,0 [8]	1,0	13,57	9,2
NH_3	195,2 [10]	6,065 103 [10]	0,6814 [9]	0,8678	0,581
CO_2	216,4 [11]	5,171 10^6 [11]	1,512 [10]	1,837 10^{-2}	7,45 10^{-3}

LITERATURA

[1]. SZANIAWSKI A. - Flow equations of a multiphase mixture with one coherent liquid or gaseous phase, Arch.Mech. Stos., 24, 555-571, /1972/.

[2]. SZANIAWSKI A. - Rozchodzenie się fal akustycznych w kropelkowym modelu pary wilgotnej, Biuletyn IMP PAN,/1972/.

[3]. SZANIAWSKI A. ŁEWANDOWSKI J. - Akustyka mieszaniny jednostkowej trójfazowej, Prace XIX Otwartego Seminarium z Akustyki, Gdańsk-Sopot wrzesień 1972, str.327-330.

[4]. SZANIAWSKI A. - Equations of flow of a one-component three-phase mixture, Arch.Mech.Stos.,25, 791-799,/1973/.

[5]. SZANIAWSKI A. - Acoustics of one-component three-phase mixture Bull.Acad.Polon.Sci.,Ser.Sci.Techn., 22, 5 /1974/

[6]. М.П.Букалович, С.Л.Рыбкин, Л.А.Александров, Таблицы теплофизических свойств воды и воляного пара, Москва I969.

[7]. DIN F. - Thermodynamic functions of gases, Butterworth, London, /1962/.

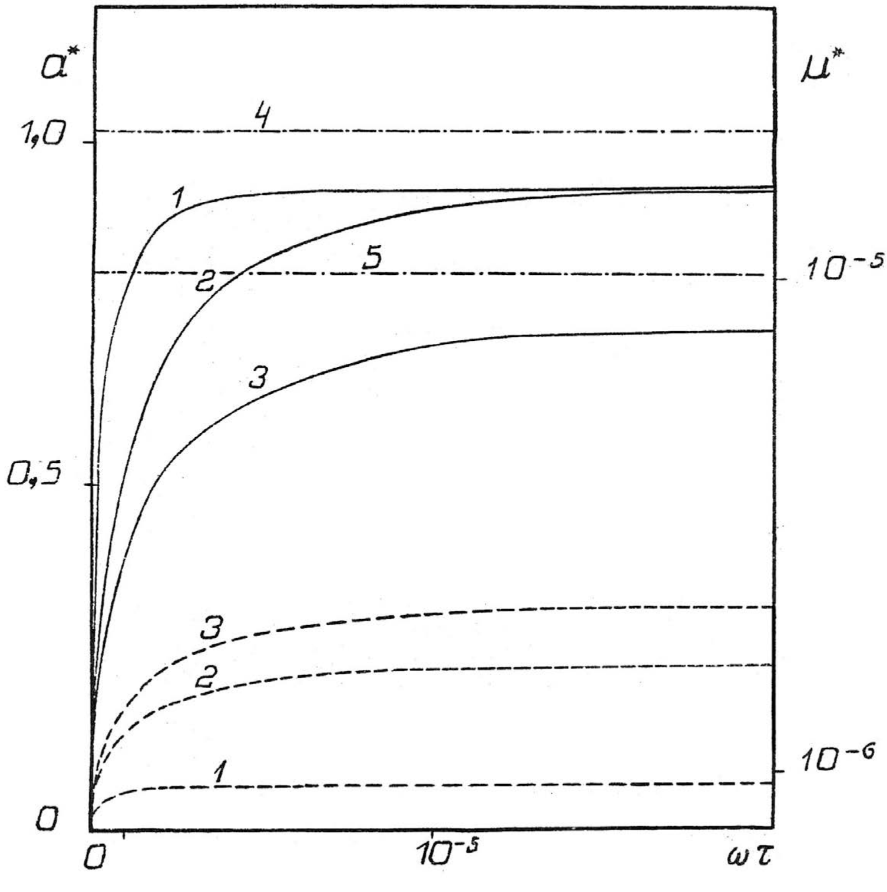
[8]. WERLE J. - Termodynamika fenomenologiczna, PWN,Warszawa /1957/.

[9]. Краткая химическая энциклопедия, том I, Гос.Научн.Изд. " Советская Энциклопедия", Москва I96I.

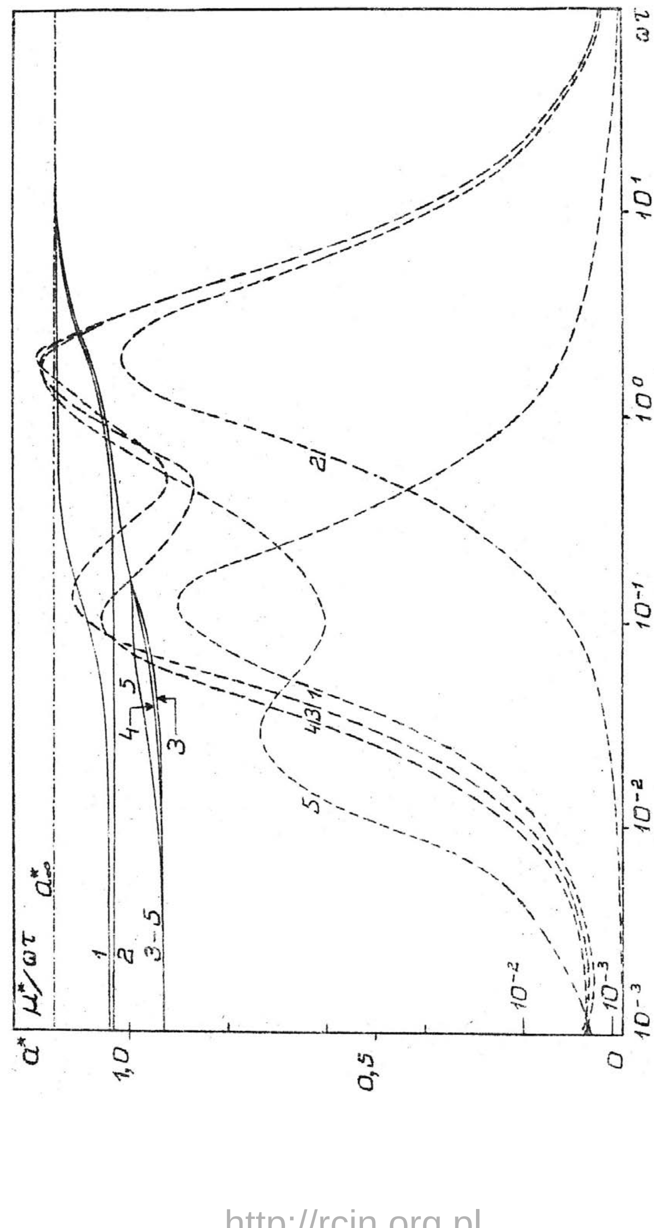
[10]. Краткая химическая энциклопедия, том 4, Гос.Научн.Изд. "Советская Энциклопедия", Москва I967.

[11]. MELLOR J.W. - A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry, Vol.VIII, str.173, Langmans, Green and Co., London-New York-Toronto, /1953/.

[12]. MELLOR J.W. - A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry, Vol.VI, str.31, Langmans, Green and Co., London-New York - Toronto, /1947/.

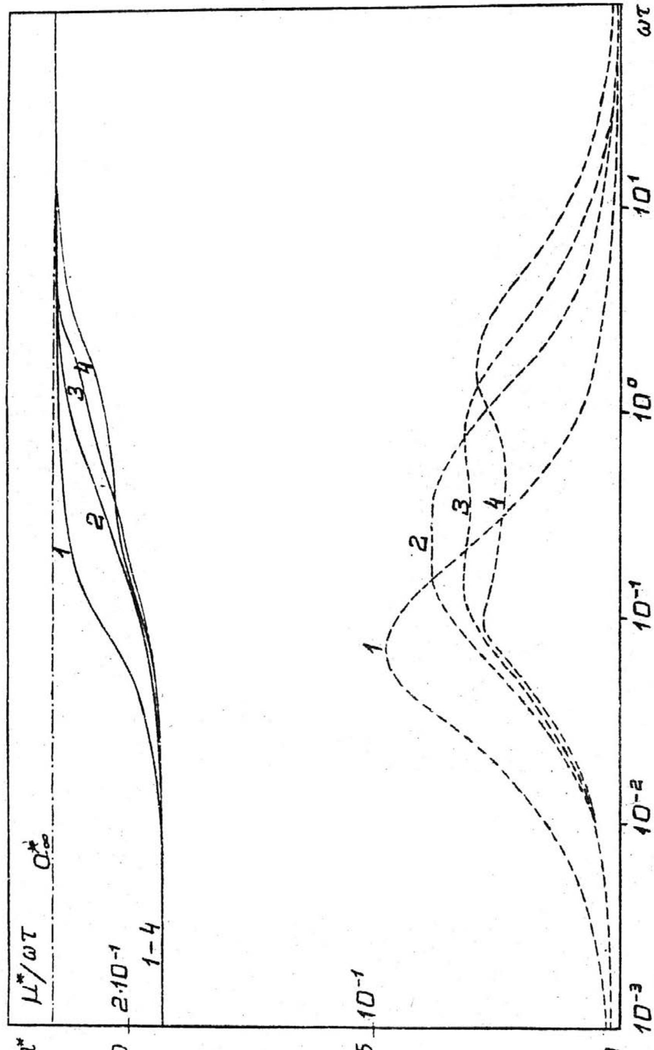


Rysunek 1.

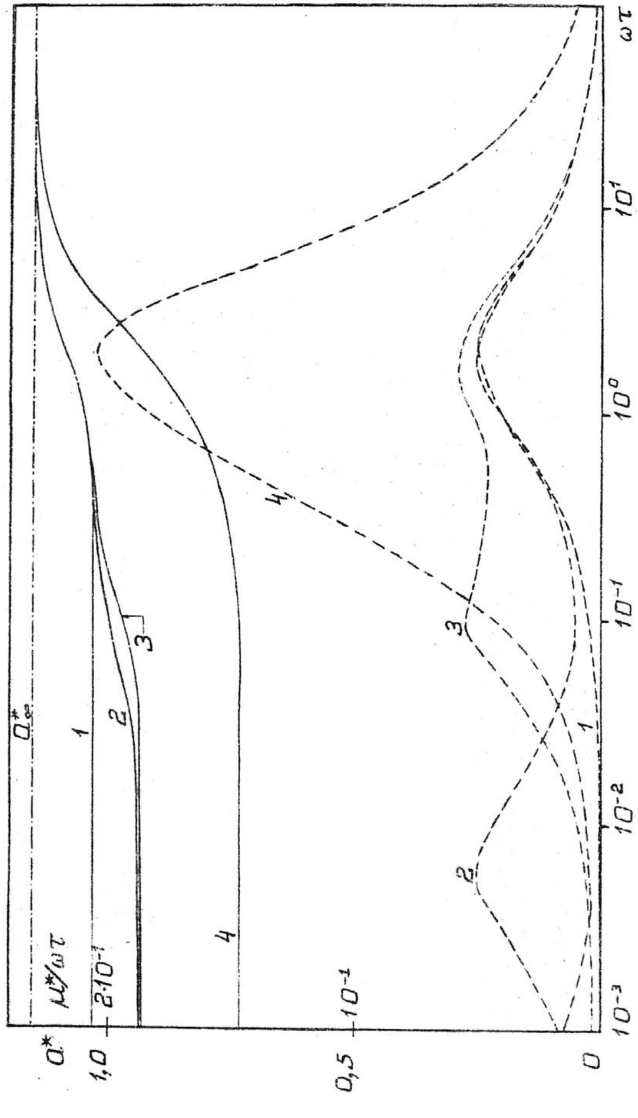


a^*
1,0
0,5
0
$\mu^*/\omega\tau$
a^*_∞
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$\omega\tau$
1
2
3–5
4
5
3
4|3|1
5
2

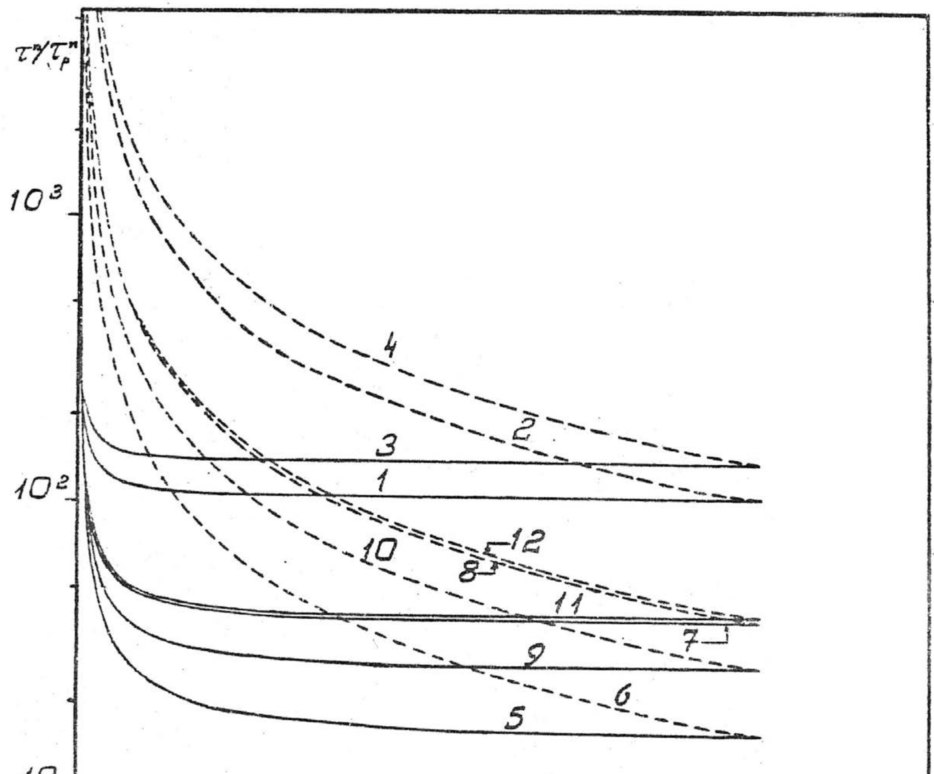
Rysunek 2.


a^*
$\mu^*/\omega\tau$
a^*_∞
$2{\cdot}10^{-1}$
1-4
1,0
0,5
10^{-1}
0
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$\omega\tau$
1
2
3
4
1
2
3
4

Rysunek 3.



Rysunek 4.



Rysunek 5.