J. B. J. Liagre

CALCUL

des

Probabilités

CALCUL

DES PROBABILITÉS

ET

THÉORIE DES ERREURS.

TYP. D'ALEX. JAMAR.

CALCUL

DES PROBABILITÉS

ET

THÉORIE DES ERREURS,

AVEC

DES APPLICATIONS AUX SCIENCES D'OBSERVATION EN GÉNÉRAL,

ET A LA GÉODÉSIE EN PARTICULIER;

PAR

J. B. J. Liagre,

CAPITAINE DU GÉNIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

BRUXELLES.

SOCIÉTÉ POUR L'ÉMANCIPATION INTELLECTUELLE.

ALEXANDRE JAMAR, ÉDITEUR,

10, RUE DES MINIMES.

PRÉFACE.

Si toutes nos connaissances étaient susceptibles de nous conduire à la *certitude*, comme le font les propositions fondamentales des mathématiques pures, nos jugements seraient toujours accompagnés d'une *conviction* pleine et entière, que nous pourrions faire partager à tout être raisonnable. Mais il n'en est pas ainsi : la plupart de nos connaissances et de nos jugements ne sont que de simples *croyances* plus ou moins fondées ; elles n'ont, pour nous servir d'une expression admise dans le langage ordinaire, qu'un certain *degré de certitude*.

Suivant ces différents degrés, un événement peut nous paraître *certain*, *probable*, *douteux*, *improbable* ou *impossible*.

Il est *certain* pour nous lorsqu'il n'existe, à notre connaissance, *aucun* motif qui lui soit contraire.

Il nous paraît *probable*, *douteux* ou *improbable*, lorsqu'il y a *plus*, *autant* ou *moins* de motifs pour son existence que contre elle.

Enfin, nous le jugeons *impossible*, lorsque nous ne voyons *aucun* motif qui soit favorable à son existence.

De la certitude en faveur d'un événement on passe à la certitude contraire par une infinité de degrés qui constituent une *probabilité* plus ou moins grande. La probabilité peut donc se *mesurer*; comme telle, les lois des *nombres* lui deviennent applicables, et cette application, dans son acception générale, forme l'objet d'une branche importante des mathématiques, que l'on a désignée sous différents noms, tels que : Géométrie du hasard, Théorie des chances, Calcul des probabilités, etc.

L'application des mathématiques à la recherche de la probabilité des événements a soulevé contre elle, dès le principe, des préjugés nombreux qui ne sont pas encore entièrement dissipés. Vouloir soumettre le *hasard* à des règles géométriques paraît une utopie, que l'on pardonne à la naïveté des hommes de cabinet, mais sur laquelle les hommes qui se disent pratiques savent à quoi s'en tenir. N'est-ce pas du reste une opinion généralement admise, que le hasard se plaît à tromper les prévisions les plus justes, à déjouer les plus sages combinaisons?

A cette objection nous répondrons par un seul mot : —Préjugé.— Non, le hasard, dans l'acception ordinaire du mot, n'est pas aussi bizarre qu'on le dit; on est vivement frappé de ses rares anomalies, ses innombrables effets réguliers passent inaperçus : voilà la vérité. D'ailleurs, si l'on voulait réfléchir, on reconnaîtrait bientôt que tout événement simple n'est autre chose qu'un *effet*, c'est-à-dire le produit d'une *cause;* que les mêmes causes, en se répétant ou en se combinant entre elles, doivent nécessairement amener les mêmes événements composés; et que par suite tout ce qu'on attribue au hasard n'est qu'une conséquence forcée et mathématique de la théorie des combinaisons.

Dans beaucoup de questions, il est vrai, les causes sont si nombreuses et si délicates qu'il devient impossible de les assigner *toutes* à priori : mais quelle est la branche des mathématiques *appliquées* qui ait dans ses résultats la rigueur des vérités géométriques, et qui ne soit réduite, dans certains cas, à invoquer l'expérience ou à se contenter de l'approximation? Dès qu'on entre dans le champ de l'application, on doit, par ce fait même, abandonner la recherche de la vérité absolue; il faut renoncer à la voie idéale qui mène au résultat mathématique, pour prendre un des mille sentiers qui aboutissent dans son voisinage. Or, par quelles indications l'esprit se laissera-t-il guider dans le choix de la route à suivre? — Par des raisonnements tirés des probabilités, et par cette considération capitale, qu'il doit arriver *le plus près possible* du but, en s'écartant *le moins possible*, du véritable chemin.

La théorie des probabilités s'applique donc naturellement, et pour ainsi dire d'elle-même, aux *sciences d'observation*. Ici l'expérience nous trace un cercle plus ou moins étendu dans lequel doit se trouver la vérité : où placerons-nous la vérité elle-même, si ce n'est au *centre* de ce cercle, point qui satisfait le *mieux* et le plus *simplement* possible à l'ensemble des observations? Le caractère analytique de cette dernière condition est que la somme des carrés des corrections doit être un minimum : nous démontrerons ce théorème en son lieu ; pour le moment, contentons-nous de remarquer qu'il est la traduction rigoureuse d'un grand principe de la nature, celui de la moindre action. Chaque observation plus ou moins *précise* étant assimilée à un corps matériel plus ou moins *pesant*, la vérité doit résider au centre d'attraction du système.

Malheureusement la science des probabilités a un tort grave aux yeux du monde, c'est le nom qu'elle porte. Dans notre époque d'indifférence et de scepticisme, le mot *probable* est devenu si vague, qu'il a perdu, pour ainsi dire, toute signification déterminée; et tel est l'empire des mots sur l'esprit des hommes que toute application des *probabilités* leur paraît entachée d'un vice originel, le manque de *réalité*. Changez le titre de cette science, elle ne tardera pas à dépouiller le caractère conjectural qu'on lui attribue dans le monde, et elle prendra rang, sans aucune difficulté, parmi les applications les plus curieuses et les plus utiles des mathématiques. Si des objections sérieuses ont quelquefois été faites au calcul des probabilités, c'est dans ses applications aux sciences judiciaires, politiques et morales : ces objections cependant ne sont pas sans réplique ; et l'on pourrait, à l'autorité des Dupin, des Poinsot, des Cousin, opposer celle de Condorcet, Laplace, Poisson, Quetelet, etc. Mais comme cette espèce d'application des probabilités n'entre pas dans le cadre de mon ouvrage, je n'ai pas à la justifier ici.

Considérée comme un simple exercice intellectuel, l'étude des probabilités est éminemment propre à donner l'esprit de la pénétration et de la flexibilité ; elle nous apprend à analyser les causes, à les combiner, à leur assigner leur juste degré d'importance ; elle nous met en garde contre une foule de préjugés vulgaires ou d'illusions captieuses qui naissent le plus souvent, soit de l'irréflexion, soit d'une énumération incomplète des circonstances qui accompagnent les phénomènes ; enfin, s'appliquant à des sujets aussi nombreux que variés, elle fortifie le sens pratique, et corrige cette sécheresse d'idées que l'on remarque souvent chez les hommes qui se sont absorbés dans des études fortes et sérieuses, mais dirigées vers un but unique.

Aussi, depuis Pascal et Fermat, un grand nombre de géomètres et de philosophes ont-ils fait une étude spéciale de la science des probabilités. C'est à elle que Laplace a été redevable de ce tact particulier, qui lui faisait si bien juger du degré de certitude avec lequel les phénomènes naturels paraissaient ressortir de l'observation : il avoue lui-même (*Essai philosophique sur les probabilités*) que la considération des probabilités lui a servi de base et de point de départ pour ses plus belles découvertes astronomiques. Avant de reconnaître les deux inégalités du mouvement lunaire, dues à l'ellipticité du sphéroïde terrestre, il commença par s'assurer que leur existence, au milieu de l'incertitude des observations, était indiquée avec une probabilité assez forte, pour qu'il crût devoir en rechercher la cause. C'est encore en suivant la même marche philosophique qu'il fut amené, dit-il, à trouver la cause de l'équation séculaire de la lune, celle des grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, et enfin celle de la loi remarquable qui régit les mouvements moyens des trois premiers satellites de Jupiter.

Par contre, combien l'histoire des sciences n'a-t-elle pas enregistré de mécomptes, dus à l'oubli de cette règle prudente ! Combien de théories spécieuses n'a-t-on pas laborieusement enfantées, pour chercher à expliquer des phénomènes que l'on croyait suffisamment établis par l'observation, et qui, soumis plus tard à une saine critique, ont été trouvés n'avoir qu'une existence imaginaire !

Le calcul des probabilités prit naissance, avons-nous dit, entre les mains de Pascal et de Fermat. En 1654, un joueur, le chevalier de Méré, proposait à Pascal deux questions relatives au jeu, savoir : « 1° En combien de coups peut-on espérer d'amener un *sonnez* au jeu « de trictrac ? 2° dans quelle proportion doit-on répartir les enjeux, « lorsque l'on cesse de jouer avant que la partie soit terminée ? »

Le grand géomètre résolut facilement ces deux questions ; mais en même temps, il vit dans cette étude une science toute nouvelle et pleine d'avenir : il en jeta aussitôt les fondements et lui donna le nom de *géométrie du hasard* (*aleæ geometria*). Fermat, sur l'invitation de Pascal, tourna ses réflexions vers ce sujet, et c'est lui qui, le premier, appliqua la théorie des combinaisons au calcul des probabilités.

Huygens suivit immédiatement la voie ouverte par les deux géomètres français : il publia en 1658 un petit traité sur les jeux de hasard, intitulé : *De ratiociniis in ludo aleæ.*

On voit que, dans l'esprit de ses inventeurs, le but de la théorie des probabilités se bornait aux spéculations aléatoires. Le premier qui ait songé à l'appliquer aux sciences économiques est le grand pensionnaire Jean de Witt, illustre disciple de Descartes. Il indiqua (1671) la manière de fixer le taux des rentes viagères, d'après les chances de vie qu'indiquerait une table de mortalité. Nous ignorons de quelle table il se servait à cet effet, car la plus ancienne qui existe, à notre connaissance, est celle que Halley a publiée en 1693 dans les *Transactions philosophiques.* — Un autre géomètre hollandais, initié comme Jean de Witt au maniement des affaires, Hudde, écrivit aussi sur le même sujet, au rapport de Leibnitz.

Les grandes découvertes qui signalèrent la fin du XVII^e siècle, la création de la mécanique céleste, de l'optique, du calcul infinitésimal, éclipsèrent pour un moment le nouveau calcul des hasards. Mais enfin Jacques Bernoulli vint lui donner une constitution définitive dans son important ouvrage intitulé *Ars conjectandi*. Cet ouvrage, imprimé en 1713, huit ans après la mort de son auteur, contient en germe toute la *philosophie* du calcul des probabilités ; mais elle y est demeurée presque ensevelie, jusqu'à ce que Condorcet l'ait rappelée, perfectionnée et étendue. Bernoulli se proposait même d'y montrer l'application du calcul des probabilités aux sciences morales et économiques : la mort l'empêcha de mettre la dernière main à son travail.

Depuis lors, l'importance de cette science s'est rapidement accrue : elle a été cultivée et étendue successivement par de Montmort, Moivre, Leibnitz, Jean, Nicolas et Daniel Bernoulli, Buffon, Hume, Euler, Condorcet, d'Alembert, Lagrange, Laplace, Gauss, Lacroix, Legendre, Poisson, Cournot, Quetelet, etc., et l'on peut signaler comme un fait remarquable que les philosophes les plus illustres, les géomètres les plus distingués se sont tous portés vers l'étude de cette science avec une singulière prédilection.

Aussi, la théorie des probabilités a-t-elle pris aujourd'hui une si grande extension qu'il faudrait des volumes pour présenter un aperçu complet de ce vaste sujet et des applications nombreuses qu'il a reçues. Forcés de nous restreindre, nous tâcherons de ne laisser que les lacunes les moins regrettables dans l'ouvrage que nous publions aujourd'hui ; nous nous attacherons principalement, dans la partie *théorique*, à l'*esprit* des méthodes, et, dans la partie *pratique*, aux questions dont l'*utilité* nous paraîtra incontestable.

Nous diviserons cet ouvrage en trois sections :

La première traite des probabilités *théoriques* ou *à priori* : on y part des *causes*, supposées connues, et on les combine pour arriver à la probabilité des *événements*. Les auteurs allemands désignent cette espèce de probabilité par la dénomination de *Wahrscheinlichkeit aus Gründen*.

La seconde section embrasse les probabilités *physiques* ou *à posteriori* (*Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung*) : on y part de l'observation des *événements*, pour remonter aux *causes* qui les ont produits; elle établit donc un lien, une transition, entre les probabilités *pures* et les probabilités *appliquées*.

Enfin la troisième section présente les *applications* du calcul des probabilités aux observations et aux expériences; elle indique la manière la plus avantageuse de combiner les équations de condition et de répartir les erreurs fortuites; elle apprend à trouver les résultats moyens les plus probables et à en estimer la précision, etc. L'analyse qu'exige ce genre de questions est des plus délicates, et c'est un des principaux objets du grand ouvrage que Laplace a publié sur la théorie des probabilités. Les auteurs allemands en général, et en particulier Gauss, Bessel, Baeyer, Encke, Gerling, nous ont laissé à ce sujet d'admirables modèles théoriques et pratiques.

Lorsque j'ai entrepris mon travail, j'avais en vue un double but :

1° Montrer comment, dans une série d'observations, on doit traiter les inconnues et répartir les erreurs, si l'on veut obtenir le résultat le plus plausible et pouvoir en même temps apprécier la grandeur de l'erreur à craindre;

2° Appliquer la théorie des moindres carrés à des exemples tirés de diverses sciences, l'astronomie, la météorologie, la statistique, la physique, l'artillerie, etc., mais particulièrement à la haute topographie et à la géodésie.

Pour exposer convenablement ce sujet, je devais m'appuyer sur les principes fondamentaux du calcul des probabilités; et mon ouvrage aurait manqué d'ensemble et offert une lacune, si je n'avais commencé par les rappeler : tel est le motif pour lequel je me suis hasardé à présenter, à mon point de vue, la théorie élémentaire des probabilités, quoique, dans notre langue, plusieurs auteurs aient déjà traité cette matière avec une grande supériorité. Du reste, je leur ai emprunté largement, et j'ai des obligations particulières à Lacroix, Cournot et Quetelet. Si je ne les ai pas nommés plus souvent, non plus que les auteurs allemands auxquels je dois beaucoup, c'est uniquement pour ne pas devoir à chaque instant interrompre le discours par des citations qui intéressent peu le lecteur. Je pense d'ailleurs que l'auteur d'un ouvrage destiné à l'enseignement ne doit pas ambitionner le titre d'*inventeur* : ce qu'il doit rechercher, c'est l'unité dans la conception de l'ensemble, l'ordre dans la disposition des parties, la simplicité dans le choix des méthodes, et enfin la clarté dans l'exposition du sujet. Heureux lorsqu'il peut réunir quelques-unes de ces qualités.

Il me reste à expliquer, en terminant, pourquoi j'ai choisi dans la géodésie le plus grand nombre de mes applications. Les observateurs et les savants français sont certainement les premiers qui aient placé cette science au rang élevé qu'elle occupe aujourd'hui ; et tout le monde rend justice aux beaux travaux pratiques ou théoriques de Delambre, Biot, Arago, Puissant, Brousseaud, Coraboeuf, etc. Mais depuis une vingtaine d'années, la géodésie, entre les mains de Schumacher, Gauss, Struve, Bessel, Baeyer, a pris en Allemagne une forme nouvelle, basée entièrement sur l'application de la théorie des moindres carrés. Les procédés d'observation et de calcul, employés aujourd'hui chez nos voisins de l'est, sont encore peu connus en France et en Belgique ; et cependant ils sont susceptibles d'un si haut degré de précision, que notre Dépôt de la guerre leur a accordé la préférence sur les méthodes françaises : ils sont exclusivement suivis dans la triangulation qui s'exécute actuellement dans notre pays, sous la direction d'un de nos officiers supérieurs les plus distingués. C'était donc une œuvre d'actualité, que de chercher à vulgariser les procédés géodésiques usités en Allemagne. Puissé-je n'être pas resté trop au-dessous de la tâche que j'ai entreprise ! puissé-je justifier le bienveillant appui que l'annonce de mon ouvrage a rencontré de divers côtés, particulièrement dans les rangs de mes camarades de l'armée !

J. L.

Gand, 1er Juin 1852.

THÉORIE DES PROBABILITÉS

ET

CALCUL DE LA RÉPARTITION DES ERREURS.

PREMIÈRE SECTION.

PARTIE THÉORIQUE. — PROBABILITÉS A PRIORI.

CHAPITRE PREMIER.

Notions préliminaires. — Des combinaisons et de l'ordre.

§ 1. — Rien dans la nature n'est livré au *hasard*. Tous les événements, ceux même qui nous paraissent les plus fortuits, sont une conséquence nécessaire de *lois* primordiales et éternelles. La courbe irrégulière décrite par une simple molécule de vapeur flottante est déterminée d'une manière aussi certaine que les orbites des corps célestes.

Sans aborder des considérations d'ordre *moral*, qui sortiraient de notre sujet, nous posons donc en principe que l'existence de tout phénomène *physique* est liée à celle d'une *cause* antérieure qui le produit; de sorte que l'*état* actuel de l'univers entier, jusque dans ses parties les plus imperceptibles, n'est que l'*effet* de son état passé, et la *cause* de son état futur. Une intelligence supérieure qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des éléments qui la composent, pourrait (si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse) embrasser dans une même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : pour elle tout événement serait *certain* ou *impossible.*

Mais pour l'homme, dont la raison est bornée, il y a *l'équivalent* du hasard, c'est *l'ignorance* où il se trouve relativement aux véritables causes. Incapable de remonter aux conditions premières qui concourent à la formation des événements, de les démêler entre elles, de les énumérer et de les combiner, il reste dans le *doute.* Mais lorsqu'il récapitule les *indices* qui, chez lui, remplacent la connaissance immédiate des causes, la vue de son esprit peut se porter plus fréquemment sur un événement que sur son contraire, et alors il est porté à croire à l'arrivée de cet événement qui devient ainsi *probable* pour lui.

La théorie des probabilités consiste, d'après cela, à décomposer tous les événements du même genre en un certain nombre de cas *également possibles,* c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre des cas favorables à l'événement dont nous cherchons la probabilité. « Le rapport de ce « nombre, à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette « probabilité. »

Les différentes conditions, les différents cas, qui peuvent donner naissance à la formation d'un événement se nomment les *chances* de cet événement. Le tirage d'une carte déterminée, hors d'un jeu ordinaire, présente 32 chances, puisque l'on peut prendre indifféremment l'une quelconque des 32 cartes dont le jeu se compose.

Dans l'exemple que nous venons de choisir, les chances sont égales entre elles, et l'on ne doit considérer que leur *nombre.* Si elles étaient inégales, on devrait avoir égard, à la fois, à leur *force* et à leur nombre ; mais, comme une chance deux fois plus forte qu'une autre peut être remplacée par deux chances égales à cette dernière, rien n'est plus aisé, théoriquement parlant, que de ramener toute sorte de question au cas où les chances sont égales entre elles. C'est toujours celui que nous considérerons dorénavant, à moins que le contraire ne soit spécifié.

§ 2. — D'après ce que nous venons de dire, un événement est d'autant plus probable qu'il a plus de chances en sa faveur, sur le nombre total des chances qui peuvent concourir à sa formation. « La « probabilité mathématique d'un événement peut donc être représentée

« par une fraction dont le numérateur est le nombre de chances favo-
« rables à l'événement, et dont le dénominateur est le nombre total
« des chances. »

Quand toutes les chances sont favorables à un événement, le numérateur de la fraction précédente devient égal à son dénominateur; la probabilité se change en certitude, et son expression numérique devient égale à l'unité. « L'unité est donc le symbole de la certitude. »

Lorsqu'on jette un dé à six faces, marquées chacune de l'un des nombres depuis 1 jusqu'à 6, l'arrivée d'un point déterminé a donc pour probabilité $\frac{1}{6}$. Lorsque l'on jette à la fois deux dés, chacune des faces de l'un peut se montrer avec chacune des faces de l'autre; en sorte que, si l'on désigne le premier dé par A et le second par B, on aura les trente-six chances indiquées dans le tableau suivant :

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Toutes les combinaisons marquées dans ce tableau sont des chances également possibles, tant que l'on considère isolément chaque dé. Ainsi, amener 5 avec le dé A et 2 avec le dé B est une chance pareille à celle d'amener 6 avec l'un et l'autre en même temps; mais si l'on attend l'arrivée des points 2 et 5, sans distinction d'ordre, la possibilité de l'obtenir sera différente de celle d'amener 6, 6, ou le *sonnez;* puisque la première condition sera également remplie par la chance 2, 5 et la chance 5, 2, tandis que 6, 6 ne se trouve qu'une seule fois parmi les 36 combinaisons également possibles des faces de ces dés.

Ainsi, suivant la définition donnée ci-dessus, la probabilité d'amener les points 5 et 2, sans distinction d'ordre, est $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, et celle d'amener 6, 6 est seulement $\frac{1}{36}$.

Si l'événement désiré était, non pas l'arrivée des points considérés chacun à part, mais celle du nombre marqué par ces points pris collectivement, on trouverait des possibilités très-diverses. Par exemple, le nombre 2 ne pourrait s'obtenir que d'une seule manière, savoir par la chance 1, 1 ; le nombre 7, au contraire, résulterait de six chances différentes, savoir :

1, 6 ; 6, 1 ; 2, 5 ; 5, 2 ; 3, 4 ; 4, 3 ;

et suivant ces conditions, la probabilité d'obtenir la somme 2 serait seulement $\frac{1}{36}$, tandis que celle d'obtenir la somme 7 serait $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$.

§ 3. — La probabilité *contraire* à un événement (*die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit*) s'estime par un procédé analogue au précédent, c'est-à-dire en divisant le nombre des chances *défavorables* par le nombre total des chances.

Soit m le nombre des chances favorables à un événement ;

n » » défavorables.

La probabilité de son arrivée sera

$$\frac{m}{m+n},$$

et celle de sa non-arrivée

$$\frac{n}{m+n}.$$

Tout événement incertain donne lieu à deux probabilités opposées, savoir : celle que cet événement arrivera, et celle qu'il n'arrivera pas. L'un ou l'autre des deux cas devant nécessairement se présenter, « la somme de ces deux probabilités doit être égale à l'unité. » C'est d'ailleurs ce que montre l'expression

$$\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1.$$

§ 1. — La principale difficulté du calcul des probabilités consiste dans l'énumération de toutes les chances possibles. Quelle que soit la question qui nous occupe, nous devons toujours chercher à la ramener à l'extraction d'un certain nombre de boules hors d'une ou de plusieurs urnes renfermant des boules de diverses couleurs, ou au jet de dés présentant un certain nombre de faces numérotées.

Supposons qu'on nous présente une urne remplie de boules qui ne diffèrent entre elles que par la couleur, et qu'on nous demande la probabilité que la première boule tirée sera blanche. Il est certain qu'il nous faudra des renseignements préalables sur le contenu de l'urne. Si, par exemple, on nous dit qu'elle renferme deux boules blanches, trois noires et quatre rouges, en tout neuf boules, la probabilité que la première boule tirée sera blanche est $\frac{2}{9}$.

Il est même inutile que l'on nous dise combien il y a de boules en tout, et que l'on nous indique le nombre des boules de chaque couleur : il suffit que nous connaissions *le rapport* de ces derniers nombres. Il est clair en effet que la probabilité de tirer une boule blanche resterait la même si l'urne renfermait :

4 boules blanches, 6 noires et 8 rouges; ou
6 » » 9 12 » etc.

Cette proposition, que Laplace a démontrée directement (*Essai philosophique sur les probabilités*, p. 6), résulte suffisamment de l'égalité des fractions qui ne diffèrent entre elles que par un facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Ce genre de questions dans lequel le *nombre* des chances de chaque espèce (ou du moins *le rapport* de ces nombres) est immédiatement assignable et peut se déduire *à priori* de l'énoncé de la question, se rattache à une branche particulière du calcul des probabilités, que l'on nomme détermination des probabilités *à priori* : c'est la partie purement mathématique de la science, et celle qui fait l'objet de notre première section.

En général, dans les différents jeux qu'on nomme jeux de hasard, le nombre des chances est limité et leur nature est connue ; mais il n'en est pas de même dans ce qui se rapporte aux sciences d'observation. L'urne qui renferme le secret de la nature est ouverte devant nous; il nous est permis de faire autant de tirages que nous le voulons, de multiplier les épreuves à loisir ; mais cette urne est inépuisable : nous ne compterons jamais le nombre de boules qu'elle renferme, et ce n'est que par induction que nous pourrons nous donner des lumières sur son contenu. La détermination des probabilités *à posteriori* a pour objet ce nouveau genre de questions : le nombre total des chances y est *illimité*, et ses rapports avec le nombre des chances de chaque espèce sont *inassignables*.

On entrevoit déjà que, dans la détermination des probabilités *à priori*, on a souvent besoin d'évaluer le nombre des combinaisons d'une certaine espèce que l'on peut former avec n éléments, ou du moins le rapport entre le nombre des combinaisons d'une certaine espèce, et celui des combinaisons qui appartiennent à une espèce différente. Nous allons donc rappeler ici, en peu de mots, les principales formules de la théorie des combinaisons.

Cette partie des mathématiques, à laquelle les auteurs allemands ont donné le nom de *syntactique*, a pour objet d'assigner le nombre des combinaisons d'une espèce donnée.

§ **5**. — Soient des objets en nombre m à combiner entre eux ; et, pour fixer les idées, désignons-les par les lettres :

$$a, b, c, \ldots . k, l.$$

Pour épuiser les combinaisons 2 à 2 dont ces objets sont susceptibles, on pourra combiner l'objet ou l'léément a, avec chacun des $(m-1)$ restants, $b, c, \ldots k, l$; puis l'élément b, avec chacun des $(m-1)$ autres éléments, $a, c, \ldots . k, l$; et ainsi de suite ; ce qui donnera en tout un nombre de combinaisons exprimé par le produit $m(m-1)$. Mais de cette manière il est évident que chaque combinaison (celle de a et de b, par exemple) aura été obtenue deux fois, savoir : en combinant d'abord b avec a ; puis en combinant a avec b : le nombre des combinaisons distinctes sera donc exprimé par $\dfrac{m(m-1)}{2}$.

Les combinaisons ternaires seront épuisées si l'on associe successivement chaque combinaison binaire $(a\,b)$ avec chacun des $(m-2)$ éléments restants $c \ldots . k, l$. Par là on obtiendra trois fois la même combinaison $(a\,b\,c)$, savoir : en combinant $(a\,b)$ avec c ; $(a\,c)$ avec b ; $(b\,c)$ avec a. Le nombre des combinaisons ternaires sera donc

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.\,3}.$$

On en conclut, par une induction évidente, que le nombre des combinaisons distinctes entre m éléments pris n à n a pour valeur le quotient

$$m\,C\,n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ n}. \qquad (1)$$

§ 6. — Si l'on associait à l'idée pure de combinaison celle de certains rapports *d'ordre* ou de situation, en sorte que la combinaison (*ba*) dût être réputée différente de (*ab*), les combinaisons regardées comme identiques dans le raisonnement précédent cesseraient de l'être; de sorte que m éléments fourniraient $m(m-1)$ *arrangements* binaires, $m(m-1)(m-2)$ arrangements ternaires, et en général un nombre d'arrangements n à n représenté par

$$m\,A\,n = m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1). \qquad (2)$$

§ 7. — Puisque le nombre des arrangements entre m éléments pris n à n est exprimé par le produit (2), tandis que le nombre des combinaisons différentes se trouve exprimé par le quotient (1), il faut que le dénominateur de cette dernière expression ou le produit

$$A\,n = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots.\ n \qquad (3)$$

représente le nombre de tous les changements d'ordre ou de toutes les *permutations* possibles entre n éléments. C'est, du reste, ce qu'il serait facile de prouver par un raisonnement direct.

Si les n éléments à permuter devaient être rangés dans une série circulaire, et qu'on ne dût pas avoir égard aux lieux absolus qu'ils occupent, mais seulement à l'ordre suivant lequel ils se succèdent, le nombre des permutations distinctes se réduirait à

$$1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots.(n-1). \qquad (4)$$

En effet, comme on peut rompre le cercle à la place occupée par un quelconque des n éléments, chaque combinaison circulaire donne lieu à n combinaisons rectilignes; autrement dit, le nombre des premières est la n^e partie du nombre des dernières.

§ 8. — Il est bon d'observer que le nombre de combinaisons de m éléments n à n est le même que le nombre de combinaisons de ces m éléments $(m-n)$ à $(m-n)$. En effet, ces deux nombres sont exprimés respectivement par les deux fractions :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.n} \text{ et } \frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.(m-n)}.$$

Les réduisant au même dénominateur, on voit que les deux nouveaux numérateurs seront égaux, comme composés chacun de la série des nombres naturels depuis 1 jusqu'à m.

On démontrerait le même théorème en représentant par $(m+n)$ le nombre total des éléments à combiner n à n. Le nombre de ces combinaisons s'obtiendra en remplaçant m par $(m+n)$ dans la formule (1), et il deviendra

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots.(m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots.\ n.};$$

multipliant les deux termes de cette expression fractionnaire par le produit 1. 2. 3. 4.... m, on la mettra sous la forme

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ ..\ (m+n-1)(m+n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots n \times 1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots m}. \qquad (5)$$

Expression *symétrique* par rapport à m et à n; ce qui prouve que « les combinaisons de $(m+n)$ éléments m à m et n à n sont en même nombre. »

§ 9. — Applications. — 1° Sur m lettres proposées on en désigne m' : Quel est le nombre X de toutes les combinaisons v à v, dont chacune renferme v' des lettres désignées?

$$X = m' \text{ C } v' [(m - m') \text{ C } (v - v')].$$

Exemple : dans combien de combinaisons 4 à 4, formées avec les dix premières lettres de l'alphabet, la lettre a entre-t-elle?.... $m' = v' = 1$; d'où $X = 84$.

Combien de ces combinaisons contiennent a sans b ou b sans a?... $m' = 2$; $v' = 1$; d'où $X = 112$.

Combien renferment a et b ensemble?... $m' = v' = 2$; d'où $X = 28$.

Combien ne renferment ni a ni b?... $m' = 2$; $v' = o$; d'où $X = 70$ (Ici $m' \text{ C } o = m' \text{ C } (m' - o) = 1$).

Combien renferment deux des trois lettres a, b, c?... $m' = 3$; $v' = 2$; d'où $X = 63$.

2° Parmi tous les arrangements de m lettres v à v, quel est le nombre x de ceux qui *commencent* par v' lettres sur m' désignées?

$$x = m' \text{ A } v' [(m - m') \text{ A } (v - v')].$$

Ainsi sur les 840 arrangements de 7 lettres prises 4 à 4, il en est 72 qui commencent par deux des trois lettres a, b, c.

3° Quel est le nombre, y, des arrangements de m lettres v à v, dans lesquels se trouvent ensemble, *l'une près de l'autre*, v' lettres sur m' qui sont désignées?

$$y = (v - v' + 1) \times x.$$

Ainsi, sur les 24 arrangements de 4 lettres 3 à 3, il y en a 18 où la lettre a se trouve ; 4 qui commencent par les deux lettres a, b; et 8 où a et b sont voisins.

De même sur les 360 arrangements de 6 lettres 4 à 4, il y en a 240 qui contiennent la lettre a, et 108 où deux des trois lettres a, b, c sont voisines.

4° Quel est le nombre, z, de tous les arrangements de m lettres v à v, qui renferment v' lettres sur m' qui sont désignées?

$$z = \text{X} \times \text{A } v.$$

5° Dans un jeu de 52 cartes contenant 13 cœurs, on tire 4 cartes au hasard. Quelle probabilité y a-t-il que ces 4 cartes renfermeront 3 cœurs?

Le nombre total des chances est

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 13.\ 17.\ 25.\ 49.$$

Le nombre des chances favorables est représenté par X, en faisant $m = 52$; $v = 4$; $v' = 3$; $m' = 13$; d'où

$$\text{X} = 13.\ 2.\ 11.\ 29.$$

La probabilité demandée se réduit donc à 0,041.

6° Six personnes doivent se ranger sur un banc dont les places sont tirées au sort : trois amis désirent être voisins. Quelle probabilité y a-t-il que cela arrivera?

Le nombre total des chances est 6 A 6 = 720.

Le nombre des chances favorables est y, en faisant $m = v = 6$;

$m' = v' = 3$; d'où $y = 144$. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{5} = 0,2$.

7° Même question en supposant les amis rangés autour d'une table.

Le nombre total d'arrangements est ici 1. 2. 3. 4. 5.

Si nous regardons le système des trois amis comme ne formant qu'un seul élément, les quatre éléments du cercle pourront s'arranger de 1. 2. 3 manières distinctes ; mais pour chacune de ces manières les trois amis peuvent permuter entre eux. Le nombre des chances favorables est donc ici $1.2.3 \times 1.2.3$ et la probabilité 0,3.

La réponse à cette question aurait pu se déduire du 6°, en supposant que l'on ploie le banc en forme circulaire. Le nombre de chances favorables devient alors $144 + 2x$, en calculant x par la formule (2°) dans laquelle $m = 6$; $v = 5$; $m' = 3$; $v' = 2$; d'où $x = 36$. La probabilité est donc $\frac{216}{720} = 0,3$.

Si l'on demandait que l'un des amis, B, se trouvât toujours entre les deux autres A et C, la formule deviendrait $\left\{\frac{1.\ 2.\ 3 \times 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\right\} = 0,1$.

En effet, chaque double arrangement, $\begin{Bmatrix} \mathrm{A\ B\ C} \\ \mathrm{C\ B\ A} \end{Bmatrix}$, ayant B au milieu, en fournit 6 dans lesquels les trois lettres sont voisines : les probabilités, pour les deux cas, doivent donc être dans le rapport de 1 à 3.

§ **10.** — La formule (5) représente le nombre d'arrangements différents que l'on peut former avec m lettres a et n lettres b. Car lorsque l'on considère toutes ces lettres comme individuellement distinctes, le nombre de leurs permutations est... $1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots (m+n-1)(m+n)$; mais les arrangements qui ne diffèrent que par des transpositions d'ordre dans le groupe des m lettres a ou dans celui des n lettres b sont identiques : il faut donc diviser le nombre précédent par $1.2.3.4 \ldots m \times 1.2.3.4 \ldots n$.

Si les lettres a et b désignent respectivement des événements de même nature, et qui se succèdent, le quotient (5) indiquera le nombre des modes de succession distincts, les événements a étant supposés en nombre m et les événements b en nombre n.

L'analogie indique suffisamment que, s'il s'agissait de partager un groupe total de $(m + n + p)$ éléments en trois groupes partiels, comprenant respectivement m, n et p éléments, le quotient

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ldots(m+n+p)}{1.\ 2.\ 3\ldots m\times 1.\ 2.\ 3\ldots.\ n\times 1.\ 2.\ 3\ldots.\ p}$$

exprimerait en combien de manières *distinctes* ce partage peut s'opérer; qu'il exprimerait pareillement combien de séries distinctes on peut former avec m lettres a, n lettres b et p lettres c.

§ **11.** — Lorsque les mêmes éléments peuvent être répétés (comme les lettres dans les combinaisons alphabétiques, les chiffres dans les combinaisons numérales), les combinaisons et les arrangements sont dits *avec répétition*.

Avec m lettres $a, b, c,\ldots k, l$, on formera de la sorte m^2 *arrangements* deux à deux,

$$aa,\ ab,\ ac\ldots ak,\ al;\ ba,\ bb,\ bc\ldots bk,\ bl;\ etc.$$

qui tous diffèrent les uns des autres, ou par les lettres employees, ou par l'ordre dans lequel elles sont écrites. On formerait, avec les mêmes lettres, m^3 arrangements 3 à 3 et, en général, m^n arrangements n à n. Donc

$$m\ \mathrm{A}\ \mathrm{A}\ n = m^n\ldots \qquad (6)$$

§ **12.** — Pour les *combinaisons*, il est facile de voir que lorsqu'on assemble les éléments 2 à 2, la condition de répéter le même élément revient à donner un élément de plus, ou à remplacer m par $(m+1)$ dans la formule des combinaisons sans répétition.

Lorsque l'on combine m éléments 3 à 3 avec répétition, c'est comme si l'on combinait $(m+2)$ éléments sans répétition, etc.

Donc, la formule qui donne le nombre des combinaisons de m éléments n à n avec répétition, se déduira de la formule (1) en remplaçant dans celle-ci m par $m+n-1$. On aura de cette manière:

$$m\ \mathrm{CC}\ n = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ n}. \qquad (7)$$

En multipliant les deux termes du second membre par $1, 2, 3\ldots(m-1)$, on obtient

$$m\,\mathrm{CC}\ n = \frac{1.\ 2.\ 3\ldots m\,(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)\times 1.\ 2.\ 3\ldots n}.$$

Le second membre restant le même lorsqu'on y change $(m - 1)$ en n et n en $(m - 1)$, a donc aussi pour valeur $(n + 1)$ CC $(m - 1)$.

Donc « les combinaisons avec répétition de m éléments n à n et de « $(n + 1)$ éléments $(m - 1)$ à $(m - 1)$ sont en même nombre. »

Par exemple : il y a 715 combinaisons avec répétition soit de 10 lettres 4 à 4, soit de 5 lettres 9 à 9.

Quand on projette deux dés à jouer, chacune des six faces du premier dé peut se combiner avec chacune des six faces de l'autre dé, aussi bien avec la face similaire qu'avec les autres ; ce qui donne un nombre d'arrangements exprimé par le carré de 6 ou par 36. Mais si l'on n'a égard qu'aux points amenés, par exemple, *deux* et *trois*, sans examiner si le point *deux* se trouve sur le premier dé et le point *trois* sur le deuxième, ou inversement, le nombre de coups distincts se réduira à $\frac{6 \times 7}{2} = 21$.

Avec trois dés le nombre d'arrangements différents s'élèverait à $6^3 = 216$, et celui des coups distincts serait seulement de $\frac{6 \times 7 \times 8}{1.\ 2.\ 3} = 56$.

§ 13. — La formule du binôme

$$(x + a)^m = x^m + ma\,x^{m-1} + \frac{m(m - 1)}{1.\ 2} a^2 x^{m-2} + \ldots + a^m \ldots (8)$$

donne, quand on fait $x = 1$, $a = 1$, et qu'on transpose le premier terme du second membre,

$$2^m - 1 = \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + \frac{m(m - 1)(m - 2)}{1.\ 2.\ 3} + \ldots + 1 \ldots (9)$$

Donc, « la somme de toutes les combinaisons possibles entre m « éléments, quand on les prend un à un, deux à deux, trois à trois, etc. « et enfin tous ensemble, est égale à $2^m - 1$.

Posons, dans la formule (8), $x = 1$, $a = -1$; transposons le premier terme du second membre et changeons tous les signes, il viendra

$$1 = \frac{m}{1} - \frac{m(m-1)}{1.\ 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} - \ldots + \ldots \text{etc.} \ (10)$$

La partie additive du second membre de cette dernière équation est la somme des nombres de combinaisons d'ordre *impair*, ou un à un, trois à trois, cinq à cinq, etc. La partie soustractive est la somme des nombres de combinaisons d'ordre *pair*, c'est-à-dire deux à deux, quatre à quatre, etc. Or, si l'on ajoute membre à membre les équations (9) et (10), la somme des combinaisons d'ordre pair disparaîtra, et l'on trouvera le nombre des combinaisons d'ordre impair égal à la moitié de 2^m ou à 2^{m-1}; par suite, le nombre des combinaisons d'ordre pair sera $2^m - 1 - 2^{m-1} = 2^{m-1} - 1$.

« Le nombre des combinaisons d'ordre impair surpasse donc tou-
« jours d'une unité celui des combinaisons d'ordre pair, quel que soit
« le nombre m, pair ou impair. »

Il suit de là que, dans le jeu de *pair ou impair*, il y a avantage à deviner impair.

§ **14.** — Nous terminerons par quelques exemples numériques cette exposition succincte des principes les plus généraux de la théorie des combinaisons.

1° Dans la loterie de France, où l'on compte 90 numéros, il y a :

90 *extraits*, ou combinaisons 1 à 1 ;

$\frac{90.\ 89}{1.\ 2} = 4005$ *ambes*, ou combinaisons 2 à 2;

$\frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3} = 117480$ *ternes*, ou combinaisons 3 à 3;

$\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190$ *quaternes*, ou combinaisons 4 à 4 ;

$\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43949268$ *quines*, ou combinaisons 5 à 5.

Les cinq numéros composant un tirage offrent 5 extraits ; $\frac{5.\ 4}{1.\ 2} = 10$ ambes; $\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3} = 10$ ternes; $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 5$ quaternes, et enfin 1 quine.

Or, l'équité veut que deux joueurs, qui ont des chances égales de gagner, exposent la même somme; mais, quand les probabilités de gagner sont différentes, les joueurs doivent exposer des sommes proportionnelles à ces probabilités. Le joueur qui prend un numéro n'a pour lui qu'une probabilité égale à $\frac{1}{90}$; celle de l'entrepreneur ou du *banquier* est de $\frac{89}{90}$. Si le joueur ou le *ponte* gagne, il devrait donc d'abord retirer son enjeu, puis toucher du banquier 89 fois sa mise ; mais ce dernier ne rend que 70 fois la mise : son bénéfice est donc de 20 mises, et son *avantage* (sous le rapport de la probabilité) est de $(89 - 69) \times \frac{1}{90} = \frac{2}{9}$.

La probabilité d'un *ambe*, ou de la sortie de deux numéros désignés pour un même tirage, est $\frac{10}{4005}$; la probabilité *contraire* est $\frac{3995}{4005}$: le gain du *ponte* devrait donc être $\frac{3995}{10}$ fois sa mise ; mais le banquier ne rend que 270 fois la mise : son avantage est donc de $(399,5 - 269) \times \frac{10}{4005} = \frac{29}{89}$.

La perte du ponte devient plus considérable encore lorsqu'il joue sur le terne, le quaterne ou le quine, qui rapportent respectivement 5500, 75000 et 1000000 fois la mise : l'avantage du banquier s'élève ici à $\frac{142}{267}$, $\frac{218}{256}$ et $\frac{429}{439}$. On peut donc appliquer à la loterie ce que Buffon dit des jeux publics en général : « Le banquier n'est qu'un « fripon avoué et le ponte une dupe, dont on est convenu de ne pas « se moquer. »

2° L'opération qu'on appelle *donner*, au jeu de piquet, revient à distribuer 32 cartes en quatre groupes ; deux de 12 cartes qui sont pris respectivement par chaque joueur, et deux autres groupes, l'un de 5, l'autre de 3 cartes, qui forment le *talon*. Le nombre de combinaisons auxquelles peut donner lieu cette distribution en quatre groupes partiels a pour expression (§ 10)

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots\ 32.}{1.\ 2.\ 3 \ldots 12 \times 1.\ 2.\ 3 \ldots 12 \times 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \times 1.\ 2.\ 3}$$

ou

$$1\ 592\ 814\ 947\ 068\ 800.$$

Parmi toutes ces combinaisons, si l'on ne considérait que celles où les quatre as se trouvent à la fois dans l'un des paquets de 12 cartes, par exemple, dans celui que doit relever le joueur qui a *la main*, on en trouverait le nombre en imaginant que les quatre as soient mis à part, et les 28 cartes restantes distribuées de toutes les manières possibles en quatre groupes ou paquets, le premier de 8 cartes pour le joueur qui a la main ; le second de 12 cartes pour le joueur qui donne ; les deux autres de 5 et de 3 cartes pour le talon. Ce nombre a donc pour expression

$$\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ 28}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8 \times 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 12 \times 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \times 1.\ 2.\ 3}.$$

Le rapport de ce nombre à celui qu'on a formé plus haut, ou

$$\frac{9.\ 10.\ 11.\ 12}{29.\ 30.\ 31.\ 32} = 0{,}0137653$$

est la probabilité cherchée.

3° Une assemblée législative de 108 membres est répartie par le sort en 6 bureaux de 18 membres chacun : quel est le nombre de distributions possibles ?

$$\frac{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ 108}{(1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ 18)^6}.$$

CHAPITRE DEUXIÈME.

De la probabilité absolue et relative ; simple et composée.

---

§ 15. — Nous avons défini la probabilité mathématique, en disant que c'est le rapport du *nombre* des chances favorables à un événement au *nombre* total des chances. Cette définition suppose que les chances peuvent être *énumérées*, et qu'elles constituent autant d'unités *discrètes*. Pour la rendre applicable à tous les cas, même à celui où les chances sont en nombre infini, et où le passage d'une chance à l'autre s'opère sans discontinuité, il vaudrait mieux dire que la probabilité mathématique est « le rapport de *l'étendue* des chances « favorables à l'étendue totale des chances. »

Cette définition est vraie, quelque multipliées que soient les diverses sortes de chances pouvant concourir à la formation de l'événement. Ainsi, une urne renfermant m boules blanches, n noires, p bleues, q rouges, offre quatre sortes de chances composant un nombre total

$$m + n + p + q = \mathrm{T}$$

et donnant les probabilités

$\frac{m}{\mathrm{T}}$ d'obtenir une boule blanche

$\frac{n}{\mathrm{T}}$ » » noire,

$\frac{p}{\mathrm{T}}$ » » bleue,

$\frac{q}{\mathrm{T}}$ » » rouge.

La somme de toutes ces probabilités est

$$\frac{m+n+p+q}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = 1.$$

Remarquons qu'une probabilité peut s'obtenir en prenant *la somme* de plusieurs autres. Ainsi admettons que, dans une urne contenant T boules, il y en ait m blanches, n noires, q rouges, les autres étant de couleurs différentes quelconques; et que l'événement aléatoire, le gain d'un joueur, soit subordonné à l'extraction d'une boule de l'une des trois couleurs précitées. Le joueur aura évidemment pour probabilité de gain

$$\frac{m+n+q}{\mathrm{T}} = \frac{m}{\mathrm{T}} + \frac{n}{\mathrm{T}} + \frac{q}{\mathrm{T}}.$$

De là ce principe important : « La probabilité d'un événement qui « peut arriver dans diverses hypothèses, est la *somme* des probabilités « relatives à chaque hypothèse. »

Si par exemple on jouait avec deux dés, sous la condition d'amener indistinctement le point 7 ou le point 8, on verrait, par le tableau du § 2, que la probabilité de cet événement est $\frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

§ **16.** — On pourrait demander, non pas la probabilité *absolue* que le joueur gagnera, mais la probabilité *relative* qu'il gagnera en amenant tel point plutôt que tel autre, ou en extrayant une boule d'une certaine couleur plutôt qu'une boule d'une autre couleur. Dans ce cas, il faut évidemment faire abstraction des chances défavorables au joueur, ou regarder comme nuls les coups qui le feraient perdre dans le cas de la probabilité absolue.

En nous reportant au § précédent, la probabilité que le joueur gagnera par suite de l'extraction d'une boule blanche, plutôt que par suite de l'extraction d'une boule noire ou rouge, est donc $\frac{m}{m+n+q}$; expression qui revient à celle-ci, $\frac{m}{\mathrm{T}} : \frac{m+n+q}{\mathrm{T}}$. Or, la probabilité absolue d'amener une boule blanche est $\frac{m}{\mathrm{T}}$; celle d'amener une boule de l'une des trois couleurs en question est $\frac{m+n+q}{\mathrm{T}}$; donc :

« La probabilité *relative* d'un événement est le quotient qu'on « obtient en divisant la probabilité absolue de cet événement par la « somme des probabilités absolues des événements que l'on compare. »

Lorsque l'on jette deux dés à la fois, la probabilité d'amener le point 7 plutôt que le point 4 serait donc (§ 2)

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}}=\frac{2}{3}.$$

§ **17.** — Tout à l'heure nous cherchions la probabilité que, *si le joueur gagnait,* il gagnerait par le fait de l'extraction d'une boule blanche, plutôt que d'une boule noire ou rouge. Maintenant, nous cherchons la probabilité *composée* qu'il gagnera, et qu'il gagnera par suite de l'extraction d'une boule blanche. Or, cette probabilité, qui est évidemment $\frac{m}{\mathrm{T}}$, peut se mettre sous la forme

$$\frac{m+n+q}{\mathrm{T}}\times\frac{m}{m+n+q};$$

et l'on en conclut la règle suivante:

« La probabilité d'un événement composé de deux autres, dont le « second ne peut arriver *qu'autant que le premier a eu lieu,* est le « produit qu'on obtient en multipliant la probabilité absolue du pre- « mier événement par la probabilité relative du second, ou par la « probabilité que, le premier étant arrivé, le second arrivera aussi. »

En généralisant cette règle, nous trouverons que: « La probabilité P « de l'existence simultanée d'un nombre n d'événements, dont un « quelconque dépend de l'arrivée des autres, est égale au produit des « probabilités p', p'', p''', p^n, qui sont ce que deviennent les probabi- « lités des divers événements, par suite de l'arrivée de ceux qui pré- « cèdent. »

Ainsi la probabilité d'extraire n boules blanches de suite hors d'une urne qui en contient a blanches et b noires (en admettant qu'on ne remette pas dans l'urne les boules tirées) est $\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\frac{a-2}{a+b-2}\cdots\frac{a-n}{a+b-n}.$

La probabilité d'amener une boule blanche, puis une boule noire, serait $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b-1}$.

L'emploi du principe précédent facilite souvent le calcul des probabilités. Supposons, par exemple, qu'on ait assemblé au hasard dans un paquet les 13 cartes d'une même couleur, et que l'on demande la probabilité qu'en les tirant au hasard, les deux premières soient un *as* et un *deux*. La probabilité que l'as se trouve à la première place est $\frac{1}{13}$; l'*as ôté*, il reste 12 cartes, et la probabilité que le *deux* se trouve à la première place est $\frac{1}{12}$. La probabilité du concours de ces deux événements, dont le second est subordonné au premier, a donc pour valeur

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{156}.$$

Autrement : la probabilité *absolue* du premier événement est $\frac{1}{13}$; la probabilité *relative* du second, c'est-à-dire celle de l'arrivée du *deux* plutôt que de l'une des 12 cartes restantes, est $\frac{\frac{1}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{1}{12}$: le produit de ces deux probabilités est $\frac{1}{13} \times \frac{1}{12}$.

Pour résoudre directement cette question par l'énumération des chances, on remarquerait que le nombre des arrangements possibles entre les 13 cartes est 1. 2. 3.... 13; et qu'après qu'on a fixé l'as et le deux aux 1^er^ et 2^e^ rangs, il reste 11 cartes entre lesquelles le nombre des permutations est 1. 2. 3.... 11. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{1.\ 2.\ 3. \dots\ 11}{1.\ 2.\ 3. \dots\ 11.\ 12.\ 13} = \frac{1}{12 \times 13}.$$

§ **18.** — Souvent l'événement attendu se compose du concours de deux ou de plusieurs événements *indépendants* les uns des autres, et qui ont chacun leurs probabilités propres, desquelles il faut déduire celle de l'événement composé.

Soient, par exemple, deux urnes renfermant, l'une m boules blanches et m' boules noires ; l'autre n boules blanches et n' boules noires : on demande la probabilité d'extraire deux boules blanches, une de chaque urne.

Chaque boule extraite de la première urne pouvant être jointe à toutes celles de la seconde, il y a autant de combinaisons ou de chances égales, que d'unités dans le produit qu'on obtient en multipliant le nombre total des boules de la première urne par le nombre total des boules de la seconde. De même, il y a autant de combinaisons ou de chances favorables à l'événement composé dont il s'agit, que d'unités dans le produit qu'on obtient en multipliant le nombre des boules blanches de la première urne, par le nombre des boules blanches de la seconde. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{mn}{(m+m')(n+n')} = \frac{m}{m+m'} \times \frac{n}{n+n'}.$$

L'exemple ci-contre pourrait être remplacé par le jet simultané de deux dés, le 1[er] ayant m faces marquées A et m' faces blanches ; le 2[e] n faces marquées B et n' faces blanches. L'apparition simultanée des deux lettres A, B, aura pour probabilité $\frac{m}{m+m'} \times \frac{n}{n+n'}$.

En généralisant le raisonnement, on pourra énoncer la règle suivante :

« Le produit des probabilités de plusieurs événements *indépen-*
« *dants* les uns des autres est la probabilité de l'événement composé
« résultant du concours de ces événements. »

Ou plus brièvement :

« La probabilité composée est le produit des probabilités simples. »

Moivre (*Doctrine of Chances*) est le premier qui ait fait usage des probabilités composées, d'une manière générale.

§ **19.** — La question suivante servira à mettre en lumière la simplicité qui résulte de la considération des probabilités composées, et donnera lieu à quelques remarques utiles.

On a deux urnes, l'une contenant m boules blanches et m' boules noires ; l'autre n boules blanches et n' boules noires : on demande la probabilité d'amener une boule blanche, en tirant au hasard dans l'une ou dans l'autre de ces urnes ?

La probabilité que le tirage se fera dans la 1[re] urne est $1/2$; celle d'en extraire ensuite une boule blanche est $\frac{m}{m+m'}$; la probabilité du concours de ces deux événements est donc $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+m'}\right)$.

Pour la même raison, la probabilité d'extraire une boule blanche de la seconde urne est $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+n'}\right)$.

Donc la probabilité d'amener une boule blanche est en somme

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{m}{m+m'}+\frac{n}{n+n'}\right\}.$$

Celle d'amener une boule noire serait

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{m'}{m+m'}+\frac{n'}{n+n'}\right\}.$$

La somme de ces deux probabilités se réduit à l'unité, parce qu'en effet on doit nécessairement amener une boule blanche ou une boule noire.

On se tromperait si l'on prenait pour la probabilité d'amener une boule blanche, le rapport du nombre total des boules blanches contenues dans *les deux* urnes, au nombre total des boules, sans égard à l'agencement des combinaisons, résultant de la répartition des boules dans deux urnes différentes. En effet, quand les boules sont séparées, la probabilité d'avoir une boule quelconque de la première urne est égale à celle d'avoir une boule quelconque de la seconde ; mais quand on mêle les boules dans une seule urne, les résultats changent, en général.

Je dis *en général,* car cette inégalité des résultats fournis par les deux méthodes disparaît : 1° quand le nombre des boules est le *même* dans les deux urnes ; 2° lorsque le *rapport* entre le nombre des boules blanches et des boules noires est le même dans les deux urnes.

En effet, la probabilité que nous avons trouvée plus haut,

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{m}{m+m'}+\frac{n}{n+n'}\right\}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{m(n+n')+n(m+m')}{(m+m')(n+n')}\right\};$$

ou bien, en faisant

$$m + m' = r ; n + n' = s$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{ms+nr}{rs}\right\}.$$

Résultat qui diffère en général de la fraction

$$\frac{m+n}{r+s}$$

formée en divisant le nombre des boules blanches des deux urnes par le nombre total des boules. Mais les deux expressions s'accordent :

1° Lorsque $r = s$, car elles deviennent alors

$$\frac{m+n}{2r};$$

2° Lorsque $m' = km$; $n' = kn$; car alors on a $r = m(1+k)$; $s = n(1+k)$, et les deux expressions se réduisent à

$$\frac{1}{1+k}.$$

Si cependant l'on voulait, dans le cas général, résoudre le problème par la considération des probabilités simples, on pourrait le faire, en commençant par égaliser le nombre de boules contenues dans les deux urnes, sans changer le rapport des boules blanches aux boules noires dans chacune d'elles. On y parvient en réduisant au même dénominateur les deux fractions $\frac{m}{r}$ et $\frac{n}{s}$. Considérant donc les boules comme réunies dans une même urne, on a, pour la probabilité d'extraire une boule blanche,

$$\frac{ms+nr}{rs+rs} = \frac{1}{2}\left\{\frac{ms+nr}{rs}\right\}.$$

Supposons, par exemple, que la première urne renferme une boule blanche et deux boules noires ; la seconde cinq blanches et trois noires : la probabilité d'amener une boule blanche sera $\frac{23}{48}$, inférieur à $\frac{1}{2}$, quoique le nombre total des boules blanches excède celui des boules noires.

Application numérique. — On prend au hasard deux nombres A et B de sept chiffres (par exemple, les parties décimales de deux logarithmes dans une table de Callet) : quelle probabilité y a-t-il que la soustraction de ces deux nombres puisse s'effectuer sans emprunt?

Chaque chiffre de A pouvant avoir les dix valeurs comprises de zéro à 9, aussi bien que chaque chiffre de B, il y a 100 cas possibles pour chaque soustraction partielle.

Si l'un des chiffres de A est zéro, il faudra, pour ne pas recourir à l'emprunt, que le chiffre correspondant de B soit zéro, ce qui fournit *un* seul cas favorable.

Si le chiffre de A est 1, le chiffre correspondant de B pourra être 0 ou 1, ce qui donne *deux* cas favorables...

Enfin, si le chiffre de A est 9, celui de B pourra être compris entre 0 et 9, et il y aura *dix* cas favorables.

La probabilité que la soustraction d'un chiffre s'effectue sans emprunt est donc

$$\frac{1+2+3\ldots.+10}{100}=\frac{11}{20}.$$

La probabilité que cette soustraction s'effectue *simultanément* pour les sept chiffres est donc $\left(\frac{11}{20}\right)^7 = 0,0152$; fraction comprise entre $\frac{1}{66}$ et $\frac{1}{65}$.

Si nous avions supposé que l'on prît deux nombres *ordinaires*, de sept chiffres, il aurait fallu exclure le cas où le premier chiffre de chaque nombre pouvait être un zéro. Le nombre des chances possibles, pour la dernière soustraction partielle, se serait réduit à 81 et le nombre des chances favorables à 45 : la probabilité cherchée serait donc devenue

$$\left(\frac{11}{20}\right)^6 \times \frac{5}{9} = 0,0154 = \frac{1}{65}.$$

Même solution pour le cas où l'on demanderait que la *somme* des deux nombres se fît sans report.

§ **20.** — Prenons encore, comme exercice, un problème auquel donne lieu le tirage annuel pour le recrutement militaire.

Dix jeunes gens sont inscrits sur la liste d'un village; parmi eux il s'en trouve trois qui ont des motifs légaux d'exemption ; le contingent exigé est de cinq hommes : on demande la probabilité que le n° 7 partira.

Pour résoudre cette question, nous pouvons supposer qu'on nous donne (10 — 3) boules blanches et trois boules noires, et un casier de 10 cases, numérotées depuis 1 jusqu'à 10. Toutes les permutations qu'on obtient en faisant occuper successivement chaque case à chaque boule, sont en nombre 1. 2. 3.... 10 ; et celles dans lesquelles le nombre de boules noires contenues dans les 7 premières cases sera 2 ou 3 correspondront à des chances qui atteignent le n° 7. soit S leur nombre ; $\frac{S}{1.\,2.\,3\ldots\,10}$ sera la probabilité cherchée, et la question est ramenée à un simple problème de permutations.

Prenons un arrangement *quelconque* de 7 boules, et ajoutons-lui toutes les permutations possibles des trois boules restantes : nous reformerons ainsi toutes les chances, car il viendra (10. 9.... 4)(1. 2. 3). Or parmi les (10. 9.... 4) arrangements de 7 boules, ceux qui renferment les trois boules noires, ou seulement deux d'entre elles, font partir le n° 7 ; il faut donc chercher les nombres d'arrangements de 10 éléments 7 à 7 qui renferment 2 ou 3 éléments sur 3 qui sont désignés. Nous invoquerons à cet effet la valeur de z (§ 9), dans laquelle $m = 10$, $v = 7$, $m' = 3$, $v' =$ successivement 2 et 3 : il viendra

$$\text{pour } v' = 2 \ldots\ldots z = 63\,.\,A7\,;$$
$$\text{pour } v' = 3 \ldots\ldots z = 35\,.\,A7.$$

La probabilité cherchée sera donc

$$98.\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7 \times 1.\,2.\,3.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\;\;8.\,9.\,10} = \frac{49}{60}.$$

On trouverait par un calcul analogue la probabilité contraire $= \frac{11}{60}$.

§ 21. — Quelquefois des considérations particulières, tirées des conditions physiques de la question, dispensent de toute énumération de chances et de tout calcul. Le jeu de *passe-dix* en offre un exemple. On jette trois dés sur une table, et un joueur parie que la somme des points amenés excédera 10. Pour connaître ses chances de gain, il faudrait, parmi les 216 combinaisons possibles, énumérer celles qui donnent une somme de points supérieure à 10. Mais remarquons que les points sont disposés sur les dés ordinaires, de manière que la somme des points marqués sur deux faces opposées soit constamment 7, l'as étant opposé au six, le deux au cinq, et ainsi de suite. Et quand même les fabricants de dés n'auraient pas adopté cet usage, on pourrait toujours, sans changer les conditions du sort, admettre que l'on emploie des dés où les points sont ainsi arrangés. Dans cette supposition, la somme des points amenés, et la somme des points qui se trouvent sur les faces opposées, par lesquelles les dés reposent sur la table, font ensemble 21. Donc, à chaque combinaison qui fait gagner le joueur pariant pour le passe-dix, en correspond une autre qui le ferait perdre, savoir celle qu'on obtiendrait en retournant les trois dés, et en faisant la lecture sur les faces opposées. Donc chaque joueur a autant de chances pour lui que contre lui.

§ **22**. — Nous terminerons ce chapitre par quelques questions qui se résolvent au moyen de considérations géométriques très-simples :

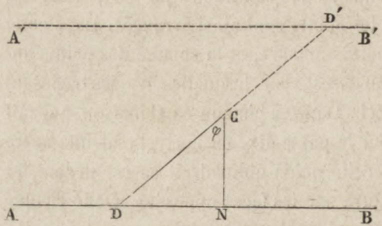
1° Sur un sol pavé de carreaux polygonaux on projette au hasard une pièce de monnaie, et un joueur parie pour *franc-carreau*, c'est-à-dire, pour que la pièce, après sa chute, repose tout entière sur un seul carreau. L'adversaire parie qu'elle tombera sur un joint. — Si l'on inscrit dans l'un des polygones un autre polygone qui ait tous ses côtés parallèles à ceux du premier, et distants de ceux-ci du demi-diamètre de la pièce, il est clair que le premier joueur gagnera lorsque le centre de la pièce tombera dans l'intérieur du petit polygone, et perdra lorsqu'il tombera entre les contours des deux polygones. D'ailleurs, comme les compartiments polygonaux sont supposés égaux, il suffit d'en considérer un seul; et dès lors on voit que la probabilité de gain du premier joueur est mesurée par le rapport de l'aire du petit polygone à celle du grand.

2° Considérons une série de parallèles équidistantes, sur lesquelles on laisse tomber au hasard une aiguille dont la longueur est au plus égale à l'intervalle entre deux parallèles. On demande la probabilité que l'aiguille reposera sur une des parallèles.

Nous n'avons évidemment à nous occuper que de la parallèle la plus voisine du centre de l'aiguille; car si l'on considérait toutes les autres, il faudrait multiplier par un même facteur le nombre des cas favorables et celui des cas possibles, ce qui ne changerait pas la probabilité.

Soit l la longueur de l'aiguille; a l'intervalle entre deux parallèles :

on a par hypothèse $l < a$. Soit C une position du centre de l'aiguille; AB la parallèle la plus voisine; A'B' une parallèle distante de celle-ci de la quantité $\frac{1}{2}a$; prenons $CD = \frac{1}{2}l$, imaginons par le point C la perpendiculaire CN et désignons par φ l'angle NCD : cet angle ne variera qu'entre o et $\frac{1}{2}\pi$; car en considérant ce qui se passe à droite de la perpendiculaire, on ne changerait pas la probabilité.



Cela posé, pour un angle φ déterminé, le nombre (ou plutôt l'*étendue*) des cas où l'aiguille coupe la parallèle est au nombre total des cas, comme $CD : DD' = CN : \frac{1}{2}a = l \cos \varphi : a$. Mais la probabilité de l'angle φ est $\dfrac{d\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$: donc la probabilité que l'aiguille repose sur une des parallèles est

$$\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\,l}{a\,\pi} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2\,l}{a\,\pi};$$

expression toujours fractionnaire par suite de l'hypothèse $l < a$.

Supposons que l'expérience ait été faite et que, sur un nombre q de jets, il y ait eu p rencontres : on aura $\frac{p}{q} = \frac{2\,l}{a\,\pi}$, d'où $\pi = \frac{2ql}{a\,p}$.

Le second membre étant connu, on pourra calculer la valeur de π. Voilà donc un procédé singulier, pour trouver, par des épreuves répétées, le rapport de la circonférence au diamètre.

5° Si les étoiles dont la voûte céleste est parsemée y avaient été distribuées au hasard; s'il n'existait entre elles aucune liaison physique, certains couples pourraient accidentellement être formés de deux astres très-rapprochés, présentant l'aspect d'une véritable *étoile double;* mais ce cas fortuit devrait être extrêmement rare. Le calcul suivant va montrer quelle est, pour certaines limites d'écartement et d'éclat, la probabilité de la formation d'une semblable étoile double *optique*.

Supposons que l'on compte, sur toute la sphère céleste, n étoiles comprises entre le 1er et Ne ordre de grandeur : on pourra, en les combinant deux à deux, former un nombre de couples donné par l'expression $\frac{n(n-1)}{2}$. Ces couples seront espacés sur tout le ciel; mais, si l'on n'a égard qu'à ceux dont l'écartement r (exprimé en secondes) serait le rayon d'un petit cercle occupant la m^e partie de la surface du ciel, il ne devra moyennement se trouver que $\frac{n(n-1)}{2m}$ étoiles doubles optiques, pour lesquelles l'écartement des deux composantes sera inférieur ou égal à r secondes.

La surface de la sphère, exprimée en secondes, est $4\pi(206265)^2$; le cercle, décrit avec la distance r comme rayon, aura pour surface πr^2, et la portion du ciel qu'il couvrira sera

$$\frac{r^2}{4.(206265)^2} = \frac{1}{m}.$$

Substituant cette valeur de m dans l'expression précédente, on trouve

$$\frac{n(n-1).r^2}{8.(206265)^2}$$

pour le nombre d'étoiles doubles optiques, distantes de r secondes au plus, que doit présenter la voûte céleste.

Or, d'après W. Struve, le nombre d'étoiles des huit premiers ordres ne dépasse pas 100000. En outre, dans sa revue générale de la partie du ciel comprise entre le pôle nord et le 15e degré de déclinaison australe, le même astronome a trouvé :

1re classe,	entre	0″ et 1″	d'écartement,	62	étoiles doubles
2e	»	»	1 et 2	»	116	»
3e	»	»	2 et 4	»	133	»
4e	»	»	4 et 8	»	130	»
5e	»	»	8 et 12	»	54	»
6e	»	»	12 et 16	»	52	»
7e	»	»	16 et 24	»	54	»
8e	»	»	24 et 32	»	52	»

Tandis que, d'après les probabilités, il n'aurait dû trouver, dans cette zone céleste, que les nombres suivants :

1re classe.	$\frac{1}{20}$	étoiles doubles.
2e »	$\frac{1}{7}$	»
3e »	$\frac{4}{7}$	»
4e »	$2\,{}^1/_4$	»
5e »	$3\,{}^3/_4$	»
6e »	$5\,{}^1/_4$	»
7e »	15	»
8e »	21	»

Ainsi, sur les 653 étoiles doubles observées par Struve, il est probable que 48 au plus sont accidentelles ou *optiques;* et les trois premières classes, qui, prises ensemble, en contiennent 311, ont pour elles la probabilité d'en renfermer une au plus! On voit donc que les groupes binaires très-resserrés, qui existent au ciel, ne sont pas un pur effet du hasard, et que leur nombre est infiniment supérieur à celui qu'on serait en droit d'attendre. Il faut en conclure nécessairement qu'il existe un lien *physique*, établissant une dépendance mutuelle entre les composantes de l'immense majorité de ces groupes.

On parviendrait à la même conclusion par la remarque suivante : Si la formation d'un groupe binaire n'était qu'un phénomène fortuit, la richesse de chacune des classes devrait être proportionnelle à la *surface* de la zone céleste qui lui correspond. Dans ce cas les nombres trouvés par Struve seraient entre eux comme

$$1 : 3 : 12 : 48 : 80 : 112 : 320 : 448.$$

Or, la huitième classe, bien loin d'être 448 fois plus riche que la première, n'en forme que les cinq sixièmes.

CHAPITRE TROISIÈME.

Des lois de la probabilité mathématique dans la répétition des événements.

—

§ 23. — La solution de toutes les questions qu'on peut se proposer au sujet des épreuves répétées, se trouve implicitement dans la règle déduite des probabilités composées (§ 18).

Soit a le nombre de chances d'un événement A (par exemple, le nombre de boules blanches contenues dans une urne); b le nombre de chances de l'événement contradictoire B, ou le nombre de boules noires de l'urne, que nous supposons, pour plus de simplicité, ne renfermer que des boules de ces deux couleurs. Les probabilités d'un tirage *simple* seront respectivement $\frac{a}{a+b} = p$; $\frac{b}{a+b} = q$, et l'on aura, par hypothèse, $p + q = 1$.

Les probabilités d'un tirage *double* s'obtiendront en combinant chaque probabilité simple avec elle-même et avec l'autre, et offriront par conséquent les quatre valeurs suivantes,

$$p\,p;\ p\,q;\ q\,p;\ q\,q.$$

Mais si l'on fait abstraction de *l'ordre* dans lequel chaque événement simple se présente pour former l'événement composé, alors les deux probabilités $p\,q$, $q\,p$ n'en formeront qu'une seule, et l'événement composé d'un tirage double présentera les trois probabilités

$$p^2;\ 2\,p\,q;\ q^2;$$

qui ne sont autre chose que les termes du développement de $(p + q)^2$.

Les probabilités correspondant à un tirage *triple* s'obtiendront en combinant de nouveau chacune des précédentes avec les probabilités simples p et q, et deviendront évidemment

$$p^3;\ 3\,p^2\,q;\ 3\,p\,q^2;\ q^3;$$

provenant du développement de $(p+q)^3$, et correspondant aux événements composés

A A A; A A B; A B B; B B B.

Et en général, si l'on désigne par m le nombre des épreuves ou des tirages, les différents termes du développement de $(p+q)^m$ exprimeront les probabilités de tous les événements composés que ce cas peut présenter.

Effectuons ce développement

$$(p+q)^m = 1 = p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} q + \frac{m(m-1)}{1.2} p^{m-2} q^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} p^{m-n} q^n + \ldots + q^m.$$

Le premier terme p^m indique la probabilité que, sur le nombre m d'épreuves, l'événement A arrivera m fois de suite.

Le second terme $\frac{m}{1} p^{m-1} q$ représente la probabilité que l'événement A arrivera $(m-1)$ fois et l'événement B une fois...

Enfin le terme général $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ n} p^{m-n} q^n$ exprime la probabilité correspondante à l'arrivée de $(m-n)$ fois l'événement A et de n fois l'événement B, *sans distinction d'ordre*.

Il est clair que, si l'on voulait établir une succession déterminée dans l'arrivée de chaque événement simple, il faudrait supprimer les coefficients numériques; mais nous n'avons pas à considérer ce cas.

On voit donc que, « dans le développement du binôme, chaque « terme exprime la probabilité d'un événement composé de A répété « autant de fois que le marque l'exposant de la lettre p, et de B répété « autant de fois que le marque l'exposant de la lettre q. »

« La *somme* des termes du développement, depuis le premier jus- « qu'au terme général inclusivement, exprime donc la probabilité que, « dans m épreuves, l'événement A n'arrivera *pas moins* de $(m-n)$ « fois (arrivera $(m-n)$ fois *ou plus*), ou, ce qui revient au même, « la probabilité que l'événement contraire, B, n'arrivera *pas plus* de « n fois (arrivera n fois *ou moins*) (§ 15). »

Ce théorème est de la plus haute importance.

Si p, q, r désignent les probabilités simples de *trois* événements A, B, C, dont l'un doit nécessairement résulter de l'épreuve aléatoire, de sorte qu'on ait

$$p+q+r=1,$$

le facteur binôme $p+q$, dans le développement précédent, se trouvera remplacé par le facteur trinôme $p+q+r$, et ainsi de suite. — Nous n'insistons pas sur cette généralisation, parce qu'elle est inutile à notre but.

La probabilité p^m diminuant à mesure que m augmente (et cela d'après une progression géométrique dont la raison est p), il s'ensuit que la reproduction multiple d'un événement peut acquérir une probabilité très-faible, bien que l'événement simple soit assez probable par lui-même. Supposons qu'un fait ait été transmis successivement par vingt personnes, de telle sorte que la première l'ait raconté à la seconde, la seconde à la troisième, et ainsi de suite; admettons d'ailleurs que le degré de croyance à accorder à chacune d'elles, ou la probabilité de véracité de chaque récit, soit $\frac{9}{10}$: la probabilité du fait qui nous aura été transmis de cette manière sera $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}=0{,}1216$, c'est-à-dire qu'il y aura plus de huit à parier contre un que le fait est faux.

Ce décroissement considérable de la probabilité peut très-bien être assimilé à l'oblitération de la clarté des objets, lorsqu'on les regarde à travers plusieurs lames de verre superposées. Une seule lame ne diminue presque pas la clarté; mais lorsqu'on augmente progressivement leur nombre, elles arrivent bientôt à intercepter totalement la lumière. Les historiens n'ont pas toujours égard à cette circonstance lorsqu'ils parlent de faits dont la tradition a dû passer par plusieurs générations; et bien des événements historiques, dont on ne songe pas à révoquer en doute l'authenticité, paraîtraient pour le moins très-douteux, s'ils étaient soumis à une telle épreuve.

§ **24**. — Exemples.

1° Déterminer la probabilité d'amener, en 8 épreuves successives du jeu de *croix ou pile*, 5 fois croix et conséquemment 3 fois pile.

Réponse. $$\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{56}{2^8}=\frac{56}{256}.$$

2° Déterminer la probabilité d'amener 8 fois de suite *croix* en 8 épreuves. — $\frac{1}{256}$.

3° Quelle est la probabilité d'amener *une fois* le point 6 en quatre jets successifs d'un dé à jouer?

Ici on a $p = \frac{1}{6}$; $q = \frac{5}{6}$; $m = 4$; et il vient pour la probabilité cherchée :

$$\frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3}\,p^1 q^3 = \frac{500}{1296} = \frac{5}{13} \text{ à peu près.}$$

4° Quelle est la probabilité d'amener le point 6 *au moins* deux fois dans quatre jets successifs d'un dé à jouer?

On l'obtient en prenant la somme

$$p^4 + 4p^3 q + 6p^2 q^2 = \frac{1}{6^4} + 4\frac{1.\,5}{6^4} + 6\frac{1.\,25}{6^4} = \frac{171}{1296} \text{ entre } \frac{1}{7} \text{ et } \frac{1}{8}.$$

Si l'on eût demandé la probabilité d'amener 6 au moins une fois, il aurait fallu prendre la somme des quatre premiers termes du développement de $(p + q)^4$; mais il est plus court de calculer ici la probabilité *contraire*, qui est $q^4 = \frac{625}{1296}$, et de la retrancher de l'unité; on obtient ainsi $\frac{671}{1296}$ pour la probabilité demandée; et puisqu'elle surpasse $\frac{1}{2}$, *il est probable* que le point 6 arrivera au moins une fois dans quatre jets.

§ **25.** — On voit, par ce dernier exemple, comment la probabilité d'amener le point 6 au moins une fois, qui n'était que $\frac{1}{6}$ à la première épreuve, s'est accrue par la répétition des jets du dé. Cette remarque nous conduit à la question suivante :

« Déterminer le nombre d'épreuves nécessaires pour que l'arrivée « d'un événement acquière une probabilité donnée. »

Supposons que l'on demande en combien d'épreuves on acquerrait la probabilité $\frac{1}{2}$ d'amener le point 6 au moins une fois : on aurait $p = \frac{1}{6}$: $q = \frac{5}{6}$; et il faudrait déterminer m par la condition que la somme des termes

$$p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} q + \ldots + \frac{m}{1} p\, q^{m-1}$$

fût égale à $\frac{1}{2}$; ce qui ne pourrait se faire que par tâtonnement; mais en prenant la probabilité égale et contraire, exprimée par le seul terme q^m, il suffira de trouver la valeur de m qui convient à l'équation $q^m = \frac{1}{2}$; et cela est facile au moyen des logarithmes. On obtient ainsi $m = 3,802$.

S'il s'agissait de trouver le nombre de jets de deux dés, pour lequel il y a autant de probabilité d'amener deux six (ou *sonnez*) que de ne pas le faire, il suffirait de poser $q = \frac{35}{36}$, d'où l'on déduit $m = 24, 6$. — C'est le problème proposé à Pascal par le chevalier de Méré. Ainsi, l'on parierait avec supériorité de chances, d'amener au moins une fois un *sonnez* en 25 coups, et avec infériorité de chances de l'amener en 24 coups. C'est l'unique manière d'interpréter dans ce cas la valeur fractionnaire trouvée pour le nombre m qui, de sa nature, doit être entier.

§ **26**. — Lorsqu'on jette une pièce à deux faces que je désignerai par A et B, la probabilité d'amener la face A au moins une fois en deux coups est, d'après ce qui précède :

$$p^2 + 2pq = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

D'Alembert (*opusc. Math.*, t. II, p. 20) prétend que cette probabilité n'est que de 2/3 : car, dit-il, si l'on amène A au premier coup, le jeu est fini; et si l'on amène au contraire la face B, il faudra jouer le second coup qui donnera A ou B; en sorte qu'il ne peut réellement arriver que l'un de ces trois événements A, BA, BB, dont deux font gagner le pari.

Ce raisonnement est spécieux : mais l'erreur consiste à supposer aux deux événements *composés*, B A, B B, la *même* probabilité qu'à l'événement *simple* A. La probabilité de celui-ci est $\frac{1}{2}$ comme celle de B; mais celle des événements B A, B B, qui n'ont lieu qu'au deuxième coup, est, avant le premier coup, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ainsi le joueur qui parie d'amener A au moins une fois a en sa faveur la probabilité $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

On arriverait au même résultat par l'énumération des arrangements que présentent les deux épreuves combinées ensemble, savoir :

AA, AB, BA, BB.

§ **27.** — « Un joueur a reconnu que, dans une partie formée de « 3 points, il peut en céder deux à son adversaire pour établir entre « eux l'égalité : on demande la probabilité qu'a le premier joueur de « gagner *un* point. »

Il résulte de l'énoncé qu'il a la probabilité 1/2 de gagner 3 points de suite, puisqu'il perdrait la partie si son adversaire en gagnait un auparavant; on a donc pour ce cas

$$p^3=\frac{1}{2},\text{ d'où } p=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

ce qui revient à environ 0,79 ou un peu moins de $\frac{4}{5}$.

Si le premier joueur ne cédait qu'un point sur trois, alors les chances en sa faveur seraient de gagner les trois points de suite ou en quatre coups au plus; car s'il manquait deux coups, son adversaire gagnerait la partie. Ainsi, l'on aurait

$$p^4+4p^3q=\frac{1}{2};$$

ou, en remplaçant q par $(1-p)$,

$$4p^3-3p^4=\frac{1}{2}.$$

Cette équation étant résolue donne

$$p=0,6143 \text{ environ}.$$

§ **28.** — La considération des événements composés qui peuvent arriver dans les épreuves répétées des mêmes hasards, mérite toute notre attention, parce qu'elle fournit les meilleures bases que l'on puisse donner à la philosophie du calcul des probabilités, pour fonder l'utilité de ses applications.

Chaque terme du développement du binôme (§ 23) correspond à l'une des hypothèses possibles sur le rapport du nombre des événements A au nombre des événements B, le nombre total des épreuves étant m. La somme de tous les termes ou de toutes les probabilités correspondantes à ces diverses hypothèses est égale à l'unité; et comme le nombre des termes ou des hypothèses est $(m+1)$, on comprend que les valeurs *absolues* des divers termes doivent devenir de plus en plus petites à mesure que le nombre des épreuves devient plus grand. Mais pendant que ces valeurs décroissent, elles conservent entre elles certains *rapports*, dont la *loi* est ce qu'il y a de plus important dans le sujet qui nous occupe.

Le terme général du développement de $(p+q)^m$, savoir

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+2)(m-n+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots.\,(n-1)\,n}p^{m-n}q^n \ldots.\ (n+1)^{\text{ème}} \text{ terme}$$

est précédé d'un autre qui a pour expression

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\,(m-n+2)}{1.\,2.\,3.\,\ldots.\,(n-1)}p^{m-n+1}\,q^{n-1}\ \ldots.\ n^{e} \text{ terme.}$$

En divisant la première de ces expressions par la seconde, on aura

$$\frac{m-n+1}{n}\times\frac{q}{p}\ \ldots.\ (\text{a})$$

pour le rapport d'un terme au précédent, valeur qui *diminue* à mesure que n *augmente*.

Cela posé, il est clair que le terme renfermant q^n sera supérieur, égal ou inférieur à celui qui le précède, selon que le rapport

$$\frac{m-n+1}{n}\times\frac{q}{p} > = \text{ ou } < 1.$$

Dans le premier cas, on aura $n < \dfrac{q\,(m+1)}{p+q}$;

dans le dernier, $n > \dfrac{q\,(m+1)}{p+q}$.

Si le second membre était un nombre entier, en le prenant pour la valeur de n, on rendrait le rapport (a) précisément *égal* à l'unité : il y aurait donc deux termes consécutifs égaux et plus grands que tous les autres, le n^e et le $(n+1)^e$.

Dans le cas contraire, *la plus petite* valeur *entière* de n qui, substituée dans le rapport (a), le rendra plus petit que l'unité, correspondra au *premier* terme qui décroît. Il faut donc prendre pour premier terme décroissant celui pour lequel l'exposant de q est égal au nombre entier immédiatement *supérieur* à l'expression fractionnaire $\frac{q(m+1)}{p+q}$. Le terme précédent, qui est le terme *maximum*, sera donc celui pour lequel l'exposant n de q est égal au nombre entier immédiatement *inférieur* à $\frac{q(m+1)}{p+q}$.

Ainsi, n est compris entre les nombres fractionnaires

$$\frac{q(m+1)}{p+q} \text{ et } \frac{q(m+1)}{p+q} - 1.$$

Lorsque p et q représentent les probabilités de deux événements contradictoires A et B, on a $p + q = 1$, et alors

$$n \begin{array}{l} < q(m+1) \\ > q(m+1) - 1. \end{array}$$

Si le produit $q\,m$ est un nombre entier, qm sera précisément le plus grand entier, n, contenu dans $q(m+1)$; $(m-n)$ sera un autre nombre entier égal à $p\,m$, et « *le plus grand* terme du développement sera « de la forme M $p^{mp}\ q^{mq}$, et correspondra par conséquent à la com- « binaison pour laquelle le rapport du nombre des événements A au « nombre des événements B est précisément le même que celui de la « probabilité de l'événement A à la probabilité de l'événement B. »

En tout cas, le plus grand nombre entier, n, contenu dans $q(m+1)$ différera de $q\,m$ de moins d'une unité (puisque q est toujours une fraction); et si l'on néglige cette fraction par rapport aux nombres $q\,m$, $p\,m$, on pourra dire qu'en général, « la combinaison « la plus probable est celle où le nombre des événements A est au « nombre des événements B dans le rapport de la probabilité de A à « celle de B. »

§ **20.** — Après avoir reconnu le rang et la force du terme qui surpasse tous les autres, il faut encore examiner la marche de ses rapports avec ceux-ci. Pour cela faisons, dans le rapport (a), $n = q\,m$; $m - n = p\,m$: ce rapport deviendra $\frac{p\,m+1}{q\,m} \times \frac{q}{p} = 1 + \frac{1}{m\,p}$, quantité qui approche de l'unité d'autant plus que le nombre d'épreuves, m, est plus considérable.

Dans le terme suivant, n devient $n+1 = qm+1$; $m-n$ devient $m-n-1 = pm-1$, et le rapport de ce terme au terme maximum, qui le précède, est $\frac{m\,p}{qm+1} \times \frac{q}{p} = \frac{1}{1+\frac{1}{m\,q}}$, fraction qui tend sans cesse vers l'unité, à mesure que m augmente.

En passant ainsi à des termes distants de deux, trois .... places du terme maximum M, on reconnaîtra sans peine que, de chaque côté de ce terme, le décroissement devient de moins en moins rapide à mesure que l'on fait croître le nombre m. De là résulte l'agglomération dans le voisinage du plus grand terme, de ceux qui ont après lui les valeurs les plus fortes, et dont la somme fait la plus grosse part de la somme totale (*l'unité*) des termes du développement.

Il doit résulter de là qu'à mesure qu'on s'approche des extrémités de ce développement, « on arrive à des termes, L par exemple, « dont le rapport avec M décroît, de manière qu'on peut toujours « assigner à m une valeur assez grande pour que ce rapport devienne « aussi petit qu'on voudra. »

Voici à peu près comment Jacques Bernoulli démontre cette importante proposition.

§ **30**. — L'exposant de q, dans le terme maximum, doit être compris, venons-nous de voir, entre

$$\frac{q\,(m+1)}{p+q} \text{ et } \frac{q\,(m+1)}{p+q} - 1;$$

faisons $m = r\,(p+q)$: il viendra n $\begin{cases} < qr + \dfrac{q}{p+q} \\ > qr - \dfrac{p}{p+q} \end{cases}$

d'où $n = qr$; $m - n = pr$.

Il s'ensuit que le terme maximum du développement de $(p+q)^{rp+rq}$ sera

$$M = \frac{(rp+rq)\,(rp+rq-1)\ldots(rp+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ \ rq}\ p^{rp}\,q^{rq}.$$

Un terme L, qui en serait éloigné de r places, serait de la forme

$$\mathrm{L} = \frac{(rp + rq)(rp + rq - 1) \ldots rp + r + 1}{1.\,2.\,3 \ldots (rq - r)} \; p^{rp + r} q^{rq - r}.$$

Prenons le rapport de M au terme qui en est éloigné de r places, soit avant, soit après, nous aurons

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \frac{(rp + r)(rp + r - 1) \ldots (rp + 2)(rp + 1)}{(rq - r + 1)(rq - r + 2) \ldots rq} \times \frac{q^r}{p^r};$$

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}'} = \frac{(rq + r)(rq + r - 1) \ldots (rq + 2)(rq + 1)}{(rp - r + 1)(rp - r + 2) \ldots rp} \times \frac{p^r}{q^r},$$

après la suppression des facteurs communs.

On voit d'ailleurs que le second rapport ne diffère du premier que par le changement de p en q, et réciproquement.

Cela posé, il faut d'abord montrer que le rapport $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$ peut être rendu aussi grand qu'on le veut : pour cela on décomposera les puissances q^r et p^r dans leurs facteurs, afin de les joindre à chacun de ceux des coefficients, ce qui donnera :

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} = \frac{rpq + rq}{rpq - rp + p} \times \frac{rpq + rq - q}{rpq - rp + 2p} \ldots \times \frac{rpq + q}{rpq};$$

produit composé de r facteurs dont le n^e a pour expression

$$\frac{rpq + rq - (n - 1)q}{rpq - rp + np} = \frac{pq + q - \frac{(n - 1)q}{r}}{pq - p + \frac{np}{r}}.$$

Il faut d'abord observer que tous ces facteurs surpassent l'unité; car si l'on retranche le dénominateur du numérateur, le reste $(p + q)\left(1 - \frac{n}{r}\right) + \frac{q}{r}$ est toujours positif, puisque la plus grande valeur que l'on puisse donner à n est r.

On voit ensuite que, pour une même valeur de n, le numérateur croît, tandis que le dénominateur décroît, lorsque r ou le nombre de facteurs augmente; d'où il suit que leurs valeurs augmentent avec leur nombre, et que, par conséquent, leur produit devient de plus en plus grand.

Enfin, pour une même valeur de r, le numérateur diminuant lorsque n augmente, tandis que le contraire a lieu pour le dénominateur, il est évident que les facteurs dont il est question forment alors une suite décroissante, dont le premier et le dernier terme,

$$\frac{pq+q}{pq-p+\frac{p}{r}}, \qquad \frac{pq+\frac{q}{r}}{pq},$$

comprennent entre eux la quantité

$$\frac{pq+q}{pq}=\frac{p+1}{p}.$$

Or, il est toujours possible d'assigner la valeur d'un nombre n, tel que $\left(\frac{p+1}{p}\right)^n$ égale ou surpasse un nombre donné C ; il suffit de poser

$$n=\frac{\log.\,\mathrm{C}}{\log(p+1)-\log.\,p};$$

si le second membre est fractionnaire, on prendra pour n le nombre entier immédiatement supérieur.

Maintenant, on peut faire en sorte que le facteur placé au rang marqué par n, dans la valeur de $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$, devienne égal à $\frac{p+1}{p}$; il suffit pour cela de poser l'équation

$$\frac{rpq+rq-(n-1)q}{rpq-rp+np}=\frac{p+1}{p}$$

et de déterminer r en conséquence. Cette équation donne

$$r=n+\frac{nq-q}{p+1};$$

d'où

$$r(p+q)=m=\left\{n+\frac{nq-q}{p+1}\right\}(p+q).$$

Par cette valeur de r, les $n-1$ facteurs pris sur la gauche de la valeur de $\frac{M}{L}$ surpassant $\frac{p+1}{p}$, qui est égal au facteur de rang n, le produit des premiers par ce dernier surpassera nécessairement $\left(\frac{p+1}{p}\right)^n$, c'est-à-dire le nombre C. Enfin les facteurs qui suivent étant tous > 1, le produit complet, ou la valeur de $\frac{M}{L}$ surpassera à plus forte raison le nombre C.

Par ce qui précède, on a donc déterminé le nombre r de manière qu'en élevant le binôme $(p+q)$ à la puissance $r(p+q)$, le rapport $\frac{M}{L}$ surpassera tel nombre qu'on voudra.

Pour traiter de même le rapport $\frac{M}{L'}$, il suffira de changer p en q et réciproquement dans la formule précédente, ce qui donnera

$$n = \frac{\log C}{\log(q+1) - \log q};$$

$$r(p+q) = m = \left\{ n + \frac{np - p}{q+1} \right\} (p+q).$$

Lorsque cette valeur différera de la précédente, il faudra employer la plus considérable des deux, qui rendra en même temps $\frac{M}{L}$ et $\frac{M}{L'} > C$.

La probabilité de l'événement composé auquel répond M, comparée à celle de l'événement L, donne, par la formule des probabilités relatives (§ 16),

$$\frac{M}{M+L} = \frac{1}{1+\frac{L}{M}}.$$

On peut donc rendre cette probabilité *relative* aussi voisine de la certitude qu'on le voudra.

J'insiste sur le mot *relative*, parce que le contraire a lieu pour la probabilité *absolue*. Celle-ci diminue à mesure que r augmente, et peut être rendue moindre que toute quantité donnée. Ce fait que l'on conçoit aisément lorsque l'on considère la valeur de M où les *frac-*

tions p et q sont élevées à des puissances de plus en plus grandes, sera démontré directement au § 36.

En l'admettant pour le moment, on voit que la probabilité d'obtenir un nombre d'événements A plus grand ou plus petit que rp d'une quantité constante, a, peut être rendue aussi petite qu'on voudra; car cette probabilité se compose des termes du développement commençant à celui qui est affecté de $p^{rp+a}q^{rq-a}$, et finissant à $p^{rp-a}q^{rq+a}$ inclusivement, dont le nombre est $2a+1$, et dont chacun peut devenir aussi petit qu'on voudra.

§ **31.** — Afin d'éclaircir ces notions par un exemple, supposons qu'il s'agisse d'extraire au hasard une boule d'une urne qui contient deux boules blanches et une noire. L'événement A consistera dans l'apparition d'une boule blanche et aura pour probabilité $\frac{2}{3}$; l'événement contraire, B, dont la probabilité est $\frac{1}{3}$, consistera dans l'apparition d'une boule noire.

La formule du binôme donnera successivement: 1°, pour une série de 3 tirages,

(3bl.,0noir)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
$\frac{8}{27}$,	$\frac{12}{27}$.	$\frac{6}{27}$,	$\frac{1}{27}$.

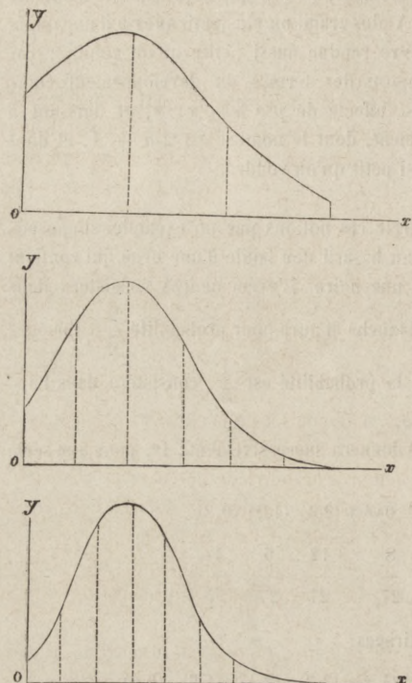
2°, pour une série de 6 tirages,

(6,0)	(5,1)	(4,2)	(3,3)	(2,4)	(1,5)	(0,6)
$\frac{64}{729}$,	$\frac{192}{729}$,	$\frac{240}{729}$,	$\frac{160}{729}$,	$\frac{60}{729}$.	$\frac{12}{729}$,	$\frac{1}{729}$.

3°, pour une série de 9 tirages,

(9,0)	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)	(4,5)	(3,6)	(2,7)	(1,8)	(0,9)
$\frac{512}{19683}$,	$\frac{2304}{19683}$,	$\frac{4608}{19683}$,	$\frac{5376}{19683}$,	$\frac{4032}{19683}$,	$\frac{2016}{19683}$.	$\frac{672}{19683}$,	$\frac{144}{19683}$,	$\frac{18}{19683}$,	$\frac{1}{19683}$.

Les figures ci-contre présentent la traduction graphique de ces résultats. Les *abscisses* sont proportionnelles aux nombres d'événements A qui entrent dans chaque événement composé, et les *ordonnées*, à la probabilité de chacun de ces derniers. On remarque que, dans les trois séries, le plus grand terme est la probabilité correspondant à la combinaison qui donne un nombre de boules blanches précisément double de celui des boules noires. Les termes vont en décroissant de part et d'autre de ce terme maximum. Les rapports des plus grands termes à ceux qui les précèdent ou qui les suivent immédiatement, vont en diminuant et en se rapprochant de l'unité, à mesure que la série comprend un plus grand nombre de termes. Au contraire, les rapports des plus grands termes aux termes extrêmes, vont toujours en augmentant, les termes extrêmes diminuant avec une grande rapidité, tandis que le plus grand terme diminue aussi, mais bien plus lentement.



Pour une série de 9 tirages, qui donne dix termes ou combinaisons différentes, la somme du plus grand terme, de celui qui le précède et de celui qui le suit immédiatement, forme plus des sept dixièmes de la somme totale des termes du développement.

Si l'on embrasse une série de 90 tirages, on trouvera, avec le secours de tables de *sommes de logarithmes*, calculées spécialement pour cet objet, les valeurs suivantes pour les cinq termes les plus grands.

(62,28)	(61,29)	(60,30)	(59,31)	(58,32)
0,081817;	0,087460;	0,088918;	0,086049;	0,079327. *

Leur somme est égale à 0,423571, ou à plus des deux cinquièmes de la somme totale des 91 termes du développement. Au contraire, les valeurs numériques des deux termes extrêmes sont d'une excessive petitesse; puisque celle du terme (90,0) serait exprimée par une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre de 16 chiffres; tandis que la valeur de l'autre terme extrême (0,90) se trouverait exprimée par une fraction incomparablement plus petite encore, ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur un nombre de 43 chiffres.

Remarque. Nous venons de voir que, pour une série de 9 tirages hors d'une urne contenant des boules blanches et des boules noires dans le rapport de 6 à 3, la probabilité du terme maximum (6,3) est $\frac{5376}{19683} = 0,2731$. Si le rapport des boules des deux couleurs avait été de 7 à 2, la probabilité du terme maximum (7,2) serait devenue plus grande, et se serait élevée à 0,3061.

Cela revient à dire que la probabilité de l'événement composé le plus probable augmente en même temps que la différence de probabilité des deux événements simples; en d'autres termes, les anomalies du hasard tendent à se compenser d'autant mieux que l'on opère sur deux espèces d'événements contraires dont les probabilités simples diffèrent davantage.

Ce fait remarquable sera *démontré* d'une manière générale au § 68; mais nous l'énonçons dès à présent, parce que sa *signification géométrique*, qui ressort très-clairement des considérations précédentes, disparaîtra presque complétement au milieu des développements analytiques du § en question.

§ **32.** — De l'agglomération des plus grands termes du développement du binôme dans le voisinage du terme maximum, résulte une proposition de la plus haute importance, démontrée pour la première fois par Jacques Bernoulli, et qui s'énonce ainsi :

« On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne

* *Voyez* « Tabularum ad faciliorem et breviorem probabilitatis computationem utilium Enneas » auct. Degen.

« une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, « que le rapport du nombre de répétitions du même événement au « nombre total des épreuves, ne s'écartera pas de la probabilité « simple de cet événement, au delà de certaines limites données, « quelque resserrées qu'on suppose ces limites. »

Pour le prouver, soit $\frac{p}{p+q}$ la probabilité d'un événement A, et m le nombre des épreuves. Il arriverait $\frac{p}{p+q} \times m$ événements de cette espèce, s'ils se répétaient exactement d'après leur probabilité simple. Au lieu de cela, supposons que, sur le nombre m d'épreuves, il n'y ait pas plus de $\frac{p+1}{p+q} m$, ni moins de $\frac{p-1}{p+q} m$ événements A ; et pour que ces derniers nombres soient entiers, faisons $m = r(p+q)$: ils deviendront respectivement $pr + r$, $pr - r$. Ainsi, dans le développement de $(p+q)^{rp+rq}$, les $2r+1$ termes pris depuis celui où l'exposant de la lettre p est $pr + r$, jusqu'à celui où cet exposant est $pr - r$, inclusivement, donneront toutes les chances pour les événements dont la composition est renfermée entre les limites assignées ci-dessus. Le plus grand terme se trouvera placé au milieu de ceux que je viens d'indiquer, car leur ensemble pourra être représenté par

$$\underset{\text{L....}}{l\, p^{rp+r} q^{rq-r}} \ldots\, \underset{\text{M ...}}{k.\, p^{rp} q^{rq}} \ldots\, \underset{\text{L}'.}{l'.\, p^{rp-r} q^{rq+r}}$$

Cela posé, il suit de la proposition démontrée § 30, « que la « somme des termes compris entre M et L inclusivement, peut être « rendue aussi grande que l'on voudra, par rapport à la somme des « r autres termes, pris sur la gauche de L, en allant vers le premier « terme du développement. »

En effet, si l'on désigne par F, G, H.... les termes compris entre M et L, en allant de M à L ; par P, Q, R..... les termes qui précèdent L, en allant vers le premier terme p^{rp+rq}, on aura l'arrangement suivant :

$$p^{rp+rq} \ldots \text{R, Q, P, L} \,..\, \text{H, G, F, M, F}'.\ \text{G}', \text{H}' \ldots \text{L}', \text{P}', \text{Q}', \text{R}' \ldots q^{rp+rq}.$$

Or, comme le rapport de deux termes consécutifs du développement croît vers la gauche à partir de M (§ 28) on aura :

$$\frac{M}{F} < \frac{L}{P}; \quad \frac{F}{G} < \frac{P}{Q}; \quad \frac{G}{H} < \frac{Q}{R} \ldots\ldots$$

d'où

$$\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R} \ldots\ldots$$

or, on a l'identité

$$\frac{M}{L} = \frac{\frac{M}{L} P + \frac{M}{L} Q + \frac{M}{L} R + \ldots\ldots}{P + Q + R + \ldots}$$

donc

$$\frac{M}{L} < \frac{F + G + H + \ldots\ldots}{P + Q + R + \ldots\ldots}.$$

Il suit de là que la valeur de r qui rend $\frac{M}{L} > C$ (§ 30) rendra à plus forte raison $\frac{F + G + H + \ldots\ldots}{P + Q + R + \ldots\ldots} > C$.

Or, le terme M, affecté de $p^{rp}\, q^{rq}$, en a rq avant lui; le terme L, pris r places avant M, en a donc $r\,(q - 1)$ avant lui, qui pourront être partagés en $(q - 1)$ groupes, composés chacun de r termes, dont la subordination sera la même que celle qui vient d'être indiquée entre les termes F, G, H... et P, Q, R.... Si donc on prend $C = i\,(q - 1)$, ce qui donnera

$$F + G + H + \ldots > i\,(q - 1)\,(P + Q + R + \ldots)$$

le premier groupe surpassera i fois le second, répété $(q - 1)$ fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de groupes, desquels chacun est plus petit que celui qui le précède à partir de M. Il est donc vrai que ce premier groupe surpassera i fois la somme de tous les autres.

On prouverait de même, en posant $C = i\,(p - 1)$, que la somme des termes pris depuis M exclusivement jusqu'à L′, surpasserait i fois les $(p - 1)$ groupes de r termes, compris depuis L′ jusqu'au dernier $q^{rp + rq}$, si $\frac{M}{L'} > i\,(p - 1)$. La somme des termes compris depuis L jusqu'à L′ inclusivement (sans même y faire entrer le terme M) surpassera donc i fois le reste S du développement de $(p + q)^{rp + rq}$. On aura donc

$$L + \ldots\ldots + H + G + F + M + F' + G' + H' + \ldots\ldots + L' - M > i\,S$$

d'où

$$\frac{L + \ldots\ldots + L'}{(p+q)^{rp+rq}} > \frac{iS + M}{iS + M + S}$$

inégalité qui sera satisfaite, en égalant le premier membre au second, rendu *plus grand* par la suppression du terme M au numérateur et au dénominateur. Il vient donc en définitive,

$$\frac{L + \ldots\ldots + L'}{(p+q)^{rp+rq}} = \frac{iS}{iS + S} = \frac{i}{1+i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}$$

fraction qui s'approche d'autant plus de l'unité que i est plus grand. Ainsi « la probabilité de n'avoir pas plus de $r\,(p+1)$, et pas moins « de $r\,(p-1)$ événements A, c'est-à-dire la probabilité que le rap- « port du nombre des répétitions de l'événement A au nombre total des « épreuves demeure renfermé entre les limites $\frac{p+1}{p+q}$ et $\frac{p-1}{p+q}$, « approchera de la certitude autant qu'on le voudra. »

Il est à remarquer que ces fractions, quoique déterminées en apparence, peuvent représenter des limites aussi resserrées qu'on le désire. Il suffit pour cela de remplacer p et q par des nombres de plus en plus grands, p', q', ce qui est permis, pourvu qu'ils restent dans le même rapport que celui des chances primitives. Soient donc $p' = sp$, $q' = sq$; les limites ci-dessus deviendront

$$\frac{sp+1}{s(p+q)} = \frac{p + \frac{1}{s}}{p+q}; \text{ et } \frac{sp-1}{s(p+q)} = \frac{p - \frac{1}{s}}{p+q}.$$

Jacques Bernoulli applique ses formules au cas où $p = 3$, $q = 2$; il pose d'abord $p' = 30$, $q' = 20$ et cherche le nombre d'épreuves nécessaire pour avoir une probabilité au moins égale à $\frac{1000}{1001}$, que le rapport du nombre des répétitions de A au nombre des épreuves sera renfermé entre les limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$. Dans cet exemple, il faut faire $i = 1000$. Substituant alors, dans les formules du § 30, $i\,(q^r - 1)$ à C, pour les termes de M à L, il en résulte

$$n = \frac{\log i\,(q' - 1)}{\log(p' + 1) - \log p'} = \frac{42787536}{142405} < 301;$$

$$r\,(p' + q') = n\,(p' + q') + \frac{n\,q' - q'}{p' + 1}\,(p' + q') < 24728.$$

En posant $C = i\,(p' - 1)$, pour les termes de M à L', on a

$$n = \frac{\log i\,(p' - 1)}{\log(q' + 1) - \log q'} = \frac{44623980}{211893} < 211;$$

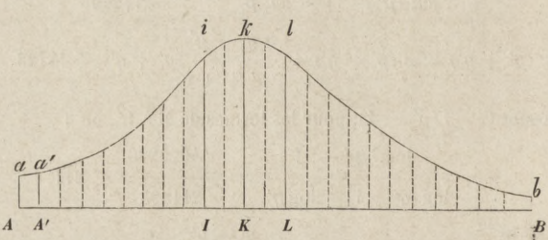
$$r\,(p' + q') = n\,(p' + q') + \frac{n\,p' - p'}{q' + 1}\,(p' + q') = 25550.$$

Ce dernier nombre étant le plus fort est celui qu'il faut adopter. Ainsi en embrassant 25550 épreuves, la probabilité des limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$ surpassera $\frac{1000}{1001}$.

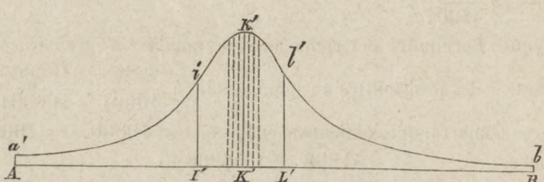
Jacques Bernoulli a déterminé aussi les nombres d'épreuves correspondants à des probabilités au moins égales à $\frac{10000}{10001}$, $\frac{100000}{100001}$; et pour ces nombres, qui s'obtiennent en faisant $i = 10000$, $i = 100000$, il trouve 31258 et 36966
ce qui fait voir déjà que la probabilité augmente plus rapidement que le nombre des épreuves : celui-ci croît, dans l'exemple actuel, par différences constantes et égales à 5708.

§ **33.** — Pour se représenter les considérations précédentes, on peut prendre une ligne A B que l'on divisera en m parties égales. Par les $(m + 1)$ points de division on élèvera les ordonnées A a, A' a' ... etc. que l'on prendra proportionnelles aux 1^er^, 2^e^, etc. termes du développement de $(p + q)^m$. Joignant les extrémités de ces ordonnées, on obtiendra une courbe (que l'on est convenu d'appeler *courbe de possibilité*) dont l'allure représentera la loi de probabilité des divers événements composés qui peuvent arriver. La somme de toutes ces ordonnées, qui est équivalente à $(p + q)^m = 1$, représente la somme de tous les événements possibles, ou la *certitude*. Une ordonnée quelconque I i correspond à la probabilité que le nombre des événements A sera au nombre des événements B, dans le rapport de

B I à I A. L'ordonnée maximum correspond à un point K pour lequel on a A K : K B $= q : p$.



La longueur A B restant la même, si l'on fait croître le nombre m et si l'on répète la construction précédente, les ordonnées se rapprocheront; on obtiendra une autre courbe dont l'ordonnée maximum aura encore son pied en K; mais les ordonnées I i, L l de la première courbe auront décru plus rapidement que l'ordonnée maximum;



et l'on peut même (§§ 29 et 30) prendre m assez grand pour que le rapport de I i à I' i' surpasse telle quantité que l'on voudra. La courbe de possibilité aura donc pris une forme telle, que l'aire partielle I' L' l' k' i' soit devenue une plus grande partie de l'aire totale A B b' k' a'; et même, quelque étroites que l'on suppose les limites K' I', K' L', on pourra toujours, en prenant m suffisamment grand (§ 32), faire en sorte que l'aire partielle diffère aussi peu qu'on voudra de l'aire totale, les portions A I' i' a', B L' l' b' décroissant indéfiniment.

§ **34**. — Un cas très-important à considérer, pour les applications nombreuses qu'il nous offrira plus tard, c'est celui où les probabilités p et q sont égales. — On prévoit déjà que la courbe de possibilité doit alors présenter une forme *symétrique* à droite et à gauche de l'ordonnée *maximum*, laquelle passera par le *milieu* de l'axe des abscisses; mais les propriétés de cette courbe méritent d'être envisagées de plus près elles nous seront d'une extrême utilité, lorsque nous traiterons de la répartition des erreurs accidentelles que présentent les observations.

En effet, on peut admettre avec Hagen (*Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung*) que « dans chaque espèce d'observations, il existe « un certain nombre indéterminé d'*erreurs élémentaires*, Δx, indé- « pendantes les unes des autres, qui, prises d'une manière absolue, « sont de même grandeur, et peuvent être indifféremment positives ou « négatives. C'est la somme algébrique de ces erreurs élémentaires qui « forme, dans chaque cas particulier, la véritable erreur existante. »

Soit $2\,m$ le nombre de ces erreurs élémentaires, dont chacune peut recevoir le double signe : si l'on veut énumérer toutes les erreurs d'observation possibles, on devra former tous les arrangements possibles que peuvent présenter ces $2\,m$ éléments, et l'on trouvera ainsi que

$2m$ fois l'erreur $+\Delta x$ se présente 1 fois
$2m-1$ » $+\Delta x$ et 1 fois l'erreur $-\Delta x$ se présente $2\,m$ fois
$2m-2$ » $+\Delta x$ » 2 » $-\Delta x$ » $\dfrac{2\,m\,(2\,m-1)}{2}$ fois
$2m-3$ » $+\Delta x$ » 3 » $-\Delta x$ » $\dfrac{2\,m(2\,m-1)(2\,m-2)}{2.\,3}$ fois
. . . .
. . . .
$2\,m$ » $-\Delta x$ » 1 fois.

La répartition des erreurs d'observation suit donc la loi du binôme, et leurs possibilités relatives sont représentées par les coefficients de son développement, exactement comme le tirage d'un certain nombre de boules, hors d'une urne qui contiendrait en nombre égal des boules blanches et des boules noires.

Reprenons donc (§ 28) les coefficients de deux termes consécutifs du développement du binôme élevé à la puissance $2\,m$: nous aurons

$$y_{n+1} = \frac{2\,m\,(2\,m-1)\,(2\,m-2)\ldots.\,(2\,m-n+2)\,(2\,m-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots.\,(n-1)\,n};$$

$$y_n = \frac{2\,m\,(2\,m-1)\,(2\,m-2)\ldots.\,(2\,m-n+2)}{1.\,2.\,3\ldots.\,(n-1)}.$$

Ces deux termes expriment les possibilités relatives de deux événements composés, dont le premier renferme $(2\,m-n)$ fois l'événement élémentaire A et n fois l'événement contraire B; et le second, $(2m - n + 1)$ fois A et $(n - 1)$ fois B : on peut les regarder comme les ordonnées des sommets d'un polygone, dont les abscisses seraient proportionnelles aux nombres $(2m - n)$ et $(2m - n + 1)$.

Pour introduire plus de symétrie dans nos formules, comptons les termes du développement à partir de celui du milieu (ou transportons en ce point milieu l'origine des abscisses), ce qui revient à remplacer n par $(m - n)$. Il viendra

$$y_{n+1} = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots.(m+n+2)(m+n+1)}{1.2.3\ldots.(m-n)};$$

$$y_n = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots.(m+n+3)(m+n+2)}{1.2.3\ldots.(m-n-1)}:$$

on en déduit

$$y_n - y_{n+1} = y_{n+1}\left\{\frac{m-n}{m+n+1} - 1\right\} = -y_{n+1}\left\{\frac{2n+1}{m+n+1}\right\}.$$

En appelant Δx l'unité des abscisses, on aura $x_n = n\,\Delta x$; $x_{n+1} = (n+1)\,\Delta x$ etc. : l'expression précédente deviendra donc

$$y_n - y_{n+1} = -y_{n+1}\left(\frac{\dfrac{2x_n}{\Delta x}+1}{m+\dfrac{x_n}{\Delta x}+1}\right) = -y_{n+1}\frac{2x_n + \Delta x}{m\,\Delta x + x_n + \Delta x}$$

Lorsque l'on passe à la limite, le premier membre devient dy; et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -y\,\frac{2x+dx}{m\,dx^2 + xdx + dx^2}:$$

dx disparaît au numérateur, ainsi que les termes $x\,dx$ et dx^2 au dénominateur; mais que devient le terme $m\,dx^2$?

Pour répondre à cette question, remarquons que $m\,dx$ représente l'axe des x tout entier, à partir de l'origine, et aussi loin qu'il peut s'étendre; c'est la limite extrême au delà de laquelle aucune combinaison (ou aucune erreur) ne peut se présenter, limite que l'on peut considérer comme infiniment grande vis-à-vis de x. Mais le produit de cet infiniment grand par l'infiniment petit, dx, donne une quantité finie et positive, dont la valeur reste provisoirement indéterminée, et que nous désignerons par $\frac{1}{h^2}$. Il vient en conséquence

$$\frac{dy}{dx} = - h^2 \cdot 2x\, y\,;$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{dy}{y} = - h^2 \cdot 2x\, dx.$$

Intégrant

$$\log. y = - h^2 x^2 + \log. C,$$

en désignant par log. C la constante arbitraire. Donc enfin

$$y = C.\, e^{-h^2 x^2}$$

est, en quantités finies, l'équation de la courbe de possibilité.

Pour $x = o$ on a $y =$ ordonnée maximum $= Y$; d'où

$$y = Y\, e^{-h^2 x^2} \ldots \text{(A)}$$

Telle est la relation qui existe entre la possibilité d'une erreur et la grandeur de cette erreur.

Tant que l'on ne considère que cette *relation*, l'ordonnée à l'origine, Y, reste entièrement arbitraire. En effet, l'idée de *possibilité relative* des erreurs n'entraîne avec elle que la *comparaison* des valeurs de y, indépendamment de la grandeur *absolue* de ces valeurs. Si l'on faisait varier Y, toutes les ordonnées subiraient en même temps des variations proportionnelles, et par suite, leurs valeurs relatives ne changeraient pas.

Le paramètre h, au contraire, fournit un moyen de caractériser la précision plus ou moins grande d'une espèce d'observations. Il résulte en effet de la nature de la fonction (A) que, pour des valeurs croissantes de x, les valeurs de y décroissent d'autant plus rapidement que h est plus grand. En d'autres termes, il faut attribuer à l'existence d'erreurs égales une *possibilité* d'autant plus petite que h est plus grand *. Aussi, a-t-on nommé ce paramètre, la *mesure de précision* des observations : il reçoit une valeur particulière pour chaque cas particulier.

De l'équation $\frac{y}{Y} = e^{-h^2 x^2}$, on tire, en remplaçant h par sa valeur, $\frac{y}{Y} = e^{-\frac{1}{m}\frac{x^2}{dx^2}}$; ou bien, en représentant par y', x' les nombres abstraits correspondants à $\frac{y}{Y}$, $\frac{x}{dx}$,

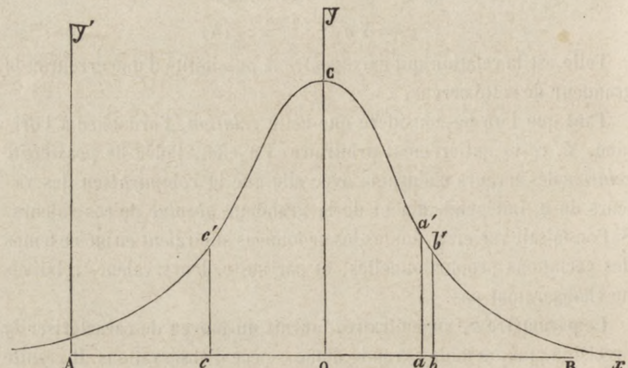
* On voit que pour nous, la *possibilité* d'une erreur n'est autre chose que sa probabilité, relativement à celle d'une erreur nulle.

$$y' = e^{-\frac{x'^2}{m}} \quad \ldots. \text{(A}')$$
$$y' = e^{-dx^2\, h^2 x'^2} \quad \ldots. \text{(A}'')$$

Si l'on convient de prendre pour unité des abscisses la quantité $\frac{1}{\sqrt{m}}$ $= h\, dx,$ les deux dernières équations deviendront

$$y' = e^{-x'^2} \ldots. \text{(A}''')$$

La courbe de possibilité se compose donc de deux branches symétriques se raccordant au point C, pour lequel la tangente est horizon-



tale, et ayant l'axe des x pour asymptote. Chaque abscisse, Oa, Ob représente un écart ou une erreur, dont la possibilité est indiquée par le rapport de l'ordonnée correspondante $a\,a'$, bb', à l'ordonnée maximum OC.

L'expression e^{-x^2} peut être envisagée comme le type algébrique des fonctions qui décroissent symétriquement, avec une grande rapidité, de part et d'autre de l'origine de la variable x ; de sorte que la valeur numérique de la fonction, sans jamais devenir rigoureusement nulle, est déjà excessivement petite pour des valeurs de x tant soit peu considérables.

§ **35.** — La *probabilité*, p, d'une erreur d'observation, x, est égale à sa possibilité particulière, y', divisée par la somme des possibilités de *toutes* les erreurs, aussi loin que ces erreurs peuvent s'étendre. Soient $\pm$ *b* ces limites extrêmes des erreurs possibles; nous aurons

$$p = \frac{y'}{\overset{+b}{\underset{-b}{\mathrm{S}}} (y')};$$

ou bien, en passant à la limite,

$$p = \frac{y'\, dx}{\int_{-b}^{+b} y'\, dx.}.$$

Mais vu la petitesse des ordonnées correspondant aux abscisses extrêmes, et la rapidité avec laquelle la fonction y décroît lorsque x augmente, on n'altérera pas sensiblement cette valeur de p, en substituant à l'intégrale définie, prise entre les limites — b et $+ b$, l'intégrale prise entre les limites — ∞ et $+ \infty$, qui exprime la surface totale de la courbe de possibilité. Il viendra donc.... (A)

$$p = \frac{e^{-h^2 x^2}\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx}.$$

Pour intégrer le dénominateur, nous emploierons la méthode de Cauchy. — Posons

$$\mathrm{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 (x^2 + y^2)}\, dx\, dy,$$

$$\text{ou } \mathrm{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 y^2}\, dy.$$

Ces deux intégrales étant de la même forme, et entre les mêmes limites, donneront, étant effectuées, une même valeur L; de sorte que $\mathrm{V} = \mathrm{L}^2$.

$$\text{Soient} \begin{cases} z = e^{-h^2 (x^2 + y^2)} = e^{-h^2 r^2}; \\ r^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Ces deux équations réunies expriment une surface de révolution, dont le volume est la somme des épaisseurs infiniment petites de cylindres concentriques à l'axe des z. L'une quelconque de ces couches cylindriques a pour expression

$$2\,\pi\, r.\, dr.\, z\ ;$$

on a donc pour le volume $V = L^2$.

$$V = \int_0^\infty 2\,\pi\, r.\, dr.\, z = \int_0^\infty 2\,\pi\, r.\, dr.\, e^{-h^2 r^2}.$$

$$= \pi \int_0^\infty d.\left(\frac{-e^{-h^2 r^2}}{h^2}\right) = \frac{\pi}{h^2};$$

d'où

$$L = \sqrt{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{1}{h}\sqrt{\pi}.$$

et l'on obtient

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\, dx \ldots. \quad \text{(B)}$$

pour la *probabilité* infiniment petite d'une erreur déterminée, x.

La probabilité d'une erreur *qui ne surpasse pas* x (en grandeur absolue) sera la quantité finie

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2}\, dx; \ldots. \quad \text{(B')}$$

ou bien, comme l'expression à intégrer ne renferme que le carré de x,

$$P = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 x^2}\, dx \ldots. \quad \text{(B'')}$$

Si l'on intègre jusqu'à la limite $x = \infty$, on obtient pour cette probabilité *l'unité* ou la certitude, comme on devait s'y attendre.

§ **36**. — La courbe de *possibilité* (A) se changera en courbe de *probabilité*, si l'on astreint la somme des probabilités qu'elle représente à valoir la certitude, ou si l'on égale sa surface à l'unité. Il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, dx = Y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = 1, \text{ d'où}$$

$$Y\,\frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1$$

$$Y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{dx\sqrt{\pi\, m}}.$$

L'équation de la courbe de probabilité est donc

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2} \ldots. (a)$$

$$\text{ou bien } y = \frac{1}{dx\sqrt{\pi\, m}}\, e^{-\frac{x^2}{dx^2} \times \frac{1}{m}} \ldots. (a'')$$

ou enfin, en prenant pour unité des abscisses $h = \frac{1}{dx\sqrt{m}}$.

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} \ldots. (a''').$$

La table n° 1, placée à la fin de l'ouvrage, présente les différentes valeurs de l'ordonnée y, pour des abscisses croissant de dixième en dixième, depuis $x = o$ jusqu'à $x = 3, 3$. Passé cette limite les valeurs de y deviennent négligeables.

§ **37.** — Pour rendre plus sensibles les considérations précédentes, imaginons une urne renfermant des boules blanches et des boules noires en nombre égal; et supposons qu'on en tire 1000 successivement. La probabilité d'un tirage quelconque sera donnée par la formule (a'') dans laquelle nous ferons dx égal à l'unité, pour passer aux nombres abstraits : nous aurons donc

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi\, m}} = Y$$

pour la probabilité du terme milieu, correspondant au tirage de 500 boules blanches et de 500 noires. Faisant $2m = 1000$, d'où $m = 500$, il vient

$$Y = 0{,}02523$$

L'événement suivant, qui consisterait à amener 501 boules blanches et 499 noires, aurait une probabilité un peu moindre qui s'obtiendrait en faisant $x = 1$, et ainsi de suite. L'extraction de 510 boules blanches et de 490 noires aurait donc pour elle la probabilité $\frac{1}{\sqrt{500\,\pi}}\, e^{-\left(\frac{1}{5}\right)} = 0{,}02066$; celle de 520 blanches et 480 noires, 0,01134 ; celle de 550 blanches et 450 noires, 0,00017.... On voit que la probabilité décroît très-rapidement lorsque x prend des valeurs un peu considérables : la probabilité d'extraire 570 boules blanches et 430 noires ne serait déjà plus que 0,0000014 ; et il est facile de se convaincre que tous les tirages où les boules d'une couleur excéderaient de 160 celles de l'autre couleur, ne réuniraient pas, dans leur ensemble, un demi-millionième de probabilité en leur faveur.

Ce qui précède suffit pour faire concevoir comment l'équation de la courbe de probabilité se déduit de la loi du binôme, et n'est en définitive qu'un corollaire de la théorie des combinaisons. C'est pour cela que la fonction (y) intervient dans toutes les formules que les analystes ont construites en vue de la théorie des chances. La courbe de possibilité, assujettie à passer par les sommets d'un grand nombre d'ordonnées, qui représentent les termes consécutifs du développement du binôme, se confondra à très-peu près, surtout dans le voisinage du sommet, avec la courbe qui aurait pour ordonnée la fonction e^{-x^2}; et cette coïncidence sera d'autant plus rigoureuse, que l'exposant du binôme sera plus considérable.

§ **38.** — Supposons que l'on compare deux espèces d'observations de précisions différentes, h et h'; et que l'erreur x, dans la première espèce, l'erreur x' dans la seconde, aient la même *possibilité* (la même probabilité relative à l'erreur nulle). Nous aurons (A)

$$\frac{y}{Y} : \frac{y'}{Y'} = e^{-h^2 x^2} : e^{-h'^2 x'^2}.$$

Le premier rapport étant, par hypothèse, égal à l'unité, on en déduit

$$x : x' = h' : h = \sqrt{m} : \sqrt{m'}.$$

De là ce théorème important :

« Dans deux espèces d'observations, les *erreurs* qui ont des possi-
« bilités égales, varient en *raison inverse* de la précision des obser-
« vations. »

Ou bien :

« Lorsqu'une urne contient des boules blanches et des boules
« noires en nombre égal, les *écarts* également possibles varient *comme*
« *la racine carrée* du nombre de boules prises dans chaque tirage. »

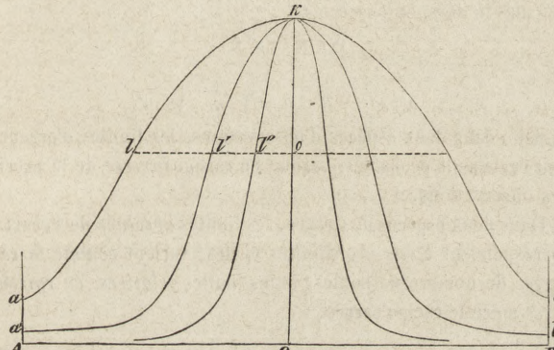
Remarquons que ces *écarts* sont ici *absolus*, et représentent la différence numérique entre les boules des deux couleurs. L'écart *relatif* serait le rapport de l'écart absolu au nombre de boules qui entrent dans le tirage ; et l'on aurait alors :

$$x : x' = \frac{\sqrt{m}}{2\,m} : \frac{\sqrt{m'}}{2\,m'} = \sqrt{m'} : \sqrt{m}\ ;$$

c'est-à-dire que :

« Les écarts *relatifs* également possibles varient *en raison inverse* « de la racine carrée du nombre de boules prises dans chaque ti- « rage. »

Faisons donc $m' = 4\ m$, ce qui revient à prendre 4000 boules au lieu de 1000 ; et *convenons* de représenter, dans les deux cas, la probabilité maximum par une *même* grandeur $O\,k$. La première courbe



de possibilité (celle qui est relative à $m = 1000$) étant $a\ l\ k\ b$, la seconde aura la forme $a'\ l'\ k\ b'$, dans laquelle toutes les ordonnées de la première n'auront fait que se rapprocher de l'axe $O\ k$, dans le rapport de 1 à $\sqrt{4}$. Cela revient à dire que, dans un tirage de 4000 boules, la différence *relative* entre les boules des deux couleurs sera réduite de moitié, par rapport au tirage de 1000 boules.

Des théorèmes analogues à ceux que nous venons de démontrer pour les *possibilités* des écarts ou des erreurs, ont lieu pour les *probabilités* des *limites* de ces écarts ou de ces erreurs.

Ainsi l'équation (B'', § 35)

$$P = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_o^a e^{-h^2 x^2} dx$$

exprime la probabilité d'une erreur qui ne surpassera pas la limite a; de même

$$P' = \frac{2h'}{\sqrt{\pi}} \int_o^{a'} e^{-h'^2 x^2} dx$$

est la probabilité d'une erreur qui, dans un autre genre d'observations, ne dépassera pas a'. Faisons $h\, x = t$; $h'\, x = t'$; il viendra

$$P : P' = \int_o^{a\,h} e^{-t^2} dt : \int_o^{a'\,h'} e^{-t'^2} dt'.$$

Les deux intégrales définies étant de la même forme, il faut évidemment, si l'on veut obtenir $P = P'$, effectuer l'intégration entre les mêmes limites, ou poser

$$a\, h = a'\, h',$$

d'où

$$a : a' = h' : h = \sqrt{m} : \sqrt{m'}.$$

Ainsi « dans deux espèces d'observations, les limites d'erreur qui « sont également probables, varient en raison *inverse* de la précision « des observations. »

« Dans deux espèces de tirages, les limites *absolues* de l'écart, qui « correspondent à des probabilités égales, varient *comme la racine* « *carrée* du nombre de boules; et les limites *relatives, en raison in-* « *verse* de cette racine carrée. »

Donc, si après avoir assigné à m et à $\frac{a}{m}$ certaines valeurs, et trouvé la probabilité P correspondante, on donne à la limite $\frac{a}{m}$ des valeurs qui soient la moitié, le tiers, le quart, le dixième de sa valeur primitive, il faudra embrasser un nombre d'épreuves 4 fois, 9 fois, 16 fois, 100 fois plus grand, pour avoir la même probabilité que l'écart fortuit tombera entre ces nouvelles limites.

C'est dans ce sens qu'il faut entendre le principe important que l'on énonce ordinairement de la manière suivante : « La précision du « résultat croît comme la racine carrée du nombre des observations. »

Dans la troisième section, nous aurons occasion de revenir sur les considérations précédentes.

§ 39. — L'équation (B''), mise sous la forme plus simple

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=o}^{t=ah} e^{-t^2}\,dt,$$

représente, avons-nous vu, une portion de la surface de la courbe de probabilité; ou, si l'on veut, elle exprime deux fois la somme des ordonnées comprises entre l'ordonnée maximum et celle qui correspond à l'abscisse $a\ h$. On sait d'ailleurs que la somme de *toutes* les ordonnées de la courbe doit être égale à l'unité. Cette considération permet d'éviter l'intégrale définie, comme M. Quetelet l'a fait d'une manière très-heureuse (*Recherches statistiques. Bulletin de la commission centrale,* t. II).

Dans le développement de $(p + q)^{999}$, il prend pour unité le coefficient du terme milieu, qui représente la probabilité que, dans un tirage de 999 boules, il y aura 500 boules blanches et 499 noires.

La *possibilité* de l'événement voisin, savoir du tirage de 501 boules blanches et 498 noires est (§ 34) $\frac{499}{501} = a$; celle du tirage de 502 boules blanches et 497 noires est $\frac{499 \times 498}{501 \times 502} = a'$; et ainsi de suite, a'', a'''... etc.

Il est inutile d'aller au delà du 80e terme, qui est déjà insensible, puisqu'il ne s'élève qu'à 0,000003. Faisant la somme de ces 80 termes $=$ S (a) et divisant chacun d'eux par cette somme, on obtient $\frac{a}{S\,(a)}$, $\frac{a'}{S\,(a)}$, $\frac{a''}{S\,(a)}$... etc. pour les *probabilités* de chacun des événements composés. La table qui en résulte, présentant les valeurs numériques des ordonnées de la courbe de possibilité, forme ce que M. Quetelet appelle l'*échelle de possibilité*.

Une autre table est formée par la simple addition des termes précédents,

$$\frac{a}{S(a)}\ ;\ \frac{a+a'}{S\,(a)}\ ;\ \frac{a+a'+a''}{S(a)}\ldots\text{etc.}$$

C'est l'*échelle de précision*, et elle remplace l'intégrale dont nous venons de parler. On y trouve, par exemple, vis-à-vis du 20e groupe, le nombre 0,397172 : en le doublant, on obtient la probabilité de prendre *plus* de 480 et *moins* de 519 boules d'une même couleur ; et elle se compose de la somme des probabilités d'en prendre 481, 482 ... 518. La fraction 0,8 environ, exprime donc la probabilité de ne pas s'écarter du terme moyen, ni en plus, ni en moins, des deux centièmes des limites entre lesquelles les combinaisons peuvent osciller.

La probabilité qu'on ne s'écartera pas de la moyenne, soit en plus, soit en moins, de 0,01 de l'étendue des limites, se trouve en face du 10e groupe : c'est le double de 0,236548 ou *un demi* à peu près. On peut donc parier un contre un qu'un pareil écart n'aura pas lieu. Cet écart de 0,01 est, pour cette raison, très-fréquemment employé : il a reçu le nom d'*erreur probable*.

Du reste la fonction

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

peut s'intégrer en employant le développement connu

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots$$

et la série est suffisamment convergente, tant que les valeurs de t ne sont pas considérables.

La table n° 2 donne les valeurs de l'intégrale définie

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\,dt$$

pour des valeurs de t croissant de dixième en dixième depuis zéro jusqu'à 2,5. Il est inutile d'aller au delà, car pour $t = 3$, on a déjà $P = 0{,}99997791$, valeur sensiblement égale à l'unité. On trouverait une table plus complète dans l'*Exposition de la théorie des chances*, de *Cournot*. Cet auteur est, après Lacroix, celui auquel nous avons fait, dans nos deux premières sections, les emprunts les plus nombreux.

§ **40.** — Jusqu'ici nous avons assimilé les répétitions des épreuves aléatoires, à des tirages répétés dans une urne où l'on rejetterait à chaque fois la boule extraite, pour ne rien changer aux conditions aléatoires dans les tirages successifs.

Le cas où la boule extraite ne rentrerait plus dans l'urne, quoique d'une application moins étendue, mérite d'être traité succinctement.

Supposons donc qu'une urne renferme a boules blanches et b boules noires; et qu'on en extraie au hasard des boules une à une, en ne rejetant jamais dans l'urne la boule extraite. On demande la probabilité d'amener, dans m tirages, n boules blanches et $m - n$ boules noires.

Continuons de désigner par A l'événement simple qui consiste dans la sortie d'une boule blanche, et par B l'événement contraire, ou la sortie d'une boule noire; de sorte que A B indique l'événement composé qui consiste dans la sortie d'une boule blanche suivie de la sortie d'une boule noire, et ainsi de suite. Il est clair, par le principe des probabilités composées (§ 18), qu'un événement composé, tel que A A B, a pour probabilité

$$\frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} \times \frac{b}{a+b-2} = \frac{a(a-1)b}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)};$$

tandis que celle de l'événement composé A B A, qui ne diffère du précédent que par l'ordre de succession des événements simples, est

$$\frac{a}{a+b} \times \frac{b}{a+b-1} \times \frac{a-1}{a+b-2} = \frac{ab(a-1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)};$$

fraction qui elle-même ne diffère de la précédente que par l'ordre des facteurs du numérateur. Il suit de cette remarque, dont la généralité est évidente, que la probabilité cherchée a pour valeur la fraction

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots.(a-n+1)\times b(b-1)(b-2)\ldots.(b-m+n+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots.(a+b-m+1)}$$

prise autant de fois qu'on peut faire de permutations distinctes dans l'ordre des événements. Donc la valeur de la probabilité cherchée est

$$\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots.(m-n)}$$

$$\times\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)\times b(b-1)(b-2)\ldots(b-m+n+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots(a+b-m+1)}\ldots(\mathrm{N})$$

Si l'on fait successivement, dans cette expression générale, $n = 1$, 2, 3, ... $(m - 1)$, on aura les probabilités d'amener en m tirages, $1, 2, 3, \dots (m - 1)$ boules blanches, et $(m - 1)$, $(m - 2)$, $(m - 3) \dots 1$ boules noires. Quant à la probabilité de n'amener que des boules blanches, elle est évidemment égale à

$$\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-m+1)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-m+1)}.$$

La somme de toutes ces probabilités compose l'unité, puisqu'elles correspondent à autant d'hypothèses, dont l'une doit forcément se réaliser : donc on a

$$\frac{a(a-1)(a-2)..(a-m+1)}{(a+b)(a+b-1)..(a+b-m+1)}+\frac{m}{1}\,\frac{a(a-1)(a-2)..(a-m+2)b}{(a+b)(a+b-1)..(a+b-m+1)}..$$
$$+\frac{m(m-1)..(n+1)}{1.2.3..(m-n)}\,\frac{a(a-1)..(a-n+1)\times b(b-1)...(b-m+n+1)}{(a+b)(a+b-1)..(a+b-m+1)}..$$
$$+\frac{b(b-1)(b-2)\dots(b-m+1)}{(a+b)(a+b-1)\dots(a+b-m+1)}=1. \quad \dots. \quad (\mathrm{M})$$

ou bien

$$(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-m+1)$$
$$=a(a-1)(a-2)\dots(a-m+1)+\frac{m}{1}a(a-1)(a-2)\dots(a-m+2).b+..$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(n+1)}{1.2.3\dots(m-n)}a(a-1)..(a-n+1).b(b-1)\dots(b-m+n+1)+\dots$$
$$+b(b-1)(b-2)\dots(b-m+1).$$

Cette dernière formule est remarquable par son analogie avec celle du binôme : les factorielles de l'une remplacent les puissances de l'autre.

En prenant la somme des $m - n + 1$ premiers termes du développement (M) jusqu'au terme (N) inclusivement, on a la probabilité que, sur m tirages, il ne viendra pas moins de n boules blanches. Au lieu de tirer les m boules *successivement*, on pourrait ici évidemment les extraire *toutes à la fois*, sans rien changer à la probabilité d'amener n boules blanches et $(m - n)$ boules noires.

La formule (M) s'applique très-simplement au problème du § 20.

En effet, on peut imaginer une urne qui contiendrait 7 boules noires et 3 blanches; et la probabilité qu'aura le n° 7 de partir sera la même que celle d'extraire au moins (7 — 5) = 2 boules blanches en 7 tirages consécutifs.

On a donc ici $a = 3$; $b = 7$; $m = 7$; $n = 2$; et en cherchant, pour abréger les calculs, la probabilité contraire,

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-m+1)+\frac{m}{1}b(b-1)\ldots(b-m+2)a}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-m+1)}=\frac{11}{60}.$$

On ferait rentrer directement dans la théorie précédente la plupart des questions auxquelles donnent lieu les épreuves du sort, au sein d'une assemblée politique, dont les membres sont ordinairement rangés en deux grandes classes, la majorité et la minorité. Par exemple, l'assemblée étant de 108 membres, dont 60 appartiennent à la majorité et 48 à la minorité, si l'on tire au sort une commission de 20 membres, il y a lieu de demander quelle est la probabilité que la majorité ou la minorité de l'assemblée sera en majorité dans cette commission. — Si des causes fortuites, et qui agissent sans acception de partis, telles que des maladies, doivent tenir 16 membres éloignés au moment d'un vote, on peut demander quelle est la probabilité que la majorité se déplacera, et ainsi de suite. On voit facilement que la dernière question revient à extraire, en 16 tirages consécutifs, au moins 15 boules blanches d'une urne qui contient 60 boules blanches et 48 noires.

Le droit de récuser un certain nombre de jurés, dévolu à l'accusé dans les procès criminels, donnerait lieu à des questions analogues. Par exemple, on doit tirer au sort douze jurés sur une liste de trente-six noms : l'accusé a intérêt à écarter six de ces noms; quelle est la probabilité qu'il n'aura pas besoin d'user de son droit de récusation? — C'est comme si l'on demandait la probabilité de n'extraire, en 12 tirages, que des boules blanches d'une urne qui contiendrait 30 boules blanches et 6 noires, probabilité égale à 0,07 environ.

CHAPITRE QUATRIÈME.

De la valeur vénale des chances ou des probabilités. Du marché aléatoire et du jeu en général.

---

§ **41.**—La valeur *absolue* des chances, telle que nous l'avons considérée jusqu'ici, doit maintenant être associée à leur valeur *vénale,* c'est-à-dire au prix ou à l'importance des objets sur lesquels ces chances donnent des droits éventuels. Ce nouveau point de vue nous amène à la considération de l'*Espérance mathématique :* par cette alliance de mots assez bizarre, on est convenu d'exprimer « le produit « que l'on obtient en multipliant la valeur d'une chose, en unités « monétaires, par la fraction qui exprime la probabilité mathématique « du gain de cette chose. » D. Bernoulli l'appelle *sors* ou *lucrum,* et les Allemands *die Erwartung.*

La règle de l'espérance mathématique sert de fondement aux paris et aux jeux de hasard, en ce sens, que « les adversaires doivent tou-« jours, au début, avoir la même espérance mathématique. » Si deux parieurs, ayant respectivement en leur faveur les probabilités p et q, exposent des enjeux P, Q, il faut, pour que le pari soit équitable, que l'on ait

$$p\,Q = q\,P \ldots. \qquad (1)$$

équation dont le premier membre représente l'espérance mathématique du premier parieur, le deuxième membre celle du second. On en déduit :

$$P : Q = p : q \ldots. \qquad (2)$$

c'est-à-dire « que les enjeux doivent être proportionnels aux nombres « de chances qu'ils ont en leur faveur. » Telle est la *règle des paris,* et l'on voit comment elle se déduit de l'espérance mathématique.

Ainsi, celui qui, dans le jet d'un dé à six faces, parierait d'amener une face désignée, ne devrait déposer au jeu que la cinquième partie de ce qu'y mettrait son adversaire, puisqu'il n'aurait en sa faveur qu'une chance, tandis que l'autre en aurait cinq.

De la proportion précédente, on déduit :

$$P + Q : P = p + q : p = 1 : p,$$

d'où

$$P = (P + Q)p \ldots \qquad (3)$$

on aurait de même

$$Q = (P + Q)\,q; \qquad (3)$$

c'est-à-dire que « la mise de chaque joueur doit être égale à l'espé- « rance mathématique qu'il a sur le fonds du jeu. »

Enfin, si l'on met l'équation (1) sous la forme

$$pQ - qP = o \ldots. \qquad (4)$$

et qu'on regarde les *pertes* comme des sommes *négatives*, le produit ($-\,q$ P) de la somme ($-$ P) par la probabilité, q, du gain du second joueur, pourra entrer dans l'évaluation de l'espérance mathématique du premier, laquelle « se formera alors en multipliant le « profit ou la perte que lui apporte chacun des événements possibles, « par la probabilité de cet événement, en donnant aux pertes le signe « moins. »

§ **12.** — Une fois la partie entamée, les joueurs peuvent désirer la rompre avant qu'elle soit terminée ; alors ils ne doivent pas, en bonne justice, retirer leur enjeu, mais « se le partager dans la proportion « des probabilités de gain qu'ils ont en leur faveur à l'instant où la « partie est rompue. » En effet, c'est une convention généralement admise dans tous les jeux, que le joueur perd la *propriété* de l'argent qu'il dépose, mais qu'il acquiert en revanche, sur le *fonds* du jeu, un *droit* proportionnel à la probabilité qu'il a de gagner ce fonds.

La règle de l'espérance mathématique, que l'on suit encore dans ce cas, prend ici le nom de *règle des partis* (compositio sortis (ou) aleæ *) : c'est à son occasion que Pascal entreprit les premières recherches sur la probabilité mathématique, et ce grand penseur ne songeait nullement aux applications immenses que sa *Géométrie du hasard* ** comportait dans toutes les branches des connaissances

* Compositio aleæ in ludis ipsi subjectis quod gallico nostro idiomate dicitur « faire les partis des jeux. » (*OEuvres de Pascal*, t. IV.)

** Stupendum hunc titulum jure sibi arrogat « aleæ geometria. » — *Ibid.*

humaines. Fermat, Huygens, Leibnitz, qui s'occupèrent du calcul des combinaisons et des chances en même temps que Pascal, ou quelques années après lui, n'avaient également en vue que la règle des partis.

§ **43.**—Comme exemple de la règle des *partis* combinée avec la règle des *paris*, supposons qu'une personne parie d'amener deux fois le point 6 dans deux jets consécutifs d'un dé à six faces : la probabilité de cet événement étant seulement $\frac{1}{36}$, et celle de l'événement contraire $\frac{35}{36}$, cette personne ne doit mettre au jeu que 1 fr. et son adversaire 35. Admettons que, le premier jet ayant eu lieu, le point désigné ait paru, et qu'alors les joueurs veuillent se séparer ; celui qui a parié d'amener le point désigné aurait encore, au second jet, *une* chance pour lui et seulement *cinq* contre lui : son espérance est donc différente de ce qu'elle était avant le premier jet. Dans ce cas, la mise totale étant considérée comme appartenant au jeu, toutes les chances également possibles ont un droit égal au partage de cette somme, et celui qui réunit plusieurs chances doit avoir les parts correspondantes : ainsi le premier joueur prendra le sixième de la mise totale, ou 6 fr : et son adversaire les $\frac{5}{6}$ ou 30 francs.

Deuxième exemple. Deux joueurs ont formé un fonds destiné à celui qui aura le plus tôt gagné trois parties : ils se séparent lorsque le premier en a gagné deux et le second une. On demande la part que chacun doit avoir sur le fonds du jeu, en supposant que la probabilité de gagner isolément une partie soit $\frac{1}{2}$ pour chaque joueur.

En examinant ce qui arriverait si le jeu était continué, on trouvera facilement pour réponse $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Cette question est une de celles qui avaient été proposées à Pascal par le chevalier de Méré. Il la résolut par un raisonnement très-simple, en se bornant à chercher ce qui arriverait si la 4e partie était jouée. Fermat y appliqua d'abord la méthode des combinaisons, puis celle des probabilités composées.

Troisième exemple. Deux personnes jouent en *rabattant, c. à. d.* que la partie doit se terminer aussitôt que l'un des deux joueurs a fait

n points *de plus* que l'autre. Ici, la séparation des joueurs avant la décision du sort, est quelquefois nécessaire, car la partie peut se continuer indéfiniment. Pour simplifier les calculs supposons $n = 2$; le premier joueur ayant gagné *un* point propose d'arrêter la partie : comment les enjeux doivent-ils se répartir?

On trouve, comme dans l'exemple précédent, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.

Quatrième exemple Trois joueurs, jouant à qui aura le premier gagné trois points, se séparent sans terminer la partie, lorsqu'il manque encore au 1er un point, au 2^{e}, deux, et au 3^{e}, trois : on demande comment ils doivent se partager l'enjeu.

Nous extrayons cet énoncé du *Dictionnaire de Mathématiques* de Montferrier, article *Probabilité ;* mais la solution donnée dans cet ouvrage est évidemment vicieuse ; et si l'erreur ne saute pas aux yeux, c'est grâce à une faute de calcul qui masque l'impossibilité du résultat.

Représentons respectivement par a, b, c, l'événement correspondant au gain d'un point par le premier, le deuxième et le troisième joueur. Dans l'état où est arrivée la partie, elle doit être terminée en quatre coups au plus : le nombre total des chances est donc $3^4 = 81$.

Puisque le gain d'un seul point donne la partie au premier joueur, les événements composés qui le font gagner sont tous les arrangements quatre à quatre des trois lettres a, b, c, renfermant au moins une fois la lettre a, sauf ceux de ces arrangements dans lesquels a est précédé de *deux b* ou de *trois c*. Ces arrangements exceptionnels sont au nombre de sept, savoir

$$\begin{array}{cccc} c & c & c & a \\ b & b & b & a \\ b & b & c & a \\ b & c & b & a \\ c & b & b & a \\ b & b & a & b \\ b & b & a & c \end{array}$$

D'ailleurs le nombre des arrangements qui renferment au moins un a est 65 (c'est la somme des coefficients des termes de $(a + b + c)^4$ renfermant a comme facteur à une puissance quelconque). Le nombre des chances favorables au premier joueur est donc 58, et sa probabilité de gagner, $\frac{58}{81}$.

Les événements composés qui font gagner le troisième joueur sont les neuf arrangements renfermant au moins *trois c,* sauf les trois arrangements où la lettre *a* se trouve à la première, la deuxième ou la troisième place. Ce joueur a donc pour lui la probabilité $\frac{6}{81}$.

Donc il reste au deuxième joueur la probabilité $\frac{17}{81}$; et l'enjeu doit être réparti dans le rapport des nombres 58, 17, et 6.

§ **44.** — « Lorsque les mises P et Q de deux joueurs sont proportionnelles à leurs chances de gain, p, q, l'événement le plus probable, après un certain nombre de parties, est qu'aucun des deux « n'ait perdu ni gagné. »

En effet, de la proportion $P : Q = p : q$ on déduit l'équation $Pq - Qp = o$.

Mais dans un nombre $r(p+q)$ d'épreuves, l'événement le plus probable (avons-nous vu § 30) est composé de rp événements A, ayant la probabilité p, et faisant gagner chacun la somme Q au premier joueur, et de rq événements B, ayant la probabilité q, et lui faisant perdre chacun la somme P. Cet événement donnera donc au joueur la somme

$$rpQ - rqP,$$

quantité qui s'évanouit lorsque

$$Pq - Qp = o.$$

§ **45.** — Il suit de là « qu'en multipliant suffisamment le nombre « des parties, la perte ou le gain de chaque joueur pourra être représenté par une *fraction* aussi petite qu'on voudra de sa *mise* « *totale.* »

En effet on peut, d'après le § 32, obtenir une probabilité *absolue*, de plus en plus grande, que le rapport du nombre des événements A au nombre total des parties jouées, sera compris entre les limites

$$\frac{p+1}{p+q} \text{ et } \frac{p-1}{p+q}$$

lorsqu'on embrasse $r(p+q)$ épreuves.

Remplaçons, comme dans le paragraphe cité, p et q par sp et sq ; les limites deviennent

$$\frac{sp+1}{s(p+q)} \quad \text{et} \quad \frac{sp-1}{s(p+q)}$$

et se rapportent à des événements composés dans lesquels il entre *au plus* $(rsp+r)$ événements simples de l'espèce A, joints à $(rsq-r)$ de l'espèce B; et *au moins* $(rsp-r)$ de l'espèce A, joints à $(rsq+r)$ de l'espèce B.

Dans le *premier* cas (limite supérieure), le joueur qui a pour lui l'événement A recevra $(rsp+r)$ Q et donnera $(rsq-r)$ P. La valeur de cet événement composé sera donc

$$(rsp+r)\,Q-(rsq-r)\,P=rs\left(pQ-qP+\frac{Q+P}{s}\right)$$

dans le premier cas, et

$$(rsp-r)\,Q-(rsq+r)\,P=rs\left(pQ-qP-\frac{Q+P}{s}\right)$$

dans le second.

Si, comme nous le supposons, les chances sont égales entre les deux joueurs, on doit poser

$$pQ-qP=o$$

et ils ont la même probabilité de ne pas gagner ou de ne pas perdre au delà de la somme

$$\frac{rs(Q+P)}{s}=r\,(P+Q)\,.$$

Cette somme représente une partie de la mise totale de chaque joueur; car si l'on y remplace Q par sa valeur $\frac{q\,P}{p}$, elle deviendra

$$\frac{rP\,(p+q)}{p}.$$

Or la mise du joueur A étant $rs\,(p+q)\times P=M$, on aura

$$r\,(P+Q)=\frac{rsP(p+q)}{ps}=\frac{M}{ps}.$$

La somme gagnée ou perdue par ce joueur a donc avec la mise totale le rapport $\frac{1}{sp}$. On trouverait de même que, pour le second joueur, le rapport analogue est $\frac{1}{sq}$, sa mise étant $rs(p+q) \times Q = N$.

Il suit de là que, comme on peut assigner d'abord au nombre s telle valeur qu'on veut, on pourra supposer aussi petits qu'on le voudra les rapports $\frac{1}{sp}$, $\frac{1}{sq}$; et, prenant ensuite pour r des nombres de plus en plus considérables, « on obtiendra une probabilité de plus en plus « grande, que la somme perdue par l'un des joueurs et gagnée par « l'autre ne surpassera pas une fraction donnée, aussi petite qu'on le « voudra, *de leur mise totale.* » (Mais non pas une *somme* aussi petite qu'on le voudra, comme nous le verrons tout à l'heure.)

§ **16.** — Les conséquences seraient tout opposées si, au lieu d'avoir $pQ - qP = o$, on avait $qP = pQ + k^2$, quelque petit que fût k^2; autrement dit, si l'un des joueurs avait sur l'autre un *avantage*, même très-minime. En effet, il viendrait alors :

$$rs\left(\frac{Q+P}{s} - k^2\right)$$

pour le gain du premier joueur ou la perte du second, dans le premier cas ; et

$$rs\left(\frac{Q+P}{s} + k^2\right)$$

pour la perte du premier joueur ou le gain du second, dans le deuxième cas.

Or, le nombre s pouvant être pris aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours le déterminer de manière à avoir

$$\frac{Q+P}{s} < k^2 :$$

alors le premier joueur perd dans le premier cas aussi bien que dans le second, et il s'ensuit que « quelque petite que l'on suppose la dif- « férence entre les espérances mathématiques des deux joueurs, on « pourra toujours, en multipliant le nombre des épreuves, obtenir « telle probabilité que l'on voudra que le joueur favorisé sera toujours « en gain, et l'autre toujours en perte. »

Dans les jeux publics, où les coups se succèdent très-rapidement, il suffit donc que le banquier se réserve un très-faible avantage, pour être *presque certain* de réaliser des bénéfices ; car la perte moyenne du joueur désavantagé croît proportionnellement au nombre de coups, tandis que l'intervalle des limites entre lesquelles la perte oscille croît (§ 38) proportionnellement à la racine carrée du même nombre. Il arrivera donc un instant où les variations fortuites se comptant par mille, la perte moyenne se comptera par millions.

§ **47.** — La proposition du § précédent, basée sur le théorème de Jacques Bernoulli, sert à bien fixer le sens que l'on doit attacher à l'espérance mathématique ; elle prouve la nécessité de faire entrer la répétition des hasards dans l'appréciation des pertes et des gains qu'ils amènent, et montre que le *nombre* des épreuves, et par conséquent presque toujours le *temps* entrent dans l'évaluation du degré de confiance qu'on doit accorder à la probabilité mathématique. De là résulte qu'il est contre la prudence de s'exposer sans nécessité aux chances d'un hasard qu'on ne peut tenter un très-grand nombre de fois.

Si l'on n'avait pas égard à la possibilité de réitérer les épreuves, on serait en droit de contester, avec d'Alembert et Condorcet, que deux conditions soient égales lorsque les avantages de chacune d'elles sont en raison inverse de leur probabilité. « La probabilité $\frac{1}{2}$ d'avoir « 2 écus, dit avec raison Condorcet *, n'est point égale à la certitude « d'en avoir 1 ; le joueur qui a la probabilité $\frac{1}{10}$ de gagner 9 écus « n'est point dans une position égale à celle d'un autre homme qui « aurait la probabilité $\frac{9}{10}$ de gagner 1 écu. » — Mais l'objection disparaît lorsque l'on considère le jeu comme pouvant se renouveler indéfiniment.

§ **48.** — Nous avons démontré plus haut que, dans un jeu égal, le *rapport* des pertes aux mises totales est renfermé entre des limites de plus en plus étroites, à mesure qu'on augmente le nombre des parties. Mais il faut se garder d'en conclure que ces *pertes elles-mêmes* diminuent indéfiniment : au contraire, puisque $r\,(Q+P)$ croît sans

* Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions, etc. — Discours préliminaire.

cesse avec r, il s'ensuit « qu'il y a une probabilité toujours croissante que « la perte surpassera une somme donnée, quelque considérable que « soit cette somme. »

C'est ce qu'on peut démontrer d'une manière générale.

Reprenons en effet le développement du § 32,

$$l \, . \, p^{rp+a} \, q^{rq-a} + \ldots . + k \, . \, p^{rp} \, q^{rq} + \ldots . + l' \, . \, p^{rp-a} \, q^{rq+a},$$

comprenant les événements où la différence entre le nombre des parties gagnées et le nombre des parties perdues ne s'élève pas à plus de $(r\,p + a) - (r\,p - a) = 2\,a$. Or, la probabilité que représente la somme de ces $(2\,a + 1)$ termes ira sans cesse en décroissant (*voyez la fin du* § 30) si le nombre a reste le même pendant que le nombre r augmente ; et par conséquent la probabilité contraire, qui est formée du reste des termes du développement de $(p + q)^{r\,p + r\,q}$ s'approchera de plus en plus de l'unité.

Les termes extrêmes répondent à une perte

$$(rp + a)\,Q - (r\,q - a)\,P = a\,(P + Q)$$

puisque

$$rp\,Q - r\,q\,P = o:$$

prenant donc $a\ (P + Q)$ pour la fortune de chaque joueur, on pourra, en faisant r suffisamment grand, trouver une probabilité aussi voisine de l'unité qu'on le voudra, que l'un des joueurs perdra une somme égale à $a\,(P + Q)$ et sera par conséquent ruiné.

Si les deux joueurs avaient des chances égales, le raisonnement subsisterait, en faisant $Q = P$: il suffirait donc d'admettre $2\,a\,P$ pour fortune du joueur le moins riche, et l'on serait à peu près *certain* de le voir ruiné au bout de $r\,(p + q)$ parties, quoique le jeu fût égal.

Il est juste cependant de faire observer, qu'à moins de supposer le rapport de l'enjeu à la fortune du joueur beaucoup plus grand qu'il ne l'est communément, le nombre de coups qu'il faudrait jouer pour avoir une probabilité considérable que l'un des joueurs se ruinera, est plus grand qu'on ne le donne ordinairement à entendre, dans des intentions louables sans doute.

Supposons, par exemple, deux joueurs A et B jouant à mises égales et à chances égales, la mise de A étant la 50ᵉ partie de son capital. Admettons aussi, en premier lieu, que les joueurs A et B sont également riches, ou disposent précisément du même capital. On a la probabilité 0,8859, ou près de 9 à parier contre 1, que le joueur A ne sera pas ruiné au 1000e coup; et la probabilité 0,4954, ou presque un à parier contre un, qu'il sera ruiné au plus tard au 10000e coup.

Si l'on suppose le capital de B double de celui de A, la première probabilité n'est pas sensiblement altérée dans sa valeur ; la seconde devient 0,604 ; en sorte qu'il y a environ 3 à parier contre 2 que le joueur A sera ruiné par le joueur B, au plus tard au 10000e coup. L'influence de la supériorité de fortune du joueur B devient sensible, mais beaucoup moins qu'on ne le croit communément.

Si le capital de A devenait double, triple, quadruple, il faudrait embrasser un nombre de coups quatre, neuf, seize fois plus grand, pour tomber sur les mêmes probabilités de ruine anticipée.

§ **49.** — La formule de l'espérance mathématique s'applique également au cas où il y a plus de deux événements à chaque épreuve. Supposons, par exemple, qu'un joueur jette un dé ordinaire, et que son adversaire s'engage à lui payer autant de francs qu'il amène de points à chaque coup. On demande quel doit être l'enjeu du premier joueur.

L'espérance mathématique de celui-ci se forme évidemment en ajoutant celles que donnent tous les événements possibles, et qui sont égales au produit de chacun des six points par la probabilité $\frac{1}{6}$ de l'amener. Le résultat est donc

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,50$$

L'enjeu cherché est donc 3 francs, 50 : c'est la *moyenne* entre les sommes que le second joueur peut avoir à payer.

§ **50.** — En parlant de la valeur vénale des chances, nous avons supposé que l'unité monétaire représentait une quantité *absolue*, ayant le même prix pour tout le monde. En réalité cependant, elle n'a qu'une valeur *de convenance*, subordonnée à la position particulière, à la fortune et même au caractère du possesseur. Il faut reconnaître qu'un homme *risque* d'autant plus en achetant une chance, c'est-à-dire un bien incertain, que le prix certain qu'il en donne est plus considérable relativement au bien qu'il possède; la raison dit aussi que l'importance d'une somme d'argent diminue pour celui dont la fortune s'accroît : mais n'est-ce pas abuser du calcul que de vouloir soumettre à ses lois les considérations morales relatives aux privations qu'impose une perte, aux jouissances que procure un gain? Comment apprécier numériquement cette valeur *relative* des chances que l'on a désignée sous le nom de *valeur morale*? Plusieurs auteurs ont proposé des règles à ce sujet : nous allons en indiquer quelques-unes, mais en déclarant d'avance qu'elles nous semblent plus ou moins arbitraires, et sans applications sérieuses.

Buffon (*Essais d'arithmétique morale*) a proposé de prendre pour mesure de l'importance morale d'une somme, ajoutée à un bien quelconque, *le rapport de l'une à l'autre;* et d'admettre en conséquence que l'homme qui possède 1000 francs et qui en gagne 100, reçoit un *avantage* égal à celui qui, possédant 100000 francs, en gagnerait 10000, ou qui, n'en possédant que 10, en gagnerait un. L'illustre écrivain déduit de son hypothèse la conclusion, très-juste et très-morale dans tous les cas, qu'une même somme acquiert plus d'importance lorsqu'on la perd que lorsqu'on la gagne; et que par suite le *jeu* le plus simple et le plus égal (celui de deux personnes également riches, jouant à chances égales) entraîne toujours une *perte* absolue d'aisance ; puisque l'événement diminue plus le bien du perdant qu'il n'augmente celui du gagnant. Si, par exemple, l'enjeu est la moitié de la fortune de chaque joueur, les valeurs morales de la perte et du gain sont exprimées respectivement par $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, et la perte absolue d'aisance est $\frac{1}{6}$.

En général, soit A le bien antérieur, et a la somme éventuelle; l'importance morale de cette somme sera exprimée par $\frac{a}{A}$ comme perte et par $\frac{a}{A+a}$ comme gain ; la différence sera $\frac{a^2}{A(A+a)}$.

Ceci conduit naturellement à chercher la valeur de la perte dont l'importance est équivalente à celle du gain a. Soit x cette perte ; on aura :

$$\frac{x}{A}=\frac{a}{A+a}, \text{ d'où } x=\frac{Aa}{A+a}=\frac{a}{1+\frac{a}{A}}.$$

On voit que la valeur de x approchera d'autant plus de celle de a, que la fraction $\frac{a}{A}$ sera plus petite ; en sorte que le gain et la perte ne peuvent être d'égale importance que lorsqu'ils sont infiniment petits par rapport au bien antérieur.

§ **51.** — Daniel Bernoulli admet une hypothèse qui diffère de celle de Buffon, en ce qu'elle fait croître bien moins rapidement l'influence des pertes (*Specimen theoriæ novæ de mensurâ sortis : Comm. Acad. Petrop.*, t. V, p. 175). Toutes deux s'accordent cependant à diminuer le prix des sommes éventuelles, à mesure que le bien antérieur est plus considérable, et à donner plus d'importance à la perte qu'au gain. Cet auteur, qui le premier a soumis au calcul l'appréciation de la valeur *morale* des sommes éventuelles, part de trois hypothèses, savoir :

1° Tout homme possède un bien *physique* quelconque, au moins équivalent à la subsistance qu'il peut tirer de son industrie, ou de l'emploi de ses forces vitales. Il n'y a que l'individu sur le point de mourir de faim, duquel on puisse dire qu'il ne possède absolument rien.

2° La valeur morale d'une somme infiniment petite est directement proportionnelle à cette somme, et inversement proportionnelle à la valeur absolue du bien physique de son possesseur.

3° La valeur physique peut être considérée comme la somme des valeurs physiques infiniment petites ; et la valeur morale correspondante, comme la somme des valeurs morales des éléments infiniment petits du bien-être physique.

Soit donc x un capital quelconque ; k une constante ; dx l'accroissement différentiel du capital : $\frac{k\ dx}{x}$ sera la valeur morale de cet accroissement (2°), et celle du capital entier sera (3°)

$$y = \int k\ \frac{dx}{x} = k \log\ x + \log\ h$$

en représentant par *log. h* la constante arbitraire. Pour la déterminer, il faudrait assigner la valeur de y qui correspond à une valeur donnée de x ; on n'oubliera pas, toutefois, que y et x ne peuvent être supposés ni nuls, ni négatifs (1°).

Représentons par y' la valeur morale d'un nouveau capital x'; nous aurons

$$y' = k \log x' - \log h;$$

et par suite

$$y' - y = k(\log x' - \log x) = k.\log\frac{x'}{x}.$$

Faisons donc $x = A$, $x' = A \pm a$: l'importance morale de la somme éventuelle a en présence du capital A sera exprimée par

$$k.\log\frac{A+a}{A}$$

comme gain ; et par

$$k.\log\frac{A-a}{A}$$

comme perte. Dans ce dernier cas elle est négative, à cause du logarithme de la fraction.

Pour déterminer, dans l'hypothèse de Bernoulli, la *perte*, z, dont la valeur morale serait égale à celle du *gain* a, nous remarquerons d'abord qu'il s'agit ici de cette valeur prise d'une manière *absolue*, c'est-à-dire positivement; et comme $\log\frac{A-z}{A}$ est une quantité négative, nous poserons

$$-k.\log\frac{A-z}{A} = k.\log\frac{A+a}{A}$$

d'où

$$\frac{A}{A-z} = \frac{A+a}{A}$$

ou enfin

$$z = \frac{Aa}{A+a} = \frac{a}{1+\frac{a}{A}}$$

valeur identique avec celle qui résulte de l'hypothèse de Buffon.

§ 52. — Supposons qu'un bien physique, ou absolu, A, soit susceptible de recevoir des variations a, a', a''...., lesquelles peuvent être positives, nulles ou négatives; soient de plus $p, p,' p''$.... les probabilités que ces variations auront lieu, de sorte que l'on aura nécessairement $p + p' + p'' + ... = 1$.

La *fortune morale éventuelle* du possesseur (*fortune morale* de Laplace; *mensura sortis* de Bernoulli; *erwartetes moralisches Vermögen*, de Grunert) s'évaluera en multipliant, dans chaque hypothèse de variation, la valeur morale du bien physique $(A+a)$ par la probabilité de la variation a, et en faisant la somme de tous les produits. On aura donc

$$\begin{aligned} Y &= p\,[k \log(A+a) + \log h] + p'\,[k \log(A+a') + \log h] + ... \\ &= p\,k \log(A+a) + p'\,k \log(A+a') + ... + (p+p'+p''+....) \log h \\ &= p k \log(A+a) + p'k \log(A+a') + p''k \log(A+a'') + ... + \log h. \end{aligned}$$

Désignons maintenant par X la fortune *physique* éventuelle correspondant à la fortune *morale* éventuelle Y : d'après la première équation du § précédent, ces deux quantités seront liées entre elles par la relation

$$Y = k \log X + \log h;$$

égalant ces deux valeurs de Y, on obtient, après quelques réductions faciles,

$$X = (A+a)^p (A+a')^{p'} (A+a'')^{p''} ....$$

pour la fortune physique *éventuelle* correspondant à la fortune physique A. La différence X — A est ce que Laplace nomme *espérance morale*, et elle a pour expression

$$X - A = (A+a)^p (A+a')^{p'} (A+a'')^{p''} .... - A;$$

tandis que l'*espérance mathématique* serait

$$pa + p'a' + p''a'' + ...$$

Si l'on développe la valeur de X — A suivant les puissances de a, a', a''.... en négligeant les puissances supérieures de ces quantités, on obtient

$$A^{p+p'+p''+...} + A^{p+p'+p''+....-1}(pa+p'a'+p''a''+...) - A$$

mais

$$p+p'+p''+....=1\,;\; p+p'+p''+....-1=0\,;$$

donc

$$X - A = pa + p'a' + p''a'' + ...$$

Les termes que l'on a négligés ne renfermant que les puissances supérieures des variations de fortune, on voit que l'espérance morale s'approche d'autant plus de l'espérance mathématique, que ces variations sont plus petites; les deux valeurs se confondent lorsque la fortune A peut être considérée comme infiniment grande vis-à-vis des pertes ou des gains éventuels a, a', a''....

Ce qui précède confirme l'opinion de Buffon, que le jeu le plus égal est désavantageux aux joueurs. Si, par exemple, deux joueurs possédant chacun un bien physique 100, exposent 50 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner ou de perdre, on aura $A = 100$; $a = +50$; $a' = -50$; $p = p' = \frac{1}{2}$: par suite l'espérance morale de chaque joueur est

$$(100 + 50)^{\frac{1}{2}} \ (100 - 50)^{\frac{1}{2}} - 100 = - 13,4$$

c'est-à-dire que chacun d'eux doit *craindre de perdre* 13,4.

§ **53.** — Dans le mémoire que nous avons cité plus haut, Bernoulli donne plusieurs applications curieuses de son principe : nous nous contenterons de la suivante.

Un négociant possède une fortune physique A; mais un vaisseau qui est en mer doit lui rapporter un bénéfice a s'il arrive au port. La probabilité de cette arrivée est p, d'après l'expérience. Quelle est l'espérance morale du négociant?

La probabilité que le vaisseau n'arrive pas au port est $1 - p$; et cet événement laisse la fortune physique du négociant égale à A. Il s'ensuit que son espérance morale est

$$X - A = (A + a)^p \ A^{1-p} - A.$$

Quant à sa fortune morale éventuelle elle-même, son expression sera

$$Y = p\,k \log (A + a) + (1 - p)\,k \log A + \log h.$$

Si l'on veut prendre A pour unité, les deux formules précédentes se simplifieront et deviendront respectivement

$$X - 1 = (1 + a)^p - 1$$
$$Y = p\,k \log (1 + a) + \log h.$$

Ce que nous venons de dire suppose que le négociant n'assure pas le vaisseau. S'il l'assure, il peut n'avoir à payer à la compagnie que $(1 - p)\,a$, puisque la probabilité de perte du navire est $(1 - p)$;

et alors sa fortune morale, après le payement de la prime d'assurance, est

$$y = k \log [1 + a - (1 - p) a] + \log h = k \log (1 + a p) + \log h.$$

Comme p est une fraction véritable, on a

$$\frac{p.\, da}{1 + ap} > \frac{p.\, da}{1 + a}$$

ou

$$\int \frac{p.\, da}{1 + ap} > \int \frac{p.\, da}{1 + a}$$

ou enfin

$$\log (1 + a p) > p \log (1 + a).$$

Il s'ensuit que $y > Y$, ou que la fortune morale du négociant, lorsqu'il assure, est plus grande que sa fortune morale éventuelle, dans le cas où il n'assure pas. Il y a donc avantage à assurer le navire, dans le cas où la prime ne dépasse pas $(1 - p)\, a$.

Mais si l'on exige du négociant une prime plus élevée, par exemple $(1 - p)\, a + a'$, sa fortune morale, après l'assurance, est

$$k \log [1 + a - (1 - p) a - a'] + \log h = k \log [1 - a' + a p] + \log h.$$

Par conséquent l'assurance ne présentera ni avantage, ni désavantage, si l'on a

$$p k \log (1 + a) + \log h = k \log (1 - a' + a p) + \log h,$$

d'où l'on tire

$$a' = 1 + a p - (1 + a)^p.$$

La prime à payer par le négociant doit donc s'élever au plus à

$$(1 - p)\, a + 1 + a p - (1 + a)^p = (1 + a)\, [1 - (1 + a)^{p-1}],$$

et il y aura pour lui avantage ou désavantage moral à assurer le navire, suivant que la prime sera inférieure ou supérieure à cette somme.

Soit par exemple $a = 10000$ fr.; $p = \frac{19}{20}$; $A =$ la fortune du négociant : il doit payer au plus

$$\left[1 + \frac{a}{A} - \left(1 + \frac{a}{A}\right)^p\right] A = A + a - (A + a)^p \,.\, A^{1-p}$$

$$= A + 10000 - (A + 10000)^{\frac{19}{20}} \cdot A^{\frac{1}{20}}.$$

Comme celui qui possède *moins* a évidemment un intérêt *plus* grand à s'assurer, on peut aussi se demander quelle fortune au moins doit posséder le négociant pour qu'il ait avantage à renoncer à l'assurance, lorsque la compagnie lui demande une prime déterminée, par exemple 800 fr. Dans ce cas on a l'équation

$$A + 10000 - (A + 10000)^{\frac{19}{20}} . A^{\frac{1}{20}} = 800$$
$$(A + 10000)^{19} . A = (A + 9200)^{20} ;$$

d'où Bernoulli déduit $A = 5043$ à peu près. Si la fortune du négociant surpasse ce chiffre, il peut renoncer à l'assurance ; s'il possède moins, la prudence exige qu'il assure l'entreprise.

Enfin on peut encore se demander quel est au moins le capital dont la compagnie doit disposer, pour pouvoir assurer au prix de 800 fr. dans les circonstances précédentes.

Soit x ce capital. Si le vaisseau arrive au port, événement dont la probabilité est $\frac{19}{20}$, le capital de la compagnie deviendra $x + 800$; si le vaisseau périt, événement dont la probabilité est $\frac{1}{20}$, la compagnie ne possédera plus que $x + 800 - 10000 = x - 9200$. Donc, lorsque l'assurance a lieu, la fortune morale éventuelle de la compagnie est

$$(x + 800)^{\frac{19}{20}} . (x - 9200)^{\frac{1}{20}} ;$$

lorsque l'assurance n'a pas lieu, son capital reste x : par conséquent on a l'équation

$$(x + 800)^{19} . (x - 9200) = x^{20}$$

d'où Bernoulli tire approximativement $x = 14243$. Tel est le minimum de capital que la compagnie doit posséder, pour offrir l'assurance au taux de 800 francs. Dans le cas contraire, elle aurait tort de s'engager dans cette spéculation.

§ **51.** — Nous terminerons ce qui a rapport à l'espérance morale par une question piquante, qui fut présentée à Montmort par Nicolas Bernoulli, et qui a reçu le nom de *Problème de Pétersbourg*, à cause sans doute de la mention qu'en a faite Daniel Bernoulli dans les Mémoires académiques de cette ville. — En voici l'énoncé.

Pierre et Paul jouent à croix ou pile; Pierre jette la pièce de monnaie, et promet de donner à Paul 1 fr. si pile arrive au premier coup; 2 francs si pile arrive au deuxième coup; 4 francs au troisième; 8 francs au quatrième, et ainsi de suite, en doublant à chaque coup, de manière que la partie ne se termine que lorsque pile est arrivé. On demande l'espérance mathématique de Paul, ou ce qu'il doit déposer pour enjeu.

D'après les notions fondamentales du calcul, Paul a les probabilités

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\ \ldots\ \frac{1}{2^n}$$

de gagner 1, 2, 4, 8, ... 2^{n-1} francs,
selon que pile arrivera aux

1^er^, 2^e^ 3^e^ 4^e^, ... n^e coup.

Son espérance mathématique de gain vaudra donc

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\ 8+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}=\frac{n}{2}.$$

Ainsi, Paul devrait déposer pour enjeu 50 francs si l'on mettait pour condition que le jeu cessera au 100^e^ coup; 500 francs si l'on convenait qu'il devra cesser au 1000^e^ coup; enfin, il doit déposer une somme *infinie* quand on convient que le jeu se prolongera jusqu'à ce que Pierre ait amené pile, si loin qu'il faille aller pour cela. Cependant, quel est l'homme sensé qui voudrait risquer pour enjeu, non pas une somme infinie, mais une somme tant soit peu forte?

Pour expliquer ce paradoxe, la plupart des géomètres ont eu recours à l'espérance morale, soit en employant, comme Lacroix, l'hypothèse de Daniel Bernoulli; soit en fixant, comme Cramer, pour maximum du gain de Paul, une somme tellement grande, qu'on dût regarder comme absolument *inutile* tout ce qu'on pourrait y ajouter. D'autres ont cherché à limiter le nombre de coups en fixant une probabilité assez grande $\left(\frac{9999}{10000}\text{, par exemple}\right)$ pour qu'on fût *moralement sûr* que pile a dû arriver : mais toutes ces explications laissent beaucoup d'arbitraire.

Poisson a fait la remarque bien simple que Pierre ne peut pas payer plus qu'il n'a ; et que s'il possédait cinquante millions, somme exorbitante pour un particulier, il ne pourrait loyalement s'engager à prolonger le jeu au delà du vingt-sixième coup, puisqu'au vingt-septième sa dette envers Paul, en cas de perte, serait le nombre de francs exprimé par $2^{26} = 67\ 108\ 864$, somme supérieure à sa fortune. Réciproquement, Paul, connaissant la fortune de Pierre, ne s'engagera pas à jouer plus de vingt-six coups et ne risquera que 13 francs. En supposant qu'il ne limite pas le nombre de coups, comme il ne peut pas recevoir de Pierre, quoi qu'il arrive, plus de cinquante millions, on trouve que la valeur de son espérance mathématique ne surpasse pas fr. 13,50.

§ **55.** — On rencontre souvent des joueurs systématiques qui se sont tracé un plan de conduite, d'après lequel ils se croient sûrs de réaliser des bénéfices, ou du moins de ne pas perdre. Pour cela, ils suivent certaines progressions dans leurs mises, ou se prescrivent des règles pour entrer au jeu et pour en sortir. Mais il ressort mathématiquement des définitions mêmes que, dans tout jeu *égal,* le joueur, quelque système qu'il suive, ne peut acquérir une probabilité de 100 contre 1 de gagner un franc, sans courir un risque mesuré par la probabilité de 1 contre 100 de perdre 100 francs ; les deux produits qu'on obtient en multipliant le gain possible par la probabilité du gain, et la perte possible par la probabilité de la perte, devant toujours rester égaux si le jeu est égal, inégaux si le jeu est inégal. Tout ce que le joueur peut faire, c'est d'accroître à volonté l'un des facteurs de chaque produit constant aux dépens de l'autre facteur, c'est-à-dire augmenter ou diminuer le gain ou la perte éventuelle, en diminuant ou augmentant proportionnellement la probabilité du gain ou de la perte. C'est ainsi que, dans une machine, la même quantité de force vive peut servir à faire décrire un espace double à une masse moindre de moitié, ou un espace moindre de moitié à une masse double, le produit de la masse par l'espace décrit restant toujours constant et proportionnel à la force vive dépensée. — L'absorption improductive de force vive par la machine représente soit les frais de jeu, soit la perte absolue d'aisance qui en résulte toujours (§ 50).

C'est ici le lieu de signaler une illusion dans laquelle des esprits, sensés d'ailleurs, semblent enclins à tomber. Chacun a le sentiment confus de cette vérité, que les anomalies du hasard doivent *se compenser* à très-peu près lorsqu'on embrasse une longue succession d'événements. De là on s'imagine que lorsqu'un événement, qui n'a pas plus de chances pour lui que contre lui, s'est reproduit *plus* souvent pendant une période, c'est une raison pour qu'il se reproduise *moins* souvent dans la période suivante. Comme si l'*indépendance* des événements *fortuits* n'excluait pas toute influence des hasards passés sur les hasards futurs! Qu'un numéro reste longtemps sans sortir à la loterie, la foule s'empressera de le couvrir de mises; qu'au jeu de croix ou pile, croix soit arrivé trois fois de suite, on pariera volontiers pour l'arrivée de pile à la quatrième fois. L'inverse cependant devrait plutôt avoir lieu; car la constance des événements antérieurs semble annoncer qu'ils ne sont pas tout à fait fortuits, et qu'il existe une *cause*, à nous inconnue, qui favorise leur reproduction.

DEUXIÈME SECTION.

PARTIE PHYSIQUE. — PROBABILITÉS A POSTERIORI.

CHAPITRE CINQUIÈME.

Détermination de la probabilité des causes par les observations. — Probabilité d'un nouvel événement.

---

§ **56.** — Dans les applications les plus nombreuses, et je dirai aussi les plus importantes du calcul des probabilités, les *chances,* ou les causes qui concourent à la formation des événements, ne sont pas connues *à priori*. Par la variété de leur nature, par la complication de leurs combinaisons, elles échappent à un dénombrement rigoureux: c'est ainsi, par exemple, que l'homme ne pourra jamais se flatter d'énumérer, ou de soumettre à un calcul exact toutes les chances de l'événement *naturel* le plus simple.

Il faut donc, dans ce cas, chercher au problème une solution indirecte; invoquer l'expérience, tâcher de remonter des effets aux causes qui les ont produits, et déterminer ainsi *à posteriori* les chances que l'on ne pourrait énumérer directement.

La probabilité que l'on déduit par ce moyen doit, on le conçoit sans peine, s'approcher d'autant plus de la véritable, que le nombre des observations sera plus grand. C'est d'ailleurs ce que démontre le principe de Jacques Bernoulli. Car en désignant par x la chance inconnue de la production d'un événement; par n le nombre de fois que cet événement a été observé en m épreuves, on peut toujours, d'après ce principe, obtenir une probabilité P, que l'écart fortuit $\left(x - \frac{n}{m}\right)$ tombe entre les limites $\pm l$ (le nombre l, et la différence $1 - P$ pouvant devenir moindres que toute grandeur assignable, pourvu que les nombres m et n soient suffisamment grands). Si donc rien ne limite le nombre des épreuves, la probabilité x peut être déterminée avec une précision indéfinie

Pour prendre un exemple, imaginons qu'on ait des urnes renfermant toutes trois boules; mais les unes renfermant trois boules blanches, les autres deux boules blanches et une noire, et d'autres enfin, d'une troisième catégorie, renfermant une boule blanche et deux noires. Les urnes des trois catégories sont en même nombre. On a trié une urne au hasard et ensuite extrait au hasard une boule de l'urne. Cette boule s'est trouvée blanche : quelles sont les probabilités que l'extraction s'est faite dans une urne de la première catégorie? de la seconde? de la troisième?

La probabilité de tomber sur une urne de la première catégorie est $\frac{1}{3}$; et si cet événement a eu lieu, on est certain d'amener une boule blanche. La probabilité de tomber sur une urne de la seconde catégorie est pareillement $\frac{1}{3}$; et quand le triage a amené cet événement, la probabilité d'extraire une boule blanche est $\frac{2}{3}\cdot$ Enfin la probabilité de tomber sur une urne de la troisième catégorie est $\frac{1}{3}$, après quoi la probabilité d'extraire une boule blanche est $\frac{1}{3}\cdot$ Donc, *à priori* (§ 19) la probabilité d'amener une boule blanche est

$$\frac{1}{3}.1+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

Si l'on désigne respectivement par A_1, A_2, A_3, les événements consistant dans l'extraction d'une boule blanche d'une urne de la première, de la deuxième et de la troisième catégorie; et si l'on répète un grand nombre m de fois l'épreuve qui consiste dans le triage fortuit, suivi d'un tirage pareillement fortuit, le nombre des événements A_1 sera sensiblement $\frac{1}{3}\,m$; celui des événements A_2 sera à très-peu près égal à $\frac{2}{9}\,m$; et enfin celui des événements A_3 ne différera guère de $\frac{1}{9}\,m$.

Réciproquement, si une boule blanche a été extraite sans qu'on sache de quelle urne, les probabilites, qu'elle provient d'une urne de la première, de la deuxième ou de la troisième catégorie, sont entre elles maintenant, *à posteriori*, dans le rapport des nombres 3 : 2 : 1. D'ailleurs, la somme de ces probabilités doit être égale à l'unité, puisque l'une des trois *hypothèses* a nécessairement lieu. La *probabilité* de l'une quelconque de ces trois *hypothèses* est donc égale au nombre qui lui correspond divisé par la somme des trois nombres, ou à $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$.

Plus généralement, soient h, h', h'', h''' .... les probabilités des diverses hypothèses susceptibles d'amener l'événement qui a eu lieu : p, p', p'', p''' .... les probabilités que chaque hypothèse donne pour l'événement : on aura :

$$h : h' : h'' : h''' \ldots = p : p' : p'' : p''' \ldots$$
$$h + h' + h'' + h''' = 1,$$

d'où, en faisant

$$p + p' + p'' + p''' \ldots = \mathrm{P}$$

$$h = \frac{p}{\mathrm{P}};\ h' = \frac{p'}{\mathrm{P}};\ h'' = \frac{p''}{\mathrm{P}};\ h''' = \frac{p'''}{\mathrm{P}}.$$

On comprendra, d'après cela, le sens de la règle suivante, attribuée au géomètre anglais Bayes (*Phil. Transact.*, 1763, p. 370) : « Les « probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles « aux probabilités que ces causes donnent pour les événements obser- « vés. La probabilité de l'une de ces causes ou hypothèses est une « fraction qui a pour numérateur la probabilité de l'événement par « suite de cette cause, et pour dénominateur la somme des probabi- « lités semblables, relatives à toutes les causes ou hypothèses. »

§ **57.** — Ces préliminaires étant très-importants, prenons un second exemple.

On a tiré successivement d'une urne trois boules blanches et une noire, en ayant soin (comme nous le supposons toujours) de remettre chaque fois la boule sortie : on sait d'ailleurs que le nombre total des boules est 4. On pourra faire, sur la constitution de l'urne, les trois hypothèses ci-dessous :

3	boules	blanches	1	boule	noire :	$p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$
2	»	»	2	»	»	$p = \frac{2}{4}$. $q = \frac{2}{4}$
1	»	»	3	»	»	$p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$

La *probabilité* de l'*événement*, composé de la sortie de 3 boules blanches et de une noire, est (§ 23), dans les trois hypothèses,

$$4\,p^3\,q = \frac{27}{64} \text{ ou } \frac{16}{64} \text{ ou } \frac{3}{64}.$$

Les *probabilités* des trois *hypothèses* sur la constitution de l'urne sont donc entre elles comme 27 : 16 : 3, et valent respectivement

$$h = \frac{27}{46} = \frac{27}{64} : \frac{46}{64}$$

$$h' = \frac{16}{46} = \frac{16}{64} : \frac{46}{64}$$

$$h'' = \frac{3}{46} = \frac{3}{64} : \frac{46}{64}.$$

§ **58**. — Quand on a déterminé la probabilité de chaque *hypothèse* possible, on en déduit facilement la probabilité des *événements* qui peuvent arriver aux tirages suivants.

Revenons à notre premier exemple, et supposons qu'après avoir trié une urne au hasard et en avoir extrait une boule blanche, on demande la probabilité d'en extraire de nouveau une boule blanche. — Nous avons vu (§ 56) qu'après le premier tirage, les probabilités des trois hypothèses possibles sur la constitution de l'urne ont respectivement pour valeurs $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$; les probabilités respectives du tirage ultérieur d'une boule blanche, dans ces trois hypothèses, sont 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; donc

$$\frac{3}{6}\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

est la probabilité de l'extraction ultérieure d'une boule blanche. Nous ajoutons les trois probabilités composées (§ 15), parce que l'une quelconque des trois hypothèses doit nécessairement se réaliser.

Pour les mêmes motifs, la probabilité de la sortie d'une boule blanche au cinquième tirage, dans notre second exemple, serait

$$\frac{27}{46}\cdot\frac{3}{4} + \frac{16}{46}\cdot\frac{2}{4} + \frac{3}{46}\cdot\frac{1}{4} = \frac{29}{46};$$

celle de la sortie d'une boule noire

$$\frac{27}{46} \cdot \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{46} \cdot$$

Nous déduisons de là la règle suivante :

« La probabilité d'un nouvel événement simple s'obtient en calcu-
« lant, d'après les événements passés, la probabilité des diverses
« hypothèses possibles, et faisant la somme des produits de ces pro-
« babilités par celles de l'événement, prises dans chaque hypothèse. »

§ **59.** — Pour appliquer les considérations précédentes aux probabilités des événements naturels, il faut observer qu'alors le nombre total des chances ou des hypothèses doit être regardé comme *infini*, et toutes les probabilités simples, c'est-à-dire tous les rapports compris entre o et 1, comme possibles, tant qu'on ignore quel est le véritable rapport, ou du moins quelles sont les limites entre lesquelles il doit être renfermé.

Soient donc A et B deux événements contradictoires, dont l'un est arrivé m fois et l'autre n fois. La probabilité simple de l'événement A peut varier depuis $x = o$ jusqu'à $x = 1$, pendant que celle de B variera depuis $x = 1$ jusqu'à $x = o$. La probabilité de l'*événement*, composé de m fois A et de n fois B, aura toujours une expression de la forme (§ 23)

$$k\, x^m\, (1 - x)^n$$

dans l'*hypothèse* que la probabilité de l'événement A soit x. En divisant cette quantité par la somme des probabilités de l'événement dans *toutes* les hypothèses possibles, on aura, avons-nous vu § 56, la *probabilité* de l'*hypothèse*, x.

Tant que x variera d'une manière discontinue, cette dernière somme sera de la forme

$$k\, x'^m\, (1 - x')^n + k\, x''^m\, (1 - x'')^n + \ldots = \mathrm{S}\,.\, k\, x^m\, (1 - x)^n,$$

de sorte que le quotient cherché sera

$$\frac{x^m\, (1 - x)^n}{\mathrm{S}.\, x^m\, (1 - x)^n};$$

mais quand on passe à la limite et que l'on fait varier x d'une manière continue, le signe sommatoire S doit être remplacé par le signe d'intégration. On a donc alors, après avoir multiplié par dx les deux termes de la fraction,

$$\frac{x^m\, dx\, (1-x)^n}{\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n}$$

pour la *probabilité* infiniment petite de l'*hypothèse* qui consiste à attribuer à l'événement A la probabilité particulière, x.

§ **60**. L'intégrale indéfinie

$$\int x^m\, dx\, (1-x)^n$$

s'obtient facilement par parties : on a successivement

$$\int x^m\, dx\, (1-x)^n = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1}\int x^{m+1}\, dx (1-x)^{n-1};$$

$$\int x^{m+1}\, dx (1-x)^{n-1} = \frac{x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{m+2} + \frac{n-1}{m+2}\int x^{m+2}\, dx (1-x)^{n-2};$$

$$\int x^{m+2}\, dx (1-x)^{n-2} = \frac{x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{m+3} + \frac{n-2}{m+3}\int x^{m+3}\, dx (1-x)^{n-3}.$$

Répétant n fois cette opération, on fera disparaître le facteur $(1-x)$.

D'ailleurs, si nous supposons $x = o$, la valeur de l'intégrale doit se réduire à zéro; car lorsque l'événement A a une probabilité nulle, tout événement composé qui devrait renfermer A a aussi une probabilité nulle : il n'y a donc pas de constante arbitraire à ajouter.

Faisant la somme des différents termes de la série, on aura

$$(\mathrm{A})\ldots \int x^m\, dx\, (1-x)^n = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)\, x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)} \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\; 2.1.\, x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+1)}.$$

Lorsque l'on prend l'intégrale définie depuis $x = o$ jusqu'à $x = 1$, tous les termes de la série disparaissent, sauf le dernier, et il reste

$$(\mathrm{A}')\ldots \int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.\,2.\,1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)}.$$

Dans le cas où m et n sont des nombres considérables, on pourra appliquer à cette expression la formule de Stirling (voyez Lacroix, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. 3 ; et Legendre, *Exercices de calcul intégral*, 3e partie), et elle deviendra

$$(A'') \dots \quad \frac{m^m\, n^n}{(m+n)^{m+n+1}} \sqrt{\frac{2\pi\, m\, n}{m+n}} \,.$$

Si l'on fait $n = o$, c'est-à-dire si l'on ne suppose qu'une seule espèce d'événements, la série (A) se réduit à son premier terme qui devient

$$(B) \dots \quad \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

dans le cas de l'intégrale indéfinie, et

$$(B') \dots \quad \frac{1}{m+1}$$

dans le cas de l'intégrale définie, prise entre les limites o et 1. — C'est d'ailleurs ce qu'on trouverait directement en intégrant l'expression $x^m\, dx$.

§ **61.** — Il nous est facile maintenant de nous élever à la probabilité des événements futurs. En effet, la *probabilité* d'une *hypothèse* quelconque, x, est (§ 59)

$$\frac{x^m\, dx\, (1-x)^n}{\int_o^1 x^m\, dx\, (1-x)^n} :$$

en la multipliant par la *probabilité*, x, de l'*événement* correspondant, A, on aura

$$\frac{x^{m+1}\, dx\, (1-x)^n}{\int_o^1 x^m\, dx\, (1-x)^n} ;$$

et la *somme* des produits semblables, prise pour *toutes* les hypothèses possibles, exprimera (§ 58) la probabilité d'un nouvel événement A. Or, cette *somme* s'obtiendra ici en *intégrant* le numérateur depuis $x = o$ jusqu'à $x = 1$, et en affectant le résultat du dénominateur commun. On a ainsi, d'après (A')

$$\frac{\int_0^1 x^{m+1}\,dx(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.\,2.\,1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+n+2)}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.\,2.\,1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}}=\frac{m+1}{m+n+2}\ldots(\mathrm{C})$$

Si l'on demandait la probabilité de l'arrivée d'un nouvel événement B, la probabilité particulière de cet événement étant $(1-x)$, on aurait l'expression

$$\frac{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^{n+1}}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}=\frac{\dfrac{(n+1)(n)(n-1)\ldots 3.\,2.\,1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+2)}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.\,2.\,1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}}=\frac{n+1}{m+n+2}\ldots(\mathrm{C}')$$

La somme de ces deux probabilités est égale à l'unité, et leurs expressions analytiques montrent qu'il doit en être ainsi ; car en ajoutant ces expressions, on a :

$$\frac{\int_0^1 x^{m+1}\,dx\,(1-x)^n+\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^{n+1}}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n\,[x+1-x]}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}=1.$$

§ 62. — Si l'événement A avait été observé m fois *de suite*, on aurait $n=o$, et la probabilité qu'il se reproduise encore une fois serait exprimée par

$$\frac{m+1}{m+2}\quad\ldots.\ (\mathrm{C}'')\ ;$$

Si donc un dé dont on ignore la nature a amené quatre fois de suite le même point, on a la probabilité $\frac{5}{6}$ d'amener encore le même point au cinquième coup.

Cela revient à dire que, si nous représentons le nombre de fois que l'événement est arrivé, par un nombre égal de boules blanches que nous jetons dans une urne, en y ajoutant encore une boule blanche et une boule noire, la probabilité de la reproduction de l'événement sera égale à celle du tirage d'une boule blanche.

Chaque reproduction de l'événement observé équivaut, par conséquent, à la mise d'une nouvelle boule blanche dans une urne, où se trouvaient déjà, avant le commencement des épreuves, une boule blanche et une boule noire.

Au lieu des probabilités $\frac{m+1}{m+n+2}$, $\frac{n+1}{m+n+2}$, on aurait, suivant l'usage commun, les expressions $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$, formées en divisant le nombre de fois que l'événement a paru, par le nombre total des événements observés. Elles ne s'accordent avec les précédentes que lorsque $m = n$, auquel cas les quatre fractions ci-dessus deviennent $\frac{1}{2}$: dans toute autre circonstance, la première évaluation diffère de la seconde. Si, par exemple, $m = 3$, et $n = 2$, l'une donne $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{7}$, l'autre $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que l'évaluation rigoureuse s'approche sans cesse de l'autre, à mesure que $(m+n)$ augmente. Cela se voit en divisant par $(m+n)$ les deux termes des premières probabilités; elles prennent alors les formes

$$\frac{\frac{m}{m+n}+\frac{1}{m+n}}{1+\frac{2}{m+n}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{n}{m+n}+\frac{1}{m+n}}{1+\frac{2}{m+n}}$$

qui ne deviennent $\frac{m}{m+n}$ et $\frac{n}{m+n}$ qu'en supposant infini le nombre des événements observés.

La différence

$$\frac{m}{m+n}-\frac{m+1}{m+n+2}=\frac{m-n}{(m+n)(m+n+2)}$$

étant positive lorsque $m > n$, montre que celui des deux événements qui est arrivé le plus souvent augmente sans cesse de probabilité, lorsque les nombres m et n conservent la même subordination dans leurs accroissements. Le contraire a lieu quand $m < n$. Ces changements sont remarquables, parce qu'ils sont produits par la seule répétition des faits; ainsi la théorie des probabilités *à posteriori* s'accorde bien avec celle de Bernoulli sur les épreuves successives, puisqu'il résulte de l'une comme de l'autre que le rapport du nombre des événements A et B, au nombre total des événements observés, a pour limite leur probabilité simple.

§ **63.** — La probabilité que, sur un nombre p de renouvellements du même hasard, il arrivera un nombre $(p - q)$ d'événements A et un nombre q d'événements B, se déduit sans difficulté des principes exposés précédemment. Dans l'hypothèse que l'événement simple A ait x pour probabilité, la probabilité de l'*événement* composé en question est (§ 23)

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-q+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ \ q}\, x^{p-q}(1-x)^q :$$

en la multipliant par la probabilité de l'*hypothèse*, ou par

$$\frac{x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n},$$

et faisant la somme des produits dans *toutes* les hypothèses de valeur de x, on aura (§ 58) pour la probabilité que l'on cherche

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-q+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots.\ \ q}\;\frac{\int_0^1 x^{m+p-q}\,dx\,(1-x)^{n+q}}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}\ \ldots.\ \text{(D)}$$

Si l'on prend, par exemple, $p = 3$, $q = 1$, l'expression précédente donnera la probabilité de l'événement composé de 2 fois A et une fois B : ce sera, d'après (A′)

$$3\,\frac{(m+1)(m+2)(n+1)}{(m+n+2)(m+n+3)(m+n+4)}.$$

En divisant par $(m + n)$ chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur de cette fraction, on reconnaîtra aisément qu'elle tend sans cesse vers $\frac{3m^2 n}{(m+n)^3}$, probabilité composée qui résulterait des probabilités simples $\frac{m}{m+n}$ et $\frac{n}{m+n}$.

§ 64. — La formule (D) permet de réunir dans une seule expression toutes les probabilités des événements composés auxquels peut donner lieu un nombre p de renouvellements du même hasard. Il suffit pour cela de faire successivement $q = o, = 1, = 2, = 3$, etc. : on formera la suite .... (D′)

$$\frac{1}{\int_o^1 x^m dx(1-x)^n}\left\{\begin{array}{l}\int_o^1 x^{m+p} dx(1-x)^n + \frac{p}{1}\int_o^1 x^{m+p-1} dx(1-x)^{n+1} \\ + \frac{p(p-1)}{1.2}\int_o^1 x^{m+p-2} dx(1-x)^{n+2} + \ldots.. \\ + \int_o^1 x^m dx(1-x)^{n+p}\end{array}\right\}$$

qui tient, dans les probabilités *à posteriori*, la place que le développement du binôme occupe dans la détermination *à priori* des probabilités pour les épreuves réitérées. La somme des termes, depuis le premier jusqu'au terme général

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-q+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ q}\ \frac{\int_o^1 x^{m+p-q} dx(1-x)^{n+q}}{\int_o^1 x^m dx(1-x)^n}$$

inclusivement donnera la probabilité qu'il n'arrivera pas moins de $(p-q)$ événements A et pas plus de q événements B.

Dans le cas particulier où l'on a simultanément $q = o$, $n = o$, il ne faut prendre que le premier terme de la série (D′), qui se réduit à

$$\frac{\int_o^1 x^{m+p} dx}{\int_o^1 x^m dx} = \frac{\frac{1}{m+p+1}}{\frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m+p+1} \ldots. \qquad (C''')$$

C'est la probabilité qu'on aura p fois *de suite* l'événement A lorsqu'il aura été observé m fois sans interruption. Nous pouvons donc poser la règle suivante, dont la formule (C″) n'est qu'un cas particulier :

« La probabilité qu'un événement, observé un nombre quelconque « de fois de suite, se reproduira encore *plusieurs fois*, est une « fraction dont le numérateur est le nombre d'observations déjà « faites, augmenté d'une unité; et dont le dénominateur surpasse le « numérateur du nombre de fois que l'événement doit se repro- « duire. »

Si donc un dé a amené quatre fois de suite le même point, on a la probabilité $\frac{5}{9}$ d'amener encore le même point quatre fois de suite. En général, lorsque $m = p$, la probabilité en question devient sensiblement $\frac{1}{2}$, pour peu que m soit considérable.

En usant de la comparaison déjà employée au § 62, nous dirons que les choses se passent comme si chaque reproduction de l'événement observé répondait à la mise d'une boule blanche dans une urne où se trouvaient déjà, avant le commencement des épreuves, une boule blanche et autant de boules noires que l'événement observé est supposé devoir encore se reproduire de fois.

Si, dans la formule (C‴), mise sous la forme

$$P = \frac{m+1}{m+p+1},$$

on regarde les quantités P, m et p comme trois variables, on aura l'équation d'une surface réglée, sur laquelle une ligne droite peut s'appliquer dans toute son étendue, parallèlement au plan des coordonnées m et p. En faisant en effet P constant, il ne reste plus que l'équation d'une ligne droite, qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$m = \frac{P.p}{1-P} - 1,$$

d'où

$$\frac{m+1}{p} = \text{constante}.$$

Cette relation très-simple étant remplie, on aura toujours la même probabilité que l'événement arrivé m fois de suite se reproduise encore p fois.

§ **65.** — Les probabilités *à posteriori* ne sont en réalité qu'une sorte de ***probabilités moyennes***. En effet, l'expression $kx^m\ (1-x)^n$ étant la probabilité d'amener m événements A et n événements B, lorsque leurs probabilités simples sont x et $(1-x)$, la ***somme*** des valeurs de cette expression calculées dans toutes les hypothèses possibles, ou $k\int_0^1 x^m\ (1-x)^n$, divisée par leur *nombre*, donnera la valeur *moyenne* de la probabilité en question; mais l'unité ayant été divisée en parties égales à dx, le nombre de ces parties est $\frac{1}{dx}$: la moyenne est donc

$$\frac{k\int_0^1 x^m\ (1-x)^n}{\frac{1}{dx}} = k\int_0^1 x^m\, dx\, (1-x)^n\ .$$

Ainsi (§ 59) « la probabilité de l'*hypothèse* qui consiste à attribuer « à l'événement A la probabilité x, est égale au rapport de la proba- « bilité ***particulière*** de cet ***événement*** à sa probabilité ***moyenne***, prise « dans toutes les hypothèses possibles. »

En se plaçant au même point de vue, on s'explique facilement tout ce qui a été démontré plus haut. S'agit-il, par exemple, de la probabilité d'obtenir un nouvel événement A? la probabilité ***simple*** de celui-ci étant représentée par x, celle du nouvel événement ***composé*** sera

$$k\,x^m\ (1-x)^n \times x = k\,x^{m+1}\ (1-x)^n\ ,$$

expression dont la valeur moyenne, prise comme ci-dessus, est

$$k\int_0^1 x^{m+1}\, dx\, (1-x)^n\ ;$$

mais cette valeur moyenne, considérée comme la probabilité du nouvel événement composé, doit aussi se former en multipliant celle de l'événement composé qui a eu lieu, par celle P, d'obtenir un événement A de plus. Donc

$$k\int_0^1 x^{m+1}\,dx\,(1-x)^n = \mathrm{P}\times k\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n\,,$$

d'où

$$\mathrm{P}=\frac{\int_0^1 x^{m+1}\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}\,,$$

comme on l'a trouvé (§ 61).

§ **66.** — Ainsi que nous l'avons fait remarquer à la fin du § 59, la probabilité de l'hypothèse correspondante à x, ou

$$\frac{x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}$$

est une quantité infiniment petite. Aussi n'est-ce point la probabilité *absolue* de l'une de ces hypothèses qu'il nous importe de connaître, mais la probabilité *relative;* ce qui est très-facile, puisque en désignant par x' une autre hypothèse, on aura pour la probabilité de la première par rapport à la seconde (§ 16)

$$\frac{x^m\,dx\,(1-x)^n}{x^m\,dx\,(1-x)^n+x'^m\,dx\,(1-x')^n}=\frac{x^m\,(1-x)^n}{x^m(1-x)^n+x'^m\,(1-x')^n};$$

quantité finie, dont la grandeur dépend de celle des rapports x et x'. En la mettant sous la forme

$$\frac{1}{1+\dfrac{x'^m\,(1-x')^n}{x^m\,(1-x)^n}}$$

on verra qu'elle approche d'autant plus de l'unité que $x^m\,(1-x)^n$ surpasse davantage $x'^m\,(1-x')^n$. Ce dernier terme peut être rendu aussi petit qu'on voudra; quant au premier, son maximum se trouve par une simple différentiation, en posant

$$o = mx^{m-1}\,(1-x)^n - nx^m\,(1-x)^{n-1}\,,$$

d'où

$$x = \frac{m}{m+n},$$

et par conséquent

$$1 - x = \frac{n}{m+n}.$$

Ce résultat remarquable nous apprend que « la plus probable de « toutes les hypothèses est celle où les probabilités simples des événe- « ments A et B sont égales au rapport du nombre de fois que chacun « des événements est arrivé, avec leur nombre total. » Il rentre d'ailleurs dans la proposition du § 28, quoiqu'il soit appuyé sur des considérations beaucoup plus générales.

§ 67. — Cette même hypothèse, outre qu'elle jouit de la plus grande probabilité relative, peut encore être regardée « comme s'ap- « prochant sans cesse de la véritable probabilité, à mesure que le « nombre des observations devient plus considérable, » c'est-à-dire qu'en assignant à ce nombre une augmentation convenable, on peut obtenir une probabilité aussi voisine de l'unité qu'on voudra, que la véritable valeur de x sera comprise entre

$$\frac{m}{m+n} - l = a \text{, et } \frac{m}{m+n} + l = b$$

la quantité l étant aussi petite qu'on voudra.

En effet, l'expression de cette probabilité se composant de la somme des probabilités correspondantes aux diverses valeurs que l'on peut assigner à x, entre les limites a et b, sera évidemment

$$\frac{\int_a^b x^m dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m dx\,(1-x)^n} = \mathrm{P};$$

si nous faisons $\frac{m}{m+n} = p$; $\frac{n}{m+n} = 1 - p = q$; d'où $m = (m+n)\,p = r\,p$; $n = (m+n)\,q = r\,q$, la formule précédente devient

$$\frac{\int_a^b x^{rp}\,dx\,(1-x)^{rq}}{\int_o^1 x^{rp}\,dx\,(1-x)^{rq}} = \mathrm{P}.$$

N'oublions pas qu'elle exprime la probabilité que, sur le nombre r d'épreuves, le rapport, p', du nombre d'événements A au nombre total des événements observés sera compris entre les limites a et b.

Faisons

$$a = p - l$$
$$b = p + l.$$

Il s'ensuit que, dans l'intégrale définie qui est au numérateur, la valeur de x pourra être représentée par $(p+z)$, la variable z ayant pour limites $\pm\, l$. Quant à la valeur de $(1-x)$, elle deviendra $1 - p - z = q - z$. Nous aurons donc,

$$\int_a^b x^{rp}\,dx\,(1-x)^{rq} = \int_a^b dz\,(p+z)^{rp}\,(q-z)^{rq}$$

$$= p^{rp}\,q^{rq}\int_{p-l}^{p+l} dz\left(1+\frac{z}{p}\right)^{rp}\left(1-\frac{z}{q}\right)^{rq}.$$

Or, nous savons que

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^{rp} = e^{rp\log\left(1+\frac{z}{p}\right)}.$$

et que

$$\log\left(1+\frac{z}{p}\right) = \frac{z}{p} - \frac{z^2}{2p^2} + \frac{z^3}{3p^3} \ldots\text{ etc.}$$

Comme z est généralement une fraction très-petite, et que $\frac{z^3}{3p^3} = \frac{r^3\,z^3}{3\,m^3}$, on peut, lorsque m est considérable, négliger le terme en z^3 et les suivants. On aura donc :

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^{rp} = e^{rz - \frac{rz^2}{2p}}$$

on aurait de même

$$\left(1 - \frac{z}{q}\right)^{rq} = e^{-rz - \frac{rz^2}{2q}}.$$

L'intégrale définie en question sera donc réduite à

$$\int e^{-\frac{rz^2}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} dz = \int e^{-\frac{rz^2}{2pq}} dz\,;$$

faisant

$$\frac{rz^2}{2pq} = t^2,$$

d'où

$$z = t\sqrt{\frac{2pq}{r}},$$

elle se change en

$$\sqrt{\frac{2pq}{r}} \int e^{-t^2} dt;$$

et les limites de z étant $\pm\, l$, celles de t seront

$$\pm\, l\sqrt{\frac{r}{2p(1-p)}} \quad \ldots. \text{(E)}$$

Mais comme la fonction e^{-t^2} reste la même, quel que soit le signe de t, il suffira de prendre l'intégrale précédente depuis $t = o$ jusqu'à $t = l\sqrt{\frac{r}{2\,p\,(1-p)}}$ et de doubler le résultat. Par ce moyen on aura

$$\int_a^b x^{rp}\, dx\, (1-x)^{rq} = p^{rp}\, q^{rq}.\, 2\sqrt{\frac{2pq}{r}} \int e^{-t^2} dt\,; \quad \ldots. \text{(E')}$$

Reste à diviser ce résultat par

$$\int_0^1 x^{rp}\, dx\, (1-x)^{rq},$$

dont la valeur (§ 60, A″) peut se ramener à

$$\frac{p^{rp}\, q^{rq}}{r} \sqrt{2\pi\, r\, p\, q}\,;$$

simplifiant, il reste enfin

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt,$$

comme nous l'avons déjà trouvé (§ 39).

§ 68. — Sans aller plus loin que la formule (E), nous aurions pu tirer immédiatement les importantes conclusions qui suivent.

1° Quelque petit que soit le nombre l, on peut toujours (même dans le cas le plus défavorable, celui du maximum du dénominateur, qui correspond à $p = 1 - p$) prendre r assez grand pour que t surpasse tout nombre donné. Or, puisque la probabilité P ne dépend que de la valeur de t, divisée par $\int_0^1 x^m\,dx\,(1 - x)^n$ (qui est toujours une *fraction*, comme on le voit par (A′), § 60), il s'ensuit qu'on peut, en multipliant les épreuves, faire que cette probabilité s'approche indéfiniment de la certitude.

2° Si les nombres l, r et p varient de manière à laisser le nombre t constant, la probabilité P restera aussi constante. De plus, on voit (E) que t varie en raison directe de l, ou de la *limite de l'écart* entre les rapports p et p' ; en raison directe de la *racine carrée* du nombre r des épreuves, et en raison inverse de la racine carrée du produit $p\,(1 - p)$ de la probabilité de A par la probabilité contraire.

3° Après avoir assigné aux nombres l et r de certaines valeurs, et trouvé la probabilité P correspondante, donnons successivement à l des valeurs qui soient la moitié, le tiers, le quart, le dixième de sa valeur primitive : il faudra embrasser un nombre d'épreuves 4 fois, 9 fois, 16 fois, 100 fois plus grand, pour avoir la même probabilité que l'écart fortuit $\pm\,(p - p')$ tombera entre ces nouvelles limites. En d'autres termes, pour obtenir la même probabilité que les anomalies du hasard, en ce qui concerne la détermination du rapport p', seront resserrées dans des espaces de plus en plus petits, il faut que le nombre des épreuves croisse en raison inverse des carrés des espaces.

4° Le produit $p\,(1 - p)$ est très-petit pour des valeurs de p très-peu différentes de zéro ou de l'unité : il atteint sa plus grande valeur quand $p = \frac{1}{2}$. Donc, *plus* il y a de différence entre la probabilité de A et celle de l'événement contraire, *moins* on aura besoin de multiplier les épreuves pour obtenir la même probabilité, P, que l'écart fortuit $\pm\,(p - p')$ tombera entre les mêmes limites; ou bien, *plus* les limites qui correspondent à cette probabilité seront resserrées, le nombre des épreuves restant le même.

Il est inutile de faire remarquer l'analogie qui existe entre la proposition du § 52 et celle du § 67 : cette dernière est seulement plus générale, et, dans l'ordre des probabilités *à posteriori*, elle appuie le théorème fondamental que Jacques Bernoulli n'avait démontré que dans l'ordre des probabilités *à priori*.

§ **69.** — La probabilité d'un ensemble d'hypothèses, comprises entre les limites $x = a$ et $x = b$, est exprimée, avons-nous vu (§ 67), par

$$\frac{\int_a^b x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}.$$

La probabilité que la valeur de x est comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$ est donc

$$P = \frac{\int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n} = \frac{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n - \int_0^{\frac{1}{2}} x^m dx(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n}$$

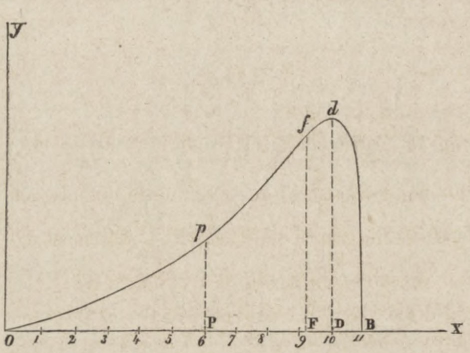
$$= 1 - \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n} \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

Quand on a observé une supériorité marquée dans le nombre de fois qu'un événement se montre, sur le nombre de fois où se montre l'événement contraire, on est naturellement porté à croire à l'existence d'une *cause* qui facilite l'arrivée du premier événement, de préférence à celle du second; ou, en d'autres termes, on soupçonne que la probabilité du premier événement surpasse $\frac{1}{2}$. Mais ce simple aperçu, qui se fortifie à mesure que les événements se reproduisent dans le même ordre de fréquence, est susceptible d'être apprécié numériquement; et la probabilité de l'existence d'une cause qui favorise l'arrivée du premier événement, n'est autre chose que la valeur de P donnée par la formule précédente.

Supposons qu'un événement A ait été observé 10 fois et l'événement contraire B, une fois : la probabilité de cet événement composé aura toujours une expression de la forme (§ 8)

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots n}\, x^m (1-x)^n,$$

dans laquelle il faut faire ici $m = 10$, $n = 1$. — La courbe de probabilité, pour les diverses valeurs de x, est représentée par Op d B;elle passe par l'origine O, et par un second point B dont l'abscisse O B $= 1$; l'ordonnée maximum, D d, a pour abscisse O D $= \frac{m}{m+n} = \frac{10}{11}$.



La probabilité d'obtenir un événement A de plus sera $\frac{11}{13} = \frac{m+1}{m+n+2} =$ O F, quantité qui sera moindre que O D tant que l'on suppose $m > n$ (§ 62).

La probabilité du système d'hypothèses comprises entre $x =$ O D et $x =$ O F est représentée par le rapport de la surface F D d f à la surface totale O B d f O.

Enfin la probabilité de l'existence d'une cause qui favorise l'arrivée de l'événement A est représentée par le rapport de la surface Pp f d BP à la surface totale; ou bien, cette probabilité diffère de l'unité d'une fraction représentée par le rapport de la surface O P p O à la surface totale.

§ **70**. — Lorsqu'il n'est arrivé que des événements d'une seule espèce, des événements A par exemple, on doit faire $n = o$ dans la formule (F) : alors on a

$$P = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m \, dx}{\int_0^1 x^m \, dx};$$

or

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m \, dx = \frac{1}{m+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{m+1};$$

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1};$$

on en déduit

$$P = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}} \dots \qquad (F')$$

C'est la probabilité que l'événement qui a été observé m fois sans interruption a une probabilité propre supérieure à $\frac{1}{2}$, autrement dit, qu'il existe une *cause* constante qui facilite sa reproduction.

Par exemple, les 20 planètes qui constituaient notre système à la fin de 1850, ont toutes un mouvement *direct*. Si l'on regarde le mouvement de ces corps comme la répétition d'un même fait, la répétition de ce fait indique évidemment une *cause*, qui a déterminé la direction d'occident en orient, de préférence à la direction contraire. La probabilité de l'existence de cette cause est donnée par la formule (F')

$$P = \frac{2^{21} - 1}{2^{21}} = \frac{2\,097\,151}{2\,097\,152},$$

valeur qui se confond pour ainsi dire avec l'unité ou la certitude.

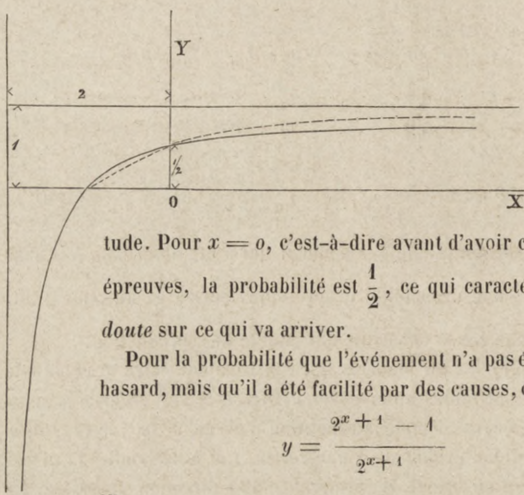
Le relevé des documents statistiques, dont nous parlerons bientôt, présenterait une probabilité bien plus forte encore pour l'existence d'une cause naturelle, qui donne aux naissances masculines la prépondérance sur les naissances féminines.

§ **71**. — En général, la probabilité qu'il existe une cause favorisant la reproduction d'un événement observé plusieurs fois de suite, croît beaucoup plus rapidement que la probabilité du prochain retour de cet événement.

En effet cette dernière probabilité, quand l'événement a été observé x fois de suite, est (§ 62)

$$y = \frac{x+1}{x+2}.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole, dont la forme est représentée en traits pleins dans la figure ci-jointe. Pour $x = \infty$ on a $y = 1$; c'est-à-dire qu'après un nombre infini d'observations, la probabilité se change en certitude. Pour $x = o$, c'est-à-dire avant d'avoir commencé les épreuves, la probabilité est $\frac{1}{2}$, ce qui caractérise l'état de *doute* sur ce qui va arriver.



Pour la probabilité que l'événement n'a pas été produit au hasard, mais qu'il a été facilité par des causes, on aurait (F')

$$y = \frac{2^{x+1} - 1}{2^{x+1}}$$

ou

$$y = 1 - 2^{-(x+1)}:$$

c'est l'équation d'une logarithmique, qui est ponctuée dans la figure précédente. Pour $x = \infty$ on a $y = 1$. Ainsi, après la reproduction indéfinie de l'événement, il y a certitude que cette reproduction n'est pas fortuite. Pour $x = o$ on a $y = \frac{1}{2}$, ce qui caractérise encore le doute où l'on se trouve, avant la première épreuve, sur l'existence ou la non-existence d'une cause favorable à la reproduction de l'événement.

Les deux probabilités convergent donc vers la certitude, à mesure que l'événement se répète, mais d'une manière inégalement rapide : la dernière probabilité croît le plus rapidement.

En effet, pour une même valeur de y, on a

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{2^{x'+1}-1}{2^{x'+1}},$$

d'où

$$2^{x'+1} = x+2\,;\ \text{ou bien}\ x = 2\,(2^{x'}-1)\,;$$

ce qui démontre que les x' positifs sont toujours plus petits que les x correspondants. L'équation entre ces deux variables est encore celle d'une logarithmique. Le calcul montre que les probabilités sont égales,

Pour l'existence d'une cause	Pour le retour de l'événement
après 1 événement.	après 2 événements.
» 2 »	» 6 »
» 3 »	» 14 »
» 4 »	» 30 »
» 5 »	» 62 »

CHAPITRE SIXIÈME.

Étude des causes. — Moyennes et limites. — Applications.

—

§ **72.** — L'homme, avons-nous dit déjà, ne peut jamais se flatter de connaître les *causes* qui concourent à la formation d'un phénomène naturel ou d'un événement quelconque. Tout ce qu'il peut faire, c'est de rechercher et de découvrir, au milieu de l'infinité de ces causes, celles qui sont les plus influentes; d'apprécier quelles sont celles dont il doit tenir compte, quelles sont celles qu'il peut négliger. Ce travail exige un jugement droit, un tact délicat et une indépendance complète de toute idée préconçue. Il ne faut pas oublier toutefois qu'on l'aura singulièrement facilité, lorsque les résultats à discuter auront été recueillis avec ordre, groupés avec méthode et classés avec discernement.

Nous divisons les causes en trois catégories, savoir :

Les causes *constantes*,

Les causes *variables*,

Les causes *accidentelles* *.

Les causes *constantes* sont celles qui agissent d'une manière continue, avec la même intensité et dans le même sens.

Les causes *variables* agissent d'une manière continue, avec des énergies et des tendances qui changent, soit d'après des lois déterminées, soit sans aucune loi apparente. Parmi les causes variables, il importe surtout de remarquer celles qui ont un caractère de *périodicité*.

Les causes *accidentelles* ne se manifestent que fortuitement et agissent indifféremment dans l'un et l'autre sens.

Si l'on apprécie les causes sous le rapport mathématique, la cause constante a pour elle un certain nombre *déterminé* de chances, une probabilité fixe.

* Nous empruntons cette division, ainsi qu'une grande partie des développements suivants, à l'excellent ouvrage de M. Quetelet (lettres sur la théorie des probabilités, etc.). — Les auteurs allemands n'admettent en général, dans les sciences d'observation, que deux espèces de causes : 1° Constantes ou régulières (constante oder regelmässige Ursachen); 2° fortuites ou irrégulières (zufällige oder unregelmässige).

La cause variable a pour elle un nombre *variable* de chances, et par suite une probabilité qui peut osciller dans des limites plus ou moins larges.

La cause accidentelle n'a pas, à proprement parler, de chances en sa faveur; mais elle influe sur l'ordre de succession des événements.

Pour rendre plus claire la distinction que nous venons d'établir entre les trois espèces de causes, supposons qu'il faille essayer une bouche à feu. Si l'axe de l'âme n'est pas situé dans le plan vertical de la ligne de mire, le projectile déviera toujours du même côté, sous l'influence de cette cause *constante*. En outre, la résistance que l'air oppose à la rotation du projectile (rotation qui peut indifféremment s'opérer dans tous les sens) sera une cause *variable* de déviation. Enfin le coup d'œil du pointeur n'est pas infaillible; il peut viser plus ou moins exactement : ce sera une cause *accidentelle* d'erreur qui pourra renfermer une partie constante, si, comme il arrive souvent, l'œil du pointeur a une collimation individuelle. D'autres causes accidentelles, comme une erreur dans le poids de la charge, un coup de vent, etc., peuvent encore influer sur la marche du projectile.

Les causes variables sont quelquefois très-difficiles à distinguer des causes accidentelles. On conçoit du reste que ces dernières, dont l'action est indifféremment tantôt positive, tantôt négative, tantôt nulle, doivent à la longue se compenser et s'entre-détruire : il y a plus, les erreurs qu'elles produisent viennent se grouper autour du résultat *moyen* avec une admirable régularité; et la courbe de possibilité de ces erreurs est d'autant plus resserrée que les observations ou les expériences ont plus de précision.

C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, le point d'impacte *moyen*, résultant d'un grand nombre de coups, sera indépendant de ces causes; et les écarts observés se grouperont régulièrement suivant leur ordre de grandeur; c'est-à-dire que l'on pourra calculer le nombre des écarts, qui doivent être inférieurs à 1, 2, 3 etc., décimètres.

§ 72. — Nous venons de parler de résultat *moyen* : c'est ici le lieu de développer cette importante considération de la valeur moyenne.

L'idée de la moyenne se présente naturellement à notre esprit chaque fois que nous voulons restreindre le vague d'une expression collective, lui donner de l'individualité. Ainsi je voudrais me figurer la hauteur des maisons qui se trouvent dans une rue déterminée : je commencerai par mesurer la hauteur de chacune d'elles; je ferai la somme de toutes les hauteurs mesurées et je la diviserai par le nombre des maisons. Le quotient pourra fort bien ne représenter la hauteur d'aucune d'elles en particulier; mais il aidera au moins à faire connaître leur hauteur en général; et les *limites* entre lesquelles se trouveront renfermées toutes les mesures obtenues dépendront de la diversité des maisons: elles pourront donc donner une idée de l'aspect plus ou moins régulier que présente la rue.

Lorsque l'on fait une série d'observations ou d'expériences, susceptibles d'une égale précision, c'est encore la moyenne des résultats particuliers que l'on adoptera comme résultat définitif; et cette manière d'agir est tellement conforme à notre nature, que l'on peut regarder comme un axiome la proposition suivante, sur laquelle nous reviendrons du reste dans la troisième section : « La moyenne des résultats « immédiats obtenus en observant plusieurs fois une même quantité « donne la valeur la plus probable de cette quantité. »

Pour obtenir cette valeur moyenne, il faut évidemment commencer par réunir, par fondre en un seul tout, les différents résultats inégaux que l'on a obtenus, « ce que l'on fait en les additionnant. » Puis on partagera ce tout en autant de parties *égales* qu'il y avait auparavant de résultats inégaux ; ce qui revient à « diviser la somme obtenue, « par le nombre des observations. »

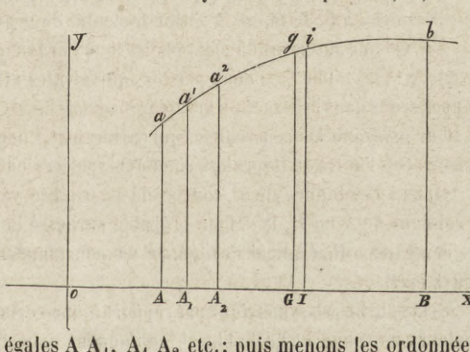
Cette marche, étant applicable quelle que soit la différence qui existe entre les résultats immédiats des observations, ne changera pas lorsque deux ou plusieurs de ces résultats seront égaux entre eux.

Dans le second exemple que nous avons cité, la grandeur cherchée existe réellement : si les diverses observations nous ont donné des résultats différents, la cause en est à l'inexactitude de nos moyens d'investigation, inexactitude qui est d'autant plus grande que nos mesures oscillent entre des limites plus larges. Dans l'impossibilité où nous sommes d'assigner au résultat sa valeur rigoureuse, nous admettons la *valeur moyenne*, comme étant la plus vraisemblable.

Il n'en est pas de même dans le premier exemple : là, l'emploi de la *moyenne arithmétique* n'a eu pour but que de donner, par un nombre abstrait, une idée de la grandeur de plusieurs quantités essentiellement inégales, mais homogènes entre elles. Cette distinction est tellement importante, que nous avons employé des mots différents pour mieux l'établir. On ne confondra donc pas la *valeur moyenne* proprement dite, avec la *moyenne arithmétique*. Ce dernier mot fait sentir qu'il s'agit d'une simple opération de *calcul* entre des quantités qui n'ont entre elles aucune relation essentielle. De plus (et ce point est capital) les nombres qui concourent à former la moyenne, dans l'un et l'autre cas, se présentent de manières bien différentes : dans la formation de la moyenne arithmétique, ils ne sont liés entre eux par aucune loi de continuité ; dans celle de la moyenne, au contraire, les nombres se groupent des deux côtés du terme moyen avec une régularité telle, qu'on pourrait assigner d'avance leurs valeurs, si l'on connaissait celles de leurs limites extrêmes. Nous reviendrons sur ce dernier point dans la troisième section.

Toutefois, la différence qui existe entre ces deux espèces de moyennes n'est pas toujours aussi nettement tranchée que dans les deux exemples que nous avons pris plus haut. Ainsi, lorsque je cherche la taille moyenne des soldats d'un régiment, il semble, au premier aperçu, que je ne doive considérer que la moyenne *arithmétique*. Mais l'expérience prouve que, lorsqu'on mesure un grand nombre d'individus, dix mille par exemple, les nombres se groupent symétriquement des deux côtés de la moyenne, dans le même ordre que si l'on avait mesuré un même individu dix mille fois de suite. La grandeur que l'on obtient est donc une moyenne proprement dite ; et ce résultat remarquable montre que la nature, dans ses créations, cherche à se rapprocher d'un *type*, qui est unique pour une même race d'hommes.

§ 71. — Ce que nous venons de dire suppose que toutes les valeurs qui concourent à former la moyenne d'une quantité, x, sont *également* probables. Pour passer au cas le plus général, représentons par $a\,b$ la courbe de possibilité de ces valeurs, et partageons l'intervalle A B des valeurs extrêmes en i parties égales $A\,A_1$, $A_1\,A_2$ etc.; puis menons les ordonnées équidistantes $A_1\,a_1$, $A_2\,a_2$... etc., et appelons S l'aire totale A B $b\,a$;



$s_1, s_2 \ldots$ les aires partielles $A\,A_1\,a_1\,a$, $A_1\,A_2\,a_2\,a_1 \ldots$, etc. Le quotient

$$\frac{s_1 \,.\, OA_1 + s_2 \,.\, OA_2 + \ldots \text{ etc.}}{S}$$

se rapproche de plus en plus, quand on prend le nombre i de plus en plus grand, d'une certaine valeur fixe, M, représentée par une ligne OG, comprise entre O A et O B. Cette valeur, M, est la véritable *moyenne* de toutes les valeurs que peut prendre fortuitement la grandeur x entre les limites O A et O B; chaque valeur particulière étant censée contribuer, en raison de sa probabilité propre, à la formation de la moyenne M. Cette moyenne doit donc coïncider sensiblement avec la moyenne arithmétique des valeurs particulières fournies par l'observation, lorsque le nombre des épreuves est assez considérable pour compenser les anomalies du hasard. Si l'on suppose ce nombre infini, il faut remplacer la sommation par l'intégration, et le quotient précédent devient

$$\frac{\int ydx \,.\, x}{\int ydx}.$$

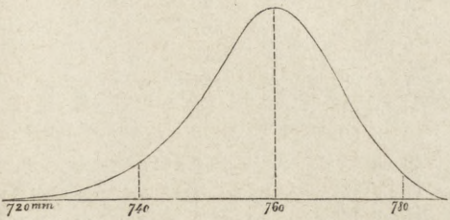
D'après les notions élémentaires de la mécanique, si l'aire A B b a était l'une des faces d'une plaque pesante, d'épaisseur et de densité uniformes, le *centre de gravité* de la plaque se trouverait sur l'ordonnée G g. Si la ligne A B représentait une barre pesante, d'épaisseur uniforme, mais dont la densité, pour chaque tranche, varierait comme l'ordonnée de la courbe a b, le point G serait le centre de gravité de la barre.

Soit O I une abscisse tellement choisie que l'ordonnée correspondante partage l'aire totale S en deux parties équivalentes : O I est ce que nous appellerons dans la 3e section la valeur *probable* de x; Cournot la nomme valeur *médiane*. Deux personnes qui parieraient, l'une que x sera supérieur à O I, l'autre qu'il sera inférieur à O I, parieraient à chances égales.

Quand l'ordonnée de la courbe de possibilité va constamment en croissant de A en B, la valeur probable surpasse la valeur moyenne ; le contraire a lieu quand l'ordonnée va constamment en décroissant de A en B.

Si la courbe est symétrique par rapport à une certaine ordonnée, les valeurs moyenne et probable se confondent avec l'abscisse correspondante, qui est la demi-somme des abscisses extrêmes.

§ 25. — Pour les quantités qui admettent une *moyenne* dans leurs variations accidentelles, il y a souvent une tendance à produire des écarts plus grands d'un côté de la moyenne que de l'autre. La courbe de possibilité de ces écarts perd alors sa forme symétrique, pour prendre une forme analogue à celle de la figure ci-contre.



Nous trouvons un exemple de cette singularité dans l'appréciation de la variation diurne de la température pendant les mois d'hiver : les plus grands écarts tombent *au-dessus* de la moyenne. — Le contraire a lieu pour les variations barométriques : l'abaissement du mercure *au-dessous* de la moyenne va beaucoup au-delà de son élévation au-dessus de ce terme.

Les fluctuations dans le prix des grains et dans la mortalité sont encore des variables qui, dans leurs écarts extraordinaires, pourront *dépasser* la moyenne de beaucoup plus qu'elles ne resteront au-dessous, et l'on se rend facilement compte de cette circonstance.

En général, les diverses valeurs que prend une quantité sujette à varier sous l'influence de causes accidentelles, peuvent être comparées aux résultats qu'on obtient en tirant des boules hors d'une urne qui contiendrait des boules blanches et des boules noires dans un certain rapport. Nous savons déjà que le groupe le plus probable est celui qui renferme les boules blanches et les boules noires dans un rapport égal à celui de leurs probabilités respectives de sortie ; que si ces probabilités sont inégales, les deux limites seront inégalement distantes du terme maximum ou de la moyenne des résultats, et que ces distances sont inversement proportionnelles aux probabilités ; enfin que l'ordonnée maximum partage, dans tous les cas, la surface de la courbe de possibilité en deux aires équivalentes.

Comme exemple numérique, nous dresserons le tableau des variations diurnes des températures observées à Bruxelles dans le mois de janvier. Sur 465 jours d'observations, de 1833 à 1847, ces variations se sont distribuées de la manière suivante.

De 0°	à	1° centigrades	2 variations diurnes	sur 465	=	0,004301
1	à	2	27	»	»	0,05807
2	à	3	69	»	»	0,1484
3	à	4	108	»	»	0,2323
4	à	5	95	»	»	0,2043
5	à	6	67	»	»	0,1441
6	à	7	37	»	»	0,07957
7	à	8	23	»	»	0,04946
8	à	9	20	»	»	0,04301
9	à	10	8	»	»	0,01720
10	à	11	4	»	»	0,008602
11	à	12	3	»	»	0,006452
12	à	13	1	»	»	0,002151
13	à	14	1	»	»	0,002151

De l'inspection de ce tableau, on conclut :

1° Qu'il existe une variation diurne de 4 à 5°, ou plus exactement de 4°,3 (car le terme moyen, qui diviserait la surface de la courbe en deux parties égales, serait à la 4,3e place);

2° Que cette variation subit l'influence de causes inégales;

3° Que les causes qui tendent à faire tomber la variation diurne à son *minimum* ont plus de chances en leur faveur que celles qui tendent à l'élever à son maximum : on trouverait par le développement du binôme que les chances sont dans le rapport de 24 à 76 ou environ de 32 sur 100;

4° Les distances de la moyenne aux deux valeurs limites doivent être réglées dans le même rapport; et en effet, avant le plus grand terme on en trouve 3,3 et après ce terme 9,7; nombres qui sont dans le rapport de 34 à 100.

Si, en hiver, les causes qui tendent à faire descendre la variation diurne de la température vers sa limite inférieure ont plus de probabilité que les causes agissant en sens opposé, il ne faut pas en conclure qu'il en soit de même pour toute l'année : le *contraire* a lieu en été, et l'on passe à peu près graduellement de l'un à l'autre état.

§ **76.** — Il n'est pas de science qui ne fasse un fréquent usage de la considération des moyennes et des limites : l'observateur, le statisticien, le politique y puisent des données précieuses. Prenons comme exemple la question des subsistances, et cherchons la marche qu'a suivie le prix du froment, dans notre pays, de 1817 à 1848.

Pour mettre mieux en évidence la loi qui ressortira de nos chiffres, nous partagerons l'intervalle entre ces deux années en trois périodes, les deux premières de dix ans et la troisième de douze ans : les documents officiels nous permettront alors de dresser le tableau suivant.

PÉRIODE.	MOYENNE DES PRIX.	PRIX MAXIMUM.	PRIX MINIMUM.
1817 à 1826	fr. 17,76	fr. 35,38 en 1817	fr. 11,09 en 1824
1827 à 1836	18,16	23,58 en 1829	13,19 en 1834
1837 à 1848	20,56	25,20 en 1847	16,31 en 1837

Un simple coup d'œil jeté sur ce tableau nous dévoile plusieurs faits importants.

1° Le prix *moyen* du froment a progressivement augmenté de 1817 à 1848.

2° Les limites entre lesquelles ce prix a varié se sont successivement resserrées : pour la première période décennale, les prix maximum et minimum diffèrent de 24^{fr},29; pour la seconde, de 10^{fr},39; et pour la troisième période, de 8^{fr},89.

Or, ces deux faits sont une conséquence naturelle de notre ordre social. D'abord, l'argent perd graduellement de sa valeur, quand on le rapporte à des objets de première nécessité; en second lieu, à mesure que la civilisation progresse, que les institutions s'améliorent, que le calme politique s'affermit, les éléments sociaux sujets à varier oscillent entre des limites plus étroites, et les grands fléaux deviennent de plus en plus rares.

On s'expliquera facilement pourquoi les grands écarts au-*dessus* du prix moyen sont plus fréquents que les grands écarts au-*dessous*. On comprendra également que ces derniers auraient des conséquences aussi fâcheuses que les premiers; seulement le mal serait déplacé et atteindrait les producteurs au lieu de frapper les consommateurs.

Nous ne pousserons pas plus loin la discussion de cet exemple : le peu de mots qui précèdent suffiront pour faire sentir comment on doit procéder dans des cas analogues.

§ **77**. — Les causes accidentelles, agissant indifféremment dans tous les sens, doivent à la longue laisser en évidence l'effet des causes constantes : c'est ce que montre l'exemple suivant.

On sait depuis longtemps qu'il existe une cause constante, qui fait dominer les naissances masculines sur les naissances féminines ; mais des causes accidentelles font varier la valeur de cette prédominance. Si, pour étudier ce fait, on dresse un relevé des naissances masculines et féminines en Belgique, on pourra former le tableau ci-dessous.

ANNÉES.	POUR LES VILLES. SUR 100 NAISSANCES FÉMININES.		POUR LES CAMPAGNES. SUR 100 NAISSANCES FÉMININES.	
	Naissances masculines.	Moyenne.	Naissances masculines.	Moyenne.
1832	105,33		107,12	
1833	107,10		108,35 (maximum)	
1834	105,89		107,61	
1835	105,99		105,50 (minimum)	
1836	107,47 (maximum)		105,84	
1837	104,63		106,85	
1838	104,12 (minimum)		105,70	
1839	105,72		107,30	
1840	105.63	105,87	106,19	106,65
1841	104,73		106,25	
1842	106,48		107,33	
1843	106,64		106,85	
1844	104,29		106,62	
1845	106,46		106.60	
1846	105,35		106,37	
1847	106,43		106,32	
1848	106,76		107,19	
1849	106,60		105,77	

Moyenne pour tout le royaume 106,44. *

* Pour la période de 1815 à 1839, on trouve 106,54 suivant Ch. Dupin.

Les nombres qui ont servi à former la moyenne générale portent, pour les villes, sur 323966 naissances masculines et 306002 naissances féminines; et, pour les campagnes, sur 950111 naissances masculines et 890978 naissances féminines.

On voit qu'il naît, toute proportion gardée, plus de garçons dans les campagnes que dans les villes; mais les causes qui font varier le rapport des naissances des deux sexes sont sans doute très-nombreuses: elles peuvent tenir au climat, à la légitimité des naissances, à l'âge absolu ou relatif des parents, etc. Il faudrait, pour résoudre ces intéressantes questions, disposer d'un grand nombre d'observations exactes et détaillées, et les traiter avec tact et sagacité.

Quoi qu'il en soit, il n'y a pas aujourd'hui de fait statistique mieux constaté que cette inégalité des naissances. Les relevés officiels du mouvement de la population en France donnent, pour la période de 1801 à 1840, le nombre 106,42 pour le rapport des naissances masculines aux naissances féminines. On voit qu'il est presque identique avec celui que nous venons de trouver pour la Belgique.

Le *climat* ne paraît pas influer sensiblement sur la valeur de ce rapport. C'est du moins ce que l'on peut conclure de la discussion des documents statistiques fournis par les principaux États de l'*Europe*. Ils sont résumés dans le tableau suivant.

Angleterre	104,42	Portugal	106,17
Grande-Bretagne	104,53	Prusse	106,17
Suède	104.62	Royaume de Naples	106,18
Wurtemberg	105,2	Hanovre	106,3
Bohême	105,4	France	106,42
Hesse	105.7	Belgique	106,44
Hollande	105.9	Mecklembourg	107,1
Autriche	106,1	Lombardie	107,6
Saxe	106,1	Russie	108,9

Observons toutefois que ces résultats ne prouvent pas d'une manière absolue que la différence des climats n'ait *aucune* influence sur les chances des naissances des deux sexes : l'influence peut devenir sensible dès que la différence des climats est assez grande pour modifier profondément les mœurs et le tempérament des peuples. Des observations faites en Égypte et au cap de Bonne-Espérance semblent même confirmer cette dernière hypothèse.

Une distinction analogue à celle que nous avons faite entre les naissances dans les villes et dans les campagnes, a été établie par Ch. Dupin. Il a divisé la population de la France en deux groupes, l'un des départements *maritimes*, au nombre de 24, l'autre des 62 départements *de l'intérieur*. Divisant par périodes de cinq ans la période totale de 1801 à 1840, il a construit le tableau que voici.

PÉRIODES QUINQUENNALES.	NAISSANCES MASCULINES SUR 100 NAISSANCES FÉMININES.		
	FRANCE ENTIÈRE.	DÉPARTEMENTS MARITIMES.	DÉPARTEMENTS DE L'INTÉRIEUR.
1801 à 1805	106,75	106,20	107,03
1806 à 1810	106,30	105,13	106,89
1811 à 1815	106,83	106,05	107,29
1816 à 1820	106,59	106,36	106,70
1821 à 1825	106,52	105,58	107,00
1826 à 1830	105,95	105,59	106,14
1831 à 1835	106,54	105,51	107,07
1836 à 1840	105,96	105,50	106,19
MOYENNES pour les 40 années	106,42	105,74	106,77

Ainsi, pendant 40 années, le rapport entre les naissances du sexe masculin et du sexe féminin a été constamment moindre pour les départements maritimes que pour les départements de l'intérieur. Une pareille constance ne semble pas pouvoir être attribuée au hasard.

Une autre remarque essentielle, c'est que pour l'Angleterre, pays plus maritime que l'ensemble de la France, le rapport des naissances masculines aux naissances féminines est moindre encore que pour l'ensemble des départements maritimes de la France.

L'influence des mœurs et des habitudes sociales sur les chances des naissances des deux sexes est encore mise hors de doute, lorsque l'on fait la distinction entre les naissances légitimes et les naissances illégitimes. De 1817 à 1839, le nombre des naissances illégitimes, pour toute la France, a été de 814524 garçons et 781238 filles, ce qui donne le rapport 104,26. Un résultat analogue ressort de la discussion des documents statistiques, pour les principaux États de l'Europe.

Le séjour des grandes villes exerce une influence non moins incontestable. A Paris, de 1817 à 1840 inclusivement, le nombre des naissances masculines a été de 340817, et celui des naissances féminines de 329142, ce qui donne 103,55. A la vérité les naissances illégitimes sont beaucoup plus nombreuses à Paris que partout ailleurs en France; mais ce n'est pas là l'unique cause de l'anomalie que nous signalons. En effet, le nombre des enfants illégitimes nés à Paris pendant la période que nous considérons a été de 117605 garçons et 114031 filles : retranchant ces chiffres des précédents, on trouvera, pour les naissances *légitimes* à Paris, le rapport 103,77. — Il est de 103,19 pour les naissances *illégitimes*.

Quelques auteurs pensent que toutes les causes tendant à énerver les forces physiques de la population, tendent aussi à diminuer la prépondérance des naissances masculines. — Suivant MM. Sadler et Hofacker cependant, la cause de cette prépondérance résiderait uniquement dans la supériorité habituelle de l'âge du père sur l'âge de la mère; mais les nombres sur lesquels ils s'appuient sont insuffisants pour décider cette importante question.

§ 78. — Parmi les causes *variables*, les plus remarquables sont celles qui ont un caractère de périodicité. Quand on soupçonne l'existence d'une cause périodique simple, il devient assez facile de l'étudier, en comparant entre elles les différentes parties de la période supposée. Ainsi, veut-on reconnaître si la mortalité est influencée par la période annuelle, on comparera les résultats des différents mois de l'année : on trouvera ainsi que la mortalité subit, dans notre pays, un maximum et un minimum, à six mois de distance. Le maximum arrive en janvier et le minimum entre juillet et août; entre ces deux époques, les nombres croissent et décroissent régulièrement.

Un travail semblable peut se faire pour les naissances. Les deux tableaux qui suivent présentent, pour toute la Belgique, les rapports des naissances, pendant les 12 mois de l'année, ainsi que ceux des décès. Ils embrassent la période de 1841 à 1849; et, pour mieux faire juger du degré de constance que suit la loi, nous avons séparé la période totale en trois périodes partielles de trois années chacune.

Nombres proportionnels des NAISSANCES en Belgique, pendant les différents mois de l'année.

(La moyenne des douze mois est prise pour unité.)

Janvier . . .	1,09	1,12	1,02	1.08
Février . . .	1,17	1,22	1,10	1,16
Mars.	1,16	1,21	1,11	1,16
Avril	1,06	1,11	1.05	1,07
Mai	0,98	0,99	1,02	1,00
Juin.	0,92	0,93	0,98	0,94
Juillet	0,87 †	0,87	0,96	0,90 †
Août.	0,92	0,87	0,96	0,92
Septembre. .	0,96	0,92	0,97	0,95
Octobre . . .	0,95	0,91	0,93	0,93
Novembre. .	0,94	0,91	0,94	0,93
Décembre . .	0,98	0,94	0,96	0,96
	1841-1843	1844-1846	1847-1849	1841-1849

On voit que les naissances procèdent suivant un ordre très-régulier; et la loi qu'elles suivent est si bien marquée dans chacune des trois périodes particulières, qu'on peut regarder la moyenne générale comme dégagée de toute cause accidentelle de perturbation. Les naissances atteignent donc leur maximum dans les mois de février et de mars, et leur minimum au mois de juillet. Il existe un second maximum, très-faible, mais bien caractérisé, pour le mois de septembre.

Les causes qui tendent à élever les naissances *au-dessus* de la moyenne ont plus d'énergie que celles qui tendent à les faire tomber *au-dessous;* et le rapport de celles-ci aux premières est à peu près de 5 à 8. Ces deux nombres expriment en effet le rapport des limites.

ou celui du nombre de cas supérieurs à la moyenne au nombre de cas inférieurs.

Nombres proportionnels des DÉCÈS en Belgique, pendant les différents mois de l'année.

(La moyenne des douze mois est prise pour unité.)

Janvier . . .	1,24	1,15	1,35 †	1,25 †
Février . . .	1,26 †	1,25	1,16	1,22
Mars.	1,19	1,26 †	1,17	1,21
Avril.	1.15	1,13	1,13	1,14
Mai	0,99	1,03	1,03	1,02
Juin	0,91	0,92	1,05	0,96
Juillet	0,81	0,83 †	0,93	0,86 †
Août.	0,80 †	0,83 †	0,90	0,84 †
Septembre..	0,89	0,85	0,87	0,87
Octobre . . .	0,89	0,84	0,75 †	0,83
Novembre . .	0,92	0,84	0,77	0,84
Décembre . .	0,95	1,07	0,89	0,97
	1841-1843	1844-1846	1847-1849	1841-1849

Pour les décès comme pour les naissances, la périodicité est bien marquée, quoiqu'elle ait été un peu troublée, à diverses reprises, par les invasions du choléra. Elle présente un maximum en janvier et un minimum dans les mois de juillet et d'août. Ici encore, les nombres ont une tendance prononcée à s'élever au-dessus de la moyenne, et le rapport des limites est, comme dans le premier cas, de 5 à 8.

Pour éliminer, dans la discussion des documents, les causes variables périodiques, il ne faut comparer entre eux que les résultats fournis par une période *entière*, ou par des parties *correspondantes* de la période. Si, au lieu d'éliminer, nous voulons étudier les effets de la période, il faudra au contraire mettre en présence les nombres partiels résultant des différentes divisions de la période. Les causes *accidentelles* s'éliminent d'elles-mêmes par le grand nombre d'observations.

L'histoire, traitée au point de vue de l'influence des causes *con-*

stantes, unirait à l'intérêt de la curiosité celui d'offrir aux hommes les plus utiles leçons. Souvent on attribue les effets inévitables de ces causes à des circonstances *accidentelles,* qui n'ont fait que développer leur action. Ainsi, dit Laplace, au milieu des causes variables qui étendent ou qui resserrent les divers États, les limites naturelles, en agissant comme causes constantes, doivent finir par prévaloir. Ainsi encore, il est contre la nature des choses qu'un peuple soit à jamais gouverné par un autre, qu'une grande distance ou une vaste mer en sépare. On peut affirmer qu'à la longue, cette cause constante, se joignant sans cesse aux causes variables qui agissent dans le même sens, et que la suite des temps développe, finira par en trouver d'assez fortes pour rendre au peuple soumis son indépendance naturelle, ou pour le réunir à un État puissant qui lui soit contigu.

§ **79.** — Nous allons montrer, par un dernier exemple, comment on doit traiter les questions statistiques.

Depuis plusieurs années, le gouvernement belge a donné un soin tout particulier à introduire de l'uniformité et de l'exactitude dans les inscriptions des *mort-nés.* Les chiffres généraux recueillis à l'état-civil pour les années 1841 à 1849 permettent de dresser le tableau suivant.

NOMBRE DES MORT-NÉS DES DEUX SEXES EN BELGIQUE.

ANNÉES.	VILLES.			COMMUNES RURALES.			TOTAL GÉNÉRAL.
	Masculin	Féminin.	Rapport.	Masculin	Féminin.	Rapport.	
1841	1220	949	1,29	1976	1387	1,43	5532
1842	1205	915	1,32	1939	1415	1,37	5474
1843	1296	934	1,39	2073	1456	1,42	5759
1844	1148	934	1,23	2225	1579	1,41	5886
1845	1272	982	1,29	2101	1651	1,27	6006
1846	1155	856	1,35	1857	1308	1,42	5176
1847	1142	795	1,43	1791	1319	1,36	5047
1848	1194	891	1,34	1917	1445	1,33	5447
1849	1255	950	1,32	2329	1664	1,40	6198
Moyenne	1209	912	1,33	2023	1469	1,38	5613

La Belgique compte donc annuellement 5613 mort-nés, nombre qui diffère très-peu des chiffres individuels fournis par chaque année, et qui peut inspirer assez de confiance, du moins d'une manière relative. Il est certainement trop faible, à cause des réticences, ou des négligences dans les inscriptions. En le comparant au chiffre total de la population qui était, à la fin de 1845, de 4298562, on trouve un mort-né pour 766 habitants.

L'influence des sexes sur les mort-nés est mise en évidence d'une manière bien tranchée, et indépendante des négligences accidentelles commises dans l'inscription. On voit que, dans les villes, sur 100 mort-nés du sexe féminin, il y en a 133 du sexe masculin, au lieu de 106 au plus que l'on devrait compter par suite de la loi générale des naissances. Pour les campagnes, la différence est encore un peu plus grande : on trouve 138 au lieu de 107.

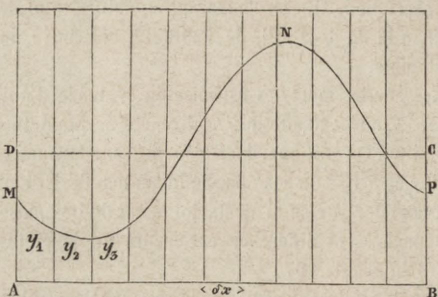
L'influence du séjour des villes ou des campagnes sur le nombre des mort-nés s'obtiendrait en cherchant, pour chaque année, le rapport des enfants nés vivants aux mort-nés : il est de 30 environ pour les campagnes et de 16 pour les villes.

Les causes morales influent sur cette inégalité, autant peut-être que les causes physiques. Ainsi, lorsqu'on établit la comparaison entre les enfants nés vivants et les mort-nés, en distinguant les naissances *légitimes* des naissances *illégitimes*, on trouve, dans le premier cas, le rapport 25; et dans le second, le rapport 15.—Ceci explique en partie la grande différence que l'on vient de remarquer entre les villes et les campagnes, sous le rapport des mort-nés. On sait, en effet, que les naissances illégitimes sont beaucoup plus nombreuses dans les villes que dans les campagnes : le rapport est d'environ 23 à 7.

Si l'on voulait déterminer l'influence des causes périodiques sur le nombre des mort-nés, il suffirait de procéder comme nous l'avons fait pour les naissances dans le § précédent, et l'on trouverait que le maximum des mort-nés se présente au mois de mars, le minimum au mois de juin.

§ **80.** — Toutes les fois qu'une quantité est assujettie à varier en fonction d'une autre, on trouve un grand avantage, sous le rapport de la clarté, à représenter par une *courbe* la marche que suit la fonction. Nous avons déjà eu recours à ce moyen, et nous l'emploierons encore plusieurs fois.

Supposons qu'il s'agisse d'étudier les *variations* de la température : on les représentera par des ordonnées y_1, y_2... proportionnelles aux amplitudes de ces variations, et élevées en des points dont les abscisses sont proportionnelles au *temps*, considéré comme variable indépendante. Pour plus de simplicité, on fera tous les intervalles de temps égaux entre eux, et à dx. La *courbe* MNP, obtenue en joignant les sommets des ordonnées par un trait continu, indiquera aux yeux l'allure générale de la fonction, et permettra d'en saisir facilement la loi. La *surface* comprise entre la courbe, l'axe AB, et les deux ordonnées extrêmes AM, BP, sera proportionnelle à l'*effet total* produit par la variable.



Mais on conçoit que le *même* effet aurait pu être produit dans le même temps par une quantité *constante*, A D = Y, dont le travail serait représenté par la surface du rectangle ABCD : égalant ces deux surfaces, on aura

$$(y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n)\, dx = n \,.\, dx \,.\, Y\,,$$

équation qui sera d'autant plus rigoureuse que notre dx s'approchera davantage d'une véritable différentielle, ou que les observations seront faites à des intervalles plus rapprochés. Déduisant la valeur de Y, nous aurons :

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n}{n}\;;$$

ainsi, la valeur *moyenne* de la variable n'est autre chose que la hauteur du rectangle équivalent à la figure mixtiligne AMNPB.

On voit par là que, lorsque la courbe des variations est irrégulière, ou les observations peu nombreuses, on peut commettre une erreur sensible en prenant pour moyenne le quotient indiqué plus haut. Dans ce cas, il serait plus sûr d'évaluer la surface mixtiligne par le théorème de Thomas Simpson et de l'égaler à celle du rectangle de même base. La hauteur de ce dernier serait la moyenne rigoureuse.

Cette obligation de recueillir un grand nombre de valeurs de la variable, lorsqu'on veut obtenir une moyenne suffisamment exacte, a engagé les observateurs à rechercher des procédés plus expéditifs. Prenons pour exemple l'étude des variations de la température.

Les physiciens ont remarqué que l'on peut adopter pour température moyenne de *la journée* la valeur *médiane* entre les températures extrêmes (demi-somme entre le maximum et le minimum) : or ces termes extrêmes s'indiquent d'eux-mêmes dans certains thermomètres construits spécialement. La différence entre le maximum et le minimum de la journée se nomme *variation diurne* de la température : l'expérience prouve qu'elle est sensiblement proportionnelle à la longueur des jours.

On peut aussi, dans nos climats, remplacer la moyenne de toutes les températures d'une journée par *une seule* observation faite un peu avant neuf heures du matin, ou mieux, un peu avant huit heures du soir.

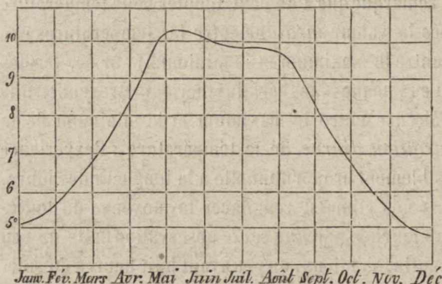
La valeur médiane entre les résultats observés à dix heures du matin et du soir, ou à quatre heures du matin et du [illegible] donnerait aussi une température moyenne satisfaisante.

L'amplitude de la *variation diurne* de la température, dans les différents mois, sert à caractériser le climat d'un pays ; il en est de même de la différence entre la *température moyenne du mois* le plus chaud et du mois le plus froid. Ces deux éléments sont donnés pour Bruxelles dans le tableau suivant, dressé d'après les observations de 1833 à 1842 :

Mois.	TEMPÉRATURE* Maxim.	TEMPÉRATURE* Minim.	Températ. moyenne. Demi-somme des maxima et minima.	Variation diurne. Différence des maxima et minima.	Mois.	TEMPÉRATURE* Maxim.	TEMPÉRATURE* Minim.	Températ. moyenne. Demi-somme des maxima et minima.	Variation diurne. Différence des maxima et minima.
Janv.	4°,42	-0°,74	1°,83	5°,16	Juill.	22°,96	13°,03	17°,99	9°,93
Fév.	6 ,92	+1 ,27	4 ,09	5 ,65	Août.	22 ,89	13 ,13	18 ,01	9 ,76
Mars.	9 ,29	2 ,50	5 ,99	6 ,79	Sept.	19 ,31	11 ,01	15 ,16	8 ,30
Avril.	12 ,65	4 ,33	8 ,49	8 ,32	Octob.	14 ,37	7 ,57	10 ,97	6 ,80
Mai.	18 ,97	8 ,86	13 ,92	10 ,13	Nov.	9 ,24	3 ,80	6 ,52	5 ,44
Juin.	22 ,46	12 ,32	17 ,39	10 ,14	Déc.	6 ,51	1 ,68	4 ,10	4 ,83
»	»	»	»	»	L'année	14 ,16	6 ,56	10 ,36	7 ,60

* Les nombres inscrits dans cette colonne sont les moyennes valeurs des moyennes mensuelles des maxima et minima diurnes.

En météorologie, on regarde comme *constants* les climats où la différence entre la température du mois le plus chaud et celle du mois le plus froid n'excède pas 10° ; comme *variables* ceux où cette différence s'élève de 10 à 20° ; comme *excessifs* ceux où elle surpasse 20°. Il faut donc ranger le climat de Bruxelles parmi les climats *variables*, avec une légère tendance à se rapprocher des climats excessifs.

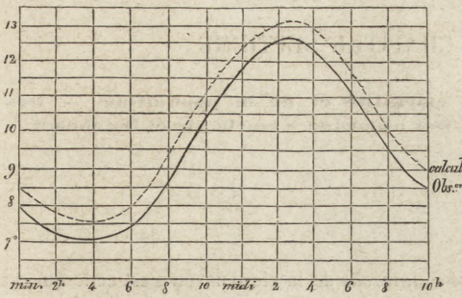


La figure ci-contre représente les *variations diurnes* de la température, dans les différents mois de l'année.

La marche moyenne de la température pendant la période diurne s'obtiendrait en prenant la moyenne des températures observées, à chaque heure de la journée, pendant une ou plusieurs années. Le tableau suivant présente ce travail, pour les heures *paires* des années 1841 à 1843.

HEURES.	1841.	1842.	1843.	Moyenne des 3 années.	Température calculée.
Minuit.	7°,8	7°,9	7°,9	7°,9	7°,93
2 heur. du mat.	7 ,3	7 ,4	7 ,5	7 ,4	7 ,48
4 »	7 ,0	7 ,1	7 ,2	7 ,1	7 ,11
6 »	7 ,4	7 ,5	7 ,5	7 ,5	7 ,49
8 »	8 ,6	8 ,9	8 ,7	8 ,8	8 ,81
10 »	10 ,4	10 ,8	10 ,7	10 ,6	10 ,52
Midi.	11 ,6	12 ,2	12 ,0	11 ,9	11 ,85
2 heur. du soir.	12 ,1	12 ,8	12 ,5	12 ,5	12 ,50
4 »	11 ,9	12 ,4	12 ,3	12 ,2	12 ,19
6 »	10 ,8	11 ,4	11 ,2	11 ,1	11 ,03
8 »	9 ,2	9 ,6	9 ,5	9 ,4	9 ,55
10 »	8 ,4	8 ,7	8 ,6	8 ,6	8 ,50
Moyenne.	9°,37	9°,7	9°,6	9°,58	9°,58

On voit que chaque heure a produit annuellement à peu près les mêmes températures : la courbe ci-contre, qui représente les différents nombres, a une forme très-régulière ; aussi son équation est-elle exactement représentée par une formule empirique, que l'on emploie fréquemment dans des cas analogues, et dont la forme générale est



$$y = C + A \sin(t + a) + B \sin(2t + b) + D \sin(3t + d) + \ldots.$$

A, B, C, D.... a, b, d... sont des constantes données par l'observation ; t l'angle horaire compté à partir de minuit et exprimé en degrés. Dans l'exemple qui nous occupe on trouve

$$\text{Tempér.} = 9°{,}58 - 2°{,}64 \sin(t + 50°) + 0°{,}42 \sin(2t + 50°) + 0°{,}114 \sin(3t + 40°).$$

Les nombres fournis par cette formule sont portés dans la dernière colonne du tableau précédent : on voit qu'ils sont presque identiques avec ceux que fournit l'observation.

La courbe moyenne des températures diurnes n'a donc qu'un seul maximum, qui se présente vers deux heures de l'après-midi ; le minimum arrive vers quatre heures du matin. Ces deux termes critiques se déplacent un peu avec les saisons.

Lorsque l'on veut trouver la *température moyenne d'une année*, il faut faire concourir à la formation de cette moyenne les observations de tous les jours, ou du moins celles de tous les mois de l'année. Mais ici encore, il existe des procédés indirects très-commodes. Ainsi, l'on peut se contenter de rechercher la température moyenne du mois d'*octobre*, qui, dans nos climats, diffère très-peu de celle de toute l'année.

On a observé aussi que la demi-différence des maxima et minima mensuels est à peu près constante, et égale à la température moyenne de l'année.

CHAPITRE SEPTIÈME.

Des lois de la mortalité et de la population. — Des associations. — Des assurances sur la vie et les choses.

---

§ **81**. — La durée *naturelle* de la vie d'un être est celle qui est déterminée par les conditions intrinsèques de son organisation. Mais si, comme l'a dit Bichat, « la vie n'est qu'une résistance à la mort, » sa durée *réelle moyenne* doit être inférieure à sa durée naturelle, puisqu'il est impossible de soustraire un être animé à toutes les causes accidentelles de destruction qui l'entourent à chaque instant. La mortalité aux différents âges peut du reste varier pour deux motifs, soit par l'action des causes destructives, soit par la résistance des forces vitales.

Dès le milieu du XVIIe siècle, le célèbre Jean de Witt, homme d'État et géomètre, s'occupait de la recherche des probabilités de la vie humaine, pour le calcul des rentes viagères; mais la première table de mortalité * a été construite par Halley, qui en a puisé les éléments dans les registres de la ville de Breslau, en Silésie. Elle a été publiée dans les *Transactions philosophiques* de 1693. L'illustre savant anglais fit choix de cette ville, parce que le nombre des naissances et celui des morts y différaient très-peu : il en concluait que les pertes éprouvées par la population, aux différents âges, devaient être sensiblement proportionnelles à la mortalité pour chacun de ces âges; que, par suite, on pouvait regarder les individus décédés chaque année comme s'ils fussent tous nés la même année; et leurs âges respectifs, comme indiquant la manière dont s'éteindraient successivement un pareil nombre d'individus, ayant commencé leur vie simultanément.

Halley releva donc le nombre de morts, M, arrivées à Breslau de-

* On appelle ainsi une liste qui, sur un nombre donné de naissances, indique e nombre de survivants à la fin de chaque année.

puis 1687 jusqu'à 1691, et distribua ce nombre suivant les âges. Soient M_1, M_2, M_3 .... le nombre d'individus morts dans la 1re, la 2e, la 3e.... année de leur existence: $M - M_1$ représentera le nombre des survivants à l'âge de 1 an; $M - M_1 - M_2$ le nombre des survivants à l'âge de 2 ans, et ainsi de suite. Afin de faciliter les calculs, Halley réduisit ces divers nombres proportionnellement à 1000.

Ce procédé est bien préférable, dans la pratique, au procédé théoriquement plus rigoureux qui consisterait à suivre un très-grand nombre d'individus un à un depuis leur naissance jusqu'à leur mort : celui-ci n'a pu être appliqué jusqu'aujourd'hui qu'à des catégories particulières, dont l'ordre de mortalité est très-différent de celui de l'universalité des hommes.

Les tables de mortalité employées aujourd'hui en Belgique ont été calculées par M. Quetelet, d'après les décès renseignés de 1841 à 1845 inclus. Elles présentent :

1° La mortalité générale du royaume ;

2° La mortalité, avec la distinction des sexes, et celle des villes et des campagnes;

3° Enfin la mortalité par province.

(Voyez *Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles pour* 1851, p. 190 et suiv.)

A l'inspection de ces tables, on s'aperçoit que la *vie probable*, au moment de la naissance, est d'environ 23 ans; c'est-à-dire qu'à l'âge de 23 ans, le nombre des individus qui sont nés en même temps se trouve réduit de moitié. La vie probable des filles est plus longue que celle des garçons: elle est, d'une part, de 25 ans, et de l'autre, de 20 ans.

Pour savoir le nombre d'années qu'une personne de 30 ans vivra *probablement*, on cherchera, dans la table générale, le nombre 45388 de personnes qui ont 30 ans; on en prendra la moitié qui est 22694; cette moitié correspond à peu près à l'âge de 64 ans : puisqu'à 64 ans, une moitié des individus qui existaient à 30 ans est morte et l'autre vivante, il y a également à parier pour ou contre qu'une personne de 30 ans arrivera à cet âge : c'est donc 64 moins 30 ou 34 ans qu'une personne de 30 ans vivra *probablement*.

La vie probable d'un *homme* à 30 ans est de 30 ans dans les *villes* et de 35 dans les *campagnes;* celle de la *femme* est de 33 ans $^1/_2$ des deux côtés.

En général, la probabilité qu'a une personne de l'âge A de parvenir à l'âge B, s'obtient en divisant le nombre des personnes de l'âge B par le nombre des personnes de l'âge A. On trouve ainsi qu'en Belgique, un individu de 20 ans a la probabilité 0,57 d'arriver à l'âge de 55 ans.

C'est vers 5 ans que la vie probable est la plus longue; elle est alors de 47 ans : ainsi, quand un enfant a atteint sa cinquième année, il y a un à parier contre un qu'il atteindra l'âge de 52 ans; tandis qu'au moment de sa naissance, il y avait un contre un à parier qu'il n'arriverait pas à 25 ans : on peut se faire par là une idée des dangers qui entourent l'enfance.

L'âge de 5 ans est extrêmement remarquable dans l'histoire naturelle de l'homme; à mesure qu'on s'en éloigne, la vie probable devient de plus en plus courte : à l'âge de 40 ans, elle est de 27 ans; pour les sexagénaires, elle est de 13 à 14 ans; enfin pour les octogénaires, elle est de 4 ans seulement.

La figure de la page 147 montre la marche que suit la mortalité en Belgique.

La vie probable à partir de la naissance est extrêmement variable suivant les localités : elle est de 41 ans pour la Suisse; de 28 pour l'Angleterre; de 21 pour la France; tandis qu'elle tombe à 8 ans pour Paris, 3 ans pour Londres, 2 ans pour Berlin et moins de 2 ans pour Vienne! Tel est l'impôt que prélève la mort sur la misère et l'immoralité des grandes villes; et c'est la génération naissante qui le paye presque en entier.

§ **82.** — La table de mortalité sert encore à déterminer la manière dont la *population* se répartit, eu égard aux différents âges.

Soit N le nombre normal des naissances par année, par exemple en 1850 : ce nombre, au commencement de 1851, se trouvera réduit à un autre chiffre que nous désignons par V_1; il deviendra successivement V_2, V_3.... au commencement de 1852, 1853....

Les naissances étant réparties sur les diverses époques de l'année d'une manière sensiblement uniforme, nous pouvons prendre le milieu de chaque année pour leur époque commune. D'après cela, au milieu de 1850, la population naissante est égale à N, diminué du nombre d'enfants morts pendant les six premiers mois, ou de $\frac{N - V_1}{2}$ (en supposant que la mortalité soit aussi uniforme). Nous aurons donc :

nombre d'enfants de 0 à 1 an .... $N - \frac{N - V_1}{2} = \frac{N + V_1}{2}$;

de même pour les âges suivants :

nombre d'enfants de 1 à 2 ans .... $\frac{V_1 + V_2}{2}$

» » de 2 à 3 » $\frac{V_2 + V_3}{2}$

» » de 3 à 4 » $\frac{V_3 + V_4}{2}$

Et ainsi de suite ; d'où

$$\text{Population totale} = \frac{1}{2} N + V_1 + V_2 + V_3 + \; .... \; + V_{100}.$$

Cela posé, si l'on prend le nombre des naissances marqué dans la table de mortalité, pour celui des naissances annuelles, la somme précédente, poussée jusqu'à V_{100} comme limite de l'extrême vieillesse, exprimera la population totale. Puis, si l'on retranche successivement de cette somme le nombre des individus de 0 à 1 an, de 1 an à 2 ans, de 2 ans à 3 ans, etc., les restes représenteront les nombres d'individus compris depuis 1 an, 2 ans, 3 ans, etc., jusqu'au terme de l'existence.

Dans les *Tables de population* calculées pour la Belgique par M. Quetelet (*Bulletin de la commission centrale de statistique*, t. IV), la population totale est supposée de un million d'habitants : elles indiquent donc combien, sur un million d'individus, il y en a qui ont un âge donné, ou davantage. Par exemple, dans la colonne des hommes, on trouve 289503 vis-à-vis de 20 ans, et 41524 en face de 60 ans : la différence, 247979 est le nombre d'hommes de 20 à 60 ans. Si l'on veut trouver le nombre correspondant pour une population de 4370000 âmes, il suffira d'établir une simple proportion.

Ce partage de la population suivant les âges est très-important à considérer sous le rapport de la prospérité et de la force d'un État. Qu'importe, en effet, une stérile fécondité d'enfants et de vieillards, lorsqu'on n'a relativement que peu d'hommes dans la vigueur de l'âge?

La plupart des savants posent en principe que, pour pouvoir déduire une table de population de la table de mortalité, d'après la méthode qui vient d'être indiquée, il faut que « l'état de la population « soit *stationnaire*, c'est-à-dire que le nombre des naissances an- « nuelles soit à peu près constant et égal à celui des décès; que de « plus les émigrations et les immigrations se compensent. » Mais M. Quetelet, qui a examiné avec soin ce sujet (*Essai de physique sociale*, t. I^er^), a prouvé que « la condition nécessaire pour qu'on puisse, « d'une table de mortalité, déduire une table de population, est que « les décès de chaque âge conservent annuellement les mêmes *rap-* « *ports* entre eux; que la population soit du reste stationnaire, crois- « sante ou décroissante. »

§ **83.** — Il ne faut pas confondre la vie *probable*, dont nous avons parlé (§ 81), avec la vie *moyenne*, dont la durée sert à comparer, sous le rapport de la *vitalité*, les âges, les lieux et les époques. Que l'on prenne, par exemple, 10000 enfants nés dans la même année, et qu'on les suive un à un jusqu'à la mort du dernier : la *somme* de leurs âges aux époques de leurs décès respectifs, *divisée* par 10000, sera bien la durée *moyenne* de leur vie, ou leur vie *moyenne*.

Ainsi, dans la table de mortalité pour la Belgique, on trouve qu'aux âges

86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95 ans, il reste, sur 1000 individus,

19, 15, 12, 9, 7, 5, 4, 3, 2, 1.

Comme on prend le milieu de chaque année pour époque commune des décès, il s'ensuit qu'à partir de 86 ans, sur 19 individus,

19 — 15 = 4	vivent	$^1/_2$ année.
15 — 12 = 3	»	$^3/_2$ »
12 — 9 = 3	»	$^5/_2$ »
9 — 7 = 2	»	$^7/_2$ »
7 — 5 = 2	»	$^9/_2$ »
5 — 4 = 1	»	$^{11}/_2$ »
4 — 3 = 1	»	$^{13}/_2$ »
3 — 2 = 1	»	$^{15}/_2$ »
2 — 1 = 1	»	$^{17}/_2$ »

La quantité d'existence dépensée collectivement par les 19 individus s'obtient en multipliant, pour chaque groupe, le *nombre* d'individus par le *temps* que chacun d'eux a vécu, et en ajoutant tous ces produits : la vie *moyenne* d'un individu de 86 ans sera donc le quotient de cette somme par 19.

La somme des produits se réduit aisément à

$$\frac{1}{2}.19 + 15 + 12 + 9 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

et il ne reste plus, pour avoir la moyenne, qu'à diviser par 19 la somme de tous les termes à partir du second, et à ajouter $\frac{1}{2}$ au quotient.

Cette règle est générale; de sorte que si $a, a', a'', a''', a^{\text{iv}} \ldots$ désignent les nombres d'individus vivant à des âges consécutifs (a^{iv} étant le dernier de la table); V la vie moyenne à partir de l'âge correspondant au premier nombre, a; V' la vie moyenne à partir de a', on aura

$$V = \frac{1}{2} + \frac{a' + a'' + a''' + a^{\text{iv}}}{a}\,;\; V' = \frac{1}{2} + \frac{a'' + a''' + a^{\text{iv}}}{a'}\,.$$

Tirant de la seconde expression la valeur de $a'' + a''' + a^{\text{iv}}$ pour la substituer dans la première, on aura

$$V = \frac{1}{2} + \frac{a'}{a}\left(V' + \frac{1}{2}\right);$$

formule qui, faisant trouver aisément V par V', serait commode pour calculer la vie moyenne correspondante aux divers âges, en commençant par le plus avancé.

D'après les tables du bureau des longitudes, on trouve que la vie moyenne en France est de 28 ans $\frac{3}{4}$ à partir de la naissance. En la calculant pour chaque âge, on trouve qu'elle est la plus longue possible, et de 43 ans 5 mois, à l'âge de 5 ans. Ainsi, à partir de la naissance, la vie *probable* y est de 20 ans $\frac{1}{3}$ et la vie *moyenne* de 28 ans $\frac{3}{4}$; tandis que, pour les enfants de 4 à 5 ans, qui ont échappé à la mortalité des 3 ou 4 premières années, la vie probable y surpasse 45 ans et la vie moyenne 43 ans.

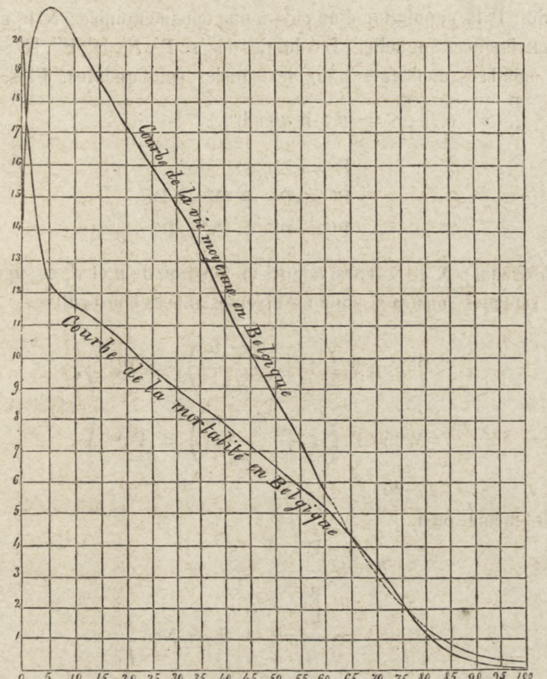
Les observations sur la mortalité ne remontent pas assez haut, pour qu'on puisse comparer les temps un peu anciens avec le temps présent. Cependant le peu de documents que l'on possède permettent d'avancer que, depuis le XVI[e] siècle, la vie moyenne s'est considérablement accrue * : dans quelques localités elle a presque doublé, et la vie probable a plus que quintuplé.

Nous avons calculé, d'après la table de mortalité insérée dans l'annuaire de l'Observatoire de Bruxelles, la table suivante qui présente la valeur de la vie moyenne, en Belgique, aux différents âges.

Âges.	Vie moyenne.	Différences.	Âges.	Vie moyenne.	Différences.	Âges.	Vie moyenne.	Différences.	Âges.	Vie moyenne.	Différences.
	ANS.										
0	31,41		15	39,49		30	31,62		45	22,94	
1	38,41	+7,00	16	38,92	−0,57	31	31,04	−0,58	46	22,32	−0,62
2	41,80	3,39	17	38,33	0,57	32	30,45	0,59	47	21,70	0,62
3	43,32	1,52	18	37.76	0,57	33	29,87	0,58	48	21,07	0,63
4	43,98	0,66	19	37,25	0,51	34	29,28	0,59	49	20,44	0,63
5	44.25	0,27	20	36,75	0,50	35	28,68	0,60	50	19,80	0,64
6	44,15	−0,10	21	36,31	0,44	36	28,09	0,59	55	16,67	3,13
7	43,83	0,32	22	35,87	0,44	37	27,49	0,60	60	13,62	3,05
8	43,45	0,38	23	35,44	0,43	38	26,89	0,60	65	10,91	2,71
9	43,03	0,42	24	35,01	0,43	39	26,28	0,61	70	8,49	2,42
10	42,54	0,49	25	34,48	0,53	40	25,70	0,58	75	6,49	2,00
11	48,93	0,61	26	33,93	0,55	41	25,14	0,56	80	4,90	1,59
12	41,34	0,59	27	33,36	0,57	42	24,59	0,55	85	3,89	1,01
13	40,70	0,64	28	32,78	0,58	43	24,04	0,55	90	3,19	0,70
14	40,06	0,64	29	32,20	0,58	44	23,49	0,55	95	2,29	0.90
15	39,49	0,57	30	31,62	0,58	45	22,94	0,55	100	1,25	1,05

* Il faut avouer cependant que, si la masse a profité des progrès de l'industrie, c'est en général aux dépens de la longévité des travailleurs eux-mêmes. A Mulhouse, par exemple, la moyenne de la vie va en diminuant. En 1812 elle était de 25 ans; en 1827, de 22 ans; en 1834, de 20 ans. Les départements français, classés aux premiers rangs sous le rapport de l'industrie occupent les derniers en longévité. Des résultats analogues s'observent dans tous les pays industriels, notamment en Angleterre et en Belgique.

La figure suivante offre les traductions graphiques des tables de la *vie moyenne* et de la *mortalité* en Belgique. Les abscisses représentent les âges, depuis la naissance jusqu'à l'âge de 100 ans, considéré



comme extrême limite de l'existence humaine. Dans la première des deux courbes, les ordonnées sont proportionnelles à la durée de la vie moyenne aux diverses époques de la vie; dans la seconde, elles sont proportionnelles aux nombres d'individus qui, sur un nombre donné de naissances, existent encore aux différents âges.

On remarque qu'entre 10 et 75 ans, les deux courbes s'écartent très-peu de la forme *rectiligne* : cela revient à dire que, dans cet intervalle, la *mortalité* est sensiblement *constante*. Nous verrons bientôt (§ 91) que Moivre assigne à ces deux limites des valeurs un peu différentes.

§ 84. — Les questions relatives à la population des États reçoivent des applications aussi fréquentes que variées, et présentent un intérêt qui va croissant tous les jours. Nous entrerons donc dans quelques nouveaux développements, relativement à ce genre de recherches.

Soit P la population d'un pays à une époque donnée ; N le nombre des naissances annuelles ; D celui des décès ; P', N', D'; P'', N'', D''.... les nombres analogues pour les années subséquentes. Faisons de plus $\frac{P}{N} = n$; $\frac{P}{D} = d$: il viendra.

$$\begin{aligned} P &= Nn = Dd \\ P' &= P + (N - D) \\ P'' &= P' + (N' - D') \text{ .... etc.} \end{aligned}$$

Substituant à N et D leurs valeurs en fonction de n et d, et supposant ces rapports *constants* pour les diverses années consécutives,

$$\left.\begin{aligned} P' &= P\left(1 + \frac{d-n}{dn}\right) = Pq \\ P'' &= P\left(1 + \frac{d-n}{dn}\right)^2 = Pq^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

etc.

De même, on a

$$N = \frac{P}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} N' &= \frac{P'}{n} = \frac{P}{n}\, q = Nq \\ N'' &= \frac{P''}{n} = \frac{P}{n}\, q^2 = Nq^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

etc.

$$D = \frac{P}{d}$$

$$\left.\begin{aligned} D' &= \frac{P'}{d} = \frac{P}{d}\, q = Dq \\ D'' &= \frac{P''}{d} = \frac{P}{d}\, q^2 = Dq^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

etc.

Les formules (1), (2), (3) font voir que si, dans un pays, les naissances et les décès sont proportionnels à la population, « les chiffres « successifs de la population, des naissances et des décès suivent une « progression géométrique dont le quotient est le même. » Il suffit donc de connaître, par l'observation, deux termes consécutifs de l'une de ces progressions, pour en déterminer la raison, et pour trouver ensuite le nombre r d'années nécessaire pour que la population s'accroisse dans un rapport donné, s.

En effet, on aura l'équation

$$Pq^r = sP \text{ ou } q^r = s\,;$$

d'où

$$r = \frac{\log s}{\log q}.$$

Les États-Unis d'Amérique paraissent doubler de population en 25 ans; et l'on a lieu de croire que, dans le cas le plus favorable, cet accroissement pourrait s'opérer en 15 ans.

§ **85.** — Au moyen des relations précédentes, on détermine facilement la *loi de mortalité*, lorsque l'on connaît N, q, D, et que l'on sait de plus comment ce dernier nombre se décompose suivant les âges; c'est-à-dire, que l'on a le nombre des morts de chaque âge, pour l'époque que l'on considère.

Pour généraliser cette question, soient N le nombre total des naissances qui ont eu lieu dans une certaine période de temps (par exemple, de 1841 à 1850 inclusivement); D le nombre total des décès survenus dans le même intervalle de temps; $({}_0D_1)$, $({}_1D_2)$, $({}_2D_3)$.... le nombre des personnes mortes dans la 1re, la 2e, la 3e.... année de leur existence; V_1, V_2, V_3... les survivants à l'âge de 1, de 2, de 3 ans...

Cela posé, n'oublions pas que la *mortalité* entre n et $(n+1)$ ans est « le rapport du nombre d'individus mourant dans leur n^e année, « au nombre des naissances qui ont eu lieu *n années auparavant;* » plus brièvement « la mortalité est le rapport des décès aux naissances « *correspondantes.* »

Par suite, la mortalité entre o et 1 an sera $\frac{({}_0D_1)}{N}$; le *nombre* d'individus mourant dans la 1re année de leur vie sera donc, sur N naissances, $\frac{({}_0D_1)}{N} \cdot N = ({}_0D_1)$; et les survivants à l'âge de 1 an seront représentés par

$$V_1 = N - ({}_0D_1).$$

Entre 1 et 2 ans on compte $({}_1D_2)$ décès : mais puisque nous supposons que la marche de la population suit une progression géométrique dont la raison est q, ces décès proviennent, non pas de N naissances, mais de $\frac{N}{q}$ naissances ; la mortalité entre 1 et 2 ans est donc

$$\frac{({}_1D_2)}{\frac{N}{q}} = \frac{({}_1D_2)\,q}{N};$$

et, sur N naissances, le nombre d'individus mourant dans leur deuxième année serait

$$\frac{({}_1D_2)\,q}{N} \cdot N = ({}_1D_2)\,q\,.$$

Le chiffre des survivants à l'âge de deux ans est donc

$$V_2 = V_1 - ({}_1D_2)\,q = N - ({}_0D_1) - ({}_1D_2)\,q.$$

En continuant à raisonner de la même manière, on trouvera que le nombre des survivants à l'âge de trois ans, toujours sur N naissances, est

$$V_2 - \frac{({}_2D_3)}{\frac{N}{q_2}} \cdot N;$$

d'où $\qquad V_3 = N - ({}_0D_1) - ({}_1D_2)\,q - ({}_2D_3)\,q^2;$

et qu'en général

$$V_n = N - ({}_0D_1) - ({}_1D_2)\,q - ({}_2D_3)\,q^2 - \ldots - ({}_{n-1}D_n)\,q^{n-1} \ldots \text{(A)}$$

représente le nombre d'individus qui, sur N naissances, survivent à leur n^e année. Cette formule se réduit à celle de Halley (§ 81) lorsque $q = 1$, c'est-à-dire lorsque la population est stationnaire ; car alors on a $N = D$, et il reste

$$V_n = D - ({}_0D_1) - ({}_1D_2) - ({}_2D_3) - \ldots - ({}_{n-1}D_n) \ldots \text{(A')}$$

Pour déterminer le coefficient d'accroissement de la population, il faut connaître deux valeurs P et P′ de cette population aux deux époques t et $t + n$. On aura alors

$$P' = Pq^n$$

d'où
$$q = \sqrt[n]{\frac{P'}{P}} \quad \ldots \quad \text{(B)}$$

ou bien, en nommant (N — D) l'excès des naissances sur les décès pendant la période de n années,

$$P + N - D = Pq^n$$

d'où
$$q = \sqrt[n]{1 + \frac{N - D}{P}} \quad \ldots \quad \text{(B')}$$

Les deux équations (B) et (B′) ne peuvent se résoudre que par logarithmes : on les simplifierait en remarquant que le coefficient q est toujours très-voisin de l'unité; le remplaçant par $(1 + q')$, et négligeant les puissances supérieures de q' dans le développement de $(1 + q')^n$, on aura

$$q' = \frac{P' - P}{nP} \quad \ldots \quad (b)$$

$$q' = \frac{N - D}{nP} \quad \ldots \quad (b')$$

Nous avons employé la formule (B′) pour calculer la valeur actuelle du coefficient d'accroissement de la population en Belgique. La population de notre pays, au 31 décembre 1840, était de 4066300 âmes; et, pendant la période décennale de 1841 à 1850 inclusivement, l'excédant des naissances sur les décès a été de 259184 : on en déduit

$$q = 1{,}0062.$$

Les documents statistiques antérieurs à cette période prouvent que ce coefficient diminue graduellement. On conçoit en effet que, plus une population devient dense, plus elle éprouve de difficulté à recevoir de nouveaux accroissements; et celle de la Belgique est, de beaucoup, la plus dense de toute l'Europe (voyez la note placée à la fin de cette section).

Voici les différentes valeurs de q que nous avons pu calculer pour notre pays, entre 1815 et 1850.

Du 1er janvier	1815	au 1er janvier	1830	$q =$ 1,0113
»	1815	»	1845	1,0097
»	1830	»	1845	1,0088
»	1829	»	1846	1,0079
»	1841	»	1846	1,0088
»	1841	»	1850	1,0062

Les exposants nombreux qui entrent dans la formule (A) en rendent le calcul assez pénible, mais beaucoup moins en réalité qu'il ne le paraît à la première vue. Nous l'avons fait servir à calculer une table de mortalité pour la Belgique : les décès employés sont ceux qui ont été enregistrés de 1841 à 1850 inclusivement, et la valeur de q est 1,0062. Cette table s'écarte sensiblement de celle que l'on calculerait d'après les mêmes décès répartis simplement suivant les âges, ou dans l'hypothèse d'une population stationnaire. Pour faire juger de la différence, nous avons placé en regard les nombres résultant des deux hypothèses, et indiqué, pour chacune d'elles, la vie probable qui correspond aux différents âges.

Table de mortalité pour la Belgique.

AGES.	POPULATION CROISSANTE.		POPULATION STATIONNAIRE.		AGES.	POPULATION CROISSANTE.		POPULATION STATIONNAIRE.	
	Survivants.	Vie probable.	Survivants.	Vie probable.		Survivants.	Vie probable.	Survivants.	Vie probable.
Naissance	1000	40	1000	27	35 ans.	534	32	447	30
1 an .	850	49	812	40	40 »	501	28	414	26
2 ans.	790	52	738	44	45 »	464	24	378	23
3 »	759	52	700	46	50 »	425	20	342	19
4 »	739	53	676	46	55 »	383	17	305	16
5 »	725	53	659	46	60 »	340	14	266	13
6 »	715	53	646	46	65 »	283	10	219	10
7 »	706	52	635	46	70 »	218	8	165	8
8 »	698	52	626	46	75 »	147	6	109	5
9 »	691	51	618	46	80 »	82	4	59	4
10 »	685	50	610	45	85 »	34	3	23	3
15 »	660	46	581	42	90 »	11	3	6	3
20 »	631	42	549	39	95 »	3	3	1	»
25 »	595	38	510	36	100 »	2	»	1	»
30 »	564	35	478	33	et plus	»	»	»	»

§ 86. —Lorsque la loi de la *mortalité* est connue, celle de la *population* s'en déduit bien facilement. Si l'on prend en effet 100 années pour le terme de la vie, on aura pour les âges

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; .... 100 ans,

les nombres d'individus

$$N\ ;\ \frac{V_1}{q}\ ;\ \frac{V_2}{q^2}\ ;\ \frac{V_3}{q^3}\ ;\ \ldots\ \frac{V_{100}}{q^{100}}\ ;$$

et la population sera par conséquent

$$P = N + \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q^2} + \frac{V_3}{q^3} + \ldots + \frac{V_{100}}{q^{100}} \ldots \quad (C)$$

Lorsque la population devient stationnaire, on a $q = 1$, et la formule précédente se transforme en celle-ci :

$$P = N + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{100}.$$

Elle ne diffère de celle du § 82, qu'en ce que N remplace ici $\frac{1}{2}$ N; et on la ferait concorder avec la première, qui est plus exacte, en substituant aux âges 0, 1, 2, 3... ans, la moyenne arithmétique entre deux années consécutives. On obtiendrait ainsi

$$P = \frac{1}{2}\left\{(N+V_1)+(V_1+V_2)+(V_2+V_3)+\ldots+(V_{99}+V_{100})+(V_{100}+V_{101})\right\}$$

$$P = \frac{1}{2}\,N + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{100} \ \ldots \quad (C')$$

Posons $V_1 = N\,v_1$; $V_2 = N\,v_2$.... etc., en représentant par v_1, v_2.. les rapports entre les survivants aux différents âges et le nombre des naissances : les équations (C) et (C′) deviendront

$$P = N\left\{1 + \frac{v_1}{q} + \frac{v_2}{q^2} + \frac{v_3}{q^3} + \ldots + \frac{v_{100}}{q^{100}}\right\} \ldots \quad (c)$$

$$P = N\left\{\frac{1}{2} + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{100}\right\} \ldots \quad (c')$$

Or, d'après ce qui a été vu au § 83, le polynôme qui multiplie N dans cette dernière équation exprime la durée *moyenne* de la vie à partir de la naissance. On peut donc obtenir cette durée « en divisant le « chiffre de la population par celui des naissances annuelles. »

En faisant usage des documents statistiques relatifs aux années 1841 à 1845 inclus, je trouve ainsi que la vie moyenne en Belgique est de $31^{ans},086$ à partir de la naissance (abstraction faite des mort-nés). Ce nombre diffère très-peu de celui qui a été calculé, § 83, au moyen de la table de mortalité.

§ **87.** — Au nombre des causes qui exercent une action *constante* sur l'accroissement de la population d'une contrée, il faut placer la fécondité propre à l'espèce humaine, la salubrité du pays, les mœurs, les lois civiles et religieuses de la nation que l'on considère. Les causes *variables* résident dans la difficulté croissante qu'éprouvent les habitants à se procurer des subsistances, lorsqu'ils sont devenus assez nombreux pour que toutes les bonnes terres se trouvent occupées. Nous faisons abstraction des causes *accidentelles*, comme les grandes guerres, les épidémies, etc.

Sous l'influence des causes constantes, la population doit croître en progression géométrique : ce fait, évident d'ailleurs par lui-même, a été démontré § 84. Les États-Unis nous offrent un exemple de cette grande vitesse d'accroissement : on y comptait d'après les recensements officiels

En 1790	3 929 827	âmes.
1800	5 305 925	»
1810	7 239 814	»
1820	9 638 131	»
1830	12 866 020	»
1840	17 062 566	»
1850	23 000 000	» *

Ces chiffres montrent que la population y est plus que doublée tous les 25 ans. A la vérité les immigrations y sont très-considérables; mais cette cause est largement compensée par les obstacles que l'esclavage apporte à la multiplication des noirs dans les États du Sud.

Si donc la population, p, croît en progression géométrique, pendant que le temps, t, croît en progression arithmétique, nous aurons

$$a\,t = \log \frac{p}{k}$$

a et k étant des constantes indéterminées. Il en résulte

* Approximativement : nous ne tenons pas compte de la population du Texas, nouvellement annexé.

$$p = k \cdot 10^{at}.$$

Soit p' une population correspondante au temps t' : il viendra

$$p' = k \cdot 10^{at'};$$

d'où
$$p = p' \cdot 10^{a(t-t')};$$

et, si l'on désigne par p_0 la population existante au moment où l'on commence à compter le temps, l'équation précédente deviendra

$$p = p_0 \cdot 10^{at} \quad \ldots \quad (4)$$

La courbe de la population est donc une logarithmique, dans laquelle les abscisses et les ordonnées représentent respectivement les temps écoulés et les populations correspondantes; l'ordonnée à l'origine étant p_0.

Différentiant l'équation (4), et désignant par M le module par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour les convertir en logarithmes vulgaires, on a

$$\frac{dp}{dt} = a\, p_0 \operatorname{Log} 10 \cdot 10^{at} = \frac{a}{M}\, p_0 \cdot 10^{at} = \frac{ap}{M}.$$

Différentiant une seconde fois, on trouve

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{a^2p}{M^2};$$

ce qui fait voir que la courbe tourne constamment sa convexité vers l'axe des abscisses.

En supposant, avec Malthus, que p devienne $2p$, lorsque t devient $t + 25$, l'année étant prise pour unité, on a les équations

$$2p = p_0 \cdot 10^{at + 25a};$$

$$2p = 2p_0 \cdot 10^{at} \quad \ldots \quad (4')$$

d'où
$$2 = 10^{25a};$$

et enfin
$$a = \frac{1}{25} \log 2 = 0,\ 0120412.$$

L'équation trouvée plus haut

$$\frac{dp}{dt} = \frac{ap}{M}$$

donne, en remplaçant les infiniment petits dp, dt, par les quantités *très-petites* Δp, Δt,

$$M\ \Delta p = ap\ \Delta t\,;$$

et si l'on prend Δt pour l'intervalle *d'une* année

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{a}{M}\cdot$$

Telle est l'énergie avec laquelle la population tend à se développer, lorsqu'elle n'est point arrêtée par la difficulté de se procurer des subsistances : on voit que, dans ce cas, l'excès annuel des naissances sur les décès, divisé par la population qui l'a fourni, donne un quotient constant. Aujourd'hui, dans toute l'Europe, le coefficient $\frac{a}{M}$ va sans cesse en s'affaiblissant.

§ **88**. — On peut faire une infinité d'hypothèses sur la loi d'affaiblissement du coefficient $\frac{a}{M}\cdot$ La plus simple consiste à regarder cet affaiblissement comme proportionnel à l'accroissement de la population *normale* P_0 (c'est-à-dire de celle qui existait au moment où la difficulté de trouver de bonnes terres a commencé à se faire sentir). L'excédant $p - P_0$ est la population *surabondante*.

Dans cette hypothèse, l'équation

$$\frac{dp}{pdt} = \frac{a}{M}$$

deviendra

$$\frac{dp}{pdt} = \frac{a}{M} - n\left(\frac{p - P_0}{p}\right) \ldots . \qquad (5)$$

n dénotant un coefficient numérique. On en tire

$$\frac{M}{p}\cdot\frac{dp}{dt} = \frac{ap - np + nP_0}{p} = \frac{nP_0 - (n-a)p}{p}\,:$$

faisant $n - a = m$; $nP_0 = m\,P$, il vient

$$M\frac{dp}{dt} = m\,(P - p)\,;$$

$$dt = -\frac{1}{m}\,\frac{M\,dp}{p - P}\,:$$

ntégrant, $t + \text{Const.} = -\frac{M}{m}\int \frac{dp}{p-P} = -\frac{M}{m} \text{Log}\,(p-P)$:

nous désignons un logarithme népérien par Log et un logarithme vulgaire par log. — On obtient donc en définitive

$$t + \text{Const.} = -\frac{1}{m} \log\,(p-P).$$

Pour déterminer la constante, supposons que pour $t = o$ on ait $p = p_0$; il viendra

$$\text{Const.} = -\frac{1}{m} \log\,(p_0 - P).$$

et par conséquent

$$t = \frac{1}{m} \left\{ \log\,(p_0 - P) - \log\,(p - P) \right\};$$

$$t = \frac{1}{m} \log \left(\frac{P - p_0}{P - p} \right);$$

ou, sous une autre forme,

$$\log\,(P - p) = \log\,(P - p_0) - mt \quad \dots \qquad (6)$$

La courbe de la population, c'est-à-dire celle dont chaque point aurait le temps pour abscisse et la population correspondante pour ordonnée, est donc encore une logarithmique. En mettant son équation sous la forme

$$\frac{1}{mt} = \frac{1}{\log \left(\dfrac{P - p_0}{P - p} \right)},$$

on voit que, pour l'ordonnée *finie* $p = P$, on a l'abscisse $t = \infty$: cette logarithmique a donc une asymptote parallèle à l'axe des abscisses, et qui s'en éloigne d'une quantité P égale à la population *maximum*.

On fait abstraction ici de la période de temps qui répond à la progression géométrique. Si l'on y avait égard, la courbe totale se composerait de deux logarithmiques, se raccordant au point qui a pour ordonnée P_0, et la seconde étant placée inversement à la première, par rapport à l'axe des abscisses.

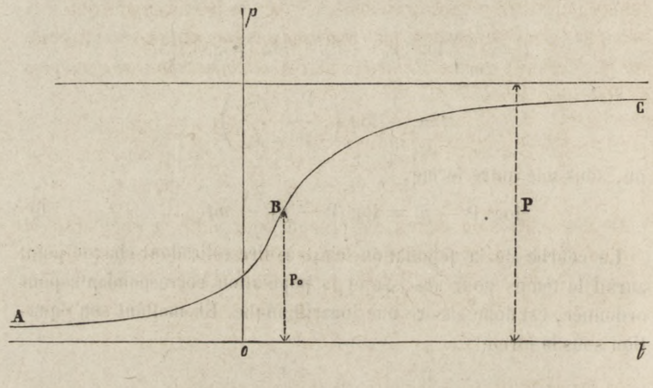
Je dis qu'elles *se raccordent*, car l'équation de la première logarithmique donne, pour $p = P_0$,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{a}{M} P_0\ ;$$

et l'équation (5) fournit, dans la même hypothèse,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{aP_0 - nP_0 + nP_0}{M} = \frac{a}{M} P_0.$$

Ces deux courbes ont donc une *tangente* commune au point dont l'ordonnée est P_0. Leur ensemble donne la figure ci-contre. La population des États-Unis parcourt encore la branche A B; celle des contrées de l'Europe est depuis longtemps sur la branche B C.



§ 89. — Pour déterminer les trois constantes m, P et p_0, nous supposerons que la courbe représentée par l'équation (6) passe par trois points qui aient respectivement pour abscisses et pour ordonnées t_0, t_1, $2\,t_1$, et p_0, p_1, p_2. Cela admis, on déduit immédiatement de l'équation (6), en y remplaçant t par t_1, puis par $2\ t_1$; p par p_1, puis par p_2 :

$$t_1 = \frac{1}{m} \log \left(\frac{P - p_0}{P - p_1} \right),$$

$$2t_1 = \frac{1}{m} \log \left(\frac{P - p_0}{P - p_2} \right);$$

d'où, éliminant m,

$$\log(P - p_0) = \log \frac{(P - p_1)^2}{(P - p_2)},$$

ou, passant aux nombres,

$$P = \frac{p_1^2 - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)} \quad \dots \quad (7)$$

Connaissant P, on aura m par la formule

$$m = \frac{1}{t_1} \log \left(\frac{P - p_0}{P - p_1}\right) \dots \quad (8)$$

Les équations (6), (7) et (8) fournissent la solution du problème dans lequel on se propose de déterminer ce que devient une population donnée, après un temps quelconque. Pour en faire l'application à la Belgique, nous adopterons les éléments suivants, fournis et discutés par M. Verhulst (voyez *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Belgique*, t. xx).

Au 1er janvier 1815, $t_0 = 0$; $p_0 = 3\,627\,253$.
» » 1830, $t_1 = 15$; $p_1 = 4\,247\,113$.
» » 1845, $2t_1 = 30$; $p_2 = 4\,800\,861$.

De ces chiffres on déduit, en prenant pour unité de population le million d'âmes, et pour unité de temps la période décennale :

$$P = 9{,}439000$$
$$m = 0{,}0326563$$
$$\log(P - p) = 0{,}7643107 - 0{,}0326563\,t.$$

Ainsi le maximum de population de la Belgique serait d'environ neuf millions quatre cent mille âmes.

De la combinaison des équations

$$n - a = m;\ nP_0 = mP:$$

on déduit
$$P_0 = \frac{mP}{a + m}.$$

Si l'on admet que la race belge tend à suivre, dans sa multiplication, la même progression géométrique que la race anglo-américaine, on devra prendre

$$a = 0{,}120412,$$

ce qui donnera

$$P_0 = 2{,}0137.$$

Dans cette hypothèse, la population *normale*, c'est-à-dire celle dont le chiffre n'a pu être dépassé sans malaise social, serait donc de deux millions d'âmes.

On trouvera l'époque qui a correspondu à cette population normale, en résolvant par rapport à t l'équation

$$t = \frac{1}{m} \log \left(\frac{P - p_0}{P - P^0} \right) :$$

on en déduit

$$t = -3{,}257 ;$$

c'est donc trente-deux ans et demi avant 1815, ou vers 1782, que la Belgique a dû avoir sa population normale.

§ **90**. — La table de mortalité permet de calculer la *probabilité de la coexistence* de plusieurs individus (celle de la durée des mariages, par exemple), connaissant l'âge de chacun des membres de l'association.

Soient deux associés, par exemple une femme de 23 ans et un mari de 38 : au bout de 10 ans il peut arriver, ou qu'ils existent encore tous deux, ou qu'un seul vive, ou que tous deux soient morts.

La table de mortalité de l'annuaire montre que, sur 500 individus de 23 ans, il en existe encore 440 au bout de 10 ans : la probabilité de vivre encore 10 ans est donc, pour la femme, de $\frac{440}{500}$.

Elle sera de $\frac{340}{400}$ pour le mari, puisque, sur 400 individus de l'âge de 38 ans, il en reste 340 à l'âge de 48 ans.

Les probabilités *contraires* sont respectivement $\frac{60}{500}$ et $\frac{60}{400}$.

De ces probabilités simples résultent les probabilités composées

$\frac{440}{500} \times \frac{340}{400}$ qu'ils existeront encore tous deux ;

$\frac{440}{500} \times \frac{60}{400}$ que le mari sera mort ;

$\frac{340}{400} \times \frac{60}{500}$ que la femme sera morte ;

$\frac{60}{400} \times \frac{60}{500}$ qu'ils seront morts tous deux.

La somme de ces quatre probabilités, représentant la certitude, doit être égale à l'unité.

En général, soient e, e' les probabilités que chaque individu existera encore au terme de l'association; d, d' les probabilités contraires : le développement de

$$(e + d)(e' + d') = ee' + e'd + ed' + dd' = 1$$

fera connaître les quatre probabilités énoncées ci-dessus.

Quand on cherche seulement la probabilité que l'un *quelconque au moins* des deux individus existera encore, on a immédiatement

$$1 - dd'$$

pour sa valeur.

Avec ces probabilités, on peut dresser la table de mortalité particulière à chaque association. Si l'on en suppose, par exemple, mille formées à la fois, et que les probabilités simples e, e', d, d' se rapportent à la première année écoulée depuis cette formation, il y aura, à la fin de cette année,

1000 ee'	associations	qui subsisteront encore;
1000 $e'd$	»	où le plus jeune survivra;
1000 ed'	»	où le plus âgé survivra;
1000 dd'	»	où tous deux seront morts.

Calculant les mêmes nombres pour chaque année, on formera une table pareille à celle que Duvillard a construite pour les mariages, et à l'aide de laquelle on détermine la *durée probable* et la *durée moyenne* de l'association, comme la vie probable et la vie moyenne par la table de mortalité des individus.

Dans ce cas, il faudra, pour plus d'exactitude, prendre e et d suivant la loi de mortalité particulière aux *hommes mariés*, e' et d' suivant celle des *femmes mariées;* car on a remarqué que la mortalité varie avec le sexe et avec l'état-civil.

§ **91.** — Les probabilités de la vie humaine, combinées avec l'accroissement des fonds placés à intérêt composé, ont donné lieu aux *rentes viagères*, aux *assurances sur la vie*, aux *caisses d'épargne*, etc. Nous nous contenterons d'en dire quelques mots, pour faire comprendre le but et le mécanisme de ces spéculations.

Considérons chacun des v individus compris dans la table de mortalité à un âge donné, comme devenant propriétaire d'une *rente* *viagère*, a, ou comme devant, pendant toute la durée de sa vie, toucher annuellement cette somme d'une personne que je nommerai le *banquier*. Chacun des viagers devra verser, au commencement de l'entreprise, un capital A qu'il s'agit de calculer.

Au bout de la première année, les v rentiers sont réduits à v', et le banquier doit payer $v'a$.

Au bout de la deuxième année, il payera $v''a$, et ainsi de suite jusqu'à l'âge où finit la table de mortalité.

Mais si r représente l'intérêt d'un franc, ces rentes successives, rapportées à l'instant où le banquier a touché les capitaux, c'est-à-dire au commencement de la première année, ne lui coûteront que

$$\frac{v'a}{1+r}\,;\quad \frac{v''a}{(1+r)^2}\,;\quad \frac{v'''a}{(1+r)^3}\quad \ldots\text{. etc.}$$

Les v rentiers auront dû verser par conséquent, au commencement de la première année, une somme totale de

$$\frac{v'a}{1+r}+\frac{v''a}{(1+r)^2}+\frac{v'''a}{(1+r)^3}+\ldots\text{. etc.}\,;$$

et chacun d'eux aura payé le capital

$$A=\frac{a}{v}\left\{\frac{v'}{1+r}+\frac{v''}{(1+r)^2}+\frac{v'''}{(1+r)^3}+\ldots\right\}\,;$$

ou bien, faisant $\dfrac{1}{1+r}=q$

$$A=\frac{aq}{v}\left\{v'+v''q+v'''q^2+\ldots\right\}\quad\ldots \tag{9}$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les décès des rentiers avaient lieu *à la fin* de chaque année. Mais comme il n'en est pas ainsi, et que l'on paye aux héritiers une partie de la rente proportionnelle au temps que le rentier a vécu, il faudrait, pour être plus exact, substituer, comme nous l'avons déjà indiqué (§ 82), $\frac{1}{2}(v+v')$ à v'; $\frac{1}{2}(v'+v'')$ à v'', etc....

Ce n'est que pour les premières années de la vie que la marche de la mortalité est irrégulière : plus tard, le nombre annuel des morts devient sensiblement *constant*, et Moivre observe que, sans trop s'écarter de la vérité, on peut n'établir qu'une seule progression depuis 22 ans jusqu'à 86 ans. C'est du reste ce que montre la courbe de mortalité (p. 147) qui est sensiblement *rectiligne* dans cet intervalle.

Cette remarque est propre à simplifier le calcul précédent; car soit d le nombre annuel des morts, la formule (9) deviendra

$$(10)\ldots \mathrm{A}=\frac{aq}{v}\left[(v-d)+(v-2d)q+(v-3d)q^2+\ldots+(v-nd)q^{n-1}\right];$$

n représentant le nombre d'années de la période.

Cette expression se décompose dans les deux suites :

$$\mathrm{A}=\begin{cases} aq\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{n-1}\right) \\ -\dfrac{aqd}{v}\left(1+2q+3q^2+4q^3+\ldots+nq^{n-1}\right). \end{cases}$$

La première suite a pour valeur

$$aq\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

Pour trouver celle de la seconde, observons que

$$(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1})=\frac{d.(1+q+q^2+q^3\ldots+q^n)}{dq}=\frac{d\left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)}{dq}$$

$$=\frac{-(1-q)(n+1)q^n+(1-q^{n+1})}{(1-q)^2}=\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{(n+1)q^n}{1-q}:$$

on a donc enfin

$$(10')\ldots\quad \mathrm{A}=aq\left[\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{d}{v}\left(\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{(n+1)q^n}{1-q}\right)\right].$$

Remarque. Les rentes *sur deux têtes* se calculent d'une manière analogue, en substituant aux probabilités $\frac{v'}{v}$, $\frac{v''}{v}$.... les valeurs successives de la quantité $1-dd'$, qui, avons-nous vu (§ 90), exprime la probabilité de l'existence de l'une au moins des deux personnes sur les têtes desquelles la rente est constituée.

§ **92**. — Nous distinguons deux sortes de *tontines :* dans la première, un certain nombre d'individus du même âge sont supposés verser ensemble une certaine somme A, qui, au bout de n années, doit être partagée entre les survivants, proportionnellement à leurs mises. Cette spéculation peut être assimilée à un *pari* entre chaque associé et tous les autres, pari que le premier gagne s'il vit encore au bout de n années : on peut donc, par la règle de l'espérance mathématique, calculer la somme que lui rapportera une mise déterminée, ou réciproquement, la mise qu'il doit verser pour avoir un droit éventuel à une somme déterminée.

Cherchons, par exemple, la mise que doit verser un individu âgé de 20 ans, pour toucher, à l'âge de 60 ans, une somme probable de 50000 fr. : on aura

$$\frac{x}{q^{60-20}} \times \frac{v_{20}}{v_{60}} = 50000.$$

En effet la mise x prend, pour l'époque du remboursement, la valeur $\frac{x}{q^{60-20}}$; et la somme à recevoir n'étant qu'*éventuelle*, vaut sa valeur absolue, multipliée par la probabilité $\frac{v_{60}}{v_{20}}$ de l'obtenir. Nous représentons par v_{60} et v_{20} les nombres proportionnels d'individus vivant à 60 ans et à 20 ans.

Si l'intérêt de l'argent est de 5 p. °/₀, on a $q = \frac{20}{21}$, et l'on trouve

$$x = 3550 \text{ francs.}$$

La seconde espèce de *tontine* n'est au fond qu'une annuité à terme probable. Dans ce placement, les associés survivants héritent encore des morts; mais ils deviennent *rentiers*, c'est-à-dire qu'on leur sert chaque année une rente qui s'accroît au fur et à mesure des extinctions arrivées.

Soit A la somme placée en commun ; a celle que le banquier paye chaque année à tous les survivants réunis ; n le nombre d'années qui doit s'écouler jusqu'au terme de la table de mortalité : on aura d'après la théorie des annuités

$$(11) \ldots \quad \frac{A}{q^n} = \frac{a}{q^{n-1}} + \frac{a}{q^{n-2}} + \frac{a}{q^{n-3}} + \ldots + a$$

ou

$$(11') \ldots \quad A = a \left\{ \frac{q(1-q^n)}{1-q} \right\}.$$

Telle est la relation qui existe entre la mise totale et la somme à payer annuellement par le banquier. En supposant que cette dernière doit être fournie jusqu'à l'âge *le plus avancé* de la table de mortalité, nous avons raisonné dans l'hypothèse d'un *grand* nombre d'associés : dans le cas contraire, le banquier leur ferait tort en éloignant ainsi l'extinction probable de l'association. En stricte équité, il faudrait, avec Saint-Cyran (*Recherches sur les emprunts*, 2e partie), prendre pour ce terme l'année où il y aura la probabilité $\frac{1}{2}$ que tous les rentiers seront éteints, c'est-à-dire celle pour laquelle le terme $d\,d'\,d''\,d'''\ldots$ (§ 90) deviendra égal à $\frac{1}{2}$.

Si les rentiers ne devaient hériter que d'une *portion* du revenu des décédés, de la moitié par exemple, le banquier aurait à payer, à la fin de la 1re année, $v' + \frac{v - v'}{2} = \frac{v + v'}{2}$ rentes; à la fin de la 2e, $v'' + \frac{v - v''}{2} = \frac{v + v''}{2}$ rentes, et ainsi de suite. On aurait donc, en reportant chaque rente à l'époque du versement,

$$(11'')\ldots\ A = \frac{a}{2v}\left\{(v + v')\,q + (v + v'')\,q^2 + (v + v''')\,q^3 + \ldots \text{etc.}\right\};$$

et chaque rentier toucherait les sommes $\frac{(v + v')\,a}{2\,v'}$ à la fin de la 1re année; $\frac{(v + v'')\,a}{2\,v''}$ à la fin de la seconde, etc.

§ **93**. — La théorie des *caisses de prévoyance, de secours, de retraite*, etc., ne diffère pas beaucoup de celle des rentes viagères sur une seule tête; et celle des *caisses de veuves* ressemble assez à celle des rentes viagères sur deux têtes.

L'idée de ces associations est très-ancienne : une loi de Solon nous apprend que les caisses de prévoyance étaient connues des Grecs; la loi des douze tables prouve que cet usage était également en vigueur chez les Romains. Au moyen-âge, l'Europe était couverte de corporations dont l'organisation primitive avait pour but unique la prévoyance et les secours mutuels; mais aucune règle scientifique ne présidait à leur organisation : tout le monde, sans égard à la différence des âges, payait une cotisation égale. L'idée de versements *proportionnels* naquit en Angleterre en même temps que celle des *assurances sur la vie.*

En 1706, Thomas Allen, évêque d'Oxford, fonda l'*Amicable society*, qui payait aux héritiers des souscripteurs; en 1748, Mac-Laurin publia en Écosse les calculs relatifs à un projet de caisse des veuves et des orphelins; enfin, en 1769, le Dr Price fonda une théorie complète des assurances sur la vie, dans un ouvrage qui eut un immense succès (*Observations on reversionary payments*).

Depuis lors ce genre d'opérations, très-louable en lui-même, s'est propagé dans toute l'Europe; mais il n'a pas tardé à se discréditer par ses abus, dès que la spéculation s'est mise à trafiquer de l'ignorance publique et de la passion naturelle qui pousse l'homme à tenter des hasards séduisants.

Dans les établissements de prévoyance, chaque associé donne, soit une somme une fois payée, soit une somme annuelle, pour avoir droit à une pension dans un âge avancé, ou à des secours en cas de maladie. Il est aisé de voir que, dans le premier cas, si A désigne la somme versée pour recevoir une pension a, après un nombre n d'années, les sommes étant rapportées à l'époque du placement, on aura l'équation

$$(12)\ldots \qquad A = \frac{a}{v}\left\{v_n\, q^n + v_{n+1}\, q^{n+1} + \ldots \text{ etc.}\right\}$$

qui ne diffère de celle des rentes viagères, qu'en ce que la première rente est payée n années après le placement de la somme.

Si l'on verse des mises annuelles A_1, A_2, A_3... il faudra substituer à A la suite

$$(12') \ldots \qquad A_1 + \frac{v_1}{v} A_2\, q + \frac{v_2}{v} A_3\, q^2 + \ldots$$

C'est à ce cas que se rapportent les retenues que l'on fait aux employés de certaines administrations, pour leur assurer des pensions de retraite.

Si la caisse doit fournir des secours pécuniaires en cas de maladie, il faudra introduire dans le second membre de l'équation (12) les produits de ces sommes, rapportées à l'époque du placement, et multipliées chacune par la probabilité de les délivrer. Cette probabilité ne peut être appréciée qu'en étudiant avec soin le nombre et la durée moyenne des maladies, dans la classe d'individus à laquelle la caisse est particulièrement affectée.

La *caisse générale de retraite*, établie en Belgique sous la garantie de l'État, a pour but de fournir à toute personne vivant de son travail les moyens de garantir sa vieillesse contre le besoin, par la constitution d'une rente viagère.

L'acquisition d'une rente peut se faire, au choix de l'assuré, pour entrer en jouissance à 55, 60 ou 65 ans : le prix de la rente est naturellement d'autant moins élevé que l'assuré est plus jeune, et que l'entrée en jouissance est fixée à un âge plus avancé. Ainsi, il faut verser une seule fois, pour acquérir une rente annuelle de 120 francs,

« *Si l'entrée en jouissance est fixée :* »

à 65 ans		Fr.	Ces.	à 60 ans		Fr.	Ces.
à l'âge de	18 ans.	55	00	à l'âge de	18 ans.	97	80
»	25 »	82	50	»	25 »	146	70
»	35 »	146	50	»	35 »	260	30
»	45 »	268	50	»	45 »	477	20

Pour pouvoir acquérir, au bout d'une seule année, une rente annuelle de 12 francs, il faut épargner par jour,

« *Si l'entrée en jouissance est fixée :* »

à 65 ans	Fr.	Ces.	à 60 ans	Fr.	Ces.
de 17 à 18 ans.	»	$1\,^1/_2$	de 17 à 18 ans.	»	$2\,^1/_5$
» 22 à 23 »	»	2	» 24 à 25 »	»	4
» 29 à 30 »	»	3	» 28 à 29 »	»	5
» 34 à 35 »	»	4	» 31 à 32 »	»	6
» 38 à 39 »	»	5	» 34 à 35 »	»	7

De pareilles institutions se recommandent assez par elles-mêmes.

Pour les *caisses de veuves,* si chaque homme marié doit faire un seul versement a, et sa veuve recevoir une fois pour toutes un capital A, le versement deviendra $\frac{a}{q^p}$ pour l'époque probable de son remboursement, puisqu'il doit rester placé pendant la durée probable. p, du mariage. Mais à cette époque, le capital A ne sera payé qu'éventuellement; et, d'après la formule de l'espérance mathématique, il ne vaut que A multiplié par la probabilité ($e'd$) que le mari sera mort et la femme vivante.

Si la condition est encore un seul versement de la part du mari, mais une pension à payer à la veuve, il suffira de substituer au nombre v, dans l'équation (12), le nombre ee' calculé d'après des tables appropriées à la classe d'individus dont il s'agit; et aux nombres v_n, v_{n+1} .... celui des femmes qui deviennent veuves chaque année, lequel est la différence des valeurs de ($e'd$) d'une année à l'autre.

Enfin, si les payements sont faits annuellement, tant par les associés que par la caisse, alors c'est l'équation (12′) qu'il faudra employer, en substituant aux v, v_1, v_2... du premier membre les valeurs successives de ($e\,e'$); et aux v_n, v_{n+1}.... du second membre, celles de ($e'd$) qui désignent le nombre de veuves existantes à la fin de chaque année.

Faisons ici une remarque générale : c'est que toutes les opérations dont nous avons parlé jusqu'ici ont des frais d'administration, qui doivent être supportés par tous les membres de l'association. De plus, tant que l'association est peu nombreuse, la caisse doit prendre quelque avantage, afin de parvenir à former un fonds de réserve qui puisse parer aux irrégularités que la succession des événements présente par intervalles; sinon elle risquerait de se trouver hors d'état de remplir ses engagements. Elle donnera donc un intérêt moins fort que le taux ordinaire, ou fera une retenue sur les sommes versées par les sociétaires.

§ **94.** — Le but des *assurances sur les choses* est de soustraire toute espèce de propriété aux éventualités du hasard, en accordant une compensation pécuniaire à l'*assuré* qui devient victime d'un sinistre. Cette opération était à peine connue il y a quelques siècles : aujourd'hui, par suite du progrès des institutions commerciales et de l'esprit d'association, elle tend à devenir un des actes les plus ordinaires de la vie : dans tous les pays, il existe un grand nombre de compagnies qui assurent les vaisseaux et les marchandises contre les risques de la mer ou de la guerre; les maisons contre les incendies, les récoltes contre les intempéries des saisons, etc.

Pour réduire la question à l'état le plus simple, ne considérons que deux événements, l'un entièrement heureux dont la probabilité soit h; l'autre, malheureux, dont la probabilité soit h' : ce dernier fera payer par l'assureur une somme a. Désignons par n le nombre d'objets assurés (de vaisseaux, par exemple), et par b la *prime* d'assurance, ou la somme que l'assureur reçoit pour chacun d'eux.

Cela posé, la somme des termes du développement de $(h + h')^n$, à partir du 1er terme jusqu'au terme affecté de $h^{n-q}\,h'^q$, exprime (§ 23) la probabilité que le nombre des événements malheureux ne surpassera pas q : poussons cette somme jusqu'au $(q' + 1)^{\text{ème}}$ terme, où elle cesse d'être inférieure à la probabilité à laquelle l'assureur veut arriver de ne pas faire une perte plus grande que c; $q'a - nb$ sera la perte correspondante à cette probabilité. En l'égalant à c, on aura

$$q'a - nb = c;$$

d'où

$$b = \frac{q'a - c}{n}.$$

Désignons maintenant par g le gain que donne l'opération, lorsque le nombre des sinistres est réduit à q'' : nous formerons l'équation

$$nb - q''a = g :$$

y remplaçant nb par sa valeur tirée de l'équation précédente, nous aurons

$$q' - q'' = \frac{c + g}{a};$$

relation qui permettra de calculer q'' au moyen de q' déjà connu. Calculant alors la probabilité correspondante à q'', on verra si elle donne une espérance suffisante d'atteindre au bénéfice que comporte la nature de l'entreprise. Si cela n'était pas, il faudrait augmenter la prime d'assurance.

Mais l'équation

$$q'' = \frac{nb - g}{a}$$

fait voir qu'on peut aussi augmenter la probabilité correspondante à q'', en augmentant le nombre des objets assurés. Et en effet, le rapport $\frac{q'-q''}{n}$ devenant alors de plus en plus petit, la somme des termes compris entre ceux qui sont affectés de $h^{p-q'}h'^{q'}$ et de $h^{p-q''}h'^{q''}$, et qui composent la différence des probabilités de perte et de gain, décroît de plus en plus.

Pour bien concevoir l'usage de ces formules, il est à propos de se former une idée de la marche des valeurs qu'elles prennent dans des cas particuliers : à cet effet, supposons, avec Lacroix, $h=\frac{99}{100}$, $h'=\frac{1}{100}$; et formons les douze premiers termes du développement de $\left(\frac{99}{100}+\frac{1}{100}\right)^{200}$, avec les sommes résultant de l'addition successive de ces termes.

PERTES.	Probabilités.	SOMMES DES Probabilités.	PERTES.	Probabilités.	SOMMES DES Probabilités.
0	0,133980	0,133980	6	0,011727	0,995706
1	0,270667	0,404647	7	0,003283	0,998989
2	0,272034	0,676681	8	0,000800	0,999789
3	0,181355	0,858036	9	0,000172	0,999961
4	0,090220	0,948256	10	0,000033	0,999994
5	0,035723	0,983979	11	0,000005	0,999999

Dans ce tableau, qu'on peut regarder comme exprimant les événements de l'assurance de 200 vaisseaux, soumis chacun au risque de $\frac{1}{100}$, la colonne marquée *probabilités* indique celle de la perte isolée de 0, 1, 2.... 11 bâtiments; et la colonne des *sommes*, la probabilité que la perte n'ira *pas au-delà* du nombre indiqué dans la 1re colonne.

En prenant la valeur de 7 vaisseaux, ou $7a$, pour la somme c, perte extrême; et supposant que l'assureur veuille obtenir une probabilité de 100000 contre 1 que l'événement n'outre-passera pas cette limite, il faudra descendre jusqu'au terme où la somme des probabilités surpasse 0,99999 ; ce qui a lieu au 11ᵉ terme, qui répond à $q' = 10$. Par ce nombre, l'équation

$$b = \frac{q'a - c}{n} \text{ donne } b = \frac{3a}{200},$$

c'est-à-dire un et demi pour cent de la valeur de chaque vaisseau.

Si l'on voulait ensuite connaître la probabilité que le bénéfice de l'assureur ne tombera pas au-dessous d'une certaine limite, par exemple, du 10ᵉ de la somme c, il faudrait prendre $g = 0,7a$, et l'équation

$$q' - q'' = \frac{c+g}{a} \text{ conduirait à } 10 - q'' = 7,7 \text{ ou } q'' = 2,3 ;$$

valeur qui tombera entre celles de q au 3ᵉ et au 4ᵉ terme, auxquels correspondent des probabilités 0,676681, et 0,858036. On peut donc s'arrêter à environ $\frac{3}{4}$. On aurait une probabilité plus forte en donnant une plus grande valeur à b, ce qui diminuerait celle de c.

Dans l'hypothèse établie ci-dessus, il suffit d'aller jusqu'au 4ᵉ terme pour n'être pas encore en perte, puisque celle de 3 vaisseaux est couverte par les primes reçues de tous. L'assureur aura donc la probabilité $0,858036 > \frac{5}{6}$ de ne pas entamer ses fonds.

Quand on porte à 400 le nombre des vaisseaux assurés, et qu'on fait en conséquence le développement de

$$\left(\frac{99}{100} + \frac{1}{100}\right)^{400},$$

pour former un tableau analogue au précédent ; si l'on maintient la prime à 1 $\frac{1}{2}$ p. %, et qu'on cherche la limite de la perte qui correspond à une probabilité de 100000 contre 1, on trouve qu'elle tombe entre le 15ᵉ et le 16ᵉ terme : cela répond à une perte de 14 ou 15 bâtiments, c'est-à-dire à une somme comprise entre $14a$ et $15a$. Mais le produit des primes, étant $6a$, ramène cette limite entre 8 et $9a$.

Quant à la probabilité du gain de la 10ᵉ partie de $9a$, on aurait pour la déterminer l'équation $15 - q'' = 9,9$; ce qui donnerait $q'' = 5$ et mènerait au 6ᵉ terme, où la somme des probabilités est $\frac{4}{5}$ environ.

Enfin, la probabilité que l'assureur n'entamerait pas ses fonds, se formant de la somme des 7 premiers termes du développement calculé, s'élèverait à près de $\frac{9}{10}$.

On voit donc que la limite de perte correspondante à une probabilité de 100000 contre 1, croît avec le nombre des vaisseaux assurés; mais que la probabilité du gain et celle de ne pas entamer les fonds augmentent plus rapidement, ce qui établit l'avantage qu'obtient l'assureur quand il multiplie ses entreprises.

Pour $n = 4000$, on trouverait que la perte limite ne dépasse pas sensiblement $9a$; tandis que la probabilité d'un gain au moins égal à $0,9a$ s'élève à 0,998; et celle de ne pas entamer les fonds, à 0,998866.

De ce que les avantages de l'assureur croissent beaucoup plus rapidement que ses pertes, à mesure qu'il multiplie ses opérations, on doit conclure qu'un gouvernement, qui prendrait le monopole des assurances, réaliserait des bénéfices certains, tout en pouvant diminuer la prime actuelle. Le principe de cette espèce d'assurances est d'ailleurs un principe de haute moralité sociale; il établit entre tous les citoyens un lien de solidarité, car c'est le gain de ceux qui réussissent qui sert à indemniser ceux qui perdent; il se rapproche enfin du principe des *assurances mutuelles* qui ont produit des résultats si avantageux dans quelques grands centres de population.

Note relative au § 85

(page 151).

—

En divisant, pour un pays quelconque, le chiffre de la population par la surface (évaluée en kilomètres carrés), on obtient la *densité* de sa population. Le tableau suivant présente les différents États de l'Europe rangés par ordre de densité de population.

	HABITANTS.			HABITANTS.	
Belgique	148	par kilomètre carré.	Suisse	47	par kilomètre carré.
Hollande	91	»	Portugal	36	»
Grande-Bretagne	79	»	Espagne	25	»
Italie	68	»	Turquie et Grèce	25	»
France	62	»	Danemark	14	»
Empire d'Autriche	56	»	Russie	9	»
Prusse	51	»	Suède et Norwége	6	»
Principautés allem.	51	»			

Ainsi, la population de la Belgique est non-seulement la plus dense de toute l'Europe, mais on peut dire qu'à égale surface de terrain, notre pays est deux fois aussi peuplé que l'Angleterre et la France, et trois fois autant que l'Allemagne.

Cette forte population de la Belgique n'est pas uniformément répandue sur tout son territoire: le tableau suivant montre comment elle est répartie par provinces.

DÉSIGNATION DES PROVINCES.	ÉTENDUE EN HECTARES.	POPULATION	
		TOTALE.	PAR KILOMÈTRE CARRÉ.
Flandre orientale	299 787	779 552	260
Brabant	328 323	721 299	220
Hainaut	372 205	726 609	195
Flandre occidentale	323 448	627 268	194
Liége	289 319	461 760	160
Anvers	283 311	415 693	140
Limbourg	240 719	186 875	77
Namur	366 184	270 786	74
Luxembourg	439 263	190 397	43
Le royaume	2 942 559	4 380 239	148

La Flandre orientale, la plus peuplée de nos provinces, contient donc six fois autant d'habitants, sur une même étendue de terrain, qu'en contient le Luxembourg, province à la fois la plus étendue et la moins peuplée du royaume.

Si l'on cherche à se rendre compte de cette inégale répartition de la population sur le sol belge, on se trouve naturellement conduit à distinguer la bande de sables arides, située au nord du pays, d'avec la contrée de haute culture qui lui succède en marchant vers le sud. On distinguera aussi les terrains houillers d'avec les forêts qui leur succèdent dans les Ardennes belges. Ces causes sont toutes-puissantes sur la distribution de la population, et résultent de la nature du sol qui varie suivant la constitution géologique de ses diverses parties.

Cette remarque nous conduit à faire abstraction des limites *administratives*, qui n'ont aucun rapport avec les limites *géologiques :* alors, si nous réunissons d'une part la population de la bande centrale, qui forme à peu près la moitié de la surface de la Belgique, nous trouvons que sa population moyenne est de 223 habitants par kilomètre carré; tandis que les parties extrêmes, au nord et au sud, ne comptent que 54 habitants par kilomètre carré.

On peut résumer d'une manière très-concise, et qui se grave facilement dans la mémoire, la distribution de la population, en disant que « les cinq sixièmes de « la population belge sont condensés dans une bande de terrain d'environ quinze « lieues de largeur, qui traverse tout le royaume de l'ouest à l'est : le sixième « restant est disséminé au nord, dans des terrains sablonneux, et au sud, dans « des contrées couvertes de forêts. »

TROISIÈME SECTION.

PARTIE PRATIQUE. — PROBABILITÉS APPLIQUÉES.

CHAPITRE HUITIÈME.

Théorie des erreurs. — Précision des observations.

§ **95**. — Toute mesure faite par l'homme est nécessairement entachée d'*erreur :* à force de soins et d'adresse un observateur pourra s'approcher beaucoup de la vérité, mais il ne doit jamais espérer d'atteindre à la vérité elle-même.

Abstraction faite des erreurs grossières, provenant de la négligence ou de la maladresse, et qu'un observateur soigneux parvient toujours à éviter, on peut ranger les erreurs en deux grandes classes : les unes sont constantes ou plutôt *régulières ;* elles se reproduisent identiquement chaque fois que l'observation est répétée dans les mêmes circonstances, et leur grandeur est liée à ces circonstances par des lois déterminées. On voit que cette définition comprend les erreurs qui se rapportent aux causes constantes et aux causes variables (§ 72).

Une série de mesures affectée d'une telle cause d'erreur doit absolument être rejetée, comme impropre à déterminer la vraie valeur de la grandeur observée ; et le talent de l'observateur ou de l'expérimentateur réside principalement dans ce tact, cette sagacité qui lui indiquent, à la première vue, les moyens de se soustraire à l'influence de ces erreurs, d'en analyser les causes, d'en éluder ou d'en corriger les effets. Un mauvais étalonnage des règles destinées à la mesure d'une base, une détermination fautive du point horizontal dans la mesure d'une distance zénithale, l'adoption d'un coefficient de réfraction inexact dans le calcul d'un nivellement trigonométrique, donnent lieu à des erreurs de cette première catégorie.

Celles de la seconde catégorie sont nommées indifféremment erreurs *irrégulières, accidentelles, fortuites* ou *inévitables*. L'observateur le plus soigneux ne peut s'en affranchir complétement; leurs causes sont très-diverses; leur influence sur les résultats n'est assujettie à aucune règle, et ne peut jamais être qu'imparfaitement éliminée. Un pointé inexact, des réfractions latérales, des ondulations de l'atmosphère, des phases du signal, des secousses dues au vent, une lecture imparfaite, etc., donnent lieu à des erreurs de cette espèce dans la mesure des angles.

§ **96.** — Aussi longtemps que, dans nos observations, nous nous bornerons à mesurer ce qui nous est strictement nécessaire, nos résultats ne nous fourniront aucun moyen de contrôle, et les erreurs les plus grossières pourront passer inaperçues. Mais si nous faisons *plus* d'observations qu'il n'est rigoureusement indispensable; si, en d'autres termes, nous nous donnons plus d'équations que d'inconnues, nos opérations se vérifieront l'une par l'autre, et les erreurs accidentelles qui auront été commises feront naître des *contradictions*, des *incompatibilités*, entre les résultats. Par exemple, lorsque nous mesurons trois fois le même angle, les résultats diffèrent en général l'un de l'autre, et la différence qui peut exister entre le premier résultat et l'angle *véritable* est contredite par les deux autres résultats. Si l'on mesure les trois angles d'un triangle, la contradiction se manifestera en ce que chaque angle, *observé* directement, différera du résultat que l'on *calculerait* au moyen des deux autres.

Pour arriver à un résultat que l'on puisse *admettre comme la vérité*, il faut nécessairement faire disparaître ces incompatibilités, et *changer* par conséquent les résultats, de manière à les rapprocher le plus possible de la vérité. Or comme nous n'avons, pour nous renseigner sur la vérité, que le témoignage fourni par les observations, tout changement apporté à ces dernières est un *mal;* mal nécessaire, si l'on veut, mais qu'il faut cependant rendre *le moindre* possible.

On s'écartera le moins possible du témoignage immédiat apporté par l'observation, en réduisant à sa moindre valeur la *somme* des corrections. Mais une erreur pouvant être regardée comme le rayon d'un cercle tracé autour de la vérité comme centre, son *effet* est proportionnel à la *surface* du cercle, ou au *carré* du rayon : il faut donc adopter pour la véritable valeur de l'inconnue « celle qui rend un « minimum la somme des *carrés* des corrections. » Tel est, au point de vue philosophique, l'origine de cette loi importante sur laquelle repose tout ce que nous avons à voir dans cette section : nous l'envisagerons plus loin sous le point de vue mathématique.

En général, soient O_1 ; O_2 ; O_3... les *véritables* grandeurs à trouver par l'observation ; o_1 ; o_2 ; o_3... les grandeurs réellement *observées* ; v_1 ; v_2 ; v_3... les corrections les plus probables à faire subir à celles-ci : nous admettrons, comme s'approchant de la vérité autant qu'il est possible, les résultats $(o_1 + v_1)$; $(o_2 + v_2)$; $(o_3 + v_3)$.... Les observations, ainsi modifiées, ont reçu des auteurs allemands le nom d'observations *compensées* (*observationes compensatæ*, de Gauss ; *ausgeglichene Beobachtungen*, de Gerling).

§ **97**. — Les erreurs accidentelles (les seules dont nous ayons à nous occuper en théorie) sont dues à des *causes* qui peuvent se combiner entre elles. Pour un même genre d'observations, on doit admettre que le nombre de ces causes, ou *chances*, ne varie pas ; et qu'en outre, lorsqu'une même combinaison de causes se représente, elle reproduit la même erreur. Si donc, pour une classe déterminée d'observations, le nombre et l'énergie de ces causes étaient donnés, on pourrait calculer, d'après les probabilités *à priori*, combien de fois une erreur donnée doit se présenter régulièrement, sur un nombre donné d'observations. Mais les *causes* d'erreurs ne se révèlent à nous que par les *erreurs* qu'elles entraînent, de même que les *forces* ne se manifestent que par leurs *effets* : il faut donc recourir aux probabilités *à posteriori ;* c'est-à-dire, de la *grandeur* des erreurs et de leur *répartition*, déduire l'*énergie* et le *nombre* des causes.

Une comparaison bien simple fera mieux saisir notre idée. Comme le *but* de toute bonne opération est d'atteindre à la vérité, les chances d'erreur *en plus* sont les mêmes que les chances d'erreur *en moins* : on peut donc assimiler une observation quelconque au tirage simultané d'un certain nombre de boules hors d'une urne qui contient, *en égale quantité*, un nombre infini de boules blanches et de boules noires. Des causes fortuites feront prendre tantôt plus de boules blanches que de noires, tantôt moins ; ces mêmes causes feront que la mesure prise sera tantôt trop grande, tantôt trop petite. Dans un grand nombre de tirages successifs, ce seront tantôt les boules noires, tantôt les blanches qui prédomineront ; mais la compensation tendra à s'établir entre les deux couleurs, à mesure qu'on multipliera les tirages : de même, dans un grand nombre d'observations, les erreurs positives et les erreurs négatives tendent à s'entre-détruire, et la moyenne s'approche d'autant plus de la vérité qu'on embrasse plus d'observations. Enfin plus le nombre de boules tirées est considérable, plus la probabilité d'un certain *écart relatif* diminue : de même plus le mode d'observation a de *précision*, plus la probabilité d'une erreur donnée sera petite.

Si nous avions à nous occuper des erreurs *régulières*, nous continuerions l'analogie, en disant que l'introduction d'une telle cause d'erreur dans les observations revient à rendre *inégaux* les nombres de boules blanches et de boules noires contenues dans l'urne.

§ **98.** — De ce qui précède, combiné avec ce qui a été dit au § 34, on conclut que, dans toute espèce d'observations, les erreurs accidentelles doivent toujours se répartir suivant la loi de possibilité, exprimée par la formule

$$\text{(a)} \;\ldots\; \qquad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

dans laquelle x est la *grandeur* de l'erreur, y sa *probabilité*, ou le *nombre* d'erreurs de cette espèce qui se présenteront régulièrement, sur un nombre donné d'observations. La courbe représentée par cette équation variera de forme avec les différentes valeurs que l'on attribuera au paramètre h.

Pour une espèce déterminée d'observations, l'expression

$$\text{(a}'\text{)} \;\ldots\; \qquad \mathrm{P} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2x^2}\, dx$$

indique la probabilité qu'une erreur x soit comprise entre les limites *zéro* et a; ou bien le nombre d'erreurs comprises entre ces limites, le nombre total des erreurs étant représenté par l'unité.

Pour une *autre* espèce d'observations, la probabilité qu'une erreur x' tombe entre les limites *zéro* et a' sera exprimée par

$$\mathrm{P}' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'} e^{-h'^2x'^2}\, dx'.$$

Faisons $hx = h'x' = t$: ces deux expressions deviendront

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2}\, dt,$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a'h'} e^{-t^2}\, dt;$$

et elles seront égales si l'on pose

$$ah = a'h'.$$

De cette relation, jointe à la précédente

$$hx = h'x',$$

on déduit

(b) .... $$a' : x' = a : x.$$

Il y aura donc entre *zéro* et a autant d'erreurs x, qu'il y aura d'erreurs x' entre *zéro* et a'; et la probabilité de commettre une erreur x, dans un genre d'observations, sera égale à la probabilité de commettre, dans l'autre, une erreur x'.

De plus, on a

(b') .... $$h : h' = x' : x;$$

les constantes h et h', qui se rapportent aux deux genres d'observations, sont donc inversement proportionnelles aux erreurs également possibles : par suite, on peut dire que l'exactitude des observations est proportionnelle à la grandeur du paramètre h qui leur correspond. Tel est le motif pour lequel Gauss a nommé ce paramètre « *la mesure de la précision* » (*mensura præcisionis; das Mass der Präcission oder der Genauigkeit*). On le trouve désigné, chez les auteurs français, sous le nom de *module de précision* ou *de convergence*.

Pour deux espèces d'observations également précises, on a $h = h'$: les courbes qui représentent les possibilités des erreurs fortuites, dans chaque genre d'observations, sont traduites algébriquement par une même équation, et elles sont superposables, comme deux paraboles de même paramètre.

Si les observations sont inégalement précises, l'une des courbes est plus resserrée que l'autre, à droite et à gauche de l'axe des y, et le resserrement vers cet axe se fait proportionnellement à la mesure de précision. (Voyez § 38.) On peut aussi représenter par une courbe la possibilité des erreurs du résultat d'un nombre n d'observations : dans ce cas, si les observations sont également précises, mais inégalement nombreuses, le resserrement vers l'axe se fait proportionnellement à $\sqrt{n} : \sqrt{n'}$. Si les observations étaient inégalement précises et inégalement nombreuses, le rapport deviendrait $h\sqrt{n} : h'\sqrt{n'}$.

La table dont nous avons parlé § 39, et qui se trouve à la fin de cet ouvrage, donne, pour toutes les valeurs nécessaires de t, les valeurs numériques de l'intégrale

$$P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=o}^{t=ah} e^{-t^2}\,dt;$$

elle indique donc, pour les valeurs successives de ah, la répartition des erreurs suivant leur ordre de grandeur, ou le nombre de ces erreurs qui tombent entre les limites $+ ah$ et $- ah$: la surface totale de la courbe et le nombre total des erreurs sont représentés par 1. On y voit que, depuis $t = o$ jusqu'à

$t = \pm$ 0.5	on a l'intégrale =	0,520
$t = \pm$ 1,0	»	0,843
$t = \pm$ 1,5	»	0,966
$t = \pm$ 2,0	»	0,995.

En d'autres termes, si nous représentons la surface totale par 1000, il tombera, sur 1000 observations,

520	erreurs	entre	$t = 0$	et	$t = \pm$ 0,5
323	»	»	$t = 0{,}5$		$t =$ 1,0
123	»	»	$t = 1{,}0$		$t =$ 1,5
29	»	»	$t = 1{,}5$		$t =$ 2,0.

On voit donc que le nombre des erreurs comprises entre des intervalles égaux décroît très-rapidement, à mesure que t augmente, ou que les erreurs deviennent plus grandes. Depuis $t = 2$ jusqu'à $t = \infty$ il ne tomberait que 5 erreurs.

§ **99**. — Parmi les différentes valeurs de t, il en est une très-remarquable : c'est celle pour laquelle l'intégrale P_2 acquiert la valeur $\frac{1}{2}$. Si, dans une longue série d'observations, on rangeait les erreurs suivant leur ordre de grandeur, sans avoir égard à leurs signes, cette valeur de t les diviserait en deux parties numériquement égales. La valeur de x correspondant à cette valeur de t montre jusqu'où il faut étendre les limites de l'erreur, pour avoir la probabilité $\frac{1}{2}$ que, dans une observation subséquente, on ne commettra pas une erreur plus grande que cette limite. Plus cette limite est resserrée, plus, naturellement, les observations sont précises.

En recourant à notre table, on trouve par interpolation que la valeur $\frac{1}{2}$ de l'intégrale P_2 correspond à

$$t = 0{,}476936 = \rho\,;$$

de sorte que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=o}^{t=\rho} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}.$$

Cette valeur de t, calculée une fois pour toutes, est applicable à tous les cas ; mais il n'en est pas de même pour la valeur de x qui lui correspond. En effet, comme on a $t = hx$, et que h varie avec la précision des observations, on conçoit que les limites de x se resserreront pour de bonnes observations, s'étendront pour de mauvaises, tandis qu'elles peuvent être supposées constantes pour une seule et même espèce d'observations.

Si l'on désigne par r cette valeur de x pour laquelle $t = \rho$, on aura, pour une certaine espèce d'observations,

(c) ... $$\rho = h.r\,;$$

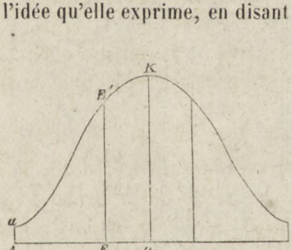
pour une autre espèce, on aurait

$$\rho = h'.r'\,:$$

d'où $$h.r = h'.r',$$

ou bien (c') ... $$r : r' = h' : h.$$

Les astronomes allemands ont donné à la quantité r le nom d'*erreur probable* (*der wahrscheinliche Fehler*). Comme sa considération est très-importante, nous insisterons sur l'idée qu'elle exprime, en disant que c'est l'abscisse O E de la courbe de possibilité, dont l'ordonnée correspondante E E' divise la surface A O K *a* en deux segments équivalents : il y a donc numériquement *autant* d'erreurs *plus petites* que r, que d'erreurs *plus grandes* ; et il est *aussi probable*, dans une série d'observations, de commettre une erreur inférieure à r que d'en commettre une qui lui soit supérieure.



Quand on a en vue des observations de qualités différentes, la proportion (c') montre que « les erreurs probables sont en raison « inverse des mesures de précision. » De là vient que plusieurs auteurs prennent l'erreur probable pour module de précision.

Cournot donne à r le nom de valeur *médiane* de l'écart; d'autres auteurs français, Laplace, Poisson, Puissant, etc., l'appellent erreur *moyenne*. Il est bon d'observer ici que nous attachons un sens différent à cette dernière expression, comme nous le dirons bientôt.

On a réduit en table les valeurs de l'intégrale P_2, en prenant la quantité r pour unité. (Voir la table n° 3, page 406.) Par ce moyen, on trouve immédiatement le nombre d'erreurs comprises entre *zéro* et x, lorsque l'on connaît le *rapport* de x à *l'erreur probable*, $\frac{x}{r}$, ou le rapport *égal*, $\frac{t}{\rho}$. Cette disposition fait apercevoir plus clairement la répartition des erreurs suivant leur ordre de grandeur; elle montre par exemple que, sur 1000 erreurs, il s'en trouve 500 plus petites que r; 823 sont moindres que $2r$, 957 moindres que $3r$, et 993 moindres que $4r$. *Une* seule erreur est plus grande que $5r$.

On en déduit les tableaux suivants :

ON PEUT PARIER	QUE L'ERREUR NE DÉPASSERA PAS
1 contre 1	$1{,}00.\ r\ ;\ x = 0{,}4769$
1 » 2	$1{.}43.\ r\ ;\ x = 0{,}6841$
1 » 4	$1{,}90.\ r\ ;\ x = 0{.}9062$
1 » 8	$2{,}36.\ r\ ;\ x = 1{,}1266$
1 » 16	$2{,}80.\ r\ ;\ x = 1{.}3362$
1 » 32	$3{,}21.\ r\ ;\ x = 1{,}5318$
1 » 64	$3{,}59.\ r\ ;\ x = 1{,}7133$
1 » 128	$3{.}95.\ r\ ;\ x = 1{,}8818$
1 » 256	$4{,}28.\ r\ ;\ x = 2{,}0410$
1 » 512	$4{,}59.\ r\ ;\ x = 2{,}1900$
1 » 1024	$4{,}88.\ r\ ;\ x = 2{.}3300$

ON PEUT PARIER			QUE L'ERREUR NE DÉPASSERA PAS
1	contre	1	1 fois l'erreur probable.
4,6383	»	1	2 » »
22,239	»	1	3 » »
158,59	»	1	4 » »
1384,0	»	1	5 » »
20000	»	1	6 » »

L'ordonnée, y_1, qui correspond à l'erreur probable, étant comparée à l'ordonnée maximum, Y, de la courbe de possibilité, vaut 0,7963 Y, comme le montre la formule

$$y_1 : Y = 1 : e^{t^2}$$

dans laquelle on ferait $t = 0,476936$. La probabilité de l'erreur probable est donc à peu près les $\frac{4}{5}$ de la probabilité d'une erreur nulle.

§ **100.** — La liaison que nous venons de reconnaître entre le paramètre h et l'erreur probable r, nous montre maintenant comment la connaissance de l'erreur probable d'une espèce d'observations permet d'effectuer le tracé géométrique de la courbe de possibilité des erreurs.

Prenons, par exemple, pour unité des abscisses une longueur quelconque ; calculons h en fonction de r par la formule (c)

$$h = \frac{0,476936}{r};$$

et nous pourrons construire la courbe par points au moyen de la relation

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Il existerait une autre voie pour parvenir à la connaissance de h :

ce serait de connaître l'ordonnée correspondant à une valeur particulière *quelconque* de x. Supposons, par exemple, que l'on nous donne l'ordonnée Y correspondant à $x = o$: nous en déduirons immédiatement

$$(d) \ldots \qquad h = Y\sqrt{\pi}.$$

Il suffirait même de connaître le *rapport*, m, de deux ordonnées correspondantes aux abscisses x et x' : on aurait alors

$$(d') \ldots \qquad m = \frac{e^{-h^2x^2}}{e^{-h^2x'^2}} = \frac{1}{e^{-h^2(x'^2 - x^2)}};$$

d'où l'on déduirait par logarithmes la valeur de h.

Si, pour plus de simplicité, on choisit pour l'une de ces ordonnées celle qui correspond à $x = o$, on aura

$$(d'') \ldots \qquad m = \frac{1}{e^{-h^2x'^2}}.$$

On en déduit ce théorème important que nous invoquerons souvent dans la suite :

« Quand la probabilité d'une erreur nulle est à celle d'une erreur « x' comme $1 : e^{-p\,x'^2}$, on doit, pour l'espèce d'observations qui s'y « rapporte, prendre la mesure de précision égale à $\sqrt{p}$. »

Ayant ainsi déterminé h, on peut comparer entre elles, sous le rapport de la précision, des observations qui ont été faites même sur des grandeurs hétérogènes (par exemple des mesures d'angles avec des mesures de longueur): il suffit pour cela que l'on puisse exprimer les valeurs relatives de h en fonction des unités qui ont servi dans chacun des deux cas.

101. — Comme exemple de l'accord qui règne entre la théorie et l'expérience, nous choisirons une série de 470 observations faites par Bradley, le modèle des observateurs suivant l'expression de Laplace, pour déterminer directement la différence d'ascension droite entre le soleil et l'une des deux étoiles Ataïr et Procyon. Bessel, qui a discuté ce sujet, a trouvé que l'erreur probable $r = 0'',2637$; d'où $0'',1 = 0,3792\,r = 0,3792$, en prenant r pour unité. Cherchant ensuite le nombre d'erreurs qui, suivant la théorie, doivent tomber entre $0'',0$ et $0'',1$; $0'',2$; $0'',3$..., il a calculé, au moyen de la table mentionnée au § 99 (table n° 3), la valeur de l'intégrale P_2 pour ces diverses limites *. On trouve ainsi :

Pour	0″,1 . . .	0,3792	le nombre	0,20186,
»	0 ,2 . . .	0,7584	»	0,39102,
»	0 ,3 . . .	1,1376	»	0,55705,
»	0 ,4 . . .	1,5168	»	0,69372,
»	0 ,5 . . .	1,8960	»	0,79904,
»	0 ,6 . . .	2,2752	»	0,87511,
»	0 ,7 . . .	2,6544	»	0,92661,
»	0 ,8 . . .	3,0336	»	0,95926,
»	0 ,9 . . .	3,4128	»	0,97866,
»	1 ,0 . . .	3,7920	»	0,98983,
	. . .	∞	»	1,00000.

Si l'on retranche chaque nombre du suivant, et qu'on multiplie le reste par le nombre des observations, ou par 470, on trouve

ENTRE	NOMBRE DES ERREURS.	D'APRÈS la théorie.	D'APRÈS l'observation.
0″,0 et 0″,1	0,20186	95	94
0 ,1 — 0 ,2	0,18916	89	88
0 ,2 — 0 ,3	0,16603	78	78
0 ,3 — 0 ,4	0,13667	64	58
0 ,4 — 0 ,5	0,10532	50	51
0 ,5 — 0 ,6	0,07607	36	36
0 ,6 — 0 ,7	0,05150	24	26
0 ,7 — 0 ,8	0,03265	15	14
0 ,8 — 0 ,9	0,01940	9	10
0 ,9 — 1 ,0	0,01117	5	7
au delà de 1 ,0	0,01017	5	8

* Notre table n° 2 permettrait aussi de calculer ce tableau, mais en faisant chaque fois une proportion analogue à la suivante : l'erreur probable r est placée au rang 0,4769; l'erreur 0,3792 est placée au rang x ; d'où $x = 0,1818$. En face de ce rang on trouve 0,20186.

Il arrive fréquemment, comme ici, que l'observation présente *plus* de grandes erreurs que la théorie n'en prévoit. Cela prouve la légitimité de l'hypothèse que nous avons faite (§ 55) en intégrant le dénominateur entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, au lieu de l'intégrer entre des limites finies; car *le contraire* aurait lieu si l'inexactitude de notre hypothèse devait avoir quelque influence dans la pratique.

CHAPITRE NEUVIÈME.

Détermination du résultat le plus exact déduit de plusieurs observations. — Précision de ce résultat.

(UNE SEULE INCONNUE A DÉTERMINER.)

—

§ **102.** — Supposons maintenant que l'on ait à combiner un grand nombre d'observations pour en déduire le résultat le plus exact et évaluer ensuite la précision que peut avoir ce résultat. Nous allons d'abord traiter le cas le plus simple, celui où l'on n'a qu'*une seule* inconnue à déterminer; et le premier pas que nous avons à faire est de démontrer que :

« La valeur la plus probable de l'inconnue sera la moyenne arithmétique prise entre tous les résultats d'observation. »

Soit O la quantité à déterminer : on a fait un nombre p d'observations ayant donné pour résultats les quantités o', o'', o'''... de sorte que l'on peut poser

$$\begin{aligned} O - o' &= x' \\ O - o'' &= x'' \\ O - o''' &= x''' \ldots \\ &\vdots \\ O - o_p &= x_p \,. \end{aligned}$$

A ces *erreurs* x', x'', x'''.... x_p correspondront les probabilités

$$y' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x'^2} \ldots$$

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x''^2} \ldots \text{ etc.}$$

h est constant parce que les observations sont supposées d'égale précision.

Si l'inconnue O était déterminée de telle manière, qu'entre sa valeur réelle et les différents résultats d'observation o', o'', o'''... les erreurs x', x'', x'''... existassent réellement, cette inconnue serait exactement déterminée ; et l'on aurait $o'+x'=o''+x''=o'''+x'''\ldots = \mathrm{O}$. Mais dans l'impossibilité où l'on est de connaître les erreurs d'observation, il est clair qu'on ne pourra pas non plus trouver la valeur rigoureuse de O : tout ce que l'on pourra faire, ce sera de la déterminer de manière que la probabilité, P, de la coexistence des erreurs x', x'', x'''.... x_p s'approche le plus de la certitude; en d'autres termes, il faudra faire en sorte que la quantité

$$\mathrm{P} = y' \cdot y'' \cdot y''' \ldots y_p$$

soit un *maximum*.

Or, cette condition revient à

$$\mathrm{P} = \frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\, e^{-h^2(x'^2 + x''^2 + x'''^2 \ldots + x_p^2)} = maximum\ ;$$

d'où

$$(\mathrm{f})\ \ldots \qquad x'^2 + x''^2 + x'''^2 \ldots + x_p^2 = minimum\ ;$$

ou bien

$$(\mathrm{O} - o')^2 + (\mathrm{O} - o'')^2 + (\mathrm{O} - o''')^2 \ldots (\mathrm{O} - o_p)^2 = minimum.$$

En adoptant une notation très-commode, dont nous ferons dorénavant un fréquent usage, et qui consiste à poser

$$[o] = o' + o'' + o''' + \ldots + o_p$$
$$[o^2] = o'^2 + o''^2 + o'''^2 + \ldots + o_p^2$$

nous mettrons l'expression précédente sous la forme

$$p\,\mathrm{O}^2 - 2\,[o]\,\mathrm{O} + [o^2].$$

On peut donc écrire

$$\mathrm{P} = \frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\, e^{-h^2 \left\{ p\,\mathrm{O}^2 - 2\,[o]\,\mathrm{O} + [o^2] \right\}},$$

ou bien

$$(\mathrm{e})\ \ldots \qquad \mathrm{P} = \frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\, e^{-h^2 \left\{ [o^2] - \frac{[o]^2}{p} + p\left(\mathrm{O} - \frac{[o]}{p}\right)^2 \right\}}.$$

Le terme qu'il faut rendre un minimum est donc

$$\left(\mathrm{O} - \frac{[o]}{p}\right)^2 ;$$

différentiant et égalant à zéro, on trouve

$$(\mathrm{f}')\ldots\qquad \mathrm{O}=\frac{[o]}{p}=\frac{o'+o''+o'''+\ldots+o_p}{p};$$

ce qui démontre que la valeur la plus probable de O est la moyenne arithmétique prise entre tous les résultats immédiats fournis par l'observation.

Les formules (f) et (f′) sont très-importantes : les propriétés qu'elles expriment sont admises par beaucoup d'auteurs comme des axiomes, et leur démonstration *directe* est regardée comme impossible *. Il ne faut pas se dissimuler en effet que la marche que nous venons de suivre, quoique parfaitement rigoureuse en apparence, repose sur une espèce de *postulatum,* savoir la loi de répartition des erreurs suivant la courbe de possibilité.

§ **103**. — Il s'agit maintenant d'estimer la précision de cette valeur de O.

D'après l'équation (e), la probabilité correspondante à la valeur

$$\mathrm{O}=\frac{[o]}{p}$$

sera

$$(\mathrm{e}')\ldots\qquad \mathrm{P}=\frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\,e^{-h^2\left\{[o^2]-\frac{[o]^2}{p}\right\}}.$$

Pour $\mathrm{O}=\frac{[o]}{p}+x'$, la probabilité correspondante serait

$$(\mathrm{e}'')\ldots\qquad \mathrm{P}'=\frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\,e^{-h^2\left\{[o^2]-\frac{[o]^2}{p}+px'^2\right\}}\ldots$$

Divisant (e′) par (e″),

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'}=\frac{1}{e^{-h^2px'^2}}.$$

$h\sqrt{p}$ est donc (§ 100) la *mesure de précision* de la moyenne arithmétique entre p observations dont la précision individuelle est h ; de sorte que la probabilité que cette moyenne soit en erreur de x est donnée par la formule

* « Quippè quæstio hæc per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limi- « tibus circumscribi nisi per principium aliquatenùs arbitrarium nequit. » Gauss, *Theoria combinat. observat.*, etc. (§ 6).

$$y = \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2px^2};$$

ou, en faisant $h\sqrt{p} = \mathrm{H}$,

$$y = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\pi}} e^{-\mathrm{H}^2x^2}.$$

Si, au lieu de faire p observations, on en faisait p', la mesure de précision de la moyenne arithmétique serait $h\sqrt{p'}$: les précisions des deux moyennes seraient donc entre elles comme $\sqrt{p} : \sqrt{p'}$. On conclut de là que « la précision d'une moyenne arithmétique croît comme « la racine carrée du nombre d'observations qui ont concouru à la « former. »

§**104**. — On nomme *poids* d'une valeur (*Pondus; das Gewicht*) le nombre d'observations également précises, requis pour que leur moyenne arithmétique ait la même précision que la valeur donnée, la précision de chaque observation simple étant prise pour unité de précision. Dans le cas actuel, le poids de O est p, quand on prend pour unité de poids celui de chaque observation simple *.

Si, dans l'équation $\quad \mathrm{H} = h\sqrt{p} \ \ldots \qquad$ (g)

on prend h pour unité de précision, on aura

$$p = \mathrm{H}^2 \ \ldots \qquad (g')$$

« Le poids de la moyenne est donc égal au carré de sa mesure de « précision. »

Si la moyenne provenait d'un autre nombre, p', d'observations, on aurait

$$p' = \mathrm{H}'^2;$$

d'où $\quad p : p' = \mathrm{H}^2 : \mathrm{H}'^2 \ \ldots \qquad$ (g'')

« Les poids des valeurs les plus probables sont donc entre eux « comme les carrés de leurs mesures de précision. »

De ce que les poids sont comme les carrés des mesures de précision, il résulte que si deux quantités x, y, étaient de précisions différentes, H, H', « on les ramènerait à la même unité de précision, en « les multipliant par les racines carrées de leurs poids. »

En effet, x étant rapporté à l'unité H, deviendra Hx si on le rap-

* Il faut observer que certains auteurs nomment *poids*, ce que nous avons appelé *mesure de précision*.

porte à l'unité 1 ; de même alors y deviendra $H'y$; et ces expressions, en vertu du rapport (g''), peuvent être changées en $x\sqrt{p}$ et $y\sqrt{p'}$.

Soit R l'erreur probable de la moyenne arithmétique

$$O = \frac{[o]}{p}$$

on aura (c)

$$R = \frac{\rho}{H} = \frac{\rho}{h\sqrt{p}} = \frac{r}{\sqrt{p}} \; \ldots \qquad \text{(h)}$$

Donc « si r est l'erreur probable de chacune des p observations, $\frac{r}{\sqrt{p}}$ sera l'erreur probable de leur moyenne arithmétique. »

Pour p' observations, on aurait

$$R' = \frac{\rho}{H'} :$$

donc $$H : H' = R' : R ;$$

ou bien $$p : p' = R'^2 : R^2 \; \ldots \qquad \text{(h')}$$

c'est-à-dire que « les poids sont réciproquement proportionnels aux « carrés des erreurs probables. »

§ **105**. — Lorsque l'on substitue à O sa valeur la plus probable $\frac{[o]}{p}$, les différences $\frac{[o]}{p} - o' = \varepsilon'$; $\frac{[o]}{p} - o'' = \varepsilon''$.... etc., que l'on remarque entre le calcul et l'observation, doivent être considérées comme les erreurs d'observation *les plus probables*, et nous les admettons comme les erreurs *réelles*, aussi longtemps que nous n'avons pas de nouveau moyen d'approcher davantage de la véritable valeur O. La somme des carrés de ces erreurs doit, avons-nous vu (e'), être égale à

$$[o^2] - \frac{[o]^2}{p} = [\varepsilon^2] \; \ldots \qquad \text{(k)}$$

Pour exprimer commodément cette somme, nous aurons recours à une nouvelle notion, celle de l'*erreur moyenne*. Avec les auteurs allemands, nous entendons par erreur moyenne (*der mittlere Fehler*) *,

* On l'appelle aussi quelquefois l'*erreur à craindre* (*der zu befürchtende Fehler*).

« la quantité qu'on obtient en divisant la somme des carrés des « *erreurs réelles* par le nombre des observations, et en extrayant en- « suite la racine carrée du quotient. »

Désignons-la par ε_2; nous aurons, pour le cas actuel :

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[o^2] - \frac{[o]^2}{p}}{p}};$$

ou bien
$$p\,\varepsilon_2^2 = [o^2] - \frac{[o]^2}{p} = [\varepsilon^2] \;\ldots \qquad (k')$$

Cette dernière équation nous donne une seconde définition de l'erreur moyenne : on voit que c'est « une erreur telle, que si elle « existait seule dans chacune des p observations indistinctement, la « somme des carrés de ces p erreurs égales serait la même que la « somme des carrés des p erreurs inégales ε', ε'', ε'''.... etc. »

§ **106**. — D'après cela, la probabilité de la coexistence des p erreurs d'observation, quelque hypothèse que l'on veuille faire sur la valeur de h, est (e')

$$P = \frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}}\, e^{-h^2 p\,\varepsilon_2^2} \;\ldots \qquad (e''')$$

De cette expression, on peut maintenant déduire la valeur la plus probable de h; car, comme les p erreurs d'observation ont eu lieu réellement, et que ε_2 est par conséquent invariable, le maximum de la fonction P dépendra uniquement de la valeur de h ; et la valeur la plus probable de h sera celle qui rend cette fonction un maximum.

Cherchons d'abord ce maximum par le procédé du calcul différentiel : passant aux logarithmes népériens nous avons :

$$\text{Log}\, P = p\,\text{Log}\, h - \frac{1}{2}\, p\,\text{Log}\, \pi - h^2 p\,\varepsilon_2^2 \;\ldots \qquad (e^{iv})$$

La condition du maximum sera donc

$$\frac{p}{h} - 2\,h\,p\,\varepsilon_2^2 = 0;$$

$$1 = 2\,h^2\,\varepsilon_2^2;$$

d'où
$$h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}} \;\ldots \qquad (l)$$

Telle est l'expression de la mesure de précision en fonction de l'erreur moyenne.

Pour une autre espèce d'observations on aurait

$$h' = \frac{1}{\varepsilon'_2 \sqrt{2}};$$

et par suite

$$h^2 : h'^2 = \varepsilon'^2_2 : \varepsilon^2_2 \ldots \qquad (l')$$

d'où, à cause de (g''),

$$p : p' = \varepsilon'^2_2 : \varepsilon^2_2 \ldots \qquad (l'')$$

Ainsi « les poids sont réciproquement proportionnels aux carrés des « erreurs moyennes. »

Si l'on suppose

$$p' = 1, \; \varepsilon'_2 = 1,$$

il vient

$$p = \frac{1}{\varepsilon^2_2} \ldots \qquad (l''')$$

C'est par cette relation que Gauss définit le poids qu'il appelle « une « quantité réciproque au carré de l'erreur moyenne. »

Remarque. Soit η_2 l'erreur moyenne de l'*unité* de poids : on tirera de (l'')

$$\eta^2_2 = p\,\varepsilon^2_2 \ldots. \qquad (l^{\text{IV}}).$$

Telle est l'expression de l'erreur moyenne de l'unité de poids.

La formule (l) nous permet d'exprimer l'erreur *probable* en fonction de l'erreur *moyenne*, et réciproquement. On sait en effet (c) que

$$r = \frac{\rho}{h} = \frac{0,476936}{h},$$

d'où

$$r = 0,476936 \times \varepsilon_2 \sqrt{2};$$

ou enfin

$$r = 0,674489\, \varepsilon_2 = \frac{2}{3}\, \varepsilon_2 \qquad \text{en nombres ronds};$$

$$\varepsilon_2 = 1,482604\, r = \frac{3}{2}\, r \qquad \text{en nombres ronds.}$$

Appliquant les logarithmes, on a

$$\log r = 9,6784601 - \log h$$
$$\log r = 9,8289749 + \log \varepsilon_2$$
$$\log \varepsilon_2 = 0,1710251 + \log r.$$

§ 107. — Si, dans l'expression (l) de h, on remplace ε_2 par sa valeur, on obtient

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\,\dfrac{[o^2] - \dfrac{[o]^2}{p}}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left\{\dfrac{[o^2]}{p} - \left(\dfrac{[o]}{p}\right)^2\right\}}}:$$

ainsi « le carré de $\frac{1}{h}$ est égal au double de l'excès de la valeur moyenne « du carré de la variable, sur le carré de sa valeur moyenne. »

Lorsque le nombre des observations est infini, ou que la variable est assujettie à la loi de continuité, le carré de la valeur moyenne devient (§ 74)

$$\left(\int_a^b ydx\,.\,x\right)^2,$$

et la valeur moyenne du carré $\int_a^b ydx\,.\,x^2$.

On a donc

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\left[\int_a^b ydx\,.\,x^2 - \left(\int_a^b ydx\,.\,x\right)^2\right]}};$$

la fonction y étant assujettie à la condition

$$\int_a^b ydx = 1,$$

puisque cette expression représente l'aire de la courbe de possibilité.

En continuant à raisonner dans l'hypothèse d'un nombre infini d'observations, le carré de l'erreur moyenne est, d'après sa définition,

$$\varepsilon_2^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ydx\,.\,x^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} ydx} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\,.\,x^2}{1}.$$

Pour intégrer le numérateur, observons que

$$d\,(e^{-x^2}\,.\,x) = e^{-x^2}\,dx - 2\,e^{-x^2}\,.\,x^2\,dx\,;$$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,.\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}.x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Le premier terme du second membre disparaît pour $x = \pm \infty$; donc

$$\varepsilon_2{}^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx :$$

mais $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y dx = 1 ;$$

donc $$\varepsilon_2{}^2 = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70711 ,$$

ce qui nous ramène à la proportion du § précédent :

$$\frac{r}{\varepsilon_2} = \frac{0,47694}{0,70711}$$

$$r = 0,67449\ \varepsilon_2 .$$

L'erreur moyenne correspond à un point très-remarquable de la courbe de possibilité : c'est celui pour lequel la courbe marche le plus rapidement vers l'axe des abscisses, et en même temps, c'est le point d'inflexion de la branche.

En effet la tangente de l'angle d'inclinaison de la courbe a pour valeur

$$\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . x ;$$

différentiant de nouveau, et égalant à zéro :

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\, x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = o ;$$

d'où $$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \varepsilon_2 .$$

Telle est l'abscisse à laquelle correspond le maximum de l'angle d'inclinaison de la courbe sur l'axe des x.

D'ailleurs l'expression précédente, mise sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[x^2 - \frac{1}{2} \right] ,$$

montre que le coefficient différentiel du second ordre change de signe, dans le passage de $x^2 < \frac{1}{2}$ à $x^2 > \frac{1}{2}$. Il y a donc inflexion au point dont l'abscisse est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

§ **108**. — Au lieu de trouver la valeur de h par une simple différentiation, nous allons employer maintenant un autre procédé qui a l'avantage de faire connaître les limites probables de h, et par suite celles de l'erreur probable.

Pour cela, nous allons regarder P comme une fonction de la variable h; soit P′ la valeur de P correspondante à une valeur un peu différente de h, ou à $h + \Delta$: nous aurons (§ 106)

$$\text{Log } P' = p \text{Log}(h + \Delta) - \frac{1}{2} p \text{Log}\,\pi - (h + \Delta)^2 p\, \varepsilon_2{}^2.$$

Remplaçons p Log $(h + \Delta)$ par l'expression

$$p \text{Log}\, h + p \text{Log}\left(1 + \frac{\Delta}{h}\right),$$

et développons la partie entre parenthèses : il vient

$$\text{Log } P' = p \text{Log}\, h - \frac{1}{2} p \text{Log}\,\pi - h^2 p\, \varepsilon_2{}^2 - 2p\, h\, \Delta\, \varepsilon_2{}^2 - p\, \Delta^2\, \varepsilon_2{}^2$$
$$+ p \frac{\Delta}{h} - \frac{1}{2} p \frac{\Delta^2}{h^2} + \frac{1}{3} p \frac{\Delta^3}{h^3} - \frac{1}{4} p \frac{\Delta^4}{h^4} \cdots$$

Le trois premiers termes du second membre forment précisément la valeur (e^{IV}) de Log P : donc

$$\text{Log}\left(\frac{P'}{P}\right) = \left(\frac{p}{h} - 2p\, h\, \varepsilon_2{}^2\right)\Delta - \left(\frac{p}{2h^2} + p\, \varepsilon_2{}^2\right)\Delta^2$$
$$+ \frac{1}{3} \frac{p}{h^3} \Delta^3 - \frac{1}{4} \frac{p}{h^4} \Delta^4 + \cdots$$

La valeur la plus probable de h doit rendre P un maximum absolu, donc Log $\left(\frac{P'}{P}\right)$ *toujours* négatif, quel que soit Δ. Le coefficient de Δ doit donc être égal à zéro, ce qui nous mène de nouveau à la valeur (I)

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}.$$

Eu égard à cette condition, il vient

$$\log\left(\frac{P'}{P}\right) = -\frac{p\,\Delta^2}{h^2}\left\{1 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{h} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{h^2}\ \ldots\right\}.$$

Comme $\frac{\Delta}{h}$ est une très-petite fraction, on peut, dans la série, négliger tous les termes, sauf le premier, ce qui revient à faire abstraction des termes du troisième ordre : il reste alors

$$\frac{P'}{P} = e^{-\frac{p\,\Delta^2}{h^2}},$$

ou

$$\frac{P}{P'} = e^{\frac{p\,\Delta^2}{h^2}}. \qquad (d''')$$

La probabilité d'une erreur nulle sur la détermination de h est donc à celle d'une erreur Δ, comme

$$\frac{1}{e^{-\frac{p\,\Delta^2}{h^2}}};$$

et l'on doit par conséquent prendre (§ 100) pour mesure de précision de cette détermination la quantité

$$h' = \frac{\sqrt{p}}{h}\ \ldots \qquad (m)$$

L'erreur probable de cette détermination est (c), (l)

$$\frac{\rho h}{\sqrt{p}} = \frac{\rho}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\ \ldots \qquad (m')$$

Il y a donc un à parier contre un que la véritable valeur de h est comprise entre

$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}} + \frac{\rho}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}$$

et
$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}} - \frac{\rho}{\varepsilon_2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}\,;$$
ou qu'elle est égale à
$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left\{1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{p}}\right\} \ldots \qquad (m'')$$

La précision de l'erreur probable r dépendant de celle de h, il y a un à parier contre un que r est compris entre les limites
$$\frac{\rho\sqrt{2}}{1+\frac{\rho}{\sqrt{p}}}\,\varepsilon_2 \text{ et } \frac{\rho\sqrt{2}}{1-\frac{\rho}{\sqrt{p}}}\,\varepsilon_2 \ldots \qquad (m''')$$

Ces limites peuvent être remplacées, dans la pratique, par les limites un peu plus larges (*)
$$r = \varepsilon_2\,\rho\sqrt{2}\left(1 \mp \frac{\rho}{\sqrt{p}}\right) \ldots \qquad (m^{\text{iv}})$$
qui, traduites numériquement, deviennent
$$r = 0{,}674489\,\varepsilon_2\left(1 \mp \frac{0{,}476936}{\sqrt{p}}\right) \ldots \qquad (m^{\text{v}}$$

§ **109.** — Pour terminer ce qui a rapport à ce sujet, observons que la valeur (k′) de ε_2, savoir
$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p}},$$
que nous avons donnée dans le § 105, n'est pas rigoureusement *l'erreur moyenne*, telle que nous l'avons définie dans ce même paragraphe : c'est plutôt, suivant l'expression de Gerling, *l'écart moyen* par rapport à la moyenne (*der mittlere Abweichung vom Mittel*). En effet $\frac{[o]}{p}$ n'est pas la valeur *réelle* de l'inconnue O, mais sa valeur *la plus probable ;* les erreurs ε', ε'', ε'''... sont donc fautives, et par suite, les valeurs trouvées pour ε_2, r, et h, le sont également.

(*) En regardant l'incertitude $\frac{\rho}{\sqrt{p}}$ de l'erreur probable comme une petite quantité du premier ordre dont on peut négliger les puissances supérieures.

Pour nous élever à une valeur plus rigoureuse de ε_2, remarquons que, si nous regardons maintenant notre moyenne calculée comme différant de la valeur réelle O, cela revient à *ajouter* mentalement, aux observations qui ont été faites, une observation fictive parfaitement exacte, et à regarder notre moyenne calculée, comme une véritable *observation*.

Or, parmi nos observations o', o'', o'''.... il peut s'en trouver quelques-unes qui soient exactement égales à la moyenne, et cependant nous leur attribuons, comme aux autres, l'erreur moyenne ε_2; il faut donc attribuer la même erreur à notre moyenne supposée observée. L'introduction d'une observation fictive parfaitement exacte augmente donc notre $[\varepsilon^2]$ d'un nouvel $\varepsilon_2{}^2$; mais elle ne change rien aux p observations existantes sur lesquelles doit être répartie la somme $[\varepsilon^2] + \varepsilon_2{}^2$: nous aurons donc

$$p\,\varepsilon_2{}^2 = [\varepsilon^2] + \varepsilon_2{}^2\,;$$

d'où

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p-1}} \;\ldots \qquad (\mathrm{k}'')$$

Telle est l'équation dont on se sert dans la pratique pour calculer l'erreur moyenne d'une espèce d'observations.

L'erreur moyenne de la moyenne arithmétique entre les p observations sera (§ 106)

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\mathrm{R}}{\rho\sqrt{2}} = \frac{\rho}{h\sqrt{p}\,.\,\rho\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \times \frac{1}{h\sqrt{2}}\,;$$

d'où enfin

$$\mathrm{E}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{p}} \;\ldots \qquad (\mathrm{k}''')$$

ou bien

$$\mathrm{E}_2 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p\,(p-1)}} \;\ldots \qquad (\mathrm{k}^{\mathrm{iv}})$$

§ **110**. — Nous avons indiqué sommairement (§ 104) comment, par la considération des poids, on ramènerait à la même unité de précision des observations inégalement précises. Nous allons développer maintenant cette importante considération du *poids*.

D'après la définition que nous avons posée, imaginons une série d'observations *d'inégale* précision ; imaginons, à côté, une autre série d'observations *d'égale* précision. Chaque observation de la première série peut être regardée comme la *moyenne* d'un certain nombre d'observations de la seconde : l'une quelconque de ces dernières sera *l'unité de poids;* et le nombre d'unités de poids qu'il faudrait réunir pour que sa moyenne eût la même précision que l'une des premières observations, est le *poids* de celle-ci.

Si les observations o', o'', o'''.... que l'on a faites (§ 102) pour déterminer la quantité O ont des poids différents p', p'', p'''.... nous les réduirons à la même unité de précision en multipliant chacune des erreurs dont elles sont affectées par la racine carrée du poids correspondant. La quantité à rendre un minimum sera donc alors

$$p'(\mathrm{O}-o')^2+p''(\mathrm{O}-o'')^2+p'''(\mathrm{O}-o''')^2+\ldots+p_n(\mathrm{O}-o_n)^2=[px^2].$$

On en tire

$$\frac{d\,[px^2]}{d\,\mathrm{O}}=2p'(\mathrm{O}-o')+2p''(\mathrm{O}-o'')+2p'''(\mathrm{O}-o''')+\ldots 2p_n(\mathrm{O}-o_n):$$

égalant ce coefficient différentiel à zéro, on obtient

$$(\mathrm{F}')\ \ldots \qquad \mathrm{O}=\frac{p'o'+p''o''+p'''o'''+\ldots+p_n o_n}{p'+p''+p'''\ \ldots+p_n}=\frac{[po]}{[p]}.$$

La valeur la plus probable est donc encore la *moyenne* des observations, en donnant à ce mot la signification indiquée au § 74. Si nous faisions tous les poids égaux, nous retomberions sur l'équation (f').

Notre dernière valeur de O montre que l'unité de poids est *arbitraire;* car en adoptant une autre unité, nous ne ferions qu'introduire un facteur commun qui disparaîtrait comme se trouvant à la fois au numérateur et au dénominateur.

Cette même valeur de O est précisément celle que l'on trouve en statique, lorsque l'on calcule la position du *centre de gravité* d'une droite, chargée en des points o', o'', o'''.... de *poids* p', p'', p'''.... Si les poids devenaient égaux, la position du centre de gravité serait donnée par la formule (f').

Remarquons enfin que la formule (F') justifie un procédé pratique, généralement employé lorsqu'on veut obtenir un angle au moyen de plusieurs séries de répétitions. Dans ce cas, on multiplie le résultat fourni par chaque série, par le *nombre* de répétitions qui lui correspond, et l'on divise la somme des produits par la somme des nombres de répétitions : c'est qu'ici l'unité de poids est l'observation simple.

§ **111.** — Au lieu de désigner par 1 l'erreur moyenne de l'unité de poids, désignons-la par η_2 : nous aurons (§ 106, *remarque*)

$$\eta_2{}^2 = p'\,\varepsilon'^2 = p''\,\varepsilon''^2 = p'''\varepsilon'''^2 \ldots;$$

et en général $$\varepsilon_n = \frac{\eta_2}{\sqrt{p_n}} \quad \ldots \qquad (\mathrm{k^v})$$

C'est l'erreur moyenne d'une observation quelconque, en fonction de son poids, et de l'erreur moyenne de l'unité de poids.

Comme d'ailleurs le nombre d'observations de l'unité de poids est représenté par.... $p' + p'' + p''' + \ldots\ldots$, l'erreur moyenne de la moyenne arithmétique, et celle de l'unité de poids, seront en raison inverse des racines carrées des nombres d'observations correspondantes (k'''); donc :

$$\frac{E_2}{\eta_2} \quad \frac{1}{\sqrt{p' + p'' + p''' + \ldots}};$$

ou bien $$E_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt{p' + p'' + p''' + \ldots}} = \frac{\eta_2}{\sqrt{[p]}} \quad \ldots \qquad (\mathrm{k^{vi}})$$

équation que l'on peut mettre aussi sous la forme suivante

$$E_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt{\dfrac{\eta_2{}^2}{\varepsilon'^2} + \dfrac{\eta_2{}^2}{\varepsilon''^2} + \dfrac{\eta_2{}^2}{\varepsilon'''^2} + \ldots}}$$

ou enfin $$E_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]}} \quad \ldots \qquad (\mathrm{k^{vii}})$$

Nous pouvons assigner un poids, P, à la moyenne arithmétique, aussi bien qu'à nos observations individuelles, en fonction de la même unité de poids : nous aurons toujours la relation

$$\eta_2{}^2 = \mathrm{P}.\, E_2{}^2$$

d'où, (kᵛⁱ), $$\mathrm{P} = p' + p'' + p''' + \ldots = [p];$$

théorème analogue au principe de statique en vertu duquel la résultante des forces parallèles de la pesanteur passe par le *centre de gravité* et est *égale à leur somme*.

§ **112.** — Pour apprécier l'erreur moyenne de l'unité de poids, nous raisonnerons identiquement comme nous l'avons fait (§ 109) pour déterminer l'erreur moyenne d'une observation isolée ; c'est-à-dire que nous chercherons d'abord son *écart* moyen.

Or, les équations

$$\eta_2^2 = p' \varepsilon'^2 \;;\; \eta_2^2 = p'' \varepsilon''^2 \;;\; \eta_2^2 = p''' \varepsilon'''^2 \ldots$$

que nous supposons en nombre n, étant ajoutées, donnent

$$n \,.\, \eta_2^2 = p' \varepsilon'^2 + p'' \varepsilon''^2 + p''' \varepsilon'''^2 + \ldots$$

d'où

$$n \,.\, \eta_2^2 = [p\, \varepsilon^2] \,,$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{[p\,\varepsilon^2]}{n}} \ldots \qquad (k^{\text{VIII}})$$

Cette valeur de η_2 indiquerait la quantité *moyenne* dont l'unité de poids s'écarte *de la moyenne* des observations. Si nous voulons qu'elle exprime l'*erreur* moyenne, dans la véritable acception du mot, il faudra supposer que l'unité de poids ait été *observée* une fois de plus *exactement*, et ajouter par conséquent à nos *observations* une fois le carré de l'erreur moyenne. On en déduit

$$n \,.\, \eta_2^2 = [p\, \varepsilon^2] + \eta_2^2$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{[p\,\varepsilon^2]}{n-1}} \ldots \qquad (k^{\text{IX}})$$

§ **113.** — Nous allons présenter quelques applications numériques des principes exposés dans ce chapitre. Outre leur utilité pratique, elles éclaireront peut-être quelques points obscurs que pourraient avoir laissés nos explications.

Premier exemple. — On a mesuré 14 fois un angle au théodolite, et l'on a obtenu les valeurs successives inscrites dans la seconde colonne du tableau suivant.

On a pris la moyenne O des résultats, et formé les différences $(O - o) = (x)$ portées dans la troisième colonne.

Enfin on a mis dans une dernière colonne les carrés de ces différences.

NUMÉROS DES Observations	VALEURS DES o.	VALEURS DES x.	VALEURS DES x^2.
1	17° 56′ 45″,00	− 5″,37	28,84
2	31 ,25	+ 8 ,38	70,22
3	42 ,50	− 2 ,87	8,24
4	45 ,00	− 5 ,37	28,84
5	37 ,50	+ 2 ,13	4,54
6	38 ,33	+ 1 ,30	1,69
7	27 ,50	+12 ,13	147,14
8	43 ,33	− 3 ,70	13,69
9	40 ,63	− 1 ,00	1,00
10	36 ,25	+ 3 ,38	11,42
11	42 ,50	− 2 ,87	8,24
12	39 ,17	+ 0 ,46	0,21
13	45 ,00	− 5 ,37	28,84
14	40 ,83	− 1 ,20	1,44
»	$[o] = 554{,}79$	+27, 78 −27, 75	$[x^2] = 354{,}35$

Nous en déduisons $O = \frac{[o]}{14} = 39'',63$ et nous avons en premier lieu $O = 17^\circ\ 56'\ 39'',63$ pour la véritable grandeur de l'angle, autant que nous puissions conclure sa valeur de ces seules observations.

Pour calculer l'erreur moyenne d'une observation isolée, et celle du résultat moyen, nous aurons recours aux formules (k″) et (k$^{\text{IV}}$) : nous avons :

$$\begin{array}{lll} \log\ [x^2] = 2{,}54943 & \log\ \varepsilon_2^2 = 1{,}43549 & \varepsilon_2 = \pm\ 5'',22 \\ c\ .\ \log\ 13 = 8{,}88606 & \log\ E_2^2 = 0{,}28936 & E_2 = \pm\ 1{,}40 \\ c\ .\ \log\ 14 = 8{,}85387. & & \end{array}$$

Ainsi, nous ne devons pas *craindre* d'erreur plus grande que celle qui nous donnerait, pour une observation subséquente, $34'',41$ au minimum et $44'',85$ au maximum. Pour ce qui concerne la moyenne, la véritable grandeur de l'angle mesuré doit se trouver entre $38'',23$ et $41'',03$: cette valeur est plus précise que celle d'une mesure isolée, dans le rapport de $\sqrt{14}$ à 1 (ou $3\,{}^3/_4$ fois plus précise).

Pour avoir les erreurs *probables*, il faudrait ajouter aux log. de ε_2 et de E_2 le log. 9,82898 : on trouverait ainsi $r = \pm 3'',52$, $R = \pm 0'',94$; et l'on pourrait parier un contre un qu'une observation subséquente sera comprise entre $36'',11$ et $43'',15$; et la véritable valeur de l'angle entre $38'',69$ et $40'',57$.

Enfin pour avoir les limites probables de ε_2 et E_2, il faut commencer par les multiplier (§ 108) par $\dfrac{0,476936}{\sqrt{14}}$, ce qui donne $\mp$ 0,67 et $\mp$ 0,18 : il y a un à parier contre un que ε_2 n'est pas plus petit que $4'',55$, ni plus grand que $5'',89$; et que E_2 n'est pas plus petit que $1'',22$, ni plus grand que $1'',58$.

Deuxième exemple.—Littrow (*Theoret. und pract. Astron.*) a trouvé pour la latitude de l'observatoire d'Ofen les 10 résultats suivants.

	47° 29′ 11″ ,5
	12 ,2
	12 ,8
	11 ,2
	11 ,7
	12 ,3
	11 ,5
	11 ,9
	12 ,4
	12 ,5
moyenne	47° 29′ 12″ ,00

La somme des carrés des erreurs est $2'',42$;

l'erreur probable d'une observ. est $0,67449\sqrt{\dfrac{2,42}{9}} = 0'',35$;

celle du résultat ... $\dfrac{0'',35}{\sqrt{10}} = 0'',110$

l'incertitude probable de ce résultat ... $\rho \cdot \dfrac{0'',110}{\sqrt{10}} = \mp 0'',017.$

Troisième exemple. — Dans son mémoire sur la détermination de la densité moyenne de la terre, publié en 1798, Cavendish rapporte les résultats de 29 expériences qui lui ont donné pour cette densité moyenne (celle de l'eau étant prise pour unité) les valeurs suivantes.

5,50	5,55	5,57	5,34	5,42	5,30
5,61	5,36	5,53	5,79	5,47	5,75
5,88	5,29	5,62	5,10	5 63	5,68
5,07	5,58	5,29	5,27	5,34	5,85
5,26	5,65	5,44	5,39	5,46	

La moyenne est 5,48 ; la somme des carrés des écarts 1,1967.

L'erreur moyenne d'une observation isolée est . .	0,207	=	ε_2
» » du résultat	0,0384	=	E_2
» probable d'une observation isolée.	0,159	=	r
» » du résultat.	0,0259	=	R
La précision du résultat.	18,745	=	H
» d'une observation isolée.	3,48	=	h

N. B. En 1837, Reich a refait à Freiberg les expériences de Cavendish, et a trouvé, pour la moyenne de 57 observations, le nombre 5,44 : les deux résultats s'accordent dans les limites de l'erreur moyenne.

On sait que Maskelyne avait trouvé 4,5 seulement, mais par un procédé entièrement différent.

Quatrième exemple. — Dumas a fait une série d'expériences très-soignées, dans la vue de déterminer, avec un nouveau degré de précision, la composition de l'eau, et de vérifier la loi théorique du docteur Prout, d'après laquelle tous les équivalents chimiques seraient des multiples exacts de l'équivalent chimique de l'hydrogène. Ainsi, le poids d'hydrogène qui entre dans la composition d'un poids donné d'eau, étant représenté par 1, le poids d'oxygène doit être, suivant Prout, représenté par le nombre entier 8 ; ou bien, le poids d'oxygène étant 100, le poids correspondant d'hydrogène sera 12,5. Or, une série de 19 expériences a donné à Dumas, toutes corrections effectuées, des nombres que nous rangerons par ordre de grandeur de la manière suivante.

S 12,472	S 12,491	P 12,547
S 12,480	S 12,496	S 12,550
P 12,480	P 12,508	P 12,550
P 12,489	S 12,522	S 12,551
S 12,490	S 12,533	P 12,551
P 12,490	S 12,546	P 12,562
P 12,490		

Les lettres S et P désignent respectivement les expériences dans lesquelles on a employé l'acide sulfurique et l'acide phosphorique comme corps desséchants.

La moyenne est 12,515; la somme des carrés des écarts est 0,0175.

L'erreur moyenne du résultat est $E_2 = \sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{19 \times 18}} = 0{,}00711$;

Celle d'une observation isolée est $\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{[\varepsilon^2]}{18}} = 0{,}03101$;

La mesure de précision du résultat $H = \dfrac{1}{E_2\sqrt{2}} = 99{,}421$.

Si l'on substitue cette dernière valeur pour H dans l'équation

$$t = Hx$$

et qu'on y fasse $x = 0{,}015$, on en tirera $t = 1{,}492$; et la valeur correspondante de P sera (voyez la table n° 2) $P = 0{,}965$. Ainsi en admettant que les nombres du tableau précédent soient affranchis de l'influence de toute cause constante d'erreur, il y aurait environ 30 à parier contre 1, que l'erreur qui affecte la moyenne 12,515 tombe au dessous de 0,015 en plus ou en moins. Réciproquement, si l'on admet, par des vues *à priori*, et pour satisfaire à la loi de Prout, la valeur 12,500, il y a 30 à parier contre 1 que les nombres de Dumas, quelques soins que cet habile chimiste ait apportés dans ses recherches, sont affectés d'une cause constante d'erreur, tendant à donner des valeurs trop fortes.

Cinquième exemple. — Dans les observations de Bradley, citées à la fin du § 101, on voit que 94 valeurs sont tombées entre 0″ et ± 0″,1, et 36 entre ± 0″,5 et ± 0″,6. La probabilité d'une erreur nulle est donc à celle d'une erreur $0'',55$, comme $94 : 36$; et l'on a, d'après le théorème du § 100,

$$94 : 36 = 1 : e^{-0,3025\, h^2},$$

en prenant la seconde pour unité des erreurs. — On déduit de cette équation

$$h = 1,781$$

d'où

$$\varepsilon_2 = 0'',397$$

$$r = 0'',2677.$$

Ce dernier résultat diffère très-peu de celui qu'a adopté Bessel. Si on le compare à l'erreur probable d'une observation de Cavendish (3e *exemple*), on verra qu'il en est presque exactement le double. En d'autres termes, les deux observateurs avaient une égale facilité à se tromper, l'un de 2 dixièmes de seconde sur une différence d'ascension droite, l'autre de un dixième sur la densité de la terre. Ceci explique la remarque que nous avons faite à la fin du § 100.

Sixième exemple. — Deux observations o', o'' du même angle ont été faites avec le même instrument et dans les mêmes circonstances ; mais la première repose sur 10 répétitions et la seconde sur 15. Pour les réduire à la même unité de précision il faut connaître leurs poids : or le plus simple est ici de prendre une observation individuelle pour unité de poids, et de faire par conséquent $p' = 10$, $p'' = 15$. Mais on pourrait choisir toute autre unité de poids, en s'astreignant seulement à la condition $p' : p'' = 10 : 15 = 2 : 3$. Le rapport des précisions sera toujours exprimé par $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ et celui des erreurs moyennes par $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Si nous posions $p' = 2$, $p'' = 3$, l'unité de poids serait la moyenne entre 5 répétitions.

Si les deux angles avaient été observés une seule fois chacun, mais avec des théodolites différents, il faudrait commencer par chercher, comme dans le premier exemple, l'erreur moyenne correspondant à chacun des deux instruments. Supposons qu'on ait trouvé $\varepsilon' = 10''$; $\varepsilon'' = 5''$; alors les poids devront être déterminés de telle manière qu'on ait $p' : p'' = 25 : 100 = 1 : 4$. — Ici, nous prendrons naturellement l'observation o' pour unité de poids, et nous attribuerons à o'' un poids quadruple ou une précision double. Mais si nous avions quelque motif de préférer, pour unité de poids, les observations faites avec un troisième théodolite dont nous nous servirions habituellement, et dont l'erreur moyenne serait, par exemple, de $7''$, alors les produits $p'\varepsilon'^2$, $p''\varepsilon''^2$ devraient être égaux à $\eta_2{}^2$ (§ 112), d'où $p' \times 100 = p'' \times 25 = 49$; ou enfin

$$p' = \frac{49}{100}\,;\; p'' = \frac{49}{25}\,\cdot$$

Septième exemple. — Reprenons les angles rapportés dans le premier exemple, mais en ayant égard cette fois au nombre de répétitions de chacun d'eux : pour cela, nous adopterons d'abord une unité de poids qui sera ici l'observation simple ; p ne sera donc autre chose que le nombre de répétitions inscrit dans le registre d'observations, et le tableau suivant se comprendra de lui-même.

Nos d'ordre.	p	o	po	x	px	x^2	px^2
1	5	45″,00	225,00	− 5,22	− 26,10	27,248	136,24
2	4	31 ,25	125,00	+ 8,53	+ 34,12	72,761	291,04
3	5	42 ,50	212,50	− 2,72	− 13,60	7,398	36,99
4	3	45 ,00	135,00	− 5,22	− 15,66	27,248	81,74
5	3	37 ,50	112,50	+ 2,28	+ 6,84	5,198	15,59
6	3	38 ,33	115,00	+ 1,45	+ 4,35	2,103	6,31
7	3	27 ,50	82,50	+ 12,28	+ 36,84	150,798	452,39
8	3	43 ,33	130,00	− 3,55	− 10,65	12,603	37,81
9	4	40 ,63	162,50	− 0,85	− 3,40	0,723	2,89
10	2	36 ,25	72,50	+ 3,53	+ 7,06	12,461	24,92
11	3	42 ,50	127,50	− 2,72	− 8,16	7,398	22,19
12	3	39 ,17	117,50	+ 0,61	+ 1,83	0,372	1,12
13	2	45 ,00	90,00	− 5,22	− 10,44	27,248	54,49
14	3	40 ,83	122,50	− 1,05	− 3,15	1,103	3,31
»	64	»	1830,00	»	+ 91,04 − 91,16	»	1167,03

Après avoir formé $[p\,o]$ on calcule, d'après la formule (F'),

$$O = \frac{1830}{46} = 39'',78.$$

L'erreur moyenne d'une observation simple, ou de l'unité de poids, se calculera avec le secours de la formule (k^{ix}) : on trouve ainsi

$$\eta_2 = \pm 9'',475;$$

celle de la moyenne arithmétique, par la formule (k^{vi}) :

$$E_2 = \pm 1'',397;$$

celle de chaque observation, eu égard à son poids, par la formule (k^{v}): on a donc,

pour les observations (10) et (13). . . . . $\varepsilon_2 = \pm 6'',70$;
» (4),(5),(6),(7),(8),(11),(12),(14) $\varepsilon_2 = \pm 5\;,47$;
» (2) et (9) . . . . $\varepsilon_2 = \pm 4\;,74$;
» (1) et (3) . . . . $\varepsilon_2 = \pm 4\;,24$.

Les observations que nous venons de citer ont été faites par des élèves, avec un théodolite qui, entre les mains d'un observateur exercé, a donné $\eta_2 = 6'',5$: elles sont donc de *moitié* moins exactes qu'elles pourraient l'être, puisque $\left(\frac{9,475}{6,5}\right)^2 = 2$ à peu près; et si l'on voulait joindre le résultat précédent à celui qu'aurait déjà obtenu un bon observateur, il faudrait, au lieu de $[p] = 46$, prendre $[p] = 23$.

Première remarque. — En général, avant de combiner des moyennes dont chacune a son poids particulier, il faut d'abord chercher si elles sont rapportées à la même unité de poids : si cela n'est pas, il faut faire ce que nous appellerons la *réduction des poids*.

Supposons, par exemple, qu'un aide ait mesuré un angle par 58 répétitions ; et qu'avec son résultat, $O_1 = 51'',34$, $[p_1] = 58$, il nous ait communiqué son registre d'observations. Ce dernier document nous permettra de calculer son ε_2, s'il ne l'a déjà fait lui-même : soit $\varepsilon_2 = 9''$. Supposons en outre que nous ayons mesuré le même angle avec un autre instrument, ou dans d'autres circonstances, et trouvé

$$O_2 = 42'',53;\ [p_2] = 25;\ \varepsilon_2' = 4''.$$

Nous n'adopterons pas simplement, pour valeur de l'angle,

$$\frac{O_1 + O_2}{2}$$

ni même, en n'ayant égard qu'aux nombres de répétitions,

$$\frac{[p_1]\,O_1 + [p_2]\,O_2}{[p_1] + [p_2]};$$

car cette formule suppose la même unité de poids. Mais avec le secours des deux ε différents, nous *réduirons* les poids, c'est-à-dire que nous changerons les $[p]$, de manière qu'ils se rapportent à la *même* unité de poids, au lieu de se rapporter à l'observation simple de chacune des deux séries. Nous pouvons effectuer cette *réduction*, soit en conservant l'une des unités de poids proposées et changeant l'autre; soit, si nous avons quelque motif de le faire, en adoptant une *nouvelle* unité de poids.

Si nous voulons, par exemple, conserver $[p_2] = 25$, et désigner par R les poids réduits, nous aurons (k‴)

$$E_2^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{[p_1]} = \frac{\varepsilon'^2_2}{R_1}, \text{ d'où } \frac{R_1}{[p_1]} = \frac{\varepsilon'^2_2}{\varepsilon_2^2} = \frac{16}{81}:$$

$$R_1 = \frac{16}{81} \times 58 = 11{,}4568.$$

Les 58 répétitions de l'aide valent donc autant que 11,4568 des nôtres, et le résultat définitif est par conséquent

$$\frac{R_1\,O_1 + [p_2]\,O_2}{R_1 + [p_2]} = 45'',30.$$

Si nous avions voulu conserver $[p_1] = 58$, nous aurions eu

$$R_2 = \frac{81}{16}[p_2] = \frac{81}{16} \times 25 = 126{,}563:$$

d'où
$$\frac{[p_1]\,O_1 + R_2\,O_2}{[p_1] + R_2} = 45'',30, \text{ comme ci-dessus.}$$

Deuxième remarque. — En suivant les exemples numériques que nous venons de traiter, on aura remarqué que les calculs présentent une partie assez pénible : c'est la formation des *carrés* des erreurs. On peut cependant l'éviter, et n'employer au calcul de l'erreur probable que la somme des *premières* puissances des erreurs, comme Encke l'a fait voir (*Berliner astronomisches Jahrbuch*, für 1834).

Sans suivre l'auteur dans les développements théoriques qu'il donne à ce sujet, nous nous contenterons de rapporter sa formule, qui est :

$$r = \varepsilon_1 \rho \sqrt{\pi} \left\{ 1 \mp \frac{\rho}{\sqrt{p}} \sqrt{\pi - 2} \right\} \cdots \qquad (m^{vi})$$

ou, en nombres,

$$r = 0{,}845347\ \varepsilon_1 \left\{ 1 \mp \frac{0{,}509584}{\sqrt{p}} \right\} \ldots \qquad (m^{vii})$$

ε_1 représente ici la moyenne arithmétique de toutes les erreurs, abstraction faite de leurs signes. On voit que cette formule a, sur la formule (m^v), le désavantage de donner pour l'erreur probable des limites plus larges : ces limites sont dans le rapport de $\sqrt{\pi - 2}$ à 1, ou de $\sqrt{114}$ à $\sqrt{100}$. Par conséquent 100 observations, lorsqu'on emploie les carrés des écarts, donnent pour l'erreur probable des limites aussi resserrées que 114 observations, lorsqu'on fait usage des premières puissances.

D'ailleurs l'erreur probable, exprimée en fonction de l'erreur moyenne ε_2, est $r = \varepsilon_2 \rho \sqrt{2}$; égalant ces deux valeurs de r, on en déduit pour les limites de l'erreur moyenne :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 \mp \frac{\rho}{\sqrt{p}} \sqrt{\pi - 2} \right\};$$

ou, en nombres,

$$\varepsilon_2 = 1{,}2533 \,.\, \varepsilon_1 \left\{ 1 \mp \frac{0{,}509584}{\sqrt{p}} \right\}.$$

Baeyer a employé cette dernière formule pour calculer l'erreur moyenne de la mesure d'un angle dans sa triangulation (*die Küstenvermessung*, § 97). La somme des valeurs absolues de 311 erreurs angulaires est 84″,0938 : il en déduit

$$\varepsilon_2 = 0'',339 \mp 0,''010$$

ou un tiers de seconde à très-peu près.

Huitième exemple. — Dans une triangulation, l'exactitude avec laquelle on obtient la longueur d'un côté quelconque dépend de plusieurs circonstances qui influent sur la détermination du *poids* de ce côté. Ces circonstances sont :

1° La précision avec laquelle la base a été mesurée ;

2° La grandeur de la base relativement à celle du côté en question ;

3° La précision de la mesure d'un angle ;

4° Le nombre de triangles intermédiaires entre la base et le côté;

5° La grandeur des côtés de ces triangles;

6° Enfin, leur conformation plus ou moins avantageuse.

Le lecteur qui serait curieux de voir cette question traitée en détail peut recourir au t. XIX, n° 4, des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.

Si l'on veut se contenter, avec Baeyer (*die Küstenvermessung*, § 104), de n'avoir égard qu'au *nombre* de triangles intermédiaires, on pourra admettre avec lui que la longueur calculée d'un côté géodésique présente d'autant plus d'incertitude, qu'il est plus éloigné de la base, ou qu'il en est séparé par un plus grand nombre de triangles. Lors donc qu'un même côté a été calculé de plusieurs manières, en fonction de différentes bases, les poids p', p'', p'''.... de ces diverses déterminations peuvent être supposés réciproquement proportionnels aux nombres de triangles intermédiaires; ce qui permet d'apprécier la valeur moyenne du côté, ainsi que son erreur probable.

Soient l_1, l_2. l_3.... les différentes longueurs d'un seul et même côté, déduites des bases M, N, O,... au moyen de m, n, o,.... triangles intermédiaires; posons $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{o}\ldots = Q$: la valeur la plus probable du côté commun sera la *moyenne*, c'est-à-dire

$$\frac{p'l_1+p''l_2+p'''l_3\ldots}{p'+p''+p'''\ldots}=\frac{1}{Q}\left\{\frac{1}{m}l_1+\frac{1}{n}l_2+\frac{1}{o}l_3\ldots\right\}.$$

L'erreur de ce côté, lorsqu'on le calcule en fonction de la base M, est donc

$$a=\frac{1}{Q}\left\{\frac{1}{m}l_1+\frac{1}{n}l_2+\frac{1}{o}l_3\ldots\right\}-l_1=\frac{1}{Q}\left\{+\frac{1}{n}(l_2-l_1)+\frac{1}{o}(l_3-l_1)\right\};$$

de même, l'erreur à craindre sur le côté, lorsqu'on le calcule en partant de la base N ou de la base O, sera

$$b=\frac{1}{Q}\left\{-\frac{1}{m}(l_2-l_1)+\frac{1}{o}(l_3-l_2)\right\};$$

$$c=\frac{1}{Q}\left\{-\frac{1}{m}(l_3-l_1)-\frac{1}{n}(l_3-l_2)\right\}$$

Pour trouver l'erreur à craindre sur la moyenne, représentons par γ_2 l'erreur moyenne de l'unité de poids : nous aurons (§ 112)

$$\eta_2^2 = p'a^2 = p''b^2 = p'''c^2 \ldots$$

d'où, en supposant p triangulations,

$$p\eta_2^2 = p'a^2 + p''b^2 + p'''c^2 \ldots$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p''b^2 + p'''c^2 \ldots}{p}}.$$

Représentant par E_2 l'erreur moyenne de la moyenne arithmétique entre les différentes déterminations, on aura (§ 111, k[vi])

$$E_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p''b^2 + p'''c^2 \ldots}{p\,(p' + p'' + p''' \ldots)}}.$$

Dans le cas de deux triangulations, il vient simplement

$$E_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p''b^2}{2\,(p' + p'')}}.$$

On mettra cette dernière expression sous une forme plus commode, en remplaçant a et b par leurs valeurs, savoir :

$$a = \frac{p''\,(l_2 - l_1)}{p' + p''} = \frac{p''\,dl}{p' + p''};$$

$$b = \frac{p'\,(l_1 - l_2)}{p' + p''} = -\frac{p'\,dl}{p' + p''}.$$

Substituant, on a

$$E_2 = \frac{dl}{p' + p''}\sqrt{\frac{1}{2}\,p'p''}.$$

D'après Bessel (*Gradmessung in Ostpreussen*, p. 168), le côté *Trunz-Wildenhof* est. . . . . $l_1 = 30123^T{,}7481$;
et d'après Baeyer (*die Küstenvermessung*, page 371), ce même côté . . . . $l_2 = 30123\ {,}5041$:
d'où . . . . $l_2 - l_1 = \ -0^T{,}2440$.

Or, depuis le côté *Trunz-Wildenhof*, il y a sept triangles jusqu'à la base de Königsberg, et trente-cinq jusqu'à la base de Berlin. On trouve donc :

Pour l'erreur provenant de la base de Königsberg.	$-\ 0^T{,}0407$;
» » » de Berlin . .	$+\ 0{,}2033$:
Valeur la plus probable du côté	$30123^T{,}7074$;
Erreur à craindre sur cette valeur.	$\pm\ 0{,}0643$.

On peut, de cette manière, calculer les valeurs les plus probables de tous les côtés de la triangulation, eu égard aux deux bases mesurées.

Neuvième exemple. —Un projectile est lancé au hasard contre une droite de 1^m de longueur ; on mesure à chaque fois la distance du point frappé à l'une des extrémités de la droite : cette distance est une grandeur qui peut prendre fortuitement toutes les valeurs comprises entre 0 et 1^m; la probabilité reste constante d'une valeur à l'autre, et la courbe de possibilité devient une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses

$$y = c.$$

Sa surface est $$\int_0^1 c dx = c = 1.$$

La valeur probable de la grandeur x se déduit de l'équation

$$\frac{1}{2} = \int_0^r c dx;\ \text{d'où } r = \frac{1}{2}.$$

La valeur moyenne est $$M = \int_0^1 c dx \,.\, x = \frac{1}{2}.$$

Enfin la mesure de précision se déduit de

$$\frac{1}{2h^2} = \int_0^1 x^2 dx - \left(\int_0^1 x\, dx\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12};$$

$$h = \sqrt{6} = 2{,}4495 .$$

En conséquence, pour une série de 1000 épreuves, l'erreur probable devient (§ 104, formule (h)) $0^m,006159$, ou un peu plus de six millimètres. Il y a 20000 à parier contre un que l'écart ne s'élèvera pas au sextuple, ou à 36 millimètres. On réduirait ces limites d'écart à moitié en embrassant une série de 4000 épreuves.

Dixième exemple. — Des points sont disséminés au hasard sur la surface d'un cercle d'un mètre de rayon : la distance d'un point au centre du cercle est une grandeur qui peut encore prendre fortuitement toutes les valeurs comprises entre 0 et 1^m ; mais ces valeurs sont inégalement probables.

Soit y la probabilité qu'un des points se trouve dans un cercle de rayon x, concentrique au premier : on aura

$$\int_0^x y dx : 1 = \pi x^2 : \pi R^2 ;$$

ou, en faisant $R = 1^m$,

$$\int_0^x y dx = x^2.$$

Différentiant : $y = 2x$, équation de la courbe de possibilité.

Cette courbe se change donc encore ici en une ligne droite; mais elle passe par l'origine, et fait avec l'axe des x un angle de $63^\circ\ 26'$. La surface correspondante à la certitude est

$$\int_0^1 2x\, dx = x^2 = 1.$$

La valeur probable se tire de

$$\int_0^r 2x\, dx = \frac{1}{2};$$

d'où

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0^m{,}7071.$$

La valeur moyenne s'obtient en posant

$$\frac{\int_0^1 2x\, dx \,.\, x}{\int_0^1 2x\, dx} = M;$$

d'où

$$M = \frac{2}{3} = 0^m{,}6666.$$

Pour la mesure de précision on a

$$\frac{1}{2h^2} = \int_0^1 2\, x^3 dx - \left(\int_0^1 2\, x^2 dx\right)^2 = \frac{2}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

d'où

$$h = 3.$$

En conséquence, les limites d'écart qui se rapportaient à l'exemple précédent seront réduites à peu près dans le rapport de 300 à 245.

Onzième exemple. — Des points sont disséminés au hasard dans l'espace enfermé par une surface sphérique d'un mètre de rayon. La distance d'un point au centre de la surface d'enceinte est toujours une grandeur qui peut prendre fortuitement toutes les valeurs comprises entre zéro et 1^m. Pour la probabilité d'une valeur égale au plus à x on aura

$$\int_o^x y dx = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R^3};$$

d'où
$$y = 3x^2.$$

La courbe de possibilité est donc une parabole, dont le foyer est à $\frac{3}{4}$ de mètre du sommet. La valeur probable s'obtient en posant

$$\frac{1}{2} = \int_o^r 3\,x^2 dx = r^3;$$

d'où
$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0^m,7937.$$

La valeur moyenne est

$$M = \int_o^1 3\,x^3 dx = \frac{3}{4} = 0^m,75.$$

Enfin, pour le module de convergence, il vient

$$\frac{1}{2h^2} = \int_o^1 3\,x^4 dx - \left(\int_o^1 3\,x^3 dx\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80};$$

d'où
$$h^2 = \frac{120}{9}: \quad h = \frac{2}{3}\sqrt{30} = 3,5683.$$

Les limites d'écart relatives au 9ᵉ exemple se trouvent donc réduites environ dans le rapport de 357 à 245; un peu moins que dans le rapport de 3 à 2.

Douzième exemple. — Concevons qu'on ait un globe sur lequel on ait tracé un équateur, des méridiens et des parallèles; qu'on lance ce globe au hasard, et qu'après chaque jet on marque son point de contact avec le sol. Chacun de ces points aura une longitude et une latitude déterminées : la première pourra varier de 0° à 360°, et la seconde de 0° à 90°. Si, comme nous le supposons, le globe est bien sphérique et homogène, chaque valeur de la longitude sera également probable, et l'on aura pour la moyenne 180°. La valeur du module de convergence, h, sera la même que dans le 9ᵉ exemple, pourvu qu'on prenne la circonférence pour unité. Si donc on embrasse une série de 1000 épreuves, l'écart probable deviendra

$$360^\circ \times 0{,}006159 = 2^\circ\ 13'\ 2''.$$

Les choses se passent autrement en ce qui concerne les latitudes. Chaque valeur, x, de la latitude est d'autant moins probable qu'elle approche davantage de 90° ; et la probabilité d'une latitude comprise entre 0° et x° est proportionnelle à l'aire de la zone sphérique correspondante. On a donc

$$\int_o^x y dx : 1 = 2\pi \text{R} \sin x : 2\pi \text{R}^2 ;$$

d'où

$$y = \cos x.$$

Telle est, dans le cas actuel, l'équation de la courbe de possibilité.

La valeur probable de la latitude s'obtient en posant

$$\int_o^r \cos x\, dx = \frac{1}{2} ;$$

d'où

$$\sin r = \frac{1}{2} ; \quad r = 30^\circ.$$

La valeur moyenne est

$$\text{M} = \frac{\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\, dx \,.\, x}{\int_o^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\, dx} .$$

Or

$$\int \cos x dx \,.\, x = x \sin x + \cos x ;$$

donc

$$\text{M} = \frac{1}{2}\pi - 1.$$

La valeur moyenne de la latitude est donc le complément de l'arc égal au rayon, ou $32^\circ\ 42'\ 15'',2$.

Quant à la mesure de précision, on a

$$\frac{1}{2h^2} = \int_o^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos x\, dx - \left(\int_o^{\frac{1}{2}\pi} x \cos x\, dx\right)^2 .$$

Or, $$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x :$$

d'où $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x^2 \cos x\, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{2h^2} = \pi - 3 ; \quad h^2 = \frac{1}{0,28318} ; \quad h = 1,8792.$$

Cette mesure de précision se rapporte au rayon pris pour unité. Si l'on veut construire la courbe de possibilité à une autre échelle, en prenant pour unité le quart de la circonférence (ou l'étendue des limites entre lesquelles la latitude peut osciller), il suffira de multiplier h par

$$\frac{3,14159}{2} ;$$

et il viendra alors $$h = 2,9518.$$

D'après cela, si l'on embrasse une série de 1000 épreuves, il viendra pour l'écart probable

$$90^\circ \times 0,005111 = 0^\circ\, 27'\, 36''.$$

Les limites d'écart, comparées à celles que l'on obtenait pour les moyennes des longitudes, se trouvent réduites, non-seulement parce que chaque valeur particulière ne varie que dans un intervalle quatre fois moindre, mais encore par suite de l'accroissement du module de convergence.

Il résulte de là que, si l'on projette au hasard un plan sur un sol horizontal, la moyenne des inclinaisons n'est pas 45°, comme on serait porté à le croire, mais bien 57° 17′ 44″,8. En effet, on peut imaginer qu'à ce plan soit fixé perpendiculairement un *axe,* prolongé jusqu'à la voûte céleste. La moyenne des hauteurs des *pôles*, au-dessus de l'horizon, sera, comme nous venons de le voir, 32° 42′ 15″,2; donc la moyenne des inclinaisons du plan avec l'horizon sera le complément de cet arc.

On pouvait pressentir que l'inclinaison voisine de 90° doit arriver plus fréquemment que l'inclinaison voisine de 0°, en remarquant qu'un plan horizontal est assujetti à passer par *deux* droites, et un plan vertical, par *une seule*. Un plan que l'on projette au hasard n'a pour lui qu'une seule chance de tomber horizontalement : c'est lorsque son pôle passe par le zénith; tandis que la position verticale de ce plan a pour elle toutes les chances qui correspondent à la position du pôle sur le grand cercle de l'horizon.

Si l'on calcule, pour les comètes connues jusqu'aujourd'hui, la moyenne de l'inclinaison de leurs orbites sur l'écliptique, on trouve une valeur d'environ 50°. On doit donc conclure de ce fait que les comètes ont une tendance à *se rapprocher* du plan de l'écliptique, conclusion contraire à celle qu'a tirée Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, p. 259).

§ **114**. — L'essai des armes à feu présente des applications intéressantes du calcul des probabilités aux observations. Supposons que la cible contre laquelle on tire soit assez grande pour être atteinte par tous les coups : on trace par le centre C de la cible deux axes rectangulaires ; on mesure les valeurs de x et de y correspondant à un grand nombre de coups, et l'on prend les moyennes $X = \frac{[x]}{n}$, $Y = \frac{[y]}{n}$. de ces valeurs, en ayant égard à leurs signes.

Lorsqu'il n'existe aucune cause *constante* de déviation latérale ou verticale, on trouvera pour X et Y des valeurs nulles ou du moins négligeables; sinon on devra conclure qu'il existe, soit dans la construction de l'arme, soit dans la manière de viser du pointeur, une cause constante de déviation.

En variant les circonstances du tir, si l'on retrouve toujours pour X et Y des valeurs notables, il y aura lieu de croire que la cause constante provient de l'arme qui ne sera pas *juste*. Il faudra alors la rejeter, ou la rectifier, s'il est possible, en modifiant la ligne de mire.

Le point de la cible ayant pour coordonnées X et Y est le point d'*impacte moyen*, I. La *déviation* de l'arme est l'angle formé par les deux droites qui, partant de l'œil du pointeur, aboutissent aux points C et I.

Dans l'essai des bouches à feu, et dans le tir d'école, on éliminerait l'influence du coup d'œil, en pointant au moyen de lunettes : chaque visée pourrait être ainsi vérifiée par plusieurs individus. L'emploi de lunettes adaptées aux bouches à feu, rendrait, nous n'en doutons pas, de grands services à l'artillerie de siége, surtout dans le tir de nuit.

La propriété qui caractérise le mieux le point d'impacte moyen.

c'est que « la somme des carrés de ses distances à tous les points de « la cible qui ont été touchés, est un minimum : » en d'autres termes, si l'on compte les écarts à partir de tout autre point, la somme de leurs carrés sera plus grande.

Soient en effet X', Y' l'abscisse et l'ordonnée du point de la cible qui jouit de la propriété que nous venons d'énoncer; on aura

$$[D^2] = (X' - x')^2 + (Y' - y')^2 + (X' - x'')^2 + (Y' - y'')^2 + \dots$$

somme qui sera rendue un minimum, en posant simultanément

$$\frac{d\,[D^2]}{dX'} = 0;$$

$$\frac{d\,[D^2]}{dY'} = 0.$$

Effectuant la différentiation, on obtient

$$\frac{d\,[D^2]}{dX'} = 2X' - 2x' + 2X' - 2x'' + \dots = 0$$

$$\frac{d\,[D^2]}{dY'} = 2Y' - 2y' + 2Y' - 2y'' + \dots = 0$$

ou bien, en appelant n le nombre de coups,

$$X' = \frac{x' + x'' + x''' + \dots + x_n}{n} = X,$$

$$Y' = \frac{y' + y'' + y''' + \dots + y_n}{n} = Y;$$

coordonnées qui sont celles du point d'impacte moyen. La *grandeur* de l'écart moyen est donc

$$\Delta = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

La *direction* de cet écart, étant comptée à partir des x positifs, et désignée par l'angle λ, sera donnée par la formule

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{Y}{X}.$$

De deux armes essayées, la meilleure est évidemment celle dont les résultats fournissent le plus grand indice de précision. Soit h, h', cet indice estimé relativement aux abscisses et aux ordonnées; on aura (§ 107)

$$h^2 = \frac{1}{2\left\{\frac{[x^2]}{n} - \left(\frac{[x]}{n}\right)^2\right\}},$$

$$h'^2 = \frac{1}{2\left\{\frac{[y^2]}{n} - \left(\frac{[y]}{n}\right)^2\right\}}.$$

La forme du dénominateur nous montre que la question doit être envisagée sous deux points de vue différents.

Pour une arme dont le point d'impacte moyen sera très-voisin du centre de la cible, on aura les termes

$$\left(\frac{[x]}{n}\right), \left(\frac{[y]}{n}\right)$$

nuls ou négligeables : la valeur réciproque de ces termes, ou

$$g = \left(\frac{n}{[x]}\right), \quad g' = \left(\frac{n}{[y]}\right)$$

est ce que nous appellerons le *coefficient de justesse* de l'arme. Il est rare que ce coefficient soit considérable ; et lorsqu'il l'est, un changement de position dans la ligne de mire suffit ordinairement pour remédier au mal.

Si l'on compte les coordonnées à partir du point d'impacte moyen, ce qui revient à faire abstraction de la première cause d'erreur que nous venons de signaler, il restera, pour les valeurs des indices de précision

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\frac{[x^2]}{n}}},$$

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\frac{[y^2]}{n}}};$$

que nous nommons *coefficients de régularité*. Leur considération est très-importante, car on ne peut compter sur une arme qui disperse beaucoup ses projectiles, même lorsque cette dispersion se fait également dans tous les sens.

Les formules précédentes permettent donc d'apprécier numériquement le mérite relatif des armes, tant sous le rapport de la justesse moyenne du tir, que sous celui de la régularité des effets.

Exemple. — On a tiré 29 coups de carabine contre une cible sur laquelle étaient tracés deux axes rectangulaires : le relevé des distances à l'axe des x a donné les résultats suivants (le centimètre étant pris pour unité).

épreuve 1	—	3,0		épreuve 16	—	8,0
» 2	+	12,0		» 17	+	8,0
» 3	+	3,0		» 18	+	10,0
» 4	+	13,0		» 19	+	7,0
» 5	+	20,0		» 20	+	7,5
» 6	—	2,0		» 21	+	6,0
» 7	+	11,5		» 22	—	2,0
» 8	—	4,0		» 23	+	11,0
» 9	+	2,0		» 24	—	4,0
» 10	+	2,0		» 25	—	9,0
» 11	+	12,0		» 26	—	10,0
» 12	+	7,0		» 27	+	8,5
» 13	+	13,5		» 28	+	10,0
» 14	+	11,0		» 29	+	5,5
» 15	+	9,0				

L'ordonnée moyenne, ou la déviation verticale la plus probable, est donc

$$y = \frac{+189,5 - 42,0}{29} = +5^c,086 ;$$

d'où g' = coefficient de justesse = 0,1966.

Rangeant les écarts de la moyenne suivant leur ordre de grandeur, on formera le tableau suivant :

épreuve 29	—	0,414		épreuve 7	—	6,414
» 21	—	0,914		» 2	—	6,914
» 12	—	1,914		» 11	—	6,914
» 19	—	1,914		» 6	+	7,086
» 3	+	2,086		» 22	+	7,086
» 20	—	2,414		» 4	—	7,914
» 17	—	2,914		» 1	+	8,086
» 9	+	3,086		» 13	—	8,414
» 10	+	3,086		» 8	+	9,086

épreuve	27	—	3,114		épreuve	24	+	9,086
»	15	—	3,914		»	16	+	13,086
»	18	—	4,914		»	25	+	14,086
»	28	—	4,914		»	5	—	14,914
»	14	—	5,914		»	26	+	15,086
»	23	—	5,914					

La somme des carrés de ces erreurs s'obtiendra, soit en élevant immédiatement chacune d'elles au carré, soit au moyen de la formule (k, § 105); et l'on obtiendra ainsi, pour l'écart moyen d'un coup,

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1612}{29}};$$

ou, plus exactement, $\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{1612}{28}} = \pm 7^c,588.$

D'où l'écart probable $r = \varepsilon_2 . \rho\sqrt{2} = \pm 5^c,118$;

et le coefficient de régularité

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\dfrac{[y^2]}{n}}} = \frac{\rho}{r} = 0,093.$$

Comme on a $n = 29$, d'où $\dfrac{\rho}{\sqrt{n}} = 0,08846$, on peut parier un contre un que

ε_2 est compris entre $6^c,916$ et $8^c,260$,
r » $4^c,665$ et $5^c,571$,
γ' » $0,085$ et $0,101$.

Enfin la déviation verticale la plus probable, comparée à celle d'un coup isolé, a le poids 29; et par suite son erreur probable est $\dfrac{r}{\sqrt{29}} = 0^c,950$. On peut donc parier un contre un que la véritable déviation verticale est comprise entre

$$4^c,136 \text{ et } 6^c,036;$$

comme la valeur de y, 5,086, est plus que quintuple de son erreur probable, on peut regarder comme presque certaine l'existence d'une cause qui a fait porter les coups trop haut. Il faudrait un peu plus de 2600 coups pour que l'erreur probable de y fût réduite à $0^c,1$.

Si nous avions voulu nous contenter des premières puissances des écarts, pris avec leurs valeurs absolues (§ 113, 2e *remarque*), nous aurions trouvé pour cette somme 181,898; et par suite

$$\varepsilon_1 = \frac{181,898}{28} = 6^c,496;$$

d'où $$r = 5^c,492,$$

entre les limites 4,972 et 6,012.

Le coefficient de régularité $\gamma' = 0,087$ serait un peu plus faible que celui fourni par la première méthode.

Dans les concours de tir, on doit supposer toutes les armes également *justes*, et compter les écarts Δ, à partir du *centre* de la cible qui est le point de visée : le prix doit donc être décerné au tireur dont le coefficient de *régularité* est le plus grand, condition qui correspond à

$$[\Delta^2] = minimum.$$

Cette règle est souvent méconnue, même par des hommes spéciaux : elle l'a été notamment dans le *Règlement sur le tir, à l'usage des régiments d'infanterie*, établi dans l'armée belge en 1848. On y lit en effet (p. 42) que, pour le concours du grand prix de régiment, « on mesurera très-exactement les écarts des balles qui auront touché « la cible; on en tiendra note, et l'on additionnera les différents écarts « mesurés à partir du centre de la rose : *la plus petite somme d'écarts* « remporte le grand prix. »

Il n'est pas nécessaire de recourir au calcul pour reconnaître le défaut de cette règle. Tout le monde sent, par exemple, que si deux concurrents tirent chacun deux balles, et que les écarts du premier soient représentés par 1 et 3, ceux du second par 2 et 2, ce dernier mérite le prix. Ce sentiment instinctif se justifie de la manière suivante : l'écart mesuré pouvant avoir lieu indifféremment dans tous les sens, sa grandeur est proportionnelle, non pas à la *droite* qui représente l'écart, mais au *cercle* décrit du centre de la rose, avec cette droite comme rayon. Or les surfaces des cercles étant comme les *carrés* de leurs rayons, le résultat le plus satisfaisant correspondra évidemment au minimum de la somme des *carrés* des écarts. Dans l'exemple que nous avons choisi, cette somme est 10 pour le premier tireur, et 8 seulement pour le second : ce dernier mérite donc le prix, et les coefficients de régularité des deux concurrents sont entre eux comme $\sqrt{8} : \sqrt{10}$ ou comme 2,83 est à 3,16.

Les écarts respectifs des deux tireurs seraient 1 et 2,7 pour le premier, 2 et 2 pour le second, qu'il faudrait encore accorder le prix à ce dernier.

CHAPITRE DIXIÈME.

Précision des fonctions de quantités observées.

---

§ 115. — Dans la pratique, il est très-rare qu'il suffise d'avoir déterminé la valeur la plus probable des résultats immédiats fournis par l'observation, et d'avoir calculé leur précision : presque toujours les grandeurs observées doivent servir à calculer d'autres grandeurs qui en dépendent; il nous faut donc maintenant, « connaissant l'er- « reur moyenne d'une quantité observée, trouver celle d'une autre « quantité, fonction connue de la première. »

Soit ε l'erreur moyenne de la fonction u ; P son poids ;
» o', o'', o''' ... les résultats d'observation ;
» ε', ε'', ε''' ... leurs erreurs moyennes ;
» p', p'', p''' ... leurs poids :

il s'agit de trouver ε au moyen de ε', ε'', ε''' ...
et P » p', p'', p''' ...

On a d'ailleurs $u = f(o', o'', o''' \ldots)$
ou plus généralement $F(u, o', o'', o''' \ldots) = 0$.

Pour commencer par la fonction la plus simple, traitons d'abord le cas où l'on a

$$u = o' + o'' ;$$

on aura évidemment $u \pm \varepsilon = o' \pm \varepsilon' + o'' \pm \varepsilon''$;
donc $\pm \varepsilon = \pm \varepsilon' \pm \varepsilon''$.

Quelle que soit la manière dont on combine les signes, on n'aura jamais, après avoir élevé les deux membres au carré, que deux résultats possibles, savoir :

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 + 2\varepsilon'\varepsilon'' + \varepsilon''^2 ,$$
$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 - 2\varepsilon'\varepsilon'' + \varepsilon''^2 .$$

Puisque l'erreur moyenne de la fonction peut avoir indifféremment l'une ou l'autre de ces deux valeurs, il faut l'égaler à leur moyenne, et poser en conséquence

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \ldots \qquad (n')$$

Nous aurons en outre, en prenant pour unité de poids une quantité constante, mais arbitraire :

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} \ldots \qquad (n')$$

ou

$$P = \frac{p'\,p''}{p' + p''} \ldots \qquad (n'')$$

Le calcul serait le même si l'on avait

$$u = o' - o'' ;$$

car on aurait encore

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 \pm 2\varepsilon'\varepsilon'' + \varepsilon''^2 ;$$

ce qui exige que l'on pose

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2.$$

Pour expliquer, d'une manière générale, ce rejet du terme affecté du double signe, remarquons que nous ne connaissons immédiatement que les carrés $\varepsilon'^2, \varepsilon''^2$.... et que, lorsque nous *calculons* la valeur numérique $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon'^2}$, elle doit, par la nature même des erreurs accidentelles, être considérée comme affectée du signe + aussi bien que du signe —. Tout produit de la forme $\varepsilon'\varepsilon''$ emporte donc avec lui le double signe, et doit par conséquent toujours être négligé, vis-à-vis des ε'^2, ε''^2.... qui sont essentiellement positifs.

Cette remarque ne cesse pas d'être applicable lorsque l'on a $\varepsilon' = \varepsilon''$: alors les formules (n) et (n'') deviennent

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{2} \ldots \qquad (n''')$$

$$P = \frac{p'}{2} \ldots \qquad (n^{IV})$$

§ 126. — *Premier exemple.*— Soit à calculer un angle, u, par la somme de ses deux parties, o' et o''. On a mesuré $o' = 109^\circ\, 41'\, 4'',44$ par 25 répétitions, avec un théodolite qui donne $\pm\, 4''$ pour l'erreur moyenne d'une observation simple. On a mesuré $o'' = 40^\circ\, 26'\, 34'',26$ par 30 répétitions, à l'aide d'un théodolite dont l'erreur moyenne est $\pm 9''$: la valeur la plus probable que l'on puisse déduire de ces observations est donc $u = 150^{\circ}\,7'\,38'',70$.

Pour avoir la précision de ce résultat, calculons son poids, en adoptant pour unité de poids l'observation simple faite au premier théodolite. Alors $p' = 25$; $p'' = \frac{16}{81} \times 30 = 5,92$ (§ 115, *septième exemple; première remarque*), et par conséquent (n'')

$$P = \frac{5,92 \times 25}{30,92} = 4,787.$$

Si nous avions préféré calculer l'erreur moyenne du résultat, nous aurions eu d'abord (k^{v})

$$\varepsilon = \frac{4''}{\sqrt{4.787}} = 1'',828.$$

Quant à celle des deux angles partiels, elle est

$$\varepsilon' = \frac{4}{\sqrt{25}} = \pm\, 0'',800.$$

$$\varepsilon'' = \frac{9}{\sqrt{30}} = \pm\, 1'',643.$$

Nous serions parvenus au même but, indépendamment du poids, en calculant d'abord ε' et ε'', et ensuite ε par (n).

La valeur de P montre que, pour obtenir l'angle u, il aurait mieux valu l'observer *lui-même*, avec 5 répétitions, au premier théodolite, que de le former, comme on l'a fait, à l'aide de 55 répétitions. Le bon sens pouvait faire prévoir vaguement un résultat analogue; mais le calcul seul peut donner une appréciation exacte du désavantage de la première méthode.

Deuxième exemple. — Quand on veut déterminer la différence de longitude entre deux lieux, par des signaux de feu visibles à la fois de ces deux stations elles-mêmes, on doit commencer par apprécier, comme nous l'avons fait dans le premier exemple du § 115, l'erreur moyenne d'une semblable observation double. L'expérience a appris qu'elle peut être estimée à $0^{s},4$, lorsqu'on a eu soin d'éliminer toutes les causes constantes d'erreur : on aura donc la différence définitive entre les longitudes, en divisant $0^{s},4$ par la racine carrée du nombre des observations.

Mais supposons que l'on veuille employer à la même détermination les signaux de jour donnés par l'héliotrope : ceux-ci ne peuvent pas être vus *en même temps* des deux stations, et il faudra, pour tourner la difficulté, choisir entre deux méthodes. Ou bien placer *deux* héliotropes à la station intermédiaire, et donner de chaque côté des signaux *simultanés*, ce à quoi l'on peut parvenir ; ou bien, employer *un seul* héliotrope, près duquel on place un aide muni d'un chronomètre : il observe un signal dirigé vers le premier lieu, puis un signal dirigé vers le second, et la différence des longitudes s'obtient en ajoutant les différences entre les heures du chronomètre et entre celles des deux lieux.

Laquelle de ces deux méthodes faut-il maintenant préférer ? la réponse est facile ; car si l'erreur moyenne d'une double observation entre l'une des stations extrêmes et la station intermédiaire est de $0^s,4$, la somme de deux doubles observations semblables aura pour poids $\frac{1}{2}$, et la seconde méthode exigera, pour donner une égale précision, deux fois plus d'observations que la première.

Troisième exemple. — *Gerling* a déterminé la différence de longitude entre *Göttingen* et *Mannheim* de la manière suivante, à défaut d'une station intermédiaire, visible de ces deux villes à la fois. Il fit donner de 4 en 4 minutes des signaux sur le *Meisner* et le *Feldberg*, et les observa du *Frauenberg*. La différence de longitude entre Göttingen et le Frauenberg fut déterminée au moyen de 256 observations doubles, par l'intermédiaire du Meisner ; celle entre le Frauenberg et Mannheim, par 136 signaux donnés sur le Feldberg. Donc la différence de longitude entre Göttingen et Mannheim, qui est la somme des deux, a pour poids (n'')

$$\frac{136 \times 256}{392} = 88,8 \,;$$

elle est par conséquent aussi exactement déterminée que si 89 signaux avient été donnés sur une montagne visible de ces deux villes à la fois.

§ 117. — On détermine de la même manière qu'au § 115 la précision de la somme algébrique de plus de deux quantités observées. Ici, on aura évidemment

$$\pm \varepsilon = \pm \varepsilon' \pm \varepsilon'' \pm \varepsilon''' \ldots \pm \varepsilon_n \,;$$

ou bien, en suivant notre notation habituelle,

$$\pm\varepsilon = \pm[\varepsilon].$$

Élevant au carré, et observant que tous les doubles produits doivent disparaître comme affectés du double signe, on aura

$$\varepsilon = \pm\sqrt{[\varepsilon^2]} \ldots \qquad (n^{\text{v}})$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} + \ldots + \frac{1}{p_n};$$

ou

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{1}{p}\right] \ldots \qquad (n^{\text{vi}})$$

$$P = \frac{p'\,p''\,p'''\ldots p_n}{p''\,p'''\ldots + p'\,p'''\ldots + p'\,p''} \ldots \qquad (n^{\text{vii}})$$

Pour le cas particulier où les observations, en nombre n, sont d'égale précision, on a

$$\varepsilon = \varepsilon'\sqrt{n} \ldots \qquad (n^{\text{viii}})$$

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{p'} \ldots \qquad (n^{\text{ix}})$$

Ces dernières formules résument un théorème bien important dans la pratique, savoir :

« Toutes les parties observées étant également précises, la préci-
« sion de leur somme algébrique diminue, par leur assemblage,
« comme la racine carrée du nombre des parties augmente; et le
« nombre d'observations nécessaires pour obtenir une même précision
« croît comme le nombre des parties. »

Supposons que, pour déterminer la différence de longitude entre *Bruxelles* et *Mannheim*, on ait besoin de quatre stations intermédiaires : il faudrait, à chaque station, plus de 350 signaux, pour avoir une précision égale à celle que *Gerling* a obtenue (§ 116) entre *Göttingen* et *Mannheim*.

Lorsqu'on doit mesurer un angle par parties, il faut, pour l'obtenir aussi exactement que si on l'avait observé d'un seul coup, répéter chaque partie autant de fois qu'il y a de parties.

La même chose se présente dans la mesure des bases : toutes circonstances égales, les longues règles sont préférables aux petites.

Il est clair qu'il y a avantage à ce que toutes les parties soient également exactes; car soit p' la plus grande : l'équation (n$^{\text{vi}}$) pourra se mettre sous la forme

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{p'} + \left(\frac{1}{p''} - \frac{1}{p'}\right) + \left(\frac{1}{p'''} - \frac{1}{p'}\right) + \dots + \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p'}\right);$$

$$= \frac{n}{p'} + \frac{p' - p''}{p'\,p''} + \frac{p' - p'''}{p'\,p'''} + \dots + \frac{p' - p_n}{p'\,p_n}.$$

$\frac{1}{P}$ a donc sa plus petite valeur possible, $\left(\frac{n}{p'}\right)$, quand tous les termes suivants, qui sont positifs, disparaissent, ou quand $p' = p'' = p'''\dots$.

Mais si tous les termes sont égaux à l'exception d'un terme p_n plus petit que les autres, et égal à $\frac{p'}{q}$ (q étant > 1), alors l'expression précédente devient

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{p'} + \frac{p' - \frac{p'}{q}}{p' \cdot \frac{p'}{q}} = \frac{n + q - 1}{p'};$$

et par rapport au cas où tous les p étaient égaux, P diminue dans la proportion de n à $(n + q - 1)$. Ceci montre que l'intervention d'une partie moins exacte que les autres est d'autant plus pernicieuse que les parties sont en moins grand nombre; nous ne serons donc plus étonnés maintenant de la petitesse de P dans le premier exemple du § 116, puisque là, pour *deux* parties seulement, on avait $q > 4$.

Enfin lors même que toutes les parties sont égales en poids, et que $q = 1$, l'expression

$$P = \frac{p'}{n}$$

montre encore que le nombre de ces parties doit être aussi petit que possible.

Ces remarques sont particulièrement d'application dans la pratique du nivellement.

§ **118**. — Arrivons maintenant à la fonction

$$u = a' o'.$$

o' a été observé directement; a' est un *coefficient* connu, de sorte que u est un multiple connu de o'. — Nous avons dans ce cas

$$u \pm \varepsilon = a' (o' \pm \varepsilon');$$

d'où

$$\varepsilon^2 = a'^2 \varepsilon'^2;$$

$$\varepsilon = \pm a' \varepsilon' \ldots \qquad (\mathrm{n^x})$$

$$\mathrm{P} = \frac{p'}{a'^2} \ldots \qquad (\mathrm{n^{xi}})$$

Nous avons insisté sur ce que o' était *multiplié* par le coefficient a'. En effet ce coefficient peut, en général, avoir deux significations : l'une, que nous venons de donner; l'autre, qui indique que o' doit être *ajouté* plusieurs fois à lui-même. Au point de vue qui nous occupe, ces deux cas diffèrent essentiellement; car en adoptant la dernière signification, o' aurait été observé a' fois l'une après l'autre, et u se composerait de a' parties égales, observées isolément : nous retomberions donc dans le cas particulier du § 117 et nous aurions alors

$$\varepsilon = \pm \varepsilon' \sqrt{a'}; \quad \mathrm{P} = \frac{p'}{a'}.$$

Pour mieux faire saisir cette différence, supposons que nous voulions connaître la longueur d'une colonnade régulière, en mesurant seulement un des 32 entre-colonnements qui la composent : nous aurons dans ce cas

$$\varepsilon = 32 \varepsilon'$$

$$\mathrm{P} = \frac{p'}{1024};$$

tandis que, si nous avions mesuré successivement tous les entre-colonnements et que nous les eussions additionnés, nous aurions eu

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{32}$$

$$\mathrm{P} = \frac{p'}{32}.$$

Le temps que l'on gagne dans le premier cas est donc compensé par une réduction de plus des 4/5 dans la précision.

Le but d'une triangulation est en général de *calculer* une longueur l, au moyen d'une base $\frac{l}{m}$, directement *mesurée*. Soit ε l'erreur probable de l'unité de longueur : celle de la base sera

$$\varepsilon\sqrt{\frac{l}{m}}\,;$$

et comme la longueur *calculée* est déduite de la base par voie de multiplication, son erreur probable sera

$$m.\varepsilon\sqrt{\frac{l}{m}} = \varepsilon\sqrt{lm}\,,$$

(en supposant les angles parfaitement observés). Si l'on avait mesuré directement la longueur l, l'erreur probable de cette mesure n'aurait été que $\varepsilon\sqrt{l}$: on en conclut que, lorsqu'on veut obtenir une longueur le plus exactement possible, il faut la mesurer directement et sans le secours de triangles ; mais ce procédé, très-incommode dans tous les cas ordinaires de la géodésie, est presque toujours entièrement impraticable.

Si l'erreur probable de la base devenait $\sqrt{m}$ fois plus petite, celle de la longueur *calculée* se réduirait à $\varepsilon\sqrt{l}$: ainsi il faudrait mesurer m fois la base et prendre la moyenne des m résultats, pour en déduire la longueur l, aussi sûrement que par *une* mesure directe.

§ **119.** — Le § précédent renferme la solution de cette question : « déterminer la précision d'une fonction linéaire quelconque de plu- « sieurs quantités observées. »

$$\text{Soit } u = a'\,o' + a''\,o'' + a'''\,o''' + \ldots\,,$$

les coefficients a', a'', a'''.... devant toujours être considérés comme *multiplicateurs*.

Conformément à la marche déjà suivie, nous aurons

$$u + \varepsilon = a'\,o' + a'\,\varepsilon' + a''\,o'' + a''\,\varepsilon'' + a'''\,o''' + a'''\,\varepsilon''' + \ldots\,;$$

d'où $$\varepsilon^2 = a'^2\,\varepsilon'^2 + a''^2\,\varepsilon''^2 + a'''^2\,\varepsilon'''^2 + \ldots\,,$$

en négligeant tous les produits de la forme $2a'a''\,\varepsilon'\varepsilon''$. Nous aurons donc en définitive

$$\varepsilon = \pm\sqrt{[a^2\,\varepsilon^2]} \ \ldots \qquad (\text{n}^{\text{XII}})$$

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{a^2}{p}\right] \dots \qquad (n^{XIII})$$

$$P = \frac{p'\,p''\,p''' \dots}{a'^2\,p''\,p''' \dots + a''^2\,p'\,p''' \dots + a'''^2\,p'\,p'' + \dots} \dots \qquad (n^{XIV})$$

Pour le cas particulier où $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon''' \dots$ et par suite $p' = p'' = p''' \dots$ il vient

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{[a^2]} \dots \qquad (n^{XV})$$

$$\frac{1}{P} = \frac{[a^2]}{p'} \dots \qquad (n^{XVI})$$

Exemple. — Pour les petites triangulations locales qu'il a faites dans la Hesse électorale, Gerling nous apprend (*Beiträge zur Geographie von Kurhessen*) qu'il employait à la mesure de ses bases cinq règles d'une toise, une règle de 3 pieds, une de 2 pieds et une de 1 pied. En les étalonnant avec la toise du Pérou, il avait, par des opérations réitérées, déterminé non-seulement la *correction* de chacune de ces mesures, mais encore *l'erreur moyenne* de chacune de ces corrections. Ce travail lui avait donné :

$T_1 = 1$	toise	$+ 0{,}0156$	ligne ...	$\varepsilon_1 = 0{,}0008$
$T_2 = 1$	»	$+ 0{,}0302$	»	$\varepsilon_2 = 0{,}0006$
$T_3 = 1$	»	$+ 0{,}0075$	»	$\varepsilon_3 = 0{,}0010$
$T_4 = 1$	»	$+ 0{,}0030$	»	$\varepsilon_4 = 0{,}0006$
$T_5 = 1$	»	$+ 0{,}0205$	»	$\varepsilon_5 = 0{,}0023$
$t_1 = 3$	pieds	$- 0{,}045$	»	$\eta_1 = 0{,}0003$
$t_2 = 2$	»	$+ 0{,}002$	»	$\eta_2 = 0{,}0002$
$t_3 = 1$	»	$+ 0{,}001$	»	$\eta_3 = 0{,}0001$.

Il procédait, dans la mesure d'une base, par portées de cinq toises, et à la fin de l'opération, il plaçait les trois dernières règles s'il y avait lieu. Outre les ε, il y a encore ici deux espèces d'erreur à craindre : 1° celles qui se répètent à la pose de chaque règle, et que Gerling estime au plus à $0^{lig.},01 = l$; 2° celle que l'on commet aux extrémités de la base, et qu'il porte au moins à $0^{lig.},15 = l'$.

Une base ayant été mesurée, on peut, de sa longueur, déduire le nombre de fois que chaque règle a été portée. Ainsi, pour une longueur plus grande que $12^{t}\ 5^{p}$ et plus petite que 13 toises, T_1 et T_2 ont été portés chacun trois fois ; T_3, T_4, T_5, deux fois ; t_1, t_2, une fois. Les carrés de ces nombres doivent donc (n^{XII}) être multipliés par les carrés des ε correspondants. De plus, l'erreur l se répétant à chaque pose, nous devons (n^{viii}) ajouter encore autant de fois l^2 qu'il y a eu de juxtapositions, c'est-à-dire $13l^2$, puisque 14 règles ont été posées; enfin il faut en outre ajouter l'^2, et extraire la racine carrée de la somme. Nous avons donc en définitive, pour l'erreur moyenne de la petite base en question,

$$\varepsilon^2 = 9\,(0{,}0008)^2 + 9\,(0{,}0006)^2 + 4\,(0{,}0010)^2 + 4(0{,}0006)^2 + 4\,(0{,}0023)^2 + (0{,}0003)^2 + (0{,}0002)^2 + 13\,(0{,}01)^2 + (0{,}15)^2\,;$$

d'où $\varepsilon = 0^{\text{lig.}},1543.$

On voit que les erreurs d'étalonnage et de juxtaposition disparaissent vis-à-vis de l', dans la mesure des petites bases. Il y a plus, on devrait faire entrer dans cette valeur de l' la difficulté de centrer rigoureusement les instruments goniométriques au-dessus des extrémités de la base, et alors on devrait probablement décupler la valeur de l', et la porter à $1^{\text{lig.}},5$.

§ **120.** — Nous arrivons enfin au cas général : « déterminer la « précision de u, lorsque u est une fonction connue *quelconque* des « quantités observées o', o'', o'''.... auxquelles nous attribuons les « erreurs moyennes ε', ε'', ε'''.... »

Pour résoudre ce problème, rappelons-nous que nous avons seulement en vue des erreurs inévitables, que l'on peut considérer comme évanouissantes, ou infiniment petites vis-à-vis des grandeurs observées. Ces erreurs fortuites, aussi bien que les erreurs moyennes qui en dérivent, sont donc de véritables *différentielles* des quantités observées.

Or, dans le cas le plus général,

$$F\,(u, o', o'', o''' \ldots) = 0\,,$$

une simple différentiation partielle nous permettra toujours d'exprimer du, en fonction de do', do'', do'''.... par une équation linéaire; et une fois les coefficients de cette équation formés, nous n'avons plus qu'à poser $du = \pm\,\varepsilon$; $do' = \pm\,\varepsilon'$; $do'' = \pm\,\varepsilon''$... pour retomber sur le dernier cas que nous avons traité (§ 119).

Nous avons donc

$$du = \frac{du}{do'}\,do' + \frac{du}{do''}\,do'' + \frac{du}{do'''}\,do''' \ldots$$

Faisant
$$\frac{du}{do'} = l'\,; \quad \frac{du}{do''} = l'' \ldots$$

et remplaçant les différentielles par les erreurs moyennes, on a

$$\pm\,\varepsilon = \pm\, l'\,\varepsilon' \pm l''\,\varepsilon'' \pm l'''\,\varepsilon''' \ldots$$

Élevant au carré, et négligeant les doubles produits à cause du double signe dont ils sont naturellement affectés :

$$\varepsilon^2 = l'^2\,\varepsilon'^2 + l''^2\,\varepsilon''^2 + l'''^2\,\varepsilon'''^2 + \ldots$$

ou

$$\varepsilon = \pm \sqrt{[l^2\,\varepsilon^2]} \ldots \qquad (n^{\text{xvii}})$$

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{l^2}{p}\right] \ldots \qquad (n^{\text{xviii}})$$

Nous retrouvons ici nos deux formules (n^{xii} et n^{xiii}), avec la seule différence que, dans ces dernières, les *a* étaient connus d'avance et donnés, tandis qu'ici nous devons nous procurer nos *l* par différentiation et substitution.

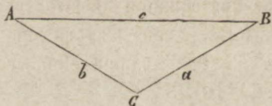
Si les quantités observées sont d'égale précision, nous aurons

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{[l^2]} \ldots \qquad (n^{\text{xix}})$$

$$\frac{1}{P} = \frac{[l^2]}{p'} \ldots \qquad (n^{\text{xx}})$$

Le cas que nous venons de traiter englobe tous ceux dont nous nous sommes occupés dans ce chapitre, et il eût peut-être été préférable, sous le rapport analytique et au point de vue de la généralité, de commencer par lui, et d'en déduire tous les autres comme cas particuliers. Mais la marche synthétique que nous avons suivie satisfait mieux l'esprit, par la clarté successive qu'elle amène dans le sujet.

Exemple. — On a mesuré dans un triangle le côté A C $= b = 106^m$, avec une erreur moyenne de $0^m,06$; on a observé l'angle B $= 29^\circ\,39'$ par 4 répétitions, et l'angle C $= 120^\circ\,7'$, une seule fois. L'instrument goniométrique employé a une erreur moyenne de $2'$. — On demande l'erreur à craindre sur la longueur calculée du côté A B $= c$.



Conformément aux notations précédentes, nous avons :

$$\begin{aligned} u &= c, \\ o' &= b = 106^m \ \ldots \ \varepsilon' = 0^m{,}06, \\ o'' &= \mathrm{B} = \ 29^\circ\, 39' \ldots \ \varepsilon'' = 1', \\ o''' &= \mathrm{C} = 120^\circ\ \ 7' \ldots \ \varepsilon''' = 2'. \end{aligned}$$

Pour trouver nos l', l'', l''', différentions la fonction

$$c = \frac{b \sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B}} :$$

il vient $\quad dc = \dfrac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B}}\, db - c\,.\,\mathrm{Cotg\,B}\, d\mathrm{B} + c\,.\,\mathrm{Cotg\,C}\, d\mathrm{C}\,.$

Dans cette formule, db est un nombre qui exprime une petite grandeur linéaire ; dB, dC sont des nombres abstraits, représentant de petits arcs, en fonction du rayon pris pour unité : si nous voulons que dB et dC expriment des minutes, ce qui est plus naturel vu la forme de ε'' et ε''', il suffira de les multiplier par sin 1′. — Nous avons donc

$$l' = \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B}} = +1{,}749 \ \ldots \ l'^2 = 3{,}059001\,;$$

$$\begin{aligned} l'' &= -c\,.\,\mathrm{Cotg\,B}\sin 1' = -\,0{,}095 \ \ldots \ l''^2 = 0{,}009025; \\ l''' &= \ \ c\,.\,\mathrm{Cotg\,C}\sin 1' = -\,0{,}031 \ \ldots \ l'''^2 = 0{,}000961. \end{aligned}$$

Introduisant enfin ces valeurs dans notre formule (n$^{\mathrm{xvii}}$), en y faisant $\varepsilon' = 0{,}06$; $\varepsilon'' = 1$; $\varepsilon''' = 2$ (nombres abstraits), il vient

$$\varepsilon = 0^m{,}15\,.$$

Si nous avions désiré connaître la précision du 3^{e} angle conclu, $\mathrm{A} = 30^\circ\ 14'$, nous aurions déduit de l'équation

$$\mathrm{A} = 180 - \mathrm{B} - \mathrm{C}\,,$$

en nous servant de la formule générale,

$$l' = -1\,; \quad l'' = -1\,:$$

d'où (n$^{\mathrm{xvii}}$) $\qquad \varepsilon = \sqrt{5} = 2'{,}236 = 2'\,14''\,;$

ou bien, par les poids, $\quad \dfrac{1}{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{4}\,;$

ce qui donne $\qquad \varepsilon = 2'\sqrt{\dfrac{5}{4}} = 2'\,14''.$

§ 121. — Lorsque l'on a, comme dans l'exemple précédent, des grandeurs hétérogènes à combiner, et que l'on veut opérer par le moyen des *poids*, il faut avoir soin de se rappeler que l'on calcule, non pas avec des quantités *concrètes*, mais avec les *nombres* qui les représentent, ou qui expriment leurs *rapports* avec l'unité arbitraire que l'on a choisie pour chaque espèce de grandeurs. Le plus simple sera donc de prendre pour unité de poids, dans chaque espèce, l'observation dont nous avons résolu de prendre l'erreur moyenne pour unité arbitraire.

Voulons-nous, par exemple, prendre l'observation de l'angle B pour unité de poids des observations angulaires, parce que son erreur moyenne est 1 (minute)? nous posons tacitement par là que nous adoptons pour unité de poids des mesures linéaires l'observation qui a pour erreur moyenne 1 (mètre). Cela admis, le calcul doit s'effectuer sur les *nombres abstraits* (ou sur les rapports des grandeurs à ces unités); et l'on ne doit ajouter qu'à la fin de l'opération la désignation de la grandeur obtenue. L'exemple précédent se disposera donc ainsi :

$$p' = \left(\frac{1}{0,06}\right)^2; \quad p'' = 1; \quad p''' \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{l^2}{p}\right] = 0,023881;$$

d'où enfin $\qquad \varepsilon = \sqrt{0,023881} = 0,15,$

avec la désignation *mètre*.

Si nous avions préféré prendre pour unité de poids des mesures angulaires, l'observation ayant autant de précision que l'angle C, dont l'erreur moyenne est 2 minutes, il s'en serait suivi implicitement que notre unité de poids des mesures linéaires était la mesure présentant une erreur moyenne de 2 mètres : on aurait donc eu alors

$$p' = \left(\frac{2}{0,06}\right)^2; \quad p'' = 4; \quad p''' = 1.$$

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{l^2}{p}\right] = 0,005970;$$

$$\varepsilon = 2\sqrt{0,005970} = 0^m,15.$$

Enfin, adoptons pour unité de poids des longueurs, la mesure qui aurait $0^m,1$ pour erreur moyenne : l'unité de poids des mesures angulaires sera nécessairement une observation ayant 0',1 pour erreur moyenne : nous aurons donc

$$\begin{array}{lrll} & \varepsilon' & = 0{,}6 & (\text{dixième de mètre}) \\ & \varepsilon'' & = 10 & (\quad \text{»} \quad \text{de minute}) \\ & \varepsilon''' & = 20 & (\quad \text{»} \quad \text{»}) \\ \text{d'où l'on tirerait} & \varepsilon & = 1{,}5 & (\text{décimètre}). \end{array}$$

Ou bien, en opérant par les poids :

$$p = \left(\frac{1}{0{,}6}\right)^2; \quad p'' = \left(\frac{1}{10}\right)^2; \quad p''' = \left(\frac{1}{20}\right)^2.$$

$$\frac{1}{P} = 2{,}3881\,;$$

et enfin $$\varepsilon = 0^m{,}1\sqrt{2{,}3881} = 0^m{,}15.$$

§ **122.** — Nous terminerons ce chapitre par quelques remarques importantes au point de vue de la pratique.

Le poids des observations n'est pas une quantité qui dépende uniquement et invariablement de l'instrument employé et du nombre de répétitions. Des circonstances extérieures, et même des considérations physiques ou morales peuvent influer sur le poids que l'observateur attribue à ses résultats ; mais il doit noter sur son registre, *avant de faire aucun calcul*, les motifs de sa détermination. Il est impossible, du reste, de prescrire aucune règle positive à ce sujet ; car comment soumettre à une appréciation exacte et numérique ce sentiment intime qui fait qu'un observateur se juge plus ou moins bien *disposé*, qu'il a plus ou moins de *confiance* dans ses résultats ? Il y a là une affaire de bonne foi, de tact, d'habitude que nous n'essayerons pas d'analyser.

Il arrive très-souvent, dans une série un peu étendue, que des observations qui ne nous étaient nullement suspectes *avant* le calcul, s'écartent ensuite tellement de la moyenne, que nous sommes tentés de croire qu'une erreur a été commise par inadvertance. C'est ainsi que, dans le septième exemple du § 113, nous trouvons un x_7 qui s'élève à 12'',28, quantité plus que double de l'erreur moyenne ε_7 ; tandis que les autres x s'accordent assez bien avec les ε correspondants. Faut-il, pour rétablir l'accord, diminuer le poids de cette observation douteuse, et faire ici, par exemple, $p_7 = 1$, au lieu de

$p_7 = 3$? Cette marche est condamnée par tous les bons observateurs, et l'on n'est autorisé à y avoir recours, que si les notes inscrites sur le registre, pendant la durée même du travail, signalent l'observation comme ayant présenté quelque particularité qui soit de nature à la rendre douteuse. Encore, vaut-il mieux dans ce cas rejeter *complétement* l'observation, que d'invoquer le secours équivoque d'un poids arbitraire, pour modifier à son gré les résultats discordants, et établir ainsi sur le papier un semblant d'harmonie qui, au fond, ne prouve rien pour l'exactitude réelle. Il est d'ailleurs très-dangereux pour un observateur d'entrer dans cette voie de transaction; car on peut assurer qu'il ne tardera pas à s'y laisser entraîner trop loin.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède que l'on doive, ni même que l'on puisse rejeter toute observation présentant une apparence d'anomalie : c'est une nécessité qu'on ne doit subir qu'à la dernière extrémité. Nous citerons à ce sujet l'opinion de deux savants distingués. « C'est toujours un procédé très-aventureux, dit Hagen (*Grund-*« *züge, etc.*, p. 132) que d'exclure d'une série d'observations celles « qui paraissent offrir des discordances. Dès que l'on admet cette « manière d'agir, il n'est pas d'hypothèse, si insoutenable qu'elle soit, « à l'appui de laquelle on ne puisse invoquer l'observation ; vu que « l'on rejette les résultats qui seraient de nature à la contredire. »

« Toute observation, dit Gerling*, qui ne m'est pas signalée comme « suspecte par le registre des observations, est pour moi un témoin « qui vient déposer de la vérité. Je n'ai pas plus le droit de récuser « son témoignage, sous prétexte qu'il s'écarte des autres dépositions, « que je n'ai celui de le torturer jusqu'à ce qu'il ait dit ce que je veux « lui faire dire. »

* *Die Ausgleichungs-Rechnungen der practischen Geometrie.* Cet ouvrage élémentaire, modèle d'ordre et de clarté, nous a été très-utile dans notre troisième section : plusieurs de nos paragraphes n'en sont qu'une traduction littérale. Nous avons aussi puisé dans l'ouvrage consciencieux de *Fischer. Lehrbuch der höheren Geodäsie, etc.*, et dans les recueils géodésiques de *Bessel* et de *Baeyer*.

CHAPITRE ONZIÈME.

Détermination du résultat le plus exact déduit de plusieurs observations. — Précision de ce résultat.

PLUSIEURS INCONNUES A DÉTERMINER.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

—

§ 123. — Une seule et même série d'observations doit souvent servir à trouver la valeur de plusieurs inconnues qui sont des fonctions des quantités observées ; et, au point de vue théorique, le problème sera indéterminé, déterminé, ou plus que déterminé, suivant que le nombre des observations sera inférieur, égal, ou supérieur à celui des inconnues.

Dans la pratique, le dernier cas est le seul que nous ayons à considérer ; car l'observateur est libre, en général, de prolonger les observations autant qu'il le juge convenable ; et il cherchera dans le *nombre* des épreuves un correctif aux *erreurs* inévitables qu'il doit commettre.

On voit donc qu'il est nécessaire de faire concourir *toutes* les observations à la détermination des inconnues ; et c'est ainsi qu'a pris naissance la *règle des moindres carrés* des erreurs. Proposée d'abord par Legendre * comme un procédé empirique propre à introduire plus de symétrie dans les calculs, cette règle a ensuite été reconnue par Gauss ** comme étant *la plus avantageuse* en vertu des principes de la théorie des chances, lorsque la loi de probabilité des erreurs est de la forme $K\,e^{-h^2x^2}$. Laplace a même démontré *** qu'elle jouit encore de cette propriété, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs, pourvu : 1° que la loi de probabilité soit la même dans

* *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, 1806.

** *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ*, 1823. Il paraît cependant que Gauss possédait la méthode avant Legendre, et qu'il l'a employée dès 1795.

*** *Théorie analytique des probabilités.*

toutes les observations, et la même pour les erreurs positives que pour les erreurs négatives; 2° que le nombre des observations atteigne l'ordre de grandeur qui permet d'appliquer les formules d'approximation.

Les questions auxquelles on peut avoir à appliquer la règle des moindres carrés se divisent en trois grandes catégories, suivant la nature des observations qui leur servent d'éléments. Les observations peuvent être :

1° *Immédiates,* c'est-à-dire que les inconnues sont indépendantes l'une de l'autre et directement observées. C'est le cas le plus simple : car comme on ne peut observer directement qu'*une* seule inconnue à la fois, la règle des moindres carrés revient à celle de la moyenne, que nous avons développée dans le neuvième chapitre.

2° *Médiates.* Alors on observe certaines quantités, encore *indépendantes* l'une de l'autre, pour en déterminer d'autres qui sont liées aux premières par des relations données. L'astronomie présente de fréquentes applications de ce second cas, et c'est à leur occasion que le principe des moindres carrés a été mis pour la première fois en pratique. C'est ainsi que l'observation des lieux d'une planète peut servir à corriger les éléments de son mouvement elliptique.

3° *Conditionnelles.* Dans ce dernier cas les grandeurs cherchées *ne sont plus indépendantes* l'une de l'autre; il existe entre elles des relations, des conditions mathématiques, qui doivent toujours être exactement satisfaites : de sorte que toutes les valeurs fournies par l'observation comme étant les plus probables, ne peuvent pas toujours exister simultanément.

C'est ainsi qu'en géodésie un triangle observé n'est possible qu'autant qu'il satisfait à la relation connue pour la somme de ses trois angles. Ainsi encore, si nous mesurons dans un polygone de p côtés tous les côtés et tous les angles, nous connaîtrons *trois* éléments de trop : les corrections doivent donc être déterminées de telle manière que chaque système de trois éléments soit exactement ce qu'il serait, si on le calculait au moyen des $2p-3$ autres, par les règles de la trigonométrie.

Pour appliquer aux observations conditionnelles la méthode des moindres carrés, il faut faire quelques opérations préalables dont nous parlerons en leur lieu, et au moyen desquelles le dernier cas se ramène au second : celui-ci étant le plus important, c'est de lui que nous avons spécialement à nous occuper. Nous allons donc exposer la méthode, en supposant que les inconnues soient *entièrement indépendantes* les unes des autres.

§ 121. — Soient les p fonctions *linéaires* V, V′, V″.... des m inconnues x, y, z, v....; soient O, O′, O″.... des valeurs de ces fonctions, trouvées par l'observation immédiate, et supposons que ces valeurs soient affectées respectivement des erreurs Δ, Δ', Δ''.... en sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} V - O &= \Delta \\ V' - O' &= \Delta' \\ V'' - O'' &= \Delta'' \text{ ... etc.} \end{aligned}$$

Nous supposons $p > m$.

La probabilité que *toutes* les erreurs Δ, Δ', Δ''.... ont été réellement commises a pour expression

$$P = \frac{h^p}{\sqrt{\pi^p}} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \cdots + \Delta^2 p)}$$

comme nous l'avons déjà posé (§ 102); et elle sera un maximum

pour $\quad \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots + \Delta^2 p = minimum$;

c'est l'équation (f) du § précité : en la traduisant, nous aurons le *principe des moindres carrés*, savoir :

« Pour trouver les valeurs les plus probables des inconnues x, y, z, v...
« il faut les déterminer de manière que la somme des carrés des
« erreurs soit un minimum. »

Les procédés de calcul qui s'appuient sur ce *principe*, pour déterminer les inconnues x, y, z, v.... constituent la *méthode* des moindres carrés.

Posons donc

$$(p) \ldots \quad \begin{aligned} V &= \alpha + ax + by + cz + dv + \ldots \\ V' &= \alpha' + a'x + b'y + c'z + d'v + \ldots \\ V'' &= \alpha'' + a''x + b''y + c''z + d''v + \ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nous avons appelé Δ la différence V — O entre la grandeur *observée*, O, et la quantité V, *calculée* au moyen des valeurs les plus exactes *possibles* de x, y, z..., et des coefficients α, a, b, c....
Nous aurons donc :

$$(p') \ldots \quad \begin{aligned} \Delta\ &= ax + by + cz + dv \ldots + n \\ \Delta' &= a'x + b'y + c'z + d'v \ldots + n' \\ \Delta'' &= a''x + b''y + c''z + d''v \ldots + n'' \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

en remplaçant les quantités connues $(\alpha - O)$, $(\alpha' - O')$, $(\alpha'' - O'')$, par n, n', n''... *

Mais $\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots$ devant être un minimum, nous avons pour exprimer *cette condition :*

$$(p'') \ldots \quad \begin{aligned} &\Delta \frac{d\Delta}{dx} + \Delta' \frac{d\Delta'}{dx} + \Delta'' \frac{d\Delta''}{dx} + \ldots = 0 \\ &\Delta \frac{d\Delta}{dy} + \Delta' \frac{d\Delta'}{dy} + \Delta'' \frac{d\Delta''}{dy} + \ldots = 0 \\ &\Delta \frac{d\Delta}{dz} + \Delta' \frac{d\Delta'}{dz} + \Delta'' \frac{d\Delta''}{dz} + \ldots = 0 \ \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, des équations (p'), on déduit par la différentiation

$$\begin{aligned} &\frac{d\Delta}{dx} = a; \ \frac{d\Delta'}{dx} = a'; \ \frac{d\Delta''}{dx} = a'' \ldots \\ &\frac{d\Delta}{dy} = b; \ \frac{d\Delta'}{dy} = b'; \ \frac{d\Delta''}{dy} = b'' \ldots \\ &\frac{d\Delta}{dz} = c; \ \frac{d\Delta'}{dz} = c'; \ \frac{d\Delta''}{dz} = c'' \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

Par là les équations *de condition* (p'') deviennent

$$(p''') \ldots \quad \begin{aligned} &a\Delta + a'\Delta' + a''\Delta'' + \ldots = 0 \\ &b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + \ldots = 0 \\ &c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + \ldots = 0 \\ &d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + \ldots = 0 \ \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

* Si les différentes observations avaient des poids différents, p, p', p''... on les réduirait à la même unité de précision (§ 104) en multipliant chacune d'elles par la racine carrée du poids correspondant : nos équations deviendraient donc

$$\begin{aligned} &\Delta\sqrt{p} = ax\sqrt{p} + by\sqrt{p} + cz\sqrt{p} + \ldots + n\sqrt{p} \\ &\Delta'\sqrt{p'} = a'x\sqrt{p'} + b'y\sqrt{p'} + c'z\sqrt{p'} + \ldots + n'\sqrt{p'} \ \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

et les coefficients symétriques que nous formerons plus loin seraient ici

$$\begin{aligned} &aap + a'a'p' + a''a''p'' + \ldots = [aap] \\ &abp + a'b'p' + a''b''p'' + \ldots = [abp] \ \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

ce qui ne changerait rien à la solution que nous indiquons.

Substituant dans ce groupe d'équations, au lieu de Δ, Δ', Δ''.... leurs valeurs déduites de (p'), on aura ... (p$^{\text{IV}}$)

$$
\begin{aligned}
&a(ax+by+cz+dv\ldots+n)+a'(a'x+b'y+c'z+d'v\ldots+n')+\ldots=0\\
&b(ax+by+cz+dv\ldots+n)+b'(a'x+b'y+c'z+d'v\ldots+n')+\ldots=0\\
&c(ax+by+cz+dv\ldots+n)+c'(a'x+b'y+c'z+d'v\ldots+n')+\ldots=0\\
&d(ax+by+cz+dv\ldots+n)+d'(a'x+b'y+c'z+d'v\ldots+n')+\ldots=0
\end{aligned}
$$

ou bien, en développant, et ordonnant chaque équation ... (p$^{\text{V}}$)

$$
\begin{aligned}
&(aa+a'a'+a''a''+..)x+(ab+a'b'+..)y+(ac+a'c'..)z..+(an+a'n'+..)=0\\
&(ab+a'b'+a''b''+..)x+(bb+b'b'+..)y+(bc+b'c'..)z..+(bn+b'n'+..)=0\\
&(ac+a'c'+a''c''+..)x+(bc+b'c'+..)y+(cc+c'c'..)z..+(cn+c'n'+..)=0\\
&(ad+a'd'+a''d''+..)x+(bd+b'd'+..)y+(cd+c'd'..)z..+(dn+d'n'+..)=0
\end{aligned}
$$

Gauss a simplifié l'écriture de ces équations, et les a rendues plus faciles à manier, en introduisant une notation particulière pour représenter les coefficients très-symétriques qu'elles renferment : il pose

$$
(\text{p}^{\text{VI}})\ \ldots\quad
\begin{aligned}
&aa+a'a'+a''a''+a'''a'''+\ldots=[aa]\\
&ab+a'b'+a''b''+a'''b'''+\ldots=[ab]\\
&ac+a'c'+a''c''+a'''c'''+\ldots=[ac]\ \ldots\ \text{etc.},
\end{aligned}
$$

et obtient par conséquent, pour le cas de *quatre* inconnues, (nous admettons ce nombre pour fixer les idées), les *quatre* équations suivantes, qui servent à les déterminer :

$$
(\text{p}^{\text{VII}})\ \ldots\quad
\begin{aligned}
&[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,v+[an]=0\\
&[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,v+[bn]=0\\
&[ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cd]\,v+[cn]=0\\
&[ad]\,x+[bd]\,y+[cd]\,z+[dd]\,v+[dn]=0.
\end{aligned}
$$

Nous les nommons équations *normales* (*Normalgleichungen*) et leur nombre ne peut évidemment dépasser celui des inconnues, puisqu'elles ne sont qu'une transformation du groupe (p''), formé en égalant identiquement à zéro l'expression différentielle relative à *chaque* inconnue.

L'élimination entre les équations (p$^{\text{VII}}$) se fait très-facilement par la méthode des substitutions successives : on tire de la première équation la valeur de x en fonction des autres inconnues, et on la substitue dans les autres équations ; on agit de même à l'égard des *trois* équations à *trois* inconnues qui restent, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation à une seule inconnue. Pour simplifier le travail, nous adopterons les notations élégantes introduites par Gauss.

La première de nos quatre équations normales donne

$$x = -\left[\frac{ab}{aa}\right] y - \left[\frac{ac}{aa}\right] z - \left[\frac{ad}{aa}\right] v - \left[\frac{an}{aa}\right].$$

Si l'on transporte cette valeur dans chacune des trois équations restantes, et qu'on réunisse en un seul terme les coefficients des mêmes inconnues dans chaque équation, on aura les formes suivantes qu'il faut particulièrement remarquer :

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb\,.\,1]$$

$$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc\,.\,1]$$

$$[bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] = [bd\,.\,1]$$

$$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc\,.\,1]$$

$$[cd] - \frac{[ac]}{[aa]}[ad] = [cd\,.\,1]$$

$$[dd] - \frac{[ad]}{[aa]}[ad] = [dd\,.\,1]$$

$$[bn] - \frac{[ab]}{[aa]}[an] = [bn\,.\,1]$$

$$[cn] - \frac{[ac]}{[aa]}[an] = [cn\,.\,1]$$

$$[dn] - \frac{[ad]}{[aa]}[an] = [dn\,.\,1].$$

Les trois équations qui restent après l'élimination de x sont donc les suivantes

$$(\mathrm{p}^{\mathrm{viii}})\ldots\begin{cases}[bb\,.\,1]\,y + [bc\,.\,1]\,z + [bd\,.\,1]\,v + [bn\,.\,1] = 0\\ [bc\,.\,1]\,y + [cc\,.\,1]\,z + [cd\,.\,1]\,v + [cn\,.\,1] = 0\\ [bd\,.\,1]\,y + [cd\,.\,1]\,z + [dd\,.\,1]\,v + [dn\,.\,1] = 0.\end{cases}$$

Si l'on prend maintenant, dans la première de ces trois équations, la valeur de y, et qu'on la substitue dans les deux suivantes, on aura d'abord

$$y = -\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}z - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}v - \frac{[bn\,.\,1]}{[bb\,.\,1]};$$

puis posant, par analogie avec ce qu'on a fait précédemment,

$$[cc\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bc\,.\,1] = [cc\,.\,2]$$

$$[cd\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1] = [cd\,.\,2]$$

$$[dd\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bd\,.\,1] = [dd\,.\,2]$$

$$[cn\,.\,1] - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bn\,.\,1] = [cn\,.\,2]$$

$$[dn\,.\,1] - \frac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}[bn\,.\,1] = [dn\,.\,2]$$

on arrivera aux deux équations

$$(\text{p}^{\text{IX}}) \ldots \quad \begin{array}{l} [cc\,.\,2]\,z + [cd\,.\,2]\,v + [cn\,.\,2] = 0 \\ [cd\,.\,2]\,z + [dd\,.\,2]\,v + [dn\,.\,2] = 0. \end{array}$$

Tirant de la première la valeur de z, on a

$$z = -\frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}v - \frac{[cn\,.\,2]}{[cc\,.\,2]};$$

la substituant dans la seconde, après avoir fait

$$[dd\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cd\,.\,2] = [dd\,.\,3]$$

$$[dn\,.\,2] - \frac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}[cn\,.\,2] = [dn\,.\,3]$$

il vient en définitive

$$(\text{p}^{\text{X}}) \ldots \quad [dd\,.\,3]\,v + [dn\,.\,3] = 0$$

d'où

$$v = -\frac{[dn\,.\,3]}{[dd\,.\,3]};$$

équation qui donne la valeur de v; puis, par des substitutions successives, celles de z, de y et de x.

Le tableau suivant présente dans son ensemble le système des équations *finales* (*Endgleichungen*), desquelles dérivent immédiatement les valeurs des inconnues. Il serait facile de l'étendre à un nombre quelconque d'inconnues :

$$\begin{array}{rrrrr}
x + \dfrac{[ab]}{[aa]}\, y + & \dfrac{[ac]}{[aa]}\, z + & \dfrac{[ad]}{[aa]}\, v + & \dfrac{[an]}{[aa]} & = 0 \\[2ex]
y + & \dfrac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\, z + & \dfrac{[bd\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}\, v + & \dfrac{[bn\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} & = 0 \\[2ex]
& z + & \dfrac{[cd\,.\,2]}{[cc\,.\,2]}\, v + & \dfrac{[cn\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} & = 0 \\[2ex]
& & v + & \dfrac{[dn\,.\,3]}{[dd\,.\,3]} & = 0.
\end{array}$$

Remarques. — 1° La formation des coefficients auxiliaires $[bb.1]$, $[cd.2]$, $[dn.3]$.... etc. est caractérisée par la relation générale

$$[gh\,.\,m] = \frac{[fg\,.\,m]}{[ff\,.\,m]}\,[fh\,.\,m] = [gh\,.\,(m+1)],$$

dans laquelle f, g, h sont des coefficients littéraux et m un nombre. Il est à remarquer que f est le coefficient qui a le rang $(m + 1)$ dans le second membre de l'équation

$$\Delta = ax + by + cz + dv + \ldots + n.$$

2° La forme générale de chaque système d'équations (p^{vii}), (p^{viii}), (p^{ix})... montre que la suite des coefficients des *différentes* inconnues, pris horizontalement dans une *seule et même* équation, se retrouve verticalement pour une *même* inconnue dans les *différentes* équations.

3° Lorsque le nombre des inconnues est i, celui des *coefficients* dans l'équation (p^{vii}) est égal au nombre de combinaisons deux à deux, avec répétition, qu'on peut former avec $(i + 1)$ lettres, diminué d'une unité (la combinaison nn n'existant pas). Ce nombre est donc (§ **12**)

$$\frac{(i+1)\,(i+2)}{2} - 1 = \frac{i\,(i+3)}{2}.$$

Dans le système des équations (p^{viii}), le nombre des *nouveaux* *coefficients* à former est égal au nombre de combinaisons, avec répétition, qu'on peut obtenir avec i lettres prises deux à deux, diminué aussi d'une unité, ou à

$$\frac{i(i+1)}{2} - 1 = \frac{(i-1)(i+2)}{2}.$$

Dans les systèmes suivants, on aurait

$$\frac{i(i-1)}{2} - 1 = \frac{(i-2)(i+1)}{2};$$

$$\frac{(i-1)(i-2)}{2} - 1 = \frac{(i-3)\,i}{2} \ldots \text{ etc.}$$

Pour $i = 4$, le dernier coefficient devient égal à 2.

La somme de tous ces nombres se calcule facilement, en les mettant d'abord sous la forme

$$\frac{1}{2} \times \begin{cases} i^2 + 3\,i \\ (i-1)^2 + 3(i-1) \\ (i-2)^2 + 3\,(i-2) \\ (i-3)^2 + 3\,(i-3). \end{cases}$$

Remarquant que la première colonne verticale est la somme des carrés des nombres naturels depuis 1 jusqu'à i; et que la seconde renferme une progression arithmétique dont le premier terme est l'unité et le dernier i, on réduira aisément cette expression à la formule

$$\frac{i\,(i+1)\,(i+5)}{2\,.\,3}.$$

Tel est le nombre des coefficients auxiliaires à former. Or cette formation étant la seule partie pénible du travail, on voit dans quelle proportion croît la longueur des calculs, lorsque le nombre des inconnues augmente.

Dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, celle de quatre inconnues, il y a donc à former 30 coefficients *auxiliaires*. — Pour être plus précis dans le langage, il vaudrait mieux cependant, comme nous le ferons dorénavant, donner aux coefficients de l'équation (p^{vii}) le nom des coefficients *sommatoires*, et réserver à ceux des équations suivantes (p^{viii}, p^{ix}...) le nom de coefficients *auxiliaires*.

Le résumé des calculs de la méthode de Gauss se trouve représenté dans le schéma de la page suivante.

$an=$	$aa\,x$	$ab\,y$	$ac\,z$	$ad\,v$	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
l. an	l. aa	l. ab	l. ac	l. ad	$-\frac{ab}{aa}an$	$-\frac{ab}{aa}ab$	$-\frac{ab}{aa}ac$	$-\frac{ab}{aa}ad$	$-\frac{ac}{aa}an$	$-\frac{ac}{aa}ac$	$-\frac{ac}{aa}ad$	$-\frac{ad}{aa}an$	$-\frac{ad}{aa}ad$
l. $\frac{an}{aa}$		l. $\frac{ab}{aa}$	l. $\frac{ac}{aa}$	l. $\frac{ad}{aa}$	$bn\,1=$	$bb.1.y$	$bc.1.z$	$bd.1.v$	$cn.1$	$cc.1$	$cd.1$	$dn.1$	$dd.1$
$\frac{an}{aa}$		l. y	l. z	l. v	l. $bn.1$	l. $bb.1$	l. $bc.1$	l. $bd.1$	$-\frac{bc.1}{bb.1}bn.1$	$-\frac{bc.1}{bb.1}bc.1$	$-\frac{bc.1}{bb.1}bd.1$	$-\frac{bd.1}{bb.1}bn.1$	$-\frac{bd.1}{bb.1}bd.1$
$-\frac{ab}{aa}y$		l.$y\frac{ab}{aa}$	l.$z\frac{ac}{aa}$	l.$v\frac{ad}{aa}$	l. $\frac{bn\,1}{bb.1}$		l. $\frac{bc.1}{bb.1}$	l. $\frac{bd.1}{bb.1}$	$cn.2=$	$cc.2.z$	$cd.2.v$	$dn.2$	$dd.2$
$-\frac{ac}{aa}z$					$\frac{bn.1}{bb.1}$		l. z	l. v	l. $cn.2$	l. $cc.2$	l. $cd.2$	$-\frac{cd.2}{cc.2}cn.2$	$-\frac{cd.2}{cc.2}cd.2$
$-\frac{ad}{aa}v$					$-\frac{bc.1}{bb.1}z$		l.$z\frac{bc.1}{bb.1}$	l.$v\frac{bd.1}{bb.1}$	l. $\frac{cn.2}{cc.2}$		l. $\frac{cd.2}{cc.2}$	$dn.3=$	$dd.3.v$
x					$-\frac{bd.1}{bb.1}v$				$\frac{cn.2}{cc.2}$		l. v	l. $dn.3$	l. $dd.3$
					y				$-\frac{cd.2}{cc.2}v$		l. $v\frac{cd.2}{cc.2}$	l. $\frac{dn.3}{dd.3}$	
									z			v	

§ 125. — 1° En traduisant la formule (p^{IV}) on voit que :

Pour former la 1^re^ équation normale, on multiplie chacune des équations données par le coefficient dont l'inconnue, x, y est affectée, et l'on fait la somme des produits.

Pour former la 2^e^ équation normale, on multiplie chacune des équations données par le coefficient dont l'inconnue, y, y est affectée, et l'on fait la somme des produits.

Et ainsi de suite.

2° Les équations normales jouissent d'une propriété particulière : c'est que tous les coefficients des inconnues se présentent deux fois, excepté ceux qui ont la forme quadratique $[aa]$, $[bb]$... Quelques auteurs souslignent ces derniers pour mieux les distinguer des autres. De plus, on remarque que tous les coefficients qui, dans une même ligne horizontale, sont à droite du facteur quadratique, se retrouvent dans une même ligne verticale au-dessous. On peut donc abréger l'écriture des équations normales, en disposant leur système de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & & x & & y & & z & & v & & \\
[an] & + & [aa] & + & [ab] & + & [ac] & + & [ad] & = & 0 \\
[bn] & & \cdots & + & [bb] & + & [bc] & + & [bd] & = & 0 \\
[cn] & & \cdots & & \cdots & + & [cc] & + & [cd] & = & 0 \\
[dn] & & \cdots & & \cdots & & \cdots & + & [dd] & = & 0
\end{array}
$$

ou bien de cette autre manière :

$$
\begin{array}{llllll}
[an] + [aa]\,x & + [ab]\,y & + [ac]\,z & + [ad]\,v & = 0 \\
[bn] + [bb]\,y & + [bc]\,z & + [bd]\,v & \cdots & = 0 \\
[cn] + [cc]\,z & + [cd]\,v & \cdots & \cdots & = 0 \\
[dn] + [dd]\,v & \cdots & \cdots & \cdots & = 0.
\end{array}
$$

§ 126. — *Exemple.*

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Soient } V & = & x - y + 2z \\
V' & = & 3x + 2y - 5z \\
V'' & = & 4x + y + 4z \\
V''' & = & -x + 3y + 3z
\end{array}
$$

les fonctions données; et supposons que l'on ait trouvé par l'observation

$$O = 3; \quad O' = 5; \quad O'' = 21; \quad O''' = 14.$$

Introduisons ces nombres dans les équations (p') et nous aurons :

$$\begin{aligned}
\Delta \ \ &= -\ 3 + x - y + 2z \\
\Delta' \ &= -\ 5 + 3x + 2y - 5z \\
\Delta'' &= -\ 21 + 4x + y + 4z \\
\Delta''' &= -\ 14 - x + 3y + 3z.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{array}{llll}
a \ \ = +1 & b \ \ = -1 & c \ \ = +2 & n \ \ = -\ 3 \\
a' \ = +3 & b' \ = +2 & c' \ = -5 & n' \ = -\ 5 \\
a'' = +4 & b'' = +1 & c'' = +4 & n'' = -\ 21 \\
a''' = -1 & b''' = +3 & c''' = +3 & n''' = -\ 14.
\end{array}$$

Formant les coefficients sommatoires et auxiliaires, on a :

$$\begin{array}{llll}
[aa] = +\ 27; & [ab] = +\ 6; & [ac] = \ \ 0; & [an] = -\ 88; \\
 & [bb] = +\ 15; & [bc] = +\ 1; & [bn] = -\ 70; \\
 & & [cc] = +\ 54; & [cn] = -\ 107.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
[bb\ .\ 1] = +\ 13{,}667; & [bc\ .\ 1] = +\ 1{,}000; & [cc\ .\ 1] = +\ 54{,}00; \\
 & [bn\ .\ 1] = -\ 50{,}445; & [cn\ .\ 1] = -\ 107{,}00.
\end{array}$$

$$[cc\ .\ 2] = +\ 53{,}927; \quad [cn\ .\ 2] = -\ 103{,}34.$$

On en déduit immédiatement :

$$z = -\frac{[cn\ .\ 2]}{[cc\ .\ 2]} = +\ 1{,}916;$$

$$y = -\frac{[bc\ .\ 1]}{[bb\ .\ 1]}z - \frac{[bn\ .\ 1]}{[bb\ .\ 1]} = +\ 3{,}551;$$

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[an]}{[aa]} = +\ 2{,}470.$$

§ **127**. — Voulons-nous voir maintenant quelles sont les corrections les plus probables que devraient subir nos observations? calculons les valeurs des Δ, en remplaçant x, y, z... par leurs valeurs numériques dans les équations (p′): nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta \ \ &= 0{,}249 \\
\Delta' \ &= 0{,}068 \\
\Delta'' &= 0{,}095 \\
\Delta''' &= 0{,}069
\end{aligned}$$

$$[\Delta^2] = 0{,}08041.$$

La connaissance de ces corrections est nécessaire, si l'on veut apprécier *l'erreur moyenne* des observations. Soit e le nombre des équations (ou des observations); i celui des inconnues. Si nous connaissions *à priori* les *véritables* valeurs des inconnues, nous pourrions calculer immédiatement les Δ et égaler $[\Delta^2]$ à e fois le carré de l'erreur moyenne, pour en déduire celle-ci : nous aurions donc, dans cette hypothèse,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{e}}.$$

Mais nous ne connaissons pas les *véritables* inconnues, et il faut, pour calculer leurs valeurs les plus probables, commencer par employer i équations : il ne peut donc se manifester de contradictions qu'entre les $(e - i)$ restantes; et c'est sur ce dernier nombre seulement que doivent se répartir les erreurs, ou les contradictions que l'on découvre. On a en conséquence

$$(e - i)\,\varepsilon^2 = [\Delta^2],$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{e - i}}; \qquad \ldots \text{(k}^{\text{x}}\text{)}$$

formule qui s'accorde avec (k'', § 109); car dans les observations *directes*, on n'avait qu'une seule inconnue à déterminer, d'où $i = 1$.

Dans l'exemple précédent on a donc

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{0{,}08041}{4 - 3}};$$

d'où $$\varepsilon = \pm\, 0{,}283.$$

§ **128.** — Il nous reste à résoudre une question très-importante. L'utilité de la méthode des moindres carrés ne réside pas seulement dans la précision du résultat qu'elle fournit : un de ses avantages les plus précieux, c'est de permettre d'apprécier numériquement le degré d'exactitude que ce résultat comporte. Nous allons donc chercher le *poids* de nos inconnues.

Dans ce but, rappelons-nous (§ 120) qu'après avoir tiré de

$$u = f\,(o', o'', o''' \ldots)$$

l'équation différentielle

$$du = l'\,do' + l''\,do'' + l'''\,do''' \ldots$$

nous en avons conclu

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{l^2}{p}\right],$$

P étant le poids de la fonction u; p celui des quantités observées, o', o'', o'''.... Ici, comme toutes les observations sont supposées également exactes, nous prendrons l'une d'entre elles pour unité de poids, et nous aurons

$$\frac{1}{P} = [l^2].$$

Voyons ce qui arrive dans le cas actuel. — Puisque nos i inconnues ont été déterminées *en fonction* des e quantités observées O, O', O''.... (§ 124), le problème serait résolu, d'après ce qui précède, si nous possédions i équations de la forme

$$\begin{aligned} x &= f\ (\mathrm{O}, \mathrm{O}', \mathrm{O}'' \ldots) \\ y &= f'\ (\mathrm{O}, \mathrm{O}', \mathrm{O}'' \ldots) \\ z &= f''\ (\mathrm{O}, \mathrm{O}', \mathrm{O}'' \ldots) \text{ etc.}; \end{aligned}$$

car nous en déduirions immédiatement

$$(\mathrm{q}) \ldots \quad \begin{aligned} dx &= \alpha_1\, d\mathrm{O} + \alpha_2\, d\mathrm{O}' + \alpha_3\, d\mathrm{O}'' \ldots \\ dy &= \beta_1\, d\mathrm{O} + \beta_2\, d\mathrm{O}' + \beta_3\, d\mathrm{O}'' \ldots \\ dz &= \gamma_1\, d\mathrm{O} + \gamma_2\, d\mathrm{O}' + \gamma_3\, d\mathrm{O}'' \ldots \text{ etc.}; \end{aligned}$$

d'où
$$\frac{1}{P_1} = [\alpha^2]\,; \quad \frac{1}{P_2} = [\beta^2]\,; \quad \frac{1}{P_3} = [\gamma^2].$$

Nous n'avons pas directement ces i équations (q); mais nous allons les déduire des e équations (p). En effet, puisque $\mathrm{O} + \Delta = \mathrm{V}$, on a $d\mathrm{V} = d\mathrm{O} + d\Delta$; différentiant les équations (p) et substituant aux $d\mathrm{V}$ leurs valeurs, on aura

$$(\mathrm{q}') \ldots \quad \begin{aligned} d\Delta &= -\, d\mathrm{O} + a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots \\ d\Delta' &= -\, d\mathrm{O}' + a'dx + b'dy + c'dz + \ldots \\ d\Delta'' &= -\, d\mathrm{O}'' + a''dx + b''dy + c''dz + \ldots \text{ etc.}; \end{aligned}$$

équations qui, comparées à celles du groupe (p'), pourraient s'en déduire en changeant dans celles-ci les Δ en $d\Delta$; les x, y, z.... en dx, dy, dz.... et les n en $d\mathrm{O}$. Si donc on traite le groupe (q') par la méthode des moindres carrés, on obtiendra i équations *normales* qui ne différeront du groupe ($\mathrm{p}^{\mathrm{vii}}$) que par les changements que nous venons d'indiquer. Elles seront donc

$$(\mathrm{q}'') \ldots \begin{array}{l} [aa]\ dx + [ab]\ dy + [ac]\ dz \ldots - [a\,dO] = 0 \\ [ab]\ dx + [bb]\ dy + [bc]\ dz \ldots - [b\,dO] = 0 \\ [ac]\ dx + [bc]\ dy + [cc]\ dz \ldots - [c\,dO] = 0 \ldots \text{etc.} \end{array}$$

Théoriquement, le problème est résolu ; car l'élimination entre ces i équations permet d'exprimer les dx, dy, dz.... en fonction des dO, et de trouver par conséquent les valeurs des $e \times i$ coefficients (α, β, γ...) des équations (q).

Mais les calculs peuvent être singulièrement simplifiés par des considérations particulières, résultant de ce que nous n'avons besoin, en définitive, que de connaître les $[\alpha^2]$, $[\beta^2]$, $[\gamma^2]$....

Adoptons, dans ce but, la méthode d'élimination par les coefficients indéterminés, et multiplions chacune de nos équations (q″) par les coefficients q_1, q_2, q_3... Il vient ainsi

$$(\mathrm{q}''')\ldots \begin{array}{l} [aa]\ q_1dx + [ab]\ q_1dy + [ac]\ q_1dz \ldots - [a\,dO]\ q_1 = 0 \\ [ab]\ q_2dx + [bb]\ q_2dy + [bc]\ q_2dz \ldots - [b\,dO]\ q_2 = 0 \\ [ac]\ q_3dx + [bc]\ q_3dy + [cc]\ q_3dz \ldots - [c\,dO]\ q_3 = 0 \ldots \text{etc.} \end{array}$$

Supposons que nous voulions trouver en premier lieu dx : il faudra assigner aux coefficients d'élimination des valeurs telles, que la somme des coefficients de dx soit égale à l'unité, et les sommes analogues égales à zéro, pour les coefficients de dy, dz.... Cela nous donne les i équations de e termes chacune :

$$(\mathrm{q^{IV}}) \ldots \begin{array}{l} [aa]\ q_1 + [ab]\ q_2 + [ac]\ q_3 \ldots = 1 \\ [ab]\ q_1 + [bb]\ q_2 + [bc]\ q_3 \ldots = 0 \\ [ac]\ q_1 + [bc]\ q_2 + [cc]\ q_3 \ldots = 0 \ldots \text{etc.} \end{array}$$

Nous les nommons ***équations du poids*** pour la valeur de x. Éliminant par une méthode quelconque entre ces équations, nous pourrons trouver les valeurs de q_1, q_2, q_3, qui, substituées dans (q‴), donneront par voie d'addition

$$dx = [a\,dO]\ q_1 + [b\,dO]\ q_2 + [c\,dO]\ q_3 \ldots,$$

c'est-à-dire une équation entre dx, et les différents dO accompagnés de coefficients numériques. Développons-la de manière à séparer les dO, nous aurons

$$(\mathrm{q^{V}}) \ldots \begin{array}{l} dx = (aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots)\ dO \\ \quad + (a'q_1 + b'q_2 + c'q_3 + \ldots)\ dO' \\ \quad + (a''q_1 + b''q_2 + c''q_3 + \ldots)\ dO'' \ldots \text{etc.} \end{array}$$

Comparant cette équation avec la première du groupe (q) nous en déduisons

$$(q^{vi}) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= aq_1 + bq_2 + cq_3 + \ldots \\ \alpha_2 &= a'q_1 + b'q_2 + c'q_3 + \ldots \\ \alpha_3 &= a''q_1 + b''q_2 + c''q_3 + \ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Par suite, sans calculer les valeurs particulières des α, on peut, avec la plus grande facilité, former $[\alpha^2]$ dont nous avons uniquement besoin. Il suffit en effet de multiplier la première des équations (q^{vi}) par α_1, la seconde par α_2, la troisième par α_3... et d'ajouter. On obtient ainsi

$$(q^{vii}) \ldots \qquad [\alpha^2] = [\alpha a]\, q_1 + [\alpha b]\, q_2 + [\alpha c]\, q_3 \ldots$$

Cette valeur de $[\alpha_2]$ est bien plus simple encore qu'elle ne le paraît ici ; car nous allons faire voir que le coefficient de q_1 est égal à l'unité, et que ceux de q_2, q_3... sont égaux à zéro.

En effet, nous avons déjà fait remarquer que les *erreurs* Δ peuvent être considérées comme des *différentielles* des quantités observées : Δ est donc du même ordre que dO, et la différentielle $d\Delta$ peut être négligée vis-à-vis de dO, comme étant une quantité du second ordre. Cette considération réduit nos équations (q') à la forme

$$(Q') \ldots \quad \begin{aligned} dO &= a\,dx + b\,dy + c\,dz + \ldots \\ dO' &= a'dx + b'dy + c'dz + \ldots \\ dO'' &= a''dx + b''dy + c''dz + \ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Multipliant la 1re par α_1, la 2e par α_2, la 3e par α_3.... et *ajoutant* les *e* équations résultantes, le premier membre ainsi obtenu sera identique avec le second membre de la 1re des équations (q) ; par suite le second membre de l'équation résultante devra être égal à dx; donc le facteur de dx, dans ce second membre, devra être égal à l'unité, et les facteurs de dy, dz... égaux à zéro.

Ainsi l'on a $\qquad [\alpha a] = 1\,; \quad [\alpha b] = 0\,; \quad [\alpha c] = 0.$

Notre équation (q^{vii}) devient donc enfin

$$[\alpha^2] = q_1 = \frac{1}{P_1}.$$

Il est clair d'ailleurs qu'en agissant d'une manière analogue, on trouverait pour les poids de y, z....

$$[\beta^2] = q'_2 = \frac{1}{P_2}.$$

$$[\gamma^2] = q''_3 = \frac{1}{P_3}.$$

Remarquons que la recherche des poids des inconnues, dont nous venons d'expliquer assez longuement la théorie, exige dans la pratique peu de calculs nouveaux ; car les coefficients des *équations du poids* sont les mêmes que ceux des équations *normales;* et l'on n'a d'autre travail que celui de l'élimination, pour trouver q_1 ou q'_2 ou q''_3...

Tous les développements qui précèdent se résument donc dans cette règle pratique bien simple :

« Pour trouver le poids P_n d'une inconnue, x, on remplace, dans « l'équation normale relative à x, la quantité toute connue par — 1 ; « dans toutes les autres équations normales, on remplace la quantité « toute connue par zéro. — En même temps, on met q_n à la place « de x, et l'on élimine toutes les inconnues restantes. » On trouve ainsi

$$q_n = \frac{1}{P_n}.$$

Connaissant le poids d'une inconnue, on trouvera son erreur moyenne par la relation

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_1}} = \varepsilon\sqrt{q_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_2}} = \varepsilon\sqrt{q'_2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P_3}} = \varepsilon\sqrt{q''_3}\ \ldots$$

Dans le cas de trois inconnues, les équations du poids présentent donc les trois systèmes suivants, dans lesquels Q_1, Q_2, Q_3 sont les véritables inconnues à déterminer, et les q des coefficients *arbitraires* à éliminer.

$$(\text{I})\quad \begin{cases} 0 = -1 + [aa]\,Q_1 + [ab]\,q_2 + [ac]\,q_3 \\ 0 = 0 + [ab]\,Q_1 + [bb]\,q_2 + [bc]\,q_3 \\ 0 = 0 + [ac]\,Q_1 + [bc]\,q_2 + [cc]\,q_3. \end{cases}$$

$$(\text{II})\quad \begin{cases} 0 = 0 + [aa]\,q'_1 + [ab]\,Q_2 + [ac]\,q'_3 \\ 0 = -1 + [ab]\,q'_1 + [bb]\,Q_2 + [bc]\,q'_3 \\ 0 = 0 + [ac]\,q'_1 + [bc]\,Q_2 + [cc]\,q'_3. \end{cases}$$

$$(\text{III})\quad \begin{cases} 0 = 0 + [aa]\,q''_1 + [ab]\,q''_2 + [ac]\,Q_3 \\ 0 = 0 + [ab]\,q''_1 + [bb]\,q''_2 + [bc]\,Q_3 \\ 0 = -1 + [ac]\,q''_1 + [bc]\,q''_2 + [cc]\,Q_3. \end{cases}$$

Remarque. — Les équations du poids ne différant des équations normales que par les termes tout connus que renferment ces dernières, il s'ensuit que si, dans chacun de ces deux systèmes, on éliminait successivement toutes les inconnues sauf une seule, x, le coefficient de x serait identiquement le même dans les deux équations finales : or, d'après ce que viennent de nous montrer les équations du poids, ce *coefficient* est précisément le *poids* de x.

Il suit de là que l'on peut se dispenser d'opérer sur les équations du poids, et éliminer simplement entre les équations normales (en ayant soin de n'introduire aucun facteur d'élimination). Le coefficient de l'inconnue qui reste la dernière est le poids de cette inconnue. Ainsi le poids de v (§ 124) est $[dd.\,3]$; et pour obtenir ceux de z, y, x, il suffirait de former les coefficients $[cc.\,3]$, $[bb.\,3]$, $[aa.\,3]$.

Cette méthode, qui est celle de Gauss (*Theor. motus corpor. cœl.*, § 182), fournit donc à la fois les inconnues et leurs poids. On peut, nous semble-t-il, la justifier directement par le raisonnement qui suit. Dans la résolution d'un groupe d'équations par la méthode des moindres carrés, on remplace *l'ensemble* des relations qui existent entre une inconnue, x, et toutes les autres inconnues, par une relation *unique* (l'équation normale relative à x) dans laquelle chacun des coefficients primitifs de x a été remplacé par son *carré*. Sous le rapport du poids des observations, les équations normales ne sont donc pas la traduction exacte des équations primitives : elles exagèrent l'importance de celles-ci.

Or, quand on élimine entre les équations normales toutes les inconnues, sauf x (en évitant soigneusement l'introduction ou la suppression de tout facteur), on arrive à une expression de la forme

$$Px = k,$$

dans laquelle le poids de x est P^2 (§ 118). Mais comme le poids de cette inconnue, eu égard aux équations primitives, doit être réduit dans le rapport de la seconde puissance à la première, il devient par conséquent P.

Ce raisonnement si simple paraîtra peut-être insuffisant à quelques esprits rigoureux : nous le croyons toutefois très-propre à graver le principe dans la mémoire, et même à jeter quelque clarté sur la théorie précédente.

§ **129**. — Comme application, calculons les poids des inconnues dont nous avons déterminé (§ 126) les valeurs les plus probables.

Les équations du poids de x sont ici

$$\begin{aligned} 27Q_1 + 6q_2 - 1 &= 0 \\ 6Q_1 + 15q_2 + q_3 &= 0 \\ q_2 + 54q_3 &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit par l'élimination ordinaire

$$Q_1 = \frac{809}{19899};$$

d'où $P_1 = 24{,}596$ ... poids de x.

On trouverait, par une marche analogue,

$$P_2 = 13{,}649, \ \ldots \text{ poids de } y.$$
$$P_3 = 53{,}927, \ \ldots \quad \text{»} \quad z.$$

Cette dernière valeur n'est autre chose que celle du facteur $[cc.2]$.

Quant à l'erreur moyenne de chaque inconnue, elle se calculera en fonction de son poids, et de l'erreur moyenne (§ 127) de l'unité de poids.

On aura donc (k^v) $\varepsilon' = 0{,}057$ erreur moyenne de x

$\varepsilon'' = 0{,}077$ » » y

$\varepsilon''' = 0{,}039$ » » z.

§ **130.** — Ajoutons quelques exemples pour familiariser le lecteur avec l'application de la méthode des moindres carrés. —

1° On doit faire passer une droite par quatre points dont les coordonnées n'ont pu être mesurées qu'approximativement : quelle est l'équation la plus probable de la droite?

Les coordonnées approximatives des quatre points sont

$$\begin{aligned} x &= 0 \ \ldots \ y = 3{,}5 \\ x &= 88 \ \ldots \ y = 5{,}7 \\ x &= 182 \ \ldots \ y = 8{,}2 \\ x &= 274 \ \ldots \ y = 10{,}3. \end{aligned}$$

Puisque la ligne est droite, elle doit satisfaire à l'équation

$$Y = \alpha X + \beta,$$

dans laquelle α et β sont les inconnues à déterminer. La mettant sous la forme

$$0 = \alpha X + \beta - Y,$$

et la comparant à la forme générale

$$0 = ax + by + \ldots + n,$$

on a pour équations normales :

$$[XX]\,\alpha + [X.1]\,\beta - [XY] = 0,$$
$$[X]\,\alpha + [1]\,\beta - [Y] = 0.$$

Substituant aux quatre groupes de coordonnées leurs valeurs observées,

on trouve
$$[XX] = 115944$$
$$[XY] = 4816{,}2$$
$$[X] = 544$$
$$[Y] = 27{,}7$$
$$[1] = 4$$

d'où
$$115944\,\alpha + 544\,\beta - 4816{,}2 = 0,$$
$$544\,\alpha + 4\,\beta - 27{,}7 = 0.$$

L'élimination donne
$$\alpha = 0{,}02500$$
$$\beta = 3{,}52475\,;$$

et l'équation la plus probable de la droite est

$$Y = 0{,}025\,X + 3{,}525.$$

Comparant ce résultat avec les observations, on trouve

	Calcul.	Observations.	Erreurs.	Carrés des erreurs.
pour $x = 0 \ldots y =$	3,525 ...	3,500	+ 0,025	0,000 625
$= 88 \ldots y =$	5,725 ...	5,700	+ 0,025	0,000 625
$= 182 \ldots y =$	8,075 ...	8,200	— 0,125	0,015 625
$= 274 \ldots y =$	10,375 ...	10,300	+ 0,075	0,005 625
				$[\Delta^2] = 0{,}022\ 500.$

L'erreur moyenne est donc $\sqrt{\dfrac{[\Delta^2]}{2}} = \pm\ 0{,}106.$

2° On veut représenter l'équation de la trajectoire d'un projectile par une expression de la forme

$$Y = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3\,;$$

et l'on demande à l'observation la valeur la plus probable des coefficients α, β, γ.

Pour cela, on placera de distance en distance un certain nombre, n, d'écrans, contre lesquels on tirera ; on fera le relevé du coup, et l'on obtiendra ainsi n ordonnées de la trajectoire, correspondant à des abscisses mesurées d'avance, ou n équations de condition analogues à la première. Les résolvant par la méthode des moindres carrés, exactement comme dans l'exemple précédent, on obtiendra la valeur la plus probable des constantes cherchées. L'erreur moyenne du résultat montrera jusqu'à quel point l'hypothèse dont on est parti est admissible; c'est-à-dire qu'elle décidera si l'on peut assimiler la trajectoire à une courbe parabolique du troisième degré.

Il est clair que, pour se soustraire aux causes accidentelles d'erreur, on ne se contentera pas d'une seule expérience : on en fera plusieurs, dans des circonstances identiques de charge et de pointage, et l'on prendra, sur chaque écran, la hauteur moyenne du point d'impacte. On aura ainsi l'ordonnée moyenne correspondant à l'abscisse de l'écran; et c'est l'erreur moyenne de cette espèce d'observations qu'il faudra comparer à celle du calcul, pour juger de la légitimité de l'hypothèse admise.

Nous nous dispenserons d'appliquer les nombres à cet exemple, parce que les données d'observation nous manquent : il n'offre du reste rien de particulier, et sa solution rentre tout à fait dans celles de l'exemple qui précède et de celui qui suit.

3° Les expériences suivantes, faites par Hagen, ont eu pour but de trouver l'expression de la résistance que l'air oppose à un mobile, en fonction de la vitesse de ce mobile. (Voy. *Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung*, § 38). V exprime la vitesse (en pieds) et R la résistance de l'air (en demi-onces) sur l'unité de surface (un pouce carré).

Il a trouvé pour	V = 0,747 ...	R = 0,000 211
	= 1,010 ...	= 0,000 381
	= 1,441 ...	= 0,000 716
	= 2,058 ...	= 0,001 403
	= 2,915 ...	= 0,002 814
	= 4,116 ...	= 0,005 686
	= 5,831 ...	= 0,011 473.

Un simple coup d'œil jeté sur ces nombres montre que la résistance n'est pas exactement proportionnelle au carré de la vitesse, comme on a coutume de l'admettre ; et que l'on doit, pour exprimer R en fonction de V, introduire encore un terme qui renferme la vitesse à la première puissance. Malgré cette correction, les résultats ne concordent pas encore d'une manière entièrement satisfaisante, et

Hagen a introduit dans sa formule un troisième terme ayant pour facteur V^3. Nous posons donc :

$$R = \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3 ;$$

ce qui donnerait des équations aux erreurs, de la forme

$$\Delta = - R + \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3.$$

Mais en agissant directement sur cette espèce d'équations, nous accorderions trop d'importance aux observations qui se rapportent aux fortes résistances, parce que les erreurs *absolues* y sont les plus considérables. Pour donner une égale influence à toutes les observations, nous appliquerons la méthode des moindres carrés aux erreurs *relatives* $\frac{\Delta}{R}$, et nos équations aux erreurs seront de la forme

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{V}{R}\alpha + \frac{V^2}{R}\beta + \frac{V^3}{R}\gamma - 1.$$

Comparant à l'équation type du § 124, nous voyons qu'il faut ici remplacer, dans les formules de ce paragraphe,

$$a \text{ par } \frac{V}{R}$$

$$b \text{ » } \frac{V^2}{R}$$

$$c \text{ » } \frac{V^3}{R}$$

$$n \text{ » } -1$$

$$x, y, z \ldots \text{ » } \alpha, \beta, \gamma \ldots$$

Les coefficients sommatoires ont donc les valeurs numériques suivantes :

$$
\begin{aligned}
[aa] &= 27\,653\,200 \\
[ab] &= 33\,552\,400 \\
[ac] &= 58\,506\,100 \\
[an] &= -\ 11\,944{,}2 \\
[bb] &= 58\,506\,100 \\
[bc] &= 157\,731\,000 \\
[bn] &= -\ 20\,211{,}3 \\
[cc] &= 593\,890\,000 \\
[cn] &= -\ 53\,430{,}0.
\end{aligned}
$$

Les substituant dans les trois équations normales, on obtient par l'élimination

$$\alpha = +\,0{,}000\ 06473$$
$$\beta = +\,0{,}000\ 29221$$
$$\gamma = +\,0{,}000\ 00598\ :$$

et la formule empirique exprimant la résistance de l'air devient ainsi

$$R = 0{,}000\ 0647\ V + 0{,}000\ 2922\ V^2 + 0{,}000\ 00598\ V^3.$$

L'employant à calculer les résistances correspondantes aux vitesses observées, on trouverait

$$\begin{aligned} R &= 0,\ 000\ 214 \\ &= 0,\ 000\ 370 \\ &= 0,\ 000\ 718 \\ &= 0,\ 001\ 423 \\ &= 0,\ 002\ 820 \\ &= 0,\ 005\ 634 \\ &= 0,\ 011\ 499. \end{aligned}$$

Les erreurs restantes seraient donc

$$\begin{aligned} \Delta &= +\ 0,\ 000\ 003 \\ &= -\ 0,\ 000\ 011 \\ &= +\ 0,\ 000\ 002 \\ &= +\ 0,\ 000\ 020 \\ &= +\ 0,\ 000\ 006 \\ &= -\ 0,\ 000\ 052 \\ &= +\ 0,\ 000\ 026. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'erreur moyenne, nous devons revenir aux erreurs relatives, c'est-à-dire, diviser chaque Δ par le R correspondant.

On trouve ainsi $\left[\left(\dfrac{\Delta}{R}\right)^2\right] = 0{,}001\ 3804$,

d'où l'erreur moyenne $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{0{,}001\ 3804}{7-3}} = \pm\,0{,}01858.$

L'erreur probable $r = 0{,}6745\ \varepsilon \quad = \pm\,0{,}01253.$

Quant aux erreurs probables relatives à chacune des trois inconnues en particulier, on trouve

pour α ... $r = 0,\ 000\ 00816$
» β ... $r = 0,\ 000\ 00937$
» γ ... $r = 0,\ 000\ 00182.$

La valeur absolue de la première constante est environ huit fois plus forte que son erreur probable : il y a donc plus d'un million à parier contre un que la nécessité d'introduire un terme renfermant la première puissance de la vitesse ne provient pas d'erreurs accidentelles dans les expériences. La nécessité du terme en V^3 nous paraît beaucoup plus contestable.

4° Les formules de la mécanique, d'accord avec les résultats de l'expérience, nous apprennent que la longueur, l, du pendule à secondes varie avec la latitude, λ, du lieu d'observation; et que ces deux quantités sont liées entre elles par la relation

$$l = A + B \sin^2 \lambda.$$

A et B sont deux constantes à déterminer.

$$\begin{array}{llll} \text{Pour } \lambda = 0^\circ & \ldots & \text{on a} & A = l \\ \text{et pour } \lambda = 90^\circ & \ldots & \text{»} & B = l - A; \end{array}$$

de sorte que A est la longueur du pendule à l'équateur, et B la différence entre les longueurs du pendule au pôle et à l'équateur. Deux observations, faites sous des latitudes très-différentes, suffiraient à la rigueur pour déterminer les valeurs de nos deux constantes; mais le résultat sera évidemment d'autant plus exact, que l'on fera concourir à cette détermination un plus grand nombre d'expériences, en les traitant par la méthode des moindres carrés.

Or, on trouve dans l'Astronomie de Biot (t. III, p. 164) les observations suivantes de la longueur du pendule à secondes *centésimales*.

OBSERVATEURS.	LIEUX.	LATITUDES.	LONGUEURS DU PENDULE.
Arago, Chaix, Biot. . . .	Formentera	38° 39′ 46″	0^m,741 2517
Mathieu, Biot.	Figeac . . .	44 36 45	0 ,741 6243
Mathieu, Biot.	Bordeaux .	44 50 25	0 ,741 6151
Mathieu, Biot.	Clermont .	46 48 4	0 ,741 7157
Bouvard, Mathieu, Biot. .	Paris. . . .	48 50 15	0 ,741 9262
Mathieu, Biot.	Dunkerque.	51 2 8	0 ,742 0865

Substituant aux sinus des latitudes leurs valeurs numériques, on obtient six équations de condition, savoir :

$$\Delta_1 = 0{,}741\ 2517 - A - 0{,}390\ 3417\ B$$
$$\Delta_2 = 0{,}741\ 6243 - A - 0{,}494\ 2370\ B$$
$$\Delta_3 = 0{,}741\ 6151 - A - 0{,}497\ 2122\ B$$
$$\Delta_4 = 0{,}741\ 7157 - A - 0{,}513\ 6117\ B$$
$$\Delta_5 = 0{,}741\ 9262 - A - 0{,}566\ 7721\ B$$
$$\Delta_6 = 0{,}742\ 0865 - A - 0{,}604\ 5628\ B$$

qui conduisent facilement aux deux équations normales

$$-\ 4{,}450\ 2195 + 6\ A + 3{,}065\ 7375\ B = 0$$
$$-\ 2{,}273\ 97288 + 3{,}065\ 7375\ A + 1{,}593\ 39312\ B = 0.$$

Les divisant par 6, et éliminant ensuite par la méthode ordinaire, on trouve $A = 0^m{,}739\ 703526$

$$B = 0^m{,}003\ 913689.$$

Par conséquent, la formule numérique qui donne la longueur du pendule centésimal, sous la latitude λ, est

$$l = 0^m{,}739\ 703526 + 0^m{,}003\ 913689\ \sin^2\lambda.$$

Recalculant par cette formule les six observations du tableau précédent, on trouverait les valeurs des Δ, et par suite l'erreur moyenne d'une observation ; puis on calculerait séparément, comme dans l'exemple précédent, l'erreur moyenne de A et celle de B.

Le tableau suivant, extrait de l'Astronomie de Bohnenberger, présente les longueurs du pendule à secondes *sexagésimales*, observées sous des latitudes très-différentes. On a pris pour unité la longueur du pendule à Paris, qui, suivant Borda, est de $440^{\text{lig.}},559$.

OBSERVATEURS.	LIEUX.	LATITUDES.	LONGUEURS DU PENDULE.
Bouguer . . .	Pérou	0° 0′	0,996 69
»	Portobello . .	9 34	0,996 89
Le Gentil . .	Pondichéry .	11 56	0,997 10
Campbell. . .	Jamaïque . .	18 0	0,997 45
Bouguer . . .	Petit-Goave .	18 27	0,997 28
Lacaille . . .	Cap	33 55	0,998 77
—	Formentera .	38 40	0,999 08
Darquier. . .	Toulouse. . .	43 36	0,999 50
Liesganig . .	Vienne. . . .	48 13	0,999 87
Bouguer . . .	Paris.	48 50	1,000 00
Zach.	Gotha	50 56	1,000 06
Graham . . .	Londres . . .	51 31	1,000 18
Grischow. . .	Arensberg . .	58 15	1,000 74
Mallet	Pétersbourg .	59 56	1,001 01
Maupertuis .	Pello.	66 48	1,001 37
Mallet	Ponoï.	67 5	1,001 48

Ces observations (à l'exception de celle de Formentera) ont été calculées par Puissant (*Traité de géodésie*, t. II, p. 341), d'après la méthode des moindres carrés. Le résultat qu'il trouve conduit à la formule

$$l = 0^m{,}739\,5752 + 0^m{,}004\,07830 \sin^2 \lambda\,,$$

pour exprimer la longueur du pendule à secondes centésimales.

5° Pour évaluer en secondes une division du niveau à bulle d'air, on attache le niveau à la lunette d'un cercle méridien, de manière que l'axe du tube soit parallèle au plan du cercle ; puis on pointe successivement à différentes hauteurs, et l'on fait sur le cercle les lectures a, a', a''... correspondantes aux positions n, n', n''... du milieu de la bulle. L'observation étant très-délicate, on la répète plusieurs fois, et l'on calcule le résultat le plus probable par la méthode des moindres carrés.

Faisons, pour simplifier, $a = 0$, ce qui revient à supposer que la lecture faite sur le cercle donne zéro, lorsque le centre de la bulle occupe la position n : de cette manière, l'arc $a' - a$, parcouru par la bulle entre ses deux positions n et n', sera simplement désigné par a', et ainsi de suite ; soit de plus y la valeur, en secondes, d'une division du niveau ; x le nombre de secondes qui correspond à ny, ou l'inclinaison de l'axe du niveau, par rapport au diamètre initial du cercle, lorsque la bulle donne la lecture n ; on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= x + ny \\ a' &= x + n'y \qquad \ldots \ (1) \\ a'' &= x + n''y \ldots \end{aligned}$$

L'expression qu'il faut rendre un minimum est donc

$$(+\,x + ny)^2 + (-a' + x + n'y)^2 + (-\,a'' + x + n''y)^2 + \ldots$$

La différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y, et égalant à zéro les coefficients différentiels, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (+\,x + ny) + (-\,a' + x + n'y) + (-\,a'' + x + n''y) + \ldots \\ 0 &= (+\,nx + n^2y) + (-a'n' + n'x + n'^2y) + (-a''n'' + n''x'' + n''^2y) + \ldots \end{aligned}$$

qui se réduisent à deux équations normales de la forme générale

$$\begin{aligned} [an] &= [aa]\ x + [ab]\ y \\ [bn] &= [ab]\ x + [bb]\ y. \end{aligned}$$

Dans le cas actuel, ces deux équations deviennent

$$[1]\,x + [n]\,y - [a] = 0,$$
$$[n]\,x + [nn]\,y - [an] = 0;$$

et la première provient de l'addition immédiate des équations (1) ; la seconde, de l'addition de ces mêmes équations, après avoir préalablement multiplié chacune d'elles par le coefficient de y. — L'élimination de x fera connaître la valeur la plus probable de y.

Application. — Pour déterminer la valeur d'une division d'un niveau à bulle d'air, on l'a attaché à la lunette d'un cercle méridien, et l'on a fait les observations suivantes.

LECTURES SUR LE Cercle Méridien.	BULLE DU NIVEAU. — EXTRÉMITÉS Droite.	Gauche.	VALEURS DE $n, n' \ldots$	$a, a' \ldots$
21, 645	— 23,8	+ 7,4	— 8,20	0, 000
21, 974	— 20,2	+ 10,9	— 4,65	0, 329
22, 328	— 15,8	+ 15,3	— 0,25	0, 683
22, 676	— 12,3	+ 18,8	+ 3,25	1, 031
23, 110	— 7,6	+ 23,6	+ 8,00	1, 465

Les équations normales sont donc

$$+\ 3{,}508 = \quad 5\,x - 1{,}85\,y$$
$$+\,13{,}702 = -\,1{,}85\,x + 163{,}4875\,y\,;$$

d'où l'on déduit $x = 0{,}73470$; $y = 0{,}090097$.

Six séries analogues ont été faites par Baeyer au cercle méridien de l'Observatoire de Königsberg : il a obtenu pour y les valeurs suivantes :

$$
\begin{aligned}
y &= 0{,}090\ 097\\
&\ 0{,}090\ 652\\
&\ 0{,}088\ 077\\
&\ 0{,}088\ 830\\
&\ 0{,}087\ 307\\
&\ 0{,}088\ 523
\end{aligned}
$$

valeur moyenne $y = 0{,}089\ 526.$

Un tour de vis de l'appareil micrométrique était pris pour unité : ce tour de vis vaut d'ailleurs $34'',239$; il s'ensuit qu'une division du niveau $= 3'',065$.

La somme des carrés des erreurs des six déterminations de y est $0,000010257104$; par suite l'erreur moyenne

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{5}} = \pm\ 0,0013075 = \pm\ 0'',045.$$

§ **131.** — La méthode des moindres carrés, telle que nous l'avons développée, suppose que les relations primitives qui existent entre les inconnues sont de forme *linéaire*. Elle se compliquerait beaucoup et deviendrait matériellement inapplicable, pour toute autre forme. Heureusement on peut, au moyen d'une solution indirecte, ramener ce dernier cas au premier.

Pour cela, parmi toutes les équations fournies par l'observation, on en choisit autant qu'il y a d'inconnues, et l'on détermine les valeurs de ces inconnues par les procédés ordinaires de l'algèbre. Très-souvent même, ce travail préparatoire est inutile, car on connaît déjà les valeurs *approximatives* des inconnues, et les observations n'ont pour but que de *corriger* ces valeurs. C'est le cas qui se présente, par exemple, lorsque l'on emploie les observations des planètes, pour corriger les tables de leur mouvement.

Soient donc X, Y, Z... les valeurs approximatives de x, y, z... données *à priori*, ou déduites d'un premier calcul purement algébrique : il s'agit de calculer les corrections x', y', z'... dont ont besoin ces premières *suppositions*. On a par conséquent

$$x = X + x' ; \quad y = Y + y' ; \quad z = Z + z' \ldots$$

Introduisons les valeurs provisoires dans les équations proposées ; elles donneront

$$\begin{aligned} V_0 &= F\ (X, Y, Z \ldots) \\ V'_0 &= F'\ (X, Y, Z \ldots) \\ V''_0 &= F''\ (X, Y, Z \ldots) \end{aligned}$$

c'est-à-dire e équations entre i inconnues, qui permettront de calculer les valeurs numériques des fonctions V_0, V'_0, V''_0...

Si nous introduisons $X + x'$, $Y + y'$, $Z + z'$... dans nos équations primitives, au lieu de x, y, z... nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} V &= F\ (X + x';\ Y + y';\ Z + z' \ldots) \\ V' &= F'\ (X + x';\ Y + y';\ Z + z' \ldots) \\ V'' &= F''\ (X + x';\ Y + y';\ Z + z' \ldots) \ldots \text{etc.}; \end{aligned}$$

ou bien, en développant d'après le théorème de Taylor, et négligeant les puissances supérieures des petites corrections x', y', z'...

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \frac{dV_0}{dX} x' + \frac{dV_0}{dY} y' + \frac{dV_0}{dZ} z' \ldots \\ V' &= V'_0 + \frac{dV'_0}{dX} x' + \frac{dV'_0}{dY} y' + \frac{dV'_0}{dZ} z' \ldots \\ V'' &= V''_0 + \frac{dV''_0}{dX} x' + \frac{dV''_0}{dY} y' + \frac{dV''_0}{dZ} z' \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

$\frac{dV_0}{dX}$, $\frac{dV_0}{dY}$, $\frac{dV_0}{dZ}$... ne sont autre chose que les dérivées partielles de la fonction primitive V, dans laquelle on a substitué X, Y, Z... à x, y, z...; il en est de même de $\frac{dV'_0}{dX}$, $\frac{dV'_0}{dY}$... etc. Désignant ces quantités connues par a, b, c..., a', b', c'..., on obtient entre les corrections x', y', z'... des équations de la forme

$$\begin{aligned} V &= V_0 + ax' + by' + cz' + \ldots \\ V' &= V'_0 + a'x' + b'y' + c'z' + \ldots \\ V'' &= V''_0 + a''x' + b''y' + c''z' + \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

Soit O la valeur de V fournie par l'observation; nous aurons

$$O - V = O - V^0 - (ax' + by' + cz' \ldots):$$

faisons $\quad V - O = \Delta$, quantité inconnue;

$\quad V_0 - O = n$, quantité connue:

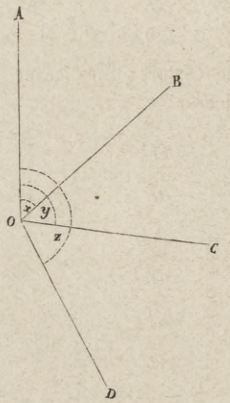
il viendra $\quad \Delta = ax' + by' + cz' + \ldots + n.$

On aurait de même $\quad \Delta' = a'x' + b'y' + c'z' + \ldots + n'$

$\quad \Delta'' = a''x' + b''y' + c''z' + \ldots + n''\ldots$

Système entièrement semblable au groupe (p') du § 124. Chaque observation fournit donc entre les *corrections* x', y', z'... une équation *linéaire;* et l'ensemble de ces équations se traitera par la méthode exposée précédemment.

§ 132. — 1° On trouve en géodésie de fréquentes occasions d'appliquer la méthode qui vient d'être exposée. Admettons, par exemple, qu'un observateur, en station au point O, découvre quatre sommets A, B, C, D de la triangulation : il pourra, pour déterminer les directions relatives des quatre rayons visuels OA, OB, OC, OD, mesurer les six angles horizontaux AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD; et en déduire, de plusieurs manières différentes, les valeurs des angles cherchés *. Il y a donc lieu d'opérer ici la compensation des observations; et de chercher, par la méthode des moindres carrés, la valeur la plus probable du résultat.



Soit, par exemple :

$$\begin{array}{lrrrll}
AOB = & 48^0 & 17' & 1'',4 & = x \\
AOC = & 96 & 52 & 16\ ,8 & = y \\
AOD = & 152 & 54 & 6\ ,8 & = z \\
BOC = & 48 & 35 & 14\ ,3 & = y - x \\
BOD = & 104 & 37 & 7\ ,8 & = z - x \\
COD = & 56 & 1 & 48\ ,9 & = z - y.
\end{array}$$

Dans le cas actuel, les valeurs approximatives des fonctions proposées se trouvent sans aucun calcul, en les *supposant* à peu près égales aux résultats immédiats de l'observation. Soient donc les *suppositions* suivantes, que nous écrivons en supprimant les degrés et les minutes :

$$\begin{aligned}
x &= 1'' + x' \\
y &= 17'' + y' \\
z &= 7'' + z' \\
y - x &= 16'' + y' - x' \\
z - x &= 6'' + z' - x' \\
z - y &= 50'' + z' - y'.
\end{aligned}$$

* Cette méthode d'observation, recommandée par les auteurs allemands, est désignée par eux sous le nom de « *Horizont-Abschluss* »; locution qu'il ne faut pas confondre avec l'expression française « tour d'horizon. »

Nos équations de condition seront

$$\begin{aligned}
&-0'',4+x' &&=0\\
&+0\ ,2+y' &&=0\\
&+0\ ,2+z' &&=0\\
&+1\ ,7+y'-x' &&=0\\
&-1\ ,8+z'-x' &&=0\\
&+1\ ,1+z'-y' &&=0.
\end{aligned}$$

Les coefficients sommatoires et auxiliaires seront

$$\begin{aligned}
[aa] &= 3 & [an] &= -\ 0'',3\\
[ab] &= -\ 1 & [bn] &= +\ 0\ ,8\\
[ac] &= -\ 1 & [cn] &= -\ 0\ ,5.\\
[bb] &= 3 & &\\
[bc] &= -\ 1 & &\\
[cc] &= 3. & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[bb.1] &= \frac{8}{3} & [bn.1] &= +\ 0'',7\\
[bc.1] &= -\frac{4}{3} & [cn.1] &= -\ 0\ ,6.\\
[cc.1] &= \frac{8}{3}. & &\\
[cc.2] &= 2. & [cn.2] &= -\ 0'',25.
\end{aligned}$$

On aura donc pour équations finales :

$$x'-\frac{1}{3}y'-\frac{1}{3}z'-0'',1=0;$$

$$y'-\frac{1}{2}z'+0'',26=0;$$

$$z'-0'',125=0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
z' &= +\ 0'',125\\
y' &= -\ 0\ ,20\\
x' &= +\ 0\ ,07.
\end{aligned}$$

En nous bornant au dixième de la seconde, les valeurs les plus probables des inconnues seront donc :

$$\begin{aligned} z &= 152^\circ\,54'\ \ 7'',1, \\ y &= \ \ 96\ \ 52\ \ 16\ ,8, \\ x &= \ \ 48\ \ 17\ \ \ 1\ ,1. \end{aligned}$$

Si l'on compare ces éléments corrigés aux résultats immédiats fournis par l'observation, on trouvera les erreurs

$$\begin{aligned} \Delta &= -\ 0'',3 \\ \Delta' &= \ \ \ \ 0\ ,0 \\ \Delta'' &= +\ 0\ ,3 \\ \Delta''' &= +\ 1\ ,4 \\ \Delta^{\text{iv}} &= -\ 1\ ,8 \\ \Delta^{\text{v}} &= +\ 1\ ,6. \end{aligned}$$

La somme des carrés de ces erreurs est $7'',94$: le nombre des éléments à déterminer étant 3, on a donc, pour l'erreur moyenne d'une observation,

$$\eta = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{6-3}} = \pm 1'',63.$$

La forme des équations de condition suffit pour montrer que les trois inconnues sont déterminées avec une égale précision : les équations du poids sont d'ailleurs très-faciles à former; on aurait, par exemple, pour celles qui sont relatives à x,

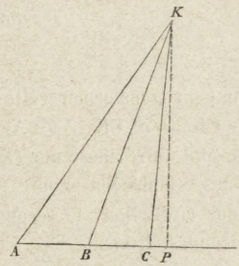
$$\begin{aligned} 3Q_1 - q_2 - q_3 - 1 &= 0 \\ -Q_1 + 3q_2 - q_3 &= 0 \\ -Q_1 - q_2 + 3q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Doublant la première et l'ajoutant aux deux autres, on obtient immédiatement $Q_1 = \frac{1}{2}$, d'où $P_1 = 2$.

L'observation simple a été prise pour unité de poids; il s'ensuit que l'erreur moyenne de chaque détermination est (k$^{\text{v}}$)

$$\varepsilon = \frac{\eta}{\sqrt{2}} = \pm 1'',15.$$

Nous traiterons plus loin le cas où les angles observés formeraient un *tour d'horizon*.



2° On veut rattacher la position d'un point inaccessible, K, à la base AP: pour cela, on a mesuré les trois angles KAP, KBP, KCP, ainsi que les distances AB, BC. Il s'agit de trouver la valeur la plus exacte de l'ordonnée $KP = y$, et de l'abscisse $AP = x$.

Les données de la question sont

$$\begin{aligned} KCP &= O = 86^\circ\ 27'\ 18'',9 \\ KBP &= O' = 73\ \ 22\ \ 13\ ,4 \\ KAP &= O'' = 61\ \ \ 4\ \ 38\ ,7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= D = 18^m,1256 \\ AB &= D' = \ 9\ ,3793. \end{aligned}$$

Nos équations primitives sont

$$\tang O = \frac{y}{x - D};$$

$$\tang O' = \frac{y}{x - D'};$$

$$\tang O'' = \frac{y}{x}.$$

Au moyen de la première et de la troisième, calculons les valeurs provisoires de x et de y : nous trouvons ainsi

$$X = +\ 20,414;$$
$$Y = +\ 36,946.$$

Soient o, o', o'', les valeurs de O, O', O'' que l'on calculerait au moyen des éléments provisoires X et Y : nous avons

$$V_0 = \tang o = \frac{Y}{X - D} \ldots o = 86^\circ\ 27'\ 20'',45;$$

$$V'_0 = \tang o' = \frac{Y}{X - D'} \ldots o' = 73\ \ 22\ \ 14\ ,30;$$

$$V''_0 = \tang o'' = \frac{Y}{X} \ldots o'' = 61\ \ 4\ \ 39\ ,94.$$

Différentiant la première de ces trois relations, nous avons

$$dV_0 = \frac{do}{\cos^2 o} = \frac{dY}{X-D} - \frac{YdX}{(X-D)^2}.$$

On peut transformer cette expression, en y introduisant les valeurs de CK $= r$; BK $= r'$; AK $= r''$, qui sont faciles à calculer, et qui ne sont autre chose que $(X - D) \cos o$; $(X - D') \cos o'$; $X \cos o''$. Nous remplaçons en outre Y par $r \sin o = r' \sin o' = r'' \sin o''$; et nous multiplions le second membre par $\sin 1''$ pour réduire do en secondes. Il vient

$$do = -\frac{\sin 1'' \sin o}{r} dX + \frac{\sin 1'' \cos o}{r} dY = a dX + b dY;$$

$$do' = -\frac{\sin 1'' \sin o'}{r'} dX + \frac{\sin 1'' \cos o'}{r'} dY = a' dX + b' dY;$$

$$do'' = -\frac{\sin 1'' \sin o''}{r''} dX + \frac{\sin 1'' \cos o''}{r''} dY = a'' dX + b'' dY.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} a &= -5561{,}6 & b &= +\ 344{,}5 \\ a' &= -5125{,}7 & b' &= +1530{,}9 \\ a'' &= -4277{,}1. & b'' &= +2363{,}3. \end{aligned}$$

Retranchant les angles observés des angles calculés, on trouve

$$\begin{aligned} o - O &= n = +1'',55 \\ o' - O' &= n' = +0\ ,90 \\ o'' - O'' &= n'' = +1\ ,24. \end{aligned}$$

Nos équations linéaires sont donc

$$\begin{aligned} \Delta &= -5561{,}6\,x' + \ 344{,}5\,y' + 1{,}55 \\ \Delta' &= -5125{,}7\,x' + 1530{,}9\,y' + 0{,}90 \\ \Delta'' &= -4277{,}1\,x' + 2363{,}3\,y' + 1{,}24. \end{aligned}$$

A la rigueur il était inutile de les transcrire; il était même superflu de former les nombres a, b, etc.: leurs logarithmes nous suffisaient. Au moyen de ces logarithmes et de ceux des n, on formera les coefficients des équations normales, qui sont

$[an]$	$[aa]$	$[ab]$	$[bn]$	$[bb]$
$-18537{,}13$;	$+75497600$;	-19870530;	$+4842{,}12$;	$+8047245$.

Si nous voulons que x' et y' soient exprimés en millimètres, il suffira de diviser par 1000 leurs coefficients. Nos équations normales

seront donc
$$\begin{aligned} 75498\,x' - 19871\,y' - 18537{,}13 &= 0 \\ -19871\,x' + 8047\,y' + 4842{,}12 &= 0; \end{aligned}$$

et l'on en tire
$$\begin{aligned} x' &= +\,0{,}24896 \\ y' &= +\,0{,}01305. \end{aligned}$$

Nos coordonnées définitives sont donc
$$\begin{aligned} x &= 20{,}414249 \\ y &= 36{,}946013. \end{aligned}$$

Voulons-nous subsidiairement voir quelles sont les corrections que devraient subir nos observations, remplaçons x' et y' par leurs valeurs dans les équations de condition, et nous trouverons
$$\begin{aligned} \Delta &= +\,0'',17 \\ \Delta' &= -\,0'',36 \qquad [\Delta^2] = 0'',2026. \\ \Delta'' &= +\,0'',21. \end{aligned}$$

Valeurs que nous pourrions aussi trouver, en recommençant, avec les éléments *définitifs*, le calcul de o, o', o''.

Pour trouver la précision de notre résultat, formons les équations du poids au moyen des équations normales ; ce qui nous donne :
$$\left.\begin{aligned} 75498\,Q_1 - 19871\,q_2 - 1 &= 0 \\ -19871\,Q_1 + 8047\,q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour le poids de } x';$$
$$\left.\begin{aligned} 75498\,q_1 - 19871\,Q_2 &= 0 \\ -19871\,q_1 + 8047\,Q_2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ pour le poids de } y'.$$

Éliminant, on trouve
$$Q_1 = \frac{1}{P_1} = 0^{mm},0000378364$$
$$Q_2 = \frac{1}{P_2} = 0^{mm},0003549917.$$

Remarquons que l'unité de poids se rapporte à la seconde pour les angles et au mètre pour les longueurs ; Q_1, Q_2 étant exprimés en millimètres, il faut commencer par les diviser par 1000. Cela posé, l'erreur moyenne de l'observation est
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{0{,}2026}{3-2}} = 0'',45;$$

donc
$$\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{Q_1} = \pm\ 0^m,00008755,$$
$$\varepsilon'' = \varepsilon\sqrt{Q_2} = \pm\ 0^m,00026818.$$

L'abscisse est donc déterminée trois fois plus exactement que l'ordonnée.

§ **133**. — Il nous reste encore une question importante à résoudre : c'est de trouver la précision de certaines quantités qui doivent elles-mêmes être calculées *en fonction* des éléments qui ont été déterminés par la méthode des moindres carrés. La solution ne présente aucune difficulté.

Soit u une fonction des éléments x, y, z.... Cette fonction est connue, de sorte que l'on a
$$F(u, x, y, z \ldots) = 0.$$
Nommons h', h'', h''' les coefficients différentiels : nous aurons
$$du = h'dx + h''dy + h'''dz \ldots$$
et par suite, en nommant ε_1 l'erreur moyenne de u, et P son poids, nous aurons, comme au § 120,
$$\varepsilon_1^2 = h'^2\,\varepsilon'^2 + h''^2\,\varepsilon''^2 + h'''^2\,\varepsilon'''^2 \ldots$$
$$\varepsilon_1 = \sqrt{[h^2\,\varepsilon^2]}.$$
$$\frac{1}{P} = \frac{h'^2}{p'} + \frac{h''^2}{p''} + \frac{h'''^2}{p'''} \ldots$$
$$\frac{1}{P} = \left[\frac{h^2}{p}\right].$$

Application. — Nous avons trouvé dans l'exemple précédent
$$x = 20,414249\,;\quad \varepsilon' = \pm\ 0,00008755.$$
$$y = 36,946013\,;\quad \varepsilon'' = \pm\ 0,00026818.$$
Or notre but définitif était de calculer les éléments nécessaires pour réduire au signal K, comme centre, les angles observés à la station A : ces éléments sont l'angle de direction KAP = V, et la distance AK = R ; et l'on a, pour les déterminer, les relations
$$\operatorname{tang} V = \frac{y}{x} \ldots V = 61^\circ\ 4'\ 38'',91$$
$$R = \frac{y}{\sin V} = \sqrt{x^2+y^2} = 42^m,210768.$$

Reste maintenant à calculer l'erreur moyenne de ces deux quantités : la différentiation des deux dernières fonctions donne

$$dV = -\frac{\sin 1'' \sin V}{R}\, dx + \frac{\sin 1'' \cos V}{R}\, dy;$$

$$dR = \cos V\, dx + \sin V\, dy.$$

Appliquant les nombres, on obtient

	Pour V		Pour R
$h'^2\, \varepsilon'^2$	$= 0{,}140231$	...	$0{,}\ 000\ 000\ 001793$
$h''^2\, \varepsilon''^2$	$= 0{,}401682$	...	$0{,}\ 000\ 000\ 055099$
$[h^2 \varepsilon^2]$	$= 0{,}541913$	...	$0{,}\ 000\ 000\ 056892$
ε	$= \pm 0'',736$	...	$\pm\ 0^m{,}0002385.$

Les éléments de la réduction au centre ne comportent donc que des erreurs insensibles, et cet exemple nous autorise à conclure que, dans les opérations géodésiques, « la grandeur des réductions au « centre n'a, par elle-même, aucun désavantage, pourvu que l'on « mette tous ses soins à bien mesurer les éléments de cette réduc- « tion. »

§ **134**. — La méthode du paragraphe précédent suppose que $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$... sont les *véritables* erreurs des inconnues, et que celles-ci sont *indépendantes* entre elles. Mais dans la réalité on ne connaît que les erreurs *les plus probables;* et les inconnues dépendent, jusqu'à un certain point, l'une de l'autre, puisqu'elles sont fournies simultanément par les mêmes observations. Au lieu donc d'admettre les poids individuels calculés pour x, y, z..., il vaut mieux recourir aux observations, pour trouver d'un seul coup le poids de la *fonction*.

Supposons cette fonction de la forme

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

en bornant le nombre des inconnues à trois, pour fixer les idées. Nous aurions, en admettant l'indépendance de ces inconnues,

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha^2}{P_1} + \frac{\beta^2}{P_2} + \frac{\gamma^2}{P_3};$$

d'où $$\frac{1}{P} = \alpha^2 Q_1 + \beta^2 Q_2 + \gamma^2 Q_3 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

en faisant $\alpha Q_1 = A$, $\beta Q_2 = B$, $\gamma Q_3 = C$. Reste à déterminer simultanément les valeurs de A, B, C.

Dans ce but, recourons aux trois groupes des équations du poids (§ 128), et considérons-les comme *simultanés*, c'est-à-dire comme formant un système unique, duquel il faut éliminer les coefficients indéterminés (q). Multiplions le premier groupe par α, le second par β et le troisième par γ; puis, ajoutons entre elles les équations qui occupent le même rang dans chacun des trois groupes. Il viendra :

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} [aa]\,\alpha Q_1 + [ab]\,\beta Q_2 + [ac]\,\gamma Q_3 - \alpha \\ +[ab]\alpha q_2 + [ac]\alpha q_3 + [aa]\beta q'_1 + [ac]\beta q'_3 + [aa]\gamma q''_1 + [ab]\gamma q''_2 \end{array} \right\}$$

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} [ab]\,\alpha Q_1 + [bb]\,\beta Q_2 + [bc]\,\gamma Q_3 - \beta \\ +[bb]\alpha q_2 + [bc]\alpha q_3 + [ab]\beta q'_1 + [bc]\beta q'_3 + [ab]\gamma q''_1 + [bb]\gamma q''_2 \end{array} \right\}$$

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} [ac]\,\alpha Q_1 + [bc]\,\beta Q_2 + [cc]\,\gamma Q_3 - \gamma \\ +[bc]\alpha q_2 + [cc]\alpha q_3 + [ac]\beta q'_1 + [cc]\beta q'_3 + [ac]\gamma q''_1 + [bc]\gamma q''_2 \end{array} \right\}$$

Égalant à zéro les secondes lignes de chaque équation, qui en réalité ne renferment que trois coefficients indéterminés, savoir $(q_2 + q''_2)$, $(q_3 + q'_3)$, $(q'_1 + q''_1)$, on obtiendra entre les trois inconnues A, B, C les équations simultanées

$$\left. \begin{array}{l} [aa]\,A + [ab]\,B + [ac]\,C = \alpha \\ [ab]\,A + [bb]\,B + [bc]\,C = \beta \\ [ac]\,A + [bc]\,B + [cc]\,C = \gamma. \end{array} \right\} (\text{IV})$$

D'où l'on déduit la règle suivante :

« Si des inconnues $x, y, z\ldots$ sont données par les équations normales

$$\begin{array}{l} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z\ldots + [an] = 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z\ldots + [bn] = 0 \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z\ldots + [cn] = 0\,; \end{array}$$

« et qu'on cherche le poids P d'une expression

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots$$

« tirée de ces équations, on le trouve par la formule

$$\frac{1}{P} = \alpha A + \beta B + \gamma C + \ldots$$

« dans laquelle A, B, C... sont des quantités qui satisfont aux équa-
« tions (IV), et qui peuvent en être déduites. »

§ **135.** — Lorsque les observations sont *d'inégale* précision, chacune d'elles a son poids particulier, p', p'', p'''... et son erreur moyenne particulière $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$... Maintenant, la quantité à rendre un minimum sera, non plus $[\Delta^2]$, mais (§ 104) la quantité $[p\,\Delta^2] = [\Delta\sqrt{p}.\Delta\sqrt{p}]$; et par suite les équations *normales* seront, comme nous l'avons déjà fait pressentir dans la note du § 124,

$$\begin{aligned}
[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z \ldots + [pan] &= 0 \\
[pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z \ldots + [pbn] &= 0 \\
[pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z \ldots + [pcn] &= 0 \ \ldots \text{etc}
\end{aligned}$$

La légère modification à apporter au procédé général, se traduit donc par cette règle pratique très-simple :

« Lorsque les observations sont d'inégale précision, on forme, pour « le passage des équations de condition aux équations normales, les « produits individuels (p^{vi}), comme dans le cas d'une égale précision; « mais avant de les additionner, on multiplie chacun d'eux par le « poids de l'observation correspondante. »

Comme application numérique, reprenons le second exemple du § 132, en ayant égard à cette circonstance, que l'angle O a été observé 20 fois, l'angle O', 35 fois et l'angle O'', 48 fois.

Comme la détermination pratique des poids laisse toujours un peu de vague, on peut les altérer légèrement, dans la vue de simplifier les calculs, et poser

$$p' = 22\ ;\quad p'' = 33\ ;\quad p''' = 44.$$

Ou bien, comme l'unité de poids est arbitraire, adopter

$$p' = 2\ ;\quad p'' = 3\ ;\quad p''' = 4.$$

Les coefficients des équations normales deviennent alors :

[paa]	[pab]	[pbn]	[pbb]	[pan]
+ 213855200;	— 67803660;	+ 16922,82;	+ 29608070;	— 52294,62.

Et l'on a pour équations normales :

$$\begin{aligned}
213855\,x' - 67804\,y' - 52294{,}62 &= 0, \\
-\ 67804\,x' + 29608\,y' + 16922{,}82 &= 0;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire par élimination

$$\begin{aligned}
x' &= +\ 0{,}23114 \\
y' &= -\ 0{,}04225.
\end{aligned}$$

On a donc pour valeurs définitives des coordonnées

$$x = 20,414231$$
$$y = 36,945958.$$

Quant aux erreurs d'observation, elles deviennent, dans le cas actuel,

$$\Delta' = + 0'',25$$
$$\Delta'' = - 0'',35$$
$$\Delta''' = + 0'',15.$$

Pour trouver la précision des observations individuelles, nous devons d'abord calculer l'erreur moyenne, η, de l'unité de poids. Il suffira évidemment, à cet effet, de remplacer, dans la formule de la fin du § 132, la quantité $[\Delta^2]$ par $[p\Delta^2]$.

Quant à la précision des éléments, elle se calculera exactement d'après la règle du § 128, en se rappelant toutefois que les q_1, q_2, se rapportent maintenant à l'unité de poids.

Pour continuer notre exemple numérique, nous avons ici

$$[p\Delta^2] = 0,5825;$$

d'où
$$\eta = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{3-2}} = \pm\ 0'',763.$$

Telle serait l'erreur moyenne de l'unité de poids, c'est-à-dire de l'angle obtenu par 11 répétitions. Quant à celles des angles O', O'', O''', elles sont respectivement

$$\eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{2}} = 0'',54\ ;$$

$$\eta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{3}} = 0'',44\ ;$$

$$\eta_3 = \frac{\eta}{\sqrt{4}} = 0'',38.$$

Le poids des éléments cherchés s'obtiendra en formant les équations du poids au moyen des équations normales : on a

$$\left.\begin{aligned} 213855\ Q_1 - 67804\ q_2 - 1 &= 0 \\ -\ 67804\ Q_1 + 29608\ q_2 &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{pour le poids de } x'\,;$$

$$\left.\begin{aligned} 213855\ q_1 - 67804\ Q_2 &= 0 \\ -\ 67804\ q_1 + 29608\ Q_2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}\ \text{pour le poids de } y'\,;$$

On en déduit $$Q_1 = \frac{1}{P_1} = 0^{mm},00001707;$$

$$Q_2 = \frac{1}{P_2} = 0^{mm},00012329;$$

d'où, comme à la fin du § 132,

$$\varepsilon' = \pm 0^m,00009971;$$
$$\varepsilon'' = \pm 0^m,00026799.$$

On voit que l'on n'a rien gagné du côté de la précision à accorder aux trois observations des poids différents, et c'est ce qui arrive très-souvent dans la pratique. De là cette règle importante, que suivent scrupuleusement tous les bons observateurs : « Lorsque vous pouvez « disposer des circonstances, faites tout votre possible pour que vos « observations puissent être considérées comme également précises. »

Si nous n'avions adopté que comme une simple *hypothèse* la proportionnalité des poids aux nombres de répétitions, nous aurions dû, une fois arrivés aux valeurs de η_1, η_2, η_3, voir si elles étaient à peu près proportionnelles à celles de Δ', Δ'', Δ'''. Dans la négative, nous aurions cherché à corriger les poids au moyen de la relation

$$p'\Delta'^2 = p''\Delta''^2 = p'''\Delta'''^2;$$

et, en conservant $p'=20$, nous eussions trouvé $p''=10$, $p'''=56$. Recommençant le calcul avec ces nouveaux poids, à partir de la formation des équations normales, nous eussions continué jusqu'à ce que nos η fussent à peu près proportionnels aux Δ obtenus.

APPLICATION AU CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE D'UNE BASE GÉODÉSIQUE.

§ **136.** — Les erreurs que comporte la mesure d'une base géodésique peuvent provenir de trois causes distinctes :

1° D'une erreur commise dans la comparaison des règles entre elles;

2° D'une erreur commise dans l'étalonnage de la règle moyenne;

3° D'erreurs accidentelles commises dans le placement des règles.

Nous allons chercher les formules propres à calculer l'erreur moyenne due à chacune de ces trois causes séparément, pour en déduire ensuite l'erreur moyenne totale. Nous supposons d'ailleurs que la base soit mesurée d'après la méthode allemande, suivie en Belgique par le Dépôt de la guerre (voyez Bessel's und Baeyer's *Gradmessung in Ostpreussen;* et Baeyer, *die Küstenvermessung und ihre Verbindung*, etc.). —

PREMIÈRE CAUSE D'ERREUR.

Soit m la dilatation linéaire d'une règle, l, pour chacune des divisions du thermomètre métallique ; a le nombre de ces divisions correspondant à la température actuelle de la règle; désignons par λ la longueur (maximum) de celle-ci, pour la température marquée par $a = 0$: on aura, en général,

$$l = \lambda - am;$$

et en particulier, pour chacune des quatre règles qui servent à la mesure,

$$\left.\begin{array}{llll} \text{règle n}^\text{o}\ \text{I} & \ldots\ l' & = \lambda' & - am' \\ \quad\text{»}\quad \text{II} & \ldots\ l'' & = \lambda'' & - bm'' \\ \quad\text{»}\quad \text{III} & \ldots\ l''' & = \lambda''' & - cm''' \\ \quad\text{»}\quad \text{IV} & \ldots\ l^{\text{iv}} & = \lambda^{\text{iv}} & - dm^{\text{iv}}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ (a)$$

Posons $$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{iv}} = 4\text{L} \qquad \ldots\ (1)$$

L sera la longueur de la règle moyenne, et nous pourrons écrire

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' \ \ = \text{L} + x' \\ \lambda'' \ = \text{L} + x'' \\ \lambda''' = \text{L} + x''' \\ \lambda^{\text{iv}} = \text{L} + x^{\text{iv}}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ (2)$$

d'où $$x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} = 0 \qquad \ldots\ (3)$$

Nos équations (a) deviennent donc

$$\left.\begin{array}{llll} \text{règle n}^\text{o}\ \text{I} & \ldots\ l' & = \text{L} + x' & - am' \\ \quad\text{»}\quad \text{II} & \ldots\ l'' & = \text{L} + x'' & - bm'' \\ \quad\text{»}\quad \text{III} & \ldots\ l''' & = \text{L} + x''' & - cm''' \\ \quad\text{»}\quad \text{IV} & \ldots\ l^{\text{iv}} & = \text{L} + x^{\text{iv}} & - dm^{\text{iv}}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ (4)$$

Dans ces formules on connaît a, b, c, d: ce sont les divisions des thermomètres métalliques, indiquées par le prisme en verre. Dès que l'on connaîtra les valeurs de x', x''.... m', m''.... on aura les valeurs *relatives* des quatre règles pour une température quelconque ; leurs valeurs *absolues* s'en déduiront facilement lorsqu'on aura déterminé L.

Le comparateur de Bessel donne, pour la longueur d'une règle, l'expression

$$l = \text{L} + \text{C} - n,$$

dans laquelle C est une constante inconnue qu'il faut éliminer, et n un intervalle connu, mesuré par le prisme en verre faisant fonction de vernier. On a donc pour les quatre règles :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{n}^{\text{o}}\ \text{I} & \ldots l' & = \mathrm{L} + \mathrm{C} - n' \\ \quad\text{II} & \ldots l'' & = \mathrm{L} + \mathrm{C} - n'' \\ \quad\text{III} & \ldots l''' & = \mathrm{L} + \mathrm{C} - n''' \\ \quad\text{IV} & \ldots l^{\text{iv}} & = \mathrm{L} + \mathrm{C} - n^{\text{iv}}\,; \end{array}\right\} \ldots (5)$$

ou bien, en vertu des équations (4),

$$\left.\begin{array}{l} n' \ = \mathrm{C} - x' \ + am' \\ n'' \ = \mathrm{C} - x'' \ + bm'' \\ n''' = \mathrm{C} - x''' + cm''' \\ n^{\text{iv}} \ = \mathrm{C} - x^{\text{iv}} + dm^{\text{iv}}. \end{array}\right\} \ldots (6)$$

Le système (6) renferme *neuf* inconnues, savoir : la constante C, les quatre x et les quatre m ; mais elles se réduisent à *huit* en vertu de la relation (3) qui permet d'éliminer un x.

Cela posé, comme l'appareil ne reste pas dans les mêmes conditions de température, lorsque l'on passe d'une comparaison des quatre règles à la comparaison suivante, chaque système analogue à (6) renfermera une nouvelle constante, C ; de sorte que p comparaisons fourniront $4p$ équations entre $(p + 7)$ inconnues.

Les comparaisons faites par Bessel, en 1832, lui ont donné neuf systèmes (6), dont chacun est fourni par la moyenne entre trois ou quatre opérations : il s'est donc ainsi procuré 36 équations entre 16 inconnues, qu'il a résolues par la méthode des moindres carrés. Éliminant les C entre les 16 équations normales, et introduisant ensuite la relation (3), il obtient entre les 8 inconnues x', x'', x''', x^{iv}, m', m'', m''', m^{iv}, 8 équations de la forme

$$\begin{array}{l} \mathrm{A}_1 = \alpha_1 x' + \beta_1 m' + \beta_2 m'' + \beta_3 m''' + \beta_4 m^{\text{iv}} \\ \mathrm{A}_2 = \alpha_2 x'' + \gamma_1 m' + \gamma_2 m'' + \gamma_3 m''' + \gamma_4 m^{\text{iv}} \quad \ldots \quad \text{etc.} \end{array}$$

Les résolvant, et substituant dans (4), il trouve les valeurs de l', l'', l''', l^{iv}, exprimées en règle moyenne.

Les neuf valeurs C_1, $\mathrm{C}_2 \ldots \mathrm{C}_9$ seraient inutiles à calculer, si l'on ne voulait apprécier l'erreur moyenne d'une comparaison individuelle ; mais cette donnée est nécessaire, pour en déduire plus tard l'erreur moyenne de la base. On calculera donc les C, et on les substituera, avec les m et les x, dans les neuf systèmes (6) ; ce qui fournira 36 erreurs, Δ_1, $\Delta_2 \ldots$ etc. On fera la somme $[\Delta^2]$ des carrés de ces erreurs, et comme 36 équations ont servi à déterminer 16 inconnues, l'erreur moyenne de chacune de ces équations sera (§ 127)

$$\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{36-16}};$$

ou, plus généralement,

$$E = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{4p-(p+7)}} \quad \ldots \quad (10)$$

Pour apprécier l'influence de cette première cause d'erreur sur la mesure de la base, nous avons maintenant à exprimer la longueur de cette base, de manière à y mettre en évidence les quantités $x', x'' \ldots m', m'' \ldots$

Si les quatre règles ont été portées respectivement M', M'', M''', M^{iv} fois, la longueur de la base sera représentée par

$$B = \left\{ \begin{array}{r} (M'+M''+M'''+M^{iv})\,L + M'x' + M''x'' + M'''x''' + M^{iv}x^{iv} \\ -[a]\,m' - [b]\,m'' - [c]\,m''' - [d]\,m^{iv} + R \end{array} \right\};$$

formule dans laquelle $[a]$, $[b]$, $[c]$, $[d]$ expriment la somme des indications des thermomètres métalliques, pour chacune des règles en particulier; et où R englobe toutes les autres corrections, telles que la réduction à l'horizon, les intervalles entre les règles, et les distances des deux règles extrêmes aux points de départ et d'arrivée.

Si l'étalonnage a donné pour la règle moyenne la valeur

$$L = R' - x' + a_1 m',$$

la longueur de la base deviendra

$$\begin{array}{l} (M'+M''+M'''+M^{iv})R' - (M''+M'''+M^{iv})x' + M''x'' + M'''x''' + M^{iv}x^{iv} \\ + \left\{ (M'+M''+M'''+M^{iv})\,a_1 - [a] \right\} m' - [b]\,m'' - [c]\,m''' - [d]\,m^{iv} + R. \end{array}$$

On pourra donc, en faisant abstraction des termes extrêmes, mettre sous la forme

$$N'x' + N''x'' + N'''x''' + N^{iv}x^{iv} - A'm' - A''m'' - A'''m''' - A^{iv}m^{iv},$$

l'expression qui indique de quelle manière les quantités x', $x'' \ldots$ $m', m'' \ldots$ ont influencé la mesure de la base. Par conséquent l'erreur moyenne de cette expression sera en même temps l'erreur moyenne de la base, due à la première cause que nous envisageons. — Calculant, d'après le § 134, le poids, P, de cette fonction, on aura pour son erreur moyenne

$$M = \frac{E}{\sqrt{P}};$$

E étant l'erreur moyenne fournie par la formule (10).

DEUXIÈME CAUSE D'ERREUR.

Pour trouver la longueur de la règle moyenne, L, en toises du Pérou, Bessel a comparé l'une de ses quatre règles, par exemple, l', à la double toise 2T, à l'aide du même appareil qui avait déjà servi à comparer les quatre règles entre elles. Dans ce cas, on a, par une première comparaison, les équations

$$\left.\begin{aligned} 2T &= L + C - n \\ l' &= L + C - n'; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

mais comme on a aussi, par les formules (4),

$$l' = L + x' - am',$$

on trouvera, en retranchant les deux premières, et substituant ensuite cette valeur de l',

$$L = 2T - x' + am' + n - n'. \quad \ldots \quad (12)$$

Si l'on répète p fois les expériences qui ont conduit aux formules (11), on trouvera, pour L, p valeurs dont on prendra la moyenne ; puis on calculera les différences Δ', Δ''... entre cette moyenne et chacune des p valeurs de L : nommant e l'erreur moyenne d'*une* comparaison de la règle avec la double toise, on aura

$$e = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{p-1}}. \quad \ldots \quad (13)$$

Maintenant, soit k le nombre de règles moyennes contenues dans la base : comme la valeur de L repose sur un nombre, p, de déterminations, on aura (§ 118) pour l'erreur moyenne due à la 2e cause

$$M' = \frac{k}{\sqrt{p}} . e.$$

TROISIÈME CAUSE D'ERREUR.

L'influence des erreurs accidentelles commises dans le placement des règles s'apprécie en comparant entre eux les résultats de la double mesure de chacune des deux parties de la base.

Soit d la différence entre les deux mesures de la première partie : la somme des carrés des erreurs sera $\frac{2\,d^2}{4}$; et l'erreur moyenne d'une mesure, $\frac{d}{\sqrt{2}}$ (§ 109, k″).

Si cette première partie renferme n règles, le poids de sa mesure sera $\frac{1}{n}$, en prenant pour unité de poids celui de la pose d'une règle (§ 117, n$^{\text{ix}}$). Pour la même raison, l'erreur moyenne d'une mesure de la seconde partie sera $\frac{d'}{\sqrt{2}}$, avec le poids $\frac{1}{n'}$. Donc l'erreur moyenne, M″, de la somme des deux parties, dont le poids est $\frac{1}{n+n'}$, sera donnée par la formule (n$^{\text{v}}$), après avoir tout réduit à la même unité de poids ; et l'on aura

$$\frac{M''}{\sqrt{n+n'}} = \sqrt{\frac{d^2}{2n} + \frac{d'^2}{2n'}}\,;$$

ou, puisque la base a été mesurée deux fois,

$$M'' = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{n+n'}{n}\,d^2 + \frac{n+n'}{n'}\,d'^2\right\}}.$$

Telle est l'erreur moyenne due à la 3$^{\text{e}}$ cause.

ERREUR MOYENNE TOTALE.

Les trois causes d'erreur que nous venons de passer en revue étant indépendantes l'une de l'autre, l'erreur totale de la base, résultant de leur combinaison, sera

$$M''' = \pm\sqrt{M^2 + M'^2 + M''^2}.$$

La base *Trenk-Mednicken*, mesurée par Bessel, a une longueur de 935 toises ; son erreur moyenne totale, calculée d'après les formules précédentes, ne s'élève qu'à 1$^{\text{lig.}}$,816, c'est-à-dire au 445000$^{\text{e}}$ de sa longueur. L'influence de cette erreur sur la longueur d'un degré ne serait que de 0$^{\text{T}}$,13. La base mesurée par le colonel Baeyer, près de Berlin, en 1846, ne présente qu'une erreur moyenne de 1$^{\text{lig.}}$,341 sur une longueur de 1198 toises.

APPLICATION A LA MESURE DES ANGLES GÉODÉSIQUES.

§ 137. — La mesure de l'angle simple compris entre deux signaux A et B se compose de quatre opérations à exécuter dans l'ordre suivant :

1° On fixe l'alidade : l'index du vernier correspond à un point (u) de la division du limbe, pour lequel la *lecture* donne m. Le *poids* de cette opération est b.

2° Sans changer le point (u), on amène, par le mouvement général du limbe, la croisée des fils sur le point A : la distance angulaire de ce point à l'origine (γ) des graduations est donc égale à (u). Le *poids* de ce *pointé* est a

3° On fixe le point (γ), et l'on tourne l'alidade de manière à la pointer sur le signal B : l'index est donc amené sur un autre point de division (u'), dont la distance angulaire à l'origine des graduations est $\gamma + x$. Le poids de cette troisième opération est encore a.

4° Enfin on fait une seconde lecture, m', dont le poids est égal à b.

On aura donc, pour déterminer la valeur de l'angle simple, quatre équations correspondantes aux quatre opérations précédentes, savoir :

$$\begin{array}{rlllll}
u = m & \ldots & \text{poids} = b\,; & \text{erreur moyenne} & & = \beta \\
\gamma = u & \ldots & \quad » \quad = a & » & » & = \alpha \\
\gamma + x = u' & \ldots & \quad » \quad = a & » & » & = \alpha \\
u' = m' & \ldots & \quad » \quad = b & » & » & = \beta.
\end{array}$$

Elles renferment quatre inconnues et donnent, pour valeur déterminée de x,

$$x = m' - m.$$

Si nous voulons trouver le poids de cette expression, observons que l'équation du minimum du carré des erreurs est

$$[\Delta^2] = b\,(u - m)^2 + a\,(\gamma - u)^2 + a(\gamma + x - u')^2 + b\,(u' - m')^2.$$

Égalant à zéro les différentielles prises par rapport à chacune des quatre inconnues, on obtient les quatre équations normales

$$\begin{array}{rl}
2a\gamma - au - au' + ax & = 0 \\
- a\gamma + (a + b)\,u - bm & = 0 \\
- a\gamma + (a+b)\,u' - ax - bm' & = 0 \\
a\gamma - au' + ax & = 0.
\end{array}$$

Éliminant successivement toutes les inconnues à l'exception de x, on trouve pour équation finale,

$$\frac{ab}{2(a+b)}x - \frac{ab}{2(a+b)}(m'-m) = 0.$$

Ainsi le *poids* de x est le coefficient

$$\frac{ab}{2(a+b)};$$

et l'*erreur moyenne* correspondante est

$$\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

Conclusion à laquelle on aurait pu parvenir immédiatement, en se rappelant (§ 117) qu'un résultat soumis à différentes causes d'erreur indépendantes l'une de l'autre, dont les erreurs moyennes sont respectivement α, β, γ... a lui-même pour erreur moyenne l'expression

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots}$$

Nous venons de considérer une observation unique, et indépendante de toutes les observations de même espèce que l'on pourrait faire. Mais ce qui caractérise la *répétition* des angles, c'est que chaque observation *dépend* de celle qui précède, le (u') de celle-ci servant de (u) pour celle-là. Peu importe d'ailleurs que la quatrième opération, la lecture, ait été faite ou omise. Dans ce cas, nous aurons, conformément aux notations précédentes,

$$\begin{array}{llll}
\text{Poids} = a & \text{Poids} = a & u\ = m \ \dots & \text{Poids} = b\ ; \\
u\ = \gamma\ ; & u' = \gamma + x; & u' = m' & \text{»} \quad = b'\ ; \\
u' = \gamma'\ ; & u'' = \gamma' + x; & u'' = m'' & \text{»} \quad = b''\ ; \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
u^{(n-1)} = \gamma^{(n-1)}; & u^{(n)} = \gamma^{(n-1)} + x; & u^{(n)} = m^{(n)} & \text{»} \quad = b^{(n)}.
\end{array}$$

C'est pour la généralité de la discussion que nous accordons des poids différents b, b', b''... aux différentes lectures : nous nous réservons d'égaler plus tard à zéro ceux qui correspondraient à des lectures qui n'auraient pas été faites, et d'égaler tous les autres à b.

Le système précédent renferme toujours plus d'équations que d'inconnues, sauf le cas où l'on n'aurait fait que deux lectures, l'une au commencement, l'autre à la fin de l'opération.

Si l'on différentie, par rapport aux γ, l'équation du minimum du carré des erreurs, on a :

$$\begin{aligned}
&2a\gamma + ax = a\,(u + u')\,;\\
&2a\gamma' + ax = a\,(u' + u'')\,;\\
&\vdots\\
&2a\gamma^{(n-1)} + ax = a\,(u^{(n-1)} + u^{(n)}).
\end{aligned}$$

La différentiant par rapport aux (u), on obtient :

$$\begin{aligned}
&(a + b)\,u = a\gamma + bm\,;\\
&(2a + b)\,u' = a\,(\gamma + \gamma' + x) + b'm'\,;\\
&\vdots\\
&(2a + b)\,u^{(n-1)} = a\,(\gamma^{(n-2)} + \gamma^{(n-1)} + x + b^{(n-1)}\,m^{(n-1)}\,;\\
&(a + b)\,u^{(n)} = a\,(\gamma^{(n-1)} + x) + b^{(n)}\,m^{(n)}\,.
\end{aligned}$$

Enfin la différentiation par rapport à x donne

$$nax + a\,(\gamma + \gamma' + \ldots + \gamma^{(n-1)}) = a\,(u' + u'' + \ldots + u^{(n)}).$$

Si des n premières équations on tire les valeurs de $\gamma, \gamma', \gamma'' \ldots \gamma^{(n-1)}$ pour les substituer dans toutes les autres, et qu'on divise celles-ci, à l'exception de la dernière, par $1/2\ a$ (ce qui est permis puisque l'on cherche seulement le poids de (x), et non celui des divers (u), on obtiendra :

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{2b}{a}\right)u - u' = \frac{2b}{a}\,m - x\,;\\
&-u + \left(2 + \frac{2b'}{a}\right)u' - u'' = \frac{2b'}{a}\,m'\,;\\
&-u' + \left(2 + \frac{2b''}{a}\right)u'' - u''' = \frac{2b''}{a}\,m''\,;\\
&\vdots\\
&-u^{(n-2)} + \left(2 + \frac{2b^{(n-1)}}{a}\right)u^{(n-1)} - u^{(n)} = \frac{2b^{(n-1)}}{a}\,m^{(n-1)}\,;\\
&-u^{(n-1)} + \left(1 + \frac{2b^{(n)}}{a}\right)u^{n} = \frac{2b^{(n)}}{a}\,m^{(n)} + x\,;
\end{aligned}$$

et enfin $$\frac{an}{2}\,x - \frac{a}{2}\,(u^{(n)} - u) = 0.$$

Supposons que les lectures aient été faites après

$$0,\ h,\ i,\ l,\ \ldots\ m,\ n$$

observations, et qu'elles aient donné les nombres

$$m, m^h, m^i, m^l, \ldots m^m, m^n$$

correspondant aux divisions

$$u, u^h, u^i, u^l, \ldots u^m, u^n.$$

Il suffira de faire, dans les équations générales qui précèdent,

$$b, b^h, b^i, b^l, \ldots b^m, b^n$$

égaux entre eux, et les autres b égaux à zéro. Les équations pour lesquelles cette dernière circonstance a lieu, par exemple celles depuis le rang 2 jusqu'au rang $(h-1)$ inclusivement, deviennent :

$$-u+2u'-u''=0; \quad \text{ou} \quad u'-u=u''-u'.$$
$$-u'+2u''-u'''=0; \quad \text{ou} \quad u''-u'=u'''-u''.$$
$$\vdots$$
$$-u^{(h-2)}+2u^{(h-1)}-u^{(h)}=0; \text{ ou } u^{(h-1)}-u^{(h-2)}=u^{(h)}-u^{(h-1)}.$$

On en déduit que

$$u'-u=u''-u'=u'''-u''\ldots=u^{(h)}-u^{(h-1)}.$$

$u, u', u'', u'''\ldots$ forment donc une progression arithmétique de $(h+1)$ termes, dont la raison est $(u'-u)$, et le dernier terme $u^{(h)}$. Celui-ci est donc égal à $u+h\,(u'-u)$; d'où

$$\frac{u^{(h)}-u}{h}=u'-u.$$

On aurait d'une manière analogue

$$\frac{u^{(i)}-u^{(h)}}{i-h}=u^{(h+1)}-u^{(h)}\ldots \text{etc.}$$

Par suite de ces conditions, les équations restantes, c'est-à-dire celles qui correspondent aux rangs $1, h, i, l\ldots$ se changent en celles-ci :

$$(\text{H})\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{2b}{a}+\frac{1}{h}\right)u-\frac{1}{h}u^{(h)}=\frac{2b}{a}m-x;\\
&-\frac{1}{h}u+\left(\frac{2b}{a}+\frac{1}{h}+\frac{1}{i-h}\right)u^{(h)}-\frac{1}{i-h}u^{(i)}=\frac{2b}{a}m^{(h)};\\
&-\frac{1}{i-h}u^{(h)}+\left(\frac{2b}{a}+\frac{1}{i-h}+\frac{1}{l-i}\right)u^{(i)}-\frac{1}{l-i}u^{(l)}=\frac{2b}{a}m^{(i)};\\
&\vdots\\
&-\frac{1}{n-m}u^{(m)}+\left(\frac{2b}{a}+\frac{1}{n-m}\right)u^{(n)}=\frac{2b}{a}m^{(n)}+x.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations permettent d'exprimer très-simplement $u^{(n)}$ et u en fonction de x et des lectures faites. Car si l'on divise la première par $\frac{2bh}{a}+1$, et qu'on ajoute le quotient à la seconde, la somme ne contiendra plus u. Si l'on divise cette somme par le coefficient dont le terme $u^{(h)}$ y est affecté, et par $(i-h)$, et qu'on ajoute le quotient à la troisième équation, la somme obtenue ne renfermera plus $u^{(h)}$; et ainsi de suite jusqu'à la dernière équation qui sera de la forme

$$\mathrm{L}u^{(n)} = \mathrm{M} + \mathrm{N}x.$$

Appliquant le même procédé en sens inverse, c'est-à-dire en commençant par la dernière équation et finissant par la première, on aura

$$\mathrm{L}'u = \mathrm{M}' + \mathrm{N}'x.$$

Substituant les valeurs de $u^{(n)}$ et de u, déduites de ces deux expressions, dans l'équation

$$(\mathrm{K}) \ldots \qquad \frac{an}{2}x - \frac{a}{2}(u^{(n)} - u) = 0;$$

on aura l'équation finale

$$\frac{a}{2}\left\{n - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{L}'}\right\}x - \frac{a}{2}\left\{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{L}'}\right\} = 0;$$

d'où

$$x = \frac{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{L}'}}{n - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{L}'}}:$$

le poids de cette détermination étant

$$\mathrm{P} = \frac{a}{2}\left\{n - \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{L}'}\right\}.$$

On peut simplifier ces expressions générales de x et de P, soit en supposant que les lectures aient été faites à des intervalles égaux, soit en regardant comme nulle l'une des erreurs moyennes α ou β.

La première hypothèse peut toujours se réaliser dans la pratique : soient donc nh observations pour lesquelles on ait fait n lectures également espacées; on aura $h = i - h = l - i \ldots = m - n$. Multipliant par h, et faisant $\frac{bh}{a} + 1 = k$, on transformera donc les équations (H) en celles-ci :

$$
(\mathrm{H}') \left\{
\begin{array}{llll}
 & (2k-1)\,u - u^{(h)} & = 2\,(k-1)\,m & - hx; \\
-u & + 2ku^{(h)} & - u^{(2h)} = 2\,(k-1)\,m^{(h)} & ; \\
-u^{(h)} & + 2ku^{(2h)} & - u^{(3h)} = 2\,(k-1)\,m^{(2h)} & ; \\
\vdots & & & \\
-u^{(nh-h)} & + (2k-1)\,u^{(nh)} & = 2\,(k-1)\,m^{(nh)} & + hx.
\end{array}
\right.
$$

On déduira de ce système la valeur de $u^{(nh)} - u$, et on la substituera dans l'équation

$$
(\mathrm{K}') \ldots \qquad \frac{anh}{2}x - \frac{a}{2}\left(u^{(nh)} - u\right) = 0,
$$

pour en conclure la valeur et le poids de x.

Dans le cas où l'on n'emploie que les deux lectures faites au commencement et à la fin de l'opération, les équations (H') se réduisent à deux ; et en supposant n répétitions, elles deviennent

$$
\begin{aligned}
(2k-1)\,u - u^{(n)} &= 2\,(k-1)\,m - nx; \\
-u + (2k-1)\,u^{(n)} &= 2\,(k-1)\,m^{(n)} + nx.
\end{aligned}
$$

Soustrayant la première de la seconde, on a

$$
u^{(n)} - u = \frac{(k-1)\left(m^{(n)} - m\right) + nx}{k};
$$

ce qui permet de calculer immédiatement la valeur et le poids de x. Ce dernier, dont nous aurons besoin plus loin, est égal au coefficient de x dans l'équation (K'), après y avoir remplacé nh par n et $u^{(n)} - u$ par sa valeur; ou-à...

$$
\frac{an}{2} - \frac{an}{2k} = \frac{ab\,n^2}{2(bn+a)}.
$$

Quant à la valeur la plus probable de x, on trouve ici

$$
(\mathrm{K}'') \ldots \qquad x = \frac{m^{(n)} - m}{n};
$$

c'est-à-dire la différence des lectures au commencement et à la fin des observations, divisée par le nombre d'observations. Cette méthode est très-souvent employée : elle a été suivie dans la grande triangulation française et dans plusieurs autres.

La valeur de x fournie par la formule précédente est précisément celle qu'on déduirait d'un nombre quelconque d'équations (H′), en supposant *nulle* l'erreur de *lecture*. Dans ce cas en effet on a $b = \infty$, d'où $k = \infty$, et ces équations donnent

$$2k\,u = 2k\,m\,;$$

$$2k\,u^{(h)} = 2k\,m^{(h)}\,;$$

$$\vdots$$

$$2k\,u^{(nh)} = 2k\,m^{(nh)}.$$

Donc $u^{(nh)} - u = m^{(nh)} - m$; et l'équation (K′) devient

$$\frac{anh}{2}\,x = \frac{a}{2}\,(m^{(nh)} - m)\,;$$

d'où (K‴) ... $$x = \frac{m^{(nh)} - m}{nh}.$$

Si l'on suppose nulle l'erreur de *pointé*, soit $d_{(n)}$ la différence entre la première et la dernière lecture ; $d_{(n-2)}$ la différence entre la seconde et l'avant-dernière, etc... L'équation du minimum du carré des erreurs sera évidemment

$$\Delta^2 = [d_{(n)} - nhx]^2 + [d_{(n-2)} - (n-2)hx]^2 + [d_{(n-4)} - (n-4)hx]^2 + \ldots$$

d'où, en différentiant et en égalant à zéro,

$$(\mathrm{K^{IV}}) \ldots \quad x = \frac{1}{h}\,\frac{nd_{(n)} + (n-2)\,d_{(n-2)} + (n-4)\,d_{(n-4)} + \ldots}{n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \ldots}\,;$$

formule un peu moins simple que la précédente, mais beaucoup plus commode que la formule *générale* que l'on déduirait de l'élimination entre les équations (H′).

Pour décider laquelle des deux formules (K‴ ou K$^{\text{IV}}$) on emploiera de préférence, il faut voir si, pour un instrument donné, l'erreur moyenne d'un pointé est supérieure ou inférieure à l'erreur moyenne d'une lecture.

Dans la pratique, on obtient *séparément* chacune des deux erreurs moyennes α et β par une suite d'expériences propres à donner directement l'erreur moyenne d'un pointé, α, ainsi que l'erreur moyenne $\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$ de la mesure d'un angle, due au concours des erreurs de pointé et de lecture.

Cette dernière s'obtiendra aisément en mesurant un grand nombre de fois l'angle entre deux objets terrestres qui puissent s'apercevoir avec une très-grande netteté. Car si l'on désigne par v^2 la somme des carrés des erreurs qui répondent à cette série d'observations, au nombre de n, on aura l'erreur moyenne correspondante, m, par la formule

$$m = \sqrt{\frac{v^2}{n-1}};$$

d'où
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} m^2.$$

Pour déterminer α on pointera le fil vertical du théodolite sur celui d'une lunette méridienne douée d'un fort grossissement ; puis, regardant à travers la lunette méridienne, on trouvera généralement que la coïncidence des deux fils n'existe plus, l'écart étant rendu sensible par la supériorité optique du second instrument. On mesurera cet écart à l'aide du système micrométrique de la lunette méridienne, et l'on aura une première différence.

Cette différence provient de trois causes, savoir : les erreurs de pointé de l'une et de l'autre lunette, et l'imperfection de la lecture du microscope. On peut tenir compte de cette dernière cause, en appréciant son erreur moyenne par des lectures réitérées ; quant aux deux premières, on peut les séparer, en admettant que la précision du pointé est proportionnelle au grossissement de la lunette.

Supposons que l'on ait répété p fois l'expérience précédente, et soit c^2 la somme des carrés des écarts *observés ;* $\frac{c^2}{p}$ sera le carré de l'erreur moyenne d'une observation ; le diminuant du carré λ^2 de l'erreur moyenne due à la lecture du microscope, il restera $\frac{c^2}{p} - \lambda^2$ pour le carré de l'erreur moyenne provenant de l'incertitude des deux pointés réunis.

Soit α^2 le carré de l'erreur moyenne d'un pointé de la lunette du théodolite ; g son grossissement ;

» α'^2 et G les mêmes quantités pour la lunette méridienne :

on aura ... $\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{G^2}{g^2}$; d'où $\alpha^2 = \frac{G^2}{G^2 + g^2} (\alpha^2 + \alpha'^2)$.

Mais $(\alpha^2 + \alpha'^2)$ est précisément la quantité $\frac{c^2}{p} - \lambda^2$; donc enfin

$$\alpha^2 = \frac{G^2}{G^2 + g^2}\left(\frac{c^2}{p} - \lambda^2\right);$$

et par suite
$$\beta^2 = \frac{1}{2} m^2 - \frac{G^2}{G^2 + g^2}\left(\frac{c^2}{p} - \lambda^2\right).$$

C'est en suivant cette marche que Bessel a déterminé les erreurs moyennes d'un pointé et d'une lecture, pour un théodolite de 12 pouces, muni de 4 verniers, dont chacun donnait les $5''$: la lunette de cet instrument avait 16 pouces de foyer, 16 lignes d'ouverture, et grossissait 27 fois. Il a mesuré un angle 53 fois, en employant différentes parties de la graduation : la somme des carrés des écarts de la moyenne a été de $397'', 60$; donc le carré de l'erreur moyenne $= 7'',6461 = m^2$; d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3'',8231.$$

Il a pris ensuite 23 pointés réciproques sur le fil d'une lunette méridienne grossissant 280 fois : la somme des carrés des différences a été $9'',3041$; d'où le carré de la différence moyenne $= 0'',4045$. L'erreur moyenne d'une lecture micrométrique lui avait donné $\lambda^2 = 0'',0842$: il restait donc $0'',3203$ pour le carré de l'erreur moyenne des deux pointés combinés; et pour un pointé du théodolite on a par conséquent

$$\alpha^2 = \frac{280^2}{280^2 + 27^2} \cdot 0,3203 = 0'',3173.$$

Retranchant cette valeur de celle de $\alpha^2 + \beta^2$, il reste

$$\beta^2 = 3'',5058.$$

Les erreurs moyennes d'un pointé et d'une lecture du théodolite sont donc respectivement

$$\alpha = 0'',563 ; \quad \beta = 1'',872.$$

Dans les observations géodésiques, le pointé n'est jamais entouré de circonstances aussi favorables que dans les expériences que nous venons de citer. Aussi Bessel a-t-il porté à 0,2 le rapport $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, qui n'est en réalité que de 0,09. Conservant pour la *lecture* le nombre $\beta^2 = 3'',5058$, il en déduit pour le *pointé*, $\alpha^2 = 0'',701$, d'où

$\alpha = 0'',837$. Nous doutons que cette correction soit suffisante ; car l'expérience montre que, dans la mesure des angles, ce sont ordinairement les erreurs dans le *pointé* qui sont les plus considérables, quelque soin que l'on mette d'ailleurs à cette opération.

Il s'agit de savoir maintenant s'il est plus avantageux de prendre les angles par *répétition* que par *réitération*, ce dernier procédé consistant à mesurer plusieurs fois l'angle *simple*, d'abord dans un sens, puis en sens contraire. Il est clair que la comparaison des erreurs moyennes, correspondant aux résultats obtenus par l'un et l'autre procédé, pourra seule donner des lumières sur ce point.

Le poids d'un angle, x, obtenu par n *répétitions* et par les deux lectures extrêmes, étant

$$\mathrm{P} = \frac{ab\,n^2}{2\,(bn + a)},$$

son erreur moyenne sera

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{P}}} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha^2 + \frac{2}{n}\beta^2}{n}\right)}.$$

D'ailleurs l'erreur moyenne du même angle, *réitéré* par n observations indépendantes, est

$$\varepsilon' = \sqrt{\left(\frac{2\alpha^2 + 2\beta^2}{n}\right)};$$

donc l'avantage de la première méthode sur la seconde sera mesuré par la différence

$$\varepsilon' - \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{n}}\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}}\right\} = \frac{\frac{n-1}{n}\,\beta^2\sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \sqrt{\alpha^2+\frac{\beta^2}{n}}},$$

quantité *toujours* positive.

On voit par cette formule que la méthode par répétition, même dans le cas où l'on ne fait que les lectures extrêmes, a de l'avantage sur la méthode par réitération, et que cet avantage croît avec β, c'est-à-dire avec l'erreur moyenne d'une lecture : il est par conséquent d'autant plus grand que le limbe est gradué d'une manière plus imparfaite, et que les indications des verniers sont moins précises ; il diminue à mesure que la division est plus exacte et la lecture plus rigoureuse.

Jusqu'ici nous avons admis que la lecture d'un angle n'était sujette qu'à deux sources d'erreur, celle du pointé et celle de la lecture : c'est cette hypothèse qui donne à la méthode par répétition un avantage constant sur la méthode par réitération ; mais est-elle bien fondée ?

La mesure *simple* d'un angle géodésique ne comporte, suivant l'opinion de Bessel, aucune autre cause d'erreur que l'imperfection du pointé et celle de la lecture (cette dernière comprenant les erreurs de graduation de l'instrument). En effet, cette opération est tout à fait *symétrique* pour les deux points de visée : on fixe d'abord le cercle, et l'on fait mouvoir, dans un même sens, l'alidade rendue libre, de manière à couvrir successivement les deux points.

Il n'en est pas de même dans la répétition des angles : elle exige, pour conserver son avantage théorique, que, pendant les deux mouvements de l'instrument, les points que nous avons désignés par (u) et (γ) restent parfaitement immobiles. Les artistes ont cherché à garantir cette immobilité ; mais on n'est jamais sûr qu'en tournant le cercle avec l'alidade qui lui est fixée, leur position relative reste invariable (u) ; ou qu'en tournant l'alidade seule, le cercle n'éprouve aucun changement de position (γ).

La répétition permet certainement de compenser les erreurs *accidentelles* en moins de temps que la réitération ; mais de deux résultats ayant des erreurs moyennes peu différentes, et obtenus l'un par la première méthode, l'autre par la seconde, celui-ci méritera incontestablement la préférence. Pour se prononcer en faveur de l'un ou de l'autre procédé, il faudra donc décider, dans chaque cas particulier, si l'avantage que nous venons de reconnaître à la répétition l'emporte sur l'inconvénient possible résultant d'une erreur *constante* de l'instrument.

En général, si l'instrument est divisé avec une grande perfection, s'il permet de faire les lectures avec beaucoup d'exactitude, la valeur de $\varepsilon' - \varepsilon$, trouvée précédemment, sera très-faible à cause de la petitesse de l'erreur moyenne β : dans ce cas, on devra préférer à la méthode par répétition, celle par réitération dans les deux sens, en employant successivement les diverses parties de la graduation. C'est ce qu'ont fait Bessel et Baeyer, à l'égard du théodolite de 15 pouces, construit par Ertel, dont ils se sont servis pour la triangulation de la Prusse Orientale, et pour le levé du littoral de la mer Baltique. Cet instrument donnait directement les deux secondes.

§ **138.** — Il nous reste à traiter le dernier des trois cas spécifiés dans le § 123, celui où le problème offre des *conditions* qui doivent être rigoureusement satisfaites.

Lorsqu'il existe entre m quantités observées isolément un nombre c de relations nécessaires, il arrivera presque toujours que les *conditions* qui résultent de ces relations ne seront pas strictement satisfaites. Il faudra donc *d'abord* assujettir les corrections cherchées, Δ, à faire remplir ces conditions aux observations corrigées; *puis* rendre $[\Delta^2]$ un minimum *relatif*. Dans une triangulation géodésique, par exemple, il faut, avant d'employer les angles observés, les modifier de manière à transformer le réseau trigonométrique en un véritable polygone mathématique; et cela, en altérant le moins possible les résultats immédiats des observations. Les modifications à faire reposent donc sur l'emploi de la méthode des moindres carrés, et elles portent sur trois points principaux, savoir :

1° Les trois angles d'un triangle quelconque ayant été observés, il faut que leur somme, diminuée de l'excès sphérique, forme exactement 180°. Cette première condition est la plus simple, et l'on y a eu égard dès l'enfance de la géodésie.

2° Il faut qu'à chaque station où l'on a observé un tour d'horizon, la somme des angles soit égale à 360°. Mais cette condition, qui paraît si facile à remplir, cesse de l'être lorsqu'on la combine avec la précédente, et que l'on envisage, non pas un triangle isolé, mais le réseau dans son ensemble. En effet, la correction relative à la fermeture du tour d'horizon, faite au sommet A d'un triangle A B C, entraîne pour la fermeture du triangle une certaine correction des angles B et C. Mais ceux-ci peuvent également faire partie d'un tour d'horizon, et toute correction qu'on leur appliquerait de ce chef réagirait sur celle qui est déjà faite au point A : il en est de même de proche en proche pour les triangles adjacents. On voit donc que ces deux espèces de corrections sont liées l'une à l'autre, et qu'elles donnent lieu à des équations de condition *simultanées*, qui doivent embrasser *toute* l'étendue de la triangulation.

3° Le réseau géodésique serait maintenant composé de triangles mathématiques, si chaque sommet n'était déterminé que par l'intersection de *deux* rayons visuels. Mais chaque fois que l'on est en station, il est de règle que l'on vise sur *tous* les sommets qui peuvent être convenablement observés; de sorte que trois, quatre, ou même un plus grand nombre de rayons sont quelquefois dirigés vers un même signal. Or, ici encore, il faut modifier ces directions, le moins possible il est vrai, mais de manière cependant à les faire concourir toutes en un même point géométrique; et ces corrections, influant sur celles des deux premières classes, ne peuvent pas être faites indépendamment de celles-ci, mais doivent être combinées avec elles dans un système unique d'équations de condition. On voit que, pour une triangulation de quelque étendue, la question s'élargit et se complique singulièrement. Quand toutes ces corrections auront été déterminées, et qu'on les aura appliquées au réseau géodésique, chaque côté calculé ne pourra offrir qu'une seule et même valeur, quel que soit le chemin qu'on ait suivi pour obtenir sa longueur en fonction de celle de la base. Il en sera de même évidemment des coordonnées de chaque sommet.

En général, lorsque l'on *observe* directement certaines quantités qui pourraient immédiatement être *calculées* en fonction d'autres quantités déjà observées, on fait des observations que nous nommons *surabondantes* ou *de contrôle* (*überschussige oder Control-Beobachtungen*).

La dépendance entre un résultat d'observation surabondante et les autres résultats qui permettent de le calculer, s'exprimera par des équations de la forme

$$(r) \ldots \quad \begin{aligned} 0 &= F\ (V', V'', V''', \ldots) = f_1 \\ 0 &= F'\ (V', V'', V''', \ldots) = f_2 \ \ldots \text{ etc.}; \end{aligned}$$

chaque équation ne renfermant qu'*une seule* observation surabondante. Si nous substituons aux *véritables* valeurs, V, des inconnues, leurs valeurs réellement *observées*, *o*, nous obtiendrons, au lieu de zéro pour le premier membre de nos équations (r), des quantités n', n'', n'''... provenant des erreurs d'observation, et pouvant être considérées comme les différentielles des grandeurs, *o*. Nous déduirons donc de nos observations :

$$(r') \ldots \quad \begin{aligned} n' &= F\ (o', o'', o''' \ldots); \\ n'' &= F'\ (o', o'', o''' \ldots); \\ n''' &= F''\ (o', o'', o''' \ldots). \end{aligned}$$

Soient x', x'', x'''... les corrections *les plus probables* (encore inconnues) à faire subir aux quantités observées, o', o'', o'''... pour qu'elles satisfassent aux conditions (r) : les valeurs les plus probables des inconnues seront alors

$$\begin{aligned} o' + x' &= V' \\ o'' + x'' &= V'' \\ o''' + x''' &= V''' \ldots \end{aligned}$$

et nos équations (r) deviendront

$$0 = F(o' + x';\quad o'' + x'';\quad o''' + x''' \ldots)$$

$$= F(o', o'', o''' \ldots) + \frac{dF(o', o'', o''' \ldots)}{do'} x' + \frac{dF(o', o'', o''' \ldots)}{do''} x'' + \ldots$$

ou bien, en faisant

$$\frac{d\,F(o', o'', o''' \ldots)}{do'} = a'$$

$$\frac{d\,F(o', o'', o''' \ldots)}{do''} = a'' \ldots$$

$$\frac{d\,F'(o', o'', o''' \ldots)}{do'} = b'$$

$$\frac{d\,F'(o', o'', o''' \ldots)}{do''} = b'' \ldots \text{etc.}$$

$$(r'') \ldots \quad \begin{aligned} 0 &= n' + a'x' + a''x'' + a'''x''' + \ldots \\ 0 &= n'' + b'x' + b''x'' + b'''x''' + \ldots \\ 0 &= n''' + c'x' + c''x'' + c'''x''' + \ldots \end{aligned}$$

Telles sont les ***équations de condition, linéaires***, qui existent entre les erreurs, et qu'il faut satisfaire rigoureusement. Elles sont en nombre c, et chacune d'elles contient m inconnues, c étant $< m$. Si d'ailleurs quelques inconnues manquaient dans certaines équations, il suffirait d'y supposer leurs coefficients égaux à zéro.

Les m observations immédiates ont fourni les valeurs provisoires de o', o'', o'''... o_m ; et la somme des carrés des erreurs doit être un minimum, de sorte que

$$[x^2] = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots + x^2{}_m = minimum;$$

d'où (r''') ... $x'dx' + x''dx'' + x'''dx''' + \ldots + x_m dx_m = 0.$

S'il n'existait pas d'équation de condition entre les x, le premier membre renfermerait des termes entièrement *indépendants* les uns des autres ; le coefficient de chaque différentielle devrait être séparément égal à zéro, et par suite les corrections les plus probables seraient

$$x' = x'' = x''' = \ldots = x_m = 0;$$

ce qui d'ailleurs est évident pour le cas du minimum *absolu*.

Mais il ne peut être ici question d'obtenir un pareil minimum : celui que nous cherchons est *relatif*, et astreint à cette condition, que les seuls x admissibles sont ceux qui satisfont exactement aux équations (r'').

Pour exprimer que les seconds membres de ces dernières équations conservent des valeurs *constantes*, lorsqu'on y introduit les systèmes convenables de valeurs de x, il faut égaler leurs différentielles à zéro. Nous aurons donc

$$(\text{r}^{\text{iv}}) \ldots \begin{cases} a'dx' + a''dx'' + a'''dx''' + \ldots + a_m dx_m = 0; \\ b'dx' + b''dx'' + b'''dx''' + \ldots + b_m dx_m = 0; \\ c'dx' + c''dx'' + c'''dx''' + \ldots + c_m dx_m = 0. \end{cases}$$

Ces équations, en nombre c, montrent que c différentielles peuvent être exprimées au moyen des $(m - c)$ restantes. Si l'on effectue cette élimination, et que l'on substitue dans (r''') les valeurs de ces c différentielles, il y restera encore $(m - c)$ différentielles *indépendantes*, dont les coefficients seront des fonctions de a', a'', a'''... b', b'', b'''... etc. En égalant chacun de ces derniers à zéro, on obtiendra $(m - c)$ équations, qui, jointes aux c équations (r''), fourniront un système de m équations, d'où l'on pourra déduire les valeurs des m inconnues. Le problème est donc théoriquement résolu.

Mais cette marche, assez longue en général, aurait en outre l'inconvénient de laisser purement arbitraire le choix des c différentielles que nous considérons comme surabondantes, et dépendantes des autres : ici encore, comme au § 128, on remplacera avec avantage le procédé ordinaire d'élimination par celui des coefficients indéterminés.

Dans ce but, prenons c coefficients arbitraires, k', k'', k'''.... par lesquels nous multiplierons respectivement les c équations (r$^{\text{iv}}$); ajoutant ensuite ces équations entre elles, et *identifiant* chacun des coefficients des dx au coefficient correspondant de l'équation (r''') (puisque les dx sont indéterminés), nous obtiendrons, entre les c coefficients k, m équations que nous nommons *corrélatives* et qui sont :

$$(\mathrm{r^v})\ldots\quad \begin{aligned} x' &= a'k' + b'k'' + c'k''' + f'k_c \\ x'' &= a''k' + b''k'' + c''k''' + f''k_c \\ x''' &= a'''k' + b'''k'' + c'''k''' + f'''k_c \ \ldots \text{etc.} \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, les k sont exprimés simplement en fonction linéaire des x encore *inconnus ;* mais on les déterminera en substituant aux x, dans les équations de condition, leurs valeurs tirées des équations corrélatives : nous obtiendrons ainsi c équations *normales* entre les c coefficients *corrélatifs* : ce sont

$$(\mathrm{r^{vi}})\ldots\quad \begin{aligned} 0 &= n' + [aa]\,k' + [ab]\,k'' + [ac]\,k''' + \ldots + [af]\,k_c \\ 0 &= n'' + [ab]\,k' + [bb]\,k'' + [bc]\,k''' + \ldots + [bf]\,k_c \\ 0 &= n''' + [ac]\,k' + [bc]\,k'' + [cc]\,k''' + \ldots + [cf]\,k_c. \end{aligned}$$

Déterminant par voie d'élimination les valeurs numériques des k, il ne nous restera plus qu'à les substituer dans ($\mathrm{r^v}$), et nous aurons ainsi les corrections x', x'', x'''... qui, tout en satisfaisant rigoureusement aux équations de condition, donnent la plus petite somme de carrés qu'il soit possible d'obtenir.

§ **139**. — La somme des carrés de ces corrections nous donnera $[x^2]$ ou, pour suivre la notation que nous avons adoptée jusqu'ici, $[\Delta^2]$. Nous en avons besoin pour calculer, comme au § 127, la *précision* des observations; l'*erreur moyenne* sera donnée par la formule ($\mathrm{k^x}$) de ce §; remarquons seulement que les équations surabondantes, qui étaient alors en nombre $(e - i)$, sont ici en nombre c, de sorte que l'on a

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{c}}.$$

§ **140**. — *Premier exemple.* — On a mesuré un tour d'horizon au moyen de cinq angles, et l'on a obtenu les valeurs

$$\begin{aligned} o' &= 40^\circ\ 29'\ 17'' \\ o'' &= 80\ \ 35\ \ 26 \\ o''' &= 96\ \ 24\ \ 38 \\ o^{\mathrm{iv}} &= 30\ \ \ 7\ \ 26 \\ o^{\mathrm{v}} &= 112\ \ 23\ \ 48. \end{aligned}$$

La condition nécessaire que nous avons à remplir est que la somme de ces cinq angles forme exactement 360°. Or l'observation a donné

$360^{\circ} + 35''$. Nous avons donc ici *une* équation de condition, qui est

$$(\mathrm{r}'') \ldots \quad x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} + x^{\text{v}} + 35'' = 0.$$

Les cinq équations corrélatives deviennent

$$(\mathrm{r}^{\text{v}}) \ldots \quad \begin{aligned} x' &= k' \\ x'' &= k' \\ x''' &= k' \\ x^{\text{iv}} &= k' \\ x^{\text{v}} &= k'. \end{aligned}$$

La substitution dans l'équation de condition donne une équation normale

$$(\mathrm{r}^{\text{vi}}) \ldots \quad 0 = 35 + 5k';$$

d'où

$$k' = -7;$$

et par suite $x' = x'' = x''' = x^{\text{iv}} = x^{\text{v}} = -7''$.

$$[x^2] = [\Delta^2] = 5 \times 49 = 245'';$$

et par conséquent, puisque $c = 1$,

$$\varepsilon = \sqrt{245} = \pm 15'',65.$$

Cet exemple confirme la règle pratique suivante : « Quand un tour « d'horizon ne ferme pas exactement, et que les observations sont « d'égale précision, on doit répartir l'erreur *également* sur tous les « angles, sans s'inquiéter de leur grandeur. »

Deuxième exemple. — Soit un triangle dans lequel on a mesuré les trois angles

$$\begin{aligned} o' &= 36^{\circ}\,25'\,47'' \\ o'' &= 90\;\;36\;\;28 \\ o''' &= 52\;\;57\;\;57. \end{aligned}$$

Ici l'incompatibilité à faire disparaître, c'est la différence de la somme des trois angles à 180° : elle est $+ 12''$; l'équation de condition est donc $x' + x'' + x''' + 12'' = 0$.

Équations corrélatives.

$$\begin{aligned} x' &= + k' \\ x'' &= + k' \\ x''' &= + k'. \end{aligned}$$

Équation normale.

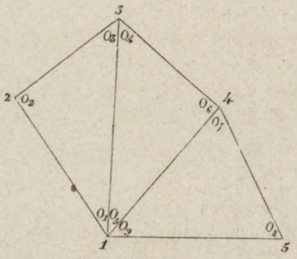
$$12 + 3k' = 0.$$

On en déduit $k' = -4$; $x' = x'' = x''' = -4''$.

$$[\Delta^2] = 48; \quad \varepsilon = \sqrt{48} = \pm 6'',93.$$

Ainsi se trouve justifié ce principe connu :

« L'erreur commise sur la somme des trois angles d'un triangle « doit être répartie *également* « sur chacun d'eux, en admettant « que les observations soient également exactes. »



Troisième exemple. — La marche précédente s'applique aussi au cas d'une chaîne de triangles. Supposons qu'on ait obtenu

$o_1 = 36^\circ 25' 47''$;	$o_4 = 50^\circ 26' 13''$;	$o_7 = 70^\circ 43' 28''$;
$o_2 = 90\ \ 36\ \ 28$;	$o_5 = 42\ \ 4\ \ 7$;	$o_8 = 56\ \ 19\ \ 37$;
$o_3 = 52\ \ 57\ \ 57$;	$o_6 = 87\ \ 29\ \ 25$;	$o_9 = 52\ \ 56\ \ 34$.
$180^\circ\ 0' 12''$;	$179^\circ 59' 45''$;	$179^\circ 59' 39''$.

Les trois équations de condition à satisfaire sont donc :

$$x_1 + x_2 + x_3 + 12 = 0$$
$$x_4 + x_5 + x_6 - 15 = 0$$
$$x_7 + x_8 + x_9 - 21 = 0.$$

En les traitant comme ci-dessus, on obtient

Équations corrélatives.	Équations normales.
$x_1 = x_2 = x_3 = k_1$	$+ 12 + 3k_1 = 0$
$x_4 = x_5 = x_6 = k_2$	$- 15 + 3k_2 = 0$
$x_7 = x_8 = x_9 = k_3$	$- 21 + 3k_3 = 0.$

D'où l'on déduit
$$x_1 = x_2 = x_3 = - 4'';$$
$$x_4 = x_5 = x_6 = + 5'';$$
$$x_7 = x_8 = x_9 = + 7'';$$
$$[\Delta^2] = 3 . 16 + 3 . 25 + 3 . 49 = 270.$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{270}{3}} = \pm 9'',43.$$

Admettons que, pour fermer le tour d'horizon au point **1**, on ait mesuré l'angle *extérieur* formé entre les deux directions **1** . **2** et **1** . **5**; et qu'on l'ait trouvé de **228° 33′ 52″** $= o_{10}$. Le comparant avec la somme des trois angles o_1, o_5, o_9, on trouvera que l'excès sur **360°** est de $+ 20''$; et l'on aura une quatrième équation de condition

$$x_1 + x_5 + x_9 + x_{10} + 20 = 0.$$

Les équations corrélatives seront maintenant

$$
\begin{aligned}
x_1 &= k_1 + k_4 \\
x_2 &= x_3 = k_1 \\
x_4 &= x_6 = k_2 \\
x_5 &= k_2 + k_4 \\
x_7 &= x_8 = k_3 \\
x_9 &= k_3 + k_4 \\
x_{10} &= k_4
\end{aligned}
$$

et les équations normales

$$
\begin{aligned}
0 &= +12 + 3k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + k_4 \\
0 &= -15 \qquad\quad + 3k_2 \qquad\qquad + k_4 \\
0 &= -21 \qquad\qquad\qquad + 3k_3 + k_4 \\
0 &= +20 + k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4.
\end{aligned}
$$

Éliminant, on trouve

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\ 0{,}89 \\
k_2 &= +\ 8{,}11 \\
k_3 &= +\ 10{,}11 \\
k_4 &= -\ 9{,}33;
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\ 10'',22 \\
x_2 = x_3 &= -\ 0\ ,89 \\
x_4 = x_6 &= +\ 8\ ,11 \\
x_5 &= -\ 1\ ,22 \\
x_7 = x_8 &= +\ 10\ ,11 \\
x_9 &= +\ 0\ ,78 \\
x_{10} &= -\ 9\ ,33.
\end{aligned}
$$

Appliquant ces corrections, on fera fermer simultanément les triangles et le tour d'horizon.

§ **141.** — Lorsque les observations ont des *précisions différentes*, ce n'est plus $[x^2]$, mais bien $[px^2]$ qui doit être rendu un minimum. L'équation (r$'''$) deviendra donc dans ce cas

$$p'x'dx' + p''x''dx'' + p'''x'''dx''' + p_m x_m dx_m = 0.$$

Joignons-la aux équations (r$^{\text{IV}}$) qui ne changent pas, comme exprimant des relations géométriques, nous obtiendrons les équations *corrélatives*

$$x' = \frac{a'k'}{p'} + \frac{b'k''}{p'} + \frac{c'k'''}{p'} + \ldots + \frac{f'k_c}{p'}$$
$$x'' = \frac{a''k'}{p''} + \frac{b''k''}{p''} + \frac{c''k'''}{p''} + \ldots + \frac{f''k_c}{p''}$$
$$x''' = \frac{a'''k'}{p'''} + \frac{b'''k''}{p'''} + \frac{c'''k'''}{p'''} + \ldots + \frac{f'''k_c}{p'''} \ldots \text{etc.};$$

qui, substituées dans les équations *de condition*, conduisent aux équations *normales*

$$0 = n' + \left[\frac{aa}{p}\right] k' + \left[\frac{ab}{p}\right] k'' + \left[\frac{ac}{p}\right] k''' + \ldots + \left[\frac{af}{p}\right] k_c$$
$$0 = n'' + \left[\frac{ab}{p}\right] k' + \left[\frac{bb}{p}\right] k'' + \left[\frac{bc}{p}\right] k''' + \ldots + \left[\frac{bf}{p}\right] k_c$$
$$0 = n''' + \left[\frac{ac}{p}\right] k' + \left[\frac{bc}{p}\right] k'' + \left[\frac{cc}{p}\right] k''' + \ldots + \left[\frac{cf}{p}\right] k_c \ldots$$

L'élimination et la substitution restent naturellement les mêmes : donc le changement apporté au procédé du § 138 se traduit ainsi :

« Avant le passage des équations corrélatives aux équations nor-
« males, on divise le second membre de chacune des premières par
« le poids correspondant. »

§ **142.** — Pour apprécier l'exactitude des observations, nous aurons, comme au § 139, à calculer d'abord une somme de carrés qui est ici $[p\Delta^2] = [px^2]$; d'après cela, l'erreur moyenne de l'unité de poids sera

$$\eta = \sqrt{\frac{[p\,\Delta^2]}{c}};$$

et l'on aura pour celles des observations les valeurs

$$\varepsilon' = \frac{\eta}{\sqrt{p'}}; \quad \varepsilon'' = \frac{\eta}{\sqrt{p''}}; \quad \varepsilon''' = \frac{\eta}{\sqrt{p'''}} \ldots \text{etc.}$$

§ **143.** — 1° Pour application, reprenons notre 2ᵉ exemple du § 140 : nous supposons maintenant que le nombre des répétitions est différent pour chacun des angles du triangle, et que l'on a

$$p' = 4\ ;\quad p'' = 2\ ;\quad p''' = 3.$$

L'équation de condition ne change pas; c'est

$$x' + x'' + x''' + 12'' = 0.$$

Équations corrélatives.

$$x' = +\,{}^1/_4\, k'$$
$$x'' = +\,{}^1/_2\, k'$$
$$x''' = +\,{}^1/_3\, k'.$$

Équation normale.

$$12 + \frac{13}{12}\, k' = 0.$$

On en déduit $\quad k' = -\dfrac{144}{13} = -\,11{,}077\,;$

et par suite

$$x' = -\ 2'',77$$
$$x'' = -\ 5\ ,54$$
$$x''' = -\ 3\ ,69.$$

On voit que l'erreur commise sur la somme des trois angles doit se répartir ici sur chacun d'eux *en raison inverse des poids.*

Le calcul de l'erreur moyenne donnera

$$\eta = \sqrt{132{,}8231} = \pm\ 11'',52\,;$$

d'où $\quad \varepsilon' = \pm\, 5'',76\ ;\quad \varepsilon'' = \pm\, 8'',15\ ;\quad \varepsilon''' = \pm\, 6'',65.$

2° Puissant (*Nouvelle description géométrique de la France,* 1re partie, p. 65) suit une marche particulière, très-élémentaire et très-simple, pour corriger un tour d'horizon : sa formule, du reste, revient à celle que l'on déduirait de notre procédé général.

Soient A, B, C, D quatre angles horizontaux tels que l'on ait

$$A + B + C + D = 360^{\circ} + e \qquad \ldots (1)$$

e désignant l'erreur du tour d'horizon. Si l'on représente par $x', x'', x''', x^{\text{iv}}$ les corrections respectives de ces angles, elles seront évidemment proportionnelles à l'erreur totale, e, et réciproques aux nombres de répétitions $p', p'', p''', p^{\text{iv}}$ qui leur correspondent ; c'est-à-dire qu'on aura

$$x' = \frac{k'e}{p'}\ ;\quad x'' = \frac{k'e}{p''}\ ;\quad x''' = \frac{k'e}{p'''}\ ;\quad x^{\text{iv}} = \frac{k'e}{p^{\text{iv}}}\ ;$$

k' étant un facteur commun à déterminer. Or, en appelant A′, B′, C′, D′ les angles corrigés, on devra avoir exactement

$$A' + B' + C' + D' = 360^{\circ};$$

et par conséquent $\quad x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} = -\,e \qquad \ldots (2)$

ou bien $$k' \left\{ \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} + \frac{1}{p^{\text{IV}}} \right\} = -1$$

$$k' = -\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}.$$

Il vient donc en définitive

$$x' = -\frac{e}{p'\left[\frac{1}{p}\right]}$$

$$x'' = -\frac{e}{p''\left[\frac{1}{p}\right]}$$

$$x''' = -\frac{e}{p'''\left[\frac{1}{p}\right]}$$

$$x^{\text{IV}} = -\frac{e}{p^{\text{IV}}\left[\frac{1}{p}\right]}.$$

3° Quand on a observé la somme ou la différence de certains angles géodésiques entrant dans un tour d'horizon (*Horizont-Abschluss*), il est facile, avons-nous vu (§ 132), de trouver les valeurs les plus probables de chacun d'eux : il reste ensuite à assujettir la somme des angles corrigés à former exactement 360°, en répartissant l'erreur sur chacun d'eux, en raison inverse de son poids.

Ici le nombre des répétitions ne fournit pas directement le poids des angles, parce qu'ils n'ont pas seulement été observés individuellement, mais qu'en outre plusieurs ont été combinés entre eux. On devra donc déduire ces poids, du nombre de fois que chaque *direction* a été observée.

Reprenons notre exemple du § précité, dans lequel nous avons supposé, pour la simplicité des calculs, que chaque angle avait été observé un même nombre de fois ; et mettons entre parenthèses, à côté de l'indication de chaque angle, le nombre de fois qu'il a été réellement observé : nous aurons

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A}\,.\,\mathrm{B} \quad (30)\\ y &= \mathrm{A}\,.\,\mathrm{C} \quad (20)\\ z &= \mathrm{A}\,.\,\mathrm{D} \quad (26)\\ y - x &= \mathrm{B}\,.\,\mathrm{C} \quad (25)\\ z - x &= \mathrm{B}\,.\,\mathrm{D} \quad (28)\\ z - y &= \mathrm{C}\,.\,\mathrm{D} \quad (44). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la direction	A	a été pointée	76	fois,
» »	B	»	83	»
» »	C	»	89	»
» »	D	»	98	»

Si donc nous prenons pour unité de poids l'observation d'une direction, il nous sera aisé de calculer le poids de l'observation d'un angle, qui est la différence des deux directions, et il viendra (§ 115)

$$\text{Pour l'angle AOB} \ldots \mathrm{P} = \frac{76 \times 83}{76 + 83} = 40$$

$$\text{» BOC} \ldots \mathrm{P}' = \frac{83 \times 89}{83 + 89} = 43$$

$$\text{» COD} \ldots \mathrm{P}'' = \frac{89 \times 98}{89 + 98} = 47.$$

Puissant (à l'endroit cité plus haut) indique aussi un moyen de répartir dans ce cas l'erreur sur les différents angles; son procédé est plus simple que celui du § 132, mais il ne donne pas les corrections *les plus probables*, et n'a d'autre but que d'introduire, dans la recherche des corrections, une marche directe et exempte d'arbitraire.

Supposons avec lui que, outre les quatre angles A, B, C, D (2°), on ait mesuré la somme $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{E}$: on aurait la nouvelle relation

$$\mathrm{E} + \mathrm{C} + \mathrm{D} = 360 + e' \qquad \ldots (3)$$

Alors, en représentant par x^{v} la correction de l'angle E et par p^{v} le nombre de fois qu'il a été mesuré, on aurait

$$x''' + x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{v}} = -e' \qquad \ldots (4);$$

ou bien (4′) ... $x''' + x^{\mathrm{iv}} = -e' - x^{\mathrm{v}}$;

et comme la relation (2) donne

(2′) ... $x''' + x^{\mathrm{iv}} = -e - x' - x''$,

il s'ensuit que $x' + x'' - x^{\mathrm{iv}} = e' - e = e''$.

On a d'ailleurs $x' = \dfrac{k'e''}{p'}$; $x'' = \dfrac{k'e''}{p''}$; $- x^{\text{v}} = \dfrac{k'e''}{p^{\text{v}}}$;

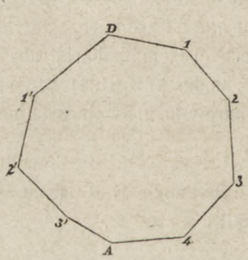
donc
$$k'\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p^{\text{v}}}\right) = 1;$$

$$k' = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_1}\right]}.$$

Tel est le facteur qu'il conviendrait d'adopter dans ce cas. Il servirait à déterminer x', x'', x^{v}, puisque les erreurs e, e' seraient connues. Ensuite l'équation (4') ou (2') procurerait x''' et x^{iv} : en effet soit
$$x''' + x^{\text{iv}} = - e' - x^{\text{v}} = e''';$$
on aurait $x''' = \dfrac{k''e'''}{p'''}$; $x^{\text{iv}} = \dfrac{k''e'''}{p^{\text{iv}}}$; $k'' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{p'''} + \dfrac{1}{p^{\text{iv}}}}$.

Cette marche peut d'ailleurs être suivie, quel que soit le nombre des relations analogues à (1) et à (3).

4° La question suivante, relative au nivellement topographique, présente une application utile des principales formules que nous avons trouvées dans les §§ précédents. Elle a été traitée par M. Meyer (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXI).



On part d'un point D dont la cote est donnée, et l'on se propose de déterminer par un nivellement topographique la cote d'un point A. — A cet effet, on chemine de D vers A par deux polygones différents, D 1 2 3 4... A : D 1' 2' 3'... A ; et l'on obtient ainsi deux cotes différentes pour le point A. Il s'agit de déterminer :

1° La cote la plus probable du point A ;

2° Les cotes les plus probables des sommets de chacun des cheminements.

Nous supposons d'ailleurs que les différences de niveau de tous les points sont déterminées avec le même soin et à l'aide du même instrument; et que les côtés des deux polygones de cheminement sont différents en grandeur et en nombre.

Nous désignerons par d_D, d_1, d_2... d_A les cotes des points D, 1, 2... A ; par n_1, n_2... n_A les différences de niveau aux points 1, 2, ... A, et nous aurons :

$$(A) \quad \begin{cases} d_1 = d_D + n_1\,; \\ d_2 = d_D + n_1 + n_2\,; \\ \vdots \\ d_A = d_D + n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_A. \end{cases}$$

Ainsi les différences de niveau aux sommets des polygones sont des fonctions linéaires des observations. Il est d'ailleurs inutile de faire remarquer que les n doivent être pris avec leurs signes.

En accentuant les lettres on aurait des valeurs analogues pour le second cheminement.

L'erreur moyenne, ε, d'une différence de niveau dépendant de l'instrument, et de la distance des deux points observés (distance au milieu de laquelle on est supposé en station), il faudra commencer par construire, au moyen de l'observation, une table de ces erreurs, dont l'argument sera la distance. Dans ce but on choisira, sur un terrain uni, une station, O, convenable, à partir de laquelle on mesurera

3′ 2′ 1′ 0 1 2 3

des distances égales 01 = 01′; 02 = 02′... etc. Puis on enfoncera des piquets aux points 1, 2,... 1′, 2′.... ; on fera ensuite dix visées et dix lectures, 1° pour chaque distance 01, 01′; 02, 02′;... 2° pour les distances 1 — 1′; 2 — 2′; 3 — 3′....

Soient N′, N″, N‴.... les différences de niveau correspondantes à la distance 01 = 01′, par exemple; N leur valeur moyenne : on retranchera de cette moyenne chacune des dix différences particulières qui l'ont fournie, ce qui donnera les erreurs ε', ε'', ε'''....; et l'on aura (§ 109), pour la distance 01, l'erreur moyenne

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{9}}.$$

Le poids de ce résultat sera

$$p = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Si l'on construit deux tables analogues, l'une pour les distances 01, 02..., relative aux différences de niveau; l'autre pour les distances 1 — 1′, 2 — 2′..., relative aux hauteurs de mire, la première servira pour le nivellement par cheminement, la seconde pour le nivellement par rayonnement.

Cela posé, l'erreur moyenne de la cote du point A sera (§ 117)

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2_1 + \varepsilon^2_2 + \varepsilon^2_3 + \ldots}$$

et le poids du résultat

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$; $p_1, p_2, p_3 \ldots$. étant les erreurs moyennes, et les poids correspondants, tirés de la table.

On trouverait deux formules analogues pour l'erreur moyenne ε' et le poids P′ de la cote d'_A obtenue par le second cheminement.

Si les côtés du premier polygone étaient égaux entre eux, et que la même particularité se présentât pour les côtés du second, il viendrait, dans le cas de la figure,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \sqrt{5}; \quad P = \frac{p'}{5}.$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'_1 \sqrt{4}; \quad P' = \frac{p'_1}{4}.$$

Si les côtés des deux polygones étaient tous égaux, on aurait

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \sqrt{\frac{5}{4}}; \quad \frac{P}{P'} = \frac{4}{5}.$$

Connaissant maintenant les poids et les erreurs moyennes des deux déterminations d_A, d'_A, cherchons la cote la plus probable, a, du point A, son poids P_1, et son erreur moyenne E_2. — Il suffit évidemment d'invoquer la formule (F′) du § 110, qui donne ici

$$a = \frac{P\, d_A + P'\, d'_A}{P + P'}.$$

Dans le cas où les deux cheminements se composeraient d'un même nombre de points équidistants, cette valeur deviendrait

$$a = \frac{d_A + d'_A}{2}.$$

Pour trouver l'erreur moyenne de la cote la plus probable, représentons par η_2 l'erreur moyenne de l'observation qui aurait pour poids l'unité : il viendra (k)

$$\eta^2_2 = P\,\varepsilon^2$$
$$\eta^2_2 = P'\varepsilon'^2 \ldots$$

ajoutant $$\eta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\,[P\,\varepsilon^2 + P'\,\varepsilon'^2]}.$$

Comme d'ailleurs le nombre d'observations ayant l'unité pour poids est représenté par $(P+P')$, l'erreur moyenne d'une de ces observations sera à celle, E_2, du *résultat moyen*, comme $\sqrt{(P+P')}$: 1 ; d'où

$$E_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt{P+P'}} = \sqrt{\frac{P\,\varepsilon^2 + P'\varepsilon'^2}{2\,(P+P')}};$$

$$P_1 = P + P'.$$

Nous arrivons maintenant à la seconde partie de notre question, celle qui a pour but de déterminer les valeurs les plus probables des cotes des différents sommets :

Pour résoudre ce problème nous supposerons exacte la cote, a, obtenue ci-dessus pour le point A.— Désignons par x_1, x_2,.... x_A les petites corrections inconnues à apporter aux différences de niveau n_1, n_2.... n_A : nous aurons, pour les cotes corrigées, les expressions suivantes :

Cote corrigée du point 1 ... $d_D + n_1 + x_1 = \mathrm{d}_1$

» » 2 ... $d_D + n_1 + n_2 + x_1 + x_2 = \mathrm{d}_2$

$\vdots$

» » A ... $d_D + n_1 + n_2 \ldots + n_A + x_1 + x_2 \ldots + x_A = \mathrm{d}_A$

qui deviennent, en vertu des équations (A),

$$\mathrm{d}_1 = d_1 + x_1$$
$$\mathrm{d}_2 = d_2 + x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{d}_A = d_A + x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_A.$$

La question est ramenée par là à déterminer les valeurs les plus probables des inconnues x_1, x_2... x_A, sous la *condition* que $\mathrm{d}_A = a$, ou bien que

$$x_1 + x_2 + ... + x_A = a - d_A = \Delta.$$

Notre équation de condition (§ 141) est donc

$$x_1 + x_2 + ... + x_A - \Delta = 0.$$

Nos équations corrélatives, eu égard aux poids, deviennent

$$x_1 = \frac{k'}{p_1}; \quad x_2 = \frac{k'}{p_2} ... x_A = \frac{k'}{p_A};$$

et notre équation normale est

$$k'\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_A}\right) - \Delta = 0;$$

d'où $$k' = \frac{\Delta}{\left[\frac{1}{p}\right]}; \quad x_1 = \frac{\Delta}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]}; \quad x_2 = \frac{\Delta}{p_2\left[\frac{1}{p}\right]} ... \text{etc.}$$

On a donc $$\mathrm{d}_1 = d_1 + \frac{\Delta}{p_1\left[\frac{1}{p}\right]};$$

$$\mathrm{d}_2 = d_2 + \frac{\Delta}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right);$$

$$\mathrm{d}_3 = d_3 + \frac{\Delta}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right);$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{d}_A = d_A + \Delta = a.$$

On voit aisément ce que deviendraient ces formules, 1° si à la place des poids on introduisait les erreurs moyennes; 2° si l'on supposait les sommets du polygone équidistants, ce qui revient à faire tous les poids égaux entre eux et à l'unité.

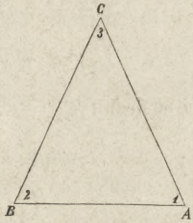
Ordinairement on vient *se fermer* au point D, pour lequel on doit retrouver la cote de départ d_D. L'équation de condition serait alors

$$x_1 + x_2 + \dots + x_D = d_D - d'_D = \Delta.$$

Et le développement des calculs resterait le même.

§ 141. — Chaque fois qu'une mesure angulaire n'est pas isolée ; chaque fois, en d'autres termes, que l'on fait un système d'observations combinées, il vaut mieux corriger individuellement les *directions* des côtés des angles, que de corriger d'un seul coup *l'amplitude* de l'angle lui-même. Nous entendons par *direction* d'un côté, l'angle qu'il fait avec une droite arbitraire, passant par le sommet, et prise comme origine des directions. Nous supposerons toujours que cette direction initiale tombe *à gauche* de toutes les directions qu'on lui rapporte.

Pour exposer le plus simplement possible cette méthode de la *compensation des directions*, nous croyons utile d'introduire ici avec Gerling quelques notations nouvelles, propres à abréger le discours.



Nous désignerons les sommets par des chiffres, de sorte que le triangle A B C sera nommé 1 2 3.

La direction de C vu d A sera notée $\frac{3}{1}$; celle de A vu de C serait $\frac{1}{3}$; celle de B vu de C, $\frac{2}{3}$, et ainsi de suite.

Un angle sera désigné par trois chiffres disposés dans le même ordre que les sommets correspondants.

Ainsi on aura $\widehat{BAC} = \frac{2\,.\,3}{1}$; $\widehat{CBA} = \frac{3\,.\,1}{2}$; $\widehat{ACB} = \frac{1\,.\,2}{3}$.

De ces conventions résultent les équations suivantes :

$$\frac{2\,.\,3}{1} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{1};\quad \frac{3\,.\,1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2};\quad \frac{1\,.\,2}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}.$$

Les longueurs des côtés s'indiqueront en séparant par un point les chiffres de leurs extrémités.

Ainsi $\overline{AB} = 1\,.\,2$; $\overline{BC} = 2\,.\,3$; $\overline{CA} = 3\,.\,1$.

Enfin les *corrections* des directions et des longueurs se noteront comme les directions et les longueurs *observées*, mais seront enfermées entre des parenthèses.

Ainsi : angle $\overset{2\,.\,3}{1}$ corrigé $= \overset{2\,.\,3}{1} - \binom{2}{1} + \binom{3}{1}$ etc.

côté $1\,.\,2$ corrigé $= 1\,.\,2 + (1\,.\,2)$ etc.

Ces prémisses posées, reprenons notre second exemple du § 140 : l'équation de condition deviendra maintenant :

$$0 = +12 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}.$$

Équations corrélatives.

$$\binom{2}{1} = -k_1$$
$$\binom{3}{1} = +k_1$$
$$\binom{3}{2} = -k_1$$
$$\binom{1}{2} = +k_1$$
$$\binom{1}{3} = -k_1$$
$$\binom{2}{3} = +k_1$$

Équation normale.

$$0 = +12 + 6k_1.$$

On en déduit $k_1 = -2$, et par conséquent

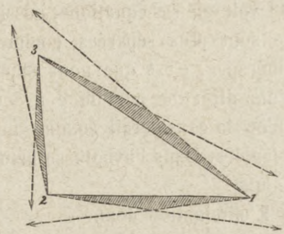
$$\binom{2}{1} = \binom{3}{2} = \binom{1}{3} = +2$$
$$\binom{3}{1} = \binom{1}{2} = \binom{2}{3} = -2.$$

Les angles compensés sont donc, comme dans le premier cas,

$$o' + \Delta' = 36^\circ\, 25'\, 43''$$
$$o'' + \Delta'' = 90\ \ 36\ \ 24$$
$$o''' + \Delta''' = 52\ \ 57\ \ 53.$$

Voulons-nous apprécier l'exactitude de notre manière d'observer, cherchons l'erreur moyenne d'une *direction*. Ici $[\Delta^2] = 6 \times 2^2 = 24$; d'où $\varepsilon = \sqrt{24} = \pm 4'',90$. Ce résultat s'accorde avec celui qui a été trouvé précédemment; car les erreurs moyennes d'une direction et d'un angle doivent être entre elles (§ 115) comme $1 : \sqrt{2}$.

Quoique cette nouvelle manière de compenser les angles d'un triangle observé *isolément* soit identique, quant au résultat, avec celle du § 140, elle en diffère néanmoins en principe. En effet, au lieu de compenser *trois* angles, en faisant varier leurs deux côtés à la fois, elle opère la compensation de *six* angles, dont chacun a un côté invariable de position. Dans l'exemple que nous venons de traiter, comme l'erreur totale $+ 12''$ est positive, chaque direction *de gauche* a laissé fautivement *à droite* le véritable point de visée ; chaque direction de droite l'a laissé d'autant à gauche : de sorte que les corrections d'une direction, aux deux extrémités de laquelle on a fait des visées réciproques, sont égales et de signes contraires. Les petits triangles d'erreur, formés par les directions compensées (marquées en traits pleins dans la figure ci-jointe), et par les directions observées (marquées en traits ponctués), sont isocèles, semblables, et *extérieurs* à la figure : ils lui seraient *intérieurs* si l'erreur totale était négative.



§ **145.** — Reprenons maintenant notre troisième exemple du § 140, qui se rapporte à un système de triangles liés entre eux. Nous avons les trois équations de condition

$$0 = + 12 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}$$
$$0 = - 15 - \binom{4}{3} + \binom{1}{3} - \binom{1}{4} + \binom{3}{4} - \binom{3}{1} + \binom{4}{1}$$
$$0 = - 21 - \binom{5}{4} + \binom{1}{4} - \binom{1}{5} + \binom{4}{5} - \binom{4}{1} + \binom{5}{1},$$

qui conduisent aux quatorze équations corrélatives :

$$\begin{array}{llll}
\binom{2}{1} = - k_1 & & \binom{2}{3} = + k_1 & \\
\binom{3}{1} = + k_1 - k_2 & & \binom{4}{3} = & - k_2 \\
\binom{4}{1} = & + k_2 - k_3 & \binom{1}{4} = & - k_2 + k_3 \\
\binom{5}{1} = & + k_3 & \binom{3}{4} = & + k_2 \\
\binom{1}{2} = + k_1 & & \binom{5}{4} = & - k_3 \\
\binom{3}{2} = - k_1 & & \binom{1}{5} = & - k_3 \\
\binom{1}{3} = - k_1 + k_2 & & \binom{4}{5} = & + k_3.
\end{array}$$

Substituant dans les équations de condition, nous obtenons les équations normales

$$
\begin{aligned}
0 &= +12 + 6k_1 - 2k_2\,; \\
0 &= -15 - 2k_1 + 6k_2 - 2k_3\,; \\
0 &= -21 - 2k_2 + 6k_3.
\end{aligned}
$$

On voit que ces équations, aussi bien que les équations de condition, ne sont plus séparées, comme dans le § **140**. La raison de cette différence, c'est que nous supposions alors tacitement que l'erreur d'une direction commune à deux triangles pouvait varier, suivant qu'on la considérait comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces triangles. Dans l'hypothèse actuelle, cette erreur est nécessairement unique.

L'élimination donne $k_1 = -0{,}71$; $k_2 = +3{,}86$; $k_3 = +4{,}79$. Substituant ces valeurs dans les équations corrélatives, on a

$$
\begin{aligned}
\binom{2}{1} &= +0'',71 & \qquad \binom{2}{3} &= -0'',71 \\
\binom{3}{1} &= -4\ ,57 & \binom{4}{3} &= -3\ ,86 \\
\binom{4}{1} &= -0\ ,93 & \binom{1}{4} &= +0\ ,93 \\
\binom{5}{1} &= +4\ ,79 & \binom{3}{4} &= +3\ ,86 \\
\binom{1}{2} &= -0\ ,71 & \binom{5}{4} &= -4\ ,79 \\
\binom{3}{2} &= +0\ ,71 & \binom{1}{5} &= -4\ ,79 \\
\binom{1}{3} &= +4\ ,57 & \binom{4}{5} &= +4\ ,79.
\end{aligned}
$$

Les corrections à faire subir aux angles sont donc :

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= -\binom{2}{1}+\binom{3}{1} = -5'',28\,; & \Delta_6 &= -\binom{3}{1}+\binom{4}{1} = +\ 3'',64\,; \\
\Delta_2 &= -\binom{3}{2}+\binom{1}{2} = -1\ ,42\,; & \Delta_7 &= -\binom{5}{4}+\binom{1}{4} = +\ 5\ ,72\,; \\
\Delta_3 &= -\binom{1}{3}+\binom{2}{3} = -5\ ,28\,; & \Delta_8 &= -\binom{1}{5}+\binom{4}{5} = +\ 9\ ,58\,; \\
\Delta_4 &= -\binom{4}{3}+\binom{1}{3} = +8\ ,43\,; & \Delta_9 &= -\binom{1}{1}+\binom{5}{1} = +\ 5\ ,72. \\
\Delta_5 &= -\binom{1}{4}+\binom{3}{4} = +2\ ,93\,; & [\Delta^2] &= 167\ ,096\,;
\end{aligned}
$$

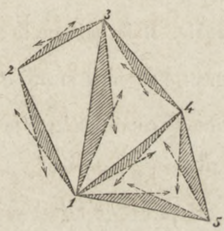
et par suite $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{167{,}096}{3}} = \sqrt{55{,}6987} = \pm 7'',46.$

L'erreur moyenne d'un angle est donc $\varepsilon\sqrt{2} = \pm 10'',55$. On voit qu'elle est supérieure à celle du § 140, calculée dans l'hypothèse qu'une seule et même direction, commune à deux triangles, pouvait subir des corrections différentes, suivant qu'elle appartenait à l'un ou à l'autre de ces triangles.

Les résultats de nos calculs peuvent être consignés dans un tableau de la forme suivante :

Triangles.	Sommets.	Angles mesurés.	Corrections Δ.	Angles corrigés.
(I)	1	36° 25′ 47″	— 5″,28	41″,72
	2	90 36 28	— 1 ,42	26 ,58
	3	52 57 57	— 5 ,28	51 ,72
				0 ,02
(II)	3	50 26 13	+ 8 ,43	21 ,43
	4	87 29 25	+ 2 ,93	27 ,93
	1	42 4 7	+ 3 ,64	10 ,64
				0 ,00
(III)	4	70 43 28	+ 5 ,72	33 ,72
	5	56 19 37	+ 9 ,58	46 ,58
	1	52 56 34	+ 5 ,72	39 ,72
				0 ,02.

Il est inutile de faire observer que, dans la dernière colonne, les petits excès 0″,02 proviennent de ce qu'on a arrondi les fractions décimales.



Dans la figure ci-contre, nous avons ponctué les directions observées, et marqué en traits pleins les directions compensées. On voit que les petits triangles d'erreur sont encore isocèles, mais que maintenant ils ne sont plus semblables.

Remarquons que, dans le cas actuel, où les angles ont été observés *par différence* avec une direction azimutale initiale (ou sont traités comme tels), on ne peut plus, comme au § 140, poser une équation de condition relative au tour d'horizon; car elle est remplie naturellement par la méthode d'observation ou de compensation. C'est ce qui résulte d'ailleurs de la forme de l'équation elle-même qui, dans l'exemple cité, conduirait à l'absurdité

$$0 = +20 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{1} + \binom{4}{1} - \binom{4}{1} + \binom{5}{1} - \binom{5}{1} + \binom{2}{1} = 20.$$

Nous aurons encore occasion de faire une remarque analogue, pour le cas où le point 1 appartiendrait à un réseau qui *se fermerait* autour de lui.

§ **146.** — 1° La compensation des angles, au moyen des directions individuelles de leurs côtés, est toujours à recommander dès que l'on considère plus de deux directions; car elle repose sur ce principe, que l'observateur a toujours *voulu* pointer sur un seul et même point du signal, quel que soit l'angle auquel il appartienne. Dans ce cas les erreurs commises sur la somme des trois angles des triangles ne doivent plus être réparties *également;* il peut même arriver que la répartition se fasse avec des signes contraires.

2° Les équations corrélatives et normales nous montrent d'une manière générale que les corrections réciproques d'une même direction sont égales et de signes contraires. En effet, si la correction $\binom{2}{1}$, par exemple, apparaît avec le signe *moins* dans la première équation de condition (ce qui donne $\binom{2}{1} = -k_1$ pour la première équation corrélative), c'est que la direction $\frac{2}{1}$ est le côté gauche d'un angle. Mais puisque le triangle est fermé, la direction $\frac{1}{2}$ sera le côté droit d'un autre angle; donc $\binom{1}{2}$ apparaîtra dans la première équation de condition avec le signe *plus*, d'où résulte une équation corrélative $\binom{1}{2} = +k_1$.

Il en est de même pour les directions qui sont communes à plusieurs triangles, comme $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{1}$; seulement alors il y a lieu de considérer plusieurs équations corrélatives et plusieurs coefficients corrélatifs.

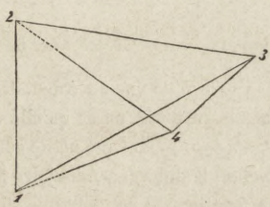
3° L'inspection des équations corrélatives montre que la somme des corrections de direction doit toujours être nulle, pour un même point de station. Pour la station 1, par exemple, nous avons

$$\begin{aligned}
\binom{2}{1} &= -\,k_1 \\
\binom{3}{1} &= +\,k_1 - k_2 \\
\binom{4}{1} &= + k_2 - k_3 \\
\binom{5}{1} &= + k_3.
\end{aligned}$$

La raison géométrique de ce fait est encore que, dans chaque triangle, une direction de gauche correspond toujours à une direction de droite, qui lui est opposée.

§ 147. — Occupons-nous maintenant d'une autre espèce d'équations de condition, ayant pour but de faire disparaître les contradictions qui existent entre les rapports de certaines lignes, lorsque le calcul de celles-ci repose sur des observations qui ont besoin d'être corrigées. Nous les nommerons *équations aux côtés*, réservant à celles qui viennent de nous occuper le nom d'*équations aux angles*. Soit un triangle plan 1 2 3, supposé parfaitement exact : ses angles sont

$$\begin{aligned}
\underset{1}{2\,.\,3} &= 60^\circ\ 39'\ 32'' \\
\underset{2}{3\,.\,1} &= 81\ \ \ 9\ \ \ 0 \\
\underset{3}{1\,.\,2} &= 38\ \ 11\ \ 28.
\end{aligned}$$



Pour fixer la position du point 4, on a mesuré les angles

$$\underset{4}{1\,.\,2} = 55^\circ\ 38'\ 2'', \text{ et } \underset{4}{2\,.\,3} = 112^\circ\ 32'\ 52''.$$

En outre, on a pris au point 3 une direction de vérification $\frac{4}{3}$, qui a donné l'angle $\underset{3}{4\,.\,2} = 45^\circ\ 54'\ 4''$.

Puisque nous considérons le triangle de base 1 2 3 comme parfaitement exact, la compensation a ici pour but de trouver les quatre corrections de direction $\binom{1}{4}$, $\binom{2}{4}$, $\binom{3}{4}$ et $\binom{4}{3}$. Partons de l'identité

$$\frac{2\,.\,1}{2\,.\,4} \times \frac{2\,.\,4}{2\,.\,3} \times \frac{2\,.\,3}{2\,.\,1} = 1\,;$$

nous pouvons, sous la réserve des corrections ultérieures à faire aux angles, en déduire l'équation

$$\sin \overset{1\,.\,2}{\underset{4}{}} \times \sin \overset{4\,.\,2}{\underset{3}{}} \times \sin \overset{2\,.\,3}{\underset{1}{}} = \sin \overset{2\,.\,4}{\underset{1}{}} \times \sin \overset{2\,.\,3}{\underset{4}{}} \sin \times \overset{1\,.\,2}{\underset{3}{}}.$$

Deux de ces six angles doivent être considérés comme exacts ; trois autres ont été mesurés et doivent être corrigés; enfin le sixième doit d'abord être calculé en fonction des angles observés, et ensuite être corrigé d'après eux.

Or on a $\quad \overset{2\,.\,4}{\underset{1}{}} = 360^\circ - \overset{1\,.\,3}{\underset{4}{}} - \overset{4\,.\,2}{\underset{3}{}} - \overset{3\,.\,1}{\underset{2}{}}\,;$

et en outre

$$\begin{aligned}
\overset{1\,.\,3}{\underset{4}{}} &= 168^\circ\ 10'\ 54'' - \tbinom{1}{4} + \tbinom{3}{4} \\
\overset{4\,.\,2}{\underset{3}{}} &= \ \ 45\ \ \ 54\ \ \ \ 4\ \ - \tbinom{4}{3} \\
\overset{3\,.\,1}{\underset{2}{}} &= \ \ 81\ \ \ \ \ 9\ \ \ \ 0 \\
\hline
& \ \ \ 295^\circ\ 13'\ 58'' - \tbinom{1}{4} - \tbinom{4}{3} + \tbinom{3}{4}
\end{aligned}$$

d'où $\quad \overset{2\,.\,4}{\underset{1}{}} = 64^\circ\ 46'\ \ 2'' + \binom{1}{4} + \binom{4}{3} - \binom{3}{4}.$

Au point de vue du calculateur, faisons ici une remarque très-utile dans la pratique, en ce qu'elle évite les différentiations. Si l'on donne $A = N + x$ (x étant une petite correction), on aura $\log A = \log N + \Delta x$, Δ étant la différence tabulaire pour une unité de N, et x étant exprimé en fonction de cette unité. Si donc A est un angle, on posera, par exemple, $\log \sin (N + x) = \log \sin N + \Delta x$; la quantité x étant exprimée en minutes, et Δ étant la différence tabulaire pour une minute. — D'après cela il vient :

$$\begin{aligned}
\log \sin \overset{1\,.\,2}{\underset{4}{}} &= 9{,}91669 - \ 8 \tbinom{1}{4} + 8 \tbinom{2}{4} \\
\log \sin \overset{4\,.\,2}{\underset{3}{}} &= 9{,}85621 - 12 \tbinom{4}{3} \\
\log \sin \overset{2\,.\,3}{\underset{1}{}} &= 9{,}94038 \\
\hline
\text{»} \quad & \ \ \ 9{,}71328 - \ 8 \tbinom{1}{4} + 8 \tbinom{2}{4} - 12 \tbinom{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\log \sin \genfrac{}{}{0pt}{}{2\,.\,4}{1} = 9{,}95645 + 6\binom{1}{4} + 6\binom{4}{3} - 6\binom{3}{4}$$

$$\log \sin \genfrac{}{}{0pt}{}{2\,.\,3}{4} = 9{,}96547 + 5\binom{2}{4} - 5\binom{3}{4}$$

$$\log \sin \genfrac{}{}{0pt}{}{1\,.\,2}{3} = 9{,}79119$$

$$\text{»} \qquad 9{,}71311 + 6\binom{1}{4} + 5\binom{2}{4} - 11\binom{3}{4} + 6\binom{4}{3}.$$

L'équation de condition est donc

$$0 = +17 - 14\binom{1}{4} + 3\binom{2}{4} + 11\binom{3}{4} - 18\binom{4}{3}.$$

Équations corrélatives :

$$\binom{1}{4} = -14\,k_1$$

$$\binom{2}{4} = +3\,k_1$$

$$\binom{3}{4} = +11\,k_1$$

$$\binom{4}{3} = -18\,k_1.$$

Équation normale :

$$0 = +17 + 650\,k_1.$$

D'où $\quad k_1 = -0{,}026154\,;\quad \binom{1}{4} = +0',3662 = +22''$

$$\binom{2}{4} = -0{,}0785 = -5$$

$$\binom{3}{4} = -0{,}2877 = -17$$

$$\binom{4}{3} = +0{,}4708 = +28.$$

Les angles corrigés sont donc

$\genfrac{}{}{0pt}{}{1\,.\,2}{4} = 55^\circ\,37'\,35''\,;\quad \genfrac{}{}{0pt}{}{2\,.\,3}{4} = 112^\circ\,32'\,40''\,;\quad \genfrac{}{}{0pt}{}{4\,.\,2}{3} = 45^\circ\,53'\,36'',$

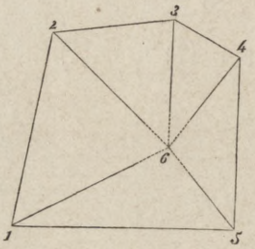
et l'angle qu'ils servent à calculer est $\quad \genfrac{}{}{0pt}{}{2\,.\,4}{1} = 64\;\;47\;\;\;9.$

Au moyen de ces valeurs, les logarithmes corrigés sont

9,94665	9,95652
9,85615	9,96548
9,94038	9,79119
9.71318	9,71319.

Résultats concordants à la dernière décimale près, laquelle n'est jamais sûre. — Tous les côtés que l'on calculera dans la figure auront maintenant la même valeur, quel que soit le triangle dont on les déduira.

§ 148. — *Autre exemple.* — Il arrive fréquemment, dans les travaux topographiques ou géodésiques, que l'on doit déterminer très-exactement la position d'un point inaccessible. Dans ce cas, il faut rayonner sur lui de trois stations au moins, et compenser ensuite les directions qui y aboutissent.



Supposons, par exemple, qu'un polygone 1 2 3 4 5 ait été levé, et qu'on veuille lui rattacher un sommet géodésique, 6, où l'on ne peut stationner. Dans ce but, on a recoupé le point 6 de tous les sommets du polygone, et l'on a obtenu

$$\underset{1}{6\,.\,5} = 25^\circ\,47'\,23''$$
$$\underset{2}{6\,.\,1} = 56\;\;31\;\;22$$
$$\underset{3}{6\,.\,2} = 85\;\;28\;\;57$$
$$\underset{4}{6\,.\,3} = 83\;\;12\;\;39$$
$$\underset{5}{6\,.\,4} = 41\;\;16\;\;15.$$

Les angles du polygone, que l'on suppose parfaitement exacts, sont d'ailleurs

$$\underset{1}{2\,.\,5} = 76^\circ\;\;0'\,17''$$
$$\underset{2}{3\,.\,1} = 105\;\;23\;\;24$$
$$\underset{3}{4\,.\,2} = 147\;\;26\;\;59$$
$$\underset{4}{5\,.\,3} = 121\;\;37\;\;46$$
$$\underset{5}{1\,.\,4} = 89\;\;31\;\;34;$$

d'où l'on déduit par le calcul

$$\begin{array}{ll}
\overset{1\,.\,6}{\underset{5}{}} = 48^\circ\,15'\,19'' & \overset{5\,.\,1}{\underset{6}{}} = 105^\circ\,57'\,18'' \\
\overset{2\,.\,6}{\underset{1}{}} = 50\;\;12\;\;54 & \overset{1\,.\,2}{\underset{6}{}} = \;\;73\;\;15\;\;44 \\
\overset{3\,.\,6}{\underset{2}{}} = 48\;\;52\;\;\;2 & \overset{2\,.\,3}{\underset{6}{}} = \;\;45\;\;39\;\;\;1 \\
\overset{4\,.\,6}{\underset{3}{}} = 61\;\;58\;\;\;2 & \overset{3\,.\,4}{\underset{6}{}} = \;\;34\;\;49\;\;19 \\
\overset{5\,.\,6}{\underset{4}{}} = 38\;\;25\;\;\;7 & \overset{4\,.\,5}{\underset{6}{}} = 100\;\;18\;\;38\,. \\
\hline
 & \qquad 360\;\;\;0\;\;\;0\,.
\end{array}$$

Pour corriger les directions aboutissant au point 6, nous partons de l'identité

$$\frac{6\,.\,5}{6\,.\,1} \times \frac{6\,.\,1}{6\,.\,2} \times \frac{6\,.\,2}{6\,.\,3} \times \frac{6\,.\,3}{6\,.\,4} \times \frac{6\,.\,4}{6\,.\,5} = 1\,;$$

et calculant comme dans l'exemple précédent, nous trouvons

$$\begin{array}{ll}
\log\sin \overset{6\,.\,5}{\underset{1}{}} = 9{,}63856 - 26\binom{6}{1} & \mathrm{l.}\sin \overset{1\,.\,6}{\underset{5}{}} = 9{,}87280 + 11\binom{6}{5} \\
\log\sin \overset{6\,.\,1}{\underset{2}{}} = 9{,}92122 - \;\;8\binom{6}{2} & \mathrm{l.}\sin \overset{2\,.\,6}{\underset{1}{}} = 9{,}88562 + 11\binom{6}{1} \\
\log\sin \overset{6\,.\,2}{\underset{3}{}} = 9{,}99865 - \;\;1\binom{6}{3} & \mathrm{l.}\sin \overset{3\,.\,6}{\underset{2}{}} = 9{,}87690 + 11\binom{6}{2} \\
\log\sin \overset{6\,.\,3}{\underset{4}{}} = 9{,}99694 - \;\;2\binom{6}{4} & \mathrm{l.}\sin \overset{4\,.\,6}{\underset{3}{}} = 9{,}94580 + \;\;7\binom{6}{3} \\
\log\sin \overset{6\,.\,4}{\underset{5}{}} = 9{,}81929 - 14\binom{6}{5}. & \mathrm{l.}\sin \overset{5\,.\,6}{\underset{4}{}} = 9{,}79337 + 16\binom{6}{4}. \\
\hline
\qquad 9{,}37466. & \qquad 9{,}37449.
\end{array}$$

L'équation de condition est donc

$$0 = +17 - 37\binom{6}{1} - 19\binom{6}{2} - 8\binom{6}{3} - 18\binom{6}{4} - 25\binom{6}{5}\,;$$

qui nous conduit à l'équation normale

$$0 = +17 + 2743\,k_1\,,$$
$$k_1 = -0{,}006\,1976$$

Il en résulte

$$\binom{6}{1} = +0',22931 = +14''$$
$$\binom{6}{2} = +0',11775 = +\;\;7$$

$$\binom{6}{3} = +\,0',04958 = +\;\;3''$$
$$\binom{6}{4} = +\,0\;,11156 = +\;\;7$$
$$\binom{6}{5} = +\,0\;,15494 = +\;\;9\;;$$

ce qui donne en définitive pour les angles

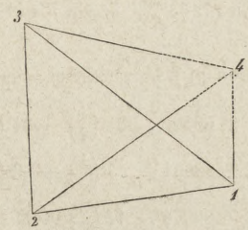
corrigés.		calculés.	
$\underset{1}{6\,.\,5}$	$= 25^\circ\,47'\;\;9''$	$\underset{5}{1\,.\,6}$	$= 48^\circ\,15'\,28''$
$\underset{2}{6\,.\,1}$	$= 56\;\;31\;\;15$	$\underset{1}{2\,.\,6}$	$= 50\;\;13\;\;\;8$
$\underset{3}{6\,.\,2}$	$= 85\;\;28\;\;54$	$\underset{2}{3\,.\,6}$	$= 48\;\;52\;\;\;9$
$\underset{4}{6\,.\,3}$	$= 83\;\;12\;\;32$	$\underset{3}{4\,.\,6}$	$= 61\;\;58\;\;\;5$
$\underset{5}{6\,.\,4}$	$= 41\;\;16\;\;\;6$	$\underset{4}{5\,.\,6}$	$= 38\;\;25\;\;14.$

Si l'on recommence les calculs avec ces éléments, les résultats devront s'accorder, à la dernière décimale près ; c'est-à-dire que les rapports entre les côtés de la figure resteront les mêmes, quels que soient les triangles qui aient servi à les calculer.

La compensation des directions allant vers le point 6 a pour résultat de les faire passer *toutes* simultanément par ce point : si donc les angles avaient été observés en cette station, l'équation de condition relative au tour d'horizon aurait été superflue ; car elle est nécessairement satisfaite lorsque toutes les directions passent exactement par le point 6.

Avant qu'on eût introduit en géodésie le calcul des compensations, on vérifiait l'exactitude des opérations, en mesurant *toujours* les trois angles des triangles principaux : on était donc forcé parfois de ne pas être trop sévère dans la manière d'établir l'instrument au point de station. Mais aujourd'hui, l'expérience a prouvé qu'un bon établissement est essentiel à l'exactitude des observations ; et d'ailleurs la méthode des compensations permet de juger de la précision du travail, mieux que la fermeture des triangles à 180°. Il est donc prudent, chaque fois que certains sommets principaux d'une triangulation ne fournissent pas un bon établissement, de les rejeter comme *stations*, pourvu qu'on puisse les relier, comme *signaux*, au reste du système, en visant sur eux de *trois* autres sommets au moins. On juge alors de l'exactitude des opérations en compensant les directions et en cherchant l'erreur moyenne ; et si le point à déterminer est très-important, on n'admet plus comme rigoureusement exactes les directions entre les points de station, mais on les compense *toutes* par un seul et même calcul.

§ **149.** — L'exemple suivant fournit à la fois les deux espèces d'équations de condition, que nous avons, dans ce qui précède, considérées séparément.



Supposons que le sommet 4 ne puisse servir de station : il a été observé des points 1, 2, 3 et l'on a obtenu les directions suivantes :

DIRECTIONS OBSERVÉES.

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2 . A	3 . A	4 . A
3 . A + 47° 35′ 26″	4 . A + 53° 37′ 20″	1 . A + 24° 28′ 45″
4 . A + 95 23 17	1 . A + 81 10 42	2 . A + 75 42 25.

Nous avons donc d'abord un triangle formé par les points 1, 2, 3; et, pour abréger, nous le considérons comme plan. Il donne

$$\overset{2\ .\ 3}{\underset{1}{}} = 47^\circ\, 35'\, 26''$$

$$\overset{3\ .\ 1}{\underset{2}{}} = 81\quad 10\quad 42$$

$$\overset{1\ .\ 2}{\underset{3}{}} = 51\quad 13\quad 40$$

$$\overline{179\quad 59\quad 48;}$$

différence à 180° = — 12″ = — 0′,2. La *première* équation de condition est donc

$$0 = -\,0{,}2 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}.$$

Pour avoir la seconde, nous poserons l'identité

$$\frac{4\ .\ 1}{4\ .\ 2} \times \frac{4\ .\ 2}{4\ .\ 3} \times \frac{4\ .\ 3}{4\ .\ 1} = 1\,;$$

c'est-à-dire que nous devrions avoir, si toutes les directions étaient parfaitement exactes,

$$\sin\frac{4.1}{2}\times\sin\frac{4.2}{3}\times\sin\frac{3.4}{1}=\sin\frac{2.4}{1}\times\sin\frac{3.4}{2}\times\sin\frac{4.1}{3};$$

ou bien, en nombres,

$$\sin 27^\circ 33' 22'' \times \sin 75^\circ 42' 25'' \times \sin 47^\circ 47' 51'' = \sin 95^\circ 23' 17''$$
$$\times \sin 53^\circ 27' 20'' \times \sin 24^\circ 28' 45''.$$

Prenant les logarithmes, comme nous l'avons fait ci-dessus :

$$\begin{array}{ll} 9,66522 - 24\binom{4}{2} + 24\binom{1}{2} & 9,99808 - 1\binom{4}{1} + 1\binom{2}{1} \\ 9,98634 - 3\binom{4}{3} + 3\binom{2}{3} & 9,90586 - 9\binom{3}{2} + 9\binom{4}{2} \\ \underline{9,86968} - 11\binom{3}{1} + 11\binom{4}{1}. & \underline{9,61738} - 28\binom{4}{3} + 28\binom{1}{3}. \\ 9,52124. & 9,52132. \end{array}$$

Notre *seconde* équation de condition est donc

$$0 = +8 + 1\binom{2}{1} + 11\binom{3}{1} - 12\binom{4}{1} - 24\binom{1}{2} - 9\binom{3}{2} + 33\binom{4}{2}$$
$$+ 28\binom{1}{3} - 3\binom{2}{3} - 25\binom{4}{3}.$$

Ces deux équations de condition conduisent aux équations corrélatives

$$\begin{array}{lll} \binom{2}{1} = -k_1 + k_2 & \binom{1}{2} = +k_1 - 24k_2 & \binom{1}{3} = -k_1 + 28k_2 \\ \binom{3}{1} = +k_1 + 11k_2 & \binom{3}{2} = -k_1 - 9k_2 & \binom{2}{3} = +k_1 - 3k_2 \\ \binom{4}{1} = \quad -12k_2 & \binom{4}{2} = \quad +33k_2 & \binom{4}{3} = \quad -25k_2. \end{array}$$

Pour avoir les équations normales, nous formons d'abord

$$\begin{aligned} [aa] &= +6 \\ [ab] &= -36 \\ [bb] &= +3430; \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= -0,2 + 6k_1 - 36k_2 \\ 0 &= +8 - 36k_1 + 3430k_2; \end{aligned}$$

d'où nous déduisons par élimination

$$k_1 = +0,02064; \quad k_2 = -0,00212;$$

ce qui donne en définitive :

$$\binom{2}{1} = -1'',37 \;\ldots\; \binom{1}{2} = +4'',29 \;\ldots\; \binom{1}{3} = -4'',80$$
$$\binom{3}{1} = -0\,,16 \;\ldots\; \binom{3}{2} = -0\,,09 \;\ldots\; \binom{2}{3} = +1\,,62$$
$$\binom{4}{1} = +1\,,53 \;\ldots\; \binom{4}{2} = -4\,,20 \;\ldots\; \binom{4}{3} = +3\,,18.$$

Telles sont les corrections à faire subir aux directions. Pour simplifier, nous pouvons supposer que l'azimut indéterminé, que nous avons désigné par A, reste encore A après la correction ; ce qui revient à retrancher de chaque correction celle qui est relative à l'azimut initial correspondant. Il vient par ce moyen

$$\binom{2}{1} = 0 \;\ldots\; \binom{1}{2} = +4'',38 \;\ldots\; \binom{1}{3} = -7'',98$$
$$\binom{3}{1} = +1'',21 \;\ldots\; \binom{3}{2} = 0 \;\ldots\; \binom{2}{3} = -1\,,56$$
$$\binom{4}{1} = +2\,,90 \;\ldots\; \binom{4}{2} = -4\,,11 \;\ldots\; \binom{4}{3} = 0.$$

Nous avons donc :

DIRECTIONS COMPENSÉES.

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2.A	... 3.A	... 4.A
3.A+47°35′27″,21	... 4.A+53°27′15″,89	... 1.A+24°28′37″,02
4.A+95 23 19 ,90	... 1.A+81 10 46 ,38	... 2.A+75 42 23 ,44.

Lorsqu'il faut relier ce système à d'autres, il reste encore à faire une opération, étrangère, si l'on veut, au calcul des compensations : c'est l'*orientation*, ou la détermination de l'un des A précédents.

Supposons que, pour la station 2, on ait eu A = 273° 39′ 50″ : les deux autres directions, pour cette station, s'obtiendront par la simple substitution de ce nombre. Pour la station 1, il suffit (toujours dans l'hypothèse d'un système plan) d'ajouter 180° à la direction $\frac{1}{2}$, pour avoir la direction $\frac{2}{1}$, qui est le A de cette première station. Enfin, la direction $\frac{4}{3} = 180° + \frac{3}{1} - \frac{4\,.\,1}{3}$, ou bien $= 180° + \frac{3}{2} - \frac{4\,.\,2}{3}$

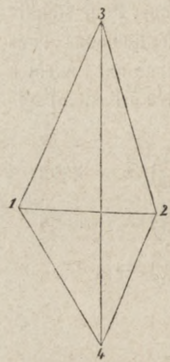
On a donc :

DIRECTIONS DÉFINITIVES.

Station 1.	Station 2.	Station 3.
2 . 174° 50′ 36″,38	... 3 . 273° 39′ 50″,00	... 4 . 17° 57′ 26″,56
3 . 222 26 3 ,59	... 4 . 327 7 5 ,89	... 1 . 42 26 3 ,58
4 . 270 13 56 ,28	... 1 . 354 50 36 ,38	... 2 . 93 39 50 ,00.

Observons que, dans la pratique, lorsque l'on veut obtenir la précision de la seconde, il faut employer les tables à 7 décimales pour calculer les termes connus des équations de condition.

Si l'on avait pu stationner au point 4, on aurait fermé deux triangles de plus, et obtenu deux nouvelles équations de condition *aux angles*. Ce cas se présente fréquemment au commencement d'une triangulation : on relie la base *mesurée*, 1 . 2, à deux autres points, 3, 4, situés dans une direction à peu près perpendiculaire à la première ; on observe tous les angles de la figure 1, 2, 3, 4, et la longueur 3 . 4 forme la *base calculée*. On la relie aux sommets adjacents de la triangulation par des triangles aussi bien conformés que possible.



La compensation du système 1, 2, 3, 4 offre donc ici *trois* équations aux angles, et *une* équation aux côtés ; mais, sauf cette différence, le problème est identique avec celui que nous venons de résoudre.

§ **150**. — Prenons enfin un exemple facile dans lequel se rencontrent à la fois des mesures linéaires et des mesures angulaires.

On a observé les éléments suivants du triangle 1 2 3.

$\underset{1}{2\,.\,3} = 57^\circ 55'$	$2\,.\,3 = 69^m,8$
$\underset{2}{3\,.\,1} = 46\ \ 40$	$3\,.\,1 = 60\ \ ,4$
$\underset{3}{1\,.\,2} = 75\ \ 36$	$1\,.\,2 = 80\ \ ,1.$

Ici, comme nous avons des quantités hétérogènes à traiter, il faut commencer par chercher l'erreur moyenne de chaque espèce de mesure. Supposons, pour simplifier, qu'elle soit de $1'$ pour les angles et de $0^m,1$ pour les côtés : alors il nous suffira, comme nous l'avons vu déjà (§ 121), d'exprimer les grandeurs linéaires en décimètres, et de traiter des erreurs comme de simples *nombres* inconnus.

Notre première équation de condition, par rapport aux angles, est

$$0 = +11 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}.$$

De plus, en divisant les côtés par les sinus des angles opposés, on devra obtenir des quotients égaux.

$$
\begin{array}{rcl}
\log 2\,.\,3 & = & 2,84386 + 62,5\,(2\,.\,3) \\
\log\sin {}^{2\,.\,3}_{\;1} & = & 9,92803 - 7,5\binom{2}{1} + 7,5\binom{3}{1} \\
\hline
 & & 2,91583 + 62,5\,(2\,.\,3) + 7,5\binom{2}{1} - 7,5\binom{3}{1}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log 3\,.\,1 & = & 2,78104 + 72\,(3\,.\,1) \\
\log\sin {}^{3\,.\,1}_{\;2} & = & 9,86176 - 12\binom{3}{2} + 12\binom{1}{2} \\
\hline
 & & 2,91928 + 72\,(3\,.\,1) + 12\binom{3}{2} - 12\binom{1}{2}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\log 1\,.\,2 & = & 2,90363 + 54\,(1\,.\,2) \\
\log\sin {}^{1\,.\,2}_{\;3} & = & 9,98614 - 3,5\binom{1}{3} + 3,5\binom{2}{3} \\
\hline
 & & 2,91749 + 54\,(1\,.\,2) + 3,5\binom{1}{3} - 3,5\binom{2}{3}.
\end{array}
$$

Retranchant du second résultat le premier et le troisième, nous aurons deux nouvelles équations de condition, que nous multiplions par 2, pour chasser les décimales de la dernière; il viendra donc :

$$0 = +11 - \binom{2}{1} + \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{1}{2} - \binom{1}{3} + \binom{2}{3}$$

$$0 = +690 + 144\,(3\,.\,1) - 125\,(2\,.\,3) + 24\binom{3}{2} - 24\binom{1}{2} - 15\binom{2}{1} + 15\binom{3}{1}$$

$$0 = +358 + 144\,(3\,.\,1) - 108\,(1\,.\,2) + 24\binom{3}{2} - 24\binom{1}{2} - 7\binom{1}{3} + 7\binom{2}{3}.$$

Les équations corrélatives sont donc

$$
\begin{array}{lll}
\binom{2}{1} = -k_1 - 15k_2 & \binom{1}{2} = +k_1 - 24k_2 - 24k_3 & (1\,.\,2) = -108k_3 \\
\binom{3}{1} = +k_1 + 15k_2 & \binom{1}{3} = -k_1 \qquad\quad - 7k_3 & (2\,.\,3) = -125k_2 \\
\binom{3}{2} = -k_1 + 24k_2 + 24k_3 & \binom{2}{3} = +k_1 \qquad\quad + 7k_3 & (3\,.\,1) = +144k_2 + 144k_3.
\end{array}
$$

On a d'ailleurs

$$
\begin{array}{lcl}
[aa] = + 6 & \qquad & [bb] = + 37963 \\
[ab] = - 18 & & [bc] = + 21888 \\
[ac] = - 34 & & [cc] = + 33650 ;
\end{array}
$$

et les équations normales sont

$$
\begin{aligned}
0 &= +\ 11 + 6k_1 - 18k_2 - 34k_3 \\
0 &= +\ 690 - 18k_1 + 37963k_2 + 21888k_3 \\
0 &= +\ 358 - 34k_1 + 21888k_2 + 33650k_3.
\end{aligned}
$$

L'élimination donne

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\ 1{,}8912 \\
k_2 &= -\ 0{,}01894 \\
k_3 &= -\ 0{,}000203\,;
\end{aligned}
$$

et la substitution dans les équations corrélatives

$$\binom{2}{1} = -\binom{3}{1} = +2'10'',5 \ldots \binom{3}{2} = -\binom{1}{2} = +1'25'',9 \ldots \binom{1}{3} = -\binom{2}{3} = +1'53'',6$$

$$(1\,.\,2) = +0{,}0219 \qquad (2\,.\,3) = +2{,}3675 \qquad (3\,.\,1) = -2{,}7566.$$

Appliquant ces corrections, nous obtiendrons pour éléments du triangle compensé :

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{2\,.\,3}{1} = 57^\circ\,50'\,39'' & \qquad & 2\,.\,3 = 70^m{,}0368 \\[2ex]
\dfrac{3\,.\,1}{2} = 46\ \ 37\ \ \ 8 & & 3\,.\,1 = 60\ {,}1243 \\[2ex]
\dfrac{1\,.\,2}{3} = 75\ \ 32\ \ 13 & & 1\,.\,2 = 80\ {,}1022. \\
\hline
\phantom{\dfrac{1}{1} = }180\ \ \ 0\ \ \ 0. & &
\end{array}
$$

§ **151.** — La compensation des observations conditionnelles mérite toute notre attention, à cause des applications fréquentes qu'elle trouve dans la haute topographie et dans la géodésie. Les exemples précédents nous ont montré comment on peut, dans les cas les plus simples, former les équations de condition et les traduire en nombres. Mais dès que le problème se complique, il arrive très-souvent que l'on omet certaines équations nécessaires, ou que l'on en pose de superflues. Il est donc intéressant de savoir déterminer, *à priori*, quel est le nombre d'équations de condition, indépendantes les unes des autres, qui doivent exister en général entre un certain nombre de données d'observation.

La question comporte trois cas différents, suivant que les données d'observation renferment des mesures angulaires seulement, ou des mesures linéaires seulement, ou enfin des mesures angulaires jointes à des mesures linéaires. Nous ne nous occuperons que du premier de ces trois cas, parce qu'il est le plus important pour nous, et que les deux autres s'y ramèneraient facilement, au moyen de légères modifications.

Les observations angulaires peuvent offrir trois classes d'équations de condition.

La *première classe* se présente lorsqu'on a observé tous les angles simples qui forment un tour d'horizon. Le nombre de ces équations est si facile à reconnaître, leur formation est si simple, que nous nous dispenserons d'en rien dire, renvoyant toutefois aux deux remarques faites (§§ 145 et 148).

On obtient des équations de condition de *seconde classe*, celles que nous avons nommées équations aux angles (*Winkelgleichungen* des auteurs allemands), lorsqu'on a *observé* les angles aux sommets d'un polygone fermé; car la théorie permet de *calculer* la somme de ces angles. Le nombre d'équations de condition de cette espèce repose sur le théorème suivant, dû à Gauss :

« Lorsque p points formant système sont reliés réciproquement « par l lignes, le nombre d'équations aux angles qu'offre le système « est égal à $l - p + 1$. »

Supposons d'abord p points reliés deux à deux par p lignes : ils formeront un polygone fermé qui donnera *une* équation de condition, relative à la somme de ses angles intérieurs.

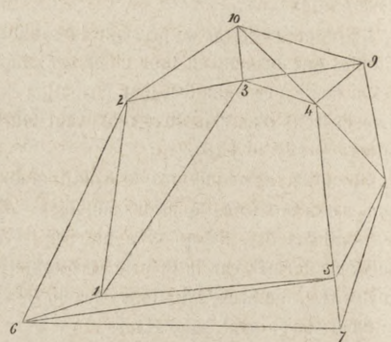
A ces p lignes, que nous pouvons considérer comme formant le *contour* du polygone, ajoutons une *diagonale* quelconque : elle divisera le polygone en deux autres, et fournira *deux* nouvelles équations de condition aux angles; mais, par ce fait, la première équation sera annulée; car elle est évidemment satisfaite lorsque les deux autres le sont.

Chaque nouvelle diagonale amènera ainsi une nouvelle équation, de sorte que tout système linéaire, contenant u lignes de trop, offrira $(u + 1)$ équations aux angles.

Soit donc l le nombre de lignes que présente le système; p le nombre de points qu'elles relient deux à deux : on a $u = l - p$; et le nombre d'équations de condition devient $l - p + 1$.

l doit être *au moins* égal à p, et *au plus* égal à $\frac{p(p-1)}{2}$: le nombre d'équations aux angles est donc *au moins* de une, et *au plus* de $\frac{p(p-3)}{2} + 1$.

Dans la figure ci-jointe, par exemple, on a $p = 10$, $l = 21$: il y a donc 12 équations aux angles. Une fois leur nombre connu, on n'éprouvera pas grande difficulté à les former : ainsi, en procédant à partir de la ligne 3 . 10, et en marchant circulairement vers la gauche, on trouvera, jusqu'à la ligne 4 . 9, une chaîne de *huit* triangles contigus, qui doivent se fermer à 180°. Reste encore à découvrir quatre équations de condition.



Le petit quadrilatère 3 . 4 . 9 . 10, entre les sommets duquel il existe six lignes, en fournira trois, qui se déduiront de la fermeture à 180° de trois quelconques des quatre triangles ayant mêmes sommets que le quadrilatère.

Enfin la dernière équation de condition est donnée par le quadrilatère 1 . 3 . 4 . 5, dont la somme des angles doit former 360°.

L'expression numérique de ces douze équations n'offrirait rien de particulier.

Enfin nous avons dit déjà que les équations de condition de *troisième classe* (équations aux côtés, *Seitengleichungen*) ont pour but de corriger les angles observés, de manière à les rendre compatibles entre eux, sous le rapport des longueurs relatives des côtés que ces angles servent à calculer. Par ce moyen on obtiendra, pour une longueur relative quelconque, des valeurs identiques, quels que soient les angles qui aient servi à la calculer.

Pour trouver le nombre des équations aux côtés que présente un système linéaire, nous emploierons un second théorème dû à Gauss, savoir :

« Si p points d'une triangulation sont reliés par l lignes (dont les « directions ne sont observées qu'à une seule extrémité), il y a « $l - 2p + 3$ lignes de trop ; ce qui conduit à $l - 2p + 3$ équa- « tions de condition aux côtés. »

Prenons d'abord deux points du système : la direction de la ligne qui les joint est nécessaire pour *orienter* le système, ou pour le *relier* à un autre.

Un troisième point, pour être relié trigonométriquement aux deux premiers, demande qu'on mesure deux nouvelles directions ; et chaque nouveau point exige deux directions nouvelles et n'en exige que deux (dont une au moins doit être rapportée, médiatement ou immédiatement, à la direction initiale).

Par conséquent, pour déterminer trigonométriquement un système de p points, il faut $2(p-2)$ directions, outre la direction initiale, qui sert à l'orientation ; donc $2p-3$ lignes.

Chaque ligne que l'on ajoutera maintenant aux précédentes donnera lieu à une équation de condition aux côtés, puisque sa longueur peut se calculer indépendamment de toute nouvelle donnée. Si donc on a mené l lignes entre les p points, il existera $l-2p+3$ équations aux côtés.

Ce qui précède suppose que chaque ligne surabondante n'a été observée qu'à une seule de ses extrémités : si elle l'avait été aux deux, elle donnerait lieu *en outre*, comme nous le savons déjà, à une équation aux angles.

Les trois premiers points du réseau exigent *au moins* trois directions, et les $(p-3)$ restants, $2(p-3)$; il s'ensuit que l est *au moins* égal à $2p-3$: il est d'ailleurs égal *au plus* à $\frac{p(p-1)}{2}$ donc le nombre des équations aux côtés peut varier depuis zéro jusqu'à $\frac{p(p-5)}{2}+3$.

Posons ce dernier nombre égal à l'unité : il vient $p=4$ (nous rejetons la racine $p=1$, qui ne peut s'appliquer à aucun système de points). Il faut donc au moins *quatre* points reliés par *six* lignes, pour qu'il y ait lieu à rechercher les équations de condition de la troisième classe.

Après avoir calculé le nombre d'équations de condition de chaque espèce qui doivent exister dans un système de triangles, il faudra former chacune d'elles, sans commettre d'omission ni de double emploi ; et ce travail ne laisse pas quelquefois de présenter des difficultés. La marche la plus sûre sera de parcourir le réseau, en partant de la base, et en suivant de proche en proche les observations qui ont été faites aux sommets consécutifs de la triangulation. On remarquera que, pour fixer la position d'un point N, il faut deux directions émanant de deux points connus, A et B. Si les observations fournissent plus de deux données, le nombre excédant exprimera celui des équations de condition, provenant de la jonction du point N au réseau de triangles. Ainsi l'angle entre A et B, observé du point N, apporte une *troisième* donnée, donc une *première* équation de condition, qui est ici *angulaire*.

Le point N est-il observé de trois stations connues A, B, C, lesquelles, à leur tour, sont observées de N? Nous aurons dans ce cas *cinq* données; donc *trois* équations de condition (deux aux angles et une aux côtés).

Et en général, si le point N est observé de m points connus, et que réciproquement ceux-ci soient observés du point N, il y aura $(2m - 1)$ données, donc $(2m - 3)$ équations de condition, savoir $(m - 1)$ pour les angles et $(m - 2)$ pour les côtés.

Bessel a résumé ce qui précède dans la règle que voici : « Pour « rattacher un point, il est nécessaire et suffisant d'observer deux di- « rections simples. L'observation d'une nouvelle direction introduit « une équation aux côtés; et celle de l'angle entre deux directions, « une équation aux angles. »

Nous allons, comme exemple, chercher les équations de condition que fournit la triangulation faite par ce grand observateur entre Trunz et Memel (voyez *Gradmessung in Ostpreussen*), en faisant abstraction des petits triangles qui rattachent la base mesurée à la base calculée, et en partant du côté 1 . 2 (*Galtgarben-Condehnen*).

A partir de ce premier côté, le sommet 4 est déterminé seulement par deux directions; mais il a servi de station pour prendre l'angle $\overset{1\,.\,2}{4}$, ce qui donne une équation aux angles $a_1 = 1 \,.\, 2 \,.\, 4$, dans le triangle désigné par ces trois chiffres.

3 a été observé de trois points 1, 2, 4; ce qui donne une équation aux côtés entre ces quatre points : $c_1 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$.

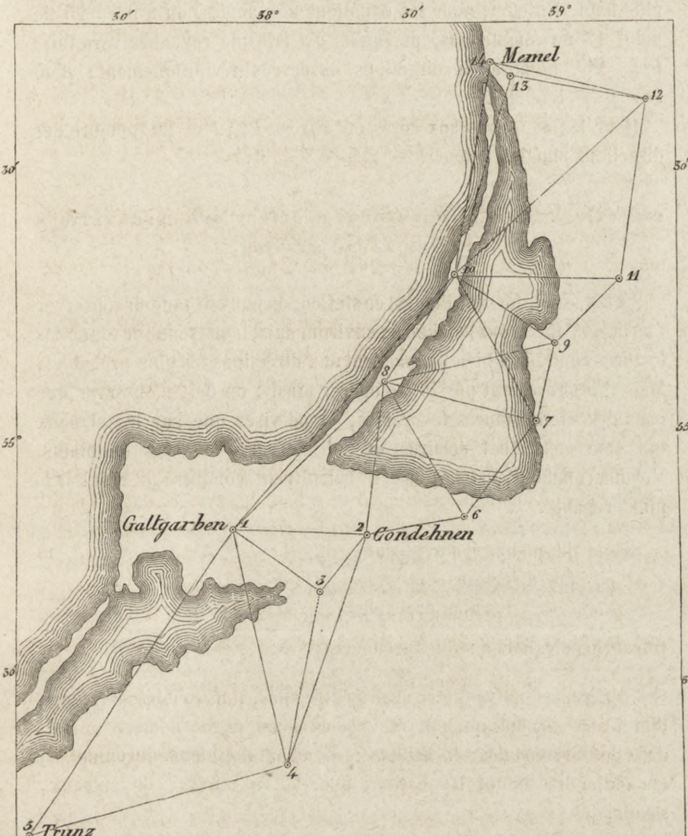
L'angle $\overset{1\,.\,2}{3}$ est surabondant, d'où $a_2 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$. — La direction $\overset{4}{3}$ n'a pas été observée.

A Trunz l'angle observé est surabondant; d'où $a_3 = 1 \,.\, 4 \,.\, 5$.

Au nord du côté de départ, nous avons d'abord quatre triangles dont les trois angles ont été observés, et qui donnent :

$$a_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 8;\quad a_5 = 2 \,.\, 6 \,.\, 8;\quad a_6 = 6 \,.\, 7 \,.\, 8;\quad a_7 = 7 \,.\, 8 \,.\, 9.$$

Ensuite le point 10 est déterminé par quatre directions, au lieu de deux, et ces directions sont réciproques; ce qui donne trois équa-



tions aux angles et deux aux côtés: $a_8 = 7.8.10$; $a_9 = 8.9.10$; $a_{10} = 1.8.10$; $c_2 = 7.8.9.10$; $c_3 = 1.2.6.7.10.8$.

Viennent maintenant $a_{11} = 9.10.11$; $a_{12} = 10.11.12$; $a_{13} = 10.12.14$ (on n'a pas observé du point 13). Enfin ce dernier point, 13, ayant été recoupé de trois autres, on a $c_4 = 10.12.14.13$.

Le nombre des équations de condition que nous venons de trouver s'accorde avec les deux théorèmes de Gauss, que nous avons énoncés plus haut. En effet, pour les équations aux angles, on a $p = 13$ (le point 13 ne compte pas, puisqu'on n'a fait que rayonner vers lui); $l = 25$, nombre de directions observées réciproquement; d'où $l - p + 1 = 13$.

Pour les équations aux côtés on a $p = 14$; $l = 29$ (nombre des directions simples); donc $l - 2p + 3 = 4$.

DIRECTIONS LES PLUS PROBABLES DÉDUITES DES OBSERVATIONS FAITES A UNE STATION.

§ **152**.—Si, lorsque l'on est en station, on pouvait toujours observer l'un après l'autre *tous* les signaux environnants, la moyenne de toutes les lectures conduirait bien simplement aux directions les plus probables. Mais il est rarement possible d'opérer ainsi : on doit n'observer que dans des circonstances favorables, et ne viser que sur les signaux qui sont nettement éclairés et qui ne paraissent pas ondulants. Voyons comment, dans ce cas, le calcul peut conduire au résultat le plus probable.

Soient le nombre des signaux	1	2	3....	m
« les directions observées	0	a	b....	
« « les plus probables	0	A	B....	
retranchant les dernières des premières :	0;	a—A ;	b—B,....	

Ces différences doivent être égales entre elles, puisqu'elles se rapportent à des signaux qui ont été observés un même nombre de fois dans des circonstances identiques : les égalant donc à une inconnue, x, on obtiendra autant d'équations que l'on a observé de signaux, savoir,

$$0 = x; \quad a - \mathrm{A} = x; \quad b - \mathrm{B} = x \ldots$$

Pour un autre nombre de signaux, on obtient d'autres équations et d'autres valeurs pour x : ainsi, par exemple, pour 4 signaux, on a :

$$0 = x'; \quad \alpha - \mathrm{A} = x'; \quad \beta - \mathrm{B} = x'; \quad \gamma - \mathrm{C} = x'.$$

Supposons maintenant que l'on ait répété plusieurs fois l'observation des trois premiers signaux, et plusieurs fois aussi celle des quatre signaux : il résultera, de ces deux séries, deux groupes d'équations, savoir :

$$
\begin{array}{llll}
 & 1 & 2 \quad \ldots\ldots & m \\
1 & x=0: & x+\mathrm{A}=a\,; & x+\mathrm{B}=b \\
2 & x=0\,; & x+\mathrm{A}=a'\,; & x+\mathrm{B}=b' \ldots \qquad (1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$nx=0\,;\quad nx+n\mathrm{A}=(a+a'\ldots)\,;\quad nx+n\mathrm{B}=(b+b'+\ldots).$$

Ajoutant ces dernières équations, on obtient

$$mnx=(a+a'+\ldots+b+b'+\ldots)-n\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,;$$

d'où $$nx=\left(\frac{a+a'+\ldots+b+b'+\ldots}{m}\right)-\frac{n}{m}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\ \ldots\quad (1')$$

m représente ici le nombre des signaux observés, et n celui des observations du groupe.

Le second groupe sera

$$
\begin{array}{lllll}
 & 1 & 2 & 3 \quad \ldots\ldots & m' \\
1 & x'=0\,; & x'+\mathrm{A}=\alpha\,; & x'+\mathrm{B}=\beta\,; & x'+\mathrm{C}=\gamma. \\
2 & x'=0\,; & x'+\mathrm{A}=\alpha'\,; & x'+\mathrm{B}=\beta'\,; & x'+\mathrm{C}=\gamma'. \\
3 & x'=0\,; & x'+\mathrm{A}=\alpha''; & x'+\mathrm{B}=\beta''; & x'+\mathrm{C}=\gamma''\ldots(2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n' & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$n'x'=0\,;\ n'x'+n'\mathrm{A}=[\alpha]\,;\ n'x'+n'\mathrm{B}=[\beta]+\,;\ n'x'+n'\mathrm{C}=[\gamma]\,.$$

Additionnons et tirons la valeur de $n'x'$; il viendra :

$$n'x'=\frac{[\alpha]+[\beta]+[\gamma]}{m'}-\frac{n'}{m'}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})\ \ldots\quad (2')$$

Le nombre des inconnues x, x'... est égal à celui des groupes que les observations ont fournis. Dans le cas actuel, il y a donc cinq inconnues, x, x', A, B, C; et pour les déterminer, nous avons les six équations du premier groupe et les douze du second, nombre que l'observateur pourrait encore augmenter à volonté. C'est donc ici le cas d'appliquer la méthode des moindres carrés.

Représentons par 2S la somme des carrés des erreurs dans les deux groupes, nous aurons :

$$\begin{aligned}2S = {} & x^2 + (A + x - a)^2 + (B + x - b)^2 + \ldots + x^2 + (A + x - a')^2 \\ & + (B + x - b')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha)^2 + (B + x' - \beta)^2 \\ & + (C + x' - \gamma)^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha')^2 + (B + x' - \beta')^2 \\ & + (C + x' - \gamma')^2 + \ldots + x'^2 + (A + x' - \alpha'')^2 + (B + x' - \beta'')^2 \\ & + (C + x' - \gamma'')^2 + \ldots\end{aligned}$$

La différentiation par rapport à x et à x' donne :

$$\frac{dS}{dx} = 0 = + mnx + n(A + B) - (a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) \ldots (3)$$

$$\frac{dS}{dx'} = 0 = + m'n'x' + n'(A + B + C + \ldots) - ([\alpha] + [\beta] + [\gamma]) \ldots (4)$$

De ces deux équations on déduit pour nx et $n'x'$ les mêmes valeurs qui ont été fournies plus simplement par la somme des équations (1) et (2). De plus, en différentiant par rapport à A, B, C, on obtient :

$$\frac{dS}{dA} = 0 = nA - (a + a' + \ldots) + nx + n'A - [\alpha] + n'x' \ldots (5)$$

$$\frac{dS}{dB} = 0 = nB - (b + b' + \ldots) + nx + n'B - [\beta] + n'x' \ldots (6)$$

$$\frac{dS}{dC} = 0 = n'C - [\gamma] + n'x'. \ldots (7)$$

Substituant dans ces trois dernières équations les valeurs précédentes de nx et de $n'x'$, on obtient les équations finales. Par exemple celle qui se déduit de (5) sera

$$\left.\begin{aligned}0 &= nA - (a + a' + \ldots) + \frac{1}{m}(a + a' + \ldots + b + b' + \ldots) - \frac{n}{m}A - \frac{n}{m}B \\ 0 &= n'A - [\alpha] \qquad + \frac{1}{m'}([\alpha] + [\beta] + [\gamma]) - \frac{n'}{m'}A - \frac{n'}{m'}B - \frac{n'}{m'}C\end{aligned}\right\} (8)$$

ou bien, en additionnant et en désignant par $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ les sommes des coefficients de A, B, C ; et par $[an]$ le terme tout connu :

$$[an] = [aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C$$

Opérant de même sur les équations (6) et (7) on obtiendrait des résultats analogues ; de sorte que le système des équations finales est

$$\left.\begin{aligned}[an] &= + [aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C \\ [bn] &= - [ab]\,A + [bb]\,B - [bc]\,C \\ [cn] &= - [ac]\,A - [bc]\,B + [cc]\,C\end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

et l'élimination ordinaire fera connaître les directions les plus probables A, B, C.

Si l'on a chaque fois observé *tous* les signaux, le second groupe n'existe pas ; donc $n'=0$, et par suite $[aa]=[bb]=[cc]=n-\frac{n}{m}$.

Quant aux autres coefficients, ils sont tous égaux entre eux et à $\frac{n}{m}$.

Pour simplifier les calculs, et n'avoir affaire qu'à de petits nombres, on peut attribuer aux directions observées des valeurs approximatives, que l'on exclut du calcul ; de sorte, par exemple, que A, B, C ne représentent que les *variations* qui peuvent avoir lieu dans les unités de seconde. Ainsi supposons que la direction du premier signal soit représentée par 0° ; celle du second par 56° 30′ 24″,5 : on posera celle-ci égale à 56° 30′ 20″ + A ; et l'on obtiendra dans le groupe (1) l'équation correspondante $x + A = 4'', 5$. — De même pour les autres signaux.

Les équations (9) sont symétriques ; et l'on voit que pour déduire, par exemple, la seconde de la première, il suffit de changer dans celle-ci a et A en b et B. Par suite, on peut leur donner cette autre forme symétrique

$$\left.\begin{aligned} A &= [an] \cdot [\alpha\alpha] + [bn] \cdot [\alpha\beta] + [cn] \cdot [\alpha\gamma] \\ B &= [an] \cdot [\alpha\beta] + [bn] \cdot [\beta\beta] + [cn] \cdot [\beta\gamma] \\ C &= [an] \cdot [\alpha\gamma] + [bn] \cdot [\beta\gamma] + [cn] \cdot [\gamma\gamma] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (10)$$

dans laquelle $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$... sont des coefficients qui se déduisent de ceux des équations (9) de la manière suivante.

Substituons d'abord à $[an]$, $[bn]$, $[cn]$ leurs valeurs tirées des équations (9) ; il vient

$$A = \left\{\begin{aligned} &[\alpha\alpha]\,(+[aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C) \\ &+[\alpha\beta]\,(-[ab]\,A + [bb]\,B - [bc]\,C) \\ &+[\alpha\gamma]\,(-[ac]\,A - [bc]\,B + [cc]\,C). \end{aligned}\right.$$

$$B = \left\{\begin{aligned} &[\alpha\beta]\,(+[aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C) \\ &+[\beta\beta]\,(-[ab]\,A + [bb]\,B - [bc]\,C) \\ &+[\beta\gamma]\,(-[ac]\,A - [bc]\,B + [cc]\,C). \end{aligned}\right.$$

$$C = \left\{\begin{aligned} &[\alpha\gamma]\,(+[aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C) \\ &+[\beta\gamma]\,(-[ab]\,A + [bb]\,B - [bc]\,C) \\ &+[\gamma\gamma]\,(-[ac]\,A - [bc]\,B + [cc]\,C). \end{aligned}\right.$$

Ordonnons maintenant les seconds membres par rapport à A, B, C, nous aurons :

$$\mathrm{A} = \begin{cases} \mathrm{A}\,(+[aa]\,.\,[\alpha\alpha] - [ab]\,.\,[\alpha\beta] - [ac]\,.\,[\alpha\gamma]) \\ +\,\mathrm{B}\,(-[ab]\,.\,[\alpha\alpha] + [bb]\,.\,[\alpha\beta] - [bc]\,.\,[\alpha\gamma]) \\ +\,\mathrm{C}\,(-[ac]\,.\,[\alpha\alpha] - [bc]\,.\,[\alpha\beta] + [cc]\,.\,[\alpha\gamma]). \end{cases}$$

$$\mathrm{B} = \begin{cases} \mathrm{A}\,(+[aa]\,.\,[\alpha\beta] - [ab]\,.\,[\beta\beta] - [ac]\,.\,[\beta\gamma]) \\ +\,\mathrm{B}\,(-[ab]\,.\,[\alpha\beta] + [bb]\,.\,[\beta\beta] - [bc]\,.\,[\beta\gamma]) \\ +\,\mathrm{C}\,(-[ac]\,.\,[\alpha\beta] - [bc]\,.\,[\beta\beta] + [cc]\,.\,[\beta\gamma]). \end{cases}$$

$$\mathrm{C} = \begin{cases} \mathrm{A}\,(+[aa]\;\;[\alpha\gamma] - [ab]\,.\,[\beta\gamma] - [ac]\,.\,[\gamma\gamma]) \\ +\,\mathrm{B}\,(-[ab]\,.\,[\alpha\gamma] + [bb]\,.\,[\beta\gamma] - [bc]\,.\,[\gamma\gamma]) \\ +\,\mathrm{C}\,(-[ac]\,.\,[\alpha\gamma] - [bc]\,.\,[\beta\gamma] + [cc]\,.\,[\gamma\gamma]). \end{cases}$$

Ces équations devant être identiques avec les équations (10), la valeur de A doit être indépendante de B et de C; celle de B, indépendante de A et de C... etc. Ce qui exige que, dans la première équation, les coefficients de B et de C soient identiquement nuls; que, dans la seconde, les coefficients de A et de C soient identiquement nuls, et ainsi de suite. Chaque équation en fournit donc trois pour la détermination des coefficients inconnus, savoir :

$$\left.\begin{aligned} 1 &= +[aa]\,.\,[\alpha\alpha] - [ab]\,.\,[\alpha\beta] - [ac]\,.\,[\alpha\gamma]\,; \\ 0 &= -[ab]\,.\,[\alpha\alpha] + [bb]\,.\,[\alpha\beta] - [bc]\,.\,[\alpha\gamma]\,; \\ 0 &= -[ac]\,.\,[\alpha\alpha] - [bc]\,.\,[\alpha\beta] + [cc]\,.\,[\alpha\gamma]\,; \\ 0 &= +[aa]\,.\,[\alpha\beta] - [ab]\,.\,[\beta\beta] - [ac]\,.\,[\beta\gamma]\,; \\ 1 &= -[ab]\,.\,[\alpha\beta] + [bb]\,.\,[\beta\beta] - [bc]\,.\,[\beta\gamma]\,; \\ 0 &= -[ac]\,.\,[\alpha\beta] - [bc]\,.\,[\beta\beta] + [cc]\,.\,[\beta\gamma]\,; \\ 0 &= +[aa]\,.\,[\alpha\gamma] - [ab]\,.\,[\beta\gamma] - [ac]\,.\,[\gamma\gamma]\,; \\ 0 &= -[ab]\,.\,[\alpha\gamma] + [bb]\,.\,[\beta\gamma] - [bc]\,.\,[\gamma\gamma]\,; \\ 1 &= -[ac]\,.\,[\alpha\gamma] - [bc]\,.\,[\beta\gamma] + [cc]\,.\,[\gamma\gamma]\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots (11)$$

et à chacun des groupes on appliquera le procédé d'élimination de Gauss, que nous avons exposé au § 124.

§ **153.** — La détermination de A, B, C..., au moyen des équations (9) ou (10), est tout ce que peuvent donner les observations de direction faites à une station unique. Mais comme les observations de plusieurs stations, combinées entre elles, constituent un réseau qui doit rigoureusement satisfaire à de nouvelles conditions, il en résulte que les directions A, B, C... doivent subir de nouvelles corrections, encore inconnues, que nous représentons par (1), (2), (3)... Or, quand on remplace, dans les seconds membres des équations (9), A, B, C... par $A'+(1)$, $B'+(2)$, $C'+(3)$... les premiers membres subissent eux-mêmes des changements, et se transforment par exemple en $[an]+[1]$, $[bn]+[2]$, $[cn]+[3]$. Faisant ces substitutions dans les équations (9) et réduisant, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}[][1] &= +[aa]\,(1) - [ab]\,(2) - [ac]\,(3)\\ [2] &= -[ab]\,(1) + [bb]\,(2) - [bc]\,(3)\\ [3] &= -[ac]\,(1) - [bc]\,(2) + [cc]\,(3).\end{aligned}\right\} \quad \ldots (12)$$

Si l'on fait les mêmes substitutions dans les équations (10), et qu'on y remplace ensuite A, B, C par leurs valeurs les plus probables, ces équations deviennent

$$\left.\begin{aligned}(1) &= [\alpha\alpha]\,[1] + [\alpha\beta]\,[2] + [\alpha\gamma]\,[3]\\ (2) &= [\alpha\beta]\,[1] + [\beta\beta]\,[2] + [\beta\gamma]\,[3]\\ (3) &= [\alpha\gamma]\,[1] + [\beta\gamma]\,[2] + [\gamma\gamma]\,[3].\end{aligned}\right\} \quad \ldots (13)$$

Les équations (12) et (13) se rapportent donc uniquement à la compensation du réseau trigonométrique, et expriment la dépendance qui existe entre les corrections de A, B, C... par suite de la manière dont ces directions ont été observées du point de station. Nous reviendrons plus tard à ces deux groupes.

Lorsque l'on suit la marche adoptée par le colonel Baeyer, les calculs qu'exigent les observations faites à chaque station consistent :

1° A résoudre les équations (9) pour déterminer les directions probables, A, B, C...;

2° A résoudre les équations (11) pour déterminer les coefficients des équations (13);

3° A transporter dans le groupe (13) les valeurs numériques de ces coefficients.

§ **151**. — Pour éclaircir ce qui précède nous allons effectuer le développement des calculs, en traitant un exemple numérique fort simple. Les données sont extraites de la triangulation effectuée en 1850, sous la direction du colonel Nerenbürger, pour relier la petite base de Linthout à l'observatoire royal de Bruxelles.

Station au terme B de la base.

TERME A.	A WOLUWE-St-PIERRE.	B WOLUWE-St-LAMBERT.	SUPPOSITIONS.
$0^G,0000,0$	$66^G,2798,75$	$94^G,7671,25$	Terme A . . . . $0^G,0000'',00$
0,0	807,50	63,75	Woluwe-St-Pierre 66,2800 ,00+A
0,0	797,50	65,00	Woluwe-St-Lambert 94,7670 ,00+B
0,0	800,00	57,50	
0,0	796,25	62,50	
0,0	792,50	51,25	$12\,x \ldots\ldots = 0,0$
0,0	796,25	60,00	$12\,x + 12\,A = +\,27,50$
0,0	818,75	81,25	$12\,x + 12\,B = -\,46,25$
0,0	793,75	67,50	$12\,x = -\,6,25 - 4(A+B)$
0,0	808,75	68,75	
0,0	806,25	65,00	
0,0	811,25	80,00	
(12)	+ 27,50	— 46,25	
0,0000,0		94,7655,00	
0,0		56,25	
0,0		66,25	
0,0		67,50	$12x' \ldots\ldots = 0,0$
0,0		70,00	$12x' + 12\,B = -\,26,25$
0,0		55,00	$12x' = -\,13,1250 - 6,0000\,B$
0,0		73,75	
0,0		72,50	
0,0		72,50	
0,0		68,75	
0,0		85,00	
0,0		71,25	
(12)	»	— 26,25	»

Dans la dernière colonne de ce tableau, on a, conformément à la remarque faite p. 341, attribué aux directions observées des valeurs approximatives, afin de n'avoir à chercher que de petites corrections. Il est bon de remarquer toutefois que cette marche revient (§ 131) à assimiler les corrections à de véritables différentielles, et à négliger les ordres supérieurs : il faut donc que les *suppositions* ne s'écartent pas trop des valeurs moyennes. Ainsi, par exemple, on a supposé, dans la première série, que la direction du signal B était de $94^G,7670'',00$; ou, plus simplement, de $70'',00$, en n'ayant égard qu'à l'ordre des chiffres variables dans la série. Cette hypothèse donne $840'',00$ pour la somme des 12 observations; dans la réalité, cette somme n'est que de $793'',75$: la différence (— 46,25) est le nombre porté dans la troisième colonne, sous la première série. On conçoit d'après cela la formation des équations inscrites dans la dernière colonne : elles correspondent aux équations (1′), (2′) du § 132.

Nous avons maintenant à former les équations finales, d'après (5), (6), (7) et (8) du même paragraphe. Remarquons que, pour A, nous avons à faire dans la formule (8)

$$n = 12 \qquad n' = 0 \qquad m = 3$$
$$a + a' + \ldots \quad = + 27,50$$
$$b + b' + \ldots \quad = - 46,25.$$

Il vient donc $\quad 0 = 12A - 27,5000 - \frac{1}{3}(18,75) - 4A - 4B,$

ou bien (a) ... $\qquad + 33,7500 = + 8,0000\ A - 4,0000\ B.$

Pour la direction B, nous avons en outre $n' = 12$, $m' = 2$ et $\beta + \beta' + \beta'' + \ldots . = - 26,25$. Il vient donc

$$0 = 12B + 46,2500 - \frac{1}{3}(18,75) - 4A - 4B$$

$$+ 12B + 26,2500 - \frac{1}{2}(26,25) - 6B \ldots,$$

ou bien (b) ... $\qquad - 53,1250 = - 4,0000\ A + 14,0000\ B.$

Les équations à résoudre, (a) et (b), comparées au type (9), donnent:

$$[an] = + 33,7500; \quad [aa] = + 8,0000; \quad [ab] = - 4,0000;$$
$$[bn] = - 53,1250; \quad [bb] = + 14,0000.$$

Les calculs numériques sont exposés dans le tableau suivant.

$[an] = +33{,}7500$	$[aa] = +8{,}0000$	$[ab] = -4{,}0000$	$[bn] = -53{,}1250$	$[bb] = +14{,}0000$
$\log [an] = 1{,}52827$	$\log [aa] = 0{,}90309$	$\log [ab] = 0{,}60206_n$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[an] = +16{,}875$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab] \quad - \quad ,000$
$\log \frac{[an]}{[aa]} = 0{,}62518$		$\log \frac{[ab]}{[aa]} = 9{,}69897_n$	$[bn.1] = -36{,}250$	$[bb.1] = +12{,}000$
$\frac{[an]}{[aa]} = +4{,}219$		$\log \mathrm{B} = 0{,}48013_n$	$\log [bn.1] = 1{,}55931_n$	$\log [bb.1] = 1{,}07918$
$-\mathrm{B}\frac{[ab]}{[aa]} = -1{,}511$		$\log \mathrm{B}\frac{[ab]}{[aa]} = 0{,}17910$	$\log \frac{[bn.1]}{[bb.1]} = 0{,}48013_n$	
$\mathrm{A} = +2{,}708$			$\mathrm{B} = -3{,}021$	
$[an] = 1$			$[bn] = 0$	
$\log [an] = 0{,}00000$			$-\frac{[ab]}{[aa]}[an] = +0{,}500$	
$\log \frac{[an]}{[aa]} = 9{,}09691$			$[bn.1] = +0{,}500$	
$\frac{[an]}{[aa]} = +0{,}12500$			$\log [bn.1] = 9{,}69897$	
$-[\alpha\beta]\frac{[ab]}{[aa]} = +0{,}02083$			$\log \frac{[bn.1]}{[bb.1]} = 8{,}61979$	
$[\alpha\alpha] = +0{,}14583$			$[\alpha\beta] = +0{,}04167$	
			$\log \frac{1}{[bb.1]} = 8{,}92082$	
			$[\beta\beta] = +0{,}08333$	

Il suit de là que les directions probables sont

$$\begin{array}{lcl} \text{Terme A} \ldots\ldots\ldots & = & 0^G{,}0000'',000 \\ \text{Woluwe-St.-Pierre} \ldots & = & 66\ ,2802\ ,708 + (1) \\ \text{Woluwe-St.-Lambert} \ldots & = & 94\ ,7666\ ,979 + (2). \end{array}$$

On n'oubliera pas que les corrections (1) et (2) résultent des conditions ultérieures, dues à la liaison réciproque des diverses lignes de la triangulation. — Les équations (12) deviennent donc

$$\left.\begin{array}{l} [1] = + 8{,}0000\ (1) - \ 4{,}0000\ (2) \\ [2] = - 4{,}0000\ (1) + 14{,}0000\ (2); \end{array}\right\} \quad \ldots (12')$$

et les équations (13)

$$\left.\begin{array}{l} (1) = 0{,}14583\ [1] + 0{,}04167\ [2] \\ (2) = 0{,}04167\ [1] + 0{,}08333\ [2]. \end{array}\right\} \quad \ldots (13')$$

Pour la compensation générale du réseau trigonométrique, Baeyer (*die Küstenvermessung*, etc.) n'emploie que les équations (13'), et les équations (12') lui sont inutiles. Bessel au contraire (*Gradmessung in Ostpreussen*) n'emploie que le groupe (12') et ne fait aucun usage de l'autre. Nous suivrons la méthode de Baeyer, qui a été adoptée en Belgique par le Dépôt de la guerre.

THÉORIE DE LA COMPENSATION D'UN RÉSEAU TRIGONOMÉTRIQUE.

§ **155**. — Lorsque les directions et les angles, pris à une même station, peuvent être considérés comme des grandeurs observées immédiatement, et *indépendantes* les unes des autres, le calcul de leurs corrections n'offre aucune difficulté. En effet, les observations des diverses stations étant reliées entre elles de manière à former des triangles, des quadrilatères, etc., il en résulte un système polygonal qui présente plus ou moins d'équations *surabondantes;* de là naissent des *conditions* qui doivent être exactement remplies, pour que le réseau soit mathématiquement formé, et la solution du problème tombe dans le cas que nous avons traité, §§ 138 et suivants. Cette marche est celle qu'ont suivie Gauss, Hansen, Gerling, etc., dans leurs calculs géodésiques.

Mais il en est autrement lorsque l'on regarde, avec Bessel et Baeyer, les directions observées à chaque station comme liées entre elles par des équations (9) : c'est dans cette hypothèse que nous allons exposer la théorie de la compensation d'un réseau trigonométrique.

Soient les équations de condition suivantes, tirées de la constitution polygonale du réseau :

$$\begin{aligned} u &= 0 = \mathfrak{A} + \alpha A + \alpha' B + \alpha'' C \ldots \\ u' &= 0 = \mathfrak{B} + \beta A + \beta' B - \beta'' C \ldots \\ u'' &= 0 = \mathfrak{C} + \gamma A + \gamma' B + \gamma'' C \ldots \end{aligned} \qquad \ldots (14)$$

Multiplions-les successivement par les coefficients corrélatifs I, II, III... (pour suivre la notation de Bessel et de Baeyer); différentions-les par rapport à A, B, C..., et ajoutons-les aux équations (5), (6), (7); il viendra

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dS}{dA} + \frac{du}{dA}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{dA}\,\mathrm{II} + \frac{du''}{dA}\,\mathrm{III} \ldots \\ 0 &= \frac{dS}{dB} + \frac{du}{dB}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{dB}\,\mathrm{II} + \frac{du''}{dB}\,\mathrm{III} \ldots \\ 0 &= \frac{dS}{dC} + \frac{du}{dC}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{dC}\,\mathrm{II} + \frac{du''}{dC}\,\mathrm{III} \ldots \end{aligned} \qquad \ldots (15)$$

Comme les valeurs de $\frac{dS}{dA}$, $\frac{dS}{dB}$... ne sont autre chose que les expressions (9), et qu'en outre $\frac{du}{dA} = \alpha$; $\frac{du}{dB} = \alpha'$; $\frac{du}{dC} = \alpha''$..., le système précédent se transformera en

$$\begin{aligned} &+[aa]\,A - [ab]\,B - [ac]\,C \ldots = [an] + \alpha\ \mathrm{I} + \beta\ \mathrm{II} + \gamma\ \mathrm{III} \ldots \\ &-[ab]\,A + [bb]\,B - [bc]\,C \ldots = [bn] + \alpha'\,\mathrm{I} + \beta'\,\mathrm{II} + \gamma'\,\mathrm{III} \ldots \\ &-[ac]\,A - [bc]\,B + [cc]\,C \ldots = [cn] + \alpha''\mathrm{I} + \beta''\mathrm{II} + \gamma''\mathrm{III} \ldots \end{aligned} \qquad \ldots (16)$$

Éliminant A, B, C... de ces équations, et les exprimant en fonction des coefficients indéterminés I, II, III... on trouve une expression de la forme

$$\begin{aligned} A &= P + q\ \mathrm{I} + r\ \mathrm{II} + s\ \mathrm{III} \ldots \\ B &= Q + q'\,\mathrm{I} + r'\,\mathrm{II} + s'\,\mathrm{III} \ldots \\ C &= R + q''\mathrm{I} + r''\mathrm{II} + s''\mathrm{III} \ldots \end{aligned} \qquad \ldots (17)$$

Si maintenant l'on substitue ces valeurs dans les équations (14), on fera disparaître A, B, C..., et l'on obtiendra autant d'équations que de coefficients corrélatifs : leur solution donnera donc les valeurs de I, II, III...; et ces derniers, remplacés dans (17), permettront de calculer les directions les plus probables A, B, C... qui satisfont à l'ensemble des conditions.

Telle est la marche la plus simple en théorie : mais lorsqu'on veut l'appliquer, on doit attendre, pour commencer les calculs, que *toutes* les observations soient terminées. Or ces calculs sont si longs que, pour une triangulation un peu considérable, leur accumulation présente un travail effrayant. Baeyer a cherché à éviter cette accumulation, en disposant les calculs de telle sorte qu'on puisse opérer par parties successives, sans nuire à l'exactitude de la solution.

Dans ce but, on commence par calculer, comme nous l'avons fait (§ 153), les directions probables A′, B′, C′..., eu égard seulement aux observations faites à la station ; puis on forme les expressions (12) et (13) relatives aux équations de condition qui résulteront plus tard de la constitution géométrique du réseau. Jusqu'ici donc, les calculs peuvent être conduits indépendamment les uns des autres, pour chaque station individuelle, et se faire d'année en année, après la campagne d'observations.

Dans les équations (14), les valeurs de A, B, C... embrassent *toutes* les conditions; mais si l'on veut séparer les directions probables fournies à chaque station, des corrections dues à la forme polygonale du réseau, il faudra remplacer A, B... par A′ + (1), B′ + (2)... Les équations de condition (14) ne renfermeront donc plus les *inconnues* A, B, C... En effet, puisque l'on part, pour leur formation, des valeurs probables obtenues à chaque station, la première de ces équations devient

$$0 = \mathfrak{A} + \alpha\,[A' + (1)] + \alpha'\,[B' + (2)] + \alpha''\,[C' + (3)]\,;$$

ou bien $$0 = \mathfrak{A}' + \alpha\,(1) + \alpha'\,(2) + \alpha''\,(3)\,\ldots$$

en remplaçant par $\mathfrak{A}'$ la quantité toute connue

$$\mathfrak{A} + \alpha A' + \alpha' B' + \alpha'' C'\,\ldots$$

De même pour le reste du groupe (14) qui sera remplacé par le suivant

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{A}' + \alpha\,(1) + \alpha'\,(2) + \alpha''\,(3)\,\ldots \\ 0 &= \mathfrak{B}' + \beta\,(1) + \beta'\,(2) + \beta''\,(3)\,\ldots \qquad \ldots\ (18) \\ 0 &= \mathfrak{C}' + \gamma\,(1) + \gamma'\,(2) + \gamma''\,(3)\,\ldots \end{aligned}$$

Dans la même hypothèse, c'est-à-dire en partant des directions probables observées aux diverses stations, la première des équations (16) se transforme en celle-ci :

$$[aa]\,A' - [ab]\,B' - [ac]\,C' \ldots + [aa]\,(1) - [ab]\,(2) - [ac]\,(3) \ldots$$
$$= [an] + \alpha\,\mathrm{I} + \beta\,\mathrm{II} + \gamma\,\mathrm{III} \ldots$$

Mais par suite de notre hypothèse, nous avons (9) :

$$[aa]\,A' - [ab]\,B' - [ac]\,C' \ldots = [an]$$

et de plus (12)

$$[aa]\,(1) - [ab]\,(2) - [ac]\,(3) \ldots = [1].$$

Il s'ensuit que le groupe (16) deviendra

$$\begin{aligned} [1] &= \alpha\,\mathrm{I} + \beta\,\mathrm{II} + \gamma\,\mathrm{III} \ldots \\ [2] &= \alpha'\,\mathrm{I} + \beta'\,\mathrm{II} + \gamma'\,\mathrm{III} \ldots \\ [3] &= \alpha''\mathrm{I} + \beta''\mathrm{II} + \gamma''\mathrm{III} \ldots \end{aligned} \qquad \ldots (19)$$

Si l'on transporte les valeurs de [1], [2], [3]... dans les équations (13), on obtient les corrections (1), (2), (3)... exprimées en I, II, III. Les introduisant dans (18), on obtient les équations finales, dont la résolution fait connaître les valeurs de I, II, III... Enfin, transportant ces coefficients connus dans les expressions (13) des corrections, on en déduit les valeurs de ces dernières. Ces valeurs doivent rendre les équations (18) identiquement nulles.

§ **156**. — Les directions corrigées que l'on trouve de cette manière pour chaque station, se rapportent à la direction arbitraire du premier objet, prise comme point zéro : cette direction est en effet indifférente lorsqu'on ne considère que la valeur des angles des triangles, ou l'accord des séries d'observation ; mais on a besoin de connaître l'influence que la compensation des directions a exercée sur le point zéro, pour apprécier la grandeur des changements que doivent subir les directions, observées à un sommet quelconque. Dans ce but laissons la direction initiale indéterminée et désignons-la par z : alors les autres directions deviendront $z + A$, $z + B$... et nos premières équations (§ 152) seront remplacées par celles-ci :

Directions observées	0	a	$b \ldots$
» probables	z	$z + A$	$z + B \ldots$
Différences	$-z;$	$a - z - A;$	$b - z - B \ldots$

Ces différences, égalées à une variable x, donnent les équations

$$0 = x + z;\quad 0 = z + A + x - a;\quad 0 = z + B + x - b \ldots \text{etc};$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned}2S = (x+z)^2 &+ (z+A+x-a)^2 + (z+B+x-b)^2 + \ldots + (z+x)^2\\ &+ (z+A+x-a')^2 + (z+B+x-b')^2 + \ldots + (z+x')^2\\ &+ (z+A+x'-\alpha)^2 + (z+B+x'-\beta)^2 + (z+C+x'-\gamma)^2 + \ldots\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dz} = 0 = (mn + m'n')z &+ mnx + m'n'x' + n(A+B) + n'(A+B+C)\\ &- (a + a' + \ldots) - (b + b' + \ldots) - [\alpha] - [\beta] - [\gamma].\end{aligned}$$

Remplaçant A par A + (1); B par B + (2)... et détruisant les quantités qui s'annulent en vertu des équations (3) et (4), on obtient

$$0 = (mn + m'n')\,z + (n + n')\,(1) + (n + n')\,(2) + n'\,(3).$$

Or mn	exprime le nombre total	de tous les pointés	dans le groupe	(1)
$m'n'$	»	»	»	(2)
$n+n'$	»	»	»	de A
$n+n'$	»	»	»	de B
n'	»	»	»	de C.

Si donc on désigne par h le nombre de tous les pointés du premier objet pour chaque station; par h' le nombre des pointés de A; par h'' le nombre des pointés de B, etc., on aura

$$0 = z\,(h + h' + h'' + h''' \ldots) + h'\,(1) + h''(2) + h'''\,(3) \ldots$$

Mettant pour (1), (2), (3)... les corrections trouvées, on déduit de cette équation la valeur de z. Ce procédé est évidemment applicable à chaque station.

La marche complète du calcul de la compensation d'un réseau trigonométrique se résume donc ainsi :

1° Rechercher les équations de condition (18);

2° Former les équations (19), qui donnent les quantités [1], [2], [3]... en fonction des coefficients I, II, III...;

3° Exprimer les corrections (1), (2), (3)... au moyen des facteurs I, II, III... d'après les équations (13);

4° Substituer les valeurs de (1), (2), (3)... dans les équations de condition, pour obtenir les équations finales, en nombre égal à celui des coefficients corrélatifs;

5° Résoudre les équations finales, ou déterminer les coefficients I, II, III...;

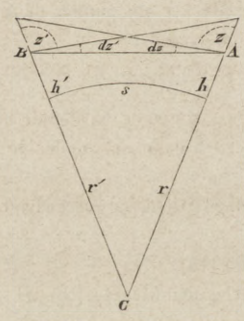
6° Transporter ces valeurs dans les expressions trouvées (3°) pour la détermination de (1), (2), (3)...;

7° Déterminer les changements à apporter au point zéro pour chaque station;

8° Enfin ajouter les corrections précédentes à celles déjà trouvées, pour que les directions définitives satisfassent à toutes les conditions, et que l'observation de chacune d'elles ait le même poids.

THÉORIE DU NIVELLEMENT TRIGONOMÉTRIQUE.

§ **157.** — La détermination de la différence de niveau entre deux sommets géodésiques s'obtient par l'observation des distances zénithales. La méthode des distances zénithales réciproques et simultanées repose sur l'hypothèse que la trajectoire lumineuse fait des angles *égaux* avec la droite qui joint ses deux extrémités : les observations de Bessel (*Gradmessung*, p. 172) et celles de Baeyer (*Nivellement zwischen Swinemunde und Berlin*) ont prouvé que cette méthode est la plus exacte de toutes celles que l'on connaît aujourd'hui. Elle part cependant d'une hypothèse évidemment inexacte, puisqu'elle admet une réfraction *égale* en des points où la densité de l'air est *différente;* mais l'erreur est très-peu sensible, lorsque les différences de niveau ne sont pas considérables.



Soient h, h' les hauteurs de deux points A et B au-dessus du niveau de la mer; C le point de rencontre de leurs verticales; les distances zénithales des points B et A, observées des points A et B, sont respectivement $z + dz$, $z' + dz'$, en représentant par dz et dz' les petits angles de réfraction aux points A et B.

Or, le triangle rectiligne A B C donne

$$\begin{array}{ll} \text{l'angle } A = 180^\circ - z - dz \\ \quad \text{»} \quad B = 180 \;\; - z' - dz' \\ \quad \text{»} \quad C = C \\ \hline 180^\circ = 360^\circ + C - (z + dz + z' + dz'); \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$(1)\ldots 180^\circ + C = z + dz + z' + dz'$$

$$(2)\ldots \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$$

$$(3)\ldots \frac{1}{2}(A-B) = \frac{1}{2}(z'+dz'-z-dz) = 90^\circ - \left(z + dz - \frac{1}{2}C\right)$$

$$= -\left\{90^\circ - \left(z' + dz' - \frac{1}{2}C\right)\right\}.$$

Si l'on désigne par s la distance entre les verticales de A et de B, réduite au niveau de la mer, et par r le rayon de courbure moyen de l'arc s, on obtient, pour le cas où l'angle C est très-petit,

$$C = \frac{s}{r \sin 1''} = \frac{sR''}{r};$$

R'' étant, comme l'on sait, égal au nombre de secondes compris dans l'arc égal au rayon, ou à $206264'',8$.

Faisons en outre $dz + dz' = kC$: la quantité k est ce que Gauss nomme le *coefficient de réfraction* *. Introduisant kC dans l'équation (1), et substituant à C sa valeur trouvée plus haut, on obtient

$$(4)\ \ldots \qquad 1 - k = (z' + z - 180^\circ)\frac{r}{sR''};$$

formule qui donne le coefficient de réfraction en fonction de la distance s, et des distances zénithales réciproques et correspondantes observées aux points A et B.

Dans le triangle A B C, il existe entre les deux côtés $r+h$, $r+h'$, et l'angle compris C, la relation connue

$$2r + h + h' : h' - h = \text{tang}\,\frac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$$

$$= \text{cotg}\,\frac{1}{2}C : \text{tang}\,\frac{1}{2}(z' + dz' - z - dz);$$

* Il est bon d'observer que les auteurs français donnent le nom de *coefficient de réfraction* à la quantité n dans l'équation

$$\frac{dz + dz'}{2} = nC;$$

de sorte que $n = \frac{1}{2}k$.

d'où $h' - h = \left(1 + \frac{h' + h}{2r}\right) 2r \operatorname{tang} \frac{1}{2} C \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z' + dz' - z - dz)$.

Comme h et h' sont négligeables par rapport à r, et que C est un angle très-petit, on peut faire la première parenthèse égale à l'unité, et remplacer $2r \operatorname{tang} \frac{1}{2} C$ par la distance s. Transportant ces valeurs, et celles (3) de $\frac{1}{2}$ (A—B), dans la dernière équation, on obtient, pour la différence de niveau entre A et B, les expressions :

$$(5) \ldots \qquad h' - h = s \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z' + dz' - z - dz)$$

$$= s \operatorname{cotg} \left(z + dz - \frac{1}{2} C\right);$$

$$h - h' = s \operatorname{cotg} \left(z' + dz' - \frac{1}{2} C\right).$$

En outre, si l'on admet que l'angle de réfraction est le même en A et en B, on a

$$dz = dz' = \frac{kC}{2} = \frac{ksR''}{2r};$$

et les formules précédentes deviennent

$$(6) \ldots \qquad h' - h = s \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z' - z)$$

$$= s \operatorname{cotg} \left\{ z - \frac{sR''}{2r}(1 - k) \right\};$$

$$h - h' = s \operatorname{cotg} \left\{ z' - \frac{sR''}{2r}(1 - k) \right\}.$$

On pourrait introduire, au lieu de la distance zénithale, l'angle de hauteur, e, que la droite A B fait avec l'horizon de A : on a

$$e = 90^0 - z,$$

d'où $$z = 90^0 - e;$$

et par suite :

$$h' - h = s \operatorname{cotg} \left\{ 90^0 - \left[e + \frac{sR''}{2r}(1 - k) \right] \right\} = s \operatorname{tang} \left\{ e + \frac{sR''}{2r}(1 - k \right\};$$

ou bien, en remplaçant la tangente par l'arc, ce qui est permis vu la petitesse de l'angle e :

$$(7) \ldots \qquad h' - h = \frac{es}{R''} + s^2\left(\frac{1-k}{2r}\right).$$

Lorsque, d'un point A, on a observé la distance zénithale de l'horizon de la mer, AB devient une *tangente* au point B; par suite $h'=0$ et $z'=90^\circ$. Dans ce cas on tire de l'équation (4)

$$(8) \ldots \qquad 1 - k = \frac{r}{sR''}(z - 90^\circ);$$

et de l'équation (6)

$$-h = s \tang \frac{1}{2}(90^\circ - z),$$

$$\text{ou } (9) \ldots \qquad h = s \tang \frac{1}{2}(z - 90^\circ).$$

Prenant la valeur de z dans l'équation (8), et la transportant dans la deuxième des équations (6), on trouve

$$h = s \tang \frac{sR''}{2r}(1-k):$$

ou bien, en remplaçant la tangente par l'arc,

$$(10) \ldots \qquad h = s^2\left(\frac{1-k}{2r}\right).$$

Transportant enfin cette valeur de $s = \sqrt{\frac{2rh}{1-k}}$ dans l'équation (9), on obtient, en fonction de la distance zénithale de l'horizon de la mer, la hauteur du point de station A, indépendamment de la distance; savoir :

$$(11) \ldots h = \frac{2r}{1-k} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(z - 90^\circ) = \frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{z - 90^\circ}{R''}\right)^2$$

$$= \frac{r}{2(1-k)}\left(\frac{-e}{R''}\right)^2.$$

Lorsqu'on égale entre elles les expressions (10) et (11), on obtient

$$(12)\ldots\; s = \frac{2r}{1-k}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(z-90^\circ) = \frac{r}{1-k}\left(\frac{z-90^\circ}{R''}\right) = \frac{-\,re}{(1-k)R''}.$$

Dans la dernière expression, e est négatif par lui-même, puisqu'il indique la dépression de l'horizon de la mer. La valeur de s est donc toujours positive.

Les formules que nous venons de trouver renferment tout ce qui est nécessaire au calcul d'un nivellement trigonométrique.

Quand on a observé plusieurs fois les distances zénithales réciproques et correspondantes entre deux stations, on calculera de la manière suivante l'erreur probable des observations.

M étant la valeur moyenne de $\frac{1}{2}(z'-z)$ dans l'équation (6), l'erreur de chaque valeur particulière est

$$\Delta = M - \frac{1}{2}(z'-z)\,;$$

l'erreur moyenne $\varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n-1}}$, n étant le nombre des observations; l'erreur probable $r'' = 0{,}6745\,\varepsilon$, en secondes;

ou bien $$r_1 = \frac{sr''}{R''},$$ en fonction de la distance s.

Soient r', r'', r'''... les erreurs probables relatives à différents couples de stations successives: l'erreur probable du résultat définitif sera

$$R = \sqrt{\;}\,[r'^2 + r''^2 + r'''^2 \ldots].$$

COMPENSATION DES ERREURS D'UN NIVELLEMENT TRIGONOMÉTRIQUE, D'APRÈS LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

§ **158.** — Lorsque, dans une chaîne de triangles, on a mesuré *plus* de distances zénithales qu'il n'est absolument nécessaire pour la détermination des différences de niveau entre les sommets, il en résulte des équations de condition, comme dans la mesure des angles horizontaux; et ces équations doivent être rigoureusement satisfaites, si l'on veut que les hauteurs déterminées, comparées entre elles, ne présentent aucune contradiction. Ces conditions sont exprimées en fonction des *erreurs*, c'est-à-dire des différences qui existent entre les déterminations qui sont indispensables et celles qui sont superflues : elles peuvent par conséquent, comme les équations de condition d'un réseau horizontal, être traitées par la méthode des moindres carrés.

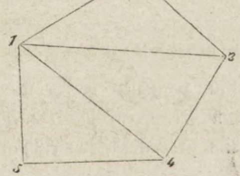
La première chose à faire, pour former ces conditions, est de chercher une règle qui en fasse connaître le nombre, de manière à n'introduire dans le calcul ni trop ni trop peu de conditions.

Dans un triangle A B C on peut observer *trois* différences de niveau, savoir : entre A et B, entre A et C, et entre B et C. Prenons pour point de départ le sommet A (dont la cote est supposée connue) : les deux premières différences de niveau détermineront les cotes des points B et C : la troisième fournit donc une équation de condition, tout comme la mesure du troisième angle d'un triangle. Ainsi « lors-« que, dans un triangle, on a observé les différences de niveau entre « les sommets pris deux à deux, il existe une équation de condition « relative au nivellement (*eine Höhenbedingung*). »

La formation de cette espèce d'équation est bien simple. En effet supposons que l'on parte d'un sommet du triangle, et qu'on en suive le contour, de manière à revenir au point de départ ; soient h_1, h_2, h_3 les cotes des trois sommets : la somme de leurs différences de niveau sera

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_1),$$

valeur identiquement nulle. Par suite « la somme des différences « de niveau entre les trois sommets « d'un triangle doit être égale à zéro. »



La même relation a lieu évidemment pour tous les sommets d'un polygone quelconque.

De plus « cette relation sera néces-« sairement satisfaite dès que la con-« dition précédente sera remplie pour « les triangles qui composent le po-« lygone. » Soit en effet le pentagone 1. 2. 3. 4. 5 ; et supposons que l'on donne

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_1) = 0$$
$$(h_1 - h_3) + (h_3 - h_4) + (h_4 - h_1) = 0$$
$$(h_1 - h_4) + (h_4 - h_5) + (h_5 - h_1) = 0.$$

Ajoutant, on a

$$(h_1 - h_2) + (h_2 - h_3) + (h_3 - h_4) + (h_4 - h_5) + (h_5 - h_1) = 0;$$

et de même pour un polygone quelconque.

Cette considération facilite beaucoup la formation des équations de condition ; car il en résulte que, dans toute figure composée de triangles, il suffit de chercher les équations de condition dans ces triangles mêmes : dès qu'elles seront satisfaites, il en sera de même pour toutes celles que peut présenter la figure; et chaque sommet, abaissé d'une quantité égale à sa cote, se trouvera sur une seule et même surface de niveau, *celle de comparaison*.

On n'éprouvera donc aucune difficulté à déterminer le nombre d'équations de condition qui existent dans une triangulation : il est égal au nombre de différences de niveau observées, moins le nombre de différences de niveau qui (à partir d'un point initial) est strictement nécessaire pour la détermination des autres points. Supposons que la triangulation ait n sommets ; elle exige $(n-1)$ différences de niveau : si donc on en a réellement observé m, il y aura $m-n+1$ équations de condition.

Pour le triangle, $m=3$, $n=3$: il y a donc 1 équation de condition.

Pour le quadrilatère avec deux diagonales, $m=6$, $n=4$: donc 3 équations.

Pour le quadrilatère avec 1 point intérieur, $m=8$, $n=5$: donc 4 équations, etc.

Représentons par H la différence de niveau entre deux points A et B ; par z la distance zénithale de B observée de A : nous aurons d'après l'équation (6)

$$H = s \cot g \left\{ z - \frac{sR''}{2r}(1-k) \right\}.$$

Pour connaître la variation de différence de niveau qui correspond à une erreur sur la distance zénithale observée, différentions l'expression précédente par rapport à H et à z; il vient

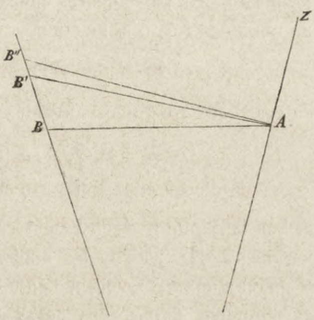
$$dH = - \frac{s\,dz}{\sin^2 \left\{ z - \frac{sR''}{2r}(1-k) \right\}}.$$

Mais dans les observations géodésiques, l'angle $\left\{z - \frac{sR''}{2r}(1-k)\right\}$ s'écarte toujours très-peu de 90°; et l'on peut, sans erreur sensible, faire son sinus égal à l'unité : il vient donc

$$dH = -sdz.$$

Si dz exprime des secondes, il faudra le diviser par R″, et alors dH sera exprimé dans la même unité que la distance s. On a donc en définitive

$$dH = -\frac{sdz''}{R''}.$$



Cette formule s'explique géométriquement d'une manière très-simple. Z A B′ étant l'angle z; B′ A B″ l'erreur dz, on aura, en supposant le triangle différentiel B′ A B″ rectangle en B′,

$$B'B'' = B''A \sin dz;$$

mais B′B″ n'est autre chose que dH; B″A diffère très-peu de s; donc

$$dH = s \sin dz = sdz'' \sin 1'' = \frac{sdz''}{R''}.$$

Telle est la valeur *absolue* de dH. Quant aux signes, on voit que, lorsque z augmente, H diminue; c'est-à-dire que dH et dz sont toujours de signes contraires.

D'après cela, si les différences de niveau des trois sommets d'un triangle sont $+H_1, +H_2, -H_3$; les longueurs des côtés s_1, s_2, s_3; les corrections inconnues à faire subir aux distances zénithales (1), (2), (3); on formera l'équation de condition en ajoutant $-\frac{s_1}{R''}(1)$ à $+H_1$; $-\frac{s_2}{R''}(2)$ à $+H_2$ et $+\frac{s_3}{R''}(3)$ à $-H_3$; et l'on aura

$$0 = H_1 + H_2 - H_3 - \frac{s_1}{R''}(1) - \frac{s_2}{R''}(2) + \frac{s_3}{R''}(3);$$

ou bien, en remplaçant par $\mathfrak{A}$ la quantité toute connue $H_1 + H_2 - H_3$, et par a, a', a'' les coefficients des corrections,

$$0 = \mathfrak{A} + a\,(1) + a'\,(2) + a''\,(3).$$

Pour généraliser la question, nous admettrons que le nombre des distances zénithales observées n'est pas le même aux différentes stations : il faudra donc accorder aux résultats des poids p_1, p_2, $p_3 \ldots$ proportionnels aux nombres d'observations, et il s'agira de réduire à un minimum relatif la fonction

$$2S = p_1\,(1)^2 + p_2\,(2)^2 + p_3\,(3)^2 \ldots \qquad \ldots (1)$$

eu égard aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} u &= 0 = \mathfrak{A} + a\,(1) + a'\,(2) + a''\,(3) \\ u' &= 0 = \mathfrak{B} + b\,(1) + b'\,(2) + b''\,(3) \ldots \text{ etc.} \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

Si l'on multiplie respectivement ces équations par les facteurs indéterminés I, II...; qu'on les différentie par rapport à (1), (2), (3)...; et qu'on ajoute les coefficients différentiels (qui, d'après la condition du minimum, doivent être égaux à zéro) aux coefficients différentiels analogues tirés de (1), on aura :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{dS}{d(1)} + \frac{du}{d(1)}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{d(1)}\,\mathrm{II} + \ldots \\ 0 &= \frac{dS}{d(2)} + \frac{du}{d(2)}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{d(2)}\,\mathrm{II} + \ldots \\ 0 &= \frac{dS}{d(3)} + \frac{du}{d(3)}\,\mathrm{I} + \frac{du'}{d(3)}\,\mathrm{II} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3)$$

Mais, d'après l'équation (1),

$$\frac{dS}{d(1)} = p_1\,(1)\,; \quad \frac{dS}{d(2)} = p_2\,(2)\,; \quad \frac{dS}{d(3)} = p_3\,(3) \ldots$$

En outre on a

$$\frac{du}{d(1)} = a\,, \quad \frac{du'}{d(1)} = b \ldots \quad \frac{du}{d(2)} = a'\,, \quad \frac{du'}{d(2)} = b' \ldots$$

Ces valeurs, substituées dans les équations précédentes, les transforment en

$$0 = p_1\,(1) + a\,\mathrm{I} + b\,\mathrm{II} + \ldots$$
$$0 = p_2\,(2) + a'\,\mathrm{I} + b'\,\mathrm{II} + \ldots$$
$$0 = p_3\,(3) + a''\,\mathrm{I} + b''\,\mathrm{II} + \ldots$$
$$\vdots$$

et l'on a

$$\left.\begin{aligned} (1) &= -\frac{1}{p_1}\left\{ a\,\mathrm{I} + b\,\mathrm{II} + \ldots \right\} \\ (2) &= -\frac{1}{p_2}\left\{ a'\,\mathrm{I} + b'\,\mathrm{II} + \ldots \right\} \\ (3) &= -\frac{1}{p_3}\left\{ a''\,\mathrm{I} + b''\,\mathrm{II} + \ldots \right\}. \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Transportant ces valeurs de (1), (2), (3)..... dans les équations (2), on pourra déterminer les coefficients I, II...; et ceux-ci, introduits dans les équations (4), permettront de déterminer les corrections (1), (2), (3)...

Pour opérer avec facilité, on négligera le signe *moins* qui précède le second membre des équations (4), en transportant les valeurs de (1), (2), (3) dans les équations (2) : on obtiendra ainsi les équations finales

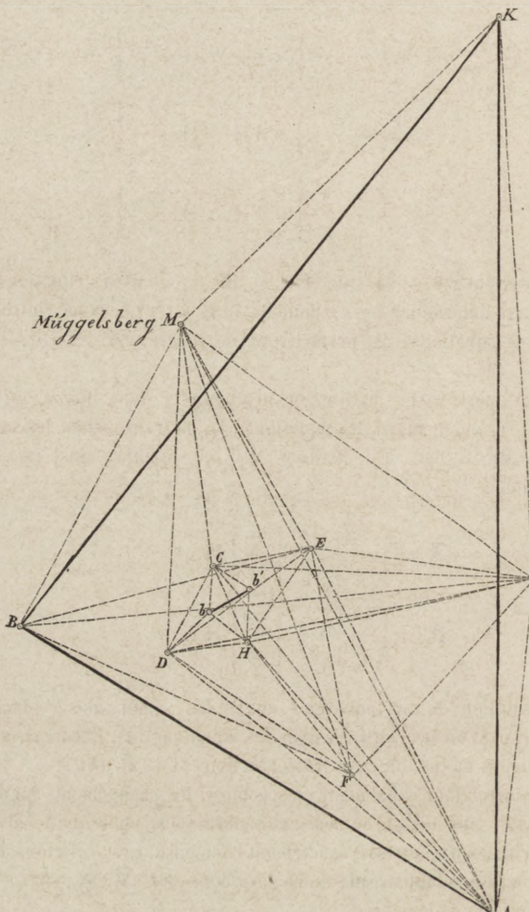
$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{A} &= \left[\frac{aa}{p}\right]\mathrm{I} + \left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{II} + \ldots \\ -\mathfrak{B} &= \left[\frac{ab}{p}\right]\mathrm{I} + \left[\frac{bb}{p}\right]\mathrm{II} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

La résolution de ces équations donne les valeurs des coefficients I, II...; et si on les substitue dans les équations (4), débarrassées de leurs signes moins, on aura les corrections (1), (2), (3)...

Ces corrections expriment, en secondes, les changements qu'il faut faire subir aux distances zénithales observées, pour que le nivellement trigonométrique soit exactement compensé. Les variations de niveau correspondantes, que nous désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3... s'obtiendront par la formule

$$\Delta_1 = \frac{s_1}{R''}\,(1).$$

§ **159.** — Pour déterminer la hauteur du Müggelsberg, Baeyer en a observé la distance zénithale, en sept stations dont les cotes étaient



déjà connues : les différences de niveau qu'il a obtenues sont consignées dans le tableau suivant.

ENTRE	NOMBRE D'OBSERVATIONS.	DIFFÉRENCES DE NIVEAU.
B et Müggelsberg.	10	$+\ 4^{T},859 - \frac{s}{R''}$ (1)
C »	4	$+\ 13,516 - \frac{s}{R''}$ (2)
D »	9	$+\ 15,206 - \frac{s}{R''}$ (3)
E »	3	$+\ 14,413 - \frac{s}{R''}$ (4)
F »	2	$+\ 13,109 - \frac{s}{R''}$ (5)
G »	6	$+\ 1,548 - \frac{s}{R''}$ (6)
A »	2	$+\ 5,098 - \frac{s}{R''}$ (7)

Comme sept différences de niveau ont été observées, et qu'il n'y a qu'un seul point à déterminer, les équations de condition sont au nombre de six savoir :

1° B . M . C.

$$\text{Entre B et M} \ldots + \ 4,859 - \frac{s}{R''}(1)$$

$$\text{» M et C} \ldots - 13,516 + \frac{s}{R''}(2)$$

$$\text{» C et B} \ldots + \ 8,582$$

$$0 = - \ 0,075 - \frac{s}{R''}(1) + \frac{s}{R''}(2).$$

Les cinq autres équations de condition ont été formées d'une manière analogue : ce sont

2°) ... B . M . E $\quad 0 = + 0,361 - \frac{s}{R''}(1) + \frac{s}{R''}(4)$

3°) ... B . M . G $\quad 0 = + 0,196 - \frac{s}{R''}(1) + \frac{s}{R''}(6)$

$$4^{o}) \ldots \text{B . M . D} \qquad 0 = +\,0{,}596 - \frac{s}{R''}(1) + \frac{s}{R''}(3)$$

$$5^{o}) \ldots \text{D . F . M} \qquad 0 = -\,0{,}199 + \frac{s}{R''}(3) - \frac{s}{R''}(5)$$

$$6^{o}) \ldots \text{A . D . M} \qquad 0 = +\,0{,}290 - \frac{s}{R''}(3) - \frac{s}{R''}(7).$$

Les valeurs de s sont données par leurs logarithmes dans le tableau suivant, ce qui permet de former les expressions numériques des corrections (1), (2), (3)... (7) en fonction des coefficients indéterminés I, II, III... VI.

BM ...	3,984 0791
CM ...	3,832 4575
DM ...	3,966 4442
EM ...	3,858 3222
FM ...	4,128 3087
GM ...	4,085 4495
AM ...	4,277 2733.

$$(1) = \frac{1}{10}\left\{0{,}04673\,.\,(-\,\mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{IV})\right\}$$

$$(2) = \frac{1}{4}\left\{0{,}03296\,.\,(+\,\mathrm{I})\right\}$$

$$(3) = \frac{1}{9}\left\{0{,}04488\,.\,(+\,\mathrm{IV} + \mathrm{V} - \mathrm{VI})\right\}$$

$$(4) = \frac{1}{3}\left\{0{,}03499\,.\,(+\,\mathrm{II})\right\}$$

$$(5) = \frac{1}{2}\left\{0{,}06515\,.\,(-\,\mathrm{V})\right\}$$

$$(6) = \frac{1}{6}\left\{0{,}05902\,.\,(-\,\mathrm{III})\right\}$$

$$(7) = \frac{1}{2}\left\{0{,}09180\,.\,(-\,\mathrm{VI})\right\}.$$

Les équations finales à résoudre pour la détermination des facteurs sont donc

$$
\begin{aligned}
+0{,}075 &= +0{,}000\,49000\ \mathrm{I} + 0{,}000\,21835\,[\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}]\\
-0{,}361 &= +0{,}000\,62636\ \mathrm{II} + 0{,}000\,21835\,[\mathrm{III}+\mathrm{IV}]\\
-0{,}196 &= +0{,}000\,79898\ \mathrm{III} + 0{,}000\,21835\ \mathrm{IV}\\
-0{,}596 &= +0{,}000\,44212\ \mathrm{IV} + 0{,}000\,22377\,[\mathrm{V}-\mathrm{VI}]\\
+0{,}199 &= +0{,}002\,34573\ \mathrm{V} - 0{,}000\,22377\ \mathrm{VI}\\
-0{,}290 &= +0{,}004\,43750\ \mathrm{VI}.
\end{aligned}
$$

Et l'élimination donne

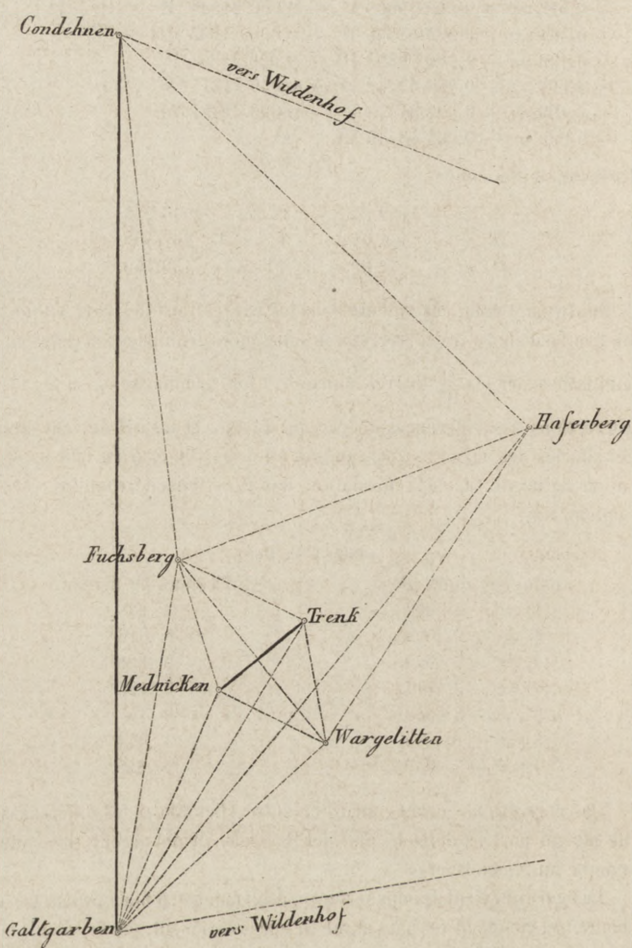
$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= +1152{,}853 \ldots & \mathrm{IV} &= -2015{,}226\\
\mathrm{II} &= -301{,}041 \ldots & \mathrm{V} &= +262{,}409\\
\mathrm{III} &= +72{,}630 \ldots & \mathrm{VI} &= -153{,}740.
\end{aligned}
$$

Substituant enfin ces valeurs dans les expressions des corrections, on trouve d'abord les corrections des distances zénithales ; et celles-ci, multipliées par les $\frac{s}{R''}$ correspondants, font connaître ensuite les corrections des différences de niveau. Les dz et les $d\mathrm{H}$ doivent être ici affectés des mêmes signes, puisqu'on a déjà eu égard à leur opposition naturelle, dans la formation des équations de condition. On obtient ainsi

CORRECTION DES	
distances zénithales.	différences de niveau.
(1) = + 5″,097	+ 0ᵀ,238
(2) = + 9 ,500	+ 0 ,313
(3) = − 7 ,974	− 0 ,358
(4) = − 3 ,511	− 0 ,123
(5) = − 8 ,548	− 0 ,557
(6) = + 0 ,714	+ 0 ,042
(7) = + 7 ,057.	+ 0 ,648.

Ces corrections feront concorder entre elles toutes les différences de niveau portées dans le premier tableau, et donneront une cote unique au Müggelsberg.

La figure qui vient de nous servir (p. 362) montre, d'une manière très-heureuse, comment on peut agrandir successivement, par le calcul, la base mesurée *bb'*, et la rattacher au triangle de premier ordre A B K. On y distingue, enveloppés l'un dans l'autre, trois quadrilatères avec leurs diagonales, savoir : 1° *b* C *b'* H ; 2° C D H E ; 3° D M G F ; et les sommets du dernier servent de stations pour déterminer les sommets du premier triangle géodésique.



§ **160**. — Souvent, dans une triangulation, le nivellement des sommets n'est qu'une opération d'une importance secondaire. Dans ce cas, on peut procéder à la compensation des résultats par un moyen moins rigoureux, mais beaucoup plus expéditif que le précédent. C'est ce qu'a fait Bessel (*Gradmessung in Ostpreussen*, p. 203). Nous allons exposer la marche qu'il a suivie pour compenser le système pentagonal formé par les cinq premiers sommets de sa triangulation.

Les résultats immédiats de ses distances zénithales lui ont fourni les différences de niveau suivantes.

TRENK	Mednicken . .	+ 0ᵀ, 413	2 observations.
	Fuchsberg . .	+ 17 , 930	2 »
	Wargelitten .	+ 5 , 030	2 »
	Galtgarben. .	+ 38 , 475	2 »
MEDNICKEN . .	Trenk	— 0 , 652	2 »
	Wargelitten .	+ 4 , 655	2 »
	Galtgarben. .	+ 38 , 371	3 »
	Fuchsberg . .	+ 17 , 290	2 »
FUCHSBERG . .	Wargelitten .	— 12 , 825	5 »
	Mednicken. .	— 17 , 570	3 »
	Galtgarben. .	+ 21 , 254	3 »
	Trenk	— 7 , 302	2 »
WARGELITTEN	Fuchsberg . .	+ 12 , 882	2 »
	Trenk	— 5 , 190	2 »
	Galtgarben. .	+ 33 , 832	2 »
	Mednicken. .	— 4 , 740	2 »
GALTGARBEN. .	Wargelitten .	— 33 , 836	4 »
	Fuchsberg . .	— 20 , 892	2 »
	Mednicken. .	— 38 , 634	5 »
	Trenk	— 39 , 055	4 »

Il commence par réunir en un seul chaque double résultat provenant des observations réciproques de deux sommets : pour cela il prend la moyenne des deux différences de niveau, en ayant égard au nombre des observations. Soit donc T la hauteur absolue de Trenk, M celle de Mednicken, etc., il obtient

T =	M =	F =	W =	G =
T ———	T + 0^T,533	T +17^T,994	T + 5^T,110	T +38^T,862
M— 0^T,533	M ———	M+17 ,458	M + 4 ,698	M +38 ,535
F —17 ,994	F —17 ,458	F ———	F —12 ,841	F +21 ,109
W— 5 ,110	W— 4 ,698	W+12 ,841	W ———	W+33 ,835
G —38 ,862	G —38 ,535	G —21 ,109	G—33 ,835	G ———

Qu'on imagine maintenant un point dont la cote, S, soit la moyenne arithmétique de celles des cinq points en question : on aura, pour Trenk, par exemple :

$$5T = (T + M + F + W + G) - 0{,}533 - 17{,}994 - 5{,}110 - 38{,}862\,;$$

ou $\quad T = S - 12{,}500$

On aurait de même

$$\begin{aligned} M &= S - 12{,}032 \\ F &= S + \ \ 5{,}437 \\ W &= S - \ \ 7{,}374 \\ G &= S + 26{,}468. \end{aligned}$$

Ces équations font connaître les *différences* de niveau des cinq points en question. Pour avoir la cote absolue, S, du point fictif, il suffit de rattacher l'un ou l'autre des cinq points à un point dont la cote absolue, H, soit déjà connue. Ainsi, Bessel a trouvé d'autre part

$$\begin{aligned} F &= H - \ \ 6{,}994 = S + \ \ 5{,}437 \\ W &= H - 19{,}626 = S - \ \ 7{,}374 \\ G &= H + 14{,}182 = S + 26{,}468 \end{aligned}$$

$$\text{Moyenne} \ldots \quad S = H - 12{,}323.$$

Enfin pour déterminer les cotes des autres points de sa triangulation, qui ont été observés de plusieurs sommets connus, Bessel prend la moyenne des résultats, en supposant les poids proportionnels aux nombres d'observations, et réciproques aux distances.

La figure de la page 366 offre un nouvel exemple de la manière dont on peut relier une petite base au premier côté géodésique d'une triangulation. La base *Trenk-Mednicken*, de 935 toises, est commune à deux triangles, dont les sommets, *Fuchsberg* et *Wargelitten*, sont distants de 2953 toises. La droite qui joint ceux-ci sert elle-même de base à deux triangles dont les sommets, *Galtgarben* et *Haferberg*, sont éloignés l'un de l'autre de 10782 toises ; enfin la ligne qui unit ces deux derniers points, aussi bien que les lignes *Galtgarben-Fuchsberg* et *Fuchsberg-Haferberg*, déterminent le plus petit côté, *Galtgarben-Condehnen*, du triangle de 1er ordre, *Galtgarben-Condehnen-Wildenhof*. On a donc mesuré 25 angles au lieu de 10 qui auraient suffi à la rigueur, ce qui donne 15 équations de condition entre les angles observés : la précision des angles nécessaires à la construction du réseau est ainsi considérablement augmentée.

Bessel ne doute pas de l'exactitude du côté *Galtgarben-Condehnen*. Les principales raisons qu'il en donne sont : 1° la précision avec laquelle la petite base a pu être mesurée ; 2° celle avec laquelle son théodolite permettait d'observer les angles ; 3° enfin les vérifications nombreuses qu'offre le petit réseau destiné à dilater la base jusqu'à la longueur du premier côté.

§ **161**. — Lorsqu'il existe quelque doute sur la valeur du coefficient de réfraction, l'incertitude qui en rejaillit sur les différences de niveau est d'autant plus grande que l'on opère sur des points plus éloignés : elle croît, avons-nous vu (§ 157, formule 10), comme le carré de la distance. Si donc on veut joindre deux points A et B par un nivellement composé, l'erreur probable qu'entraîne, à chaque station, l'incertitude du coefficient k, est inversement proportionnelle au carré du nombre n de parties dans lesquelles on a partagé la distance A B. D'ailleurs l'erreur probable du résultat définitif est (§ 117) directement proportionnelle à la racine carrée du nombre n : on peut donc la représenter par $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$; et l'on voit qu'elle diminue rapidement lorsqu'on augmente le nombre des stations intermédiaires. C'est le moyen qu'a adopté le colonel Coraboeuf, dans son nivellement des Pyrénées entre la Méditerranée et l'Océan, et il lui a parfaitement réussi. Il est vrai que cet habile observateur avait en outre l'avantage d'opérer dans une région très-élevée, et que ses rayons visuels étaient ordinairement très-éloignés de la surface du sol.

Dans la pratique, on détermine la valeur du coefficient de réfraction, k, par des distances zénithales réciproques et simultanées ; et on la calcule au moyen de la formule (4), § 157 :

$$1 - k = \frac{r}{sR''}(z + z' - 180^\circ).$$

Baeyer adopte, dans le voisinage des côtes de la mer, la valeur $k = 0{,}1362$; d'où $\log \frac{R''}{2r}(1 - k) = \bar{2}{,}43458$; et, dans l'intérieur des terres, il prend $k = 0{,}1239$; d'où $\log \frac{R''}{2r}(1 - k) = \bar{2}{,}44080$. Ces valeurs nous paraissent devoir convenir à notre pays.

Il y a quelque chose de forcément arbitraire dans la fixation du poids d'une série d'observations, faites dans le but de déterminer la valeur de k, par des distances zénithales.

Si k, en effet, était une grandeur constante, dont l'erreur ne pût dépendre que des erreurs d'observation, dz, l'erreur probable d'une détermination fondée sur un nombre a d'observations serait (§ 120)

$$\varepsilon = \sqrt{\left\{\frac{1}{a} \cdot \frac{r^2\,dz^2}{s^2\,R''^2}\right\}};$$

et l'erreur probable déduite de a observations faites à une station, et de b observations faites à la station réciproque, serait

$$\varepsilon = \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{r^2\,dz^2}{s^2\,R''^2}\right\}}.$$

Le poids correspondant serait donc

$$P = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{ab\,s^2\,R''^2}{(a+b)\,r^2\,dz^2}.$$

D'ailleurs, comme les poids sont simplement des quantités relatives, on peut supprimer la constante $\frac{R''^2}{r^2\,dz^2}$, et prendre pour poids

$$P = \frac{ab\,.\,s^2}{a+b}.$$

Mais d'un autre côté, si l'inconstance de k était la seule cause d'incertitude, le poids P serait indépendant de la distance, et l'on aurait $\frac{1}{P}$ proportionnel à $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, ou bien

$$P = \frac{ab}{a+b}.$$

« Il n'est pas douteux, dit Bessel, que l'incertitude provenant de « l'inconstance de k ne soit plus à craindre que les erreurs commises « dans la mesure des distances zénithales ; ainsi, pour avoir égard à la « fois aux deux causes d'erreurs, nous admettrons

$$« \quad P = \frac{ab\sqrt{s}}{a+b}. »$$

Dans le cas où les observations sont réciproques et simultanées, on a nécessairement $a = b$: le poids d'une série est donc alors

$$P = \frac{a}{2}\sqrt{s}.$$

---

§ **162.** — Les observations conditionnelles, que nous avons appris à compenser (§ 138), servent en général à calculer d'autres quantités qui en sont des fonctions connues : il nous faut apprécier *la précision de ces fonctions.*

Cette question doit être envisagée sous un point de vue tout particulier. Comme, par hypothèse, les observations sont en nombre *surabondant*, la quantité à calculer ne doit renfermer *extérieurement*, dans son expression, que les observations strictement nécessaires, et les observations surabondantes n'y *apparaîtront* pas : cependant, puisque la compensation *a été opérée* au moyen de *toutes* les observations, les résultats surabondants se trouvent *implicitement* dans la fonction.

Soit donc u la fonction à calculer, liée à un certain nombre d'observations (non à *toutes*) par la relation directe

$$u = \mathrm{f}\,(V', V'', V''' \ldots) \qquad \ldots (s)$$

On a calculé exactement

$$u = \mathrm{f}\,(o' + x'; \quad o'' + x''; \quad o''' + x''' \ldots),$$

en remplaçant les V par des $(o + x)$.

Si ces V seuls avaient été observés, et s'ils étaient indépendants les uns des autres, nous n'aurions qu'à poser (§ 120)

$$du = l'\,dV' + l''\,dV'' + l'''\,dV''' \ldots; \qquad \ldots (s')$$

et, en supposant les observations également exactes, nous en déduirions immédiatement

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{[l^2]}\,; \quad \frac{1}{P} = [l^2]\,;$$

en prenant pour unité de poids l'observation elle-même.

Mais tel n'est pas le cas. Nous ne pouvons employer l'équation (s′) que pour déduire, des variations *données* des V, les variations *correspondantes* de u : elle n'est donc plus applicable ici, dans le sens du § 120, parce que les dV ne sont plus indépendants les uns des autres, mais sont liés aux V et dV qui n'apparaissent pas dans la formule (s), et par conséquent liés aussi entre eux, par les équations

$$\begin{aligned} 0 &= a'dV' + a''dV'' + a'''dV''' + a^{iv}dV^{iv}\ldots \\ 0 &= b'dV' + b''dV'' + b'''dV''' + b^{iv}dV^{iv}\ldots \qquad \ldots (s'') \\ 0 &= c'dV' + c''dV'' + c'''dV''' + c^{iv}dV^{iv}\ldots \end{aligned}$$

qui ne sont autre chose que les différentielles des équations (r) du § 138, dans lesquelles nous faisons les $df = 0$, puisque les équations de condition (r″) sont satisfaites par la compensation que nous supposons avoir été effectuée. N'oublions pas d'ailleurs que nous ne pouvons admettre pour les dV que des valeurs qui rendent $[\Delta^2]$ un minimum pour *toutes* les observations.

Si donc nous voulons, de l'erreur moyenne des observations, conclure l'erreur moyenne de la quantité u, nous ne devons pas conserver les équations (s) et (s′); mais nous devons d'abord chercher à former une autre équation

$$u = f'(V', V'', V''', V^{iv}\ldots) \qquad \ldots (s''')$$

qui jouisse de la double propriété : 1° de renfermer *toutes* les quantités observées et compensées; 2° de donner pour u, lorsqu'on y remplace les V par les $(o + x)$, la même valeur que l'équation (s).

On peut trouver un nombre infini de pareilles équations : il suffit pour cela d'ajouter à l'équation (s) les équations (r), après avoir multiplié chacune de ces dernières par un coefficient arbitraire, r ; on obtient ainsi

$$u = f(V', V'', V'''\ldots) + r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 \ldots \qquad \ldots (s^{iv})$$

Or, si l'on remplace dans cette équation les V par des $(o + x)$, les derniers termes s'évanouiront d'eux-mêmes, par le fait de la compensation supposée effectuée.

Nous verrons tout à l'heure comment il faut déterminer les r convenables : pour le moment, remarquons que l'équation (s^{iv}), étant différentiée, donnera une équation de la forme générale

$$du = L'dV' + L''dV'' + L'''dV''' + L^{iv}dV^{iv} \ldots, \quad \ldots (s^{v})$$

qui diffère de l'équation (s') en ce qu'elle contient *tous* les V. Si donc nous pouvions déterminer tous les L, le problème serait résolu, car nous aurions

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{[L^2]}$$

$$\frac{1}{P} = [L^2],$$

qui nous feraient connaître l'erreur moyenne ou le poids de la fonction.

Or, en égalant (s^{v}) à la différentielle de (s^{iv}), on a

$$\begin{aligned} &L'dV' + L''dV'' + L'''dV''' + L^{iv}dV^{iv} \ldots \\ &= df\,(V', V'', V''' \ldots) + r_1 df_1 + r_2 df_2 + r_3 df_3 \ldots; \end{aligned}$$

ou bien, d'après (s') et (s''),

$$\begin{aligned} = l'dV' + l''dV'' + l'''dV''' &+ r_1(a'dV' + a''dV'' + a'''dV''' + a^{iv}dV^{iv} \ldots) \\ &+ r_2(b'dV' + b''dV'' + b'''dV''' + b^{iv}dV^{iv} \ldots) \\ &+ r_3(c'dV' + c''dV'' + c'''dV''' + c^{iv}dV^{iv} \ldots) \end{aligned}$$

Égalant les coefficients des différents dV, on a

$$\left.\begin{aligned} L' &= l' + a' r_1 + b' r_2 + c' r_3 + \ldots \\ L'' &= l'' + a'' r_1 + b'' r_2 + c'' r_3 + \ldots \\ L''' &= l''' + a''' r_1 + b''' r_2 + c''' r_3 + \ldots \\ L^{iv} &= l^{iv} + a^{iv} r_1 + b^{iv} r_2 + c^{iv} r_3 + \ldots \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \ldots (s^{vi})$$

Reste à déterminer les valeurs convenables des r.

Pour cela, nous savons que les seuls dV admissibles sont ceux qui, dans le cas particulier où $dV' = -x'$, $dV'' = -x''$... rendent $[x^2]$ un minimum pour toutes les observations. Nous avons donc à différentier de nouveau (s^{v}) en regardant du comme constant, et en faisant $d\,.\,dV = -dx$. Il vient ainsi

$$0 = L'dx' + L''dx'' + L'''dx''' + L^{iv}dx^{iv} \ldots \quad \ldots (s^{vii})$$

Comparons cette expression avec l'équation (r''') déjà satisfaite,

$$0 = x'dx' + x''dx'' + x'''dx''' + x^{iv}dx^{iv} \ldots \quad \ldots (r''')$$

et nous en conclurons que les L jouissent de l'importante propriété d'*être proportionnels aux* x*;* en d'autres termes que $[L^2]$ doit aussi *être un minimum*. Telle est la condition qui doit nous servir à déterminer les r.

Nous emploierons à cette détermination les équations (s^{VI}), en posant

$$\frac{d\,[L^2]}{dr_1} = 0\,; \quad \frac{d\,[L^2]}{dr_2} = 0\,; \quad \frac{d\,[L^2]}{dr_3} = 0 \;\ldots\; \text{etc}\,;$$

et elles deviendront

$$\begin{aligned} [aL] &= 0 \\ [bL] &= 0 \\ [cL] &= 0 \;.. \;\text{etc.} \end{aligned} \qquad \ldots (s^{VIII})$$

Substituant dans ces dernières expressions les valeurs des L, tirées de (s^{VI}), nous obtenons en définitive, pour déterminer les r (qui sont en nombre c), les équations suivantes qui sont aussi en nombre c.

$$\begin{aligned} [al] + [aa]\, r_1 + [ab]\, r_2 + [ac]\, r_3 \;\ldots &= 0 \\ [bl] + [ab]\, r_1 + [bb]\, r_2 + [bc]\, r_3 \;\ldots &= 0 \\ [cl] + [ac]\, r_1 + [bc]\, r_2 + [cc]\, r_3 \;\ldots &= 0 \ldots \text{etc} \end{aligned}$$

Ces équations, que nous appellerons, avec Gerling, *équations de transport* (*Uebertragungs-Gleichungen*), sont bien faciles à former; car elles ont les mêmes coefficients que les équations *normales*, et n'en diffèrent que par le terme constant. Ayant trouvé les valeurs numériques des r (*coefficients de transport*), on les transportera dans les équations (s^{VI}), et l'on en déduira les valeurs des L. Il ne restera plus alors qu'à calculer

$$\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{[L^2]}\,;$$

$$\frac{1}{P} = [L^2].$$

Insistons, en terminant ce sujet, sur ce que $[L^2]$ est un *minimum*, et par suite P un *maximum*. Il en résulte que « la compensation des « observations conditionnelles rend aussi grande que possible la pré- « cision de toutes les quantités qu'elles doivent servir à calculer. »

§ **163**. — Comme exemple de calcul, reprenons notre triangle A B C [§ 140, 2e exemple], et calculons le côté A C = u, en fonction du côté connu B C $= a = 50000^m$, et des angles compensés. Nous avons ici

$$o' = A = 36^\circ 25' 43''$$
$$o'' = B = 90 \; 36 \; 24$$
$$o''' = C = 52 \; 57 \; 53.$$

La formule (s) est maintenant

$$u = \frac{a \sin o''}{\sin o'},$$
$$u = 84198^m.$$

D'après la remarque qui termine le § précédent, nous savons déjà que cette valeur de u est la plus exacte que l'*on puisse* tirer des observations données. Pour estimer son *degré* de précision, calculons son erreur moyenne.

L'équation $$u = \frac{a \sin o''}{\sin o'},$$

étant différentiée, devient

$$du \sin 1'' = - u \operatorname{cotg} o' \, do' + u \operatorname{cotg} o'' \, do''.$$

Il faut maintenant traduire en nombres cette équation différentielle : nous avons

$$\log \frac{u}{\sin 1''} = 9{,}61087$$

$\log \operatorname{cotg} o' = 0{,}01392$ ... $\log l' = 9{,}62479_n$ ... $l' = -0{,}421491$
$\log \operatorname{cotg} o'' = 8{,}02484_n$ ... $\log l'' = 7{,}63571_n$ ... $l'' = -0{,}004322$
$l''' = -0.$

Comme nous n'avons ici qu'une seule équation de condition, dans laquelle $a' = a'' = a''' = +1$, il s'ensuit que $[al] = -0{,}425813$. Notre équation normale du § 140 nous conduit donc à l'équation de transport

$$-0{,}425813 + 3r_1 = 0;$$

d'où $$r_1 = +0{,}141938.$$

Nos équations (s^{VI}) deviennent par là :

$$L' = -0{,}279553$$
$$L'' = +0{,}137616$$
$$L''' = +0{,}141938.$$

D'où $$[L^2] = 0{,}117234,$$

par élévation au carré et addition.

Comme nous avons trouvé, dans le § 140, l'erreur moyenne d'un angle $= \pm\ 6'',93$, il vient

$$\varepsilon' = \pm\ 6{,}93\sqrt{0{,}117234} = \pm\ 2^m{,}37.$$

Telle est l'erreur à craindre sur le calcul d'un côté : elle provient uniquement de ce que les angles employés à ce calcul sont affectés d'erreurs inévitables, et de ce que la compensation n'est pas absolument rigoureuse; mais la base a est supposée parfaitement exacte. Nous avons ici, en petit, ce qui se passe en grand dans une triangulation : la base, adoptée comme exacte, est transportée par le calcul sur tous les autres côtés du réseau, et l'on obtient pour ces côtés une précision plus ou moins grande, suivant le *nombre* et la *qualité* des angles intermédiaires; mais si la base est affectée d'une erreur, cette erreur se transporte sur les côtés calculés, *proportionnellement* à leur *grandeur*, et s'ajoute à la première.

Voulons-nous nous convaincre, d'une manière pratique, de ce que nous avons gagné en précision par l'observation des trois angles et par la compensation? calculons le $[l^2]$ que nous aurions dû employer, d'après le § 120, s'il n'y avait pas eu d'observations surabondantes : on a dans ce cas

$$[l^2] = 0{,}177679,$$

d'où

$$\varepsilon' = \pm\, 6{,}93\sqrt{0{,}177679} = \pm\ 2^m{,}92.$$

Ainsi, la compensation des deux angles indispensables, au moyen du troisième angle surabondant, a augmenté de près de 1/5 la précision du côté calculé.

Une marche analogue à la précédente permettrait de calculer, dans le 3ᵉ exemple du § 140, le côté 4 . 5 $= u$, en fonction du côté 1 . 2 $= a$, au moyen de la chaîne de triangles qui réunit ces deux côtés. L'équation (s) serait ici

$$u = a\,\frac{\sin o_2 \sin o_4 \sin o_9}{\sin o_3 \sin o_6 \sin o_8}.$$

§ **161**. — Lorsque les observations sont de diverses précisions, les formules à employer pour calculer l'erreur moyenne et le poids de la fonction u seront (§ 120, n^xvii et n^xviii)

$$\varepsilon' \doteq \sqrt{[\varepsilon^2 \mathrm{L}^2]}\,; \qquad \frac{1}{\mathrm{P}} = \left[\frac{\mathrm{L}^2}{p}\right]:$$

reste à savoir comment il faut déterminer, dans ce cas, les coefficients de transport. Or, l'équation (s^{VII}), qui ne change pas, doit maintenant être comparée à

$$0 = p'x'dx' + p''x''dx'' + p'''x'''dx''' \ldots:$$

d'où il résulte que les L doivent être proportionnels aux px, les L^2 aux p^2x^2, et les $\frac{\mathrm{L}^2}{p}$ aux px^2. Ceci nous montre que les r doivent maintenant être déterminés de manière que $\left[\frac{\mathrm{L}^2}{p}\right]$ soit un minimum : on en conclut facilement que les équations (s^{VIII}) doivent être remplacées par

$$\left[\frac{a\mathrm{L}}{p}\right] = 0$$

$$\left[\frac{b\mathrm{L}}{p}\right] = 0$$

$$\left[\frac{c\mathrm{L}}{p}\right] = 0 \ \ldots \ \text{etc.}$$

Transportant dans ces équations les valeurs des L, tirées des équations (s^{VI}) non modifiées, nous trouvons, pour les nouvelles équations de transport,

$$\left[\frac{al}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] r_3 + \ldots = 0$$

$$\left[\frac{bl}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] r_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_3 + \ldots = 0$$

$$\left[\frac{cl}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] r_3 + \ldots = 0 \ \ldots \ \text{etc.}$$

Reste à éliminer les r et à les substituer dans (s^{VI}). On voit qu'il n'y a rien de changé à la marche tracée dans le § **162**, sauf l'introduction du diviseur p.

CONCLUSION.

§ 165. — Ici se termine notre exposition de la *méthode des moindres carrés* et de ses applications. On peut juger maintenant de sa haute utilité, et des précieuses ressources qu'elle offre dans un ordre très-étendu de questions. Pourquoi donc son usage est-il si peu répandu, que la plupart des calculateurs ne la connaissent pour ainsi dire que de nom ? Cette espèce d'antipathie que l'on éprouve en général contre la méthode des moindres carrés s'explique, à notre avis, par les calculs longs et pénibles qu'exige son emploi, et par l'aspect compliqué sous lequel on présente souvent ses formules. Ces deux inconvénients sont réels : aussi les plus grands géomètres de l'Allemagne, Gauss, Jacobi, Encke, Bessel, etc., n'ont-ils pas dédaigné de descendre, à ce sujet, dans de minutieux détails de calcul, pour chercher les moyens d'abréger ou de régulariser le travail.

Grâce aux notations de Gauss, les formules *littérales* sont aujourd'hui aussi simples qu'élégantes ; mais leurs applications *numériques* sont encore très-laborieuses. Cependant, ici comme en toutes choses, les premiers pas sont les plus pénibles : il faut avoir la force, ou plutôt le courage de les faire, et tel calcul, qui paraît effrayant dans les commencements, se simplifie à mesure qu'on le pratique, et enfin ne devient plus qu'un jeu.

Un point très-important pour le calculateur qui veut opérer promptement et avec une exactitude suffisante, c'est de choisir une table de logarithmes *convenable :* j'entends par là qu'elle ne doit pas renfermer plus de décimales qu'il n'en faut ; car les tables volumineuses sont longues à feuilleter. Encke, que l'on peut citer comme l'un des calculateurs les plus habiles et les plus expérimentés de notre époque, dit à ce sujet : « Les durées d'un même calcul, fait avec « des tables à 7, 6 ou 5 décimales, sont comme les nombres 3, 2, 1. »

Quand on s'arrête à *la minute* dans le calcul des angles, et à 1/4000 dans celui des longueurs, des tables à 4 décimales sont suffisantes. Elles doivent aller à 5 décimales, si l'on veut avoir les angles exacts à 5″ près, et les longueurs avec l'approximation de 1/40000 — 6 décimales donnent presque sûrement la demi-seconde, et 7 décimales le vingtième de la seconde.

Un bon calculateur doit bien connaître son sujet. Lorsqu'il s'en sera suffisamment pénétré, il distinguera avec tact ce qui est essentiel de ce qui ne l'est pas ; ce qui est indispensable à la rigueur du résultat, de ce qui ne conduirait qu'à une exactitude apparente et illusoire.

L'ordre, la *division* du travail, facilitent singulièrement les calculs les plus compliqués. Les calculateurs exacts peuvent en général travailler longtemps sans fatigue, parce qu'ils introduisent dans la conduite de leur ouvrage une régularité pour ainsi dire *mécanique*.

Évitez de faire des opérations *de tête*, à moins que vous n'ayez pour elles une aptitude particulière. En général il sera plus sûr, et par conséquent plus court, *d'écrire* tous les calculs que vous avez à faire.

Donnez-vous des moyens fréquents de vérification, surtout dans les commencements d'un long calcul : c'est alors que les erreurs sont les plus communes et les plus fâcheuses.

Enfin, faites d'une seule traite chaque genre d'opérations. Ainsi consacrez plusieurs heures, s'il le faut, rien qu'à former les canevas de vos tableaux numériques ; puis transcrivez *tous* vos logarithmes ; une fois occupé à calculer, effectuez *tous* vos calculs (ordinairement ce ne sont que des additions et des soustractions) ; enfin ouvrez de nouveau les tables, pour chercher *tous* les nombres correspondants aux logarithmes calculés.

La solution d'une question par la méthode des moindres carrés comporte en général quatre parties distinctes : on doit

1° Déterminer les indices de précision, h, h', h''... et multiplier par eux les équations primitives.

2° Établir les équations du minimum, ce qui exige le calcul des coefficients sommatoires.

3° Éliminer les inconnues, ce qui exige le calcul des coefficients auxiliaires.

4° Enfin calculer les poids des inconnues.

Nous allons entrer dans quelques développements sur les trois premiers points, le dernier n'exigeant aucune considération nouvelle.

DÉTERMINATION DES INDICES DE PRÉCISION.

La détermination des divers indices de précision (h), ou, ce qui revient au même, des erreurs probables (r), ou des poids (p), à attribuer à chaque observation, doit précéder les calculs. Si les h sont donnés, on remplacera les équations littérales (p′, § 124) par les suivantes :

$$\begin{aligned}
h\,\Delta &= ahx + bhy + chz + dhv \ldots + nh \\
h'\,\Delta' &= a'h'x + b'h'y + c'h'z + d'h'v \ldots + n'h' \\
h''\Delta'' &= a''h''x + b''h''y + c''h''z + d''h''v \ldots + n''h'' \ldots \text{etc.} ;
\end{aligned}$$

et il faudra rendre un minimum la somme des carrés des seconds membres. Il est clair d'ailleurs que, pour la détermination des valeurs absolues de x, y, z... il est indifférent de rapporter h à telle ou telle unité; de sorte qu'il ne s'agit que d'effectuer les multiplications par une suite de nombres proportionnels à

$$h,\ h',\ h'' \ldots ;$$

ou à

$$\frac{1}{r},\ \frac{1}{r'},\ \frac{1}{r''} \ldots ;$$

ou enfin à

$$\sqrt{p},\ \sqrt{p'},\ \sqrt{p''} \ldots$$

La détermination de ces différents h est la seule partie de la méthode qui laisse un certain arbitraire : c'est assurément la plus délicate, et celle qui exige le plus de tact et d'expérience. Elle est très-aisée lorsque les résultats fournis sont des moyennes entre plusieurs observations *également* précises : dans ce cas, les h sont proportionnels à la racine carrée du nombre des observations (§ 104). Mais il devient très-difficile d'exprimer numériquement l'exactitude relative, pour des observations d'espèces différentes; et plus difficile encore d'apprécier l'influence des circonstances extérieures, ou bien de traduire par un h convenable ce sentiment intime qui fait qu'un observateur se juge *mieux disposé* à tel instant qu'à tel autre.

L'exemple des observateurs les plus distingués montre combien est réelle cette difficulté d'estimer exactement la mesure de précision : Gauss, Bessel, Struve, dans leurs observations géodésiques, paraissent avoir pris pour principe de n'observer, autant que possible, que là où les circonstances étaient complétement favorables. Souvent, lorsqu'ils auraient pu faire un grand nombre d'observations de valeur inégale, ils abandonnaient cette occasion pour ne pas être forcés d'apprécier numériquement les précisions relatives de leurs résultats.

« Nous avons pris pour règle invariable, dit Bessel (*Gradmessung* « *in Ostpreussen*) de regarder l'existence même des observations « comme un indice suffisant des circonstances favorables qui les « accompagnaient; c'est-à-dire que nous avons fait concourir à la for- « mation du résultat, et avec des poids *égaux*, *toutes* les observa- « tions qui ont été faites; sans regarder comme un motif d'exclusion, « la coïncidence fortuite entre des circonstances défavorables pour « observer, et un écart considérable dans le résultat. Il n'y a, « croyons-nous, que la stricte observance de cette règle, qui puisse « bannir tout arbitraire de nos calculs. D'ailleurs, si les observa- « tions faites par des circonstances très-favorables présentent souvent « un remarquable accord, il arrive aussi parfois que cet accord n'est « pas plus grand que pour le cas de circonstances défavorables. Il « semble que le temps plus long que l'on emploie, et que l'on doit « employer aux observations dans ce dernier cas, compense en grande « partie les influences extérieures; et que souvent certaines causes « d'erreur, dont l'observateur ne se doute pas, n'ont pas moins d'ac- « tion que celles qui se manifestent ouvertement à lui. »

Quand on n'est pas libre de choisir les circonstances, comme cela arrive dans la plupart des observations astronomiques, il vaudra mieux, dans les modifications à apporter aux grandeurs de h, faire trop peu que trop. Si l'on ne juge pas certaines observations assez douteuses pour devoir être rejetées, il ne faut pas leur accorder des poids tellement faibles, qu'elles soient pour ainsi dire annulées par le fait. En ne laissant ainsi varier les h que dans d'étroites limites, on aura du moins l'avantage de n'altérer sensiblement ni les observations ni les conséquences qu'on en tire; car, il faut le dire, cette altération se fait rarement avec une entière bonne foi; et l'on ne saurait trop se défier de la tendance ordinaire, et pour ainsi dire instinctive, qui entraîne l'observateur et le calculateur vers les résultats qui paraissent leur offrir le plus de concordance.

CALCUL DES COEFFICIENTS SOMMATOIRES.

Le calcul des coefficients sommatoires $[aa]$, $[bb]$... $[ab]$, $[ac]$, etc., est une opération très-laborieuse, qui exige beaucoup d'ordre.

Voici la marche que Encke recommande pour cette partie du travail.

On commence par remplir le tableau suivant.

Valeurs de n	$\log n$	$\log n'$	$\log n''$	$\log n'''$	$\log n^{\text{IV}}$	...
Coeff. de x ... a	$\log a$	$\log a'$	$\log a''$	$\log a'''$	$\log a^{\text{IV}}$	...
Coeff. de y ... b	$\log b$	$\log b'$	$\log b''$	$\log b'''$	$\log b^{\text{IV}}$	...
Coeff. de z ... c	$\log c$	$\log c'$	$\log c''$	$\log c'''$	$\log c^{\text{IV}}$	...
Coeff. de v ... d	$\log d$	$\log d'$	$\log d''$	$\log d'''$	$\log d^{\text{IV}}$	...
: :						
Somme des coeff. ... s	$\log s$	$\log s'$	$\log s''$	$\log s'''$	$\log s^{\text{IV}}$	...

Puis, sur le bord inférieur d'une feuille de papier, on inscrit les $\log n$, $\log n'$... $\log n^{\text{IV}}$, de manière qu'ils puissent correspondre aux colonnes du tableau, $\log n$ au-dessus de $\log n$; $\log n'$ au-dessus de $\log n'$.... etc. Additionnant les deux logarithmes qui se correspondent verticalement, on aura $\log nn$; $\log n'n'$;... $\log n^{\text{IV}}n^{\text{IV}}$.

On glisse ensuite le papier une ligne plus bas, $\log n$ du papier au-dessus de $\log a$ du tableau; $\log n'$ au-dessus de $\log a'$.... On obtient ainsi $\log an$; $\log a'n'$;... $\log a^{\text{IV}}n^{\text{IV}}$. En continuant de même jusqu'à $\log dn$; $\log d'n'$... on aura épuisé toutes les multiplications par n.

On inscrit ensuite sur le bord inférieur d'une feuille de papier les $\log a$, $\log a'$... $\log a^{\text{IV}}$; on commence par placer cette feuille au-dessus de la ligne du tableau qui renferme les $\log a$; on additionne, et l'on a les $\log aa$; puis, baissant successivement le papier, on va jusqu'aux $\log ad$, ce qui termine les multiplications par a. On continue ainsi jusqu'à la dernière ligne, qui donne les $\log dd$.

Passant aux nombres, et additionnant ceux qui correspondent à une même position du papier mobile, on trouve les quantités que nous avons représentées par $[nn]$, $[an]$, $[bn]$, $[aa]$..... jusqu'à $[dd]$.

Faisons ici quelques remarques pratiques.

Lorsqu'on doit ajouter ou soustraire *deux* logarithmes, il est avantageux de faire l'opération de gauche à droite, et non de droite à gauche comme on la fait ordinairement. De cette manière on obtient en premier lieu les chiffres les plus importants, et l'on écrit le nombre plus vite et plus régulièrement. Quant aux reports, un peu d'habitude permet d'en tenir compte à vue, tant qu'on n'opère que sur deux logarithmes.

Pour les *signes* des quantités, dans le calcul logarithmique, la meilleure méthode, employée par les calculateurs allemands et anglais, consiste à placer un petit n à droite du logarithme d'un nombre *négatif*. Un nombre *pair* de n se détruisent dans la combinaison des logarithmes; un nombre *impair* laissent subsister le n au résultat.

Le calcul des coefficients sommatoires, servant de base au reste de l'opération, a besoin d'une preuve facile et exacte. Dans ce but, on fera, pour chaque équation, la somme algébrique de tous les coefficients des inconnues

$$\begin{aligned} a + b + c + d \ldots &= s \\ a' + b' + c' + d' \ldots &= s' \ \ldots \text{ etc.}; \end{aligned}$$

et l'on traitera les s comme les coefficients d'une *cinquième* inconnue (puisque nous raisonnons dans l'hypothèse de *quatre* inconnues, pour fixer le discours). Les plaçant à la dernière ligne du tableau précédent, on formera les nombres

$$\begin{aligned} sn &= an + bn + cn + dn \ldots \\ s'n' &= a'n' + b'n' + c'n' + d'n' \ldots \text{ etc.}; \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} [sn] &= [an] + [bn] + [cn] + [dn] \\ [as] &= [aa] + [ab] + [ac] + [ad] \\ [bs] &= [ab] + [bb] + [bc] + [bd] \\ [cs] &= [ac] + [bc] + [cc] + [cd] \\ [ds] &= [ad] + [bd] + [cd] + [dd]. \end{aligned}$$

De cette manière, par la formation de *cinq* nouvelles sommes, on vérifie toutes les autres, à l'exception de $[nn]$; et cela, d'autant plus sûrement que la plupart d'entre elles se présentent deux fois, dans deux différentes sommations.

Apprécions enfin la longueur du travail qu'entraîne le calcul des coefficients sommatoires, dans le cas de m inconnues. Le nombre de ces coefficients est égal au nombre de combinaisons deux à deux de $(m+1)$ éléments (avec répétition) $= \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$. S'il y a

λ équations, chacun de ces coefficients renfermera λ termes, de sorte qu'il faut faire $\frac{1}{2}\lambda(m+1)(m+2)$ carrés ou produits, et les réunir en $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ sommes.

Les coefficients primitifs $a, b, c \dots n$; $a', b', c', \dots n' \dots$ peuvent être donnés directement, ou par leurs logarithmes. Dans le premier cas, on doit d'abord chercher leurs logarithmes, et ensuite $\frac{1}{2}\lambda(m+1)(m+2)$ nombres correspondants : on doit par conséquent ouvrir les tables un nombre de fois représenté par $(m+1)\lambda + \frac{1}{2}\lambda(m+1)(m+2) = \frac{1}{2}\lambda(m+1)(m+4)$. Dans le second cas, on est dispensé de la première partie du travail, et l'on ne doit ouvrir les tables que $\frac{1}{2}\lambda(m+1)(m+2)$ fois.

CALCUL DES COEFFICIENTS AUXILIAIRES.

Pour procéder à l'*élimination* des inconnues entre les équations du minimum (équations normales), et pour calculer les *poids*, on doit former, avons-nous vu, les coefficients auxiliaires de Gauss, depuis $[bb.1]$ jusqu'à $[dd.3]$. « En considérant leur forme, dit Encke, on « reconnaît facilement une loi simple, d'après laquelle ces coefficients « dérivent les uns des autres. Tous ceux qui renferment dans la pa- « renthèse le chiffre 1 et la lettre b, sont formés par la différence en- « tre la parenthèse renfermant les mêmes lettres sans chiffre, et un « produit dont l'un des facteurs, $\frac{ab}{aa}$, est le même pour tous, tandis « que l'autre facteur présente les combinaisons successives de la « lettre a avec toutes les autres lettres. — Une règle analogue a lieu « pour les lettres c, d,...

« Les coefficients qui renferment dans la parenthèse le chiffre 2 « se forment de la même manière, par le moyen de ceux qui sont af- « fectés du chiffre 1. »

La disposition suivante se comprendra donc d'elle-même. On écrit d'abord sur une ligne horizontale les quantités

$$[aa]\ [ab]\ [ac]\ [ad]\ \ldots\ [\ldots]\ [as]\ [an],$$

et au-dessous leurs logarithmes.

Sous ces logarithmes, à partir du second, on place les quantités

$$[bb]\ [bc]\ [bd]\ \ldots\ [\ldots]\ [bs]\ [bn].$$

On prend alors le logarithme de $\frac{[ab]}{[aa]}$, et on l'ajoute successivement aux logarithmes de $[ab]$, $[ac]$... $[an]$, c'est-à-dire à tous les logarithmes qui sont à droite du numérateur de cette fraction, y compris le numérateur même. On place le nombre correspondant à la somme de ces deux logarithmes sous la quantité qui lui correspond verticalement ; en d'autres termes, on place le produit

$$\frac{[ab]}{[aa]}[ab] \text{ sous } [bb]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]}[ac] \text{ sous } [bc]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]}[ad] \text{ sous } [bd] \ \ldots \text{ etc.}$$

On retranche ces deux nombres l'un de l'autre et l'on obtient les quantités $[bb.1]$; $[bc.1]$; $[bd.1]$ ... $[bs.1]$; $[bn.1]$,

sous chacune desquelles on inscrit son logarithme.

On traite ensuite de la même manière les quantités

$$[cc]\ [cd]\ \ldots\ [\ldots]\ [cs]\ [cn];$$

c'est-à-dire que l'on place le produit

$$\frac{[ac]}{[aa]}[ac] \text{ sous } [cc]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]}[ad] \text{ sous } [cd]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]}[as] \text{ sous } [cs]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]}[an] \text{ sous } [cn].$$

Puis, par une simple soustraction, on obtient les produits

$$[cc\,.\,1]\,;\quad [cd\,.\,1]\,;\quad [cs\,.\,1]\,;\quad [cn\,.\,1]\,;$$

et ainsi de suite.

Ici encore, le calcul se vérifie au moyen de la quantité s. En effet, comme

$$[as] = [aa] + [ab] + [ac] + [ad]$$

et que $$[bs] = [ab] + [bb] + [bc] + [bd]\,;$$ on a

$$\begin{aligned}
[bs\,.\,1] &= [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] \\
&= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] + [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] + \\
&\quad + [bd] - \frac{[ab]}{[aa]}[ad] + \ldots \\
&= [bb\,.\,1] + [bc\,.\,1] + [bd\,.\,1] \ldots
\end{aligned}$$

L'analogie suffit pour montrer comment on calculerait les parenthèses renfermant les chiffres 2, 3... etc.

PRINCIPES ET FORMULES

RÉSUMANT

LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

ET

LA THÉORIE DES ERREURS.

---

1) La *probabilité mathématique* d'un événement est représentée par une fraction dont le numérateur est le nombre de cas ou de *chances* favorables à l'événement, et dont le dénominateur est le nombre de toutes les chances — Celles-ci sont supposées *également possibles*.

2) La *certitude* est représentée par l'*unité*.

3) La somme de la probabilité d'un événement et de sa *probabilité contraire* est égale à l'unité.

4) La probabilité ne varie pas lorsque, le *nombre* des chances variant, leur *rapport* reste le même.

5) Le nombre de *combinaisons distinctes* que l'on peut former avec m éléments pris n à n est

$$m\,C\,n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}.$$

Le nombre d'*arrangements* est

$$m\,A\,n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Le nombre de *permutations* de n éléments est

$$A\,n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n.$$

Remarque. — Les combinaisons de $(m+n)$ éléments m à m ou n à n sont en même nombre.

6) Le nombre d'*arrangements avec répétition* de m éléments pris n à n est

$$m \, \mathrm{AA} \, n = m^n.$$

Le nombre des *combinaisons avec répétition* est

$$m \, \mathrm{CC} \, n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Remarque. — Les combinaisons avec répétition de m éléments n à n, et de $(n+1)$ éléments $(m-1)$ à $(m-1)$, sont en même nombre.

7) La probabilité d'un événement qui peut arriver dans diverses hypothèses est la *somme* des probabilités prises par rapport à chaque hypothèse.

8) La probabilité *relative* d'un événement est le quotient qu'on obtient, en divisant la probabilité *absolue* de cet événement par la somme des probabilités absolues des événements que l'on compare.

9) La probabilité *composée* est le *produit* des probabilités *simples*. Ces dernières sont *absolues*, si les événements simples sont *indépendants* les uns des autres; *relatives*, si l'un quelconque des événements *dépend* de l'arrivée des autres.

10) Soient A et B deux événements simples ayant respectivement p et q pour probabilités. Dans le développement du binôme $(p+q)^m$, chaque terme exprime la probabilité d'un événement *composé* de A, répété autant de fois que le marque l'exposant de la lettre p, et de B, répété autant de fois que le marque l'exposant de la lettre q.

La *somme* des termes du développement, depuis le premier jusqu'au terme général inclusivement, exprime donc la probabilité que, sur m épreuves, l'événement A n'arrivera *pas moins* de $(m-n)$ fois (arrivera $(m-n)$ fois, ou plus); ou, ce qui revient au même, la probabilité que l'événement contraire, B, n'arrivera *pas plus* de n fois (arrivera n fois ou moins).

11) Le *plus grand* terme du développement de $(p+q)^m$

est de la forme $M\,p^{mp}\,q^{mq}$, et correspond par conséquent à la combinaison pour laquelle le rapport du nombre des événements A, au nombre des événements *contradictoires* B, est précisément le même que celui de la probabilité de l'événement A à la probabilité de l'événement B.

Il en résulte que l'événement *composé* le plus probable est celui dans lequel le nombre des événements simples A est au nombre des événements simples B, dans le rapport de la probabilité de A à celle de B.

12) A mesure qu'on s'approche des extrémités du développement de $(p+q)^m$, on arrive à des termes dont le rapport avec le terme maximum décroît; de manière qu'on peut toujours assigner à m une valeur assez grande pour que ce rapport devienne aussi petit qu'on voudra.

13) D'où il résulte que l'on peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, que le rapport du nombre de répétitions du même événement, au nombre total des épreuves, ne s'écartera pas de la probabilité simple de cet événement, au delà de certaines limites données, quelque resserrées qu'on suppose ces limites.

14) Dans tout jeu équitable, les enjeux doivent être proportionnels aux nombres de chances qu'ils ont en leur faveur.

15) La mise de chaque joueur doit être égale à l'*espérance mathématique* qu'il a sur le fonds du jeu. — L'espérance mathématique est le produit qu'on obtient en multipliant la valeur d'une chose, en unités monétaires, par la fraction qui exprime la probabilité mathématique du gain de cette chose.

16) Lorsque l'on rompt une partie avant qu'elle ne soit terminée, les joueurs doivent se partager l'enjeu dans la proportion des probabilités de gain qu'ils ont en leur faveur, à l'instant où la partie est rompue.

17) Lorsque les mises de deux joueurs sont proportion-

nelles à leurs chances de gain, l'événement le plus probable, après un certain nombre de parties, est qu'aucun des deux n'ait perdu ni gagné. — Il s'ensuit qu'en multipliant suffisamment le nombre des parties, la perte ou le gain de chaque joueur pourra être représenté par une fraction aussi petite qu'on voudra *de sa mise totale*.

18) Mais il y aura une probabilité toujours croissante que la perte ou le gain surpassera une *somme* donnée, quelque considérable que soit cette somme.

19) Quelque petite que l'on suppose la différence entre les espérances mathématiques des deux joueurs, on pourra toujours, en multipliant suffisamment le nombre des épreuves, obtenir telle probabilité qu'on le voudra que le joueur favorisé sera en gain et l'autre en perte.

20) Le jeu le plus égal entraîne toujours une *perte* absolue d'aisance.

21) Buffon prend pour mesure de l'importance *morale* d'une somme ajoutée à un bien quelconque, le *rapport* de l'une à l'autre.

22) D. Bernoulli pose en principe que la *valeur morale*, dy, d'un accroissement, dx, du capital x, est directement proportionnelle à cet accroissement, et inversement proportionnelle à la valeur absolue du bien physique de son possesseur. On a donc $dy = \frac{k\,dx}{x}$; d'où

$$y = k \log x + \log h,$$

en représentant par k et $\log h$ deux constantes arbitraires.

23) La *fortune morale éventuelle* correspondant à un bien physique, A, susceptible de recevoir des variations a, a', a''... dont les probabilités sont p, p', p''... est

$$Y = pk \log (A + a) + p'k \log (A + a') + \ldots + \log h.$$

24) La *fortune physique éventuelle* correspondant au bien physique A, sera

$$X = (A + a)^p \,.\, (A + a')^{p'} \,.\, (A + a'')^{p''} \ldots$$

On n'oubliera pas que $p+p'+p''+\ldots=1$; et que, parmi les variations a, a', $a''\ldots$, il peut y en avoir de positives, de négatives ou de nulles.

La différence X — A est l'*espérance morale :* sa valeur se confond avec celle de l'espérance *mathématique,* lorsque la fortune A peut être considérée comme infiniment grande en présence des pertes ou des gains éventuels a, a', $a''\ldots$

25) Les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont *proportionnelles* aux probabilités que ces causes donnent pour les événements observés. La probabilité de l'une de ces causes ou hypothèses *est* une fraction qui a pour numérateur la probabilité de l'événement par suite de cette cause, et pour dénominateur la somme de toutes les probabilités semblables, relatives à toutes les causes ou hypothèses.

26) La probabilité d'un nouvel *événement* simple s'obtient en calculant, d'après les événements passés, la probabilité des diverses hypothèses possibles, et faisant la somme des produits de ces probabilités par celles de l'événement prises dans chaque hypothèse.

27) Soient A et B deux événements contradictoires, dont l'un a été observé m fois et l'autre n fois. La probabilité de l'*hypothèse* attribuant à A la probabilité x sera

$$P=\frac{x^m(1-x)^n}{S\,[x^m(1-x)^n]},$$

pour le cas de la discontinuité, et

$$P=\frac{x^m\,dx\,(1-x)^n}{\int_0^1 x^m\,dx\,(1-x)^n},$$

pour le cas de la continuité.

On peut aussi dire que la probabilité de l'hypothèse est égale au rapport de la probabilité *particulière* de l'événement, à sa probabilité *moyenne,* prise dans toutes les hypothèses possibles.

28) La probabilité de l'arrivée d'un *nouvel* événement A est

$$\frac{m+1}{m+n+2};$$

et celle de l'arrivée d'un nouvel événement B,

$$\frac{n+1}{m+n+2}.$$

Si l'événement A a été observé m fois *de suite,* la probabilité qu'il se reproduise encore une fois sera $\frac{m+1}{m+2}$; et en général, la probabilité qu'il se reproduise p fois de suite sera $\frac{m+1}{m+p+1}$.

29) La plus probable de toutes les hypothèses est celle où les probabilités simples des événements A et B sont égales au rapport du nombre de fois que chacun des événements est arrivé, avec leur nombre total.

Elle peut être regardée comme s'approchant sans cesse de la véritable probabilité, à mesure que le nombre des observations devient plus considérable.

30) Quand un événement a été observé m fois sans interruption, la probabilité qu'il existe une cause facilitant sa reproduction est $\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}$.

31) Si les différentes valeurs d'une variable, x, sont inégalement probables, la valeur *moyenne* se formera en multipliant chaque valeur particulière par sa probabilité, y, et en divisant la somme des produits par la somme des probabilités.

Si x varie d'une manière *continue,* la moyenne deviendra

$$\frac{\int x \cdot ydx}{\int ydx}.$$

32) La *possibilité* d'une erreur accidentelle est sa probabilité *relative* à celle d'une erreur nulle ; elle est fonction de la *grandeur* de l'erreur.

La loi suivant laquelle se répartissent les erreurs est représentée par la *courbe de possibilité*. — Soit y la possibilité d'une erreur x ; Y l'ordonnée à l'origine, dont la longueur est arbitraire ; h un paramètre proportionnel à la *précision* du genre d'observation. L'équation de la courbe de possibilité sera

$$y = \mathrm{Y} e^{-h^2x^2}.$$

33) Si l'on prend Y précisément égal à la *probabilité* d'une erreur nulle, la courbe de possibilité se change en *courbe de probabilité*. Dans ce cas on a $\mathrm{Y} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, et la surface de la courbe est égale à l'*unité*. L'équation de la courbe de probabilité est donc

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

34) La probabilité infiniment petite d'une erreur déterminée, x, est

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

La probabilité d'une erreur qui *ne dépasse pas* la limite a, est la quantité finie

$$\mathrm{P} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2} dx\,;$$

ou

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a} e^{-h^2x^2} dx.$$

35) Si l'on fait $hx = t$, il vient

$$\mathrm{P} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{ah} e^{-t^2} dt.$$

qui exprime la probabilité qu'une erreur, t, tombe entre les limites 0 et $\pm ah$.

36) Dans deux espèces d'observations,

1° Les erreurs qui ont des *possibilités* égales varient en raison inverse de la précision des observations ;

2° Les *limites* d'erreurs qui ont des *probabilités* égales varient aussi en raison inverse de la précision des observations.

Autrement dit : lorsqu'une urne contient des boules blanches et des boules noires en nombre égal,

1° Les *écarts relatifs* également *possibles* varient en raison inverse de la racine carrée du nombre de boules qui entrent dans les tirages ;

2° Les limites *relatives*, qui correspondent à des probabilités égales, varient dans le même rapport.

37) Pour deux genres d'observations, les mesures de précision sont inversement proportionnelles aux erreurs également possibles.

38) Si dans l'expression

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-hx}^{+hx} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{hx} e^{-t^2}\,dt,$$

on fait $P = \frac{1}{2}$, on trouve

$$hx = \rho = 0{,}476936 ;$$

d'où

$$x = \frac{\rho}{h} = r.$$

Cette valeur remarquable de x est l'*erreur probable* de l'espèce d'observations dont la précision est h. Il est aussi probable de commettre une erreur supérieure qu'une erreur inférieure à r. — Sa probabilité est à peu près les $\frac{4}{5}$ de celle d'une erreur nulle.

39) De $$r = \frac{\rho}{h}, \quad r' = \frac{\rho}{h'},$$

on déduit $$r : r' = h' : h ;$$

c'est-à-dire que « les erreurs probables sont en raison inverse des mesures de précision. »

40) Soit m le rapport des probabilités de deux erreurs x et x' : on aura

$$m = \frac{1}{e^{-h^2(x'^2 - x^2)}} ;$$

d'où l'on peut calculer h par logarithmes. Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$m = \frac{1}{e^{-h^2 x'^2}} .$$

Ainsi « quand la probabilité d'une erreur nulle est à celle « d'une erreur x' comme $1 : e^{-px'^2}$, on doit, pour l'espèce « d'observations, prendre la mesure de précision égale « à $\sqrt{p}$. »

41) La valeur la plus probable d'une inconnue, déterminée par plusieurs observations, est la moyenne entre tous les résultats immédiats fournis par l'observation. — Dans ce cas, la somme des carrés des erreurs est un *minimum*.

42) $h\sqrt{p}$ est la mesure de précision de la moyenne entre p observations dont la précision individuelle est h. Ainsi « la précision d'une moyenne croît comme la racine « carrée du nombre d'observations qui ont concouru à la « former. »

43) On nomme *poids* d'un résultat le nombre d'observations également précises, requis pour que leur moyenne ait la même précision que ce résultat ; la précision de chaque observation simple étant prise pour unité de précision.

44) Le poids d'une valeur est donc proportionnel au carré de sa mesure de précision.

45) On ramène différents résultats à la même unité de

précision, en les multipliant par les racines carrées de leurs poids.

46) Si plusieurs observations, o, o', o''... ont des poids différents p, p', p''... leur véritable moyenne est

$$M = \frac{po + p'o' + p''o'' + \ldots}{p + p' + p'' + \ldots}.$$

47) *L'erreur moyenne*, ε_2, est la quantité qu'on obtient en divisant la somme des carrés des erreurs réelles, par le nombre des observations, et en extrayant ensuite la racine carrée du quotient.

Autrement dit, c'est une erreur telle, que si elle existait seule dans chacune des p observations indistinctement, la somme des carrés de ces p erreurs égales serait la même que la somme des carrés des p erreurs inégales réellement commises.

$$p \cdot \varepsilon_2^2 = S(\varepsilon^2) = [\varepsilon^2],$$

48) Le carré de la mesure de précision, multiplié par le carré de l'erreur moyenne, est égal à $\frac{1}{2}$:

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}}.$$

49) L'erreur probable est égale à l'erreur moyenne multipliée par $\rho\sqrt{2} = \frac{2}{3}\,\varepsilon_2$, en nombres ronds. D'où l'erreur moyenne $= \frac{3}{2}$ de l'erreur probable.

50) Au point qui correspond à l'erreur moyenne, la courbe de probabilité présente un point d'inflexion, et la tangente s'approche le plus de la verticale.

51) L'expression $h = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}}$ revient à celle-ci

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\left\{\frac{[o^2]}{p} - \left(\frac{[o]}{p}\right)^2\right\}}};$$

en représentant par $[o]$ la somme des résultats d'observation. Ainsi, « le carré de $\frac{1}{h}$ est égal au double de l'excès de « la valeur moyenne du carré de la variable, sur le carré « de sa valeur moyenne. »

Lorsque l'on passe à la continuité, l'expression précédente devient :

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\left\{\int ydx \, . \, x^2 - \int (ydx \, . \, x)^2\right\}}}.$$

52) Les poids sont réciproquement proportionnels aux carrés des erreurs moyennes ou des erreurs probables.

53) Il y a un à parier contre un que la véritable valeur de h est comprise entre

$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left\{1 + \frac{\rho}{\sqrt{p}}\right\}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}\left\{1 - \frac{\rho}{\sqrt{p}}\right\};$$

ou que la véritable valeur de r est comprise entre les limites

$$\varepsilon_2 \rho \sqrt{2}\left\{1 \mp \frac{\rho}{\sqrt{p}}\right\}$$

$$= 0{,}674489\,\varepsilon_2\left\{1 \mp \frac{0{,}476936}{\sqrt{p}}\right\}.$$

54) Dans l'équation $p\varepsilon_2^2 = [\varepsilon^2]$, le second membre exprime la somme des carrés *des écarts de la moyenne*, et ε_2 représente à la rigueur l'*écart* moyen. — La véritable *erreur* moyenne est donnée plus exactement par la formule

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p-1}}.$$

55) L'erreur moyenne E_2 de la moyenne entre p observations est

$$\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{p(p-1)}},$$

et son poids $\quad P = p_1 + p_2 + p_3 \ldots = [p].$

56) Soit η_2 l'erreur moyenne de l'unité de poids : on a

$$E_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt{[p]}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]}}.$$

57) Soit une fonction $u = o' \pm o''$:

ε l'erreur moyenne de u ; P son poids;
ε' » » o' ; p' »
ε'' » » o'' ; p'' »

On a $\begin{cases} \varepsilon = \pm\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}; \\ \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p''}. \end{cases}$

Et en général, quel que soit le nombre des observations,

$$\begin{cases} \varepsilon = \pm\sqrt{[\varepsilon^2]}; \\ \dfrac{1}{P} = \left[\dfrac{1}{p}\right]. \end{cases}$$

Si elles sont en nombre n, et d'égale précision, on a

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon'\sqrt{n} \\ \dfrac{1}{P} = \dfrac{n}{p'}. \end{cases}$$

58) Soit $\quad u = a'o'$;

on a $\begin{cases} \varepsilon = \pm a'\varepsilon' ; \\ P = \dfrac{p'}{a'^2}. \end{cases}$

59) Soit $u = a'o' + a''o'' + a'''o''' + \ldots$

on a $$\begin{cases} \varepsilon \pm \sqrt{[a^2\varepsilon^2]}\,; \\ \dfrac{1}{\mathrm{P}} = \left[\dfrac{a^2}{p}\right]. \end{cases}$$

60) Soit $u = f(o', o'', o''')\ldots$

ou plus généralement

$$\mathrm{F}(u, o', o'', o''' \ldots) = 0.$$

Les erreurs moyennes sont de véritables différentielles, et il vient

$$du = \frac{du}{do'}\,do' + \frac{du}{do''}\,do'' + \frac{du}{do'''}\,do''' + \ldots$$

ou $$\pm\varepsilon = \pm l'\,\varepsilon' \pm l''\,\varepsilon'' \pm l'''\,\varepsilon''' \pm \ldots$$

On en déduit $$\begin{cases} \varepsilon = \pm \sqrt{[l^2\,\varepsilon^2]}\,; \\ \dfrac{1}{\mathrm{P}} = \left[\dfrac{l^2}{p}\right]. \end{cases}$$

61) Soient m équations *linéaires* entre $(m-n)$ inconnues :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + d\,v + \ldots + n &= \Delta \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d'\,v + \ldots + n' &= \Delta' \\ a''x + b''y + c''z + d''v + \ldots + n'' &= \Delta''\ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Leur résolution par la méthode des moindres carrés conduit à $(m - n)$ équations *normales* de la forme

$$\begin{aligned} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,v + \ldots + [an] &= 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,v + \ldots + [bn] &= 0 \\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,v + \ldots + [cn] &= 0\ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

entre lesquelles il suffit d'éliminer par la méthode ordinaire.

N.B. Si les équations primitives n'étaient pas linéaires, on ramènerait ce cas au précédent au moyen d'une solution indirecte.

62) L'erreur moyenne d'une *observation* est

$$\varepsilon_2 = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

63) Pour trouver le poids, P_n, d'une *inconnue*, z, on remplace, dans l'équation normale relative à z, la quantité toute connue par — 1 ; dans les autres équations normales, on la remplace par zéro ; en même temps, on met Q_n à la place de z, et l'on élimine toutes les inconnues restantes. On trouve ainsi

$$Q_n = \frac{1}{P_n}.$$

L'erreur moyenne de l'inconnue z est donc

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{P_n}} = \varepsilon_2 \sqrt{Q_n}.$$

64) Une autre règle pour trouver le poids d'une inconnue, consiste à éliminer simplement entre les équations normales, en ayant soin de n'introduire aucun facteur d'élimination. Le *coefficient* de l'inconnue qui reste la dernière *est le poids* de cette inconnue.

65) Si des inconnues x, y, z.... sont données par les équations normales (61), et qu'on veuille chercher le poids P d'une expression

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

tirée de ces équations, on le trouvera par la formule

$$\frac{1}{P} = \alpha A + \beta B + \gamma C \ldots$$

dans laquelle A, B, C... sont des quantités qui satisfont aux équations suivantes et qui peuvent s'en déduire :

$$\begin{aligned}
[aa]\,A + [ab]\,B + [ac]\,C \ldots &= \alpha \\
[ab]\,A + [bb]\,B + [bc]\,C \ldots &= \beta \\
[ac]\,A + [bc]\,B + [cc]\,C \ldots &= \gamma \ldots
\end{aligned}$$

66) Lorsque les observations à traiter sont d'inégale précision, les équations normales (61) se changent en

$$\begin{aligned}
[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + \ldots + [pan] &= 0 \\
[pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z + \ldots + [pbn] &= 0 \\
[pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z + \ldots + [pcn] &= 0 \ldots
\end{aligned}$$

67) Entre m quantités observées isolément, il existe c relations nécessaires : ces relations sont telles, que les m erreurs x', x'', x'''... sont liées entre elles par les *équations de condition* suivantes

$$\begin{aligned}
0 &= n' + a'x' + a''x'' + a'''x''' \ldots + a_m x_m \\
0 &= n'' + b'x' + b''x'' + b'''x''' \ldots + b_m x_m \\
&\vdots \\
0 &= n_c + h'x' + h''x'' + h'''x''' \ldots + h_m x_m.
\end{aligned}$$

Les corrections les plus probables sont alors déterminées par les m *équations corrélatives*

$$\begin{aligned}
x' &= a'\,k' + b'\,k'' + c'\,k''' \ldots + h'\,k_c \\
x'' &= a''k' + b''k'' + c''k''' \ldots + h''k_c \\
&\vdots \\
x_m &= a_m k' + b_m k'' + c_m k''' \ldots + h_m k_c.
\end{aligned}$$

Les c *coefficients corrélatifs* k', k'', k'''... k_c sont d'ailleurs fournis par voie d'élimination entre les c *équations normales*

$$\begin{aligned}
0 &= n' + [aa]\,k' + [ab]\,k'' + [ac]\,k''' + \ldots + [ah]\,k_c \\
0 &= n'' + [ab]\,k' + [bb]\,k'' + [bc]\,k''' + \ldots + [bh]\,k_c \\
&\vdots \\
0 &= n_c + [ah]\,k' + [bh]\,k'' + [ch]\,k''' + \ldots + [hh]\,k_c.
\end{aligned}$$

68) L'erreur moyenne d'une observation est, dans ce cas,

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[x^2]}{c}}.$$

69) Lorsque les observations sont de précisions différentes, les équations corrélatives deviennent

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{a'k'}{p'} + \frac{b'k''}{p'} + \frac{c'k'''}{p'} + \ldots + \frac{h'k_c}{p'} \\
x'' &= \frac{a''k'}{p''} + \frac{b''k''}{p''} + \frac{c''k'''}{p''} + \ldots + \frac{h''k_c}{p''} \ \ldots \text{ etc.}
\end{aligned}$$

et les équations normales

$$0 = n' + \left[\frac{aa}{p}\right] k' + \left[\frac{ab}{p}\right] k'' + \left[\frac{ac}{p}\right] k''' + \ldots + \left[\frac{ah}{p}\right] k_c \ldots \text{ etc.}$$

70) L'erreur moyenne de l'unité de poids est, dans ce cas,

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{[px^2]}{c}};$$

et celles des observations sont

$$\varepsilon' = \frac{\eta_2}{\sqrt{p'}}; \quad \varepsilon'' = \frac{\eta_2}{\sqrt{p''}}; \text{ etc.}$$

71) Soit $u = F(V', V'', V''')$ une *fonction* de certaines observations qui ont été compensées à l'aide des c équations de condition (67).

On tire d'abord, de la fonction donnée, les coefficients différentiels l', l'', l'''.... par la formule

$$du = l'dV' + l''dV'' + l'''dV''' + \ldots$$

Puis on forme les *c équations de transport*

$$\begin{aligned}
0 &= [al] + [aa]\, r_1 + [ab]\, r_2 + [ac]\, r_3 + \ldots \\
0 &= [bl] + [ab]\, r_1 + [bb]\, r_2 + [bc]\, r_3 + \ldots \\
&\vdots \\
0 &= [hl] + [ah]\, r_1 + [bh]\, r_2 + [ch]\, r_3 + \ldots
\end{aligned}$$

qui permettent de déterminer par élimination les *c coefficients de transport, r.* — Transportant ceux-ci dans les équations

$$\begin{aligned}
L' &= l' + a' r_1 + b' r_2 + c' r_3 + \ldots \\
L'' &= l'' + a'' r_1 + b'' r_2 + c'' r_3 + \ldots \\
&\vdots \\
L^{\text{IV}} &= \ldots a^{\text{IV}} r_1 + b^{\text{IV}} r_2 + c^{\text{IV}} r_3 + \ldots
\end{aligned}$$

on en déduit les valeurs des L ; puis on a

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \varepsilon \sqrt{[L^2]}\,; \\ \dfrac{1}{P} = [L^2]. \end{cases}$$

72) Lorsque les observations sont d'inégale précision, on a

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \sqrt{[\varepsilon^2 L^2]}, \\ \dfrac{1}{P} = \left[\dfrac{L^2}{p}\right]. \end{cases}$$

Dans ce cas, les équations de transport sont

$$0 = \left[\frac{al}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] r_3 + \dots \text{etc.}$$

Les valeurs de L', L'', L'''.... sont fournies par les équations (71) non modifiées.

FIN.

Table n° 1.

—

VALEURS DE LA FONCTION $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

Pour x = 0,0...	y = 0,56419	Pour x = 1,7...	y = 0,03135
= 0,1	= 0,55858	= 1,8	= 0,02210
= 0,2	= 0,54206	= 1,9	= 0,01526
= 0,3	= 0,51562	= 2,0	= 0,01033
= 0,4	= 0,48077	= 2,1	= 0,00686
= 0,5	= 0,43939	= 2,2	= 0,00446
= 0,6	= 0,39362	= 2,3	= 0,00284
= 0,7	= 0,34564	= 2,4	= 0,00178
= 0,8	= 0,29749	= 2,5	= 0,00109
= 0,9	= 0,25098	= 2,6	= 0,00065
= 1,0	= 0,20755	= 2,7	= 0,00039
= 1,1	= 0,16824	= 2,8	= 0,00022
= 1,2	= 0,13368	= 2,9	= 0,00012
= 1,3	= 0,10411	= 3,0	= 0,00007
= 1,4	= 0,07947	= 3,1	= 0,00004
= 1,5	= 0,05947	= 3,2	= 0,00001
= 1,6	= 0,04361	= 3,3	= 0,00000

Dans la formule, l'unité des abscisses est la mesure de précision $\left(h, \text{ou } \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Quand on prend une autre unité, il faut remplacer les valeurs de x par $\frac{0,1}{h}$, $\frac{0,2}{h}$ .... etc.

Table n° 2.

VALEURS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$

t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences	t	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences
0,0	0,000	112	1,2	0,910	24
0,1	0,112	111	1,3	0,934	18
0,2	0,223	106	1,4	0,952	14
0,3	0,329	99	1,5	0,966	10
0,4	0,428	92	1,6	0,976	8
0,5	0,520	84	1,7	0,984	5
0,6	0,604	74	1,8	0,989	4
0,7	0,678	64	1,9	0,993	2
0,8	0,742	55	2,0	0,995	2
0,9	0,797	46	2,1	0,997	1
1,0	0,843	37	2,2	0,998	1
1,1	0,880	30	2,3	0,999	0
1,2	0,910		2,4	0,999	

Cette table s'applique immédiatement aux observations pour lesquelles la mesure de précision, h, est égale à l'unité. On y voit que la probabilité qu'une erreur d'observation ne dépassera pas $\pm$ 0,1, est exprimée par le nombre 0,112, etc. En d'autres termes, on peut espérer que, sur 1000 erreurs commises, il en tombera 112 entre $+$ 0,1 et $-$ 0,1 ; 223 entre $+$ 0,2 et $-$ 0,2, etc. Ou bien encore, on peut parier 112 contre 888 que l'erreur d'une observation subséquente sera moindre que 0,1 ; 223 contre 777, qu'elle sera moindre que 0,2, etc.

Quand h n'est pas égal à l'unité, il faut partout, à la place de 0,1 ; 0,2.., mettre $\frac{0,1}{h}$; $\frac{0,2}{h}$ ....

Table n° 3.

VALEURS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE $P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$, POUR DES VALEURS DE t EXPRIMÉES EN FONCTION DE ρ PRIS POUR UNITÉ.

$\frac{t}{\rho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences	$\frac{t}{\rho}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$	Différences
0,0	0,000	54	2,5	0,908	13
0,1	0,054	53	2,6	0,921	10
0,2	0,107	53	2,7	0,931	10
0,3	0,160	53	2,8	0,941	9
0,4	0,213	51	2,9	0,950	7
0,5	0,264	50	3,0	0,957	6
0,6	0,314	49	3,1	0,963	6
0,7	0,363	48	3,2	0,969	5
0,8	0,411	45	3,3	0,974	4
0,9	0,456	44	3,4	0,978	4
1,0	0,500	42	3,5	0,982	3
1,1	0,542	40	3,6	0,985	2
1,2	0,582	37	3,7	0,987	3
1,3	0,619	36	3,8	0,990	1
1,4	0,655	33	3,9	0,991	2
1,5	0,688	31	4,0	0,993	1
1,6	0,719	29	4,1	0,994	1
1,7	0,748	27	4,2	0,995	1
1,8	0,775	25	4,3	0,996	1
1,9	0,800	23	4,4	0,997	1
2,0	0,823	20	4,5	0,998	0
2,1	0,843	19	4,6	0,998	0
2,2	0,862	17	4,7	0,998	1
2,3	0,879	16	4,8	0,999	0
2,4	0,895	13	4,9	0,999	0
2,5	0,908		5,0	0,999	

Cette table est indépendante de la précision des observations : elle donne la probabilité que l'erreur, pour une espèce quelconque d'observations, ne dépasse pas une certaine valeur exprimée en fonction de l'erreur probable.

Elle montre que, sur 1000 erreurs, il en reste 54 au-dessous de 0,1 de l'erreur probable ; 107 au-dessous de 0,2, etc. En d'autres termes, on peut parier 54 contre 946 que l'erreur que l'on commettra, dans une espèce quelconque d'observations, sera moindre que 0,1 de l'erreur probable ; 107 contre 893 qu'elle sera moindre que 0,2 de l'erreur probable, etc.

Table des Matières.

CHAPITRE TROISIÈME.

DES LOIS DE LA PROBABILITÉ MATHÉMATIQUE DANS LA RÉPÉTITION DES ÉVÉNEMENTS.

CHAPITRE QUATRIÈME.

DE LA VALEUR VÉNALE DES CHANCES ET DES PROBABILITÉS. — DU MARCHÉ ALÉATOIRE ET DU JEU EN GÉNÉRAL.

DEUXIÈME SECTION.

PARTIE PHYSIQUE. — PROBABILITÉS A POSTERIORI.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DÉTERMINATION DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES PAR LES OBSERVATIONS. — PROBABILITÉ D'UN NOUVEL ÉVÉNEMENT.

CHAPITRE SIXIÈME.

ÉTUDE DES CAUSES. — MOYENNES ET LIMITES. — APPLICATIONS.

CHAPITRE SEPTIÈME.

DES LOIS DE LA MORTALITÉ ET DE LA POPULATION. — DES ASSOCIATIONS. — DES ASSURANCES SUR LA VIE ET LES CHOSES.

TROISIÈME SECTION.

PARTIE PRATIQUE. — PROBABILITÉS APPLIQUÉES.

CHAPITRE HUITIÈME.

THÉORIE DES ERREURS. — PRÉCISION DES OBSERVATIONS.

CHAPITRE NEUVIÈME.

DÉTERMINATION DU RÉSULTAT LE PLUS EXACT DÉDUIT DE PLUSIEURS OBSERVATIONS. — PRÉCISION DE CE RÉSULTAT.

(UNE SEULE INCONNUE A DÉTERMINER.)

CHAPITRE DIXIÈME.

PRÉCISION DES FONCTIONS DE QUANTITÉS OBSERVÉES.

CHAPITRE ONZIÈME.

DÉTERMINATION DU RÉSULTAT LE PLUS EXACT DÉDUIT DE PLUSIEURS OBSERVATIONS. — PRÉCISION DE CE RÉSULTAT.

(PLUSIEURS INCONNUES A DÉTERMINER. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.)

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.