G. HAGEN,

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG.

GRUNDZÜGE

DER

WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG

VON

G. HAGEN.

DRITTE, UMGEARBEITETE AUFLAGE.

BERLIN.
VERLAG VON ERNST & KORN
(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG).
1882.

Vorwort

zur dritten Auflage.

Vorliegende Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung stellte ich 1837 zusammen, um die sichere Methode zur Verwerthung von Messungen und Beobachtungen, die ich bei längerer Beschäftigung mit astronomischen Studien und Rechnungen kennen gelernt hatte, in die Ingenieur-Wissenschaften einzuführen. Mein hochverehrter Lehrer und väterlicher Freund Bessel, dessen Vorträge und Anweisungen ich vorzugsweise hier wiedergebe, warnte mich sogleich vor der Erwartung eines baldigen Erfolges: zehn Jahre werden vergehn, bevor meine Absicht gefaſst wird, und andre zehn Jahre werde man noch überlegen, ob man davon Gebrauch machen solle.

Dieser Ausspruch hat sich so sehr bestätigt, daſs auch gegenwärtig, nach 45 Jahren, diese Methode, wenigstens bei uns, in den wissenschaftlichen Wasserbau noch nicht Eingang gefunden, und meine dahingerichteten sonstigen Bemühungen keine Nachfolge gefunden haben.

Gegenwärtig scheint indessen ein Umschwung sich vorzubereiten. Merriman in New-Haven (Connecticut) machte 1877 im Franklin-Journal die Amerikanischen Ingenieure auf meine Schrift aufmerksam, indem er nicht nur einige Hauptsätze daraus mittheilte, sondern auch die Anwendung derselben an einem Beispiel zeigte. Eben so hat der Englische Ingenieur Cunningham in Roorkee (Ost-Indien) unter Bezugnahme auf diese Mittheilung im Franklin-Journal nach der Methode der kleinsten Quadrate aus seinen zahlreichen hydrometrischen Messungen am Ganges-Canal einige Resultate zu ziehn versucht. Besonders wichtig ist es aber, daſs die zweite Ausgabe dieser Schrift beinahe vollständig vergriffen ist.

Bei Bearbeitung der dritten Auflage schienen wieder vielfache Zusätze und Aenderungen nothwendig, um sowohl das Verständnifs zu erleichtern, als auch um möglichen Bedenken vorzubeugen. Den Hauptsatz, der die Beziehung zwischen der Gröfse der Beobachtungs-Fehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens ausdrückt, habe ich wieder aus den Binomial-Coefficienten hergeleitet, indem diese genau in derselben Art sich bilden, wie die Beobachtungs-Fehler. Ich wurde zur Beibehaltung dieser Herleitung um so mehr veranlafst, als auch Wittstein in der Uebersetzung von Navier's Differenzial- und Integral-Rechnung mir hierin gefolgt ist. Ich habe aber noch gezeigt, dafs schon unter Annahme von nur zehn Fehler-Quellen dieses zuerst von Gaufs aufgestellte Gesetz in überraschender Schärfe sich darstellt.

Die Beispiele der Anwendung sind zum Theil verändert. Den letzten Abschnitt, der vom Nivelliren handelt, habe ich mit manchen Zusätzen wieder aufgenommen, indem die darin enthaltenen Mittheilungen über Prüfung, Berichtigung und Behandlung der Mefsinstrumente nicht allein für den Ingenieur wichtig sein dürften.

Sollte mir vielleicht der Vorwurf gemacht werden, ich sei in Betreff der Anordnung und Ausführung der Rechnungen zu weit gegangen, und habe manches allgemein Bekannte oder an sich Verständliche mitgetheilt, so dürfte mich der Mangel an Uebung im Zahlenrechnen, den ich bei Studirenden oft bemerkt habe, entschuldigen. Der Unterricht in technischen höhern Lehranstalten gestattet freilich keine ausgedehnten Uebungen in der Anwendung des Erlernten, doch dürfte dafür einige Zeit gewonnen werden, wenn die Mittheilung der Lehrsätze auf das wirkliche Bedürfnifs beschränkt würde. Durch Benutzung convergirender Reihen, durch Einführung von Näherungswerthen, die man leicht berichtigt, durch Anwendung der mechanischen Quadraturen und dergleichen, sind viele Aufgaben bequem, und oft sogar noch schneller zu lösen, als auf directem Wege, wenn man die Grenzen der jedesmal erforderlichen Schärfe nicht überschreitet. In letzter Beziehung bemerkt man vielfach maafslose Uebertreibungen. Wenn Erfahrungs-Coefficienten benutzt werden, die nur selten bis auf ein Procent, meist aber kaum bis auf zehn Procent sicher sind, so werden die Rechnungen mit siebenstelligen Logarithmen-Tafeln ausgeführt, und man gelangt zu Resultaten, die bis auf den millionsten Theil ihres Werthes sicher zu sein scheinen, die aber wirklich doch nicht genauer sein können, als die Voraussetzungen, von denen man ausgegangen ist. In kürzerer Zeit und mit geringerer Mühe würde man bei Benutzung fünfstelliger und oft selbst vierstelliger Tafeln in genügender Schärfe den Zweck vollständig erreicht haben. Doch auch der Gebrauch dieser Tafeln erfordert Uebung.

Indem die Mathematik schon vielfach im gewöhnlichen Leben, ganz besonders aber in den Ingenieur-Wissenschaften, vom höchsten Werth ist, so sollte das Studium derselben ebenso, wie in anderen Verhältnissen geschieht, auf ihre Anwendung gerichtet sein. Der Tischler, der einen Lehrling annimmt, zeigt demselben, wie er den Hobel fassen und führen soll, und veranlafst ihn, durch fortgesetzte Uebung die nöthige Geschicklichkeit im Gebrauche sich anzueignen. In ähnlicher Weise habe ich mich bemüht, gleichsam die Handgriffe bei Ausführung von Rechnungen zu zeigen und durch Beispiele zu erläutern.

Berlin, im Januar 1882.

G. Hagen.

Inhalts-Nachweisung.

I. Abschnitt. Allgemeine Grundsätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

II. Abschnitt. Beziehung zwischen der Gröfse der Beobachtungs-Fehler und der Wahrscheinlichkeit derselben.

III. Abschnitt. Die Methode der kleinsten Quadrate.

IV. Abschnitt. Der wahrscheinliche Fehler.

V. Abschnitt. Beispiele der Anwendung.

VI. Abschnitt. Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf das Nivelliren.

Anhang.

I. Abschnitt.

Hauptsätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§ 1.

„Gäbe es einen Verstand, „sagt Laplace," der alle Kräfte kennt, welche in einem gewissen Zeitpunkt die Natur beleben, so wie alle gegenseitigen Beziehungen der Wesen in ihr, und wäre derselbe fähig, diese gegebnen Gröfsen in Rechnung zu stellen, so würde er die Bewegung der Himmelskörper, wie die der leichtesten Staubflöckchen in demselben analytischen Ausdruck umfassen. Für ihn wäre nichts ungewifs, Vergangenheit und Zukunft ständen klar vor seinen Augen! In der Entwicklung der Astronomie hat der menschliche Geist sich zu einem schwachen Abbild dieses Verstandes erhoben."

Doch nicht nur die leblose Natur, sondern auch die belebte, und selbst die denkenden Wesen in ihr folgen nur bestimmten Kräften. Jeder Entschlufs und jede That wird durch gewisse innere oder äufsere Eindrücke veranlafst. Die Geschicke der Völker, wie der einzelnen Menschen, sind die nothwendige Folge vorangegangener Begebenheiten und Auffassungen.

In der eigentlichen Bedeutung des Worts giebt es sonach keinen Zufall. Wird jedoch ein Ereignifs durch Ursachen herbeigeführt, die uns entweder ganz unbekannt sind, oder deren Zusammenhang und Wirksamkeit wir nicht so vollständig zu fassen und zu verfolgen vermögen, dafs wir ihr Resultat, oder eben jenes Ereignifs vorher bestimmen können, so ist es für uns eben so räthselhaft, als wenn es vom Zufall abhinge, und wir nennen es zufällig.

Werfen wir einen Würfel auf, so wird die Lage, die er annimmt, oder die Seite, die nach oben gerichtet bleibt, allein durch

~~den~~ Stofs bedingt. den wir ihm ertheilen. Wären wir im Stande, das Maafs dieses Stofses mit Rücksicht auf das Auffallen auf den Tisch genau zu berechnen, und könnten wir die Bewegung unsrer Hand eben so scharf abmessen, so würde es keine Schwierigkeiten haben, jede beliebige Seite des Würfels erscheinen zu lassen. Beides ist aber nicht möglich, denn theils sind die mechanischen Verhältnisse zu verwickelt, als dafs wir sie verfolgen könnten, theils aber läfst sich der Schwung und die Richtung, die wir dem Würfel ertheilen, nicht genau genug abmessen. Die geringste Vermehrung der Kraft, die unserm Gefühl schon entgeht, verändert wesentlich die Verhältnisse und veranlafst ein andres Resultat. Wir führen in diesem Fall selbst das Ereignifs herbei, ohne es nach unserm Willen darstellen zu können und die Art seines Eintreffens vorher zu sehn. Es ist daher für uns *zufällig*.

Wird der Würfel nur einmal aufgeworfen, so kann man keine der sechs Seiten desselben mit gröfserer Wahrscheinlichkeit, als eine andre erwarten. Benutzt man dagegen zwei Würfel, so sind zwar wieder bei jedem derselben die sechs Seiten in gleichem Grade wahrscheinlich und da bei jeder Lage des einen Würfels der zweite sechs verschiedne Lagen annehmen kann, so entstehn daraus sechs und dreifsig gleich mögliche Fälle. Berücksichtigt man aber nur die Summe der Augen der nach oben gekehrten Seiten, so sind nur noch elf verschiedne Fälle möglich, die Anzahl der Augen ist nämlich 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12. Diese Fälle sind aber keineswegs *gleich wahrscheinlich*, denn von jenen sechs und dreifsig Lagen giebt

eine	2	Augen
zwei	3	-
drei	4	-
vier	5	-
fünf	6	-
sechs	7	-
fünf	8	-
vier	9	-
drei	10	-
zwei	11	-
und eine	12	-

Der wahrscheinlichste Wurf ist demnach sieben, und die unwahrscheinlichsten sind zwei und zwölf. In den Kinderspielen wird diese Verschiedenheit berücksichtigt, indem für die beiden letzten Würfe die gröfsten Gewinne, für sieben Augen dagegen kleine Verluste ausgesetzt sind.

Aehnliche Resultate ergeben sich, wenn man eine gröfsere Anzahl von Würfeln benutzt. Der wahrscheinlichste Wurf ist immer das Product aus der Zahl der Würfel in die Durchschnittszahl der Augen auf allen Seiten jedes Würfels. Der gewöhnliche Spielwürfel hat sechs Seiten, worauf 1 bis 6, also zusammen 21 Augen sich befinden. Die Durchschnittszahl der letztern beträgt $3^1/_2$, also der wahrscheinlichste Werth der Summe der geworfenen Augen ist bei zwei Würfeln gleich 7, bei vier gleich 14 u. s. w.

Untersucht man ferner, wie viele unter den gleich wahrscheinlichen Fällen eine Anzahl von Augen darstellen, welche sich nur wenig von dem wahrscheinlichsten Wurf entfernen, so gelangt man noch zu einem andern wichtigen Resultat. Diese Abweichung sei beispielsweise dem siebenten Theil des wahrscheinlichsten Werthes gleich, alsdann giebt es bei einem Würfel nur zwei Würfe, nämlich 3 und 4, in denen diese Grenze nicht überschritten wird. Die Zahl der günstigen Fälle ist also gleich dem dritten Theil oder 0,333 der sechs möglichen Fälle. Bei zwei Würfeln sind 6, 7 und 8 diejenigen Würfe, die nicht mehr, als um den siebenten Theil von der Mittelzahl oder von 7 abweichen. Die Anzahl der sämmtlichen Combinationen beträgt $6 \cdot 6 = 36$, und davon geben, wie man sich leicht überzeugen kann, 16 jene drei Zahlen. Das Verhältnifs der günstigen Würfe stellt sich also nunmehr auf 16 : 36 oder es ist 0,444. Bei drei Würfeln wird dieses unter Beibehaltung derselben Grenze 104 : 216 oder 0,482, bei vier Würfeln 676 : 1296 oder 0,522 u. s. w.

Man ersieht hieraus, dafs bei einem Wurf mit vier Würfeln oder was dasselbe ist, beim viermaligen Aufwerfen eines Würfels, der gröfste Theil der gleich möglichen Fälle schon eine Anzahl von Augen ergiebt, die von der mittlern oder der wahrscheinlichsten, nicht weiter, als um den siebenten Theil abweichen. In dieser Weise vermindert sich bei fortgesetzter Wiederholung des Spiels der Einflufs des einzelnen zufälligen Wurfs immer mehr, und die

Anzahl der nach oben gekehrten Augen entspricht mit zunehmender Schärfe dem mittlern Werth derselben.

Der Begriff des Wettens erläutert sehr anschaulich diese Verhältnisse. Bei einer richtigen Wette müssen die Gewinne und Verluste im umgekehrten Verhältniſs der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes zu der des Verlustes stehn. Wettet man z. B., daſs beim einmaligen Aufwerfen zweier Würfel zwei gleiche Zahlen erscheinen werden, so führen unter den 36 gleich möglichen Fällen sechs dieses Ereigniſs herbei, während es in den übrigen dreiſsig nicht eintritt. Die Wahrscheinlichkeit des Gewinns verhält sich also zu der des Verlustes wie 1 zu 5, oder der Gewinn muſs das Fünffache des Verlustes betragen.

§ 2.

Die Fehler der Messungen und Beobachtungen sind, wie im Folgenden ausführlich nachgewiesen werden wird, zufällige Erscheinungen. Sie treten bei jeder Wiederholung auf's Neue ein, und wenn man auch ihre wahre Gröſse gewöhnlich nicht kennt, so kann man doch aus den Abweichungen bei mehrfacher Ausführung derselben Messung auf die Gröſse der Fehler schlieſsen, und hieraus erkennen, ob das Resultat als hinreichend sicher angesehn werden darf oder nicht. Diese Wiederholungen dienen aber auch noch zur Berichtigung des Resultats. Letzteres setzt sich zusammen aus dem wahren Werth der gesuchten Gröſse und aus dem jedesmaligen Beobachtungsfehler, der eben so gut positiv, wie negativ sein kann. Dieser Fehler tritt, so lange er wirklich zufällig ist, und nicht etwa aus constanten Ursachen das Resultat immer in demselben Sinn entstellt wird, ganz verschieden auf. Wie beim fortgesetzten Würfelspiel der wahre mittlere Werth immer schärfer sich zu erkennen giebt, so verliert auch bei fortgesetzter Wiederholung einer Messung der zufällige Fehler der einzelnen Ablesung immer mehr seinen Einfluſs auf das Resultat, und letzteres nähert sich mit immer gröſserer Schärfe dem wahren Werth.

Solche vielfachen Wiederholungen oder Repetitionen sind indessen, vom Zeitverlust abgesehn, in sofern bedenklich, als im

Allgemeinen die Aufmerksamkeit sich dabei schwächt, und sonach eine oder zwei Messungen leicht ein besseres Resultat geben, als wenn man deren 10 oder 20 anstellt. Demnächst treten dabei auch wohl, veranlaſst durch zahlreiche unmittelbar auf einander folgende Ablesungen des Maaſses, constante Irrungen ein. Täuschungen dieser Art sind schwer zu vermeiden, selbst wenn man die Maaſse vorsichtig abliest, und alle Einzelheiten der Operation sorgfältig überwacht. Vor groben Fehlern kann man sich bei einiger Aufmerksamkeit zwar hüten, aber in der Nähe der Grenze des deutlichen Sehns sind Irrungen nicht zu vermeiden, und dieselben pflegen bei jeder unmittelbar darauf wiederholten Messung in gleichem Sinn sich wieder einzustellen.

Es mag hierbei auf eine Erfahrung hingewiesen werden, die wohl jeder Leser gemacht hat. In einiger Entfernung bemerkt man eine Inschrift, man sieht deutlich die einzelnen Zeilen, auch die Trennung der Worte, und selbst einige Buchstaben sind kenntlich, das Ganze kann man aber nicht lesen, weil bei dem zu weiten Abstand die Buchstaben noch in einander flieſsen. Wenn alsdann jemand uns die Inschrift nennt, oder wir dieselbe errathen, so wird sie plötzlich vollkommen deutlich, und wir sind verwundert, daſs wir sie früher nicht lesen konnten. Im Geiste gestaltet sich die Form der Schrift, diese legen wir über das noch unklare Bild und letzteres wird sogleich vollkommen deutlich. Obwohl wir aber nunmehr ganz sicher zu sein glauben, so ist dieses doch keineswegs immer der Fall, und oft bemerken wir, indem wir näher treten, wie sehr wir geirrt haben. Das geistige Bild ist wegen seiner Vollständigkeit und Klarheit so vorherrschend, daſs wir die Abweichungen des wirklichen Bildes nicht gewahr werden. In dieser Weise gestaltet sich auch leicht eine Erscheinung anders, als sie wirklich ist, sobald wir vorher schon ein Urtheil darüber uns gebildet haben, oder wir eine gewisse Form oder ein gewisses Maaſs erwarten.

Jedenfalls ist es nothwendig, das ganze Verfahren der Messung, so wie auch die dabei benutzten Instrumente und Apparate einer sorgfältigen Prüfung zu unterwerfen, um sich zu überzeugen, daſs die unvermeidlichen Fehler das Resultat nicht zu sehr entstellen.

Dieser Vorsicht ohnerachtet erreicht man dennoch niemals die absolute Sicherheit, dafs der Fehler nicht vielleicht in einzelnen Fällen die erlaubte Grenze überschreitet und sogar sehr grofs wird. Im Folgenden wird gezeigt werden, wie man aus gewissen Proben die Wahrscheinlichkeit für das Innehalten gegebener Fehlergrenzen berechnen kann, oder um wieder den Begriff des Wettens einzuführen, wieviel man gegen Eins wetten darf, dafs diese Grenzen nicht überschritten werden. Bei gehöriger Aufmerksamkeit und wenn die äufsern Verhältnisse nicht gar zu ungünstig sind, ist beispielsweise für Feldmesser-Arbeiten eine solche Sicherheit leicht zu erreichen, dafs man 999 gegen 1 darauf wetten kann, dafs der erlaubte Fehler nicht überschritten wird, also dafs bei 1000 solcher Messungen dieses nur einmal geschieht. Genügt dieses nicht, so kann man durch gröfsere Sorgfalt und durch Benutzung besserer Instrumente einen höhern Grad von Genauigkeit erreichen und sich dadurch vollständiger sichern. Die Wahrscheinlichkeit, dafs in 10 000 Fällen nur einmal ein Ereignifs nicht eintritt, oder dafs in diesem Beispiel die vorschriftsmäfsige Schärfe der Messung nicht erreicht wird, gilt im gewöhnlichen Leben wohl schon als volle Sicherheit.

Wenn es befremden sollte, dafs die volle Sicherheit stets unerreichbar bleibt, so mufs darauf hingewiesen werden, wie die Wahrscheinlichkeit sehr ungewöhnlicher Ereignisse so geringe werden kann, dafs das Eintreten derselben nicht in Billionen von Jahren (§ 13) zu erwarten ist, obwohl sie immer möglich bleiben. In dieser Beziehung ist anzunehmen, dafs niemals grofse Fehler ohne Verschulden der Beobachter vorkommen, und es rechtfertigt sich daher, für solche denjenigen verantwortlich zu machen, der die Messung ausführte. Geschähe dieses nicht, so würde jede Nachlässigkeit durch das zufällige Anwachsen der Fehler entschuldigt werden.

§ 3.

Es ergiebt sich schon aus Vorstehendem, wie mannigfaltig die Anwendungen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung sind. Von grosser Bedeutung sind sie bei Ermittelung der Einsätze für Versicherung gegen Feuersgefahr und andre Schäden, auch hat man sie vielfach benutzt, um bei Lotterien und namentlich auch bei complicirten Spielen die Aussichten auf den erwarteten Gewinn näher zu prüfen. Hiervon wird in der vorliegenden Untersuchung abgesehn, es soll im Folgenden nur gezeigt werden, in welcher Weise man aus Messungen, Beobachtungen und sonstigen Erfahrungen die schärfsten Resultate ziehn und zugleich von dem Grade der Sicherheit derselben sich überzeugen kann. Nichts desto weniger mögen zunächst als Einleitung diejenigen zehn Hauptsätze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung mitgetheilt werden, die Laplace aufgestellt hat,*) und von denen er sagt, dafs die ewigen Gesetze der Vernunft und Wahrheit darin ihre Begründung finden. Diesen Sätzen habe ich aber einige Erläuterungen und die nöthigen analytischen Entwickelungen beigefügt.

I. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnifs der Anzahl der Fälle, die dasselbe herbeiführen, zur Anzahl aller gleich möglichen Fälle.

Der Ausdruck Wahrscheinlichkeit hat hier eine sehr bestimmte und ganz andre Bedeutung, als in der gewöhnlichen Sprache. So würde man z. B. nicht sagen, dafs es wahrscheinlich sei, beim einmaligen Aufwerfen eines Würfels ein Ass zu treffen, nach vorstehender Erklärung giebt es aber dafür eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, und zwar ist dieselbe ein Sechstel, weil es sechs gleich wahrscheinliche Fälle giebt, von denen einer dieses Ereignifs herbeiführt. Die Wahrscheinlichkeit, Ass nicht zu werfen, ist gleich fünf Sechstel. Die Summe Beider ist die Gewifsheit, dafs entweder das Eine oder das Andre eintreten wird. Nach der eingeführten Bezeichnung ist diese Gewifsheit gleich Eins.

II. Der vorstehnde Satz gilt nur, wenn alle einzelnen Fälle gleich möglich oder gleich wahrscheinlich sind. Findet dieses nicht statt, so mufs man die Wahrscheinlichkeit der sämmtlichen Fälle mit einander vergleichen und jede in bestimmtem Zahlenwerth ausdrücken. Diese Untersuchung ist oft sehr schwierig und erfordert grofse Sorgfalt und Unbefangenheit. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses stellt sich alsdann wieder als ein Bruch dar, dessen Nenner die Summe aller in dieser Art gefundenen Werthe, der Zähler aber die Summe derjenigen Werthe

*) Essai philosophique sur les probabilites par M. le Marquis de Laplace.

enthält, welche sich auf die Fälle beziehn, die das Ereignifs herbeiführen.

Ein Beispiel wird dieses erläutern. Man wirft eine flache Münze auf, deren Seiten mit Bild und Schrift bezeichnet werden. Es fragt sich, wie grofs die Wahrscheinlichkeit ist, in zwei Würfen wenigstens einmal Bild zu werfen. Es giebt alsdann vier gleich mögliche Fälle, nämlich

1. Bild im ersten und im zweiten Wurf,
2. Bild im ersten und Schrift im zweiten,
3. Schrift im ersten und Bild im zweiten, und
4. Schrift in beiden Würfen.

Die drei ersten führen das erwartete Ereignifs herbei, daher ist nach dem obigen Satz die Wahrscheinlichkeit desselben gleich drei Viertel, oder man kann 3 gegen 1 darauf wetten, dafs es eintreten wird.

Der zweite Satz läfst sich gleichfalls hierauf anwenden, man kann nämlich auch drei verschiedene Fälle unterscheiden:

1. Bild im ersten Wurf, wobei die Wette schon gewonnen und das Spiel beendigt ist.
2. Schrift im ersten und Bild im zweiten Wurf und
3. Schrift in beiden Würfen.

Hiernach könnte es scheinen, dafs die Wahrscheinlichkeit nur gleich zwei Drittel wäre. Es ist jedoch klar, dafs die Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit des ersten Falls gröfser, als die eines der beiden letzten ist. Jene ist in der That gleich ein halb, während sie für den zweiten und dritten Fall ein Viertel ist. Die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen von Bild in zwei Würfen ist daher wieder

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

§ 4.

III. Besonders wichtig ist die Frage, wie grofs die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist, deren Wahrscheinlichkeiten man kennt. Wenn diese Ereignisse von einander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten jedes Einzelnen.

Hat man beispielsweise zwei Urnen, in deren jeder schwarze und weiſse Kugeln liegen, die man durch das Gefühl von einander nicht unterscheiden kann, so wird es beim Eingreifen immer gleich wahrscheinlich sein, eine oder die andre Kugel zu fassen. In der ersten Urne mögen 25 schwarze und 2 weiſse Kugeln liegen, in der zweiten aber 13 schwarze und 3 weiſse. Die Wahrscheinlichkeiten beim einmaligen Ziehn aus jeder der beiden Urnen, eine weiſse Kugel zu treffen, sind demnach

$$\frac{2}{27} \text{ und } \frac{3}{16}$$

und sonach nach vorstehendem Satz, die Wahrscheinlichkeit, bei einmaligem Zuge aus beiden Urnen weiſse Kugeln zu fassen, gleich

$$\frac{2 \,.\, 3}{27 \,.\, 16} = \frac{1}{72}$$

Die Richtigkeit dieser Schluſsfolge ist einleuchtend. Indem nämlich unter den 27 gleich möglichen Fällen beim Eingreifen in die erste Urne nur 2 eine weiſse Kugel geben, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür gleich 2 dividirt durch 27. Ist aber dieser Zug geschehn, und hat man wirklich eine weiſse Kugel gegriffen, so sind beim zweiten Zuge wieder 16 Fälle gleich wahrscheinlich, von denen nur 3 günstig sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür stellt sich daher im Ganzen auf

$$\frac{2}{27} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{72}$$

Was für diese Zahlen bewiesen, gilt aber augenscheinlich auch für alle andern.

Die Wahrscheinlichkeit, womit die mehrmalige Wiederholung desselben Ereignisses unter gleichen Umständen erwartet werden darf, ist hiernach gleich der Wahrscheinlichkeit des einmaligen Eintretens dieses Ereignisses erhoben zu der Potenz, deren Exponent die Anzahl der erwarteten Wiederholungen ausdrückt. Die höhern Potenzen eines ächten Bruchs werden aber immer kleiner, woher die mehrmalige Wiederholung eines an sich leicht möglichen Ereignisses doch bald sehr wenig wahrscheinlich wird.

Laplace schlieſst hieran die folgenden Bemerkungen. Eine Thatsache sei durch zwanzigmaliges Wiedererzählen überliefert worden. Wenn alsdann auch die Glaubwürdigkeit jeder Mittheilung gleich 0,9 wäre, so würde die der schliefslichen Ueberlieferung doch nur 0,9 zur zwanzigsten Potenz oder gleich 0,1216 oder weniger als ein Achtel sein. Diese auffallende Verminderung der Wahrscheinlichkeit kann man sehr passend mit der abnehmenden Deutlichkeit der Gegenstände vergleichen, die man durch mehrere Glasscheiben sieht. Die einzelne Scheibe läfst kaum eine Undeutlichkeit bemerken, wenn es aber mehrere sind, so wird das Bild bald unklar und leicht ganz unkenntlich. Die Geschichtschreiber pflegen diese Entstellung nicht sonderlich zu beachten, wenn sie von Zeiten sprechen, die viele Generationen zurückliegen, und gewifs würden manche historischen Ereignisse, die man als sicher ansieht, wenigstens sehr zweifelhaft erscheinen, wenn man sie einer solchen Prüfung unterwerfen wollte.

In den rein mathematischen Wissenschaften sind die entferntesten Folgerungen noch eben so sicher, wie die Grundsätze, von denen man ausgegangen ist. Bei Anwendung der Analysis auf physikalische Gegenstände geht die Wahrscheinlichkeit der zum Grunde gelegten Voraussetzungen auf alle Folgerungen über. In den historischen Wissenschaften leitet man dagegen jede Folgerung nur auf eine wahrscheinliche Art aus den vorhergehenden Sätzen ab. Welche Sorgfalt man daher auch anwenden mag, um Täuschungen zu vermeiden, so wächst die Gröfse des möglichen Fehlers doch mit jedem Schritt, und für entferntere Folgerungen dieser Art wird die Wahrscheinlichkeit sehr geringe.

§ 5.

IV. Wenn zwei Ereignisse von einander abhängig sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider gleich dem Product aus der Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses in die Wahrscheinlichkeit, dafs nach dem Eintreten desselben das zweite noch erfolgen wird.

Hätte man z. B. drei Urnen, von denen man wüfste, dafs eine nur schwarze und zwei nur weifse Kugeln enthalten, und wüfste man nicht, in welcher die schwarzen sich befinden, so würde die Wahrscheinlichkeit, dafs dieses bei der Urne A der Fall wäre, gleich ein Drittel sein. Die Aufgabe läfst sich indessen auch nach vorstehndem Satz lösen, indem man fragt, wie wahrscheinlich es ist, in den beiden andern Urnen B und C die weifsen Kugeln zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, dafs die Urne B weifse Kugeln enthält, ist gleich zwei Dritteln. Hat man aber eine weifse aus ihr gezogen, so bleibt nur noch zweifelhaft, ob A oder C die schwarzen enthält. Für beide Urnen ist die Wahrscheinlichkeit gleich grofs, also für jede ein halb, daher diejenige, dafs in B und C weifse Kugeln liegen, gleich

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Hier zeigt sich der Einflufs früherer Ereignisse auf spätere. Die Wahrscheinlichkeit, in der Urne C weisse Kugeln zu finden, war Anfangs gleich zwei Drittel, sie wird aber gleich ein halb, sobald man sich überzeugt hat, dafs in B weifse Kugeln liegen, und sie wäre zur Gewifsheit oder gleich Eins geworden, wenn man in B die schwarzen gefunden hätte. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich der folgende Satz:

V. Wenn ein erwartetes Ereignifs theils von einem bereits eingetretenen und theils noch vom Zufall abhängt, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Zufalls gleich der Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses ohne Rücksicht auf das schon eingetretene, dividirt durch die nachträglich ermittelte Wahrscheinlichkeit, womit das frühere Ereignifs erwartet werden durfte.

Im letzten Beispiel war die Wahrscheinlichkeit, bei dem ersten Zuge die weifsen Kugeln zu treffen, gleich zwei Drittel, und diejenige, in zwei Zügen weifse Kugeln zu fassen, oder was dasselbe ist, die schwarzen erst in der dritten Urne zu finden, gleich ein Drittel. Wenn daher das erste Ereignifs bereits eingetreten ist, oder die erste Ziehung ergeben hat, dafs in der einen Urne weifse Kugeln liegen, so ist nach vorstehendem Satz die Wahrscheinlichkeit, im folgenden Zuge wieder weifse Kugeln zu greifen, gleich ein Drittel dividirt durch zwei Drittel, also ein halb.

Oft fragt man, ob bei ganz zufälligen Ereignissen, wobei keine Beziehung zu den frühern stattfindet, die Vergangenheit von Einflufs auf die Zukunft sei. Dieses ist nicht der Fall. So ist es höchst unwahrscheinlich, dafs beim Aufwerfen einer flachen und ganz symmetrisch geformten Münze zehnmal nach einander die Bildseite sichtbar sein wird. Nach Satz III ist die Wahrscheinlichkeit dafür nur 1 dividirt durch 1024, oder man kann vor dem Beginn des Spiels 1 gegen 1023 wetten, dafs dieses nicht der Fall sein wird. Wenn man aber bereits neunmal hinter einander Bild geworfen hat, so bleibt der letzte Wurf hiervon ganz unabhängig, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs er Bildseite geben wird, ist wie bei dem ersten Wurf gleich ein halb, weil keine Rückwirkung der frühern Ereignisse auf die folgenden denkbar ist.

Bei wiederholtem und vorwiegendem Erscheinen von einer der beiden Seiten kann man jedoch vermuthen, dafs in der Münze selbst die Ursache hiervon zu suchen, und die Münze nicht gleichmäfsig geformt sei. Wäre dieses aber der Fall, so würde auch in Zukunft derselbe Wurf der vorherrschende bleiben. Eben so ist das Glück, welches manche Personen in allen Lebensverhältnissen haben, gemeinhin die Folge ihrer Geschicklichkeit.

§ 6.

Hieran knüpft sich die Frage, wie man aus beobachteten Erscheinungen auf deren Ursachen schliefsen kann. Offenbar ist jede Ursache, der man ein Ereignifs zuschreiben darf, um so wahrscheinlicher, mit je gröfserer Wahrscheinlichkeit dieselbe, wenn sie wirklich vorhanden wäre, das Ereignifs herbeiführen würde. Der Satz lautet daher:

VI. Die Wahrscheinlichkeit für eine der verschiednen möglichen Ursachen ist ein Bruch, dessen Zähler die Wahrscheinlichkeit ist, womit diese Ursache das Ereignifs herbeiführt, und dessen Nenner sich aus der Summe aller Wahrscheinlichkeiten in Betreff der sämmtlichen möglichen Ursachen zusammensetzt. Sind aber diese Ursachen an sich nicht gleich wahrscheinlich, so mufs man jede Wahrscheinlichkeit, mit der sie das Ereignifs herbeiführt, mit der Wahrscheinlichkeit der Ursache selbst, sowohl im Zähler wie im Nenner multipliciren.

Man pflegt regelmäfsig wiederkehrende Erscheinungen besondern Ursachen zuzuschreiben. Oft glaubt man sogar, dafs Erscheinungen, die sich in eigenthümlicher Weise oder in einer gewissen Regelmäfsigkeit darstellen, weniger wahrscheinlich sind, als andre, dafs z. B. beim Aufwerfen einer symmetrisch gestalteten Münze nicht so leicht zehnmal nach einander die Bildseite fallen könne, als irgend eine andre vorher bestimmte Reihenfolge, worin Bild und Schrift wechseln. Dieses ist aber nicht der Fall. Die regelmäfsigen Combinationen ereignen sich vielmehr nur deshalb so selten, weil ihrer so wenige sind. An sich ist der Wurf 10 mal Bild eben so wahrscheinlich, wie etwa zuerst 1 mal Schrift, sodann 3 mal Bild, 2 mal Schrift, 1 mal Bild, 1 mal Schrift und endlich 2 mal Bild. Dieser Wurf erscheint aber ganz unregelmäfsig, woher er nicht beachtet, vielmehr zur grofsen Anzahl der anscheinend gesetzlosen gerechnet wird.

Eben wegen dieser verschwindend kleinen Anzahl solcher ungewöhnlichen Erscheinungen erregen dieselben den Verdacht, dafs sie nicht zufällig sich gebildet haben, sondern absichtlich herbeigeführt sind. Sehn wir z. B. die Lettern *EUROPA* in dieser Reihenfolge neben einander stehn, so urtheilen wir gleich, dafs sie nicht durch Zufall so gefügt wurden. An sich ist dieses Zutreffen aber eben so leicht möglich, wie irgend ein andres, wobei ein vorher bestimmtes Wort dargestellt würde, das sich vielleicht nicht aussprechen läfst und in keiner uns bekannten Sprache vorkommt. Indem aber das Wort Europa eine allgemein bekannte Bedeutung hat, so ist es ohne Vergleich viel wahrscheinlicher, dafs die Lettern absichtlich so gestellt wurden, als dafs der Zufall sie zusammengefügt habe. Im letzten Fall würde diese Ursache, nämlich der Zufall, nur mit der Wahrscheinlichkeit

$$0{,}000\,000\,005\,233 = \frac{1}{191\,102\,976}$$

diese Combination herbeigeführt haben, vorausgesetzt, dafs nicht mehr als 24 verschiedenartige Lettern in gleicher Anzahl im Setzkasten gelegen hätten. Es ist daher höchst unwahrscheinlich, dafs diese Ursache die Zusammenstellung veranlafst habe.

Wir sind gewohnt, die Erscheinungen, die um uns vorgehn, in gewöhnliche und ungewöhnliche oder aufserordentliche einzutheilen. Die Anzahl der letzten ist vergleichungsweise zu der der ersten gemeinhin verschwindend klein, wenn sie daher vorkommen, so wird immer der Verdacht angeregt, dafs sie nicht zufällig eingetreten sind. Laplace bemerkt dabei, wie in gleicher Weise auch Zeugenaussagen, welche aufserordentliche Ereignisse bestätigen, besorgen lassen, dafs sie auf Täuschung oder Uebertreibung beruhn.

§ 7.

VII. Die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses findet man, wenn man für das bereits früher beobachtete Eintreffen desselben Ereignisses die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Ursache desselben mit der Wahrscheinlichkeit multiplicirt, womit diese Ursache das Ereignifs auch in Zukunft herbeiführen kann. Die Summe dieser Producte drückt die Wahrscheinlichkeit des künftigen Eintreffens aus.

Wenn z. B. in einer Urne zwei Kugeln liegen, deren Farben unbekannt sind, so kann es sich treffen, dafs man während einer Reihe von Zügen, wobei die untersuchte Kugel jedesmal wieder hineingeworfen wird, immer dieselbe Kugel fafst, und daher die zweite nicht gezogen ist. Sobald man zweimal nach einander eine weifse Kugel gefafst hat, fragt es sich, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs der dritte Zug gleichfalls eine weifse geben werde. Man kann alsdann nur zwei Voraussetzungen machen, nämlich entweder ist die eine Kugel weifs, und die andre von andrer Farbe, oder beide Kugeln sind weifs. Nach der ersten Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit des bereits eingetretenen Ereignisses oder das zweimalige Treffen der weifsen Kugel gleich ein Viertel, nach der zweiten ist sie 1. Wendet man hierauf den Satz VI an, und betrachtet beide Voraussetzungen als mögliche Ursachen, so ist die Wahrscheinlichkeit der ersten Ursache

$$\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}$$

und die der zweiten

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$$

Nach der ersten Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Zug wieder eine weifse Kugel zu fassen, gleich ein halb, nach der zweiten gleich eins. Multiplicirt man nun diese Wahrscheinlichkeiten mit denen der Voraussetzungen, so ist die

Wahrscheinlichkeit für das Wiedererscheinen einer weifsen Kugel beim dritten Zuge

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{10}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses unbekannt ist, so kann man dafür alle Werthe von 0 bis 1 einführen. Die Wahrscheinlichkeit einer jeden solchen Voraussetzung, geschlossen aus dem bereits erfolgten Eintreten des Ereignisses ist nach dem Satze VI gleich einem Bruch, dessen Zähler die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses unter dieser Voraussetzung, und dessen Nenner die Summe der Wahrscheinlichkeiten der sämmtlichen möglichen Voraussetzungen ist. Multiplicirt man alsdann einen jeden dieser Brüche mit der Wahrscheinlichkeit, womit die betreffende Voraussetzung die Wiederholung des Ereignisses erwarten läfst, und summirt diese Producte, so ist dieses die Wahrscheinlichkeit der Wiederkehr. In der analytischen Behandlung stellt sich das Resultat dieser anscheinend schwierigen Untersuchung sehr einfach dar.

Ein Ereignifs sei n mal eingetreten. Die unbekannte Wahrscheinlichkeit des einmaligen Eintretens unter Voraussetzung einer gewissen Ursache sei μ, alsdann ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter derselben Voraussetzung das Ereignifs n mal eintritt, gleich

$$\mu^n$$

und nach Satz VI ist die Wahrscheinlichkeit dieser Voraussetzung

$$\frac{\mu^n}{[\mu^n]}$$

indem die Parenthese [ ] die Summe aller ähnlichen Glieder von $\mu = 0$ bis $\mu = 1$ bezeichnet. Unter Beibehaltung des Werthes μ ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach dieser Voraussetzung das Ereignifs auf's Neue eintreten werde, gleich μ. Die Wahrscheinlichkeit, womit nach allen ähnlichen Voraussetzungen dieses zu erwarten ist, wird daher

$$= \frac{\mu \cdot \mu^n}{[\mu^n]} + \frac{\mu' \cdot \mu'^n}{[\mu^n]} + \frac{\mu'' \cdot \mu''^n}{[\mu^n]} + \ldots = \frac{[\mu^{n+1}]}{[\mu^n]}$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $d\mu$ und nimmt darauf Rücksicht, dafs μ in diesen Summen alle möglichen Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, also alle Werthe von 0 bis 1 annehmen soll, so ist

$$[\mu^n]\, d\mu = \int \mu^n \,.\, d\mu = \frac{1}{n+1}\, \mu^{n+1}$$

also innerhalb der Grenzen 0 bis 1

$$= \frac{1}{n+1}$$

Eben so findet man

$$[\mu^{n+1}\, d\mu] = \frac{1}{n+2}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher gleich

$$\frac{n+1}{n+2}$$

Fragt man z. B., mit welcher Wahrscheinlichkeit man am nächsten Morgen die Wiederkehr des Tageslichts erwarten darf, nachdem dieses zufolge historischer Nachrichten während 5000 Jahren regelmäfsig eingetreten ist, so wäre n gleich der Anzahl dieser Erfahrungen, also 1 826 250 und die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{1\,826\,251}{1\,826\,252}$$

Man könnte also 1 gegen 1 826 251 wetten, dafs am nächsten Morgen das Tageslicht wiederkehren wird. Diese Wahrscheinlichkeit wird aber zur vollen Gewifsheit, wenn man den Zusammenhang der Erscheinung mit den Gesetzen der Mechanik beachtet, wobei man sich leicht überzeugt, dafs nichts die Drehung der Erde plötzlich hemmen kann.

§ 8.

Das Wort Hoffnung, das nach gewöhnlichem Sprachgebrauch die Erwartung günstiger Ereignisse ausdrückt, hat in der Wahrscheinlichkeits-Rechnuug eine andre sehr bestimmte Bedeutung.

VIII. Die Hoffnung ist nämlich das Product aus dem Vortheil eines gewissen Ereignisses multiplicirt in die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses. Wenn die Hoffnung aber auf verschiedne Art in Erfüllung gehn kann, so ist sie gleich der Summe der Producte aus der Wahrscheinlichkeit jedes dieser Ereignisse in die Gröfse des dadurch herbeigeführten Vortheils. Zum Unterschied von einem andern Begriff, worin einige fremdartige Umstände berücksichtigt werden, nennt man die vorstehend bezeichnete Gröfse die mathematische Hoffnung.

Beispielsweise sei verabredet, dafs jemand 3 Thaler erhält, wenn er bei einmaligem Aufwerfen der Münze die Bildseite trifft, und 6 Thaler, wenn er zuerst Schrift und darauf Bild wirft. Die Wahrscheinlichkeit des ersten Falls ist 1 : 2, die des zweiten 1 : 4 und die betreffenden Gewinne sind 3 und 6. Die Hoffnung ist also

$$3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

Der entsprechende Einsatz müfste also bei richtiger Anordnung des Spiels 3 Thaler betragen.

IX. Wenn unter den zufälligen Ereignissen einige vortheilhaft, andere nachtheilig sind, so ist die Hoffnung gleich der Differenz zwischen der Summe der ersten Producte und der Summe der Producte aus den Verlusten in die Wahrscheinlichkeiten desselben. Ist die zweite Summe gröfser, als die erste, so verwandelt sich der wahrscheinliche Gewinn in Verlust, oder die Hoffnung in Besorgnifs.

Man mufs sich stets bemühn, die Verhältnisse des Lebens so einzurichten, dafs die letzte Summe die erste nicht übersteigt. Zur richtigen Schätzung der Gewinne und Verluste und der Wahrscheinlichkeiten beider gehört aber vorzugsweise volle Unbefangenheit, und demnächst auch Erfahrung und gesundes Urtheil. Man darf sich dabei weder Vorurtheilen, noch Täuschungen durch Furcht oder Hoffnung hingeben, eben so wie auch keinem Traum von persönlichem Glück, womit viele Menschen ihrer Eigenliebe schmeicheln.

§ 9.

Die beiden letzten Sätze führen zuweilen zu Folgerungen, deren Erklärung nicht leicht gewesen ist. Es werde beispielsweise wieder die Münze aufgeworfen, deren beide Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind. Wenn man die Gewinne in der Art verabredet, dafs der Spieler 2 Thaler erhält, wenn er das erste Mal Bild wirft, 4 Thaler, wenn dieses erst im zweiten Wurf geschieht, 8 Thaler, wenn erst der dritte Wurf Bild zeigt, und so fort, so ist die mathematische Hoffnung jedes Wurfs gleich einem Thaler, und die ganze Hoffnung für n Würfe gleich n Thaler. Eben so grofs müfste der Einsatz sein, folglich auch unendlich grofs, wenn keine Grenze gesetzt würde, wobei das Spiel aufhört, falls fortwährend die Schrift-Seite geworfen würde. Es wird indessen kein vernünftiger Mensch sein Vermögen in dieser Weise auf das Spiel setzen, noch auch eine mäfsige Summe daran wagen, weil der Verlust des gröfsten Theils vom Einsatz mit grofser Sicherheit zu erwarten, der entsprechende Gewinn aber zu unwahrscheinlich ist.

Der reelle Vortheil, den man allein berücksichtigen mufs, hängt von vielen Umständen ab, die man oft nicht sicher in Rechnung stellen kann, der wichtigste unter diesen ist aber gewifs die Gröfse des eignen Vermögens. Augenscheinlich hat ein Thaler für den Millionär einen viel geringern Werth, als für einen armen Spieler, und der mögliche Gewinn einer Summe, die dem ganzen oder halben Vermögen gleich kommt, ist nicht entfernt mit dem Nachtheil eines eben so grofsen Verlustes zu vergleichen. Man darf sich also nicht in ein Spiel einlassen, wobei das eine und das andre mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Bei dem Gewinn und Verlust mufs man daher die absoluten und relativen Werthe unterscheiden. Von den letztern allein hängen die Erwartungen ab, und diese nehmen nur jene absoluten Werthe an, wenn das Vermögen des Spielers im Vergleich zu den Gewinnen und Verlusten sehr grofs ist. Ein allgemein gültiger Ausdruck für die relativen Werthe läfst sich nicht angeben, doch dürfte in den meisten Fällen der folgende, von Daniel Bernouilli aufgestellte Satz mit dem Urtheil des gesunden Menschenverstands übereinstimmen.

X. Der relative Werth einer unendlich kleinen Summe ist gleich dem absoluten Werth derselben dividirt durch das Vermögen der dabei betheiligten Person. Es wird dabei vorausgesetzt, dafs jeder Mensch einiges Vermögen besitzt, und dieses niemals bis auf Nichts herabsinkt. In der That sind selbst für den Aermsten die Erträge seiner Arbeit oder auch seine Hoffnungen gleichsam die Zinsen seines Besitzthums.

Das Vermögen sei gleich Eins, und in Theilen desselben ausgedrückt sei A der mit der Wahrscheinlichkeit a erwartete absolute Gewinn. Alsdann ist nach dem vorstehnden Satz der relative, oder nach Laplace's Ausdruck der moralische Werth eines sehr kleinen Gewinnes gleich

$$\frac{dA}{1+A}$$

daher die Hoffnung auf den Gewinn A

$$a\int\frac{dA}{1+A} = \log \operatorname{nat}(1+A)^a + C$$

Die Constante ist aber gleich Null, weil für $A=0$ auch $\log\,(1+A)=0$ ist.

Dieses ist die moralische Hoffnung, während die absolute nach dem VIII. Satz $= a\,A$ war.

Wenn in gleicher Weise noch andre Gewinne $B, C\ldots$ mit der Wahrscheinlichkeit $b, c\ldots$ zu erwarten sind, so stellt sich die Summe derselben durch den Ausdruck

$$\log(1+A)^a + \log(1+B)^b + \log(1+C)^c + \ldots$$
$$= \log[(1+A)^a\,.\,(1+B)^b\,.\,(1+C)^c\ldots.]$$

dar. Zur nähern Ermittelung dieser Hoffnung bezeichne man ihren reellen Werth durch x, der ihr aber nicht mit Wahrscheinlichkeit, sondern mit Gewifsheit zukommt. Alsdann ist

$$\int\frac{dx}{1+x} = \log(1+x) = \log[(1+A)^a\,.\,(1+B)^b\;\ldots.]$$

und man erhält, wenn man auf beiden Seiten von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht

$$x = (1+A)^a\,.\,(1+B)^b\,.\,(1+C)^c\,\ldots\ldots - 1$$

Es sei verabredet, dafs nach n Würfen das Spiel aufhört, und der Spieler 2 Thaler erhält, wenn gleich beim ersten Wurf die Bildseite erscheint, 4 Thaler, wenn dieses beim zweiten, 6 Thaler, wenn es zum ersten mal beim dritten geschieht u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit dieser verschiednen Ereignisse ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$

u. s. w. Die Anzahl der Factoren des ersten Gliedes ist abei gleich n. Erscheint nun die Bildseite zum ersten mal

beim 1. Wurf, so ist $A = 2$ und $a = \frac{1}{2}$
2. - - - $B = 4$ - $b = \frac{1}{4}$
3. - - - $C = 8$ - $c = \frac{1}{8}$

u. s. w.

Der Einsatz mufs, um dem Gewinn in seiner wahren Gröfse zu entsprechen $= n$ sein. Nimmt man nun etwa an, dafs das Vermögen des Spielers 200 Thaler beträgt und drückt man die Gewinne in Theilen des Vermögens aus, so ist

$$x = (1{,}01)^{\frac{1}{2}} \cdot (1{,}02)^{\frac{1}{4}} \cdot (1{,}04)^{\frac{1}{8}} \ldots - 1$$

Hiernach berechnet sich die Aussicht auf den moralischen Gewinn, in Theilen des Vermögens ausgedrückt $(= x)$ oder in Geldwerth $(= x')$ und zieht man hiervon den Einsatz $(= n)$ ab, so ist der wirkliche Gewinn $(= h)$ jedesmal negativ. Man hat nämlich, wenn das Spiel spätestens nach n Würfen beendigt sein soll,

für n	x	x'	h
1	0,004 984	0,997	— 0,003
2	0,009 974	1,995	— 0,005
3	0,014 937	2,987	— 0,013
4	0,019 830	3,966	— 0,034
5	0,024 571	4,914	— 0,086
6	0,029 026	5,805	— 0,195
7	0,033 010	6,602	— 0,398
8	0,036 340	7,268	— 0,732
9	0,038 912	7,782	— 1,218
10	0,040 756	8,150	— 1,850
11	0,041 981	8,396	— 2,604
12	0,042 722	8,544	— 3,456
13	0,043 237	8,647	— 4,353
14	0,043 519	8,704	— 5,296
15	0,043 681	8,736	— 6,264

Die moralische Aussicht auf Gewinn ist also jedesmal kleiner, als der Einsatz, und der Verlust wird sehr bedeutend, wenn eine gröfsere Anzahl von Würfen verabredet wird.

Jener Ausdruck für x zeigt aber, daſs wenn die erwarteten Gewinne $A, B, C \ldots\ldots$ vergleichungsweise zum Vermögen des Spielers sehr klein sind, daſs man alsdann ihre zweiten, wie auch die höhern Potenzen, und eben so die Producte $AB, AC, BC \ldots$ gleich Null setzen darf, und hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} x &= (1 + aA)(1 + bB)(1 + cC) \ldots\ldots - 1 \\ &= aA + bB + cC + \ldots \end{aligned}$$

Die moralische Hoffnung ist daher in diesem Fall eben so groſs, wie die absolute und entspricht dem Einsatz.

Aus Vorstehndem ergiebt sich noch, daſs in jedem Spiel, wenn auch die Einsätze den Gewinnen entsprechen, die Verluste immer etwas empfindlicher sind, als die eben so wahrscheinlichen und eben so groſsen Gewinne. In viel höherem Grade ist dieses aber bei solchen Spielen der Fall, wo die Einsätze sogar die mathematische Hoffnung übersteigen, wie bei allen Spielbanken, weil dieselben einen gewissen Vortheil sich sichern müssen.

Aus dem Satz X ergiebt sich noch, daſs man bei unvermeidlichen Gefahren nicht sein ganzes Vermögen von einem Zufall abhängig machen darf, man es vielmehr vertheilen muſs, damit die zufälligen Verluste nicht zu groſs werden. Ist das Vermögen aber an sich zu unbedeutend, um es bei dieser Vertheilung noch vortheilhaft anlegen zu können, so thut man wohl, mit andern Personen, die in gleicher Verlegenheit sind, in Verbindung zu treten. Hierauf beruht der moralische Werth der Versicherungs-Gesellschaften. In vollem Maaſs tritt ein solcher jedoch nur ein, wenn das ganze eigne Vermögen, oder ein groſser Theil davon durch dasselbe zufällige Ereigniſs verloren werden kann. Läſst sich dieses vermeiden und kann man selbst eine so vielfache Theilung vornehmen, daſs die möglichen Verluste nur unbedeutend bleiben, so sprechen manche Gründe dafür, die gegenseitige Versicherung zu unterlassen. So pflegt der Rheder, dem eine gröſsere Anzahl von Seeschiffen gehört, dieselben bei keiner Gesellschaft zu versichern, indem die Prämien, die er diesen zahlen müſste, den Werth der wahrscheinlichen Verluste etwas übersteigen. Diese Differenz beruht theils auf den nothwendigen Verwaltungskosten, theils aber auch darauf, daſs die Wahrscheinlichkeit der Verluste für alle Theilnehmer nicht dieselbe ist, vielmehr gut ausgerüstete und tüchtig bemannte Schiffe seltner Schaden nehmen, als andre. Der reelle und vorsichtige Besitzer vieler Schiffe findet es daher angemessner, diese in einem besondern Conto bei sich selbst zu versichern.

Indem man sich durch Versicherungen solcher Art vor grofsen Verlusten schützt, so überträgt man das unvermeidliche Risico auf eine Gesellschaft, deren Vermögen viel gröfser ist, als das des Einzelnen, bei der also Verluste und Gewinne sich ausgleichen. Wie sehr diese Einrichtung sich rechtfertigt und als wohlthätig angesehn werden mufs, so kommt doch nicht selten auch das Gegentheil vor, indem grofse Capitalisten, um ihr Conto sogleich sicher abzuschliefsen, sich mit Speculanten einlassen, die bei weit geringerem Vermögen die zufälligen Verluste und Gewinne gegen gewisse Abfindungs-Summen übernehmen. Dieselben verstehn sich aber hierzu nur, wenn die mathematische Hoffnung überwiegend grofs ist, sie also mehr Aussicht auf Gewinn, als auf Verlust haben. Ein solcher Vortheil gebührt auch dem Unternehmer als Vergütung für die Besorgung des Geschäfts. Betrachtet man dagegen den moralischen Werth, den die zufälligen Gewinne und Verluste für den Unternehmer bei seinem beschränkten Vermögen haben, so überzeugt man sich leicht, dafs er das Risico nur tragen kann, wenn ihm aufser jenem bereits erwähnten, noch ein neuer bedeutender Vortheil zugesichert wird. Dieser Vortheil sei gleich x und der Gewinn sei A, der mit der Wahrscheinlichkeit a zu erwarten ist, während mit derselben Wahrscheinlichkeit auch ein Verlust A eintreten kann. Endlich sei m das Vermögen des Unternehmers. Hiernach ist

$$x = -1 + \left(1 + \frac{A}{m}\right)^a \cdot \left(1 - \frac{A}{m}\right)^a$$

oder der Geldwerth der entsprechenden Entschädigung ist

$$m - m\left(1 - \frac{A^2}{m^2}\right)^a$$

Vernachlässigt man dabei die höhern Potenzen des zweiten Gliedes in der Parenthese, so verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\frac{aA^2}{m}$$

woraus sich ergiebt, dafs diese letzte Vergütung im umgekehrten

Verhältnifs zum Vermögen des Unternehmers steht, der Aermere also zu gröfsern Forderungen, als der Reichere berechtigt ist.

Die Hoffnung, dafs der Unternehmer das Risico wirklich tragen wird, ist indessen, wie die Erfahrung zeigt, nur begründet, so lange die Verluste geringfügig bleiben. Stellen sie sich dagegen in bedeutender Gröfse ein, so kann der Unternehmer dieselben nicht decken, weil ihm die nöthigen Mittel fehlen, andern Theils werden aber auch in solchen Fällen, namentlich bei Bauten, die der Staat, oder eine Communal-Verwaltung an einen Entrepreneur überträgt, bei ungünstigem Erfolge jedesmal für die Erstattung der Verluste Billigkeitsgründe geltend gemacht, die gemeinhin nicht unberücksichtigt bleiben, sobald der Nachweis geführt werden kann, dafs die Verluste ohne eignes Verschulden eingetreten sind. Diese Uebertragung des Risicos auf einen Einzelnen ist ein Glücksspiel, wobei der Bauherr, oder der Staat, vorweg auf den Gewinn in günstigen Chancen verzichtet, aber dennoch die gröfsern zufälligen Verluste tragen mufs.

Glücksspiele dieser Art sind ohne Zweifel höchst unvortheilhaft und dennoch wird nicht selten, und in manchen Staaten sogar regelmäfsig, darauf eingegangen. Vorzugsweise geschieht dieses wohl in der Absicht, schon vor dem Beginn eines Baues den Kostenbetrag desselben ganz bestimmt bezeichnen zu können, zuweilen glaubt man auch andre Gründe dafür geltend machen zu müssen. Jedenfalls ist es aber für den Staat, als den gröfsten Capitalisten, immer am vortheilhaftesten, wenn er das Risico sich selbst vorbehält, weil alsdann die möglichen Gewinne und Verluste sich wirklich ausgleichen. Nur solche Arbeiten, deren Ausdehnung sich bestimmt vorhersehn läfst und die von keinen Zufälligkeiten abhängig sind, eignen sich zu Entreprisen und noch mehr zu Accorden, und zwar unmittelbar mit den Arbeitern, die sie ausführen.

§ 10.

Von grofser Bedeutung ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Beobachtungen, und hiervon wird im Folgenden allein die Rede sein. Jede Messung ist, wie bereits erwähnt, mit zufälligen Fehlern behaftet, wenn sie aber oft wiederholt wird, so lassen sich diese Fehler nicht nur in gewissem Grade beseitigen, sondern sie geben auch Gelegenheit zu beurtheilen, welche Sicherheit die gewonnenen Resultate haben.

Die Beobachtungsfehler rühren zuweilen, und namentlich bei mangelhafter Uebung im Gebrauch der Instrumente und Apparate, von der falschen Aufstellung und unrichtigen Behandlung der letztern, oder von groben Irrungen im Ablesen der Maafse her. Sie können alsdann leicht überaus grofs werden und folgen nicht mehr den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, die für jede einzelne Beobachtung gleiche Fehler-Ursachen voraussetzt. Bei unvorsichtiger Benutzung der Instrumente sind zuweilen auch sämmtliche Messungen mit gewissen constanten Fehlern, wie etwa mit Collimations-Fehlern behaftet, die also durch Vergleichung der einzelnen Ablesungen sich nicht zu erkennen geben, während vielleicht die Uebereinstimmung derselben sogar einen hohen Grad von Genauigkeit vermuthen läfst. Auch von Fehlern dieser Art, die also nicht mehr zufällig sind, ist hier nicht die Rede, sondern nur von solchen, die nach gehöriger Berichtigung der Instrumente und bei voller Aufmerksamkeit und Uebung im Messen sich nicht vermeiden lassen. Ob diese Fehler positiv oder negativ ausfallen, und wie grofs sie sein werden, läfst sich weder durch blofse Ueberlegung, noch durch Rechnung vorhersehn. Sie sind also zufällige Erscheinungen und den Gesetzen des Zufalls unterworfen.

Die Instrumente oder Mefs-Apparate sind stets in gewissem Grade ungenau und mangelhaft. Die Schärfe der Einstellung und Ablesung ist begrenzt, und eben so ist das Maafs oder die Theilung mit gewissen Fehlern behaftet, die selbst durch die sorgfältigste Prüfung nur bis zu einem gewissen Grade festgestellt und zur Berichtigung der Ablesung beseitigt werden können. Endlich sind auch unsere Sinne nicht vollkommen. Selbst das schärfste Auge, von allen Mitteln der Optik unterstützt, kann nur bis zu einer näheren oder entfernteren Grenze die Erscheinungen verfolgen, während die kleineren Maafse, die jenseits derselben liegen, nicht mehr sicher zu erkennen sind.

Hiernach sind alle Beobachtungen mit gewissen Fehlern behaftet, die von der Eigenthümlichkeit der Erscheinung, so wie von der Güte der dabei benutzten Instrumente und von der

Geschicklichkeit und Aufmerksamkeit des Beobachters abhängen. Es giebt aber jedesmal bei wiederholter Messung, während die äufsern Einwirkungen dieselben bleiben, oder von ihren Aenderungen Rechnung getragen wird, und wenn jene groben Irrungen vermieden werden, von denen bereits die Rede war, einen gewissen Grad von Genauigkeit, den man dabei erreicht, oder die Fehler treten in derselben Weifse auf, wie andre Erscheinungen, die von ähnlichen Zufälligkeiten abhängen. Sie folgen also den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, in gleicher Weise, wie dieses beim Würfelspiel, oder beim Ziehn von Loosen geschieht.

Die Methoden dieser Rechnung lehren zunächst die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten aus Beobachtungen zu finden, die sämmtlich mit zufälligen Fehlern derselben Art behaftet sind. Dabei wird aber vorausgesetzt, dafs die Anzahl der Beobachtungen gröfser als die der Unbekannten ist. Wären beide einander gleich, so würde man zwar ganz bestimmte Resultate erhalten, die jedoch von den Beobachtungsfehlern im vollsten Maafse entstellt sind, indem eine Ausgleichung der letztern in diesem Fall nicht eintreten kann. Ist die Anzahl der Unbekannten kleiner, als die der Messungen, so lassen sich für jene keine Werthe finden, welche die sämmtlichen Beobachtungen in aller Schärfe darstellen, aber wohl solche, die einer Ausgleichung der Fehler nach den Gesetzen des Zufalls entsprechen, und sonach die wahrscheinlichsten und zugleich auch richtiger sind, als jene, die aus Beobachtungen berechnet wurden, deren Anzahl eben so grofs, wie die der Unbekannten war.

Vergleicht man demnächst die einzelnen Messungen mit denjenigen Werthen, welche sich durch Einführung der in dieser Art gefundenen Unbekannten darstellen, so lassen die Differenzen zwischen beiden erkennen, welchen Grad der Wahrscheinlichkeit sowohl die Messungen selbst, als auch die daraus hergeleiteten Resultate haben. Diese Untersuchung ist insofern von der höchsten Bedeutung, als sie zu einer richtigen Würdigung der gewonnenen Resultate führt. Die zuweilen sehr willkürlichen und zum Theil sogar augenscheinlich unrichtigen Lehrsätze in manchen Erfahrungs-Wissenschaften, würden nicht aufgestellt sein, wenn ihre Erfinder die Sicherheit der vermeintlichen Entdeckung einer vorurtheilsfreien und methodischen Prüfung unterworfen, und die gefundenen

Resultate als ungültig ganz unterdrückt, oder als höchst zweifelhaft bezeichnet hätten, sobald diese sich nicht mit grofser Wahrscheinlichkeit annähernd als richtig herausstellten.

Endlich führen die Methoden der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auch bei Vergleichung verschiedener Hypothesen zu einem sichern Urtheil über dieselben. In vielen Fällen ist nämlich der Zusammenhang der einzelnen Wirkungen, welche eine Erscheinung veranlassen, so complicirt, dafs es nicht gelingt, denselben theoretisch zu verfolgen. Es bleibt alsdann nur übrig, gewisse Hypothesen einzuführen. Wenn diese aber gleiche Berechtigung haben, so entsteht die Frage, welche von ihnen durch die vorliegenden Beobachtungen am meisten bestätigt wird.

Ein Beispiel wird dieses Verhältnifs klar machen. Die Bewegung des Wassers in cylindrischen Röhren ist vergleichungsweise eine sehr einfache Erscheinung, es ist aber bisher noch nicht geglückt, sie gehörig aufzuklären. In einer Röhre ist die Geschwindigkeit des hindurchströmenden Wassers augenscheinlich von der Druckhöhe abhängig. Bei uns wird gewöhnlich vorausgesetzt, dafs diese Druckhöhe dem Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers proportional sei, in Frankreich nimmt man dagegen an, die Druckhöhe sei der Summe zweier Glieder gleich, von denen das eine die erste und das andre die zweite Potenz der Geschwindigkeit zum Factor hat. Woltman machte schon früher darauf aufmerksam, dafs die ihm vorliegenden Beobachtungen sich ziemlich befriedigend darstellen, wenn man die Druckhöhe der $1^3/_4$ten Potenz der Geschwindigkeit proportional setzt. In ähnlicher Art hat man in neuster Zeit verschiedentlich versucht, andre Exponenten zu finden, die den Beobachtungen noch mehr entsprechen. Es sind also sehr verschiedne Hypothesen aufgestellt worden, denen man, so lange der wahre Zusammenhang unbekannt ist, mit gleichem Rechte noch viele andere hinzufügen könnte. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung lehrt nun das Criterium, woran man erkennt, welche von diesen Hypothesen den vorliegenden Beobachtungen sich am schärfsten anschliefst. Sie bietet aufserdem auch Gelegenheit zu beurtheilen, ob diese wahrscheinlichste Hypothese als die richtige angesehn werden darf, oder ob sie nur innerhalb gewisser Grenzen gültig ist. Wenn nämlich die Differenzen zwischen den beobachteten und den nach dieser

Hypothese berechneten Werthen ganz zufällig bald positiv, bald negativ ausfallen, so darf man sie als Beobachtungs-Fehler ansehn, wenn sie dagegen, nach der Gröſse der Variabeln geordnet, sich in gleichem Sinn regelmäſsig verändern, also entweder gröſser, oder kleiner werden, so ist dieses ein sichres Zeichen, daſs die zum Grunde gelegte Hypothese nur innerhalb gewisser Grenzen als zutreffend angesehn werden darf, daſs sie aber keineswegs die Erscheinung vollständig darstellt.

Es ergiebt sich hieraus, welchen wesentlichen Nutzen die Wahrscheinlichkeits-Rechnung bietet, so oft man aus Messungen und Beobachtungen sichre Resultate ziehn will.

II. Abschnitt.

Beziehung zwischen der Gröfse der Beobachtungsfehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens.

§ 11.

Die Gesetze, denen die Beobachtungsfehler unterliegen, ergeben sich, wenn man auf die Fehler-Quellen zurückgeht.

Indem die Beobachtungs-Fehler, wie vorstehnd gezeigt ist, zufällig sind, so können sie die Resultate eben so leicht vergröfsern, wie verkleinern, sie lassen sich auch nicht berichtigen, so lange die Messung nicht wiederholt, oder in andrer Weise geprüft ist. Der wahrscheinlichste Werth einer nur einmal gemefsnen Gröfse ist derjenige, den man gerade gefunden hat. Ist dagegen die Messung ein- oder mehrmals wiederholt, so kann die dauernde Wiederkehr desselben zufälligen Fehlers eben so wenig eintreten, wie man beim wiederholten Aufwerfen eines richtigen Würfels immer dieselbe Seite wieder erwarten darf, es werden vielmehr diejenigen Abwechslungen sich zeigen, die eben den Zufall charakterisiren, und die bei vielfacher Wiederholung zuletzt dazu dienen, den Einflufs der constanten Ursachen von denen des Zufalls zu trennen, und sonach die letztern aus dem Resultat immer mehr zu entfernen.

Wenn man dieselbe Gröfse vielfach gemessen und sich dabei bemüht hat, nicht nur durch unmittelbare Ablesung des Maafses, sondern auch über die Theilung hinaus, also durch Schätzung das Resultat jedesmal möglichst scharf auszudrücken, so werden die gefundnen Unterschiede allein von jenen zufälligen Fehlern herrühren. Die Abweichungen von dem mittlern Werth sind aber nicht nur durch das Zeichen von einander verschieden, indem sie bald positiv, bald negativ ausfallen, sondern sie stellen sich auch in ihrer absoluten Gröfse sehr abweichend dar. Zuweilen verschwinden sie ganz, sie können aber alle Abstufungen bis zu ihren gröfsten Werthen einnehmen. Bei vielfachen Wiederholungen ist indessen die Anzahl der Abweichungen zwischen je zwei gleich weit entfernten Grenzen nicht gleich grofs, vielmehr kommen kleinere Abweichungen jedesmal häufiger vor, als gröfsere. Wenn man zum Beispiel eine Linie von 50 Ruthen Länge mit der Kette wiederholentlich mifst, indem man jedesmal die Stellen, wo die Kettenstäbe eingesetzt wurden, unkenntlich macht, so wird wohl keine Abweichung von mehreren Fufsen vorkommen, Unterschiede von einigen Zollen oder noch kleinere werden sich aber um so häufiger wiederholen, je geringer sie sind. Eben so wird man beim wiederholten Messen eines Winkels viel häufiger Abweichungen von einigen Minuten, als von ganzen Graden finden. Dasselbe geschieht bei allen Messungen und Beobachtungen. Hiernach ist es wahrscheinlicher, einen kleinern, als einen gröfsern Fehler zu begehn, oder es findet bei jeder Beobachtungs-Art zwischen der Gröfse des Fehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens eine gewisse Beziehung statt. Die Wahrscheinlichkeit eines gewissen Fehlers ist sonach eine Function seiner Gröfse, die positiven und negativen Fehler sind aber gleich wahrscheinlich, wenn man, wie vorausgesetzt wird, constante Fehler-Ursachen vermeidet.

Zur Darstellung des analytischen Ausdrucks dieser Function oder der Beziehung zwischen der Gröfse des Fehlers und der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens soll hier ein Weg gewählt werden, der im Gebiet der Wahrscheinlichkeits-Rechnung keineswegs ungewöhnlich, der aber zu diesem Zweck früher nicht benutzt war. Er gewährt den Vorzug einer grofsen Anschaulichkeit, und führt ohne fremdartige Hypothesen zum Ziel, während er zugleich nur solche Vorkenntnisse in Anspruch nimmt, die ziemlich allgemein verbreitet sind.

§ 12.

Der Beobachtungsfehler ist im Allgemeinen niemals die Folge einer einzelnen Ursache, er setzt sich vielmehr aus einer grofsen

Anzahl verschiedner Fehler zusammen, die sowohl von allen Theilen des Meſsapparats, wie auch von allen Einzelheiten bei Benutzung desselben herrühren. Wird zum Beispiel eine Linie von der Länge einer Viertel-Meile gemessen, so muſs die Kette hundertmal ausgespannt werden, und jeder Fehler beim einmaligen Ausspannen hat Einfluſs auf das Resultat. Der Fehler des letztern ist die algebraische Summe dieser partiellen Fehler, oder die Differenz zwischen der Summe der positiven und negativen. In gleicher Weise kann man aber auch schon den Fehler beim einmaligen Ausspannen der Kette in eine groſse Anzahl entfernterer Fehler zerlegen. Die Länge der Kette wird nämlich von Zeit zu Zeit mit dem Etalon verglichen. Man spannt sie zu diesem Zweck auf ebnem Boden aus, und überzeugt sich, daſs die Kettenstäbe von Mitte zu Mitte wirklich 5 Ruthen von einander entfernt sind. Ist ihr Abstand gröſser oder kleiner, so bringt man die erforderliche Berichtigung an. Wenn aber beim fernern Gebrauch die einzelnen Glieder eine andre Lage annehmen, oder wenn der Boden weniger eben ist, als er bei der Probe war, oder die Kette schärfer oder schwächer angezogen wird, oder die Temperatur eine andre ist, oder überhaupt irgend welche veränderten Umstände eintreten, so werden offenbar eine sehr groſse Anzahl Abweichungen eingeführt, deren algebraische Summe schon den Fehler der einzelnen Kettenlänge bildet. Auch bei Winkel-Messungen und überhaupt bei jeder Art von Messung findet dasselbe statt, woher es keineswegs eine unbegründete Voraussetzung ist, vielmehr aus der nähern Betrachtung des ganzen Verfahrens beim Gebrauch und bei der Anfertigung des Meſsapparats sich schon erklärt, daſs der Fehler jeder Messung sich aus einer sehr groſsen Anzahl von elementären Fehlern zusammensetzt. Diese Anzahl vergröſsert sich aber immer mehr, je weiter man auf die entfernteren Fehlerquellen zurückgeht.

Jeder Beobachter und eben so auch jeder Mechaniker, der den Apparat anfertigt, ist bemüht, constante Fehler zu vermeiden, die das Resultat der Messung jedesmal vergröſsern, oder jedesmal verkleinern. Hierher gehört schon die erwähnte Prüfung der Kette durch das Etalon, und in ähnlicher Art wird der vorsichtige Beobachter nie versäumen, diejenigen Prüfungen vorzunehmen, wodurch er sich überzeugen kann, daſs sein Instrument den nöthigen Grad von Richtigkeit hat, oder aber er wird die nicht zu beseitigenden Fehler ermitteln und die entsprechende Berichtigung in das Resultat einführen. Es folgt hieraus, dafs jeder noch bleibende Fehler ein zufälliger ist, und daher eben so leicht positiv, wie negativ sein kann. Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Werth desselben ist daher eben so grofs, wie für einen negativen.

Wenn diese Voraussetzungen als in sich begründet anerkannt werden, so könnte doch die Annahme, dafs es für jede Messung unendlich viele und zwar gleich grofse, elementäre Fehler giebt, Bedenken erregen. Indem man aber bei jeder Fehlerquelle noch auf entferntere Ursachen derselben zurückgehn kann, und es hierbei in der That keine Grenze giebt, so wird auch diese Voraussetzung nicht unpassend erscheinen, man mufs sie aber machen, wenn man die Beobachtungsfehler allgemein auffassen und nicht etwa eine bestimmte Art von Beobachtungen untersuchen will. Im letzten Fall liefse sich allerdings das Zusammentreffen einer mäfsigen Anzahl partieller Fehler und zwar von verschiedner Gröfse denken, aber die Feststellung der Verhältnisse würde immer sehr willkürlich bleiben, und die gefundnen Resultate würden nur auf diese Art der Messung Anwendung finden.

Die der folgenden Untersuchung zum Grunde liegende Hypothese lautet demnach:

„Der Beobachtungsfehler ist die algebraische Summe einer unendlich grofsen Anzahl elementärer Fehler, die alle gleichen Werth haben und eben so leicht positiv, wie negativ sein können.“

Diese Voraussetzung führt durch einfache Betrachtungen zu dem Ausdruck, der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Fehler von verschiedner Gröfse bezeichnet, und zwar stimmt derselbe genau mit demjenigen überein, den zuerst Gaufs herleitete, indem er annahm, dafs bei wiederholter Messung einer einfachen Gröfse das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth sei. Thomas Young hatte dagegen einer Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler schon eine Hypothese zum Grunde gelegt, die der hier gewählten sehr ähnlich ist. Die Resultate, zu denen er gelangte, beschränkten sich indessen nur auf einige Vorsichts-Maafsregeln beim Beobachten, ohne zu einer

Methode zu führen, nach welcher die wahrscheinlichsten Werthe sicher dargestellt werden konnten*). Später hat Bessel sowohl unter Annahme einer einzigen, wie mehrerer Fehler-Quellen und unter der Voraussetzung, dafs jeder Fehler eben so leicht positiv, wie negativ sein kann, jenes von Gaufs aufgestellte Gesetz, unabhängig vom arithmetischen Mittel hergeleitet**). Der dabei verfolgte Weg bietet indessen gröfsere Schwierigkeiten, woher er sich für die hier beabsichtigte, möglichst einfache Begründung nicht eignet.

§ 13.

Nach vorstehnder Auffassung ist der Beobachtungsfehler gleich der Differenz zwischen den Summen der in unendlicher Anzahl auftretenden positiven und negativen elementären Fehler, von denen jeder eben so leicht positiv, wie negativ sein kann. Das Verhältnifs ist also genau dasselbe, als wenn in einer Urne eine gewisse Anzahl schwarzer und eben so viele weifse Kugeln liegen und man wiederholentlich eine herauszieht, die man aber, nachdem man sie gesehn, wieder hineinwirft, damit immer eben so viele schwarze wie weifse Kugeln in der Urne bleiben. Es fragt sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit man bei einer grofsen Anzahl von Zügen verschiedne Differenzen zwischen den schwarzen und weifsen Kugeln erwarten darf.

Bei jedem einzelnen Zuge ist es eben so wahrscheinlich, eine schwarze, wie eine weifse Kugel zu fassen. Wenn man also nur einmal eingreift, so ist die Wahrscheinlichkeit für jede gleich ein Halb und die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ist eins, oder die Gewifsheit, dafs man entweder eine schwarze, oder eine weifse Kugel ziehn wird.

Indem die schwarzen Kugeln mit S, die weifsen mit W bezeichnet werden, sind bei zwei Ziehungen vier Fälle gleich wahrscheinlich, nämlich

$$SS,\ SW,\ WS \text{ und } WW$$

die Wahrscheinlichkeit eines jeden also gleich ein Viertel. Wenn

*) Remarks on the probabilities of error in physical observations. Philosophical Transactions for 1819.

**) Schumacher's Astronomische Nachrichten. Bd. 15. Altona 1838 man aber die Reihenfolge der schwarzen und weifsen Kugeln unbeachtet läfst, und nur die Anzahl derselben berücksichtigt, so fallen die *SW* und *WS* zusammen, und die Wahrscheinlichkeit einer solchen Ziehung ist gleich ein halb.

Bei der dritten Ziehung und noch mehr bei jeder folgenden werden die Unterschiede in den Werthen der Wahrscheinlichkeit der verschiednen Combinationen immer gröfser, und immer weniger darf man erwarten, nur schwarze oder nur weifse Kugeln zu fassen. Zieht man hundert mal eine Kugel aus jener Urne, so ist diese Wahrscheinlichkeit nur noch 1 dividirt durch die hundertste Potenz von 2, oder 1 dividirt durch

1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376.

Um diese geringe Wahrscheinlichkeit zu versinnlichen, wähle man das Aufwerfen von hundert Münzen, statt des hundertmaligen Ziehns aus der Urne, weil letzteres zu zeitraubend sein würde. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Erscheinen von allen Schrift- oder allen Bildflächen ist aber eben so grofs, wie für jene 100 schwarzen Kugeln. Wenn man in jeder Secunde einmal die Münzen aufwerfen könnte und ununterbrochen das Spiel fortsetzte, so würde man in einem Jahre doch nur 31 567 600 Würfe machen, es wäre also durchaus nicht zu erwarten, dafs man die sämmtlichen Bildflächen träfe. Aber selbst wenn alle menschlichen Bewohner der Erde oder 1000 Millionen Menschen mit derselben Schnelligkeit und ohne Unterbrechung Tag und Nacht hindurch dieses Spiel trieben, so würde dennoch nicht etwa in einem Jahr oder in einem Jahrhundert ein solcher Wurf vorkommen, sondern man könnte nur erwarten, oder 1 gegen 1 darauf wetten, dafs in allen diesen Spielen erst in 43 Millionen mal Millionen Jahren einmal die Bildflächen aufgeworfen werden. Dieses wäre also eine Begebenheit, die freilich möglich, deren Wahrscheinlichkeit aber so geringe ist, dafs man nach menschlichen Begriffen nur sagen kann, sie tritt niemals ein.

§ 14.

Bei fortgesetztem Ziehn der Kugeln aus der Urne, die immer eben so viele schwarze, wie weifse enthält, sind schon nach zwei Zügen zwei Gruppen möglich, die sich nicht durch die

Anzahl, sondern nur durch die Reihenfolge der S und W von einander unterscheiden. Diese verbinden sich zu einer, wenn man auf die Reihenfolge nicht Rücksicht nimmt. Noch mehr geschieht dieses bei drei, vier und weiteren Ziehungen, wobei immer mehr gleich wahrscheinliche Fälle zu einer Gruppe sich vereinigen. Indem die Wahrscheinlichkeit solcher Combinationen der Anzahl der darin enthaltenen, an sich gleich wahrscheinlichen Fälle proportional ist, so kommt es darauf an, diese Anzahl zu finden. Dieses geschieht sehr einfach durch Vergleichung der auf einander folgenden Ziehungen mit den Zahlen-Coefficienten der Glieder eines Binomiums, dessen Exponent mit der Anzahl der Ziehungen übereinstimmt. Wie in letzteren jedesmal die Anzahl der gleich wahrscheinlichen Fälle sich verdoppelt, so geschieht dieses auch mit den Gliedern des Binomiums $a+b$, so lange man dabei auch die Reihenfolge der Factoren beachtet. Wie dort zu jeder bereits dargestellten Gruppe einmal ein S und sodann ein W hinzutritt, so wird hier jedem Gliede der Factor a und der Factor b zugefügt

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = aa+ba+ab+bb$$
$$(a+b)^3 = aaa+baa+aba+bba+aab+bab+abb+bbb$$
u. s. w.

Bei dieser genau übereinstimmenden Zusammensetzung fallen von diesen Gruppen auch in gleicher Weise mehrere zusammen, sobald man von der Reihenfolge der a und b absieht. Ein Unterschied zwischen jenen Kugeln und diesen Gliedern findet nur in so fern statt, als hier die a und b als Factoren auftreten, während dort die S und W nur gezählt werden, und die Differenz dieser Zahlen den Beobachtungs-Fehler darstellt. Die Anzahl der gleich wahrscheinlichen Glieder, die zu einer Gruppe vereinigt sind, ist der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer solchen proportional.

Wenn man n mal in die Urne greift, worin immer eben so viele schwarze, wie weiſse Kugeln liegen, so entsprechen die herausgezogenen Kugeln einer gleichen Anzahl elementärer Fehler. Es ist aber nothwendig, daſs man auch beide Farben in gleicher Anzahl greifen, und dadurch den Beobachtungsfehler gleich Null darstellen kann. Die Anzahl der Ziehungen muſs also eine gerade Zahl sein. Die Anzahl der verschiedenen möglichen

Gruppirungen ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der schwarzen und weifsen Kugeln ist aber $n + 1$. Man kann nämlich ziehn $n S$, oder $(n-1)\ S + W$, ferner $(n-2)\ S + 2\ W$, und so fort bis $S + (n-1)\ W$ und endlich auch $n W$. Die Anzahl der gefafsten S und W ist immer gleich n. Eben so ist auch im Binomium $(a + b)$, erhoben zur $n$ten Potenz, die Anzahl der Glieder gleich $n + 1$, und die Summe der Exponenten von a und b in jedem Gliede gleich n.

Der Beobachtungs-Fehler bildet sich hiernach aus der Differenz der Anzahl der positiven und negativen elementären Fehler, die sämmtlich gleich grofs sind, und deren Anzahl jedesmal n ist. Wenn alle positiv sind, also gar keine negativen gezogen werden, ist die Differenz zwischen beiden oder der Beobachtungs-Fehler gleich $+ n$, und im entgegengesetzten Fall, wenn man nur negative gegriffen hat, gleich $- n$. Dieses sind die beiden gröfsten Fehler, die eintreten können. Zwischen diesen liegen aber noch $n - 1$ Gruppen, die sowohl positive, als negative Einheiten enthalten. Aus den Differenzen von diesen bilden sich die Beobachtungsfehler. Derselbe ist bei $n - 1$ positiven und 1 negativen gleich $n - 2$, bei $n - 2$ positiven und 2 negativen gleich $n - 4$ und sofort, indem die Differenz stets um zwei elementäre Fehler sich vermindert, bis sie gleich Null wird. Dieses geschieht in der mittelsten Gruppe und von hier ab bilden sich die negativen Differenzen, die wieder immer um zwei elementäre Fehler anwachsen, bis sie schliefslich gleich $- n$ werden.

Diese verschiedenen Gruppen, welche die möglichen Beobachtungs-Fehler darstellen, sind keineswegs gleich wahrscheinlich. Die Anzahl der gleich wahrscheinlichen Gruppen, wobei auch die Reihenfolge der positiven und negativen Elemente berücksichtigt wird, ist gleich 2 zur $n$ten Potenz erhoben. Diese vertheilen sich aber ganz übereinstimmend mit den Zahlen-Coefficienten der Binomial-Glieder in jene $n + 1$ Gruppen.

Der Coefficient des mittlern Gliedes des Binomiums, in welchem die Exponenten von a und b gleich sind, ist bekanntlich

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{\frac{1}{2} n + 2}{\frac{1}{2} n - 1} \cdot \frac{\frac{1}{2} n + 1}{\frac{1}{2} n}$$

Die Factoren sind besonders geschrieben, um leicht erkennen zu lassen, dafs sie sämmtlich unächte Brüche, also gröfser als 1 sind.

Indem aber im zweiten Gliede des Binomiums der Factor n allein den Coefficient bildet und in jedem folgenden der Reihe nach der nächste Factor hinzutritt, so ergiebt sich, dafs die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten derjenigen Combination, welche diese Gruppe darstellt, bis zum mittleren Gliede immer gröfser wird. In demselben ist die Anzahl der positiven elementären Fehler eben so grofs, wie die der negativen, sie heben sich also gegenseitig vollständig auf, oder der Beobachtungsfehler wird gleich Null. Für diesen ist also die Wahrscheinlichkeit gröfser, als für alle vorhergehenden, also für jeden positiven Fehler.

Mit den negativen Beobachtungsfehlern verhält es sich indessen eben so. Geht man nämlich zum folgenden Gliede über, welches einem Beobachtungs-Fehler $= 2$ entspricht, so kommt der Factor

$$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}$$

hinzu, und dieser verbindet sich mit dem letzten des mittlern Gliedes zum Product $= 1$. Beide fallen also fort. Dasselbe geschieht bei dem Hinzutritt eines folgenden Factors, und so auch bei allen übrigen, woraus sich ergiebt, dafs für die sämmtlichen negativen Beobachtungsfehler die Wahrscheinlichkeit mit derjenigen der eben so grofsen positiven übereinstimmt.

Bezeichnet man den Zahlen-Coefficient des mittlern Gliedes, also die relative Wahrscheinlichkeit des Beobachtungs-Fehlers $= 0$, mit a, so hat man für die verschiedenen Fehler, mögen sie positiv oder negativ sein, die nachstehenden Werthe der relativen Wahrscheinlichkeit

Fehler	Wahrscheinlichkeit
0	a
2	$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}\cdot a$
4	$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n+2}\cdot a$
6	$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n+2}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-2}{\frac{1}{2}n+3}\cdot a$
q	$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n+2}\cdots\cdots\frac{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}q+1}{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}q}\cdot a$
$q+2$	$\frac{\frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n+1}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-1}{\frac{1}{2}n+2}\cdots\cdots\frac{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}q+1}{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}q}\cdot\frac{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}q}{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}q+1}\cdot a$

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des Fehlers q mit w, und die des nächsten Fehlers $q+2$ mit w', so hat man

$$w'-w=\left(\frac{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}q}{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}q+1}-1\right)w$$
$$=-\frac{2q+2}{n+q+2}\cdot w$$

Bisher war nur vorausgesetzt, dafs n eine ganze und zwar eine gerade Zahl sei, jetzt kommt es aber darauf an, zu untersuchen, wie die Verhältnisse sich gestalten, wenn aus den obigen Gründen n nicht nur als eine sehr grofse, sondern um den Resultaten allgemeine Gültigkeit zu geben, sogar als unendlich grofse Zahl angesehn werden mufs. In diesem Fall wird die Anzahl der Beobachtungs-Fehler und eben so die der Werthe ihrer Wahrscheinlichkeit unendlich grofs, und wenn man die Fehler als Abscissen, die Wahrscheinlichkeit derselben aber als Ordinaten aufgetragen denkt, so treten die letztern unmittelbar an einander und ihre Endpunkte bilden eine continuirliche Curve, welche die Beziehung zwischen den Fehlern und deren Wahrscheinlichkeit anschaulich macht. Da es aber ganz heterogene Gröfsen sind, so kommt es auf die Wahl des Maafsstabes für diese und jene nicht an.

Den Beobachtungs-Fehler q bezeichne man hiernach mit x und seine Wahrscheinlichkeit w mit y. $w'-w$ ist alsdann dy, während die Gröfse n, welche dem gröfsten möglichen, also einem unendlich grofsen Fehler gleich ist, unverändert beibehalten wird. Gegen n verschwindet daher der Fehler q, und gegen diesen wieder der unendlich kleine elementäre Fehler, der gleich 1 war. Hiernach verwandelt sich der letzte Ausdruck in

$$dy=-\frac{2xy}{n}$$

Bei dieser Unformung ist der wirkliche Beobachtungs-Fehler q vergleichungsweise zum gröfsten denkbaren Fehler n (der niemals vorkommt, weil seine Wahrscheinlichkeit gleich Null ist) als unendlich klein, und zugleich in Beziehung zum einzelnen elementären Fehler als unendlich grofs angesehn. Hierin liegt kein Widerspruch, da der Begriff unendlich niemals absolut, sondern immer nur relativ aufgefafst wird und nichts Andres, als überwiegend grofs oder überwiegend klein bedeutet. So werden vielfach Quadrate und höhere Potenzen kleiner Brüche gleich Null gesetzt, wiewohl sie bestimmte Werthe haben. Auch im gewöhnlichen Leben wiederholt sich diese Auffassung. Findet man etwa, dafs der hundertste Theil einer angekauften Waare fehlt, so wird man meist diese Differenz nicht beachten. Man setzt also vergleichungsweise gegen hundert die Einheit gleich Null, oder was dasselbe ist, vergleichungsweise gegen Eins hundert gleich unendlich grofs.

Es düfte auffallend erscheinen, dafs in der letzten Gleichung das Differenzial nur an der linken Seite erscheint. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x ist indessen nur vergleichungsweise gegen die der andern Fehler angegeben, an sich ist sie unendlich klein. Die Summe der unendlich vielen y, welche die Wahrscheinlichkeit aller zahllosen Fehler, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ angeben, würde erst gleich 1 sein, oder die Gewifsheit ausdrücken, dafs irgend einer dieser Fehler, der auch Null sein kann, eintreten mufs. In der graphischen Darstellung läfst sich die Summe der sämmtlichen Ordinaten der Curve, oder aller y nur in der Fläche der Curve wiedergeben. Da nun das einzelne y ein Theil derselben sein soll, eine Fläche sich aber nicht aus Linien, sondern nur aus Flächen-Elementen zusammensetzt, so mufs y als ein solches angesehn werden. Es verwandelt sich also in $y\,dx$, oder vielmehr, da nach vorstehender Herleitung die Fehler x immer um 2 Einheiten wachsen, in $2\,y\,dx$. Man hat sonach

$$\frac{dy}{y} = -\frac{4}{n}\,x\,dx$$

$$\log \text{nat}\, y = -\frac{2}{n}\,x^2 + C$$

für $x = 0$ wird aber $y = a$ oder gleich der gröfsten Ordinate also

$$C = \log \text{nat}\, a$$

$$\log \text{nat}\, \frac{y}{a} = -\frac{2}{n}\,x^2$$

oder

$$y = a\,e^{-\frac{2 \cdot xx}{n}}$$

wo e wie gewöhnlich die Grundzahl der natürlichen Logarithmen oder 2,71828 bedeutet.

Der Nenner $\frac{1}{2}n$ im Exponent steht, wie im Folgenden gezeigt werden soll, in einfacher Beziehung zu a, woher eine dieser beiden Gröfsen ausscheiden kann. Zuvor ist es aber nöthig nachzuweisen, dafs schon unter Voraussetzung einer sehr geringen Anzahl elementärer Fehler die Wahrscheinlichkeit der verschiednen Beobachtungsfehler sehr nahe dieselben Werthe annimmt.

§ 15.

Der vorstehnden Untersuchung liegt die Voraussetzung zum Grunde, dafs die Anzahl der elementären Fehler, durch deren zufälliges Zusammentreffen die Beobachtungs-Fehler sich bilden, unendlich grofs ist. Es läfst sich aber leicht nachweisen, dafs auch eine kleine Anzahl von gleich grofsen elementären Fehlern zu Beobachtungs-Fehlern sich gruppirt, deren Wahrscheinlichkeit in überraschender Weise jenem Gesetz sich anschliefst. Man greife zehn mal in die Urne, oder die Anzahl der betreffenden gleich grofsen elementären Fehler, die eben so leicht positiv, wie negativ eintreten, beschränke sich auf zehn. Der Beobachtungs-Fehler x kann alsdann 21 verschiedne Werthe annehmen, indem er entweder gleich Null ist, oder positiv oder negativ sich auf 1, 2, 3 u. s. w. bis 10 stellt. Die Wahrscheinlichkeit, dafs er $= 0$ ist, sei gleich a, und in dieser Einheit drücke man die Wahrscheinlichkeit der zwanzig andern Fehler aus. Diese reduciren sich aber auf 10, da positive und negative Beobachtungs-Fehler gleich wahrscheinlich sind.

Aus den Binomial-Coefficienten ergiebt sich

für $x = 1$	$\frac{y}{a} = 0{,}90909$
$= 2$	$= 0{,}68182$
$= 3$	$= 0{,}41958$
$= 4$	$= 0{,}20979$
$= 5$	$= 0{,}08392$
$= 6$	$= 0{,}02622$
$= 7$	$= 0{,}00617$
$= 8$	$= 0{,}00103$
$= 9$	$= 0{,}00011$
$= 10$	$= 0{,}00001$

Berechnet man aus diesen Werthen der relativen Wahrscheinlichkeit die entsprechenden Fehler x nach der Formel

$$x = \sqrt{-\frac{n}{2} \cdot \log \text{nat} \frac{y}{a}}$$

wobei $n = 20$ ist, weil 21 positive und negative Fehler-Gruppen vorkommen, so findet man die Fehler und die Abweichungen derselben von einander:

	x berechnet	Differenz
0	0,0000	
1	0,9764	0,9764
2	1,9571	0,9807
3	2,9471	0,9900
4	3,9518	1,0047
5	4,9780	1,0262
6	6,0340	1,0560
7	7,1330	1,0990
8	8,2945	1,1605
9	9,5558	1,2613
10	11,0123	1,4565

Es ergiebt sich hieraus, dafs die Fehler, die zu diesen Werthen von $\frac{y}{a}$ gehören, wie nach dem Gesetz für unendlich viele elementäre Fehler, ungefähr in gleichen Abständen liegen. Die gröfsern Abweichungen treten erst ein, wenn die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler sehr geringe wird. Die Zunahme stellt sich aber für den gröfsten Theil der Reihe ungefähr auf 1. Setzt man daher nach einander x gleich 1, 2, 3 und berechnet man die zugehörigen y nach der Formel

$$\frac{y}{a} = e^{-\frac{2 . xx}{n}}$$

so findet man

x	$\frac{2 \, . \, xx}{n}$	$\frac{y}{a}$	Abweichung
1	0,1	0,90484	— 0,00425
2	0,4	0,67032	— 0,01150
3	0,9	0,40657	— 0,01301
4	1,6	0,20190	— 0,00789
5	2,5	0,08209	— 0,00183
6	3,6	0,02733	+ 0,00111
7	4,9	0,00744	+ 0,00127
8	6,4	0,00166	+ 0,00063
9	8,1	0,00030	+ 0,00019
10	10,0	0,00005	+ 0,00004

Die Abweichungen der auf diese Art berechneten von den aus den Binomial-Coefficienten hergeleiteten Wahrscheinlichkeiten, welche die vierte Spalte angiebt, sind nur an zwei Stellen etwas gröfser, als 1 Procent. Wollte man also die Curve, welche diese zehn elementären Fehler darstellen, mit derjenigen der unendlich vielen vergleichen, so müfste man die Zeichnung schon in gröfserem Maafsstabe ausführen, um die Abweichungen noch kenntlich zu machen. Wenn man daher auch nur eine sehr mäfsige Anzahl elementärer Fehler voraussetzt, so ergiebt sich daraus schon überaus nahe dasselbe Gesetz, wie aus jenen unendlich vielen.

§ 16.

Der § 14 gefundene Werth für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x enthält a oder das gröfste y als Factor, daher sind die sämmtlichen y diesem gröfsten Werth oder a proportional. Daraus ergiebt sich, dafs auch die Fläche der ganzen Curve, welche die Gewifsheit des Vorkommens irgend eines Fehlers bezeichnet, und daher gleich 1 ist, auch der gröfsten Ordinate proportional sein mufs. Man hat daher, wenn c einen noch unbekannten Factor darstellt

$$1 = ca \text{ oder } c = \frac{1}{a}$$

Die absolute Wahrscheinlichkeit des Fehlers $x=0$, die nunmehr mit a bezeichnet werden mag, ist

$$a=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(\frac{1}{2}n+2)(\frac{1}{2}n+1)}{1.2.3\ldots.(\frac{1}{2}n-1)\frac{1}{2}n}$$

oder $$c=2^n\,\frac{1.2.3\ldots.\left(\frac{1}{2}n-1\right)\frac{1}{2}n}{n(n-1)(n-2)\ldots.(\frac{1}{2}n+2)(\frac{1}{2}n+1)}$$

Führt man für n nach und nach die Werthe 2, 4, 6, 8 . . . ein, so ergiebt sich

$$\text{für } n=2 \qquad c=2^2.\frac{1}{2}$$

$$n=4 \qquad c=2^4.\frac{1.2}{4.3}$$

$$n=6 \qquad c=2^6.\frac{1.2.3}{6.5.4}$$

$$n=8 \qquad c=2^8.\frac{1.2.3.4}{8.7.6.5}$$

und so fort. Man bemerkt sogleich, dafs jeder folgende Werth für c sich aus dem vorhergehenden, der zu $n-2$ gehört, sich dadurch bildet, dafs der Factor

$$2^2.\frac{\frac{1}{2}n.\frac{1}{2}n}{n(n-1)}=\frac{n}{n-1}$$

hinzukommt.

Geht man zu den Quadraten über, so mufs der zu $n-2$ gehörige Werth von c^2 mit

$$\frac{n.n}{(n-1)(n-1)}$$

multiplicirt werden, um den zu n gehörigen darzustellen. Man hat nämlich

$$\text{für } n=2\ldots c^2=\frac{2}{1}.2$$

$$n=4\ldots c^2=\frac{2.2.4}{1.3.3}.4$$

$$n=6\ldots c^2=\frac{2.2.4.4.6}{1.3.3.5.5}.6$$

$$n=8\ldots c^2=\frac{2.2.4.4.6.6.8}{1.3.3.5.5.7.7}.8$$

und so fort. Die Werthe von c^2 sind hier in der Art geschrieben, dafs sie aus einem Bruche und einem Factor bestehn. Der Factor hinter dem Bruch ist stets gleich n, sobald dieses aber um 2 wächst, so tritt ein neuer Factor in den Bruch, nämlich

$$\frac{(n-2)\,n}{(n-1)\,(n-1)}$$

hinzu und derselbe nähert sich, wenn n gröfser wird, immer mehr der Einheit, und c^2 nimmt endlich einen constanten Werth an und wird gleich 1,57080. Dieses ist aber die Länge des Quadranten für den Radius 1. Man hat also

$$c^2 = \tfrac{1}{2}\,\pi\, n\,.$$

Die Herleitung dieses von Wallis angegebenen Ausdrucks für $\frac{1}{2}\pi$ dürfte manchen Lesern unbekannt sein, woher die nachstehnde Mittheilung sich rechtfertigen wird. Man hat

$$\int \frac{z^m\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\frac{1}{m} z^{m-1}\sqrt{(1-z^2)} + \frac{m-1}{m}\int \frac{z^{m-2}\,.\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

Man kann sonach dieses Integral auf ein andres von gleicher Form zurückführen, in welchem der Exponent um 2 Einheiten kleiner ist. Jenachdem der letztere gerade oder ungerade ist, bleibt er auch in den abgeleiteten Integralen gerade oder ungerade. Beide Fälle müssen besonders behandelt werden.

Wenn m eine ungerade Zahl ist, so enthalten die nach und nach gefundnen Glieder, die nicht unter dem Integral-Zeichen stehn, nur gerade Potenzen von z. Man hat

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\sqrt{(1-z^2)} + C$$

$$\int \frac{z^3\,.\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{(1-z^2)} + C$$

$$\int \frac{z^5\,.\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{1}{5}z^4 + \frac{4}{3\,.\,5}z^2 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\right)\sqrt{(1-z^2)} + C$$

$$\int \frac{z^7\,.\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{1}{7}z^6 + \frac{6}{5\,.\,7}z^4 + \frac{4.6}{3.5.7}\,.\,z^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\sqrt{(1-z^2)} + C$$

und so fort.

Wenn m dagegen eine gerade Zahl ist, so führt die Integration zu trigonometrischen Functionen. Der einfacheren Bezeichnung wegen setze man

$$\text{arc}(\sin = z) = \varphi$$

Man hat alsdann

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \varphi + C$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\frac{1}{2} z \sqrt{(1-z^2)} + \frac{1}{2}\varphi + C$$

$$\int \frac{z^4 \,.\, dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{1}{2} z^3 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} z\right)\sqrt{(1-z^2)} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\varphi + C$$

$$\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = -\left(\frac{3}{4} z^5 + \frac{1.5}{4.6} z^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} z\right)\sqrt{(1-z^2)} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi + C$$

und so fort.

Sucht man nun für die sämmtlichen Integrale die Werthe innerhalb der Grenzen $z = 0$ und $z = 1$, also von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so bleibt jedesmal nur ein Glied übrig.

Dieses ist

für $m = 0 \ldots = \frac{1}{2}\pi$	für $m = 1 \ldots = 1$
- $m = 2 \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi$	- $m = 3 \ldots = \frac{2}{3}$
- $m = 4 \ldots = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2}\pi$	- $m = 5 \ldots = \frac{2.4}{3.5}$
- $m = 6 \ldots = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2}\pi$	- $m = 7 \ldots = \frac{2.4.6}{3.5.7}$
- $m = 8 \ldots = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{2}\pi$	- $m = 9 \ldots = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}$

und so weiter. Die Werthe sind einander so gegenüber gestellt, dafs m auf der rechten Seite um eine Einheit gröfser ist, als auf der linken. m und $m + 1$ nähern sich aber um so mehr, je gröfser m wird, und werden einander gleich, wenn m unendlich grofs ist, in diesem Fall sind auch diese Integrale sich gleich. Beide haben alsdann bestimmte Zahlenwerthe angenommen, weil die jedesmal hinzukommenden Factoren

$$\frac{m-1}{m}$$

bei grofsem Werthe von m gleichfalls 1 geworden sind.

Man hat sonach

$$\frac{1.3.5.7.9\ldots}{2.4.6.8.10\ldots}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{2.4.6.8.10\ldots}{3.5.7.9.11\ldots}$$

oder
$$\frac{1}{2}\pi=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11\ldots}$$

Aus obiger Herleitung ergab sich

$$c^2=\tfrac{1}{2}\pi n$$

und da
$$1=ac$$

so folgt
$$a=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}n}}$$

und wenn dieser Werth der gröfsten Ordinate in den § 14 gefundnen Ausdruck für y eingeführt wird, so wird

$$y=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}n}}\cdot e^{\frac{-2.xx}{n}}$$

Dieses stimmt genau mit dem von Gaufs gegebenen Ausdruck überein, derselbe ist, wenn die Bezeichnungen x und y eingeführt werden,

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-hh.xx}$$

Ein Unterschied besteht nur darin, dafs $\sqrt{\frac{1}{2}n}$ durch $\frac{1}{h}$ ausgedrückt ist*). Gaufs sagt, h sei eine Constante, welche man als das Maafs der Schärfe der Beobachtungen ansehn könne. Er fügt dabei die Bemerkung hinzu, dieses Resultat entspreche in einer Beziehung nicht dem wirklichen Vorkommen der Beobachtungsfehler. So lange nämlich die Gröfse derselben sich noch bezeichnen lasse, solle für sie noch eine gewisse Wahrscheinlichkeit vorhanden sein, während doch sehr grofse Beobachtungsfehler niemals gemacht werden. Für die Praxis sei dieses ohne Bedeutung, da bei gröfsern Fehlern die Wahrschein-

*) Theoria motus corporum coelestium. Hamburg 1809. Pag. 212.

lichkeit derselben schnell abnimmt. Es liege auch in der Natur der Sache, dafs eine bestimmte Grenze der Fehler sich nicht angeben lasse.

Der ersten Herleitung dieses Gesetzes liegt nach dem erwähnten Werk die Voraussetzung zum Grunde, dafs das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Werth einer mehrfach gemefsnen Gröfse sei. Encke beschränkte 1834 diese Voraussetzung noch dahin, dafs man nur annehmen dürfe, aus zwei Beobachtungen sei der mittlere Werth der wahrscheinlichste*). Gaufs hatte dagegen 1823 jeden Beweis dieses Satzes für entbehrlich erklärt**).

*) Astronomisches Jahrbuch für 1834.

**) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae Göttingen 1823.

III. Abschnitt.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

§ 17.

In vielen Fällen ergeben die Messungen oder Beobachtungen unmittelbar das gesuchte Resultat. Dieses geschieht, wenn es sich nur um die Auffindung einer einzigen unbekannten Gröfse handelt, wie zum Beispiel wenn die Entfernung zweier Punkte von einander gemessen wird. Auch solche Messung ist jedesmal mit einem gewissen Fehler behaftet, woher die Wiederholungen im Allgemeinen verschiedne Resultate geben.

Häufig ist dagegen die Erscheinung, die man beobachtet, von mehreren Gröfsen oder Kräften abhängig, deren Einflufs man kennt, so dafs man die Abhängigkeit der Erscheinung von denselben analytisch ausdrücken kann. Alsdann treten die Unbekannten, die das Maafs des Einflusses bezeichnen, als Factoren, oder in andrer Form auf. Sollte aber die Art der Einwirkung unbekannt sein, so mufs man verschiedne Hypothesen versuchen und für jede den betreffenden Ausdruck mit den Beobachtungen vergleichen.

Um das Vorkommen mehrerer Unbekannten durch ein Beispiel zu erläutern, mag wieder auf die Bewegung des Wassers in Röhren zurückgegangen werden. Nach der von Prony aufgestellten Theorie rührt der Widerstand des Wassers theils von einem gewissen Anhaften an die Röhrenwand und theils von der Reibung her. Dabei wird vorausgesetzt, dafs der erste Widerstand der ersten Potenz, die Reibung dagegen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei. Der zur Bewegung erforderliche Druck ist hiernach

$$h = r \cdot c + s \cdot c^2$$

wo h die Druckhöhe, c die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre und r und s die gesuchten unbekannten Factoren sind. Durch jede einzelne Beobachtung ist der zum jedesmaligen h gehörige Werth von c gegeben.

Ist nur eine Beobachtnng angestellt, so erhält man auch nur eine Bedingungs-Gleichung, aus der sich beide Unbekannte nicht berechnen lassen. Aus zwei Beobachtungen, oder allgemein, wenn die Anzahl der Beobachtungen eben so grofs ist, als die der Unbekannten, kann man die Werthe der letztern zwar in voller Schärfe bestimmen, aber die Resultate sind durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler entstellt, über deren Gröfse, so wie über ihren Einflufs man sich kein Urtheil bilden kann, so lange jede Controlle fehlt.

Der dritte Fall tritt endlich ein, wenn die Anzahl der Beobachtungen gröfser, als die der Unbekannten ist. Man kann bei zwei Unbekannten dieselben aus je zwei beliebig gewählten Beobachtungen berechnen, aber bei einer andern Wahl erhält man eben wegen der Beobachtungsfehler andre Resultate, und es bleibt unentschieden, welche von diesen die richtigeren sind. Es entsteht die Frage, wie man die Beobachtungen am vortheilhaftesten zu verbinden hat, um die wahrscheinlichsten Werthe darzustellen. Diese Aufgabe löst die Wahrscheinlichkeits-Rechnung und zwar durch die Methode der kleinsten Quadrate.

Nach obiger Herleitung ist bei irgend einer Beobachtungsart die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}n}} \cdot e^{-\frac{2.xx}{n}}$$

und in gleicher Weise drücken sich auch bei derselben Beobachtungsart die Wahrscheinlichkeiten y', y'', y''' ... für die Fehler x', x'', x''' ... aus.

In § 4 ist gezeigt worden, dafs die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier, von einander unabhängiger Ereignisse dem Product aus der Wahrscheinlichkeit des ersten in die des zweiten gleich ist. Betrachtet man noch ein drittes Ereignifs, so ist dieses als das zweite zu betrachten, nachdem die beiden ersten schon verbunden sind, und der Satz dehnt sich also dahin aus, dafs die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens jeder beliebigen Anzahl von Ereignissen, die von einander unabhängig sind, dem Product der Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen gleich ist. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler x, x', x'', ... ist also

$$y \cdot y' y'' \ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}n}} e^{\frac{-xx - x'x' - x''x'' - \ldots}{\frac{1}{2}n}}$$

Man sucht diejenige Wahrscheinlichkeit, die unter allen die gröſste ist, und diese stellt sich augenscheinlich heraus, wenn

$$xx + x'x' + x''x'' + \ldots$$

ein Minimum wird, oder wenn die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Kleinstes ist.

Dieser Lehrsatz ist schon an sich von groſser Wichtigkeit, indem er sicher erkennen läſst, welche Hypothese über die Abhängigkeit der Erscheinungen von gewissen constanten Factoren sich an die Beobachtungen am besten anschlieſst, er gewährt aber auch die wesentliche Erleichterung der Rechnung, daſs man nicht durch versuchsweise Einführung verschiedner Werthe der Constanten die passendsten aufsuchen darf, sondern man diese für das zum Grunde gelegte Gesetz der Erscheinung aus den Beobachtungen direct berechnen kann.

§ 18.

Der einfachste Fall stellt sich dar, wenn die beobachtete Gröſse k der Summe verschiedner Glieder gleich ist, von denen jedes eine gemessene Gröſse oder eine Function derselben als Factor enthält, während die gesuchten Constanten die andern Factoren dieser Glieder sind. In der Gleichung

$$k = ar + bs + ct + \ldots$$

kennt man die Gröſsen k, a, b, c .... gesucht werden r, s, t....

Sollte zu dieser Summe noch ein Glied kommen, das keine Unbekannte zum Factor hat, so kann man dieses sogleich von k abziehn, wodurch der Ausdruck wieder die angegebne Form annimmt. Von der Behandlung andrer Ausdrücke, worin etwa eine der Unbekannten als Exponent erscheint, oder sonst sich nicht so einfach darstellt, wird später die Rede sein.

Zur Erläuterung mag noch hinzugefügt werden, dafs nach dem im vorigen Paragraph gewählten Beispiele $k = h$, $a = c$, $b = c^2$ und $t = 0$ sein würde, weil nach der zum Grunde gelegten Hypothese die Druckhöhe sich nur aus zwei Gliedern zusammensetzt, von denen das eine die erste und das andre die zweite Potenz der Geschwindigkeit zum Factor hat.

k ist nicht in aller Schärfe beobachtet, vielmehr enthält es noch den Beobachtungsfehler x, so dafs es sich in $k + x$ verwandelt. Man hat also

$$x = -k + ar + bs + ct + \ldots .$$

und in gleicher Art hat man für die übrigen Beobachtungen die Fehler

$$x' = -k' + a'r + b's + c't + \ldots$$
$$x'' = -k'' + a''r + b''s + c''t + \ldots$$

und so fort. Die Anzahl dieser Gleichungen ist eben so grofs, als die der Beobachtungen.

Indem nun

$$xx + x'x' + x''x'' + \ldots = \Sigma$$

ein Minimum sein soll, so mufs das Differenzial davon gleich Null sein, daher

$$0 = d\Sigma = x\,dx + x'\,dx' + x''\,dx'' + \ldots$$

Man hat aber

$$xdx = (-k + ar + bs + ct + \ldots)(adr + bds + cdt + \ldots)$$

und in gleicher Weise die Ausdrücke für die übrigen Fehler x', x'' ....

Die gesuchten Constanten sind von einander unabhängig, daher löfst sich die Gleichung

$$d\Sigma = 0$$

in so viele Gleichungen auf, als es Unbekannte giebt, nämlich

$$\frac{d\Sigma}{dr} = 0$$
$$\frac{d\Sigma}{ds} = 0$$
$$\frac{d\Sigma}{dt} = 0$$

und so fort. Führt man nun die Multiplication des Ausdrucks für xdx wirklich aus, so hat man

$$\begin{aligned} xdx = & (-ka + aa.r + ab.s + ac.t + \ldots)dr \\ & + (-kb + ab.r + bb.s + bc.t + \ldots)ds \\ & + (-kc + ac.r + bc.s + cc.t + \ldots)dt \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Ganz übereinstimmende Ausdrücke erhält man für $x'dx'$, $x''dx''$, ... wobei nur k, a, b, c ... sich in k', a', b', c' ... so wie in k'', a'', b'', c'' ... u. s. w. verwandeln. Man erhält alsdann durch Summirung der Glieder, die dr zum Factor haben,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\Sigma}{dr} = & -(ka + k'a' + k''a'' + \ldots) \\ & + (aa + a'a' + a''a'' + \ldots)r \\ & + (ab + a'b' + a''b'' + \ldots)s \\ & + (ac + a'c' + a''c'' + \ldots)t \\ & + \ldots \end{aligned}$$

In gleicher Weise stellen sich die Ausdrücke für $\frac{d\Sigma}{ds}$ und $\frac{d\Sigma}{dt}$ dar, und wenn man die Summe der gleichartigen Producte durch die Parenthese [ ] bezeichnet, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -[ka] + [aa]r + [ab]s + [ac]t + \ldots \\ 0 &= -[kb] + [ab]r + [bb]s + [bc]t + \ldots \\ 0 &= -[kc] + [ac]r + [bc]s + [cc]t + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist eben so grofs, als die der Constanten oder der unbekannten Gröfsen r, s, t, ... Die Werthe der letzten lassen sich also in aller Schärfe finden und sind die wahrscheinlichsten, weil sie die kleinste Summe der Fehler-Quadrate darstellen *).

*) Diese Gleichungen wurden zuerst von Legendre in den Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1806 bekannt gemacht. Der Verfasser empfiehlt sie aber nur, weil er sie als besonders bequem und in sofern auch als sicher ansieht, weil dabei sehr grofse Abweichungen von den Beobachtungen vermieden werden. Gaufs hatte dieselbe Methode indessen schon 1795 benutzt, und leitete sie 1809 in der Theoria motus corporum coelestium, wie vorstehend erwähnt, aus dem Gesetz über das Vorkommen der verschiednen Fehler her.

4*

§ 19.

Um zu zeigen, wie diese Ausdrücke zu benutzen sind, und um zugleich auf einige Umstände aufmerksam zu machen, die leicht übersehn werden dürften, mögen einige Zahlen-Beispiele dienen, und zwar zunächst ein solches, das sich auf den einfachsten Fall bezieht, worin nämlich nur e i n e U n b e k a n n t e gesucht wird.

Es sei die Richtung einer Grenze zwischen zwei Grund stücken festzustellen, von der man weifs, dafs sie von einem noch sicher erkennbaren Punkt in gerader Linie sich hingezogen habe. In der Nähe dieser Linie finden sich auch einige Punkte, von denen man voraussetzen darf, dafs sie in der Grenze selbst oder doch sehr nahe an derselben gelegen haben. Die Lage dieser Punkte bestimme man durch rechtwinklige Coordinaten, indem die Abscissen-Linie durch jenen sichern Festpunkt gelegt, und von demselben ab die Entfernungen in irgend einem Maafs gezählt werden. Man finde für dieselben

bei $x =$	14,2	$y = 0{,}42$
$=$	37,5	$= 1{,}35$
$=$	64,0	$= 2{,}67$
$=$	96,1	$= 3{,}92$
$=$	136,7	$= 5{,}33$
$=$	152,4	$= 6{,}04$

Lägen diese Punkte sämmtlich in einer durch jenen Festpunkt gezogenen geraden Linie, so würden sich die Ordinat an die Gleichung

$$y = r x$$

scharf anschliefsen und jeder Punkt würde für

$$r = \frac{y}{x}$$

denselben Werth ergeben. Dieses ist indessen nicht der Fall und es kommt daher darauf an, die wahrscheinlichste Richtung dieser Linie zu bestimmen, das heifst derjenigen, bei der die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Beobachtungen ein Minimum wird.

Indem nur eine Unbekannte gesucht wird, so braucht man auch nur eine Bedingungsgleichung, nämlich

$$0 = -[ka] + [aa]\,r$$

also

$$r = \frac{[ka]}{[aa]} = \frac{[xy]}{[xx]}$$

Berechnet man die Producte xy und xx und summirt sie, so findet man

$$[xy] = 2253,3$$

und

$$[xx] = 56852$$

woraus sich ergiebt

$$r = 0,039635$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung

$$y = rx$$

findet man für die obigen x die entsprechenden y, so wie die Differenzen derselben gegen die gemefsnen y und die Quadrate dieser Differenzen.

y	Differ.	Quadr.
0,56	+ 0,14	0,020
1,49	+ 0,14	0,020
2,54	— 0,13	0,017
3,81	— 0,11	0,012
5,42	+ 0,09	0,008
6,04	0,00	0,000

Die Summe der Quadrate ist 0,077.

Man könnte leicht vermuthen, diese Aufgabe liefse sich leichter lösen, wenn man für jede zusammen gehörige Messung y durch x dividirt, und aus den so gefundenen Werthen für r das arithmetische Mittel nimmt. Dieses ist indessen keineswegs begründet, und man überzeugt sich leicht, dafs alsdann die Summe der Fehlerquadrate bedeutend gröfser wird. Die in dieser Weise berechneten Werthe von r sind in der ersten Spalte der nachstehnden Tabelle angegeben. Das arithmetische Mittel derselben beträgt 0,03778, und wenn man unter Zugrundelegung dieses Werths von r die zu den verschiednen x gehörigen y sucht, so ergeben sich diese, wie sie in der zweiten Spalte angegeben sind. Die Tabelle enthält ferner die Differenzen gegen die gemeſsnen y, und die Quadrate derselben

r	y	Diff.	Quadr.
0,02958	0,54	+ 0,12	0,014
0,03600	1,42	+ 0,07	0,005
0,04172	2,42	— 0,25	0,062
0,04079	3,63	— 0,29	0,084
0,03899	5,17	— 0,16	0,025
0,03963	5,76	— 0,28	0,078

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler stellt sich dabei auf 0,268, ist also dreimal so groſs, wie früher.

Wenn man eine Gröſse, also etwa eine Linie, wiederholentlich gemessen und wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler jedesmal ein andres Resultat gefunden hat, so entsteht wieder die Frage, welches das wahrscheinlichste sei. Unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung ist das gesuchte r jedesmal dem durch den Beobachtungsfehler x entstellten Maaſs k gleich, also

$$x = r - k$$

Der Factor a ist aber in diesem Fall gleich 1, also $[aa] = m$, wenn die Messung m mal wiederholt wurde. Hiernach erhält man den Ausdruck

$$r = \frac{[k]}{m}$$

Der wahrscheinlichste Werth ist also das arithmetische Mittel aus allen einzelnen Messungen. In dieser Weise begründet sich durch das allgemeine Gesetz diejenige Voraussetzung, die sonst der Herleitung desselben zum Grunde gelegt wurde.

Werden zwei Unbekannte r und s gesucht, welche in dem Ausdruck

$$k = a \, . \, r + b \, . \, s$$

enthalten sind, so hat man die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$0 = -[ka] + [aa] r + [ab] s$$

und

$$0 = -[kb] + [ab] r + [bb] s$$

Sollte hier wieder einer der Factoren a oder b gleich 1 sein, so fällt er in den Producten fort und die betreffende Summe $[aa]$ oder $[bb]$ wird gleich m oder gleich der Anzahl der Beobachtungen.

Um ein Beispiel für die Berechnung mehrerer Unbekannten mitzutheilen, sei wieder die wahrscheinlichste Lage einer geradlinigen Grenze zu ermitteln, für die es aber keinen ganz sichern Festpunkt giebt, in welcher vielmehr nur vier Stellen annähernd ihre Lage bezeichnen. Man messe in der Nähe eine beliebig gewählte Abscissen-Linie und verbinde diese durch rechtwinklige Ordinaten mit jenen vier Punkten. Man finde

$$\begin{aligned} \text{für } x &= 0 & y &= 3{,}5 \\ &= 88 & &= 5{,}7 \\ &= 182 & &= 8{,}2 \\ &= 274 & &= 10{,}3 \end{aligned}$$

Die gerade Linie, die an diese Punkte sich möglichst anschliefsen soll, ist gegeben durch die Gleichung

$$y = r + x s$$

Vergleicht man diese mit der obigen Formel

$$k = a r + b s$$

so ist

$$\begin{aligned} k &= y \\ a &= 1 \\ b &= x \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe von r und s hat man daher die beiden Bedingungungs-Gleichungen

$$0 = -[y] + [1]\, r + [x]\, s$$

und

$$0 = -[x y] + [x]\, r + [x x]\, s$$

Bildet man die einzelnen Producte nach den durch die Messung gefnndnen Gröfsen, und summirt man dieselben, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} [y] &= 27{,}7 \\ [1] &= 4 \\ [x] &= 544 \\ [x y] &= 4816{,}2 \\ [x x] &= 115944 \end{aligned}$$

Man hat sonach die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$27{,}7 = 4 \,.\, r + 544 \,.\, s$$
$$4816{,}2 = 544 \,.\, r + 115944 \,.\, s$$

und hieraus ergiebt sich

$$r = 3{,}525$$
$$s = 0{,}025$$

Die gesuchte wahrscheinlichste Grenze ist demnach für dasselbe Coordinaten-System durch die Gleichung

$$y = 3{,}525 + 0{,}025 \,.\, x$$

gegeben. Berechnet man hiernach für die obigen x die zugehörigen y und vergleicht diese mit den gemeſsnen y, so ergiebt sich

	y berechnet	y gemessen	Fehler	Fehler-Quadrat
für $x = 0$	3,525	3,500	$+0{,}025$	0,000625
$= 88$	5,725	5,700	$+0{,}025$	0,000625
$= 182$	8,075	8,200	$-0{,}125$	0,015625
$= 274$	10,375	10,300	$+0{,}075$	0,005625
			Summe	0,022500

Die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler beträgt also 0,0225 und ist geringer, als wenn man irgend eine andre gerade Linie gewählt hätte *).

§ 20.

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erfordert nicht selten ausgedehnte Rechnungen, die um so umfangreicher und zeitraubender sind, je mehr Beobachtungen vorliegen, und je gröſser die Anzahl der gesuchten Factoren ist. Um diese Arbeit auf das zulässig geringste Maaſs zu beschränken, ist besonders zu beachten, daſs es ganz zwecklos wäre, die Rechnungen mit einer Schärfe auszuführen, die weit über die Sicherheit der Beobachtungen hinausginge. Wären letztere, wie dieses in vielen Fällen geschieht, von der Art, daſs man die Werthe von k, a, $b \ldots$ bei sorgfältiger Messung nur in drei oder vier Ziffern

*) Wie man durch graphische Darstellung und unter der Voraussetzung, daſs groſse Fehler viel unwahrscheinlicher sind, als kleine, ungefähr zu gleichen Resultaten gelangt, ergiebt sich aus manchen Aufsätzen von Lambert in dessen „Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik. Berlin 1763" und besonders aus der Abhandlung: „Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche."

bezeichnen könnte, und man wollte die Producte derselben logarithmisch bestimmen, so wäre es durchaus unpassend, siebenstellige Tafeln zu benutzen. Die viel bequemeren fünfstelligen, und in vielen Fällen selbst vierstellige, sind meist vollständig genügend. Tralles bemerkte einst, der Mangel an mathematischer Bildung gebe sich durch nichts so auffallend zu erkennen, als durch die übertriebne Schärfe in den Zahlenrechnungen.

Sobald die Producte $k\,a$, $a\,a$, $a\,b\ldots$ gefunden sind und man summirt dieselben, so gelangt man zu gröfsern Zahlen, welche aus mehr Ziffern bestehn. Indem diese als Factoren oder in andrer Art mit einander verbunden werden, mufs man oft zu gröfsern Tafeln greifen, um ihre Werthe sicher auszudrücken. Dieses ist um so mehr geboten, als nunmehr Subtractionen nöthig werden, wobei nicht selten beide Zahlen einander sehr nahe gleich sind, und sonach die Differenzen, auf die es eben ankommt, als überaus klein sich herausstellen. Bei weniger Schärfe der Rechnung könnte es alsdann leicht geschehn, dafs ein gesuchter Factor unter negativem Zeichen sich darstellt, der wirklich positiv ist. Welchen Grad der Sicherheit das Resultat aber hat, ergiebt sich, indem man die wahrscheinlichen Fehler ermittelt, wovon im folgenden Abschnitt die Rede sein wird.

Es dürfte für manche Leser von Nutzen sein, noch darauf aufmerksam gemacht zu werden, wie diese Bechnungen bequem und übersichtlich anzuordnen sind. Man schreibe, am besten auf liniirtem Papier die beobachteten Werthe der k, a, $b\ldots$ etwa nach der Gröfse von k geordnet, in besondere Spalten unter einander, so dafs jede Zeile in den verschiednen Spalten sich auf dieselbe Beobachtung bezieht. Die folgenden Spalten enthalten die Logarithmen, und je zwei Logarithmen, die man auf einen Blick übersieht, lassen sich leicht addiren oder subtrahiren. Man gewöhne sich dabei aber, diese Operationen nicht von der rechten nach der linken Seite, wie sonst geschieht, sondern umgekehrt von links nach rechts, also in derselben Richtung, wie man schreibt, auszuführen. Bei mangelnder Uebung und namentlich wenn die Zahlen nicht unmittelbar neben einander stehn, gewährt die Benutzung eines Zirkels, den man in der linken Hand hält, einige Erleichterung. Derselbe wird soweit geöffnet, dafs seine Spitzen unter diejenigen Ziffern treffen, die summirt werden sollen, während ein Blick auf die folgenden leicht erkennen läfst, ob noch eine Einheit hinzuzufügen ist. Vielfach kommt es auch vor, dafs Logarithmen oder Zahlen bei sämmtlichen Beobachtungen, also in der ganzen Spalte, um eine gleiche Zahl vergröfsert oder vermindert werden sollen. Alsdann schreibt man diese auf ein besonderes Blättchen (eine Visitenkarte) und indem man dasselbe nach und nach über oder unter jede Zahl schiebt, kann man die Summen oder Differenzen wieder in die betreffenden Spalten schreiben, von denen jede mit der besondern Ueberschrift versehn ist. Bei einiger Uebung im Rechnen braucht man nicht alle diese Zahlen einzutragen, man kann beispielsweise die Summen zweier Logarithmen unmittelbar zum Aufsuchen der betreffenden Zahlen benutzen, ohne sie aufzuschreiben. Sollten aber etwa einfache Multiplicationen nöthig sein, wobei man die betreffenden Factoren besonders aufschreiben mufs, so geschieht dieses auf einem losen Blättchen Papier.

Bei solcher Behandlung der ganzen Rechnung in tabellarischer Form gewinnt man nicht nur eine leichte Uebersicht derselben, wodurch oft etwaige Rechnungsfehler sich schon zu erkennen geben, sondern die Controle wird auch sehr erleichtert, und überdies stehn alle Producte oder Zahlen, die man summiren soll, unmittelbar unter einander.

Bei Berechnung der Quadrate und Producte aus den gegebnen Werthen von k, a, b ... ist indessen die Benutzung der Logarithmen-Tafeln in sofern unbequem, als man dabei immer von den Zahlen auf die Logarithmen und sodann wieder auf die Zahlen übergehn mufs. Bessel schlug daher vor *), diese Rechnung allein mit Hülfe der Quadrat-Tabellen auszuführen. Man kann aus diesen unmittelbar die Quadrate aa, bb, ... entnehmen, doch wäre dieser Vortheil von wenig Bedeutung, wenn man zur Darstellung der Producte ab, ac, ... noch die Logarithmen-Tafeln benutzen müfste.

Dieses läfst sich indessen vermeiden, indem auch die Producte sich aus denselben Tabellen ergeben. Man hat nämlich

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

*) In Schumacher's astronomischen Nachrichten. Nr. 399. Band XVII 1840. Seite 225.

Die Quadrate von a und b gebraucht man schon zur Darstellung ihrer Summen, und sonach findet man bequem das Product ab, sobald man noch $(a+b)^2$ aufschlägt. Für ka ist das Verhältnifs freilich ein andres, insofern das Quadrat von k in jenen Gleichungen nicht vorkommt. Um ka zu finden, mufs man die Quadrate von k und von $(k+a)$ suchen. Diese Mehr-Arbeit ist indessen nicht bedeutend, und gewährt schliefslich noch den Vortheil einer sichern C o n t r o l l e d e r g a n z e n R e c h n u n g.

Solche Erleichterung der Rechnung würde nicht eintreten, wenn man für jede einzelne Beobachtung die Producte ab, ka, ... entwickeln müfste, dieses ist aber nicht nothwendig. Unter Beibehaltung der oben gewählten Bezeichnung für die Summen hat man nämlich

$$[ab] = \frac{[(a+b)(a+b)] - [aa] - [bb]}{2}$$

Man summirt also unmittelbar die einzelnen Quadrate und berechnet aus den Summen derselben, die grofsentheils schon in jenen Bedingungs-Gleichungen vorkommen, die Summe der Producte ab.

Was die erwähnte schliefsliche Controle betrifft, so braucht man nur die Quadrate von

$$k+a+b+c+\ldots$$

aus den Tabellen zu entnehmen und die Summe derselben mit den bereits ermittelten Summen zu vergleichen. Diese Summe ist nämlich

$$=[kk]+[aa]+[bb]+\ldots 2([ka]+[kb]+\ldots+[ab]+[ac]+\ldots)$$

Stellt sich hierdurch jene Summe wirklich dar, so ergiebt sich daraus, dafs nicht nur die einzelnen Quadrate und Producte richtig berechnet sind, sondern dafs auch in den sämmtlichen Summationen kein Fehler vorgekommen ist.

Die Erleichterung und Sicherheit der Rechnung in dieser Weise fand Bessel so grofs, dafs selbst in dem Fall, wenn die Gröfsen k, a, b, ... durch Logarithmen gegeben waren, er von diesen auf die Zahlen überging und die Quadrat-Tabellen benutzte.

Man findet vielfach in den Taschenbüchern für Ingenieure und in andern Handbüchern Quadrat-Tabellen mitgetheilt, dieselben sind indessen für den vorliegenden Zweck nicht bequem eingerichtet, auch nicht mit den Differenzen versehn, die man doch zur Berechnung der zwischenliegenden Werthe braucht. Hierzu genügen aber schon die ersten Differenzen, da die zweiten constant sind.

In der im Anhang beigefügten Tabelle *A* sind die Quadrate, wie die dazugehörigen Zahlen in Form von Decimalbrüchen ausgedrückt, weil sie bei den in Rede stehnden Rechnungen am häufigsten als solche vorzukommen pflegen. Es ist aber sehr leicht, sie auch in ganze Zahlen oder in noch kleinere Brüche zu verwandeln, indem das Komma in gleichem Sinn nach rechts oder links verstellt wird, jedoch in der Art, dafs man dasselbe in den Quadraten doppelt so weit verschiebt, als in den Zahlen. So ist beispielsweise das Quadrat von 7,777 nach der Tabelle gleich 60,481. Von 77,77 würde es daher 6048,1 .... von 0,7777 dagegen 0,60481 ,.. von 0,07777 wieder 0,0060481 und so fort.

Die Angabe der Quadrate ist auf drei Decimalstellen beschränkt, wiewohl durch Hinzufügung der vierten Stelle ihre Werthe in voller Schärfe auszudrücken gewesen wären. Ich habe dieses indessen unterlassen, weil nicht leicht solche Genauigkeit erforderlich sein dürfte, und eine zu weit ausgedehnte Tabelle weniger bequem ist.

Ein Zahlenbeispiel mag die Berechnung der Producte mittelst der Quadrat-Tabelle erläutern. Eine gemefsne Gröfse k sei von einer Variabeln e in der Art abhängig, dafs

$$k = re + se^2.$$

Die constanten Factoren r und s sollen aus den Beobachtungen bestimmt werden. Vergleicht man diesen Ausdruck mit der § 18 angegebnen allgemeinen Form, so ist

$$a = e$$
$$b = e^2$$

und da nur zwei Glieder vorkommen, so braucht man auch nur aa, bb, ab, ka und kb für jede Beobachtung zu berechnen.

Die Messungen haben ergeben

für $a = 0{,}33$	$k = 2{,}51$
$= 1{,}04$	$= 5{,}23$
$= 1{,}32$	$= 6{,}12$
$= 2{,}06$	$= 7{,}97$
$= 2{,}60$	$= 8{,}81$
$= 3{,}14$	$= 9{,}10$
$= 3{,}82$	$= 8{,}26$
$= 4{,}13$	$= 8{,}04$

Die Werthe von $b = e^2$ und $b\,b = e^2 . e^2$ findet man unmittelbar in der Tabelle.

$b = a\,a = 0{,}109$	$b\,b = 0{,}01$
$= 1{,}082$	$= 1{,}17$
$= 1{,}742$	$= 3{,}03$
$= 4{,}244$	$= 18{,}01$
$= 6{,}760$	$= 45{,}70$
$= 9{,}860$	$= 97{,}22$
$= 14{,}592$	$= 212{,}92$
$= 17{,}057$	$= 290{,}94$
$[b] = [a\,a] = 55{,}446$	$[b\,b] = 669{,}00$

Der erste Werth $b\,b$ könnte genauer angegeben werden, die gröfsere Schärfe wäre jedoch ohne Zweck, weil die letzten Werthe von $b\,b$ nur in Hunderttheilen der Einheit ausgedrückt sind. Selbst diese letzte Decimal-Stelle dürfte vernachlässigt werden, da die Untersuchung der wahrscheinlichen Fehler, wovon im Folgenden die Rede sein wird, ergiebt, dafs die Beobachtungen nicht den Grad der Genauigkeit besitzen, mit dem die Rechnung hier geführt ist. Man überzeugt sich auch leicht, dafs für diese Beobachtungen, von denen keine bis auf ein Tausendtheil ihres Werthes genau angegeben ist, schon Tafeln von weniger Stellen genügt hätten, wodurch die Rechnung erleichtert wäre.

In derselben Art findet man

$$[k\,k] = 427{,}92$$
$$[(k+a)(k+a)] = 777{,}38$$
$$[(k+b)(k+b)] = 2011{,}6$$
$$[(a+b)(a+b)] = 1098{,}3$$

Hieraus kann man nach der bezeichneten Methode leicht die Summen der Producte darstellen, nämlich

$$[a\,k] = \frac{[(k+a)\,(k+a)] - [kk] - [aa]}{2} = 147{,}01$$

$$[b\,k] = \frac{[(k+b)\,(k+b)] - [k\,k] - [b\,b]}{2} = 457{,}33$$

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)\,(a+b)] - [a\,a] - [b\,b]}{2} = 186{,}92$$

Wenn man alsdann behufs der Controle noch die Quadrate der Summen von k, a und b berechnet, so findet man

$$[(k+a+b)\,(k+a+b)] = 2734{,}88$$

die obigen Quadrate und Producte ergeben dagegen

$$[k\,k] + [a\,a] + [b\,b] + 2\,([a\,k] + [b\,k] + [a\,b]) = 2734{,}89$$

Die Uebereinstimmung beider Zahlen ist zufällig gröfser, als man erwarten konnte, woher die Rechnung in allen Theilen richtig ist.

Aus den gefundnen Summen

$$[a\,a],\ [b\,b],\ [a\,b],\ [a\,k] \text{ und } [b\,k]$$

kann man nun nach den Bedingungs-Gleichungen (§ 18) die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten berechnen. Man findet darnach

$$r = 5{,}9723$$
$$s = -0{,}9851$$
$$\text{also } k = 5{,}9723\,.\,e - 0{,}9851\,.\,e^2$$

Wenn man nunmehr für e die gemefsnen Werthe einführt, so sind die k:

e	k berechnet	k beobachtet	Differenz	Quadrat
0,33	1,86	2,51	— 0,65	0,422
1,04	5,15	5,23	— 0,08	,006
1,32	6,16	6,12	+ 0,04	,002
2,06	8,12	7,97	+ 0,15	,023
2,60	8,87	8,81	+ 0,06	,004
3,14	9,04	9,10	— 0,06	,004
3,82	8,45	8,26	+ 0,19	,036
4,13	7,86	8,04	— 0,18	,032
			Summe	0,529

Man darf die vorstehnden Differenzen nicht als die wirklichen Beobachtungsfehler ansehn, indem die für r und s gefundnen Werthe nicht die wahren, sondern nur die wahrscheinlichsten sind. Es wird später gezeigt werden, wie man aus diesen Differenzen auf die Gröſse der wirklichen Beobachtungs-Fehler schlieſsen und die wahrscheinlichen Fehler der gefundnen Constanten r und s berechnen kann.

Vergleicht man die Differenzen unter sich, so könnte man leicht vermuthen, daſs die starke Abweichung der ersten Beobachtung, die also an sich sehr unwahrscheinlich ist, durch andre Werthe von r und s vermindert werden könnte. Dieses ist jedoch hier nicht der Fall, weil die zum Grunde gelegte Gleichung die Bedingung enthält, daſs für $e = 0$ auch $k = 0$ ist. Hiernach muſs angenommen werden, daſs die erste Messung mit einem starken Fehler behaftet ist, der bei der geringen Gröſse von e und k sich auch erklärt.

Man darf, so lange man eines Irrthums sich nicht bewuſst ist, eine abweichende Beobachtung nicht als falsch ansehn und sie deshalb ausschlieſsen. Allerdings geschieht dieses nicht selten, doch rechtfertigt es sich keineswegs, denn eines Theils sind möglicher Weise die unter einander übereinstimmenden Beobachtungen weniger richtig, als die abweichende, sodann aber wird auch bei solchem Verfahren die Sicherheit des Resultats gröſser dargestellt, als sie wirklich ist. Die Täuschung, die man durch Verschweigen von Messungen begeht, läſst sich eben so wenig entschuldigen, als wenn man Messungen fälschen oder fingiren wollte.

§ 21.

Eine zweite Erleichterung der Rechnung bezieht sich auf die Auffindung der Constanten r, s ... nachdem die Summen jener Quadrate und Producte aa, bb ... ka, ab, ac ... bereits dargestellt sind. Im Jahr 1810 deutete Gauſs in einem Brief an Bessel dieses Verfahren bereits an,*) doch mag dasselbe hier in

*) Briefwechsel zwischen Gauſs und Bessel. Leipzig 1880. Seite 129.

der Art wiedergegeben werden, wie Bessel in seinen Vorträgen es mittheilte, und wie es auch besonders bequem ist, namentlich wenn man eine gröfsere Anzahl von Constanten zu bestimmen hat.

Die Bedingungs-Gleichungen

$$[ka] = [aa]\,r + [ab]\,s + [ac]\,t + [ad]\,u + \ldots$$
$$[kb] = [ab]\,r + [bb]\,s + [bc]\,t + [bd]\,u + \ldots$$
$$[kc] = [ac]\,r + [bc]\,s + [cc]\,t + [cd]\,u + \ldots$$

u. s. w.

deren Anzahl jedesmal eben so grofs ist, wie die der Unbekannten, genügen zwar zur Berechnung der Werthe von r, s, t.... da jedoch dieselben Factoren $[ab]$, $[ac]$ u. s. w. in den verschiednen Gleichungen sich wiederholen, so bietet sich hierdurch Gelegenheit zum bequemeren Eliminiren der einzelnen Glieder. Die erste Gleichung, wie die zweite enthält den Coefficient $[ab]$, die erste nnd die dritte den Coefficient $[ac]$ und so fort. Multiplicirt man daher die erste mit

$$\frac{[ab]}{[aa]}$$

so wird der Coefficient von r gleich $[ab]$ und bei der Subtraction dieser Gleichung von der unveränderten zweiten fällt das Glied fort, welches r zum Factor hat. Multiplicirt man hierauf wieder die erste Gleichung mit

$$\frac{[ac]}{[aa]}$$

und subtrahirt dieselbe von der dritten, so erhält man eine zweite Gleichung, in der gleichfalls das Glied mit dem Factor r verschwunden ist. In dieser Art ergeben sich aus den früheren Bedingungs-Gleichungen, deren Anzahl $= \mu$ war, nunmehr $\mu - 1$ Gleichungen, die aber auch nur $\mu - 1$ Unbekannte enthalten. Der wesentliche Vortheil dieses Verfahrens beruht darauf, dafs man nur die Logarithmen der Coefficienten von den Gliedern der ersten Gleichung, also der $[ka]$, $[aa]$, $[ab]$, ... aufzuschlagen braucht, weil die sämmtlichen übrigen Gleichungen bei der Elimination der Constanten r in ihren Zahlenwerthen benutzt werden können.

Nach Beendigung dieser ersten Operation hat man die folgenden Bedingungungs-Gleichungen

$$\left([kb]-\frac{[ka][ab]}{[aa]}\right)=\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)s+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)t$$
$$+\left([bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)u+\ldots$$
$$\left([kc]-\frac{[ka][ac]}{[aa]}\right)=\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)s+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)t$$
$$+\left([cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}\right)u+\ldots$$
$$\left([kd]-\frac{[ka][ad]}{[aa]}\right)=\left([bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}\right)s+\left([cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}\right)t$$
$$+\left([dd]-\frac{[ad][ad]}{[aa]}\right)u+\ldots$$

u. s. w.

Man bemerkt, dafs auch hier auf der rechten Seite das zweite Glied der ersten Gleichung denselben Coefficient hat, wie das erste der zweiten, eben so auch das dritte Glied der ersten Gleichung und das erste der dritten u. s. f. Es ergiebt sich auch aus der Bildung dieser Coefficienten der Grund dieser Erscheinung. Sobald man daher die in die Parenthesen eingeschlossenen Differenzen berechnet hat, kann man in gleicher Art, wie früher, die ersten Glieder, die den Factor s enthalten, beseitigen, während man allein von den Zahlen-Coefficienten der ersten Gleichung die Logarithmen aufzuschlagen braucht. In dieser Weise setzt sich die Rechnung fort, indem die Anzahl der Unbekannten sich jedesmal um eine vermindert, bis endlich nur die letzte in einer Gleichung übrig bleibt, deren Werth man alsdann berechnen kann. Aus diesem ergeben sich aber nach den vorhergehenden Gleichungen auch die andern Unbekannten und in den verschiednen Gleichungen bietet sich reichlich Gelegenheit die Rechnung zu controlliren.

Die Anwendung dieser Methode wird später in einem Beispiel näher nachgewiesen werden.

§ 22.

Die bisher den Beobachtungen zum Grunde gelegte Gleichung
$$k=ar+bs+ct+\ldots$$
worin die Unbekannten als einfache Factoren in den verschiednen Gliedern vorkommen, stellt sich keineswegs in allen Fällen dar,

doch lassen sich jedesmal auch andre Ausdrücke auf diese Form zurückführen.

Sollte ein Glied das Product oder den Quotient zweier Unbekannten enthalten, von denen die eine noch in einem andern Gliede auftritt, so hindert nichts, dieses Product oder diesen Quotient zunächst als eine einfache Unbekannte anzusehn, die sich zerlegen läfst, sobald man den Werth der darin enthaltenen zweiten Unbekannten berechnet hat. Hätte man z. B.

$$k = a \,.\, rs + b \,.\, s$$

so würde man die wahrscheinlichsten Werthe von rs und s suchen, und alsdann den ersten durch den zweiten dividiren.

Zuweilen kommt dieselbe Unbekannte in verschiednen Potenzen vor. Alsdann empfiehlt es sich, einen Näherungswerth dafür einzuführen und die Verbesserung desselben als die gesuchte Unbekannte anzusehn. Hat man zum Beispiel die Gleichung

$$k = ar^h + br + cs$$

so setze man

$$r = R + \varrho$$

R ist der Näherungswerth und ϱ die unbekannte Verbesserung desselben. Letztere mufs gegen den ersten so klein sein, dafs ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Alsdann ist

$$r^h = R^h + h \,.\, R^{h-1} \varrho$$

und man erhält, indem man die bekannten Glieder vor das Gleichheits-Zeichen stellt,

$$k - aR^h - bR = (ahR^{h-1} + b)\,\varrho + cs$$

Die Unbekannten ϱ und s sind alsdann durch diese Umformung einfache Factoren geworden, wie in der frühern Gleichung. Sollte sich schliefslich für ϱ ein so grofser Werth ergeben, dafs dessen zweite Potenz noch nicht vernachlässigt werden darf, so bleibt nur übrig nunmehr $R + \varrho$ als den Näherungswerth anzusehn und $r = (R + \varrho) + \varrho'$ zu setzen, und in gleicher Weise die Verbesserung ϱ' zu berechnen.

Zuweilen sind die Verhältnisse, unter denen eine Erscheinung eintritt, so verwickelt, dafs man nicht weifs, in welcher Potenz man eine der gegebnen Gröfsen in den Ausdruck einführen soll, und es kommt alsdann darauf an, den wahrscheinlichsten Werth des Exponenten zu finden. Der einfachste Fall dieser Art wäre die Gleichung

$$k = r \cdot a^s$$

wobei sowohl der Coefficient r, wie der Exponent s gesucht wird. Durch Uebergang zu den Logarithmen erfolgt die Umbildung sehr einfach in der Art, dafs beide Unbekannte in verschiednen Gliedern als Coefficienten erscheinen, nämlich

$$\log k = \log r + \log a \cdot s$$

Alsdann kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate sowohl r, wie s unmittelbar berechnen. Diese Umformung verbietet sich indessen, wenn noch ein zweites Glied hinzutritt, wie etwa

$$k = r \cdot a^s + b \cdot t$$

Abgesehn hiervon darf man nicht unbeachtet lassen, dafs bei Benutzung des logarithmischen Ausdrucks nicht sowohl die Summe der Quadrate der Fehler von k, sondern die der Fehler der Logarithmen derselben ein Minimum wird, und dadurch die kleineren Werthe von k, für welche die Differenzen der Logarithmen am gröfsten sind, überwiegenden Einflufs gewinnen. Ist die Anzahl der Beobachtungen nur geringe, so kann man diesem Uebelstand dadurch begegnen, dafs man für die vorliegenden Werthe von k die Differenzen der Logarithmen zweier zunächst stehender Zahlen aufsucht, und im umgekehrten Verhältnifs derselben den Beobachtungen verschiedne Gewichte beilegt, wovon im folgenden Paragraph die Rede sein wird. Bei einer gröfsern Anzahl von Beobachtungen ist dieses Verfahren indessen so mühsam, dafs man davon absehn mufs.

Am passendsten erscheint es, den durch die logarithmische Rechnung, oder auch aus einzelnen Beobachtungen direct gefundnen Exponent als Näherungswerth anzusehn und die Verbesserung desselben zu berechnen.

Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist

$$f(x+h) = fx + h \cdot d\,fx + \frac{h^2}{1 \cdot 2} d^2 fx + \ldots$$

Das dritte Glied nebst allen folgenden fällt aber fort, wenn h so klein ist, dafs man die höheren Potenzen gleich Null setzen kann. Man hat ferner

$$d\,a^s = a^s \,.\, \log\,\mathrm{nat}\,a \,.\, d\,s$$

also ist $$a^{S+\sigma} = a^S + a^S \log\,\mathrm{nat}\;a \,.\, \sigma$$

folglich, wenn S der angenommene Näherungswerth von s, und σ die Verbesserung desselben ist,

$$k = a^S\,r + a^S \log\,\mathrm{nat}\,a \,.\, r\,\sigma + b\,t$$

Die drei Unbekannten sind alsdann r, $r\sigma$ und t und der Ausdruck hat diejenige Form, welche die unmittelbare Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gestattet. Es darf aber kaum daran erinnert werden, dafs der natürliche Logarithmus einer Zahl gleich dem Briggeschen ist multiplicirt mit 2,3025, wofür man gewöhnlich 2,3 setzen darf. Auch müssen die Logarithmen von ächten Brüchen nicht mit der decadischen Ergänzung versehn, sondern als negative Zahlen dargestellt werden.

Der Berechnung von σ nach dem vorstehnden Ausdruck tritt zuweilen eine Schwierigkeit entgegen, die auf diesem Wege jede weitere Annäherung unmöglich macht. Die zweite Unbekannte ist nämlich nicht σ, sondern $r\sigma$, und wenn r sehr grofs ist, so mufs σ schon überaus klein oder die Annäherung sehr weit getrieben sein, damit das Quadrat und die höhern Potenzen von $r\sigma$ vernachlässigt werden dürfen. Es kann sogar leicht geschehn, dafs dieser Versuch zur Darstellung des passendsten Werthes von s zum Gegentheil führt und man dadurch von der Wahrheit sich noch weiter entfernt.

Sehr wichtig ist indessen hierbei die Erfahrung, dafs die Exponenten gewöhnlich einfache Zahlen oder einfache ächte oder unächte Brüche sind. Wenn daher die logarithmische Rechnung zu Decimalbrüchen mit vielen Ziffern führt, so sind diese auf einfache Werthe zurückzuführen. Es empfiehlt sich alsdann, nicht nur die wahrscheinlichsten Werthe der Exponenten, sondern auch die wahrscheinlichen Fehler dieser Werthe nach § 30 zu ermitteln und mit Berücksichtigung derselben die Vereinfachung auszuführen.

Jedenfalls giebt es aber noch eine sehr sichre Probe für die Wahl eines Exponenten. Ist man nämlich zweifelhaft, ob dieser oder jener der passendere sei, so darf man nur unter Annahme des einen und des andern die Rechnung durchführen und für beide die Abweichungen von den beobachteten Werthen k zum Quadrat erheben. Derjenige Exponent ist alsdann der passendere, bei dem die Summe der Quadrate der Fehler die kleinere ist.

§ 23.

Die vorstehend entwickelte Methode zur Auffindung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten beruht auf der Voraussetzung, dafs die Wahrscheinlichkeit der sämmtlichen Fehler der zum Grunde gelegten Beobachtungen gleich grofs oder dafs in allen Messungen der Werth von $\frac{1}{2}\,n = r$ in der Gleichung

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{r}}\,e^{-\frac{xx}{r}}$$

derselbe bleibt, dafs also abgesehn von der zufälligen Gröfse der Fehler, nicht ein Theil der Messungen schärfer ist, oder ein genaueres Resultat erwarten läfst, als ein andrer. Diese Gleichmäfsigkeit findet oft nicht statt, wenn auch die Beobachtungs-Art dieselbe ist.

So kommt es bei hydraulischen Messungen nicht selten vor, dafs in derselben Beobachtungs-Reihe die grofsen Geschwindigkeiten und grofsen Druckhöhen wegen der schwierigen Messung nicht so genau sind, wie die kleinern. Wenn in jenem Beispiel k die Druckhöhe ist, a und b dagegen gewisse Functionen der Geschwindigkeit sind, so hängen die Summen der Producte und Potenzen vorzugsweise von diesen überwiegend grofsen, aber am wenigsten sichern Beobachtungen ab, und die genauern Messungen, die sich auf die kleinern Geschwindigkeiten beziehn, verlieren dagegen grofsentheils ihren Einflufs. Jene Bedingung wird also in diesem Falle keineswegs erfüllt, vielmehr ist die Wahrscheinlichkeit eines gleich grofsen Beobachtungs-Fehlers sehr verschieden.

Oft läfst sich eine Ausgleichung dadurch herbeiführen, dafs man in jeder Beobachtung alle gegebnen Gröfsen durch eine derselben dividirt, also etwa statt

$$k = ar + bs$$

die Gleichung

$$\frac{k}{a} = r + \frac{b}{a} s$$

wählt. Hierdurch gelingt es zuweilen, allen Messungen ungefähr gleichen Werth zu geben und den überwiegenden Einflufs einzelner aufzuheben. Nichts desto weniger darf man Aenderungen dieser Art nicht willkürlich einführen, vielmehr ist jedesmal eine sorgfältige Ueberlegung erforderlich, ob die Wahrscheinlichkeit der Fehler von $\frac{k}{a}$ in den verschiednen Beobacbtungen annähernd dieselbe ist. Auch darf dabei nicht unbeachtet bleiben, dafs in diesem Fall wieder nicht die Summe der Quadrate der Beobachtungs-Fehler, sondern die der Quotienten ein Minimum wird. Es ist daher nöthig, die Zulässigkeit solcher Umformung auch in dieser Beziehung zu prüfen.

Vielfach kommt es darauf an, aus sehr verschiedenartigen Beobachtungen, die an sich keineswegs mit gleicher Schärfe angestellt sind, Resultate zu ziehn. Man darf alsdann augenscheinlich nicht allen gleichen Werth beilegen, man mufs vielmehr den Werth der einzelnen Messungen zu bestimmen, oder wenigstens zu schätzen versuchen, und ihn angemessen in Rechnung stellen. Wenn es sich z. B. um Winkelmessungen handelt, wobei verschiedne Instrumente benutzt wurden, von denen theils einzelne Minuten, theils aber nur je 10 Minuten abgelesen werden konnten, so dürfen diese keineswegs als gleich berechtigt angesehn werden. Wenn aber auch mit demselben Apparat dieselbe Art der Beobachtung unter verschiednen Umständen mehrfach wiederholt wird, so geschieht es oft, dafs die äufsern Einwirkungen auffallend günstig, oder besonders ungünstig sind, und man sogleich die Ueberzeugung gewinnt, dafs die Beobachtungen sehr verschiedne Werthe haben.

Die genaue Ermittlung dieser Werthe oder der Gewichte der einzelnen Beobachtungen ist unbedingt sehr schwierig und erfordert jedenfalls grofse Sorgfalt und volle Unbefangenheit. Besonders mufs man sich hüten, aus der Uebereinstimmung einiger Beobachtungen unter sich auf die besondre Schärfe derselben zu schliefsen, oder andrerseits denjenigen allen Werth abzusprechen oder gar kein Gewicht beizulegen, welche grofse Abweichungen zeigen. In diesem Fall würde man keineswegs das wahrscheinlichste, sondern nur ein solches Resultat darstellen, welches sich an diejenigen Beobachtungen anschliefst, die zufällig mit einander übereinstimmen. Bei dem verschiedenartigen Auftreten der Fehler kann es leicht geschehn, dafs gerade diejenige Messung, welche von den übrigen am stärksten abweicht, zur Berichtigung des Resultats wesentlich beiträgt. Man mufs daher unbedingt den Grundsatz befolgen, dafs keine Messung oder Beobachtung von der Rechnung ausgeschlossen werden darf, wenn man nicht schon, während sie gemacht wurde, bemerkte, dafs sie nicht richtig oder doch sehr zweifelhaft sei.

Dagegen rechtfertigt es sich nicht nur, sondern es ist auch nothwendig, denjenigen Beobachtungen einen gröfsern oder geringern Werth beizulegen, von denen man mit Rücksicht auf äufsere Umstände sich überzeugt hat, dafs sie bedeutend sichrer oder weniger sicher sind, als die übrigen. Um zu zeigen, in welcher Weise dieses geschieht, ist es nöthig, den Begriff des wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehlers schon zum Grunde zu legen, von dem später eingehend die Rede sein wird. Man versteht darunter einen Fehler von solcher Gröfse, dafs derselbe bei vielfacher Wiederholung der Messung von allen Fehlern, sowohl positiven, wie negativen, die dabei vorkommen, eben so oft überschritten, wie nicht erreicht wird. Auch mufs hinzugefügt werden, dafs, wenn dieser wahrscheinliche Fehler $= \omega$ aus μ gleich sichern Beobachtungen hergeleitet ist, dafs alsdann der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels aus diesen Beobachtungen gleich ist (§ 30)

$$\frac{w}{\sqrt{\mu}}$$

Weifs man nun, dafs beispielsweise in einer Reihe von Beobachtungen für eine oder mehrere derselben der wahrscheinliche Fehler nur halb so grofs, als der der Uebrigen ist, so ergiebt sich aus Vorstehndem, dafs diese besonders scharfen Beobachtungen denselben Werth haben, als wenn sie mit der Schärfe der andern viermal gemacht wären. Sie sind also viermal in Rechnung zu stellen. Im Allgemeinen ergiebt sich aber, dafs wenn der wahrscheinliche Fehler der Mehrzahl der Beobachtungen gleich ω, derjenige von einzelnen aber $m\,\omega$ ist, wobei

m sowohl eine ganze Zahl, wie ein ächter Bruch sein kann, dafs man alsdann diese Beobachtungen $\frac{1}{m \cdot m}$ mal in Rechnung zu stellen hat. Mit diesem Bruch sind also die früher mit k, a, b ... bezeichneten Werthe zu multipliciren und in die Summen der Producte ka, kb, aa, ab ... einzuführen. Wenn aber einer der Factoren a, b ... $= 1$ ist, so darf man nicht unterlassen in die Anzahl der Beobachtungen statt der Einheit eben diesen Bruch zu setzen.

Schliefslich mufs erwähnt werden, dafs die Bestimmung des Werthes von m wohl niemals mit grofser Schärfe ausgeführt werden kann und meist nur auf Schätzung beruht. Man wird daher zur Untersuchung der Gewichte der einzelnen Messungen sich nur entschliefsen, wenn dieselben wesentlich verschieden sind.

IV. Abschnitt.

Der wahrscheinliche Fehler.

§ 24.

Obwohl nach den vorstehend entwickelten Gesetzen die Fehler, die bei jeder Messung vorkommen können, zwischen denselben Grenzen, nämlich zwischen Null und positiv oder negativ Unendlich liegen, so ist dennch die Sicherheit der verschiednen Beobachtungs-Arten sehr verschieden. Mit einem bessern Instrument und bei gröſsrer Uebung wird man ohne Zweifel richtiger messen, als im entgegengesetzten Fall. Die Schärfe jeder Beobachtungs-Art ist in dem (§ 16) entwickelten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines gewissen Fehlers x durch n gegeben. Die eigentliche Bedeutung von n war aber die Anzahl der unendlich vielen theils positiven, theils negativen elementären Fehler, aus deren Verbindung die Beobachtungs-Fehler entstehn.

Ferner ist nachgewiesen, daſs zwischen diesem n und der Wahrscheinlichkeit, daſs der Fehler gleich Null sei, die mit a bezeichnet wurde, eine sehr einfache Beziehung besteht. Man könnte sonach diese Wahrscheinlichkeit, oder wie oben gezeigt ist, die gröſste Ordinate der Curve zum Maaſs der Schärfe der verschiednen Beobachtungs-Arten wählen. Hierzu sind aber andre charakteristische Fehler mehr geeignet, insofern sie aus einer mäſsigen Anzahl von Messungen mit gröſsrer Sicherheit sich ermitteln lassen.

Am einfachsten erscheint es, hierzu den mittlern Fehler $= m$ zu wählen, also die Summe der sämmtlichen Fehler dividirt durch ihre Anzahl. Macht man die Voraussetzung, daſs wirklich alle verschiednen Fehler vorkommen, oder dafs die Anzahl der Beobachtungen unendlich grofs ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zu begehn, der zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegt, $y\,dx$. Dieser Ausdruck bezeichnet nach vorstehnder Annahme aber auch die Anzahl der Fehler von dieser Gröfse. Die Anzahl der gesammten Fehler ist demnach

$$= \int y\,dx, \text{ von } x = -\infty \text{ bis } x = +\infty$$

Die Summe der Fehler ist aber gleich der Summe der Producte jedes Fehlers in die Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens, also

$$= \int y\,x\,dx$$

und zwar wieder innerhalb derselben Grenzen.

Das Integral von $y\,dx$ ist der Flächeninhalt der ganzen Curve, also gleich 1, das Integral von $y\,x\,dx$ dagegen ist, wenn man wieder $\frac{1}{2}n$ durch ν bezeichnet, für diese

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}} \int e^{-\frac{xx}{\nu}}\,x\,dx$$

$$= -\frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{xx}{\nu}}$$

Der Werth dieses Integrals ist

$$\text{für } x = 0 \qquad \text{gleich } -\frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\text{und für } x = \infty \qquad \text{-} \quad 0$$

$$\text{also von 0 bis } \infty = \frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\text{und von } -\infty \text{ bis } +\infty = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}}$$

Bei der Division durch die Anzahl der Fehler oder durch 1 ändert sich nicht der Werth und man hat sonach den mittlern Fehler m

$$m = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419\,.\,\sqrt{\nu}$$

Indem man diesen Werth von m statt x in den Ausdruck

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{v}} e^{-\frac{xx}{v}}$$

einführt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des mittlern Fehlers

$$y = 0{,}72738 \cdot a$$

während a wieder die gröfste Ordinate der Curve ist, und die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dafs der Beobachtungsfehler gleich Null sei.

Wenn dagegen nicht alle Fehler, sondern nur eine beschränkte Anzahl derselben vorkommt, so ist die wahrscheinlichste Voraussetzung, dafs diese nach Maafsgabe ihrer Wahrscheinlichkeit sich vertheilen. Liegen daher μ Beobachtungen vor, so ist die Summe der betreffenden Fehler gleich

$$\mu \int y\,x\,dx$$

die Anzahl derselben ist aber gleich μ und folglich der mittlere Fehler m eben so grofs, wie früher. Dieses geschieht jedoch nur, wenn in der mäfsigen Anzahl von Beobachtungen die Fehler wirklich dem Verhältnifs ihrer Wahrscheinlichkeit entsprechend vertheilt sind. Gröfsre Fehler sind aber seltner als kleinere und kommen vielleicht hier gar nicht vor, woher der wahre mittlere Fehler sich nicht richtig herausstellt. Liegen mehr Beobachtungen vor, so vermindert sich zwar dieser Uebelstand, aber vortheilhaft ist es unbedingt, einen andern charakteristischen Fehler zu suchen, dessen Werth aus einer geringen Anzahl von Messungen mit gröfsrer Sicherheit sich herleiten läfst.

§ 25.

Demnächst könnte man die Wurzel aus dem mittlern Fehlerquadrat als solchen charakteristischen Fehler ansehn. Man quadrirt nämlich alle Fehler, summirt die Quadrate, und dividirt ihre Summe durch die Anzahl der Fehler. Dieser Quotient ist das mittlere Fehlerquadrat, das durch qq bezeichnet werden mag. Hiernach hat man, unter der Voraussetzung, dafs alle Fehler wirklich vorgekommen sind

$$qq = \frac{\int y\,x^2\,dx}{\int y\,dx}$$

und zwar erstrecken sich beide Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$. Der Nenner ist alsdann wieder $=1$ und man hat

$$qq = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}}\int e^{-\frac{xx}{\nu}}\,x^2\,dx$$

Durch Ausführung der partiellen Integration findet man

$$qq = \frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}}\left(-e^{-\frac{xx}{\nu}}\,x + \int e^{-\frac{xx}{\nu}}\,dx\right)$$

Das erste Glied in der Parenthese

$$-e^{-\frac{xx}{\nu}}\,.\,x = -\frac{x}{e^{\frac{xx}{\nu}}}$$

verwandelt sich da

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \dots$$

ist, in

$$-\frac{x}{1 + \frac{xx}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{xx}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{xx}{\nu}\right)^3 + \dots}$$

und der Werth dieses Ausdrucks ist für $x=0$ gleich Null, für $x=\infty$ aber gleichfalls Null. Das erste Glied fällt sonach innerhalb dieser Grenzen fort. Das zweite Glied in der Parenthese ist

$$\int e^{-\frac{xx}{\nu}}\,dx = \sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}\int y\,dx$$

man hat also

$$qq = \tfrac{1}{2}\nu\int y\,dx$$

Dieses Integral ist innerhalb derselben Grenzen gleich 1, und man erhält schliefslich

$$\begin{aligned} qq &= \tfrac{1}{2}\,\nu \\ q &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,\sqrt{\nu} \\ &= 0{,}7071068\,.\,\sqrt{\nu} \end{aligned}$$

und wenn man die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers q wieder durch die gröfste Ordinate a ausdrückt, so ergiebt sich

$$y = 0{,}60653\,.\,a$$

Der Fehler $x=q$ nimmt in der Curve eine sehr markirte Stelle ein, nänlich diejenige, wo die abwärts gekehrte Krümmung in die entgegengesetzte übergeht, oder wo die Neigung am gröſsten ist. Die Neigung ist nämlich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\nu\sqrt{\nu}\,.\,\sqrt{\pi}} e^{-\frac{xx}{\nu}}\,.\,x$$

und wenn man diesen Ausdruck differenzirt und das Differenzial gleich Null setzt, so ergiebt sich

$$2x^2 = \nu$$

oder

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,\sqrt{\nu}$$

also übereinstimmend mit dem Werth von q.

§ 26.

Es giebt endlich noch einen sehr wichtigen charakteristischen Fehler, nämlich den wahrscheinlichen Fehler. Derselbe bezeichnet diejenige Grenze, die von den sämmtlichen sowohl positiven, wie negativen Fehlern eben so oft überschritten, wie nicht erreicht wird. Nennt man diesen Fehler w, so muſs das Integral

$$\int y\,dx \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = w$$

eben so groſs sein, wie dasselbe von

$$x = w \text{ bis } x = \infty$$

Indem aber beide Schenkel der Curve symmetrisch und die ganze von ihr eingeschloſsne Fläche $= 1$ ist, so folgt die Bedingung, daſs dieses Integral zwischen $x = 0$ und $x = w$ gleich ein Viertel ist. Zur einfacheren Bezeichnung setze man

$$\frac{x}{\sqrt{\nu}} = t$$

$$x = t\sqrt{\nu} \text{ und } dx = \sqrt{\nu}\,.\,dt$$

Man hat alsdann nach § 16

$$\int y\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.\int e^{-tt}\,dt$$

aber

$$e^{-tt} = 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1\,.\,2} - \frac{t^6}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Für die vorstehnd angegebnen Grenzen erhält man nach Ausführung der Integration, indem

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} = 0{,}4431135$$

$$0{,}4431135 = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{10}t^5 - \tfrac{1}{42}t^7 + \tfrac{1}{216}t^9 - \tfrac{1}{1320}t^{11} + \tfrac{1}{9360}t^{13} - \ldots$$

Eine Constante kommt nicht hinzu, da für $t = 0$ jedes Glied gleich Null ist. Es kommt darauf an, denjenigen Werth von t zu finden, der dieser Gleichung entspricht. Indem man versuchsweise verschiedne Werthe für t einführt, findet man schliesslich

$$t = 0{,}4769364\ ^{*)}$$

Von der Richtigkeit dieser Zahl kann man sich überzeugen, wenn man sie in die vorstehnde Reihe einführt. Hieraus ergiebt sich nun der wahrscheinliche Fehler

$$w = 0{,}4769364 \,.\, \sqrt{\nu}$$

und die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers vergleichungsweise zur gröfsten Ordinate ist

$$y = 0{,}79654 \,.\, a$$

Aus der Vergleichung dieser drei charakteristischen Fehler m, q und w ergiebt sich schon, dafs der letzte vor den beiden andern den Vorzug hat, dafs er der kleinste ist. Seine Wahrscheinlichkeit y hat also den gröfsten Werth, er liegt den am häufigsten vorkommenden Fehlern am nächsten, und kann sonach auch am sichersten aus diesen berechnet werden.

Seine Gröfse würde indessen ziemlich unsicher bleiben, wenn man dieselbe nur in der Art ermitteln wollte, dafs man die sämmtlichen Fehler, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, ob sie positiv oder negativ sind, nach ihrer Gröfse ordnete, und denjenigen als den wahrscheinlichen ansähe, der die mittlere Stelle einnimmt. Es leuchtet ein, dafs dabei keine gleichmäfsige Berücksichtigung der sämmtlichen Fehler erfolgt, vorzugsweise nur desjenigen der an dieser Stelle steht. Wenn aber eine gerade Anzahl von Fehlern vorläge, so liefse sich kein bestimmter Werth dafür angeben und man könnte vielmehr nur Grenzen bezeichnen, die vielleicht weit aus einander liegen. Weit sichrer ist es, das

*) In der Abhandlung über den Olbers'schen Kometen hat Bessel einen directen Weg zur Berechnung von t angegeben.

mittlere Fehler-Quadrat zu bestimmen und von diesem zum wahrscheinlichen Fehler überzugehn.

Der aus den Fehlerquadraten hergeleitete charakteristische Fehler war

$$q = 0{,}7071068 \cdot \sqrt{\nu}$$

und der wahrscheinliche Fehler

$$w = 0{,}4769364 \cdot \sqrt{\nu}$$

man hat daher

$$w = 0{,}6744900 \cdot q$$

Man quadrire also die zwischen den Beobachtungen und der Rechnung gefundenen Differenzen, summire diese Quadrate, dividire sie durch ihre Anzahl, und ziehe aus dem Quotient die Wurzel, die alsdann gleich q ist. Dieses mit 0,67449 multiplicirt giebt den gesuchten wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehler w.

Geht man beispielsweise auf die § 20 mitgetheilten Beobachtungen zurück, so sind die Differenzen der berechneten Resultate gegen die gemefsnen nach ihrer Gröfse geordnet

0,04	0,06	0,06	0,08
0,15	0,18	0,19	0,65

Man würde also unmittelbar nur entnehmen können, dafs der wahrscheinliche Fehler zwischen 0,08 und 0,15 liegt. Dabei wäre aber noch die sehr starke Abweichung 0,65 ganz unbeachtet geblieben. Berücksichtigt man dagegen die Fehlerquadrate, deren Summe 0,529 ist, findet man

$$q = 0{,}257$$

und

$$w = 0{,}173$$

§ 27.

Der wahrscheinliche Fehler eignet sich vorzugsweise zur Einheit des Maafses, worin die Fehler der Beobachtungsreihen gemessen werden. Die Fläche jener Curve, deren Abscissen die Fehler, und deren Ordinaten die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten darstellen, ist gleich 1. Führt man nunmehr als Längenmaafs für die Abscissen den wahrscheinlichen Fehler ein, so lassen sich die Ordinaten in bestimmten Zahlenwerthen ausdrücken, und dieses gilt auch von den durch sie begrenzten Flächen. Das Letztere ist besonders insofern von grofser Wichtigkeit, als sich aus diesen Flächen unmittelbar entnehmen läfst, mit welcher Wahrscheinlichkeit man das Vorkommen von Fehlern erwarten darf, die gewisse Vielfache, oder irgend welche aliquote Theile des wahrscheinlichen Fehlers sind.

Indem die Flächen nach der Methode der mechanischen Quadratur berechnet werden, so mufs man zuerst die Ordinaten in geringen Abständen bestimmen. Dieses ist auch schon nothwendig, um ein anschauliches Bild von der Form der Curve zu gewinnen. Man hatte

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\nu}} e^{-\frac{xx}{\nu}}$$

dagegen war

$$w = 0{,}476936 \cdot \sqrt{\nu}$$

und indem

$$w = 1$$

gesetzt wird, ergiebt sich

$$\nu = 4{,}396224$$

Man kann hiernach für jedes beliebige x, das zugehörige y berechnen, und am leichtesten geschieht dieses logarithmisch.

$$\log y = -\log(\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\nu}) - \frac{xx}{\nu} \log e$$

Die Berechnung des ersten, constanten Gliedes macht keine Schwierigkeit, um aber das zweite Glied zu finden, mufs man nochmals zu den Logarithmen übergehn. Das zweite Glied ist nämlich die Zahl, die zu

$$\log xx - \log \nu + \log\log e$$

gehört. Die beiden letzten Glieder sind hier constant, und man braucht also nur $\log xx$ wiederholentlich aufzuschlagen.

Beispielsweise werde dasjenige y gesucht, das zu $x = 4{,}4$ gehört. Man hat alsdann

$$\begin{aligned}
e &= 2{,}718282 \\
\log e &= 0{,}434294 \\
\log\log e &= 9{,}637784 \\
&= -0{,}362216 \\
\log \nu &= 0{,}643079 \\
\hline
\log\log e - \log \nu &= -1{,}005295
\end{aligned}$$

Ferner

$$\log \sqrt{\nu} = \quad 0{,}321540$$

und

$$\log \sqrt{\pi} = \quad 0{,}248575$$

$$\log \sqrt{\nu} \, . \, \sqrt{\pi} = \quad 0{,}570115$$

Dieses sind die vorbereitenden Rechnungen, von denen man bei Bestimmung aller y Gebrauch macht.

$$\text{Für } x = \quad 4{,}4$$

ist

$$\log x = \quad 0{,}643453$$

$$\log xx = \quad 1{,}286906$$

$$-\log n + \log\log e = -1{,}005295$$

$$\log\log e^{\frac{xx}{\nu}} = \quad 0{,}281611$$

$$\log e^{\frac{xx}{\nu}} = \quad 1{,}91254$$

also

$$\log e^{-\frac{xx}{\nu}} = \quad 8{,}08746$$

$$\log \sqrt{\pi} \, . \, \sqrt{\nu} = \quad 0{,}57011$$

$$\log y = \quad 7{,}51735$$

endlich

$$y = \quad 0{,}0032912$$

Die Tabelle B im Anhange enthält die in dieser Weise berechneten relativen Wahrscheinlichkeiten W der Fehler x. Da die Anzahl der möglichen Fehler unendlich grofs ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler in aller Schärfe eine vorher bestimmte Gröfse erreichen wird, jedesmal gleich Null, dennoch haben diese unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten, wenn man sie unter einander vergleicht, sehr verschiedne Werthe, und diese bezeichnet die mitgetheilte Tabelle. In derselben sind die W von $x = 0$ bis $x = 8.\,w$ berechnet, indem die x in der Einheit des wahrscheinlichen Fehlers w gemessen, oder durch ihr Verhältnifs zu diesem ausgedrückt sind. Eine weitere Ausdehnung der Tabelle war entbehrlich, da die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $8\,w$ schon unter den zwanzigmillionsten Theil der Wahrscheinlichkeit des Fehlers $x = 0$ herabgesunken ist.

In dieser Tabelle wachsen die x um $0{,}1.\,w$, und den betreffenden Werthen von W sind die ersten und zweiten Differenzen beigefügt. Die dritten Differenzen sind meist so geringe, dafs sie unbeachtet bleiben durften, wollte man sie aber benutzen, so ist es leicht, sie aus den zweiten zu entnehmen und dadurch mit noch gröfserer Schärfe den Werth von W für einen dazwischen liegenden Fehler x zu bestimmen. Beispielsweise suche man diesen für $x = 1{,}1763$,

Die Tabelle ergiebt für $x = 1{,}1$

$$\begin{aligned} W &= 0{,}204339 \\ D1 &= -0{,}010416 \\ D2 &= -0{,}000304 \\ D3 &= +0{,}000111 \end{aligned}$$

Nach den bekannten Regeln der Interpolation ist der zu $x + m$ gehörige Werth W'

$$W' = W + m \, . \, D1 + \frac{m \, . \, m-1}{1 \, . \, 2} \, . \, D2 + \frac{m \, . \, m-1 \, . \, m-2}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \, D3 + \ldots$$

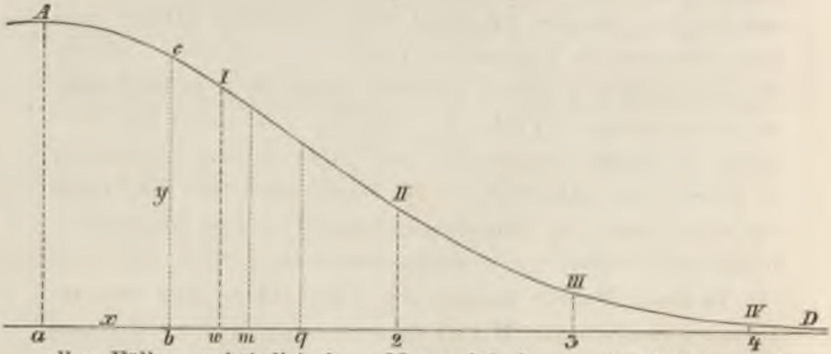
Indem die x in der Tabelle sich nicht um 1, sondern nur um 0,1 ändern so ist im vorliegenden Fall

$$m = 0{,}763$$

und man findet hiernach

$$\begin{aligned} W = &\;0{,}204339 \\ &-0{,}007947 \\ &+0{,}000027 \\ &+0{,}000006 \\ \hline = &\;0{,}196425 \end{aligned}$$

Es mufs noch darauf aufmerksam gemacht werden, dafs die Schärfe, mit der die Rechnung hier ausgeführt worden, wohl in



allen Fällen entbehrlich ist. Man wird immer die letzten drei und vielleicht sogar vier Decimalstellen der Werthe von W unbeachtet lassen dürfen. Es kam bei Aufstellung der Tabelle nur darauf an, dieselbe recht weit auszudehnen, wobei die letzten Decimalstellen allein übrig blieben.

Stellt man diese Werthe von W als Ordinaten dar, während die x die Abscissen sind, so bildet sich eine Curve, deren Zug die vorstehnde Figur in der einen Hälfte zeigt, während der linkseitige Schenkel, der sich auf die negativen Fehler bezieht, ganz symmetrisch mit diesem sich gestaltet. Der Scheitelpunkt in A entspricht dem Fehler $x = 0$. Die Abscisse aw ist der wahrscheinliche Fehler, so wie $a2$, $a3$ ... die Vielfachen desselben, am dagegen ist der mittlere Fehler und aq die Wurzel aus dem mittlern Fehler-Quadrat.

§ 28.

Die Flächen $\int y\,dx$ lassen sich nunmehr durch mechanische Quadratur leicht aus den Werthen von y herleiten. Dabei pflegt man gewöhnlich gröſsere Flächen, die durch eine Reihe von Ordinaten gegeben sind, zusammenzufassen. Im vorliegenden Fall ist es aber Aufgabe, jeden einzelnen Abschnitt zwischen zwei zunächst liegenden Ordinaten zu berechnen, und daher empfiehlt es sich, diese kleinen Theile zu bestimmen, und sie demnächst zu summiren. In solcher Art werden die Resultate auch etwas genauer, indem die Aenderung der Differenzial-Quotienten in jeder einzelnen Ordinate berücksichtigt wird.

Der Ausdruck für die Fläche zwischen zwei zunächst stehnden Ordinaten y und y', die zu den Abscissen x und x' gehören, ist bekanntlich, wenn

$$x' - x = \delta$$

gesetzt wird,

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}(y + y')\,\delta - \tfrac{1}{12}\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)\delta^2$$

oder wenn zugleich die negativen Fehler berücksichtigt werden, also die kleine Fläche sich verdoppelt

$$\int y\,dx = (y + y')\,\delta - \tfrac{1}{6}\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx}\right)\delta^2$$

Man hat aber nach § 14 wenn $\frac{1}{2} n = \nu$ gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} = -2 \frac{xy}{\nu}$$

und

$$\frac{dy'}{dx} = -2 \frac{x'y'}{\nu}$$

Da ferner die Ordinaten in Abständen von 0,1 berechnet sind, so hat δ gleichfalls diesen Werth, und die gesuchte Fläche ist

$$\int y\,dx = 0{,}1\,(y + y') + \frac{0{,}01}{3\nu}(y'x' - yx)$$

oder wenn man für ν den Zahlenwerth einführt

$$= 0{,}1\,(y + y') + 0{,}00075823\,(y'x' - yx)$$

Die Werthe von y und y', die zu den Fehlern x und x' gehören, werden unmittelbar aus der Tabelle B im Anhang entnommen, wodurch diese Rechnung überaus einfach wird. Die so gefundnen kleinen Flächen werden alsdann zu der Summe aller vorhergehnden, bis zu $x = 0$, addirt. Diese Summen bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler nicht gröfser, als x werden, oder dafs er zwischen den Grenzen $-x$ und $+x$ bleiben wird. Gewöhnlich fragt man aber nach der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, nämlich ob er diese Grenzen überschreiten wird, und die Antwort hierauf ergiebt sich aus der Gewifsheit, oder aus der Wahrscheinlichkeit $= 1$, dafs der Fehler diese Grenzen entweder überschreitet, oder innerhalb derselben bleibt. Man erhält also die Wahrscheinlichkeit für gröfsere Fehler, indem man jene Summen von 1 abzieht. Die Tabelle C im Anhange enthält in der mit W überschriebnen Spalte diese Wahrscheinlichkeiten für die im Verhältnifs zum wahrscheinlichen Fehler ausgedrückten Fehler x. Auch sind derselben, soweit es nöthig war, die ersten, zweiten und dritten Differenzen beigefügt.

§ 29.

Aus dieser Tabelle C läfst sich unmittelbar entnehmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man erwarten darf, dafs ein Beobachtungsfehler ein gewisses Vielfache des wahrscheinlichen

Fehlers nicht übersteigen wird. So ist zum Beispiel diese Wahrscheinlichkeit für das Dreifache des wahrscheinlichen Fehlers gleich 0,043. Man kann demnach

957 gegen 43

oder ungefähr

22 gegen 1

wetten, dafs der Fehler das Dreifache des wahrscheinlichen Fehlers nicht überschreitet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ueberschreiten der Grenze $x = 0$ ist gleich Eins angegeben, also als Gewifsheit. Dieses erklärt sich dadurch, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers, der in aller Schärfe gleich Null ist, eben so wie jedes andern vorher bestimmt bezeichneten Fehlers immer der Quotient von Eins dividirt doch unendlich bleibt. Die ersten Differenzen (D 1) bezeichnen die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von Fehlern zwischen den betreffenden, um 0,1 von einander entfernten Grenzen. Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von Fehlern zwischen 0,6 und 0,7 gleich 0,048 878.

In gleicher Weise berechnen sich die Einsätze, die man darauf verwetten kann, dafs der einzelne Beobachtungs-Fehler gewisse Vielfache von w nicht übersteigen. Nämlich

1	gegen	1	für	1 w
1	-	2,2	-	1,5 w
1	-	4,5	-	2 w
1	-	10,1	-	2,5 w
1	-	22,3	-	3 w
1	-	54,5	-	3,5 w
1	-	142	-	4 w
1	-	415	-	4,5 w
1	-	1341	-	5 w
1	-	4800	-	5,5 w
1	-	19200	-	6 w
1	-	83000	-	6,5 w
1	-	330000	-	7 w
1	-	1000000	-	7,5 w

Aufserdem zeigt diese Tabelle auch, in welchem Verhältnifs die Fehler sich nach ihrer Gröfse vertheilen, oder wie die Anzahl derselben bei zunehmender Gröfse innerhalb je zwei gleich weit entfernter Grenzen sich vermindert. Hierdurch wird Gelegenheit geboten, die Richtigkeit der Tabelle und der ganzen vorgetragnen Theorie der Fehler durch die Erfahrung zu prüfen. Es kommt nämlich nur darauf an, diese Zahlen mit einer gröfsern Reihe von Beobachtungen zu vergleichen.

Bei Gelegenheit der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers von Bradley's Beobachtungen hat Bessel Vergleiche dieser Art angestellt *), und nachgewiesen, dafs die wirklichen Fehler sich in der That sehr übereinstimmend mit diesen Gesetzen gruppiren. Beispielsweise mögen hier die Fehler der geraden Aufsteigung der Sonne gegen die Hauptsterne im kleinen Hunde und im Adler angeführt werden.

470 Beobachtungen dieser Art waren angestellt und aus der Vergleichung derselben unter sich ergab sich der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Messung gleich 0,2637 Zeitsecunden. Indem diese Gröfse als Einheit angenommen wird, lassen sich nach der erwähnten Tabelle die Verhältnifszahlen der Fehler berechnen, die gewisse aliquote Theile oder Vielfache des wahrscheinlichen Fehlers überschreiten. Man kann die Grenzen auch in Secunden ausdrücken, dieses hat Bessel gethan und die relative Anzahl der Fehler gesucht, die unter 0,1 . . . 0,2 . . . 0,3 Secunden und so weiter fallen. Durch Subtraction wurde sodann die Anzahl der Fehler zwischen 0 und 0,1 ferner zwischen 0,1 und 0,2 Secunden und so weiter ermittelt, und es ergab sich

	Anzahl der Fehler	
zwischen	berechnet	wirklich
0,0 und 0,1	95	94
0,1 und 0,2	88	88
0,2 und 0,3	78	78
0,3 und 0,4	64	58
0,4 und 0,5	49	51
0,5 und 0,6	35	36
0,6 und 0,7	24	26
0,7 und 0,8	16	14
0,8 und 0,9	9	10
0,9 und 1,0	5	7
über 1 Secunde	5	8

*) Fundamenta astronomiae. Seite 20.

Die Uebereinstimmung dieser Zahlen zeigt deutlich, wie der Zufall, sobald vielfache Wiederholungen stattfinden, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung folgt.

Es mag noch in einem andern Beispiel das Zutreffen dieser Gesetze nachgewiesen werden. Dasselbe bezieht sich freilich nicht auf Beobachtungs-Fehler, aber doch auf eine ebenso zufällige Erscheinung, die sich in besimmten Zahlenwerthen ausdrücken läfst. Aus vielfachen Wiederholungen kann man nämlich den normalen Werth mit grofser Wahrscheinlichkeit bestimmen und die jedesmalige Abweichung von diesem ist dem Beobachtungsfehler vergleichbar. Es wird dafür ein Beispiel gewählt, dafs jeder Leser in allen Einzelheiten leicht verfolgen und von der Richtigkeit der nachstehnden Angaben sich selbst überzeugen kann.

Eine solche ganz zufällige Erscheinung ist unter andern die Wiederholung eines gewissen Buchstaben. Am häufigsten wird das *e* gebraucht, daher empfiehlt es sich, dieses zu wählen. In Eytelweins Handbuch der Mechanik und Hydraulik und zwar in der ersten Ausgabe von 1801 zähle man die in jeder Zeile der Vorrede enthaltenen *e* mit Einschlufs der Diphtongen *ä*, *ö* und *ü*, damit man etwas gröfsere Zahlen erhält. Die eingezogenen und abgebrochenen Zeilen bleiben aber unberücksichtigt, weil sie kürzer sind als die übrigen, und daher auch eine geringere Anzahl der *e* in ihnen zu vermuthen ist. Man findet alsdann 110 ganze Zeilen und darin wiederholt sich der Buchstabe *e* 886 mal, durchschnittlich kommt er sonach in jeder Zeile 8,06mal oder sehr nahe 8 mal vor.

Die Abweichungen von dieser Anzahl sind

26	mal	gleich	0
43	-	-	1
24	-	-	2
11	-	-	3
4	-	-	4
kein	-	-	5
2	-	-	6

Die Summe der Quadrate dieser Abweichungen beträgt 374, das mittlere Fehlerquadrat ist also $3{,}40 = qq$, folglich $q = 1{,}844$ und die wahrscheinliche Abweichung

$$w = 0{,}6745 \,.\, q$$
$$= 1{,}244$$

Die Tabelle B im Anhange ist für den wahrscheinlichen Fehler $= 1$ berechnet, man mufs also die Grenzwerthe der x, die man sucht, durch 1,244 dividiren. Die Abweichungen von der normalen Anzahl sind immer ganze Zahlen, daher fallen diese Grenzwerthe auf die Mitte zwischen je zwei Zahlen. Man findet nun für

$$x = \frac{0{,}5}{1{,}244} = 0{,}402 \qquad \int y\,dx = 0{,}223$$
$$x = \frac{1{,}5}{1{,}244} = 1{,}206 \qquad = 0{,}584$$
$$x = \frac{2{,}5}{1{,}244} = 2{,}010 \qquad = 0{,}825$$
$$x = \frac{3{,}5}{1{,}244} = 2{,}814 \qquad = 0{,}942$$
$$x = \frac{4{,}5}{1{,}244} = 3{,}617 \qquad = 0{,}985$$
$$x = \frac{5{,}5}{1{,}244} = 4{,}421 \qquad = 0{,}997$$

Der erste Werth bezeichnet die Verhältnifs-Zahl derjenigen Fehler, die kleiner als 0,5 also gleich Null sind, der zweite derjenigen, die kleiner als 1,5 also kleiner als 2 sind. Zieht man den ersten von dem zweiten ab, so findet man die relative Anzahl der Fehler von der Gröfse 1, und diese mit der Anzahl der Beobachtungen also der Zeilen oder mit 110 multiplicirt, ergiebt die absolute Zahl dieser Abweichungen. In derselben Art verfährt man mit den übrigen Werthen, und man erhält schliefslich die nachstehnde Anzahl der Abweichungen von verschiedner Gröfse.

	Anzahl derselben berechnet	wirklich
Abweichung = 0	24,5	26
= 1	39,7	43
= 2	26,5	24
= 3	12,9	11
= 4	4,8	4
= 5	1,3	0
über 5	0,3	2

Die Uebereinstimmung ist auch hier der geringen Anzahl von Abzählungen unerachtet, durchaus befriedigend.

§ 30.

In gleicher Weise, wie die Schärfe der einzelnen Beobachtungen durch den wahrscheinlichen Fehler derselben bemessen wird, lassen sich aus diesen auch die wahrscheinlichen Fehler der daraus berechneten Constanten herleiten. Hierdurch allein gelangt man aber zu einem richtigen Urtheil über die Sicherheit der gewonnenen Resultate. Wenn man zum Beispiel nach der Methode der kleinsten Quadrate den Werth der Constante r gleich 0,5 gefunden hätte, ihr wahrscheinlicher Fehler aber 0,7 wäre, so dürfte man noch nicht 1 gegen 1 wetten, dafs die zum Grunde gelegte Gleichung wirklich das Glied ar enthält, es wäre sogar wahrscheinlicher, dafs nur in Folge der zufälligen Beobachtungs-Fehler ein bestimmter Werth für r sich herausstellte, als dafs das Glied ar in der Erscheinung begründet ist.

Die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Constanten r, s, t, . . . für welche die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum ist, können leicht in der Art sich herausstellen, dafs diese Summe sich wenig ändert, wenn die Constanten andre Werthe annehmen, indem einige sie vergröfsern, andre sie verkleinern. In diesem Fall wären die gefundnen Werthe, wenn auch die wahrscheinlichsten, dennoch wenig sicher. Hierüber gewinnt man aber ein bestimmtes Urtheil, wenn man die wahrscheinlichen Fehler der berechneten Constanten kennt.

Die betreffende Untersuchung mag auf die Fälle beschränkt bleiben, worin nicht mehr als drei unbekannte Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet sind. Das Verfahren zur Ermittelung der wahrscheinlichen Fehler derselben bleibt sich aber ganz gleich, wenn ihre Anzahl eine gröfsere ist, es wird hier nur davon abgesehn, weil die Ausdrücke, zu denen man dabei gelangt, sich viel complicirter darstellen. Dazu kommt auch noch, dafs in den Ingenieur-Wissenschaften wohl nicht leicht eine Aufgabe vorliegen dürfte, welche die Berechnung von vier oder von noch mehr Constanten forderte.

Die gefundnen wahrscheinlichsten Werthe von r, s und t sind nicht die richtigen, sondern mit den Fehlern ϱ, σ und τ

behaftet, daher die wahren Werthe $r+\varrho$, $s+\sigma$ und $t+\tau$. Der wirkliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung, der mit x' bezeichnet wird, ist daher

$$\begin{aligned}
x' &= -k+a(r+\varrho)+b(s+\sigma)+c(t+\tau)\\
&= (-k+ar+bs+ct)+(a\varrho+b\sigma+c\tau)\\
x'x' &= (-k+ar+bs+ct)^2\\
&\quad+2(-ak+aa.r+ab.s+ac.t)\,\varrho\\
&\quad+2(-bk+ab.r+bb.s+bc.t)\,\sigma\\
&\quad+2(-ck+ac.r+bc.s+cc.t)\,\tau\\
&\quad+(aa.\varrho+ab.\sigma+ac.\tau)\,\varrho\\
&\quad+(ab.\varrho+bb.\sigma+bc.\tau)\,\sigma\\
&\quad+(ac.\varrho+bc.\sigma+cc.\tau)\,\tau
\end{aligned}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist nichts Andres, als das Quadrat der Differenz zwischen der beobachteten Gröfse k und dem Werthe derselben, der sich durch Einführung der wahrscheinlichsten Werthe r, s, t in die zum Grunde gelegte Bedingungs-Gleichung ergab. Diese Differenz wurde früher mit x bezeichnet.

Zur nähern Untersuchung der folgenden Glieder berechne man die Summen, die sich darstellen, indem die entsprechenden Ausdrücke für alle einzelnen Beobachtungen entwickelt werden. Man erhält alsdann unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$\begin{aligned}
[x'x'] = [xx] &+2(-[ak]+[aa]\,r+[ab]\,s+[ac]\,t)\,\varrho\\
&+2(-[bk]+[ab]\,r+[bb]\,s+[bc]\,t)\,\sigma\\
&+2(-[ck]+[ac]\,r+[bc]\,s+[cc]\,t)\,\tau\\
&+\left([aa]+[ab]\frac{\sigma}{\varrho}+[ac]\frac{\tau}{\varrho}\right)\varrho\varrho\\
&+\left([ab]\frac{\varrho}{\sigma}+[bb]+[bc]\frac{\tau}{\sigma}\right)\sigma\sigma\\
&+\left([ac]\frac{\varrho}{\tau}+[bc]\frac{\sigma}{\tau}+[cc]\right)\tau\tau
\end{aligned}$$

Das zweite, dritte und vierte Glied dieses Ausdrucks enthält in der Parenthese genau dieselben Werthe, die zur Darstellung der kleinsten Fehlerquadrate gleich Null gesetzt wurden. Diese Glieder fallen also fort, und die drei letzten vereinfachen sich, wenn man die Bezeichnungen R, S und T einführt, nämlich

$$R = [aa] + [ab]\frac{\sigma}{\varrho} + [ac]\frac{\tau}{\varrho}$$

$$S = [ab]\frac{\varrho}{\sigma} + [bb] + [bc]\frac{\tau}{\sigma}$$

$$T = [ac]\frac{\varrho}{\tau} + [bc]\frac{\sigma}{\tau} + [cc]$$

Die vorstehnde Gleichung wird daher

$$[x'x'] = [xx] + R\,.\,\varrho\varrho + S\,.\,\sigma\sigma + T\,.\,\tau\tau$$

Um den wahrscheinlichen Fehler der ersten Constanten r zu finden, verändere man den Werth derselben um ϱ, und untersuche, welche Aenderungen die andern Constanten dadurch erfahren, oder wie grofs σ und τ sein müssen, damit die Summe der übrig bleibenden Fehler-Quadrate wieder ein Minimum wird.

Der einzelne Beobachtungsfehler ist

$$x' = -k + a(r + \varrho) + b(s + \sigma) + c(t + \tau)$$

Nachdem man für ϱ einen bestimmten Werth angenommen hat, sind nur noch die beiden Aenderungen σ und τ unbekannt, und wenn man die Bezeichnung einführt

$$-K = -k + a(r + \varrho) + bs + ct$$

so folgt

$$x' = -K + b\sigma + c\tau$$

Dieser Ausdruck, der nur noch die beiden Unbekannten σ und τ enthält, wird wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt. Die Bedingungs-Gleichungen dafür sind

$$0 = -[Kb] + [bb]\sigma + [bc]\tau$$
$$0 = -[Kc] + [bc]\sigma + [cc]\tau$$

Man hat aber

$$-[Kb] = -[kb] + [ab]r + [bb]s + [bc]t + [ab]\varrho$$

und da die Summe der vier ersten Glieder gleich Null war, so ist

$$-[Kb] = [ab]\varrho$$

und eben so findet man

$$-[Kc] = [ac]\varrho$$

Jene Bedingungs-Gleichungen verwandeln sich daher in

$$0 = [ab]\varrho + [bb]\sigma + [bc]\tau = S\sigma$$
$$0 = [ac]\varrho + [bc]\sigma + [cc]\tau = T\tau$$

Man sucht die Verbesserungen σ und τ, die nicht gleich Null sind. Hieraus ergiebt sich, dafs in dieser Untersuchung, die sich auf die Ermittelung des Werthes von ϱ bezieht, sowohl S wie T gleich Null sein müssen.

Aus den vorstehnden beiden Bedingungs-Gleichungen findet man

$$\frac{\sigma}{\varrho}=\frac{[ac]\,[bc]-[ab]\,[cc]}{[bb]\,[cc]-[bc]\,[bc]}$$

und

$$\frac{\tau}{\varrho}=\frac{[ab]\,[bc]-[ac]\,[bb]}{[bb]\,[cc]-[bc]\,[bc]}$$

Führt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für R ein, so erhält man

$$R=\frac{[aa]\,[bb]\,[cc]+2[ab]\,[ac]\,[bc]-[aa]\,[bc]\,[bc]-[bb]\,[ac]\,[ac]-[cc]\,[ab]\,[ab]}{[bb]\,[cc]-[bc]\,[bc]}$$

R ist sonach allein von den bekannten Gröfsen a, b und c abhängig, und in dem Ausdruck für die Summe der Fehlerquadrate kommt nur noch die Unbekannte ϱ vor, nämlich

$$[x'x']=[xx]+R\,.\,\varrho\varrho$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der verschiedenen Fehler x' ist aber gleich dem Product aus den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten y', und wenn man dieses Product mit Y bezeichnet, so hat man

$$Y=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}}\,e^{-\frac{[x'x']}{\nu}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}}\,e^{-\frac{[xx]}{\nu}}\,.\,e^{-\frac{R}{\nu}\varrho\varrho}$$

Der erste Exponent von e bezieht sich auf die Abweichungen der Beobachtungen von denjenigen Werthen, die unter Zugrundelegung der wahrscheinlichsten Werthe von r, s und t berechnet waren. Dieser Exponent ist sonach bekannt, und setzt man

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\nu}}\,e^{-\frac{[xx]}{\nu}}=F$$

so ist

$$Y=F\,.\,e^{-\frac{R}{\nu}\varrho\varrho}$$

Die Wurzel des mittlern Fehlerquadrats der B e o b a c h t u n g e n wurde mit q bezeichnet. In gleicher Weise sei

$q(r)$ die Wurzel aus dem mittlern Fehlerquadrat der Constante r. Die Summe aller Fehlerquadrate erhält man, wenn man das Quadrat jedes möglichen ϱ mit der Wahrscheinlichkeit seines Vorkommens multiplicirt, und diese Producte summirt.

Diese Summe ist

$$\int Y \varrho^2 d\varrho$$

die Anzahl der Fehlerquadrate ist aber gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihres Vorkommens, oder

$$\int Y d\varrho$$

Beide Integrale sind von $\varrho = -\infty$ bis $\varrho = +\infty$ zu nehmen, daher das mittlere Fehlerquadrat

$$q(r)\,q(r) = \frac{\int Y \varrho^2 d\varrho}{\int Y d\varrho}$$

wobei der constante Factor F aus dem Zähler und Nenner fortfällt. Indem man nunmehr für Y wieder dessen Werth einführt, so ergiebt sich

$$q(r) \cdot q(r) = \frac{\int e^{-\frac{R}{v}\varrho\varrho} \cdot \varrho^2 d\varrho}{\int e^{-\frac{R}{v}\varrho\varrho} d\varrho}$$

Setzt man aber zur einfachern Bezeichnung

$$\frac{R}{v}\varrho\varrho = zz$$

so findet man

$$q(r) \cdot q(r) = \frac{v}{R} \frac{\int e^{-zz} \cdot z^2 dz}{\int e^{-zz} \cdot dz}$$

die partielle Integration ergiebt

$$\int e^{-zz} \cdot z^2 dz = -\tfrac{1}{2} e^{-zz} \cdot z + \tfrac{1}{2}\int e^{-zz} \cdot dz$$

Das erste Glied ist wieder gleich Null, wenn man e^{-zz} in jene Reihe auflöst und den Werth derselben innerhalb der Grenzen von z oder $\varrho = 0$ bis z oder $\varrho = + \infty$ sucht. Das zweite Glied aber ist halb so grofs, als der Nenner. Man erhält daher

$$q(r) \cdot q(r) = \frac{\nu}{2R}$$

folglich

$$q(r) = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot q$$

wo q, wie oben die Wurzel des mittlern Quadrats der Beobachtungs-Fehler bezeichnet.

Eben so kann man auch $w(r)$ oder den wahrscheinlichen Fehler von r finden. Derselbe ist nämlich demjenigen ϱ gleich, welches unter Beibehaltung der vorstehnden Bezeichnung der Bedingung entspricht, dafs

$$\int_0^\varrho y d\varrho = \int_\varrho^\infty y d\varrho$$

Setzt man nunmehr

$$\sqrt{R} \cdot \varrho = z$$

so verwandelt sich das Integral in

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \int e^{-\frac{zz}{\nu}} \cdot dz$$

Dieser Ausdruck entspricht wieder genau demjenigen, welcher zur Bestimmung des wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehlers diente. Die Bedingung wird daher auch hier erfüllt, sobald man

$$z = 0{,}4769364 \cdot \sqrt{\nu}$$

oder

$$\varrho = 0{,}4769364 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{R}}$$

setzt. Der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler w war aber gleich $0{,}4769364 \cdot \sqrt{n}$, daher ist

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{R}} w$$

Dieser wahrscheinliche Fehler der Constante r ist zugleich der Werth der früher eingeführten unbekannten Verbesserung ϱ, man hat also auch

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{R}} w$$

Was die wahrscheinlichen Fehler der andern Constanten s und t betrifft, so findet man dieselben in gleicher Weise, wobei aber in Beziehung auf $w(s)$ sowohl R wie T und in Beziehung auf $w(t)$ wieder R und $S = 0$ zu setzen sind. Man hat also beispielsweise für $w(s)$ die drei Bedingungs-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= [aa]\,\varrho + [ab]\,\sigma + [ac]\,\tau \\ S\,\sigma &= [ab]\,\varrho + [bb]\,\sigma + [bc]\,\tau \\ 0 &= [ac]\,\varrho + [bc]\,\sigma + [cc]\,\tau \end{aligned}$$

Aehnlich gestalten sich die Ausdrücke für $w(t)$. Man kann die wahrscheinlichen Fehler aber auch unmittelbar aus den vorstehnden Ausdrücken ableiten, indem man in Bezug auf s die Werthe von a und b und in Bezug auf t die Werthe von a und c gegen einander vertauscht.

Man bemerkt sogleich, dafs der Zähler von R in seinen fünf Gliedern aus den drei gegebnen Gröfsen a, b und c sich gleichmäfsig zusammensetzt, woher er auch in den Ausdrücken für S und T unverändert bleibt.

Der Nenner von R war

$$[bb]\,[cc] - [bc]\,[bc]$$

derselbe wird daher

$$\text{für } S \,..\, [aa]\,[cc] - [ac]\,[ac]$$

und

$$\text{für } T \,..\, [aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]$$

In gleicher Weise, wie der wahrscheinliche Fehler der Constante r

$$w\,(r) = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot w$$

war, so findet man auch

$$w\,(s) = \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot w$$

und

$$w\,(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot w$$

w bedeutet aber den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler, den man nach § 26 aus der Summe der Fehlerquadrate ermittelt.

Die vorstehnde Untersuchung bezog sich auf den Fall, dafs drei constante Factoren gesucht wurden. Giebt es deren nur zwei, so wird man von der Gleichung

$$k = a\,r + b\,s$$

ausgehn, und alle Glieder, die in den so eben entwickelten Formeln c als Factor enthalten, fallen fort. Um den wahrscheinlichen Fehler von r zu finden, hat man daher die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$R\varrho = [aa]\,\varrho + [ab]\,\sigma$$

und

$$0 = [ab]\,\varrho + [bb]\,\sigma$$

also

$$R = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[bb]}$$

für $w(s)$ dagegen

$$0 = [aa]\,\varrho + [ab]\,\sigma$$

und

$$S\sigma = [ab]\,\varrho + [bb]\,\sigma$$

folglich

$$S = \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{[aa]}$$

und schliefslich

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{R}}\,w$$

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{S}}\,w$$

Wenn endlich nur eine Constante oder Unbekannte vorkommt, also auch $b = 0$ wird, oder das zum Grunde gelegte Gesetz durch

$$k = a \,.\, r$$

ausgedrückt wird, so hat man nur die einzige Bedingungs-Gleichung

$$R = [aa]$$

und alsdann ist der wahrscheinliche Fehler von r

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{[aa]}} \,.\, w$$

Wenn aber $a = 1$, also eine einfache Messung m mal wiederholt ist, so ergiebt sich

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{m}}\,w$$

Aehnliche Untersuchungen über die Sicherheit der nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundnen Constanten wurden zuerst von Gaufs in den oben (§ 16) angeführten Schriften bekannt gemacht, doch bestimmte derselbe die Wahrscheinlichkeit der gefundnen Werthe in andrer Art, indem er ihnen vergleichungsweise zur Wahrscheinlichkeit der einzelnen Beobachtungen gewisse Gewichte beilegte. Die Ermittelung der wahrscheinlichen Fehler der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten constanten Factoren rührt aber von Bessel her.

§ 31.

Die vorstehend entwickelten Ausdrücke setzen voraus, dafs man die wahren Werthe der gemefsnen Gröfsen k kennt, deren Abweichungen von den Beobachtungen die Fehler darstellen. Wirklich kennt man aber nur die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten r, s, t ... und aus diesen kann man daher nur die wahrscheinlichsten, keineswegs aber die wahren Werthe von k ableiten und mit den Beobachtungen vergleichen. Nachsthende sehr einfache Betrachtung zeigt aber, wie man die Summe der Quadrate der wirklichen Beobachtungsfehler findet.

Im vorigen Paragraph wurde der Ausdruck

$$[x'x'] = [xx] + R\varrho\varrho + S\sigma\sigma + T\tau\tau$$

dargestellt, worin x' die wahren Fehler, x dagegen die Abweichungen der Beobachtungen von den nach der Methode der kleinsten Quadrate hergeleiteten wahrscheinlichsten Werthen von k bezeichnen. Es wurde daselbst auch nachgewiesen, dafs

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot q$$

und eben so

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{S}} q$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{T}} q$$

Jedes der drei letzten Glieder im Ausdruck für $[x'x']$ verwandelt sich daher in qq, und wenn μ Constanten vorkommen, hat man

$$[x'x'] = [xx] + \mu \cdot qq$$

$[x'x']$ ist aber die Summe der wirklichen Fehlerquadrate, also gleich dem Product aus dem mittlern Fehlerquadrat in die Anzahl der Beobachtungen, die gleich m ist, also

$$m \cdot qq = [xx] + \mu \cdot qq$$

folglich

$$qq = \frac{[xx]}{m - \mu}$$

und hieraus der wahrscheinliche Beobachtungsfehler

$$w = 0{,}674490 \sqrt{\frac{[xx]}{m - \mu}}$$

$[xx]$ ist aber die Summe der Quadrate der Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen k, also eine bekannte Gröfse.

Diese sehr wichtige Vervollständigung der Untersuchung über die Beobachtungsfehler und über die Sicherheit der daraus gezogenen Resultate machte Bessel in der Abhandlung über den Olbersschen Kometen bekannt *).

§ 32.

Da für manche Leser eine Zusammenstellung der analytischen Ausdrücke erwünscht sein dürfte, nach welchen man sowohl die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten, wie auch die wahrscheinlichen Fehler derselben und der Beobachtungen unmittelbar berechnen kann, so lasse ich eine solche nachstehend folgen.

Die beobachtete Erscheinung oder das Resultat der Messung ist von einem oder mehreren Umständen abhängig, über deren Einwirkung auf Erstere man bestimmte Voraussetzungen macht. Unbekannt ist alsdann nur das Maafs dieser Einwirkung und dieses soll eben durch die Beobachtung festgestellt werden. Sonach ist die beobachtete Gröfse k gleich einem oder mehreren Gliedern, von denen jedes das Product der Wirksamkeit einer von diesen Ursachen a, b, c . . . mit dem noch unbekannten constanten Factor r, s, t . . . enthält. Man geht sonach jedesmal von dem Ausdruck

$$k = ar + bs + ct + \ldots$$

aus. Sollte rechts vom Gleichheitszeichen noch ein Glied einzuführen sein, das nur aus einer bekannten Gröfse besteht, so ist dieses sogleich mit k zu verbinden, woher die Form sich dadurch nicht

*) Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1812 und 1813.

ändert. In welcher Weise man aber die Unbekannten einführen mufs, wenn sie an sich nicht als einfache Factoren auftreten, ist § 22 gezeigt worden.

Bei Anwendung der in Rede stehnden Rechnungsart handelt es sich immer um den Fall, dafs die Anzahl der Beobachtungen gröfser, als die der Unbekannten ist und man erhält die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, wenn man sie aus den nachstehnden Bedingungs-Gleichungen berechnet.

$$[ka] = [aa]\,r + [ab]\,s + [ac]\,t + \ldots.$$
$$[kb] = [ab]\,r + [bb]\,s + [bc]\,t + \ldots.$$
$$[kc] = [ac]\,r + [bc]\,s + [cc]\,t + \ldots.$$

u. s. w.

Die Anzahl dieser Gleichungen ist jedesmal eben so grofs, wie die der gesuchten Factoren r, s, $t\ldots$ man kann also die Werthe derselben hiernach berechnen. Die Parenthesen [ ] bezeichnen aber die Summen der gleichnamigen Producte, die aus allen einzelnen Beobachtungen sich ergeben, z. B.

$$[ka] = ka + k'a' + k''a'' + \ldots$$

Im Allgemeinen mufs sogleich darauf aufmerksam gemacht werden, dafs wenn eine der bekannten Gröfsen a, b, $c\ldots$ also etwa a gleich 1 wäre, dafs alsdann $[aa] = m$ oder der Anzahl der Beobachtungen gleich wird. Dabei verwandelt sich auch $[ak]$ in $[k] = k + k' + k'' + \ldots$ und dasselbe geschieht bei den andern Summen, die a als Factor enthalten. Sollten aber die Gewichte der einzelnen Beobachtungen so verschieden sein, dafs man diese nicht gleichmäfsig behandeln darf, wovon § 23 die Rede war, so mufs man die abweichenden Beobachtungen beispielsweise zweimal, oder im Allgemeinen mehrfach, wie ihr gröfseres oder geringeres Gewicht dieses verlangt, in Rechnung stellen. Dabei kann es augenscheinlich leicht geschehn, dafs die Anzahl der Beobachtungen oder m sich nicht als ganze Zahl darstellt.

Der einfachste Fall ist der, dafs **nur ein unbekannter Factor** r vorkommt, oder dafs man von der Gleichung

$$k = ar$$

ausgeht. Man findet alsdann den wahrscheinlichsten Werth von r

$$r = \frac{[ak]}{[aa]}$$

und wenn hiernach aus den gemefsnen a die betreffenden Werthe von k berechnet und mit den wirklich beobachteten verglichen werden, so stellen sich dabei gewisse Differenzen x, x', x'' ... heraus, die man zur zweiten Potenz erhebt und summirt. Der wahrscheinliche Beobachtungsfehler ist alsdann

$$w = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[x\,x]}{m-1}}$$

indem m die Anzahl der Beobachtungen ausdrückt. Der wahrscheinliche Fehler der berechneten Constante r ist aber

$$w(r) = w \sqrt{\frac{1}{[a\,a]}}$$

für den Fall, dafs $a = 1$ wäre, würde man erhalten

$$r = \frac{[k]}{m}$$

$$w = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[x\,x]}{m-1}}$$

und $$w(r) = w \sqrt{\frac{1}{m}}$$

Wenn zwei unbekannte Constanten vorkommen, also

$$k = a\,r + b\,s$$

ist, so gelten die zwei Bedingungsgleichungen

$$[k\,a] = [a\,a]\,r + [a\,b]\,s$$

und $$[k\,b] = [a\,b]\,r + [b\,b]\,s$$

Es ergeben sich daraus die wahrscheinlichsten Werthe von r und s

$$r = \frac{[k\,a]\,[b\,b] - [k\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]}$$

und $$s = \frac{[k\,b]\,[a\,a] - [k\,a]\,[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]}$$

ferner ist der wahrscheinliche Beobachtungsfehler, wenn x wieder die Differenz zwischen den hiernach berechneten und den beobachteten k bezeichnet,

$$w = 0{,}67449 \sqrt{\frac{[x\,x]}{m-2}}$$

und die wahrscheinlichen Fehler von r und s findet man unter Zugrundelegung der § 29 ermittelten Werthe von R und S

$$w(r) = w\sqrt{\frac{[bb]}{[aa][bb]-[ab][ab]}}$$

und

$$w(s) = w\sqrt{\frac{[aa]}{[aa][bb]-[ab][ab]}}$$

Um diese Rechnungen möglichst bequem auszuführen, schreibe man die vorher ermittelten Summen der Producte

$$[ka]\ldots.[bb]\ldots[aa]\ldots.[kb]\ldots.[ab]$$

unter einander, und die Logarithmen derselben daneben. Man hat alsdann den Vortheil, dafs jedesmal zwei unter einander stehende Logarithmen zu summiren sind. Der Nenner $[aa]\ [bb] - [ab]\ [ab]$ wiederholt sich aber vier mal.

Wenn $a = 1$ ist, hat man

$$r = \frac{[k][bb]-[kb][b]}{m.[bb]-[b][b]}$$

$$s = \frac{m.[kb]-[k][b]}{m.[bb]-[b][b]}$$

$$w = 0{,}67449\sqrt{\frac{[xx]}{m-2}}$$

$$w(r) = w\sqrt{\frac{[bb]}{m[bb]-[b][b]}}$$

$$w(s) = w\sqrt{\frac{m}{m[bb]-[b][b]}}$$

Sobald drei constante Factoren gesucht werden, man also von der Gleichung

$$k = ar + bs + ct$$

ausgeht, hat man die Bedingungs-Gleichungen

$$[ka] = [aa]r + [ab]s + [ac]t$$
$$[kb] = [ab]r + [bb]s + [bc]t$$
$$[kc] = [ac]r + [bc]s + [cc]t$$

Die Unbekannten lassen nach dem (§ 21) angegebenen Verfahren sich leichter finden, will man sie aber nach bestimmten analytischen Formeln berechnen, so empfiehlt es sich, in diese gewisse einfache Bezeichnungen für solche Combinationen einzuführen, die sich mehrfach wiederholen. Hiernach sei

$$\begin{aligned}
\alpha &= [a\,a]\,[b\,c] - [a\,b]\,[a\,c] \\
\beta &= [b\,b]\,[a\,c] - [a\,b]\,[b\,c] \\
\gamma &= [c\,c]\,[a\,b] - [a\,c]\,[b\,c] \\
\alpha' &= [b\,b]\,[c\,c] - [b\,c]\,[b\,c] \\
\beta' &= [a\,a]\,[c\,c] - [a\,c]\,[a\,c] \\
\gamma' &= [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]
\end{aligned}$$

Demnächst sei noch

$$M = [aa][bb][cc] + 2[ab][ac][bc] - [aa][bc][bc] - [bb][ac][ac] - [cc][ab][ab]$$

oder wenn man die vorstehnden Bezeichnungen einführt,

$$M = \frac{\alpha\alpha' + \beta\gamma}{[b\,c]} = \frac{\beta\beta' + \alpha\gamma}{[a\,c]} = \frac{\gamma\gamma' + \alpha\beta}{[a\,b]}$$

Stimmen diese letzten Werthe unter sich überein, so ergiebt sich hieraus die Richtigkeit der vorhergehnden Rechnung.

Die gesuchten Unbekannten sind alsdann

$$r = \frac{1}{M}\left([k\,a]\,\alpha' - [k\,b]\,\gamma - [k\,c]\,\beta\right)$$

$$s = \frac{1}{M}\left(-[k\,a]\,\gamma + [k\,b]\,\beta' - [k\,c]\,\alpha\right)$$

$$t = \frac{1}{M}\left(-[k\,a]\,\beta - [k\,b]\,\alpha + [k\,c]\,\gamma'\right.$$

Von der Richtigkeit dieser Werthe überzeugt man sich, wenn man sie in jene drei Bedingungs-Gleichungen für $[k\,a]$, $[k\,b]$ und $[k\,c]$ einführt und mit den betreffenden Factoren multiplicirt. Werden alsdann die Glieder nach den Factoren $[k\,a]$, $[k\,b]$ und $[k\,c]$ geordnet, so heben sie sich gröfstentheils auf, und die Gleichungen werden identisch: $[k\,a] = [k\,a]$, ...

Der wahrscheinliche Beobachtungsfehler ist ferner

$$w = 0{,}67449\sqrt{\frac{[x\,x]}{m-3}}$$

und die wahrscheinlichen Fehler der drei Constanten stellen sich in sofern sehr einfach dar, als die § 30 mit R, S und T bezeichneten Ausdrücke nichts andres sind, als M dividirt durch α',

β' und γ'. Man hat sonach die wahrscheinlichen Fehler der drei Constanten

$$w(r) = w\sqrt{\frac{\alpha'}{M}}$$

$$w(s) = w\sqrt{\frac{\beta'}{M}}$$

$$w(t) = w\sqrt{\frac{\gamma'}{M}}$$

Im Folgenden wird die Auflösung mehrerer Aufgaben mitgetheilt werden, in welchen die wahrscheinlichsten Werthe von drei Unbekannten sowie auch die wahrscheinlichen Fehler derselben berechnet sind.

§ 33.

Häufig wiederholt sich die Aufgabe, den wahrscheinlichen Fehler einer Function verschiedner Gröfsen zu ermitteln, deren wahrscheinliche Fehler man kennt. Sind diese Gröfsen von einander, oder sämmtlich von einer entfernteren abhängig, so lassen sie sich auf eine einzige zurückführen, in vielen Fällen sind sie aber unabhängig von einander und hiervon soll allein die Rede sein.

p sei eine Function von $r, s, t \ldots$ Die wahrscheinlichen Fehler von diesen seien bekannt, derjenige von p werde gesucht

$$p = f(r, s, t \ldots)$$

Insofern $r, s, t \ldots$ ganz unabhängig von einander sind, hat man

$$dp = \varphi \cdot dr + \chi \cdot ds + \psi \cdot dt + \ldots$$

wo φ, χ und ψ die betreffenden Differenzial-Quotienten bedeuten. Indem r um dr wächst, ändert sich p um $\varphi\, dr$, und die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler von dieser Gröfse eintritt, ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\nu}} e^{-\frac{\varphi dr \cdot \varphi dr}{\nu}}$$

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers χds, den die Aenderung der zweiten Unbekannten veranlafst,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\nu}} e^{-\frac{\chi ds \cdot \chi ds}{\nu}}$$

und so weiter. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Aenderungen in den Werthen von $r, s, t\ldots$ also auch für die Aenderung von p in $p + dp$ ist daher

$$y \cdot y' \cdot y'' \ldots = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\nu}} e^{-\frac{\varphi dr \cdot \varphi dr + \chi ds \cdot \chi ds + \psi dt \cdot \psi dt + \ldots}{\nu}}$$

Unter der Voraussetzung, dafs die wahrscheinlichen Fehler von $r, s, t\ldots$ nur klein sind, kann man dieselben statt $dr, ds, dt\ldots$ einführen. Aus vorstehndem Ausdruck ergiebt sich alsdann, welche Aenderung dadurch im Werthe von p veranlafst wird, oder wie grofs der entsprechende, also der wahrscheinliche Fehler von p ist. Unter Beibehaltung der frühren Bezeichnung hat man demnach

$$w(p) = \sqrt{\varphi^2 \cdot w(r)^2 + \chi^2 \cdot w(s)^2 + \psi^2 \cdot w(t)^2 + \ldots}$$

Um ein Beispiel der Anwendung dieses Satzes zu geben, mag untersucht werden, wie grofs der wahrscheinliche Fehler eines Productes ist, wenn man die wahrscheinlichen Fehler der Factoren kennt.

$$p = r \cdot s$$

$$dp = s\,dr + r\,ds$$

also $$\varphi = s \text{ und } \chi = r$$

folglich $$w(rs) = \sqrt{s^2 \cdot w(r)^2 + r^2 \cdot w(s)^2}$$

Gesetzt dafs

$$r = 7{,}22 \quad \text{und} \quad w(r) = 0{,}62$$

$$s = 5{,}47 \quad \text{und} \quad w(s) = 0{,}35$$

so würde der wahrscheinliche Fehler des Productes

$$w(p) = 4{,}23$$

sein, während der wahrscheinlichste Werth von p oder rs gleich 39,493 ist.

Dieses Beispiel beantwortet die oft angeregte, und nicht selten unrichtig gelöste Frage, wie grofs der wahrscheinliche Fehler einer Fläche ist, wenn man die wahrscheinlichen Fehler der lineären Messungen kennt. Wäre etwa ein Quadrat gemessen, dessen Seiten $= r$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $= \varrho$ behaftet sind, so würde hiernach der wahrscheinliche Fehler der Fläche $= \varrho\sqrt{2}$ sein.

Ist einer der Factoren, zum Beispiel r, eine bestimmt gegebene Gröfse, also etwa ein Zahlen-Coefficient, so ist $w(r)$ gleich 0, folglich

$$w(rs) = r \cdot w(s)$$

Kennt man den wahrscheinlichen Fehler des Productes und zugleich den des einen Factors, so ergiebt sich der des andern

$$w(r) = \frac{1}{s} \sqrt{w(rs)^2 - r^2 \cdot w(s)^2}$$

Es darf kaum erwähnt werden, dafs in den vorstehnden Ausdrücken der Exponent 2 sich nicht auf die in Parenthese eingeschlofsenen Gröfsen, sondern auf die wahrscheinlichen Fehler derselben bezieht.

Man kann ferner durch den vorstehnden Ausdruck den wahrscheinlichen Fehler einer Summe von Gliedern finden, deren wahrscheinliche Fehler man kennt.

$$p = r + s + t + \ldots$$

also

$$w(p) = \sqrt{w(r)^2 + w(s)^2 + w(t)^2 + \ldots}$$

Dieses führt zur Bestimmung der Sicherheit einer Längenmessung, die sich aus einzelnen und zwar gleich grofsen partiellen Messungen zusammensetzt. Wenn beispielsweise die 5 Ruthen lange Kette, m mal ausgespannt, also eine Länge von $5m$ Ruthen gemessen ist, und der wahrscheinliche Fehler jedes Kettenschlages gleich w ist, so ist der wahrscheinliche Fehler in der Messung der ganzen Linie übereinstimmend mit § 30 gleich

$$w \sqrt{m}$$

also keineswegs der Länge der Linie proportional.

Man kann auch umgekehrt aus den Abweichungen in der wiederholten Messung der ganzen Linie auf den wahrscheinlichen Fehler des einzelnen Kettenschlages oder der zum Grunde liegenden Längen-Einheit schliefsen.

Man habe beispielsweise zehn mal nach einander dieselbe Linie gemessen und die gefundnen Maafse bis auf ein Hunderttheil der Ruthe abgelesen

gemeſsne Länge	Abweichung vom Mittel	Quadrat
92,65 Ruthen	+ 0,14	0,020
92,47	— 0,04	0,002
92,55	+ 0,04	0,002
92,31	— 0,20	0,040
92,43	— 0,08	0,006
93,01	+ 0,50	0,250
92,52	+ 0,01	0,000
92,49	— 0,02	0,000
92,29	— 0,22	0,048
92,38	— 0,13	0,017
Mittel 92,51		Summe 0,385

Der wahrscheinlichste Werth ist das arithmetische Mittel, also in diesem Beispiel 92,51 Ruthen, und die Summe der Quadrate der Abweichungen von demselben oder

$$[xx] = 0{,}385$$

dieselbe muſs (nach § 31) durch die Anzahl der Messungen weniger der Anzahl der Unbekannten, also durch $10 - 1 = 9$ dividirt werden, um das mittlere Fehlerquadrat darzustellen. Folglich

$$qq = 0{,}0428$$

oder
$$q = 0{,}207$$

und
$$w = 0{,}139$$

Dieses ist der wahrscheinliche Fehler der Messung der ganzen Linie, die 92,51 Ruthen lang ist. Der wahrscheinliche Fehler für die Länge einer Ruthe wird nach der letzten Darstellung gefunden, wenn man jenen durch $\sqrt{92{,}51} = 9{,}62$ dividirt. Er ist daher 0,0145 und für eine Kettenlänge oder 5 Ruthen gleich $0{,}0145\sqrt{5} = 0{,}0324$ Ruthen.

Häufig kann man den wahrscheinlichsten Werth einer Unbekannten nicht unmittelbar, vielmehr nur den einer Function derselben berechnen. Für diese findet man nach Vorstehndem auch leicht den wahrscheinlichen Fehler und es entsteht die Frage, wie groſs ein solcher für die Unbekannte selbst ist. Zur Beantwortung dieser Frage braucht man nur den wahrscheinlichen Fehler der Function zu dieser zu addiren und aus der Summe beider die Unbekannte aufs Neue zu berechnen. Der Unterschied gegen ihren frühern Werth ist alsdann ihr wahrscheinlicher Fehler.

Beispielsweise habe man gefunden als wahrscheinlichsten Werth

$$\log m = 1{,}4784$$

hieraus ergiebt sich

$$m = 14{,}055$$

der wahrscheinliche Fehler jenes $\log m$ sei aber 0,0175. Addirt man diesen zum Logarithmus, so verwandelt sich letzterer in 1,4959 und m wird alsdann 14,112. Der wahrscheinliche Fehler für m ist daher

$$14{,}112 - 14{,}055 = 0{,}057$$

Hätte dagegen die Rechnung als den wahrscheinlichsten Werth ergeben

$$\frac{1}{r} = m$$

und den wahrscheinlichen Fehler dieses Resultates gleich μ, so würde der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sein

$$r = \frac{1}{m}$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes von r

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m + \mu} = \frac{\mu}{m(m + \mu)}$$

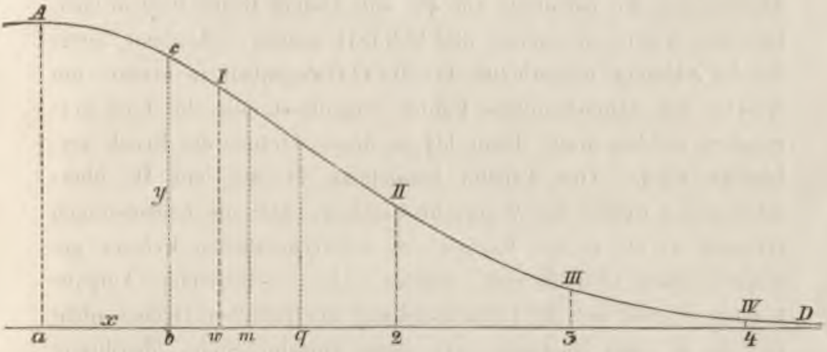
§ 34.

Manche Ereignisse, die man in gewisser Beziehung als zufällig ansehn kann, sind von so schädlichen und gefährlichen Folgen, dafs sie unbedingt verhindert werden müssen, so weit dieses überhaupt möglich ist. Die Vorsichts-Maafsregeln, die man zu diesem Zweck ergreift, können indessen auch übertrieben werden, wodurch theils unberechtigte Mehrkosten, theils auch wohl andre Uebelstände herbeigeführt werden. Es entsteht alsdann die wichtige Frage, wo die Grenze liegt, die man erreichen mufs, die man aber nicht überschreiten darf.

Hierher gehört beispielsweise die Bestimmung der Stärke von Verbandstücken in Bau-Constructionen. Man geht dabei von Beobachtungen aus, und die Resultate derselben sind um so sicherer, je zahlreicher sie sind, und je vollständiger sie alle Abweichungen in der Textur des Materials umfassen, welches beim Bau angewendet werden soll. Diese Beobachtungen geben aber jedesmal verschiedne Resultate, wenn auch anscheinend dasselbe Material untersucht wird, die Verschiedenheit beruht aber in diesem Fall nicht auf Beobachtungs-Fehlern, sondern auf dem Mangel an Gleichmäfsigkeit der einzelnen geprüften Stücke. Insofern aber diese Abweichungen nicht äufserlich zu erkennen sind, so sind sie zufällig, wie die Fehler in den Messungen, und folgen daher denselben Gesetzen. Der Mittelwerth oder das arithmetische Mittel aus einer Reihe solcher Beobachtungen ist zwar als der wahrscheinlichste Werth von grofser Bedeutung, er giebt aber keinen Maafsstab für die Abweichungen von demselben, also für die gröfsere oder mindere Festigkeit, welche die einzelnen Verbandstücke vielleicht haben. Hierüber kann man sich nur ein sicheres Urtheil bilden, wenn man die Resultate aller Versuche mit jenem Mittelwerth vergleicht und in derselben Art, wie der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtungs-Reihe gefunden wurde, die wahrscheinliche Abweichung sucht.

Man habe beispielsweise eine gröfsere Anzahl Eisenstäbe geprüft, die gleichen Querschnitt haben, auch äufserlich keine Verschiedenheit zeigen, und dabei gefunden, dafs sie durchschnittlich unter einer Belastung von 10 Centnern so eben zerreifsen. Die wahrscheinliche Abweichung habe sich aber aus diesen Proben gleich 1 Centner (nach § 31) ergeben. Fragt man alsdann, wie stark ein gleicher Stab mit voller Sicherheit belastet werden kann, wobei er also bestimmt noch nicht zerreifst, so giebt es nach den oben entwickelten Gesetzen dafür keine Antwort, weil der Fehler oder die Abweichung jede Grenze übersteigen und sogar unendlich grofs werden kann, aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist unendlich geringe, und eben so wenig, wie man hoffen darf, beim Aufwerfen von hundert Münzen alle hundert Bildseiten zu treffen, so ist es nach menschlichen Begriffen auch unmöglich, dafs hier eine sehr grofse Abweichung eintreten kann, weil die Wahrscheinlichkeit einer solchen überaus geringe ist. Es ist daher nothwendig, nach sorgfältiger Erwägung der Verhältnisse diejenige Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, die als genügend oder als hinreichend sicher angesehn werden darf. Setzt man dieselbe z. B. gleich 0,999 oder mit andern Worten, will man des Erfolges so sicher sein, dafs man Eins gegen Eins wetten kann, ein Bruch werde unter tausend Fällen nur einmal eintreten, so kann man aus der Tabelle im Anhange B die entsprechende Belastung berechnen.

Obwohl die Art, wie diese Rechnung zu führen, sich schon aus den frühern Herleitungen ergiebt, so ist diese Aufgabe doch in ihren Anwendungen so wichtig, dafs ihre specielle Behandlung sich rechtfertigen wird.



Die ganze von der Curve und der Abscissenlinie begrenzte Fläche, oder $\int y dx$ von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ist gleich der Gewifsheit, dafs irgend ein Fehler (der auch Null sein kann) eintreten wird, sie ist also gleich 1. Die halbe Fläche bis zur gröfsen Ordinate oder bis zur Mitte ist gleich $\frac{1}{2}$, und bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler negativ, also dafs das Verbandstück schwächer, als der Mittelwerth sein wird. Die Fläche, die von bc oder von der Wahrscheinlichkeit des Fehlers x begrenzt ist und sich bis zu dem unendlich weit entfernten Punkt D erstreckt, stellt die Wahrscheinlichkeit der Ueberschreitung des negativen Fehlers x dar. Es wird also das Verhältnifs der Fläche cbD zur Fläche der ganzen Curve gesucht, und diese Wahrscheinlichkeit ist halb so grofs als die Tabelle C angiebt.

Die gröfste Ordinate aA bezeichnet relativ die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $= 0$, also die Wahrscheinlichkeit, dafs der Stab die 10 Centner noch so eben trägt. Die Ordinate wI entspricht dem wahrscheinlichen Fehler, der gleich 1 Centner sein sollte, sie giebt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dafs der

Stab nur $10 - 1 = 9$ Centner tragen kann. Eben so die Ordinaten *2II*, *3III*, *4IV* die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs er schon mit 8, 7 oder 6 Centnern aufs Aeufserste belastet ist.

Um die erforderliche Sicherheit zu gewinnen, die freilich niemals vollständig erreicht werden kann, mufs man den Werth derjenigen Wahrscheinlichkeit angeben, mit der man den günstigen Erfolg erwarten will, oder andrerseits die Wahrscheinlichkeit des Mifslingens, die jedenfalls nur ein sehr kleiner Bruch bleiben darf. Derselbe wurde vorstehend gleich 0,001 gesetzt. Alsdann bietet die im Anhange mitgetheilte Tabelle C Gelegenheit zu ersehn, um wieviel der wahrscheinliche Fehler vergröfsert oder die Last vermindert werden mufs, damit bis zu dieser Grenze der Bruch verhindert wird. Die Tabelle bezeichnet in der mit W überschriebenen Spalte die Wahrscheinlichkeit, dafs die beiderseitigen Grenzen x, die in der Einheit des wahrscheinlichen Fehlers gemessen sind, überschritten werden. In vorliegender Aufgabe kommt es aber auf die Ueberschreitung der positiven Grenze nicht an, da es ohne Nachtheil ist, wenn einzelne Stäbe überflüssig stark sind. Der Werth der Wahrscheinlichkeit in Betreff der negativen Grenzen ist also nur die Hälfte von dem in der Tabelle angegebnen. Man entnehme daher aus dieser Tabelle dasjenige x, welches $W = 0{,}002$ entspricht, da dieses W mit ein Halb multiplicirt 0,001 wird. Indem es hier auf grofse Genauigkeit nicht ankommt, kann man sich mit der ersten Differenz begnügen, und man findet alsdann $x = 4{,}58$. Hiernach mufs der wahrscheinliche Fehler w, der gleich 1 Centner war, mit 4,58 multiplicirt werden. Die zulässige Belastung, die dem beabsichtigten Grade der Sicherheit entspricht, ist alsdann

$$10 - 4{,}58 = 5{,}42 \text{ Centner.}$$

V. Abschnitt.

Beispiele der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 35.

In den physikalischen Wissenschaften, wozu auch die angewandte Mechanik und Hydraulik gehören, hat man oft aus den Beobachtungen nicht nur die Constanten, sondern auch die Gesetze selbst hergeleitet, welche die Erscheinungen bedingen, und nicht selten später für die in solcher Weise gefundnen Gesetze auch allgemein gültige Beweise aufzustellen versucht, wobei jedoch vielfach Mifsgriffe vorgekommen sind. Wenn aber diese Gesetze nur auf Erfahrungen und Beobachtungen beruhn, so haben sie keine allgemeine Gültigkeit, man darf vielmehr ihre Anwendung nicht über die Grenzen jener Beobachtungen hinaus ausdehnen.

Es entsteht dabei die Frage, ob man aus Beobachtungen, die in kleinem Maafsstab angestellt sind, auf Erscheinungen im Grofsen schliefsen darf. Nicht selten wird dieses in Abrede gestellt, jedoch vorzugsweise wohl nur in der Absicht, um wissenschaftlichen Untersuchungen überhaupt entgegen zu treten, und den sogenannten praktischen Auffassungen Geltung zu geben. Dafs Beobachtungen im Grofsen sehr kostbar und zeitraubend sind, und daher nur selten angestellt werden können, ist an sich klar, dazu kommt aber noch, dafs es überaus schwierig ist, die verschiednen fremdartigen Einflüsse dabei auszuschliefsen und die Erscheinungen in einfachen Formen darzustellen. Die Erfahrung zeigt auch in der That, dafs man auf diesem Wege nicht leicht zu einem brauchbaren Resultat gelangt ist, wenn nicht durch sorgfältige Messungen im Kleinen die Verhältnisse schon vorher aufgeklärt waren, und es sonach nur noch darauf ankam, die bereits bekannten Gesetze und Constanten an den Erscheinungen im Grofsen zu prüfen. Es mag hier auf die im Jahre 1827 in Wien ausgeführten Versuche über den Seitendruck der Erde und den Einsturz von Futtermauern hingewiesen werden, die obwohl mit grofsem Kosten-Aufwande angestellt und sehr vollständig öffentlich bekannt gemacht, dennoch in keiner Beziehung ein brauchbares Resultat gaben, oder zur Aufklärung der Verhältnisse irgend beitragen konnten. Andrer Seits ist die unbegrenzte Kraft, welche die Erde und alle Himmelskörper in ihren Bahnen erhält, nämlich die Schwere, durch das kleine Instrument, den Secunden-Pendel, in höchster Schärfe gemessen worden.

Nur bei Beobachtungen mit kleinen Apparaten lassen sich die fremdartigen Einflüsse möglichst beseitigen, oder bei ihrer unvermeidlichen Einwirkung so vollständig erkennen, dafs man von ihnen Rechnung tragen kann. Auch ist es dabei leicht, vielfache Modificationen anzubringen, woraus sich ergiebt, wie bei Aenderungen in der Gröfse und Form der Erscheinung die Resultate sich anders herausstellen. Solche Versuche deuten daher schon an, wie die Erscheinung im Grofsen sich gestalten wird, und wenn die gefundnen Gesetze an sich nicht zu begründen sind, also der wahre Zusammenhang noch unbekannt ist, so kommt es nur darauf an, durch Messungen in gröfserem Maafsstabe, die Gültigkeit der bereits gefundnen Gesetze innerhalb weiterer Grenzen zu prüfen, was viel leichter ist, als wenn man auf diesem Wege die Gesetze auffinden wollte.

Die Methoden der Wahrscheinlichkeits-Rechnung lehren, wie man aus Beobachtungen nicht nur die wahrscheinlichsten Resultate ziehn, sondern auch den Grad der Sicherheit dieser Resultate beurtheilen, also die Wahrscheinlichkeit berechnen kann, mit der die Gültigkeit der gefundnen Gesetze über die Grenze der zum Grunde liegenden Beobachtungen hinaus, noch zu erwarten ist. Man denke die Resultate der Beobachtungen, die im einfachsten Fall nur von einem Argument abhängen, graphisch aufgetragen. Diese Argumente seien die Abscissen, während die beobachteten

Gröfsen als Ordinaten gezeichnet werden. In dieser Weise werden verschiedne Punkte in der Linie gegeben, deren Gleichung man sucht, um für gewisse gröfsere Abscissen die Ordinaten berechnen zu können. Wenn die Linie, welche durch die gemefsnen Punkte gezogen wird, sehr nahe als gerade Linie sich darstellt, und die kleinen Differenzen innerhalb der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen, so ist dieses noch kein Beweis dafür, dafs die Linie, wenn man sie verlängert, noch eine gerade bleiben wird. Das unbekannte Gesetz derselben kann beispielsweise eine Hyperbel bedingen, was sich aber aus den Beobachtungen noch nicht ergiebt, weil diese an einer Stelle liegen, wo die Curve sich nahe an die gerade anschliefst. Nicht leicht wird es sich treffen, dafs man mit der Natur der Curve ganz unbekannt ist, denn gemeinhin führt schon die Betrachtung der mechanischen oder der sonstigen einwirkenden Verhältnisse auf gewisse aufserhalb der Beobachtungen liegende Punkte, so zum Beispiel lassen sich die Werthe derjenigen Ordinaten häufig bestimmt bezeichnen, die zu den Abscissen $= 0$ und zu $+$ oder $- \infty$ gehören. Aber wenn dieses Letzte auch möglich ist, so mufs man doch auf die kleinen Abweichungen in den Beobachtungen sehr aufmerksam sein, und selbst wenn sie die Gröfse der gewöhnlichen Beobachtungs-Fehler nicht übersteigen, untersuchen, ob sie regelmäfsig fallen, also auf eine schwache Krümmung der anscheinend geraden Linie hindeuten, die bei weiterer Fortsetzung viel schärfer hervortreten kann. Wie grofs die Wahrscheinlichkeit einer solchen Voraussetzung ist, läfst sich aber nach den vorstehenden Herleitungen jedesmal bestimmt angeben, und man entgeht auf diesem Wege sehr sicher der Gefahr, aus dem Gebiete der Wirklichkeit in das der Phantasie zu treten.

Wie grofs diese Gefahr ist, wenn die Regeln der Wahrscheinlichkeits-Rechnung ganz unbeachtet bleiben, zeigen vielfache Beispiele in unsern Lehrbüchern, namentlich in denen, welche die Hydraulik betreffen. Die Sätze, dals das Längenprofil eines Flusses eine Parabel, oder Kettenlinie oder eine andre Curve bildet, würden gewifs nie ausgesprochen sein, wenn man auch nur eine einzige Beobachtungs-Reihe mit einer solchen Hypothese sorgfältig verglichen und die übrig bleibenden Fehler untersucht hätte.

Indem die Methoden der Wahrscheinlichkeits-Rechnung in solchen Fällen immer auf die Beobachtungs-Fehler zurückführen, und von der Gröfse derselben die Sicherheit der gefundnen Resultate abhängt, so ist die Anwendung dieser Rechnungs-Art auch von unverkennbarem Einflufs auf die Beobachtungs-Kunst. Die Mefsapparate verbessern sich eben so, wie die Methoden ihrer Benutzung, und man erreicht bald eine Schärfe und Sicherheit, die bisher unbekannt war und sogar für unmöglich gehalten wurde. Namentlich hat sich dieses in der Astronomie bestätigt, wo gegenwärtig keine Untersuchung angestellt wird, ohne dafs zugleich der Grad der Wahrscheinlichkeit der gefundnen Resultate bestimmt nachgewiesen würde.

§ 36.

Als Beispiel der Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Beobachtungen, aus denen nicht nur gewisse Constanten, sondern auch das Gesetz hergeleitet werden soll, dem die Erscheinung folgt, wähle ich eine Untersuchung über den Ausflufs des trocknen Sandes durch kreisförmige Oeffnungen im Boden eines Gefäfses.

Wie zuerst Hubert Burnand bemerkte, ist die durch kleine Oeffnungen ausfliefsende Sandmasse von der Druckhöhe oder der Höhe der Füllung des Gefäfses unabhängig. Dieses erklärt sich durch die starke Reibung, welche der Sand erfährt, indem er sich von der übrigen Masse löst. Die vorliegenden Versuche bestätigten auch, dafs bei hoher und niedriger Füllung in gleichen Zeiten stets gleiche Quantitäten abflossen. Nur wenn der hohle Trichter, der sich in der Oberfläche der Schüttung über der Oeffnung bildet, letztere beinahe erreicht, und die von seinen Wänden herabstürzenden Massen unmittelbar die Oeffnung treffen, wird die Geschwindigkeit und sonach die Menge des durchfliefsenden Sandes etwas gröfser, bis sie sich sehr bald darauf wieder vermindert, weil die Oeffnung vorübergehend frei wird, oder nicht mehr ganz gefüllt ist. Meine Beobachtungen wurden daher jedesmal abgebrochen, sobald der Trichter sich bis auf 1 Zoll der Oeffnung genähert hatte.

Der Sand den ich benutzte, war ein sehr reiner, vom Seestrande aus auf das dahinter liegende niedrige Ufer aufgewehter Quarzsand. Derselbe bestand aus Körnchen von nahe gleicher Gröfse, doch befanden sich auch einzelne merklich gröfsere darunter, die durch Aussieben entfernt wurden. Der Durchmesser der übrig bleibenden war nach mehrfachen Versuchen, indem ich sie reihenweise an einander schob, 0,021 Zoll.

Die Durchflufs-Oeffnungen waren kreisförmig in Messingscheiben ausgedreht, und zwar so, dafs ein scharfer Rand, der nach oben gekehrt wurde, sie umgab. Ihre Durchmesser mafs ich jedesmal in zwei verschiednen Richtungen mittelst eines mikrometrischen Apparats.

Die Quantitäten des ausfliefsenden Sandes wurden durch sorgfältiges Abwiegen ermittelt. Unter den austretenden Sandstrahl schob ich nach dem Schlage einer Secunden-Uhr ein Gefäfs, und in gleicher Weise wurde dasselbe nach einer bestimmten Zeit wieder zurückgezogen. Die Vergleichung der in dieser Art aufgefangnen Sandmassen ergab, dafs der wahrscheinliche Fehler beim Vor- und Zurückschieben des Gefäfses noch nicht eine halbe Secunde betrug, und selbst dieser geringe Fehler verminderte sich bei den gröfsern Oeffnungen noch bedeutend. Er rührte zum Theil von den zufälligen Unregelmäfsigkeiten beim Austreten des Sandes her, die offenbar in den kleinern Oeffnungen am gröfsten waren.

Die Sandmassen m sind nachstehend nicht durch Gewichte, sondern durch den Rauminhalt und zwar in Rheinländischen Cubikzollen ausgedrückt, indem wiederholentlich das Gewicht gewisser Sand-Volumina, und zwar bei möglichst loser Schüttung ermittelt wurde. Die Radien ϱ der Oeffnungen beziehn sich gleichfalls auf Rheinländische Zolle.

In einer Secunde flofs durch die Oeffnung vom Radius ϱ die Masse m

1)	$\varrho = 0{,}05487$	$m = 0{,}00912$
2)	$= 0{,}08052$	$= 0{,}02985$
3)	$= 0{,}09868$	$= 0{,}05399$
4)	$= 0{,}12017$	$= 0{,}09532$
5)	$= 0{,}16784$	$= 0{,}23463$

Es kam darauf an, die Beziehung zu finden, in welcher m zu ϱ steht. Zu vermuthen war, dafs m durch eine oder verschiedne Potenzen von ϱ ausgedrückt würde, ich versuchte daher zunächst die Formel

$$m = r\varrho + s\varrho^2 + t\varrho^3$$

Ein constantes Glied konnte der Ausdruck nicht enthalten, weil offenbar für $\varrho = 0$ auch $m = 0$ wird. Die Factoren r, s und t sind die zu suchenden Constanten, während die oben (§ 18) mit a, b und c bezeichneten Factoren hier ϱ, ϱ^2 und ϱ^3 sind.

Aus den fünf Beobachtungen findet man die Summen

$$\begin{aligned}
[ka] &= [m\varrho] = 0{,}059\,065\\
[kb] &= [m\varrho^2] = 0{,}008\,7325\\
[kc] &= [m\varrho^3] = 0{,}001\,34369\\
[aa] &= [\varrho^2] = 0{,}061\,841\\
[ab] &= [\varrho^3] = 0{,}008\,1113\\
[ac] = [bb] &= [\varrho^4] = 0{,}001\,14796\\
[bc] &= [\varrho^5] = 0{,}000\,171481\\
[cc] &= [\varrho^6] = 0{,}000\,0265875
\end{aligned}$$

Wenn man diese Werthe in die Bedingungs-Gleichungen

$$\begin{aligned}
[ka] &= [aa]\,r + [ab]\,s + [ac]\,t\\
[kb] &= [ab]\,r + [bb]\,s + [bc]\,t\\
[kc] &= [ac]\,r + [bc]\,s + [cc]\,t
\end{aligned}$$

einführt, so gelangt man am leichtesten durch das § 21 angegebne Verfahren zur Bestimmung der Constanten und findet

$$\begin{aligned}
r &= -\,0{,}18940\\
s &= +\,4{,}7705\\
t &= +\,27{,}945
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich alsdann für die obigen fünf Werthe von ϱ die Sandmassen m

beobachtet	berechnet	Fehler	Quadrate
0,00912	0,00879	— 0,00033	0,000 000 1089
0,02985	0,03027	+ 0,00042	1764
0,05399	0,05461	+ 0,00062	3844
0,09532	0,09463	— 0,00069	4761
0,23463	0,23471	+ 0,00010	100
		Summe	0,000 001 1558

Der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler ist daher

$$0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}000\,001\,1558}{5-3}} = 0{,}000513$$

Um die wahrscheinlichen Fehler der drei Constanten zu ermitteln, mufs man den Werth der oben mit M bezeichneten Gröfse berechnen. Derselbe ist

$$M = 0{,}000000\,000000\,3994$$

und hieraus findet man die wahrscheinlichen Fehler in der Beſtimmung der Constanten

$$w(r) = 0{,}027$$
$$w(s) = 0{,}463$$
$$w(t) = 1{,}850$$

Es mufs erwähnt werden, dafs bei dieser Rechnung anfangs zwar die fünfstelligen Logarithmen-Tafeln vollkommen genügten, da sie der Schärfe der Messungen entsprachen, dafs aber nach Darstellung der Summen von ka, kb, kc, $aa \ldots$ zur Benutzung siebenstelliger Tafeln übergegangen werden mufste, weil sonst die Differenzen gar zu unsicher geworden wären, und namentlich M als verschwindend klein sich dargestellt hätte.

Für den Fall, dafs man zur Lösung dieser Aufgabe die gesuchten Constanten nicht durch Elimination finden, sondern dieselben nach jenen Formeln berechnen will, die § 32 angegeben sind, hat man

$$\alpha = +\,0{,}000\,001\,293\,12$$
$$\beta = -\,0{,}000\,000\,073\,119$$
$$\gamma = +\,0{,}000\,000\,018\,8050$$
$$\alpha' = +\,0{,}000\,000\,001\,115\,61$$
$$\beta' = +\,0{,}000\,000\,326\,383$$
$$\gamma' = +\,0{,}000\,005\,198\,2$$

woraus man wieder die obigen Werthe der r, s, t und der wahrscheinlichen Fehler derselben erhält.

Obwohl die Beobachtungen an den zum Grunde gelegten Ausdruck sich befriedigend anschliefsen, auch die wahrscheinlichen Fehler der Constanten so geringe sind, dafs man nicht annehmen darf, eins oder das andre der drei Glieder könne an sich vielleicht gleich Null sein, und habe nur durch zufälliges Zusammentreffen der Beobachtungs-Fehler einigen Werth erhalten, so begründet sich doch ein wesentlicher Zweifel gegen die Angemessenheit dieser Form des Gesetzes. Zunächst läfst sich dieselbe nicht erklären und sodann befremdet das Minus-Zeichen des ersten Gliedes.

Hiernach wurde der Versuch gemacht, das erste Glied, das in den letzten Beobachtungen von geringer Bedeutung ist, fortzulassen, also die Form zu wählen

$$m = s\varrho^2 + t\varrho^3$$

Indem die Rechnung in gleicher Weise, wie früher, durchgeführt wird, findet man als die wahrscheinlichsten Werthe

$$s = 1{,}5794$$
$$t = 40{,}350$$

und wenn man hiernach für die gemefsnen ϱ die Massen m sucht, so ergeben sich diese, wie auch ihre Abweichungen von den gemefsnen und die Quadrate derselben

m	Fehler	Quadrat
0,01142	+ 0,00230	0,000005 2900
0,03130	+ 0,00145	0,000002 1025
0,05415	+ 0,00016	0,000000 0256
0,09283	— 0,00249	0,000006 2001
0,23527	+ 0,00064	0,000000 4096
	Summa	0,000014 0278

Die Summe der Fehler-Quadrate ist sonach 12 mal so grofs, als sie früher war und der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler stellt sich auf 0,00148, während die berechneten Constanten mit nachstehnden wahrscheinlichen Fehlern behaftet sind.

$$w(s) = 0{,}225$$
$$w(t) = 1{,}479$$

Indem die mechanischen Verhältnisse der Erscheinung keineswegs so einfach sind, dafs sich aus denselben das Gesetz der letztern herleiten liefse, vielmehr eben die Beobachtungen hierzu dienen sollten, so wurde nunmehr eine andre Form des Ausdrucks versucht, nämlich

$$m = z \cdot \varrho^x$$

worin wieder zwei Constanten z und x vorkommen. Um diesen Ausdruck aber in die Form zu bringen, welche die Methode der kleinsten Quadrate verlangt, und um zugleich einen Näherungswerth für x zu erhalten, der später berichtigt werden könnte, ging ich zu den Logarithmen über.

$$\log m = \log z + x \,.\, \log \varrho$$

wobei also vergleichungsweise mit jener Gleichung

$$k = ar + bs$$

die beiden Unbekannten $r = \log z$ und $s = x$ wurden, die bekannten Gröfsen waren aber

$$k = \log m$$
$$a = 1$$
$$b = \log \varrho$$

In Betreff der nunmehr vorzunehmenden Zahlenrechnung mufs darauf aufmerksam gemacht werden, dafs diese Logarithmen die gewöhnlichen Briggeschen sind, da sie aber sämmtlich zu ächten Brüchen gehören, so sind sie negativ, und man mufs sie als solche, also ohne die decadische Ergänzung ausdrücken. So ist z. B. der Logarithmus von 0,009117

$$= 7{,}95985 - 10$$

oder

$$= -2{,}04015$$

In dieser Weise werden die in die Rechnung einzuführenden Werthe von $\log m$ und $\log \varrho$ bestimmt. Um die Producte kb, bb zu bilden, kann man sich nach § 20 der Quadrat-Tabellen im Anhange A bedienen, doch läfst sich die Rechnung auch logarithmisch führen, indem man die gefundnen Logarithmen wieder als Zahlen behandelt, und die zugehörigen Logarithmen aufschlägt, also beispielsweise

$$\log k = \log \,.\, \log m = \log(-2{,}04015) = 0{,}30966_n$$
$$\log b = \log \,.\, \log \varrho = \log(-1{,}26067) = 0{,}10060_n$$

Das den letzten beiden Zahlen beigefügte n zeigt an, dafs diese Logarithmen zu negativen Zahlen gehören, worauf Rücksicht zu nehmen ist, sobald man zu den letztren wieder übergeht. Man findet hiernach

$$\log kb = 0{,}41026$$

oder

$$kb = 2{,}5719$$

Dieses Product ist positiv, weil beide Factoren negativ sind.

In gleicher Art werden die sämmtlichen Producte kb berechnet und die Summe derselben, oder $[kb]$ dargestellt, und so auch die andern Summen, wobei die Zeichen stets zu beachten sind. aa ist aber 1, also bei 5 Beobachtungen $[aa] = 5$.

Die Bedingungs-Gleichungen

$$[ka] = [aa]\, r + [ab]\, s$$
$$[kb] = [ab]\, r + [bb]\, s$$

verwandeln sich alsdann in

$$-6{,}48329 = 5 \,.\, \log z - 5{,}05583 \,.\, x$$
$$6{,}94297 = -5{,}05583 \,.\, \log z + 5{,}24544 \,.\, x$$

Man findet

$$\log z = 1{,}64445$$

also $z = 44{,}111$

und $x = 2{,}9089$

Hiernach ist

$$m = 44{,}111 \cdot \varrho^{2{,}91}$$

Berechnet man daraus für die fünf ϱ die Werthe von $\log m$ und vergleicht dieselben mit den Logarithmen der gemeſsnen m, so schlieſsen sie sich an diese sehr befriedigend an. Geht man indessen, wie doch die Aufgabe verlangt, zu den Zahlen über, so sind die Abweichungen viel bedeutender. Die Abweichungen und die Quadrate derselben sind im letzten Fall

Fehler	Quadrate
+ 0,00037	0,000000 14
— 0,00088	0,000000 77
— 0,00164	0,000002 69
— 0,00247	0,000006 13
+ 0,01073	0,000115 13
Summa	0,000124 83

Hiernach stellt sich der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler auf

$$w = 0{,}00435$$

Zur Berichtigung der in dieser Weise gefundnen Unbekannten setze ich den Exponent $x = 2{,}9$, nehme aber an, daſs er um die geringe Gröſse σ noch corrigirt werden muſs, die wieder aus den Beobachtungen zu berechnen ist. Man hat also

$$m = r \,.\, \varrho^{x+\sigma}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist

$$\varrho^{x+\sigma} = \varrho^{x} + \frac{\sigma}{1} \cdot \frac{d\,\varrho^{x}}{d\,x} + \frac{\sigma^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2\,\varrho^{x}}{d\,x^2} + \dots$$

Indem vorausgesetzt wird, dafs σ vergleichungsweise gegen x sehr klein ist, so verschwindet das dritte Glied, wie alle folgenden

$$d\,\varrho^{x} = \varrho\,.^{x} \log \text{nat}\, \varrho \,.\, d\,x$$

also
$$\varrho^{x+\sigma} = \varrho^{x} + \sigma \,.\, \varrho^{x} \log \text{nat}\, \varrho$$

Hiernach wird die Gleichung, von der man ausgeht

$$m = \varrho^{x} \,.\, r + \varrho^{x} \log \text{nat}\, \varrho \,.\, r\,\sigma$$

Die beiden Unbekannten sind alsdann r und $r\,\sigma$. Die bekannten Factoren dagegen nach der früher gewählten Bezeichnung

$$k = m$$
$$a = \varrho^{x}$$
$$b = \varrho^{x} \log\ \text{nat}\, \varrho$$

Für x führe ich den so eben gefundnen Näherungswerth 2,9 ein. Die natürlichen Logarithmen findet man, wenn man die gewöhnlichen oder die Briggeschen Logarithmen mit log nat $10 = 2{,}3025851$ multiplicirt. Beispielsweise mag hier diese Rechnung für $\varrho = 0{,}05487$ mitgetheilt werden.

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 8{,}739335 - 10 \\ &= -\,1{,}260665 \\ \log \log \varrho &= 0{,}100600_n \\ \log 2{,}3025851 &= 0{,}362216 \\ \hline \log \log \text{nat}\, \varrho &= 0{,}462816_n \\ \log \text{nat}\, \varrho &= -\,2{,}90280 \end{aligned}$$

Die beiden Bedingungs-Gleichungen sind

$$0{,}001618\,0164 = 0{,}000038\,51187 \,.\, r + 0{,}000071\,44611 \,.\, r\,\sigma$$
$$0{,}003007\,772 = 0{,}000071\,44611 \,.\, r + 0{,}000133\,5503 \,.\, r\,\sigma$$

und man findet hieraus

$$r = 30{,}8052$$
$$r\,\sigma = -\,6{,}04019$$

also
$$\sigma = -\,0{,}16908$$

oder
$$x + \sigma = 2{,}73092$$

Berechnet man nunmehr nach dem Ausdruck

$$m = 30{,}8025 \,.\, \varrho^{2{,}73092}$$

die ausgeflofsnen Sandmassen, so wie die Differenzen derselben gegen die gemefsnen und die Fehler-Quadrate, so ergiebt sich

m	Diff.	Quadrate
0,01111	+ 0,00199	0,000003 960
0,03168	+ 0,00183	3 349
0,05520	+ 0,00121	1 464
0,09454	— 0,00078	0 608
0,23543	+ 0,00080	0 640
		0,000010 021

und hieraus der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler

$$w = 0{,}001233$$

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf die Voraussetzung, dafs die kreisförmigen Oeffnungen, deren Radien gleich ϱ gemessen waren, in ihrer ganzen Ausdehnung vom Sande durchströmt würden. Man darf dieses indessen wohl kaum annehmen, da wahrscheinlich einzelne Körnchen über die Ränder dieser Oeffnungen vortreten, während sie auf dem Boden des Gefäfses noch aufliegen und daher an der Bewegung nicht Theil nehmen. Es bleibt daher zu prüfen, ob die Beobachtungen vielleicht mit gröfsrer Schärfe an ein Gesetz sich anschliefsen, nach welchem die Radien jedesmal um eine gewisse geringe Quantität sich verkleinern. Ich lege hiernach den Ausdruck

$$m = r(\varrho - x)^z$$

zum Grunde, in welchem die drei unbekannten Gröfsen r, x und z vorkommen. Um denselben in der Art umzuformen, wie die Rechnung dieses fordert, mufs man wieder Näherungswerthe einführen, aber auch hierdurch stellt er sich nicht bequem heraus, und es bleibt daher nur übrig, durch wiederholte Annäherung die passendsten Werthe für x und z zu ermitteln.

Zunächst setze ich demnach voraus, dafs die Sandkörnchen mit ihrem halben Durchmesser, der nach obiger Mittheilung ungefähr 0,01 Zoll beträgt. über die Oeffnung vortreten. Es sei also $x = 0{,}01$ und der Näherungswerth des Exponenten gleich dem zuletzt gefundnen oder 2,73. Man hat also

$$m = r(\varrho - 0{,}01)^{2{,}73 + z}$$

oder, wie oben

$$m = (\varrho - 0{,}01)^{2{,}73} \cdot r + (\varrho - 0{,}01)^{2{,}73} \cdot \log \operatorname{nat} (\varrho - 0{,}01) \cdot rz$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich hieraus die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$0{,}001845\,817 = 0{,}000050\,1467 \cdot r - 0{,}000096\,2025 \cdot rz$$
$$-0{,}003552\,250 = -0{,}000096\,2025 \cdot r + 0{,}000186\,0572 \cdot rz$$

und man erhält

$$r = 22{,}489$$
$$rz = -7{,}4652$$

Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehnde Gleichung erhält man für die verschiednen ϱ die Sandmassen m, sowie die Differenzen derselben gegen die beobachteten, und deren Quadrate

m	Diff.	Quadr.
0,00954	+ 0,00042	0,000000 1764
0,03034	+ 0,00049	2401
0,05443	+ 0,00054	1936
0,09449	— 0,00083	6884
0,23480	+ 0,00017	0289
	Summe	0,000001 3274

Die Beobachtungen schliefsen sich also an diesen Ausdruck bedeutend schärfer, als an den frühern an. Der Werth von z ist $= -0{,}33194$, also der Exponent von $\varrho - 1$

$$2{,}73 - 0{,}332 = 2{,}398$$

Indem die Exponenten gewöhnlich einfache Zahlen sind, dürfte man vermuthen, dafs derselbe gleich 2,5 wäre, was sogar durch gewisse Analogien vergleichungsweise mit ausströmendem Wasser wahrscheinlich wird, doch verbietet sich hier diese Aenderung. Der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler stellt sich nämlich alsdann auf, 0,000 448 6, und hieraus ergeben sich die wahrscheinlichen Fehler

von r gleich 0,7053
von rz 0,3662
daher nach § 33 von z 0,0125

Jene Aenderung würde also das Achtfache des wahrscheinlichen Fehlers übersteigen, sie ist daher nicht statthaft.

Es kommt nunmehr darauf an zu untersuchen, ob jene willkürlich angenommene Verminderung von ϱ um 0,01 Zoll passend gewählt war, oder ob ein andrer Werth dafür den Beobachtungen besser entspricht. Fügt man zu diesem Werth noch die Correction x, so hat man unter Einführung des so eben gefundnen Exponenten 2,4

$$m = (\varrho - 0{,}01 + x)^{2,4} \,.\, r$$

oder
$$m = (\varrho - 0{,}01)^{2,4} \,.\, r + 2{,}4\,(\varrho - 0{,}01)^{1,4} \,.\, rx$$

wobei also r und rx die beiden Unbekannten sind, diese findet man, wenn man die drei Factoren m, $(\varrho - 0{,}01)^{2,4}$ und $2{,}4(\varrho - 0{,}01)^{1,4}$ statt k, a und b in jene Bedingungs-Gleichungen einführt. Letztere sind alsdann

$$0{,}003489\,80 = 0{,}000179\,159 \,.\, r + 0{,}003064\,49 \,.\, rx$$
$$0{,}059294\,31 = 0{,}003064\,487 \,.\, r + 0{,}055661\,89 \,.\, rx$$

und man erhält

$$r = 21{,}578$$
$$rx = -0{,}12274$$

also
$$x = -0{,}005688$$

Der Radius der Oeffnung mufs also um 0,01569 vermindert werden.

Berechnet man die Werthe von m und deren Abweichungen von den beobachteten nach der Formel

$$m = 21{,}578\,(\varrho - 0{,}00569)^{2,4}$$

so findet man

m	Diff.	Quadr.
0,00971	+ 0,00059	0,000000 3481
0,03036	+ 0,00051	2601
0,05491	+ 0,00092	8464
0,09544	+ 0,00012	0144
0,23522	+ 0,00059	3481
	Summa	0,000001 8171

Die sämmtlichen Abweichungen sind positiv und hieraus ergiebt sich, dafs die gefundnen Werthe für r und x, wenn sie sich auch an die Beobachtungen genügend anschliefsen, doch nicht die richtigsten sind. Dieses rührt allein davon her, dafs der Rechnung nicht der einfache Ausdruck für m zum Grunde gelegt werden konnte, vielmehr die Potenz des Binomiums in eine Reihe aufgelöst wurde, von der nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt sind, die übrigen aber fortfallen mufsten, obwohl sie nicht verschwindend klein waren. Berechnet man dagegen die Werthe von m aus der Gleichung

$$m = (\varrho - 0{,}01)^{2,4} \cdot r + 2{,}4\,(\varrho - 0{,}01)^{1,4} r x$$

aus der sich jene Werthe von r und rx ergaben, so findet man

m	Diff.	Quadr.
0,00873	— 0,00039	0,000000 1521
0,02996	+ 0,00011	0121
0,05448	+ 0,00049	2401
0,09495	— 0,00037	1369
0,23467	+ 0,00004	0016
	Summa	0,000000 5428

In diesem Fall schliefsen sich also die Werthe von m bedeutend besser an die beobachteten an, auch sind sie bald gröfser und bald kleiner, als die letzten. Das letzte Verfahren ist jedoch nicht angemessen, weil es darauf ankam, die Sicherheit des einfachen Ausdrucks zu prüfen. Um diesen zu berichtigen, mufs man zu dem gefundnen Radius in gleicher Weise noch eine neue Correction suchen, und indem dieselbe ohne Zweifel viel kleiner ist, als das so eben ermittelte x, so werden auch die folgenden Glieder des Binomiums so klein, dafs man sie unbeachtet lassen darf.

Wichtiger ist indessen die Frage, ob die sehr bedeutende Aenderung des Radius ϱ eine wesentliche Aenderung des Exponent 2,4 veranlafst. Dieses ist in sofern nicht wahrscheinlich, als sich schon früher ergab, dafs der wahrscheinliche Fehler dieses Exponenten sehr klein ist. Setze ich voraus unter Benutzung der so eben gefundnen Correction von ϱ, dafs der Exponent 2,4 sich um σ ändert, und suche eben so, wie oben die wahrscheinlichsten Werthe für r und σ, so ergiebt sich aus der Formel

$$m = (\varrho - 0{,}01569)^{2,4+\sigma} \cdot r$$

$$m = (\varrho - 0{,}01569)^{2,4} \cdot r + (\varrho - 0{,}01569)^{2,4} \cdot \operatorname{log\,nat}(\varrho - 0{,}01569) \cdot r\sigma$$

und man erhält die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$0{,}003162\,41 = 0{,}000147\,0160 \cdot r + 0{,}000290\,0207 \cdot r\sigma$$
$$0{,}006237\,24 = 0{,}000290\,0207 \cdot r + 0{,}000577\,8495 \cdot r\sigma$$

Hieraus findet man

$$r = 21{,}957$$
$$r\sigma = 0{,}22564$$

also
$$\sigma = 0{,}01028$$

Der Exponent verändert sich also noch nicht um ein halbes Procent seines Werthes und wird $= 2{,}41$. Berechnet man aber hiernach die Sandmassen m nach dem Ausdruck

$$m = (\varrho - 0{,}01569)^{2{,}41} \cdot r$$

so findet man

m	Diff.	Quadr.
0,00893	— 0,00019	0,000000 0361
0,03006	+ 0,00021	0441
0,05450	+ 0,00051	2601
0,09494	— 0,00038	1444
0,23488	+ 0,00025	0625
	Summa	0,000000 5472

Benutzt man dagegen den zweigliedrigen Ausdruck, aus dem die Unbekannten berechnet wurden, so erhält man beinahe dieselben Werthe für m, doch schliefsen sie sich noch etwas schärfer an die beobachteten an, indem die Summe der Fehlerquadrate sich nur auf 0,000000 4985 stellt.

Schliefslich mufs erwähnt werden, dafs vorstehende Untersuchung unter so vielseitiger Auffassung und so eingehend mitgetheilt ist, um zu zeigen, mit welcher Sicherheit die Methode der kleinsten Quadrate die Zulässigkeit verschiedner Voraussetzungen beurtheilen läfst. Aufserdem schien es bei dem so häufigen Mangel an Uebung in logarithmischen Rechnungen auch nothwendig, über die zweckmäfsige Ausführung derselben manche Andeutungen beizufügen.

§ 37.

Als zweites Beispiel der Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung mag ein sehr wichtiger Erfahrungs-Satz der Hydraulik nach den vorstehnd entwickelten Gesetzen geprüft werden.

Wenn das Wasser in einem geraden und gleichmäfsigen

Flufsbett oder Canal sich gleichförmig bewegt, so findet eine gewisse Beziehung zwischen der mittlern Geschwindigkeit (c), dem relativen Gefälle (α), dem Flächeninhalt des Querprofils (q) und dem benetzten Umfange des letztern (p) statt. Nimmt man an, dafs der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei, so gelangt man unter den üblichen Voraussetzungen zu dem Ausdruck

$$c = \gamma \sqrt{\frac{\alpha q}{p}}$$

wo γ die Constante bedeutet, deren Werth aus den Beobachtungen zu bestimmen ist. Chezy war der erste, der diese Formel angab, obwohl das Gesetz, worauf sie beruht, schon 20 Jahre früher von Brahms bestimmt ausgesprochen und aus Beobachtungen an Strömen hergeleitet war. *) Später führten Woltman und Eytelwein denselben Ausdruck statt des höchst complicirten, von Dubuat aufgestellten, wieder ein. Eytelwein fand anfangs unter Zugrundelegung der von Dubuat mitgetheilten Messungen, und zwar auf Rheinländisches Fufsmaafs reducirt

$$\gamma = 90{,}9$$

also

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{\alpha q}{p}}$$

Einige Jahre später nahm Eytelwein dieselbe Untersuchung nochmals auf, indem er nicht nur die von Dubuat an kleinern Flüssen und Canälen angestellten Beobachtungen, sondern auch diejenigen benutzte, die Brünings, Woltman und Funk am Rhein, an der Weser und an andern Flüssen gemacht hatten. **) Der Widerstand wurde dabei einem Ausdruck gleichgesetzt, dessen erstes Glied die erste, und dessen zweites Glied die zweite Potenz der Geschwindigkeit zum Factor enthielt, also

$$\frac{\alpha q}{p} = r c + s c^2$$

*) Vergl. mein Handbuch der Wasserbaukunst. Theil II, Band. I. Dritte Ausgabe, Seite 297.

**) Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften 1813 und 1814. Diese Untersuchung ist auch der dritten Ausgabe von Eytelwein's Handbuch der Mechanik und Hydraulik als Anhang beigefügt.

und Eytelwein fand

$$c = -0{,}1057 + \sqrt{0{,}01118 + 8715{,}6 \cdot \frac{\alpha q}{p}}$$

Die beiden Constanten r und s waren dabei aus 91 Gleichungen hergeleitet, welche die gleich grofse Anzahl von Beobachtungen darstellten. Um die wahrscheinlichsten Werthe zu finden, wählte Eytelwein dasselbe Verfahren, dessen sich Prony in einer ähnlichen Untersuchung bedient hatte *), und welches von Laplace herrührte. Bevor nämlich die Methode der kleinsten Quadrate bekannt war, hatte Laplace in der Untersuchung über die Gestalt der Erde, die Ansicht ausgesprochen,**) diejenigen Werthe der Constanten seien die wahrscheinlichsten, wobei 1) die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler gleich Null und 2) die Summe der sämmtlichen Fehler, wenn alle als positiv angesehn werden, ein Minimum ist. Diese Bedingungen sind wesentlich verschieden von derjenigen, dafs die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum sein soll, und namentlich werden dabei die gröfsern Fehler nicht genügend berücksichtigt. Nichts desto weniger wurde das von Eytelwein gefundne Resultat, welches sich nahe an das von Prony ermittelte anschlofs und vor diesem den wichtigen Vorzug hatte, dafs es zum Theil auf Messungen an grofsen Strömen basirte, ziemlich allgemein angenommen. Lejeune Dirichlet, der damals in Paris studirte, übersetzte auf Prony's Wunsch diese Abhandlungen, und letzterer war sehr erfreut, eine überraschende Bestätigung des von ihm aufgestellten Gesetzes zu finden. Auch d'Aubuisson ***) begnügte sich später Eytelwein's Resultate anzuführen. Durch diese schien die Theorie der Bewegung des Wassers in Flufsbetten abgeschlossen.

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes rechtfertigt es sich gewifs, die Werthe der Constanten nach der richtigen Methode zu berechnen und zugleich zu untersuchen, wie grofs die Wahrscheinlichkeit dieser Resultate ist.

---

*) Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes. Paris 1804.

**) Mécanique céleste. Liv. III, art. 39 et 40.

***) Traîté d'hydraulique. Paris 1834, Seite 111.

Aus der von Eytelwein mitgetheilten Vergleichung der durch Rechnung dargestellten Werthe mit den beobachteten ergiebt sich, dafs die Messungen, welche von Funk herrühren, weit weniger übereinstimmen, als die übrigen, obwohl von denselben schon einige gar nicht benutzt waren, weil sie sehr abweichende Resultate gaben. Dafs eine solche Ausschliefsung einzelner Messungen, und zwar nur deshalb, weil sie von den übrigen abweichen, sehr gewagt ist, und leicht grofse Irrthümer veranlassen kann, ist bereits oben § 23 nachgewiesen. Jedenfalls aber mufsten die von verschiednen Beobachtern herrührenden Messungen besonders geprüft werden, weil ihre Gewichte sehr verschieden sind.

Von Brünings rühren sechszehn Beobachtungen her, welche aus den Mittheilungen von Wiebeking*) entlehnt sein sollen. Eine nähere Vergleichung mit diesem Werk zeigte indessen aufser dem Druckfehler in der 59 ten noch eine kleine Unrichtigkeit in der 62 ten Beobachtung, insofern der Umfang p doch gröfser, als die Breite sein mufs. Aufserdem hat Wiebeking siebenzehn Beobachtungen von Brünings mitgetheilt, von denen jedoch eine, nämlich Litt. F ohne Angabe eines Grundes von Eytelwein ausgelassen ist. Am meisten überrascht es aber, dafs Wiebeking das Gefälle dieser Stromstrecken zur Zeit der Messungen, oder α, gar nicht angiebt, während Eytelwein dafür bestimmte Werthe eingeführt und diese der Rechnung zum Grunde gelegt hat. Aus Wiebekings Beschreibung dieser Beobachtungen läfst sich nicht entnehmen, dafs die Gefälle wirklich gemessen wurden. Der Zweck war nämlich nur die Feststellung des Verhältnisses, in welchem die Wassermenge des obern Rheins zwischen Waal, Leck und Yssel sich vertheilt, wozu die Querschnitte und Geschwindigkeiten genügten. Am Schluss der erwähnten Stelle im Wiebeking'schen Werke werden freilich die Neigungs-Verhältnisse des Rheins und der Waal im Allgemeinen angegeben, doch beziehn sich diese keineswegs auf die Stellen und die Zeiten, in denen die Profile und die Geschwindigkeiten gemessen wurden, und stimmen aufserdem auch nicht entfernt mit denjenigen überein, die Eytelwein zum Grunde gelegt hat.

*) Allgemeine Wasserbaukunst. Erste Ausgabe 1798. Theil I. Seite 344—388.

Woltman*) spricht gleichfalls von diesen Beobachtungen, die Brünings ihm mitgetheilt hatte, und rühmt die grofse Sorgfalt, womit die Geschwindigkeiten gemessen wurden, dafs aber gleichzeitig die Gefälle ermittelt wären, erwähnt er nicht und sagt vielmehr ausdrücklich, dafs es nur Absicht gewesen „zu wissen, wie sich die Wassermengen dieser verschiednen Flüsse gegen einander verhalten.“

Dagegen hat Funk**) dieselben sechszehn Beobachtungen von Brünings, die Eytelwein benutzte und die gleichfalls aus Wiebeking's Werk entnommen sein sollen, zusammengestellt, und seine Angaben stimmen mit Ausschlufs jenes Druckfehlers genau mit denen von Eytelwein überein. Funk giebt aber auch die relativen Gefälle oder die Neigungs-Quotienten an, welche sieben verschiedne Werthe haben. Woher er diese entnommen, theilt er nicht mit, und da jede andre Vermuthung an sich höchst unwahrscheinlich wäre, so mufs man zunächst voraussetzen, er und nach ihm Eytelwein haben von diesen Gefällen auf irgend eine Weise sichere Kenntnifs erhalten.

Um aus diesen sechszehn Beobachtungen Resultate zu ziehn, mögen dieselben mit dem einfachsten Ausdruck

$$c = \gamma \sqrt{\frac{aq}{p}}$$

verglichen werden. Sie sind nachstehend in der Reihenfolge zusammengestellt, wie Funk sie geordnet hat, wobei jede der sieben Gruppen die Beobachtungen umfafst, in denen das relative Gefälle γ gleich grofs sein soll. Die letzte Spalte enthält den jedesmaligen Werth von γ.

Nummer der Beobachtung nach Funk	Eytelwein	Neigungs-Quotient	γ
1	52	7571	98,026
2	62	7571	90,894
3	44	9045	80,053
4	54	9045	90,900
5	53	4542	83,058
6	67	4542	90,888

*) Beiträge zur hydraulischen Architectur. Band III. Seite 350 ff.
**) Beiträge zur allgemeinen Wasserbaukunst. 1808 Seite 97.

Nummer der Beobachtung nach Funk	Eytelwein	Neigungs-Quotient	γ
7	45	7957	84,458
8	55	7957	100,823
9	60	7957	109,165
10	61	7957	90,900
11	34	4931	86,190
12	56	4931	90,892
13	43	6701	90,074
14	50	6701	90,892
15	47	5825	86,632
16	59	5825	90,919

Der wahrscheinlichste Werth von γ oder das arithmetische Mittel aus den vorstehenden ist 90,923. Die Summe der Quadrate der Abweichungen von demselben ist

$$[x\,x] = 702{,}542$$

daher der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler

$$w = 0{,}6745 \,.\, \sqrt{\frac{[x\,x]}{m-1}}$$
$$= 0{,}6745 \,.\, \sqrt{\frac{702{,}542}{15}}$$
$$= 4{,}6160$$

Bei dieser Gröſse des Beobachtungs-Fehlers ist es ein höchst wunderbares Zusammentreffen, daſs in jeder der sieben Gruppen und zwar jedesmal in der letzten Beobachtung, die Werthe von γ sehr nahe dieselben sind, und sogar bis auf geringe Abweichungen, die im Maximum nur 0,019 betragen, sich dem bereits früher von Eytelwein eingeführten Werth $\gamma = 90{,}9$ nähern. Die mittlere Abweichung beträgt bei diesen Beobachtungen nur 0,0076, sie ist also noch nicht dem 500ten Theil des wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehlers gleich, sondern nur 0,00165 w. Für einen Fehler, der innerhalb dieser Grenze bleibt, ist die Wahrscheinlichkeit oder $\int y\,dx$ nur 0,0000885, oder man kann 11296 gegen 1 wetten, daſs in der letzten Beobachtung der ersten Gruppe diese Uebereinstimmung sich zufällig nicht darstellen wird. Nun wiederholt sich aber dieser ganz unglaubliche Fall siebenmal nach einander an derselben Stelle, es ist also ein Ereignifs eingetreten, dessen Wahrscheinlichkeit der siebenten Potenz jenes kleinen Bruchs gleich ist. Dieselbe drückt sich durch eine Zahl aus, in welcher auf das Decimal-Komma zunächst 28 Nullen und sodann die Ziffern 4265 folgen. Dieser Bruch werde durch μ bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit für das vorliegende Ereignifs, wenn dasselbe wirklich nur zufällig eintrat, ist demnach unglaublich geringe, und eben deshalb wird der Verdacht rege, dafs es nicht durch Zufall, sondern absichtlich herbeigeführt wurde. Indem es an sich sehr unwahrscheinlich ist, dafs Eytelwein, der doch in naher Beziehung zu Funk stand, gar nicht erfahren habe, dafs Letzterer die angegebenen Gefälle nicht aus wirklichen Beobachtungen entnommen, sondern dieselben eben nach der Eytelwein'schen Formel berechnet habe, so setze man die Wahrscheinlichkeit einer solchen Voraussetzung nur 0,0001 und schliefse (nach § 6) von dem Ereignifs auf die Ursachen desselben. Man findet alsdann die Wahrscheinlichkeit der ersten Ursache, also des Zufalls, gleich

$$\frac{\mu}{\mu + 0{,}0001}$$

und die der zweiten, oder der Annahme, dafs die Gefälle berechnet worden, gleich

$$\frac{0{,}0001}{\mu + 0{,}0001}$$

Beide verhalten sich daher zu einander, wie

$$\mu : 0{,}0001$$

oder wie

1 zu 23447 000000 Billionen.

Gewifs giebt es nur wenig Wahrheiten, die mit einer so grofsen Wahrscheinlichkeit sich als solche herausstellen, wie diese zweite Voraussetzung, und es wäre eine sehr vortheilhafte Wette, wenn man alles Gold und Silber, welches geprägt und ungeprägt im Umlauf ist, gegen einen Pfennig auf die Behauptung verwetten könnte, dafs in der in Rede stehenden Untersuchung die Gefälle nicht wirklich gemessen, sondern nach der Eytelwein'schen Formel berechnet wurden.

Es leidet sonach keinen Zweifel, dafs Funk, wahrscheinlich in der Absicht, die Beobachtungen von Brünings zu vervollständigen, nach jener Formel die Gefälle berechnete. Wenn daher Eytelwein hieraus wieder das Gesetz der Bewegung des Wassers herleitete, so konnte dasselbe von dem früher zum Grunde gelegten nicht bedeutend abweichen, und es mufste auch mit den von Prony gefundenen Resultaten nahe übereinstimmen, da auch diese aus denselben wirklichen Beobachtungen hergeleitet waren. Hätte aber Funk für jede einzelne Messung mit gröfserer Schärfe die Rechnung geführt, so würde Eytelwein aus diesen Beobachtungen gefunden haben, dafs der Factor der ersten Potenz der Geschwindigkeit gleich Null, und der der zweiten genau derselbe ist, den er früher gefunden hatte, weil aus diesem die angeblichen Beobachtungen hergeleitet waren.

Was die von Funk an der Weser angestellten Messungen betrifft, so sollte man zwar vermuthen, dafs dieselben wirklich vollständig ausgeführt wären, insofern der Mittheilung dieser Beobachtungen eine sehr ausführliche Beschreibung des Weser-Nivellements vorangeht. Nichts desto weniger erweckt es schon Verdacht, dafs bei den verschiedensten Wasserständen die Gefälle immer dieselben bleiben. Wenn man aber aus diesen einzelnen Beobachtungen den Coefficient γ herleitet, so bemerkt man auch hier die an sich ganz unwahrscheinliche Eigenthümlichkeit, dafs in jeder Reihe einmal der Eytelwein'sche Coefficient 90,9 vorkommt, und zwar geschieht dieses viermal, nämlich in den Reihen, die Funk mit H, I, K und M bezeichnet, wieder in den letzten Beobachtungen, wogegen in der Reihe L, die nur aus zwei Messungen besteht, das Gefälle zweimal berechnet, und aus beiden Werthen das Mittel genommen zu sein scheint. In der Reihe G entspricht dagegen das Gefälle demjenigen, das für den Wasserstand 10,54 berechnet wurde.

Der Untersuchung Eytelweins sind also grofsen Theils Beobachtungen zum Grunde gelegt, die nicht wirklich gemacht, sondern nur fingirt waren, und unglücklicher Weise trifft dieser Vorwurf gerade diejenigen, welche sich auf grofse Ströme beziehn, und die daher vorzugsweise wichtig erscheinen. Wenn man von diesen absieht, so bleiben nur noch die Beobachtungen von Dubuat und Woltman übrig. Gegen die Glaubwürdigkeit derselben begründet sich kein Verdacht, sie beziehn sich aber nur auf kleinere Wasserläufe. Dubuat's Versuche sind sogar in der grofsen Mehrzahl nur in hölzernen Rinnen angestellt. Wenn auch diese ausgeschlossen werden, so bleiben nur die Messungen im Canal du Jard und im Haine-Flusse übrig, deren Breite 30 bis 45 Fufs betrug *). Es sind im Ganzen 10 Beobachtungen, doch dürfen die beiden ersten nicht berücksichtigt werden, da sie vor der Krautung des Canals angestellt wurden. Die vier Beobachtungen von Woltman beziehn sich dagegen auf kleine Entwässerungs-Gräben bei Cuxhaven von 8 und 14 Fufs Breite **).

Man könnte auch gegen diese wenigen Messungen noch das Bedenken erheben, dafs die Geschwindigkeiten sowohl von Dubuat, wie von Woltman nur in der Oberfläche gemessen wurden, also die mittleren Geschwindigkeiten unbekannt sind. Eine Reduction nach irgend einer der verschiednen dafür vorgeschlagenen Regeln würde indessen immer sehr zweifelhaft bleiben und aufserdem auch zu keinen erheblichen Aenderungen führen. Dazu kommt noch, dafs in so kleinen Canälen und bei so geringer Geschwindigkeit das Wasser in der Oberfläche jedesmal sich etwas langsamer bewegt, als einige Zolle tiefer, und daher anzunehmen ist, dafs diese Geschwindigkeit sich der mittlern etwas mehr nähert.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Beobachtungen von Dubuat durch Arabische und die von Woltman durch Römische Ziffern bezeichnet und nach den Geschwindigkeiten geordnet. Sie sind sämmtlich auf Rheinländisches Fufs-Maafs reducirt, und zunächst ist aus jeder einzelnen nach der Formel

$$c = \gamma \sqrt{\frac{a q}{p}}$$

die Constante γ berechnet. Von den in der fünften Spalte beigefügten Abweichungen x wird später die Rede sein.

*) Dubuat principes d'hydraulique. II. Volume. Sect. I. partie 8.
**) Beiträge zur Baukunst schiffbarer Canäle. Seite 286 und 287.

Nummer	c	$\frac{\alpha q}{p}$	γ	x
177	0,627	0,000 0590	81,68	— 0,000 0120
179	0,672	0,000 0683	81,33	— 0,000 0147
178	0,829	0,000 0913	86,74	— 0,000 0114
III	0,895	0,000 1264	79,57	— 0,000 0339
IV	0,895	0,000 1150	83,43	— 0,000 0225
I	1,019	0,000 1398	86,14	— 0,000 0211
181	1,174	0,000 1427	98,32	+ 0,000 0135
180	1,357	0,000 1634	106,20	+ 0,000 0435
II	1,369	0,000 2071	95,13	+ 0,000 0035
183	1,377	0,000 1587	109,26	+ 0,000 0540
184	2,740	0,000 8707	92,87	— 0,000 0507
182	3,029	0,000 9709	97,20	+ 0,000 0281

Man kann hiernach mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dafs γ nicht constant ist, sondern bei zunehmender Geschwindigkeit etwas gröfser wird. Es wurde daher noch der Versuch gemacht, in gleicher Weise, wie Prony und Eytelwein gethan, diese Beobachtungen an den Ausdruck

$$\frac{\alpha q}{p} = r c + s c^2$$

anzuschliefsen. Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hat man alsdann die beiden Bedingungs-Gleichungen

$$\left[\frac{\alpha q}{p} \cdot c\right] = [c^2]\, r + [c^3]\, s$$

und

$$\left[\frac{\alpha \cdot q}{p} \cdot c^2\right] = [c^3]\, r + [c^4]\, s$$

oder durch Einführung der Zahlenwerthe aus der vorstehnden Tabelle

$$0{,}006737 = 27{,}847 \,.\, r + 61{,}272 \,.\, s$$
$$0{,}017088 = 61{,}272 \,.\, r + 156{,}158 \,.\, s$$

Man findet daraus

$$r = 0{,}000\,008\,468$$
$$s = 0{,}000\,106\,106$$

und wenn man mit Benutzung dieser Werthe für die verschiednen

Geschwindigkeiten $\frac{aq}{p}$ berechnet, so weichen die letztern von den beobachteten um diejenigen x ab, welche in der vorstehnden Tabelle angegeben sind. Die Summe der Quadrate der Abweichungen beträgt

$$[xx] = 0{,}000\,000\,010\,954$$

Hieraus ergiebt sich der wahrscheinliche Beobachtungs-Fehler

$$w = 0{,}000\,022\,323$$

und man findet die wahrscheinlichen Fehler der Constanten r und s

$$w(r) = 0{,}000\,006\,987$$
$$w(s) = 0{,}000\,002\,950$$

Es ergiebt sich, dafs die Constante r nur sehr wenig gröfser als ihr wahrscheinlicher Fehler ist, man hat nämlich annähernd

$$r = 1{,}2 \,.\, w(r)$$

und man kann daher nur 58 gegen 42 oder 7 gegen 5 wetten, dafs die Constante r nicht Null ist, oder dafs in der zum Grunde gelegten Gleichung überhaupt ein Glied vorkommt, welches die erste Potenz der Geschwindigkeit als Factor enthält.

Diese 12 Beobachtungen, welche unter den 91, die Eytelwein benutzte, allein brauchbar sind, rechtfertigen demnach nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit die Einführung des Gliedes $r \,.\, c$ in den früher von Chezy und Woltman benutzten Ausdruck. Das Resultat würde sich freilich anders herausstellen und in höherem Grade die von Prony angegebne Formel bestätigen, wenn man die Beobachtung Nr. 184, die Dubuat gemacht hat, unberücksichtigt lassen dürfte. Ein solches Verfahren wäre indessen nicht gerechtfertigt. Man könnte dasselbe auch erreichen, wenn man nicht die Summe der Quadrate der absoluten, sondern die der relativen Abweichungen zu einem Minimum machen wollte. In diesem Falle würden nämlich die Beobachtungen bei kleinern Geschwindigkeiten, für welche die Abweichungen x sechsmal hinter einander negativ sind, eine gröfsere Geltung erhalten. Aber auch hierzu liegt kein Grund vor, weil nicht anzunehmen, dafs diese Messungen mit gröfsrer Schärfe ausgeführt sind, als die übrigen, die sich auf gröfsre Geschwindigkeiten beziehn.

§ 38.

Sehr wichtig ist die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Untersuchungen über die Festigkeit der Baumaterialien, wovon schon § 34 die Rede war. Die Mittelwerthe, die man dabei gewöhnlich allein berücksichtigt, sind nur in dem Fall als ausreichend anzusehn, wenn zahlreiche Verbandstücke sich gegenseitig so unterstützen, dafs die zufällige gröfsre Festigkeit eines Stücks den Bruch eines andern verhindert. Dieses wäre beispielsweise der Fall, wenn eine grofse Last gleichmäfsig an viele Zugstangen gehängt würde. Eine solche Anordnung kommt indessen bei Constructionen wohl nur selten vor, meist trifft auf jedes Verbandstück ein gewisser Druck oder Zug, und es kommt darauf an, ihm solche Dimensionen zu geben, dafs es mit Sicherheit den nöthigen Widerstand leistet. Der aus Versuchen hergeleitete Mittelwerth bezeichnet nur die wahrscheinlichste Gröfse der Festigkeit, läfst aber nicht erkennen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man gewisse Abweichungen erwarten darf, und welche Verstärkungen man daher anbringen mufs, um letztere unschädlich zu machen. Diese Abweichungen lassen sich aber leicht und sicher aus der Vergleichung der einzelnen Messungen mit dem Mittelwerth erkennen und durch den wahrscheinlichen Fehler ausdrücken. Letzterer ist in diesem Falzwar kein Beobachtungs-Fehler, vielmehr beruht er auf der unvermeidlichen Verschiedenheit des Materials, da diese aber wieder zufällig ist, so gelten auch für sie die obigen Gesetze.

Der wahrscheinliche Fehler läfst sich um so sichrer bestimmen, je gröfser die Anzahl der Versuche ist, und je vollständiger dieselben alle Abstufungen des Materials umfassen, das in der Construction benutzt werden soll. Sind einzelne Stücke so fehlerhaft, dafs sie wegen schlechter Beschaffenheit schon bei der Abnahme verworfen werden, so braucht man die Versuche nicht auf sie auszudehnen, wohl aber kommen häufig verborgne Fehler vor, und diese veranlassen, dafs einzelne Versuche ein besonders ungünstiges Resultat geben. Tritt ein solches ein, so darf dieses keineswegs als ungültig vernachlässigt werden, es dient vielmehr wesentlich zur richtigen Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers.

Gemeinhin lassen sich solche Versuche nicht im Großen anstellen, nur bei gewalztem Eisen pflegt man die Elasticität der sämmtlichen Haupt-Verbandstücke zu prüfen. Die meisten Versuche werden in kleinen Dimensionen gemacht, wobei die vorhandnen Mängel des Materials viel augenscheinlicher hervortreten, und kaum noch ein bedeutender Fehler unbemerkt bleiben kann. Die hieraus abgeleiteten Resultate stellen sich daher im Allgemeinen vergleichungsweise bedeutend günstiger heraus, als diejenigen, welche die Verbandstücke in ihren vollen Dimensionen ergeben würden. Man darf dieses nicht unbeachtet lassen.

Als Beispiel für Untersuchungen solcher Art wähle ich die Messungen der absoluten Festigkeit des Eisens, die in der Fabrik von J. C. Harkort auf Harkotten im October 1860 angestellt wurden *). Stäbe von Rundeisen etwa 10 Zoll lang und 9 Linien stark wurden auf 2 Zoll Länge cylindrisch abgedreht, so daſs hier der Durchmesser $^5/_8$ Zoll oder $7\,^1/_2$ Rheinländische Linien hielt. Die nachstehnde Tabelle giebt die Gewichte in Pfunden an, unter denen die Cylinder zerrissen. Ohne Zweifel wäre es zur Beurtheilung der Festigkeit viel wichtiger gewesen, diejenigen Beobachtungen zu erfahren, unter welchen die Elasticitäts-Grenze erreicht wird, oder das Eisen sich dauernd verlängert. Dieses lieſs sich jedoch bei der sehr geringen Länge der abgedrehten Cylinder nicht messen, und ich konnte die Untersuchung hierauf nicht ausdehnen, da mir keine gröſsern Reihen von Beobachtungen dieser Art bekannt geworden sind.

Die siebenzehn hier geprüften Eisensorten waren aus verschiednen inländischen Fabriken bezogen, die in einer besondern Anlage derselben Zeitschrift zum Theil benannt sind. Das Eisen war im Bruch theils körnig, theils sehnig, und theils war es in Cokesfeurung, theils mit Holzkohlen dargestellt. Die Mittelwerthe dafür sind wohl verschieden, doch sind diese Unterschiede geringer, als diejenigen, die zuweilen in derselben Eisensorte vorkommen, woher nachstehend die Resultate aller Proben gemeinschaftlich behandelt sind. Dieses war auch nothwendig, um eine groſse Anzahl von Beobachtungen der Rechnung zum Grunde zu legen.

*) Beilage zu Nr. 22 der Zeitschrift: Berggeist. 1861.

Die erste Spalte bezeichnet die Nummer der Eisensorte, die zweite die des Versuchs, und die dritte das angehängte Gewicht in Pfunden, wobei der Cylinder zerrifs. Der Querschnitt von diesem mafs jedesmal 0,307 Quadrat-Zoll.

1	1	18091
	2	16945
	3	16945
2	4	20010
	5	20364
	6	20364
3	7	15727
	8	15727
	9	14910
4	10	20000
	11	20000
	12	24727
5	13	14491
	14	19910
	15	19910
6	16	14855
	17	14491
7	18	14036
	19	14455
8	20	16740
	21	17680
	22	15820
9	23	17680
	24	16740
	25	16740
10	26	21400
	27	21400
	28	20460
11	29	21400
	30	20460
	31	20460
12	32	16740
	33	17680
	34	17680
13	35	19540
	36	19540
	37	17680
14	38	14880
	39	13960
	40	15820
17	41	16740
	42	17680
	43	17680
18	44	13960
	45	15820
	46	16740
19	47	15820
	48	16740
	49	16740

Die Eisensorten Nr. 1, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14 und 19 werden als sehnig, Nr. 5 und 18 als halb sehnig und halb körnig und Nr, 2, 4, 9, 11, 13 und 17 als körnig bezeichnet. Die Mittelwerthe dieser drei Gattungen verhalten sich zu einander, wie

1 : 1,010 : 1,162

Man kann daraus schliefsen, dafs das körnige Eisen fester ist, als das sehnige, aber die Sorte Nr. 4, welche nach einer Probe die festeste von allen war, weicht nur sehr wenig von dem sehnigen Eisen Nr. 10 ab, und die Festigkeit des halb sehnigen und halb körnigen Eisens ist im Mittelwerthe sehr nahe eben so grofs, wie die des sehnigen.

Ferner sind die Sorten Nr. 8, 9 und 17 als Holzkohlen-Eisen, Nr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13 und 19 als Cokes-Eisen bezeichnet, während Nr. 18 mit Holzkohlen und Cokes bereitet war. Die Mittelwerthe der Festigkeit dieser drei Gattungen verhalten sich, wie

$$1 : 1{,}034 : 0{,}909.$$

Diese Unterschiede sind theils geringer, theils aber stellen sie sich noch unregelmäfsiger heraus, als die frühern.

Dagegen zeigen sich in verschiednen Proben derselben Eisensorten Differenzen, die viel gröfser, als die vorstehnden sind, so

in der Sorte Nr. 4 $20000 : 24727 = 1 : 1{,}236$

in der Sorte Nr. 5 $14490 : 19910 = 1 : 1{,}374$

Hiernach rechtfertigt es sich gewifs, dafs die sämmtlichen Versuche gemeinschaftlich behandelt sind. Die Summe aller Gewichte, unter denen die Cylinder zerrissen, beträgt 864 378 Pfd. und die Zahl der Versuche 49. Der mittlere Werth der absoluten Festigkeit stellt sich also auf 17 640 Pfd. Sucht man die Differenzen zwischen diesem Werthe und den einzelnen Beobachtungs-Resultaten und quadrirt dieselben, so findet man die Summe der Fehler-Quadrate gleich 286 742 000. Hieraus ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler gleich 1650 Pfund, er stellt sich also nahe auf 10 Procent des ganzen Werths.

Der Querschnitt der zerifsnen Cylinder mafs 0,307 Quadratzoll, woher 3,26 solcher einen Quadratzoll bilden. Man nimmt gewöhnlich an, die Festigkeit sei proportional dem Querschnitt, sie würde daher für einen Stab des hier geprüften Eisens von 1 Quadratzoll Querschnitt im Mittelwerth $3{,}26 \,.\, 17\,640 = 57\,500$ Pfund betragen.

Diese Auffassung ist indessen zweifelhaft. Man vergleiche zwei Stäbe, von denen der Querschnitt des einen n mal so grofs, als der des andern ist, und denke ihn aus n Stäben zusammen geschweifst, die mit diesem sowohl in der Stärke, wie in der Textur so genau übereinstimmen, dafs in allen die schwächern Stellen genau zusammentreffen. In diesem Fall würde die Festigkeit beider Stäbe ihren Querschnitten proportional sein. Wenn dagegen jene einzelnen Stäbe, die im Allgemeinen mit einander übereinstimmen, in der Art verbunden sind, wie sie zufällig gefafst wurden, so dafs die schwache Stelle des einen mit der festern des andern zusammenfällt, so wird der Stab verhältnifsmäfsig eine gröfsre Last tragen, als der einzelne.

Diese Ausgleichung dürfte vorzugsweise bei der Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers zu beachten sein, und zwar in gleicher Weise, wie bei Messung einer Linie durch n maliges Ausziehn der Ketten. Eben so wie hier der wahrscheinliche Fehler der ganzen Linie zu dem der einzelnen Kettenlänge sich nicht wie $n:1$ sonder nur wie $\sqrt{n}:1$ verhält, so darf man auch annehmen, dafs der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung der Festigkeit des Stabes von 1 Quadratzoll Querschnitt nach vorstehenden Beobachtungen

$$1650 \cdot \sqrt{3{,}26} = 2980 \text{ Pfund}$$

betragen wird. In gleicher Weise vermindert sich relativ auch wieder der wahrscheinliche Fehler für Stäbe, deren Querschnitt mehrere Zolle enthalten.

Dabei kommt jedoch die Frage in Betracht, ob man annehmen darf, dafs Stäbe von verschiednem Querschnitt im äufsern Ansehn die darin vorkommenden Mängel mit gleicher Sicherheit erkennen lassen, oder ob man besorgen mufs, dafs stärkere Stäbe noch als fehlerfrei übernommen und verwendet, während schwächere von derselben Beschaffenheit schon als unbrauchbar erkannt und zurückgewiesen werden. Diese Besorgnifs dürfte sich wohl begründen.

Navier *) theilt einige Beobachtungen von Perronet über die Festigkeit gewalzter Eisenstücke von verschiednem Querschnitt mit, die jedoch, wie die nachstehnde Zusammenstellung der mittlern Werthe zeigt, zu keinem Resultat führen. k bezeichnet die Last,

*) Résumé des leçons données à l'école des Ponts et chaussées. I. Partie §§ 28 und 29.

in Kilogrammen für jedes Quadrat-Millimeter Querschnitt, wobei der Stab zerrifs, und Q den Querschnitt in Quadrat-Millimetern.

A. Rundeisen		B. prismatisches	
Q	k	Q	k
10,5	39,6	12,9	35,9
7,88	55,7	9,02	37,5
7,62	34,8	6,77	50,7

Eben diese Beobachtungen sind auch, soviel bekannt, die einzigen, die mit Stäben von verschiednen Längen angestellt sind, nach denen man also die bisher unbeachtet gebliebne, aber höchst wichtige Frage beantworten könnte, in welcher Beziehung die Länge eines gleichmäfsig geformten Stabes zu seiner Festigkeit gegen das Zerreifsen oder das Ueberschreiten der Elasticitäts-Grenze steht. Dafs eine solche Beziehung vorhanden ist, darf man wohl nicht bezweifeln, indem der Bruch oder das zu starke Ausziehn niemals in allen Theilen des Stabes, sondern meist nur an einer einzigen Stelle eintritt, die zufälliger Weise die schwächste ist, worin also gewisse Fehler vorkommen, die man äufserlich nicht bemerkt hatte. Augenscheinlich sind solche Fehler in einem längern Stabe zahlreicher, als in einem kürzern, es ist daher auch wahrscheinlich, dafs einzelne derselben in jenem gröfser sind, als in diesem, und er daher früher zerrissen wird. In welchem Maafs die Tragfähigkeit des Stabes bei gröfsrer Länge desselben sich vermindert, läfst sich im Allgemeinen nicht entscheiden und hängt wohl vorzugsweise von der Sorgfalt seiner Fabrikation ab. Gewifs aber darf man in diesem Fall nicht eine solche Vergröfserung des wahrscheinlichen Fehlers, wie etwa beim Messen einer Linie durch wiederholte Kettenschläge, erwarten, wobei das Resultat gar zu ungünstig ausfallen würde. Aus jenen 49 Beobachtungen, die an den 2 Zoll langen Cylindern angestellt wurden, würde bei dieser Auffassung der wahrscheinliche Fehler für einen 10 Fufs langen Stab von gleichem Querschnitt $1650 \cdot \sqrt{60} = 12\,780$ Pfund betragen, und da der Mittelwerth, wobei die kurzen Stäbe zerrissen, 17 640 Pfund gefunden war, so wäre es eben so wahrscheinlich, dafs der 10 Fufs lange Stab unter der Last von 4860 Pfund schon zerreifst, als dafs er dieselbe noch trägt. Dazu kommt aber noch, dafs in diesem Fall die Ausgleichung der positiven und negativen Fehler gar nicht stattfindet, indem jene oder die zufällige gröfsre Stärke an einzelnen Stellen nicht in Betracht kommt, und es sich nur um die schwächern Stellen handelt.

Hiernach würden Messungen an Stäben von verschiedner Länge sehr wichtig sein, und wiewohl die von Navier mitgetheilten Beobachtungen sich nur auf die Längen von 3 bis 25 Zoll beschränken, auch wegen der sehr starken Abweichungen höchst unsicher sind, so habe ich sie dennoch berechnet, um zu sehn, ob sie eine Abhängigkeit der Festigkeit eines Stabes von seiner Länge vielleicht andeuten. Es mufs aber erwähnt werden, dafs das Gewicht des Stabes selbst, hier ganz unbeachtet bleiben darf, da es in Vergleich zu seiner Tragfähigkeit zu unbedeutend ist.

Das Gewicht, wobei der Stab zerreifst, in Kilogrammen ausgedrückt und auf ein Quadrat-Millimeter reducirt, ist nachstehend mit k und die Länge der Stäbe in Metern mit b bezeichnet.

A. Rundeisen.

k	b
37,3	0,650
55,7	0,650
32,1	0,650
38,0	0,325
36,4	0,325
41,4	0,162
56,3	0,162
37,8	0,162
41,6	0,081
55,0	0,081
33,1	0,081

B. prismatisches.

k	b
35,5	0,650
36,7	0,650
46,6	0,650
47,1	0,650
39,8	0,325
38,3	0,325
51,7	0,325
32,7	0,162
53,9	0,162
35,5	0,081
54,3	0,081

Indem ich die Gleichung

$$k = r + b s$$

zum Grunde legte, ergaben sich nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Bedingungsgleichungen für A

$$464{,}6 = 11 \,.\, r + 3{,}329 \,.\, s$$

und

$$1379{,} = 3{,}329 \,.\, r + 1{,}57716 \,.\, s$$

Hieraus folgt

$$k = 43,673 - 4,748 \,.\, b$$

Es wird also in der That eine Verminderung der Festigkeit bei zunehmender Länge angedeutet, doch ist dieses Resultat durchaus unsicher, indem der wahrscheinliche Fehler von s nahe das Doppelte des Werthes von s, nämlich 8,508 beträgt

Man hat ferner für die Reihe B

$$472,1 = 11 \,.\, r + 4,061 \,.\, s$$

und

$$171,56 = 4,061 \,.\, r + 2,0725 \,.\, s$$

$$k = 44,674 - 4,755 \,.\, s$$

Beide Reihen geben sonach sehr nahe übereinstimmende Resultate, doch ist auch für die letzte der wahrscheinliche Fehler des Factors $s = -4,755$ nahe das Doppelte seines Werthes, nämlich 7,437. Es ist daher wahrscheinlich, dafs das dort, wie hier, angedeutete Gesetz nur von den zufälligen Abweichungen der Messungen unter sich herrührt.

Indem nach Vorstehndem die Umstände, welche die Festigkeit des Eisens bedingen, so wenig bisher bekannt geworden sind, mufs man zur Zeit wohl darauf verzichten, durch methodisches Verfahren diejenigen Dimensionen zu ermitteln, welche einem bestimmten Grade der Sicherheit entsprechen. Es bleibt daher nur übrig, in der bisher üblichen Weise, durch mehr oder weniger begründete Zusätze zu den aus Beobachtungen hergeleiteten Mittelwerthen der Festigkeit gegen Unfälle sich sichern. Was aber über das Eisen gesagt ist, gilt auch, vielleicht in noch höherm Grade, für alle Baumaterialien.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dafs die Beseitigung der angedeuteten Mängel gewifs nicht leicht sein wird, aber man würde schon viel gewinnen, wenn aus den vielfach angestellten Beobachtungen nicht nur Mittelwerthe hergeleitet, sondern auch die Abweichungen der einzelnen Messungen berücksichtigt und die wahrscheinlichen Fehler berechnet würden, wonach allein die Sicherheit der gefundnen Resultate beurtheilt werden kann.

§ 39.

Es mag noch von der Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf einige der gewöhnlichsten Fälle beim Feldmessen die Rede sein.

Man habe in einem Dreieck, das man bei der mäſsigen Länge seiner Seiten als ein ebnes ansehn kann, die drei Winkel gemessen, aber in Folge der unvermeidlichen Beobachtungs-Fehler sei die Summe derselben nicht, wie sie sein sollte, 180 Grade, sondern um die Gröſse μ geringer, woher die gemeſsnen Winkel

$$a + b + c = 180^0 - \mu$$

Es sind also gewisse Verbesserungen dabei anzubringen, die mit α, β und γ bezeichnet werden, und deren wahrscheinlichste Werthe man sucht, während man weiſs, daſs

$$\alpha + \beta + \gamma = \mu$$

folglich

$$\gamma = \mu - \alpha - \beta$$
$$d\gamma = - d\alpha - d\beta$$

Die wahrscheinlichste Annahme ist, daſs die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum darstellt, woher

$$2\alpha d\alpha + 2\beta d\beta + 2\gamma d\gamma = 0$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Factor 2 fortläſst und für γ und $d\gamma$ die vorstehnden Werthe einführt, so ergiebt sich

$$2\alpha d\alpha + 2\beta d\beta + \alpha d\beta + \beta d\alpha - \mu d\alpha - \mu d\beta = 0$$

Indem β und α, und sonach auch die Differenziale derselben von einander unabhängig sind, so muſs die Summe der Glieder, die $d\alpha$ als Factor enthalten, an sich gleich Null sein, und dasselbe gilt auch von denen, die $d\beta$ zum Factor haben. Die Gleichung zerfällt also in zwei andre, nämlich

$$2\alpha + \beta - \mu = 0$$

und

$$\alpha + 2\beta - \mu = 0$$

Hieraus ergiebt sich

$$\alpha = \tfrac{1}{3}\mu$$

und

$$\beta = \tfrac{1}{3}\mu$$

und daraus endlich auch

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\mu$$

Die wahrscheinlichsten Werthe der anzubringenden Verbesserungen erhält man sonach, wenn man die Differenz der Summe der gemeſsnen Winkel gegen 180 Grade in drei gleiche Theile zerlegt und jedem Winkel einen solchen Theil zusetzt, oder von demselben abzieht. Dieses Verfahren ist jedoch nur in dem Fall das richtige, wenn man sich bewuſst ist, alle drei Winkel mit gleicher Sorgfalt und unter gleich günstigen äuſsern Umständen gemessen zu haben. Die Sicherheit der Messung eines Winkels ist im Allgemeinen von der Gröſse desselben unabhängig, die Verhältnisse sind also wesentlich verschieden von den Längenmessungen, bei denen der wahrscheinliche Fehler mit der Länge zunimmt. Es kann indessen leicht geschehn, daſs einer jener drei Winkel in Folge äuſserer Umstände mit bedeutend gröſsrer oder geringerer Genauigkeit, als die andern bestimmt wurde. Dies wäre zum Beispiel der Fall, wenn man von einem Punkte aus sehr nahe gegen die Sonne visiren muſste, und deshalb das Fernrohr oder die Alhidade nicht so scharf einstellen konnte. Man muſs alsdann die Gröſse des betreffenden wahrscheinlichen Fehlers vergleichungsweise gegen die der übrigen Messungen schätzen. Wenn also beispielsweise die Genauigkeit in der Bestimmung des Winkels a nur halb so groſs, oder der wahrscheinliche Fehler doppelt so groſs erscheint, wie bei b und c, so darf man annehmen, daſs die Verbesserungen, welche die erforderliche Ergänzung der Summen zu 180 Grad darstellen sollen, in demselben Verhältniſs stehn. Bezeichnet man die Verbeſserung für b und c mit m, so hat man

$$a + 2m + b + m + c + m = 180^0$$

oder

$$2m + m + m = 4m = \mu$$

daraus ergiebt sich

$$m = \tfrac{1}{4}\mu$$

indem μ wieder die Abweichung der Summe der drei gemeſsnen Winkel von 180 Graden ist. Der Winkel a wäre also um $\frac{1}{2}\mu$, und die beiden andern um $\frac{1}{4}\mu$ zu ändern.

Bei Messung der Winkel in den sämmtlichen Eckpunkten eines Polygons treten dieselben Verhältnisse, wie beim Dreieck ein. Hat das Polygon n Seiten, so beträgt die Summe der Winkel $(n-2).180$ Grade. Ergiebt die Messung dafür einen um μ gröſsern oder geringern Werth, so wird unter der Voraussetzung einer gleichen Schärfe in allen Messungen die wahrscheinlichste Verbesserung eingeführt, wenn man jedem Winkel den n ten Theil von μ zusetzt, oder ihn um diese Quantität vermindert.

Häufig kommt es vor, namentlich wenn die Lage des Stationspunktes gegen andre bekannte Punkte bestimmt werden soll, die rings um den Horizont zerstreut liegen, daſs man die Winkel zwischen je zweien Punkten miſst. Kommt man dabei wieder an den ersten Punkt, so sollte die Summe der sämmtlichen Winkel 360 Grade betragen. Findet man dabei aber eine Differenz von der Gröſse μ, so ist dieselbe gleichmäſsig auf alle Winkel zu vertheilen.

Benutzt man dagegen nur eine geringere Anzahl von Punkten, deren Richtungen nicht weit von einander abweichen, so wählt man gewöhnlich zur Controlle das Verfahren, daſs man zuerst die Winkel zwischen je zwei zunächst liegenden Punkten, und sodann denjenigen zwischen dem ersten und letzten Punkt miſst. Dieser Winkel müſste der Summe der erstern gleich sein, wenn er aber um μ gröſser oder kleiner ist, so ergeben sich die wahrscheinlichsten Verbesserungen in derselben Art, wie bei den Dreiecks-Winkeln. Gesetzt, daſs es sich nur um 3 Punkte A, B und C handelt, und man habe zwischen A und B den Winkel $= a$, zwischen B und C den Winkel $= b$, zwischen A und C den Winkel $= c$ gefunden, so sollte

$$c = a + b$$

sein. Wegen der Beobachtungsfehler ist aber

$$c = a + b + \mu$$

Verbessert man nun die drei Winkel a, b und c, indem man sie um α, β und γ vergröſsert, so muſs, um die wahrscheinlichsten Werthe darzustellen

$$\alpha + \beta = \mu + \gamma$$
$$\gamma = \alpha + \beta - \mu$$

oder

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

muſs ein Minimum, also das Differenzial dieser Summe gleich

Null sein. Diese Bedingung führt eben so, wie früher zu den beiden Gleichungen

$$2\alpha + \beta - \mu = 0$$

und

$$\alpha + 2\beta - \mu = 0$$

und hieraus findet man

$$\alpha = \tfrac{1}{3}\mu$$
$$\beta = \tfrac{1}{3}\mu$$
$$\gamma = -\tfrac{1}{3}\mu$$

Bei Längen-Messungen ist das Verhältnifs insofern wesentlich ein andres, als der wahrscheinliche Fehler bei längern und kürzern Linien nicht mehr derselbe bleibt, vielmehr bei den erstern gröfser ist, als bei den letztern. § 33 wurde schon nachgewiesen, dafs dieser Fehler gleich $w\sqrt{a}$ ist, wenn w der wahrscheinliche Fehler der Maafs-Einheit und a die Länge der Linie bedeutet.

Beispielsweise sei die Entfernung zweier Punkte A und D sehr genau bekannt, indem sie vielleicht Winkelpunkte einer sorgfältig ausgeführten trigonometrischen Operation sind. Steckt man alsdann in der durch sie gegebnen geraden Linie zwei Zwischenpunkte B und C ab, und mifst mit der Kette die Entfernungen AB, BC und CD, die mit a, b und c bezeichnet werden, so sollte die Summe derselben der bekannten Entfernung AD gleich sein. Weicht diese indessen von jener um μ ab, und ist man überzeugt, dafs der Fehler vorzugsweise in der letzten Messung liegt, indem die frühere vergleichungsweise zu dieser als richtig angesehn werden kann, so entsteht die Frage, in welcher Weise man den bemerkten Fehler μ mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit auf die drei kürzern Linien vetheilen soll.

Wenn ein richtiges Maafs benutzt wurde, so sind die Fehler von a, b und c eben so leicht positiv, wie negativ und heben sich daher zum Theil auf. Jenes μ ist aber nur die Differenz zwischen den positiven und negativen Fehlern und gestattet kein Urtheil über die absolute Gröfse derselben. Dagegen ist die wahrscheinlichste Voraussetzung, die man unter diesen Verhältnissen machen kann, die Einführung der Bedingung, dafs die anzubringenden Correctionen α, β und γ den wahrscheinlichen

Fehlern der einzelnen Linien proportional sind. Man hat alsdann, wenn w der wahrscheinliche Fehler in der Messung der Längen-Einheit ist, die wahrscheinlichen Fehler

von a gleich $w\sqrt{a}$
von b - $w\sqrt{b}$
von c - $w\sqrt{c}$

also

$$\alpha = m\,w\sqrt{a}$$
$$\beta = m\,w\sqrt{b}$$
$$\gamma = m\,w\sqrt{c}$$

wo m einen unbekannten Factor bedeutet. Aufserdem ist

$$\alpha + \beta + \gamma = \mu = m\,w\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

folglich

$$m\,w = \frac{\mu}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

und hieraus ergeben sich die anzubringenden Verbesserungen

$$\alpha = \frac{\mu\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$
$$\beta = \frac{\mu\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$
$$\gamma = \frac{\mu\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Die Zeichen von α, β und γ sind aber jedesmal einander gleich und so zu wählen, dafs dadurch die bemerkte Differenz μ aufgehoben wird.

Wesentlich verschieden ist das Resultat, wenn die bemerkte Differenz nicht sowohl auf der Verbindung zufälliger Fehler beruht die eben so gut positiv, wie negativ sein können, als vielmehr auf einem unrichtigen Maafs, das bei den partiellen Messungen benutzt wurde. In diesem Fall sind die einzuführenden Verbesserungen nicht mehr den Quadratwurzeln der Längen, sondern den Längen selbst proportional, also

$$\alpha = \frac{\mu\,a}{a + b + c}$$

u. s. w.

§ 40.

Von grofser Wichtigkeit ist beim Feldmessen die Lösung der sogenannten Pothenot'schen Aufgabe, wodurch nämlich die Lage eines Stationspunktes bestimmt wird, indem man von demselben aus die Winkel zwischen andern bekannten Punkten mifst. Geschieht diese Messung mit der Boussole, so genügen schon zwei bekannte Punkte, die nicht mit dem Stationspunkt in derselben geraden Linie liegen. Sobald indessen sich Gelegenheit bietet, noch nach mehreren bekannten Punkten zu visiren, so wird dadurch nicht nur eine sichere Controlle möglich, sondern das Resultat läfst sich auch einigermaafsen berichtigen.

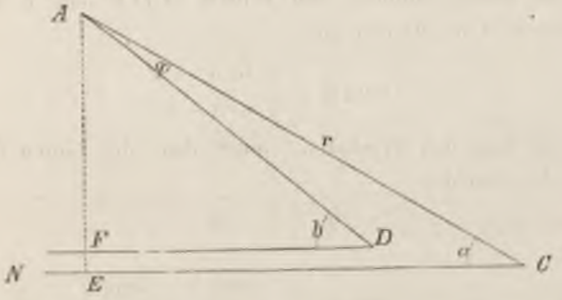
Wenn man nach n Punkten visirt, so erhält man eben so viele Richtungslinien, welche den unbekannten Stationspunkt schneiden würden, falls keine Fehler vorgekommen wären. Da Letztere nicht zu vermeiden sind, so bilden sich im Allgemeinen

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 1)$$

Durchschnittspunkte, die mehr oder weniger aus einander liegen, von denen aber auch einzelne zufällig zusammentreffen können. Geschieht Letzteres, so mufs man einem solchen Doppelpunkt den doppelten Werth der übrigen beilegen.

Die wahrscheinlichste Lage des Stationspunkts stimmt keineswegs mit dem Schwerpunkt der sämmtlichen Durchschnittspunkte überein, selbst wenn man den letztern gleiche Gewichte beilegt. Dieses würde freilich der Fall sein, wenn alle Festpunkte, nach denen man visirt, gleich weit entfernt wären. Die Bedingung ist aber, dafs die Summe der Quadrate der Verbesserungen der Winkel ein Minimum sein soll, und da gleiche Aenderungen der Winkel bei entferntern Festpunkten auf die Lage des Stationspunktes weit gröfsern Einflufs haben, als bei nähern, so mufs man auch die Abstände der Festpunkte berücksichtigen. Durch eine einfache Construction läfst sich die Aufgabe nicht lösen, wenn man daher keine eingehnde Rechnung anstellen will, so wird man sich mit einer ungefähren Schätzung begnügen. Man mufs alsdann den Stationspunkt so wählen, dafs kein Winkel eine bedeutende Veränderung erfährt, vielmehr jede Correction möglichst geringe bleibt, auch hat man vorzugsweise die zunächst liegenden Festpunkte zu berücksichtigen. Diese Regeln sind an sich begründet, vorausgesetzt, dafs die Lage aller Festpunkte mit gleicher Sicherheit gegeben ist.

Sobald es sich um eine genauere Messung handelt, wird man weder die Winkel mit der Boussole messen, noch auch mit geometrischen Constructionen sich begnügen dürfen, vielmehr ist alsdann die Rechnung nicht zu umgehn. Die Methoden, wonach man aus den zwei Winkeln, die zwischen drei ihrer Lage nach bekannten Punkten gemessen sind, den noch unbekannten Stationspunkt bestimmt, dürfen hier nicht wiederholt werden. Es fragt sich nur, wie man die wahrscheinlichste Lage dieses Punktes findet, wenn von ihm aus die Winkel zwischen mehr als drei Festpunkten gemessen wurden. In diesem Fall ist es am bequemsten, zunächst Näherungswerthe einzuführen, und alsdann die wahrscheinlichsten Correctionen derselben zu ermitteln. Man erreicht dabei den nicht unwesentlichen Vortheil, dafs man die höhern Potenzen dieser Correctionen vernachlässigen kann.



Die Lage der verschiednen Festpunkte ist durch Coordinaten gegeben, die sich auf den Meridian beziehn. Nach beistehnder Figur sei A einer dieser Festpunkte, dessen Coordinaten x und y sind. Als Stationspunkt sei vorläufig C angenommen, dessen Coordinaten X und Y. Der gemefsne Azimuthal-Winkel gegen A sei gleich β, während die Rechnung denselben für den Punkt C gleich a ergiebt. Der Meridian, parallel zur Linie NC, liege unterhalb der Figur und der Anfangspunkt der Abscissen auf der rechten Seite derselben.

$$AE = y - Y = r \sin a$$
$$EC = x - X = r \cos a$$

folglich

$$\operatorname{tang} a = \frac{y - Y}{x - X}$$

und

$$r = \frac{y - Y}{\sin a} = \frac{x - X}{\cos a}$$

Der aus der Tangente berechnete Winkel a wird von dem gemeſsnen Winkel β etwas abweichen, und es kommt darauf an, die angenommenen Coordinaten X und Y durch Einführung der Verbesserungen x' und y' so zu ändern, daſs der Stationspunkt von C nach einem solchen Punkte D rückt, bei dem der Winkel b die Eigenschaft besitzt, daſs mit Rücksicht auf alle benutzten Festpunkte die Summe der Quadrate $\beta - b$ ein Minimum wird. Auſserdem ist aber auch die Richtung des Meridians für den Stationspunkt noch unsicher, daher ist auch für β eine unbekannte Aenderung einzuführen, die gleich ψ sei. Der wirkliche Azimuthal-Winkel ist demnach $\beta + \psi$.

Man drücke nunmehr den Winkel ADF oder b durch die eingeführten Correctionen aus

$$\operatorname{tang} b = \frac{r \sin a - y'}{r \cos a - x'}$$

ferner hat man den Winkel φ, unter dem die Linien CA und DA sich schneiden

$$\varphi = b - a$$

folglich

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} b \, . \operatorname{tang} a}$$

und nach Einführung des vorstehnden Werthes von tang b

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{x' \sin a - y' \cos a}{r - x' \cos a - y' \sin a}$$

Indem man voraussetzen darf, daſs die Näherungswerthe X und Y nahe die richtigen sind, so sind die Correctionen x' und y' vergleichungsweise gegen die Linie r verschwindend klein, und man hat daher, wenn auch der sehr kleine Winkel φ mit seiner Tangente verwechselt wird,

$$\varphi = \frac{\sin a}{r} x' - \frac{\cos a}{r} y'$$

Durch diese Verbesserung wird der berechnete Winkel

$$b = a + \frac{\sin a}{r} x' - \frac{\cos a}{r} y'$$

Der beobachtete Winkel ist aber

$$\beta + \psi$$

und da beide einander gleich sind, so hat man

$$\beta - a = -\psi + \frac{\sin a}{r} x' - \frac{\cos a}{r} y' \ldots\ldots A$$

Dieser Ausdruck hat die Form, welche die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate fordert, indem die drei Unbekannten ψ, x' und y' als Factoren in drei Gliedern auftreten. Ob man aber hiernach unmittelbar die Rechnung vornehmen darf, oder zunächst eine Aenderung einführen mufs, hängt von der Art der Winkelmessung ab. Es tritt nämlich ein wesentlicher Unterschied in der Vertheilung der Fehler ein, jenachdem man entweder mit einem Spiegel-Sextant oder einem Repetitions-Kreise die Winkel zwischen je zwei zunächst liegenden Festpunkten mifst, oder ob man an einem Kreise, ohne die Stellung desselben zu verändern, nach und nach gegen alle Festpunkte visirt und die betreffenden Winkel abliest. Wäre das Erste der Fall, so dürfte man den vorstehnden Ausdruck nicht benutzen, weil der eine Schenkel jedes in die Rechnung einzuführenden Winkels in der Richtung des Meridians liegt, und sonach die Winkel nach den weiter rechts belegnen Festpunkten sich aus den Summen der dazwischen gemefsnen Winkel zusammsetzen. Dabei würden die in den ersten Winkelmessungen vorgekommnen Fehler zu allen folgenden hinzutreten, während der Fehler des letzten Winkels nur einmal in die Rechnung eingeführt wird. Diese Art der Messung bedarf daher noch einer Umformung des vorstehnden Ausdrucks.

Zwischen zwei Punkten sei der Winkel β gemessen, während die berechneten Azimuthe a und a', und die Entfernungen der beiden Festpunkte von dem vorläufig angenommenen Stationspunkte r und r' sind. Alsdann ist nach den vorstehnden Entwicklungen der durch Rechnung gefundne Winkel zwischen beiden Punkten gleich

$$(a' - a) + \left(\frac{\sin a'}{r'} - \frac{\sin a}{r}\right) x' - \left(\frac{\cos a'}{r'} - \frac{\cos a}{r}\right) y' \ldots B$$

wobei die Correction ψ fortfällt. Der gegen die Messung übrig bleibende Fehler ist daher

$$\beta - (a' - a) = \left(\frac{\sin a'}{r'} - \frac{\sin a}{r}\right) x' - \left(\frac{\cos a'}{r'} - \frac{\cos a}{r}\right) y'$$

Hieraus kann man die beiden Unbekannten x' und y' nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, indem man sowohl $\beta - (a' - a)$, wie auch die Coefficienten von x' und y' kennt.

Als Beispiel mag eine Messung mitgetheilt werden, die ich Behufs der richtigen Orientirung einer neuen Hafenkarte einst bei Pillau ausführte. Bessel theilte mir die von ihm festgestellten Coordinaten verschiedner Punkte in der weitern Umgebung von Königsberg mit. Von dem ohnfern der Spitze der Frischen-Nehrung ausgewählten, etwas erhöhten Stationspunkte aus konnte ich unter diesen benutzen die Thürme von Brandenburg, Heiligenbeil und Braunsberg, so wie auch das Schloſs Balga und den Pillauer Leuchtthurm. Letztern wählte ich zum Anfangspunkt der Coordinaten, und es ergaben sich in Bezug auf denselben die Coordinaten der andern Festpunkte, wie folgt:

Brandenburg	$x = -\ 766{,}55$	$y = +\ 6087{,}52$
Balga	$= -\ 2548{,}56$	$= +\ 1305{,}80$
Heiligenbeil	$= -\ 5286{,}47$	$= +\ 793{,}44$
Braunsberg	$= -\ 7618{,}77$	$= -\ 1188{,}43$

Dabei zählen die x von Norden nach Süden, und die y von Westen nach Osten. Die Maaſseinheit ist die Rheinländische Ruthe.

Ein Katerscher Kreis wurde in dem Stationspunkt aufgestellt, dessen Coordinaten gefunden werden sollten. An dem willkürlich aufgestellten Instrument maſs ich die nachstehnden Winkel

Leuchtthurm . . .	246° 55′ 30″
Brandenburg . . .	309° 14′ 30″
Balga	2° 41′ 30″
Heiligenbeil . . .	23° 44′ 0″
Braunsberg . . .	42° 6′ 15″

Zur Berechnung der Näherungs-Werthe wurden die nächsten Punkte benutzt, nämlich der Leuchtthurm, Balga und Brandenburg. Aus diesen ergab sich für den Stationspunkt

$$X = -\ 192{,}826 \text{ Ruthen}$$
$$Y = -\ 125{,}030$$

Unter den beiden oben erwähnten Berechnungs-Arten mufste die Formel A gewählt werden, weil nicht die Winkel zwischen je zwei nächsten Festpunkten, sondern die Richtung jedes einzelnen gemessen wurde. Die Richtung des durch den Leuchtthurm gelegten Meridians, die aber auch noch der Verbesserung ψ bedarf, ergiebt sich unmittelbar aus den vorstehnden Werthen von X und Y, bei jener Aufstellung des Instruments. Nach der vorläufigen Rechnung fiel nämlich der Meridian in den Winkel

$$213^0\ 57'\ 55'',5$$

Hiernach sind die fünf beobachteten Azimuthal-Winkel in der obigen Reihenfolge der Festpunkte

$$\begin{aligned} \beta &= 32^0\ 57'\ 34'',5 \\ &= 95^0\ 16'\ 34'',5 \\ &= 148^0\ 43'\ 34'',5 \\ &= 169^0\ 46'\ \ 4'',5 \\ &= 188^0\ \ 8'\ 19'',5 \end{aligned}$$

Die berechneten Azimuthal-Winkel stimmten natürlich für die drei ersten Punkte mit den vorstehnden genau überein, für Heiligenbeil und Braunsberg waren sie dagegen

$$169^0\ 46'\ 42'',4$$

und

$$188^0\ \ 8'\ 57'',8$$

Die Differenzen $\beta - a$ sind demnach

$$\begin{aligned} 0{,}0 &= \quad 0{,}0 \\ 0{,}0 &= \quad 0{,}0 \\ 0{,}0 &= \quad 0{,}0 \\ -37'',9 &= -0{,}0001838 \\ -38'',3 &= -0{,}0001856 \end{aligned}$$

indem die Winkel durch die Länge der Bögen ausgedrückt werden. Da die Berechnung der Winkel a bereits zur Bestimmung der Entfernungen führte, so sind nunmehr alle bekannten Gröfsen in der Gleichung A gegeben und vergleichungsweise zu der früher gewählten Formel

$$k = a \cdot r + b \cdot s + ct$$

hat man

$$k = \beta - a \quad \text{und} \quad r = \psi$$
$$a = -1 \qquad\qquad s = x'$$

$$b = \frac{\sin a}{r} \qquad t = y'$$

$$c = -\frac{\cos a}{r}$$

Durch Einführung der für die fünf Festpunkte gefundnen Zahlenwerthe ergeben sich die Summen der Producte, welche in den drei Bedingungs-Gleichungen als Factoren auftreten, nämlich

$$\begin{aligned}
[k\,a] &= +\,0{,}000\,369\,420\,0 \\
[k\,b] &= +\,0{,}000\,000\,002\,7910 \\
[k\,c] &= +\,0{,}000\,000\,059\,439 \\
[a\,a] &= +\,5 \\
[b\,b] &= +\,0{,}000\,005\,666\,781 \\
[c\,c] &= +\,0{,}000\,013\,479\,883 \\
[a\,b] &= +\,0{,}002\,730\,675\,0 \\
[a\,c] &= -\,0{,}003\,004\,090\,0 \\
[b\,c] &= -\,0{,}000\,008\,758\,424
\end{aligned}$$

Man findet hieraus die drei Unbekannten

$$\begin{aligned}
\psi &= -\,0{,}000\,20318 = 41{,}9 \text{ Secunden} \\
x' &= +\,0{,}60529 \\
y' &= +\,0{,}33567
\end{aligned}$$

die Richtung der Nordlinie ist also um 41,9 Secunden mehr westlich zu legen, oder sie fällt bei jener Aufstellung des Instruments auf

$$213^{0}\ 57'\ 13'',6$$

Die Coordinaten des Stationspunktes sind

$$\begin{aligned}
X &= -\,192{,}221 \\
Y &= -\,124{,}694
\end{aligned}$$

Berechnet man hiernach aufs Neue die Azimuthal-Winkel, so weichen dieselben in den fünf Beobachtungen von den gemeſsnen um nachstehnde Winkel ab

Leuchtthurm	— 1″,0
Brandenburg	+ 20″,9
Balga	— 3″,1
Heiligenbeil	— 13″,5
Braunsberg	— 3″,2

Die Summe der Quadrate dieser Fehler beträgt 639,91 und man findet daraus den wahrscheinlichen Beobachtungs-Fehler

$$w = 12{,}065 \text{ Secunden}$$
$$= 0{,}0000585$$

und die wahrscheinlichen Fehler in den berechneten Constanten

in der Richtung des Meridians .	11,53	Secunden
in der Abscisse X	0,255	Ruthen
in der Ordinate Y	0,153	Ruthen.

VI. Abschnitt.

Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf das Nivelliren.

§ 41.

Wenn auch die Anwendung der mitgetheilten Gesetze der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf das Nivelliren überaus einfach ist und dabei keine schwierigen Aufgaben vorkommen, deren Lösung eine besondre Untersuchung fordert, so dürfte es sich doch empfehlen, in einem speciellen Fall das Verfahren zur Prüfung und Berichtigung, so wie zum angemeſsnen Gebrauch der Instrumente eingehend zu beschreiben und auf verschiedne Umstände aufmerksam zu machen. Hierzu kommt noch, daſs nicht selten von den Nivellements, namentlich wenn sie Behufs hydrotechnischer Anlagen und unter schwierigen Verhältnissen ausgeführt werden, eine groſse Schärfe gefordert wird, und dabei leicht Fehler und Täuschungen eintreten, welche bei der noch vielfach üblichen Art der Controlle sich gar nicht zu erkennen geben.

In dieser Beziehung erwähne ich, daſs einst für den Unterricht im Wasserbau bei einer Ingenieur-Schule die Aufgabe gestellt war, einen in der Nähe befindlichen Wasserlauf aufzustauen. Zu diesem Zweck wurde ein kleines Nivellement ausgeführt, wobei Maaſsstäbe mit beweglichen Tableaux benutzt werden muſsten. Nachdem von der ersten Station vor- und zurückvisirt war, machte ich meine Schüler darauf aufmerksam, daſs es angemessen sei, das Instrument nunmehr etwas zu heben oder zu senken, und zu prüfen, ob auf beiden Seiten gleiche Differenzen sich herausstellten. Trotz alles Winkens und Zurufens war es aber unmöglich, das eine Tableau in die passende Visirlinie zu bringen, und als ich den dabei angestellten Mann, der mir als besonders geübt in dieser Handhabung empfohlen war, befragte, ob er die Zurufe nicht verstanden habe, belehrte er mich, dafs bei der zweiten Einstellung die Tafel immer genau an dieselbe Stelle geschoben werden müsse, wo sie früher gestanden hätte, sonst sei die Messung falsch. Seine anerkannte Geschicklichkeit bestand also darin, die Controlle ganz illusorisch zu machen.

Ein solches Verfahren erklärt den wunderbaren Grad von Genauigkeit, die manche Feldmesser zu erreichen glauben. Ich habe Nivellements gesehn, in denen nach den beigefügten Controllen der wahrscheinliche Fehler in jeder Station, auf den Winkel reducirt, nur $^1/_4$ bis $^1/_3$ Secunde betrug. Wenn man aber bei den fest aufgestellten und viel vollkommnern astronomischen Instrumenten nicht leicht eine ganze Secunde verbürgen kann, so beruht diese Uebereinstimmung der Controlle mit der Messung augenscheinlich nur auf Täuschung.

Bei keiner Messung oder Beobachtung darf man sich auf die Zuverlässigkeit der Gehülfen unbedingt verlassen, man mufs vielmehr dafür sorgen, dafs man sie stets sicher controlliren kann, und am vortheilhaftesten ist es, die Anordnungen so zu treffen, dafs man die wichtigeren Operationen, also die Einstellungen und Ablesungen, selbst ausführt. Im vorliegenden Fall läfst sich dieses sehr leicht erreichen. Man braucht nur das Tableau zu beseitigen, und die Visirlatte so breit zu machen, dafs sich eine deutliche Theilung darauf anbringen läfst, die man durch das Fernrohr des Instruments unmittelbar ablesen kann.

Dabei wird noch ein andrer sehr wesentlicher Vortheil erreicht. Der Stab soll nämlich senkrecht gehalten werden, wenn man ihn, wie gewöhnlich geschieht, auf den Kopf eines vorher eingetriebnen Pfählchens aufstellt. Der Gehülfe bemerkt sehr bald, dafs der Feldmesser, der am Instrument steht, nur ein Urtheil darüber hat, ob der Stab nach der rechten oder der linken Seite geneigt ist, dafs er aber nicht wahrnehmen kann, ob dieses auch in der ihm zugekehrten Richtung geschieht. Eine Zurechtweisung erfolgt also nur, wenn der Stab aus der durch das Instrument gelegten Vertical-Ebene sich auffallend entfernt. Um sich keinen Tadel zuzuziehn, stellt sich der Gehülfe hinter den Stab, und weder der Feldmesser, noch der Gehülfe bemerkt es, wenn in dieser Ebene der Stab nach vorn oder nach hinten sehr bedeutend von der lothrechten Stellung abweicht.

Endlich mufs der Stab mit dem Tableau auch jedesmal umgedreht werden, sobald man zur nächsten Station übergeht. Wenn die Köpfe jener Pfählchen nicht horizontale Ebenen bilden, so kann leicht der Stab, während er umgedreht wird, um einige Linien seine Höhe verändern. Wenn aber der Boden weich ist, also die Pfählchen nicht fest stehn, wie dieses in sumpfigen Wiesen häufig der Fall ist, so bleibt es zweifelhaft, ob nicht der Pfahl beim zweiten Aufstellen des Stabes tiefer eindringt, und sonach die Messung ein Ansteigen des Terrains ergiebt, das in der Wirklichkeit nicht statt findet.

Alle diese Uebelstände lassen sich vollständig vermeiden, wenn die breite Latte auf beiden Seiten übereinstimmend eingetheilt und mit einer eisernen Spitze versehn ist, mit der sie jedesmal fest in den Boden eingestofsen wird. Man bedient sich dabei noch eines Lothes und prüft nach diesem den verticalen Stand in zwei verschiednen Richtungen. Ob die Einstellung der Latte in dieser Beziehung mit hinreichender Genauigkeit erfolgt ist, untersucht der Feldmesser selbst, bevor er dagegen visirt, und wenn dieses geschehn ist, so darf Niemand die Latte berühren, oder sich derselben auch nur nähern, bis vom folgenden Stationspunkte aus die Messung nach diesem Punkt vollständig beendigt ist. Die Ablesung des Maafses an diesen Latten erfolgt aber durch das Fernrohr an der Libelle.

In dieser Weise habe ich nahe vor funfzig Jahren sehr ausgedehnte Nivellements ausgeführt. Bei dem General-Nivellement, welches ganz Frankreich umfafst, sind die beweglichen Tableaux nicht mehr zur Anwendung gekommen und dafür die deutlich eingetheilten Visirlatten (*mires parlantes*) eingeführt, deren wesentliche Vorzüge in der Beschreibung dieses Unternehmens*) erwähnt sind. Bei uns legt man in neuerer Zeit gröfsres Gewicht auf die sogenannten trigonometrischen Nivellements, von denen schliefslich die Rede sein wird, und bei welchen die Latten mit oder ohne Tableaux ganz umgangen werden.

---

*) Nivellement général de la France. Notes diverses, par Bourdalouë. Bourges 1864.

Nach diesen vorläufigen Bemerkungen mögen die beim Nivelliren vorkommenden Fehler näher untersucht, und zwar zunächst die verschiednen Ursachen derselben mit beiläufiger Bestimmung ihres Einflusses ermittelt werden. Später wird die Sicherheit, also die Gröfse der wahrscheinlichen Fehler erörtert werden.

§ 42.

Der wesentlichste Theil jedes Nivellir-Instruments besteht in der Vorrichtung zur Bildung der horizontalen Absehenslinie. Hierzu dient in der Regel eine Flüssigkeit. Diese befindet sich bei den weniger genauen Instrumenten in einer horizontalen Röhre, deren beide Schenkel aufwärts gerichtet sind. Bestehn diese aus Glas, so stellen die beiden Oberflächen in ihnen schon die horizontale Ebene dar, und man braucht nur neben denselben zu visiren, um die horizontale Richtung zu erkennen. Zuweilen läfst man auch in beiden Schenkeln Dioptern schwimmen, die zwar ein schärfres Visiren gestatten, wobei aber leicht andre Fehler eintreten. Die erste Vorrichtung ist die gewöhnliche Canalwaage, die zweite die Mercurialwaage, in der man um das tiefe Eintauchen der Dioptern zu verhindern, die Röhre mit Quecksilber füllt. Bei genauern Instrumenten ist die Flüssigkeit in einer vollständig geschlofsnen horizontalen Glasröhre enthalten, die jedoch nicht ganz gefüllt ist. Es befindet sich vielmehr darin eine Luftblase, die schon bei schwacher Aendrung der Neigung eine andre Stelle einnimmt, und daher sichrer die Richtung des damit verbundnen Fernrohrs erkennen läfst. Dieses Instrument, welches mittelst einer Schraube horizontal gestellt wird, ist die Libelle mit Fernrohr. Aufserdem giebt es noch Apparate, bei denen man die Alhidade oder das Fernrohr frei aufhängt und in der Art mit Gewichten verbindet, dafs die Absehenslinie sich horizontal richtet. Diese Vorrichtungen werden heutiges Tages wohl nur zu annähernden Schätzungen benutzt.

Vitruv beschreibt ein Nivellir-Instrument, das er Chorobates nennt*.) Es bestand aus einem 20 Fufs langen Lineal mit vor-

*) Vitruvii de architectura. Liber VIII. Cap. VI.

tretenden Stifte an beiden Enden, welche die Visirlinie bezeichneten. Es hingen daran Gewichte, deren Fäden eine darunter befestigte und mit Marken versehene Latte berührten, und hierdurch wurde die horizontale Stellung des Instruments geprüft. Beim Winde pendelten indessen diese Gewichte, und alsdann gofs man Wasser in eine an dem Lineal befindliche Rinne von 5 Fufs Länge, 1 Zoll Breite und $1^1/_2$ Zoll Höhe und berichtigte hiernach die Aufstellung. Dafs man aber damals schon die Kunst des Nivellirens verstand, ergiebt sich theils aus den antiken Wasserleitungen und vorzugsweise wohl aus dem Stollenbau, der unter Kaiser Claudius zum Ablassen des Fucino-Sees ausgeführt wurde. Dieses Nivellement, durch welches man allein die Ueberzeugung gewinnen konnte, dafs bis zu der gewählten Stelle im Ufer des Liri-Flusses hinreichendes Gefälle vorhanden sei, dehnte sich über mehr als drei Viertel Deutsche Meilen aus und mufste über einen zwischenliegenden Bergrücken von nahe 680 Fufs Höhe über dem Spiegel dieses Sees fortgeführt werden *.)

Sehr zweckmäfsig ist die Anwendung von Flüssigkeiten, um horizontale Abseheuslinien entweder unmittelbar oder mittelbar darzustellen. Man macht dabei freilich die Voraussetzung, dafs die Flüssigkeiten horizontale Oberflächen bilden, also nicht etwa durch Reibung oder andre Umstände verhindert werden, der Kraft der Schwere vollständig zu folgen. Ob dieses in aller Schärfe der Fall ist, läfst sich nicht nachweisen, und man bemerkt in der That von den dicksten Massen, wie etwa Pech. das bei gewöhnlicher Temperatur langsam eine horizontale Oberfläche annimmt, bis zu Alkohol und Aether eine solche Abstufung in der Beweglichkeit, dafs man die Reibung oder Zähigkeit, die in dem erstern sich augenscheinlich zu erkennen giebt, in gewissem Grade auch bei den letztern voraussetzen dürfte. Jedenfalls sind die Erfolge dieser Hindernisse in den besten Niveaus aber so geringfügig, dafs sie vergleichungsweise zu den übrigen unvermeidlichen Fehlern nicht in Betracht kommen.

Unter diesen Fehlern mögen diejenigen, die im Instrument selbst und den zugehörigen Apparaten ihren Grund haben, zunächst untersucht werden. Das Nivellir-Instrument ist ungenau,

*) Zeitschrift für Bauwesen. 1879. Seite 565.

insofern die Richtung der Absehenslinie von manchen Zufälligkeiten abhängt, und bei mehrmaliger Wiederholung der Beobachtung sich verändert. Unrichtig ist es, wenn jene Linie um einen gewissen constanten Winkel sich von der Horizontalen entfernt, und undeutlich, wenn es das hinreichend scharfe Visiren nicht gestattet. Bei den Visirstangen und Tableaus, die der Feldmesser gewöhnlich selbst eintheilt und bezeichnet, läſst sich die erforderliche Richtigkeit und Deutlichkeit leicht erreichen, es bleiben daher hier nur die Fehler der Ungenauigkeit übrig, und diese entspringen entweder aus der schrägen Aufstellung der Stäbe oder aus der zufälligen oder absichtlichen Verstellung der Tableaus, oder dem Ablesen des Maaſses, oder endlich aus dem Eindrücken der Pfählche, auf welchen die Visirstäbe meist aufgestellt werden.

§ 43.

Bei der gewöhnlichen Canalwaage kann man als Veranlassung zu ungenauen Messungen, nächst einer möglichen nicht hinreichend festen Aufstellung oder Sicherung gegen den Wind, wodurch Schwankungen verursacht werden, nur die Anziehung erwähnen, welche die Röhren auf die Oberfläche des Wassers ausüben. Durch letztere bildet sich der breite dunkle Streif, der in Folge der Brechung der Lichtstrahlen die äuſsere Fläche des Glas-Cylinders zu berühren scheint. Seine Breite vermindert sich nicht in möglichst dünnen Glasröhren, weil die Oberfläche des Wassers keineswegs von der ganzen Glasmasse, sondern allein von der innern Oberfläche derselben angezogen und gehoben wird.

Beim Gebrauch der Canalwaagen visirt man bekanntlich längs dieser Streifen in beiden Glasröhren und bestimmt dadurch die horizontale Richtung. Bei gewissen Beleuchtungen sind indessen die Grenzen dieser Streifen nicht deutlich zu erkennen, und die Kunst des geübten Beobachters besteht darin, jedesmal gleiche Stellen an beiden Glasröhren zu treffen. Dieses ist um so schwieriger, als das Auge zugleich nach dem entfernten Tableau sehn muſs, wodurch eine Spannung hervorgebracht wird, die bald ermüdet. Man gewöhnt sich indessen leicht daran, vorzugsweise nur die entferntere Glasröhre und das Tableau zu beachten, indem man die Lage des Auges gegen die nächste Röhre nicht verändert, und ein beiläufiger Blick auf dieselbe schon genügt, um sich zu überzeugen, dafs das Auge sich in der passenden Höhe wirklich befindet. Auch dadurch, dafs man etwas zurücktritt, wird das Visiren merklich erleichtert. Mit Verwunderung habe ich mich zuweilen davon überzeugt, welche bedeutende Sicherheit bei grofser Vorsicht und Uebung im Gebrauch dieses an sich höchst mangelhaften Instruments dennoch erreicht werden kann. Nichts desto weniger sind die Ränder, an denen man vorbeisehn mufs, keineswegs scharf markirt und die Breite derselben beträgt etwa $1\frac{1}{6}$ Linien. Beginge man den Fehler, dafs man an einer Glasröhre die obere Grenze und an der andern die untere getroffen hätte, so würde dieses bei der Entfernung der Röhren von 4 Fufs eine Abweichung der Visirlinie gegen die Horizontale von 7 Minuten, oder auf 5 Ruthen Abstand von $1\frac{1}{2}$ Zoll veranlassen. Um soviel wird zwar kein vorsichtiger Beobachter irren, wenn aber der Fehler auf 10 Ruthen Länge die Grenze von 2,5 Linien nicht übersteigen soll, so ist dieses im Allgemeinen wohl die Grenze der erreichbaren Schärfe der Messung.

Das Vorhandensein von Luftblasen in der horizontalen Verbindungsröhre veranlafst an sich keineswegs einen ungleichen Stand des Wassers in den beiden aufwärts gerichteten Schenkeln. Es ist jedoch nöthig, die Blasen durch Neigung der Röhre zu entfernen, bevor man die Messung beginnt, weil dieselben leicht während der letztern austreten, und dadurch nicht nur Schwankungen veranlafst, sondern auch beide Oberflächen etwas gesenkt würden.

Man hat an der Canalwaage zuweilen die Aenderung eingeführt, dafs man nicht unmittelbar an den Glas-Cylindern visirt, sondern zwei Dioptern daran befestigt. Hierdurch verliert indessen das Instrument diejenige Eigenschaft, durch die es sich vorzugsweise empfiehlt, nämlich seine Einfachheit, die Einstellung erfordert alsdann auch mehr Zeit und der Vortheil ist unbedeutend, denn in dem Richten der Dioptern nach dem Wasserstand bleibt beinahe dieselbe Unsicherheit, wie im unmittelbaren Visiren, und man kann die Dioptern nicht heben oder senken, ohne Bewegungen zu veranlassen, die wieder neue Umstellungen erfordern.

Was von der Beweglichkeit der Flüssigkeiten gesagt ist, findet auch auf die Mercurialwaage Anwendung. In derselben mufs sich aber nicht nur das Quecksilber in beiden Schenkeln horizontal stellen, sondern es mufs auch zugleich die darauf schwimmenden Elfenbein-Würfel mit den Dioptern bewegen, die sich an die Wandungen anlehnen, und an denselben ohne Zweifel einige Reibung erfahren. Ich versuchte bei einem sorgfältig ausgeführten Instrument dieser Art den einen Würfel wiederholentlich herabzudrücken und nach eingetretener Ruhe nach dem Tableau zu visiren. Dabei überzeugte ich mich, dafs die Genauigkeit der Mercurialwaage bedeutend geringer, als die der Canalwaage ist.

In der Libelle äufsert sich die Anziehung des Glases auf die darin eingeschlofsne Flüssigkeit auf ähnliche Weise, wie in der Canalwaage. Auch hier bemerkt man den erwähnten breiten Streif, doch ist derselbe, insofern das Auge in der Entfernung des deutlichen Sehns, und zwar in gleichem Abstande von beiden Enden der Luftblase, darüber gehalten wird, in seiner Begrenzung genau zu erkennen. Aufserdem wird durch die Anziehung des Glases die Blase an beiden Enden abgerundet und erscheint daher um so schärfer begrenzt.

Ist die Glasröhre an einer Seite weiter, als an der andern, so wird offenbar, selbst wenn die innere Fläche der obern Glaswand horizontal liegt, die Anziehung an der weitern Seite geringer sein, also die Blase sich nach der entgegengesetzten bewegen. Dieser Umstand ist jedoch unter übrigens gleichen Verhältnissen nicht nachtheilig, denn es kommt nur darauf an, die Luftblase an diejenige Stelle zu bringen, welche der horizontalen Absehenslinie des Fernrohrs entspricht. Der nachtheilige Einflufs einer Röhre von ungleicher Weite tritt erst bei Temperatur-Veränderungen ein, indem alsdann wegen der Ausdehnung oder Verminderung des Volums der tropfbaren Flüssigkeit die Blase kürzer oder länger wird, und die beiderseitigen Begrenzungen derselben sich nicht in gleicher Weise verändern.

Die Libelle ist mit dem Fernrohr fest verbunden und diese

Verbindung wird mittelst Stellschrauben in der Art berichtigt, dafs die Luftblase gegen die beiderseitigen Theilstriche auf der Glasröhre sich gleich weit erstreckt, sobald die Abschenslinie des Fernrohrs horizontal gerichtet ist. Indem nun dieselbe Bedingung auch bei eintretenden Temperatur-Veränderungen noch erfüllt werden soll, so mufs die Röhre gleiche Weite haben. Aufserdem ist es aber auch nothwendig, dafs schon bei geringen Abweichungen des Fernrohrs die Luftblase ihre Stelle merklich verändert. Hieraus ergiebt sich, dafs die Röhre im Innern und zwar an der obern Wand in ihrer Längeneinrichtung nach einem Kreisbogen ausgeschliffen sein mufs, oder dafs dieser Theil der Fläche einen der Länge nach kreisförmig gekrümmten Cylinder-Mantel darstellt. Der Mittelpunkt der Krümmung liegt senkrecht unter der Libelle. Entgegengesetzten Falls würde bei der geringsten Abweichung die Luftblase sich sogleich an das Ende der Röhre bewegen, und eine Einstellung derselben würde viel schwieriger sein. Der gewählte Krümmungs-Halbmesser bedingt die Empfindlichkeit der Libelle, weil die veränderte Stellung der Blase oder der Ausschlag augenscheinlich dem Product aus der Neigung (im Bogen gemessen) in den Radius gleich ist. Es kommt daher darauf an, diesen Radius passend zu wählen, damit die Empfindlichkeit der Libelle der Schärfe des Fernrohrs und dem Zweck des Nivellements entspricht. Ist der Radius zu grofs angenommen, so wird das jedesmalige Einstellen erschwert, auch darf nicht unbemerkt bleiben, dafs geringe Unregelmäfsigkeiten in der Schleifung bei einem grofsen Radius nachtheiliger hervortreten, als wenn die Krümmung schwächer wäre.

Um die nöthige Genauigkeit mit diesem Instrument zu erreichen, mufs das Fernrohr in einem der Schärfe der Messung entsprechenden Verhältnifs das Bild vergröfsern, besonders aber dieses möglichst deutlich und klar zeigen. Die darin eingespannten Fäden müssen feine gerade Linien bilden, sich rechtwinklig durchschneiden und bei der richtigen Lage der Libelle horizontal und vertical gerichtet sein. Ferner mufs die Schraube, womit man das Fernrohr mit der Libelle einstellt, mit feinen Gängen versehn und leicht beweglich sein, ohne jedoch todte Gänge zu haben. Wie fein indessen diese Schraube auch geschnitten sein mag, so wird es bei einem Niveau von der nöthigen Empfindlichkeit doch nicht leicht gelingen, kleine Abweichungen im Stande der Luftblase unmittelbar zu beseitigen, vielmehr mufs man sie dadurch aufzuheben suchen, dafs man die Schraube weiter dreht, als nöthig ist, und sie gleich darauf wieder etwas zurückdreht. Die Bewegung, die man darstellen soll, ist zu geringe, als dafs sie sich der Schraube geben liefse, wohl aber läfst sie sich durch die Differenz zweier gröfsern entgegengesetzten Bewegungen einführen. Man erlangt leicht die nöthige Uebung, um in dieser Weise nach wenigen Versuchen die Luftblase zum scharfen Einspielen zu bringen, während dieselbe, wenn man sie unmittelbar einstellen wollte, abwechselnd nach der einen und der andern Seite ausschlagen würde.

§ 44.

Die aus der Unrichtigkeit des Instruments entspringenden Fehler haben ihre Ursache in der Zusammensetzung desselben und hängen nicht mehr von zufälligen Umständen ab. Wenn man daher die Beobachtungen unter gleichen äufsern Verhältnissen wiederholt, so treten diese Fehler in gleichem Sinne stets wieder auf, man kann aber durch gewisse Vergleiche oder sonstige Prüfungen ihre Gröfse ermitteln, und sie sonach aus dem Resultat entfernen. Ein Fehler dieser Art ist beispielsweise in einem Winkel-Mefsinstrument der Collimations-Fehler, der jedesmal dem abgelesenen Winkel zugesetzt, oder von demselben in Abzug gestellt werden mufs.

Die Hülfsmittel, welche dem Künstler bei Anfertigung der Instrumente zu Gebote stehn, werden in der Regel von denjenigen an Schärfe übertroffen, die man später zur Prüfung der Richtigkeit anwenden kann, auch treten meist gewisse Veränderungen mit der Zeit ein, so dafs eine solche Prüfung und Feststellung der Fehler vor dem Gebrauch jedes Instruments nothwendig ist. Für den aufmerksamen Beobachter ist daher im Allgemeinen jedes Instrument mit gewissen Fehlern behaftet. Dieselben lassen sich in manchen Fällen nie vollständig beseitigen, wenn gleich Vorrichtungen zu diesem Zweck angebracht sind, weil diese nicht mit derselben Schärfe, welche die spätere Controlle hat, in Wirksamkeit gesetzt werden können. Dazu kommt aber noch, dafs man sein Instrument nicht oft verändern mag. So wird zum Beispiel kein Astronom seine Uhr sogleich stellen, wenn die Beobachtungen zeigen, dafs sie ein wenig vorgeht. Die bei unverändertem Instrument eintretenden Abweichungen gestatten über ihre jedesmalige Gröfse auch ein sichreres Urtheil, und geben daher Gelegenheit, das Resultat vollständiger zu berichtigen, als wenn man das Instrument selbst jedesmal berichtigen wollte. Von den Fehlern dieser Art mufs stets Rechnung getragen werden, wenn man nicht, wie oft möglich ist, die Messungen so einrichtet, dafs diese Fehler den Einflufs auf das Resultat verlieren.

Die Canalwaage giebt die Höhen-Unterschiede unrichtig an, wenn der eine der beiden Glas-Cylinder weiter ist, als der andre, und zwar geschieht dieses in zweifacher Weise. Zunächst soll die Absehenslinie beim Vorwärts- und Rückwärts-Visiren unverändert bleiben. Dieses ist aber nicht der Fall, wenn bei dem Rückwärts-Einstellen die beiden ungleichen Cylinder nicht eben so weit gefüllt bleiben, wie sie früher waren, was doch beinahe nie geschieht, weil auf die verticale Stellung der Drehungs-Achse meist wenig Aufmerksamkeit verwendet wird. Hierauf kommt es auch in andrer Beziehung nicht an. Wenn aber der weitere Cylinder bei der Drehung etwas gesenkt oder gehoben wird, so stellt sich das gemeinschaftliche Niveau auch etwas tiefer oder höher, als es früher war, weil die Wassermenge, die in ihm eine gewisse Höhe darstellt, kleiner ist, als diejenige, die in dem andern Cylinder dieselbe Senkung veranlafst. Der hieraus entspringende Fehler pflegt indessen nicht von Bedeutung zu sein, indem gemeinhin nur eine geringe Drehung erforderlich ist.

Der Mangel an Uebereinstimmung in der lichten Weite der beiden Glasröhren veranlafst aufserdem aber auch einen geringen Unterschied in der Höhenlage des Wasserstandes in denselben. Die sogenannte Capillar-Attraction äufsert sich freilich in weitern Röhren nur in sehr geringem Maafse, aber dennoch ist nicht anzunehmen, dafs sie in ihnen ganz verschwindet. In der engern erhebt sich das Wasser etwas höher, als in der weitern, man visirt also nicht horizontal, vielmehr in einer Richtung ansteigend und in der andern abfallend. Wenn aber auf jeder Station die Canalwaage in gleicher Richtung aufgestellt wird, so heben diese geringen Fehler sich nicht auf, sondern summiren sich. Es ist daher nöthig, darauf zu achten, dafs beide Röhren möglichst gleiche lichte Weite haben.

Bei der Mercurialwaage ist die Visirlinie durch die auf dem Quecksilber schwimmenden Diopteru gegeben und augenscheinlich nimmt sie eine falsche Richtung an, wenn eine Diopter etwas tiefer sich stellt, als die andre. Dieses geschieht, wenn schon ursprünglich hierbei eine Unrichtigkeit statt fand, oder wenn später durch Vermehrung oder Verminderung des Gewichts eine solche eintritt. Eine Vorrichtung zum Berichtigen der Dioptern fehlt aber, da man jede nicht dringend gebotene Mehrbelastung der Elfenbein-Würfel vermeiden mufs, weil diese sonst, während sie auf dem Quecksilber schwimmen, die horizontale Stellung verlieren würden. Bei diesem Instrument ist es daher dringend geboten, jedesmal dieselbe Diopter dem Auge zuzukehren, also beim Rückwärts-Visiren das ganze Instrument umzudrehn. Alsdann treten in beiden Richtungen dieselben Fehler ein und heben sich sonach grofsentheils gegenseitig auf.

Die Libelle mit Fernrohr pflegt immer mit den nöthigen Vorrichtungen zur Berichtigung versehn zu sein, wodurch die constanten Fehler, wenn auch nicht ganz aufgehoben, doch wenigstens sehr vermindert werden können. Das Verfahren bei dieser Berichtigung, welches man gewöhnlich empfiehlt, und für welches die Instrumente auch eingerichtet zu sein pflegen, ist indessen keineswegs bequem und sicher.

Auf das Fernrohr, welches mit der Libelle fest verbunden ist, sind meist zwei stärkere Ringe aufgelöthet, deren äufsere Flächen cylindrisch abgedreht sind, und welche gleiche Durchmesser haben. Diese Cylinder ruhn in zwei gleichen, gabelförmigen Lagern. In das Fernrohr sind feine Fäden eingespannt, welche die Visirlinie bezeichnen. Gewöhnlich sind zwei dergleichen vorhanden, von denen der eine vertical und der andre horizontal gerichtet ist. Diese Fäden sind an einen Ring befestigt, den man mittelst vier kleiner Schrauben im Fernrohr etwas verstellen kann.

Das Verfahren bei der Prüfung und Berichtigung bezieht sich zunächst auf die Richtung der Visirlinie gegen die Achse des Fernrohrs, oder vielmehr gegen die gemeinschaftliche Achse jener beiden Cylinder, auf denen das Fernrohr ruht, und sodann auf die Stellung des Niveaus zu dieser Achse.

Ob die Visirlinie des Fernrohrs, also die Absehenslinie, welche durch den Kreuzpunkt der beiden Fäden gegeben ist, mit der Achse der beiden Cylinder übereinstimmt, ergiebt sich aus der Drehung des Fernrohrs um seine Achse, während es auf beiden Lagern ruht. Man richtet das Fernrohr so, dafs jener Kreuzpunkt einen recht scharf markirten Gegenstand trifft, und sieht nun zu, ob während der Drehung dieser Gegenstand fortwährend von dem Kreuzpunkt geschnitten wird, oder ob letzterer einen kleinen Kreis beschreibt. Im ersten Fall befinden sich die Fäden an der richtigen Stelle, im zweiten dagegen nicht, und man mufs alsdann den erwähnten Ring, in welchen sie eingespannt sind, so verstellen, dafs jene Bedingung erfüllt wird. Diese Berichtigung ist aber sehr schwierig. Beim Drehn des Fernrohrs bemerkt man zwar, in welcher Richtung die Verstellung erfolgen mufs, um welche Winkel aber die einzelnen Schrauben zu drehn sind, ist unbekannt, daher wird bei dem ersten Versuch keineswegs der beabsichtigte Zweck erreicht, vielmehr ergiebt sich beim Wiedereinlegen und Drehn des Fernrohrs, dafs man entweder die Fäden noch nicht genügend verstellt, oder sie bereits über die beabsichtigte Stelle hinaus verschoben hat. Es sind also vielfache Versuche nothwendig, bis endlich die Verbesserung nahe genug erreicht ist.

Jeder dieser Versuche ist zeitraubend und erfordert einige Handfertigkeit. Es genügt nämlich keineswegs, eine Schraube anzuziehn, sondern man mufs auch die gegenüberstehende zuvor etwas gelöst haben, und selbst die beiden andern, senkrecht gegen diese gekehrten Schrauben dürfen nicht so fest angezogen sein, dafs sie die Verstellung des Ringes in der ersten Richtung verhindern. Hat man endlich das Kreuz in solche Lage gebracht, dafs es beim Drehn des Rohrs stets denselben Punkt deckt, so müssen noch die sämmtlichen vier Schrauben fest gestellt werden, um jede spätere zufällige Verrückung des Ringes zu verhindern. Hierbei treten aber sehr leicht wieder auffallende Aenderungen ein, die aufs Neue aufgehoben werden müssen. Diese ganze Operation wird noch wesentlich dadurch erschwert, dafs der erwähnte Ring in der Ocular-Röhre sich befindet, und die Schrauben durch die äufsere Röhre, die mit der des Objectivs verbunden ist, überdeckt werden. Man mufs also jedesmal die Ocular-Röhre wenigstens etwas ausschieben, und bei manchen Instrumenten sogar vollständig abschrauben, bevor man zu den Köpfen der erwähnten vier kleinen Stellschrauben gelangt.

Die vorstehend beschriebne Berichtigung bietet hiernach so viele Schwierigkeiten, dafs sie dem Feldmesser wohl nicht leicht gelingen dürfte, wenn er nicht Geschicklichkeit und Uebung in mechanischen Arbeiten besitzt. Gemeinhin pflegt er sich auch nicht hiermit zu befassen, sondern überläfst die richtige Einstellung des Fadenkreuzes dem Mechaniker, sobald er bemerkt, dafs der Durchschnitt der Fäden auffallend von der Drehungs-Achse abweicht.

Dabei kommt indessen noch ein andrer Umstand in Betracht. Die Fäden verdecken nämlich einen Theil des Gesichtsfeldes, und namentlich thut dieses der Durchschnittspunkt beider Fäden, woher man denselben nicht leicht zum Visiren benutzt. Damit die Fäden aber nicht reifsen oder schlaff werden, wählt man in den Nivellir-Instrumenten dazu häufig feine Metalldrähte, die unter der Vergröfsrung des Oculars eine bedeutende Dicke haben, also vielleicht ganze Zolle verdecken. Gewöhnlich sind auf den Tableaus vier Quadrate dargestellt, nämlich zwei schwarze und zwei weifse, deren Seiten horizontal und vertical gerichtet sind. Sie werden so eingestellt, dafs zwei Quadrate über, und zwei unter dem Faden sich befinden; wenn jedoch der dicke Faden die Durchschnittslinie verdeckt, so hat man gar kein Urtheil über die richtige Einstellung und es bleibt nur übrig, wie auch gewöhnlich geschieht, das Tableau soweit heben oder senken zu lassen, bis der untere Rand des obern weifsen Quadrats unter, oder der obere Rand des untern so eben über dem Faden sichtbar wird. In dieser Art läfst sich mit gröfsrer Schärfe die Einstellung machen, aber alsdann weicht die Richtung der Visirlinie von der durch das Fadenkreuz gezognen ab und die beschriebene Berichtigung wird illusorisch.

Dieser Uebelstand läfst sich wesentlich vermindern, wenn man feine Spinnfäden benutzt, die jedoch wenig dauerhaft sind und daher nur angewendet werden dürfen, wenn der Feldmesser selbst im Stande ist, neue einzuziehn. Ein andres Auskunftsmittel, das bei astronomischen Instrumenten oft angewendet wird, besteht darin, dafs man zwei Parrallel-Fäden sehr nahe neben einander einspannt, und die Visirlinie durch die Mitte des kleinen Intervalles bestimmt wird. Durch passende Bezeichnung der Tableaus lassen sich indessen auch stärkre Fäden zur scharfen Beurtheilung der Höhenlage benutzen. Das quadratische Tableau wird nämlich in derselben Art, wie die im Folgenden beschriebne kleine Marke durch zwei Diagonalen in vier Dreiecke eingetheilt. Die mit den Spitzen nach oben und nach unten gekehrten färbt man schwarz, bie beiden Seiten-Dreiecke dagegen weifs. Alsdann läfst sich sehr genau auf den letzten beiden erkennen, ob der dunkle Horizontal-Faden, wenn er auch die Spitzen der Dreiecke vollständig überdeckt, mit seiner Mittellinie in diese Spitzen fällt. Der Faden zerschneidet nämlich die Seiten-Dreiecke in zwei obere und zwei untere, und diese wie jene müssen mit ihren innern Ecken sich gleich weit einander nähern, wenn das Tableau gegen den Faden die richtige Höhe hat.

Noch schwieriger ist die Berichtigung der Libelle. Die dabei zu stellende Bedingung ist zwar sehr einfach, nämlich die darin befindliche Luftblase soll unverändert dieselbe Stelle wieder einnehmen, wenn man das Fernrohr aushebt und es verkehrt einlegt, so dafs die erwähnten cylindrischen Ringe am Fernrohre gegen die gabelförmigen Lager, auf denen sie ruhn, verwechselt werden. Das Fernrohr mit der Libelle wird zu diesem Zweck zunächst durch die an der einen Gabel befindliche Stellschraube soweit gehoben oder gesenkt, bis die Luftblase die passende Stelle in der Röhre einnimmt, alsdann legt man das Fernrohr um, so dafs die darauf befestigten Ringe auf den entgegengesetzten Gabeln aufliegen. Aus der Richtung, in welcher die Blase nunmehr ihre Stelle verändert, ergiebt sich leicht, in welcher Art die Verbindung zwischen der Libelle und dem Fernrohr einer Verbesserung bedarf. Diese Verbesserung darf indessen nur die Hälfte des Ausschlags der Blase aufheben, während die andre Hälfte durch die veränderte Stellung der Gabel beseitigt wird. Es bedarf wieder vielfacher Versuche, bevor man hiermit annähernd zu Stande kommt, bei empfindlichen Libellen gelingt es aber niemals vollständig. Es kommt nämlich darauf an, dafs während des Umlegens die Lager genau ihren frühern Stand behalten, also gar keine Bewegung oder Erschütterung im Instrument eintritt, die bei der nothwendigen leichten Beschaffenheit des Stativs schwer zu vermeiden ist. Wie vorsichtig man dabei auch zu Werke gehn mag, so wird jedesmal eine geringe Aenderung eintreten, die bei einer empfindlichen Libelle sich schon zu erkennen giebt. Das Gewicht der letztern mit dem des Fernrohrs ist vergleichungsweise zu dem des übrigen Theils des Instruments schon zu bedeutend, als dafs dieses sich nicht verstellen sollte, wenn jene Theile abgehoben und wieder aufgelegt werden. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man mit möglichster Vorsicht das Fernrohr wiederholentlich abhebt, und es unmittelbar darauf in derselben Richtung wieder einlegt. Es ist mir nie geglückt, alsdann die frühere Stellung der Luftblase zu erhalten, sie zog sich jedesmal, wenn auch nur wenig, so doch schon merklich, nach der einen oder der andern Seite. Wollte man dabei aber noch die Ueberwürfe, oder die gewöhnlich vorhandnen halben Ringe, welche die kreisförmige Umschliefsung vollständig darstellen, darüber legen und festschrauben, so würde der Ausschlag übermäfsig grofs ausfallen.

Die Methode der Berichtigung, deren ich mich bedient habe, läfst sich mit g r ö f s r e r S c h ä r f e u n d w e n i g e r M ü h e ausführen. Sie beruht darauf, dafs man in derjenigen Entfernung, in welcher man nach Maafsgabe der Vergröfserung und Deutlichkeit des Fernrohrs gewöhnlich zu visiren pflegt, einen Punkt bezeichnet, der mit der Ocular-Oeffnung des nahe richtig eingestellten Fernrohrs in gleicher Höhe sich befindet. Am bequemsten geschieht dieses, wenn man das Instrument ü b e r d e m R a n d e e i n e r W a s e r f l ä c h e aufstellt, so dafs das Ocular sich schon lothrecht darüber befindet. In der erwähnten Entfernung und zwar gleichfalls bereits in das Wasser wird ein Stab senkrecht eingestellt. Nach letzterm richtet man das Fernrohr und stellt es nach der Libelle, wenn dieselbe auch noch nicht vollständig berichtigt ist, horizontal. Nunmehr nimmt man einen dünnen und unten zugespitzten Stab, hält denselben unmittelbar an die Ocular-Oeffnung, indem man das Fernrohr möglichst wenig berührt, und senkt den Stab soweit, bis er die Oberfläche des Wassers trifft. Dieses läfst sich genau erkennen, denn sobald die Berührung erfolgt, so hebt sich die Oberfläche neben der Spitze und die Spiegelung verändert sich sehr auffallend. Die Stelle am Stabe, welche in die Höhe der Mitte der Ocular-Oeffnung trifft, bezeichnet man durch einen Strich mit Blei, und befestigt mittelst Nadeln an den im Wasser stehenden Stab eine etwa 3 Zoll hohe Marke von Papier, die in der nebenstehnden Art bezeichnet ist. Die Mitte dieser Marke, in der die Spitzen der vier Dreiecke zusammenfallen, mufs dabei auf den vorher gezognen Strich am Stabe treffen. Dieser Mittelpunkt befindet sich also in der Höhe des Oculars, und wenn man das Fernrohr nach ihm richtet, so hat es die horizontale Stellung eingenommen, und man darf nur die Libelle mittelst der Schrauben so ändern, dafs sie nunmehr auch genau einspielt. Sollte das Fernrohr bei dieser Operation sich etwas verstellen, so kann man es immer leicht gegen die feste Marke wieder einrichten.

Bei dem Einstellen des Fernrohrs nach der Marke ändert sich freilich seine Richtung gegen den Horizont und sonach hebt oder senkt sich auch die Ocularöffnung, so dafs sie nicht mehr mit jener Marke in gleicher Höhe bleibt. Diese Aenderung ist indessen, wenn es sich nur um kleine Berichtigungen handelt, wie solche während der Arbeit vorkommen, so unbedeutend, dafs sie nur wenige Hunderttheile eines Zolles zu betragen pflegt, also ohne Einflufs ist. Sollte aber zufällig die Libelle eine sehr abweichende Lage angenommen haben, so mufs man nach der ersten Berichtigung und Einstellung die Höhe des Oculars nochmals auf die Marke übertragen und nunmehr die Berichtigung vervollständigen. Die Einstellung des Fernrohrs läfst sich mit grofser Schärfe ausführen, indem man an dem erwähnten Vortreten der Spitzen der Seitendreiecke über und unter dem horizontalen Faden mit Sicherheit wahrnehmen kann, ob die Mittellinie des Fadens die gemeinschaftliche Spitze der beiden schwarzen Dreiecke trifft.

Auch alle übrigen Theile der Operation haben solche Schärfe, dafs in der Berichtigung ein Fehler von 0,1 Zoll für die gewählte Entfernung nicht vorkommen kann. Bedingung ist es dabei aber, dafs stehndes Wasser und zwar im Zustande voller Ruhe vorhanden ist. Schon bei mäfsigem Winde gelingt diese Operation nicht mehr, und man mufs vollends darauf verzichten, wenn kein kleiner See oder Teich in der Nähe ist. Alsdann wählt man das folgende Verfahren, welches etwas zeitraubender, aber eben so sicher ist.

Man stellt die beiden eingetheilten Visirlatten, von denen später die Rede sein wird, lothrecht und wieder in derienigen Entfernung von einander auf, in der man beim Nivelliren zu visiren pflegt. Hierauf bringt man das Instrument seitwärts neben die eine der beiden Latten, so dafs die Ocular-Oeffnung ein wenig vor die eingetheilte Fläche vortritt, die der andern Latte zugekehrt ist. Durch Anhalten eines kleinen Lineals kann man alsdann die Höhe des Mittelpunkts der Ocular-Oeffnung an der Latte ablesen, nachdem das Fernrohr gegen die zweite Latte gerichtet und die Libelle zum Einspielen eingebracht ist. Die Höhe des Oculars an

der Latte A sei bei g und man lese durch das so gestellte Fernrohr an der Latte B die Höhe γ ab. Alsdann stellt man das Instrument in gleicher Weise an die Latte B und visirt, nachdem die Libelle gerichtet ist, zurück nach A. Hier lese man die Höhe β ab, während an der Latte B die Ocular-Oeffnung sich in der Höhe b befindet. Indem nun bei der unveränderten Lage der Libelle gegen das Fernrohr die Linie $g\gamma$ unter demselben

Winkel gegen den Horizont geneigt ist, wie $b\beta$, so bilden sich zwei gleichschenklige Dreiecke, und der Punkt $\frac{1}{2}(g+\beta)$ an der Latte A liegt in gleicher Höhe mit $\frac{1}{2}(\gamma+b)$ an der Latte B. Wenn man von diesen beiden Höhen $\frac{1}{2}(\gamma+b)$ abzieht, so bestimmt sich der Punkt c an der Latte A, der mit b oder dem Ocular des Instruments bei seiner letzten Aufstellung in gleicher Höhe liegt. Das Maafs für den Punkt c ist nämlich

$$\frac{1}{2}(g+\beta-b-\gamma)$$

dieses Maafs bezeichnet man auf A durch jene Papiermarke. Auf letztere wird das Fernrohr von b aus gerichtet und die Libelle soweit verstellt, dafs sie bei dieser Richtung des Fernrohrs einspielt.

§ 45.

Was die Krümmung der Erde und die Strahlenbrechung betrifft, so läfst sich der Einflufs derselben annähernd nachweisen. Mifst man die Elevation eines entfernten Gegenstandes, z. B. eines hohen Thurms, mittelst eines Vertical-Kreises, so ist der Winkel zwischen der Spitze des Thurms und dem Horizont nicht derjenige, der mit dem Abstande multiplicirt die ganze Höhe über dem Instrument angiebt, vielmehr mufs dieser Winkel, der gleich h sei, noch in zweifacher Beziehung verbessert werden. Zuerst liegt wegen der Krümmung der Erde ein Theil des Thurms unter dem Horizont des Instruments. Der dazu gehörige Winkel ist ein Chordo-Tangentenwinkel des gröfsten Kreises, der auf der Erdoberfläche zwischen beiden Punkten gezogen ist, und dieser Winkel ist bekanntlich gleich dem halben Centriwinkel also $\frac{1}{2}\varphi$. Der gemefsne Elevations-Winkel h mufs daher um $\frac{1}{2}\varphi$ vergröfsert werden.

Sodann ist die Strahlenbrechung zu berücksichtigen. Indem der Lichtstrahl von dem höhern beobachteten Punkt nach dem tiefer stehnden Instrument aus den dünnern Luftschichten in die dichtern übergeht, so wird er gebrochen und krümmt sich näherungsweise nach einem Kreisbogen, dessen Radius das Sechsfache des Erdradius mifst. Die concave Seite des Strahls liegt wieder abwärts, und es tritt sonach derselbe Fall ein, als wenn man auf einer Kugel, deren Radius das Sechsfache des Erdradius ist, zwischen denselben Punkten die Messung ausgeführt hätte. Der betreffende Centriwinkel ist also gleich $\frac{1}{6}\varphi$, oder der Chordo-Tangentenwinkel $\frac{1}{12}\varphi$. Dieser Winkel mufs aber von dem ersten abgezogen werden, weil er wegen der Krümmung des Strahls die Elevation vergröfsert.

Der wahre Höhenwinkel, der mit der Entfernung multiplicirt die richtige Erhebung darstellt, ist also

$$h + \frac{5}{12}\varphi$$

Bezeichnet H die Erhebung des gemefsnen Punkts über der Kugel-Oberfläche der Erde, D den Abstand des in dieser Fläche stehnden Instruments von jenem Punkt und r den Erdradius, so ist

$$H = D\left(h + \frac{5}{12}\varphi\right)$$

aber

$$\varphi = \frac{D}{r}$$

also

$$H = D\left(h + \frac{5}{12} \cdot \frac{D}{r}\right)$$

Indem man beim gewöhnlichen Nivelliren keine Elevations-Winkel mifst, vielmehr horizontal visirt, so ist $h = 0$, und man hat

$$H = \frac{5}{12} \cdot \frac{D^2}{r}$$

Der Erdradius r mifst im mittleren Breitengrade 1690500 Rheinländische Ruthen, wenn daher alle Gröfsen in diesem Maafs ausgedrückt werden, so folgt

$$H = 0{,}000000\,24648 \,.\, D^2$$

oder wenn H in Zollen, D dagegen in Ruthen gemessen wird,

$$H = 0{,}000035\,5 \,.\, D^2$$

Hiernach kann man die Correction H wegen Krümmung der Erde und Strahlenbrechung leicht berechnen, wenn die Entfernung D bekannt ist. Man findet darnach

für $D =$	10 Ruthen	$H = 0{,}003$ Zoll
$=$	20 -	$= 0{,}014$ -
$=$	30 -	$= 0{,}032$ -
$=$	40 -	$= 0{,}057$ -
$=$	50 -	$= 0{,}089$ -
$=$	60 -	$= 0{,}128$ -
$=$	70 -	$= 0{,}174$ -
$=$	80 -	$= 0{,}227$ -
$=$	90 -	$= 0{,}287$ -
$=$	100 -	$= 0{,}355$ -

Es ergiebt sich hieraus, dafs man bei geringen Entfernungen keine Correction wegen Krümmung der Erde und Strahlenbrechung anzubringen braucht, dieses vielmehr nur bei besonders genauen Nivellements in dem Fall erforderlich wird, wenn man gezwungen ist, das Instrument viel näher an die eine, als an die andre Latte zu stellen. Die erwähnte Correction ist zwar nicht ganz sicher, insofern die Strahlenbrechung nicht constant ist, sondern nach Maafsgabe der Witterung gröfsre oder kleinere Werthe annimmt, doch dürfte beim gewöhnlichen Nivelliren, wo die Entfernungen immer sehr mäfsig bleiben, in dieser Beziehung kein merklicher Fehler zu besorgen sein.

Nichts desto weniger mufs man die Aufstellung der Latten in sehr verschiednen Abständen doch möglichst vermeiden, weil dabei auch die Fehler wegen unvollständiger Berichtigung der Libelle in Betracht kommen. Zuweilen sieht man sich dazu gezwungen, namentlich wenn man eine steile Anhöhe ersteigt, oder von derselben herabgeht, weil die Latte höher ist, als das Doppelte der Höhe des Instruments, und man um gar zu kurze Stationen zu vermeiden das Instrument von der tiefer stehnden Latte so weit entfernt, dafs ihr oberes Ende noch von der Visirlinie getroffen wird. Auch wenn die Richtung des Nivellements-Zuges nahe mit derjenigen der Sonnenstrahlen und namentlich bei niedrigem Stande der Sonne nahe zusammenfällt, wird die Maafs-Eintheilung auf der Latte beim Visiren gegen die Sonne sehr undeutlich, und man ist daher gezwungen, in dieser Richtung nur kurze Entfernungen zu wählen, während dieselben auf der andern Seite die passendste Länge behalten. Wiederholt sich diese Ungleichmäfsigkeit mehrfach und zwar immer in gleichem Sinn, so dürfen die Correctionen nicht unterlassen werden.

Ist das Instrument so berichtigt, dafs die Visirlinie genau horizontal liegt, so mifst man an jeder Latte die Höhe zu grofs, und die Differenz beider abgelesnen Höhen ist daher um die Differenz beider Correctionen zu verbessern. Wenn dagegen die Berichtigung nach der vorstehend beschriebnen Methode stattgefunden hat, so findet für die dabei gewählte Entfernung keine Correction statt, wohl aber für eine geringere Entfernung eine positive, und für eine gröfsre eine negative. Das Instrument sei auf den Abstand von 40 Ruthen berichtigt, so wird bei einem Abstande der Latte von nur 20 Ruthen die abgelesne Höhe um $0{,}057 - 0{,}014 = 0{,}043$ Zoll vergröfsert werden müssen, und wenn die andre Latte 60 Ruthen entfernt ist, so mufs die Höhe an dieser um $0{,}128 - 0{,}057 = 0{,}071$ Zoll vermindert werden. Die Correction in Bezug der beiden Latten ist also gleich der Summe beider partiellen Correctionen oder 0,114 Zoll. Im andern Fall, wenn das Instrument beim Einspielen der Libelle eine horizontale Visirlinie giebt, ist für dieselben Entfernungen die ganze Correction gleich der Differenz derer, die sich auf 20 bis 60 Ruthen beziehn, also $0{,}128 - 0{,}014$, also eben so grofs, wie früher, oder wieder 0,114 Zoll.

§ 46.

Als dritte Fehler-Ursache beim Nivelliren mufs die Undeutlichkeit des Bildes angeführt werden. Dieselbe darf man jedoch nur in dem Fall dem Instrument beimessen, wenn dieses mit einem Fernrohr versehn ist, sonst liegt sie in der Unvollkommenheit des menschlichen Auges. In geringen Distanzen veranlafst sie keine bedeutenden Fehler, doch werden diese bei weitern Abständen sehr grofs und können alsdann sogar alle sonstigen Fehler überwiegen. Das deutliche Sehn bedingt daher vorzugsweise die Länge der Nivellir-Stationen.

Der Beobachter mufs untersuchen, in welcher Entfernung er mit seinem Fernrohr die Eintheilung auf der Visirlatte noch

12*

deutlich erkennen kann. Dabei sind aber manche äufsre Umstände zu berücksichtigen, von denen zum Theil bereits die Rede war. Dahin gehört das Blenden des Sonnenlichts, wenn man bei niedrigem Stande der Sonne nahe gegen dieselbe visirt. Es empfiehlt sich alsdann, von der geraden Richtung abzuweichen und den Nivellements-Zug im Zickzack zu führen, so dafs die einzelnen Linien etwa unter einem halben rechten Winkel von der Hauptrichtung abweichen. Dabei lassen sich die auf beiden Seiten eingetheilten Latten noch so stellen, dafs man vor-, wie rückwärts die Höhen daran ablesen kann. Hierdurch wird vermieden, dafs die Entfernungen sehr verschieden sind, und dieses ist auch in Betreff der Deutlichkeit sehr wichtig. Man hat nämlich die Ocular-Röhre so weit ausgezogen, dafs das Bild in derjenigen Entfernung, in welcher man gewöhnlich mifst, die gröfste Schärfe hat. In bedeutend gröfsrer Nähe verschwindet diese Schärfe aber so sehr, dafs ohnerachtet der Nähe, die Ablesung weniger genau wird. Das Verstellen der Ocular-Röhre mufs man aber vermeiden, weil dadurch die Absehens-Linie, für welche die Libelle berichtigt ist, leicht verändert werden könnte.

Die Deutlichkeit des Bildes leidet ferner, wenn das Objectiv-Glas von der Sonne beschienen wird, und dieses vermeidet man durch eine leichte Aufsatzröhre, die einige Zoll weit über das Fernrohr hinaustritt, und die man nöthigen Falls aus einem Blättchen steifen Papiers darstellt. Diese Röhre gewährt auch den Vortheil, dafs bei schwachem Regen, wobei die Arbeit noch fortgesetzt werden kann, die Tropfen nicht auf das Objectiv fallen und die Deutlichkeit vermindern.

Hierbei wäre noch zu erwähnen, dafs es bei niedrigem Stande der Sonne sich zuweilen ereignet, dafs das Licht von der mit Oelfarbe angestrichenen Latte gerade nach dem Instrument reflectirt wird, und man alsdann die Eintheilung nicht mehr erkennen kann. Durch passende Stellung der Latten, die etwas gedreht werden, läfst sich dieses freilich leicht vermeiden, nachdem aber bereits die Höhe an der Latte in der vorgehnden Station abgelesen ist, darf keine Veränderung in ihrer Stellung vorgenommen werden, und alsdann bleibt nur übrig, die Latte künstlich zu beschatten, indem der Gehülfe mit einem belaubten Zweige, oder in andrer Weise das Sonnenlicht abhält.

§ 47.

Es bleiben noch die Fehler zu untersuchen, die beim Aufstellen der Visirstäbe und beim Richten der Tableaus vorkommen können. Stehn die Stäbe oder Latten nicht senkrecht, so wird an denselben die Höhe jedesmal gröfser gemessen, als sie wirklich ist. In ebnem Terrain heben sich diese Fehler theilweise auf, wenn man jedesmal ungefähr in derselben Höhe der Latten das Maafs abliest. Wird dagegen eine Anhöhe hinauf nivellirt, so hat die schiefe Stellung der hintern Latte gröfsern Einflufs auf das Resultat, als die der vordern, weil das abgelesne Maafs ein längeres ist. Eine Ausgleichung kann daher in diesem Fall nicht mehr stattfinden. Die Fehler, die immer in demselben Sinn vorkommen, summiren sich, und man findet die Anhöhe höher, als sie wirklich ist. Dazu kommt noch, dafs man auf unebnem Terrain, wo der Horizont nicht frei ist, durch blofsen Augenschein den lothrechten Stand der Latte nicht beurtheilen kann und in der Schätzung desselben leicht um 15 Grade sich irrt. Wenn der Fehler durchschnittlich aber auch nur 10 Grade beträgt, also die Höhen im Verhältnifs von $1 : \cos 10^0$ zu grofs abgelesen werden, so giebt dieses schon einen Fehler von 1 Fufs auf 65 Fufs Höhe.

Wenn die Latte nicht in den Boden fest eingestofsen, sondern nur auf ein Pfählchen aufgestellt und mit der Hand gehalten wird, so pflegt, wie schon oben bemerkt wurde, ihr lothrechter Stand nur in soweit beurtheilt zu werden, dafs sie nicht stark aus der vom Instrumente aus durch sie gelegten Vertical-Ebene abweicht, während ihre Abweichung in dieser Ebene ganz unbeachtet bleibt. Zuweilen wählt der Feldmesser die Glasröhren seiner Canalwaage zur Norm und hält mit der strengsten Gewissenhaftigkeit darauf, dafs der Visirstab in der Ebene gehalten wird, in der die Glasröhren stehn, ohne sich irgend davon zu überzeugen, dafs dieses wirklich eine Vertical-Ebene ist.

Bei den lose aufstehnden Latten würde eine kleine daran befestigte Dosen-Libelle wohl der bequemste Apparat zur Controlle in dieser Beziehung sein, wie Bourdaloue davon auch in der That Gebrauch gemacht hat. Der Beobachter kann aber während des Visirens nicht beurtheilen, ob der Gehülfe alsdann den Stab richtig hält, und sonach wird hierdurch keineswegs eine gröfsere Sicherheit erreicht.

Die feste Aufstellung der Latten ist zur Sicherung gegen diese Fehler dringend geboten. Alsdann läfst sich sehr bequem ein Loth benutzen, welches der Arbeiter bei sich führt, und nach welchem er nach dem jedesmaligen Einstellen in einer und der andern Richtung den Stand beurtheilen und verbessern kann. Durch dasselbe Mittel prüft aber auch der Beobachter selbst die richtige Aufstellung jeder Latte.

Das Aufsetzen des Visirstabes auf den Kopf eines vorher eingeschlagnen kleinen Pfählchens, wie dieses gewöhnlich geschieht, ist noch insofern unsicher, als ein solcher Kopf keine horizontale Ebene bildet, also der Stab bei dem Visiren von der einen Seite leicht etwas höher steht, als wenn von der andern Seite dagegen visirt wird. Die hieraus entspringenden Fehler sind indessen im Allgemeinen nur geringe, und heben sich auch gegenseitig zum Theil auf, da sie eben sowohl positiv, wie negativ sein können. Dabei kommt aber noch die Frage in Betracht, ob der Pfahl auch feststeht, und nicht vielleicht durch das Gewicht der 10 bis 12 Fufs hohen Stange mit dem Tableau herabgedrückt wird. Namentlich in sumpfigem Wiesengrunde ist dieses sehr zu besorgen, und der Feldmesser pflegt alsdann auch wohl die Arbeiter anzuweisen, dafs sie den Stab recht sanft aufstellen. Erfolgt dabei ein Eindrücken, so ist dasselbe zwar ohne Nachtheil, so lange noch nicht gegen den darauf stehnden Stab visirt ist, doch kann es auch später geschehn, namentlich beim Umdrehn des Stabes, indem das Tableau nach der andern Seite gekehrt wird. Die hierdurch veranlafsten Fehler treten jedesmal in demselben Sinn ein, summiren sich also, und das Nivellement zeigt ein dauerndes Ansteigen, weil die Latten während der Messung sich stets senkten.

Was die Tableaus betrifft, so sind die Latten, an welchen sie auf- und abgeschoben werden, gemeinhin nicht so scharf eingetheilt, wie man mit dem Fernrohr selbst die Theilung ablesen könnte. Von den sehr grofsen Fehlern, die der Gehülfe aber begehn kann, wenn er die Einstellung nicht richtig macht, oder die Tableaus verstellt, bevor der Feldmesser die Höhen abgelesen hat, war schon oben (§ 41) die Rede. Auch wurde mitgetheilt (§ 44), dafs es sich mehr empfiehlt auf das Tableau vier Dreiecke, als vier Quadrate zu zeichnen, weil im ersten Fall die Höhe des Punkts, in welchem die vier Spitzen der Dreiecke liegen, sich sicherer erkennen läfst.

§ 48.

Sehr wichtig ist die Frage, wie grofs der wahrscheinliche Fehler eines Nivellements ist, oder mit welcher Wahrscheinlichkeit man erwarten darf, dafs der Fehler die erlaubte Grenze nicht überschreitet. Im Allgemeinen läfst sich hierauf keine Antwort geben. Welches Instrument man auch anwenden mag, so wird die Sicherheit des Resultats jedesmal vorzugsweise von der Sorgfalt und Uebung des Beobachters abhängen. Setzt man diese voraus, und nimmt zugleich an, dafs die Gehülfen zuverlässige Leute sind, die keine absichtlichen Täuschungen einführen, auch beim Aufstellen der Visirstäbe hinreichende Uebung haben, um gröfsere Fehler zu vermeiden, so läfst sich die Wahrscheinlichkeit der mit verschiednen Instrumenten erhaltnen Resultate ungefähr beurtheilen. Von der Mercurialwaage mufs indessen abgesehn werden, weil die dabei vorkommenden Fehler leicht übermäfsig grofs ausfallen und selbst durch volle Aufmerksamkeit nicht immer zu vermeiden sind.

Die Canalwaage ist in früherer Zeit vielfach als ein sehr zuverlässiges Nivellir-Instrument empfohlen worden. Gilly sagt*), dafs bei mehrfacher Verschiebung des Tableaus, im Abstande von 10 Ruthen der Unterschied zwischen den einzelnen Ablesungen nie über ein Achttheil Zoll betragen habe. Ich habe häufig nach den Winken geübter Feldmesser das Tableau selbst eingestellt und die Höhen abgelesen, die Abweichungen vom Mittel betrugen alsdann aber bei Entfernungen von 5 Ruthen schon ein Viertel Zoll. Nur einem Feldmesser, der aber besondre Uebung besafs, gelang es, das Tableau so scharf einrichten zu lassen, dafs der wahrscheinliche Fehler bei derselben Entfernung sich etwa auf

*) Praktische Anleitung zur Anwendung des Nivellirens. Berlin 1800.

0,1 Zoll stellte. Diese Genauigkeit bleibt indessen noch immer sehr bedeutend hinter derjenigen zurück, die Gilly anführt, und in allen diesen Fällen wurde ungewöhnliche Aufmerksamkeit und Sorgfalt angewendet, wie auch die Fehler vermieden, welche aus der unrichtigen Aufstellung der Stäbe und unpassender Handhabung der Tableaus oder der falschen Ablesung der Höhen entspringen.

Ich habe aufserdem verschiedentlich Gelegenheit gehabt, Nivellements zu vergleichen, die sich gegenseitig controllirten. Die Unterschiede waren dabei aber stets so grofs, dafs sie mit Rücksicht auf die wahrscheinliche Ausgleichung der Fehler, in der einzelnen 10 Ruthen langen Station auf einen wahrscheinlichen Fehler von nahe 1 Zoll schliefsen liefsen. In einem solchen Fall, der sich auf ein Nivellement von mehr als 8 Meilen Länge bezog, das unter günstigen Umständen, nämlich während des Sommers auf den Kronen von Deichen und zwar von einem als zuverlässig anerkannten Geometer ausgeführt war, stellte sich der Unterschied so grofs heraus, dafs der wahrscheinliche Fehler für jede 20 Ruthen lange Station sich sogar auf $2\,{}^3/_4$ Zoll stellte.

Die Angabe von Netto *), dafs man mit der Canalwaage auf Entfernungen von 7 bis 8 Ruthen die Horizontale „allerhöchstens bis auf einem halben Zoll verbürgen kann“, erscheint hiernach keineswegs übertrieben, vielmehr noch eine günstige zu sein. Man dürfte wohl annehmen, dafs bei gehöriger Uebung und Aufmerksamkeit auf die ganze Operation der wahrscheinliche Fehler des Visirens gegen die in 5 Ruthen Abstand aufgestellte Tafel ${}^1/_4$ Zoll beträgt. Alsdann ist der wahrscheinliche Fehler für eine Station von 10 Ruthen Länge

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\ \text{Zoll}$$

Indem aber jedes Nivellement vorschriftsmäfsig noch in entgegengesetzter Richtung wiederholt werden soll, so vermindert sich der wahrscheinliche Fehler für die Station von 10 Ruthen wieder auf ${}^1/_4$ Zoll, und für 10 Stationen oder auf 100 Ruthen beträgt er

$$0{,}25\sqrt{10} = 0{,}79\ \text{Zoll}$$

Indem nun aber nach dem neuen Preufsischen Feldmesser-

*) Handbuch der gesammten Vermessungskunde.

Reglement auf 100 Ruthen Länge nur ein Fehler von 0,671 Zoll gestattet ist, so überschreitet der wahrscheinliche Fehler schon die erlaubte Grenze, und es ist sonach wahrscheinlicher, dafs jede Messung, die man mit der Canalwaage ausführt, bei einer Revision für falsch, als dafs sie für richtig anerkannt werden wird. Dieses Instrument darf daher niemals gebraucht werden, wo die Vorschrift in Betreff der erlaubten Fehlergrenze in Anwendung kommt.

§ 49.

Mittelst eines Nivellir-Instruments, das mit einer empfindlichen Libelle und einem mäfsigen Fernrohr versehn ist, erreicht man leicht eine viel gröfsere Genauigkeit, man darf jedoch nicht glauben, dafs die Anwendung eines solchen schon jede Gefahr vor bedeutenden Fehlern beseitige, vielmehr erfordert die richtige Behandlung desselben noch besondre Ueberlegung und Aufmerksamkeit, so wie auch Uebung in der Berichtigung und im Gebrauch. Ohne diese gewährt das Nivellir-Instrument keine Sicherheit gegen die Fehler, die bei der Aufstellung und Behandlung der Visirlatten und Tableaus vorkommen.

Um zu zeigen, wie man ein Instrument dieser Art prüft und manche Einzelheiten desselben untersucht, mag die Beschreibung eines Niveaus hier folgen, welches ich bei dem bereits erwähnten ausgedehnten Nivellement benutzte. Es gehörte keineswegs zu den gröfsern Instrumenten, wurde vielmehr von den in neuerer Zeit angefertigten in Bezug auf seine Dimensionen weit übertroffen, doch war die Libelle hinreichend empfindlich und das Fernrohr, das nur fünfmalige Vergröfserung hatte, zeigte sehr scharfe und farblose Bilder, so wie auch alle Theile desselben mit Sorgfalt und Ueberlegung ausgeführt waren. Es war im Anfang dieses Jahrhunderts aus England bezogen.

Das Fernrohr, welches terrestrisch war, maafs in der Länge $11\frac{1}{2}$ Zoll und in der Oeffnung des Objectiv-Glases nur 8 Linien. Zwischen dem Ocular uud dem Collectiv-Glase, neben der Blendung, befand sich ein starker Ring, der durch vier kreuzweise einander gegenüberstehnde Stellschrauben mit der Ocular-Röhre verbunden war. Die Köpfe dieser Schrauben waren versenkt, so dafs sie die Bewegung der Röhre nicht hinderten, auch liefsen sie sich etwas seitwärts schieben, da die kegelförmigen Vertiefungen in der Röhre gröfsere Weiten hatten. Vier Schrauben mit breiten Köpfen auf der einen Seite des Ringes dienten ursprünglich zur Befestigung der Silberfäden, die das Fadenkreuz bildeten.

Die Libelle, deren lichte Weite 6 Linien maafs, war in der messingenen Fassung mittelst zweier Schrauben mit dem Fernrohr verburden, und zwar so, dafs sie über demselben lag. Die Oeffnung in der Fassung war $2^1/_2$ Zoll lang, während die Länge der Luftblase gewöhnlich $1^3/_4$ Zoll betrug.

Das Fernrohr mit der Libelle lag mittelst zweier broncenen Cylinder von 13 Linien Durchmesser auf zwei Y förmigen Trägern, die 6 Zoll von einander entfernt waren. Der eine derselben konnte durch eine Schraube gehoben und gesenkt werden. Diese Schraube zeigte zwar weder todten Gang, noch Mangel an Festigkeit, da jedoch ein doppelter Gang in sie eingeschnitten war, so hatte dieser eine ansehnliche Steigung und schon bei schwacher Drehung wurde die Luftblase der Libelle stark bewegt. Durch das oben erwähnte Zurückdrehn gelang es jedoch sehr bald, die Blase zum Einspielen zu bringen.

Die beiden erwähnten Träger standen auf einem starken Prisma von Messing, und an dieses war die Büchse befestigt, die sich auf dem etwas conischen Zapfen, der nahe 1 Zoll im Durchmesser hatte, drehte. Um letztern vertical zu stellen, diente eine Nufs mit vier Stellschrauben.

Die Silberfäden im Fernrohr waren viel zu dick, als dafs sie bei einer scharfen Messung hätten benutzt werden können. Statt derselben zog ich daher Spinnenfäden ein, die zwar sehr fein und sauber waren, aber weit geringere Haltbarkeit besafsen und daher zuweilen durch andre ersetzt werden mufsten. Das Verfahren beim Einspannen neuer Fäden welches Bessel anwendete, ist überaus einfach und bequem und läfst sich, wenn man dabei eine Loupe benutzt, mit grofser Schärfe ausführen. Es besteht in Folgendem.

In einem Spinn-Gewebe, an dem nicht viel Staub haftet, und welches wo möglich erst vor Kurzem gesponnen ist, sucht man einen längern feinen Faden aus. Einen gewöhnlichen Handzirkel öffnet man so weit, dafs seine Spitzen sich etwa 3 Zoll von einander entfernen, und klebt auf jeden Schenkel in der Nähe der Spitze etwas weiches Wachs, am besten Baumwachs. Nunmehr hält man den Cirkel so, dafs der Faden an einem Schenkel das Wachs berührt und drückt ihn mit dem Finger ein, alsdann befestigt man den Faden in gleicher Weise an den andern Schenkel, um welchen man ihn auch durch Drehn des Cirkels mehrmals umschlingen kann. Hierauf untersucht man den gelösten Theil des Fadens mit einer Loupe, statt deren auch das ausgeschobene Ocular des Fernrohrs benutzt werden kann, und wenn er passend befunden wird, so kann man mit einem weichen Pinsel die daran etwa haftenden Stäubchen entfernen. Der Faden besitzt, wenn er frisch gesponnen ist, eine bedeutende Elasticität, man darf daher, um ihn scharf anzuspannen, den Cirkel etwas weiter öffnen. Der Ring, an welchen der Faden befestigt werden soll, wird auf der ebenen Grundfläche vorher mit den nöthigen Marken versehn, damit über die richtige Lage der Fäden kein Zweifel ist. Man legt ihn auf ein Blättchen weifses Papier und darüber den Cirkel, so dafs die beiden Spitzen desselben auf beiden Seiten des Ringes sich befinden und der Faden auf der ebenen Fläche des letztern liegt. Nunmehr untersucht man diese Lage mit der Loupe oder dem Ocular-Glase des Fernrohrs, und verschiebt den Cirkel so lange, bis der Faden die Marken genau schneidet. Bei frischen Fäden darf man ein Zerreifsen derselben während dieser Operation nicht besorgen, und bei vorsichtiger Behandlung zerreifsen auch ältere Fäden nicht leicht. Endlich wird der Faden mittelst zweier Wachskügelchen, die man vorher durch Kneten weich gemacht hat, fest geklebt. In gleicher Weise wird auch der normal auf den ersten gerichtete Faden oder vielleicht mehrere Parallel-Fäden befestigt.

Diese Fäden stellen sich besonders auf stark erleuchtetem Hintergrunde als scharf gezogne feine Linien dar, auf dunklem Laube sind sie weniger deutlich, doch ist mir nie der Fall vorgekommen, dafs ich aus diesem Grunde die Stationen hätte verändern müssen. Die scheinbare Dicke der Fäden entsprach in diesem Fernrohr einem Winkel von 8 Secunden, wie sich aus der Beobachtung besonderer Marken in weiten Entfernungen ergab.

In einem Brief an Gaufs vom 5. März 1820*) beschreibt Bessel dieses Einziehn der Fäden in ähnlicher Weise, doch spricht er daselbst von den feinsten Fäden der Flockseide. Diese wurden also später vorgezogen. Als ich wenige Jahre früher auf der Sternwarte war, fanden nur Spinnenfäden Anwendung.

Zur Beurtheilung des Standes der Luftblase waren an den Enden derselben auf jeder Seite in die Libelle zwei Striche eingerissen, die $^1/_3$ Linie von einander entfernt waren. Sie begrenzten die Länge der Luftblase bei verschiednen Temperaturen. Hierdurch war Gelegenheit geboten, die Empfindlichkeit der Libelle zu prüfen. Der eine Visirstab wurde in 30 Ruthen Entfernung vom Instrument aufgestellt, und während ich das eine Ende der Blase abwechselnd mit dem einen und dem andern Strich auf der Libelle in Berührung brachte, las ich die folgenden Höhen ab

1)	5′ 11″,9	2)	6′ 0″,2
3)	5′ 11″,9	4)	6′ 0″,1
5)	6′ 0″,0	6)	6′ 0″,1
7)	6′ 0″,0	8)	6′ 0″,2
9)	5′ 11″,9	10)	6′ 0″,1
Mittel	5′ 11″,94		6′ 0″,14

Wenn demnach die Lage der Blase sich um $^1/_3$ Linie verändert, so hebt sich die Visirlinie im Abstande von 30 Ruthen um 0,2 Zoll, oder im Winkel um $9^1/_2$ Secunden. Es ergiebt sich daraus der Krümmungs-Radius der Libelle gleich 50 Fufs. Der Fehler beim Einstellen wird, wenn nicht vielleicht ein starker Wind das Instrument in Schwankung versetzt, nicht leicht dem halben Abstande jener beiden Striche gleich kommen, oder 5 Secunden betragen. Der wahrscheinliche Fehler der Messung war, wie nachstehend gezeigt werden wird, in der That bedeutend geringer.

§ 50.

Es ist schon erwähnt worden, wie sehr durch Anwendung beweglicher Tableaus die Sicherheit der ganzen Operation beeinträchtigt und die Einführung einer scharfen Controlle fast unmöglich

*) Briefwechsel zwischen Gaufs und Bessel. Leipzig 1880. S. 319.

gemacht wird. Diese Tableaus wurden daher von mir nicht benutzt, vielmehr die Latte mit einer scharf markirten Eintheilung versehn, die unmittelbar durch das Fernrohr abgelesen werden konnte. Dabei mufsten an die Latten eiserne Schuhe befestigt werden, damit sie sich leicht in den Boden stofsen liefsen, und indem ein Drehn derselben alsdann nicht möglich war, so mufsten sie auch auf beiden Seiten übereinstimmend eingetheilt sein.

Die Latten, aus geradefasrigem Kiefernholz geschnitten, waren 10 Fufs lang, $2\frac{1}{2}$ Zoll breit und $1\frac{1}{2}$ Zoll stark. Am untern Ende war jede mit einem pyramidal geformten eisernen Schuh versehn. Zwei solcher Latten wurden angefertigt und jede auf beiden Seiten übereinstimmend mit schwarzer Oelfarbe auf weifsem Grunde bezeichnet. Beide waren jedesmal im Gebrauch, so dafs das Nivellement ganz sicher an die folgende Latte angeschlossen werden konnte, bevor die vorhergehende ausgezogen wurde.

Die Bezeichnung des Maafses mufste jedenfalls ziemlich einfach sein, um beim Ablesen Verwechselungen zu vermeiden. Aufserdem wäre es gewifs erwünscht gewesen, wenn feinere Theilungen hätten gewählt werden dürfen, um etwa die einzelnen Zehntheile eines Zolls noch zu markiren. Letzteres mufste aber mit Rücksicht auf die Deutlichkeit unterbleiben, und es liefs sich auch ohne Nachtheil entbehren, indem diese Unterabtheilungen sehr sicher geschätzt werden konnten.

Gegen die Zuverlässigkeit solcher Schätzungen werden oft Zweifel erhoben. Dafs diese jedoch ungegründet sind, ergiebt sich am deutlichsten aus den astronomischen Beobachtungen. So wird die Zeit des Durchganges eines Sterns durch einen Faden im Mittagsfernrohr in Zehntheilen der Secunde notirt, während die Uhr nur ganze Secunden schlägt. Kleinere Intervalle darf sie auch nicht angeben, weil man dieselben doch nicht zählen könnte, und dadurch die Unsicherheit noch gröfser würde. Das Verfahren bei diesen Beobachtungen ist folgendes. Man merkt sich die Stelle, wo der Stern im Moment desjenigen Secundenschlages steht, der dem Durchgange durch den Faden vorangeht, und vergleicht diese Entfernung vom Faden mit derjenigen, die beim folgenden Secundenschlage auf der andern Seite sich bildet.

Man theilt also den Raum, dessen Begrenzung nur momentan und zwar nicht gleichzeitig gegeben ist, durch Schätzung in 10 Theile und bestimmt hierdurch das Maafs. Die Uebereinstimmung dieser Beobachtungen unter sich zeigt aber unverkennbar, dafs ein geübter Astronom dabei nicht um ein Zehntel Secunde irrt, wenn nur der Weg in der Secunde einige Ausdehnung hat, oder der Stern nicht zu nahe am Pol steht.

Die Anwendung eines ähnlichen Verfahrens auf den Fall, wo man dauernd die beiden Grenzen sieht und mit voller Mufse die Schätzung ausführen kann, ist daher ganz sicher. Man wird gewifs nie zweifelhaft sein, ob der Faden den dritten oder den vierten Theil des Raums abschneidet, und doch ist der Unterschied zwischen diesen beiden Gröfsen nur 0,083, also weniger, als ein Zehntel. Wenn nur die Einheit eine hinreichende Ausdehnung hat, deren Zehntheile sich noch erkennen lassen, so wird man diese mit einiger Uebung so sicher schätzen, dafs man nie einen Fehler von einem ganzen Zehntel begeht. Nur in dem Fall, wenn das Maafs nahe in die Mitte zwischen zwei Zehntel fällt, geschieht es leicht, dafs man bei wiederholten Ablesungen bald dieses bald jenes der beiden zunächst liegenden trifft, aber der Fehler ist alsdann nur etwa ein halbes Zehntel.

Hiernach wählte ich die in nebenstehnder Figur dargestellte Eintheilung. Die einzelnen Zolle bilden abwechselnd weifse und schwarze Rechtecke, so dafs jeder Zoll, welcher einer geraden Zahl entspricht (2, 4, 6, 8, 10 und 12) durch ein schwarzes Viereck bezeichnet wird. Um das Zählen der Zolle aber zu erleichtern, befindet sich am obern Ende jedes sechsten Zolls ein schwarzer Kreis. Zur Unterscheidung der Fufse sind die betreffenden Zolle abwechselnd an der linken und rechten Seite aufgetragen, so dafs jeder Fufs, der einer geraden

Zahl entspricht, auf der rechten Seite steht. Aufserdem ist der zwölfte Zoll des vierten und des achten Fufses durch die ganze Breite der Fläche hindurchgezogen. Genau dieselbe Bezeichnung war auf der andern breiten Seite der Latte angebracht und zwar genau in gleicher Höhe, und eben so hatte ich auch die zweite Latte bezeichnet. Um aber die beiden Latten von einander zu unterscheiden und Verwechslungen zu vermeiden, wenn etwa irrthümlich zuerst das Fernrohr nach der vordern Latte gerichtet wäre, so war auf der einen Latte und zwar auf beiden Seiten derselben der zwölfte Zoll des zehnten Fufses über die ganze Breite fort ausgezogen, und diese Marke wurde jedesmal vor das notirte Maafs vorgeschrieben.

An diese Bezeichnung hatte ich mich in kurzer Zeit so gewöhnt, dafs im Ablesen der Fufse, wie der Zolle kein Irrthum jemals vorkam, der aus der Controlle sich sogleich hätte ergeben müssen. Eben so zeigten auch die Controllen, von denen im Folgenden die Rede sein wird, dafs die Schätzungen durchaus zuverlässig waren und der wahrscheinliche Fehler derselben weniger als 0,1 Zoll betrug.

Bourdaloue hat, um die Schätzungen auf das geringste Maafs zurückzuführen, viel complicirtere Bezeichnungen gewählt, und zwar sehr verschiedne, die bei gröfserer oder kleinerer Entfernung der Latten angewendet wurden. Für die geringsten Entfernungen konnten sogar einzelne Millimeter unmittelbar abgelesen werden. Die Benutzung verschiedner Visirlatten war indessen gewifs höchst unbequem, und man mufs bezweifeln, ob die dadurch erreichte Genauigkeit wirklich gröfser war, da doch die Ocular-Röhre nicht füglich verstellt werden durfte, ohne die Berichtigung der Libelle aufzuheben. Kommt noch dazu, dafs diese Latten nicht fest in den Boden eingestofsen, sondern nur lose aufgestellt und beim Zurückvisiren umgedreht wurden, so dürfte wohl die vorstehnd beschriebne, überaus einfache Bezeichnungs-Art der Latten unbedingt den Vorzug vor dieser verdienen.

§ 51.

Das ausgedehnte Nivellement, bei dem der vorstehnd beschriebne Apparat benutzt wurde, bezog sich auf das 1824 wieder angeregte Project zur Darstellung einer schiffbaren oder vielleicht nur flöfsbaren Verbindung der Masurischen Seen mit dem Pregel. Ich sollte zu diesem Zweck die Aufnahme des Terrains und das Nivellement leiten von der Alle, einem Nebenflufs des Pregels, längs der Guber von Schippenbeil bis Rastenburg aufwärts, von hier aber passende Canallinien bis zu den Masurischen Seen, sowie auch die Verbindungs-Linien zwischen diesen aufsuchen, und diese gleichfalls aufnehmen und nivelliren lassen. Das Nivellement sollte wie üblich auf kleine Pfählchen die von 10 zu 10 Ruthen eingeschlagen würden, sich beziehn und sich möglichst oft an Festpunkte in der Nähe anschliefsen. Die Ausführung des Nivellements übernahm ich selbst, nachdem die von mir ausgesuchten Linien durch andre Feldmesser aufgenommen und vorschriftsmäfsig durch Pfählchen markirt waren.

Zunächst schien es mir nothwendig zu untersuchen, welche Länge die Stationen bei dem mir von der Regierung eingehändigten Nivellir-Instrument erhalten dürften. Bei einem Abstande von 35 Ruthen erschienen die kleinen Quadrate auf den Visirlatten, welche die einzelnen Zolle bezeichneten, noch vollkommen scharf, und die Maafse liefsen sich durch Schätzung sicher bis auf 0,1 Zoll abnehmen. Bei weiterem Abstand des Instruments erschienen die Ecken abgerundet und die Zehntheile der Zolle waren nicht mehr sicher abzulesen. Hierauf wurde bei guter Beleuchtung der Abstand von etwa 33 Ruthen gewählt, und die Länge der ganzen Station mafs in der Regel 66 Ruthen. Bei eintretender Dunkelheit oder unklarer Luft mufste sie aber verkürzt werden.

Eine wesentliche Abweichung von der sonst üblichen Methode trat dabei in sofern ein, als weder das Instrument noch jene Visirlatten über die Pfählchen gestellt, sondern die Punkte, wo die Latten standen, nur durch Abzählen von Schritten gegen die Pfähle normirt wurden, und das Haupt-Nivellement von letztern ganz unabhängig war, auch zuweilen wenn etwa die Sonne bei niedrigem Stande gerade in die Linie traf, sich von derselben im Zickzack entfernte, wie bereits erwähnt ist.

Die Latten wurden an die jedesmal von mir bezeichneten Stellen so eingestofsen und gerichtet, dafs sie in passenden und möglichst gleichen Entfernungen vom Instrument sich befanden, und dafs von der vordern aus auch das Nivellement bequem weiter fortgesetzt werden konnte. Endlich mufste auch jede Latte lothrecht stehn. Zu diesem Zweck führte der Arbeiter ein Loth bei sich, und nach diesem prüfte ich jedesmal selbst die Stellung und zwar in zwei Richtungen. War eine Latte in dieser Weise eingestellt, so mufste der Arbeiter sich sogleich davon entfernen, und Niemand durfte sie berühren oder sich ihr auch nur nähern, bis das Nivellement auf die folgende Latte vollständig übertragen war.

Das Niveau wurde jeden Morgen vor dem Beginn der Arbeit, wo möglich über stehndem Wasser, sonst aber zwischen den beiden Visirlatten, wie oben (§ 44) beschrieben, berichtigt. Dieses geschah auch während des Tages, wenn etwa eine zufällige Erschütterung vorgekommen war, die möglicher Weise eine Verstellung der Libelle veranlafst haben konnte. Nach einer solchen Berichtigung durfte keiner der Gehülfen das Fernrohr mit der Libelle berühren oder es zugleich mit dem Stativ aufheben. Ich trug es jedesmal selbst frei in der Hand.

Sobald zu einer neuen Station übergegangen werden sollte, schickte ich einen Arbeiter zurück, um die hintere Visirlatte auszuziehn und herbeizubringen. Ich hob das Fernrohr ab, das Stativ nebst einer dritten leichtern Visirlatte und den ganzen übrigen Apparat trugen zwei Arbeiter und wir gingen alle zusammen bei der vordern Visirlatte vorbei, wobei immer und namentlich bei neuen Arbeitern grofse Aufmerksamkeit nöthig war, die Leute von dieser Latte entfernt zu halten. Namentlich war dieses erforderlich, wenn die Arbeiter in andern Verhältnissen an Scheindienste gewöhnt waren. Sie wollten alsdann immer den lothrechten Stand der Latte prüfen und denselben berichtigen. Nach Maafsgabe der vorher eingeschlagenen Pfählchen liefs sich leicht der Punkt bestimmen, auf den das Instrument zu stellen war, doch vermied ich stets, es unmittelbar über eines der Pfählchen zu bringen. Das Stativ wurde aufgerichtet, die Füfse gehörig fest in den Boden eingedrückt, und das Fernrohr darauf gelegt. Nunmehr ging ich mit dem Manne, der die zweite Latte trug, bis zu dem Punkt, wo diese stehn sollte. Er stiefs sie fest in den Boden und richtete sie nach dem Loth. Nachdem ich mich überzeugt, dafs dieses mit hinreichender Schärfe geschehn, auch die Eintheilung sowohl rückwärts, als vorwärts deutlich gesehn werden konnte, gingen wir zurück.

Hierauf wurde die Aufstellung des Instruments berichtigt und mittelst der vier Schrauben neben der Nuſs die vertikale Achse lothrecht gerichtet, wobei die Libelle zur Norm diente. Wenn hierbei auch keineswegs eine groſse Genauigkeit erforderlich war, so muſsten doch merkliche Abweichungen vermieden werden, weil sonst beim Umdrehn des Fernrohrs, dasselbe noch etwas gehoben oder gesenkt, seine Höhe also nicht dieselbe geblieben wäre. War dieses geschehn, so wurden mit möglichster Sorgfalt an der hintern und vordern Latte die Maaſse abgelesen und notirt, dabei aber auch jedesmal die Latte bezeichnet, auf der die Ablesung geschah.

Alsdann ging der Arbeiter, der eine dritte Latte trug, zu den verschiednen auf diese Station treffenden Pfählchen und stellte sie an dieselben. Diese Latte war in gleicher Weise, wie die andern, jedoch nur auf einer Seite bezeichnet, auch hatte sie keine Spitze, und war nur unten mit Blech beschlagen. Ihre Länge betrug 12 Fuſs, ihre Breite $1\frac{1}{2}$ Zoll und ihre Stärke $\frac{3}{4}$ Zoll. Sie wurde neben jedes Pfählchen auf den Boden gestellt, und mit dem Fernrohr las ich an ihr das Maaſs ab. Auf die Höhe der Pfahlköpfe, die in gleicher Weise hätte ermittelt werden können, kam es nicht an, da diese Pfähle bis zur Ausführung des Projects (das bald darauf auch ganz aufgegeben wurde) doch nicht hätten erhalten werden können.

In gleicher Weise wurden auch die Querprofile, die Deiche, Brücken und andre Gegenstände und wenn es nöthig schien auch sonstige Erhebungen oder Senkungen des Terrains in der Nähe gemessen. Groſse Genauigkeit war dabei ganz entbehrlich, da man die Terrain-Höhen doch nur bis auf 1 Zoll sicher zu messen braucht, und die hierbei vorkommenden Fehler keinen Einfluſs auf das Haupt-Nivellement hatten.

Nur der Wasserstand in der Guber daneben, deren Canalisirung in Aussicht genommen war, muſste mit groſser Schärfe gemessen werden. Zu diesem Zweck wurde diese dritte Stange in das Wasser fest eingestoſsen und nach dem Loth gerichtet. Nachdem ich daran das Maaſs durch das Fernrohr abgelesen hatte, las ich noch das Maaſs in der Höhe des Wasserspiegels ab. Dieser Bach trieb indessen mehrere Mühlen und sein Niveau war überaus veränderlich. Um daher auſser diesen zufälligen Wasserständen, die sehr verschieden waren, noch ein etwas sicheres Urtheil über die Anschwellungen bei kräftigem Betrieb der Mühlen zu gewinnen, wurden schon Tags vorher, während die Festpunkte eingerichtet wurden, an welche sich das Nivellement anschlofs, ohnfern eines jeden solchen ein höherer Pfahl am Rande des Baches eingetrieben, und derselbe etwa 1 Fufs hoch über Wasser mit zähem Thon bestrichen. So weit das Wasser in der Zwischenzeit gestiegen war, wurde dieser abgespült, und man konnte daher durch das Nivellement genau genug die gröfste Höhe der vorangegangenen Anschwellung feststellen.

Um sogleich die Ueberzeugung zu gewinnen, dafs in dem Haupt-Nivellement kein Fehler begangen sei, drückte ich hierauf die Füfse des Stativs etwas tiefer in den Boden ein, richtete aufs Neue die verticale Achse und visirte nochmals gegen die beiden Hauptlatten. Ich erhielt dabei andre Maafse als das erste mal, und berechnete sogleich aus jenen, wie aus diesen, die Höhendifferenzen. Stimmten diese bis auf 0,1 Zoll mit einander überein, so wurde zur nächsten Station übergegangen, im entgegengesetzten Fall aber die Operation nochmals wiederholt. Letzteres war jedoch nur selten erforderlich.

Die Festpunkte, an welche das Nivellement sich anschlofs, wurden in Entfernungen von einer Viertel-Meile ausgesucht oder eingerichtet, und nur wenn es sich um Verbindungs-Nivellements handelte, wobei also die Höhenlage des Terrains nicht in Betracht kam, wurden weitere Entfernungen, zuweilen sogar von einer halben Meile gewählt. Scharf markirte Plinthen massiver Gebäude, Fachbäume, Merkpfähle an Mühlen und andre Gegenstände dienten als Festpunkte, doch meist sah ich mich gezwungen, daneben noch andre Bezeichnungen anzubringen, die, wenn sie auch nicht dauernd erhalten werden konnten, doch einen schärferen Anschlufs des Nivellements gestatteten und namentlich für die folgende Controlle nothwendig waren. Sie bestanden in starken Nägeln oder Bolzen von 5 Zoll Länge, die mit cylindrischen Köpfen von $^1/_2$ Zoll Durchmesser und Höhe versehn waren. Diese Höhe war nothwendig, damit die Köpfe noch in das Holz eingetrieben, und alsdann nicht mehr mit einer Zange gefafst werden konnten. Zwei kreuzweise eingefeilte feine Rinnen markirten ihren Mittelpunkt. Sie wurden jedesmal so eingeschlagen, dafs eine der beiden Hauptlatten unmittelbar daneben eingestellt und gerichtet werden konnte. Durch Verlängerung der Theilstriche der Latte mittelst eines darüber gelegten kleinen Lineals liefs sich alsdann die Höhe des Festpunktes sicher bestimmen.

Endlich wurde die ganze Linie zwischen je zwei Festpunkten wieder zurück nivellirt. Das Instrument, wie die beiden Hauptlatten, die dabei allein benutzt wurden, nahmen alsdann auf jeder Station andere Höhen ein, woher alle Maafse von den frühern verschieden waren, und die Vergleichung mit der ersten Messung erst schliefslich angestellt werden konnte. Bei Aufstellung des Instruments und der Latten wurde dieselbe Vorsicht und Sorgfalt angewendet, wie das erste Mal, aber die sämmtlichen Neben-Messungen unterblieben. Welche Uebereinstimmung dadurch erreicht wurde, wird nachstehnd mitgetheilt werden.

§ 52.

Es ergiebt sich aus vorstehnder Beschreibung der Mefsapparate und der Benutzung derselben, dafs viele der gewöhnlichen Veranlassungen zu Fehlern dabei ganz vermieden, oder doch auf sehr nahe liegende Grenzen zurückgeführt wurden. Nach der gewählten Berichtigungs-Methode und der vorsichtigen Behandlung des berichtigten Instruments war eine falsche Einstellung des Niveaus nicht zu besorgen, und ich durfte daher, wenn die Umstände dieses erforderten, auch in ungleichen Entfernungen visiren, was jedoch im Allgemeinen immer vermieden ist, und wobei für bedeutende Ungleichheiten die nöthigen Correctionen berechnet werden mufsten. Die Fehler beim Richten der Tableaus, beim Festhalten derselben bis zur Ablesung und beim Aufstellen und Umdrehn der Visirlatten fielen ganz fort. Es blieben in der That nur die Fehler übrig, die beim Einspielen der Luftblase und beim Ablesen der Maafse begangen werden. Um diese zu ermitteln, und um zugleich zu erfahren, wie grofs dieselben bei verschiednen Entfernungen der Visirlatte sind, machte ich vor dem Beginn der Arbeit bei ruhiger Witterung und günstiger Beleuchtung die folgenden Versuche. Vor jeder einzelnen Messung wurde aber die Libelle verstellt und darauf wieder die Blase zum Einspielen gebracht.

Die Resultate waren die nachstehnden. Die erste Columne giebt die abgelesenen Höhen an, wobei jedoch die Fufse nicht berücksichtigt sind, die zweite die Abweichungen derselben vom Mittel und die dritte die Quadrate der Abweichungen.

I. Im Abstande von 5 Ruthen. Das Bild war sehr undeutlich.

	10",85	+ 0,01	0,0001
	10",85	+ 0,01	0,0001
	10",8	— 0.04	0,0016
	10",8	— 0,04	0,0016
	10",9	+ 0,06	0,0036
Mittel	10",84	Summe	0,0070

Für die in § 31 gewählte Bezeichnung ist also

$$xx = 0{,}0070$$
$$m = 5$$

daher der wahrscheinliche Beobachtungsfehler

$$w = 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}0070}{4}}$$
$$= 0{,}0282 \text{ Zoll}$$

oder im Winkel 8,09 Secunden.

II. Im Abstande von 10 Ruthen. Das Bild war wegen der zu grofsen Nähe noch nicht deutlich.

5",05	+ 0,06	0,0036
5",0	+ 0,01	0,0001
5",0	+ 0,01	0,0001
4",95	— 0,04	0,0016
4",95	— 0,04	0,0016
4",99		0,0070

der wahrscheinliche Fehler ergiebt sich hieraus

$$w = 0{,}0282 \text{ Zoll}$$
$$= 4{,}04 \text{ Secunden}$$

III. Im Abstande von 20 Ruthen

2″,6	— 0,06	0,0036
2″,7	+ 0,04	0,0016
2″,7	+ 0,04	0,0016
2″,7	+ 0,04	0,0016
2″,6	— 0,06	0,0036
2″,66		$xx = 0{,}0120$

$w = 0{,}0370$ Zoll
$= 2{,}65$ Secunden

IV. Im Abstande von 30 Ruthen

11″,7	— 0,03	0,0009
11″,8	+ 0,07	0,0049
11″,8	+ 0,07	0,0049
11″,7	— 0,03	0,0009
11″,7	— 0,03	0,0009
11″,7	— 0,03	0,0009
11″,73		$xx = 0{,}0134$

$w = 0{,}0345$ Zoll
$= 1{,}66$ Secunden

V. Im Abstande von 35 Ruthen

0″,2	— 0,10	0,01
0″,3	0,00	0,00
0″,3	0,00	0,00
0″,2	— 0,10	0,01
0″,4	+ 0,10	0,01
0″,4	+ 0,10	0,01
0″,3	0,00	0,00
0″,30		$xx = 0{,}04$

$w = 0{,}0551$ Zoll
$= 2{,}25$ Secunden

VI. Im Abstande von 40 Ruthen

4″,8	— 0,12	0,0144
4″,9	— 0,02	0,0004
5″,0	+ 0,08	0,0064
4″,9	— 0,02	0,0004

5″,0	+ 0,08	0,0064
5″,1	+ 0,18	0,0324
4″,9	— 0,02	0,0004
4″,8	— 0,12	0,0144
4″,92		$xx = 0{,}0752$

hieraus folgt $w = 0{,}0699$ Zoll

$= 2{,}50$ Secunden

VII. Im Abstande von 50 Ruthen

4″,0	— 0,04	0,0016
4″,3	+ 0,26	0,0676
4″,1	+ 0,06	0,0036
3″,8	— 0,24	0,0576
4″,2	+ 0,16	0,0256
4″,0	— 0,04	0,0016
4″,1	+ 0,06	0,0036
3″,8	— 0,24	0,0576
4″,2	+ 0,16	0,0256
3″,9	— 0,14	0,0196
4″,04		$xx = 0{,}2640$

$w = 0{,}1155$ Zoll

$= 3{,}31$ Secunden

VIII. Im Abstande von 60 Ruthen

10″,3	+ 0,21	0,0441
10″,0	— 0,09	0,0081
9″,8	— 0,29	0,0841
10″,1	+ 0,01	0,0001
9″,6	— 0,49	0,2401
10″,4	+ 0,31	0,0961
10″,4	+ 0,31	0,0961
10″,09		$xx = 0{,}5687$

$w = 0{,}2077$ Zoll

$= 4{,}96$ Secunden

Aus diesen Versuchen geht hervor, dafs in Abständen von etwa 30 Ruthen der Fehler im Winkel am geringsten ist. In geringern Entfernungen wird er gröfser, weil man durch blosse Schätzung den Zoll nicht füglich weiter, als in 10 Theile eintheilen kann. Ueberdies ist das Bild nicht deutlich, da man die

Ocular-Röhre nicht verstellen darf, ohne die Berichtigung der Libelle aufzuheben. In grofsen Abständen nimmt der Fehler gleichfalls zu, da der einzelne Zoll zu klein wird, er auch die scharfen Ecken verliert, und daher die Schätzung der Zehntheile unsicher ist. Selbst die Abzählung der Zolle wird endlich mühsam und erfordert einen gröfsern Zeit-Aufwand. Im Abstande von 60 Ruthen war es sogar schwierig, die einzelnen Zolle sicher zu erkennen.

Es darf kaum erwähnt werden, dafs die vorstehnde Untersuchung und die daraus gezognen Resultate keineswegs allgemeine Gültigkeit haben, dafs sie vielmehr nur darüber Aufschlufs geben sollen, in welcher Weise für jenes Instrument die passendste Entfernung der Visirlatte ermittelt wurde. Es ergab sich, dafs Abstände von 30 bis 35 Ruthen zu wählen wären, weil diese den kleinsten Fehler im Winkel ergaben, und die Ablesung des Maafses dabei noch leicht und sicher erfolgen konnte. Die wahrscheinlichen Fehler waren

bei 30 Ruthen gleich 0,0345 Zoll
bei 35 Ruthen gleich 0,0551 Zoll

also bei dem Abstande von $33\frac{1}{3}$ Ruthen, der durchschnittlich gewählt wurde, 0,048 Zoll. Dieses giebt auf 100 Ruthen

$$w = 0{,}048 \cdot \sqrt{3} = 0{,}0831 \text{ Zoll}$$

Indem ich das Haupt-Nivellement mit dem rückwärts ausgeführten Controlle-Nivellement verglich, hatte ich Gelegenheit, die Grösse der vorkommenden Fehler sicher zu erkennen.

Die erste Strecke des projectirten Canals war 2740 Ruthen lang, sie zerfiel in fünf nahe gleich grofse Abtheilungen, deren Grenzen durch die beschriebenen Nagelköpfe markirt waren. Jede Abtheilung war daher ungefähr 550 Ruthen lang, und das Haupt-Nivellement in derselben mit Einschluss der Controlle umfasste 1100 Ruthen. Die Differenzen zwischen beiden in jeder von diesen Längen betrugen für die fünf Abtheilungen

0,4 0,0 0,1 0,3 und 0,4

durchschnittlich also 0,24 Zoll. Es rechtfertigt sich indessen wohl, den gröfsern Fehlern eine höhere Bedeutung beizulegen, also die Fehlerquadrate zu berücksichtigen. Das mittlere Fehlerquadrat ist 0,084, woher der Fehler 0,29 Zoll.

Dieser Fehler war durchschnittlich beim Nivelliren einer 1100 Ruthen langen Strecke begangen worden, er mufs daher für diese Länge als der wahrscheinliche angesehn werden. Hieraus ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler für eine 11 mal kleinere Länge oder auf 100 Ruthen

$$w = \frac{0,29}{\sqrt{11}} = 0,087 \text{ Zoll}$$

also um ein Geringes gröfser als jene Versuche ergeben hatten. Hieraus lassen sich leicht die wahrscheinlichen Fehler für gröfsere Längen berechnen, nämlich

auf $\frac{1}{4}$ Meile	0,20 Zoll
auf $\frac{1}{2}$ Meile	0,28 Zoll
auf 1 Meile	0,39 Zoll
auf 2 Meilen	0,55 Zoll
auf 5 Meilen	0,87 Zoll
auf 10 Meilen	1,24 Zoll

Nach dem Preussischen Feldmesser-Reglement war auf 100 Ruthen Länge ein Fehler von 0,671 Zoll noch gestattet. Derselbe ist also 7,7 mal so grofs, als jener wahrscheinliche Fehler, und ich konnte daher 1 gegen 1 wetten, dafs unter einer Million Wiederholungen eines solchen Nivellements der Fehler, nur einmal diese Grenze erreicht würde. Die Wahrscheinlichkeit war daher nach gewöhnlichen Begriffen absolute Sicherheit.

Bei ungünstiger Witterung wurden indessen die Fehler viel bedeutender. So lange die Abweichungen auf die Länge einer Viertel Meile bei der Controlle sich noch unter 9 Linien herausstellten, liefs ich die Resultate gelten, indem die möglichste Beschleunigung geboten war, doch kamen nicht selten Abweichungen von 1 Zoll, und einmal sogar bei sehr stürmischer Witterung von 1,7 Zoll vor. In diesen Fällen mufste die Messung unter günstigern Umständen wiederholt werden.

Nach dem mir ertheilten Auftrage sollte auch die Höhenlage der verschiednen gröfsern und kleinern Masurischen Seen gegen einander festgestellt werden. Zu diesem Zweck führte ich ein Nivellement, das mit Einschlufs der Wasserflächen etwa 20 Meilen lang war, wieder auf den Punkt zurück, von dem ich ausgegangen war. Die Witterung blieb während dieser Zeit überaus günstig und so ruhig, dafs ich keinen Anstand nahm, die Wasserflächen, in welchen keine Strömung statt fand, als horizontal anzusehen. Das Resultat war, dafs ich bis auf 0,9 Zoll wieder in den Horizont des Anfangspunkts zurückkam.

§ 53.

Der Vollständigkeit wegen mufs mit wenig Worten noch der trigonometrischen Nivellements gedacht werden, die man vielfach als besonders genau empfohlen hat. Sie unterscheiden sich von den beschriebenen theils durch die viel gröfsere Länge der Stationen und theils dadurch, dafs man nicht im Horizont visirt, sondern die Höhenwinkel mifst. An jedem Endpunkte der Station wird ein Universal-Instrument aufgestellt. Beide richtet man gleichzeitig gegen einander und mifst die Zenith-Distanzen. Diese Winkel seien A und B, und zwar A derjenige, der vom höhern Punkt aus gemessen ist. Es kommt darauf an, die beiden etwas gröfsern Winkel α und β zu finden, welche die Neigung der von dem einen Instrument nach dem andern gezognen geraden Linien gegen das Loth bezeichnen. Diese beiden Winkel würden sich zu 180 Grad ergänzen, wenn die Oberfläche der Erde nicht gekrümmt wäre. Diese Voraussetzung ist aber nur für kurze Entfernungen zulässig, bei diesen Nivellements mufs man die Krümmung der Erde berücksichtigen. Aus dem Abstande beider Punkte von einander und dem Radius der Erde ergiebt sich mit hinreichender Genauigkeit der Winkel ψ, unter dem zwei neben beiden Instrumenten hängende Lothe gegen einander convergiren. Man hat demnach

$$\alpha + \beta = \pi + \psi$$

Sehr wichtig ist der Einflufs der Strahlenbrechung auf diese Messungen. Mehrfache Untersuchungen haben, wie bereits § 45 erwähnt, zu der Voraussetzung geführt, dafs der Lichtstrahl auf seinem Wege durch die verschiednen Luftschichten über der Oberfläche der Erde einen Kreisbogen beschreibt. Hiernach bildet sich an beiden Enden zwischen ihm und der geführten geraden Linie ein Chordo-Tangentenwinkel. Beide sind einander gleich, weil sie denselben Kreisbogen umfassen. Diese

Winkel $= \varphi$ bilden die Differenz zwischen den gemeſsnen Winkeln A und B und den gesuchten α und β, und zwar ist

$$A = \alpha - \varphi$$
$$B = \beta - \varphi$$

also
$$A + B = \alpha + \beta - 2\varphi$$
$$= \pi + \psi - 2\varphi$$

daraus ergiebt sich

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\pi + \psi) - \tfrac{1}{2}(A + B)$$

also
$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\pi + \psi) + \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(\pi + \psi) - \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Aus diesen Winkeln und den bekannten Entfernungen läſst sich die Erhebung des einen Punktes über dem andern leicht berechnen.

Gewiſs ist diese Art des Nivellements durchaus passend, wenn man gezwungen ist, sehr lange Stationen zu wählen. Dabei ist aber gleichzeitige Ausführung der Messungen auf beiden Seiten dringend geboten, weil die Strahlenbrechung sehr veränderlich, und von der Temperatur, so wie von der Feuchtigkeit der Luft abängig ist, woher sie sich oft in kurzer Zeit wesentlich verändert. Namentlich bemerkt man dieses bei meilenweit ausgedehnten Wasserflächen, wo die dahinter liegenden Thürme zuweilen im Horizonte verschwinden und zuweilen über denselben weit vortreten.

Vergleicht man indessen das trigonometrische Nivellement mit dem beschriebnen, so verschwindet der erwähnte Vortheil, weil man bei diesem durch die geringe Länge der Stationen und die möglichst gleichen Entfernungen im Vor- und Zurückvisiren sich schon dem Einfluſs der Strahlenbrechung beinahe ganz entzieht, auch die hierdurch vielleicht noch eingeführten kleinen Fehler sich groſsentheils aufheben oder in Rechnung gestellt werden können. Dazu kommt noch, daſs man beim gewöhnlichen Nivellement vorzugsweise nur im Einstellen der Libelle fehlt, bei dem trigonometrischen aber in gleichem Maaſse auch im Ablesen der Winkel. Jedenfalls sind dabei gröſsere und genauere Instrumente erforderlich, welche gestatten, die Winkel eben so scharf zu messen, wie die Libelle sich einstellen läſst. Hierdurch ist wieder eine sehr sichere Aufstellung der Instrumente geboten und vielfache

Vorbereitungen zur Messung, so wie auch die geodätische Festlegung der Stationspunkte nöthig wird. Die ganze Operation nimmt daher ohnerachtet der viel geringern Anzahl der Stationen einen weit gröfsern Zeitaufwand in Anspruch, während die Höhenlage des dazwischen liegenden Terrains unbekannt bleibt. Endlich ist aber auch jeder Fehler in dem Höhenwinkel bei der langen Station nachtheiliger, als in der kurzen, weil die Anzahl der letztern gröfser ist, und man hier ein gegenseitiges Aufheben der Fehler mit mehr Wahrscheinlichkeit erwarten darf. Dem letzten Uebelstande sucht man zwar dadurch zu begegnen, dafs man jene Zenithwinkel vielfach mifst; da dieses aber unmittelbar hinter einander geschehn mufs, so bietet es nicht die Sicherheit, welche man durch eben so viele partielle Messungen erreichen würde.

Aus diesen Gründen empfiehlt es sich kaum, das trigonometrische Nivellement zu wählen, wenn nicht wegen Unzugänglichkeit des Terrains vom gewöhnlichen Verfahren Abstand genommen werden mufs. In den Jahren 1839 und 1840 kam ein trigonometrisches Nivellement längs der Oder von Oderberg unterhalb Küstrin bis zur Oesterreichischen Grenze zur Ausführung. Für dasselbe wurden die erforderlichen Instrumente von namhaften Künstlern beschafft, auch die Operation nicht übereilt, vielmehr zwei Sommer darauf verwendet, und die ganze Ausführung erfolgte mit Sachkenntnifs und Geschicklichkeit, die Resultate lassen indessen keineswegs irgend welche Vorzüge vor andern sorgfältigen Nivellements erkennen*).

Das Haupt-Nivellement umfafste nahe 80 Meilen. Die Stationen sollten ungefähr 2 Meilen lang sein, sehr häufig mufsten sie jedoch viel kürzer, zuweilen aber auch bedeutend länger gewählt werden. Die Anzahl der gleichzeitig von beiden Instrumenten jedesmal anzustellenden Messungen oder Repetitionen wurde auf vierzig festgesetzt. Aus den Unterschieden dieser einzelnen Messungen gegen das arithmetische Mittel wurden die wahrscheinlichen Fehler berechnet. Dabei ist freilich ein Versehn vorgekommen, indem das arithmetische Mittel als der wahre Werth, und die Abweichungen von demselben als die wirklichen Fehler

*) Trigonometrisches Nivellement der Oder von Oderberg unterhalb Küstrin bis zur Oesterreichischen Grenze von Hoffmann und Salzenberg. Berlin 1841.

angesehn wurden. Wenn man indessen die in solcher Weise berechneten Fehler, die also etwas zu klein sind, zum Grunde legt, so ergeben sich dieselben für die Stationen von verschiednen Längen in folgenden mittlern Werthen. Dabei sind die sehr kurzen Stationen von weniger als 750 Ruthen Länge unbeachtet geblieben, die Stationen von 750 bis 1250 Ruthen sind als eine halbe Meile, 1250 bis 1750 als drei Viertel Meilen lang und so fort berechnet, und so weiter.

Anzahl der Stationen	Länge	wahrsch. Fehler in Zollen
10	$\frac{1}{2}$ Meile	0,69
7	$\frac{3}{4}$ -	1,11
5	1 -	3,43
4	$1\frac{1}{4}$ -	3,11
7	$1\frac{1}{2}$ -	2,75
5	$1\frac{3}{4}$ -	3,47
7	2 -	4,03
6	$2\frac{1}{4}$ -	3,96
4	$2\frac{1}{2}$ -	3,84
2	$2\frac{3}{4}$ -	4,32
1	3 -	12,66
1	$3\frac{1}{4}$ -	9,55
2	$3\frac{1}{2}$ -	11,76

Um aus diesen verschiednen Werthen der wahrscheinlichen Fehler auf die Sicherheit der Messung zu schliessen, machte ich die Voraussetzung, daſs die wahrscheinlichen Fehler w einer gewissen, noch unbekannten Potenz der Längen der Stationen l proportional seien. Also

$$w = r \,.\, l^x$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate fand ich

$$r = 1{,}886$$

und

$$x = 1{,}433$$

daher

$$w = 1{,}886 \,.\, l^{1{,}433}$$

Indem die berechneten Werthe von w höchst unregelmässig fallen, so ist dieser Werth von x keineswegs besonders sicher, sondern nur der wahrscheinlichste. Eine Ausgleichung der Fehler in den Winkel-Messungen findet hier nicht statt, wie solche beim gewöhnlichen Nivellement eintritt, weil die Anzahl der Repetitionen bei längern und kürzern Stationen ungefähr dieselbe geblieben ist. Der Fehler in der Höhen-Differenz sollte daher der Länge der Station proportional sein. Dagegen nimmt in gröfserer Entfernung die Deutlichkeit ab, auch ist vielleicht jene Voraussetzung, dafs der gebrochene Lichtstrahl in verticaler Richtung einen Kreisbogen bildet, nicht richtig, wodurch sich erklären liefse, dafs der Exponent x gröfser als 1 wird. Gewifs empfiehlt es sich aber nicht nach diesen Erfahrungen, sehr lange Stationen zu wählen.

Unter Zugrundelegung des vorstehnden Ausdrucks sind die wahrscheinlichen Fehler auf die Entfernung

von	$\frac{1}{2}$ Meile	0,70	Zoll
-	1 Meile	1,89	-
-	2 Meilen	5,09	-
-	3 Meilen	9,10	-
-	4 Meilen	13,75	-

also namentlich bei gröfsern Längen viel bedeutender, als bei Nivellements, die nur mit der Libelle und Fernrohr unter Beobachtung der nöthigen Vorsichts-Maafsregeln ausgeführt werden. Dazu kommt noch, dafs die angebenen wahrscheinlichen Fehler nicht durch eine vollständige, und von der ersten Messung unabhängige Controlle ermittelt sind, sondern nur durch vielfache Wiederholung bei derselben Aufstellung des Instruments, wobei leicht die einzelnen Ablesungen in gröfsrer Uebereinstimmung gefunden wurden, als sie in einer neuen Messung unter andern äufsern Umständen gewesen wären.

Anhang.

A. Quadrat-Tabelle

enthaltend die Quadrate der davor stehenden Zahlen und die Differenzen der Quadrate.

0,00	0,000	0	0,40	0,160	8	0,80	0,640	16	1,20	1,440	24
01	000	0	41	168	8	81	656	16	21	464	24
02	000	1	42	176	9	82	672	17	22	488	25
03	001	1	43	185	9	83	689	17	23	513	25
04	002	1	44	194	9	84	706	17	24	538	25
0,05	0,003	1	0,45	0,203	9	0,85	0,723	17	1,25	1,563	25
06	004	1	46	212	9	86	740	17	26	588	25
07	005	1	47	221	9	87	757	17	27	613	25
08	006	2	48	230	10	88	774	18	28	638	26
09	008	2	49	240	10	89	792	18	29	664	26
0,10	0,010	2	0,50	0,250	10	0,90	0,810	18	1,30	1,690	26
11	012	2	51	260	10	91	828	18	31	716	26
12	014	3	52	270	11	92	846	19	32	742	27
13	017	3	53	281	11	93	865	19	33	769	27
14	020	3	54	292	11	94	884	19	34	796	27
0,15	0,023	3	0,55	0,303	11	0,95	0,903	19	1,35	1,823	27
16	026	3	56	314	11	96	922	19	36	850	27
17	029	3	57	325	11	97	941	19	37	877	27
18	032	4	58	336	12	98	960	20	38	904	28
19	036	4	59	348	12	99	980	20	39	932	28
0,20	0,040	4	0,60	0,360	12	1,00	1,000	20	1,40	1,960	28
21	044	4	61	372	12	01	020	20	41	988	28
22	048	5	62	384	13	02	040	21	42	2,016	29
23	053	5	63	397	13	03	061	21	43	045	29
24	058	5	64	410	13	04	082	21	44	074	29
0,25	0,063	5	0,65	0,423	13	1,05	1,103	21	1,45	2,103	29
26	068	5	66	436	13	06	124	21	46	132	29
27	073	5	67	449	13	07	145	21	47	161	29
28	078	6	68	462	14	08	166	22	48	190	30
29	084	6	69	476	14	09	188	22	49	220	30
0,30	0,090	6	0,70	0,490	14	1,10	1,210	22	1,50	2,250	30
31	096	6	71	504	14	11	232	22	51	280	30
32	102	7	72	518	15	12	254	23	52	310	31
33	109	7	73	533	15	13	277	23	53	341	31
34	116	7	74	548	15	14	300	23	54	372	31
0,35	0,123	7	0,75	0,563	15	1,15	1,323	23	1,55	2,403	31
36	130	7	76	578	15	16	346	23	56	434	31
37	137	7	77	593	15	17	369	23	57	465	31
38	144	8	78	608	16	18	392	24	58	496	32
39	152	8	79	624	16	19	416	24	59	528	32
0,40	0,160		0,80	0,640		1,20	1,440		1,60	2,560	

A. Quadrat-Tabelle. (Fortsetzung.)

1,60	2,560	32	2,00	4,000	40	2,40	5,760	48	2,80	7,840	56
61	592	32	01	040	40	41	808	48	81	896	56
62	624	33	02	080	41	42	856	49	82	952	57
63	657	33	03	121	41	43	905	49	83	8,009	57
64	690	33	04	162	41	44	954	49	84	066	57
1,65	2,723	33	2,05	4,203	41	2,45	6,003	49	2,85	8,123	57
66	756	33	06	244	41	46	052	49	86	180	57
67	789	33	07	285	41	47	101	49	87	237	57
68	822	34	08	326	42	48	150	50	88	294	58
69	856	34	09	368	42	49	200	50	89	352	58
1,70	2,890	34	2,10	4,410	42	2,50	6,250	50	2,90	8,410	58
71	924	34	11	452	42	51	300	50	91	468	58
72	958	35	12	494	43	52	350	51	92	526	59
73	993	35	13	537	43	53	401	51	93	585	59
74	3,028	35	14	580	43	54	452	51	94	644	59
1,75	3,063	35	2,15	4,623	43	2,55	6,503	51	2,95	8,703	59
76	098	35	16	666	43	56	554	51	96	762	59
77	133	35	17	709	43	57	605	51	97	821	59
78	168	36	18	752	44	58	656	52	98	880	60
79	204	36	19	796	44	59	708	52	99	940	60
1,80	3,240	36	2,20	4,840	44	2,60	6,760	52	3,00	9,000	60
81	276	36	21	884	44	61	812	52	01	060	60
82	312	37	22	928	45	62	864	53	02	120	61
83	349	37	23	973	45	63	917	53	03	181	61
84	386	37	24	5,018	45	64	970	53	04	242	61
1,85	3,423	37	2,25	5,063	45	2,65	7,023	53	3,05	9,303	61
86	460	37	26	108	45	66	076	53	06	364	61
87	497	37	27	153	45	67	129	53	07	425	61
88	534	38	28	198	46	68	182	54	08	486	62
89	572	38	29	244	46	69	236	54	09	548	62
1,90	3,610	38	2,30	5,290	46	2,70	7,290	54	3,10	9,610	62
91	648	38	31	336	46	71	344	54	11	672	62
92	686	39	32	382	47	72	398	55	12	734	63
93	725	39	33	429	47	73	453	55	13	797	63
94	764	39	34	476	47	74	508	55	14	860	63
1,95	3,803	39	2,35	5,523	47	2,75	7,563	55	3,15	9,923	63
96	842	39	36	570	47	76	618	55	16	986	63
97	881	39	37	617	47	77	673	55	17	10,049	63
98	920	40	38	664	48	78	728	56	18	112	64
99	960	40	29	712	48	79	784	56	19	176	64
2,00	4,000		2,40	5,760		2,80	7,840		3,20	10,240	

A. Quadrat-Tabelle. (Fortsetzung.)

3,20	10,240	64	3,60	12,960	72	4,00	16,000	80	4,40	19,360	88
21	304	64	61	13,032	72	01	080	80	41	448	88
22	368	65	62	104	73	02	160	81	42	536	89
23	433	65	63	177	73	03	241	81	43	625	89
24	498	65	64	250	73	04	322	81	44	714	89
3,25	10,563	65	3,65	13,323	73	4,05	16,403	81	4,45	19,803	89
26	628	65	66	396	73	06	484	81	46	892	89
27	693	65	67	469	73	07	565	81	47	981	89
28	758	66	68	542	74	08	646	82	48	20,070	90
29	824	66	69	616	74	09	728	82	49	160	90
3,30	10,890	66	3,70	13,690	74	4,10	16,810	82	4,50	20,250	90
31	956	66	71	764	74	11	892	82	51	340	90
32	11,022	67	72	838	75	12	974	83	52	430	91
33	089	67	73	913	75	13	17,057	83	53	521	91
34	156	67	74	988	75	14	140	83	54	612	91
3,35	11,223	67	3,75	14,063	75	4,15	17,223	83	4,55	20,703	91
36	290	67	76	138	75	16	306	83	56	794	91
37	357	67	77	213	75	17	389	83	57	885	91
38	424	68	78	288	76	18	472	84	58	976	92
39	492	68	79	364	76	19	556	84	59	21,068	92
3,40	11,560	68	3,80	14,440	76	4,20	17,640	84	4,60	21,160	92
41	628	68	81	516	76	21	724	84	61	252	92
42	696	69	82	592	77	22	808	85	62	344	93
43	765	69	83	669	77	23	893	85	63	437	93
44	834	69	84	746	77	24	978	85	64	530	93
3,45	11,903	69	3,85	14,823	77	4,25	18,063	85	4,65	21,623	93
46	972	69	86	900	77	26	148	85	66	716	93
47	12,041	69	87	977	77	27	233	85	67	809	93
48	110	70	88	15,054	78	28	318	86	68	902	94
49	180	70	89	132	78	29	404	86	69	996	94
3,50	12,250	70	3,90	15,210	78	4,30	18,490	86	4,70	22,090	94
51	320	70	91	288	78	31	576	86	71	184	94
52	390	71	92	366	79	32	662	87	72	278	95
53	461	71	93	445	79	33	749	87	73	373	95
54	532	71	94	524	79	34	836	87	74	468	95
3,55	12,603	71	3,95	15,603	79	4,35	18,923	87	4,75	22,563	95
56	674	71	96	682	79	36	19,010	87	76	658	95
57	745	71	97	761	79	37	097	87	77	753	95
58	816	72	98	840	80	38	184	88	78	848	96
59	888	72	99	920	80	39	272	88	79	944	96
3,60	12,960		4,00	16,000		4,40	19,360		4,80	23,040	

A. Quadrat-Tabelle. (Fortsetzung.)

4,80	23,040	96	5,20	27,040	104	5,60	31,360	112	6,00	36,000	120
81	136	96	21	144	104	61	472	112	01	120	120
82	232	97	22	248	105	62	584	113	02	240	121
83	329	97	23	353	105	63	697	113	03	361	121
84	426	97	24	458	105	64	810	113	04	482	121
4,85	23,523	97	5,25	27,563	105	5,65	31,923	113	6,05	36,603	121
86	620	97	26	668	105	66	32,036	113	06	724	121
87	717	97	27	773	105	67	149	113	07	845	121
88	814	98	28	878	106	68	262	114	08	966	122
89	912	98	29	984	106	69	376	114	09	37,088	122
4,90	24,010	98	5,30	28,090	106	5,70	32,490	114	6,10	37,210	122
91	108	98	31	196	106	71	604	114	11	332	122
92	206	99	32	302	107	72	718	115	12	454	123
93	305	99	33	409	107	73	833	115	13	577	123
94	404	99	34	516	107	74	948	115	14	700	123
4,95	24,503	99	5,35	28,623	107	5,75	33,063	115	6,15	37,823	123
96	602	99	36	730	107	76	178	115	16	946	123
97	701	99	37	837	107	77	293	115	17	38,069	123
98	800	100	38	944	108	78	408	116	18	192	124
99	900	100	39	29,052	108	79	524	116	19	316	124
5,00	25,000	100	5,40	29,160	108	5,80	33,640	116	6,20	38,440	124
01	100	100	41	268	108	81	756	116	21	564	124
02	200	101	42	376	109	82	872	117	22	688	125
03	301	101	43	485	109	83	989	117	23	813	125
04	402	101	44	594	109	84	34,106	117	24	938	125
5,05	25,503	101	5,45	29,703	109	5,85	34,223	117	6,25	39,063	125
06	604	101	46	812	109	86	340	117	26	188	125
07	705	101	47	921	109	87	457	117	27	313	125
08	806	102	48	30,030	110	88	574	118	28	438	126
09	908	102	49	140	110	89	692	118	29	564	126
5,10	26,010	102	5,50	30,250	110	5,90	34,810	118	6,30	39,690	126
11	112	102	51	360	110	91	928	118	31	816	126
12	214	103	52	470	111	92	35,046	119	32	942	127
13	317	103	53	581	111	93	165	119	33	40,069	127
14	420	103	54	692	111	94	284	119	34	196	127
5,15	26,523	103	5,55	30,803	111	5,95	35,403	119	6,35	40,323	127
16	626	103	56	914	111	96	522	119	36	450	127
17	729	103	57	31,025	111	97	641	119	37	577	127
18	832	104	58	136	112	98	760	120	38	704	128
19	936	104	59	248	112	99	880	120	39	832	128
5,20	27,040		5,60	31,360		6,00	36,000		6,40	40,960	

A. Quadrat-Tabelle. (Fortsetzung.)

6,40	40,960	128	6,80	46,240	136	7,20	51,840	144	7,60	57,760	152
41	41,088	128	81	376	136	21	984	144	61	912	152
42	216	129	82	512	137	22	52,128	145	62	58,064	153
43	345	129	83	649	137	23	273	145	63	217	153
44	474	129	84	786	137	24	418	145	64	370	153
6,45	41,603	129	6,85	46,923	137	7,25	52,563	145	7,65	58,523	153
46	732	129	86	47,060	137	26	708	145	66	676	153
47	861	129	87	197	137	27	853	145	67	829	153
48	990	130	88	334	138	28	998	146	68	982	154
49	42,120	130	89	472	138	29	53,144	146	69	59,136	154
6,50	42,250	130	6,90	47,610	138	7,30	53,290	146	7,70	59,290	154
51	380	130	91	748	138	31	436	146	71	444	154
52	510	131	92	886	139	32	582	147	72	598	155
53	641	131	93	48,025	139	33	729	147	73	753	155
54	772	131	94	164	139	34	876	147	74	908	155
6,55	42,903	131	6,95	48,303	139	7,35	54,023	147	7,75	60,063	155
56	43,034	131	96	442	139	36	170	147	76	218	155
57	165	131	97	581	139	37	317	147	77	373	155
58	269	132	98	720	140	38	464	148	78	528	156
59	428	132	99	860	140	39	612	148	79	684	156
6,60	43,560	132	7,00	49,000	140	7,40	54,760	148	7,80	60,840	156
61	692	132	01	140	140	41	908	148	81	996	156
62	824	133	02	280	141	42	55,056	149	82	61,152	157
63	957	133	03	421	141	43	205	149	83	309	157
64	44,090	133	04	562	141	44	354	149	84	466	157
6,65	44,223	133	7,05	49,703	141	7,45	55,503	149	7,85	61,623	157
66	356	133	06	844	141	46	652	149	86	780	157
67	489	133	07	985	141	47	801	149	87	937	157
68	622	134	08	50,126	142	48	950	150	88	62,094	158
69	756	134	09	268	142	49	56,100	150	89	252	158
6,70	44,890	134	7,10	50,410	142	7,50	56,250	150	7,90	62,410	158
71	45,024	134	11	552	142	51	400	150	91	568	158
72	158	135	12	694	143	52	550	151	92	726	159
73	293	135	13	837	143	53	701	151	93	885	159
74	428	135	14	980	143	54	852	151	94	63,044	159
6,75	45,563	135	7,15	51,123	143	7,55	57,003	151	7,95	63,203	159
76	698	135	16	266	143	56	154	151	96	362	159
77	833	135	17	409	143	57	305	151	97	521	159
78	968	136	18	552	144	58	456	152	98	680	160
79	46,104	136	19	696	144	59	608	152	99	840	160
6,80	46,240		7,20	51,840		7,60	57,760		8,00	64,000	

A. Quadrat-Tabelle. (Fortsetzung.)

8,00	64,000	160	8,40	70,560	168	8,80	77,440	176	9,20	84,640	184
01	160	160	41	728	168	81	616	176	21	824	184
02	320	161	42	896	169	82	792	177	22	85,008	185
03	481	161	43	71,065	169	83	969	177	23	193	185
04	642	161	44	234	169	84	78,146	177	24	378	185
8,05	64,803	161	8,45	71,403	169	8,85	78,323	177	9,25	85,563	185
06	964	161	46	572	169	86	500	177	26	748	185
07	65,125	161	47	741	169	87	677	177	27	933	185
08	286	162	48	910	170	88	854	178	28	86,118	186
09	448	162	49	72,080	170	89	79,032	178	29	304	186
8,10	65,610	162	8,50	72,250	170	8,90	79,210	178	9,30	86,490	186
11	772	162	51	420	170	91	388	178	31	676	186
12	934	163	52	590	171	92	566	179	32	862	187
13	66,097	163	53	761	171	93	745	179	33	87,049	187
14	260	163	54	932	171	94	924	179	34	236	187
8,15	66,423	163	8,55	73,103	171	8,95	80,103	179	9,35	87,423	187
16	586	163	56	274	171	96	282	179	36	610	187
17	749	163	57	445	171	97	461	179	37	797	187
18	912	164	58	616	172	98	640	180	38	984	188
19	67,076	164	59	788	172	99	820	180	39	88,172	188
8,20	67,240	164	8,60	73,960	172	9,00	81,000	180	9,40	88,360	188
21	404	164	61	74,132	172	01	180	180	41	548	188
22	568	165	62	304	173	02	360	181	42	736	189
23	733	165	63	477	173	03	541	181	43	925	189
24	898	165	64	650	173	04	722	181	44	89,114	189
8,25	68,063	165	8,65	74,823	173	9,05	81,903	181	9,45	89,303	189
26	228	165	66	996	173	06	82,084	181	46	492	189
27	393	165	67	75,169	173	07	265	181	47	681	189
28	558	166	68	342	174	08	446	182	48	870	190
29	724	166	69	516	174	09	628	182	49	90,060	190
8,30	68,890	166	8,70	75,690	174	9,10	82,810	182	9,50	90,250	190
31	69,056	166	71	864	174	11	992	182	51	440	190
32	222	167	72	76,038	175	12	83,174	183	52	630	191
33	389	167	73	213	175	13	357	183	53	821	191
34	556	167	74	388	175	14	540	183	54	91,012	191
8,35	69,723	167	8,75	76,563	175	9,15	83,723	183	9,55	91,203	191
36	890	167	76	738	175	16	906	183	56	394	191
37	70,057	167	77	913	175	17	84,089	183	57	585	191
38	224	168	78	77,088	176	18	272	184	58	776	192
39	392	168	79	264	176	19	456	184	59	968	192
8,40	70,560		8,80	77,440		9,20	84,640		9,60	92,160	

A. Quadrat-Tabelle. (Schlufs.)

9,60	92,160	192	10,00	100,000	200	10,40	108,160	208	10,80	116,640	216
61	352	192	01	200	200	41	368	208	81	856	216
62	544	193	02	400	201	42	576	209	82	117,072	217
63	737	193	03	601	201	43	785	209	83	289	217
64	930	193	04	802	201	44	994	209	84	506	217
9,65	93,123	193	10,05	101,003	201	10,45	109,203	209	10,85	117,723	217
66	316	193	06	204	201	46	412	209	86	940	217
67	509	193	07	405	201	47	621	209	87	118,157	217
68	702	194	08	606	202	48	830	210	88	374	218
69	896	194	09	808	202	49	110,040	210	89	592	218
9,70	94,090	194	10,10	102,010	202	10,50	110,250	210	10,90	118,810	218
71	284	194	11	212	202	51	460	210	91	119,028	218
72	478	195	12	414	203	52	670	211	92	246	219
73	673	195	13	617	203	53	881	211	93	465	219
74	868	195	14	820	203	54	111,092	211	94	684	219
9,75	95,063	195	10,15	103,023	203	10,55	111,303	211	10,95	119,903	219
76	258	195	16	226	203	56	514	211	96	120,122	219
77	453	195	17	429	203	57	725	211	97	341	219
78	648	196	18	632	204	58	936	212	98	560	220
79	844	196	19	836	204	59	112,148	212	99	780	220
9,80	96,040	196	10,20	104,040	204	10,60	112,360	212	11,00	121,000	220
81	236	196	21	244	204	61	572	212	01	220	220
82	432	197	22	448	205	62	784	213	02	440	221
83	629	197	23	653	205	63	997	213	03	661	221
84	826	197	24	858	205	64	113,210	213	04	882	221
9,85	97,023	197	10,25	105,063	205	10,65	113,423	213	11,05	122,103	221
86	220	197	26	268	205	66	636	213	06	324	221
87	417	197	27	473	205	67	849	213	07	545	221
88	614	198	28	678	206	68	114,062	214	08	766	222
89	812	198	29	884	206	69	276	214	09	988	222
9,90	98,010	198	10,30	106,090	206	10,70	114,490	214	11,10	123,210	222
91	208	198	31	296	206	71	704	214	11	432	222
92	406	199	32	502	207	72	918	215	12	654	223
93	605	199	33	709	207	73	115,133	215	13	877	223
94	804	199	34	916	207	74	348	215	14	124,100	223
9,95	99,003	199	10,35	107,123	207	10,75	115,563	215	11,15	124,323	223
96	202	199	36	330	207	76	778	215	16	546	223
97	401	199	37	537	207	77	993	215	17	769	223
98	600	200	38	744	208	78	116,208	216	18	992	224
99	800	200	39	952	208	79	424	216	19	125,216	224
10,00	100,000		10,40	108,160		10,80	116,640		11,20	125,440	

Tabelle *B*.

Relative Wahrscheinlichkeit (W) der positiven und negativen Fehler (x), wenn diese in der Einheit des wahrscheinlichen Fehlers gemessen werden.

x	W	$D1$	$D2$	x	W	$D1$	$D2$
0,0	0,269082	— 611	— 1215	3,0	0,034737	— 4501	+ 465
0,1	0,268471	— 1826	— 1189	3,1	0,030236	— 4036	+ 435
0,2	266645	3015	1149	3,2	26200	3601	406
0,3	263630	4164	1095	3,3	22599	3195	377
0,4	259466	5259	1022	3,4	19404	2818	345
0,5	254207	6281	943	3,5	16586	2473	313
0,6	0,247926	— 7224	— 851	3,6	0,014113	— 2160	+ 285
0,7	240702	8075	748	3,7	11953	1875	256
0,8	232627	8823	644	3,8	10078	1619	228
0,9	223804	9467	531	3,9	0,008459	1391	202
1,0	214337	9998	418	4,0	7068	1189	177
1,1	0,204339	— 10416	— 304	4,1	0,005879	— 1012	+ 156
1,2	193923	10720	193	4,2	4867	856	136
1,3	183203	10913	— 85	4,3	4011	720	116
1,4	172290	10998	+ 16	4,4	3291	604	102
1,5	161292	10982	112	4,5	2687	502	86
1,6	0,150310	— 10870	+ 199	4,6	0,002185	— 416	+ 72
1,7	139440	10671	277	4,7	1769	344	62
1,8	128769	10394	345	4,8	1425	282	51
1,9	118375	10049	403	4,9	1143	231	44
2,0	108326	9646	451	5,0	0,000912	187	36
2,1	0,098680	— 9195	+ 488	5,1	0,000725	— 151	+ 29
2,2	89485	8707	517	5,2	574	122	24
2,3	80778	8190	534	5,3	452	98	20
2,4	72588	7656	544	5,4	354	78	17
2,5	64932	7112	545	5,5	276	61	12
2,6	0,057820	— 6567	+ 540	5,6	0,000215	— 49	+ 11
2,7	51253	6027	527	5,7	166	38	8
2,8	45226	5500	511	5,8	128	30	7
2,9	39726	4989	488	5,9	0,000098	23	5
3,0	34737	4501	465	6,0	75	18	4

Tabelle *B.* (Fortsetzung.)

x	W	$D1$	$D2$
6,0	0,000074 74	— 17 99	+ 415
6,1	0,000056 75	— 13 84	+ 322
6,2	42 91	10 62	252
6,3	32 29	8 10	194
6,4	24 19	6 16	152
6,5	18 03	4 64	114
6,6	0,000013 39	— 3 50	+ 89
6,7	0,000009 89	2 61	66
6,8	7 28	1 95	50
6,9	5 33	1 45	39
7,0	3 88	1 06	28
7,1	0,000002 82	— 78	+ 20
7,2	2 04	58	17
7,3	1 46	41	11
7,4	1 05	30	8
7,5	0,000000 75	22	6
7,6	0,000000 53	— 16	+ 5
7,7	37	11	3
7,8	26	8	3
7,9	18	5	
8,0	13		
8,0	0,000000 12807		
8,5	0,000000 01961		
9,0	0,000000 00268		
9,5	0,000000 00033		
10,0	0,000000 000035		

Tabelle *C.*

Wahrscheinlichkeit (W), dafs positive oder negative Fehler die Grenze x überschreiten, die in der Einheit des wahrscheinlichen Fehlers gemessen ist.

x	W	$D1$	$D2$	$D3$	x	W	$D1$	$D2$	$D3$
0.0	1,000000	—53776	+ 245	+239	3,0	0,043025	—6489	+853	—90
0,1	0,946224	—53531	+ 484	+235	3,1	0,036536	—5636	+763	—84
0,2	892693	53047	719	224	3,2	30900	4873	679	79
0,3	839646	52328	943	212	3,3	26027	4194	601	72
0,4	787318	51385	1155	197	3,4	21833	3593	529	67
0,5	735933	50230	1352	180	3,5	18240	3064	462	59
0,6	0,685703	—48878	+1532	+159	3,6	0,015176	—2602	+403	—54
0,7	636825	47346	1691	140	3,7	12574	2199	349	48
0,8	589479	45655	1831	117	3,8	10375	1850	301	44
0,9	543824	43824	1948	96	3,9	0,008525	1549	257	37
1,0	500000	—41876	2044	71	4,0	6976	1292	220	33
1,1	0,458124	—39832	+2115	+ 50	4,1	0,005684	—1072	+187	—30
1,2	418292	37717	2165	28	4,2	4612	885	157	25
1,3	380575	35552	2193	+ 7	4,3	3727	728	132	22
1,4	345023	33359	2200	— 13	4,4	2999	596	110	18
1,5	311664	31159	2187	32	4,5	2403	486	92	16
1,6	0,280505	—28972	+2155	— 47	4,6	0,001917	— 394	+ 76	—14
1,7	251533	26817	2108	63	4,7	1523	318	62	11
1,8	224716	24709	2045	74	4,8	1205	256	51	9
1,9	200007	22664	1971	87	4,9	0,000949	205	42	8
2,0	177343	20693	1884	93	5,0	744	163	34	7
2,1	0,156650	—18809	+1791	—101	5,1	0,000581	— 129	+ 27	
2,2	137841	17018	1690	105	5,2	452	102	22	
2,3	120823	15328	1585	108	5,3	350	80	17	
2,4	105495	13743	1477	109	5,4	270	63	14	
2,5	0,091752	12266	1368	109	5,5	207	49	11	
2,6	0,079486	—10898	+1259	—106	5,6	0,000158	— 38	+ 9	
2,7	68588	9639	1153	105	5,7	120	29	7	
2,8	58949	8486	1048	99	5,8	0,000091	22		
2,9	50463	7438	949	96	5,9	69	17		
3,0	43025	6489	853	90	6,0	52	13		

Tabelle *C.* (Fortsetzung.)

x	W	$D1$	x	W	
6,0	0,000052	— 13	7,0	0,000004	
6,1	0,000039	— 10	7,1	0,000004	
6,2	29	7	7,2	3	
6,3	22	6	7,3	3	
6,4	16	4	7,4	3	
6,5	12	3	7,5	3	
6,6	0,000009		7,6	0,000003	
6,7	8		7,7	3	
6,8	6		7,8	3	
6,9	5		7,9	2	
7,0	4		8,0	2	

Druck von Oskar Bonde in Altenburg.