

3 / 1979
Jerzy Ploch

**OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ
W CIAŁACH SZTYWNO-PLASTYCZNYCH
PODDANYCH DZIAŁANIU
OBCIĄŻENIA IMPULSOWEGO**



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 11 stycznia 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 3/1979



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 1,1. Ark.druk. 1,75

Oddano do drukarni w styczniu 1979 r.

Nr zamówienia 69/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Jerzy Ploch
Zakład Mechaniki
Ośrodków Ciągłych

OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ W CIAŁACH SZTYWNO-PLASTYCZNYCH PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻENIA IMPULSOWEGO

1. Wstęp

W ostatnich kilkunastu latach pojawił się szereg prac dotyczących oszacowania przemieszczeń sprężystych i sprężysto-plastycznych ciał poddanych obciążeniu uderzeniowemu lub impulsowemu. Uzyskane jednak rozwiązania są słuszne tylko w zakresie małych odkształceń lub inaczej mówiąc dla problemów geometrycznie liniowych [1]. Istnieje wiele problemów dynamicznych, w których geometria ciała zmienia się znacznie i nie może być rozpatrywana w teorii liniowej. Dlatego uogólnienie odpowiednich wyników na duże odkształcenia stanowiłoby istotny postęp. Pierwsze wyniki w tym kierunku uzyskał Martin w 1968 roku dla konstrukcji sprężystych [2]. Jego metoda używała ściśle podstawy teoretyczne w pracy [7]. Na początku lat siedemdziesiątych Martin i Ponter [3] oraz Wierzbicki [4] podali niezależnie dwie metody znajdowania górnych oszacowań dla skończonych ugięć konstrukcji sprężysto-plastycznych i plastycznych. Metody te nie są wolne od nieścisłości, ich krytyczna ocena podana została w pracy [5]. W pracy [6] zaproponowana została na przykładzie belki metoda oszacowań dla ciał sztywno-plastycznych, w której pokonane zostały dotychczasowe trudności. Obecna praca przynosi ogólny dowód dla przypadku trójwymiarowego ciała sztywno-idealnie-plastycznego obciążonego w sposób impulsowy prędkością początkową i nagle przyłożonym obciążeniem.

Jako ilustrację teorii podano oszacowania ugięcia belki i powłoki cylindrycznej obciążonych impulsem prędkości oraz

przeprowadzono porównanie z rozwiązaniami ścisłymi

2. Teoria oszacowań

2.1. Sformułowanie problemu dynamicznego

Rozpatrzmy ciało sztywno idealnie plastyczne zajmujące w naturalnej konfiguracji odniesienia obszar \mathcal{B} , który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E^3 . Przez \mathcal{B} oznaczymy wnętrze tego obszaru, a przez $\partial\mathcal{B}$ jego brzeg, który jest sumą zbiorów $\partial\mathcal{B}_T$ i $\partial\mathcal{B}_V$. Elementy zbioru \mathcal{B} oznaczymy przez x i nazywamy zmiennymi przestrzennymi. Ruch ciała będziemy badali w przedziale czasu $\langle 0, \infty \rangle$; a elementy tego zbioru oznaczymy przez t i nazwiemy zmiennymi czasowymi. Założmy, że przemieszczenia na brzegu $\partial\mathcal{B}_V$ są równe zeru, natomiast ciało \mathcal{B} jest wstępnie obciążone statycznie polem sił masowych \mathcal{L}_0 , a brzeg ciała $\partial\mathcal{B}_T$ polem sił powierzchniowych \mathcal{I}_0 . Układ równań opisujący tę początkową równowagę ciała sztywno plastycznego dla teorii skończonych deformacji w opisie Lagrange'a przyjmie postać:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}[\mathcal{S}_0 + \nabla u_0 \mathcal{S}_0] &= -\mathcal{L}_0, & x \in \mathcal{B} \\ \Phi(\mathcal{S}_0) &\leq 0, & \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (\mathcal{S}_0 + \nabla u_0 \mathcal{S}_0) \mathcal{N} &= \mathcal{I}_0, & x \in \partial\mathcal{B}_T, \\ u_0 &= 0, & x \in \partial\mathcal{B}_V. \end{aligned}$$

Istnienie niezależnego od czasu stanu równowagi możliwe jest tylko, jeśli nie występuje płynięcie materiału. Dlatego w definicji stanu równowagi nie występuje związek konstytutywny. Stan opisany układem (2.1), (2.2) jest uogólnieniem pojęcia statycznie dopuszczalnego stanu naprężenia na przypadek dużych odkształceń. Przyjmijmy, że równowaga początkowa jest znana, tzn. że rozwiązanie układu (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) istnieje i jest znane. Następnie, do ciała wstępnie statycznie obciążonego zostaje

przyłożone w wybranej chwili początkowej pewne obciążenie dynamiczne. Obciążenie to składa się z impulsowo przyłożonego do ciała \mathcal{B} stałego w czasie pola sił masowych \underline{F} , pola prędkości \underline{v}_0 zadanego w postaci idealnego impulsu oraz przyłożonego impulsowo do brzegu $\partial\mathcal{B}_T$ stałego w czasie pola sił powierzchniowych \underline{T} . Układ równań opisujący zachowanie się ciała sztywno-plastycznego pod działaniem powyżej zdefiniowanego obciążenia dynamicznego, w opisie Lagrange'a dla teorii skończonych deformacji przyjmie postać:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\xi} + \nabla\psi\underline{\xi}) = -\underline{F}_0 - \underline{F} + \rho\underline{\ddot{u}} \\ \Phi(\underline{\xi}) \leq 0 \\ \dot{\underline{\xi}} = \lambda \frac{d\Phi}{d\underline{\xi}} \\ \dot{\underline{\xi}} = \frac{1}{2}(\nabla\dot{\underline{u}} + \nabla^T\dot{\underline{u}} + \nabla^T\dot{\underline{u}}\nabla\psi + \nabla\psi\nabla\dot{\underline{u}}) \end{cases} \quad (x,t) \in \mathcal{B} \times (0, \infty)$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.4) \quad \begin{cases} (\underline{\xi} + \nabla\psi\underline{\xi})\underline{n} = \underline{T}_0 + \underline{T} \\ \psi = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (x,t) \in \partial\mathcal{B}_1 \times (0, \infty) \\ (x,t) \in \partial\mathcal{B}_2 \times (0, \infty) \end{matrix}$$

i warunkami początkowymi:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_0 \\ \dot{\underline{u}} = \underline{v}_0 \end{cases} \quad (x,t) \in \mathcal{B} \times \{0\}$$

gdzie: $\rho: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}_+$ - dane pole gęstości,
 $\underline{n}: \partial\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{T}_1$ - pole wektorów normalnych do brzegu,
 $\Phi: \mathcal{T}_2^s \rightarrow \mathcal{R}$ - funkcje plastyczności,
 $\lambda: \mathcal{B} \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}_+$ - nieujemna funkcja skalarna,
 $\underline{\xi}: \mathcal{B} \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{T}_2^s$ - symetryczne pole tensorowe naprężenia Pioli-Kirchoffa,
 $\underline{E}: \mathcal{B} \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{T}_2^s$ - symetryczne pole tensorowe odkształcenia Cauchy-Greena,

$\underline{u}: \mathbb{S} \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{T}_1$	- pole wektorowe przemieszczenia,
\mathbb{R}	- zbiór liczb rzeczywistych,
\mathcal{T}_p	- p-krotny iloczyn tensorowy trójwymiarowy przestrzeni wektorowej,
\underline{A}^T	- transpozycja tensora \underline{A} ,
$\underline{A} \underline{B}$	- proste nasunięcie tensorów \underline{A} i \underline{B} ,
$\underline{A} \cdot \underline{B}$	- całkowite nasunięcie tensorów \underline{A} i \underline{B} ,
(a, b)	- para uporządkowana elementów a i b,
$\underline{A} \times \underline{B}$	- iloczyn kartezjański zbiorów \underline{A} i \underline{B} ,
$\frac{d^n}{(d \cdot)^n}$	- n-ta pochodna funkcji tensorowej,
∇	- gradient przestrzenny pola tensorowego,
div	- dywergencja przestrzenna pola tensorowego,
$\dot{}$	- pochodna czasowa pola tensorowego.

Wielkości oznaczone symbolem „ $\dot{}$ ” odnoszą się do statycznej równowagi początkowej ciała.

2.2. Pomocniczy problem statycznie dopuszczalny

Rozpatrzmy to samo ciało sztywno-idealnie plastyczne zajmujące w naturalnej konfiguracji odniesienia obszar \mathbb{B} , zamocowane na brzegu $\partial \mathbb{S}_V$ i obciążone w sposób statyczny polem sił związanym w pewien sposób z równowagą początkową i obciążeniem dynamicznym. Mianowicie, brzeg ciała $\partial \mathbb{S}_T$ obciążamy polem sił powierzchniowych postaci $\underline{T}_* + \underline{T}_0 + \underline{T}_1$, a ciało

pojem sił masowych postaci $F_* + F_0 + F$. Pola sił T_0 i F_0 są identyczne jak w obciążeniu wstępnym, T i F identyczne jak w obciążeniu dynamicznym, a T_* i F_* są dowolne. Polem statycznie dopuszczonym dla ciała \mathcal{B} obciążonego statycznie polem sił zdefiniowanym powyżej, nazywamy układ pól tensorowych

(S_*, ψ_*) niezależnych od czasu i spełniających układ równań:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \operatorname{div} (S_* + \nabla \psi_* S_*) = -F_* - F_0 - F \\ \Phi(S_*) \leq 0 \end{cases} \quad x \in \mathcal{B}$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.7) \quad \begin{cases} (S_* + \nabla \psi_* S_*) \eta = T_* + T_0 + T & x \in \partial \mathcal{B}_T, \\ \psi_* = 0 & x \in \partial \mathcal{B}_V, \end{cases}$$

gdzie: symbol $*$ odnosi się do stanu równowagi statycznie dopuszczalnej ciała. Przyjmijmy, że rozwiązanie układu równań (2.6) z warunkiem brzegowym (2.7) istnieje i jest znane.

2.3. Wyprowadzenie nierówności szacującej.

Odejmując od układu równań (2.3) z warunkami granicznymi (2.4) i (2.5) układ równań (2.6) z warunkami brzegowymi (2.7), otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \operatorname{div} (\delta S + \nabla \psi_* \delta S + \nabla \delta \psi_* \delta S + \nabla \delta \psi_* S_*) = F_* + \rho \delta \ddot{u} \\ \Phi(S_* + \delta S) \leq 0 \\ \delta \dot{F}_* = \lambda \frac{\partial \Phi(S_* + \delta S)}{\partial S} \\ \delta \dot{F}_* = \frac{1}{2} [(1 + \nabla \psi_*) \nabla \delta \ddot{u} + \nabla \delta \ddot{u} (1 + \nabla \psi_*) + \nabla \delta \psi_* \nabla \delta \ddot{u} + \nabla \delta \psi_* \nabla \delta \ddot{u}] \end{cases} \quad (x, t) \in \mathcal{B} \times (0, \infty)$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.9) \quad \begin{cases} (\delta S + \nabla \psi_* \delta S + \nabla \delta \psi_* \delta S + \nabla \delta \psi_* S_*) \eta = -T_* & (x, t) \in \partial \mathcal{B}_T \times (0, \infty) \\ \delta \psi_* = 0 & (x, t) \in \partial \mathcal{B}_V \times (0, \infty) \end{cases}$$

i warunkami początkowymi:

$$(2.10) \quad \begin{cases} \delta \underline{u} = \underline{u}_0 - \underline{u}_* \\ \delta \underline{u} = \underline{v}_* \end{cases} \quad (x, t) \in \mathcal{D} \times \{0\},$$

gdzie: $\delta \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_*$, $\delta \underline{z} = \underline{z} - \underline{z}_*$, $\delta \underline{E} = \underline{E} - \underline{E}_*$.

Pomnożmy, pierwsze równanie układu (2.8) przez $\delta \underline{u}$, scałkujemy po obszarze \mathcal{D} i wykorzystajmy warunki brzegowe (2.9). Dostaniemy wówczas:

$$(2.11) \quad \int_{\mathcal{D}} F_* \delta \dot{\underline{u}} d(\mathcal{D}) + \int_{\partial \mathcal{D}} T_* \delta \dot{\underline{u}} d(\partial \mathcal{D}) + \int_{\mathcal{D}} \underline{S}_* (\nabla \delta \underline{u} \nabla \delta \underline{u}) d(\mathcal{D}) + \int_{\mathcal{D}} \delta \underline{z} \delta \dot{\underline{E}} d(\mathcal{D}) + \int_{\mathcal{D}} \rho \delta \underline{u} \delta \dot{\underline{u}} d(\mathcal{D}) = 0.$$

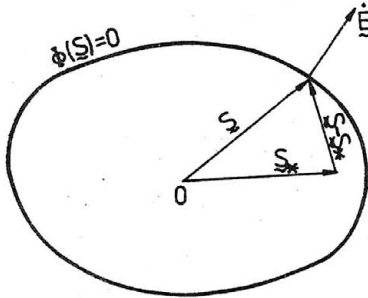
Całkując tożsamość (2.11) w przedziale czasu $(0, t)$ i wykorzystując warunki początkowe (2.10), otrzymujemy:

$$(2.12) \quad \int_{\mathcal{D}} F(\underline{u} - \underline{u}_*) d(\mathcal{D}) + \int_{\partial \mathcal{D}} T(\underline{u} - \underline{u}_*) d(\partial \mathcal{D}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \underline{S}_* [\nabla(\underline{u} - \underline{u}_*) \nabla(\underline{u} - \underline{u}_*)] d(\mathcal{D}) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\underline{z} - \underline{z}_*) \dot{\underline{E}} d(\mathcal{D}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \dot{\underline{u}} \dot{\underline{u}} d(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} F(\underline{u}_0 - \underline{u}_*) d(\mathcal{D}) + \int_{\partial \mathcal{D}} T(\underline{u}_0 - \underline{u}_*) d(\partial \mathcal{D}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \underline{S}_* [\nabla(\underline{u}_0 - \underline{u}_*) \nabla(\underline{u}_0 - \underline{u}_*)] d(\mathcal{D}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v}_* \underline{v}_* d(\mathcal{D})$$

Równość (2.12) wyraża zasadę zachowania przyrostu energii ciała sztywno idealnie plastycznego od stanu stacjonarnego. Lewa strona tożsamości (2.12) przedstawia przyrost całkowitej energii ciała w dowolnej chwili t , a prawa strona tożsamości przyrost energii w chwili początkowej. Wprowadzamy następnie postulat stateczności materiału, wynikający z przyjęcia wypukłego warunku plastyczności w przestrzeni naprężeń oraz stowarzyszonego prawa płynięcia. Analitycznie postulat ten ma następującą postać:

$$(2.13) \quad (\underline{z} - \underline{z}_*) \dot{\underline{E}} \geq 0,$$

a interpretacja geometryczna pokazana jest na rys.1.



Rys.1. Interpretacja geometryczna nierówności (2.13).

Oznaczmy początkową energię kinetyczną przez $\mathcal{K}_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v_0 \cdot v_0 \, d(\mathfrak{B})$ oraz skorzystajmy z faktu, że energia kinetyczna w dowolnej chwili t jest nieujemna $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u} \dot{u} \, d(\mathfrak{B}) \geq 0$. Wykorzystując warunek (2.13), tożsamość (2.12) dostaniemy nierówność:

$$(2.14) \quad \int_{\Omega} E_p(u-u_*) \, d(\mathfrak{B}) + \int_{\partial\Omega} T_n(u-u_*) \, d(\mathfrak{B}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} S_F \cdot [\nabla^T(u-u_*) \nabla(u-u_*)] \, d(\mathfrak{B}) \\ \leq \mathcal{K}_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} S_F \cdot [\nabla^T(u_0-u_*) \nabla(u_0-u_*)] \, d(\mathfrak{B}).$$

Oznaczmy przez $R(w, u_*)$ funkcjonal postaci:

$$(2.15) \quad R(w, u_*) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} S_F \cdot [\nabla^T(w-u_*) \nabla(w-u_*)] \, d(\mathfrak{B}),$$

gdzie w spełnia kinetyczne warunki dla ciała \mathfrak{B} . Stosując oznaczenie 2.15. do nierówności 2.14. otrzymamy;

$$(2.16) \quad \int_{\Omega} E_p(u-u_0) \, d(\mathfrak{B}) + \int_{\partial\Omega} T_n(u-u_0) \, d(\mathfrak{B}) \leq \mathcal{K}_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} S_F \cdot [\nabla^T(u_0-u_*) \nabla(u_0-u_*)] \, d(\mathfrak{B}) - R(u, u_*).$$

Jeśli dla dowolnego w spełniającego warunki kinetyczne zach-

dzi nierówność

$$(2.17) \quad R(\mathcal{W}, u_n) \geq 0,$$

to człon R można w wyrażeniu (2.16) pominąć bez zmiany znaku nierówności, więc:

$$(2.18) \quad \int_{\mathcal{S}} F(u-u_0) d(\mathcal{S}) + \int_{\partial\mathcal{S}} T(u-u_0) d(\mathcal{S}) \leq K_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_z [\nabla^T(u-u_0) \nabla(u-u_0)] d(\mathcal{S}).$$

Jest to podstawowa nierówność w teorii oszacowań. Warunek (2.17) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy pole tensorowe jest określone nieujemnie.

2.3. Praktyczne zastosowanie teorii

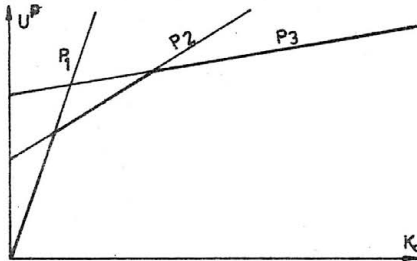
Założmy, że spełniony jest warunek (2.17). Pokażemy jak należy korzystać praktycznie z nierówności (2.18) przy znajdowaniu górnej oceny przemieszczenia. Nierówność ta przyjmie najprostszą i najbardziej użyteczną w oszacowaniach postać, jeśli w charakterze obciążenia F , przyjąć siłę skupioną P działającą w punkcie x_0 , a obciążenie T , przyjąć równe Q , wtedy mamy:

$$(2.19) \quad P[u(x_0, t) - u(x_0)] \leq K_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_z [\nabla^T(u-u_0) \nabla(u-u_0)] d(\mathcal{S}).$$

Nierówność (2.19) pozwala ocenić z góry przemieszczenie u w punkcie x_0 i w kierunku działania siły P . Niech $P \cdot u > 0$, oznaczymy przez P długość wektora P , a przez u^P , u_0^P przemieszczenie w kierunku siły P . Przy tych założeniach ugięcie u w punkcie x_0 i w kierunku wektora P ograniczone jest z góry przez

$$(2.20) \quad u^P(x_0, t) \leq u_0^P(x_0) + \frac{1}{P} \left[K_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_z [\nabla^T(u-u_0) \nabla(u-u_0)] d(\mathcal{S}) \right].$$

Na płaszczyźnie u^p, X_0 związek (2.20) ze znakiem równości reprezentuje linię prostą dla dowolnie wybranej wartości obciążenia P . Górna ocena przemieszczenia jest obwiednią rodziny prostych, rys.2.



Rys.2. Ilustracja oszacowania przy ustalonej sile skupionej. Najlepszą ocenę dostaniemy również przyjmując wielkość obciążenia P w taki sposób, aby funkcja po prawej stronie nierówności (2.20) osiągała minimum. W przypadku nieskończenie małych deformacji człon kwadratowy w nierówności (2.20) można pominąć dochodząc do klasycznej formuły Martina [1].

$$(2.21) \quad u^p(x_0, t) \leq \underline{u}_0^p(x_0) + \frac{X_0}{p}$$

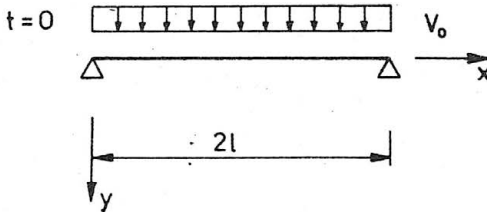
Warto zauważyć, że wielkość oszacowania nie zależy od rozkładu prędkości początkowej, lecz jedynie od całkowitej energii kinetycznej wprowadzonej do ciała.

3. Przykłady zastosowań

Jako ilustrację powyższej teorii pokażemy przykłady oszacowań konstrukcji obciążonych impulsowo i przeprowadzimy porównanie z rozwiązaniami dostępnymi w literaturze.

3.1. Belka przegubowo zamocowana

Rozpatrzmy belkę o długości $2l$, szerokości i wysokości, przegubowo zamocowaną na końcach bez możliwości przesuwu i obciążoną idealnym impulsem prędkości w chwili początkowej rozłożonym w sposób prostokątny, rys.3. Dla uproszczenia obliczeń przemieszczenia w kierunku podłużnym belki przyjmujemy równe zero.



Rys.3. Belka obciążona idealnym impulsem prędkości.

Interesować nas będzie maksymalne ugięcie belki w środku rozpiętości w zależności od początkowej energii kinetycznej. Równania ruchu opisujące powyższy problem dynamiczny przyjmą postać:

$$(3.1) \quad \begin{cases} N' = 0 \\ M'' - (Nw')' + \mu \ddot{w} = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

Związki geometryczne wyrażone w prędkościach są:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon} = w' \dot{w}' \\ \dot{\kappa} = \dot{w}'' \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

Wektor sił wewnętrznych znajduje się wewnątrz, lub na powierzchni plastycznej Φ , która opisana jest równaniem

$$(3.3) \quad \Phi = \left\{ (N, M) : \frac{|M|}{M_0} + \left(\frac{N}{N_0} \right)^2 = 1 \right\}.$$

Prędkości odkształcenia spełniają stowarzyszone prawo płynięcia

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon} = \lambda \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial N} \\ \dot{\kappa} = \lambda \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial M} \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

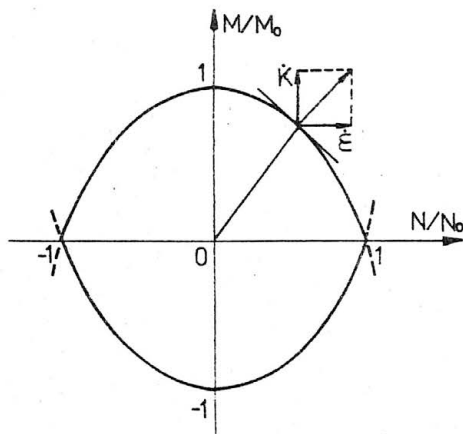
Powierzchnie plastyczne i stowarzyszone prawo płynięcia obrazuje rys.4.

Warunki brzegowe mają postać:

$$(3.5) \quad \begin{cases} w(0,t) = w(2l,t) = 0 \\ M(0,t) = M(2l,t) = 0 \end{cases} \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

a warunki początkowe są

$$(3.6) \quad \begin{cases} w(x,0) = N(x,0) = M(x,0) = 0 \\ \dot{w}(x,0) = v_0 \end{cases} \quad x \in \langle 0, 2l \rangle$$



Rys.4. Warunek plastyczności i stowarzyszone prawo płynięcia dla belki.

gdzie: N, M - siła podłużna i moment zginający w belce,
 $N_0 = \sigma_0 b h$, $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_0 b h^2$ - siła graniczna i moment graniczny w belce,

$\tilde{\sigma}_0$ - granica plastyczności materiału,

W - przemieszczenie w kierunku poprzecznym belki,

$\dot{\epsilon}, \dot{\kappa}$ - prędkość wydłużenia i prędkość krzywizny,

μ - masa na jednostkę długości belki,

Φ - powierzchnia plastyczna,

λ - nieujemna liczba zależna od procesu obciążenia,

$\overset{\circ}{\Delta}$ - różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej,

$\overset{\circ}{\Delta}$ - różniczkowanie względem zmiennej czasowej.

Ścisłe rozwiązanie układu równań (3.1) - (3.6) dla dowolnego rozkładu prędkości początkowej jest bardzo trudne.

W przypadku prostokątnego rozkładu zostało podane przez Symonds'a i Mentel'a w pracy [8].

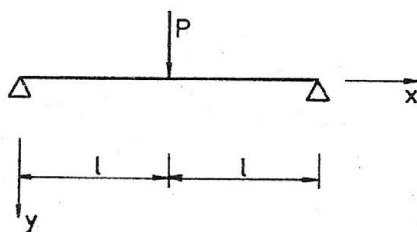
Z tego rozwiązania otrzymamy zależność pomiędzy ugięciem środka belki w^s odniesionym do grubości belki h , a początkową energią kinetyczną \mathcal{K}_0 odniesioną do wielkości $N_0 h^3 / b$, rys.6. W przypadku gdy $\mathcal{K}_0 l / N_0 h^2 > 1$, zależność ta ma prostą postać

$$(3.7) \quad \frac{w^s}{h} = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_0 l}{N_0 h^2}} - \frac{1}{2},$$

a energia kinetyczna równa jest

$$(3.8) \quad \mathcal{K}_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \mu \dot{w}^2(x, 0) dx = \mu v_0^2 l.$$

Znajdziemy obecnie górne oszacowanie maksymalnego przemieszczenia w^s w połowie długości belki. Zgodnie z teorią, rozpatrzymy belkę obciążoną w środku rozpiętości siłą skupioną P rys.5.



Rys.5. Zastępcza belka obciążona siłą skupioną.

Pole statycznie dopuszczalne dla powyższego problemu spełnia układ równań:

$$(3.9) \quad \begin{cases} N_x' = 0 \\ M_x' - (N_x w_x')' - P\delta(x-l) = 0 \end{cases}$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.10) \quad \begin{cases} w_x(0) = w_x(2l) = 0 \\ M_x(0) = M_x(2l) = 0, \end{cases}$$

przy czym siły wewnętrzne nie przekraczają powierzchni plastyczności rys.4, więc:

$$(3.11) \quad \Phi(N, M) \leq 0,$$

gdzie: $\delta(x-l)$ - delta Diraca w punkcie $x = l$.

Można wykazać, że nierówność (2.16) przyjmie w naszym przypadku postać:

$$(3.12) \quad PN^s \leq X_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2l} N_x w_x'^2 dx - R(w, w_p),$$

gdzie: $R(w, w_p) = \frac{1}{2} \int_0^{2l} N_x (w' - w_p')^2 dx.$

Z warunków obciążenia wynika, że $N_x \geq 0$ zatem $R \geq 0$ i nierówność (3.12) upraszcza się do

$$(3.13) \quad PW^5 \leq K_0 + \frac{1}{2} \int_0^L N_x W_x'^2 dx.$$

Aby określić wielkości występujące po prawej stronie nierówności (3.13), należy znaleźć statycznie dopuszczalne rozwiązanie układu (3.9) z warunkami (3.10) i (3.11). Układ ten nie ma rozwiązania jednoznacznego, znajdziemy zatem dwa rozwiązania z których każde ma inny zakres stosowalności.

Rozwiązanie zgięciowe

$$(3.14) \quad \begin{cases} W_x = 0 \\ N_x = 0 \\ M_x = \frac{M_0 x}{L} \\ P = \frac{2M_0}{L} \end{cases} \quad x \in (0, L).$$

Wstawiając rozwiązanie (3.14) do nierówności (3.13) dostaniemy oszacowanie:

$$(3.15) \quad W^5 \leq \frac{K_0 L}{2M_0}.$$

Wykorzystując fakt, że $M_0 = \frac{1}{4} N_0 h$ mamy:

$$(3.16) \quad \frac{W^5}{h} \leq \frac{2K_0 L}{N_0 h^2}$$

Wynik ten przedstawiony jest na rys.6a.

Rozwiązanie membranowe

$$(3.17) \quad \begin{cases} W_x = N_c x \\ N_x = N_c \\ M = 0 \\ P = 2N_c W_0 \end{cases} \quad x \in (0, L).$$

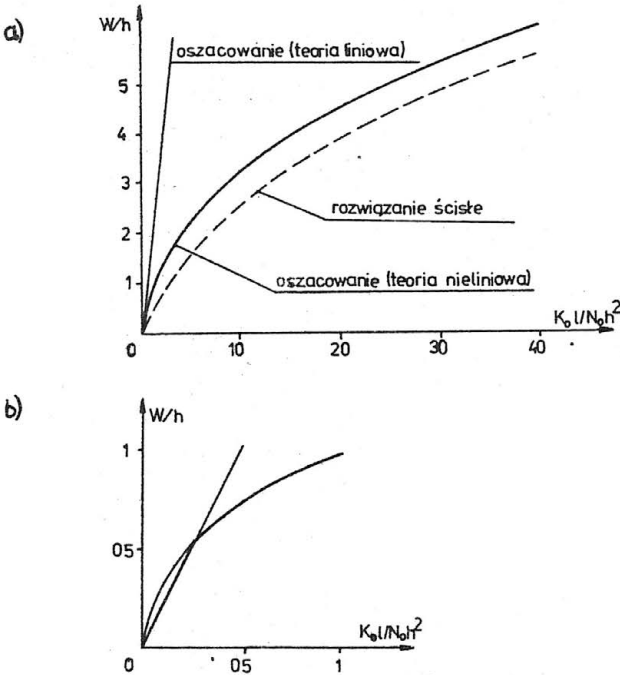
Wstawiając rozwiązanie (3.17) do nierówności (3.13) dostaniemy oszacowanie:

$$(3.18) \quad W^S \leq \frac{K_0}{P} + \frac{PL}{4N_0}.$$

Dobieramy P w taki sposób, aby wyrażenie po prawej stronie nierówności (3.18) osiągnęło minimum, zatem ostatecznie mamy:

$$(3.19) \quad \frac{W^S}{h} \leq \sqrt{\frac{K_0 L}{N_0 h^2}}.$$

Wynik ten przedstawiony jest na rys.6a. Rysunek 6b jest powiększeniem rysunku 6a wokół początku układu współrzędnych

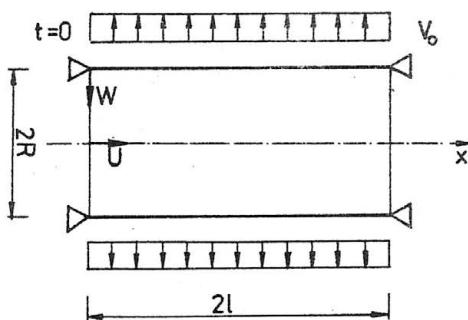


Rys.6. Porównanie ścisłego rozwiązania i górnej oceny na maksymalne ugięcia środka belki.

Z rys.6 widać, że uzyskano dobrą zgodność oszacowania ze ścisłym rozwiązaniem problemu. Względna dokładność oszacowania zwiększa się ze wzrostem początkowej energii kinetycznej.

3.2. Powłoka cylindryczna

Rozpatrzmy powłokę cylindryczną o wysokości h , długości $2l$ i promieniu R , zamocowaną przegubowo nieprzesuwnie na końcach. Załóżmy, że w chwili początkowej powłoka jest obciążona od wewnątrz symetrycznym impulsem prędkości v_0 o całkowitej energii kinetycznej \mathcal{E}_0 , rys.7.



Rys.7. Powłoka cylindryczna obciążona dynamicznie impulsem prędkości.

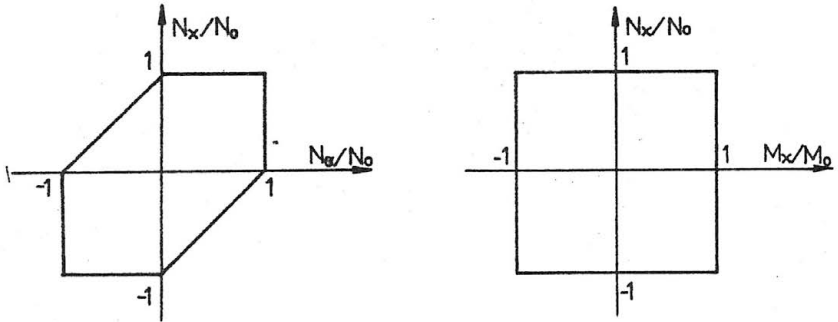
Interesować nas będzie maksymalne ugięcie powłoki w środku rozpiętości w zależności od początkowej energii kinetycznej. Równania ruchu opisujące powyższy problem dynamiczny przyjmą postać:

$$(3.20) \quad \begin{cases} N_x' - \mu \ddot{u} = 0 \\ -M_x'' + (N_x N')' + \frac{N_x}{R} - \mu \ddot{w} = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

Związki geometryczne wyrażone w prędkościach są

$$(3.21) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \dot{u}' + w' \dot{w}' \\ \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\dot{w}}{R} \\ \kappa_x = \dot{w}'' \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

Wektor sił wewnętrznych znajduje się wewnątrz lub na powierzchni plastycznej $\bar{\Phi}$ przedstawionej na rys.8, a zaproponowanej dla powłoki cylindrycznej przez Druckera i Shielda [9].



Rys.8. Powierzchnia plastyczna dla cylindrycznej powłoki [9].

Prędkości odkształcenia spełniają stowarzyszone prawo płynięcia:

$$(3.22) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_x = \lambda \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial N_x} \\ \dot{\epsilon}_\phi = \lambda \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial N_\phi} \\ \dot{\kappa}_x = \lambda \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial M_x} \end{cases} \quad (x,t) \in (0,2l) \times (0,\infty).$$

Warunki brzegowe mają postać:

$$(3.23) \quad \begin{cases} w(0,t) = w(2l,t) = 0 \\ u(0,t) = u(2l,t) = 0 \\ M_x(0,t) = M_x(2l,t) = 0 \end{cases} \quad t \in (0,\infty),$$

a warunki początkowe są postaci:

$$(3.24) \quad \begin{cases} \dot{u}_x(x, 0) = w(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \\ N_x(x, 0) = N_\theta(x, 0) = M_x(x, 0) = 0 \\ \dot{w}(x, 0) = V_0 \end{cases} \quad x \in \langle 0, 2l \rangle,$$

gdzie: N_x, N_θ - siła podłużna i obwodowa w powłoce,

M_x - moment zginający podłużny,

$N_0 = \sigma_0 h, M_0 = \frac{1}{4} \sigma_0 h^2$ - siła graniczna i moment graniczny,

u, w - przemieszczenia w kierunku podłużnym i promieniowym powłoki,

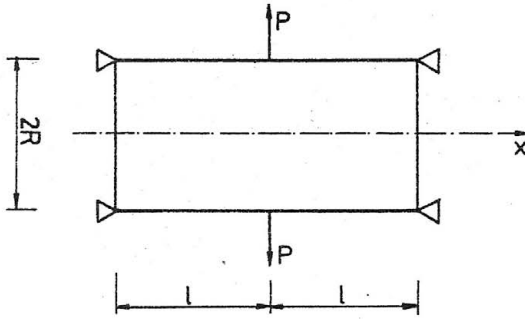
$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_\theta$ - prędkości wydłużeń podłużnych i obwodowe w powłoce,

$\dot{\kappa}_x$ - podłużna prędkość krzywizny.

Rozwiązanie układu równań (3.20) z warunkami (3.23) i (3.24) dla dowolnego rozkładu prędkości początkowej jest bardzo trudne. W przypadku jednorodnego rozkładu prędkości, rozwiązanie zostało podane przez Jonesa [10], z tego rozwiązania otrzymamy zależność pomiędzy maksymalnym promieniowym ugięciem środka powłoki w^s odniesionym do grubości h , a początkową energią kinetyczną \mathcal{K}_0 odniesioną do wielkości $N_0 h^2 / l$. Zależność ta pokazana jest na rys.10 dla powłok krótkich o charakterystycznym parametrze $c = \frac{4l^2}{R^2 h} = 1$.

Znajdziemy obecnie górne oszacowanie tego przemieszczenia promieniowego w^s powłoki. Zgodnie z teorią rozpatrzmy powłokę obciążoną w połowie rozpiętości pierścieniem sił P , rys.9. Rozwiązanie statycznie dopuszczalne dla powyższego problemu spełnia układ równań:

$$(3.25) \quad \begin{cases} N_x^{*1} = 0 \\ -M_x^{*1} + (N_x^{*1} w')' + \frac{N_\theta^*}{R} - P\delta(l) = 0 \end{cases} \quad x \in (0, 2l)$$



Rys.9. Zastępcza powłoka obciążona pierścieniem sił.
z warunkami brzegowymi:

$$(3.26) \quad \begin{cases} N_x(0) = w_x(2l) = 0 \\ M_x(0) = M_x(2l) = 0, \end{cases}$$

przy czym siły wewnętrzne nie przekraczają powierzchni plastyczności rys.8 tzn.

$$(3.27) \quad \Phi(N_x, N_\theta, M_x) \leq 0.$$

Można wykazać, że nierówność (2.16) przyjmie w naszym przypadku postać:

$$(3.28) \quad Pw^5 \leq K_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2l} N_x^* w'^2 dx - R(w, w_*),$$

gdzie:
$$K_0 = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \mu \bar{w}^2(x, 0) dx = \mu v_0^2 l,$$

$$R(w, w_*) = \frac{1}{2} \int_0^{2l} N_x^* (w' - w_*')^2 dx.$$

Z warunków obciążenia wynika, że $W_x \geq 0$ zatem $R > 0$ i nierówność (3.28) upraszcza się do

$$(3.29) \quad PW^5 \leq K_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2l} N_x^* N_p^{*3} dx.$$

Aby określić wielkości występujące po prawej stronie nierówności (3.29), należy znaleźć statycznie dopuszczalne rozwiązanie układu (3.25) z warunkami (3.26) i (3.27). Układ ten nie ma rozwiązania jednoznacznego, znaleźliśmy zatem dwa rozwiązania z których każde ma inny zakres stosowalności.

Rozwiązanie zgięciowe

$$(3.30) \quad \begin{cases} W_p = 0 \\ N_x^* = N_p^* = 0 \\ M_x = \frac{M_0}{l} x \\ P = \frac{2M_0}{l} \end{cases} \quad x \in \langle 0, l \rangle.$$

Wstawiając rozwiązanie (3.30) do nierówności (3.29) dostaniemy oszacowanie:

$$(3.31) \quad W^5 \leq \frac{K_0 l}{2M_0}.$$

Wykorzystując fakt, że $M_0 = \frac{1}{4} \cdot N_0 \cdot h$ mamy ostatecznie

$$(3.32) \quad \frac{W^5}{h} \leq \frac{2K_0 l}{N_0 h^2}.$$

Rozwiązanie membranowe

$$(3.33) \quad \begin{cases} W_x = -\frac{N}{2M_0 R} x^2 - \left(\frac{P}{2N_0} - \frac{NL}{N_0 R} \right) x \\ N_x^* = N_0 \\ N_p = N \\ M_x^* = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &\in \langle 0, l \rangle \\ 0 &\leq N \leq N_0. \end{aligned}$$

Wstawiając rozwiązanie (3.33) do nierówności (3.29) dostaniemy oszacowanie:

$$(3.34) \quad W^5 \leq \frac{K_0 + \frac{N^4 l^2}{3N_0 R^2}}{p} + \frac{PL}{4N_0} - \frac{NL^2}{2N_0 R}.$$

Dobieramy P w taki sposób aby wyrażenie po prawej stronie nierówności (3.34) osiągało minimum, zatem:

$$(3.35) \quad \frac{W^5}{h} \leq \sqrt{\frac{K_0 l}{N_0 h^2} + \frac{N^4 l^4}{3N_0 R^2 h^2}} - \frac{NL^2}{2N_0 R h} \quad 0 \leq N \leq N_0.$$

Najlepsze oszacowanie otrzymalibyśmy optymalizując prawą stronę nierówności (3.35) ze względu na N. Znalazienie analitycznego minimum prowadzi do żmudnych rachunków. Zamiast tego przyjmijmy dwie różne wartości na N. Jeśli $N = 0$, to mamy oszacowanie

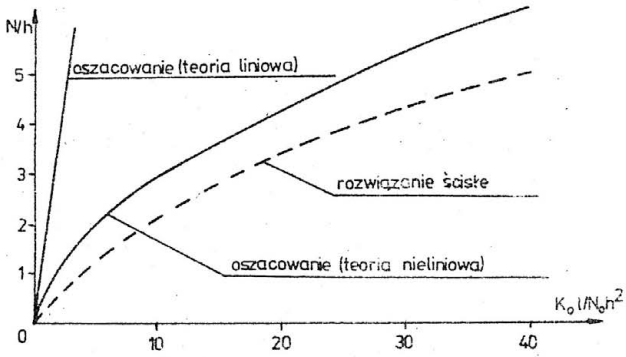
$$(3.36) \quad \frac{W^5}{h} \leq \sqrt{\frac{K_0 l}{N_0 h^2}},$$

a jeśli $N = N_0$ to dostaniemy

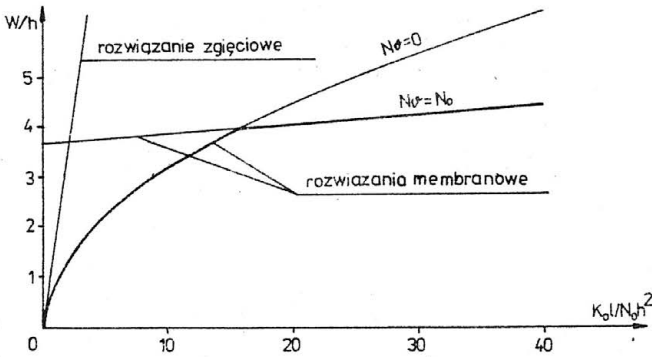
$$(3.37) \quad \frac{W^5}{h} \leq \sqrt{\frac{K_0 l}{N_0 h^2} + \frac{l^4}{3R^2 h^2}} - \frac{l^2}{2Rh}.$$

Wyniki (3.36) i (3.37) łącznie z rozwiązaniem zgięciowym (3.32) pokazane są na rys.10 i rys.11.

Na rysunku 10 przeprowadzone jest porównanie ścisłego rozwiązania na ugięcie znalezione przez Jonesa, z oszacowaniem dla powłoki krótkiej o charakterystyce $c = \frac{2l^2}{Rh} = 1$. Podobnie jak w przypadku belki dokładność metody oszacowań jest dość dobra. Rysunek 11 przedstawia oszacowanie przemieszczenia powłoki długiej o charakterystyce $c = 96$. Warto zauważyć, że w tym oszacowaniu mają udział wszystkie trzy krzywe.



Rys.10. Porównanie ścisłego rozwiązania z górną oceną na maksymalne ugięcia środka powłoki krótkiej.



Rys.11. Oszacowanie górne ugięcia dla powłoki długiej.

4. Uwagi końcowe

W przedstawionej pracy podana została ściśła ogólna teoria oszacowań dużych przemieszczeń dla ciał sztywno idealnie plastycznych poddanych dynamicznemu obciążeniu. Zagadnienie oceny górnej na maksymalne przemieszczenie zostało sprowadzone do znalezienia rozwiązania statycznie dopuszczalnego. Należy zaznaczyć, że w metodzie Martina i Pontera wymagane było ściśle statyczne rozwiązanie problemu co jest sprawą znacznie trudniejszą. Wykazano, że warunkiem stosowalności teorii jest aby tensor naprężenia był nieujemnie określony. Nakład pracy przy takim podejściu jest znacznie mniejszy w porównaniu ze ściśłym rozwiązaniem dynamicznym. Należy zaznaczyć, że górne oszacowanie przemieszczenia niezależy od rozkładu pola prędkości początkowej w ciele, lecz tylko od całkowitej początkowej energii kinetycznej. Z tego względu najlepszą dokładność oszacowania przemieszczeń w danym punkcie ciała uzyskujemy wtedy, gdy pole prędkości początkowej jest tak rozłożone, że powoduje największe przemieszczenia rzeczywiste w tym punkcie. Analizując przykłady liczbowe przedstawione w pracy dla zilustrowania metody, należy stwierdzić dobrą zgodność oszacowania ze znanymi w literaturze rozwiązaniami ściśłymi.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. I.B. Martin, Impulsive Loading Theorems for Rigid-Plastic Continua, Proc.ASCE, J.Eng.Mech.Div.90, 1964, 27-42.
2. I.B. Martin, Displacement Bounds for Dynamically Loaded Elastic Structures, J.Mech.Eng.Sc.10, 3, 1968, 213-218.
3. I.B. Martin, A.R.S. Ponter, Bounds on Large Deformations of Impulsively Loaded Elastic-Plastic Structures, University Leicester, Eng.Dept.Report 70-22, 1970.
4. T. Wierzbicki, Bounds on Large Dynamic Deformations of Structures, J.Eng.Mech.Div.Proc.ASCE, 96, 1970, 267-276.
5. T. Wierzbicki, Duże ugięcia konstrukcji obciążonych dynamicznie, krytyczny przegląd stosowanych metod, Rozpr.Inż., 24, 1976, 405-432.
6. J.Ploch i T. Wierzbicki, Oszacowanie dużych niesprężystych deformacji dynamicznie obciążonych konstrukcji, III Symp. Dyn.i Stat.Konstr., Rzeszów 1976.
7. J. Ploch, Oszacowania dużych przemieszczeń w ciałach sprężystych poddanych działaniu obciążenia impulsowego, Prace IPPT.
8. P.S. Symonds, T.I. Mentel, Impulsive Loading of Plastic Beams with Axial Constraints, J.Mech.Phys.Solids, 6, 1958, 186-202.
9. D.C. Drucker, R.T. Shield, Limit Analysis of Symetrically Loaded Thin Shells of Revolution, J.Appl.Mech, 26, Trans. ASME, 81, 1959, 61-68.
10. N. Jones, The Influence of Large Deflections on the Behaviour of Rigid-Plastic Cylindrical Shells Loaded Impulsively, J.Appl.Mech.37, 1970, 416-425.

13. G.Maier, L.Corradi, Upper Bounds on Dynamic Deformations of Elastoplastic Continua, Meccanica, No.1,vol IX,1974.
14. G.Maier, Upper Bounds on Deformations of Elastic-Workhardening Structures the Presence of Dynamic and Second-Order Geometric Effects, J.Struct.Mech.,2,1973,265.