

Jerzy Ploch

**OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ
W CIAŁACH SPRĘŻYSTYCH
PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻENIA
IMPULSOWEGO**

2/1979



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 11 stycznia 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 2/1979



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark. wyd. 1,3. Ark. druk. 2.

Oddano do drukarni w styczniu 1979 r.

Nr zamówienia 60/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Jerzy Ploch
Zakład Mechaniki
Ośrodków Ciągłych

OSZACOWANIA DUŻYCH PRZEMIESZCZEŃ W CIAŁACH SPRĘŻYSTYCH PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻENIA IMPULSOWEGO

1. Wstęp

Metoda oszacowania od góry maksymalnych przemieszczeń ciał i konstrukcji sprężystych obciążonych idealnym impulsem podana została przez Martina [1] dla problemów geometrycznie liniowych. Znalazienie górnej oceny na ugięcia spowodowane tam zostało do rozwiązania pewnego pomocniczego problemu statycznego dla podobnej konstrukcji przy czym wykorzystywany był postulat wypukłości funkcji energii sprężystej. W zagadnieniach nieliniowych postulat ten jest niewystarczający do znalezienia oszacowań. Uogólniając metodę oszacowań na przypadek dużych przemieszczeń Martin [2] posłużył się warunkiem stabilności w sensie dodatniego przyrostu energii potencjalnej od stanu stacjonarnego. Nie podał jednak ścisłego uzasadnienia tej hipotezy. Próba podjęta w pracy Wierzbickiego [3] oparta na własnościach wypukłości funkcji energii sprężystej nie jest w pełni zadawalająca gdyż pomija w nierówności szacującej pewne człony, co powoduje ograniczenie klasy rozwiązań statycznych. Wzruszając się na tej pracy lecz korzystając z postulatu analityczności funkcji energii sprężystej podano w obecnej pracy ściśle teoretyczne podstawy dla hipotezy Martina. Wyprowadzone zostało w jawny sposób kryterium przy spełnieniu którego nierówność szacująca pozostaje słuszna.

Jako ilustrację teorii podano rozważania dwóch ważnych praktycznie przypadków obciążenia dynamicznego belek. Ostatni przykład poświęcony jest zastosowaniu wyprowadzonego kryterium w przypadku występowania sił podłużnych ściskających w ramie portalowej.

2. Teoria oszacowań

2.1. Sformułowanie problemu dynamicznego

Rozpatrzmy ciało sprężyste zajmujące w naturalnej konfiguracji odniesienia obszar \mathcal{B} , który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E^3 . Przez \mathcal{S} oznaczmy wnętrze tego obszaru a przez $\partial\mathcal{B}$ jego brzeg, który jest sumą zbiorów $\partial\mathcal{B}_T$ i $\partial\mathcal{B}_V$. Elementy zbioru \mathcal{B} oznaczamy przez x i nazywamy zmiennymi przestrzennymi. Ruch ciała będziemy badali w przedziale czasu $(0, \infty)$, a elementy tego zbioru oznaczmy przez t i nazwiemy zmiennymi czasowymi.

Założmy, że ciało \mathcal{B} jest wstępnie obciążone statycznie polem sił masowych F_0 , a brzeg ciała $\partial\mathcal{B}_T$ polem sił powierzchniowych T_0 . Przemieszczenia na brzegu $\partial\mathcal{B}_V$ są równe zeru. Układ równań różniczkowych, opisujący zachowanie ciała sprężystego pod działaniem powyżej zdefiniowanym obciążeniem wstępnym w opisie Lagrange'a dla teorii skończonych deformacji /w zapisie absolutnym/, przyjmie postać:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{S}_0 + \nabla\psi_0 \underline{S}_0) = -F_0 \\ \underline{S}_0 = \frac{dW}{dE}(E_0) \\ \underline{E}_0 = \frac{1}{2}(\nabla\psi_0 + \nabla\psi_0^T + \nabla\psi_0 \nabla\psi_0) \end{cases} \quad x \in \mathcal{B},$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\underline{S}_0 + \nabla\psi_0 \underline{S}_0) \Omega = T_0 \\ \psi_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \partial\mathcal{B}_T \\ x \in \partial\mathcal{B}_V. \end{array}$$

Przyjmijmy, że rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.1) z warunkami brzegowymi (2.2) istnieje i jest znane. Następnie, do ciała wstępnie statycznie obciążonego zostaje przyłożone w wybranej chwili początkowej pewne obciążenie dynamiczne. Obciążenie, to składa się z impulsowo przyłożonego do ciała \mathcal{B} stałego w czasie martwego pola sił masowych F , pola prędkości \underline{v}_0 zadanego w postaci idealnego impulsu oraz przyłożonego impulsowo do brzegu $\partial\mathcal{B}_T$ stałego w czasie martwego pola sił powierzchniowych T . Układ równań różniczkowych opi-

sujący zachowanie się ciała wstępnie obciążonego, pod działaniem powyżej zdefiniowanego obciążenia impulsowego, w opisie Lagrange'a dla teorii skończonych deformacji przyjmie postać:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\underline{S} + \nabla \underline{u} \underline{S}) = -\underline{F}_0 - \underline{F} + \rho \ddot{\underline{u}} \\ \underline{S} = \frac{dW}{d\underline{E}}(\underline{E}) \\ \underline{E} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u} + \nabla^T \underline{u} \nabla \underline{u}) \end{cases} \quad (x, t) \in \mathcal{D} \times (0, \infty),$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.4) \quad \begin{cases} (\underline{S} + \nabla \underline{u} \underline{S}) \underline{n} = \underline{T}_0 + \underline{T} \\ \underline{u} = \underline{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (x, t) \in \partial \mathcal{D}, x(0, \infty) \\ (x, t) \in \partial \mathcal{D}, x(0, \infty) \end{array}$$

i warunkami początkowymi:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_0 \\ \dot{\underline{u}} = \underline{v}_0 \end{cases} \quad (x, t) \in \mathcal{D} \times \{0\},$$

gdzie:

- $\rho: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{R}_+$ - dane pole skalarne gęstości,
- $\underline{n}: \partial \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}_1$ - pole wektorów normalnych do brzegu,
- $W: \mathcal{T}_2^s \longrightarrow \mathcal{R}$ - funkcja energii sprężystej odkształcenia,
- $\underline{S}: \mathcal{D} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathcal{T}_2^s$ - symetryczne pole tensorowe naprężenia Pioli-Kirchoffa,
- $\underline{E}: \mathcal{D} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathcal{T}_2^s$ - symetryczne pole tensorowe odkształcenia Cauchy-Greena,
- $\underline{u}: \mathcal{D} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathcal{T}_1$ - pole wektorowe przemieszczenia
- \mathcal{R} - zbiór liczb rzeczywistych,
- \mathcal{T}_p - p-krotny iloczyn tensorowy trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej \mathcal{T}_1 ,

- A^T - transpozycja tensora A ,
- $A \otimes B$ - proste nasunięcie tensorów A i B ,
- $A \cdot B$ - całkowite nasunięcie tensorów A i B ,
- (a, b) - para uporządkowana elementów a i b ,
- $A \times B$ - iloczyn kartezjański zbiorów A i B ,
- $\frac{d^n}{(dt)^n}$ - n -ta pochodna funkcji tensorowej,
- ∇° - gradient przestrzenny pola tensorowego,
- div° - dywergencja przestrzenna pola tensorowego,
- $\dot{}$ - pochodna czasowa pola tensorowego.

Wielkości oznaczone symbolem „ \circ ” odnoszą się do równowagi statycznej ciała pod wstępnym obciążeniem.

W oparciu o układ równań (2.3) z warunkami granicznymi (2.4) i (2.5) wyprowadzimy obecnie nierówność, którą wykorzystamy następnie w dowodzie twierdzenia o oszacowaniach. Pomnóżmy, pierwsze równanie układu (2.3) przez η , scałkujmy po obszarze \mathcal{B} i wykorzystajmy warunki brzegowe (2.4). Otrzymamy:

$$(2.6) \quad - \int_{\mathcal{B}} (\underline{E}_0 + \underline{F}) \dot{\eta} d(\mathcal{B}) - \int_{\partial \mathcal{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T}) \dot{\eta} d(\partial \mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \underline{S} \dot{\underline{E}} d(\mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \underline{g} \dot{\eta} \dot{\eta} d(\mathcal{B}) = 0.$$

Całkując tożsamość (2.6) w przedziale czasu $\langle 0, t \rangle$, wykorzystując związek konstytutywny i warunki początkowe (2.5) dostaniemy:

$$(2.7) \quad - \int_{\mathcal{B}} (\underline{E}_0 + \underline{F}) \eta d(\mathcal{B}) - \int_{\partial \mathcal{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T}) \eta d(\partial \mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \underline{W}(\underline{E}) d(\mathcal{B}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \underline{g} \eta \dot{\eta} d(\mathcal{B}) =$$

$$= - \int_{\mathcal{B}} (\underline{E}_0 + \underline{F}) \eta_0 d(\mathcal{B}) - \int_{\partial \mathcal{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T}) \eta_0 d(\partial \mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \underline{W}(\underline{E}_0) d(\mathcal{B}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \underline{g} \eta_0 \dot{\eta}_0 d(\mathcal{B}).$$

Tożsamość (2.7) wyraża zasadę zachowania energii. Lewa strona tożsamości przedstawia całkowitą energię układu w dowolnej chwili. Jest ona sumą pracy sił zewnętrznych, energii sprężystej i kinetycznej, natomiast prawa strona energię całkowitą w chwili początkowej.

Oznaczmy energię kinetyczną układu w chwili początkowej przez $K_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}} \rho \dot{y}_0 \dot{y}_0 d(\mathfrak{B})$ i skorzystajmy z faktu, że w dowolnej chwili energia kinetyczna jest nieujemna $\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{B}} \rho \dot{y} \dot{y} d(\mathfrak{B}) \geq 0$, to z tożsamości (2.7) wynika nierówność:

$$(2.8) \quad \int_{\mathfrak{B}} W(\underline{E}) d(\mathfrak{B}) \leq K_0 + \int_{\mathfrak{B}} W(\underline{E}_0) d(\mathfrak{B}) + \int_{\mathfrak{B}} (\underline{F}_0 + \underline{F})(\underline{y} - \underline{y}_0) d(\mathfrak{B}) + \int_{\partial \mathfrak{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T})(\underline{y} - \underline{y}_0) d(\mathfrak{B}).$$

Nierówność (2.8) wykorzystana będzie w dowodzie twierdzenia o oszacowaniach.

2.2. Pomocniczy problem statyczny

Rozpatrzmy to samo ciało sprężyste zajmujące w naturalnej konfiguracji odniesienia obszar \mathfrak{B} , zamocowane na brzegu i obciążone w sposób statyczny polem sił związanym w pewien sposób z obciążeniami wstępnym i impulsowym, poprzednio zdefiniowanymi. Mianowicie, brzeg ciała $\partial \mathfrak{B}_T$ obciążamy polem sił powierzchniowych postaci $\underline{T}_0 + \underline{T}_p + \underline{T}$, a ciało \mathfrak{B} polem sił masowych postaci $\underline{F}_0 + \underline{F}_p + \underline{F}$.

Pola sił \underline{T}_0 i \underline{F}_0 są identyczne jak w obciążeniu wstępnym, \underline{T} i \underline{F} identyczne jak w obciążeniu dynamicznym a \underline{T}_p i \underline{F}_p są dowolne. Układ równań różniczkowych opisujący zachowanie się ciała sprężystego pod tym obciążeniem statycznym, w opisie Lagrange'a dla teorii skończonych deformacji ma postać:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \operatorname{div} (\underline{S}_0 + \nabla \underline{u}_0 \underline{S}_0) = -\underline{F}_0 - \underline{F}_p - \underline{F} \\ \underline{S} = \frac{dW}{d\underline{E}}(\underline{E}_0) \\ \underline{E} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u}_0 + \nabla^T \underline{u}_0 + \nabla^T \underline{u}_0 \nabla \underline{u}_0) \end{cases} \quad \underline{x} \in \mathfrak{B},$$

z warunkami brzegowymi:

$$(2.10) \quad \begin{cases} (\underline{S}_* + \nabla \underline{u}_* \underline{S}_*) \underline{n} = \underline{T}_* + \underline{T}_b + \underline{T} & x \in \partial \mathcal{B}_T \\ \underline{u}_* = 0 & x \in \partial \mathcal{B}_V, \end{cases}$$

gdzie: symbol *) odnosi się do równowagi statycznej ciała. Przyjmijmy, że rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.9) z warunkiem brzegowym (2.10) istnieje i jest znane.

2.3. Dowód twierdzenia o oszacowaniach

Założmy, że funkcja energii sprężystej jest analityczna w zbiorze \mathcal{J}_2^s tensorów symetrycznych o walencji dwa. Jeśli wykorzystamy powyższe założenie, to oczywista jest równość:

$$(2.11) \quad W(\underline{E}) - W(\underline{E}_*) = \frac{dW}{d\underline{E}}(\underline{E}_*) \cdot (\underline{E} - \underline{E}_*) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{(d\underline{E})^n}(\underline{E}_*) \cdot (\underline{E} - \underline{E}_*)^{(n)},$$

gdzie: $(\underline{E} - \underline{E}_*)^{(n)} = \underbrace{[(\underline{E} - \underline{E}_*) \otimes (\underline{E} - \underline{E}_*) \otimes \dots \otimes (\underline{E} - \underline{E}_*)]}_{n\text{-razy}}$,

\otimes - symbol iloczynu tensorowego.

Pole tensorowe odkształcenia \underline{E} wynika z rozwiązania układu równań (2.3) z warunkami granicznymi (2.4) i (2.5), a pole \underline{E}_* z rozwiązania układu (2.9) z warunkiem brzegowym (2.10).

Wykorzystajmy prawo konstytutywne i scałkujmy tożsamość (2.11) po obszarze \mathcal{B} . Otrzymamy:

$$(2.12) \quad \int_{\mathcal{B}} W(\underline{E}) d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} W(\underline{E}_*) d(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \underline{S}_* \cdot (\underline{E} - \underline{E}_*) d(\mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{d\underline{E}^n}(\underline{E}_*) \cdot (\underline{E} - \underline{E}_*)^{(n)} d(\mathcal{B}).$$

Przekształćmy pierwszą całkę po prawej stronie tożsamości (2.12), a następnie skorzystajmy z twierdzenia Gaussa, równań (2.9) i warunków brzegowych (2.8), to dostaniemy:

$$(2.13) \quad \int_{\mathcal{B}} W(\underline{E}) d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} W(\underline{E}_*) d(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} (\underline{F}_* + \underline{E}_* + \underline{F}) (\underline{u} - \underline{u}_*) d(\mathcal{B}) + \int_{\partial \mathcal{B}_T} (\underline{T}_* + \underline{T}_b + \underline{T}) (\underline{u} - \underline{u}_*) d(\mathcal{B}) + \\ + \int_{\mathcal{B}} \underline{S}_* \cdot [\nabla^T (\underline{u} - \underline{u}_*) \nabla (\underline{u} - \underline{u}_*)] d(\mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{(d\underline{E})^n}(\underline{E}_*) \cdot (\underline{E} - \underline{E}_*)^{(n)} d(\mathcal{B}).$$

Oznaczmy przez $R(\underline{u}, \underline{u}_0)$ funkcjonal postaci:

$$(2.14) \quad R(\underline{u}, \underline{u}_0) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{S}_2[\nabla^T(\underline{u}-\underline{u}_0)\nabla(\underline{u}-\underline{u}_0)]d(\mathcal{B}) + \int_{\mathcal{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{(d\underline{E})^n}(\underline{E}_0) \cdot (\underline{E}-\underline{E}_0)^{(n)} d(\mathcal{B}),$$

gdzie \underline{u} jest dowolnym polem przemieszczeń spełniającym kinematyczne warunki brzegowe dla ciała \mathcal{B} , a \underline{E} pole tensorowe odkształcenia związane z tym przemieszczeniem. Zgodnie z (2.13) wartość funkcjonału (2.14) na elemencie \underline{u} przedstawia przyrost energii potencjalnej od stanu stacjonarnego \underline{u}_0 na przemieszczeniu $\underline{u} - \underline{u}_0$. Nierówność (2.8) połączmy z tożsamością (2.13) i skorzystajmy z oznaczenia (2.14). Dostaniemy:

$$(2.15) \quad \int_{\mathcal{B}} \underline{E}_r(\underline{u}-\underline{u}_0)d(\mathcal{B}) + \int_{\partial\mathcal{B}_r} \underline{T}_r(\underline{u}-\underline{u}_0)d(\partial\mathcal{B}) \leq \mathcal{K}_0 + \int_{\mathcal{B}} \underline{N}(\underline{E}_0)d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} \underline{W}(\underline{E}_0)d(\mathcal{B}) + \\ + \int_{\mathcal{B}} (\underline{E}_0 + \underline{F})(\underline{u}_r - \underline{u}_0)d(\mathcal{B}) + \int_{\partial\mathcal{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T})(\underline{u}_r - \underline{u}_0)d(\partial\mathcal{B}) - R(\underline{u}, \underline{u}_0)$$

Jeśli, dla dowolnego \underline{u} spełniającego kinematyczne warunki brzegowe dla ciała \mathcal{B} zachodzi warunek:

$$(2.16) \quad R(\underline{u}, \underline{u}_0) \geq 0,$$

to nieujemny człon $R(\underline{u}, \underline{u}_0)$ w wyrażeniu (2.15) można pominąć bez naruszania znaku nierówności, więc mamy:

$$(2.17) \quad \int_{\mathcal{B}} \underline{E}_r(\underline{u}-\underline{u}_0)d(\mathcal{B}) + \int_{\partial\mathcal{B}_r} \underline{T}_r(\underline{u}-\underline{u}_0)d(\partial\mathcal{B}) \leq \mathcal{K}_0 + \int_{\mathcal{B}} \underline{N}(\underline{E}_0)d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} \underline{W}(\underline{E}_0)d(\mathcal{B}) + \\ + \int_{\mathcal{B}} (\underline{E}_0 + \underline{F})(\underline{u}_r - \underline{u}_0)d(\mathcal{B}) + \int_{\partial\mathcal{B}} (\underline{T}_0 + \underline{T})(\underline{u}_r - \underline{u}_0)d(\partial\mathcal{B}).$$

Powyższe fakty można podsumować w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Niech ciało \mathcal{B} /wstępnie statycznie obciążone/ będzie obciążone dynamicznie i podparte, tak jak opisuje układ równań różniczkowych (2.3) z warunkami granicznymi (2.4) i (2.5). Rozważmy stan ciała \mathcal{B} pod obciążeniem statycznym opisanym układem równań różniczkowych (2.9) z warunkiem brzegowym

Ponieważ W jest funkcją analityczną w zbiorze J_x^s , więc rozwiniemy lewą stronę nierówności (2.21) w szereg Taylora o środku w punkcie E_* więc:

$$(2.22) \quad \frac{dW}{dE}(E_*) \cdot (E - E_*) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{(dE)^n}(E_*) \cdot (E - E_*)^n \gg \frac{dW}{dE}(E_*) \cdot (E - E_*),$$

stąd oczywiste, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n W}{(dE)^n}(E_*) \cdot (E - E_*)^n \gg 0$$

co kończy dowód.

Można wyodrębnić trzy praktyczne przypadki, dla których warunek (2.16) jest zawsze spełniony, a mianowicie:

- 1/ Stan statyczny λ jest stabilny w sensie Lapunowa względem normy całkowej. Nierówność (2.16) wynika z dodatniej określoności funkcyjonału $R(\bar{u}, u_p)$ względem normy całkowej.
Zagadnienie to omówione jest szczegółowo w pracy [5].
- 2/ Pole tensorowe \bar{u}_p jest określone nieujemnie w każdym punkcie ciała. Wtedy całka pierwsza w funkcyjonałe $R(\bar{u}, u_p)$ jest nieujemna, a nieujemność drugiej wynika z wypukłości funkcji energii sprężystej i twierdzenia 2.
Ten szczególnie przypadek rozważany był w pracy [3].
- 3/ W teorii nieskończenie małych przemieszczeń. Wówczas z założeń tej teorii wynika, że pierwszy człon w funkcyjonałe (2.14) można pominąć a drugi jest nieujemny z uwagi na wypukłość funkcji energii sprężystej i twierdzenia 2.

2.5. Praktyczne stosowanie teorii

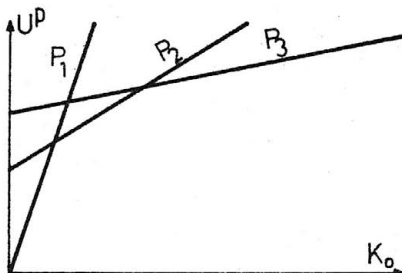
Załóżmy, że spełniony jest warunek (2.16). Pokażemy jak należy korzystać praktycznie z nierówności (2.17) przy znajdowaniu górnej oceny przemieszczenia. Nierówność ta przyjmując najprostszą postać i najbardziej użyteczną w oszacowaniach, jeśli w charakterze obciążenia \bar{F} przyjąć siłę skupioną \bar{F} działającą w punkcie x_0 a obciążenie \bar{F} przyjąć równe Q , wtedy mamy:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} P_* [u(x_0, t) - u_*(x_0)] \leq & X_0 + \int_{\mathcal{B}} W(E_0) d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} W(E_{P_*}) d(\mathcal{B}) + \\ & + \int_{\mathcal{B}} (F_* + F) (u_* - u_0) d(\mathcal{B}) + \int_{\partial \mathcal{B}} (T_* + T) (u_* - u_0) d(\partial \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Nierówność (2.23) pozwala ocenić z góry przemieszczenie u w punkcie x_0 i w kierunku działania siły P_* . Niech $P_* \cdot u > 0$, oznaczmy przez P długość wektora P_* , a przez u^P, u_*^P przemieszczenia w kierunku siły P_* . Przy tych założeniach ugięcie u w punkcie x_0 i w kierunku wektora P_* ograniczone jest z góry przez

$$(2.24) \quad \begin{aligned} u^P(x_0, t) \leq & u_*^P(x_0) + \frac{1}{P} [X_0 + \int_{\mathcal{B}} W(E_0) d(\mathcal{B}) - \int_{\mathcal{B}} W(E_0) d(\mathcal{B}) + \\ & + \int_{\mathcal{B}} (F_* + F) (u_* - u_0) d(\mathcal{B}) + \int_{\partial \mathcal{B}} (T_* + T) (u_* - u_0) d(\partial \mathcal{B})]. \end{aligned}$$

Na płaszczyźnie u^P, X_0 związek (2.24) ze znakiem równości reprezentuje linię prostą dla dowolnie wybranej wartości obciążenia P . Górna ocena przemieszczenia jest obwiednią rodziny linii prostych, Rys.1.



Rys.1. Ilustracja oszacowania przy ustalonej sile skupionej. Najlepszą ocenę dostaniemy również przyjmując wielkość obciążenia P w taki sposób, aby funkcja po prawej stronie nierówności (2.24) osiągała minimum. Ponieważ często znalezienie tego minimum jest kłopotliwe można dobrać wielkość obciąże-

nia P w taki sposób aby drugie wyrażenie po prawej stronie nierówności (2.24) było równe zero. Należy zaznaczyć, że wielkość oszacowania nie zależy od rozkładu prędkości początkowej w ciele, lecz tylko od całkowitej początkowej energii kinetycznej.

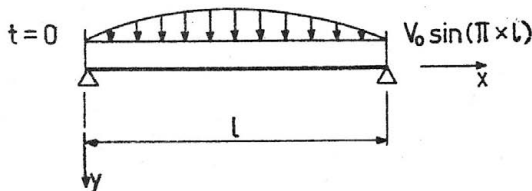
3. Przykłady zastosowań

Jako ilustrację powyższej teorii pokażemy przykłady oszacowań konstrukcji obciążonych impulsowo i przeprowadzimy porównanie z rozwiązaniami dostępnymi w literaturze.

3.1. Belka przegubowo zamocowana

Rozpatrzmy belkę o długości l przegubowo zamocowaną na końcach bez możliwości przesuwu i obciążoną idealnym impulsem prędkości w chwili początkowej rozłożonym w sposób sinusoidalny rys.2.

Dla uproszczenia obliczeń siły bezwładności w kierunku podłużnym belki pomijamy.



Rys.2. Belka obciążona idealnym impulsem prędkości.

Interesować nas będzie maksymalne ugięcie belki w połowie rozpiętości w zależności od początkowej energii kinetycznej. Układ równań różniczkowych opisujący powyższy problem ma postać:

$$(3.1) \quad \begin{cases} M'' - (NW')' + \mu \ddot{w} = 0 \\ N' = 0 \\ M = EJW'' \\ N = EA(u' + \frac{1}{2}W'^2) \end{cases} \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty),$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.2) \quad \begin{cases} u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ w(0,t) = w(l,t) = 0 \\ M(0,t) = M(l,t) = 0 \end{cases} \quad t \in (0,\infty),$$

i warunkami początkowymi

$$(3.3) \quad \begin{cases} u(x,0) = w(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0 \\ \dot{w}(x,0) = v_0 \sin \frac{\pi x}{l} \end{cases} \quad x \in (0,l),$$

gdzie:

- M, N - moment zginający i siła podłużna w belce,
- u, w - przemieszczenia w kierunku podłużnym i poprzecznym belki,
- E - moduł sprężystości ciała,
- A - pole przekroju poprzecznego belki,
- J - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,
- μ - masa na jednostkę długości belki,
- v_0 - dana prędkość początkowa,
- $\dot{}$ - różniczkowanie względem zmiennej przestrzennej x,
- $\ddot{}$ - różniczkowanie względem zmiennej czasowej t.

Rozwiązanie tego problemu podał Woinowsky-Krieger [7] w postaci:

$$(3.4) \quad w(x,t) = v_0 \psi(t) \sin \frac{\pi x}{l},$$

gdzie funkcja ψ spełnia równanie różniczkowe

$$(3.5) \quad \ddot{\psi}(t) = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EJ}{\mu} \left[\psi(t) + \frac{1}{4} \left(\frac{v_0}{k}\right)^2 \psi^3(t) \right]$$

z warunkami brzegowymi $\psi(0) = 0$ i $\dot{\psi}(0) = 1$, gdzie $k = \sqrt{3/R}$ i oznacza promień bezwładności. Maksymalne ugięcie w środku belki w^s można znaleźć rozwiązując równanie (3.5) i mamy:

$$(3.6) \quad \left[\frac{1}{4} \left(\frac{w^s}{k} \right)^2 + 1 \right]^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{k} \right)^2 \frac{\mu}{EJ} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4$$

Początkowa energia kinetyczna równa jest

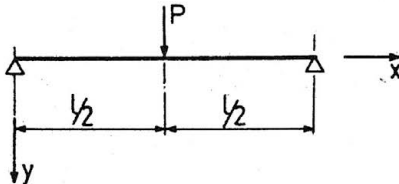
$$(3.7) \quad K_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x, 0) dx = \frac{1}{4} \mu V_0^2 l .$$

Korzystając ze związków (3.6) i (3.7) łatwo zauważyć, że ścisła zależność maksymalnego ugięcia belki od początkowej energii kinetycznej dana jest równaniem:

$$(3.8) \quad \frac{K_0 l^3}{EJ k^2} = \frac{\pi^4}{2} \left[\left(\frac{1}{4} \left(\frac{w^s}{k} \right)^2 + 1 \right)^2 - 1 \right] .$$

Zależność pomiędzy w^s i K_0 przedstawiona jest na rys.4, przy czym w^s odniesiona jest do promienia bezwładności k , a energia kinetyczna do wielkości EJk^2/l^2 .

Aby znaleźć górną ocenę ugięcia w_g , rozpatrzmy zgodnie z teorią tę samą belkę obciążoną statycznie w połowie rozpiętości siłą skupioną P , rys.3.



Rys.3. Zastępcza belka obciążona statycznie siłą punktową.

Zagadnienie to opisane jest układem równań różniczkowych postaci:

$$(3.9) \quad \begin{cases} M_x'' - (N_x W_x')' = P\delta(x - \frac{l}{2}) \\ N_x' = 0 \\ M_x = EJ W_x'' \\ N_x = EA(u_x' + \frac{1}{2} W_x'^2) \end{cases} \quad x \in (0, l),$$

z warunkami brzegowymi:

$$(3.10) \quad \begin{cases} u_x(0) = u_x(l) = 0 \\ W_x(0) = W_x(l) = 0 \\ M_x(0) = M_x(l) = 0, \end{cases}$$

gdzie $\delta(\frac{x}{2})$ oznacza deltę Diraca w punkcie $\frac{l}{2}$.

Można pokazać, że nierówność (2.15) przyjmie dla naszego zagadnienia postać:

$$(3.11) \quad P(W^S - W_x^S) \leq K_0 - W_x - R(W),$$

gdzie: w_x^S - ugięcie statyczne w środku rozpiętości belki,

$$W_x = \frac{1}{2} \int_0^l EJ W_x''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA(u_x' + \frac{1}{2} W_x'^2)^2 dx,$$

$$R(W) = \frac{1}{2} \int_0^l N_x(W^1 - W_x^1)^2 + \frac{1}{2} \int_0^l EJ(W^1 - W_x^1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EA(u^1 - u_x^1 + \frac{W^1}{2} - \frac{W_x^1}{2})^2 dx.$$

Ponieważ siła podłużna N w rozpatrywanej belce pod obciążeniem P jest nieujemna, więc wyrażenie R jest również nieujemne, zatem w wyrażeniu (3.11) człon R można pominąć bez zmiany

znaku nierówności i oszacowanie górne na ugięcie w^s przyjmie postać:

$$(3.12) \quad w^s \leq w_n^s + \frac{1}{P}(K_0 - W_n).$$

Jeśli obciążenie P przyjmiemy w ten sposób, aby $K_0 = W_n$, to oszacowanie górne w^s równe jest w_n^s ($w^s \leq w_n^s$). Aby znaleźć zależność oszacowania górnego od początkowej energii kinetycznej K_0 , wystarczy znaleźć zależność w_n^s od całkowitej energii sprężystej W_n . W tym celu należy rozwiązać układ równań (3.9) z warunkami brzegowymi (3.10). Rozwiązanie to ma postać:

$$(3.13) \quad w_n(x) = \frac{P}{2N_n} \left(x - \frac{\sin \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l/2} \right),$$

$$\text{gdzie: } \alpha^2 = \frac{N_n}{EJ}.$$

Aby podpory belki były nieprzesuwne musi zachodzić warunek:

$$(3.14) \quad \frac{N_n l}{EA} = \frac{1}{2} \int_0^l w_n^2(x) dx.$$

Warunek ten daje zależność siły podłużnej N od obciążenia P więc:

$$(3.15) \quad \frac{Pl^3}{EJk} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{(\alpha l)^3}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l/2}{\alpha l/2} - \frac{1}{3} \operatorname{th}^2 \alpha l/2}}.$$

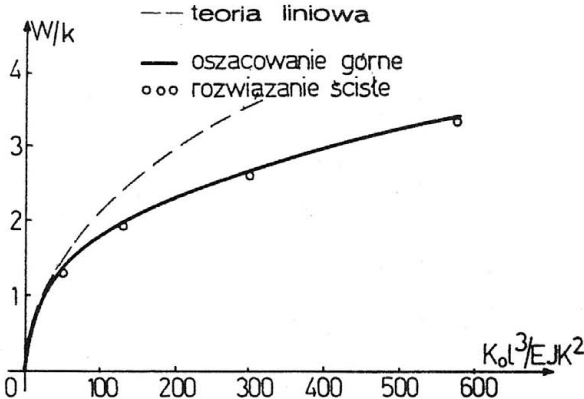
Korzystając z definicji całkowitej energii sprężystej W_n oraz zależności (3.15) otrzymujemy:

$$(3.16) \quad \frac{W_n l^3}{EJk^2} = \frac{1}{6} (\alpha l)^4 \frac{1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l/2}{\alpha l/2} + \operatorname{th}^2 \alpha l/2}{1 - \frac{\operatorname{th} \alpha l/2}{\alpha l/2} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \alpha l/2}.$$

Natomiast ugięcie środka belki w_x^s obliczone w równania (3.13) po wykorzystaniu związku (3.15) ma postać:

$$(3.17) \quad \frac{W_x^s}{k} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\alpha l) \frac{1 - \frac{th \alpha l/2}{\omega l/2}}{\sqrt{1 - \frac{th \alpha l/2}{\omega l/2} - \frac{1}{3} th^2 \alpha l/2}}$$

Równania (3.16) i (3.17) przedstawiają zależność w formie parametrycznej między energią sprężystą W_x , odniesioną do wielkości EJk^3/l^2 , a przemieszczeniem odniesionym do promienia bezwładności k . Zależność między tymi wielkościami została obliczona numerycznie i przedstawiona na rys.4.

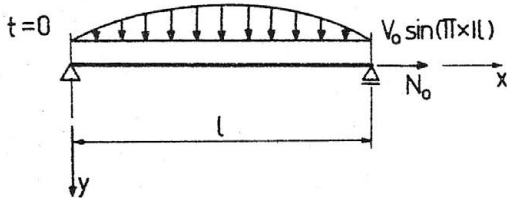


Rys.4. Porównanie ścisłego rozwiązania i górnej oceny na maksymalne ugięcia środka belki.

W tym przypadku, dzięki doborowi rozkładu prędkości początkowej belki w formie sinusoidy, dokładność oszacowania jest bardzo dobra. Należy zaznaczyć, że w rozważanym przypadku można było znaleźć ścisłe rozwiązanie problemu dynamicznego i przeprowadzić ocenę dokładności oszacowania. Przy innych niż sinusoidalnych rozkładach prędkości początkowej ścisłego rozwiązania nie uzyska się, podczas gdy przedstawiona metoda umożliwia natychmiastowe znalezienie górnej oceny.

3.2. Belka przegubowo przesuwnie podparta

Rozpatrzmy belkę o długości l przegubowo zamocowaną w jednym końcu, a w drugim przegubowo przesuwną. Niech belka będzie wstępnie statycznie obciążona siłą podłużną N_0 większą od siły krytycznej $N_k = -\pi^2 EI / l^2$, [4]. Następnie, do obciążonej statycznie belki przykładamy w chwili początkowej obciążenie dynamiczne w postaci sinusoidalnie rozłożonego pola prędkości rys.5. Dla uproszczenia obliczeń siły bezwładności w kierunku podłużnym belki pomijamy. Załóżmy również, że długość belki nie ulega zmianie. Dzięki tym założeniom belka przy wstępnym obciążeniu nie zmieni położenia.



Rys.5. Belka obciążona idealnym impulsem prędkości i stałą siłą osiową.

Interesować nas będzie maksymalne ugięcie w^s belki w połowie rozpiętości w zależności od początkowej energii kinetycznej \mathcal{K}_0 i wielkości siły podłużnej N_0 . Układ równań różniczkowych opisujący problem dynamiczny ma postać:

$$(3.18) \quad \begin{cases} M'' - (Nw')' + \mu \ddot{w} = 0 \\ N' = 0 \\ M = EJ w'' \\ u' + \frac{1}{2} w'^2 = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty),$$

z warunkami brzegowymi:

$$(3.19) \quad \begin{cases} W(0,t) = W(l,t) = 0 \\ M(0,t) = M(l,t) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ N(l,t) = N_0 \end{cases} \quad t \in (0, \infty)$$

i warunkami początkowymi:

$$(3.20) \quad \begin{cases} u(x,0) = W(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0 \\ N(x,0) = 0 \\ \dot{W}(x,0) = V_0 \sin \frac{\pi x}{l} \end{cases} \quad x \in (0, l).$$

Ścisłe rozwiązanie tego problemu istnieje i ma postać:

$$(3.21) \quad W(x,t) = \frac{V_0 l}{\pi \sqrt{\frac{EJ}{\mu} \left(\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \pm \alpha^2 \right)}} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\mu} \left(\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \pm \alpha^2 \right)} \cdot t,$$

gdzie:

$$\alpha^2 = \frac{\pm N_0}{EJ},$$

+ - odnosi się do siły dodatniej /rozciskającej/,
 - - odnosi się do siły ujemnej /ściskającej/.

Maksymalne ugięcie w środku belki wyznaczone z równania (3.21) wynosi:

$$(3.22) \quad \frac{W^s}{l} = \frac{V_0}{\pi \sqrt{\frac{EJ}{\mu} \left(\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \pm \alpha^2 \right)}}.$$

Początkowa energia kinetyczna równa jest

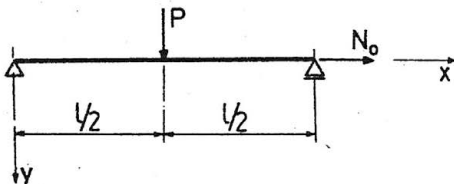
$$(3.23) \quad K_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{W}^2(x,0) dx = \frac{1}{4} \mu V_0^2 l.$$

Korzystając ze związków (3.22) i (3.23) zależność maksymalnego ugięcia belki od początkowej energii kinetycznej K_0 i od

siły N_0 dana jest równaniem:

$$(3.24) \quad \frac{w^3}{l} = \frac{2}{\pi \sqrt{1+(w/l)^2}} \sqrt{\frac{K_0 l}{EJ}}$$

Zależność ta przedstawiona jest na rys.7 i rys.8 przy czym ugięcie w^3 odniesione jest do długości belki, energia kinetyczna K_0 do wielkości EJ/l , a siła podłużna do wielkości EJ/l^2 . Aby znaleźć górną ocenę ugięcia w^3 , rozpatrzmy zgodnie z teorią tą samą belkę obciążoną statycznie siłą podłużną N_0 oraz siłą skupioną P w połowie rozpiętości rys.6.



Rys.6. Obciążenie belki w pomocniczym problemie statycznym.

Powyższe zagadnienie opisane jest układem równań różniczkowych postaci:

$$(3.25) \quad \begin{cases} N_x'' - (N_x w_x')' = P\delta(x-l/2) \\ N_x' = 0 \\ M_x = EJ N_x'' \\ w_x'' + \frac{1}{2} w_x'^2 = 0 \end{cases} \quad x \in (0, l)$$

z warunkami brzegowymi:

$$(3.26) \quad \begin{cases} w_x(0) = w_x(l) = 0 \\ M_x(0) = M_x(l) = 0 \\ w_x'(0) = 0 \\ N_x(l) = 0 \end{cases}$$

Można pokazać, że nierówność (2.15) dla tego zagadnienia przyjmie postać:

$$(3.27) \quad P(W^s - W_*^s) \leq J_0 - W_* + N_0 u_*(l) - R(W),$$

gdzie: w^s - ugięcie statyczne środka belki,

$$W_* = \frac{1}{2} \int_0^l EJ W_*'^2 dx,$$

$$R(W) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (W^s - W_*^s) dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 (W' - W_*')^2 dx.$$

Oznaczmy przez $\delta W = W - W_*$, to funkcjenał R przyjmie postać

$$(3.28) \quad R(\delta W) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \delta W'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N_0 \delta W'^2 dx,$$

gdzie δW spełnia takie same warunki brzegowe jak funkcja w lub w_* . Pokażemy jakie warunki winna spełniać wielkość N_0 , aby wyrażenie (3.28) było nieujemne. Ponieważ funkcja δW jest klasy c_2 oraz $\delta W(0) = \delta W(l) = 0$, zatem funkcję δW można rozwinąć w sinusowy szereg Fouriera, więc:

$$(3.29) \quad \delta W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Biorąc pierwszą i drugą pochodną funkcji (3.29), mamy:

$$(3.30) \quad \delta W' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \delta W'' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Korzystając z ortogonalności funkcji $\sin \frac{n\pi x}{l}$ i $\cos \frac{n\pi x}{l}$ na przedziale $\langle 0, l \rangle$ można pokazać, że:

$$(3.31) \quad \int_0^l (\delta w')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n^2, \quad \int_0^l (\delta w'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 A_n^2.$$

Stąd oczywista jest nierówność:

$$(3.32) \quad \left(\frac{q_0}{l}\right)^2 \int_0^l (\delta w')^2 dx \leq \int_0^l (\delta w'')^2 dx.$$

Korzystając z nierówności (3.32) można pokazać, że:

$$(3.33) \quad R(\delta w) \geq \frac{1}{2} \int_0^l \left[E J \left(\frac{q_0}{l}\right)^2 + N_0 \right] \delta w'^2 dx.$$

Jeśli spełniony jest warunek $N_0 \geq -E J q_0^2 / l^2$ /wartość ta równa jest krytycznej sile Eulerowskiej [4] /, to wyrażenie (3.28) będzie nieujemne. W tym przypadku człon R można w wyrażeniu (3.27) pominąć bez naruszenia znaku nierówności i nierówność szacująca przyjmie postać:

$$(3.34) \quad w^s \leq w_*^s + \frac{1}{P} [K_0 - W_* + N u_*(l)].$$

Wartość obciążenia P nie wpływa na znak wyrażenia R, zatem możemy przyjąć go w ten sposób aby funkcjonał po prawej stronie nierówności (3.34) osiągał minimum. Aby znaleźć zależność oszacowania górnego od energii kinetycznej K_0 i siły podłużnej N_0 musimy znaleźć rozwiązanie zagadnienia (3.25) z warunkami brzegowymi (3.26). Rozwiązanie to ma postać:

$$(3.35) \quad \begin{cases} w_*(x) = \frac{P}{2N_0} \left(x - \frac{\sin \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l/2} \right) & \frac{N_0 l^2}{EJ} > 0 \\ w_*(x) = \frac{P}{2N_0} \left(x - \frac{\sin \alpha x}{\alpha \cos \alpha l/2} \right) & -\pi^2 < \frac{N_0 l^2}{EJ} < 0 \end{cases} \quad x \in (0, \frac{l}{2})$$

Korzystając z wyrażenia (3.35) można określić wielkości występujące po prawej stronie nierówności (3.34), więc:

$$(3.36) \quad \begin{cases} W_*^S = \frac{Pl^3}{4EJ(\alpha l)^2} \left(1 - \frac{\text{th} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2}\right) \\ u_*(l) = -\frac{3}{16} \frac{P^2 l^3}{N_0 EJ(\alpha l)^2} \left(1 - \frac{\text{th} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2} - \frac{1}{3} \text{th}^2 \frac{\alpha l}{2}\right) \\ W_*^N = \frac{1}{16} \frac{P^2 l^3}{EJ(\alpha l)^2} \left(-1 + \frac{\text{th} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2} + \text{th}^2 \frac{\alpha l}{2}\right) \end{cases} \quad \frac{N_0 l^2}{EJ} > 0,$$

$$(3.37) \quad \begin{cases} W_*^S = -\frac{Pl^3}{4EJ} \left(1 - \frac{\text{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2}\right) \\ u_*(l) = \frac{3}{16} \frac{P^2 l^3}{N_0 EJ(\alpha l)^2} \left(1 - \frac{\text{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2} + \frac{1}{3} \text{tg}^2 \frac{\alpha l}{2}\right) \\ W_*^N = \frac{1}{16} \frac{P^2 l^3}{EJ(\alpha l)^2} \left(1 - \frac{\text{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2} + \text{tg}^2 \frac{\alpha l}{2}\right) \end{cases} \quad -\pi^2 < \frac{N_0 l^2}{EJ} \leq 0.$$

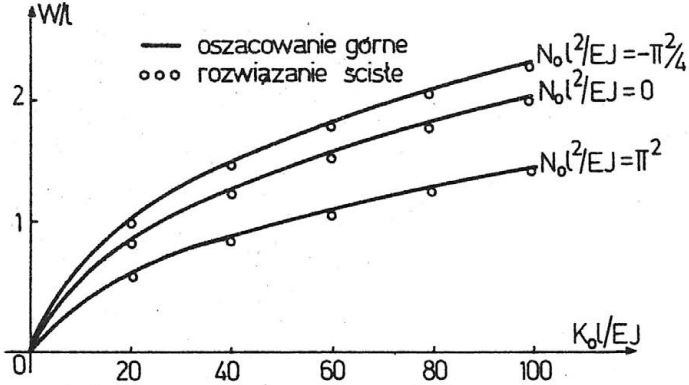
Podstawiając zależności (3.36) i (3.37) do nierówności (3.34), otrzymamy:

$$(3.38) \quad \begin{cases} W^S \leq \frac{K_{\text{na}}}{P} + \frac{Pl^3}{8EJ(\alpha l)^2} \left(1 - \frac{\text{th} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2}\right) & \frac{N_0 l^2}{EJ} > 0 \\ W^S \leq \frac{K_{\text{na}}}{P} + \frac{Pl^3}{8EJ(\alpha l)^2} \left(1 + \frac{\text{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2}\right) & -\pi^2 < \frac{N_0 l^2}{EJ} \leq 0 \end{cases}$$

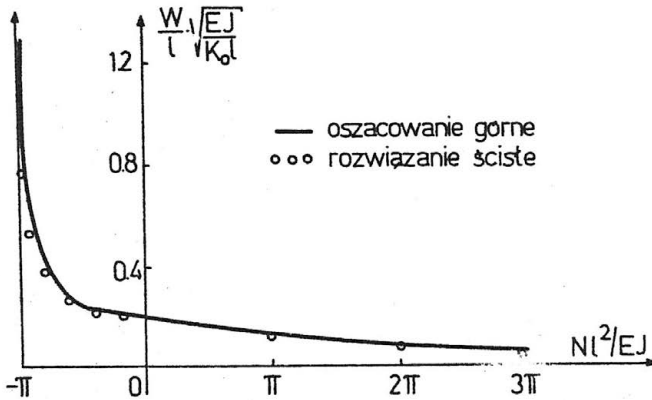
Doberając P tak aby funkcje po prawych stronach w nierównościach (3.38) osiągały minima, to otrzymamy ostateczną postać oszacowania:

$$(3.39) \quad \begin{cases} \frac{W^S}{l} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \alpha l} \sqrt{1 - \frac{\text{th} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2}} \cdot \sqrt{\frac{K_{\text{na}} l}{EJ}} & \frac{N_0 l^2}{EJ} > 0 \\ \frac{W^S}{l} \leq \frac{1}{\sqrt{2} \alpha l} \sqrt{\frac{\text{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\alpha l/2} - 1} \cdot \sqrt{\frac{K_{\text{na}} l}{EJ}} & -\pi^2 < \frac{N_0 l^2}{EJ} \leq 0. \end{cases}$$

Porównanie oceny górnej ugięcia w^s /zależnej od początkowej energii kinetycznej K_0 i siły osiowej N_0 / wyrażonej układem nierówności (3.39) z dokładnym rozwiązaniem wyrażonym wzorem (3.24) przedstawiają rysunki 7 i 8.



Rys.7. Porównanie górnej oceny ugięcia z rozwiązaniem dokładnym dla belki ze stałą siłą osiową.



Rys.8. Porównanie górnej oceny ugięcia z rozwiązaniem dokładnym dla belki ze stałą energią kinetyczną.

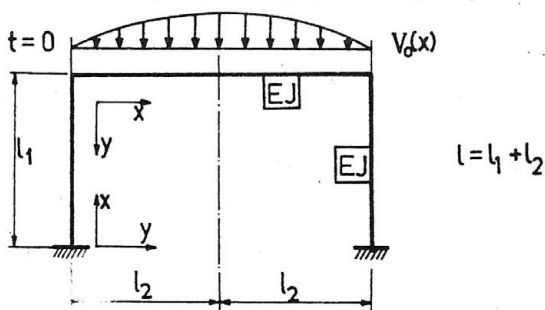
Podobnie jak poprzednio dokładność metody oszacowań jest bardzo dobra. Rysunek 8 przedstawia zależność maksymalnego ugięcia od wartości siły osiowej dla stałej energii kinetycznej. Dla N_0 zdążającego do $-EJ\pi^2/l^2$ ugięcia rosną do nieskończoności, ponieważ pod działaniem samej siły osiowej następuje utrata stateczności. Z rysunku widać wyraźnie zmniejszenie się ugięć ze wzrostem dodatniego naciągu.

3.3. Rama portalowa

Rozważmy ramę portalową, której rygiel obciążony jest symetrycznie idealnym impulsem prędkości dającym początkową energię kinetyczną \mathcal{K}_0 . Zagadnienie to było zbadane doświadczalnie w zakresie plastycznym i rozwiązane teoretycznie w sposób przybliżony przez Symondsa i Chona [8].

Dynamicznie obciążona rama portalowa stanowi zarówno ważny problem praktyczny, jak również jest ciekawym przykładem zastosowania ogólnej teorii oszacowań ze wszystkimi jej subtelnościami. Dla małych wartości impulsu rama będzie deformowała się sprężysto w sposób stateczny. Przy silniejszych impulsach może nastąpić dynamiczna utrata stateczności słupa lub rygla.

Najważniejszym zagadnieniem będzie tutaj określenie kryterium stosowalności metody oszacowań, a więc dyskusji znaku funkcjonału R. Temu zagadnieniu poświęcony będzie ten punkt pracy. Ponieważ rama jest symetryczna i obciążona symetrycznie wystarczy znaleźć rozwiązanie dla połowy ramy. Będziemy zakładali dla uproszczenia obliczeń, że siły bezwładności w kierunku podłużnym prętów i wydłużenia prętów są pomijalne.



Rys.9. Przyjęta konwencja znaków w ramie portalowej.

Przemieszczenia ramy portalowej przedstawionej na rys.9 opisane są układem równań różniczkowych czątkowych postaci, [8].

$$(3.40) \quad \begin{cases} M'' - (Nw')' + \mu \bar{w} = 0 \\ N' = 0 \\ M = EJw'' \\ u' + \frac{1}{2} w'^2 = 0 \end{cases} \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty),$$

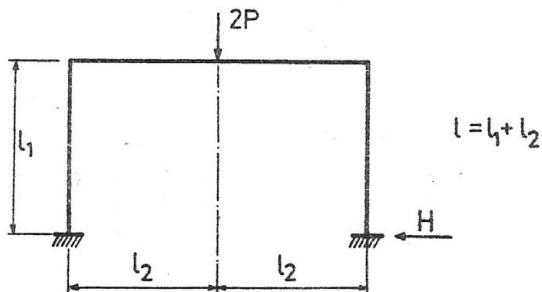
z warunkami brzegowymi:

$$(3.41) \quad \begin{cases} w(0,t) = w'(0,t) = u(0,t) = w'(l,t) = u(l,t) = 0 \\ M'(l_1,t) - N(l_1,t)w'(l_1,t) = 0 \\ N(l_1^-,t) = u(l_1^+,t) \\ u(l_1^+,t) = w(l_1^+,t) \\ w'(l_1^-,t) = w'(l_1^+,t) \\ M(l_1^-,t) = M(l_1^+,t) \\ M'(l_1^-,t) - N(l_1^-,t)w'(l_1^-,t) = -N(l_1^+,t) \\ M'(l_1^+,t) - N(l_1^+,t)w'(l_1^+,t) = N(l_1^-,t) \end{cases} \quad t \in (0, \infty)$$

i warunkami początkowymi:

$$(3.42) \quad \begin{cases} u(x,0) = w(x,0) = u(x,0) = 0 & x \in \langle 0, l \rangle \\ \dot{w}(x,0) = 0 & x \in \langle 0, l_1 \rangle \\ \dot{w}(x,0) = \nabla_0 & x \in \langle l_1, l \rangle \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu w postaci zamkniętej jest bardzo trudne. Pozostaje tylko droga numeryczna. Żeby oszacować przemieszczenie poprzeczne w środku rygła, rozważmy układ obciążony statycznie siłą 2P jak na rysunku 8.



Rys.10. Obciążenie ramy w pomocniczym problemie statycznym. Przeszyczenia tego układu opisane są układem równań różniczkowych postaci:

$$(3.43) \quad \begin{cases} M_x'' - (N_x w_x')' = 0 \\ N_x' = 0 \\ M_x = EJ w_x'' \\ u_x' + \frac{1}{2} w_x'^2 = 0 \end{cases} \quad x \in (0, l),$$

z warunkami brzegowymi:

$$(3.44) \quad \begin{cases} w_x(0) = w_x'(0) = u_x(0) = 0 \\ w_x'(l) = u_x(l) = 0 \\ M_x'(l) - N_x(l) w_x(l) = -P \\ w_x(l_1^-) = u_x(l_1^+) \\ u_x(l_1^-) = w_x(l_1^+) \\ w_x'(l_1^-) = w_x'(l_1^+) \\ M_x(l_1^-) = M(l_1^+) \\ M_x'(l_1^-) - N_x(l_1^-) w_x'(l_1^-) = -N(l_1^+) \\ M_x'(l_1^+) - N_x(l_1^+) w_x'(l_1^+) = N_x(l_1^-) \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu można znaleźć w postaci uwi-
kłej. Odpowiednie wzory są jednak bardzo skomplikowane i
nie będziemy ich przytaczać. Rozwiązanie to pozwala określić
zależność reakcji poziomej H od obciążenia P. Można wykazać,
że nierówność (2.15) przyjmie w tym przypadku postać:

$$(3.45) \quad 2P(W(l,t) - W_x(l)) \leq X_0 - W_x - R(W, W_x),$$

gdzie:

$$W_x = \frac{1}{2} \int_0^l EJ W_x^2 dx,$$

$$R(W, W_x) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (W'' - W_x')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l P (W' - W_x')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l H (W' - W_x')^2 dx.$$

Oznaczmy przez $\delta W = W - W_x$, to funkcjonal R przyjmie postać

$$(3.46) \quad R(\delta W) = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (\delta W'')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l P (\delta W')^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l H (\delta W')^2 dx$$

gdzie δW spełnia takie same warunki kinematyczne jak fun-
kcja w lub w_x . Jeśli dla każdego δW funkcjonal (3.46) będzie
nieujemny, to człon R w wyrażeniu (3.45) można pominąć bez
naruszenia znaku nierówności i otrzymamy nierówność szacującą.
Z warunków brzegowych oraz z ciągłości kątów i momentów w
punkcie $x = l_1$ wynika, że funkcje $\delta W'$ i $\delta W''$ są ciągłe a
ponadto $\delta W'(0) = \delta W'(l) = 0$, zatem funkcję $\delta W'$ można rozwi-
nać w przedziale $\langle 0, l \rangle$ w sinusowy szereg Fouriera, więc:

$$(3.47) \quad \delta W' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

gdzie: A_n - ciąg liczbowy.

Różniczkując związek (3.47) mamy

$$(3.48) \quad \delta W'' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Korzystając z ortogonalności funkcji $\sin \frac{n\pi x}{l}$ i $\cos \frac{n\pi x}{l}$ na przedziale $\langle 0, l \rangle$ można pokazać, że:

$$(3.49) \quad \int_0^l (\delta w'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2, \quad \int_0^l (\delta w''')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A_n^2,$$

stąd oczywista jest nierówność

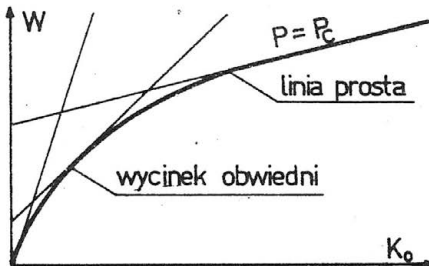
$$(3.50) \quad \int_0^l (\delta w''')^2 dx \geq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \int_0^l (\delta w'')^2 dx.$$

Korzystając z nierówności (3.44) można pokazać, że

$$(3.51) \quad R(\delta w) \geq \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{EJ\pi^2}{l^2} - P\right) \delta w'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{EJ\pi^2}{l^2} - H\right) \delta w''^2 dx.$$

Jeśli zachodzą warunki $P \leq EJ\pi^2/l^2$ i $H \leq EJ\pi^2/l^2$, to wyrażenie (3.46) jest nieujemne. Jest to warunek wystarczający. Warunki konieczne nieujemności R są słabsze, ale nie udało się ich uzyskać.

Otrzymaliśmy zatem bardzo ciekawy wynik, który umożliwia znajdowanie oszacowań na ugięcia dynamiczne, w przypadku występowania konfiguracji obciążenia mającego prowadzić do niestabilności konstrukcji. Tu, podobnie jak w ogólnym przypadku, związek (3.45) reprezentuje dla zadanego P linię prostą na płaszczyźnie w, K_0 . Klasa obciążeń nie jest jednak dowolna ponieważ siła statyczna spełniać musi warunek $P \leq P_c$. Ilustracją tej sytuacji jest rys.11.



Rys.11. Znajdowanie oszacowań w przypadku występowania niestępczości.

4. Uwagi końcowe.

W przedstawionej pracy podana została ścisła ogólna teoria oszacowań dużych przemieszczeń sprężystych dla ciał poddanych obciążeniu dynamicznemu. Znalezienie maksymalnych przemieszczeń zostało sprowadzone do rozwiązania odpowiedniego problemu statycznego. Nakład pracy przy takim podejściu jest dużo mniejszy lecz stosowalność omawianego podejścia jest ograniczona do przypadków, dla których statyczne rozwiązanie problemu dużych ugięć jest znane. W przypadku konstrukcji prętowych, dla umiarkowanych ugięć, takie rozwiązanie można zawsze znaleźć. Stan statyczny nie może być dowolny, lecz ograniczony do przypadków, dla których przyrost energii potencjalnej od tego stanu na dowolnym przemieszczeniu jest nieujemny. Warunek ten, przy założeniu kwadratowej funkcji energii sprężystej, związany jest ze stabilnością stanu statycznego w normie "całkowej". Mianowicie, w teorii stabilności żądanie dodatniej określoności funkcjonału Lapunowa w sensie normy całkowitej zapewnia spełnienie powyższego warunku, lecz nie odwrotnie. Należy zaznaczyć, że górne oszacowanie przemieszczenia nie zależy od rozkładu pola prędkości początkowej w ciele lecz tylko od całkowitej początkowej energii kinetycznej. Z tego względu najlepszą dokładność oszacowania przemieszczeń w danym punkcie ciała uzyskujemy wtedy gdy pole prędkości początkowej jest tak rozłożone, że powoduje największe przemieszczenia rzeczywiste w tym punkcie. Analizując przykłady liczbowe przedstawione w pracy dla zilustrowania metody należy stwierdzić bardzo dobrą zgodność z naliczonymi ścisłymi rozwiązaniami.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J.B. Martin, A Displacement Bound Technique for Elastic Continua subjected to a Certain Class of Dynamic Loading. J.Mech.Phys.Solids, vol 12, 1964, 165-176.
2. J.B. Martin, Displacement Bounds for Dynamically Loaded Elastic Structures, J.Mech.Eng.Sc. 10, 3, 1968, 213-218.
3. T. Wierzbicki, Duże ugięcia konstrukcji obciążonych dynamicznie. Przegląd krytyczny stosowanych metod. Rozprawy inżynierskie 24, 2, 405-432, 176.
4. R.H. Plaut, A Study of the Dynamic Stability of Continuous Elastic Systems by Lapunov's Direct Method, University of California Berkeley Report No AM-67-3. May 1967.
5. J. Ploch, Badanie stabilności ciał sprężystych za pomocą metody Lapunowa, Prace IPPT 1978.
6. J. Ploch, T. Wierzbicki, Oszacowania dużych niesprężystych deformacji dynamicznie obciążonych konstrukcji, III Sympozjum Dynamiki i Stateczności Konstrukcji, Rzeszów, październik 1976.
7. S. Woinowsky-Krieger, The Effect of Axial Force on the Vibration of Hinged Bars, J.Appl.Mech.1950, 17, 36.
8. P.S. Symonds, C.T. Chon, Large Viscoplastic Deflections of Impulsively Loaded Plane Frames, Brown University, Report, Division of Engineering, November 1977.