

1 / 1979

Agnieszka Muszyńska

**WPLYW TARCIA SUCHEGO ORAZ ZDERZEŃ
NA TŁUMIENIE DŹGAŃ
PEWNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO**



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 11 stycznia 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 1/1979



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark. wyd. 1,3. Ark. druk. 2.

Oddano do drukarni w styczniu 1979 r.

Nr zamówienia 59/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Agnieszka Muszyńska
Zakład Układów Mechanicznych

WPLYW TARCIA SUCHEGO ORAZ ZDERZEŃ NA TŁUMIENIE DRGAŃ PEWNEGO UKŁADU MECHANICZNEGO

1. Wstęp

Rozproszenie energii nieuchronnie towarzyszy ruchowi elementów układów mechanicznych. Rozproszenie to spowodowane jest z jednej strony przez zjawiska przebiegające wewnątrz odkształczanych elementów, z drugiej strony przez zjawiska powierzchniowe. Do pierwszej grupy, zwanej tłumieniem wewnętrznym należą zjawiska mikroskopowe wywoływane mechanizmami cieplnymi, magnetycznymi, atomowymi [1]. Do drugiej grupy, zwanej tłumieniem zewnętrznym, zalicza się zjawiska towarzyszące ruchowi ciał stałych względem siebie i względem otaczającego środowiska. Zjawiska te zależą od charakteru środowiska, różnią się więc tarcie hydro lub aerodynamiczne, tarcie suche. Ponadto do grupy tej zaliczyć można zjawisko rozproszenia energii powodowane przez zderzenia ciał stałych. Oczywiście podział na zjawiska wewnętrzne i powierzchniowe należy traktować umownie. Przykładem takiej umowności mogą służyć elementy mechaniczne wykonane z kompozytów [2].

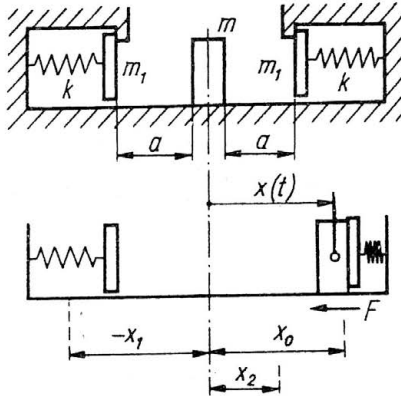
Problemy rozproszenia energii mechanicznej od wielu lat są tematem licznych prac badawczych. Niestety brak dotychczas koherentnej, pełnej i doświadczalnie zweryfikowanej teorii. W szczególności rozproszenie energii powodowane przez zderzenia występujące w układach mechanicznych z luzami, jest bardzo mało zbadane [3-6].

W niniejszym artykule, na przykładzie ruchu prostego układu mechanicznego analizuje się rozproszenie energii mechanicznej wywołane dwoma jednocześnie istniejącymi zjawiskami po-

wierzchniowymi: tarciem suchym i zderzeniami.

2. Model. Założenia.

Rozpatruje się płaski, symetryczny układ złożony z trzech sztywnych brył o masach m , m_1 i z dwóch sprężyn o liniowych charakterystykach sprężystości (k - współczynnik sztywności).



Rys. 1

Zakłada się, że sprężyny są wstępnie napięte i siła sprężystości w skrajnych położeniach brył wynosi ka . Bryła o masie m może przesuwac się między bryłami zderzakowymi. Zakłada się, że w momencie czasu $t=0$ bryła m_1 znajduje się w położeniu początkowym x_0 ($x_0 > a$) i rozpoczyna ruch w lewo z zerową prędkością początkową. Ruchowi temu towarzyszy tarcie suche, modelowane tarciem Coulomba o stałej wartości siły F . Po przejściu dystansu $x_0 + a$ bryła m dosięga lewego zderzaka, który był dotychczas nieruchomy i następuje seria zderzeń. Zakłada się, że zderzenia te przebiegają w czasie zaniedbywalnie krótkim w stosunku do czasu przebiegu drogi $x_0 + a$. Nie uwzględnia się więc procesu przejściowego zderzeń, lecz jedynie ich efekt finalny: obie bryły stykają się ze sobą i przesuwają się razem dalej w lewo z prędkością w sposób natychmia-

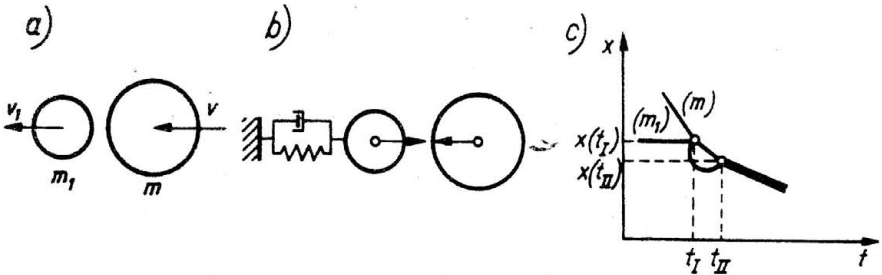
stowy, zredukowaną w momencie zderzenia. Wprowadza się współczynnik \mathcal{R} ($0 \leq \mathcal{R} \leq 1$), opisujący stosunek między prędkościami bryły m po i przed zderzeniem. Współczynnik ten opisuje więc stratę prędkości spowodowaną zderzeniem.

Obie bryły kontynuują przemieszczanie się w lewo do położenia skrajnego $-x_1$ ($x_1 > a$), a następnie w prawo. W położeniu $x = -a$ bryła zderzaka odłącza się, a bryła środkowa przemieszcza się dalej w prawo, w kierunku drugiego zderzaka, który w międzyczasie został unieruchomiony. Następuje znów podobny efekt zderzeń, któremu towarzyszy zmniejszenie prędkości \mathcal{R} razy, następnie obie bryły kontynuują wspólnie ruch w prawo do prawego położenia skrajnego x_2 ($a < x_2 < x_0$). Następnie poszczególne fazy ruchu powtarzają się.

Tłumienie ruchu będziemy oszacowywać z pomocą dekrementu logarytmicznego: $\delta = \ln(x_0/x_2)$.

3. Oszacowanie współczynnika strat wskutek zderzeń.

Rozpatruje się zderzenie środkowe dwóch brył sztywnych o masach m, m_1 , przemieszczających się z prędkościami $v(t)$, $v_1(t)$ ($v > v_1$) (Rys.2). Przyjmuje się, że przed zderzeniem



Rys. 2

w chwili t_1 prędkości te są $v(t_1 - 0)$, $v_1(t_1 - 0)$.
Zgodnie z hipotezą Newtona mamy:

$$(1) \quad v(t_1 + 0) - v_1(t_1 + 0) = -e [v(t_1 - 0) - v_1(t_1 - 0)],$$

gdzie $v(t_1 + 0)$, $v_1(t_1 + 0)$ przedstawiają prędkości po zderzeniu a e - współczynnik restytucji ($0 \leq e \leq 1$).

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy:

$$(2) \quad m v(t_1 + 0) + m_1 v_1(t_1 + 0) = m v(t_1 - 0) + m_1 v_1(t_1 - 0).$$

Na podstawie (1) i (2) otrzymujemy:

$$v(t_1 + 0) = \frac{v(t_1 - 0) + \eta v_1(t_1 - 0) - e\eta [v(t_1 - 0) - v_1(t_1 - 0)]}{1 + \eta},$$

$$v_1(t_1 + 0) = \frac{v(t_1 - 0) + \eta v_1(t_1 - 0) + e [v(t_1 - 0) - v_1(t_1 - 0)]}{1 + \eta},$$

gdzie

$$\eta = \frac{m_1}{m}.$$

Wprowadzamy następujące założenia:

- a/ po zderzeniu bryła m_1 początkowo odbija się w lewo, następnie wskutek działania zewnętrznych sił, powraca w kierunku bryły m , która w międzyczasie przesuwała się ciągle w lewo. Zakłada się, że czas tego przebiegu i przebyta droga są zaniedbywalnie małe (Rys.2);
- b/ w bardzo krótkim czasie następuje drugie zderzenie;
- c/ odpowiednie prędkości są:

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{bryła } m : & v(t_2 - 0) = v(t_1 + 0), \\ \text{bryła } m_1 : & v_1(t_2 - 0) = -v_1(t_1 + 0), \end{array}$$

z oczywistym warunkiem

$$v(t_1 + 0) > 0.$$

Dla uproszczenia dalszej analizy założymy, że przed pierwszym zderzeniem bryła m_1 była nieruchoma $[v_1(t_1 - 0) = 0]$.

Na podstawie uczynionych wyżej założeń otrzymujemy wyrażenia opisujące prędkości brył po drugim zderzeniu:

$$(4) \quad v(t_2 + 0) = v(t_1 - 0) \frac{(1 - e\eta)^2 - \eta(1 + e)^2}{(1 + \eta)^2},$$

$$v_1(t_2 + 0) = v(t_1 - 0) \frac{(1 - \eta)(1 + e)^2}{(1 + \eta)^2}.$$

Aby po drugim zderzeniu ruch bryły m przebiegał dalej w lewo, prędkość $v(t_2 + 0)$ powinna być dodatnia, stąd:

$$(1 - e\eta)^2 - \eta(1 + e)^2 > 0,$$

i dalej

$$(5) \quad \eta < \frac{(1 + e)^2 + 2e - (1 + e)\sqrt{(1 + e)^2 + 4e}}{2e^2} \equiv \eta^*.$$

Dla $e \neq 0$ wartość η^* jest zawsze mniejsza od jedności. Po drugim zderzeniu energia kinetyczna ma następującą postać:

$$(6) \quad T(t_2 + 0) = \frac{1}{2} \left[m v^2(t_2 + 0) + m_1 v_1^2(t_2 + 0) \right],$$

podczas gdy przed zderzeniami miała:

$$(7) \quad T(t_1 - 0) = \frac{1}{2} m v^2(t_1 - 0).$$

Względną stratę energii można więc zapisać następująco:

$$(8) \quad \Delta T = 1 - \frac{T(t_2 + 0)}{T(t_1 - 0)}.$$

Wprowadzamy współczynnik strat wskutek zderzenia w następującej postaci:

$$\mathcal{R} = 1 - \sqrt{\Delta T}.$$

Uwzględniając (6) - (8) otrzymujemy:

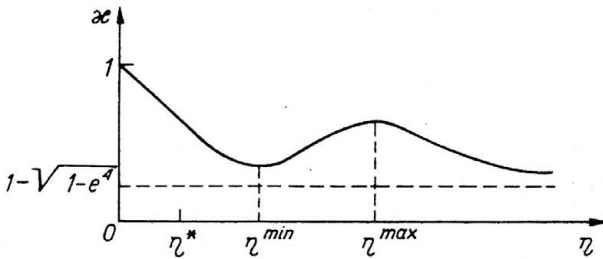
$$(9) \quad \mathcal{R} = 1 - \sqrt{\frac{\eta(1-e^2)}{(1+\eta)^3} \left[\eta^2(1+e)^2 - 2\eta(e^2 + 2e - 1) + e^2 + 4e + 5 \right]}.$$

Wyrażenie to jest słuszne dla wartości η nie przekraczających η^* opisaną wzorem (5).

Tak więc, oszacowany został współczynnik strat wskutek zderzenia, \mathcal{R} przy założeniu, że miały miejsce dwa kolejne zderzenia w czasie zaniebýwalnie krótkim. Współczynnik \mathcal{R} zależy od dwóch wielkości: η i e .

Zanalizujemy przebieg funkcji $\mathcal{R}(\eta, e)$.

Rozwiązanie równania $\partial \mathcal{R} / \partial \eta = 0$ prowadzi do dwóch wartości η , dla których \mathcal{R} ma maksimum i minimum (Rys.3).



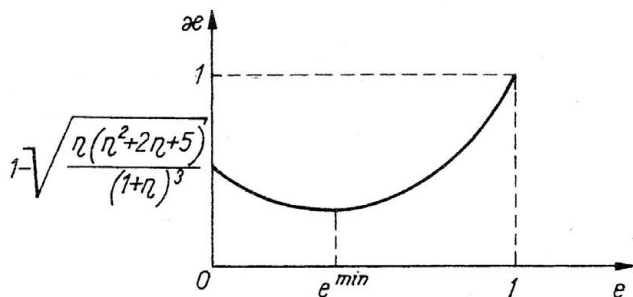
Rys. 3

Wartość graniczna η^* leży poniżej η^{\min} .

Z równania $\partial \mathcal{R} / \partial e = 0$ otrzymujemy następującą zależność:

$$e^3(1 - \eta)^2 + 3e^2(1 - \eta) + 2e(1 + \eta) - 1 + \eta = 0.$$

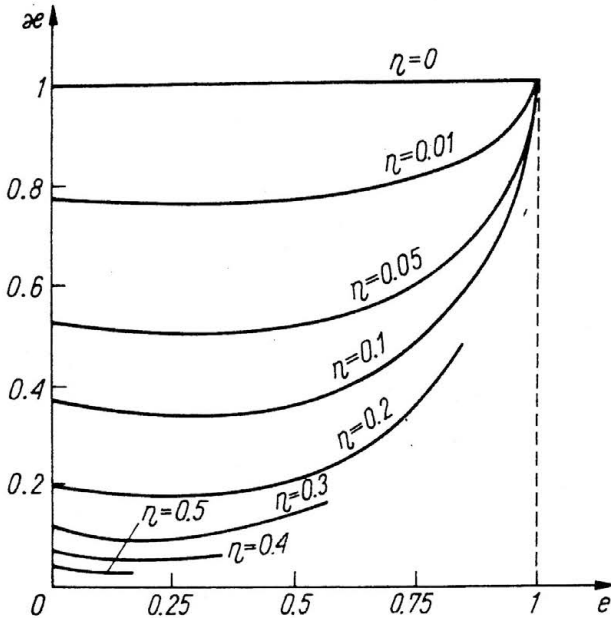
Dla wartości $0 \leq \eta \leq \eta^* < 1$ równanie to ma jeden pierwiastek dodatni e^{\min} (zależny od wartości η), określający minimum funkcji $\mathcal{R}(e)$. Na rysunkach 4, 5 przedstawiono tę funkcję.



Rys. 4

Dla niewielkich wartości η współczynnik \mathcal{R} ma minimum przy $e \approx 0.3$. Dla większych wartości η , przy $e \approx 0.1$. Na rysunku 5 widać, że wartość współczynnika \mathcal{R} zależy w sposób istotny od η , a dla $e < 0.5$ jest prawie niezależna od e .

Dla $\eta > 0.5$ współczynnik \mathcal{R} praktycznie nie przekracza 0.03 i jest słuszny jedynie przy $e \leq 0.1$. Zgodnie z przyjętymi założeniami wprowadzony model może być stosowany jedynie w przypadku niewielkich mas zderzaków, w porównaniu do masy środkowej ($\eta < 0.2$).



Rys. 5

4. Równania ruchu układu. Rozwiązanie szczególne.

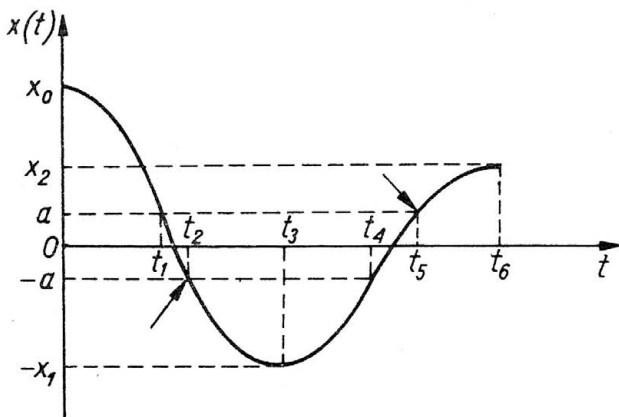
Dekrement logarytmiczny tłumienia.

Zgodnie z przyjętymi założeniami równanie ruchu układu bez uwzględniania zderzeń zapisuje się w następującej postaci:

$$(10) \quad \left\{ m + \frac{m_1}{2} [1 + \text{sign}(|x| - a)] \right\} \ddot{x} + \frac{kx}{2} [1 + \text{sign}(|x| - a)] + F \text{sign}(\dot{x}) = 0 .$$

Równanie (10) jest nieliniowe. Poszukujemy jego rozwiązania szczególnego stosując metodę "zszywania". Odpowiednie warunki początkowe dla poszczególnych faz ruchu są następujące (Rys.6):

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & x(0) = x_0 & \dot{x}(0) &= 0 \\
 & x(t_1) = a & \dot{x}(t_2 + 0) &= \mathcal{R} \dot{x}(t_2 - 0) \\
 & x(t_2) = -a & \dot{x}(t_3) &= 0 \\
 & x(t_3) = -x_1 & \dot{x}(t_5 + 0) &= \mathcal{R} \dot{x}(t_5 - 0) \\
 & x(t_4) = -a & \dot{x}(t_6) &= 0 \\
 & x(t_5) = a & & \\
 & x(t_6) = x_2 . & &
 \end{aligned}$$



Rys. 6

Effekt zderzeń został uwzględniony w warunkach (11) ;

\mathcal{R} przedstawia omówiony poprzednio współczynnik strat. Tak więc zależności (10) , (11) przedstawiają pełny model układu .

Rozróżniamy następujące fazy ruchu:

- 1: $t \in [0, t_1]$: działają siły tarcia suchego i sprężystości. dwie bryły razem realizują ruch;
- 2: $t \in [t_1, t_2]$: ruch bryły m_1 . Działa siła tarcia suchego. W momencie $t = t_2$ następuje zderzenie i bryły m i m_1 łączą się;
- 3: $t \in [t_2, t_4]$: jak w fazie 1. W momencie $t = t_4$ bryły się rozłączają;

- 4: $t \in [t_4, t_5]$: jak w fazie 2. W chwili $t = t_5$ następuje zderzenie;
 5: $t \in [t_5, t_6]$: jak w fazie 1;
 6: $t > t_6$: powtórzenie faz 1 - 5 ...

Wprowadzamy następujące oznaczenia (współczynniki bezwymiarowe) :

$$(12) \quad \mu = \frac{F}{k x_0}, \quad s = \frac{a}{x_0}.$$

Poszukujemy rozwiązań szczególnych w poszczególnych fazach ruchu, a następnie otrzymujemy logarytmiczny dekrement tłumienia

$$(13) \quad \delta = \ln \frac{x_0}{x_2},$$

gdzie x_0 jest wychyleniem początkowym, x_2 wychyleniem brył $m + m_1$ w chwili $t = t_6$.

$t \in [0, t_1]$:

$$x = \left(x_0 - \frac{F}{k}\right) \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t + \frac{F}{k}, \quad M = m + m_1,$$

$$(14) \quad \dot{x}(t_1) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{(1-s)(1+s-2\mu)},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{M}{k}} \arccos \frac{s-\mu}{1-\mu};$$

$t \in [t_1, t_2]$:

$$x = \frac{Ft^2}{2m} + \left[\dot{x}(t_1) - \frac{Ft_1}{m}\right] t + x_0 s + \frac{Ft_1^2}{2m} - \dot{x}(t_1) \cdot t_1,$$

$$(15) \quad t_2 = t_1 - \frac{m}{F} \dot{x}(t_1) - \sqrt{\left[\frac{m}{F} \dot{x}(t_1)\right]^2 - \frac{4msx_0}{F}},$$

$$(16) \quad \dot{x}(t_2 - 0) = -\sqrt{\left[\dot{x}(t_1)\right]^2 - \frac{4Fsx_0}{m}};$$

$t \in [t_2, t_3]$:

$$x = -x_0 (s + \mu) \cos \sqrt{\frac{k}{M}} (t - t_2) + \mathcal{R} \sqrt{\frac{M}{k}} \dot{x}(t_2) \sin \sqrt{\frac{k}{M}} (t - t_2) - \mu x_0, \quad ;$$

$$t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{M}{k}} \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{R} \dot{x}(t_2)}{-x_0 (s + \mu)} \sqrt{\frac{M}{k}},$$

$$(17) \quad x_1 = x_0 \sqrt{\left[(1 - \mathcal{R}^2) s (s + 2\mu) + \mu^2 + \mathcal{R}^2 (1 - 2\mu) - 4s\mathcal{R}^2 - u \right]}$$

$t \in [t_3, t_4]$:

$$x = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0} + \mu \right) \cos \sqrt{\frac{k}{M}} (t - t_3) - \mu x_0, \quad ;$$

$$t_4 = t_3 + \sqrt{\frac{M}{k}} \operatorname{arccos} \frac{\mu - s}{\frac{x_1}{x_0} + \mu}, \quad ;$$

$$(18) \quad \dot{x}(t_4) = x_0 \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{x_1}{x_0} + s \right) - s^2} \quad ;$$

$t \in [t_4, t_5]$:

$$x = -\frac{F}{2m} t^2 + \left[\dot{x}(t_4) + \frac{F}{m} t_4 \right] t - x_0 s - \frac{F}{2m} t_4^2 - t_4 \dot{x}(t_4), \quad ;$$

$$(19) \quad t_5 = t_4 + \frac{m}{F} \dot{x}(t_4) - \frac{m}{F} \sqrt{\left[\dot{x}(t_4) \right]^2 - \frac{4 F x_0 s}{m}}, \quad ;$$

$$(20) \quad \dot{x}(t_5 - 0) = \sqrt{\left[\dot{x}(t_4) \right]^2 - \frac{4 F x_0 s}{m}} \quad ;$$

$t \in [t_5, t_6]$:

$$x = x_0 (s + \mu) \cos \sqrt{\frac{k}{M}} (t - t_5) + \mathcal{R} \sqrt{\frac{M}{k}} \dot{x}(t_5) \sin \sqrt{\frac{k}{M}} (t - t_5) - \mu x_0,$$

$$(21) \quad x_2 = x_0 \left[s(s + 2\mu)(1 - \mathcal{R}^4) + \mu^2(1 + 4\mathcal{R}^2) + \mathcal{R}^4(1 - 2\mu) - 4\mu s \mathcal{R}^2 \eta(1 + \mathcal{R}^2) - 4\mu \mathcal{R}^2 \sqrt{(1 - \mathcal{R}^2)s(s + 2\mu) + \mu^2 + \mathcal{R}^2(1 - 2\mu) - 4s\mathcal{R}^2\mu\eta} \right] - \mu x_0.$$

Ostatecznie dekrement logarytmiczny tłumienia ma następującą postać:

$$(22) \quad \delta = \ln \frac{1}{\sqrt{f_1 - 4\mu\mathcal{R}^2\sqrt{f_2} - \mu}},$$

gdzie

$$f_1 = s(s + 2\mu)(1 - \mathcal{R}^4) + \mu^2(1 + 4\mathcal{R}^2) + \mathcal{R}^4(1 - 2\mu) - 4s\mu\eta\mathcal{R}^2(1 + \mathcal{R}^2),$$

$$f_2 = s(s + 2\mu)(1 - \mathcal{R}^2) + \mu^2 + \mathcal{R}^2(1 - 2\mu) - 4s\mu\eta\mathcal{R}^2$$

oraz \mathcal{R} jest wyrażone przez (9).

Określimy teraz granice stosowalności wzoru (22) zgodnie z wprowadzonymi założeniami.

Moment t_2 nie mógłby być wyznaczony o ile wyrażenie podpierwiastkowe w (15) byłoby ujemne, stąd konieczny warunek:

$$\left[\frac{m}{F} \dot{x}(t_1) \right]^2 > \frac{4msx_0}{F},$$

a uwzględniając (13) i (14) otrzymujemy:

$$(23) \quad (1 + s)(1 - s - 2\mu) - 4 s \mu \eta > 0.$$

Wartość ekstremalna przemieszczenia w lewo będzie ujemna (zgodnie z przyjętym układem odniesienia) gdy:

$$\sqrt{(s + \mu)^2 + \frac{M}{x_0^2 k} \mathcal{R}^2 [\dot{x}(t_2)]^2} > \mu.$$

Uwzględniając (13) i (16) otrzymujemy:

$$(24) \quad s(1 - \mathcal{R}^2)(s + 2\mu) + \mathcal{R}^2(1 - 2\mu) - 4\eta s \mu \mathcal{R}^2 > 0.$$

Aby móc wyznaczyć moment t_5 , wyrażenie podpierwiastkowe w (18) musi być dodatnie:

$$[\dot{x}(t_4)]^2 > \frac{4 F s x_0}{m}$$

i uwzględniając (13) i (18) otrzymujemy:

$$(25) \quad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - s^2 - 2\mu \left(\frac{x_1}{x_0} - s\right) - 4 s \mu (1 + \eta) > 0.$$

Wychylenie maksymalne po przebiegu jednego cyklu będzie dodatnie gdy:

$$\sqrt{(s + \mu)^2 + \frac{M}{kx_0^2} \mathcal{R}^2 [\dot{x}(t_5)]^2} > \mu$$

i uwzględniając (13) i (20) otrzymujemy:

$$(26) \quad s(2\mu + s) + \mathcal{R}^2 \left[\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - s^2 + 2\mu \left(\frac{x_1}{x_0} + s\right) - 4s(1 + \eta) \right] > 0.$$

Układ nierówności (23) - (26) wyznacza granice stosowalności wzoru (22). Uwzględniając (17), nierówności te można zapisać w postaci jednego warunku:

$$(27) \quad \sqrt{(s + \mu)^2 (1 - \mathcal{R}^2) + \mathcal{R}^2 (1 - \mu)^2 - 4 s \mathcal{R}^2 \mu \eta} > 2\mu + \sqrt{(s + \mu)^2 + 4 s \mu \eta} .$$

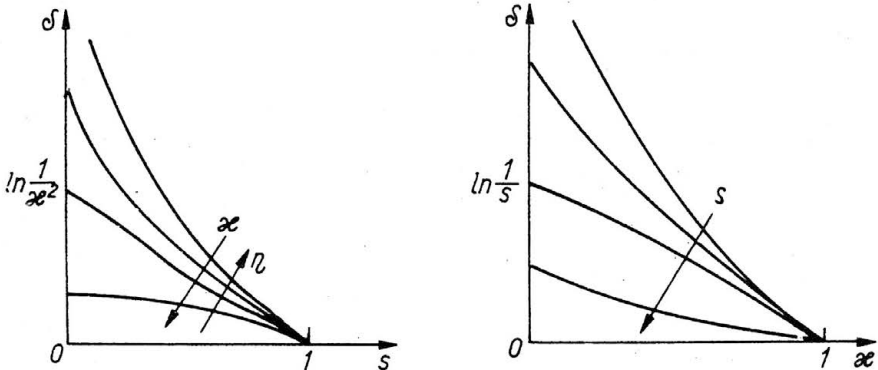
Ostatecznie więc wzór (22) wyrażający logarytmiczny dekrement tłumienia może być wykorzystany, o ile nierówności (5) i (27) będą spełnione. Nierówności te wiążą wszystkie parametry układu w postaci czterech bezwymiarowych współczynników: s , μ , \mathcal{R} , η .

Rozpatrzmy niektóre przypadki szczególne.

(a) $\mu = 0$ (ruch bez tarcia). Dekrement logarytmiczny ma następującą postać:

$$(28) \quad \delta = \ln \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}^4 (1 - s^2) + s^2}}$$

z warunkiem $s < 1$, zgodnie z (27). Warunek (5) jest spełniony. Zależność (28) przedstawiona jest na rysunku 7.



Rys. 7 ($\mu=0$)

(b) $\bar{\mathcal{E}} = 1$ (ruch bez strat energii wskutek zderzeń).
Przypadek ten odpowiada wartości $e = 1$ (zderzenie sprężyste) lub $\eta = 0$ (zerowe masy zderzaków). Dla $e = 1$ otrzymujemy:

$$(29) \quad \delta = \ln \frac{1}{\sqrt{(2\mu - \sqrt{(1-\mu)^2 - 4s\mu\eta})^2 - 4s\mu\eta} - \mu}$$

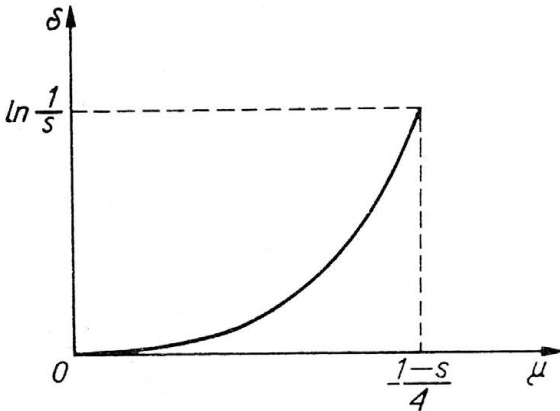
z warunkami $\eta < 3 - 2\sqrt{2}$ wynikającymi z (5) i

$$\sqrt{(1-\mu)^2 - 4s\mu\eta} > 2 + \sqrt{(s+\mu)^2 + 4s\mu\eta}$$

z (27). Dla $\eta = 0$ mamy

$$(30) \quad \delta = \ln \frac{1}{1-4\mu}$$

z warunkiem $4\mu < 1-s$, wynikającym z (27). Zależność (30) przedstawiona została na rysunku 8.



Rys. 8

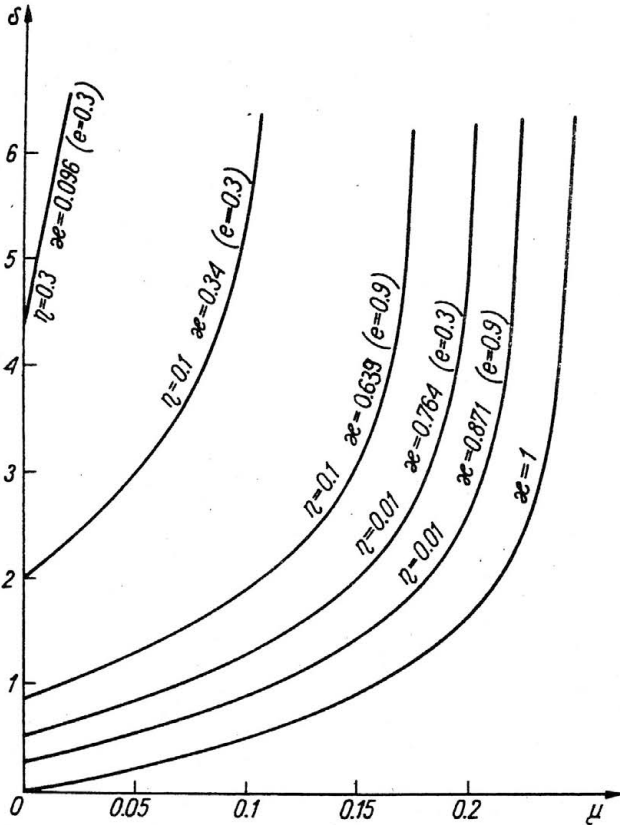
(c) $s = 0$ (brak luzu wstępnego). Na podstawie (27) otrzymujemy warunek:

$$(31) \quad \mu < \frac{\alpha}{8} \left(\sqrt{\alpha^2 + 8} - \alpha \right),$$

a dekrement logarytmiczny przedstawia się następująco:

$$(32) \quad \delta = \ln \frac{1}{\sqrt{(2\mu\alpha^2 - \sqrt{\mu^2 + \alpha^2(1-2\mu)})^2 + \alpha^2(1-\alpha^2)(4\mu^2 + 2\mu - 1)} - \mu}$$

Odpowiednie zależności ilustruje rysunek 9. Jeżeli dodatkowo

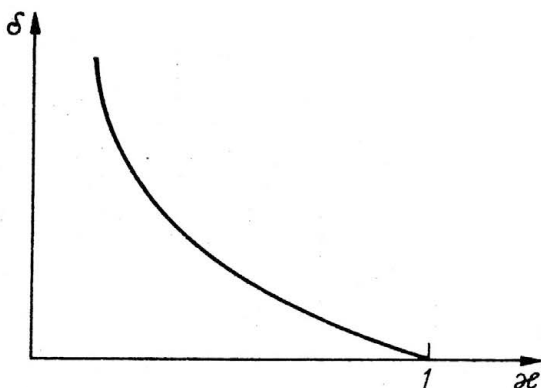


Rys. 9 ($s=0$)

mamy $\mu = 0$, wtedy

$$\delta = \ln \frac{1}{\mathcal{R}^2}$$

i warunek (31) jest spełniony automatycznie. Dla stosowalności (32) i (33) pozostaje jeszcze warunek (5). Na rysunku 10 przedstawiona została zależność (33).

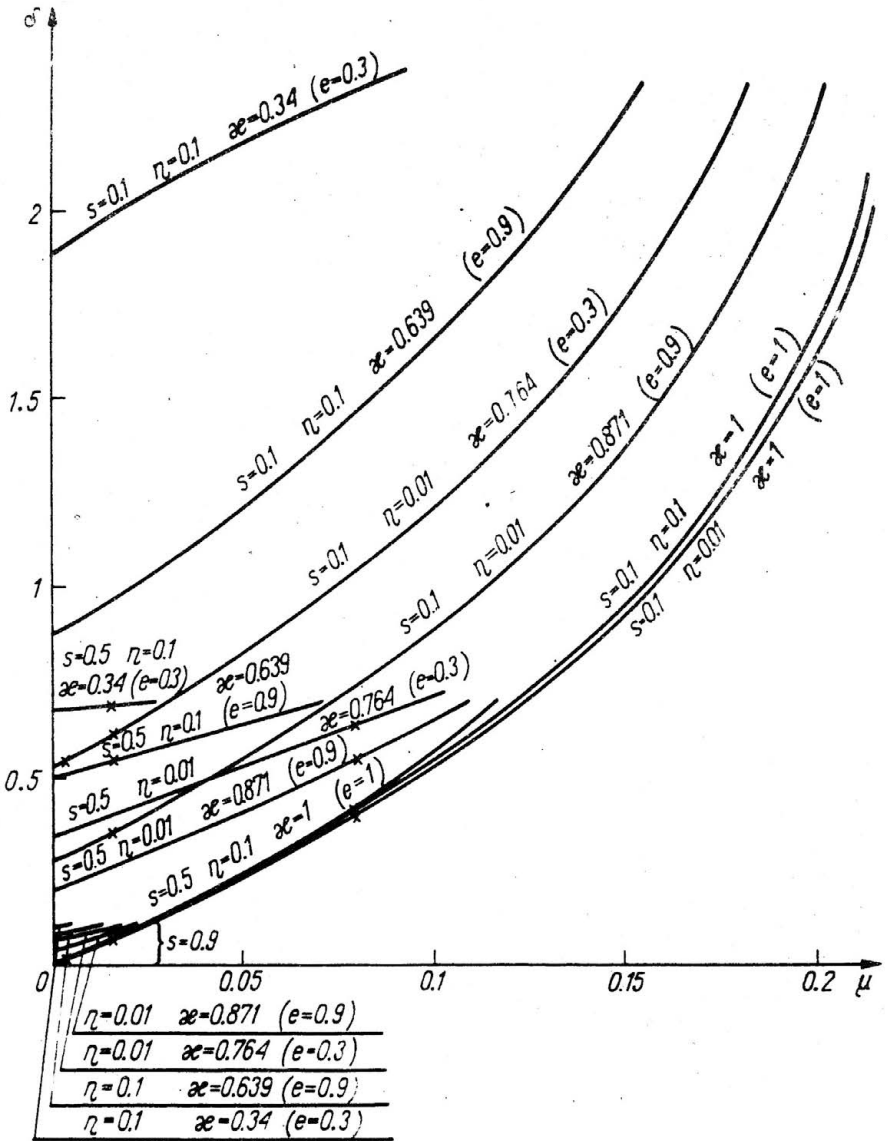


Rys. 10 ($s=0, \mu=0$).

5. Obliczenia numeryczne. Wnioski.

Dla kilku wartości współczynników μ , \mathcal{R} , s , η wyznaczamy logarytmiczny dekrement tłumienia (22). Wyniki zestawione zostały na rysunkach 9 i 11. Współczynnik \mathcal{R} został wyznaczony na podstawie wyrażenia (9) dla różnych wartości współczynnika restytucji e . Nierówności (5) i (27) wyznaczają zakresy parametrów, a więc i granice krzywych δ (rys.11).

Rozproszenie energii mechanicznej, spowodowane jest dwoma zjawiskami: tarcie suchym i zderzeniami (jeżeli $\mu = 0$ i $\mathcal{R} = 1$ mamy $\delta = 0$, a więc nie ma rozproszenia). Dekrement logarytmiczny wyznaczony dla $\mathcal{R} = 1$ (wzór (29)) opisuje rozproszenie energii wskutek tarcia suchego. W obu przypadkach na wartość dekrementu wpływają współczynniki s i η .



Rys. 11

Ocenimy procentowy udział tarcia suchego w globalnej charakterystyce tłumienia wprowadzając następujące wyrażenie:

$$\frac{\delta - \delta(\mu = 0)}{\delta} 100\%,$$

gdzie δ jest wyrażone przez (22), a $\delta(\mu = 0)$ przez (28). Procentowy udział rozproszenia wskutek zderzeń przedstawiamy następująco:

$$\frac{\delta - \delta(\mathcal{R} = 1)}{\delta} 100\%,$$

gdzie $\delta(\mathcal{R} = 1)$ jest wyrażone przez (29). Jeżeli porównamy sumę efektów $\delta(\mu = 0) + \delta(\mathcal{R} = 1)$ z wartością δ dla każdego zbioru parametrów μ, \mathcal{R}, s i η zauważamy następującą zależność od wartości względnego luzu s :

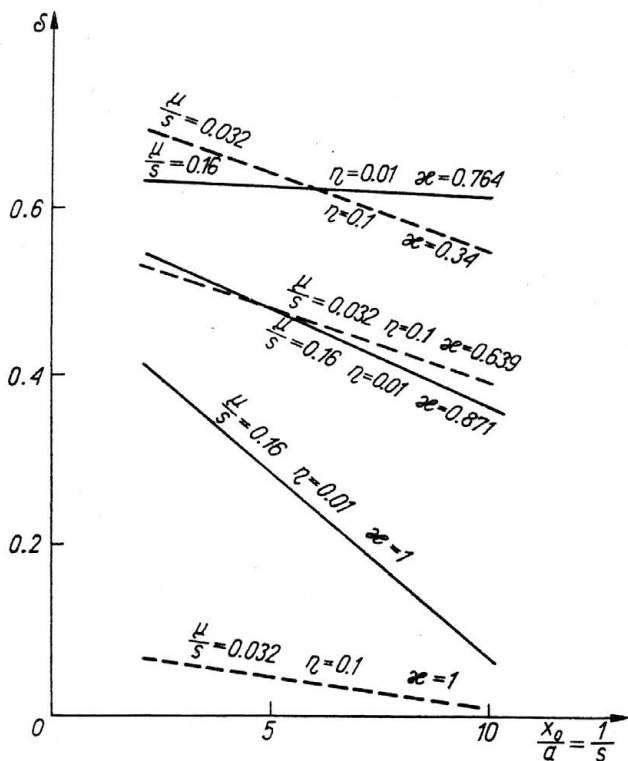
$$(34) \quad \begin{aligned} \delta(\mu = 0) + \delta(\mathcal{R} = 1) &< \delta(\mu, s, \mathcal{R}, \eta) \text{ dla } s \leq 0.1, \\ \delta(\mu = 0) + \delta(\mathcal{R} = 1) &> \delta(\mu, s, \mathcal{R}, \eta) \text{ dla } s \geq 0.5. \end{aligned}$$

Dla małych wartości s energia kinetyczna bryły m w momencie $t = t_1$ (por. rys.6) jest większa niż w przypadku dużych wartości s . Jeżeli $\mu = 0$, energia ta zostaje zachowana do momentu zderzenia $t = t_2$. W porównaniu do przypadku dużych wartości s , procentowa ilość energii rozproszonej w czasie zderzenia jest większa. Jeżeli luz względny jest mały, rozproszenie sumaryczne wskutek tarcia i zderzeń jest większe niż prosta suma efektów (por.(34)). Gdy luz względny jest duży, rozproszenie rzeczywiste jest mniejsze niż prosta suma efektów. Zaproponowany model daje więc możliwość oceny nieliniowego sprzężenia tych dwóch zjawisk dysypacyjnych. W tabelicy 1 ujęto niektóre wartości liczbowe wyrażenia (34).

Należy podkreślić, że współczynnik μ opisujący wpływ tarcia suchego w układzie (wyrażenie (12)) jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika sztywności k , a więc wzrost sztywności sprężyn przynosi ten sam efekt co zmniejszenie współczynnika tarcia F . Jest to oczywiste, jeżeli porównamy bilans sił sprę-

stości i tarcia. Tłumaczy to również wzrost wartości $|\alpha|$ (Tablica 1) w funkcji μ (energia kinetyczna maleje).

Należy również podkreślić, że parametry μ i s są odwrotnie proporcjonalne do przemieszczenia początkowego x_0 . Zbadamy wpływ zmian wartości x_0 porównując wartość δ dla $x_0 = 62,5 F/k$ (odpowiadającą $\mu = 0,016$) i dla x_0 pięć razy mniejszego oraz pięć razy większego. Odpowiednie wartości zostały ujęte w Tablicy 2 (Rys.11 - punkty zaznaczone krzyżykami). Procentowe zmiany wartości dekrementu logarytmicznego są różne dla każdego zbioru wartości parametrów F/k , a , α , η . Rozproszenie energii zależy więc w sposób nieliniowy od wartości przemieszczenia początkowego (Rys.12).



Rys. 12

Tablica 1

$\eta = 0.01$	$\alpha \equiv 1 - \frac{\delta(\mu=0) + \delta(R=1)}{\delta} 100\%$			
s	0.5		0.1	
b	0.3	0.9	0.3	0.9
$\mu \backslash R$	0.764	0.871	0.764	0.871
0.02	- 3.8 %	- 2.3 %	+ 3.6 %	+ 2.3 %
0.08	- 16.6 %	- 7.9 %	+ 18.7 %	+ 8.0 %
0.17			+ 34.9 %	+ 12.9 %

Tablica 2

		δ											
e		0.3				0.9				1			
η		0.01		0.1		0.01		0.1		0.01		0.1	
μ	σ	0.1	0.5	0.1	0.5	0.1	0.5	0.1	0.5	0.1	0.5	0.1	0.5
0.0032				0.545				0.39				0.01	
0.016	0.61				0.685	0.365			0.53	0.068			0.068
0.08			0.63				0.545				0.415		
$\frac{\delta(x_0)}{\delta(3x_0)}$		$\frac{0.63}{0.61} = 1.03$		$\frac{0.545}{0.365} = 1.26$		$\frac{0.545}{0.365} = 1.49$		$\frac{0.53}{0.39} = 1.36$		$\frac{0.415}{0.068} = 6.10$		$\frac{0.068}{0.010} = 6.80$	

Na ogół logarytmiczny dekrement rośnie gdy x_0 maleje. Ten wzrost jest bardziej wyraźny gdy \mathcal{R} jest duże, a ν małe. (Na rysunku 12 przedstawiono jedynie punkty odpowiadające wartościom $s = 0.1$ i $s = 0.5$, krzywe interpolowano).

Ogólne wnioski wynikające z analizy układu są następujące. Układ jest nieliniowy i rozproszenie energii mechanicznej w czasie ruchu ma również charakter nieliniowy. Zbadano wpływ wszystkich parametrów układu na rozproszenie energii: stosunku mas poruszających się brył sztywności sprężyn i wstępnego ich naciągnięcia, współczynnika tarcia suchego, współczynnika restytucji, luzu i przemieszczenia początkowego. Zależność integralnej charakterystyki rozproszenia energii od wszystkich parametrów ma charakter silnie nieliniowy.

6. Dyskusja.

Oczywistym jest, że wskutek zderzenia ciał rzeczywistych energia ich ruchu ulega zmniejszeniu. Przyczyny tego zmniejszenia są różnorodne. Podczas zderzenia niesprężystego część energii kinetycznej zostaje przekształcona na energię drgań przejawiającą się zarówno w postaci serii zderzeń (skala makroskopowa) jak i w postaci fal (skala mikroskopowa). Wskutek działania różnorodnych czynników rozpraszających, część owej energii drgań zostaje bezzwrotnie zamieniona na ciepło i wypromieniowana. Fale sprężyste przenoszą również część energii do otoczenia (rozproszenie radiacyjne). Niezależnie od tych zjawisk, część energii kinetycznej może być zużyta na nieodwracalne odkształcenia plastyczne zderzających się elementów. Globalny, integralny, obserwowalny efekt zderzenia wyraża się zmniejszeniem energii ruchu. Ale, jak widać, zjawisko nie jest jednorodne i jest trudne do zmodelowania matematycznego. Założenia przyjęte w niniejszym opracowaniu, mające na celu zmodelowanie efektu rozproszenia energii wskutek zderzenia są dość ostre i proponowany model należy traktować jako pierwsze przybliżenie opisu zjawiska.

Według klasycznej teorii zderzenia, [3], energia kinetyczna, którą dysponuje układ dwóch brył przed zderzeniem prostym:

$$T = \frac{m}{2} v^2(t-0) + \frac{m_1}{2} v_1^2(t-0)$$

jest wskutek zderzenia przekształcona na energię kinetyczną ruchu środka masy układu:

$$T_c = \frac{[m v(t-0) + m_1 v_1(t-0)]^2}{2(m + m_1)},$$

energię potencjalną lokalnych odkształceń sprężystych:

$$U_1 = \frac{e^2}{2} \frac{m m_1}{m + m_1} [v(t-0) - v_1(t-0)]^2$$

oraz pracę lokalnych odkształceń plastycznych:

$$(35) \quad L_p = \frac{1 - e^2}{2} \frac{m m_1}{m + m_1} [v(t-0) - v_1(t-0)]^2.$$

Tak więc ma miejsce następujący bilans energetyczny:

$$T = T_c + U_1 + L_p.$$

W bilansie tym nie uwzględniono energii drgań fal sprężystych. Udział tej ostatniej zależy od warunków zderzenia i konfiguracji brył i jest dość trudny do teoretycznego oszacowania. Dlatego też najczęściej ten rodzaj rozproszenia jest pomijany.

Energia potencjalna lokalnych odkształceń sprężystych U_1 jest zwracana układowi w postaci energii kinetycznej ruchu po zderzeniu. Jej "ilość" zależy od wartości współczynnika restytucji e .

Praca lokalnych odkształceń plastycznych L_p reprezentuje część energii początkowej bezpowrotnie straconej podczas zderzenia. W zależności od wartości współczynnika restytucji udział jej w bilansie energetycznym może przewyższać wartość energii potencjalnej lokalnych odkształceń sprężystych.

Spróbujmy posłużyć się wyrażeniem opisującym pracę lokalnych odkształceń plastycznych (35) dla zdefiniowania współczynnika strat wskutek zderzenia. Ten nowy współczynnik oznaczmy \mathcal{R}^L :

$$\mathcal{R}^L = 1 - \sqrt{\frac{L_p(t_n+0)}{T(t_1-0)}}$$

/n - liczba zderzeń/; dla jednego zderzenia mamy:

$$L_p(t_1+0) = \frac{1-e^2}{2} \frac{m\eta}{1+\eta} v^2(t_1-0),$$

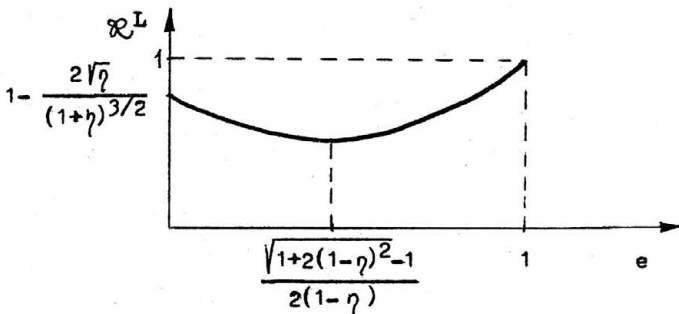
dla dwóch /z uwzględnieniem założenia (3)/ otrzymujemy:

$$L_p(t_2+0) = \frac{1-e^2}{2} \frac{m\eta}{1+\eta} v^2(t_1-0) \left[\frac{1-e\eta}{1+\eta} + \frac{1+e}{1+\eta} \right]^2.$$

Wprowadzając wyrażenie (7), opisujące kinetyczną energię początkową, mamy dla przypadku dwóch zderzeń następujący współczynnik strat:

$$(36) \quad \mathcal{R}^L = 1 - \frac{2+e(1-\eta)}{1+\eta} \sqrt{\frac{\eta(1-e^2)}{1+\eta}}.$$

Przebieg krzywej $\mathcal{R}^L(e)$ został przedstawiony na rysunku 13./por. również rys.17/. Rzecz charakterystyczna, podobnie jak $\mathcal{R}(e)$ /wyrażenie (9), krzywa ta jest malejąca dla małych wartości e .



Rys. 13

Przy oszacowywaniu współczynnika strat wskutek zderzeń przyjęto założenie, że po zetknięciu się brył nastąpią w nieskończenie krótkim czasie dwa kolejne zderzenia. Założenie to można uogólnić przyjmując, że nastąpi seria n zderzeń. Na podstawie pozostałych założeń można wyznaczyć prędkości $v(t_n+0)$ oraz $v_1(t_n+0)$ obu brył po n zderzeniach. W tym przypadku względna strata energii kinetycznej będzie następująca:

$$\Delta T = 1 - \frac{T(t_n+0)}{T(t_1-0)} = 1 - \frac{v^2(t_n+0) + \eta v_1^2(t_n+0)}{v^2(t_1-0)},$$

gdzie odpowiednie prędkości mogą być wyznaczone na podstawie wzorów rekurencyjnych:

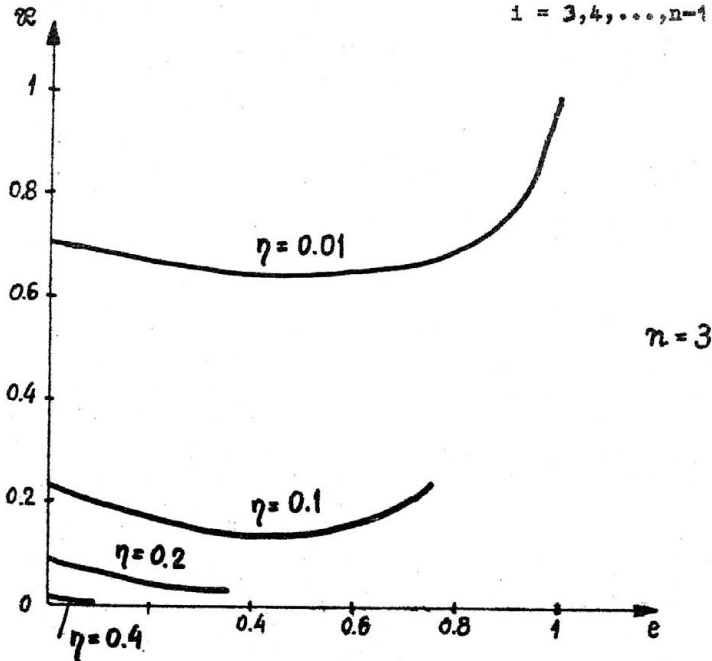
$$v(t_n + 0) = \frac{(1 - e\eta) v(t_{n-1} + 0) - \eta(1 + e) v_1(t_{n-1} + 0)}{1 + \eta},$$

$$v_1(t_n + 0) = \frac{(1 + e) v(t_{n-1} + 0) + (e - \eta) v_1(t_{n-1} + 0)}{1 + \eta}$$

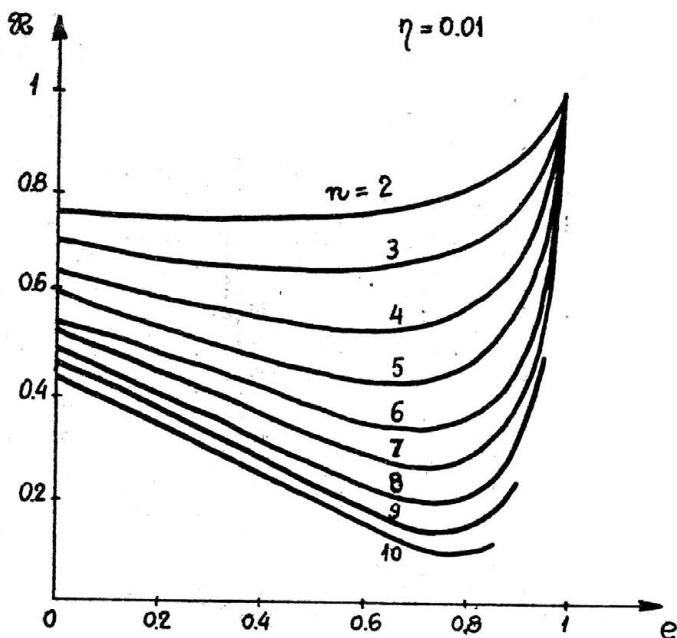
przy czym musi być spełniony warunek

$$(1 - e\eta) v(t_1 + 0) - \eta(1 + e) v_1(t_1 + 0) > 0,$$

$$i = 3, 4, \dots, n-1$$



Rys. 14



Rys. 15

oraz założenie

$$v(t_{1+1} - 0) = v(t_1 + 0) > 0,$$

$$v_1(t_{1+1} - 0) = -v_1(t_1 + 0).$$

Na rysunku 14 przedstawiono wykresy $K(e)$ dla przypadku trzech zderzeń i różnych wartości stosunku mas brył η , a na rysunku 15 wykresy $K(e)$ przy $\eta = 0.01$ dla liczby zderzeń od 2 do 10 ^{*/}. Jak widać współczynnik K maleje ze wzrostem liczby zderzeń i zachowuje charakter funkcji malejącej dla małych wartości e . Ten ostatni wynik należy uznać za negatywny i wysnuć wniosek, że przyjęcie założenia o wielokrotnych zderzeniach nie poprawia oszacowania współczynnika strat K .

^{*/} Obliczenia numeryczne zostały wykonane przez K. Zakrzewskiego.

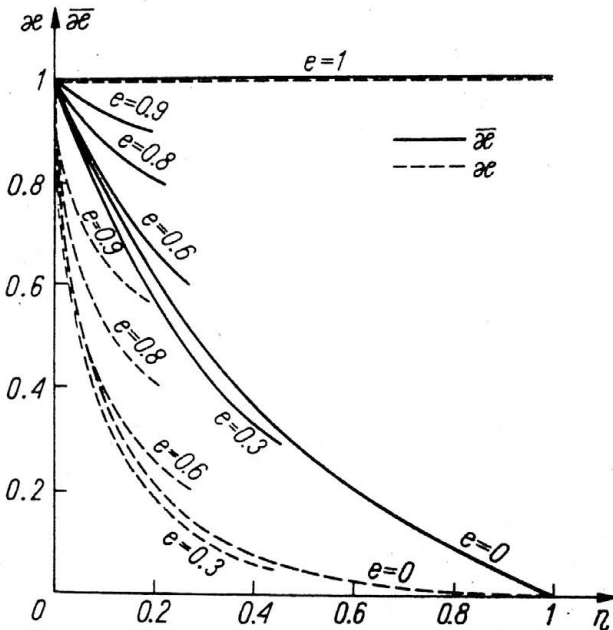
Można również poddać pod dyskusję definicję wprowadzonego w rozdziale 3 współczynnika strat \mathcal{R} /wyrażenie (9)/. Być może współczynnik $\overline{\mathcal{R}}$ zdefiniowany następująco:

$$(37) \quad \overline{\mathcal{R}} = \sqrt{1 - \Delta T}$$

modeluje lepiej zjawisko zderzenia. Zależność między współczynnikiem $\overline{\mathcal{R}}$ i \mathcal{R} przedstawia się następująco:

$$\overline{\mathcal{R}} = \sqrt{(2 - \mathcal{R})\mathcal{R}} .$$

Dla ustalonych e i η wartość $\overline{\mathcal{R}}$ jest większa niż \mathcal{R} (Rys.16), lecz ich przebiegi jakościowe są podobne.



Rys. 16

Jeżeli rozpatrujemy wyniki obliczeń numerycznych dekrementu logarytmicznego przedstawione na rysunkach 9 i 11 i je-

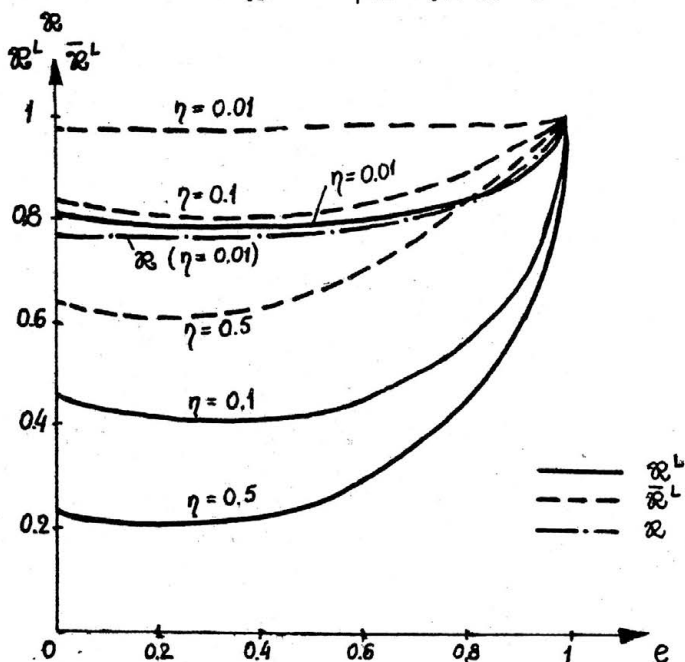
zeli zachowamy wartości $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{R}}$ i e , to krzywe $\delta(\mu)$ pozostaną takie same, o ile zamiast η wprowadzimy nową wartość stosunku mas brył ^{*/}:

$$\bar{\eta} = \eta \frac{\mathcal{R}}{2 - \mathcal{R}}$$

W tym przypadku zmienia się tylko nieco granice stosowalności wzorów.

Dla porównania dyskutowanych tu wariantów współczynnika strat, na rysunku 17 przedstawiono zależności \mathcal{R}^L / wyrażenie (36) / i $\bar{\mathcal{R}}^L$, gdzie, zgodnie z (37) współczynnik $\bar{\mathcal{R}}^L$ można wyznaczyć następująco:

$$\bar{\mathcal{R}}^L = \sqrt{(2 - \mathcal{R}^L) \mathcal{R}^L}.$$



Rys. 17

^{*/} Jest to możliwe, gdyż współczynnik η występuje we wzorze (22) tylko w iloczynie z \mathcal{R}^2 .

Przy bardziej precyzyjnym szacowaniu współczynnika strat wskutek zderzeń należałoby również uwzględnić wpływ kształtu powierzchni zderzających się [3,4] .

Należy również podkreślić, że zależność Newtona (1) opisuje zjawisko zderzenia w sposób dość przybliżony. W bardziej dokładnych oszacowaniach należy wprowadzić relacje dokładniejsze, uwzględniające zależność współczynnika restytucji od względnych prędkości brył [4] :

$$v(t_1 + 0) - v_1(t_1 + 0) = - \left\{ 1 - \gamma \left[v(t_1 - 0) - v_1(t_1 - 0) \right] \right\} \left[v(t_1 - 0) - v_1(t_1 - 0) \right],$$

gdzie γ jest stałym współczynnikiem (dla stali $\gamma = 0.08 - 0.32$ s/m) .

Weryfikacja doświadczalna powinna dać odpowiedź na postawione wyżej pytania.

Literatura

1. A.MUSZYŃSKA, Trzumenie wewnętrzne w układach mechanicznych, Dynamika Maszyn, Ossolineum, 1974.
2. A.MUSZYŃSKA, Vibration control, Dynamika Maszyn - Regulacja drgań w maszynach, Ossolineum, 1978.
3. R.GRYBÓŚ, Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych, PWN, Warszawa, 1969.
4. W.GOLDSMITH, Impact, Edward Arnold Ltd., London 1960.
5. K.H.HUNT, F.R.E.CROSSLEY, Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact, Trans.ASME, Journ. of Applied Mechanics, June 1975.
6. K.J.OHMATA, H.FUKUDA, Dynamic Analysis of Impact Attenuation Systems Utilising Plastic Deformations, Bull.JSME, v.19, 132, June 1976, 134, August 1976.