Nielsen

FONCTIONS
MÉTASPHÉ-
RIQUES

# THÉORIE

DES

# FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES

44214 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

# THÉORIE

DES

# FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES

COURS PROFESSÉ A L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE

PAR

NIELS NIELSEN,
PROFESSEUR D'ANALYSE SUPÉRIEURE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1911

# PRÉFACE.

En publiant mes recherches sur les fonctions sphériques généralisées, menées à une terminaison relative, je n'ai pas eu l'intention de donner, un Traité complet de ces fonctions, analogue à mes Livres sur les fonctions cylindriques et sur la fonction gamma. C'est pourquoi je ne donne aucune liste de la Littérature, très étendue du reste, concernant les fonctions en question, et les citations dans le texte ne sont que fort éparses.

Le but principal de ces recherches, qui m'ont occupé pendant dix ans à peu près, a été l'étude d'une fonction assez générale pour donner, comme cas particuliers, toutes les séries hypergéométriques finies ou infinies qui jouent un rôle dans les applications de l'Analyse et que l'on nomme généralement des *fonctions sphériques*. Une telle fonction générale est, par excellence, la fonction $Q^{\nu,\rho}(x)$; car, suivant les résultats développés dans le paragraphe XX, cette fonction suffit seule pour une étude générale du problème qui nous occupe.

Il nous semble utile d'énumérer les cas particuliers de notre fonction métasphérique $K^{\nu,\rho}(x)$ que l'on a étudiés plus généralement; nous remarquons que ces fonctions se présentent toujours deux à deux comme des intégrales particulières indépendantes d'une équation différentielle, linéaire et homogène du second ordre :

1° Les fonctions sphériques ordinaires de Legendre qui correspondent à $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = n$, $n$ étant un entier non négatif;

2° Les fonctions annulaires, où il faut admettre $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = n + \frac{1}{2}$, $n$ étant un entier non négatif;

3° Les fonctions coniques, où il faut supposer $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = -\frac{1}{2} + ai$, $a$ étant un nombre quelconque.

Mais à ces groupes de trois paires de fonctions il en faut ajouter six autres : savoir les fonctions adjointes correspondantes; c'est-à-dire qu'il faut, de cette manière, étudier 12 fonctions différentes qui possèdent un grand nombre de propriétés communes et se présentent toutes comme des cas particuliers de notre $Q^{\nu,\rho}(x)$.

A cette occasion, il est bon de remarquer que la propriété de la fonction sphérique ordinaire $P^n(x)$ de Legendre, savoir d'être un polynome entier de degré $n$, n'est pas essentielle pour l'étude de cette fonction.

Étudions, au contraire, la fonction générale $Q^{\nu,\rho}(x)$; nous aurons, d'un seul coup, toutes les propriétés des fonctions particulières susdites.

Quant aux résultats nouveaux, assez nombreux je le crois, contenus dans ce Livre, je me permets de signaler particulièrement ici les fonctions sphériques nouvelles traitées dans le Chapitre VI [1] et les séries de produits de deux fonctions sphériques étudiées dans le Chapitre XII. Malheureusement, ces séries nouvelles semblent être très compliquées pour des applications.

C'est certainement Charles Neumann qui a donné, le premier, des développements en série de fonctions analytiques uniformément convergente dans une partie *finie*, et à deux dimensions, du plan qui n'est pas un cercle avec son centre à l'origine, et sans que les séries en question soient des transformations d'une série de puissances, comme celles de Burmann. Il est bien connu que le domaine de convergence des séries de Neumann est l'intérieur d'une ellipse ayant ses foyers aux points $(\pm 1, 0)$. Ce résultat de l'illustre Maître m'a vivement intéressé. Dans une lettre adressée à Neumann, j'ai donné des réflexions générales sur de telles séries et j'ai indiqué la possibilité

---

(1) Naturellement, les transformations de l'argument $x$ étudiées dans ce Chapitre ne sont que des cas particuliers des formules de transformations beaucoup plus générales connues pour les fonctions hypergéométriques. Cependant, les transformations particulières en question jouent un rôle fondamental dans l'histoire des fonctions sphériques.

d'une évaluation commune de toutes les séries connues de ce genre. Dans le Chapitre XIII, on trouvera un développement détaillé de ces séries connues et un grand nombre d'autres, nouvelles je crois.

En mentionnant les séries de fonctions sphériques, je me permets d'appeler l'attention sur le Livre de François Neumann : *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*, Leipzig, 1878, qui semble être peu connu, quoiqu'il présente un supplément essentiel et nécessaire du Traité classique de Heine.

Dans ces recherches je n'étudie que les propriétés analytiques des fonctions métasphériques. De sorte que je ne trouve aucune occasion de mentionner, dans le texte, les recherches aussi essentielles qu'ingénieuses de M. Fejér sur les séries de fonctions sphériques qui ne sont convergentes que dans la partie de l'axe réel située entre les points $\pm 1$. Il serait très intéressant d'étudier les séries analogues de fonctions ultrasphériques et d'en déduire peut-être, comme un autre cas particulier, les résultats de l'éminent géomètre concernant les séries de Fourier ordinaires.

Quant à la rédaction du présent Livre, je donne dans la première Partie une suite de théorèmes et de formules auxiliaires, de sorte que le lecteur n'a besoin que de la connaissance des fondements de la théorie élémentaire des fonctions analytiques. Cependant, il faut admettre que cette remarque n'est pas exacte pour les deux derniers paragraphes qui appliquent l'intégrale de M. N. de Sonine contenant des fonctions cylindriques.

N.

Copenhague, le 12 février 1911.

# THÉORIE

DES

# FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES.

## PREMIÈRE PARTIE.

APPLICATIONS DE LA FONCTION GAMMA.

## CHAPITRE I.

QUELQUES LEMMES FONDAMENTAUX.

### I. — Définitions fondamentales.

Pour éviter, dans nos recherches actuelles, des digressions assez étendues, il nous semble utile de réunir dans un Chapitre introductif quelques formules et lemmes qui nous sont indispensables dans ce qui suit.

A cet effet, nous avons, avant tout, à préciser quelques définitions fondamentales, desquelles nous avons à faire usage constamment dans nos recherches suivantes.

Considérons tout d'abord une suite illimitée aux éléments quelconques, réels ou non

$$(1) \qquad a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots;$$

puis, supposons qu'il existe un nombre fini et déterminé $\omega$, tel qu'en désignant par $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il soit possible de déterminer un positif entier N, de sorte que nous aurons constamment pour $n \geqq N$

$$|a_n - \omega| < \varepsilon, \tag{2}$$

nous désignons $\omega$ comme *valeur limite* de la suite (1), et nous posons dans ce cas

$$\lim_{n=\infty} a_n = \omega. \tag{3}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (1) ait une telle valeur limite est que pour $n \geqq N$ nous aurons constamment

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \tag{4}$$

où $p$ désigne un positif entier quelconque.

Supposons pour tous les $n$

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

où $\alpha_n$ et $\beta_n$ sont des quantités réelles, la condition nécessaire et suffisante pour que la suite (1) ait une valeur limite est que les deux autres suites à termes réels

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$
$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \ldots$$

aient toutes deux cette propriété. Dans ce cas nous aurons

$$\lim_{n=\infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \lim_{n=\infty} \alpha_n + i \lim_{n=\infty} \beta_n. \tag{5}$$

Supposons réels les éléments de la suite (1), nous posons encore

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty, \qquad \lim_{n=\infty} a_n = -\infty, \tag{6}$$

quand il est possible de déterminer un positif entier N, de sorte que pour $n \geqq N$ nous aurons toujours respectivement

$$a_n > +K, \quad a_n < -K, \tag{7}$$

où K désigne un nombre positif donné auparavant et étant aussi grand qu'on le veut.

Soit, ensuite, A un ensemble infini de nombres réels tel qu'il est possible d'indiquer un nombre fini $k$, de sorte que tous les éléments de A sont plus petits que $k$, notre ensemble A a une *limite supé-*

*rieure* G; c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini et déterminé G qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Désignons par $a$ un élément quelconque de A, nous aurons toujours

$$a \leqq G; \tag{8}$$

2° Soit $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il existe au moins un élément $a_1$ appartenant à A tel que

$$a_1 > G - \varepsilon. \tag{9}$$

Supposons finis tous les éléments positifs de A sans qu'il soit possible d'indiquer un nombre déterminé et fini $k$ qui est plus grand que tous les éléments susdits, nous disons que l'ensemble A a $+\infty$ comme limite supérieure.

Dans le cas où il est possible d'indiquer un nombre fini $k$ plus petit que tous les éléments de A, cet ensemble a une *limite inférieure* $g$; c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini et déterminé $g$ qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Soit $a$ un élément quelconque de A, nous aurons toujours

$$a \geqq g; \tag{10}$$

2° L'ensemble A contient un élément $a_1$ au moins, tel que

$$a_1 < g + \varepsilon, \tag{11}$$

où $\varepsilon$ est une quantité positive de la même nature que celle qui figure dans (9).

Supposons finis tous les éléments négatifs de A, sans qu'il soit possible d'indiquer un nombre fini $k$, plus petit que tous les éléments susdits, nous disons que l'ensemble A a $-\infty$ comme limite inférieure.

Les limites supérieures et inférieures sont à bien distinguer des deux autres limites qu'on désigne généralement comme *limes superior* et *limes inferior*. Soit ensuite

$$x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

un nombre complexe quelconque, nous pouvons toujours admettre

$$-\pi < \theta \leqq +\pi;$$

c'est-à-dire que nous posons toujours

$$\theta = +\pi,$$

dans le cas où $x$ est négatif réel.

Cela posé, nous définissons la *valeur principale* du logarithme népérien du nombre $x$ par l'expression suivante :

$$(12) \qquad \log x = \log\rho + i\theta, \qquad -\pi < \theta \leqq +\pi,$$

où $\log\rho$ pris du nombre positif $\rho$ doit être *réel;* c'est-à-dire que nous posons par exemple

$$(13) \qquad \log(-1) = \pi i.$$

Désignons ensuite par $\nu$ un nombre fini quelconque, puis supposons

$$0 < |x| < \infty,$$

nous définissons par l'expression

$$(14) \qquad x^\nu = e^{\nu \log x},$$

où $\log x$ est la valeur principale du logarithme népérien de $x$, la *valeur principale* de la puissance $x^\nu$; c'est-à-dire que nous posons par exemple

$$(15) \qquad (-1)^\nu = e^{\nu\pi i}.$$

Dans ce qui suit, nous entendons exclusivement par les significations $\log x$ et $x^\nu$ ces valeurs principales, si nous ne donnons pas explicitement une autre définition de ces fonctions multiformes.

## II. — Lemmes sur la fonction exponentielle et le logarithme.

Dans nos recherches suivantes nous avons souvent besoin de certaines inégalités concernant les transcendantes élémentaires, inégalités qui sont des conséquences immédiates des deux lemmes suivants concernant la fonction exponentielle et le logarithme népérien :

I. *Supposons* $|x| \leqq 1$, *puis posons*

$$(1) \qquad e^x = 1 + \omega,$$

*nous aurons toujours* $|\omega| < 2|x|$.

En effet, la série de puissances ordinaire donnera pour ω l'expression suivante :

$$\omega = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Or, nous aurons évidemment, pour $|x| \leqq 1$,

$$|x|^n \leqq |x|, \qquad n! \geqq 2^{n-1},$$

ce qui donnera

$$|\omega| < |x|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) = 2|x|.$$

II. *Supposons* $|x| < 1$, *puis posons*

$$\log(1+x) = x\omega, \tag{2}$$

*nous aurons toujours*

$$|\omega| < \frac{2-|x|}{2-2|x|}; \tag{3}$$

*supposons ensuite* $|x| \leqq \frac{2}{3}$, *nous aurons de plus* $|\omega| \leqq 2$.

La série de puissances ordinaire donnera immédiatement, en vertu de la définition (2) de ω,

$$\omega = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots,$$

d'où immédiatement

$$|\omega| < 1 + \frac{|x|}{2} + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{2} + \ldots = 1 + \frac{|x|}{2-2|x|} = \frac{2-|x|}{2-2|x|}.$$

Soit ensuite $|x| \leqq \frac{2}{3}$, nous aurons immédiatement $|\omega| \leqq 2$.

En combinant les deux lemmes précédents, nous aurons immédiatement cet autre :

III. *Supposons que les n quantités*

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \ldots, \quad \delta_n$$

*satisfassent aux conditions*

$$|\delta_p| \leqq \frac{1}{2n}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

*puis mettons*

$$(1+\delta_1)(1+\delta_2)\ldots(1+\delta_n) = 1+\omega, \tag{4}$$

*nous aurons toujours*

$$|\omega| < 4(|\delta_1|+|\delta_2|+\ldots+|\delta_n|). \tag{5}$$

A cet effet, posons pour $p = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\log(1+\delta_p) = \delta_p\,\omega_p, \qquad |\omega_p| \leqq 2,$$

nous aurons, en vertu de (4),

$$\prod_{p=1}^{p=n}(1+\delta_p) = 1+\omega = e^{\delta_1\omega_1+\delta_2\omega_2+\ldots+\delta_n\omega_n},$$

de sorte que le lemme I donnera immédiatement l'inégalité (5).

Supposons particulièrement

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta, \qquad |\delta| \leqq \frac{1}{2n},$$

puis posons

$$(1+\delta)^n = 1+\omega, \tag{6}$$

nous aurons certainement

$$|\omega| \leqq 4n|\delta|. \tag{7}$$

IV. *Supposons* $|x| \leqq \frac{2}{3}$, $|2\nu x| \leqq 1$, *puis mettons*

$$(1+x)^\nu = 1+\omega, \tag{8}$$

*nous aurons toujours*

$$|\omega| \leqq 4|\nu x|. \tag{9}$$

Posons

$$\log(1+x) = x\omega_1,$$

nous aurons, en vertu du lemme II, $|\omega_1| \leqq 2$, de sorte que l'identité

$$1+\omega = e^{\nu x \omega_1}$$

nous conduira immédiatement au but.

V. *Désignons par $n$ un positif entier, puis supposons $|x|^2 \leqq 1 : n$, le nombre $\omega$ défini par l'identité*

$$(\sin x)^n = x^n(1+\omega) \tag{10}$$

*satisfera toujours à la condition*

$$(11) \qquad |\omega| < 4\,|x|^2.$$

En effet, posons

$$\sin x = x(1+\delta),$$



la série de puissances ordinaire donnera pour $\delta$ cette expression

$$\delta = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

d'où, immédiatement pour $|x|^2 < 20$,

$$|\delta| < \frac{|x|^2}{6}\left(1 + \frac{|x|^2}{20} + \frac{|x|^4}{20^2} + \ldots\right) = \frac{|x|^2}{6} \cdot \frac{20}{20 - |x|^2},$$

ce qui donnera pour $|x|^2 \leqq 10$ cette autre inégalité

$$|\delta| < \frac{|x|^2}{3}.$$

Remarquons ensuite l'identité

$$1 + \omega = (1+\delta)^n,$$

le lemme III nous conduira immédiatement au but.

## III. — Les courbes simples.

Nous représentons comme ordinairement le nombre complexe

$$x = \alpha + i\beta$$

dans un plan par le point M, dont les coordonnées rectangulaires sont $\alpha$ et $\beta$. Ce point M est l'image du nombre $x$ que nous désignons comme l'affixe du point M; mais souvent nous disons simplement *le point $x$* au lieu du point M qui est l'image de $x$.

Supposons $x$ variable, de sorte qu'une certaine courbe K est lieu de son image M, nous disons souvent que K est *lieu du nombre $x$*. Supposons ensuite que le point M parcourrait une certaine aire A limitée par une courbe K, nous disons que le nombre $x$, dont M est l'image, parcourt le *continu* A avec la *frontière* K.

Considérons dans le plan un point fixe O, une ligne quelconque passant par O est composée de deux rayons vecteurs ayant des directions opposées et l'une étant le prolongement sur O de l'autre. Une distance quelconque OA comptée de O à un point quelconque A d'un rayon vecteur passant par A est toujours positive.

Cette façon de parler adoptée, nous avons à définir une classe de courbes qui jouent un rôle fondamental dans nos études de certaines séries infinies, savoir l'ensemble des courbes $\lambda$ qui satisfont aux conditions suivantes :

1° La courbe $\lambda$ est continue;

2° Il existe, au moins, une ligne droite $l$ qui a deux et seulement deux points d'intersection déterminés A et B avec $\lambda$;

3° Le segment AB contient au moins un point O tel que tous les rayons vecteurs partant de O ont toujours un et seulement un point d'intersection C avec $\lambda$;

4° La limite inférieure de l'ensemble formé des rayons vecteurs OC n'est pas égale à zéro.

*Nous désignerons comme courbe simple avec le point de rayonnement* O *toute courbe* $\lambda$ *qui satisfait aux quatre conditions susdites.*

Soit maintenant M un point du rayon vecteur OA partant de O à un point quelconque A de $\lambda$, et tel que

$$0 \leqq OM < OA, \tag{1}$$

nous disons que M est situé à l'*intérieur* de $\lambda$; de plus, nous définissons *l'intérieur de la courbe simple* $\lambda$ *comme l'ensemble des points* M *situés à l'intérieur de* $\lambda$.

Quant au nombre complexe $x$, dont l'image M parcourt l'intérieur d'une courbe simple $\lambda$, nous disons que $x$ parcourt *un continu simple avec la frontière* $\lambda$ *et le point de rayonnement* O.

Soit ensuite $M_1$ un point du rayon vecteur susdit OA, de sorte que

$$OM_1 > OA, \tag{2}$$

l'ensemble de ces points $M_1$ forme l'*extérieur* de la courbe simple $\lambda$.

Cela posé, il est évident que la courbe simple $\lambda$ a les propriétés suivantes :

1° Faisons tourner autour du point O le rayon vecteur OA, de sorte que son autre point extrême A décrit la courbe $\lambda$, cette ligne aura passé une et seulement une fois tout point situé à l'intérieur de $\lambda$, quand elle retourne la première fois à sa position initiale;

2° Désignons par $x$ un nombre complexe dont l'image M appartient à la circonférence ou à l'intérieur d'une courbe simple $\lambda$ dont le centre de rayonnement O est l'origine, puis désignons par $t$ une variable réelle, telle que $0 < t \leqq 1$, le nombre $tx$ appartient toujours ou au continu simple avec la frontière $\lambda$ ou à cette frontière même.

Cependant, il faut remarquer que nous ne savons pas généralement représenter par une équation

$$f(x, y) = 0$$

une courbe simple $\lambda$; au contraire ces courbes ne sont généralement que des courbes *graphiques*.

*Exemple I.* — L'ellipse de Cassini

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - a\alpha^2 - b\beta^2 = 0, \qquad a > 0, \qquad b > 0, \tag{3}$$

qui a dans l'origine O un point double isolé, est une courbe simple avec o comme centre de rayonnement.

Le nombre complexe $x = \alpha + i\beta$ appartient à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe (3), selon que

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 \lessgtr a\alpha^2 + b\beta^2, \tag{4}$$

ce qui est évident si nous transformons en coordonnées polaires l'équation (3).

*Exemple II.* — Soit $f(v) = 2$ ou $f(v) = 1$, selon que le rapport $v : \pi$ est rationnel ou irrationnel, la courbe avec l'équation en coordonnées polaires

$$r = f(v)$$

satisfait bien aux trois dernières conditions susdites, le point O étant l'origine. Or, cette courbe n'est pas une courbe simple avec O comme centre de rayonnement, parce qu'elle n'est pas continue.

*Exemple III.* — L'arc de l'hyperbole équilatérale

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2,$$

qui correspond à $|\alpha| = q > a$, et la partie de la ligne droite $\alpha = q$, qui correspond à $\beta^2 \leqq q^2 - a^2$, forment, pris ensemble, une courbe simple avec le foyer correspondant de l'hyperbole comme centre de rayonnement.

Ce dernier exemple nous fournit un moyen de définir ce que nous avons à entendre par l'intérieur de l'hyperbole susdite, parce qu'il est possible de choisir $q$ arbitrairement grand.

## IV. — Quelques courbes simples algébriques.

Comme des exemples ultérieurs des définitions du paragraphe précédent, nous avons à étudier quelques courbes simples qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions métasphériques.

A cet effet, désignons par

$$x = \xi + i\eta$$

un nombre complexe fini quelconque, nous avons tout d'abord à déterminer deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$, de sorte que $\beta \geq 0$ et que nous aurons

$$(1) \qquad x = \xi + i\eta = \cos(\alpha - i\beta).$$

Or, il est évident que la condition $\beta = 0$ entraîne nécessairement $x$ réel et $-1 \leq x \leq 1$, et inversement. Supposons ensuite $\beta > 0$, puis écrivons sous la forme suivante

$$e^{\beta+i\alpha} + e^{-\beta-i\alpha} = 2x$$

l'équation (1), nous aurons immédiatement

$$(2) \qquad e^{\beta+i\alpha} = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

où le signe double de la racine carrée est à déterminer, de sorte que

$$(3) \qquad e^{\beta} = |x \pm \sqrt{x^2 - 1}| > 1;$$

c'est-à-dire que l'équation (1) nous détermine complètement $\beta$, et aussi $\alpha$, abstraction faite d'un multiple quelconque de $2\pi$.

Remarquons ensuite que l'équation (1) équivaut à ces deux autres

$$\xi = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha, \qquad \eta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha,$$

nous avons immédiatement

$$(4) \qquad \frac{\xi^2}{\left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\right)^2} = 1.$$

Cela posé, il est très facile de démontrer le théorème suivant, dû à Charles Neumann ([1]).

I. *Le lieu des nombres* $x = \xi + i\eta$ *qui satisfont à la condition*

$$(5) \qquad |x \pm \sqrt{x^2 - 1}| = r, \qquad r > 1,$$

*est l'ellipse* E($a$) *avec l'equation en coordonnées rectangulaires*

$$(6) \qquad \frac{\xi^2}{a+1} + \frac{\eta^2}{a} = 1, \qquad a = \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2;$$

*c'est-à-dire que* E($a$) *a les foyers* ($\pm 1, 0$). *De plus, nous aurons pour la plus grande des valeurs absolues,*

$$(7) \qquad |x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1}| \gtrless r,$$

*selon que le nombre* $x_1$ *appartient à l'extérieur ou à l'intérieur de l'ellipse* E($a$).

En effet, l'équation (5) nous conduira, en vertu de (3) et (4), à l'équation (6) de l'ellipse E($a$).

Quant aux inégalités (7), supposons

$$|x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1}| = r_1 < r, \qquad a_1 = \left(\frac{r_1}{2} - \frac{1}{2r_1}\right)^2,$$

nous aurons, en prenant les valeurs positives des racines carrées,

$$\sqrt{a} = \frac{r}{2} - \frac{1}{2r}, \qquad \sqrt{a_1} = \frac{r_1}{2} - \frac{1}{2r_1},$$

d'où immédiatement

$$\sqrt{a} - \sqrt{a_1} = \frac{r - r_1}{2}\left(1 + \frac{1}{rr_1}\right);$$

c'est-à-dire qu'une seule des deux inégalités

$$(8) \qquad a > a_1, \quad r > r_1$$

entraîne nécessairement la seconde.

---

([1]) *Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art.* Halle, 1862.

Posons ensuite $x_1 = \xi_1 + i\eta_1$, nous aurons de même

$$\frac{\xi_1^2}{a_1+1} + \frac{\eta_1^2}{a_1} = 1, \tag{9}$$

d'où, parce que $a > a_1$,

$$\frac{\xi_1^2}{a+1} + \frac{\eta_1^2}{a} < 1; \tag{10}$$

c'est-à-dire que le nombre $x_1$ appartient à l'intérieur de l'ellipse $E(a)$.

Inversement, supposons donnée l'inégalité (10), puis déterminons le nombre positif $a_1$ à l'aide de (9), nous aurons évidemment $a_1 < a$.

II. *Transformons le plan des $x$ en posant $x_1 = x^2$, l'ellipse* $E(a)$ *se transforme dans une autre ellipse* $E_1(a)$ *avec l'équation*

$$\frac{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(a + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{a(a+1)} = 1, \qquad x_1 = \alpha + i\beta. \tag{11}$$

*L'intérieur et l'extérieur de* $E(a)$ *correspondent respectivement à l'intérieur et l'extérieur de* $E_1(a)$. *On voit du reste que l'ellipse* $E_1(a)$ *a les foyers* $(0, 0)$ *et* $(+1, 0)$ *et le centre* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

En effet, posons

$$x = \xi + i\eta, \qquad x_1 = \alpha + i\beta, \tag{12}$$

nous aurons

$$\alpha = \xi^2 - \eta^2, \qquad \beta = 2\xi\eta; \tag{13}$$

supposons ensuite

$$\frac{\xi^2}{a+1} + \frac{\eta^2}{a} \gtreqless 1, \tag{14}$$

puis combinons (14) et la première des formules (13), il en résulte respectivement

$$\eta^2 \gtreqless \frac{a(a+1) - a\alpha}{2a+1}, \qquad \xi^2 \gtreqless \frac{a(a+1) + (a+1)\alpha}{2a+1},$$

d'où, en vertu de la dernière équation (13), respectivement

$$\frac{\alpha^2-\alpha}{(2a+1)^2}+\frac{\beta^2}{4a(a+1)} \gtreqless \frac{a(a+1)}{(2a+1)^2},$$

ce qui nous conduira immédiatement au but.

III. *Transformons le plan des $x$ en posant $x_1 = 1 : x$, l'ellipse* E($a$) *se transforme dans une ellipse* C($a$) *de Cassini avec l'équation*

$$(15) \qquad (\alpha^2+\beta^2)^2-\frac{\alpha^2}{a+1}-\frac{\beta^2}{a}=0, \qquad x_1=\alpha+i\beta,$$

*ou bien en coordonnées polaires*

$$(16) \qquad r^2=\frac{\cos^2\varphi}{a+1}+\frac{\sin^2\varphi}{a}.$$

*Par cette transformation l'intérieur et l'extérieur de* E($a$) *correspondent respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de* C($a$).

Les formules (12) donnent dans ce cas

$$\alpha=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad \beta=-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$

d'où, en vertu de (14), respectivement, en coordonnées polaires

$$(17) \qquad r^2 \lesseqgtr \frac{\cos^2\varphi}{a+1}+\frac{\sin^2\varphi}{a}.$$

IV. *Transformons le plan des $x$ en posant $x_1 = x^2$, l'ellipse* C($a$) *de Cassini se transforme dans la courbe* K($a$) *définie par l'équation en coordonnées polaires*

$$(18) \qquad r=\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{a+1}+\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{a},$$

*ou bien en coordonnées rectangulaires*

$$(19) \quad (\alpha^2+\beta^2)^2+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\alpha}{a(a+1)}-\frac{\alpha^2}{a(a+1)}-\frac{(2a+1)^2\beta^2}{4a^2(a+1)^2}=0, \qquad x_1=\alpha+i\beta.$$

*De plus l'intérieur et l'extérieur de* C($a$) *correspondent, par cette transformation, respectivement à l'intérieur et l'extérieur de la courbe* K($a$).

En effet, nous n'avons qu'à remplacer, dans (17), $r^2$ et $\varphi$ par $r$ et $\frac{1}{2}\varphi$

respectivement, ce qui donnera immédiatement l'équation (18) qui se transforme dans celle-ci

$$(20) \qquad 2r = \frac{2a+1}{a(a+1)} - \frac{\cos\varphi}{a(a+1)},$$

d'où, en multipliant par $r$, puis en élevant au carré, l'équation (19).

Comme une conséquence immédiate du théorème I, combiné avec les transformations qui nous avaient conduits de l'ellipse $E(a)$ aux trois autres courbes $E_1(a)$, $C(a)$ et $K(a)$, nous aurons cet autre :

V. *Supposons $a_1 > a > 0$, chacune des ellipses $E(a)$ et $E_1(a)$ est enfermée par l'ellipse correspondante $E(a_1)$ et $E_1(a_1)$, tandis que chacune des deux autres courbes $C(a)$ et $K(a)$ enferme la courbe correspondante $C(a_1)$ et $K(a_1)$.*

Les équations (3) et (4) donnent de même :

VI. *Désignons par $(\alpha, \beta)$ un point qui ne satisfait pas à la fois aux deux conditions $\beta = 0$ et $-1 \leq \alpha \leq +1$, il existe toujours une et seulement une courbe $E(a)$, $E_1(a)$, $C(a)$ ou $K(a)$ qui passe par ce point donné.*

Enfin, nous aurons immédiatement :

VII. *Toutes les quatre courbes $E(a)$, $E_1(a)$, $C(a)$ et $K(a)$ sont des courbes simples avec l'origine comme point de rayonnement.*

# CHAPITRE II.

## LA FONCTION GAMMA.

### V. — La constante d'Euler.

Soit, pour $n$ positif entier,

$$(1) \qquad C_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n,$$

je dis que nous aurons toujours

$$(2) \qquad C_{n+1} < C_n.$$

En effet, la définition (1) donnera immédiatement

$$C_n - C_{n+1} = -\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1},$$

d'où, en vertu de la série de puissances obtenue pour $\log(1-x)$,

$$C_n - C_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \frac{1}{4(n+1)^4} + \ldots,$$

et l'inégalité (2) est évidente. De plus, nous aurons

$$C_n - C_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^4} + \ldots = \frac{1}{2n(n+1)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(3) \qquad C_n - C_{n+1} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Posons ensuite successivement dans (3), 1, 2, 3, ..., $n-1$ au lieu de $n$, puis ajoutons toutes les inégalités ainsi obtenues, il en résulte, parce que $C_1 = 1$,

$$(4) \qquad 1 - C_n < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}, \qquad C_n > \frac{1}{2}.$$

Cela posé, les inégalités (2) et (4) donnent immédiatement, en vertu d'un théorème très connu, le lemme suivant :

I. *La suite illimitée de nombres positifs constamment décroissants*

$$C_1,\quad C_2,\quad C_3,\quad \ldots,\quad C_n,\quad \ldots \tag{5}$$

*a une valeur limite finie et déterminée*

$$C = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right); \tag{6}$$

*cette valeur limite est connue dans l'Analyse sous le nom* constante d'Euler [1].

Posons ensuite, pour abréger,

$$s_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}, \tag{7}$$

nous aurons, en vertu de (1),

$$s_n = C_n + \log n < 1 + \log n, \tag{8}$$

d'où, immédiatement,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p} = s_{n+p}-s_n = \log\frac{n+p}{n} + C_{n+p} - C_n,$$

ce qui donnera, en vertu de (2),

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p} < \log\frac{n+p}{n}. \tag{9}$$

Remarquons maintenant que la série de puissances, obtenue pour $e^x$, donnera toujours, pour $x$ positif, $e^x > 1+x$, nous aurons, $\alpha$ étant positif, tandis que $n$ désigne un positif entier,

$$\prod_{q=1}^{q=p}\left(1+\frac{\alpha}{n+q}\right) < e^{\alpha(s_{n+p}-s_n)} < \left(\frac{n+p}{n}\right)^{\alpha}, \tag{10}$$

$$\prod_{q=1}^{q=n}\left(1+\frac{\alpha}{q}\right) < e^{\alpha s_n} < e^{\alpha} n^{\alpha}. \tag{11}$$

---

[1] *Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. VII, (1734-35), 1740, p. 157; *Institutiones calculi differentialis*, 1755, p. 144.

### VI. — Valeur limite de Gauss.

Désignons par $x$ une quantité finie, n'étant pas égale à un nombre entier non positif, nous avons à étudier maintenant la suite illimitée de fonctions

$$(1) \qquad \Gamma_1(x), \quad \Gamma_2(x), \quad \Gamma_3(x), \quad \ldots, \quad \Gamma_n(x), \quad \ldots,$$

où nous avons posé généralement

$$(2) \qquad \Gamma_n(x) = \frac{(n-1)!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

A cet effet, posons pour $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n = s_{n-1} - \log n,$$

nous aurons, en vertu de la formule (6) du paragraphe V,

$$\lim_{n=\infty} a_n = C$$

et l'identité évidente

$$n^x = e^{x \log n} = e^{x s_{n-1} - x a_n},$$

ce qui donnera, $n$ étant supposé plus grand que l'unité, pour $\Gamma_n(x)$, cette autre expression

$$(3) \qquad \Gamma_n(x) = \frac{e^{-a_n x}}{x} \prod_{p=1}^{p=n-1} \frac{e^{\frac{x}{p}}}{1+\frac{x}{p}}.$$

Cela posé, introduisons la transcendante entière *du genre un*, définie par le produit de Weierstrass [1]

$$(4) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx}\, x \prod_{p=1}^{p=\infty} \left(1+\frac{x}{p}\right) e^{-\frac{x}{p}},$$

où C désigne la constante d'Euler, nous aurons la valeur limite

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).$$

---

[1] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1876, p. 11-60; *Œuvres*, t. II, p. 77-124.

La valeur limite (5) est introduite dans l'Analyse déjà par Euler [1]; cependant c'est Gauss [2] qui a indiqué, le premier, le rôle fondamental que cette valeur limite joue dans la théorie de la fonction gamma.

Le produit infini

$$(6) \qquad \Gamma(x) = \frac{e^{-Cx}}{x} \prod_{p=1}^{p=\infty} \frac{e^{\frac{x}{p}}}{1 + \frac{x}{p}}$$

a été trouvé simultanément par Schlœmilch [3] et Newman [4].

Supposons maintenant à la fois $|x| \leqq G < \infty$ et, en désignant par $m$ un nombre entier non négatif, tel que $|x+m| \geqq \delta > 0$, puis désignons par $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il est possible de déterminer un positif entier N, de sorte que nous aurons pour $n \geqq N$,

$$(7) \qquad |\Gamma(x) - \Gamma_n(x)| < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur, satisfaisant aux conditions indiquées, qu'on a attribuée à $x$.

En effet, l'inégalité (7) est une conséquence immédiate de la convergence uniforme, pour les valeurs susdites de $x$, du produit (4).

Dans ce qui suit, nous désignons par $\Omega$ l'ensemble des valeurs de $x$ qui satisfont aux deux conditions susdites.

Remarquons ensuite que la valeur réciproque de $\Gamma_n(x)$ est, pour tous les $n$, une transcendante entière, et que la valeur limite $\Gamma(x)$ a la même propriété, puis considérons un positif entier quelconque, mais déterminé, $n$, l'ensemble de nombres positifs $|\Gamma_n(x)|$ obtenus en faisant parcourir à $x$ l'ensemble $\Omega$ a une limite supérieure $G_n < \infty$ et une limite inférieure $g_n > 0$.

De plus, la limite supérieure G de la suite

$$(8) \qquad G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad \ldots, \quad G_n, \quad \ldots$$

---

(1) En 1729 (*Correspondance math. et phys.*, t. I, p. 2).

(2) *Œuvres*, t. III, p. 145.

(3) *Grunert Archiv.*, t. IV, 1844, p. 171; *Analytische Studien*, t. I, 1848, p. 45.

(4) *Cambridge and Dublin math. Journal*, t. III, 1848, p. 57-60.

est *finie*, tandis que la limite inférieure $g$ de cette autre suite

(9) $$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_n, \quad \ldots$$



est plus grande que zéro.

Cela posé, il est très facile de démontrer le lemme suivant :

I. *Supposons que $x$ parcourt l'ensemble susdit $\Omega$, puis posons*

(10) $$\frac{\Gamma_{n+p}(x)}{\Gamma_n(x)} = 1 + \omega_{n,p}, \qquad \frac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_{n+p}(x)} = 1 + \omega'_{n,p},$$

*où $p$ désigne un positif entier quelconque, il est possible de déterminer un positif entier N dépendant de $\varepsilon$ seulement, de sorte que nous aurons constamment pour $n \geqq$ N,*

(11) $$|\omega_{n,p}| < \varepsilon, \qquad |\omega'_{n,p}| < \varepsilon;$$

*$\varepsilon$ désigne, comme ordinairement, une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut.*

En effet, posons

$$\Gamma_{n+p}(x) = \Gamma_n(x) + \delta_{n,p},$$

nous aurons

$$\delta_{n,p} = [\Gamma(x) - \Gamma_n(x)] - [\Gamma(x) - \Gamma_{n+p}(x)],$$

ce qui donnera

(12) $$|\delta_{n,p}| \leqq |\Gamma(x) - \Gamma_n(x)| + |\Gamma(x) - \Gamma_{n+p}(x)|.$$

De plus, les définitions (10) donnent

$$\omega_{n,p} = \frac{\delta_{n,p}}{\Gamma_n(x)}, \qquad \omega'_{n,p} = \frac{-\delta_{n,p}}{\Gamma_{n+p}(x)},$$

d'où immédiatement

(13) $$|\omega_{n,p}| \leqq \frac{|\delta_{n,p}|}{g}, \qquad |\omega'_{n,p}| \leqq \frac{|\delta_{n,p}|}{g},$$

$g$ désignant la limite inférieure de la suite (9).

Cela posé, les inégalités (7), (12) et (13) nous conduiront immédiatement au but.

La définition (2) de $\Gamma_n(x)$ s'écrira sous cette autre forme aussi

(14) $$x(x+1)\ldots(x+n-1) = \frac{(n-1)!\,n^x}{\Gamma_n(x)},$$

d'où immédiatement ces deux autres formules

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{y(y+1)\dots(y+n-1)} = \frac{\Gamma_n(y)}{\Gamma_n(x)} n^{x-y}, \tag{15}$$

$$(-1)^n \binom{-x}{n} = \frac{n^{x-1}}{\Gamma_n(x)}. \tag{16}$$

De plus, nous aurons, pour tous les $n$,

$$\Gamma_n(1) = 1,$$

ce qui donnera pour la valeur limite

$$\Gamma(1) = 1. \tag{17}$$

## VII. — Propriétés fondamentales de gamma.

Pour déduire des propriétés fondamentales de la fonction gamma, remarquons tout d'abord que la définition (2) du paragraphe VI donnera immédiatement, pour tous les $n$,

$$\Gamma_n(x+1) = x\Gamma_n(x)\frac{n}{n+x},$$

ce qui donnera pour la valeur limite $\Gamma(x)$ cette équation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{1}$$

d'où, plus généralement, $n$ étant un positif entier,

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x). \tag{2}$$

Supposons particulièrement $x = 1$, la formule (17) du paragraphe VI donnera cette autre

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{3}$$

Posons ensuite dans (2) $n+1$ au lieu de $n$, nous aurons, après une légère transformation,

$$(x+n)\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

d'où, en posant $x = -n$, la proposition suivante :

I. *La fonction gamma est une fonction méromorphe dans toute partie finie du plan des $x$, en admettant les pôles simples*

$$x = 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad \ldots; \tag{4}$$

*le résidu qui correspond à $x = -n$ est égal à*

$$\lim_{x=-n} (x+n)\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{5}$$

La définition de $\Gamma_n(x)$ donnera de même

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right)} \frac{n}{n-x},$$

d'où, en faisant croître au delà de toute limite le positif entier $n$, cette autre formule fondamentale

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{6}$$

qui est due à Euler (¹).

Remarquons que $\Gamma(x)$ est positive pour des valeurs positives de $x$, nous aurons, en posant dans (6), $x = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = +\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

De plus, la définition de $\Gamma_n(x)$ donnera immédiatement pour $n > 1$ ces trois autres formules :

$$2^{x-1}\Gamma_n(x) = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)(2n)^x}{2x(2x+2)\ldots(2x+2n-2)},$$

$$2^{x-1}\Gamma_n\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)(2n)^x}{(2x+1)(2x+3)\ldots(2x+2n-1)}\sqrt{n},$$

$$\frac{1}{2}\Gamma_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{n},$$

d'où immédiatement

$$2^{2x-1}\Gamma_n(x)\Gamma_n\left(x+\frac{1}{2}\right) = \Gamma_n\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_{2n}(2x),$$

(¹) *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. XVI (1771), 1772, p. 136.

ce qui donnera, si nous faisons croître au delà de toute limite le positif entier $n$,

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) = \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)2^{2x-1}. \tag{8}$$

Les formules (6) et (8) nous sont indispensables dans ce qui suit.

La formule (8) est un cas particulier d'une formule plus générale trouvée presque contemporainement par Gauss [1] et Legendre [2].

La formule (6) du paragraphe VI donnera immédiatement cette autre

$$\log\Gamma(x) = -Cx - \log x + \sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{x}{p} - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)\right], \tag{9}$$

où il est permis d'appliquer les valeurs principales pour tous les logarithmes, parce qu'ils sont tous réels pour $x$ positif.

Dans l'ensemble $\Omega$ des valeurs de $x$ qui satisfont aux conditions $|x| \leq G < \infty$ et $|x+m| \geq g > 0$, où $m$ désigne un entier non négatif tel que $m \leq G$, la série qui figure au second membre de (9) est uniformément convergente, et tous ses termes sont des fonctions analytiques de $x$.

Cela posé, un théorème fondamental de Weierstrass [3] montrera que les dérivées d'un ordre quelconque de $\log\Gamma(x)$ peuvent être obtenues en dérivant terme à terme la série en question, ce qui donnera, pour la fonction de Gauss [4]

$$\Psi(x) = D_x \log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \tag{10}$$

le développement suivant

$$\Psi(x) = -C + \sum_{p=0}^{p=\infty}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{x+p}\right), \tag{11}$$

et la série ainsi obtenue est de nouveau uniformément convergente dans l'ensemble $\Omega$.

---

(1) *Œuvres*, t. III, p. 149-150.
(2) *Exercices de calcul intégral*, t. II, 1817, p. 23.
(3) *Œuvres*, t. II, p. 205-209.
(4) *Œuvres*, t. III, p. 153.

Remarquons encore que la définition (10) pour $\Psi(x)$ donnera ces deux autres identités

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\Psi(x), \qquad D_x\left[\frac{1}{\Gamma(x)}\right] = -\frac{\Psi(x)}{\Gamma(x)}, \tag{12}$$

qui nous seront très utiles plus tard.

De plus, les formules (6) et (8) donnent pour $\Psi(x)$,

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi \cot \pi x, \tag{13}$$

$$2\Psi(2x) = \Psi(x) + \Psi\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2\log 2; \tag{14}$$

nous mentionnons encore ces deux valeurs numériques

$$\Psi(1) = -C, \tag{15}$$

$$\Psi(n) = -C + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}, \tag{16}$$

où $n$ désigne un entier plus grand que l'unité.

## VIII. — Une valeur limite.

Désignons par

$$a_{0,n}, \quad a_{1,n}, \quad a_{2,n}, \quad \ldots, \quad a_{p,n}, \quad \ldots \tag{1}$$

une suite illimitée dont les éléments satisfont aux conditions suivantes :

1° Pour une valeur quelconque de $p$, nous aurons

$$\lim_{n=\infty} a_{p,n} = a_p, \tag{2}$$

où $a_p$ désigne un nombre fini et déterminé

2° Posons pour tous les $p$,

$$a_{p,n} = a_p(1 + \delta_{p,n}), \tag{3}$$

puis désignons par $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il doit être possible de déterminer un positif entier N indépendant de $p$, de sorte que nous aurons, pour tous les $p$,

$$|\delta_{p,n}| < \varepsilon, \qquad n \geqq N; \tag{4}$$

3° La série infinie

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{5}$$

est absolument convergente.

Cela posé, désignons par $\Lambda$ l'ensemble des nombres réels $\lambda$ tels que la série infinie nouvelle

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n n^\lambda \tag{6}$$

est encore absolument convergente, puis désignons par $\rho$ la limite supérieure de l'ensemble $\Lambda$, nous aurons certainement $\rho \geqq 0$, parce que l'ensemble $\Lambda$ contient l'élément $\lambda = 0$.

Introduisons ensuite $2p$ paramètres *finis*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_p, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots, & \beta_p, \end{array} \right. \tag{7}$$

puis posons pour toutes les valeurs entières non négatives de $n$,

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s)\ldots\Gamma(\alpha_p + n + s)}{\Gamma(\beta_1 + n + s)\ldots\Gamma(\beta_p + n + s)} a_{s+n}, \tag{8}$$

$$B_n = \frac{\Gamma(\beta_1 + n)\Gamma(\beta_2 + n)\ldots\Gamma(\beta_p + n)}{\Gamma(\alpha_1 + n)\Gamma(\alpha_2 + n)\ldots\Gamma(\alpha_p + n)} A_n, \tag{9}$$

il est possible d'indiquer un positif entier $m$, tel que pour $n \geqq m$, les $A_n$ et les $B_n$ ont tous un sens, même pour des valeurs zéro ou négatives entières des $\alpha$ ou des $\beta$.

Cela posé, nous avons à déduire la valeur limite

$$\lim_{n=\infty} B_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s, \tag{10}$$

pourvu que nous ayons pour le composant réel

$$\lambda = \Re(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_p), \tag{11}$$

une de ces deux inégalités

$$\lambda \leqq 0, \qquad \lambda < \rho; \tag{12}$$

De plus, nous avons, sur la valeur limite (10), le théorème suivant :

I. *Supposons pour* $s = 1, 2, 3, \ldots, p$,

$$|\alpha_s| \leqq G, \qquad |\beta_s| \leqq G, \tag{13}$$

*puis supposons pour le composant réel* (11)

$$\lambda \leqq 0, \qquad \lambda \leqq \rho - \delta, \tag{14}$$

*où* $\delta$ *désigne une quantité positive arbitrairement petite, mais d'une grandeur assignable, la suite*

$$B_0, \quad B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_n, \quad \ldots \tag{15}$$

*convergera uniformément vers sa valeur limite* (10).

A cet effet, supposons tout d'abord, pour les paramètres (7), les valeurs entières non positives exclues, tous les termes de la suite (15) ont un sens, et les formules (15) du paragraphe VI et (2) du paragraphe VII donnent cette autre

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(y+n)} = \frac{\Gamma_n(y)\,\Gamma(x)}{\Gamma_n(x)\,\Gamma(y)}\, n^{x-y}, \tag{16}$$

d'où, en désignant par $s$ un positif entier quelconque,

$$\frac{\Gamma(x+n+s)\,\Gamma(y+n)}{\Gamma(y+n+s)\,\Gamma(x+n)} = \frac{\Gamma_n(x)\,\Gamma_{n+s}(y)}{\Gamma_{n+s}(x)\,\Gamma_n(y)}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{x-y}.$$

Posons ensuite, pour abréger,

$$\alpha_{s,n} = \prod_{q=1}^{q=p} \frac{\Gamma_n(\alpha_q)\,\Gamma_{n+s}(\beta_q)}{\Gamma_{n+s}(\alpha_q)\,\Gamma_n(\beta_q)}, \tag{17}$$

la série infinie $B_n$ se présente sous la forme plus commode

$$B_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{\lambda} \alpha_{s,n}\, a_{s,n}. \tag{18}$$

Quant à $\alpha_{s,n}$, nous aurons pour tous les $s$,

$$\lim_{n=\infty} \alpha_{s,n} = 1; \tag{19}$$

de plus, posons

$$\alpha_{s,n} = 1 + \delta_{s,n},$$

une combinaison des lemmes III du paragraphe II et I du paragraphe VII donnera toujours pour $n > N$,

$$(20) \qquad |\delta_{s,n}| < \varepsilon,$$

quel que soit le positif entier $s$.

Cela posé, introduisons un positif entier $m$ qui croîtra au delà de toute limite avec $n$, mais de sorte que

$$\lim_{n=\infty} \frac{m}{n} = 0,$$

ce qui a lieu, si nous posons par exemple

$$(21) \qquad m+1 > \left|\sqrt[3]{n}\right| \geqq m,$$

puis posons

$$(22) \qquad B_n = B'_n + B''_n,$$

où $B'_n$ est la somme des $m+1$ premiers termes qui figurent au second membre de la formule (18), puis étudions tout d'abord la somme $B'_n$.

A cet effet, posons pour abréger

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^\lambda = 1+\delta'_{s,n}, \qquad a_{s,n} = a_s(1+\delta''_{s,n}),$$

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^\lambda \alpha_{s,n} a_{s,n} = a_s(1+\omega_{s,n}),$$

nous aurons constamment pour $n \geqq N$,

$$|\omega_{s,n}| < \varepsilon,$$

et pourvu que $0 \leqq s \leqq m$, ce qui donnera

$$(23) \qquad B'_n - \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s = \sum_{s=0}^{s=m} \omega_{s,n} a_s - \sum_{s=m+1}^{s=\infty} a_s.$$

Quant à la somme $B''_n$, nous aurons $\lambda \geqq 0$, ce qui donnera

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^\lambda \leqq s^\lambda,$$

puis désignons par A la limite supérieure de la suite

$$|\alpha_{s,n}|\,|1+\delta''_{s,n}| \qquad (s = m+1,\ m+2,\ \ldots),$$

nous aurons évidemment

$$(24) \qquad |B''_n| < A \sum_{s=m+1}^{s=\infty} s^{\lambda} |a_s|.$$

Cela posé, désignons par $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut; il est possible de déterminer un positif entier N, de sorte que nous aurons pour $n \geqq N$,

$$|B''_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{s=0}^{s=m} \omega_{s,n} a_s\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{s=m+1}^{s=\infty} a_s\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui donnera finalement pour $n \geqq N$,

$$\left|B_n - \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\right| < \varepsilon.$$

Dans la démonstration précédente, nous avons supposé

$$(25) \quad |\alpha_s + r - 1| \geqq g > 0, \qquad |\beta_s + r - 1| \geqq g > 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, p),$$

tandis que $r$ désigne un positif entier tel que $r \geqq G + 1$.

Or, supposons égale à zéro la limite inférieure de $|\alpha + r - 1|$, puis posons $\beta = \alpha + r$, nous aurons, $q$ étant un positif entier suffisamment grand,

$$\Gamma(\alpha + q) = \Gamma(\beta + q - r),$$

ce qui montrera comment on peut modifier la démonstration précédente dans le cas où toutes les conditions (25) ne sont pas remplies.

# CHAPITRE III.

## LA FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE.

### IX. — L'équation différentielle de Gauss.

Des intégrales particulières des équations différentielles obtenues en transformant des cas particuliers de l'équation de Gauss

$$(1) \qquad x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

se présentant souvent dans nos recherches suivantes, il nous semble utile de donner ici l'intégrale complète de l'équation générale susdite.

A cet effet, cherchons tout d'abord une intégrale particulière de (1) sous forme d'une série de puissances

$$(2) \qquad y = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^{k+n}, \qquad a_0 = 1,$$

supposée convergente, c'est-à-dire que les différentiations exigées de l'équation (1) peuvent être effectuées terme à terme. Introduisons ensuite dans (1) les séries de puissances obtenues pour $y$, $y'$ et $y''$, puis cherchons le coefficient complet de la puissance

$$x^{k+n},$$

nous aurons, pour $n \geq 1$, la formule nécessaire pour la détermination des coefficients $a_n$,

$$(3) \quad (k+n)(k+n-1+\gamma)a_n = (k+n-1+\alpha)(k+n-1+\beta)a_{n-1},$$

et dans le cas $n = 0$,

$$(4) \qquad k(k-1+\gamma) = 0.$$

ce qui donnera, pour l'exposant inconnu $k$, les valeurs suivantes :

$$k = 0, \qquad k = 1 - \gamma,$$

d'où, en vertu de (3), respectivement

$$(5) \quad a_n = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n(\gamma + n - 1)} a_{n-1}, \qquad a_n = \frac{(\alpha - \gamma + n)(\beta - \gamma + n)}{n(n + 1 - \gamma)} a_{n-1}.$$

Cela posé, introduisons la *fonction hypergéométrique* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, définie pour $|x| < 1$ par la série de puissances

$$(6) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots,$$

nous aurons, en vertu de (5), ces deux intégrales particulières de (1),

$$(7) \quad y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

valables toutes les deux, pourvu que $|x| < 1$.

De telles intégrales particulières sont désignées comme *indépendantes* si une relation de la forme

$$A y_1 + B y_2 = 0,$$

où les coefficients A et B sont indépendants de $x$, n'est possible que dans le cas trivial $A = B = 0$. Cette définition adoptée, nous verrons que les deux intégrales particulières (7) sont certainement indépendantes, pourvu que $\gamma$ ne soit pas égal à un entier.

Supposons que $\gamma = 1$, les deux intégrales susdites deviennent identiques; une seconde intégrale particulière est, dans ce cas, représentée par la valeur limite

$$(8) \qquad \lim_{\gamma=1} \frac{y_1 - y_2}{\gamma - 1}.$$

Pour toutes les autres valeurs entières de $\gamma$, une seule des intégrales (7) deviendra illusoire; il faut remplacer $y_1$ et $y_2$ respectivement par

$$\frac{y_1}{\Gamma(\gamma)}, \quad \frac{y_2}{\Gamma(2 - \gamma)},$$

selon que $\gamma < 1$ ou $\gamma > 1$, et puis appliquer des valeurs limites analogues à (8) pour obtenir deux intégrales particulières indépendantes.

Pour trouver des intégrales particulières de l'équation de Gauss, appliquables pour $|x| > 1$, nous avons à transformer l'équation susdite en introduisant, comme variable indépendante, la valeur réciproque de $x$, ce qui donnera l'équation nouvelle

$$(9) \qquad (1-x)f''\left(\frac{1}{x}\right) + [(\alpha+\beta+1)-\gamma x]\,x f'\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha\beta x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

où nous désignons par

$$f'\left(\frac{1}{x}\right), \quad f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce que deviennent $f'(z)$ et $f''(z)$ si nous y remplaçons $z$ par $\frac{1}{x}$.

Posons maintenant

$$y = f\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis différentions deux fois par rapport à $x$ cette identité, nous aurons les formules différentielles

$$(10) \qquad f'\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2\frac{dy}{dx}, \qquad f''\left(\frac{1}{x}\right) = x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx},$$

d'où immédiatement, en vertu de (9), cette autre équation différentielle

$$(11) \qquad x^2(1-x)y'' + [(\gamma-2)x-(\alpha+\beta-1)]\,xy' + \alpha\beta y = 0$$

qui est de la même forme que (1).

Introduisons ensuite dans (11) la série de puissances (2), le procédé que nous venons d'indiquer donnera, si nous remplaçons ensuite $x$ par sa valeur réciproque, ces deux intégrales particulières de (1),

$$(12) \qquad \begin{cases} y_3 = x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \dfrac{1}{x}\right), \\ y_4 = x^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

valables, pourvu que $|x| > 1$.

Posons maintenant dans (1),

$$y = x^{-\delta}z, \qquad z = x^{\delta}y,$$

les identités évidentes

$$(\alpha) \qquad y' = x^{-\delta}\left(z' - \frac{\delta}{x}z\right), \qquad y'' = x^{-\delta}\left[z'' - \frac{2\delta}{x}z' + \frac{\delta(\delta+1)}{x^2}z\right]$$

donneront, au lieu de (1), cette autre équation différentielle

$$(13)\quad \begin{cases} x^2(1-x)z'' + [\gamma - 2\delta - (\alpha + \beta - 2\delta + 1)x]xz' \\ \qquad + \{\delta(\delta - \gamma + 1) + [\delta(\alpha + \beta - \delta) - \alpha\beta]x\}z = 0 \end{cases}$$

qui admet les intégrales particulières

$$(14)\quad y_1 = x^\delta F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad y_2 = x^{\delta-\gamma+1} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

$$(15)\quad \begin{cases} y_3 = x^{\delta-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \dfrac{1}{x}\right), \\ y_4 = x^{\delta-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \dfrac{1}{x}\right), \end{cases}$$

valables selon que $|x| < 1$ ou $|x| > 1$.

Transformons ensuite l'équation (13) en introduisant $x^2$ comme variable indépendante, les formules différentielles

$$f'(x^2) = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}, \qquad f''(x^2) = \frac{1}{4x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{4x^3}\frac{dy}{dx},$$

où nous avons posé

$$y = f(x),$$

donnent, si nous remplaçons encore $\delta$ par $\frac{1}{2}\delta$, l'équation différentielle suivante :

$$(16)\quad \begin{cases} (1-x^2)y'' + \left[\dfrac{2\gamma - 2\delta - 1}{x} - (2\alpha + 2\beta - 2\delta + 1)x\right]y' \\ \qquad + \left[\dfrac{\delta(\delta - 2\gamma - 2)}{x^2} + \delta(2\alpha + 2\beta - \delta) - 4\alpha\beta\right]y = 0, \end{cases}$$

qui possède les intégrales particulières

$$(17)\quad y_1 = x^\delta F(\alpha, \beta, \gamma, x^2), \qquad y_2 = x^{\delta-2\gamma+2} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x^2),$$

$$(18)\quad \begin{cases} y_3 = x^{\delta-2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \dfrac{1}{x^2}\right), \\ y_4 = x^{\delta-2\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \dfrac{1}{x^2}\right), \end{cases}$$

applicables selon que $|x| < 1$ ou $|x| > 1$.

Enfin, prenons dans (16) $ix$ comme variable indépendante, nous aurons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+x^2)y'' + \left[\frac{2\gamma-2\delta-1}{x} + (2\alpha+2\beta-2\delta+1)x\right]y' \\ &\qquad + \left\{\frac{\delta(\delta-2\gamma-2)}{x^2} - [\delta(2\alpha+2\beta-\delta)-4\alpha\beta]\right\}y = 0, \end{aligned}\right.$$

dont les intégrales particulières se déterminent immédiatement si nous remplaçons, dans (17) et (18), $x$ par $ix$.

## X. — Sur une valeur limite.

Le théorème I, démontré dans le paragraphe VIII, donnera immédiatement la valeur limite

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty} F(\alpha, \beta+n, \gamma+n, x) = (1-x)^{-\alpha},$$

où $n$ désigne un positif entier tandis qu'il faut supposer finis les trois paramètres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ et, de plus, $|x| < 1$. En outre, nous aurons la proposition suivante :

I. *Supposons*

$$(2)\qquad |\alpha| \leqq G \quad |\beta| \leqq G, \quad |\gamma| \leqq G, \quad |x| \leqq 1-\delta,$$

*la fonction hypergéométrique* $F(\alpha, \beta+n, \gamma+n, x)$ *convergera uniformément vers sa valeur limite* (1).

Or il est possible de généraliser beaucoup et la valeur limite (1) et la proposition I.

A cet effet, désignons par $\Omega$ l'ensemble de toutes les valeurs complexes de $\gamma$ qui satisfont à la condition

$$|\gamma+n| \geqq \delta > 0,$$

où $n$ est égal à zéro ou à un négatif entier quelconque, puis supposons finis $\alpha$ et $\beta$ et $|x| < 1$. Nous aurons à démontrer la valeur limite

$$(3)\qquad \lim_{|\gamma|=\infty} F(\alpha, \beta+\gamma, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha},$$

où $\gamma$ doit varier, de sorte qu'il appartienne toujours à l'ensemble $\Omega$. De plus, nous aurons aussi le théorème suivant :

11. *Supposons à la fois*

(4) $$|\alpha| \leqq G, \qquad |\beta| \leqq G, \qquad |x| \leqq 1 - \delta,$$

*puis désignons par* $\varepsilon$ *une quantité positive donnée auparavant et qui soit aussi petite qu'on le veut ; il est possible de déterminer un nombre positif* R, *tel que pour* $|\gamma| \geqq R$, *nous aurons constamment*

(5) $$|F(\alpha, \beta + \gamma, \gamma, x) - (1 - x)^{-\alpha}| < \varepsilon,$$

*pourvu que* $\gamma$ *appartienne à l'ensemble* $\Omega$ ; *c'est-à-dire que, dans ce cas, la fonction hypergéométrique* $F(\alpha, \beta + \gamma, \gamma, x)$ *convergera uniformément vers sa valeur limite* (3).

Quant à la démonstration de la formule (1) et du théorème que nous venons d'énoncer, nous posons pour abréger

$$P_m = \frac{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+1)\ldots(\beta+\gamma+m-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+m-1)}, \qquad P_0 = 1,$$

ce qui donnera, pour la fonction hypergéométrique en question, cette autre expression

(6) $$F(\alpha, \beta + \gamma, \gamma, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \binom{-\alpha}{m} x^m P_m ;$$

de plus, nous aurons, en désignant par $p$ un positif entier quelconque,

(7) $$P_{m+p} = \frac{(\beta+\gamma+m)(\beta+\gamma+m+1)\ldots(\beta+\gamma+m+p-1)}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+m+p-1)} P_m,$$

Cela posé, déterminons un positif entier $n$ qui croîtra au delà de toute limite en même temps que $|\gamma|$, mais de sorte que $n : |\gamma|$ s'évanouira, ce qui a lieu si nous posons par exemple

(8) $$n + 1 > |\sqrt[3]{\gamma}| \geqq n.$$

Posons ensuite

(9) $$F(\alpha, \beta + \gamma, \gamma, x) = A_n + B_n,$$

où

(10) $$A_n = \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m \binom{-\alpha}{m} x^m P_m ;$$

nous avons tout d'abord à étudier la somme $A_n$.

A cet effet, appliquons l'identité évidente

$$\frac{\beta+\gamma+r}{\gamma+r} = 1 + \frac{\beta}{\gamma+r}.$$

le lemme II du paragraphe II donnera

$$(11)\qquad \log\left(\frac{\beta+\gamma+r}{\gamma+r}\right) = \frac{\beta}{\gamma+r}\,k_r, \qquad |k_r| < \frac{2|\gamma+r|-|\beta|}{2|\gamma+r|-2|\beta|};$$

c'est-à-dire que nous aurons constamment, pour $r \leqq n$,

$$(12)\qquad |k_r| < \frac{2|\gamma|+2n-|\beta|}{2|\gamma|-2n-2|\beta|} = k.$$

Posons ensuite

$$(13)\qquad P_m = 1 + \omega_m,$$

nous aurons, en vertu de (11), (12), et du lemme I du paragraphe II,

$$|\omega_m| < 2k \sum_{r=1}^{r=m-1} \frac{|\beta|}{|\gamma|-r},$$

d'où, à plus forte raison, pour $m \leqq n$

$$(14)\qquad |\omega_m| < \frac{2kn|\beta|}{|\gamma|-n}.$$

Or, supposons $|\gamma| \geqq 3$, ce qui est permis; nous aurons de même $2n < |\gamma|$, d'où en vertu de (12) et (14),

$$(15)\qquad |\omega_m| < \frac{3|\gamma|-|\beta|}{|\gamma|-2|\beta|}\,\frac{4\left|\gamma^{\frac{1}{3}}\beta\right|}{|\gamma|} = \lambda_n \qquad (m \leqq n),$$

ce qui donnera de même

$$(16)\qquad |P_m| < 1 + \lambda_n \qquad (m \leqq n).$$

Cela posé, nous aurons évidemment

$$(17)\qquad (1-x)^{-\alpha} - A_n = \sum_{r=n+1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-\alpha}{r} x^r - \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{-\alpha}{r} x^r \omega_r,$$

d'où, en supposant remplies les conditions (4),

$$(18)\qquad |(1-x)^{-\alpha} - A_n| < \sum_{r=n+1}^{r=\infty} (-1)^r \binom{-G}{r} (1-\delta)^r + \lambda'_n \delta^{-G},$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda'_n = \frac{3|\gamma| + G}{|\gamma| - 2G} \, \frac{4G\left|\gamma^{\frac{1}{2}}\right|}{|\gamma|} > \lambda_n. \tag{19}$$

Quant à la seconde partie $B_n$ de la fonction hypergéométrique définie par la formule (9), supposons d'abord

$$\mathfrak{R}(\gamma + m - 1) > 0,$$

nous aurons aussi

$$|\gamma + m + r| > r + 1,$$

$r$ étant un positif entier, ce qui donnera, en vertu des formules (7) et (11) du paragraphe V,

$$|P_{m+p}| < |P_m| \prod_{r=1}^{r=p} \left(1 + \frac{|\beta|}{r}\right) < |P_m| e^{|\beta|} p^{|\beta|},$$

d'où, à plus forte raison, parce que $m > 0$,

$$|P_{m+p}| < |P_m| e^{|\beta|} (m + p)^{|\beta|}. \tag{20}$$

Supposons ensuite

$$-\omega - 1 < \mathfrak{R}(\gamma) < -\omega,$$

où $\omega$ désigne un positif entier, nous aurons, pour $m \leq \omega$, en vertu de la formule (10) du paragraphe V,

$$|P_m| \leq \prod_{r=0}^{r=m-1} \left(1 + \frac{|\beta|}{\omega - r}\right) < \left(\frac{\omega}{\omega - m + 1}\right)^{|\beta|}.$$

Or, supposons $m \geq n + 1$, nous aurons toujours

$$\omega < |\gamma| < (n + 1)^2 \leq m^2,$$

ce qui donnera finalement, pour $m \leq \omega$,

$$|P_m| < m^{2|\beta|} < (1 + \lambda_n) m^{2|\beta|}, \tag{21}$$

où $\lambda_n$ est le nombre positif défini dans la formule (15).

Quant à $P_{\omega+1}$, nous trouvons

$$|P_{\omega+1}| < |P_\omega| \cdot \left|1 + \frac{\beta}{\gamma + \omega}\right| < |P_\omega| \left(1 + \frac{|\beta|}{\delta}\right),$$

où $\delta$ est la quantité positive qui figure dans la définition de l'ensemble $\Omega$; c'est-à-dire que nous aurons, en vertu de (21),

$$(22) \qquad |P_{\omega+1}| < (1+\lambda_n)(\omega+1)^{\epsilon|\beta|}\left(1+\frac{|\beta|}{\delta}\right).$$

Soit ensuite $p$ un positif entier, nous aurons, en vertu de (20) et (22),

$$(23) \qquad |P_{\omega+p+1}| < (1+\lambda_n)\left(1+\frac{|\beta|}{\delta}\right)e^{|\beta|}(\omega+p+1)^{\epsilon|\beta|}.$$

Cela posé, combinons les inégalités (16), (20), (21), (22) et (23), nous aurons finalement, pour $m > n$, la valeur majorante

$$(24) \qquad |P_m| < (1+\lambda_n)\left(1+\frac{|\beta|}{\delta}\right)e^{|\beta|}m^{\epsilon|\beta|},$$

ce qui donnera immédiatement

$$(25) \qquad |B_n| < (1+\lambda_n)\left(1+\frac{|\beta|}{\delta}\right)e^{|\beta|}\sum_{r=n+1}^{r=\infty}\left|(-1)^r\binom{-\alpha}{r}x^r\right|r^{\epsilon|\beta|},$$

et, en particulier, pourvu que les conditions (4) soient remplies

$$(26) \qquad |B_n| < (1+\lambda'_n)\left(1+\frac{G}{\delta}\right)e^{G}\sum_{r=n+1}^{r=\infty}(-1)^r\binom{-G}{r}(1-\delta)^r r^{\epsilon|\beta|},$$

où $\lambda'_n$ désigne le nombre positif défini par la formule (19).

Il saute aux yeux que les formules (17) et (25) donnent immédiatement la valeur limite (1), tandis que le théorème II est une conséquence des formules correspondantes (18) et (26).

## XI. — La formule de Gauss.

Pour étudier sur la circonférence du cercle $|x| = 1$ la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, nous posons $x = e^{i\theta}$, où $\theta$ est un angle réel, puis désignons par $u_n$ le terme général de la série susdite, la définition de la fonction $\Gamma_n(x)$ donnera immédiatement pour $u_n$ cette expression

$$(1) \qquad u_n = \frac{\Gamma_n(\gamma)}{\Gamma_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}e^{in\theta}.$$

Supposons ensuite

$$\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0, \tag{2}$$

et que $\gamma$ ne soit égal ni à zéro, ni à un négatif entier, la formule (1) montrera clairement que $F(\alpha, \beta, \gamma, e^{i\theta})$ est absolument convergente pour toutes les valeurs réelles de $\theta$, si nous supposons encore finis les trois paramètres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

De plus, nous aurons les propositions suivantes :

I. *Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des constantes finies fixes, telles que les conditions susdites sont remplies, la série hypergéométrique* $F(\alpha, \beta, \gamma, e^{i\theta})$ *est uniformément convergente dans l'ensemble des valeurs réelles de $\theta$ qui satisfont à la condition* $|\theta| \leq G$.

II. *Supposons*

$$|\alpha|\leq G,\quad |\beta|\leq G,\quad |\gamma|\leq G,\quad |\gamma+m|\geq g>0,\quad \Re(\gamma-\alpha-\beta)\geq g>0, \tag{3}$$

*où $m$ désigne un entier non négatif tel que $m\leq G$, la série hypergéométrique* $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ *est toujours uniformément convergente.*

Cela posé, un théorème fondamental de Weierstrass ([1]) donnera cette autre proposition :

III. *Supposons remplies les conditions* (3), *puis attribuons à deux quelconques des trois paramètres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des valeurs fixes, la fonction hypergéométrique* $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ *est une fonction analytique du troisième des paramètres susdits.*

Pour déterminer maintenant la somme de la série $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$, nous prenons pour point de départ les deux identités

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, 1)-F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, 1), \tag{4}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)-F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)=\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, 1), \tag{5}$$

déduites immédiatement par un calcul simple. Remarquons ensuite que $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ est évidemment symétrique par rapport aux deux

([1]) *Œuvres*, t. II, p. 205-209.

paramètres $\alpha$ et $\beta$, la formule (4) nous donnera une identité analogue, si nous y permutons $\alpha$ et $\beta$.

Appliquons ensuite sur le n$^{\text{ième}}$ terme de la série

$$\beta F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, 1)$$

l'identité évidente

$$\beta+n=(\gamma+n)+(\beta-\gamma),$$

nous aurons

$$\beta F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, 1)=\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1)-(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1), \tag{6}$$

d'où une nouvelle formule analogue en permutant $\alpha$ et $\beta$.

Posons maintenant dans (6) $\alpha+1$ au lieu de $\alpha$, puis éliminons, en vertu de (4), la fonction

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, 1),$$

il en résulte

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=(\gamma-\beta)F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, 1); \tag{7}$$

posons encore dans (4) $\gamma+1$ au lieu de $\gamma$, puis éliminons, à l'aide de (5), la fonction

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, 1),$$

nous aurons de même

$$\alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, 1)+(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)=\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \tag{8}$$

d'où finalement, en vertu de (7), la formule récursive

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1). \tag{9}$$

Or, il faut remarquer que la formule (9) n'est démontrée que dans le cas où $\mathfrak{R}(\gamma-\alpha-\beta)>1$; cependant la proposition III montrera que notre formule en question est applicable, pourvu que les conditions (3) soient remplies.

Posons maintenant dans (9) successivement $\gamma+1$, $\gamma+2$, ..., $\gamma+n-1$ au lieu de $\gamma$, puis multiplions toutes les équations ainsi obtenues, nous aurons la formule plus générale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma_n(\gamma)\Gamma_n(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma_n(\gamma-\alpha)\Gamma_n(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1), \tag{10}$$

de sorte que la valeur limite évidente

$$\lim_{n=\infty} F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)=1,$$

donnera immédiatement la formule fondamentale de Gauss [1]

$$(11)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

valable, pourvu que les conditions (3) soient remplies.

C'est précisément la formule (10) qui a conduit Gauss à la découverte de la fonction gamma représentée comme valeur limite de $\Gamma_n(x)$.

## XII. — L'intégrale eulérienne de première espèce.

La formule de Gauss que nous venons de démontrer nous fournit un simple moyen pour la détermination de l'intégrale eulérienne de première espèce [2] :

$$(1)\qquad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = B(x, y),$$

où il faut supposer

$$(2)\qquad \Re(x) > 0, \quad \Re(y) > 0.$$

A cet effet, appliquons la formule binomiale, nous aurons pour $0 < |t| < 1$

$$(3)\qquad t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{y-1}{n} t^{n+x-1},$$

où la série qui figure au second membre est uniformément convergente par rapport à $t$ si nous avons

$$0 < \delta \leq t \leq 1-\delta_1 < 1,$$

tandis que tous ses termes sont intégrables par rapport à $t$ de $t=0$ à $t=1$, pourvu que la première des conditions (2) soit remplie.

Effectuons maintenant *formellement* sur tous les termes de la

---

(1) *OEuvres*, t. III, p. 147.

(2) *Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. V (1730-31), 1738, p. 36-57. Voir, du reste, les citations dans mon Traité *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 131, Leipzig, 1906.

série (3) les intégrations susdites, nous aurons la série

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\binom{y-1}{n}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{x}\,\mathrm{F}(1-y,x,x+1,1),$$

qui est absolument convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(y)>0$.

Posons ensuite $x=\alpha+i\beta$, $\alpha$ et $\beta$ étant des nombres réels, puis supposons

$$0\leqq\delta\leqq 1,\qquad 0\leqq\delta_1\leqq 1,$$

nous aurons pour $\alpha>0$, tandis que $n$ désigne un entier non négatif,

$$\left|\int_{\delta}^{1-\delta_1}t^{x+n-1}\,dt\right|\leqq\int_{\delta}^{1-\delta_1}t^{\alpha+n-1}\,dt\leqq\frac{1}{\alpha+n};$$

c'est-à-dire que la série obtenue formellement en intégrant terme à terme par rapport à $t$, la série qui figure au second membre de (3) est uniformément convergente dans tout l'intervalle $0\leqq t\leqq 1$, ce qui donnera

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{1}{x}\,\mathrm{F}(1-y,x,x+1,1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(5)\qquad \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Posons dans (5) $t=\sin^2\varphi$, nous aurons

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2y-1}(\sin\varphi)^{2x-1}\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

formule qui équivaut à (5).

Considérons encore l'intégrale plus générale

$$(7)\qquad \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}\,dt,$$

où il faut admettre

$$(8)\qquad \mathfrak{R}(\alpha)>0,\quad \mathfrak{R}(\gamma-\alpha)>0,\quad |x|<1.$$

Développons ensuite, à l'aide de la formule binomiale, la puissance $(1-tx)^{-\beta}$; un procédé analogue à celui qui nous a conduit à la formule (5) donnera ici, en vertu de (5),

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta} d, \tag{9}$$

où il faut supposer encore que $\gamma$ ne soit égal ni à zéro, ni à un négatif entier. Multiplions par $1 : \Gamma(\gamma)$ les deux membres de (9), la condition susdite peut être supprimée.

La formule (9) est un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale trouvée par Kummer ([1]).

Les démonstrations appliquées dans ce paragraphe et dans le précédent sont tirées de mon *Traité de la fonction gamma* ([2]).

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. XV, 1835, p. 138 ff.

([2]) *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 56, 131, Leipzig, 1906.

# CHAPITRE IV.

## SUR UNE CLASSE DE SÉRIES INFINIES.

### XIII. — Application d'un théorème de Weierstrass.

Désignons par $\Omega$, la frontière $\lambda$ y comptée, un continu simple avec l'origine O comme centre de rayonnement, puis définissons dans $\Omega$ une suite illimitée de fonctions

$$F_0(x),\quad F_1(x),\quad F_2(x),\quad \ldots,\quad F_n(x),\quad \ldots, \tag{1}$$

qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1° La fonction $F_n(x)$ est, pour une valeur quelconque de $n$, analytique dans $\Omega$;

2° $F_n(x)$ a dans l'origine O un zéro précisément de l'ordre $n$.

Cela posé, désignons par $g$ la limite inférieure des rayons vecteurs, comptés de O aux points de la frontière $\lambda$, toutes les fonctions de la suite (1) sont analytiques pour $|x| \leq g - \delta$; c'est-à-dire que nous aurons, pour une valeur quelconque de $n$, une série de puissances de la forme

$$F_n(x) = b_{n,0}x^n + b_{n,1}x^{n+1} + b_{n,2}x^{n+2} + \ldots, \tag{2}$$

dont le rayon de convergence ne peut jamais être plus petit que $g$, et nous aurons de plus, pour tous les $n$,

$$|b_{n,0}| > 0. \tag{3}$$

Nous supposons ensuite que la série infinie

$$f(x) = A_0F_0(x) + A_1F_1(x) + \ldots + A_nF_n(x) + \ldots, \tag{4}$$

dont les coefficients $A_n$ sont indépendants de $x$, soit uniformément convergente dans le continu $\Omega$, la frontière $\lambda$ y comptée, ce qui donnera, en vertu d'un théorème fondamental de Weierstrass [1], que la somme $f(x)$ de la série (4) est dans le continu $\Omega$, la frontière $\lambda$ exclue peut-être, une fonction analytique de $x$. C'est-à-dire que la série de puissances obtenues pour $f(x)$ :

$$(5)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

a son rayon de convergence égal à $g$ au moins.

De plus, le théorème susdit de Weierstrass donnera pour les coefficients $a_n$ de la série de puissances (5) cette expression générale

$$(6)\qquad a_n = b_{0,n} A_0 + b_{1,n-1} A_1 + \ldots + b_{n,0} A_n.$$

Inversement, supposons donnée la série de puissances (5), puis supposons possible, avec les propriétés susdites, la série (4), où les fonctions $F_n(x)$ sont données, les formules (6) et ses analogues nous permettent de déterminer successivement, à l'aide des coefficients $a_n$ de la série de puissances donnée (4), tous les coefficients $A_n$. Posons

$$(7)\qquad A_n = \alpha_{0,n} a_0 + \alpha_{1,n} a_1 + \ldots + \alpha_{n,n} a_n;$$

les coefficients $\alpha_{q,r}$ sont parfaitement déterminés par les coefficients $b_{q,r}$ qui figurent dans les séries de puissances (2) et les analogues; c'est-à-dire que les coefficients $\alpha_{q,r}$ deviennent les mêmes quels que soient les coefficients de la série de puissances (5).

L'équation (6) montre clairement que la détermination (7) de $A_n$ est univoque, pourvu qu'il existe, et la possibilité de la résolution des équations (6) est une conséquence immédiate de l'inégalité (3). C'est-à-dire que le développement (4), supposé possible, est parfaitement déterminé.

Ces remarques préliminaires faites, nous avons à démontrer, sur la série (4), les théorèmes fondamentaux suivants :

I. *Soit m un positif entier déterminé, la nouvelle série infinie*

$$(8)\qquad \sum_{s=m}^{s=\infty} A_s x^{-m} F_s(x)$$

*est aussi uniformément convergente dans le continu* $\Omega$.

---

(1) *OEuvres*, t. II, p. 205-209.

En effet, soit

$$R_n(x) = A_{n+1}F_{n+1}(x) + A_{n+2}F_{n+2}(x) + \ldots$$

le terme de reste de la série donnée (4), puis désignons par $\varepsilon$ une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, il est possible de déterminer un positif entier N, tel que nous aurons toujours pour $n \geqq N$

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

quelle que soit la valeur de $x$ prise du continu $\Omega$.

Supposons ensuite $|x| \geqq R > 0$, nous aurons de même pour $n \geqq N$

$$\left|\frac{R_n(x)}{x^m}\right| < \frac{\varepsilon}{R^m},$$

de plus, nous aurons, pour $|x| \leqq g - \delta$, la série de puissances

$$\frac{R_n(x)}{x^m} = \sum_{s=n+1}^{s=\infty} (a_s - A_0 b_{0,s} - A_1 b_{1,s} - \ldots - A_n b_{n,s}) x^{s-m},$$

où $n$ désigne un positif entier quelconque, égal à 1 au moins, et la convergence uniforme dans le continu $\Omega$ de la série (8) est évidente.

Désignons maintenant par

(9) $$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

une suite illimitée qui ne contient pas l'élément zéro et telle que la série de puissances

(10) $$G_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{n,r} \varphi_{n+r} x^{n+r},$$

formée à l'aide de (2), a, pour tous les $n$, son rayon de convergence plus grand que zéro, nous aurons le théorème suivant :

II. *Supposons que la série de puissances* (5) *soit développable dans une série de la forme*

(11) $$f(x) = B_0 G_0(x) + B_1 G_1(x) + \ldots + B_n G_n(x) + \ldots,$$

*dont les coefficients* $B_n$ *sont indépendants de* $x$ *et qui est uniformément convergente dans un continu simple avec l'origine* O *comme centre de* *rayonnement, le coefficient général* $B_n$ *se détermine à l'aide de la formule* (7), *si nous y remplaçons simplement* $a_n$ *par* $a_n : \varphi_n$ ; *c'est-à-dire que nous aurons*

$$(12) \qquad B_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\alpha_{r,n} a_r}{\varphi_r}.$$

En effet, nous aurons, en vertu de (10), au lieu de (7), cette autre formule

$$(13) \qquad a_n = \varphi_n \sum_{r=0}^{r=n} b_{r,n-r} B_r.$$

Il est digne de remarque que la formule (13) donnera immédiatement cette autre proposition :

III. *Supposons que la série de puissances*

$$(14) \qquad f_1(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 x + a_2\varphi_2 x^2 + \ldots$$

*ait son rayon plus grand que zéro, supposons ensuite que les deux séries* (4) *et* (11) *existent avec les propriétés susdites, nous aurons pour tous les* $n$

$$(15) \qquad B_n = A_n.$$

Ces deux derniers théorèmes, presque évidents, jouent un rôle fondamental dans la théorie générale des séries de la forme (4), parce qu'ils nous permettent de déduire par des principes tout à fait élémentaires toutes les séries connues de ce genre, sous forme beaucoup généralisée, et un grand nombre d'autres séries.

## XIV. — Étude d'une série particulière.

Pour obtenir un exemple élémentaire des théorèmes développés dans le paragraphe précédent, prenons pour point de départ la série de puissances

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

qui a son rayon de convergence égal à R, la règle de Cauchy [1] pour

---

[1] *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, 1821, p. 318.

la multiplication de deux séries de puissances donnera immédiatement ce développement

$$(2)\qquad e^{-x}f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

où nous avons posé généralement

$$(3)\qquad A_n = \frac{a_n}{0!} - \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n a_0}{n!},$$

et où la série de puissances ainsi obtenue a précisément le rayon de convergence R.

Cela posé, nous aurons pour la fonction $f(x)$ un développement de la forme (4) du paragraphe XIII; savoir,

$$(4)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n e^x;$$

le continu $\Omega$ correspondant est composé de l'intérieur et de la circonférence du cercle $|x| = R - \delta$; de plus nous aurons

$$(5)\qquad F_n(x) = x^n e^x,$$

et pour le coefficient général $b_{n,r}$ l'expression suivante

$$(6)\qquad b_{n,r} = \frac{1}{r!};$$

c'est-à-dire que ce coefficient est indépendant de $n$.

Comme une application du théorème II du paragraphe XIII, nous avons tout d'abord *formellement* à déduire un développement de la forme

$$(7)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n x^n (1-x)^{-\nu-n}.$$

A cet effet, nous écrivons sous la forme suivante la formule (7)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B_n}{\Gamma(\nu+n)} \Gamma(\nu+n) x^n (1-x)^{-\nu-n},$$

de sorte que nous aurons pour tous les $n$

$$G_n(x) = x^n(1-x)^{-\nu-n} = \frac{1}{\Gamma(\nu+n)} \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+r)}{r!} x^{n+r};$$

c'est-à-dire que nous avons posé généralement

$$\varphi_{n+r} = \Gamma(\nu + n + r) = r!\,\Gamma(\nu + n)(-1)^r \binom{-\nu - n}{r},$$

de sorte que la formule (12) du paragraphe XIII donnera immédiatement

$$(8) \qquad B_n = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^{n-r} \binom{\nu + n - 1}{n - r} a_r.$$

Pour déterminer maintenant d'une manière *rigoureuse* l'existence de la formule (7) et pour déterminer son domaine de convergence, écrivons sous la forme suivante la formule (7) :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = (1 - x)^{-\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(\frac{x}{1-x}\right)^n,$$

nous aurons, en posant

$$\frac{x}{1-x} = y, \qquad x = \frac{y}{1+y}, \qquad 1 - x = \frac{1}{1+y},$$

cette autre formule équivalente

$$(9) \qquad (1+y)^{-\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \left(\frac{y}{1+y}\right)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n y^n.$$

Cela posé, remarquons tout d'abord que la fonction qui figure au premier membre de (9) est certainement analytique aux environs du point $y = 0$, la série de puissances qui figure au second membre de la même formule a certainement son rayon de convergence plus grand que zéro. Soit ensuite $x = \alpha$ une valeur singulière de $f(x)$, la fonction qui figure au premier membre de (9) a la valeur singulière correspondante

$$(10) \qquad y = \frac{\alpha}{1-\alpha};$$

de plus, nous remarquons expressément que la fonction susdite a généralement la valeur singulière $y = -1$ qui correspond à $x = \infty$ et est généralement valeur singulière pour le facteur $(1+y)^{-\nu}$ aussi.

Soit maintenant A l'ensemble formé du nombre 1 et les valeurs absolues des nombres obtenus par (10) quand $\alpha$ parcourt l'ensemble des valeurs singulières de la fonction donnée $f(x)$, puis désignons par $r$ la limite inférieure de A, nous aurons toujours

$$(11) \qquad 1 \geqq r \geqq \frac{R}{1+R},$$

où R désigne le rayon de convergence de la série de puissances donnée (1).

En effet, l'ensemble A contient l'élément $+1$; de plus, soit

$$\alpha = \rho e^{i\theta}$$

une valeur singulière de $f(x)$, nous aurons toujours $\rho \geqq R$, d'où

$$\left|\frac{\alpha}{1-\alpha}\right|^2 = \frac{\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} \geqq \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2} \geqq \frac{R^2}{(1+R)^2},$$

ce qui donnera immédiatement les inégalités (11).

Quant au rayon de convergence $a$ de la série de puissances qui figure au second membre de (9), nous aurons ensuite $a = r$; c'est-à-dire que la série qui figure au second membre de (7) est absolument convergente pourvu que

$$(12) \qquad \left|\frac{x}{1-x}\right| < a,$$

de sorte que nous avons à étudier séparément les deux cas suivants :

1° Soient $a = 1$, $x = \alpha + i\beta$, nous aurons immédiatement, en vertu de (12),

$$(13) \qquad \alpha < \frac{1}{2};$$

2° Dans le second cas possible $a < 1$, la condition (12) est remplie, pourvu que $x$ soit situé à l'intérieur du cercle L ($a$) avec l'équation

$$(14) \qquad \left(\alpha + \frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{(1-a^2)^2},$$

dont les points d'intersection avec l'axe réel ont les abscisses

$$(15) \qquad -\frac{a}{1-a}, \quad \frac{a}{1+a}.$$

On voit que l'abscisse positive qui figure dans (15) est toujours, pour $a < 1$, plus petite que $\frac{1}{2}$.

Cela posé, notre série (7) est évidemment uniformément convergente, pourvu que

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| \leq a - \delta,$$

où $\delta$ désigne une quantité positive, mais arbitrairement petite, d'où la proposition suivante :

I. *Soit* $a$ *le rayon de convergence de la série de puissances qui figure au second membre de* (9), *la série* (7) *est toujours uniformément convergente dans l'intérieur et sur la circonférence du cercle* $L(a-\delta)$, *et ce domaine représente certainement un continu simple avec l'origine* O *comme centre de rayonnement.*

Supposons $a = 1$, les abscisses (15) deviennent respectivement

$$-\frac{1-\delta}{\delta}, \quad \frac{1-\delta}{2-\delta};$$

c'est-à-dire que le cercle $L(1-\delta)$ est arbitrairement grand et son point d'intersection avec l'axe positif est aussi rapproché de la ligne $\alpha = \frac{1}{2}$ qu'on le veut.

Il est digne de remarquer, ce me semble, que la proposition élémentaire I contient la théorie complète des séries de fonctions qui sont des généralisations très étendues de la fonction hypergéométrique ordinaire

### XV. — Sur une transformation générale.

Pour donner une application plus générale du théorème II démontré dans le paragraphe XIII, nous introduirons les $2p$ paramètres finis

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p, \end{cases}$$

desquels aucun ne soit égal à zéro ou à un négatif entier; puis nous poserons généralement

$$\varphi_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_p+n)}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que des fonctions de la suite illimitée, dont l'élément général est

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_{n,s}x^{n+s}, \tag{3}$$

nous formerons une autre suite illimitée de fonctions, en posant pour tous les $n$

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} b_{n,s}\varphi_{n+s}x^{n+s}. \tag{4}$$

Cela posé, nous aurons ce théorème général :

I. *Supposons qu'une série de puissances quelconque avec le rayon de convergence* R *soit développable en série de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x), \tag{5}$$

*dont les coefficients sont indépendants de $x$ et qui est uniformément convergente dans un continu simple $\Omega$ avec l'origine* O *comme centre de rayonnement et dépendant seulement de* R, *nous aurons aussi un développement de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n G_n(x), \tag{6}$$

*et les deux séries* (5) *et* (6) *ont le même champ de convergence uniforme, la frontière du continu $\Omega$ exceptée peut-être.*

Pour démontrer par la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$ ce théorème, nous n'avons évidemment qu'à étudier le cas le plus simple qui correspond à $p=1$, ce qui donnera, pour tous les $n$,

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+s)}{\Gamma(\beta+n+s)} b_{n,s}x^{n+s}, \tag{7}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont finis tous les deux sans être égaux à zéro ou à un négatif entier.

Cela posé, il est évidemment possible de déterminer deux nombres entiers non négatifs $m$ et $q$, tels que

$$\mathfrak{R}(\alpha) > -m+1, \qquad \mathfrak{R}(\beta-\alpha) > -q+1. \tag{8}$$

Posons ensuite

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{r=0}^{r=m-1} a_r x^r$$

et, pour $n \leqq m-1$,

$$\Phi_n(x) = \mathrm{F}_n(x) - \sum_{r=0}^{r=m-n-1} b_{n,r} x^{n+r};$$

toutes ces $m$ fonctions ont évidemment dans l'origine un zéro de l'ordre $m$ au moins.

De plus, nous aurons, en vertu des formules (4) et (16) du paragraphe XIII,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=m-1} \mathrm{A}_n \Phi_n(x) + \sum_{n=m}^{n=\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{F}_n(x); \tag{9}$$

car cette identité peut être obtenue de (4) du paragraphe XIII en y supprimant les puissances

$$x^0, \quad x^1, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{m-1},$$

c'est-à-dire en posant

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = 0,$$

$$b_{q,r} = 0, \qquad q + r \leqq m-1.$$

Soit maintenant $t$ une variable réelle, telle que

$$0 \leqq t \leqq 1;$$

la série suivante

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(tx)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} = & \sum_{n=0}^{n=m-1} \mathrm{A}_n \Phi_n(tx) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} \\ & + \sum_{n=m}^{n=\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{F}_n(tx) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

formée immédiatement de (9), est uniformément convergente par rapport à $t$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, pourvu que $x$ appartienne au continu $\Omega$, c'est-à-dire que la série est intégrable terme à terme par rapport à $t$ de $t = 0$ à $t = 1$.

Posons ensuite, pour $n \geqq m$,

$$(11) \qquad \Psi_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha + q)} \int_0^1 F_n(tx) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} dt,$$

mais pour $0 \leqq n \leqq m - 1$,

$$(12) \qquad X_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha + q)} \int_0^1 \Phi_n(tx) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} dt,$$

et posons enfin

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha + q)} \int_0^1 \varphi(tx) t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} dt;$$

toutes ces fonctions sont des fonctions analytiques de $x$ dans le continu $\Omega$. De plus, nous aurons, en vertu de (10),

$$(13) \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{n=m-1} A_n X_n(x) + \sum_{n=m}^{n=\infty} A_n \Psi_n(x),$$

et la série qui figure au second membre de (13) est, en vertu du théorème I, démontré dans le paragraphe XIII, uniformément convergente dans le continu $\Omega$.

Cela posé, soit $|x| \leqq g - \delta$, où $g$ désigne la limite inférieure des rayons vecteurs comptés de l'origine O aux points de la frontière du continu simple $\Omega$, puis posons, pour $0 \leqq n \leqq m - 1$,

$$\Psi_n(x) = X_n(x) + \sum_{r=0}^{r=m-n-1} \frac{\Gamma(\alpha + n + r)}{\Gamma(\beta + n + q + r)} b_{n,r} x^{n+r},$$

nous aurons pour tous les $n$

$$(14) \qquad \Psi_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + r)}{\Gamma(\beta + n + q + r)} b_{n,r} x^{n+r};$$

posons encore

$$\chi(x) = \psi(x) + \sum_{r=0}^{r=m-1} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\beta + q + r)} a_r x^r,$$

nous aurons de même

$$(15) \qquad \chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n+q)} a_n x^n;$$

toutes les séries de puissances (14), (15) ont leur rayon de convergence égal à $g$ au moins.

De plus, la formule (13) donnera cette autre

$$(16) \qquad \chi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \Psi_n(x),$$

où la série qui figure au second membre est uniformément convergente dans le continu $\Omega$.

En effet, appliquons le théorème III du paragraphe XIII, nous verrons que la formule (16) est déduite de (18) en ajoutant aux deux membres les puissances supprimées

$$x^0, \quad x^1, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{m-1}.$$

Cela posé, un théorème fondamental de Weierstrass (1) montrera que la série qui figure au second membre de (16) peut être différentiée terme à terme par rapport à $x$ et que la série ainsi obtenue est encore uniformément convergente dans le continu $\Omega$. L'opération fonctionnelle

$$(17) \qquad x D_x x^n + \rho x^n = (\rho + n) x^n$$

est, par conséquent, aussi applicable terme à terme sur la série susdite. Appliquons ensuite l'opération (17) pour

$$\rho = \beta + q - 1, \quad \beta + q - 2, \quad \ldots, \quad \beta,$$

puis posons

$$g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)} a_n x^n,$$

nous aurons la formule nouvelle

$$(18) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n G_n(x),$$

(1) *OEuvres*, t. II, p. 205-209.

où la série qui figure au second membre est encore uniformément convergente dans le continu $\Omega$.

Remplaçons ensuite dans (18), pour tous les $n$, $a_n$ par

$$a_n \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+n)},$$

nous aurons précisément la série (6) qui correspond à $p=1$.

Or, prenons pour point de départ cette formule particulière (6), puis appliquons la méthode que nous venons d'expliquer en permutant seulement $\alpha$ et $\beta$, nous retrouvons précisément la formule initiale (5); c'est-à-dire que les deux séries (5) et (6) ont précisément le même champ de convergence *uniforme*.

La portée du théorème que nous venons de démontrer est évidente. Remarquons particulièrement que la formule (6) étant connue pour des valeurs particulières des $\alpha_r$ et $\beta_\nu$, elle est valable aussi pour des valeurs quelconques de ces paramètres.

Le contenu de ce Chapitre est extrait presque textuellement d'une Lettre que j'ai adressée à M. Ch. Neumann, à Leipzig [1].

---

[1] *Comptes rendus de la Société de Leipzig*, t. LXI, 1909, p. 33-61.

# DEUXIÈME PARTIE.

## LES FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES.

# CHAPITRE V.

## PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

### XVI. — Définition générale.

Nous désignons comme fonction métasphérique de l'argument $x$, du paramètre $\nu$ et de l'indice $\rho$ une fonction $K^{\nu,\rho}(x)$ qui est assujettie à satisfaire à ces deux équations fonctionnelles

$$(1)\qquad (1-x^2)\,D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)x\,K^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x),$$

$$(2)\qquad 2(\rho+\nu)x\,K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x),$$

mais qui est du reste aussi arbitraire que ces conditions le permettent.

Ajoutons maintenant les deux équations susdites, nous aurons

$$(3)\qquad (1-x^2)\,D_x K^{\nu,\rho}(x) = -\rho x\,K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x),$$

équation qui peut évidemment, dans la définition de $K^{\nu,\rho}(x)$, remplacer une des formules originelles (1) et (2).

Éliminons encore de (1) et (2) la fonction $xK^{\nu,\rho}(x)$, nous aurons

$$(4)\quad (1-x^2)\,D_x K^{\nu,\rho}(x) = \frac{(\rho+2\nu)(\rho+2\nu-1)}{2(\rho+\nu)}\,K^{\nu,\rho-1}(x) - \frac{\rho(\rho+1)}{2(\rho+\nu)}\,K^{\nu,\rho+1}(x).$$

Quant à $\nu$ et $\rho$, nous supposons qu'ils soient des nombres finis, quelconques, de plus, nous supposons naturellement que la définition susdite d'une fonction métasphérique ait un sens pour un ensemble infini de valeurs de $x$; c'est-à-dire que pour de telles valeurs de $x$ les trois fonctions

$$K^{\nu,\rho-1}(x), \quad K^{\nu,\rho}(x), \quad K^{\nu,\rho+1}(x)$$

ont des valeurs finies et déterminées. Supposons pour fixer les idées que l'ensemble susdit des valeurs de $x$ soit un intervalle de l'axe des nombres réels qui ne contient aucun des deux points $x = \pm 1$.

Cela posé, il est très facile de démontrer le théorème suivant :

I. *La fonction métasphérique la plus générale est intégrale de l'équation différentielle, linéaire et homogène du second ordre*

$$(5) \qquad (1-x^2)y'' - (1+2\nu)xy' + \rho(\rho+2\nu)y = 0, \qquad y = K^{\nu,\rho}(x);$$

*c'est-à-dire que toute fonction métasphérique est une fonction analytique de son argument $x$, les trois valeurs $x = \pm 1$ et $x = \infty$ exclues peut-être.*

En effet, l'équation (1) nous détermine $D_x K^{\nu,\rho}(x)$, pourvu que $x$ appartienne à l'intervalle susdit; posons ensuite dans (3) $\rho+1$ au lieu de $\rho$, nous aurons

$$(6) \qquad (1-x^2)D_x K^{\nu,\rho+1}(x) = -(\rho+1)xK^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu)K^{\nu,\rho}(x),$$

d'où, en éliminant, en vertu de (1), la fonction $xK^{\nu,\rho+1}(x)$,

$$(7) \qquad D_x K^{\nu,\rho+1}(x) = x\, D_x K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu)K^{\nu,\rho}(x).$$

De l'équation (7) on conclut qu'il soit permis de différentier par rapport à $x$ l'équation (1), ce qui donnera

$$\begin{aligned}(1-x^2)D_x^2 K^{\nu,\rho}(x) &= (\rho+2\nu+2)x\, D_x K^{\nu,\rho}(x) \\ &\quad + (\rho+2\nu)K^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)D_x K^{\nu,\rho+1}(x),\end{aligned}$$

d'où, en vertu de (7), immédiatement l'équation différentielle (5).

Appliquons ensuite l'identité évidente

$$D_x(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} = -(1+2\nu)x(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}};$$

l'équation (5) s'écrira sous cette autre forme aussi

$$(8) \qquad D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x K^{\nu,\rho}(x)\right] = -\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(x).$$

La théorie générale des équations différentielles linéaires montrera immédiatement que l'intégrale complète de (5) est analytique dans toute l'étendue du plan des $x$, les valeurs $x = \pm 1$ et $x = \infty$ exclues.

Or, dans le Chapitre suivant nous démontrerons directement pour la fonction métasphérique la propriété susdite.

Conformément à la définition du paragraphe IX nous désignons comme *indépendantes* deux fonctions métasphériques $K_1^{\nu,\rho}(x)$ et $K_2^{\nu,\rho}(x)$ quand une identité de la forme

$$aK_1^{\nu,\rho}(x) + bK_2^{\nu,\rho}(x) = 0 \tag{9}$$

n'est possible que dans le cas trivial $a = b = 0$; nous supposons naturellement indépendants de $x$ les deux coefficients $a$ et $b$.

Cela posé, nous aurons cet autre théorème fondamental :

II. *Soient* $K_1^{\nu,\rho}(x)$ *et* $K_2^{\nu,\rho}(x)$ *deux fonctions métasphériques indépendantes, la fonction métasphérique la plus générale se présente sous la forme*

$$K^{\nu,\rho}(x) = a(\nu, \rho)K_1^{\nu,\rho}(x) + b(\nu, \rho)K_2^{\nu,\rho}(x), \tag{10}$$

*où les coefficients $a$ et $b$, indépendants de $x$, sont des fonctions périodiques de $\rho$ en ayant la période additive $+1$, savoir*

$$a(\nu, \rho+1) = a(\nu, \rho), \qquad b(\nu, \rho+1) = b(\nu, \rho). \tag{11}$$

En effet, une fonction métasphérique quelconque, étant intégrale de l'équation (5), se présentera toujours sous la forme (10); introduisons ensuite dans (1) et (3) l'expression (10), la condition nécessaire et suffisante pour que $K^{\nu,\rho}(x)$ satisfasse à ces deux équations fonctionnelles est évidemment

$$[a(\nu, \rho) - a(\nu, \rho+1)]K_1^{\nu,\rho+1}(x) + [b(\nu, \rho) - b(\nu, \rho+1)]K_2^{\nu,\rho+1}(x) = 0,$$

ce qui nous conduira, en vertu de (9), immédiatement aux conditions de périodicité (11).

Cela posé, nous n'avons évidemment qu'à déterminer deux fonctions métasphériques indépendantes convenables.

### XVII. — Les quatre fonctions fondamentales.

Des intégrales particulières de l'équation différentielle (5) du paragraphe XVI, généralement désignée comme l'équation de Legendre, se déterminent immédiatement à l'aide des formules (16), (17) et (18) du paragraphe IX, si nous posons

$$2\gamma - 2\delta - 1 = 0, \qquad 2\alpha + 2\beta - 2\delta + 1 = 2\nu + 1,$$

$$\delta(\delta - 2\gamma - 2) = 0, \qquad \delta(2\alpha + 2\beta - \delta) - 4\alpha\beta = \rho(\rho + 2\nu),$$

ce qui donnera immédiatement

$$\delta = 0, \qquad \gamma = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = -\frac{\rho}{2}, \qquad \beta = \frac{\rho + 2\nu}{2};$$

car il est évident que nous n'avons besoin que d'un seul système de valeurs des paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$.

Cela posé, l'équation de Legendre a évidemment pour $|x| < 1$ ces deux intégrales particulières

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu + \frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = F_1^\rho(x), \\ y_2 = xF\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu + \frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = G_1^\rho(x), \end{cases}$$

tandis qu'il faut admettre, pour $|x| > 1$,

$$(2)\qquad \begin{cases} y_3 = x^\rho F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, 1 - \nu - \rho, \frac{1}{x^2}\right) = F_2^\rho(x), \\ y_4 = x^{-\rho-2\nu} F\left(\nu + \frac{\rho}{2}, \nu + \frac{1+\rho}{2}, 1 + \nu + \rho, \frac{1}{x^2}\right) = G_2^\rho(x). \end{cases}$$

On voit que les intégrales $y_1$ et $y_2$ sont toujours indépendantes, ce qui a lieu pour $y_3$ et $y_4$ aussi, sauf dans le cas où $\rho + \nu$ est égal à un nombre entier; dans ce cas, il faut appliquer des valeurs limites analogues à celles que nous avons indiquées dans le paragraphe IX. Cependant nous ne nous arrêtons pas à une étude plus ample de ce problème.

Or, les intégrales particulières susdites trouvées, il nous reste encore à déterminer des combinaisons linéaires et homogènes des deux groupes des fonctions hypergéométriques, de sorte que les fonctions ainsi obtenues satisfassent aux équations fonctionnelles du paragraphe XVI, c'est-à-dire deviennent des fonctions métasphériques.

Considérons d'abord le cas $|x| < 1$, nous avons à déterminer les deux coefficients A et B dans l'expression

$$(3)\qquad K^{\nu,\rho}(x) = A(\nu, \rho) F_1^\rho(x) + B(\nu, \rho) G_1^\rho(x).$$

A cet effet, introduisons dans les équations (1) et (3) du paragraphe XVI la fonction (3), puis appliquons ces deux identités

$$(1-x^2)\,D_x F_1^\rho(x) = (\rho+2\nu)x F_1^\rho(x) - (\rho+1)(\rho+2\nu)G_1^{\rho+1}(x),$$
$$(1-x^2)\,D_x G_1^\rho(x) = (\rho+2\nu)x G_1^\rho(x) + F_1^{\rho+1}(x),$$

tirées directement des définitions (1); nous aurons pour A et B ces deux équations aux différences finies

$$(\rho+2\nu)A(\nu,\rho) = B(\nu,\rho+1),$$
$$B(\nu,\rho) = -(\rho+1)A(\nu,\rho+1),$$

ce qui donnera immédiatement

$$(\rho+2\nu)A(\nu,\rho) = -(\rho+2)A(\nu,\rho+2);$$

d'où finalement

$$A(\nu,\rho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}\,\omega(\nu,\rho),$$

$$B(\nu,\rho) = -\frac{2\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\,\omega(\nu,\rho+1).$$



où $\omega(\nu,\rho)$ désigne une fonction de $\nu$ et $\rho$, assujettie à satisfaire à la condition de périodicité

$$\omega(\nu,\rho+2) = -\omega(\nu,\rho),$$

mais étant du reste complètement arbitraire.

Cela posé, il est évident que ces deux fonctions particulières

$$(4)\quad M^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\pi\rho}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}\,y_1 + \frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\sin\frac{\pi\rho}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\,y_2,$$

$$(5)\quad N^{\nu,\rho}(x) = -\frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\pi\rho}{2}}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}\,y_1 + \frac{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\,y_2,$$

définies toutes les deux, pourvu que $|x| < 1$, sont des fonctions métasphériques de l'argument $x$, du paramètre $\nu$ et de l'indice $\rho$; de plus, elles sont certainement parmi les plus simples de ces sortes de fonctions.

Dans le second cas $|x| > 1$, nous obtenons de la même manière, en appliquant les deux identités

$$(1-x^2)\,D_x F_\nu^\rho(x) = (\rho+2\nu)x\,F_\nu^\rho(x) - 2(\nu+\rho)\,F_\nu^{\rho+1}(x),$$

$$(1-x^2)\,D_x G_\nu^\rho(x) = (\rho+2\nu)x\,G_\nu^\rho(x) - \frac{(\rho+1)\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\nu+\rho+1}\,G_\nu^{\rho+1}(x),$$

faciles à vérifier, ces deux autres fonctions métasphériques

$$(6)\quad P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)(2x)^\rho}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}\,F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\rho, \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(7)\quad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho+1)}\,F\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{x^2}\right),$$

où les puissances aux exposants quelconques de $x$ sont à définir conformément aux remarques faites dans le paragraphe I.

Nous remarquons expressément que les deux dernières fonctions métasphériques sont beaucoup plus simples que les deux précédentes. Dans le Chapitre suivant, nous avons à étudier le prolongement analytique de ces fonctions et à déterminer ce que deviendront P et Q, si nous faisons tourner la variable $x$ autour des trois points singuliers $x = \pm 1$ et $x = \infty$. Ces résultats obtenus, nous connaîtrons parfaitement nos deux fonctions métasphériques en question.

L'expression (7) de Q se transforme à l'aide de la formule concernant le redoublement de l'argument de la fonction $\Gamma$ développée dans le paragraphe VII, nous aurons par ce procédé

$$(8)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{2\nu-2}}{x^{\rho+2\nu}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}+n\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}+n\right)}{n!\,\Gamma(\nu+\rho+n+1)}\,\frac{1}{x^{2n}},$$

$$(9)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \sqrt{\pi}\,2^{2\nu-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\rho+2\nu+2n)}{n!\,\Gamma(\rho+\nu+n+1)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{\rho+2\nu+2n}.$$

Remarquons ensuite que les formules (6) et (7) donnent immédiatement la proposition suivante :

I. *Toute fonction hypergéométrique dans laquelle la différence des deux premiers éléments est égale à $\frac{1}{2}$, est une fonction métasphérique, abstraction faite d'un simple facteur.*

En effet, nous aurons

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2^{2\beta-\alpha+1}\Gamma(\beta+1)x^\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)} Q^{\alpha-\beta,2\beta-\alpha}(x), \tag{10}$$

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha)(2x)^\alpha}{\Gamma(-\beta)} P^{\alpha-\beta,-\alpha}(x), \tag{11}$$

formules qui montrent clairement que nous n'avons qu'à étudier une seule fonction métasphérique, savoir la fonction Q. Dans le paragraphe XX, nous avons à étudier, d'un point de vue général, la transformation des fonctions P et Q l'une à l'autre.

Remarquons encore que les coefficients initiaux introduits dans les quatre fonctions particulières M, N, P et Q sont choisis de sorte que tous les coefficients des fonctions susdites qui correspondent à $\nu = \frac{1}{2}$ et $\rho$ égal à un entier non négatif deviennent des nombres *rationnels*.

Du reste, on voit que nos quatre fonctions en question deviendront illusoires pour des valeurs particulières de $\nu$ et $\rho$. Dans ce cas, il faut modifier les coefficients susdits en multipliant par des fonctions convenables de $\nu$ et $\rho$, périodiques par rapport à $\rho$ en ayant la période additive $+1$. Supposons $n$ positif entier, tandis que $\nu - n$ ne soit pas un négatif entier, la définition (6) donnera

$$P^{\nu,-n}(x) = 0. \tag{12}$$

## XVIII. — Quelques formules numériques.

Dans ce qui suit, nous avons souvent besoin de connaître les valeurs de nos quatre fonctions M, N, P et Q qui correspondent à $x = \pm 1$, ces valeurs supposées finies.

A cet effet, appliquons la formule de Gauss, démontrée dans le paragraphe XI; nous aurons, pourvu que $\mathfrak{R}(\nu) < \frac{1}{2}$,

$$F_1^\rho(\pm 1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu\right)},$$

$$G_1^\rho(\pm 1) = \pm\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}-\nu\right)},$$

où $F_1^\rho(x)$ et $G_1^\rho(x)$ désignent les fonctions hypergéométriques étudiées dans le paragraphe précédent. Appliquons ensuite les formules eulériennes concernant $\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, nous aurons ces autres expressions

$$(1) \qquad F_1^\rho(\pm 1) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}+\nu\right)\cos\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)},$$

$$(2) \qquad G_1^\rho(\pm 1) = \pm\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\sin\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}.$$

Introduisons ensuite dans les formules (4) et (5) du paragraphe XVII les expressions (1) et (2), puis appliquons la formule pour le redoublement de l'argument de la fonction $\Gamma$, nous aurons

$$M^{\nu,\rho}(\pm 1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)2^{-2\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}\left[\cos\frac{\rho\pi}{2}\cos\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\pm\sin\frac{\rho\pi}{2}\sin\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\right],$$

$$N^{\nu,\rho}(\pm 1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma(\rho+1)}\left[\pm\cos\frac{\rho\pi}{2}\sin\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)-\sin\frac{\pi\rho}{2}\cos\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\right],$$

d'où finalement

$$(3) \qquad M^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)2^{1-2\nu}\cos\nu\pi}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)},$$

$$(4) \qquad N^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin\nu\pi}{2\Gamma(\rho+1)}$$

et

$$(5)\qquad M^{\nu,\rho}(-1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)2^{1-2\nu}\cos\pi(\rho+\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)},$$

$$(6)\qquad N^{\nu,\rho}(-1) = -\frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin\pi(\rho+\nu)}{2\Gamma(\rho+1)}.$$

Remarquons encore que la formule (3) se présente sous cette autre forme

$$(7)\qquad M^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(\rho+1)}.$$

Quant aux fonctions P et Q, nous aurons aussi, pourvu que $\mathfrak{R}(\nu) < \frac{1}{2}$,

$$Q^{\nu,\rho}(1) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2^{\rho+1}\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)},$$

$$P^{\nu,\rho}(1) = \frac{2^{\rho}\Gamma(\nu+\rho)\Gamma(1-\nu-\rho)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)\Gamma\left(1-\nu-\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu\right)};$$

d'où, après des réductions simples,

$$(8)\qquad Q^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma(\rho+1)},$$

$$(9)\qquad P^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)\sin\pi(\rho+\nu)}.$$

Multiplions ensuite par $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)$ le dénominateur et le numérateur dans l'expression ainsi obtenue pour $P^{\nu,\rho}(1)$, nous aurons

$$(10)\qquad P^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{2\Gamma(2\nu)\Gamma(\rho+1)\cos\nu\pi\sin\pi(\rho+\nu)},$$

expression qui est analogue à (7).

Quant au point critique $x = -1$, nous aurons, conformément à la définition du paragraphe I,

$$(11)\qquad Q^{\nu,\rho}(-1) = Q^{\nu,\rho}(1)e^{-(\rho+2\nu)\pi i}, \qquad P^{\nu,\rho}(-1) = P^{\nu,\rho}(1)e^{\rho\pi i}.$$

Faisons ensuite croître, au delà de toute limite, la valeur absolue de $x$, nous aurons immédiatement

$$(12)\qquad \lim_{|x|=\infty} [x^{-\rho}\; P^{\nu,\rho}(x)] = \frac{2^{\rho}\Gamma(\nu+\rho)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)},$$

$$(13)\qquad \lim_{|x|=\infty} [x^{\rho+2\nu} Q^{\nu,\rho}(x)] = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu+\rho+1)2^{\rho+1}}.$$

Or, les résultats que nous venons d'obtenir exigent des éclaircissements ultérieurs. Considérons, par exemple, le point critique $x = +1$, puis désignons par O, A et B les points qui correspondent aux nombres $0$, $1$, $x$, tandis que $\varphi$ désigne l'angle OAB; les valeurs susdites sont, en vertu du célèbre théorème d'Abel ([1]), applicables, pourvu que $x$ tende vers $1$, de sorte que nous aurons

$$(14)\qquad \limsup_{x=1} |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Or, la périphérie du cercle de convergence $|x| = 1$ est le seul chemin commun des deux domaines de convergence des séries hypergéométriques qui représentent les deux groupes de fonctions métasphériques M et N, P et Q, et pour ce chemin, la condition (14) n'est pas remplie.

C'est-à-dire que nous ne pouvons pas, sans des recherches ultérieures, appliquer les valeurs numériques que nous venons de trouver pour déterminer les coefficients des identités

$$(15)\qquad \begin{cases} P^{\nu,\rho}(x) = a\, M^{\nu,\rho}(x) + b\, N^{\nu,\rho}(x), \\ Q^{\nu,\rho}(x) = a_1 M^{\nu,\rho}(x) + b_1 N^{\nu,\rho}(x) \end{cases}$$

qui représentent le prolongement des P et Q à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Dans le Chapitre suivant, nous avons à démontrer que les valeurs numériques susdites nous permettent de déterminer les coefficients qui figurent dans les formules (15).

---

([1]) *Œuvres*, t. I, p. 223. — *Voir* aussi un Mémoire de M. Pringsheim, inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie royale de Munich*, t. XXVII, 1897, p. 347.

### XIX. — Le déterminant fonctionnel.

Désignons par $y_1$ et $y_2$ deux intégrales particulières indépendantes de l'équation de Legendre, savoir

$$(1)\qquad \begin{cases} (1-x^2)y_1'' - (1+2\nu)xy_1' + \rho(\rho+2\nu)y_1 = 0, \\ (1-x^2)y_2'' - (1+2\nu)xy_2' + \rho(\rho+2\nu)y_2 = 0, \end{cases}$$

puis désignons par $\delta(x)$ le déterminant fonctionnel formé de ces deux intégrales particulières; nous aurons

$$(2)\qquad \delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}, \qquad \delta'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1'' \\ y_2 & y_2'' \end{vmatrix},$$

et les identités (1) donnent immédiatement

$$\frac{\delta'(x)}{\delta(x)} = \frac{(1+2\nu)x}{1-x^2},$$

d'où une expression de la forme

$$(3)\qquad \delta(x) = C(1-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}},$$

où C désigne un facteur indépendant de $x$.

Supposons maintenant

$$y_1 = M^{\nu,\rho}(x), \qquad y_2 = N^{\nu,\rho}(x),$$

le facteur C se détermine si nous posons simplement $x = 0$, ce qui donnera, en vertu des définitions des fonctions M et N,

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} M^{\nu,\rho}(x) & D_x M^{\nu,\rho}(x) \\ N^{\nu,\rho}(x) & D_x N^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}(1-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}};$$

d'où, en vertu de l'équation fonctionnelle (1) du paragraphe XVI, cette autre formule analogue

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} M^{\nu,\rho}(x) & M^{\nu,\rho+1}(x) \\ N^{\nu,\rho}(x) & N^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}.$$

Supposons ensuite

$$y_1 = P^{\nu,\rho}(x), \qquad y_2 = Q^{\nu,\rho}(x);$$

le facteur C correspondant se détermine, si nous multiplions par $x^{2\nu+1}$ les deux membres de la formule correspondante (3), et puis faisons croître au delà de toute limite la valeur absolue de $x$, ce qui donnera

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} P^{\nu,\rho}(x) & D_x P^{\nu,\rho}(x) \\ Q^{\nu,\rho}(x) & D_x Q^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}-\nu}.$$

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} P^{\nu,\rho}(x) & P^{\nu,\rho+1}(x) \\ Q^{\nu,\rho}(x) & Q^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}.$$

### XX. — Les trois « invariants » d'une fonction métasphérique.

Les équations fonctionnelles du paragraphe XVI, que nous avons prises comme définition des fonctions métasphériques, nous permettent de soumettre le paramètre et l'indice d'une telle fonction à certaines transformations simples qui nous conduisent toujours à d'autres fonctions métasphériques, abstraction faite d'un simple facteur peut-être.

1° Posons, dans les équations fonctionnelles (1) et (3) du paragraphe XVI, $-\rho-2\nu$ au lieu de $\rho$, nous retrouvons précisément ces mêmes équations fonctionnelles prises dans l'ordre inverse, ce qui donnera une identité de la forme

$$(1) \qquad K^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = K_1^{\nu,\rho}(x),$$

d'où le théorème suivant :

I. *La fonction* $K^{\nu,-\rho-2\nu}(x)$ *est une fonction métasphérique de l'argument* $x$, *du paramètre* $\nu$ *et de l'indice* $\rho$.

Pour les deux fonctions P et Q nous aurons des identités de la forme

$$P^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = a\,P^{\nu,\rho}(x) + b\,Q^{\nu,\rho}(x),$$
$$Q^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = a_1 P^{\nu,\rho}(x) + b_1 Q^{\nu,\rho}(x),$$

dont les coefficients $a$, $b$, $a_1$ et $b_1$, indépendants de $x$, se déterminent si nous multiplions les formules en question respectivement par $x^{\rho+2\nu}$ et par $x^{-\rho}$; l'hypothèse $|x| = \infty$ donnera ensuite $a = b_1 = 0$ et les formules finales

$$(2) \qquad P^{\nu, -\rho-2\nu}(x) = -\frac{2^{1-2\nu}\sin\pi(\rho+2\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(3) \qquad Q^{\nu, -\rho-2\nu}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}{2^{1-2\nu}\sin\pi\rho}\,P^{\nu,\rho}(x),$$

qui nous donnent des éclaircissements complets concernant les deux formules (10) et (11) du paragraphe XVII.

De plus, il saute aux yeux que nous n'avons qu'à étudier une seule des deux fonctions P et Q, par exemple Q qui est la plus simple; car les formules (2) et (3) nous permettent de déduire, de toute formule démontrée pour la fonction Q, une fonction correspondante pour la fonction P. Dans ce qui suit, nous avons souvent à profiter de la simplification indiquée par la remarque susdite.

Quant aux deux autres fonctions métasphériques particulières M et N, nous aurons évidemment pour les séries hypergéométriques qui y figurent les identités

$$F_1^{-\rho-2\nu}(x) = F_1^{\rho}(x), \qquad G_1^{-\rho-2\nu}(x) = G_1^{\rho}(x);$$

néanmoins, les formules correspondantes pour M et N deviennent beaucoup plus compliquées.

2° Posons dans l'équation différentielle de Legendre obtenue pour les fonctions métasphériques $1-\nu$ et $-\rho-1$ au lieu de respectivement $\nu$ et $\rho$, puis mettons dans l'équation ainsi trouvée

$$K^{1-\nu, -\rho-1}(x) = (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}y,$$

nous trouvons pour $y$ précisément l'équation différentielle que nous avons prise pour point de départ, d'où le théorème suivant :

II. *Désignons par* $K^{\nu,\rho}(x)$ *une fonction métasphérique de l'argument* $x$, *du paramètre* $\nu$ *et de l'indice* $\rho$, *nous aurons*

$$(4) \qquad K^{1-\nu, -\rho-1}(x) = (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}[a P^{\nu,\rho}(x) + b Q^{\nu,\rho}(x)],$$

*où* $a$ *et* $b$ *désignent des fonctions convenables de* $\nu$ *et* $\rho$, *mais indépendantes de* $x$.

Le procédé qui nous a donné les formules (2) et (3) nous conduira ici à ces autres relations

$$(5)\quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{P}^{1-\nu,-\rho-1}(x)=\frac{\Gamma(1+\rho)\sin\pi\rho}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\nu)\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}\,\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x),$$

$$(6)\quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{Q}^{1-\nu,-\rho-1}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(1+\rho)\sin\pi(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}\,\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x);$$

d'où, en combinant les deux groupes de formules (2), (3) et (5), (6), ces deux autres identités singulières

$$(7)\quad \mathrm{P}^{1-\nu,2\nu+\rho-1}(x)=\frac{2^{2\nu-1}\Gamma(1+\rho)\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\rho+2\nu)}(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x),$$

$$(8)\quad \mathrm{Q}^{1-\nu,2\nu+\rho-1}(x)=\frac{2^{1-2\nu}\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\rho+2\nu)}(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x),$$

qui se réduisent, dans le cas particulier $\nu=\frac{1}{2}$, à des identités triviales.

3° Différentions ensuite par rapport à $x$ l'équation différentielle obtenue pour $\mathrm{K}^{\nu-1,\rho+1}(x)$, nous retrouvons pour $\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu-1,\rho+1}(x)$ précisément l'équation de Legendre satisfaite par $\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)$.

Remarquons ensuite les formules particulières

$$(9)\quad \mathrm{D}_x\mathrm{P}^{\nu-1,\rho+1}(x)=(2\nu-2)\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x),$$

$$(10)\quad \mathrm{D}_x\mathrm{Q}^{\nu-1,\rho+1}(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x),$$

nous aurons le théorème général :

III. *La dérivée* $\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu-1,\rho+1}(x)$ *est une fonction métasphérique du paramètre* $\nu$ *et de l'indice* $\rho$.

Combinons maintenant les formules (9), (10) et l'équation différentielle (8) du paragraphe XVI; nous aurons respectivement

$$(11)\quad \mathrm{D}_x\Big[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-1}(x)\Big]=-\frac{\rho(\rho+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x);$$

$$(12)\quad \mathrm{D}_x\Big[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-1}(x)\Big]=2\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x);$$

posons ensuite dans ces deux dernières formules $\nu+1$ au lieu de $\nu$ et $\rho-1$ au lieu de $\rho$, puis différentions par rapport à $x$, et ainsi de suite, la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$ donnera les formules plus générales

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & D_x^n\left[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}} P^{\nu+n,\rho-n}(x)\right] \\ & = \frac{(-1)^n \Gamma(\rho+1)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2\nu+n)}{2^n \Gamma(\rho-n+1)\Gamma(\nu+n)\Gamma(\rho+2\nu)} \frac{P^{\nu,\rho}(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad D_x^n\left[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}} Q^{\nu+n,\rho-n}(x)\right] = \frac{2^n \Gamma(\rho+1)\Gamma(\rho+2\nu+n)}{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma(\rho-n+1)} \frac{Q^{\nu,\rho}(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}},$$

où $n$ désigne un positif entier.

## XXI. — Autres formules fondamentales.

Il nous semble utile de réunir dans un paragraphe séparé les formules fondamentales qui contiennent des fonctions métasphériques aux paramètres $\nu$ et $\nu \pm 1$ et aux indices $\rho$ et $\rho \pm 1$.

En étudiant d'abord la variation de l'indice $\rho$, nous avons en premier lieu les quatre formules du paragraphe XVI, savoir

$$(1)\quad (1-x^2) D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu) x K^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1) K^{\nu,\rho+1}(x),$$

$$(2)\quad (1-x^2) D_x K^{\nu,\rho}(x) = -\rho x K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu-1) K^{\nu,\rho-1}(x),$$

$$(3)\quad 2(\rho+\nu) x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1) K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu-1) K^{\nu,\rho-1}(x),$$

$$(4)\quad (\rho+2\nu) K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - x D_x K^{\nu,\rho}(x).$$

Différentions maintenant par rapport à $x$ la formule (3), puis éliminons, en vertu de (4), la fonction $D_x K^{\nu,\rho}(x)$, il en résulte

$$(5)\quad 2(\rho+\nu) K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - D_x K^{\nu,\rho-1}(x),$$

d'où, en éliminant, à l'aide de (4), la fonction $K^{\nu,\rho}(x)$,

$$(6)\quad 2(\rho+\nu) x D_x K^{\nu,\rho}(x) = \rho D_x K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu) D_x K^{\nu,\rho-1}(x).$$

Remarquons ensuite que (4) et (5) nous conduiront aisément à ces deux autres formules

$$(7)\quad 2\nu K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - 2x D_x K^{\nu,\rho}(x) + D_x K^{\nu,\rho-1}(x),$$

$$(8)\quad \rho K^{\nu,\rho}(x) = x D_x K^{\nu,\rho}(x) - D_x K^{\nu,\rho-1}(x).$$

Enfin, éliminons de (1) et (3) la fonction $x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)$, il résulte

$$(9)\quad (1-x^2)\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) = \frac{(\rho+2\nu)(\rho+2\nu-1)}{2(\rho+\nu)}\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x) - \frac{\rho(\rho+1)}{2(\rho+\nu)}\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x).$$

Il est bien remarquable que les neuf formules que nous venons de développer sont applicables pour une fonction métasphérique quelconque, ce qui n'a pas lieu pour les formules analogues concernant la variation du paramètre $\nu$.

En effet, dans le paragraphe XX, nous avons déduit ces deux formules, formellement différentes,

$$(10)\qquad \mathrm{D}_x\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x) = 2\nu\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-1}(x), \qquad \mathrm{D}_x\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-1}(x).$$

Cela posé, nous aurons, en vertu de (5), (7) et (8), pour la fonction P,

$$(11)\qquad (\rho+\nu)\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x) = \nu\mathrm{P}^{\nu+1,\rho}(x) - \nu\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-2}(x),$$

$$(12)\qquad \mathrm{P}^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{P}^{\nu+1,\rho}(x) - 2x\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-1}(x) + \mathrm{P}^{\nu+1,\rho-2}(x),$$

$$(13)\qquad \rho\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x) = 2\nu x\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-1}(x) - 2\nu\mathrm{P}^{\nu+1,\rho-2}(x),$$

tandis que les formules correspondantes pour la fonction Q deviendront

$$(14)\qquad 4(\rho+\nu)\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-2}(x) - \mathrm{Q}^{\nu+1,\rho}(x),$$

$$(15)\qquad -4\nu\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{Q}^{\nu+1,\rho}(x) - 2x\mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-1}(x) + \mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-2}(x),$$

$$(16)\qquad 2\rho\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-2}(x) - x\mathrm{Q}^{\nu+1,\rho-1}(x).$$

## XXII. — Les fonctions métasphériques adjointes.

Dans plusieurs applications des fonctions métasphériques, nous avons à faire usage des fonctions métasphériques adjointes, savoir les fonctions

$$(1)\qquad \mathrm{P}_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma)\Gamma(\rho-\sigma+1)}{2^{\rho-1}\Gamma(\rho+\nu)}(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\mathrm{P}^{\nu+\sigma,\rho-\sigma}(x),$$

$$(2)\qquad \mathrm{Q}_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{\rho-\sigma+1}\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+\sigma+2\nu)}(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\mathrm{Q}^{\nu+\sigma,\rho-\sigma}(x),$$

ou bien comme des séries hypergéométriques,

$$(3)\qquad P_\sigma^{\nu,\rho}(x) = x^{\rho-\sigma}(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}} F\left(\frac{\sigma-\rho}{2}, \frac{\sigma-\rho+1}{2}, 1-\rho-\nu, \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(4)\qquad Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) = x^{-\rho-\sigma-2\nu}(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}} F\left(\nu+\frac{\rho-\sigma}{2}, \nu+\frac{\rho-\sigma+1}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{x^2}\right).$$

Or, ces définitions adoptées, les formules (7) et (8) du paragraphe XX donnent ces deux autres beaucoup plus simples,

$$(5)\qquad P_{-\sigma}^{1-\nu,\rho-1+2\nu}(x) = (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} P_\sigma^{\nu,\rho}(x),$$

$$(6)\qquad Q_{-\sigma}^{1-\nu,\rho-1+2\nu}(x) = (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} Q_\sigma^{\nu,\rho}(x),$$

formules qui se présentent sous forme très élégante dans le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$.

Il saute aux yeux que les deux fonctions adjointes doivent satisfaire à une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre. En effet, mettons dans l'équation de Legendre $\nu+\sigma$ et $\rho-\sigma$ au lieu de $\nu$ et $\rho$ respectivement, il en résulte

$$(1-x^2)y'' - (1+2\nu+2\sigma)xy' + (\rho-\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)y = 0;$$

d'où, en posant

$$y = (x^2-1)^{-\frac{\sigma}{2}} z,$$

après un simple calcul l'équation différentielle cherchée

$$(7)\qquad (1-x^2)z'' - (1+2\nu)xz' + \left[\rho(\rho+2\nu) - \frac{\sigma(\sigma+2\nu-1)}{1-x^2}\right]z = 0$$

qui admet comme des intégrales particulières les deux fonctions adjointes susdites.

Dans les deux cas particuliers $\sigma = 0$, $\sigma = 1-2\nu$, l'équation (7) deviendra identique à celle de Legendre elle-même. Or, pour $\sigma = 0$, les deux fonctions adjointes coïncident avec les fonctions métasphériques ordinaires, abstraction faite d'un facteur indépendant de $x$, tandis que le second cas $\sigma = 1-2\nu$ s'accorde bien avec les formules (7) et (8) du paragraphe XX.

Le déterminant fonctionnel formé des deux fonctions adjointes $P_\sigma$

et $Q_\sigma$ se détermine immédiatement à l'aide des formules développées dans le paragraphe XIX; nous aurons

$$\begin{vmatrix} P_\sigma^{\nu,\rho}(x) & D_x P_\sigma^{\nu,\rho}(x) \\ Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) & D_x Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = -2(\nu+\rho)(x^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Supposons maintenant $\sigma$ égal au positif entier $n$, les définitions (1) et (2) donnent immédiatement, en vertu des formules (9) et (10) développées dans le paragraphe XX,

$$P_n^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho-n+1)}{2^\rho\Gamma(\rho+\nu)}(x^2-1)^{\frac{n}{2}} D_x^n P^{\nu,\rho}(x), \tag{9}$$

$$Q_n^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^n 2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu+n)}(x^2-1)^{\frac{n}{2}} D_x^n Q^{\nu,\rho}(x). \tag{10}$$

## XXIII. — Sur l'équation de Legendre.

Dans nos recherches suivantes, nous avons souvent à appliquer l'équation différentielle obtenue pour la fonction

$$z = x^\sigma K^{\nu,\rho}(x), \tag{1}$$

équation qui peut être déduite immédiatement à l'aide de l'équation générale (16) du paragraphe IX; nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} & x^2(1-x^2)z'' - [2\sigma + (1+2\nu-2\sigma)x^2]xz' \\ & \qquad + [\sigma(\sigma+1) + (\rho+\sigma)(\rho+2\nu-\sigma)x^2]z = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On voit que les trois cas particuliers

$$\sigma = -1, \qquad \sigma = -\rho, \qquad \sigma = \rho + 2\nu$$

présentent des cas intéressants de (2) :

1° $\sigma = -1$ donnera, pour la fonction

$$z = \frac{1}{x} K^{\nu,\rho}(x), \tag{3}$$

l'équation différentielle

$$x(1-x^2)z'' + [2-(3+2\nu)x^2]z' + (\rho-1)(\rho+1+2\nu)xz = 0; \tag{4}$$

2° $\sigma = -\rho$; nous verrons que l'équation différentielle

$$x^2(1-x^2)z'' + [2\rho - (1+2\nu+2\rho)x^2]xz' + \rho(\rho-1)z = 0 \tag{5}$$

admet comme intégrale particulière la fonction

$$z = x^{-\rho} \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x); \tag{6}$$

3° $z = \rho + 2\nu$; nous trouverons, pour la fonction

$$z = x^{\rho+2\nu} \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x), \tag{7}$$

l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x^2)z'' - [2\rho + 4\nu + (1-2\nu-2\rho)x^2]xz' + (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)z = 0. \tag{8}$$

Remarquons encore que l'équation différentielle trouvée dans le paragraphe précédent pour les fonctions adjointes donnera, pour la fonction

$$y = (x^2-1)^{\sigma} \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x), \tag{9}$$

l'équation suivante

$$\left\{ \begin{aligned} &(1-x^2)y'' - (1+2\nu-4\sigma)xy' \\ &\qquad + \left[(\rho+2\sigma)(\rho+2\nu-2\sigma) - \frac{2\sigma(2\nu-2\sigma-1)}{1-x^2}\right] y = 0, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

dont les cas

$$\sigma = \nu - \frac{1}{2}, \qquad \sigma = -\frac{\rho}{2}, \qquad \sigma = \nu + \frac{\rho}{2}$$

se présentent sous forme simple.

# CHAPITRE VI.

## PROLONGEMENTS ANALYTIQUES.

### XXIV. — Valeur asymptotique d'une fonction métasphérique.

La méthode la plus commode pour l'étude du prolongement analytique et de la nature des points critiques d'une telle fonction semble être celle de développer en certaines séries de Burmann les fonctions en question.

Parmi de tels développements, celui obtenu en prenant dans l'équation différentielle de Legendre

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$$

comme variable indépendante semble être le plus important

Posons

$$y = f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right),$$

puis appliquons les identités différentielles

$$f'\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{2x^2}{x^2-1}\frac{dy}{dx},$$

$$f''\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{8x^3}{(x^2-1)^3}\frac{dy}{dx};$$

nous aurons pour la fonction

$$y = K^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right),$$

considérée comme fonction de la variable $x$, cette équation linéaire

$$(1)\quad x^2(1-x^2)y'' - [2\nu - 1 + (2\nu+1)x^2]xy' - \rho(\rho+2\nu)(1-x^2)y = 0,$$

qui deviendra inaltérée si nous prenons comme variable indépendante la valeur réciproque de $x$.

Conformément aux formules développées dans le paragraphe IX, nous aurons pour $|x| < 1$ ces deux intégrales particulières de (1),

$$(2)\quad y_1 = x^{-\rho} F(-\rho, \nu, 1-\nu-\rho, x^2), \qquad y_2 = x^{\rho+2\nu} F(\rho+2\nu, \nu, 1+\nu+\rho, x^2).$$

Posons ensuite

$$(3)\qquad \frac{\xi}{2} + \frac{1}{2\xi} = x, \qquad \xi = x \pm \sqrt{x^2-1},$$

puis déterminons le signe de la racine carrée, tel que $|\xi| > 1$, ce qui exige, en vertu des développements du paragraphe IV, que $x$ ne soit pas égal à une quantité réelle, telle que $-1 \leqq x \leqq +1$.

Or, je dis que nous aurons toujours, pour des valeurs suffisamment grandes de $|x|$, à choisir dans $\xi$ la *valeur principale* de la racine carrée pour obtenir $|\xi| > 1$; car pour l'autre valeur de $\xi$, nous aurons, en vertu de la formule binomiale,

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{8}\frac{1}{x^3} + \ldots;$$

c'est-à-dire que nous obtenons pour la valeur désirée de $\xi$ cette valeur limite

$$(4)\qquad \lim_{|x|=\infty} \frac{\xi}{x} = 2.$$

Cela posé, les intégrales particulières (2), où nous avons remplacé $x$ par $\xi$, donnent immédiatement ces deux séries de Burmann,

$$(5)\qquad P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)\xi^{\rho}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} F\left(-\rho, \nu, 1-\nu-\rho, \frac{1}{\xi^2}\right),$$

$$(6)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\xi^{-\rho-2\nu}}{2^{1-2\nu}\Gamma(\nu+\rho+1)} F\left(\rho+2\nu, \nu, 1+\nu+\rho, \frac{1}{\xi^2}\right),$$

applicables dans toute l'étendue du plan des $x$, à l'exception des valeurs réelles de $x$ qui satisfont aux conditions $-1 \leqq x \leqq +1$.

De plus, les séries hypergéométriques en question sont uniformément convergentes, pourvu que $x$ soit situé sur la périphérie et à l'extérieur d'une ellipse $E(\delta)$ quelconque, où $\delta$ désigne une quantité positive d'une grandeur assignable, mais arbitrairement petite du reste.

Les deux formules (5) et (6) montrent en outre clairement que les deux fonctions métasphériques P et Q ne peuvent pas avoir d'autres points singuliers outre $x = \pm 1$ et $x = \infty$.

Comme une conséquence beaucoup plus importante encore des formules (5) et (6), nous aurons, en vertu du paragraphe X, ces deux valeurs limites

$$\lim_{|\rho|=\infty} \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\nu+\rho)\xi^\rho} \mathrm{P}^{\nu,\rho}(x) = \left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\nu}, \tag{7}$$

$$\lim_{|\rho|=\infty} \frac{2^{1-2\nu}\Gamma(\nu+\rho+1)\xi^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)} \mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = \left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\nu}, \tag{8}$$

où $\nu$ doit être fini et $|\xi| > 1$; quant à $\rho$, ce paramètre doit varier de sorte que nous aurons toujours

$$|\nu+\rho\pm m| \geqq g > 0, \tag{9}$$

où $m$ désigne un positif entier quelconque. Supposons ensuite $|\nu| \leqq G$, $|\xi| \geqq 1+\delta$, les fonctions susdites convergeront *uniformément* vers leurs valeurs limites susdites.

Soit $n$ un positif entier, nous aurons, en vertu de la formule (16) du paragraphe VIII, ces deux valeurs limites plus simples

$$\lim_{n=\infty} [n^{1-\nu}\xi^{\rho+2\nu+n}\mathrm{Q}^{\nu,\rho+n}(x)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-2\nu}}\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\nu}, \tag{10}$$

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{n^{1-\nu}}{\xi^{\rho+n}} \mathrm{P}^{\nu,\rho+n}(x)\right] = \Gamma(\nu)\left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)^{-\nu}. \tag{11}$$

### XXV. — Huit constantes fondamentales.

Dans les autres séries de Burmann que nous avons à étudier, huit constantes jouent un rôle fondamental; c'est pourquoi il nous semble utile de considérer plus amplement ces nombres avant notre étude des séries susdites.

Les quatre des constantes en question sont déterminées déjà dans le paragraphe XVIII, savoir les valeurs numériques

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= \mathrm{Q}^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma(\rho+1)}, \\ q_2 &= \mathrm{Q}^{\nu,\rho}(-1) = q_1 e^{-(\rho+2\nu)\pi i}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1 = \mathrm{P}^{\nu,\rho}(1) = \dfrac{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\sin\pi(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)2^{2\nu}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}, \\ p_2 = \mathrm{P}^{\nu,\rho}(-1) = p_1 e^{\rho\pi i}, \end{cases}$$

où il faut supposer $\mathfrak{R}(\nu) < \frac{1}{2}$.

Les quatre constantes dernières correspondent, au contraire, à l'hypothèse $\mathfrak{R}(\nu) > \frac{1}{2}$ et se déterminent aisément à l'aide de ces deux formules

$$(3)\quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{P}^{1-\nu,-\rho-1}(x) = \frac{\Gamma(1+\rho)\sin\pi\rho}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\nu)\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x),$$

$$(4)\quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{Q}^{1-\nu,-\rho-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)\Gamma(1+\rho)\sin\pi(\nu+\rho)}{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x),$$

démontrées dans le paragraphe XX.

En effet, supposons $\mathfrak{R}(\nu) > \frac{1}{2}$, puis multiplions par $(x \pm 1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ les deux formules (3) et (4), nous aurons, en vertu des valeurs numériques (1) et (2), ces valeurs limites finies et déterminées

$$(5)\qquad \begin{cases} q_1' = \lim\limits_{x=+1}\left[(x-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x)\right] = \quad 2^{\nu-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right), \\ q_2' = \lim\limits_{x=-1}\left[(x+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x)\right] = -iq_1' e^{-(\rho+\nu)\pi i}, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} p_1' = \lim\limits_{x=+1}\left[(x-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x)\right] = -\dfrac{\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\sin\pi\rho}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}, \\ p_2' = \lim\limits_{x=-1}\left[(x+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu,\rho}(x)\right] = -ip_1' e^{(\rho+\nu)\pi i}. \end{cases}$$

Dans le paragraphe XVIII nous avons déjà expliqué les conditions exigées par ces valeurs limites concernant des valeurs de $x$ très voisines des valeurs singulières $x = \pm 1$.

Quant au cas particulier $\mathfrak{R}(\nu) = \frac{1}{2}$, il n'est pas possible d'énoncer des résultats généraux correspondants aux deux groupes de valeurs numériques que nous venons de déterminer.

*Exemple I.* — La fonction $P^{\nu,n}(x)$, où $n$ désigne un entier non négatif, est un polynome entier; c'est-à-dire que les valeurs $P^{\frac{1}{2},n}(\pm 1)$ sont finies et déterminées toutes les deux.

*Exemple II.* — La fonction $Q^{\frac{1}{2},0}(x)$ deviendra, pour $x = \pm 1$, infiniment grande comme le logarithme $\log(x \mp 1)$, c'est-à-dire que cette fonction n'admet ni des valeurs finies correspondantes à (1) ni des valeurs limites analogues à (5).

Soit maintenant

$$K^{\nu,\rho}(x) = a P^{\nu,\rho}(x) + b Q^{\nu,\rho}(x) \tag{7}$$

une fonction métasphérique quelconque, nous aurons immédiatement

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= K^{\nu,\rho}(1) = ap_1 + bq_1, \\ k_2 &= K^{\nu,\rho}(-1) = ap_2 + bq_2, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{aligned} k'_1 &= \lim_{x=+1} \left[ (x-1)^{\nu-\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(x) \right] = ap'_1 + bq'_1, \\ k'_2 &= \lim_{x=-1} \left[ (x+1)^{\nu-\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(x) \right] = ap'_2 + bq'_2, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

selon que $\mathfrak{R}(\nu) \lesseqgtr \frac{1}{2}$.

### XXVI. — La frontière de convergence est une lemniscate.

Transformons maintenant l'équation de Legendre en introduisant comme variable indépendante la racine carrée $\sqrt{1+x^2}$, puis posons pour abréger

$$f^{(p)} = D_a^p K^{\nu,\rho}(a), \qquad a = \sqrt{1+x^2},$$

nous aurons tout d'abord

$$-\frac{x^2}{1+x^2} f'' - \frac{1+2\nu}{\sqrt{1+x^2}} f' + \frac{\rho(\rho+2\nu)}{1+x^2} f = 0;$$

posons ensuite

$$y = f(\sqrt{1+x^2});$$

les formules différentielles

$$f' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\frac{dy}{dx}, \qquad f'' = \frac{1+x^2}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx}$$

donneront pour la fonction

$$(1) \qquad y = K^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2})$$

l'équation différentielle

$$(2) \qquad x(1+x^2)y'' + [2\nu + (1+2\nu)x^2]y' - \rho(\rho+2\nu)xy = 0$$

qui admet, en vertu de l'équation (19) du paragraphe IX, les quatre intégrales particulières

$$(3) \qquad F_1(-x^2), \quad x^{1-2\nu}F_2(-x^2),$$

$$(4) \qquad x^{\rho}F_3\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x^{-\rho-2\nu}F_4\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$F_1(x) = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{1}{2}, x\right),$$
$$F_2(x) = F\left(\frac{\rho+1}{2}, \frac{1-\rho}{2}-\nu, \frac{3}{2}-\nu, x\right),$$
$$F_3(x) = F\left(-\frac{\rho}{2}, \frac{1-\rho}{2}-\nu, 1-\nu-\rho, x\right),$$
$$F_4(x) = F\left(\frac{\rho+1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, x\right).$$

Posons ensuite

$$\sqrt{1+x^2} = \xi, \qquad x^2 = \xi^2 - 1,$$

puis introduisons de nouveau $x$ au lieu de $\xi$, la frontière de convergence des séries hypergéométriques susdites est définie par la condition

$$|x^2 - 1| = 1;$$

soit $x = \alpha + i\beta$, nous aurons par là la lemniscate L avec l'équation en coordonnées rectangulaires

$$(5) \qquad (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha^2-\beta^2) = 0.$$

Cela posé, nous avons évidemment à étudier séparément les trois champs de convergence $A_1$, $A_2$, $A_3$ suivants :

1° Le champ $A_1$ formé de la partie du plan des $x$ située à l'*extérieur* de la lemniscate L. Dans ce champ nous aurons, en vertu des intégrales (4) et des séries de puissances qui définissent les fonctions P et Q, ces deux développements

$$(6)\quad P^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^\rho\Gamma(\nu+\rho)(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} F\left(-\frac{\rho}{2}, \frac{1-\rho}{2}-\nu, 1-\nu-\rho, \frac{1}{1-x^2}\right),$$

$$(7)\quad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)(x^2-1)^{-\nu-\frac{\rho}{2}}}{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho+1)} F\left(\frac{\rho+1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{1-x^2}\right).$$

Posons dans ces formules $x=0$, nous verrons que les fonctions hypergéométriques sont toujours convergentes, et la formule de Gauss (11) du paragraphe XI donnera ces deux valeurs numériques

$$(8)\qquad P^{\nu,\rho}(0) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\Gamma(\nu)\sin\pi(\nu+\rho)} e^{\frac{\rho\pi i}{2}},$$

$$(9)\qquad Q^{\nu,\rho}(0) = \frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)} e^{-\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\pi i}.$$

Il faut remarquer que ces valéurs numériques sont obtenues des définitions originelles des fonctions P et Q données dans le paragraphe XVII et sans que la variable $x$ ait entouré aucun des points singuliers $x=\pm 1$ et $x=\infty$;

2° Le champ $A_2$ formé de la partie du plan des $x$ située à l'*intérieur* de la lemniscate L et correspondant à $\mathfrak{R}(x)>0$; c'est-à-dire que $A_2$ contient le point singulier $x=+1$. Dans ce champ nous aurons, pour une fonction métasphérique quelconque, la formule suivante :

$$(10)\qquad K^{\nu,\rho}(x) = k_1 F_1(1-x^2) + k'_1\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(1-x^2).$$

En effet, supposons d'abord $\mathfrak{R}(\nu)<\frac{1}{2}$, l'hypothèse $x=1$ nous détermine, en vertu de la formule (8) du paragraphe XXV, la constante $k_1$; soit ensuite $\mathfrak{R}(\nu) > \frac{1}{2}$, nous multiplions par $(x-1)^{\nu-\frac{1}{2}}$ les deux membres de (10) et l'hypothèse $x=1$ donnera $k'_1$. De plus, ces deux coefficients sont des fonctions analytiques de $\nu$, quelques valeurs particulières de cette variable exclues peut-être;

3° Le champ $A_3$ formé de la partie du plan des $x$ située à l'intérieur de la lemniscate L et correspondant à $\mathfrak{R}(x) < 0$; c'est-à-dire que $A_3$ contient le point singulier $x = -1$. Dans ce cas, nous aurons la formule analogue à (10),

$$K^{\nu,\rho}(x) = k_2 F_1(1-x^2) - ie^{\nu\pi i} k'_2 \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(1-x^2). \tag{11}$$

Conformément aux remarques faites dans les paragraphes XVIII et XXV, nous déduisons des formules (10) et (11) la proposition suivante :

I. *Prenons pour point de départ les définitions originelles des fonctions* P *et* Q; *les valeurs numériques de ces fonctions concernant les points singuliers* $x = \pm 1$ *sont valables si nous faisons tendre vers ces valeurs la variable* $x$, *en suivant un chemin qui n'entoure aucun des points critiques mais qui est du reste complètement arbitraire.*

Posons ensuite

$$y = f(\sqrt{1-x}),$$

puis appliquons les formules différentielles

$$f' = -2\sqrt{1-x}\,\frac{dy}{dx}, \qquad f'' = 4(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx},$$

l'équation différentielle (3) du paragraphe XXIII donnera, pour la fonction

$$y = (1-x)^{-\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}), \tag{12}$$

l'équation suivante

$$4x(1-x)y'' + [2+4\nu-(8+4\nu)x]y' + (\rho-1)(\rho+2\nu+1)y = 0 \tag{13}$$

qui est de la même forme que (1) dans le paragraphe IX et qui admet, par conséquent, les intégrales particulières suivantes

$$(14) \qquad F_1(x), \quad x^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(x),$$

$$(15) \qquad x^{\frac{\rho-1}{2}} F_3\left(\frac{1}{x}\right), \quad x^{-\frac{\rho+1}{2}-\nu} F_4\left(\frac{1}{x}\right),$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$F_1(x) = F\left(\frac{1-\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}+\nu, \nu+\frac{1}{2}, x\right),$$

$$F_2(x) = F\left(1+\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{2}-\nu, x\right),$$

$$F_3(x) = F\left(\frac{1-\rho}{2}, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\rho, x\right),$$

$$F_4(x) = F\left(\frac{1+\rho}{2}+\nu, 1+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, x\right).$$

Posons ensuite

$$\sqrt{1-x} = \xi, \qquad x = 1-\xi^2,$$

puis introduisons de nouveau $x$ au lieu de $\xi$, nous retrouvons précisément les trois mêmes champs de convergence que dans nos recherches précédentes.

Dans le domaine $A_1$, nous aurons

$$(16) \quad \frac{1}{x} P^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^\rho \Gamma(\rho+\nu)(x^2-1)^{\frac{\rho-1}{2}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} F\left(\frac{1-\rho}{2}, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\rho, \frac{1}{1-x^2}\right),$$

$$(17) \quad \frac{1}{x} Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)(x^2-1)^{-\frac{\rho+2\nu+1}{2}}}{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho+1)} F\left(\frac{1+\rho}{2}+\nu, 1+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{1-x^2}\right);$$

dans le domaine $A_2$, nous aurons de même

$$(18) \qquad \frac{1}{x} K^{\nu,\rho}(x) = k_1 F_1(1-x^2) + k_1'\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(1-x^2);$$

dans le domaine $A_3$

$$(19) \qquad -\frac{1}{x} K^{\nu,\rho}(x) = k_2 F_1(1-x^2) - ie^{\nu\pi i} k_2'\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(1-x^2).$$

### XXVII. — Le champ de convergence est un demi-plan.

Quoique les résultats obtenus dans le paragraphe précédent nous permettent de résoudre complètement le problème que nous avons proposé, savoir : de discuter le prolongement analytique d'une fonction métasphérique et d'étudier la nature des points critiques d'une telle fonction, nous avons encore à étudier quelques autres séries de Burmann pour pouvoir généraliser des formules très connues.

A cet effet, nous avons tout d'abord à étudier la fonction

$$(1) \qquad (x^2+1)^\rho \mathrm{K}^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = (x^2+1)^\rho \mathrm{K}^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right).$$

Posons

$$y = f\left(\frac{2}{x}-1\right),$$

puis appliquons les formules différentielles

$$f' = -\frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx}, \qquad f'' = \frac{x^4}{4}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{2}\frac{dy}{dx};$$

l'équation différentielle de Legendre donnera, pour la fonction

$$(2) \qquad y = \mathrm{K}^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{x}-1\right),$$

cette autre

$$(3) \qquad x^2(1-x)y'' + \left[1-2\nu+\left(\nu-\frac{3}{2}\right)x\right]xy' - \rho(\rho+2\nu)y = 0.$$

Posons ensuite, dans (3),

$$y = x^{-\rho} z,$$

les formules différentielles ($\alpha$) du paragraphe IX donnent l'équation suivante :

$$(4) \quad x(1-x)z'' + \left[1-2\nu-2\rho+\left(\nu+2\rho-\frac{3}{2}\right)x\right]z' - \rho\left(\rho+\nu-\frac{1}{2}\right)z = 0$$

qui admet comme intégrale particulière la fonction

$$(5) \qquad z = x^\rho \mathrm{K}^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{x}-1\right).$$

Transformons encore l'équation (4), en introduisant $x^2+1$ comme variable indépendante; les formules différentielles

$$f'(1+x^2) = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}, \qquad f''(1+x^2) = \frac{1}{4x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{4x^3}\frac{dy}{dx}$$

donnent pour la fonction (1) cette équation différentielle

$$x(1+x^2)y'' + [2\nu - (4\rho+2\nu-2)x^2]y' + 2\rho(2\rho+2\nu-1)xy = 0; \tag{6}$$

ce qui donnera, en vertu des formules du paragraphe IX, ces quatre intégrales particulières

$$\mathrm{F}_1(-x^2), \quad x^{1-2\nu}\mathrm{F}_2(-x^2), \tag{7}$$

$$x^{2\rho}\mathrm{F}_3\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x^{2\nu+2\rho-1}\mathrm{F}_4\left(-\frac{1}{x^2}\right), \tag{8}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_1(x) &= \mathrm{F}\left(-\rho, \frac{1}{2}-\nu-\rho, \nu+\frac{1}{2}, x\right), \\
\mathrm{F}_2(x) &= \mathrm{F}\left(1-\rho-2\nu, \frac{1}{2}-\nu-\rho, \frac{3}{2}-\nu, x\right), \\
\mathrm{F}_3(x) &= \mathrm{F}\left(-\rho, \frac{1}{2}-\nu-\rho, \nu+\frac{1}{2}, x\right) = \mathrm{F}_1(x), \\
\mathrm{F}_4(x) &= \mathrm{F}\left(1-\rho-2\nu, \frac{1}{2}-\nu-\rho, \frac{3}{2}-\nu, x\right) = \mathrm{F}_2(x).
\end{aligned}$$

Posons ensuite

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \xi, \qquad x^2 = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \qquad 1+x^2 = \frac{2}{1+\xi},$$

puis introduisons de nouveau $x$ au lieu de $\xi$, la frontière de convergence des séries (7) et (8) se détermine par la condition

$$|1+x| = |1-x|;$$

c'est-à-dire que cette frontière est l'axe des nombres imaginaires.

Supposons $\mathfrak{R}(x) > 0$, nous aurons la formule

$$\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\rho}\left[k_1\mathrm{F}_1\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + k_1'\left(\frac{2x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{F}_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right], \tag{9}$$

tandis que l'hypothèse $\mathfrak{R}(x) < 0$ donnera de même

$$(10)\quad K^{\nu,\rho}(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{\rho} k_2 F_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + k_2'\left(\frac{2}{1-x}\right)^{\rho+\nu-\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

### XXVIII. — La frontière de convergence est une hyperbole.

Nous avons encore à étudier, par ce point de vue, la fonction

$$(1)\qquad y = (1+x^2)^{\frac{\rho}{2}} K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

A cet effet, appliquons les formules différentielles

$$y = f\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right),\qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}\frac{dy}{dx},$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{(1+x^2)^3}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{(1+x^2)^2(1-2x^2)}{x^3}\frac{dy}{dx},$$

l'équation (4) du paragraphe XXIII donnera pour la fonction (1) cette équation différentielle

$$(2)\qquad x(1+x^2)y'' + [2\nu + (2-2\rho)x^2]y' + \rho(\rho-1)xy = 0,$$

qui peut être intégrée encore à l'aide des formules du paragraphe IX.

Nous aurons ces quatre intégrales particulières

$$(3)\qquad F_1(-x^2),\quad x^{1-2\nu}F_2(-x^2),$$

$$(4)\qquad x^{\rho}F_3\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad x^{\rho-1}F_4\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$F_1(x) = F\left(-\frac{\rho}{2}, \frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1}{2}, x\right),$$

$$F_2(x) = F\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{2}-\nu, x\right),$$

$$F_3(x) = F\left(-\frac{\rho}{2}, \frac{1-\rho}{2}+\nu, \frac{1}{2}, x\right),$$

$$F_4(x) = F\left(\frac{1-\rho}{2}, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{2}, x\right).$$

Cela posé, mettons

$$\frac{1}{1+x^2}=\xi^2, \qquad x^2=\frac{1-\xi^2}{\xi^2},$$

puis introduisons de nouveau $x$ au lieu de $\xi$; la frontière de convergence des intégrales (3) et (4) est à déterminer par la condition

$$|1-x^2|=|x|^2.$$

Soit $x=\alpha+i\beta$, cette condition donnera l'hyperbole équilatérale

$$\alpha^2-\beta^2=\frac{1}{2}; \tag{5}$$

c'est-à-dire que nous avons à étudier séparément les trois champs de convergence $A_1$, $A_2$ et $A_3$ suivants :

1° Le champ $A_1$ est formé par la partie du plan des $x$ située à l'*intérieur* de l'hyperbole (5) et pour laquelle $\alpha \geqq +\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dans ce domaine, nous aurons le développement

$$K^{\nu,\rho}(x)=x^\rho\left[k_1 F_1\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+k_1'\left(\frac{x^2-1}{2x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}F_2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\right]; \tag{6}$$

2° Le champ $A_2$ est la seconde partie du plan des $x$ située à l'intérieur de l'hyperbole (5); ici nous trouvons

$$e^{\rho\pi i}K^{\nu,\rho}(x)=x^\rho\left[k_2 F_1\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)+k_2'\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}F_2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\right]. \tag{7}$$

Il est bien intéressant, ce me semble, que les deux fonctions qui figurent aux seconds membres des formules (6) et (7) se présentent, abstraction faite de certains simples facteurs, comme des fonctions métasphériques d'autres variables que celles de $K^{\nu,\rho}(x)$.

En effet, les formules (10), (11) du paragraphe XVII donnent immédiatement

$$x^\rho F_1\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu-\rho\right)\Gamma(\rho+1)}{2^\rho\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}P^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right), \tag{8}$$

$$x^\rho\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}F_2\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{2^{\rho+1}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\rho-2\nu)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}Q^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right); \tag{9}$$

3° Le champ $A_3$ est la partie du plan des $x$ située à l'*extérieur* de l'hyperbole susdite. Nous ne nous arrêtons pas ici à une étude plus ample des formules qui sont valables dans ce domaine.

### XXIX. — Nouvelles fonctions métasphériques particulières.

Le résultat le plus intéressant trouvé dans nos recherches sur les séries de Burmann est certainement la découverte de deux systèmes nouveaux des fonctions métasphériques particulières dont les propriétés intéressantes sont exprimées dans les théorèmes suivants :

I. *Il existe deux et seulement deux fonctions métasphériques, savoir :*

$$\text{(1)} \qquad U^{\nu,\rho}(x) = \Gamma(\nu) P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin \pi\rho}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)} Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$\text{(2)} \qquad V^{\nu,\rho}(x) = \Gamma(\nu) P^{\nu,\rho}(x) + \frac{e^{-2(\rho+\nu)\pi i}\sin \pi\rho}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)} Q^{\nu,\rho}(x)$$

*qui ne possèdent, dans toute l'étendue du plan des $x$, que deux points singuliers quelles que soient les valeurs de $\nu$ et $\rho$; la première de ces fonctions est analytique pour $x = +1$, la seconde pour $x = -1$.*

En effet, désignons par $K^{\nu,\rho}(x)$ et $L^{\nu,\rho}(x)$ deux fonctions métasphériques quelconques; nous aurons, aux environs du point critique $x = +1$, des identités de la forme

$$\text{(3)} \qquad K^{\nu,\rho}(x) = k_1 F_1(x) + k_1'(x-1)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(x),$$

$$\text{(4)} \qquad L^{\nu,\rho}(x) = l_1 F_1(x) + l_1'(x-1)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(x),$$

où $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont analytiques pour $x = 1$ toutes les deux. Dans le domaine du point singulier $x = -1$, nous aurons de même

$$\text{(5)} \qquad K^{\nu,\rho}(x) = k_2 G_1(x) + k_2'(x+1)^{\frac{1}{2}-\nu} G_2(x),$$

$$\text{(6)} \qquad L^{\nu,\rho}(x) = l_2 G_1(x) + l_2'(x+1)^{\frac{1}{2}-\nu} G_2(x),$$



où $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont analytiques pour $x = -1$ toutes les deux.

Posons maintenant pour abréger

$$(7) \qquad \Lambda_1 = k_1 l'_1 - k'_1 l_1, \qquad \Lambda_2 = k_2 l'_2 - k'_2 l_2,$$

puis éliminons $F_2(x)$ de (3) et (4), $G_2(x)$ de (5) et (6), nous aurons respectivement

$$(8) \qquad l'_1 K^{\nu,\rho}(x) - k'_1 L^{\nu,\rho}(x) = \Lambda_1 F_1(x),$$

$$(9) \qquad l'_2 K^{\nu,\rho}(x) - k'_2 L^{\nu,\rho}(x) = \Lambda_2 G_1(x),$$

ce qui montrera que ces deux fonctions deviennent les mêmes, abstraction faite des facteurs indépendants de $x$, si nous introduisons dans les formules initiales d'autres fonctions métasphériques quelconques.

Cela posé, substituons dans (8) et (9),

$$(10) \qquad K^{\nu,\rho}(x) = P^{\nu,\rho}(x), \qquad L^{\nu,\rho}(x) = Q^{\nu,\rho}(x),$$

puis multiplions par des facteurs convenables faciles à déterminer, nous aurons précisément les deux fonctions U et V.

Cela posé, éliminons ensuite de (3) et (4) la fonction $F_1(x)$, de (5) et (6), $G_1(x)$, nous aurons respectivement

$$(11) \qquad l_1 K^{\nu,\rho}(x) - k_1 L^{\nu,\rho}(x) = -\Lambda_1 (x-1)^{\frac{1}{2}-\nu} F_2(x),$$

$$(12) \qquad l_2 K^{\nu,\rho}(x) - k_2 L^{\nu,\rho}(x) = -\Lambda_2 (x+1)^{\frac{1}{2}-\nu} G_2(x);$$

d'où, en vertu de (10), le théorème suivant :

II. *Il existe deux et seulement deux fonctions métasphériques, savoir*

$$(13) \qquad U_1^{\nu,\rho}(x) = \Gamma(\nu) P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)} Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(14) \qquad V_1^{\nu,\rho}(x) = \Gamma(\nu) P^{\nu,\rho}(x) - \frac{e^{-2(\rho+\nu)\pi i}\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)} Q^{\nu,\rho}(x),$$

*telles que les produits*

$$(15) \qquad (x-1)^{\nu-\frac{1}{2}} U_1^{\nu,\rho}(x), \qquad (x+1)^{\nu-\frac{1}{2}} V_1^{\nu,\rho}(x)$$

*ne possèdent, dans toute l'étendue du plan des $x$, que deux points singu-*

*liers quelles que soient les valeurs de* $\nu$ *et* $\rho$; *la première des fonctions* (15) *est analytique pour* $x = 1$, *la seconde pour* $x = -1$.

Appliquons les développements du paragraphe précédent, nous verrons que les fonctions U et V peuvent être représentées *formellement* par la même fonction, savoir

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,2^{-12\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\rho+1)}\,x^{\rho}\,F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}+\nu, \frac{x^2-1}{x^2}\right),\\ &\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\Gamma(\rho+2\nu)}\,x^{\rho+2\nu-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\,F\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu, 1-\frac{\rho}{2}-\nu, \frac{3}{2}-\nu, \frac{x^2-1}{x^2}\right), \end{aligned} \right.$$

ou bien, en vertu des formules (8) et (9) du paragraphe XXVIII, pour les fonctions (16), ces autres expressions

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\cos\nu\pi}{2^{\rho+2\nu-1}\,\Gamma\left(\rho+\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\pi(\rho+\nu)}\,P^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}},\\ &\frac{2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{\pi}\,Q^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\rho}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Quant à la fonction $U^{\nu,\rho}(x)$, remarquons que les identités (2) et (3) du paragraphe XX donnent

$$(18)\qquad U^{\nu,-\rho-2\nu}(x) = -\frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{\sin\pi\rho}\,U^{\nu,\rho}(x),$$

d'où, en posant pour abréger

$$(19)\qquad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\,U^{\nu,\rho}(x),$$

la proposition suivante :

III. *La fonction*

$$(20)\qquad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,x^{\rho}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}+\nu, \frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

*ou bien sous forme d'intégrale de Legendre qui n'est pas une fonction* *métasphérique*

$$(21)\quad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\left[2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin\pi\rho}{\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}Q^{\nu,\rho}(x)\right],$$

*satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$(22)\qquad A^{\nu,\rho}(x) = A^{\nu,-\rho-2\nu}(x).$$

Il saute aux yeux qu'une combinaison de deux fonctions prises arbitrairement entre

$$M,\quad N,\quad P,\quad Q,\quad U,\quad V,\quad U_1,\quad V_1$$

représente généralement un système de deux fonctions métasphériques indépendantes.

En effet, Gegenbauer [1] a appliqué le système composé des fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ et $A^{\nu,\rho}(x)$, dont la dernière est bien une intégrale particulière de l'équation de Legendre sans être une fonction métasphérique.

Dans le paragraphe LXI, nous avons à profiter de l'identité (22).

## XXX. — Formules de révolution. Prolongements analytiques.

Les formules que nous venons de développer dans le paragraphe précédent nous fournissent un moyen simple de déterminer ce que deviendra les fonctions $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$, si nous faisons tourner autour d'un des trois points critiques la variable $x$.

A cet effet, supposons que $x = a$ soit un point critique de la fonction $f(x)$; nous désignons par $D(a)f(x)$ et $I(a)f(x)$ ce que deviendra la fonction $f(x)$ si nous faisons tourner une seule fois, respectivement dans le sens direct et dans le sens indirect, la variable $x$ autour du point critique $x = a$.

Ces significations adoptées, nous aurons

$$(1)\quad D(+1)U^{\nu,\rho}(x) = U^{\nu,\rho}(x),\qquad D(+1)U_1^{\nu,\rho}(x) = -e^{-2\nu\pi i}U_1^{\nu,\rho}(x),$$

$$(2)\quad I(+1)U^{\nu,\rho}(x) = U^{\nu,\rho}(x),\qquad I(+1)U_1^{\nu,\rho}(x) = -e^{2\nu\pi i}U_1^{\nu,\rho}(x),$$

$$(3)\quad D(-1)V^{\nu,\rho}(x) = V^{\nu,\rho}(x),\qquad D(-1)V_1^{\nu,\rho}(x) = -e^{-2\nu\pi i}V_1^{\nu,\rho}(x),$$

$$(4)\quad I(-1)V^{\nu,\rho}(x) = V^{\nu,\rho}(x),\qquad I(-1)V_1^{\nu,\rho}(x) = -e^{2\nu\pi i}V_1^{\nu,\rho}(x).$$

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie impériale de Vienne*, t. C, 1891, p. 745-746

Cela posé, soient

$$\begin{aligned} D(+1)P^{\nu,\rho}(x) &= a\ P^{\nu,\rho}(x) + b\ Q^{\nu,\rho}(x), \\ D(+1)Q^{\nu,\rho}(x) &= a_1 P^{\nu,\rho}(x) + b_1 Q^{\nu,\rho}(x), \end{aligned}$$

les formules (1) et (13) du paragraphe XXIX, si nous égalons, après la révolution de $x$ autour du point $x = 1$, déterminent les coefficients de P et Q

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma(\nu)a + \frac{\sin\pi\rho}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\nu+\rho)}\,a_1 = \Gamma(\nu), \\ &\Gamma(\nu)a - \frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}\,a_1 = -e^{-2\nu\pi i}\Gamma(\nu). \end{aligned} \right.$$

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma(\nu)b + \frac{\sin\pi\rho}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}\,b_1 = \frac{\sin\pi\rho}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\nu+\rho)}, \\ &\Gamma(\nu)b - \frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}\,b_1 = \frac{\sin\pi(\rho+2\nu)}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\sin\pi(\rho+\nu)}\,e^{-2\nu\pi i}, \end{aligned} \right.$$

ce qui donnera finalement les formules de révolution

$$(7)\quad D(+1)P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sin\nu\pi e^{\rho\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\,P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin\pi\rho\sin\pi(\rho+2\nu)e^{-\nu\pi i}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\sin^2\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(8)\quad D(+1)Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}e^{-\nu\pi i}P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\nu\pi e^{-(\rho+2\nu)\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x).$$

On voit immédiatement, en vertu des formules (2), que les expressions pour $I(+1)P^{\nu,\rho}(x)$ et $I(+1)Q^{\nu,\rho}(x)$ se déterminent de (7) et (8) si nous y changeons le signe de tous les exposants des fonctions exponentielles qui y figurent, ce qui donnera les formules correspondantes

$$(9)\quad I(+1)P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sin\nu\pi e^{-\rho\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\,P^{\nu,\rho}(x) + \frac{\sin\pi\rho\sin\pi(\rho+2\nu)e^{\nu\pi i}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\sin^2\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(10)\quad I(+1)Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}e^{\nu\pi i}P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\nu\pi e^{(\rho+2\nu)\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x).$$

Pour le point critique $x = -1$, nous aurons de la même manière

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} D(-1)P^{\nu,\rho}(x) = {} & \frac{\sin\nu\pi e^{\rho\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\,P^{\nu,\rho}(x) \\ & + \frac{\sin\pi\rho\sin\pi(\rho+2\nu)e^{-(2\rho+3\nu)\pi i}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\sin^2\pi(\rho+\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x), \end{aligned} \right.$$

$$(12)\quad D(-1)Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}e^{(2\rho+\nu)\pi i}P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\nu\pi e^{-(\rho+2\nu)\pi i}}{\sin\pi(\nu+\rho)}Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} I(-1)P^{\nu,\rho}(x) = {} & \frac{\sin\nu\pi e^{-\rho\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}P^{\nu,\rho}(x) \\ & + \frac{\sin\pi\rho\sin\pi(\rho+2\nu)e^{-(2\rho+\nu)\pi i}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\sin^2\pi(\rho+\nu)}Q^{\nu,\rho}(x), \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad I(-1)\,Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}e^{(2\rho+3\nu)\pi i}P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\nu\pi e^{(\rho+2\nu)\pi i}}{\sin\pi(\rho+\nu)}Q^{\nu,\rho}(x).$$

Comme contrôle de ces formules nous aurons les identités suivantes

$$(15)\quad D(-1)\,D(+1)P^{\nu,\rho}(x) = I(\infty)P^{\nu,\rho}(x) = e^{2\rho\pi i}P^{\nu,\rho}(x),$$

$$(16)\quad D(+1)\,D(-1)Q^{\nu,\rho}(x) = I(\infty)Q^{\nu,\rho}(x) = e^{-(2\rho+4\nu)\pi i}Q^{\nu,\rho}(x),$$

$$(17)\quad I(+1)I(-1)P^{\nu,\rho}(x) = D(\infty)P^{\nu,\rho}(x) = e^{-2\rho\pi i}P^{\nu,\rho}(x),$$

$$(18)\quad I(+1)I(-1)Q^{\nu,\rho}(x) = D(\infty)Q^{\nu,\rho}(x) = e^{(2\rho+4\nu)\pi i}Q^{\nu,\rho}(x).$$

Pour connaître parfaitement les deux fonctions fondamentales $P^{\nu,\rho}(x)$ et $Q^{\nu,\rho}(x)$, nous avons encore à les prolonger dans l'intérieur du cercle $|x| = 1$, ce qui s'effectuera en déterminant les coefficients des formules suivantes :

$$P^{\nu,\rho}(x) = a\,M^{\nu,\rho}(x) + b\,N^{\nu,\rho}(x),$$
$$Q^{\nu,\rho}(x) = a_1M^{\nu,\rho}(x) + b_1N^{\nu,\rho}(x).$$

A cet effet, la proposition I du paragraphe XXVI donnera, en vertu des valeurs numériques déterminées dans le paragraphe XVIII,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} P^{\nu,\rho}(x) = {} & \frac{\sin\pi(\rho+\nu)+\sin\nu\pi e^{\rho\pi i}}{2\sin\pi(\rho+\nu)}M^{\nu,\rho}(x) \\ & - \frac{i\sin\pi\rho e^{-\nu\pi i}}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}N^{\nu,\rho}(x), \end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad Q^{\nu,\rho}(x) = e^{-\nu\pi i}\left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}{2^{1-2\nu}}M^{\nu,\rho}(x) + iN^{\nu,\rho}(x)\right].$$

Introduisons ensuite, en vertu du paragraphe XVII, les séries hypergéométriques qui figurent dans les fonctions M et N, savoir

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$y_2 = xF\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

les formules (19), (20) se présentent sous cette autre forme aussi

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} P^{\nu,\rho}(x) = \frac{e^{\frac{\rho\pi i}{2}}}{\sin\pi(\rho+\nu)}\Bigg[ & \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\pi\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}\,y_1 \\ & - 2i\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\cos\pi\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\pi\rho}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}\,y_2\Bigg], \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\pi i}\left[\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}\,y_1 + 2i\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}\,y_2\right].$$

# CHAPITRE VII.

## LES FONCTIONS ULTRASPHÉRIQUES.

### XXXI. — Fonctions de première espèce.

Parmi les fonctions métasphériques, celles à indice entier méritent d'être étudiées séparément, et au point de vue analytique et au point de vue historique.

Nous désignons comme *fonctions ultrasphériques* de tels cas particuliers de nos fonctions générales.

Considérons d'abord la fonction ultrasphérique de première espèce, savoir la fonction $P^{\nu,n}(x)$, où $n$ désigne un entier non négatif; les formules du paragraphe précédent donnent immédiatement

$$(1) \qquad P^{\nu,n}(x) = M^{\nu,n}(x)$$

ou bien, comme des séries hypergéométriques finies,

$$(2) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(\nu+n)(2x)^n}{n!\,\Gamma(\nu)} F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n-\nu, \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(3) \qquad P^{\nu,2n}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} F\left(-n, \nu+n, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$(4) \qquad P^{\nu,2n+1}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\nu+n+1)\,2x}{n!\,\Gamma(\nu)} F\left(-n, \nu+n+1, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Remarquons encore que la formule (2) donnera cette autre expression, valable pour des valeurs paires ou impaires de $n$,

$$(5) \qquad P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}.$$

Dans les formules précédentes, nous avons supposé $n \geqq 0$; nous aurons, au contraire,

$$(6)\qquad P^{\nu,-n}(x)=0,$$

$n$ désignant un positif entier.

Cela posé, nous aurons la proposition suivante :

I. *Supposons $n \geqq 0$, la fonction ultrasphérique de première espèce est un polynome entier de degré $n$ et par rapport à $x$ et par rapport à $\nu$.*

Pour de petites valeurs de $n$ nous aurons

$$P^{\nu,0}(x)=1,$$
$$P^{\nu,1}(x)=2\nu x,$$
$$P^{\nu,2}(x)=2\nu(\nu+1)x^2-\nu,$$
$$P^{\nu,3}(x)=\frac{4}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)x^3-2\nu(\nu+1)x,$$
$$P^{\nu,4}(x)=\frac{2}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)x^4-2\nu(\nu+1)(\nu+2)x^2+\frac{1}{2}\nu(\nu+1).$$

Quant aux valeurs numériques correspondant à $x=\pm 1$ et à $x=0$, nous aurons ici

$$(7)\qquad P^{\nu,n}(1)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)},\qquad P^{\nu,n}(-1)=(-1)^n\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)},$$

$$(8)\qquad P^{\nu,2n}(0)=\frac{(-1)^n\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)},\qquad P^{\nu,2n+1}(0)=0.$$

Dans le paragraphe XXIV, nous avons déterminé ce que deviendra $P^{\nu,n}(x)$ quand le positif entier $n$ croîtra au delà de toute limite, tandis que $x$ ne sera pas égal à une quantité réelle, de sorte que $-1 \leqq x \leqq +1$; ici nous avons à étudier, pour notre fonction particulière, ce cas exclu.

A cet effet posons

$$\xi = x \pm \sqrt{x^2-1},$$

puis appliquons la définition de $\Gamma_n(\omega)$; la formule (5) du paragraphe XXIV donnera ici

$$(9)\qquad P^{\nu,n}(x)=\frac{n^{\nu-1}}{\Gamma_n(\nu)}(\xi^n+\xi^{-n})+\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{(n-s)^{\nu-1}s^{\nu-1}}{\Gamma_{n-s}(\nu)\Gamma_s(\nu)}\xi^{n-2s},$$

où nous avons à supposer $|\xi| = 1$; posons ensuite

$$\nu - 1 = \alpha + i\beta,$$

la formule (9) donnera

$$(10) \qquad |P^{\nu,n}(x)| \leqq \frac{2n^\alpha}{|\Gamma_n(\nu)|} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(n-s)^\alpha s^\alpha}{|\Gamma_{n-s}(\nu)\Gamma_s(\nu)|}.$$

Or, supposons $|\nu| \leqq K$; il est possible de déterminer un nombre positif fini G, tel que nous aurons pour toutes les valeurs de $n$ et $s$

$$\frac{1}{|\Gamma_n(\nu)|} \leqq G, \qquad \frac{1}{|\Gamma_{n-s}(\nu)\Gamma_s(\nu)|} \leqq G,$$

ce qui donnera, en vertu de (10),

$$(11) \qquad |P^{\nu,n}(x)| \leqq G\left[2n^\alpha + \sum_{s=1}^{s=n-1} (n-s)^\alpha s^\alpha\right].$$

Soit maintenant $\alpha \leqq 0$, nous aurons toujours, pour $1 \leqq r \leqq n-1$,

$$r(n-r) \geqq n-1, \qquad (n-r)^\alpha r^\alpha \leqq (n-1)^\alpha;$$

d'où, en vertu de (11),

$$(12) \qquad |P^{\nu,n}(x)| < (n-1)^\alpha (n+1) G;$$

Supposons ensuite $\alpha \geqq 0$, les inégalités

$$r(n-r) < n^2, \qquad (n-r)^\alpha r^\alpha < n^{2\alpha}$$

donnent de même, en vertu de (10),

$$(13) \qquad |P^{\nu,n}(x)| < n^{2\alpha}(n+1) G.$$

Combinons maintenant les inégalités (12), (13) et la valeur limite (10) du paragraphe XXIV, nous aurons le théorème suivant :

II. *Supposons $|\nu| \leqq G$, tandis que $x$ est un nombre complexe complètement arbitraire, nous aurons, pour $\delta > 0$, la valeur limite*

$$(14) \qquad \lim_{n=\infty} \left( \frac{P^{\nu,n}(x)}{\xi^n n^{2|\alpha|-1+\delta}} \right) = 0,$$

*où nous avons posé, pour abréger,*

$$(15) \qquad \nu = \alpha + i\beta, \qquad \xi = x \pm \sqrt{x^2-1}, \qquad |\xi| \geqq 1.$$

*De plus la suite illimitée, formée pour des valeurs positives entières de n, de la fonction qui figure au premier membre de* (14) *convergera uniformément vers sa valeur limite susdite.*

### XXXII. — Étude d'une formule classique.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent d'étudier, d'un point de vue tout à fait élémentaire, une formule classique dans la théorie des fonctions sphériques.

A cet effet, prenons pour point de départ la série de puissances

$$(1)\qquad f(\nu, x, \alpha) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}^{\nu,n}(x)\alpha^n,$$

qui est certainement convergente, pourvu que

$$|\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2 - 1}|.$$

Posons ensuite dans (1) $\nu + 1$ au lieu de $\nu$, puis multiplions par

$$1 - 2\alpha x + \alpha^2$$

la formule ainsi obtenue; nous aurons

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2) f(\nu + 1, x, \alpha)$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} [\mathrm{P}^{\nu+1,n}(x) - 2x\mathrm{P}^{\nu+1,n-1}(x) + \mathrm{P}^{\nu+1,n-2}(x)]\alpha^n;$$

d'où, en vertu des formules développées dans le paragraphe XXI, l'équation fonctionnelle

$$(2)\qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2) f(\nu + 1, x, \alpha) = f(\nu, x, \alpha).$$

Différentions maintenant par rapport à $\alpha$ la formule (1), puis appliquons l'identité

$$n\mathrm{P}^{\nu,n}(x) = 2\nu[x\mathrm{P}^{\nu+1,n-1}(x) - \mathrm{P}^{\nu+1,n-2}(x)];$$

il en résulte l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\mathrm{D}_\alpha f(\nu, x, \alpha) = 2\nu(x - \alpha) f(\nu + 1, x, \alpha),$$

d'où, en vertu de (2),

$$\frac{D_\alpha f(\nu, x, \alpha)}{f(\nu, x, \alpha)} = \frac{2\nu(x-\alpha)}{1-2\alpha x+\alpha^2},$$

ce qui donnera pour $f(\nu, x, \alpha)$ une expression de la forme

$$f(\nu, x, \alpha) = \chi(\nu, x)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}, \tag{3}$$

où la fonction $\chi(\nu, x)$ est indépendante de $\alpha$.

Or, la définition (1) donnera immédiatement

$$f(\nu, x, 0) = 1,$$

d'où, en vertu de (3),

$$\chi(\nu, x) = 1,$$

et nous aurons finalement la formule classique

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P^{\nu,n}(x)\alpha^n, \qquad |\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|, \tag{4}$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ a été étudié déjà par Legendre [1], tandis que la formule générale appartient à Jacobi [2].

Cela posé, désignons par $\theta$ un angle réel quelconque; la formule (12) du paragraphe précédent montre que la série à termes positifs

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} |P^{\nu,n}(\cos\theta)|$$

est convergente, pourvu que $\mathfrak{R}(\nu) < -1$, d'où, en posant dans (4) $\alpha = e^{i\varphi}$, puis appliquant l'identité évidente

$$1 - 2e^{i\varphi}\cos\theta + e^{i2\varphi} = 2(\cos\varphi - \cos\theta)e^{i\varphi},$$

la proposition suivante :

I. *Supposons* $\mathfrak{R}(\nu) < -1$, *puis désignons par* $\theta$ *et* $\varphi$ *deux angles réels;*

---

(1) Mémoires présentés à l'Académie par divers savants, t. X, Paris, 1785. — HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 2, Berlin, 1878.

(2) *OEuvres*, t. VI, p. 154. — HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 297, 451, Berlin, 1878.

*nous aurons le développement*

$$\frac{e^{-\nu\varphi i}}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta)e^{n\varphi i}, \tag{5}$$

*où la série qui figure au second membre est uniformément convergente et par rapport à $\theta$ et par rapport à $\varphi$.*

Posons maintenant dans (4) $\nu = 1$, puis appliquons l'identité

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2} = \frac{1}{i2\sin\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-\alpha e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1-\alpha e^{-i\theta}}\right),$$

ce qui donnera pour $|\alpha| < 1$ la série de puissances

$$\frac{1}{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\alpha^n;$$

d'où, en vertu de (4) pour $x = \cos\theta$, l'identité suivante :

$$\mathrm{P}^{1,n}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{6}$$

De plus, la formule (5) du paragraphe XXIV donnera immédiatement

$$\lim_{\nu=0}[\Gamma(\nu)\mathrm{P}^{\nu,n}(x)] = \frac{\xi^n+\xi^{-n}}{n}, \qquad n \geqq 1, \qquad \xi = x \pm \sqrt{x^2-1};$$

d'où, en posant

$$x = \cos\theta, \qquad \xi = e^{\pm i\theta},$$

la formule nouvelle analogue à (6)

$$\lim_{\nu=0}[\Gamma(\nu)\mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta)] = \frac{2\cos n\theta}{n}, \qquad n \geqq 1. \tag{7}$$

Les deux formules (6) et (7) montrent clairement que la fonction ultrasphérique $\mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta)$ est une généralisation immédiate des fonctions trigonométriques; appliquons, par exemple, la formule (5) du paragraphe XXXI; nous aurons pour $\nu = 1$, $\nu = 0$ ces deux formules élémentaires

$$\sin(n+1)\theta = \sin\theta \sum_{r=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^r \binom{n-r}{r}(2\cos\theta)^{n-2r} \tag{8}$$

et

$$\cos n\theta = \frac{n}{2} \sum_{r=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^r}{n-2r} \binom{n-r-1}{r} (2\cos\theta)^{n-2r}. \tag{9}$$

Une autre classe de formules élémentaires peut être déduite du développement (4) en multipliant d'après la règle de Cauchy deux séries de ce genre.

En premier lieu posons, dans (4), $\rho$ au lieu de $\nu$, puis multiplions les deux formules ainsi trouvées; nous aurons l'identité suivante,

$$\mathrm{P}^{\nu+\rho,n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \mathrm{P}^{\nu,n-s}(x)\,\mathrm{P}^{\rho,s}(x); \tag{10}$$

d'où pour $\rho = 1$, $x = \cos\theta$

$$\mathrm{P}^{\nu+1,n}(\cos\theta) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\sin(s+1)\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{P}^{\nu,n-s}(\cos\theta), \tag{11}$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \rho = \frac{1}{2}$ donnera

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{r=0}^{r=n} \mathrm{P}^{\frac{1}{2},n-r}(\cos\theta)\,\mathrm{P}^{\frac{1}{2},r}(\cos\theta). \tag{12}$$

En second lieu, changeons dans (4) le signe de $x$, puis appliquons l'identité

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)(1+2\alpha x+\alpha^2) = 1-2(2x^2-1)\alpha^2+\alpha^4;$$

la multiplication des deux séries ainsi obtenues donnera

$$\sum_{s=0}^{s=2n+1} (-1)^s\,\mathrm{P}^{\nu,s}(x)\,\mathrm{P}^{\nu,2n-s+1}(x) = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s\,\mathrm{P}^{\nu,s}(x)\,\mathrm{P}^{\nu,2n-s}(x) = \mathrm{P}^{\nu,n}(2x^2-1); \tag{14}$$

d'où, en posant $x = \cos\theta$, la formule curieuse

$$\mathrm{P}^{\nu,n}(\cos 2\theta) = \sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s\,\mathrm{P}^{\nu,s}(\cos\theta)\,\mathrm{P}^{\nu,2n-s}(\cos\theta). \tag{15}$$

## XXXIII. — Formules d'Euler et de Jacobi.

Les formules différentielles que nous venons de développer dans le paragraphe XX se présentent sous forme très élégante dans le cas $\rho = n$, $n$ désignant un positif entier; la formule (13) donnera dans ce cas cette formule célèbre de Jacobi [1]

$$(1)\quad \mathrm{D}_x^n\left[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}\right] = \frac{(-1)^n n!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2n+2\nu)}{2^n\,\Gamma(\nu+n)\,\Gamma(n+2\nu)}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\nu,n}(x),$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ a été connu déjà par Euler comme l'a remarqué Imtschenetsky [2]; cette même formule particulière a été déduite indépendamment par Rodrigues [3], Ivory [4] et Jacobi [5].

Posons ensuite, dans (1), $\frac{1}{2} - \nu - n$ au lieu de $\nu$, puis introduisons pour la fonction ultrasphérique ainsi obtenue la série hypergéométrique (2) du paragraphe XXXI; nous avons la formule suivante

$$(2)\quad \mathrm{D}_x^n[(1-x^2)^{-\nu}] = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(2\nu)}\,\frac{x^n}{(1-x^2)^{\nu+n}}\,\mathrm{F}\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}+\nu, \frac{1}{x^2}\right),$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à Euler [6]. On voit que cette formule eulérienne nous donne immédiatement la dérivée d'un ordre quelconque de la fonction $\arcsin x$.

Posons dans (1) directement $\frac{1}{2} - \nu - n$ au lieu de $\nu$; les expressions diverses données dans le paragraphe XXIX pour la fonction $\mathrm{U}^{\nu,\rho}(x)$

(1) *Journal de Crelle*, t. LVI.
(2) *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. XIV, 1882, p. 255.
(3) *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III, 1816, p. 361-385.
(4) *Philosophical Transactions*, p. 91-93, Londres, 1824.
(5) *Journal de Crelle*, t. II, 1827, p. 223-226; *Œuvres*, t. VI, p. 21-25.
(6) *Institutiones calculi differentialis*, p. 150.

nous conduiront à cette autre forme de la formule (2),

$$(3)\qquad D_x^n[(1-x^2)^{-\nu}] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{(1-x^2)^{\nu+\frac{n}{2}}} P^{\nu,n}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right),$$

qui semble être due à l'auteur (¹).

La formule (1) donnera ensuite si nous posons $\nu = 1$ et $n-1$ au lieu de $n$, puis appliquons l'identité (6) du paragraphe XXXII cette autre formule célèbre due à Jacobi (²)

$$(4)\qquad D_x^{n-1}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right] = \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5\ldots(2n-1)}{n} \sin(n \arc\cos x).$$

La formule différentielle (1) donnera alors immédiatement le théorème suivant :

I. *Supposons* $\nu$ *réel et égal à* $\frac{1}{2}$ *au moins; tous les zéros de la fonction ultrasphérique* $P^{\nu,n}(x)$ *sont réels et situés entre les limites* $+1$ *et* $-1$.

Pour obtenir une autre application essentielle de la formule (1) considérons une fonction $f(x)$ réelle ou complexe de la variable réelle $x$, telle que les $n+1$ fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x)$$

sont continues dans l'intervalle $-1 \leq x \leq +1$, puis étudions l'intégrale définie suivante,

$$(5)\qquad I = \int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu,n}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \qquad \Re(\nu) > -\frac{1}{2};$$

la formule différentielle (1) donnera pour I cette autre expression

$$I = \frac{(-2)^n \Gamma(\nu+n)\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(\nu)\Gamma(2n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} f(x) D_x^n\left[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}\right] dx,$$

d'où, en intégrant $n$ fois par parties, la formule fondamentale

$$(6)\qquad I = \frac{2^n \Gamma(\nu+n)\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+2n)} \int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}} dx.$$

---

(¹) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. XVII, 1906, p. 222-224.

(²) *Journal de Crelle*, t. XVI, 1835.

de laquelle nous avons à déduire une suite d'autres résultats dont la plupart sont très connus, mais démontrés à l'aide de méthodes très différentes.

1° $\nu = 0$, $x = \cos\theta$ : un simple calcul donnera la formule célèbre de Jacobi (¹) :

$$(7) \quad \int_1^\pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2n}\,d\theta;$$

2° $\nu = 1$, $x = \cos\theta$ : posons $n - 1$ au lieu de $n$, nous aurons la formule analogue à (7) :

$$(8) \quad \int_0^\pi f(\cos\theta)\sin(n\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n-1)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2n}\,d\theta;$$

3° *Soit $f(x)$ un polynome entier de $x$ d'un degré égal à $n - 1$ au plus; la valeur de l'intégrale (5) est égale à zéro;*

4° Appliquons la formule différentielle

$$D_x^r P^{\nu,r}(x) = \frac{2^r\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(\nu)};$$

nous aurons en vertu de (6) la formule singulière suivante,

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} P^{\nu,n}(x)P^{\nu,r}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{\pi\Gamma(n+2\nu)}{2^{2\nu-1}(\nu+n)\,n!\,[\Gamma(\nu)]^2}, \end{cases}$$

selon que $n \lessgtr r$ ou $n = r$; le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à Legendre (²);

5° $\nu = 0$, $x = \cos\theta$ : la formule (9) donnera cette autre, due à Euler (³) :

$$(10) \quad \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(r\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

selon que $n \lessgtr r$ ou $n = r$;

---

(¹) *Journal de Crelle*, t. XVI, 1835.

(²) *Histoire de l'Académie de Paris*, 1787, p. 373; 1789, p. 384.

(³) *Voir*, par exemple, *Nova Acta Academiæ Petropolitanæ*, t. XI, p. 49. Le Mémoire d'Euler est daté de mai 1777.

6° $\nu = 1$, $x = \cos\theta$; nous aurons l'autre formule eulérienne selon que $n \gtrless r$ ou $n = r$;

$$(11) \qquad \int_0^\pi \sin(n\theta)\sin(r\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

7° Soit $f(x)$ un polynome entier du degré $n$ par rapport à $x$; nous aurons toujours une identité de la forme

$$(12) \qquad f(x) = a_0 P^{\nu,0}(x) + a_1 P^{\nu,1}(x) + \ldots + a_n P^{\nu,n}(x),$$

où le coefficient $a_p$ se détermine à l'aide de la formule

$$(13) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu,p}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi\Gamma(p+2\nu)}{2^{2\nu-1}(\nu+p)p!\,[\Gamma(\nu)]^2}\,a_p,$$

ou bien, en vertu de (6),

$$(14) \qquad a_p = \frac{2^{p+2\nu-1}\Gamma(\nu+p+1)\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(2\nu+2p)}\int_{-1}^{+1} f^{(p)}(x)(1-x^2)^{\nu+p-\frac{1}{2}}dx,$$

c'est-à-dire que la représentation (12) n'est possible que d'une seule façon.

Posons particulièrement

$$f(x) = x^n, \qquad f^{(p)}(x) = n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p};$$

la formule (6) donnera, en vertu de l'intégrale eulérienne de première espèce, le développement

$$(15) \qquad x^n = \frac{n!\,\Gamma(\nu)}{2^n}\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{n-2s+\nu}{s!\,\Gamma(\nu+n-s+1)}\,P^{\nu,n-2s}(x).$$

8° *La fonction ultrasphérique $P^{\nu,n}(x)$ est le seul polynome du degré $n$ par rapport à $x$ qui satisfait aux $n+1$ conditions suivantes :*

$$(16) \qquad \int_{-1}^{+1} x^n f(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi\Gamma(n+2\nu)}{2^{n+2\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+n+1)},$$

*et en désignant par $p$ un nombre entier, tel que $0 \leq p \leq n-1$,*

$$(17) \qquad \int_{-1}^{+1} x^p f(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx = 0;$$

*nous supposons naturellement $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.*

Appliquons la formule (12), puis mettons pour abréger

$$\alpha_{p,r} = \int_{-1}^{+1} x^p P^{\nu,r}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \tag{18}$$

ce qui donnera $\alpha_{p,r} = 0$ pour $p < r$; nous aurons, en vertu de (17),

$$\alpha_{p,p}a_p + \alpha_{p,p-1}a_{p-1} + \ldots + \alpha_{p,0}a_0 = 0, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1,$$

tandis que (16) donnera de même

$$\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n,n-1}a_{n-1} + \ldots + \alpha_{n,0}a_0 = \alpha_{n,n},$$

d'où immédiatement

$$a_n = 1, \qquad a_p = 0, \qquad 0 \leqq p \leqq n-1;$$

c'est-à-dire que nous aurons

$$f(x) = P^{\nu,n}(x).$$

Du reste, on voit que le polynome $f(x)$ du degré $n$ par rapport à $x$ est entièrement déterminé quand les $n+1$ intégrales (16) et (17) ont des valeurs données.

## XXXIV. — Développements divers de $P^{\nu,n}(\cos\theta)$.

Pour mettre en pleine lumière la propriété que possède la fonction ultrasphérique $P^{\nu,n}(\cos\theta)$ d'être une généralisation des fonctions trigonométriques il nous semble utile de réunir dans un paragraphe séparé les développements divers de cette fonction qui peuvent être déduits des formules générales développées dans le Chapitre VI.

1° La formule (5) du paragraphe XXIV donnera pour $n$ positif entier

$$P^{\nu,\nu}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{\Gamma(\nu+n)x^n}{\Gamma(\nu)n!} F\left(-n, \nu, 1-\nu-n, \frac{1}{x^2}\right),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P^{\nu,n}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{[\Gamma(\nu)]^2} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\nu+s)\Gamma(\nu+n-s)}{s!(n-s)!} x^{n-2s}. \tag{1}$$

Posons ensuite dans (1) $x = e^{\pm i\theta}$, puis ajoutons les deux formules ainsi obtenues; nous aurons

$$(2)\qquad P^{\nu,n}(\cos\theta)=\frac{1}{[\Gamma(\nu)]^2}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\Gamma(\nu+s)\Gamma(\nu+n-s)}{s!(n-s)!}\cos(n-2s)\theta,$$

d'où pour $\nu=1$ la formule élémentaire

$$(3)\qquad \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}=\sum_{s=0}^{s=n}\cos(n-2s)\theta.$$

Supposons $\rho=2n$, $n$ étant un entier non négatif; nous aurons, en vertu des développements du paragraphe XXVI,

$$(4)\qquad \begin{cases} P^{\nu,2n}(\sqrt{1+x^2})=\dfrac{\Gamma(2\nu+2n)}{(2n)!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\nu+n,\nu+\dfrac{1}{2},-x^2\right),\\ P^{\nu,2n}(\sqrt{1+x^2})=\dfrac{\Gamma(\nu+2n)(2x)^{2n}}{(2n)!\,\Gamma(\nu)}F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,1-\nu-2n,-\dfrac{1}{x^2}\right),\end{cases}$$

d'où, en posant $x=i\sin\theta$,

$$(5)\qquad \begin{cases} P^{\nu,2n}(\cos\theta)=\dfrac{\Gamma(2\nu+2n)}{(2n)!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\nu+n,\nu+\dfrac{1}{2},\sin^2\theta\right),\\ P^{\nu,2n}(\cos\theta)=\dfrac{\Gamma(\nu+2n)(-1)^n(2\sin\theta)^{2n}}{(2n)!\,\Gamma(\nu)}\\ \qquad\qquad\times F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,1-\nu-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right).\end{cases}$$

Posons ensuite $\nu=0$; nous aurons les formules élémentaires

$$(6)\qquad \begin{cases} \cos(2n\theta)=F\left(-n,n,\dfrac{1}{2},\sin^2\theta\right),\\ \cos(2n\theta)=(-1)^n 2^{2n-1}\sin^{2n}\theta\,F\left(-n,\dfrac{1}{2}-n,1-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right),\end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $\nu=1$ donnera de même

$$(7)\qquad \begin{cases} \sin(2n+1)\theta=(2n+1)F\left(-n,n+1,\dfrac{3}{2},\sin^2\theta\right)\sin\theta,\\ \sin(2n+1)\theta=(-1)^n 2^{2n}n\,F\left(-n,-\dfrac{1}{2}-n,-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\sin^{2n+1}\theta.\end{cases}$$

3° Le dernier groupe des formules du paragraphe XXVI donne ces cas particuliers :

$$(8)\begin{cases}(1-x)^{-\frac{1}{2}}P^{\nu,2n+1}(\sqrt{1-x})=\dfrac{\Gamma(2\nu+2n+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu)}\\ \qquad\times F\left(-n,\nu+n+1,\nu+\dfrac{1}{2},x\right),\\ (1-x)^{-\frac{1}{2}}P^{\nu,2n+1}(\sqrt{1-x})=\dfrac{\Gamma(\nu+2n+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(\nu)}\\ \qquad\times(-1)^n 2^{2n}x^n F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,-\nu-2n,\dfrac{1}{x}\right),\end{cases}$$

où $n$ désigne un entier non négatif. Posons ensuite $x=\sin^2\theta$; nous aurons

$$(9)\begin{cases}P^{\nu,2n+1}(\cos\theta)=\dfrac{\Gamma(2\nu+2n+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\nu+n+1,\nu+\dfrac{1}{2},\sin^2\theta\right)\cos\theta,\\ P^{\nu,2n+1}(\cos\theta)=\dfrac{\Gamma(\nu+2n+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(\nu)}\\ \qquad\times(-1)^n 2^{2n}F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,-\nu-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\sin^{2n}\theta\cos\theta.\end{cases}$$

Posons $\nu=0$; nous aurons particulièrement les formules élémentaires

$$(10)\begin{cases}\cos(2n+1)\theta=F\left(-n,n+1,\dfrac{1}{2},\sin^2\theta\right)\cos\theta,\\ \cos(2n+1)\theta=(-1)^n 2^{2n}F\left(-n,\dfrac{1}{2}-n,-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\sin^{2n}\theta\cos\theta,\end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $\nu=1$ donnera de même, si nous posons $n-1$ au lieu de $n$,

$$(11)\begin{cases}\sin 2n\theta=nF\left(1-n,1+n,\dfrac{3}{2},\sin^2\theta\right)\sin 2\theta,\\ \sin 2n\theta=(-1)^{n-1}n\,2^{2n-1}F\left(1-n,\dfrac{1}{2}-n,1-2n,\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)\cos\theta\sin^{2n-1}\theta.\end{cases}$$

4° Les développements du paragraphe XXVII donnent ces cas particuliers :

$$(12)\begin{cases}(1+x^2)^n P^{\nu,n}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,\dfrac{1}{2}+\nu,-x^2\right),\\ (1+x^2)^n P^{\nu,n}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,\dfrac{1}{2}-\nu-n,\dfrac{1}{2}+\nu,-\dfrac{1}{x^2}\right)x^{2n},\end{cases}$$

d'où pour $x = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ la formule suivante :

$$(13)\quad P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} F\left(-n, \frac{1}{2}-\nu-n, \frac{1}{2}+\nu, -\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta\right)\cos^{2n}\frac{1}{2}\theta,$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à Murphy (¹). Posons $\nu = 0$, $\nu = 1$; nous aurons respectivement

$$(14)\quad \begin{cases} \cos(n\theta) = \left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n} F\left(-n, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}, -\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta\right), \\ \dfrac{\sin(n+1\theta)}{\sin\theta} = (n+1)\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n} F\left(-n, -\frac{1}{2}-n, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta\right). \end{cases}$$

5° La formule (6) du paragraphe XXVIII nous conduira à ce cas particulier,

$$(15)\quad (1+x^2)^{\frac{n}{2}} P^{\nu,n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}+\nu, -x^2\right),$$

d'où, en posant $x = \operatorname{tang}\theta$, la formule nouvelle

$$(16)\quad P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}+\nu, -\operatorname{tang}^2\theta\right)\cos^n\theta,$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à Euler (²), tandis que les hypothèses $\nu = 0$, $\nu = 1$ donnent respectivement

$$(17)\quad \begin{cases} \cos n\theta = \displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s} \cos^{n-2s}\theta \sin^{2s}\theta, \\ \sin n\theta = \displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n}{2s+1} \cos^{n-2s-1}\theta \sin^{2s+1}\theta, \end{cases}$$

ou bien la formule de Moivre.

6° Nous avons encore à mentionner ici la formule particulière

$$(18)\quad P^{\nu,n}(1+x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} F\left(-n, n+2\nu, \nu+\frac{1}{2}, -\frac{x}{2}\right),$$

(¹) *Elementary principles*. Cambridge, 1833.

(²) *Institutiones calculi integralis*, t. I, sect. I, Cap. VI, probl. 33.

qui peut être démontrée simplement si nous développons en série de Maclaurin la fontion qui figure au second membre. Posons

$$x = -2\sin^2\frac{1}{2}\theta;$$

nous aurons

$$(19)\qquad P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}\,F\left(-n,\ n+2\nu,\ \frac{1}{2}+\nu,\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right),$$

d'où, pour $\nu = 0$, $\nu = 1$, les formules élémentaires obtenues dans 2°.

Posons, dans les formules obtenues pour $P^{\nu,n}(\cos\theta)$, $\nu = \frac{1}{2}$; nous aurons des développements pour la fonction sphérique ordinaire $P^n(\cos\theta)$.

### XXXV. — La fonction cylindrique comme valeur limite.

Les formules particulières que nous venons de développer nous permettent de déduire une valeur limite intéressante, concernant la fonction cylindrique de première espèce, savoir la fonction

$$(1)\qquad J^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}.$$

A cet effet, prenons pour point de départ la formule (19) du paragraphe XXXIV; nous avons à démontrer le théorème suivant :

I. *Supposons finis* $\nu$ *et* $x$ *; nous aurons la valeur limite*

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty}\left[\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,n!}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)}\,P^{\nu,n}\left(\cos\frac{x}{n}\right)\right] = x^{\frac{1}{2}-\nu}J^{\nu-\frac{1}{2}}(x);$$

*de plus, supposons finies les limites supérieures de* $|\nu|$ *et de* $|x|$ *; la fonction qui figure au premier membre de* (2) *convergera uniformément vers sa valeur limite susdite.*

Écrivons tout d'abord sous la forme suivante

$$\frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu)\,n!}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)}\,P^{\nu,n}\left(\cos\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,F\left(-n,\ n+2\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\frac{x}{2n}\right)$$

la fonction susdite, puis désignons par $u_p$ le terme général de la fonction hypergéométrique qui figure au second membre ; un simple calcul donnera pour $u_p$ cette autre expression

$$(1) \qquad u_p = \frac{(-1)^p 2^{\frac{1}{2}-\nu}}{p!\,\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^p \left(\frac{2n}{x}\sin\frac{x}{2n}\right)^{2p} a_p\, b_p,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(2) \qquad a_p = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right), \qquad a_0 = 1,$$

$$(3) \qquad b_p = \left(1+\frac{2\nu}{n}\right)\left(1+\frac{2\nu+1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{2\nu+p-1}{n}\right), \qquad b_0 = 1.$$

Cela posé, introduisons comme ordinairement le positif entier $m$ déterminé par les conditions

$$(4) \qquad m+1 > |\sqrt[3]{n}| \geqq m,$$

puis, posons pour abréger

$$(5) \qquad A_m = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m,$$

$$(6) \qquad B_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u^n;$$

nous aurons évidemment

$$(7) \qquad \frac{1}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} F\left(-n,\, n+2\nu,\, \nu+\frac{1}{2},\, \sin^2\frac{x}{2n}\right) = A_m + B_m.$$

Soit ensuite $p \leqq m$, puis posons

$$\left(\frac{2^n}{x}\sin\frac{x}{2n}\right)^{2p} = 1 + \delta_p;$$

le lemme V du paragraphe II donnera immédiatement

$$(8) \qquad |\delta_p| < \frac{4p|x|^2}{n} \leqq \frac{4m|x|^2}{n} < \frac{m^2}{n};$$

posons ensuite

$$a_p = 1 + \delta'_p, \qquad b_p = 1 + \delta''_p;$$

le lemme III du paragraphe II donnera de même

$$(9)\qquad |\delta'_p| < \frac{4p^2}{n} \leqq \frac{4m^2}{n},$$

$$(10)\qquad |\delta''_p| < \frac{4p(p+|2\nu|)}{n} < \frac{8m^2}{n}.$$

Soit maintenant pour $p \leqq m$

$$(11)\qquad u_p = \frac{(-1)^p 2^{\frac{1}{2}-\nu}}{p!\,\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}(1+\lambda_p);$$

il est possible de déterminer une quantité positive et finie M, telle que nous aurons constamment pour $p \leqq m$

$$(12)\qquad |\lambda_p| < \frac{M}{m};$$

de plus nous aurons, en vertu de (1) et (11),

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} A_m - x^{\frac{1}{2}-\nu} J^{\nu-\frac{1}{2}}(x) = {} & \sum_{p=0}^{p=m} \frac{(-1)^p \lambda_p}{p!\,\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ & - \sum_{p=m+1}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant $m+1 \leqq p \leqq n$; nous aurons constamment

$$a_p < 1,$$
$$|b_p| < \left(1+\frac{2|\nu|+n}{n}\right)^p < 2^{2p};$$

de plus, il est possible de déterminer une quantité positive et finie $g$, telle que

$$\left|\frac{2n}{x}\sin\frac{x}{2n}\right| \leqq g,$$

ce qui donnera évidemment

$$(14)\qquad |B_m| < \sum_{p=m+1}^{p=n} \frac{\left|2^{\frac{1}{2}-\nu}\right|}{\left|\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)\right|}\frac{(gx)^{2p}}{p!},$$

de sorte que les relations (13) et (14) nous conduiront immédiatement au but.

La formule (2) qui correspond à $\nu = \frac{1}{2}$ est due à Mehler [1], tandis que Heine [2] a étudié presque contemporainement un cas plus général de notre formule susdite.

### XXXVI. — La fonction ultrasphérique de seconde espèce.

La fonction ultrasphérique de seconde espèce se présente pour $|x| > 1$ sous la forme suivante :

$$(1)\quad Q^{\nu,n}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)\,x^{-n-2\nu}}{2^{n+1}\Gamma(\nu+n+1)} F\left(\nu+\frac{n}{2}, \nu+\frac{n+1}{2}, 1+\nu+n, \frac{1}{x^2}\right),$$

d'où, pour $n = -1$, cette expression simple

$$(2)\qquad Q^{\nu,-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}.$$

Un autre cas particulier très simple peut être obtenu de (1), si nous y posons $n = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, ce qui donnera

$$(3)\qquad Q^{0}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

Quant au prolongement analytique de $Q^{\nu,n}(x)$, les formules du paragraphe XXX donnent

$$(4)\qquad e^{\nu\pi i}Q^{\nu,n}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}{2^{2-2\nu}}P^{\nu,n}(x) + \frac{i\sqrt{\pi}}{2^{2-2\nu}}L^{\nu,n}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(5)\quad \begin{cases} L^{\nu,2n}(x) = \dfrac{(-1)^n\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)2x}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}+\nu+n, \frac{3}{2}, x^2\right), \\[2ex] L^{\nu,2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} F\left(-\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}+\nu+n, \frac{1}{2}, x^2\right); \end{cases}$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 68, 1868, p. 140.
(2) *Journal de Crelle*, t. 69, *Handbuch*, t. I, p. 154. Berlin, 1878.

c'est-à-dire que les deux fonctions $L^{\nu,n}(x)$ et $P^{\nu,n}(x)$ sont de parité différente.

Il est digne de remarquer que la formule (4) nous permet d'établir une formule intégrale assez analogue à celle donnée dans le paragraphe XXXIII. En effet, nous aurons ce théorème curieux :

I. *Supposons $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$, puis désignons par $n$ et $p$ deux nombres entiers, tels que $n + 2p \geqq 0$; nous aurons*

$$(6)\quad \int_{-1}^{+1} Q^{\nu,n}(x) P^{\nu,n+2p}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dx = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{e^{-\nu\pi i}(-1)^n\sqrt{\pi^3}\,\Gamma(n+2\nu)}{(2\nu+2n)\Gamma(\nu)\,n!}, \end{cases}$$

*selon que $p$ est différent de zéro ou non.*

Quant à la nature des points critiques $x = \pm 1$, les formules du paragraphe XXX donnent ici

$$(7)\quad \begin{cases} D(+1)\,Q^{\nu,n}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{-\nu\pi i}\,P^{\nu,n}(x) - e^{-2\nu\pi i}Q^{\nu,n}(x), \\ I(+1)\,Q^{\nu,n}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{\nu\pi i}\,P^{\nu,n}(x) - e^{2\nu\pi i}Q^{\nu,n}(x); \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} D(-1)\,Q^{\nu,n}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{\nu\pi i}\,P^{\nu,n}(x) - e^{-2\nu\pi i}Q^{\nu,n}(x), \\ I(-1)\,Q^{\nu,n}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{2\nu\pi i}P^{\nu,n}(x) - e^{2\nu\pi i}Q^{\nu,n}(x). \end{cases}$$

Les formules différentielles du paragraphe XX donnent, pour $\rho = p = n$,

$$(9)\quad D_x^n\left[(x^2-1)^{\nu+n-\frac{1}{2}}Q^{\nu+n,0}(x)\right] = \frac{(-2)^n\,n!\,\Gamma(2\nu+2n)}{\Gamma(n+2\nu)}(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}Q^{\nu,n}(x),$$

tandis que l'hypothèse $\rho = n$, $p = n+1$ ne donne aucune expression pour $Q^{\nu,n}(x)$.

Enfin, combinons les formules (2) et

$$D_x Q^{\nu,n}(x) = -\frac{1}{2}Q^{\nu+1,n-1}(x);$$

nous aurons

$$D_x^{n+1}Q^{\nu,n}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+2n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}(x^2-1)^{-\nu-n-\frac{1}{2}}.$$

# CHAPITRE VIII.

## APPLICATIONS DES FORMULES FONDAMENTALES.

### XXXVII. — Sommation de quelques séries finies.

Écrivons sous la forme

$$(1)\quad \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\,2(\rho+\nu)x\,K^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\rho+2)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\,K^{\nu,\rho+1}(x) + \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu-1)}\,K^{\nu,\rho-1}(x)$$

l'équation aux différences finies qui figure dans la définition d'une fonction métasphérique; multiplions ensuite par $K_1^{\nu,\rho}(y)$ l'équation (1), puis posons successivement

$$\rho+1,\quad \rho+2,\quad \rho+3,\quad \ldots,\quad \rho+n$$

au lieu de $\rho$ dans l'équation ainsi obtenue; nous aurons, en additionnant toutes les formules ainsi trouvées, la formule suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &x\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(2\rho+2\nu+2s)\,\Gamma(\rho+s+1)}{\Gamma(\rho+2\nu+s)}\,K^{\nu,\rho+s}(x)\,K_1^{\nu,\rho+s}(y)\\ &\quad=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\Gamma(\rho+s+2)}{\Gamma(\rho+2\nu+s)}\,K^{\nu,\rho+s+1}(x)\,K_1^{\nu,\rho+s}(y)\\ &\quad\quad+\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\Gamma(\rho+s+1)}{\Gamma(\rho+2\nu+s-1)}\,K^{\nu,\rho+s-1}(x)\,K_1^{\nu,\rho+s}(y).\end{aligned}\right.$$

Permutons maintenant dans (2) $x$ et $y$, $K$ et $K_1$, puis soustrayons de (2) l'équation ainsi obtenue; nous aurons finalement l'identité remarquable

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-y)\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2\rho+2\nu+2s)\Gamma(\rho+s+1)}{\Gamma(\rho+2\nu+s)} \mathrm{K}^{\nu,\rho+s}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\rho+s}(y) \\ &\quad= \frac{\Gamma(\rho+n+2)}{\Gamma(\rho+2\nu+n)}\left[\mathrm{K}^{\nu,\rho+n+1}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\rho+n}(y) - \mathrm{K}^{\nu,\rho+n}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\rho+n+1}(y)\right] \\ &\quad+ \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+2\nu-1)}\left[\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(y) - \mathrm{K}_1^{\nu,\rho-1}(y)\,\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\right], \end{aligned}\right.$$

de laquelle nous avons à déduire une suite de formules intéressantes.

1° En premier lieu, posons $\rho = 0$, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 = \mathrm{P}$; nous aurons la formule élémentaire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2s+2\nu)s!}{\Gamma(s+2\nu)} \mathrm{P}^{\nu,s}(x)\,\mathrm{P}^{\nu,s}(y) \\ &\quad= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+2\nu)}\,\frac{\mathrm{P}^{\nu,n+1}(x)\,\mathrm{P}^{\nu,n}(y) - \mathrm{P}^{\nu,n}(x)\,\mathrm{P}^{\nu,n+1}(y)}{x-y} = \Phi^{\nu,n}(x,y), \end{aligned}\right.$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie des séries de fonctions ultrasphériques de première espèce;

2° Posons maintenant dans (3) $\rho = 0$, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 = \mathrm{Q}$, puis appliquons l'expression

$$\mathrm{Q}^{\nu,-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu};$$

nous aurons la formule



$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2s+2\nu)s!}{\Gamma(s+2\nu)} \mathrm{Q}^{\nu,s}(x)\,\mathrm{Q}^{\nu,s}(y) \\ &\quad= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+2\nu)}\,\frac{\mathrm{Q}^{\nu,n+1}(x)\,\mathrm{Q}^{\nu,n}(y) - \mathrm{Q}^{\nu,n}(x)\,\mathrm{Q}^{\nu,n+1}(y)}{x-y} \\ &\quad+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)}\,\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{Q}^{\nu,0}(y) - (y^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}\mathrm{Q}^{\nu,0}(x)}{x-y}, \end{aligned}\right.$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est assez élégant.

Supposons ensuite que ni $x$, ni $y$ ne soit égal à une quantité réelle située entre les limites $\pm 1$, ces limites y comptées; la valeur limite du paragraphe XXIV donnera, en vertu de (5),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2s+2\nu)s!}{\Gamma(s+2\nu)} Q^{\nu,s}(x) Q^{\nu,s}(y) \\ &\quad = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} Q^{\nu,0}(y) - (y^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} Q^{\nu,0}(x)}{x-y}, \end{aligned}\right.$$

où la série infinie qui figure au premier membre est uniformément convergente, pourvu que $x$ et $y$ soient situés tous les deux sur la circonférence ou à l'extérieur d'une ellipse $E(\delta)$ quelconque. La formule (6) m'a été communiquée par Ch. Neumann [1].

3° La formule particulière la plus importante contenue comme cas particulier dans (3) est certainement celle qui correspond à $\rho = 0$, $K = P$ et $K_1 = Q$. Appliquons les identités

$$P^{\nu,-1}(x) = 0, \qquad P^{\nu,0}(x) = 1;$$

nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2\nu+2s)s!}{\Gamma(s+2\nu)} P^{\nu,s}(x) Q^{\nu,s}(y) \\ &\quad = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+2\nu)} \frac{P^{\nu,n+1}(x) Q^{\nu,n}(y) - P^{\nu,n}(y) Q^{\nu,n}(x)}{x-y} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}}{y-x}. \end{aligned}\right.$$

Supposons ensuite $x$ situé à l'intérieur, $y$ sur la circonférence ou à l'extérieur d'une certaine ellipse $E(a)$; nous aurons, en vertu de (7),

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2\nu+2s)s!}{\Gamma(s+2\nu)} P^{\nu,s}(x) Q^{\nu,s}(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}}{y-x},$$

où la série infinie qui figure au premier membre est absolument convergente.

Appliquons ensuite l'identité

$$(y^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} Q^{\nu,s}(y) = \frac{\Gamma(s+2\nu)2^{2\nu-1}}{s!} Q^{1-\nu,s-1+2\nu}(y),$$

qui représente un cas particulier de la formule (8) du paragraphe XX;

---

(1) En juillet 1907.

nous aurons cette autre forme de la formule (8),

$$\frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu) Q^{1-\nu, s-1+2\nu}(y) P^{\nu, s}(x) = \frac{1}{y-x}, \tag{9}$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à Heine [1]; dans le paragraphe XLVI nous aurons, avec Gegenbauer, à généraliser beaucoup la formule (9).

Quant à la formule fondamentale que nous venons de développer, nous aurons ce théorème essentiel dans nos recherches suivantes :

I. *La série infinie qui figure au premier membre de* (9) *est uniformément convergente, pourvu que $x$ soit situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une ellipse* $E(a)$ *quelconque, tandis que $y$ parcourt la circonférence d'une ellipse* $E(a+\delta)$, *où $\delta$ désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut, mais d'une grandeur assignable.*

### XXXVIII. — Formules récursives. Polynomes de Gauss.

Comme une autre conséquence immédiate de l'équation aux différences finies

$$(\rho+1)K^{\nu, \rho+1}(x) = 2(\rho+\nu)xK^{\nu, \rho}(x) - (\rho+2\nu-1)K^{\nu, \rho-1}(x),$$

nous aurons par la conclusion ordinaire de $n$ à $n+1$ une formule récursive générale de la forme

$$K^{\nu, \rho+n}(x) = A^{\nu, \rho, n}(x)K^{\nu, \rho}(x) + B^{\nu, \rho, n}(x)K^{\nu, \rho-1}(x), \tag{1}$$

où $n$ désigne un positif entier quelconque, tandis que A et B sont des polynomes entiers du degré $n$ respectivement $n-1$ par rapport à $x$; de plus, nous aurons

$$A^{\nu, \rho, n}(-x) = (-1)^n A^{\nu, \rho, n}(x), \qquad B^{\nu, \rho, n}(-x) = (-1)^{n-1} B^{\nu, \rho, n}(x). \tag{2}$$

Dans (1) K désigne une fonction métasphérique quelconque, ce qui

---

[1] *Journal de Crelle*, t. XLII, 1851, p. 72; *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 197, Berlin, 1878.

donnera pour $\rho = 0$, en vertu des valeurs obtenues pour $P^{\nu,0}(x)$ et $P^{\nu,-1}(x)$,

$$A^{\nu,0,n}(x) = P^{\nu,n}(x). \tag{3}$$

Cela posé, le déterminant fonctionnel

$$P^{\nu,\rho}(x)Q^{\nu,\rho+1}(x) - P^{\nu,\rho+1}(x)Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

donnera, en vertu de (1), ces deux autres formules

$$(4)\quad \begin{cases} P^{\nu,\rho+n}(x)Q^{\nu,\rho-1}(x) - Q^{\nu,\rho+n}(x)P^{\nu,\rho-1}(x) \\ \quad = -\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}A^{\nu,\rho,n}(x), \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} P^{\nu,\rho+n}(x)Q^{\nu,\rho}(x) - Q^{\nu,\rho+n}(x)P^{\nu,\rho}(x) \\ \quad = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}B^{\nu,\rho,n}(x), \end{cases}$$

d'où, en posant dans (4), $\rho+1$ au lieu de $\rho$ et $n-1$ au lieu de $n$,

$$B^{\nu,\rho,n}(x) = -\frac{\rho+2\nu-1}{\rho+1}A^{\nu,\rho+1,n-1}(x); \tag{6}$$

c'est-à-dire que la formule récursive (1) ne contient qu'un seul polynome inconnu; car nous aurons finalement, en vertu de (6),

$$K^{\nu,\rho+n}(x) = A^{\nu,\rho,n}(x)K^{\nu,\rho}(x) - \frac{\rho+2\nu-1}{\rho+1}A^{\nu,\rho+1,n-1}(x)K^{\nu,\rho-1}(x). \tag{7}$$

La formule (7) est une généralisation très étendue d'une formule de Gauss. En effet, supposons dans (7) $\rho = 0$, puis posons pour abréger

$$A^{\nu,n}(x) = A^{\nu,1,n-1}(x); \tag{8}$$

nous aurons pour la fonction ultrasphérique de seconde espèce

$$Q^{\nu,n}(x) = P^{\nu,n}(x)Q^{\nu,0}(x) - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)}(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}A^{\nu,n}(x), \tag{9}$$

d'où, en posant encore pour abréger

$$A_n(x) = A^{\frac{1}{2}, 1, n-1}(x) = A^{\frac{1}{2}, n}(x),$$

la formule de Gauss [1]

$$(10) \qquad Q^n(x) = \frac{1}{2} P^n(x) \log\frac{x+1}{x-1} - A_n(x).$$

Les formules (5) et (6) donnent immédiatement

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} & Q^{\nu,\rho}(x) P^{\nu,\rho+n}(x) - Q^{\nu,\rho+n}(x) P^{\nu,\rho}(x) \\ & \quad = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)} (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} A^{\nu,\rho+1,n-1}(x). \end{aligned} \right.$$

Posons dans le déterminant fonctionnel $\rho + n$ au lieu de $\rho$, puis appliquons la formule (7); nous aurons

$$(12) \quad A^{\nu,\rho,n}(x) A^{\nu,\rho+1,n}(x) - A^{\nu,\rho+1,n-1}(x) A^{\nu,\rho,n+1}(x) = \frac{\Gamma(\rho+2)\Gamma(\rho+2\nu+n)}{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma(\rho+n+2)},$$

formule qui nous sera très utile bientôt.

En effet, la formule (12) nous permet de résoudre par rapport à $K^{\nu,\rho}(x)$ et $K^{\nu,\rho-1}(x)$ l'équation (8) et l'équation analogue obtenue en posant $n-1$ au lieu de $n$. Posons encore dans l'expression, ainsi obtenue pour $K^{\nu,\rho}(x)$, $\rho - n$ au lieu de $\rho$; nous aurons cette analogie de (8)

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} K^{\nu,\rho-n}(x) = & -\frac{\Gamma(\rho-n+2)\Gamma(\rho+2\nu-1)}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\rho+2\nu-n)} \\ & \times [A^{\nu,\rho-n+1,n-2}(x) K^{\nu,\rho}(x) - A^{\nu,\rho-n+1,n-1}(x) K^{\nu,\rho-1}(x)], \end{aligned} \right.$$

formule qui se présente sous forme élégante dans le cas où $\rho = n$, $n$ désignant un positif entier; nous aurons

$$(14) \quad K^{\nu,0}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu-1)}{n!\,\Gamma(2\nu)} [A^{\nu,n}(x) K^{\nu,n-1}(x) - A^{\nu,n-1}(x) K^{\nu,n}(x)],$$

---

[1] Voir Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 141. Berlin, 1878.

d'où, pour $K = P$,

$$P^{\nu,n-1}(x)A^{\nu,n}(x) - P^{\nu,n}(x)A^{\nu,n-1}(x) = \frac{n!\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n+2\nu-1)}. \tag{15}$$

Supposons encore $\nu = \frac{1}{2}$; nous aurons, pour les fonctions sphériques ordinaires, ces deux formules remarquables

$$P^{n-1}(x)A_n(x) - P^n(x)A_{n-1}(x) = n, \tag{16}$$

$$Q^{n-1}(x)A_n(x) - Q^n(x)A_{n-1}(x) = \frac{n}{2}\log\frac{x+1}{x-1}. \tag{17}$$

On voit que l'analogie entre les formules que nous venons de développer et celles connues dans la théorie des fonctions cylindriques [1] est parfaite. Cependant il faut remarquer que nous ne connaissons pas sous forme simple les coefficients du polynome $A^{\nu,\rho,n}(x)$, ce qui a lieu pour les polynomes de Lommel qui jouent un rôle analogue dans la théorie des fonctions cylindriques.

## XXXIX. — Formules de François Neumann.

C'est Gauss qui a trouvé le polynome

$$A_n(x) = A^{\frac{1}{2},n}(x) = A^{\frac{1}{2},1,n-1}(x);$$

cependant c'est François Neumann [2] qui a étudié, le premier, plus amplement ce polynome remarquable. Nous remarquons que le polynome $R_n(x)$ de Neumann et notre fonction $A_n(x)$ sont unis par la relation

$$A_n(x) = -2R_n(x).$$

Pour généraliser les formules de Neumann, nous posons, dans la formule récursive (7) du paragraphe XXXVIII, $\rho + p$ au lieu de $\rho$, où $p$

---

(1) *Voir* les paragraphes 11, 12, 13 de mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, Leipzig, 1904.

(2) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*, Leipzig, 1878.

désigne un positif entier; nous aurons

$$\begin{aligned}K^{\nu,\rho+n+p}(x) &= A^{\nu,\rho+p,n}(x)K^{\nu,\rho+p}(x)\\ &\quad-\frac{\rho+2\nu+p-1}{\rho+p+1}A^{\nu,\rho+p+1,n-1}(x)K^{\nu,\rho+p-1}(x).\end{aligned}$$

Exprimons ensuite à l'aide de la formule récursive susdite les trois fonctions

$$K^{\nu,\rho+n+p}(x),\quad K^{\nu,\rho+p}(x),\quad K^{\nu,\rho+p-1}(x),$$

puis cherchons les coefficients de $K^{\nu,\rho}(x)$ des deux membres de la formule ainsi obtenue; il en résulte l'identité suivante

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}A^{\nu,\rho,n+p}(x) &= A^{\nu,\rho+p,n}(x)A^{\nu,\rho,p}(x)\\ &\quad-\frac{\rho+p+2\nu-1}{\rho+p+1}A^{\nu,\rho+p+1,n-1}(x)A^{\nu,\rho,p-1}(x),\end{aligned}\right.$$

qui est fondamentale dans la théorie des polynomes A.

Posons particulièrement, dans (1), $n=1$ et $n$ au lieu de $p$; nous aurons cette équation aux différences finies

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\rho+n+1)A^{\nu,\rho,n+1}(x)\\ &\quad=2(\rho+n+\nu)xA^{\nu,\rho,n}(x)-(\rho+n+2\nu-1)A^{\nu,\rho,n-1}(x),\end{aligned}\right.$$

analogue à celle qui figure dans la définition des fonctions métasphériques. Pour $\rho=0$, les deux équations en question deviennent identiques, ce qui est une conséquence immédiate de la formule

$$A^{\nu,0,n}(x)=P^{\nu,n}(x),$$

établie dans le paragraphe précédent.

Posons ensuite, dans (1), $p=1$; nous aurons l'équation

$$(3)\qquad A^{\nu,\rho,n+1}(x)=\frac{2(\rho+\nu)x}{\rho+1}A^{\nu,\rho+1,n}(x)-\frac{\rho+2\nu}{\rho+2}A^{\nu,\rho+2,n-1}(x),$$

qui est beaucoup plus compliquée que la formule (2), parce que le second paramètre ($\rho$) n'est pas constant dans (3).

Différentions maintenant par rapport à $x$ la formule récursive (7) du paragraphe XXXVIII; la définition des fonctions métasphériques donnera, pour les polynomes A, l'équation analogue, mais plus compliquée,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}(1-x^2)\,\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) = (\rho+2\nu+n)\,x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) - (\rho+n+1)\,\mathrm{A}^{\nu,\rho,n+1}(x)\\ -\frac{\rho(\rho+2\nu-1)}{\rho+1}\,\mathrm{A}^{\nu,\rho+1,n-1}(x);\end{aligned}\right.$$

pour $\rho = 0$ nous retrouvons la formule correspondante pour $\mathrm{P}^{\nu,n}(x)$.

Soustrayons ensuite les formules (2) et (4); nous aurons la formule suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}(1-x^2)\,\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) = -(\rho+n)\,x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) + (\rho+2\nu+n-1)\,\mathrm{A}^{\nu,\rho,n-1}(x)\\ -\frac{\rho(\rho+2\nu-1)}{\rho+1}\,\mathrm{A}^{\nu,\rho+1,n-1}(x),\end{aligned}\right.$$

analogue à (4).

Multiplions ensuite par

$$(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}$$

l'équation obtenue en différentiant par rapport à $x$ l'équation (7) du paragraphe XXXVIII, puis différentions encore une fois par rapport à $x$ la formule ainsi obtenue; les équations différentielles pour les trois fonctions métasphériques donneront, pour les polynomes A, l'équation suivante non homogène :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-x^2)\,\mathrm{D}^2_x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) - (2\rho+2\nu+1)\,x\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x)\\ &\quad + n(n+2\rho+2\nu)\,\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) + \frac{2\rho(\rho+2\nu-1)}{\rho+1}\,\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,\rho+1,n-1}(x) = 0,\end{aligned}\right.$$

qui coïncide pour $\rho = 0$ avec l'équation connue pour $\mathrm{K}^{\nu,n}(x)$.

Posons ensuite dans (3) $\rho = 0$, puis différentions par rapport à $x$; il en résulte

$$(7)\quad \nu\,\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,2,n-1}(x) = 2\nu[x\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,1,n}(x) + \mathrm{A}^{\nu,1,n}(x)] - \mathrm{D}_x\mathrm{P}^{\nu,n+1}(x),$$

d'où, en posant dans (6) $\rho = 1$ et dans (6) et (7) $n-1$ au lieu de $n$,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-x^2)\,\mathrm{D}_x^2\mathrm{A}^{\nu,n}(x) + (2\nu-3)\,x\mathrm{D}_x\mathrm{A}^{\nu,n}(x)\\ &\qquad + (n+1)(n+1-2\nu)\,\mathrm{A}^{\nu,n}(x) = 2\,\mathrm{D}_x\mathrm{P}^{\nu,n}(x).\end{aligned}\right.$$

L'analogie entre les fonctions métasphériques et les polynomes de Gauss se présente en pleine lumière, si nous étudions sous point de vue commun ces deux groupes de fonctions.

A cet effet, prenons pour point de départ la formule (3) du paragraphe précédent, puis posons-y $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 = \mathrm{Q}$ et $y = 0$; l'expression obtenue pour $\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(0)$ et la formule pour le doublement de l'argument de la fonction gamma donnent l'identité suivante :

$$x\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\rho+\nu+s)\Gamma\left(\frac{\rho+s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+s+1}{2}+\nu\right)}e^{-\frac{s\pi i}{2}}Q^{\nu,\rho+s}(x)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho-1}{2}+\nu\right)}Q^{\nu,\rho-1}(x)-i\frac{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}Q^{\nu,\rho}(x)$$
$$+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+n+1}{2}+\nu\right)}Q^{\nu,\rho+n+1}(x)-i\frac{\Gamma\left(1+\frac{\rho+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+\nu\right)}Q^{\nu,\rho+n}(x)\right],$$

formule qui se décompose en deux autres, si nous y changeons le signe de $i$ dans tous les exposants et puis additionnons ou soustrayons les deux formules ainsi obtenues. Nous nous bornerons à indiquer une seule des deux relations en question, savoir

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+\nu\right)}Q^{\nu,\rho+2n}(x)-\frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}Q^{\nu,\rho}(x)\\&=-x\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(\rho+\nu+2s+1)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu+s+1\right)}Q^{\nu,\rho+2s+1}(x),\end{aligned}\right.$$

parce que la seconde formule analogue se déduira de (9) si nous y remplaçons $\rho$ par $\rho-1$ et $n$ par $n+1$.

Faisons maintenant dans (9) croître au delà de toute limite le positif entier $n$, ce qui est permis pourvu que $x$ ne soit pas égal à une quantité réelle, telle que $-1\leqq x\leqq+1$; nous aurons le développement

$$(10)\quad\frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}\frac{Q^{\nu,\rho}(x)}{x}=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\rho+\nu+2s+1)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu+s+1\right)}Q^{\nu,\rho+2s+1}(x),$$

où la série qui figure au second membre est uniformément convergente quand $x$ est situé sur la circonférence ou à l'extérieur d'une ellipse $E(a)$ quelconque.

Revenons maintenant à la formule (9), puis exprimons toutes les fonctions Q qui y figurent à l'aide de la formule récursive (7) du paragraphe XXXVIII; le coefficient de $Q^{\nu,\rho}(x)$ donnera immédiatement l'identité suivante :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+\nu\right)}A^{\nu,\rho,2n}(x)-\frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}\\ &\quad=-x\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(\rho+\nu+2s+1)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu+s+1\right)}A^{\nu,\rho,2s+1}(x),\end{aligned}\right.$$

tandis que le coefficient de $Q^{\nu,\rho-1}(x)$ donnera de même, si nous remplaçons $\rho$ par $\rho-1$, la formule analogue

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho-1}{2}+n+\nu\right)}A^{\nu,\rho,2n-1}(x)\\ &\quad=-x\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(\rho+\nu+2s)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+s+\nu\right)}A^{\nu,\rho,2s}(x).\end{aligned}\right.$$

Or, écrivons dans l'ordre invers les termes qui figurent aux seconds membres des deux formules que nous venons de trouver; nous aurons la formule unique

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+\nu\right)}\,\frac{A^{\nu,\rho,n}(x)-A^{\nu,\rho,n}(0)}{x}\\ &\quad=\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{(-1)^s(\rho+\nu+n-2s-1)\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+\nu-s\right)}A^{\nu,\rho,n-2s-1}(x).\end{aligned}\right.$$

Quant à la valeur numérique $A^{\nu,\rho,n}(0)$, nous aurons immédiatement, en vertu de (11) et (12),

$$(14)\quad A^{\nu,\rho,2n}(0)=\frac{(-1)^n\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+\nu\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+n+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)},\quad A^{\nu,\rho,2n+1}(0)=0.$$

Posons maintenant dans (13) $\rho = 0$; nous aurons

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)} \frac{\mathrm{P}^{\nu,n}(x) - \mathrm{P}^{\nu,n}(0)}{x} \\ & = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s-1)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+\nu\right)} \mathrm{P}^{\nu,n-2s-1}(x), \end{aligned} \right.$$

formule qui est parfaitement analogue à (13).

Revenons ensuite à la formule (3) du paragraphe XXXVII, et posons-y $\gamma = 1$; nous aurons

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x-1)\sum_{s=0}^{s=n}(2\rho+2\nu+2s)\mathrm{Q}^{\nu,\rho+s}(x) \\ & = (\rho+n+1)\mathrm{Q}^{\nu,\rho+n+1}(x) - (\rho+n+2\nu)\mathrm{Q}^{\nu,\rho+n}(x) \\ & \quad + (\rho+2\nu-1)\mathrm{Q}^{\nu,\rho-1} - \rho\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x), \end{aligned} \right.$$

d'où, en faisant croitre au delà de toute limite le positif entier $n$,

$$(17) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty}(\rho+\nu+s)\mathrm{Q}^{\nu,\rho+s}(x) = \frac{(\rho+2\nu-1)\mathrm{Q}^{\nu,\rho-1}(x) - \rho\mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x)}{2(x-1)},$$

où la série infinie qui figure au premier membre est uniformément convergente, pourvu que $x$ soit situé sur la circonférence ou à l'extérieur d'une ellipse quelconque $\mathrm{E}(a)$.

Posons particulièrement dans (17) $\rho = 0$; l'expression connue pour $\mathrm{Q}^{\nu,-1}(x)$ donnera

$$(18) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty}(\nu+s)\mathrm{Q}^{\nu,s}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu)}{2\Gamma(\nu)} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}}{x-1}.$$

Appliquons ensuite, sur la formule (16), le procédé ordinaire; nous aurons

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\rho+n+1)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n+1}(x) - (\rho+n+2\nu)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x) - \rho \\ & = (x-1)\sum_{s=0}^{s=n}(2\rho+2\nu+2n-2s)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n-s}(x), \end{aligned} \right.$$

d'où en changeant le signe de $x$, puis en combinant les deux formules ainsi obtenues, nous aurons finalement

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho+n+2\nu)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n}(x)\cos^2\frac{n\pi}{2}\\ &\quad=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(2\rho+2\nu+2n-4s)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n-2s}(x)\\ &\quad\quad-x\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(2\rho+2\nu+2n-4s-2)\mathrm{A}^{\nu,\rho,n-2s-1}(x), \end{aligned}\right.$$

ce qui donnera pour $\rho=0$, quel que soit le positif entier $n$,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\mathrm{P}^{\nu,n}(x)=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(\nu+n-2s)\mathrm{P}^{\nu,n-2s}(x)\\ &\qquad\qquad-x\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(\nu+n-2s-1)\mathrm{P}^{\nu,n-2s-1}(x). \end{aligned}\right.$$

Posons dans (21) $x=\cos\theta$ et $\nu=0$ ou $\nu=1$; il en résulte des formules trigonométriques faciles à vérifier directement, savoir

$$\cos(n\theta)=2\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}\cos(n-2s)\theta-2\cos\theta\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}\cos(n-2s-1)\theta,$$

$$\begin{aligned}(n+2)\sin(n+1)\theta&=2\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}(n-2s+1)\sin(n-2s+1)\theta\\ &\quad-2\cos\theta\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n-1}{2}}(n-2s)\sin(n-2s)\theta.\end{aligned}$$

## XL. — L'intégrale indéfinie de Legendre.

Comme application de l'équation de Legendre

$$(1)\quad \mathrm{D}_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\right]=-\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x),$$

nous avons à étudier l'intégrale indéfinie

$$(2)\qquad I = \int (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(x) K_1^{\nu,\sigma}(x)\,dx.$$

A cet effet, nous aurons tout d'abord, en vertu de (1),

$$-\rho(\rho+2\nu)I = \int K_1^{\nu,\sigma}(x) D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x K^{\nu,\rho}(x)\right] dx,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} -\rho(\rho+2\nu)I &= K_1^{\nu,\sigma}(x)(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x K^{\nu,\rho}(x) \\ &\quad - \int (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x K_1^{\nu,\sigma}(x)\, D_x K^{\nu,\rho}(x)\,dx, \end{aligned}$$

de sorte qu'une nouvelle intégration par parties donnera

$$\begin{aligned} -\rho(\rho+2\nu)I = (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [&K_1^{\nu,\sigma}(x)\, D_x K^{\nu,\rho}(x) \\ &- K^{\nu,\rho}(x)\, D_x K_1^{\nu,\sigma}(x)] - \sigma(\sigma+2\nu)I, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(3)\qquad \begin{cases} (\sigma-\rho)(\sigma+\rho+2\nu)\displaystyle\int (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} K^{\nu,\rho}(x)\,dx \\ \quad = (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [K_1^{\nu,\sigma}(x)\, D_x K^{\nu,\rho}(x) - K^{\nu,\rho}(x)\, D_x K_1^{\nu,\sigma}(x)]. \end{cases}$$

Posons, dans (3), $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = n$, $\sigma = p$, où $n$ et $p$ désignent des entiers non négatifs, puis supposons $K = K_1 = P$; la formule (3) ainsi obtenue est due à Legendre [1].

Supposons $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$; la formule (3) donnera encore le résultat très connu

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} P^{\nu,n}(x) P^{\nu,p}(x)\,dx = 0, \qquad n \gtrless p.$$

Quant à la formule générale (3), nous aurons, en vertu de la for-

---

[1] *Voir* Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 69, Berlin, 1878.

mule (1) du paragraphe XVI, après une simple réduction,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho+\sigma+2\nu)\int^{x}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\sigma}(x)\,dx \\ &\quad =(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\big[\mathrm{K}_1^{\nu,\sigma+1}(x)-x\,\mathrm{K}_1^{\nu,\sigma}(x)\big] \\ &\qquad +(\rho+1)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,\frac{\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\sigma+1}(x)-\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x)-\mathrm{K}_1^{\nu,\sigma}(x)}{\sigma-\rho}, \end{aligned}\right.$$

de sorte qu'il faut, pour $\sigma=\rho$, chercher la vraie valeur du dernier terme qui figure au second membre.

L'analogie entre la formule (5) et une formule connue dans la théorie des fonctions cylindriques ([1]) saute aux yeux.

---

([1]) *Voir* le paragraphe 28 de mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, Leipzig, 1904.

# CHAPITRE IX.

## ÉQUATIONS DE FRANÇOIS NEUMANN.

### XLI. — Sur le produit de deux fonctions métasphériques.

Posons pour abréger

$$U = K^{\nu,\rho}(x), \qquad V = K_1^{\nu,\sigma}(x),$$
$$A = \rho(\rho + 2\nu), \qquad B = \sigma(\sigma + 2\nu),$$

puis appliquons les équations différentielles

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} U'\right] &= -A(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} U, \\ D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} V'\right] &= -B(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} V; \end{aligned} \right.$$

nous aurons, pour le produit

$$(2) \qquad y = UV = K^{\nu,\rho}(x)\, K_1^{\nu,\sigma}(x),$$

une relation de la forme

$$(3) \qquad (1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} y'\right] + (A+B)(1-x^2)^{2\nu} y = z,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(4) \qquad z = 2(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} U'(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} V'.$$

Cela posé, différentions par rapport à $x$ la fonction $z$; nous aurons, en vertu de (1),

$$z' = -2A(1-x^2)^{2\nu} UV' - 2B(1-x^2)^{2\nu} U'V,$$

ou, ce qui est évidemment la même chose,

$$(5) \qquad z' = -2A(1-x^2)^{2\nu} y' + 2(A-B)(1-x^2)^{2\nu} U'V.$$

Supposons ensuite particulièrement $\rho = \sigma$, ce qui donnera $A = B$; nous aurons, en vertu de (3) et (5), le théorème suivant :

I. *Le produit de deux fonctions métasphériques*

$$y = K^{\nu,\rho}(x)\,K_1^{\nu,\sigma}(x),$$

*ayant le même argument $x$, le même paramètre $\nu$ et le même indice $\rho$, est intégrale de l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre*

$$(1 - x^2)^2 y''' - (3 + 6\nu)x(1 - x^2)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \tag{6}$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$\left\{\begin{aligned} p_2(x) &= 4\rho(\rho + 2\nu) - 2\nu - 1 - [4\rho(\rho + 2\nu) - (2\nu + 1)(4\nu + 1)]x^2, \\ p_3(x) &= -8\nu\rho(\rho + 2\nu)x. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Quant au cas général, où les indices $\rho$ et $\sigma$ sont différents, nous avons à différentier encore une fois l'identité (5), ce qui donnera, en vertu de (4),

$$\left\{\begin{aligned} &(1 - x^2)z'' + (2\nu - 1)xz' - (A - B)z \\ &\quad = -2A(A - B)(1 - x^2)^{2\nu} y - 2A(1 - x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} D_x\left[(1 - x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} y'\right]; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

introduisons ensuite, dans (8), l'expression tirée de (3) pour $z$ et ses dérivées; nous aurons finalement cet autre théorème :

II. *Le produit de deux fonctions métasphériques*

$$y = K^{\nu,\rho}(x)\,K_1^{\nu,\sigma}(x),$$

*ayant le même argument $x$, le même paramètre $\nu$, mais des indices quelconques $\rho$ et $\sigma$, est intégrale de l'équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre*

$$(1 - x^2)^3 y^{(4)} - (6 + 8\nu)x(1 - x^2)^2 y''' + p_2(x)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y = 0, \tag{9}$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$\left\{\begin{aligned} p_2(x) &= 2(A + B)(1 - x^2) - (2\nu + 1)[4 - (10\nu + 7)x^2](1 - x^2), \\ p_3(x) &= [(10\nu + 1)(2\nu + 1) - (8\nu + 2)(A + B)]x(1 - x^2) \\ &\qquad - 4\nu(4\nu^2 - 1)x^3, \\ p_4(x) &= [(A - B)^2 - 4\nu(A + B)](1 - x^2) + 4\nu(2\nu - 1)(A + B)x^2. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Il saute aux yeux que le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est le plus simple, parce que le dernier des termes qui figurent dans $p_3(x)$ et $p_4(x)$ s'évanouirait pour cette valeur de $\nu$, de sorte que le premier membre de (9) deviendra divisible par $(1 - x^2)$. Dans ce cas, l'équation (9) se déduira par la méthode très élégante de F. Neumann [1], qui suppose du reste entiers et non négatifs les indices $\rho$ et $\sigma$.

On voit que l'analogie *formelle* entre les résultats que nous venons d'obtenir pour les fonctions métasphériques et ceux que j'ai trouvés pour les fonctions cylindriques [2] est parfaite. Cependant les équations différentielles obtenues pour les produits de deux fonctions métasphériques sont beaucoup plus compliquées que celles connues dans la théorie des fonctions cylindriques, ce qui s'accorde bien avec le fait que le produit de deux fonctions métasphériques ne peut pas être développé en série de puissances, dont les coefficients sont de forme simple, ce qui a lieu pour le produit de deux fonctions cylindriques.

### XLII. — Quelques identités différentielles.

Revenons maintenant à l'équation différentielle (6) du paragraphe XLI obtenue pour le produit

$$y = \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\,\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x),$$

savoir

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(1 - x^2)^2 y''' - (3 + 6\nu)\,x(1 - x^2)\,y'' \\ &\quad + \{4\rho(\rho + 2\nu) - 2\nu - 1 \\ &\quad - [4\rho(\rho + 2\nu) - (2\nu + 1)(4\nu + 1)]\,x^2\}\,y' - 8\nu\rho(\rho + 2\nu)\,xy = 0, \end{aligned}\right.$$

puis différentions par rapport à $x$ l'équation de Legendre

$$(2)\qquad (1 - x^2)z'' - (1 + 2\nu)z' + \sigma(\sigma + 2\nu)z = 0$$

obtenue pour la fonction métasphérique

$$z = \mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x);$$

nous aurons

$$(3)\qquad (1 - x^2)z''' - (3 + 2\nu)\,z'' + [\sigma(\sigma + 2\nu) - 2\nu - 1]\,z' = 0,$$

(1) *Beiträge zur Theorie des Kugelfunktionen*. Leipzig, 1878; p. 95.

(2) *Voir* le Chapitre IX de mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*. Leipzig, 1904.

d'où, en multipliant par $-4\nu x$ respectivement $1-x^2$ les équations (2) et (3), puis en additionnant les deux formules ainsi obtenues, l'équation du troisième ordre

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)^2 z''' - (3+6\nu)x(1-x^2)z'' \\ &\quad + [\sigma(\sigma+2\nu) - 2\nu - 1 - \sigma(\sigma+2\nu)x^2 \\ &\qquad - (2\nu+1)(4\nu+1)x^2]z' - 4\nu\sigma(\sigma+2\nu)z = 0, \end{aligned}\right.$$

qui est très semblable à (1).

Cela posé, désignons pour abréger par $\Delta_\rho y$ l'expression qui figure au premier membre de (1), $y$ étant une fonction quelconque de $x$; nous aurons, en vertu de (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_\rho \mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) = {}&[4\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)](1-x^2)\mathrm{D}_x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) \\ &- 4\nu[2\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)]x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x). \end{aligned}\right.$$

Appliquons ensuite l'équation fonctionnelle

$$(6)\quad (1-x^2)\mathrm{D}_x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) = (\sigma+2\nu)x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) - (\sigma+1)\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma+1}(x);$$

la formule (5) se transforme dans celle-ci :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_\rho \mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) = {}&\sigma[4\rho(\rho+2\nu) - (\sigma^2 - 4\nu^2)]x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) \\ &- (\sigma+1)[4\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)]\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma+1}(x), \end{aligned}\right.$$

d'où, en vertu de l'équation aux différences finies,

$$(8)\quad 2(\nu+\sigma)x\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) = (\sigma+1)\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma+1}(x) + (\sigma+2\nu-1)\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma-1}(x),$$

qui figure également dans la définition d'une fonction métasphérique, pour l'opération $\Delta_\rho \mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x)$, cette autre expression

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 2(\sigma+\nu)\Delta_\rho \mathrm{K}_2^{\nu,\sigma}(x) = {}&\sigma(\sigma+2\nu-1)(\sigma+2\nu+2\rho)(2\rho+2\nu-\sigma)\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma-1}(x) \\ &+ (\sigma+1)(\sigma-2\rho)(\sigma+2\nu)(\sigma+2\rho+4\nu)\mathrm{K}_2^{\nu,\sigma+1}(x). \end{aligned}\right.$$

Inversement, désignons par $\Delta'_\sigma z$, $z$ étant une fonction quelconque de $x$, le premier membre de (4); nous aurons de même, en vertu de (1),

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta'_\sigma \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x) = {}&4\nu[2\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)]x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x) \\ &- [4\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)](1-x^2) \\ &\times[\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x)\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) + \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{D}_x\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x)]. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, étudions tout d'abord l'expression

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = {}&2\nu[2\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)]x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) \\ &- [4\rho(\rho+2\nu) - \sigma(\sigma+2\nu)](1-x^2)\mathrm{D}_x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x); \end{aligned}$$

l'équation (6) donnera

$$\begin{aligned}A = &-\rho[4(\rho+\nu)(\rho+2\nu)-\sigma(\sigma+2\nu)]x\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\\ &+(\rho+1)[4\rho(\rho+2\nu)-\sigma(\sigma+2\nu)]\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x),\end{aligned}$$

d'où, en vertu de (8),

$$\begin{aligned}2(\rho+\nu)\mathrm{A} = &(\rho+1)(\rho+2\nu)(2\rho-\sigma)(\sigma+2\nu+2\rho)\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x)\\ &-\rho(\rho+2\nu-1)(2\rho+2\nu-\sigma)(2\rho+4\nu+\sigma)\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x);\end{aligned}$$

désignons ensuite par B, ce qui deviendra A quand on y remplace $\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)$ par $\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x)$; nous aurons finalement, en vertu de (10),

$$(11)\qquad 2(\rho+\nu)\Delta'_\sigma\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\,\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{A}\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x)+\mathrm{B}\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x).$$

Dans le cas particulier, où $\mathrm{K}=\mathrm{K}_1$, ce qui donnera $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, la formule (11) se présente sous cette forme plus simple :

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&(\rho+\nu)\Delta'_\sigma[\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)]^2\\ &\quad=(\rho+1)(\rho+2\nu)(2\rho-\sigma)(\sigma+2\nu+2\rho)\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x)\\ &\qquad-\rho(\rho+2\nu-1)(2\rho+2\nu+\sigma)(2\rho+4\nu+\sigma)\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x).\end{aligned}\right.$$

En essayant de déterminer des identités analogues et correspondantes à l'équation générale de F. Neumann, nous avons à déterminer les coefficients de l'identité

$$x^2\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) = \mathrm{A}\mathrm{K}^{\nu,\rho+2}(x)+\mathrm{B}\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)+\mathrm{C}\mathrm{K}^{\nu,\rho-2}(x),$$

tirée directement de l'équation fonctionnelle (2) du paragraphe XVI.

Or, dans le cas général, les coefficients A, B et C sont très compliqués, de sorte que les identités différentielles susdites deviendront inappliquables.

C'est seulement dans le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ que la méthode précédente est appliquable et nous donne des identités convenables pour des applications.

## XLIII. — Sur le polynome de Gauss.

Appliquons sur les formules fondamentales concernant le polynome de Gauss que nous venons de développer dans le paragraphe XXXIX la méthode appliquée dans le paragraphe XLI; nous trouvons pour le polynome de Gauss une équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre, équation qui peut être déduite aussi en combinant l'équation (4) du paragraphe XXXVIII avec l'équation différentielle de F. Neumann (9) du paragraphe XLI.

En effet, posons dans cette dernière équation, pour $\sigma = \rho + n$,

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2} - \nu} z,$$

nous aurons après un simple calcul le théorème suivant :

I. *Le polynome de Gauss*

$$z = \mathrm{A}^{\nu, \rho+1, n-1}(x)$$

*est toujours intégrale de l'équation différentielle homogène et linéaire du quatrième ordre*

$$(1) \qquad (1 - x^2)^2 z^{(4)} + p_1(x) z''' + p_2(x) z'' + p_3(x) z' + p_4(x) z = 0,$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$(2) \qquad \begin{cases} p_1(x) = -10x(1 - x^2), \\ p_2(x) = 4\nu - 10 - (4\nu^2 - 25)x^2 + 2(\mathrm{A} + \mathrm{B})(1 - x^2), \\ p_3(x) = -[6(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + (4\nu^2 - 13)]x, \\ p_4(x) = (\mathrm{A} - \mathrm{B})^2 - 2(\mathrm{A} + \mathrm{B}) - (4\nu^2 - 1), \end{cases}$$

*tandis qu'il faut admettre*

$$(3) \qquad \mathrm{A} = \rho(\rho + 2\nu), \qquad \mathrm{B} = (\rho + n)(\rho + n + 2\nu).$$

Pour $\nu = \frac{1}{2}$ l'équation (1) coïncide avec celle de Neumann; posons encore dans l'équation ainsi obtenue

$$\rho = p, \qquad \sigma = n + p,$$

où $n$ et $p$ désignent des entiers non négatifs; nous aurons l'autre théorème :

II. *L'équation différentielle donnée par F. Neumann admet toujours comme intégrale particulière le polynome de Gauss*

$$(4) \qquad y = \mathrm{A}^{p+1, n}(x) = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}, p+1, n-1}(x).$$

# TROISIÈME PARTIE.

## SÉRIES INFINIES.

# CHAPITRE X.

## SÉRIES DE CHARLES NEUMANN.

### XLIV. — Théorème de Neumann.

La valeur asymptotique que nous venons de développer dans le paragraphe XXIV pour une fonction ultrasphérique nous conduira sans peine au théorème suivant, essentiel dans les recherches qui nous occupent ici.

1. *Désignons par*

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_p$$

*p paramètres finis quelconques et par*

$$m_1, \quad m_2, \quad m_3, \quad \ldots, \quad m_p$$

*p nombres entiers finis quelconques; le champ de convergence de la série infinie (supposée convergente)*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{P}^{\nu_1, m_1+n}(x) \mathrm{P}^{\nu_2, m_2+n}(x) \ldots \mathrm{P}^{\nu_p, m_p+n}(x),$$

*où les coefficients* $\mathrm{A}_n$ *sont indépendants de* $x$, *est l'intérieur d'une certaine ellipse* $\mathrm{E}(a)$. *La série* (1) *est uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse* $\mathrm{E}(a - \delta)$ *quelconque.*

En effet, supposons d'abord plus grand que l'unité le rayon de convergence $r$ de la série de puissances

$$(2)\qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

puis mettons

$$x_1 = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \qquad |x_1| \geqq 1;$$

l'expression asymptotique susdite de $P^{\nu,n}(x)$ donnera pour le terme général de la série (1) une expression de la forme

$$A_n K_n n^g x_1^{np},$$

où $g$ est une quantité réelle finie, tandis que la limite supérieure de la suite infinie à termes positifs

$$|K_0|, \quad |K_1|, \quad |K_2|, \quad \ldots, \quad |K_n|, \quad \ldots$$

est finie.

Cela posé, il est évident que la série (1) est absolument convergente pour $|x_1| < |\sqrt[p]{r}|$ et uniformément convergente, pourvu que

$$|x_1| \leqq |\sqrt[p]{r}| - \delta,$$

tandis que la série en question ne peut jamais converger pour

$$|x_1| > |\sqrt[p]{r}|.$$

Supposons ensuite $r < 1$, puis remarquons que nous aurons toujours $|x_1| \geqq 1$; il est évident que notre série ne peut jamais être convergente dans ce cas.

Quant à l'hypothèse $r = 1$, notre série (1) ne peut être convergente que pour des valeurs réelles de $x$, telles que $-1 \leqq x \leqq +1$.

Dans ce qui suit nous avons tout d'abord à étudier le cas particulier de (1) qui correspond à $p = 1$, $m_1 = 0$, ce qui nous donnera le théorème suivant, dont le cas $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à Charles Neumann (¹).

II. *Toute fonction $f(x)$ analytique à l'intérieur d'une certaine ellipse* E($a$) *est dans ce domaine développable en série de la forme*

$$(3)\qquad f(x) = \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n) A_n P^{\nu,n}(x),$$

(¹) *Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art.* Halle, 1862.

*où nous avons posé généralement*

$$(4) \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu}} \mathrm{A}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{E}_1} f(y) \mathrm{Q}^{1-\nu, n+2\nu-1}(y)\, dy,$$

$\mathrm{E}_1$ *étant la circonférence de l'ellipse* $\mathrm{E}(a-\delta)$ *parcourue dans le sens direct. La série* (3) *est uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse* $\mathrm{E}(a-\delta)$ *quelconque.*

En effet, faisons parcourir $y$ la circonférence $\mathrm{E}_1$, puis supposons $x$ situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une ellipse $\mathrm{E}(a-\delta-\delta_1)$; nous avons démontré, dans le paragraphe XXXVII, que la série infinie

$$\frac{1}{y-x} = \frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu) \mathrm{Q}^{1-\nu, n+2\nu-1}(y) \mathrm{P}^{\nu, n}(x)$$

est uniformément convergente, de sorte que cette autre série

$$\frac{f(y)}{y-x} = \frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+n) [\mathrm{Q}^{1-\nu, n+2\nu-1}(y) f(y)] \mathrm{P}^{\nu, n}(x)$$

aura évidemment la même propriété, et l'intégrale de Cauchy nous conduira immédiatement au but.

Cela posé, remarquons que la série qui figure au second membre de (3) est uniformément convergente à l'intérieur du cercle C avec l'équation en coordonnées rectangulaires $|x| = |\sqrt{a-\delta}|$, puis mettons pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$ :

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

le théorème fondamental de Weierstrass donnera immédiatement pour le coefficient $a_n$ l'expression suivante

$$(6) \qquad a_n = \frac{2^n \Gamma(\nu+n)}{n!} \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\nu+n+s-1}{s} (\nu+n+2s) \mathrm{A}_{n+2s}.$$

De plus, désignons par R le rayon de convergence de la série de puissances (5); nous aurons évidemment toujours

$$\mathrm{R} \geqq |\sqrt{a}|;$$

mais, d'un autre côté, il n'est pas généralement possible de résoudre par rapport aux coefficients $A_n$ les équations obtenues de (6) pour

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui n'a lieu, en effet, que dans le cas où $R > 1$.

Supposons $R > 1$, puis désignons par C la circonférence du cercle $|x| = R - \delta$; les deux fonctions $f(y)$ et $Q^{1-\nu, n+2\nu-1}(y)$ sont analytiques toutes deux dans le domaine limité par les courbes C et $E_1$, ce qui donnera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{E_1} f(y) Q^{1-\nu, n+2\nu-1}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} f(y) Q^{1-\nu, n+2\nu-1}(y)\,dy.$$

Cela posé, l'identité évidente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} y^{n+2s} Q^{1-\nu, n+2\nu-1}(y)\,dy = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}(n+2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)2^{n+2s+2\nu}}, \end{array}\right.$$

selon que $s < 0$ ou $s \geqq 0$ donnera immédiatement pour $A_n$ cette expression développée

$$(7) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)} \frac{a_{n+2s}}{2^{n+2s}}.$$

Supposons maintenant $R \leqq 1$, puis désignons par $\alpha$ un nombre quelconque tel que $|\alpha| < R$; la série de puissances obtenue de (5) pour la fonction $f(\alpha x)$ a son rayon de convergence égal à

$$\frac{R}{|\alpha|} > 1;$$

posons ensuite

$$(8) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\nu+n)A_n(\alpha)P^{\nu,n}(x),$$

développement qui est toujours possible; nous aurons certainement

$$(9) \qquad A_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)} a_{n+2s}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s}.$$

Il nous semble utile d'illustrer par des exemples convenables la portée du théorème de Neumann.

*Exemple I.* $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$. — Nous aurons ici $a = 1$, ce qui donnera pour E $(a)$ l'équation suivante

$$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{3}=1, \qquad x=\alpha+i\beta;$$

c'est-à-dire que le domaine de convergence de la série de Neumann correspondante est plus petit que celui de la série de puissances obtenue directement pour $f(x)$.

*Exemple II.* $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$. — L'ellipse correspondante E $(a)$ aura l'équation

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\frac{1}{2}}+1}+\frac{\beta^2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=1, \qquad x=\alpha+i\beta;$$

c'est-à-dire que l'ellipse E$(a)$ et le cercle de convergence ont des points d'intersection réels.

*Exemple III.* $f(x)=\frac{1}{1+4x^2}$. — L'ellipse E$(a)$ deviendra

$$\frac{\alpha^2}{\frac{5}{4}}+\frac{\beta^2}{\frac{1}{4}}=1, \qquad x=\alpha+i\beta,$$

de sorte que le domaine de convergence de la série neumannienne est plus grand que celui de la série de puissances.

*Exemple IV.* — Les formules (8) et (9) donnent immédiatement

$$(10) \qquad e^{\alpha x i}=\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{n=\infty} i^n(\nu+n)\mathrm{J}^{\nu+n}(\alpha)\mathrm{P}^{\nu,n}(x),$$

où la série est uniformément convergente pour $|\alpha|\leqq G$ et $|x|\leqq G$.

La formule générale (10) qui unit les fonctions ultrasphériques et cylindriques est due à Gegenbauer [1], tandis que les cas particuliers $\nu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$ ont été trouvés respectivement par Jacobi [2] et G. Bauer [3].

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie impériale de Vienne*, 2e série, t. LXXII, 1876, p. 127.

[2] *Journal de Crelle*, t. XV, 1836, p. 12.

[3] *Journal de Crelle*, t. LVI, 1852, p. 104-106.

## XLV. — Généralisations des formules classiques.

Comme première application du théorème de Ch. Neumann, nous avons à étudier la formule élémentaire tirée directement de (8) et (9) du paragraphe XLIV

$$(1) \qquad P^{\rho,n}(\alpha x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s (\nu + n - 2s) A_s(\alpha) P^{\nu, n-2s}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(2) \quad A_s(\alpha) = \frac{\Gamma(\rho + n - s)}{s!\,\Gamma(\nu + n - 2s + 1)} \alpha^{n-2s} F(\rho + n - s, -s, \nu + n - 2s + 1, \alpha^2).$$

Posons particulièrement dans (1) $\alpha = 1$; la formule de Gauss pour $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ donnera

$$(3) \qquad A_s(1) = \frac{\Gamma(\rho + n - s)}{\Gamma(\nu + n - s + 1)} \binom{\nu - \rho}{s};$$

de la formule ainsi obtenue nous avons à déduire d'autres plus particulières, mais classiques dans l'histoire des fonctions sphériques.

1° $\rho = \nu + p$, où $p$ désigne un positif entier; nous aurons immédiatement

$$(4) \quad D_x^p P^{\nu, n+p}(x) = 2^p \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu + n - 2s)\Gamma(\nu + n + p - s)}{\Gamma(\nu + n - s + 1)} \binom{-p}{s} P^{\nu, n-2s}(x),$$

formule dont le cas $p = 1$, $\nu = \frac{1}{2}$ est très simple.

2° $x = \cos\theta$, $\rho = 0$ ou $\rho = 1$; nous aurons respectivement ces deux développements intéressants :

$$(5) \quad \frac{2\cos(n\theta)}{n} = \Gamma(\nu) \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu + n - 2s)(n - s - 1)!}{\Gamma(\nu + n - s + 1)} \binom{\nu}{s} P^{\nu, n-2s}(\cos\theta),$$

$$(6) \quad \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \Gamma(\nu) \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu + n - 2s)(n - s)!}{\Gamma(\nu + n - s + 1)} \binom{\nu - 1}{s} P^{\nu, n-2s}(\cos\theta),$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ était connu déjà par Legendre [1] et Laplace [1].

3° Pour obtenir les formules inverses de (5) et (6) nous posons dans (3) $\nu = 0$, $\nu = 1$, ce qui donnera respectivement

$$(7) \qquad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \varepsilon_{n-2s} \binom{-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s} \cos(n-2s)\theta,$$

$$(8) \quad P^{\rho,n}(\cos\theta) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{n-2s+1}{n-s+1} \binom{-\rho}{n-s}\binom{1-\rho}{s} \frac{\sin(n-2s+1)\theta}{\sin\theta};$$

dans (7) il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement $\varepsilon_s = 2$, pour $s > 2$.

4° Posons dans (3) $n-1$ et $1-\nu$ au lieu de $n$ et $\nu$, puis faisons $\rho = \nu + 1$; nous aurons

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} D_x P^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} & \frac{(-1)^s (n-2s-\nu)\Gamma(\nu+n-s)}{\Gamma(n-s-\nu+1)} \\ & \times \binom{-2\nu}{s} P^{1-\nu,n-2s-1}(x), \end{aligned} \right.$$

formule qui nous permet de déterminer les coefficients du développement

$$(10) \qquad A^{\nu,n}(x) = \Gamma(1-\nu) \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} a_s P^{1-\nu,n-2s-1}(x)$$

obtenu pour le polynome de Gauss.

A cet effet, appliquons l'équation différentielle (8) du paragraphe XXXIX, savoir

$$\begin{aligned} (1-x^2) D_x^2 A^{\nu,n}(x) + (2\nu-3) x D_x A^{\nu,n}(x) & \\ + (n+1)(n-1+2\nu) A^{\nu,n}(x) &= 2 D_x P^{\nu,n}(x); \end{aligned}$$

l'équation de Legendre

$$\begin{aligned} (1-x^2) D_x^2 P^{1-\nu,n-2s-1}(x) + (2\nu-3) x D_x P^{1-\nu,n-2s-1}(x) & \\ = -(n-2s-1)(n-2s+1-2\nu) P^{1-\nu,n-2s-1}(x) & \end{aligned}$$

---

[1] *Monographie*, de M. Wangerin, p. 102.

donnera évidemment, en vertu de (10),

$$-(n+1)(n-1+2\nu)\Gamma(1-\nu)\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} a_s \mathrm{P}^{1-\nu,n-2s-1}(x) + 2\mathrm{D}_x\mathrm{P}^{\nu,n}(x)$$
$$= -\Gamma(1-\nu)\sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}(n-2s-1)(n-2s+1-2\nu)a_s\mathrm{P}^{1-\nu,n-2s-1}(x),$$

d'où, en vertu de (9), pour $a_s$ cette expression générale

$$(11)\qquad a_s = \frac{(-1)^s}{\Gamma(\nu)}\,\frac{\Gamma(\nu+n-s)(n-\nu-2s)}{\Gamma(n-s+1-\nu)(\nu+s)(n-s)}\binom{-2\nu}{s}.$$

Posons particulièrement dans (10) et (11) $\nu=\frac{1}{2}$; il en résulte la formule élégante

$$(12)\qquad \mathrm{A}_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}}\frac{2n-4s-1}{(n-s)(2s+1)}\mathrm{P}^{n-2s-1}(x)$$

qui est due à Christoffel [1].

## XLVI. — Généralisations d'autres formules classiques.

Pour donner une autre application du théorème général de Neumann, considérons la série de puissances

$$(1)\qquad (a+bx)^{-\rho} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{-\rho}{s}a^{-\rho-s}b^s x^s,$$

où nous supposons $|b|<|a|$, de sorte que la série de puissances en question a un rayon de convergence plus grand que l'unité.

Posons

$$(2)\qquad (a+bx)^{-\rho} = \Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\nu+n)\mathrm{A}_n\mathrm{P}^{\nu,n}(x);$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 55, 1858, p. 61-82.

le coefficient général $A_n$ se détermine comme suit :

$$(3)\qquad A_n = a^{-\rho}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+2s)!}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)}\binom{-\rho}{n+2s}\left(\frac{b}{2a}\right)^{n+2s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A_n = \frac{(-1)^n a^{-\rho}\rho(\rho+1)\ldots(\rho+n-1)}{\Gamma(\nu+n+1)} \times\left(\frac{b}{2a}\right)^n F\left(\frac{n+\rho}{2}, \frac{n+\rho+1}{2}, \nu+n+1, \frac{b^2}{a^2}\right);$$

c'est-à-dire que ce coefficient est une fonction métasphérique.

Appliquons la formule (10) du paragraphe XVII; nous aurons finalement cette formule élégante

$$(4)\quad (a+bx)^{-\rho} = \frac{2^{2\nu-\rho}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)\,b^\rho\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n(2\nu+2n)Q^{\rho-\nu,2\nu-\rho+n}\left(\frac{a}{b}\right)P^{\nu,n}(x),$$

qui nous permet de déduire immédiatement d'autres formules particulières que l'on démontre ordinairement en suivant des méthodes très différentes et peu systématiques. Nous avons à considérer ici les cas particuliers suivants de (4) :

1° $a = y$, $b = -1$; il résulte la formule intéressante

$$(5)\qquad \frac{2^{\rho-1}}{(y-x)^\rho} = \frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}(\nu+n)Q^{\rho-\nu,2\nu-\rho+n}(y)P^{\nu,n}(x),$$

due à Gegenbauer [1]; l'hypothèse $\rho = 1$ nous conduira à la formule (9) du paragraphe XXXVII; posons encore $\rho = 2\nu$, nous obtenons une autre formule intéressante.

2° $b = \sqrt{a^2-1}$, $\rho = -n$, $n$ étant un positif entier, ce qui donnera pour $A_p$

$$A_p = \frac{a^{n-p}(a^2-1)^{\frac{p}{2}}n!}{(n-p)!\,\Gamma(\nu+p+1)2^p}F\left(\frac{p-n}{2}, \frac{p-n+1}{2}, \nu+p+1, \frac{a^2-1}{a^2}\right),$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie impériale de Vienne*, t. C, 1891.

d'où, en vertu de la formule (6) du paragraphe XXVIII,

$$A_p = \frac{n!\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu+p}}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\nu+p+1)}(a^2-1)^{\frac{p}{2}}P^{\nu+p+\frac{1}{2},n-p}(a),$$

de sorte que la formule différentielle

$$D_a P^{\nu,n}(a) = 2\nu P^{\nu+1,n-1}(a)$$

donnera finalement la formule cherchée

$$(6)\quad (a+x\sqrt{a^2-1})^n = \frac{n!\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu)2^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(\nu+s)(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(2\nu+s+1)} D_a^s P^{\nu+\frac{1}{2},n}(a) P^{\nu,s}(x),$$

d'où, pour $\nu = 0$ et $\alpha = \cos\theta$, la formule classique [1]

$$(7)\qquad (a+\cos\theta\sqrt{a^2-1})^n = n! \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\varepsilon_s(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}{(n+s)!} D_a^s P^n(a)\cos(n\theta),$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement pour $s > 1$, $\varepsilon_s = 2$.

3° Nous remarquons en passant que les hypothèses

$$b = \sqrt{a^2-1}, \qquad \rho = -n-1-2\nu,$$

où $n$ désigne un positif entier nous conduisent à des résultats analogues aux précédents; cependant cette analogie se présente sous forme beaucoup plus générale encore dans le paragraphe LXI.

## XLVII. — Autres propriétés des séries neumanniennes.

Revenons maintenant à la formule (8) du paragraphe XLIV :

$$(1)\qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\nu+n)A^{\nu,n}(a)P^{\nu,n}(x);$$

nous avons à démontrer quelques propriétés communes aux coeffi-

(1) Heine, *Handbuch*, t. I, p. 201; Berlin, 1878.

cients $A^{\nu,n}(\alpha)$ quelle que soit la fonction analytique donnée $f(x)$.

En premier lieu, cherchons dans les deux membres de (1) le coefficient de la puissance $x^n$; le théorème fondamental de Weierstrass donnera ce développement

$$(2) \qquad a_n\alpha^n = \frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(\nu+n+2s)\frac{\Gamma(\nu+n+s)}{s!}A^{\nu,n+2s}(\alpha).$$

En second lieu, nous avons à démontrer le théorème suivant :

I. *Les coefficients* $A^{\nu,n}(\alpha)$ *qui figurent au second membre de* (1) *satisfont à ces deux équations fonctionnelles :*

$$(3) \qquad (\nu+n+1)A^{\nu+1,n}(\alpha) = A^{\nu,n}(\alpha) - A^{\nu,n+2}(\alpha),$$

$$(4) \qquad \alpha(\nu+n+1)D_\alpha A^{\nu+1,n}(\alpha) = nA^{\nu,n}(\alpha) + (n+2\nu+2)A^{\nu,n+2}(\alpha),$$

*et cela quelle que soit la fonction* $f(x)$.

Pour démontrer la formule (4) nous prenons pour point de départ l'identité démontrée dans le paragraphe XXI :

$$(s+\nu)P^{\nu,s}(x) = \nu[P^{\nu+1,s}(x) - P^{\nu+1,s-2}(x)],$$

ce qui donnera, en vertu de (1),

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu+1)\sum_{s=0}^{s=\infty}[A^{\nu,s}(\alpha) - A^{\nu,s+2}(\alpha)]P^{\nu+1,s}(x).$$

Posons ensuite, dans (1), $\nu+1$ au lieu de $\nu$, puis remarquons qu'une fonction ne peut être développée que d'une seule façon dans une série *neumannienne* pour laquelle le paramètre $\nu$ a une valeur déterminée; nous trouvons immédiatement la formule (3).

En second lieu appliquons l'équation aux différences finies

$$2(\nu+n)xP^{\nu,n}(x) = (n+1)P^{\nu,n+1}(x) + (n+2\nu-1)P^{\nu,n-1}(x)$$

qui figure dans la définition des fonctions métasphériques; nous aurons, en vertu de (1),

$$(5) \qquad 2xf(\alpha x) = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=\infty}[sA^{\nu,s-1}(\alpha) + (s+2\nu)A^{\nu,s+1}(\alpha)]P^{\nu,s}(x),$$

où nous avons à poser $A^{\nu,-1}(\alpha) = 0$.

Cela posé, différentions par rapport à $x$ la formule (1), puis appliquons les identités

$$D_x P^{\nu,n}(x) = 2\nu P^{\nu+1,n-1}(x), \qquad P^{\nu,0}(x) = 1;$$

nous aurons

$$\alpha f(\alpha x) = 2\Gamma(\nu+1) \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu+1) A^{\nu,s+1}(\alpha) P^{\nu+1,s}(x); \tag{6}$$

posons ensuite, dans (1), $\nu + 1$ au lieu de $\nu$; une différentiation par rapport à $\alpha$ donnera

$$x f'(\alpha x) = \Gamma(\nu+1) \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu+1) D_\alpha A^{\nu+1,s}(\alpha) P^{\nu+1,s}(x),$$

d'où en multipliant par $x$ la formule (6), puis appliquant la transformation (5), nous aurons la formule (4).

Remarquons en passant que les formules (3) et (4) sont des généralisations des équations fonctionnelles que j'ai prises comme définitions des fonctions cylindriques [1].

En effet, supposons

$$A^{\nu,n}(\alpha) = i^n \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\nu B^{\nu+n}(\alpha);$$

nous aurons, en vertu de (3) et (4), si nous posons encore $n - 1$ au lieu de $n$,

$$\frac{2(\nu+n)}{\alpha} B^{\nu+n}(\alpha) = B^{\nu+n-1}(\alpha) + B^{\nu+n+1}(\alpha),$$
$$2 D_\alpha B^{\nu+n}(\alpha) = B^{\nu+n-1}(\alpha) - B^{\nu+n+1}(\alpha);$$

c'est-à-dire que nous aurons

$$B^{\nu+n}(\alpha) = J^{\nu+n}(\alpha),$$

ce qui s'accorde bien avec la formule (10) du paragraphe XLIV.

Dans le paragraphe LXIV nous avons à donner un autre développement commun à toutes les fonctions $A^{\nu,n}(\alpha)$.

---

(1) *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, § I; Leipzig, 1904.

# CHAPITRE XI.

## SÉRIES DE FRANÇOIS NEUMANN.

### XLVIII. — Évaluation d'une série particulière.

La méthode appliquée dans le paragraphe XLIV nous donnera immédiatement, en vertu des valeurs limites développées dans le paragraphe XXIV, cet autre théorème fondamental :

I. *Désignons par*

$$\begin{matrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \ldots & \nu_p \\ \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \ldots & \rho_p \end{matrix}$$

$2p$ *paramètres finis quelconques ; le champ de convergence de la série infinie, supposée convergente :*

$$f(x) = x^{\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n Q^{\nu_1, \rho_1+n}(x) Q^{\nu_2, \rho_2+n}(x) \ldots Q^{\nu_p, \rho_p+n}(x), \tag{1}$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$\omega = \sum_{r=1}^{r=p} (\rho_r + 2\nu_r),$$

*et où les coefficients* $A_n$ *sont indépendants de* $x$, *est la partie du plan des* $x$ *située à l'extérieur d'une certaine ellipse* $E(a)$. *La série* (1) *est uniformément convergente sur la circonférence et à l'extérieur d'une ellipse* $E(a+\delta)$ *quelconque.*

Dans le paragraphe XLVI nous avons donné un exemple de ce théorème correspondant à $p = 1$, savoir la série de Gegenbauer que nous écrivons ici sous la forme suivante :

$$(2)\qquad \frac{1}{(y-x)^{\rho+2\nu}} = \frac{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) \mathrm{P}^{\nu+\rho,n}(x) \mathrm{Q}^{\nu,\rho+n}(y)$$

et qui est uniformément convergente, pourvu que $x$ soit situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une ellipse $\mathrm{E}(a)$ quelconque, tandis que $y$ parcourt la circonférence d'une ellipse $\mathrm{E}(a+\delta)$.

Désignons ensuite par $q$ un tel nombre entier, non négatif, que

$$\mathfrak{R}(\rho+2\nu+q) > 2,$$

puis désignons par $t$ une variable réelle assujettie à satisfaire aux conditions $0 \leqq t \leqq 1$, la série nouvelle

$$(3)\quad \frac{(1-t)^{\rho+2\nu+q-2}}{(y-tx)^{\rho+2\nu}} = \frac{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) \mathrm{Q}^{\nu,\rho+n}(y) [\mathrm{P}^{\nu+\rho,n}(tx)(1-t)^{\rho+2\nu+q-2}],$$

tirée directement de (2), est par conséquent uniformément convergente par rapport à $t$, pourvu que $x$ et $y$ satisfassent aux conditions susdites; c'est-à-dire que la série (3) peut être intégrée terme à terme par rapport à $t$ de $t=0$ à $t=1$.

Posons pour abréger

$$f(x) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu+q-1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\rho+2\nu+q-2}}{(y-tx)^{\rho+2\nu}}\, dt,$$

$$\mathrm{B}_n^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu+q-1)} \int_0^1 \mathrm{P}^{\nu+\rho,n}(tx)(1-t)^{\rho+2\nu+q-2}\, dt;$$

nous aurons tout d'abord, en vertu de l'intégrale eulérienne de première espèce,

$$(4)\qquad \mathrm{B}_n^{\nu,\rho}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\rho+\nu+n-s)}{s!\,\Gamma(\rho+2\nu+n-2s+q)} (2x)^{n-2s},$$

tandis que la formule binomiale donnera pour $f(x)$ la série de puissances

$$(5)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\rho+2\nu+n)}{\Gamma(\rho+2\nu+n+q)} \frac{x^n}{y^{\rho+2\nu+n}},$$

applicable pourvu que $|x| < |y|$.

Cela posé, la formule (3) donnera cet autre développement

$$(6) \qquad f(x) = \frac{2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) B_n^{\nu,\rho}(x) Q^{\nu,\rho+n}(y),$$

où la série infinie qui figure au second membre est uniformément convergente, où l'est la série originelle (2).

Désignons maintenant par

$$(7) \qquad A_n^{\nu,\rho}(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\rho+\nu+n-s)}{s!\,\Gamma(\rho+2\nu+n-2s)} (2x)^{n-2s},$$

ce qui deviendra, pour $q=0$, le polynome (4); je dis que nous aurons, en vertu de (6), cette autre formule

$$(8) \qquad \frac{y^{-\rho-2\nu+1}}{y-x} = \frac{2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) A_n^{\nu,\rho}(x) Q^{\nu,\rho+n}(y),$$

où la série qui figure au second membre est encore uniformément convergente, où l'est la série originelle (2).

En effet, soit tout d'abord $q=0$, la formule (8) est précisément la même que (4). Supposons ensuite $q$ positif; nous n'avons qu'à appliquer $q$ fois la méthode expliquée dans le paragraphe XV.

## XLIX. — Le théorème général.

Pour établir maintenant d'un point de vue général les séries infinies, desquelles nous venons de donner des exemples, posons dans la formule (8) du paragraphe XLVIII

$$x = \frac{1}{\eta}, \qquad y = \frac{1}{\xi};$$

nous aurons cet autre développement

$$(1) \qquad \frac{1}{\eta-\xi} = \frac{2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) \frac{1}{\eta} A_n^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\eta}\right) Q^{\nu,\rho+n}\left(\frac{1}{\xi}\right) \xi^{-\rho-2\nu},$$

dont le champ de convergence est, comme nous l'avons vu dans les paragraphes IV et XLVIII, une certaine ellipse $C(a)$ de Cassini avec l'équation

$$(2) \qquad (\alpha^2+\beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{a+1} - \frac{\beta^2}{a} = 0, \qquad \xi = \alpha + i\beta.$$

La série qui figure au second membre de (1) est uniformément convergente, pourvu que $\eta$ parcourt la circonférence de $C(a)$, tandis que $\xi$ est situé à l'intérieur ou sur la circonférence d'une ellipse $C(a+\delta)$ quelconque.

Soit maintenant $f(\xi)$ une fonction analytique à l'intérieur d'une ellipse $C(a)$ de Cassini, et soit, pour des valeurs suffisamment petites de $|\xi|$,

$$(3) \qquad f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots;$$

soit enfin $C_1$ la circonférence d'une courbe $C(a+\delta)$ quelconque parcourue dans le sens direct; le procédé du paragraphe XLIV donnera immédiatement pour $f(\xi)$ ce développement

$$(4) \qquad f(\xi) = \frac{2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) B_n Q^{\nu,\rho+n}\left(\frac{1}{\xi}\right)\xi^{-\rho-2\nu},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(5) \qquad B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\eta) A_n^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta}.$$

Désignons ensuite par K la circonférence parcourue dans le sens direct, d'un cercle situé et à l'intérieur de la courbe $C(a)$ et à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances (3); nous aurons évidemment

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\eta) A_n^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{K} f(\eta) A_n^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta},$$

ce qui donnera, en vertu de (3), pour $B_n$, cette autre expression développée

$$(6) \qquad B_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+\rho+n-s)}{s!\,\Gamma(\rho+2\nu+n-2s)} 2^{n-2s} a_{n-2s}.$$

Cela posé, mettons dans (4) de nouveau $\xi = 1 : x$; la courbe $C(a)$ se transforme dans l'ellipse originelle $E(a)$, et l'intérieur de $C(a)$

deviendra l'extérieur de $E(a)$; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème général :

I. *Toute fonction $f(x)$ analytique à l'extérieur d'une ellipse $E(a)$ est dans ce domaine développable en série de fonctions métasphériques de seconde espèce comme suit :*

$$f(x) = \frac{2^{\rho+1} x^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+\rho+n) B_n Q^{\nu,\rho+n}(x), \tag{7}$$

*où le coefficient $B_n$ se détermine à l'aide de la formule* (6), *si nous posons pour $|x|$ suffisamment grand*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots. \tag{8}$$

*La série qui figure au second membre de* (7) *est uniformément convergente sur la circonférence et à l'extérieur d'une ellipse $E(a+\delta)$ quelconque.*

Les exemples étudiés dans le paragraphe XLIV nous donnent des éclaircissements sur les séries de ce genre aussi.

Dans le cas particulier, où $f(x)$ est analytique dans tout le plan des $x$, la partie de l'axe réel qui correspond à $-1 \leq x \leq +1$ exclue, la série (7) est convergente dans toute l'étendue du plan des $x$ à l'exception de l'intervalle susdit.

*Exemple I.* — $\left(1-\frac{1}{x}\right)^a$, $\log\left(1 \pm \frac{1}{x}\right)$, $e^{\frac{a}{x}}$.

*Exemple II.* — $x^{-b} P^{a,b}(x)$, $x^{a+2b} Q^{a,b}(x)$.

*Exemple III.* — $x^{-b-b_1} P^{a,b}(x) P^{a_1,b_1}(x)$, $x^{a_1+2b_1-b} P^{a,b}(x) Q^{a_1,b_1}(x)$, $x^{a+a_1+2b+2b_1} Q^{a,b}(x) Q^{a_1,b_1}(x)$.

*Exemple IV.* — $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right)$.

Remarquons en passant qu'une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n Q^{\nu+n,\rho}(x)$$

peut être traitée par une simple transformation d'un cas particulier des séries générales que nous avons à étudier dans le paragraphe LIII.

### L. — Exemples des séries de F. Neumann.

Conformément aux remarques qui terminent le paragraphe précédent, nous concluons que les trois fonctions

$$\mathrm{P}^{a,b}(x)\mathrm{Q}^{a_1,b_1}(x),\quad \mathrm{Q}^{a,b}(x)\mathrm{Q}^{a_1,b_1}(x),\quad \mathrm{P}^{a,b}(x)\mathrm{P}^{a_1,b_1}(x), \tag{1}$$

multipliées par une puissance convenable de $x$, sont développables en séries de la forme (7) du paragraphe XLIX, convergentes dans toute l'étendue du plan des $x$ à l'exception de la partie de l'axe réel qui correspond à $-1 \leqq x \leqq +1$.

C'est le mérite de François Neumann ([1]) d'avoir détourné les difficultés considérables, en déterminant, dans le cas $a = a_1 = \frac{1}{2}$, $b$ et $b_1$ entiers et non négatifs, les coefficients des séries en question.

Dans le paragraphe XLII, nous avons déjà mentionné les grandes difficultés qui se présentent dans la généralisation des séries de Neumann. C'est pourquoi nous préférons de donner ici une autre classe particulière des séries en question, savoir en étudiant les fonctions (1) qui correspondent à

$$a = a_1, \qquad b = b_1,$$

de sorte que les fonctions P et Q en question sont des intégrales particulières de la même équation de Legendre.

A cet effet, appliquons sur la formule

$$\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}_1^{\nu,\rho}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2(\nu+\sigma+2n)\mathrm{A}_n\mathrm{Q}^{\nu,\sigma+2n}(x) \tag{2}$$

l'opération différentielle $\Delta_\rho$ étudiée dans le paragraphe XLII; il saute aux yeux que les trois différentiations par rapport à $x$ contenues dans $\Delta_\rho$ peuvent être effectuées terme à terme sur la série infinie qui figure au second membre de (2), parce que cette série est uniformément convergente.

([1]) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*, Leipzig, 1878.

Cela posé, l'opération susdite donnera immédiatement l'identité suivante :

$$(3)\qquad o = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n [A_n Q^{\nu,\sigma+2n-1}(x) + B_n Q^{\nu,\sigma+2n-1}(x)],$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_n = (\sigma + 2n)(\sigma + 2\nu + 2n - 1)(\sigma + 2\nu + 2\rho + 2n)(2\rho + 2\nu - \sigma - 2n),$$
$$B_n = (\sigma + 2n + 1)(\sigma + 2n - 2\rho)(\sigma + 2n + 2\nu)(\sigma + 2n + 2\rho + 4\nu).$$

Or l'identité

$$o = a_0 A_0 Q^{\nu,\sigma-1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_{n-1} B_{n-1} + a_n A_n) Q^{\nu,\sigma+2n-1}(x),$$

tirée directement de (3), entraîne ces autres :

$$(4)\qquad A_0 a_0 = o,$$

$$(5)\qquad a_{n-1} B_{n-1} + a_n A_n = o \; (n \geqq 1).$$

L'équation (4) donnera ou $a_0 = o$ ou $A_0 = o$ ; or, la première de ces solutions étant absurde, il faut admettre la seconde, ce qui donnera pour $\sigma$ les valeurs suivantes :

$$(6)\qquad \sigma = 2\rho + 2\nu, \qquad \sigma = -2\rho - 2\nu, \qquad \sigma = o, \qquad \sigma = 1 - 2\nu,$$

qui correspondent aux diverses fonctions K qui figurent dans la formule (2).

1° $\sigma = 2\nu + 2\rho$ conduira à une série de la forme

$$(7)\qquad [Q^{\nu,\rho}(x)]^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2\rho + 3\nu + 2n) a_n Q^{\nu,2\rho+2\nu+2n}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(8)\qquad a_n = \frac{\Gamma\left(\nu + \rho + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu + n)\Gamma(\rho + 2\nu + n)\Gamma(2\rho + 3\nu + n)}{n!\,\Gamma(\nu + \rho + n + 1)\Gamma\left(\rho + 2\nu + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(2\rho + 2\nu + n + 1)}.$$

En effet, le coefficient $a_0$ se détermine immédiatement en comparant dans (7) les termes qui contiennent les puissances $x^{-2\rho-3\nu}$, et ensuite la formule récursive (5) donnera successivement tous les autres coefficients $a_n$.

2° $\sigma = 0$ donnera le développement remarquable

$$\text{(9)} \qquad P^{\nu,\rho}(x)Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)} \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu+2s)a_s Q^{\nu,2s}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\text{(10)} \qquad a_s = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+s)\Gamma(\rho+2\nu+s)\Gamma(\rho+\nu-s)}{s!\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+\rho+s+1)\Gamma(\rho-s+1)},$$

d'où la proposition suivante :

I. *Le produit des deux fonctions métasphériques fondamentales ayant les mêmes arguments, paramètres et indices est, quel que soit $\rho$, développable en série de fonctions ultrasphériques de seconde espèce.*

Supposons particulièrement $\nu = \frac{1}{2}$; les fonctions qui figurent au second membre de (7) deviennent des fonctions sphériques ordinaires de seconde espèce, tandis que les fonctions qui figurent au premier membre sont des fonctions annulaires.

Dans l'autre cas particulier $\rho = n$, $n$ étant un positif entier, la série correspondante (7) deviendra finie à cause du diviseur $\Gamma(\rho - s + 1)$, qui figure dans le dénominateur du coefficient général $a_s$. La formule particulière ainsi obtenue est du reste une conséquence immédiate de l'équation aux différences finies qui figurent dans la définition des fonctions métasphériques, ce qui donnera la proposition suivante :

II. *Soit $K^{\nu,n}(x)$ une fonction ultrasphérique quelconque; nous aurons un développement de la forme*

$$\text{(11)} \qquad P^{\nu,n}(x)K^{\nu,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)} \sum_{s=0}^{s=n} (\nu+2s)a_s K^{\nu,2s}(x),$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$\text{(12)} \qquad a_s = \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+\nu)\Gamma(n+s+2\nu)\Gamma(n-s+\nu)}{s!\,(n-s)!\,\Gamma\left(\nu+s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+n+s+1)}.$$

Nous ne nous arrêtons pas à l'étude des autres valeurs possibles indiquées dans (6) pour $\sigma$. Au contraire, il nous semble beaucoup plus intéressant de donner des renseignements historiques concernant l'étude du problème de multiplier deux fonctions sphériques.

La première publication concernant le développement du produit de deux fonctions sphériques ordinaires $P^n(x)$. $P^m(x)$ selon des fonctions du même genre semble être celle de G. Bauer [1]; la seconde est de Ferrers [2], qui a trouvé la formule en 1874, la troisième d'Adams [3], qui a découvert la formule en 1873. Cependant, en même temps qu'Adams, François Neumann [4] a publié des formules beaucoup plus générales, de sorte qu'on doit dire que la résolution du problème concernant le développement du produit de deux fonctions sphériques quelconques est due à Neumann. Dans les derniers jours, M. Waelsch [5] a donné une résolution élégante du même problème.

---

(1) *Sitzungsberichte der Kgl. bayerishen Akademie der Wissenschaften*, 1875, p. 247-272.

(2) *Spherical harmonics*. London, 1877.

(3) *Proceedings of the Royal Society of London*, t. XXVII, 1878, p. 63-71. Pour les citations des temps du découvert de la formule, voir *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t. X, 1878 (1880), p. 337.

(4) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*. Leipzig, 1878.

(5) *Comptes rendus*, t. CXLIV, 1907, p. 186-189; *Wiener Sitzungsberichte*, t. CLVIII, 1909, p. 85-90.

# CHAPITRE XII.

## SÉRIES DE PRODUITS DE DEUX FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES.

### LI. — Développement d'une seule fonction métasphérique.

Tenté de divers développements particuliers trouvés dans la théorie des fonctions sphériques on a essayé depuis longtemps, mais en vain jusqu'ici, à développer une fonction donnée en séries analogues à celles que nous venons d'étudier dans les deux Chapitres précédents, mais contenant, au lieu d'une seule fonction ultrasphérique ou métasphérique, le produit de deux telles fonctions dans tous ses termes.

Or, de telles séries de produits de deux fonctions métasphériques existent et possèdent les mêmes propriétés analytiques que les précédentes; mais, d'un autre côté, les séries nouvelles sont aussi compliquées qu'elles ne semblent présenter qu'un intérêt médiocre au point de vue de ses applications pratiques. C'est pourquoi nous nous bornerons ici à mettre en évidence l'existence des séries en question en étudiant le cas le plus simple, savoir les séries de carrés des fonctions métasphériques et ultrasphériques.

A cet effet, nous avons tout d'abord à développer en série de la forme susdite une seule fonction métasphérique, ce qui s'effectuera immédiatement à l'aide des secondes identités étudiées dans le paragraphe XLII, savoir

$$(1) \qquad \Delta'_\sigma[\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)]^2 = \mathrm{AK}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x) + \mathrm{BK}^{\nu,\rho}(x)\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$-\mathrm{A} = (\rho+1)(\rho+2\nu)(\sigma-2\rho)(\sigma+2\nu+\rho),$$
$$-\mathrm{B} = \rho(\rho+2\nu-1)(2\rho+2\nu-\sigma)(2\rho+4\nu+\sigma),$$

tandis que

$$\Delta'_\sigma[K_1^{\nu,\sigma}(x)] = 0 \tag{2}$$

est l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre obtenue pour $K_1^{\nu,\sigma}(x)$.

Supposons maintenant possible un développement de la forme

$$K^{\nu,\sigma}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2\rho + 2\nu + 2n) a_n [K_1^{\nu,\rho+n}(x)]^2, \tag{3}$$

puis supposons différentiable trois fois terme à terme la série qui figure au second membre de (3); nous aurons, en vertu de (1), en introduisant dans (2) la série qui figure en second membre (3), une identité de la forme

$$0 = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s [A_s K_1^{\nu,\rho+s}(x) K_1^{\nu,\rho+s+1}(x) + B_s K_1^{\nu,\rho+s}(x) K_1^{\nu,\rho+s-1}(x)],$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_s = (\rho + s + 1)(\rho + s + 2\nu)(\sigma - 2\rho - 2s)(\sigma + 2\nu + 2\rho + 2s),$$
$$B_s = (\rho + s)(\rho + s + 2\nu - 1)(2\rho + 2\nu - \sigma + 2s)(2\rho + 4\nu + \sigma + 2s),$$

ce qui donnera, après une légère transformation,

$$0 = a_0 B_0 K_1^{\nu,\rho}(x) K_1^{\nu,\rho-1}(x) + \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_s A_s + a_{s+1} B_{s+1}) K_1^{\nu,\rho+s}(x) K_1^{\nu,\rho+s+1}(x). \tag{4}$$

Cela posé, faisons encore sur la série (3) l'hypothèse que, pour des valeurs fixes de $\nu$, $\rho$ et $\sigma$, un tel développement n'est possible que d'une seule façon; l'identité (4) donnera immédiatement ces autres :

$$a_0 B_0 = 0, \qquad a_{s+1} B_{s+1} + a_s A_s = 0, \tag{5}$$

d'où les valeurs suivantes de $\rho$ :

$$\rho = \frac{\sigma}{2} - \nu, \qquad \rho = -\frac{\sigma}{2} - 2\nu, \qquad \rho = 1 - 2\nu, \qquad \rho = 0, \tag{6}$$

de sorte que nous avons à étudier séparément ces quatre valeurs possibles de $\rho$.

1° Pour appliquer la première des racines (6), posons

$$K = K_1 = Q$$

et

$$\sigma = 2\rho + 2\nu;$$

$\rho$ peut être choisi arbitrairement. Le coefficient correspondant $a_0$ se détermine immédiatement en multipliant par $x^{2\rho+4\nu}$ les deux membres de (3), puis, faisant croître au delà de toute limite la valeur absolue de $x$, nous aurons

$$(7) \qquad a_0 = \frac{\Gamma(2\rho+4\nu)}{\sqrt{\pi}\,2^{2\nu}(\rho+\nu)\Gamma(2\rho+3\nu+1)} \left[\frac{\Gamma(\rho+\nu+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\right]^2,$$

d'où généralement, en vertu de la dernière formule (5),

$$(8) \quad a_s = \frac{\Gamma(2\rho+4\nu)}{\Gamma(2\rho+3\nu+1)\sqrt{\pi}\,2^{2\nu}} \left[\frac{\Gamma(\rho+\nu+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\right]^2 (-1)^s \binom{\nu}{s} \frac{\Gamma(2\rho+2\nu+s)}{\Gamma(2\rho+3\nu+s+1)};$$

c'est-à-dire que la série correspondante (3), multipliée par la puissance $x^{2\rho+4\nu}$, est uniformément convergente à l'extérieur d'une ellipse $E(\delta)$ quelconque, et les hypothèses faites sur la nature de la série (3) sont vraies, d'où la proposition suivante :

I. *Supposons finies les deux nombres* $\nu$ *et* $\rho$; *la série de carrés des fonctions métasphériques*

$$(9) \qquad Q^{\nu,2\rho+2\nu}(x) = a \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\nu+2\rho+2s) A_s [Q^{\nu,\rho+s}(x)]^2,$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$(10) \quad a = \frac{2^{1-4\nu}\Gamma(2\rho+4\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\rho+2\nu+1)} \left[\frac{\Gamma(\rho+\nu+1)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\right]^2, \qquad A_s = \binom{\nu}{s} \frac{\Gamma(2\rho+2\nu+s)}{\Gamma(2\rho+3\nu+s+1)},$$

*est, multipliée par la puissance* $x^{2\rho+4\nu}$, *absolument et uniformément convergente à l'extérieur d'une ellipse* $E(\delta)$ *quelconque.*

Posons par exemple, dans (9), $\rho = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$; il en résulte la formule élémentaire

$$(11) \qquad Q^1(x) = \frac{1}{3}[Q^0(x)]^2 - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{(2s-1)(2s+3)} [Q^s(x)]^2.$$

Transformons maintenant la formule (9) en remplaçant toutes les fonctions Q qui y figurent par l'expression correspondante

$$Q^{a,b}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)\sin\pi(2b+a)}{2^{1-2a}\sin\pi(b+2a)}\,P^{a,-b-2a}(x),$$

puis mettons dans la formule ainsi obtenue $-\rho-2\nu$ au lieu de $\rho$; la formule eulérienne

$$\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega) = \frac{\pi}{\sin\pi\omega}$$

donnera sans peine ce développement nouveau analogue à (9)

$$(12)\qquad P^{\nu,2\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\rho+2\nu)}{\Gamma(2\rho+1)}\left(\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+\nu)}\right)^2 \sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(2\rho+2\nu-2s)A_s[P^{\nu,\rho-s}(x)]^2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(13)\qquad A_s = \binom{\nu}{s}\frac{\Gamma(2\rho+\nu-s)}{\Gamma(2\rho+2\nu-s+1)}.$$

La formule (12) est valable où l'est la formule originelle (9).

Supposons dans (12) $\rho = n$, $n$ étant un positif entier; il en résulte la formule élémentaire

$$(14)\qquad P^{\nu,2n}(x) = \frac{\Gamma(2n+2\nu)\Gamma(\nu)}{(2n)!}\left(\frac{n!}{\Gamma(\nu+n)}\right)^2 \sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s(2n-2s+2\nu)a_s[P^{\nu,n-s}(x)]^2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$a_s = \binom{\nu}{s}\frac{\Gamma(\nu+2n-s)}{\Gamma(2\nu+2n-s+1)}.$$

Ces formules trouvées, nous laissons au lecteur le soin d'étudier les autres racines (6).

Différentions par rapport à $x$ la formule (9); nous obtenons un développement de la forme

$$Q^{\nu,2\rho+2\nu-1}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}[A_s Q^{\nu,\rho+s-1}(x) + B_s Q^{\nu,\rho+s+1}(x)]\,Q^{\nu,\rho+s}(x),$$

dont les coefficients deviennent très compliqués, le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ exclu.

## LII. — Théorèmes généraux.

Considérons maintenant la série de fonctions ultrasphériques aux indices pairs

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n P^{\nu,2n}(x),$$

avec l'ellipse de convergence $E(a)$, puis appliquons aux toutes fonctions P qui y figurent la formule (14) du paragraphe LI; nous ne savons pas, dès à présent, si nous pouvons ordonner selon des carrés des fonctions ultrasphériques la série ainsi obtenue. Néanmoins effectuons *formellement* une telle transformation; nous avons à étudier la série ainsi obtenue

$$(2) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2(\nu+n) B_n [P^{\nu,n}(x)]^2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(3) \quad B_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\nu}{s} \frac{\Gamma(2\nu+2n+2s)[(n+s)!]^2 \Gamma(\nu+2n+s)}{(2n+2s)! [\Gamma(\nu+n+s)]^2 \Gamma(2\nu+2n+s+1)} A_{n+s}.$$

A cet effet, nous avons tout d'abord à démontrer que la série (2) est uniformément convergente où l'est la série donnée (1).

Nous aurons évidemment, en vertu des formules développées dans le paragraphe VIII,

$$|B_n| < \sum_{s=0}^{s=\infty} (n+s)^g |A_{n+s}|,$$

où $g$ désigne un nombre réel fini, d'où, en posant

$$\xi = \left| x \pm \sqrt{x^2-1} \right| \geqq 1,$$

cette autre valeur majorante

$$(4) \qquad |B_n [P^{\nu,n}(x)]^2| < n^{g_1} \xi^{2n} \sum_{s=0}^{s=\infty} (n+s)^g |A_{n+s}|,$$

où $g_1$ est un autre nombre réel fini.

Cela posé, désignons par $x_1$ une valeur quelconque de $x$ telle que la série donnée (1), $f(x_1)$ soit absolument convergente, puis posons

$$\xi_1 = \left| x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 1} \right| \geqq 1;$$

l'inégalité (4) donnera cette autre

$$|B_n[P^{\nu,n}(x)^2| < n^{g_1} \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{2n} \sum_{s=0}^{s=\infty} (n+s)^g |A_{n+s}| \xi_1^{2n+2s},$$

d'où immédiatement

$$(5) \qquad |B_n[P^{\nu,n}(x)]^2| < \omega_n n^{g_1} \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{2n},$$

où la limite supérieure de la suite aux éléments positifs

$$\omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n, \quad \ldots$$

est finie.

Cela posé, l'inégalité (5) montrera clairement que la série (2) est absolument convergente dans l'intérieur de l'ellipse de convergence de la série donnée (1) et uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse $E(a - \delta)$ quelconque. C'est-à-dire que $\varphi(x)$ est une fonction analytique dans ce dernier domaine.

Supposons maintenant, pour $n > N$, constamment

$$A_n = 0,$$

puis désignons par $B'_n$ ce que deviendra, dans ce cas, le coefficient $B_n$ pour $n \leqq N$; nous aurons certainement

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{n=N} A_n P^{\nu,2n}(x) = \sum_{n=0}^{n=N} B'_n [P^{\nu,n}(x)]^2,$$

parce que les deux séries en question sont finies.

Posons ensuite généralement

$$B_n = B'_n + B''_n, \qquad n \leqq N;$$

nous aurons évidemment

$$(7) \quad \varphi(x) - f(x) = \sum_{n=N+1}^{n=\infty} B_n [P^{\nu,n}(x)]^2 + \sum_{n=0}^{n=N} B''_n [P^{\nu,n}(x)]^2 - \sum_{n=N+1}^{n=\infty} A_n P^{\nu,2n}(x).$$

Or, il est possible de choisir N aussi grand que nous aurons à la fois

$$(8)\qquad \left|\sum_{n=N+1}^{n=\infty} B_n[P^{\nu,n}(x)]^2\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{n=N+1}^{n=\infty} A_n P^{\nu,2n}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

de plus, nous aurons, en vertu de (5),

$$|B''_n[P^{\nu,n}(x)^2]| < n^{g_1}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{2n} \sum_{s=N+1}^{s=\infty} s^g A_s \xi_1^{2s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$|B''_n[P^{\nu,n}(x)]^2| < n^{g_1}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{2n} R_N,$$

$R_N$ désignant le terme de reste d'une série convergente à termes positifs; c'est-à dire que nous aurons

$$\left|\sum_{s=0}^{s=N} B''_n[P^{\nu,n}(x)]^2\right| < R_N \sum_{n=1}^{n=N} n^{g_1}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)^{2n} < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où finalement, en vertu de (7) et (8),

$$|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ce qui donnera $\varphi(x) = f(x)$, parce que la fonction analytique

$$\varphi(x) - f(x)$$

est indépendante du positif entier N.

Multiplions ensuite par $x$ la formule (2), puis appliquons l'équation aux différences finies qui figure dans la définition des fonctions sphériques; nous aurons un développement de la forme

$$(9)\qquad x f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n P^{\nu,n}(x) P^{\nu,n+1}(x),$$

où la série ainsi obtenue a la même ellipse de convergence que la série donnée (1) elle-même.

Cela posé, remarquons que les fonctions $f(x)$ et $x f(x)$ sont respectivement paires et impaires; nous aurons le théorème suivant :

I. *Toute fonction $f(x)$, analytique à l'intérieur d'une ellipse* E$(a)$, *est* *dans ce domaine développable en série comme suit :*

$$(10)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ B_n [P^{\nu,n}(x)]^2 + C_n P^{\nu,n}(x) P^{\nu,n+1}(x) \right\},$$

*et la série ainsi obtenue est uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse* $E(a - \delta)$ *quelconque.*

Maintenant il faut remarquer que la série (10) est extrêmement compliquée, parce qu'il faut connaître, pour déterminer les coefficients $B_n$, les coefficients $A_n$ de la série neumannienne (1). Tandis que la détermination des $C_n$ exige encore la transformation susdite de la série neumannienne correspondante.

Outre de la série (14) du paragraphe LI nous avons encore à donner dans le paragraphe LIX une autre série particulière de ce genre.

Considérons ensuite la série de fonctions métasphériques

$$(11)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n Q^{\nu,2\rho+2\nu+2n}(x) x^{2\rho+4\nu}$$

avec l'ellipse de convergence $E(a)$, puis exprimons à l'aide de la formule (9) du paragraphe LI toutes les fonctions métasphériques qui y figurent; nous aurons *formellement* une série de la forme

$$(12)\qquad \varphi(x) = x^{2\rho+4\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n B_n [Q^{\nu,\rho+n}(x)]^2,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} B_n = {} & \frac{2^{1-2\nu}(2\rho+2\nu+2n)}{\sqrt{\pi}} \\ & \times \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{\nu}{n-r} \frac{\Gamma(2r+4\nu+2\rho)\Gamma(n+r+2\nu+2\rho)}{\Gamma(2\rho+2\nu+2r+1)\Gamma(n+r+2\rho+3\nu+1)} \left[\frac{\Gamma(\nu+\rho+r+1)}{\Gamma(r+\rho+2\nu)}\right]^2 A_r. \end{aligned} \right.$$

Appliquons ensuite une méthode analogue à celle que nous venons d'expliquer; nous aurons le théorème suivant :

II. *Toute fonction* $f(x)$, *analytique à l'extérieur d'une ellipse* $E(a)$, *est dans ce domaine développable en série de la forme*

$$(14) \quad f(x) = x^{2\rho+4\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ B_n [Q^{\nu,\rho+n}(x)]^2 + C_n Q^{\nu,\rho+n}(x) Q^{\nu,\rho+n+1}(x) \right\},$$

*série qui est uniformément convergente sur la circonférence et à l'extérieur d'une ellipse* $E(a+\delta)$ *quelconque.*

Il saute aux yeux, du reste, que les séries de ce genre sont de la même nature compliquée que les précédentes.

# CHAPITRE XIII.

## SÉRIES DE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES.

### LIII. — Séries de première espèce.

Pour donner des applications intéressantes des théories générales développées dans le Chapitre IV, nous introduisons $p+q$ paramètres finis

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots, & \alpha_p, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \ldots, & \beta_q, \end{cases}$$

pour lesquels les valeurs entières et non positives sont exclues; supposons de plus $p \leqq q+1$; le rayon de convergence de la série de puissances

$$(2)\quad F_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+r)\Gamma(\alpha_2+n+r)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+r)}{r!\,\Gamma(\beta_1+n+r)\Gamma(\beta_2+n+r)\ldots\Gamma(\beta_q+n+r)}\, x^{n+r}$$

est, pour $p=q+1$, égal à l'unité, mais infiniment grand pour $p \leqq q$.

Dans le cas $p=0$, le numérateur de coefficient général qui figure au second membre de (2) doit être égal à 1, tandis que pour $q=0$, ce qui exige $p=0$ ou $p=1$, le dénominateur correspondant doit être égal à $r!$

Supposons $p=q+1>2$; nous désignons comme fonction hypergéométrique généralisée la fonction ainsi définie; pour $p \leqq q$, la fonction en question est désignée comme dégénérée.

Quant aux séries qui procèdent d'après des fonctions (2), nous avons tout d'abord à démontrer le théorème suivant :

I. *Supposons $p \leqq q$, puis désignons par*

$$(3)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

*une série de puissances ayant le rayon de convergence* R; *nous aurons toujours une série de la forme*

$$(4)\qquad f(x) = A_0 F_0(x) + A_1 F_1(x) + \ldots + A_n F_n(x) + \ldots,$$

*où nous avons posé généralement*

$$(5)\qquad A_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r \Gamma(\beta_1 + n - r)\Gamma(\beta_2 + n - r)\ldots\Gamma(\beta_q + n - r)}{r!\,\Gamma(\alpha_1 + n - r)\Gamma(\alpha_2 + n - r)\ldots\Gamma(\alpha_p + n - r)} a_{n-r}.$$

*La série* (3) *a le même champ de convergence que la série donnée* (3) *elle-même, tandis qu'elle est uniformément convergente pour* $|x| \leqq R - \delta$.

Remarquons tout d'abord que l'expression (5) du coefficient général $A_n$ est, en vertu du théorème II du paragraphe XIII, une conséquence immédiate de la formule élémentaire (4) du paragraphe XIV, pourvu qu'un développement de la forme (4) soit possible. C'est-à-dire qu'il ne nous reste qu'à démontrer la convergence de la série (4).

A cet effet, posons pour tous les $n$

$$(6)\qquad F_n(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\Gamma(\alpha_2 + n)\ldots\Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\Gamma(\beta_2 + n)\ldots\Gamma(\beta_q + n)} x^n H_n(x);$$

nous aurons, en vertu du théorème démontré dans le paragraphe VIII, ces valeurs limites

$$(7)\qquad \lim_{n=\infty} H_n(x) = e^x, \qquad \lim_{n=\infty} H_n(x) = 1,$$

selon que $p = q$ ou $p < q$. Supposons encore $|x| \leqq G$; la fonction $H_n(x)$ convergera uniformément à sa valeur limite correspondante (7).

Posons ensuite pour abréger

$$(8)\qquad \sigma = \mathfrak{R}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_q);$$

la formule (16) du paragraphe VIII concernant la fonction gamma donnera

$$(9)\qquad |F_n(x)| \leqq M_1 [(n-1)!]^{p-q} n^{-\sigma} |x|^n,$$

où $M_1$ désigne un nombre positif fini indépendant de $n$. La formule (5) donnera de même

$$|A_n| \leqq M_2 [(n-1)!]^{q-p} n^{|\sigma|} \sum_{r=0}^{r=n} \frac{|a_{n-r}|}{r};$$

ce qui donnera généralement, en vertu de (9),

$$|A_n F_n(x)| \leqq M \omega_n n^{2|\sigma|} |x|^n, \tag{10}$$

où M désigne un nombre positif fini indépendant de $n$, tandis que nous avons posé pour abréger

$$\omega_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{|a_{n-r}|}{r!}. \tag{11}$$

Cela posé, remarquons que la série de puissances à coefficients positifs

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} |a_n| x^n$$

a précisément le même rayon de convergence que la série donnée (3); cette autre série de puissances, obtenue immédiatement en appliquant la règle de multiplication de Cauchy

$$e^x f_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \omega_n x^n,$$

aura encore précisément le rayon de convergence R; c'est évidemment la même chose pour l'autre série de puissances

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n^{2|\sigma|} \omega_n x^n.$$

Or, nous aurons, en vertu de (10), pour le terme de reste de la série hypothétique (4),

$$\left| \sum_{r=n+1}^{r=n+p} A_r F_r(x) \right| \leqq M \sum_{r=n+1}^{r=n+p} r^{2|\sigma|} \omega_r |x|^r;$$

c'est-à-dire que la série (4) est absolument convergente pour $|x| < R$ et uniformément convergente pour $|x| \leqq R - \delta$.

Or donnons ensuite, en vertu du théorème fondamental de Weierstrass, comme série de puissances, la série qui figure au second membre de (4); nous aurons précisément la série donnée (3). De plus, notre série (4) ne peut jamais converger pour $|x| > R$; car dans ce cas elle convergera uniformément pour $|x| > R$, ce qui donnera pour la série de puissances donnée (3) un rayon de convergence plus grand que R.

Quant au cas $p = q + 1$, une combinaison de la formule particulière (9) du paragraphe XIV et le théorème général I du paragraphe XV donnera cet autre théorème :

III. *Supposons* $p = q + 1$; *la série* (4) *dont les coefficients se déterminent à l'aide de la formule* (5) *est encore valable et uniformément convergente à l'intérieur et sur la circonférence du cercle* $L(R - \delta)$ *définie dans le paragraphe* XIV.

Nous ignorons, par notre démonstration, si la série mentionnée dans le dernier théorème puisse être convergente à l'extérieur du cercle $L(R)$; mais nous pouvons dire que, dans ce cas, la convergence sera nécessairement non uniforme.

*Exemple I.* — Posons $p = 2$, $q = 1$; nous aurons la série de fonctions hypergéométriques ordinaires

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x), \tag{12}$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)} \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r \Gamma(\gamma + n - r)}{r!\,\Gamma(\alpha + n - r)\Gamma(\beta + n - r)} a_{n-r}. \tag{13}$$

*Exemple II.* — La formule

$$F_0(ax) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(a-1)^n}{n!} F_n(x) \tag{14}$$

est équivalente à l'identité

$$e^{(a-1)x} e^x = e^{ax},$$

obtenue de (14) en y posant $p = q = 0$.

*Exemple III.* — Soit $G_1(x)$ la fonction obtenue de $F_0(x)$ en remplaçant $\alpha_1$ par un autre paramètre $\alpha'_1$, tandis que tous les autres paramètres $\alpha_r$ et $\beta_s$ seront les mêmes, nous aurons

$$(15) \qquad G_1(\omega x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha'_1)}{\Gamma(\alpha_1) n!} F(\alpha'_1, -n, \alpha_1, \omega) F_n(x).$$

*Exemple IV.* — Remplaçons de même, dans $F_0(x)$, $\beta_1$ par un autre paramètre $\beta'_1$, nous aurons pour la fonction $G_2(x)$ ainsi obtenue :

$$(16) \qquad G_2(\omega x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\beta_1)}{n! \Gamma(\beta'_1)} F(\beta_1, -n, \beta'_1, \omega) F_n(x).$$

## LIV. — Séries de seconde espèce.

Ajoutons aux paramètres (1) du paragraphe LIII le nouveau paramètre $\omega$ du même genre, puis posons généralement

$$(1) \quad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\Gamma(\alpha_2+n+s)\ldots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{s!\,\Gamma(\beta_1+n+s)\Gamma(\beta_2+n+s)\ldots\Gamma(\beta_q+n+s)\Gamma(\omega+2n+s)} x^{n+p},$$

où il faut admettre $p \leq q+2$, il est très intéressant, ce me semble, que les séries de fonctions métasphériques de seconde espèce étudiées dans le Chapitre XI, nous fournissent un simple moyen pour étudier les séries de telles fonctions hypergéométriques généralisées.

A cet effet, posons

$$H_n(x) = 2^{2-2\nu} x^{-(\rho+2\nu)} Q^{\nu,\rho+n}\left(\frac{1}{x}\right),$$

nous aurons la série de puissances

$$(2) \qquad H_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+\nu+s\right)\Gamma\left(\frac{\rho+n+1}{2}+\nu+s\right)}{s!\,\Gamma(\nu+\rho+n+s+1)} x^{n+2s};$$

posons ensuite

$$(3) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\rho+\nu+n-s)}{s!\,\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}+\nu-s\right)\Gamma\left(\frac{\rho+n+1}{2}+\nu-s\right)} a_{n-2s},$$

puis introduisons dans la série générale (7) du paragraphe II, avec l'ellipse de convergence $E(a)$, $1 : x$ au lieu de $x$; nous aurons un développement de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + \rho + n) A_n H_n(x). \tag{4}$$

Conformément aux recherches du paragraphe IV, la série qui figure au second membre et convergente à l'intérieur de l'ellipse de Cassini $C(a)$ est uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse $C(a + \delta)$ quelconque. Quant à $f(x)$, nous aurons pour des valeurs suffisamment petites de $|x|$ la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 + \alpha_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots. \tag{5}$$

Supposons maintenant *paire* la fonction donnée $f(x)$; nous aurons

$$a_{2n+1} = 0, \qquad A_{2n+1} = 0;$$

introduisons ensuite $\sqrt{x}$ au lieu de $x$ comme variable indépendante; l'ellipse $C(a)$ de Cassini se transforme, comme nous l'avons vu dans le paragraphe IV, à la courbe $K(a)$. Soit enfin

$$G_n(x) = H_{2n}(\sqrt{x}),$$

savoir

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + n + s + \nu\right) \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2} + \nu + n + s\right)}{s!\,\Gamma(\nu + \rho + 2n + s + 1)} x^{n+s} \tag{6}$$

et

$$B_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \Gamma(\rho + \nu + 2n - s + 1)}{s!\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \nu + n - s\right) \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2} + \nu + n - s\right)} a_{n-s}; \tag{7}$$

nous aurons, pour la fonction (6), cet autre développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho + \nu + 2n) B_n G_n(x), \tag{8}$$

d'où, en vertu des développements du paragraphe XV, ce théorème général :

I. *Supposons dans* (1) $p = q + 2$, *toute fonction* $f(x)$ *analytique dans l'intérieur d'une courbe* $K(a)$ *est dans ce domaine développable en série de la orme*

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\omega + 2n - 1) A_n F_n(x),$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$(10) \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \Gamma(\beta_1 + n - s) \dots \Gamma(\beta_q + n - s) \Gamma(\omega + 2n - s)}{s! \Gamma(\alpha_1 + n - s) \Gamma(\alpha_2 + n - s) \dots \Gamma(\alpha_p + n - s)} a_{n-s},$$

*pourvu que* $f(x)$ *soit, pour des valeurs suffisamment petites de* $x$, *définies par la série de puissances* (5). *La série* (9) *est uniformément convergente sur la circonférence et dans l'intérieur d'une courbe* $K(a + \delta)$ *quelconque.*

Quant au cas $p \leqq q + 1$, un procédé analogue à celui qui nous a donné le théorème I du paragraphe LIII nous conduira à ce théorème analogue :

II. *Supposons* $p \leqq q + 1$, *puis désignons par* R *le rayon de convergence de la série de puissances* (5), *la série* (9) *dont les coefficients se déterminent à l'aide de la formule* (10) *est encore valable pour* $|x| < R$ *et uniformément convergente pour* $|x| \leqq R - \delta$.

Nous avons encore à donner quelques exemples correspondants au théorème I qui est évidemment le plus intéressant.

*Exemple I.* — Posons pour abréger

$$(11) \qquad A_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\delta + n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta + 2n)} \binom{-\beta}{n} F(\delta + n, -n, \gamma, \omega);$$

nous aurons le développement

$$(12) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, \omega x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha + n, \beta + n, \delta + 2n + 1, x),$$

où la série correspondante est uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur de la courbe $K(\delta)$.

*Exemple II.* — Soit $f(x)$ une transcendante entière; nous trouverons le même champ de convergence uniforme que dans l'exemple I.

Une comparaison des deux classes de séries de fonctions hypergéométriques généralisées et non dégénérées que nous venons d'étudier est bien intéressante, parce que cette petite modification des fonctions qui figurent dans les séries susdites transforme totalement le champ de convergence uniforme des séries en question.

## LV. — Séries de Ch. Neumann de fonctions cylindriques.

Il est digne d'intérêt que toutes les séries connues de fonctions cylindriques qui représentent des fonctions analytiques sont des cas particuliers des séries de fonctions hypergéométriques généralisées que nous venons d'étudier.

1° Posons dans la série

$$(1)\qquad J^{\nu}(x)=\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s};$$

où il faut supposer, à cause des séries suivantes, que $\nu$ ne soit pas égal à un négatif entier,

$$(2)\qquad x=i2\sqrt{y},\qquad y=-\frac{x^2}{4};$$

nous aurons

$$(i\sqrt{y})^{-\nu}y^{\frac{n}{2}}J^{\nu+n}(i2\sqrt{y})=i^n\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{y^{n+s}}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)};$$

c'est-à-dire que nous avons à appliquer le théorème I du paragraphe LIII pour

$$p=0,\qquad q=1,\qquad \beta_1=\nu+1.$$

Transformons ensuite le développement ainsi obtenu à l'aide de la dernière formule (2); nous aurons la série de fonctions cylindriques [1]

$$(3)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty}a_n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n\left(\frac{x}{2}\right)^{n}J^{\nu+n}(x),$$

[1] *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, § 105; Leipzig, 1904.

où nous avons posé généralement

$$(4) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\nu+n-s+1)}{s!} a_{n-s}.$$

2° *Séries neumanniennes de première espèce.* — La transformation (2) donnera de même

$$(i\sqrt{y})^{-\nu} J^{\nu+2n}(i2\sqrt{y}) = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{y^{n+s}}{s!\,\Gamma(\nu+2n+s+1)};$$

c'est-à-dire que nous avons à appliquer ici le théorème II du paragraphe LIV pour

$$p=0, \qquad q=0, \qquad \omega=\nu+1;$$

la dernière des transformations (2) donnera ensuite, si nous posons encore $\nu+1$ au lieu de $\nu$, puis additionnons les deux formules ainsi obtenues,

$$(5) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \left(\frac{x}{2}\right)^s = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu+n) A_n J^{\nu+n}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(6) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-s)}{s!} a_{n-2s}.$$

La série (5) qui correspond à $\nu=0$ est due à Ch. Neumann [1].

*Exemple III : Séries neumanniennes de seconde espèce.* — La règle de multiplication due à Cauchy donnera immédiatement, en vertu de (1),

$$J^\nu(x) J^\rho(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+\rho+2s+1)}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)\Gamma(\rho+s+1)\Gamma(\nu+\rho+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho+2s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(7) \quad J^\nu(x) J^\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}+s\right)}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)\Gamma(\rho+s+1)\Gamma(\nu+\rho+s+1)} x^{\rho+\nu+2s};$$

---

[1] *Theorie der Besselschen Funktionen*, p. 52; Leipzig, 1869. *Voir* mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen*, Chap. XX; Leipzig, 1904.

posons ensuite

$$(8) \qquad y = -x^2, \qquad x = -i\sqrt{y};$$

nous aurons, en vertu de (7),

$$(9) \left\{ \begin{aligned} &(i\sqrt{y})^{-\nu-\rho} J^{\nu+n}(i\sqrt{y}) J^{\rho+n}(i\sqrt{y}) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+n+s\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1}{2}+n+s\right)}{s!\,\Gamma(\nu+n+s+1)\Gamma(\rho+n+s+1)\Gamma(\nu+\rho+2n+s+1)} y^{n+s}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, nous avons à appliquer le théorème II du paragraphe LIV pour

$$p = 2, \qquad q = 2, \qquad \alpha_1 = \frac{\rho+\nu}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{\rho+\nu+1}{2},$$

$$\beta_1 = \nu+1, \qquad \beta_2 = \rho+1, \qquad \omega = \rho+\nu+1;$$

une méthode analogue à celle appliquée dans l'exemple 2 donnera ensuite la série suivante :

$$(10) \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s \left(\frac{x}{2}\right)^s = \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{\nu+\rho}{2}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\nu+\rho}{2}+n\right) A_n J^{\frac{\nu+n}{2}}(x) J^{\frac{\rho+n}{2}}(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(11) \quad A_n = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}+n-s\right)\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}-s+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho+n}{2}-s+1\right)}{s!\,\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}+n-2s+1\right)} a_{n-2s}.$$

La série (10) qui correspond à des valeurs entières des paramètres des fonctions cylindriques qui y figurent est due à Ch. Neumann [1].

Par ce point de vue, l'analogie des méthodes pour déterminer les coefficients des deux séries (5) et (10), que j'ai indiquée dans mon *Traité des fonctions cylindriques* [2], est évidente, parce que ces deux espèces de séries se présentent comme des cas particuliers de la même classe de séries plus générales.

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. II, p. 192; t. III, p. 581-610.

[2] *Voir* les Chapitres XX et XXI de mon *Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen;* Leipzig, 1904.

## LVI. — Sur quelques séries de polynomes entiers.

Pour déduire du théorème de Ch. Neumann une classe de séries de polynomes entiers, nous avons à étudier la fonction hypergéométrique particulière

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{x^{2n}}{y^{2n+2}}, \tag{1}$$

qui ne possède par conséquent que les deux points singuliers finis $x=\pm y$. Les formules générales du paragraphe LIV donnent immédiatement ces développements en série *neumannienne*

$$f(x)=\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{n=\infty}(\nu+2n)\mathrm{A}_n(y)\mathrm{P}^{\nu,2n}(x), \tag{2}$$

où nous avons posé pour abréger

$$\mathrm{A}_n(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+s)!\,\Gamma(\rho+n+s+1)}{s!\,\Gamma(\nu+2n+s+1)}\frac{1}{y^{2n+2s+2}}$$

ou, ce qui est évidemment la même chose,

$$\mathrm{A}_n(y)=\frac{n!\,\Gamma(\rho+n+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+2n+1)y^{2n+2}}\,\mathrm{F}\left(n+1,\rho+n+1,\nu+2n+1,\frac{1}{y^2}\right). \tag{3}$$

Quant à la série (2), supposons que $y$ parcourt une certaine ellipse $\mathrm{E}(a)$; la série en question est uniformément convergente, pourvu que $x$ soit situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une ellipse $\mathrm{E}(a-\delta)$ quelconque.

Cela posé, remarquons que l'intégrale *eulérienne* de première espèce donnera, en vertu de la définition de la fonction ultrasphérique de première espèce,

$$\left\{\begin{aligned}&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{P}^{\nu,2n}(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho}\,d\varphi\\&\quad=\frac{(-1)^n\Gamma(\nu+n)\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{n!\,\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)}\,\mathrm{F}(\nu+n,-n,\rho+1,x^2),\end{aligned}\right. \tag{4}$$

tandis que nous aurons de même

$$(5)\qquad 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\rho}\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{1}{2}\right)}{y^2-x^2};$$

ces deux formules sont valables, pourvu que nous ayons

$$(6)\qquad \Re(\rho) > -\frac{1}{2}.$$

Or, la méthode expliquée dans les paragraphes XV et XLVIII montrent que la formule déduite de (2) à l'aide des intégrales (4) et (5) est indépendante de la condition (6); de cette manière nous aurons le développement

$$(7)\qquad \frac{1}{y^2-x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n(\nu+2n)B_n(y^2)F(\nu+n, -n, \rho+1, x^2),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(8)\quad B_n(y) = \frac{\Gamma(\nu+n)\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\nu+2n+1)y^{n+1}} F\left(n+1, \rho+n+1, \nu+2n+1, \frac{1}{y}\right),$$

et la série (7) est uniformément convergente, où l'est la série originelle (2).

Introduisons maintenant dans (7) $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ au lieu de $x$ et $y$ respectivement; nous aurons cet autre développement

$$(9)\qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n(\nu+2n)B_n(y)F(\nu+n, -n, \rho+1, x),$$

et la série ainsi obtenue est, comme nous l'avons vu dans le paragraphe IV, uniformément convergente, pourvu que $y$ parcourt une certaine ellipse $E_1(a)$, tandis que $x$ est situé sur la circonférence ou à l'intérieur d'une ellipse $E_1(a-\delta)$ quelconque.

Cela posé, l'intégrale de Cauchy donnera immédiatement le théorème suivant :

I. *Toute fonction $f(x)$, analytique à l'intérieur d'une ellipse* $E_1(a)$, *est dans ce domaine développable en série de la forme*

$$(10)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n(\nu+2n)\mathrm{A}_n\mathrm{F}(\nu+n,\,-n,\,\rho+1,\,x),$$

*uniformément convergente sur la circonférence et à l'intérieur d'une ellipse* $\mathrm{E}_1(a-\delta)$ *quelconque, tandis que le coefficient général* $\mathrm{A}_n$ *se détermine à l'aide de l'intégrale curviligne*

$$(11)\qquad \mathrm{A}_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{E}} f(y)\mathrm{B}_n\left(\frac{1}{y}\right)dy,$$

*où* E *désigne la circonférence de* $\mathrm{E}_1(a-\delta)$ *parcourue dans le sens direct.*

Supposons maintenant que l'ellipse $\mathrm{E}_1(a)$ soit entièrement située à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances

$$(12)\qquad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

qui représente la fonction donnée $f(x)$ aux environs de l'origine ; la formule (11) donnera immédiatement pour $\mathrm{A}_n$ cette autre expression

$$(13)\qquad \mathrm{A}_n=\frac{\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\rho+1)}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(n+s)!\,\Gamma(\rho+n+s+1)}{s!\,\Gamma(\nu+2n+s+1)}\,a_{n+s}.$$

Remarquons en passant que la formule (1) du paragraphe XLV donnera, en vertu de (4), cet autre développement

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{F}(\rho+n,\,-n,\,\sigma+1,\,\alpha x)\\&\quad=\frac{n!}{\Gamma(\rho+n)}\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\mathrm{A}_s^{\nu,\rho}(\alpha)\mathrm{F}(\nu+n-s,\,-n+s,\,\sigma+1,\,x),\end{aligned}\right.$$

où nous avons posé pour abréger

$$(15)\quad \mathrm{A}_s^{\nu,\rho}(\alpha)=\frac{\Gamma(\nu+n-s)\Gamma(\rho+2n-s)}{s!\,(n-s)!\,\Gamma(\nu+2n-2s)}\,\mathrm{F}(\rho+2n-s,\,-s,\,\nu+2n-2s+1,\,\alpha);$$

il est digne de remarque que ce coefficient général est indépendant du paramètre $\sigma$.

# CHAPITRE XIV.

## FORMULES D'ADDITION.

### LVII. — Équations aux dérivées partielles.

Dans son Traité classique, Heine [1] remarque que la propriété la plus essentielle des fonctions sphériques est à chercher dans la formule d'addition de ces fonctions.

La raison de cette formule d'addition et de l'autre que nous ajoutons dans le dernier paragraphe de ce Chapitre est à chercher dans le fait curieux que la fonction métasphérique générale, prise d'un argument très compliqué, satisfait à des équations aux dérivées partielles d'une forme très simple. En premier lieu, considérons la fonction

$$y = \mathrm{K}^{\nu,\rho}(\omega), \qquad \omega = \alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1},$$

puis différentions deux fois et par rapport à $\alpha$ et par rapport à $x$; nous aurons

$$\frac{dy}{d\omega} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\lambda}, \qquad \frac{d^2y}{d\omega^2} = \frac{\alpha^2-1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} + \frac{x\sqrt{\beta^2-1}}{\lambda^3}\frac{\partial y}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(\alpha^2-1)\sqrt{\beta^2-1}}{\lambda}\frac{\partial y}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (\alpha^2-1)(\beta^2-1)\left(\frac{\alpha^2-1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} + \frac{x\sqrt{\beta^2-1}}{\lambda^3}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$\lambda = \beta\sqrt{\alpha^2-1} + \alpha x\sqrt{\beta^2-1},$$

[1] *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, p. 312; Berlin, 1878.

ce qui donnera sans peine

$$1-\omega^2 = -\lambda^2 + (x^2-1)(\beta^2-1).$$

Appliquons ensuite l'équation de Legendre obtenue pour $K^{\nu,\rho}(\omega)$,

$$(1)\qquad (1-\omega^2)\frac{d^2y}{d\omega^2} - (1+2\nu)\omega\frac{dy}{d\omega} + \rho(\rho+2\nu)y = 0;$$

les formules différentielles que nous venons de développer donnent immédiatement pour $y = K^{\nu,\rho}(\omega)$ cette équation aux dérivées partielles

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-\alpha^2)\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} - (1+2\nu)\alpha\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \rho(\rho+2\nu)y \\ &\qquad + \frac{1}{1-\alpha^2}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\nu x\frac{\partial x}{\partial y}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

L'analogie entre les deux parties du premier membre de (2) et les premiers membres des équations de Legendre obtenues pour

$$K^{\nu,\rho}(\alpha),\quad K^{\nu-\frac{1}{2},\rho}(x),$$

respectivement saute aux yeux.

Il est bien curieux, ce me semble, qu'une étude directe du cas particulier $\beta = \alpha$ nous conduira à des résultats analogues aux précédents.

En effet, posons

$$y = K^{\nu,\rho}(\omega),\qquad \omega = \alpha^2 + x(1-\alpha^2);$$

nous aurons les formules différentielles

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 2\alpha(1-x)\frac{dy}{d\omega},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} = 4\alpha^2(1-x)^2\frac{d^2y}{d\omega^2} + 2(1-x)\frac{dy}{d\omega},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (1-\alpha^2)\frac{dy}{d\omega},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (1-\alpha^2)^2\frac{d^2y}{d\omega^2},$$

ce qui donnera, en vertu de (1), cette équation aux dérivées partielles

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha(1-\alpha^2)\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2} - [1+(4\nu+1)\alpha^2]\frac{\partial y}{\partial\alpha} \\ &\qquad + 4\alpha\rho(\rho+2\nu)y + \frac{4\alpha}{1-\alpha^2}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (1+2\nu)x\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

car nous aurons ici

$$1-\omega^2=(1-\alpha^2)(1-x^2)[1+x+\alpha^2(1-x)].$$

La partie du premier membre de (3) qui contient les dérivées prises par rapport à $x$ est semblable au premier membre de l'équation de Legendre obtenue pour $K^{\nu\rho}(x)$, tandis que la partie contenant les dérivées prises par rapport à $\alpha$ est intimement liée au premier membre de l'équation de Gauss :

$$(4)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dz}-\alpha\beta y=0,\qquad y=F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

En effet, posons dans (4)

$$\alpha=\sigma-\rho,\qquad \beta=\rho+\sigma+2\nu,\qquad \gamma=2\nu+2\sigma+1,\qquad \alpha+\beta+1=\gamma;$$

nous aurons pour la fonction

$$y=F(\sigma-\rho,\rho+\sigma+2\nu,2\nu+2\sigma+1,x)$$

l'équation différentielle suivante :

$$(5)\quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(2\nu+2\sigma+1)(1-x)\frac{dy}{dx}+(\rho-\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)y=0.$$

Introduisons maintenant dans (5), comme variable indépendante, la fonction

$$\omega=1-x^2,$$

puis appliquons les formules de transformation

$$\frac{dy}{d\omega}=-\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y}{d\omega^2}=\frac{1}{4x^2}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{4x^3}\frac{dy}{dx};$$

il en résulte sans peine pour la fonction

$$y=F(\sigma-\rho,\rho+\sigma+2\nu,2\nu+2\sigma+1,1-x^2)$$

cette équation différentielle linéaire

$$(6)\quad x(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-[1+(4\nu+4\sigma+1)x^2]\frac{dy}{dx}+4x(\rho+\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)y=0.$$

Cela posé, mettons enfin dans (5)

$$y=(1-x^2)^{-\sigma}z;$$

un simple calcul donnera finalement, pour la fonction

$$(7)\qquad z=(1-x^2)^{\sigma}F(\sigma-\rho,\ \rho+\sigma+2\nu,\ 2\nu+2\sigma+1,\ 1-x^2),$$

l'équation différentielle suivante :

$$(8)\quad x(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-[1+(4\nu+1)x^2]\frac{dz}{dx}+\left[4\rho(\rho+2\nu)-\frac{4\sigma(\sigma+2\nu)}{1-x^2}\right]xz=0.$$

Remarquons encore que nous aurons, en vertu du paragraphe IX, comme seconde intégrale particulière de (8), la fonction

$$(9)\qquad (1-x^2)^{-\sigma-2\nu}F(-\sigma-\rho-2\nu,\ \rho-\sigma,\ 1-2\nu-2\sigma,\ 1-x^2),$$

généralement indépendante de (7).

## LVIII. — Première formule d'addition.

Étudions maintenant la fonction ultrasphérique

$$(1)\qquad y=P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta+x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1});$$

nous aurons toujours une identité de la forme

$$(2)\quad \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta+x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1})=\Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=n}A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)P^{\nu,s}(x),$$

où les coefficients $A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)$ sont symétriques par rapport aux deux variables $\alpha$ et $\beta$, savoir

$$(3)\qquad A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=A_s^{\nu,n}(\beta,\alpha).$$

Pour déterminer maintenant les coefficients $A_s$, différentions par rapport à $x$ les deux membres de l'identité (2); nous aurons, en vertu de la formule différentielle (10) du paragraphe XXI,

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)&P^{\nu+\frac{3}{2},n-1}(\alpha\beta+x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1})\\&=\Gamma(\nu+1)\sum_{s=0}^{s=n-1}A_{s+1}^{\nu,n}(\alpha)P^{\nu+1,s}(x),\end{aligned}$$

d'où, en mettant dans (2) $\nu+1$ au lieu de $\nu$ et $n-1$ au lieu de $n$, la formule récursive

$$A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\,A_{s-1}^{\nu+1,n-1}(\alpha,\beta),$$

ce qui donnera immédiatement

$$(4)\qquad A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=(\alpha^2-1)^{\frac{s}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{s}{2}}A_0^{\nu+s,n-s}(\alpha,\beta),$$

de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à déterminer le seul coefficient $A_0^{\nu,n}(\alpha,\beta)$.

A cet effet, appliquons l'équation aux dérivées partielles (2) du paragraphe LVII, pour $\rho=n$, $n$ étant un entier non négatif, puis remarquons l'identité

$$(1-x^2)D_x^2P^{\nu,s}(x)-(1+2\nu)xD_xP^{\nu,s}(x)=-s(s+2\nu)P^{\nu,s}(x);$$

nous aurons pour la détermination de $A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)$ cette équation aux dérivées partielles,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2A_s}{d\alpha^2}-(2+2\nu)\frac{\partial A_s}{d\alpha}+\left[n(n+2\nu+1)-\frac{s(s+2\nu)}{1-\alpha^2}\right]A_s=0,$$

d'où, en vertu de l'équation différentielle des fonctions adjointes (7) du paragraphe XXII,

$$(5)\qquad A_s^{\nu,n}(\alpha,\beta)=a_s^{\nu,n}P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta),$$

où les coefficients $a_s^{\nu,n}$ sont indépendants et de $\alpha$ et de $\beta$.

Cela posé, mettons dans (2) $\alpha=\beta=1$; nous aurons, en vertu de (4),

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)P^{\nu+\frac{1}{2},n}(1)=\Gamma(\nu)P^{\nu,n}(1)\left[P^{\nu+\frac{1}{2},n}(1)\right]^2a_0^{\nu,n},$$

d'où immédiatement

$$a_0^{\nu,n}=\frac{\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)\nu\,2^{2\nu+2n+1}}{n!\,\Gamma(n+2\nu+1)\sqrt{\pi}},$$

de sorte que la formule récursive (4) donnera la formule générale

$$a_s^{\nu,n}=\frac{2^{2\nu+2n+1}(\nu+s)\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)\sqrt{\pi}},$$

d'où finalement le développement cherché

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}\left(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right)\\ &\quad= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu+2n+1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\\ &\quad\quad\times\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\nu+s}{(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)}P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta)P^{\nu,s}(x),\end{aligned}\right.$$

dont le cas $\nu = 0$ est dû à Laplace [1] et Legendre [2].

Nous avons à étudier séparément les cas particuliers suivants de la formule d'addition (6) :

1° $x = 1, \alpha = \cos\varphi, b = \cos\psi$; nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}[\cos(\varphi+\psi)]\\ &\quad= \frac{\Gamma(\nu)\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu+2n+1}}{\Gamma(2\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\\ &\quad\quad\times\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\nu+s)\Gamma(s+2\nu)}{s!\,(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)}P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos\varphi)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos\psi),\end{aligned}\right.$$

d'où pour $\nu = 0$

$$(8)\quad P^n[\cos(\varphi+\psi)] = [1.3.5\ldots(2n-1)]^2\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\varepsilon_{n-s}P_s^n(\cos\varphi)P_s^n(\cos\psi)}{(n-s)!\,(n+s)!},$$

où nous avons posé pour abréger $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_p = 2$, pour $p \geqq 1$.

2° L'hypothèse $x = 0$ donnera la formule singulière

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta) = \frac{\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu+2n+1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\\ &\quad\quad\times\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s(\nu+2s)\Gamma(\nu+s)}{s!\,(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)}P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha)P_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\beta).\end{aligned}\right.$$

---

(1) *Mémoires de l'Académie de Paris*, 1782. (La formule de Laplace est fausse.)

(2) *Mémoires de l'Académie de Paris*, 1789.

3° Considérons un triangle sphérique ayant les côtés $a$, $b$, $c$ et les angles opposés A, B, C; nous aurons

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \mathrm{C}, \tag{10}$$

d'où, en posant dans (6) $\alpha = \cos a$, $\beta = \cos b$, $x = -\cos \mathrm{C}$,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{P}^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos c) \\ &\quad = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)2^{\nu+2n+1}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \\ &\quad\quad \times \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s(\nu+s)}{(n-s)!\,\Gamma(2\nu+n+s+1)} \mathrm{P}_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos a)\,\mathrm{P}_s^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos b)\,\mathrm{P}^{\nu,s}(\cos \mathrm{C}), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

ce qui donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sin(n+1)c}{\sin c} = n!\,2^{2n+1} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s(2s+1)\mathrm{P}_s^{1,n}(\cos a)\mathrm{P}_s^{1,n}(\cos b)}{(n-s)!\,(n+s+1)!} \mathrm{P}^s(\cos \mathrm{C}). \tag{12}$$

4° Multiplions par $\beta^{-n}$ les deux membres de (6), puis faisons croître au delà de toute limite la valeur absolue de $\beta$; nous aurons pour $\nu = 0$, $x = \cos\varphi$, la formule classique (6) du paragraphe XLVI.

Considérons encore la fonction métasphérique générale

$$y = \mathrm{K}^{\nu+\frac{1}{2},\rho}\left(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right), \tag{13}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des quantités finies telles que le produit $\alpha\beta$ n'est pas égal à $\pm 1$, tandis que nous supposons encore

$$|1 \pm \alpha\beta| > \left|\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right|; \tag{14}$$

il saute aux yeux que ces conditions sont remplies si $\alpha$ et $\beta$ sont des quantités réelles et différentes telles que $\alpha^2 > 1$ et $\beta^2 > 1$.

Cela posé, il est possible de déterminer une ellipse $\mathrm{E}(a)$, telle que la fonction (13), considérée comme fonction de $x$, est analytique à l'intérieur de $\mathrm{E}(a)$, ce qui donnera une série neumanienne de la forme

$$(15)\qquad K^{\nu+\frac{1}{2},\rho}\left(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right) = \Gamma(\nu)\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^{\nu,\rho}(\alpha,\beta)P^{\nu,s}(x).$$

Les formules de ce genre sont étudiées par Gegenbauer [1].

## LIX. — Autres applications des séries neumaniennes.

Soit $n$ un positif entier; les formules étudiées dans le paragraphe XLVI donnent particulièrement cette autre

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1}\right)^n = n!\,\Gamma(\nu)(\alpha\beta)^n \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(\alpha^2-1)^{\frac{s}{2}}(\beta^2-1)^{\frac{s}{2}}}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+s)\,(2\alpha\beta)^s}, \\ \qquad F\left(\dfrac{s-n}{2}, \dfrac{s+1-n}{2}, \nu+s+1, \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\dfrac{\beta^2-1}{\beta^2}\right)P^{\nu,s}(x), \end{cases}$$

d'où, en posant $x = -\cos C$, $\alpha = \cos a$, $\beta = \cos b$, pour le triangle sphérique mentionné au paragraphe LVIII, 3°,

$$(2)\quad \begin{cases} (\cos c)^n = n!\,\Gamma(\nu)(\cos a\cos b)\displaystyle\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b)^s}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+s)2^s} \\ \qquad \times F\left(\dfrac{s-n}{2}, \dfrac{s+1-n}{2}, \nu+s+1, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right)P^{\nu,s}(\cos C). \end{cases}$$

Posons dans (2) $\nu = 0$, $\nu = 1$; nous aurons respectivement

$$(3)\quad \begin{cases} (\cos c)^n = (\cos a\cos b)^n \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n} \varepsilon_s \left(\frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}{2}\right)^s \binom{n}{s} \\ \qquad \times F\left(\dfrac{s-n}{2}, \dfrac{s+1-n}{2}, s+1, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right)\cos(sC), \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (\cos c)^n = (\cos a\cos b)^n \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \left(\frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}{2}\right)^s \\ \qquad \times F\left(\dfrac{s-n}{2}, \dfrac{s+1\,n}{2}, s+2, \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b\right)\dfrac{\sin(s+1)C}{\sin C}; \end{cases}$$

dans (3) il faut poser $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_p = 2$ pour $p \geqq 1$.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie impériale de Vienne*, t. C, 1891.

Combinons maintenant les deux formules (1) et (6) du paragraphe LVIII en introduisant dans la formule (15) du paragraphe XXXIII, savoir :

$$\omega^n = \frac{n!\Gamma(\nu)}{2^n} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\nu + n - 2s}{s!\Gamma(\nu + n - s + 1)} P^{\nu, n-2s}(\omega),$$

l'argument compliqué

$$\omega = \alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2 - 1}\sqrt{\beta^2 - 1},$$

puis développons, en vertu de (6) du paragraphe LVIII, toutes les fonctions $P^{\nu, n-2s}(\omega)$; nous aurons en égalant les coefficients de $P^{r,s}(x)$ qui figurent dans cette formule et dans (1), si nous posons encore $\nu - \frac{1}{2}$ au lieu de $\nu$, la formule curieuse

$$(5)\quad \begin{cases} (\alpha\beta)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \nu + \frac{1}{2}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}\,\frac{\beta^2 - 1}{\beta^2}\right) \\ \quad = \frac{n!\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu)}{2^n} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(\nu + n - 2s)(n-2s)!}{s!\Gamma(\nu + n - s)\Gamma(2\nu + n - s)} P^{\nu, n-2s}(\alpha) P^{\nu, n-2s}(\beta), \end{cases}$$

d'où, pour $\beta = \alpha = x$ un développement particulier en série de carrés des fonctions ultrasphériques.

Posons ensuite $\nu = 0$, $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \cos\psi$; nous aurons

$$(6)\quad \begin{cases} (2\cos\varphi\cos\psi)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{tang}^2\psi\right) \\ \quad = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \varepsilon_{n-2s} \binom{n}{s} \cos(n-2s)\varphi \cos(n-2s)\psi, \end{cases}$$

où il faut admettre comme ordinairement $\varepsilon_0 = 1$, mais $\varepsilon_p = 2$, $p \geq 1$. L'hypothèse $\nu = 1$ donnera de même

$$(7)\quad \begin{cases} (2\cos\varphi\cos\psi)^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{tang}^2\psi\right) \\ \quad = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{s!(n-s+1)!} \frac{\sin(n-2s+1)\varphi \sin(n-2s+1)\psi}{\sin\varphi \sin\psi}. \end{cases}$$

Inversement, déduisons à l'aide de (1) et de la définition de la fonction ultrasphérique la formule d'addition (6) du paragraphe LVIII; nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu)n!}{\Gamma(n+2\nu)} P^{\nu,n}(\alpha)P^{\nu,n}(\beta) \\ \quad = \displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\Gamma(\nu+n-s)(2\alpha\beta)^{n-2s}}{s!(n-2s)!} \\ \quad \times F\left(\dfrac{2s-n}{2}, \dfrac{2s+1-n}{2}, \nu+\dfrac{1}{2}, \dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\,\dfrac{\beta^2-1}{\beta^2}\right), \end{cases}$$

d'où pour $\beta=\alpha=x$ un développement curieux du carré d'une fonction ultrasphérique.

Posons encore dans (8) $\nu=0$, $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\cos\psi$; nous aurons

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{n}\cos(n\varphi)\cos(n\psi) \\ \quad = \displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(n-s-1)!}{s!\,(n-2s)!}(2\cos\varphi\cos\psi)^{n-2s} \\ \quad \times F\left(\dfrac{2s-n}{2}, \dfrac{2s+1-n}{2}, \dfrac{1}{2}, \tan^2\varphi\tan^2\psi\right), \end{cases}$$

tandis que les hypothèses $\nu=1$, $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\cos\psi$ donnent la formule analogue

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\psi}{\sin\varphi\sin\psi} \\ \quad = \displaystyle\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} (-1)^s\binom{n-s}{s}(2\cos\varphi\cos\psi)^{n-2s} \\ \quad \times F\left(\dfrac{2s-n}{2}, \dfrac{2s+1-n}{2}, \dfrac{3}{2}, \tan^2\varphi\tan^2\psi\right). \end{cases}$$

## LX. — Seconde formule d'addition.

L'équation aux dérivées partielles (3) du paragraphe LVII nous conduit naturellement à étudier un développement de la forme

$$(1)\qquad P^{\nu,n}[\alpha^2+(1-\alpha^2)x] = \sum_{s=0}^{s=n} A_s^{\nu,n}(\alpha)P^{\nu,n}(x),$$

où les coefficients $A_s$ désignent des polynomes entiers de $\alpha$; la formule (1) est valable pour des valeurs finies quelconques de $\alpha$ et de $x$.

Pour déterminer maintenant les polynomes inconnues $A_s^{\nu,n}(\alpha)$, différentions par rapport à $x$ la formule (1); nous aurons

$$(1-\alpha^2)P^{\nu+1,n-1}[\alpha^2+(1-\alpha^2)x] = \sum_{s=0}^{s=n-1} A_s^{\nu,n}(\alpha)P^{\nu+1,s}(x),$$

d'où, en posant dans (1) $\nu+1$ au lieu de $\nu$ et $n-1$ au lieu de $n$, la formule récursive

$$(2) \qquad A_s^{\nu,n}(\alpha) = (1-\alpha^2)A_{s-1}^{\nu+1,n-1}(\alpha) = (1-\alpha^2)^s A_0^{\nu+s,n-s}(\alpha),$$

de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à déterminer la seule fonction $A_0^{\nu,n}(\alpha)$.

A cet effet, appliquons l'équation aux dérivées partielles (3) du paragraphe LVII; nous aurons pour $A_s^{\nu,n}(\alpha) = A_s$ cette équation linéaire,

$$\alpha(1-\alpha^2)\frac{d^2A_s}{d\alpha^2} - [1+(4\nu+1)\alpha^2]\frac{dA_s}{d\alpha} + \left[4n(n+2\nu) - \frac{4s(s+2\nu)}{1-x^2}\right]\alpha A_s = 0,$$

d'où, en vertu du paragraphe LVII, (7),

$$(3) \quad A_s^{\nu,n}(\alpha) = a_s^{\nu,n}(1-\alpha)^s F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ 1-\alpha^2),$$

où $a_s^{n,\nu}$ est indépendant de $\alpha$.

Cela posé, mettons dans (1) $\alpha = 1$; nous aurons immédiatement

$$A_0^{\nu,n}(1) = P^{\nu,n}(1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} = a_0^{\nu,n},$$

d'où finalement la formule cherchée [1]

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &P^{\nu,n}[\alpha^2+(1-\alpha^2)x] \\ &\quad = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(n+s+2\nu)(1-\alpha^2)^s}{(n-s)!\,\Gamma(2s+2\nu)} \\ &\quad \times F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ 1-\alpha^2)P^{\nu,s}(x). \end{aligned} \right.$$

Posons dans (4) $x = 1$, $\beta = 1-\alpha^2$; il en résulte

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(n+s+2\nu)\Gamma(s+2\nu)}{s!\,(n-s)!\,\Gamma(2s+2\nu)}\beta^s \\ &\quad \times F(s-n,\ n+s+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ \beta), \end{aligned} \right.$$

---

[1] *Voir* mon Mémoire inséré dans les *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXV.

tandis que l'hypothèse $x=0$ donnera, si nous posons ensuite $\alpha^2 = 1 - x$,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}^{\nu,n}(1-x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} & \frac{(-1)^s \Gamma(n+2s+2\nu)\Gamma(s+\nu)}{s!(n-s)\Gamma(\nu)\Gamma(4s+2\nu)}\, x^{2s} \\ & \times \mathrm{F}(2s-n,\ 2s+n+2\nu,\ 2\nu+4s+1,\ x). \end{aligned} \right.$$

Étudions maintenant le triangle sphérique isoscèle ayant les côtés $c$, $a$, $a$ et les angles opposés C, A, A; nous aurons

$$(7)\qquad \cos c = \cos^2 a + \cos^2 a \cos \mathrm{C},$$

d'où, en vertu de (4) en y posant $\alpha = \cos a$, $x = \cos \mathrm{C}$,

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}^{\nu,n}(\cos c) = \sum_{s=0}^{s=n} & \frac{\Gamma(n+s+2\nu)}{(n-s)!\,\Gamma(2s+2\nu)} (\sin a)^{2s} \\ & \times \mathrm{F}(s-n,\ s+n+2\nu,\ 2\nu+2s+1,\ \sin^2 a)\,\mathrm{P}^{\nu,s}(\cos \mathrm{C}), \end{aligned} \right.$$

ce qui donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}^{n}(\cos c) = \sum_{s=0}^{s=n} & \binom{n+s}{2s} (\sin a)^{2s} \\ & \times \mathrm{F}(s-n,\ s+n+1,\ 2s+2,\ \sin^2 a)\,\mathrm{P}^{s}(\cos \mathrm{C}), \end{aligned} \right.$$

tandis que les hypothèses $\nu = 0$, $\nu = 1$ donnent respectivement

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos(nc)}{n} = \sum_{s=0}^{s=n} & \frac{\varepsilon_s (n+s-1)!}{(n-s)!\,(2s)!} (\sin a)^{2s} \\ & \times \mathrm{F}(s-n,\ s+n+1,\ 2s+1,\ \sin^2 a) \cos(s\mathrm{C}), \end{aligned} \right.$$

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin(n+1)c}{\sin c} = \sum_{s=0}^{s=n} & \binom{n+s+1}{2s+1} (\sin a)^{2s} \\ & \times \mathrm{F}(s-n,\ s+n+2,\ 2s+3,\ \sin^2 a)\, \frac{\sin(s+1)\mathrm{C}}{\sin \mathrm{C}}; \end{aligned} \right.$$

la formule (10), où il faut admettre comme ordinairement $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement $\varepsilon_p = 2$, $p \geqq 1$, est due à Stieltjes [1].

---

[1] *Journal de Math.*, 4e série, t. V, 1889, p. 55-65.

Quant à la fonction métasphérique générale, où $\alpha$ n'est égal ni à $+1$, ni à $-1$,

$$K^{\nu,\rho}[\alpha^2 + x(1-\alpha^2)], \tag{12}$$

elle a toujours dans $x = 1$ un point singulier, de sorte que la série de fonctions $P^{\nu,s}(x)$ correspondante ne devienne aucune série neumanienne. En effet, la série en question n'est convergente que dans la partie de l'axe des nombres réels qui est située entre $+1$ et $-1$, pourvu que la série susdite soit convergente.

# QUATRIÈME PARTIE.

## INTÉGRALES DÉFINIES.

# CHAPITRE XV.

## GÉNÉRALISATIONS DES INTÉGRALES CLASSIQUES.

### LXI. — Intégrales de Laplace et Jacobi et formules analogues.

Supposons $|x| < 1$ ; une méthode analogue à celle appliquée dans le paragraphe XII donnera la formule intégrale

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{(1-t)^\rho t^{\rho+2\nu-1}}{(1-t^2x^2)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}}}\,dt = \mathrm{A}\,\mathrm{F}\left(\frac{\rho+2\nu}{2}, \frac{\rho+2\nu+1}{2}, \nu+\rho+1, x^2\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(2)\qquad \mathrm{A} = \frac{\Gamma(\rho+1)\Gamma(\rho+2\nu)\sqrt{\pi}}{2^{2\rho+2\nu}\Gamma(\nu+\rho+1)\Gamma\left(\nu+\rho+\frac{1}{2}\right)},$$

tandis qu'il faut admettre

$$(3)\qquad \Re(\rho) > -1, \qquad \Re(\rho+2\nu) > 0.$$

Mettons ensuite, dans (1), $1 : x$ au lieu de $x$ et $1 : t$ au lieu de $t$; il en résulte pour la fonction métasphérique générale cette représentation intégrale

$$(4)\qquad \mathrm{Q}^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\rho+\frac{1}{2}\right)x^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+1)2^{1-\rho-2\nu}} \int_1^\infty \frac{(t-1)^\rho}{(t^2x^2-1)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}}}\,dt,$$

valable sous les conditions (2) et pourvu que $|x| > 1$.

Or, il saute aux yeux que la formule (4) nous donne le prolongement analytique, dans toutes les parties du plan des $x$, où l'intégrale qui y figure représente une fonction analytique de l'argument $x$, d'où le théorème suivant :

I. *Supposons remplies les conditions* (3); *l'intégrale* (4) *nous définit la fonction* Q *pour tous les* $x$ *situés à l'extérieur d'une ellipse* $\mathrm{E}(\hat{\delta})$ *quelconque et tels que* $|x| \leqq \mathrm{G}$.

Supposons $x$ réel et $-1 < x < +1$; l'intégrale (4) a un sens, pourvu que nous ayons en outre

$$\mathfrak{R}(\rho + \nu) < \frac{1}{2},$$

tandis que les hypothèses $x = \pm 1$ exigent la condition

$$\mathfrak{R}(\nu) < \frac{1}{2}.$$

Le cas particulier $\rho = 0$ donnera, si nous posons dans (4) $tx = z$,

$$\mathrm{Q}^{\nu,0}(x) = 2^{2\nu-1}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\int_x^{\infty} \frac{dz}{(z^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}, \qquad \mathfrak{R}(\nu) > 0, \tag{5}$$

où le chemin d'intégration ne doit ni passer, ni entourer aucun des points $x = \pm 1$.

Une autre formule intégrale analogue à (4) peut être obtenue à l'aide des formules

$$\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^{2n+1}(\sin\varphi)^{2b-1}\, dy = 0,$$

$$\int_0^{\pi} (\cos\varphi)^{2n}(\sin\varphi)^{2b-1}\, d\varphi = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(b)}{\Gamma\left(b + n + \frac{1}{2}\right)},$$

où $n$ désigne un entier non négatif, tandis qu'il faut admettre positive la partie réelle de $b$.

En effet, supposons $|x| < 1$; nous aurons immédiatement de cette manière

$$\int_0^{\pi} (1 + x\cos\varphi)^a(\sin\varphi)^{2b-1}\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(b)}{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}\, \mathrm{F}\left(\frac{1-a}{2}, \frac{-a}{2}, b + \frac{1}{2}, x^2\right), \tag{6}$$

d'où, en posant ensuite $1 : x$ au lieu de $x$, la formule intégrale élégante

$$(7)\qquad \int_0^\pi \frac{(\sin\varphi)^{2\rho+2\nu}}{(x^2+x\cos\varphi)^{\nu+\frac{\rho}{2}}}\,d\varphi = \frac{2^{\rho+1}\Gamma\left(\nu+\rho+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\rho+2\nu)}\,Q^{\nu,\rho}(x),$$

où il faut admettre par conséquent $|x| > 1$ et

$$(8)\qquad \Re(\rho+\nu) > -\frac{1}{2};$$

c'est-à-dire que nous avons démontré le théorème suivant :

II. *Supposons remplie la condition* (8); *la formule* (7) *nous définit la fonction* $Q^{\nu,\rho}(x)$ *pour tous les $x$ situés à l'extérieur d'une ellipse* $E(\delta)$ *quelconque et tels que* $|x| \leqq G$.

Supposons $x$ réel et $-1 < x < +1$; l'intégrale (7) a un sens, pourvu que nous ayons en outre

$$\Re\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right) < 1,$$

tandis que les hypothèses $x = \pm 1$ exigent la condition ultérieure

$$\Re(\rho) > -1.$$

La formule (6) nous permet de représenter comme intégrale définie la fonction $A^{\nu,\rho}(x)$ de Gegenbauer définie dans le paragraphe XXIX, savoir

$$A^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,x^\rho}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{1}{2}, \frac{x^2-1}{x^2}\right);$$

nous aurons immédiatement

$$(9)\qquad A^{\nu,\rho}(x) = \int_0^\pi \left(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right)^\rho (\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi,$$

où il faut admettre $\Re(\nu) > 0$; la formule (9) est valable dans le domaine $A_1$ défini dans le paragraphe XXVIII. Quant à l'intégrale en question, elle représente, dans les autres domaines définis dans le paragraphe XXVIII, des fonctions différentes.

L'identité

$$A^{\nu,\rho}(x) = A^{\nu,-\rho-2\nu}(x),$$

démontrée dans le paragraphe XXIX, donnera, en vertu de (9), cette identité intégrale

$$(10)\quad \int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^\rho(\sin\varphi)^{2\nu-1}\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{(\sin\varphi)^{2\nu-1}}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{\rho+2\nu}}\,d\varphi.$$

Supposons $\rho = n$, $n$ étant un entier non négatif; nous aurons

$$(11)\qquad A^{\nu,\rho}(x) = \frac{(\Gamma(\nu))^2 n!\, 2^{2\nu-1}}{\Gamma(n+2\nu)}\, P^{\nu,n}(x),$$

d'où, en vertu de (10), deux expressions intégrales pour la fonction ultrasphérique, dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient respectivement à Laplace ([1]) et à Jacobi ([2]).

## XII. — L'intégrale de Heine.

La formule paragraphe XXIV, (6),

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\xi^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\Gamma(\nu+\rho+1)} f(\rho+2\nu, \nu, \rho+\nu+1, \xi^2),$$

où il faut admettre

$$\xi = x \pm \sqrt{x^2-1}, \qquad |\xi| < 1,$$

donnera immédiatement, en vertu du paragraphe XII,

$$(1)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\xi^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 \frac{u^{\nu-1}(1-u)^\rho}{(1-\xi^2 u)^{\rho+2\nu}}\,du,$$

où il faut supposer

$$\mathfrak{R}(\nu) > 0, \quad \mathfrak{R}(\rho) > -1.$$

Le cas particulier $\xi = \pm 1$, qui correspond à $x = \pm 1$, exige encore les conditions

$$\mathfrak{R}(\nu) < \frac{1}{2}.$$

Posons maintenant dans (1)

$$u = \frac{v-1}{v+1}, \qquad v = \frac{1+u}{1-u}, \qquad 1-u = \frac{2}{v+1}, \qquad \frac{du}{dv} = \frac{2}{(v+1)^2};$$

---

([1]) *Mécanique céleste*, t. V, Livre II, Chap. II.

([2]) *Journal de Crelle*, t. XXVI, 1843, p. 81; *OEuvres*, t. VI, p. 148.

il en résulte

$$(2)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)(2\xi)^{\rho+2\nu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} \int_1^\infty \frac{(v^2-1)^{\nu-1}}{[v+1-\xi^2(v-1)]^{\rho+2\nu}}\,dv,$$

ce qui nous conduira à poser

$$v = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \operatorname{ch} u,$$

d'où

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{sh} u.$$

Cela posé, nous aurons immédiatement, en vertu de (2),

$$(3)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} \int_0^\infty \frac{(\operatorname{sh} u)^{2\nu-1}\,du}{(x+\operatorname{ch} u\sqrt{x^2-1})^{\rho+2\nu}};$$

il saute aux yeux que, dans le cas où $x$ est supposé réel et $|x| > 1$, $x$ et $\sqrt{x^2-1}$ doivent être de signes opposés.

Posons dans (3) $\nu = \frac{1}{2}$; il en résulte la formule élégante

$$(4)\qquad Q^{\frac{1}{2},\rho}(x) = \int_0^\infty \frac{du}{(x+\operatorname{ch} u\sqrt{x^2-1})^{\rho+1}},$$

dont le cas particulier $\rho+1$ égal à un positif entier appartient à Heine [1], tandis que Gegenbauer [2] a indiqué la généralisation immédiate (3).

## LXIII. — Les intégrales de Dirichlet.

Dans le paragraphe XXXII, nous avons démontré que la série infinie

$$(1)\qquad \frac{e^{-\nu\varphi i}}{2^\nu(\cos\varphi-\cos\theta)^\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P^{\nu,n}(\cos\theta)e^{n\varphi i},$$

où $\varphi$ et $\theta$ désignent des angles réels, est uniformément convergente et par rapport à $\theta$ et par rapport à $\varphi$, pourvu que $\Re(\nu) < -1$.

---

(1) *Handbuch*, t. I, p. 132; Berlin, 1878.

(2) *Comptes rendus de l'Académie impériale de Vienne*, t. C, 1891.

Supposons maintenant tout d'abord $\nu$ réel et $\nu < -1$, puis mettons

$$\frac{e^{-\nu\varphi i}}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} = \mathrm{R}_\nu(\varphi) + i\mathrm{J}_\nu(\varphi), \tag{2}$$

où $\mathrm{R}_\nu(\varphi)$ et $\mathrm{I}_\nu(\varphi)$ sont des fonctions réelles de la variable réelle $\varphi$, puis supposons $0 < \theta < \pi$; nous aurons évidemment pour $0 \leqq \varphi \leqq \theta$ :

$$\mathrm{R}_\nu(\varphi) = \frac{\cos\nu\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu}, \qquad \mathrm{J}_\nu(\varphi) = -\frac{\sin\nu\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu}. \tag{3}$$

Dans l'intervalle $\theta \leqq \varphi \leqq \pi$ nous aurons au contraire des expressions de la forme

$$\mathrm{R}_\nu(\varphi) = \frac{\cos\nu[\varphi + (2p+1)\pi]}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu}, \qquad \mathrm{J}_\nu(\varphi) = -\frac{\sin\nu[\varphi + (2p+1)\pi]}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu}, \tag{4}$$

où $p$ désigne un nombre entier. Or la formule (1) donnera

$$\mathrm{J}_\nu(\pi) = 0,$$

de sorte qu'il faut admettre, dans (4), $p = -1$, ce qui donnera pour $\theta \leqq \varphi \leqq \pi$ :

$$\mathrm{R}_\nu(\varphi) = \frac{\cos\nu(\varphi - \pi)}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu}, \qquad \mathrm{J}_\nu(\varphi) = -\frac{\sin\nu(\varphi - \pi)}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu}. \tag{5}$$

Cela posé, remarquons que les identités (1) et (2) donnent les développements suivants :

$$\mathrm{R}_\nu(\varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta)\cos n\varphi, \qquad \mathrm{J}_\nu(\varphi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta)\sin n\varphi,$$

séries qui sont uniformément convergentes toutes les deux; nous aurons pour $n \geqq 1$

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{P}^{\nu,n}(\cos\theta) = \int_0^\pi \mathrm{R}_\nu(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \mathrm{J}_\nu(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi, \tag{6}$$

et pour $n = 0$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \mathrm{R}_\nu(\varphi)\, d\varphi. \tag{7}$$

Introduisons maintenant dans (6) les expressions (3) et (5), puis remarquons que les intégrales définies qui figurent dans (6) sont des fonctions analytiques de $\nu$, pourvu que $\mathfrak{R}(\nu) < 1$ et $|\nu| \leq G$, nous aurons la proposition suivante :

I. *Supposons* $\mathfrak{R}(\nu) \leq 1 - \delta$ et $|\nu| \leq G$; *nous aurons les représentations intégrales, où* $0 < \theta < \pi$,

$$(8) \quad \frac{\pi}{2} P^{\nu,n}(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos\nu\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} + \int_\theta^\pi \frac{\cos\nu(\varphi - \pi)\cos n\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu},$$

$$(9) \quad -\frac{\pi}{2} P^{\nu,n}(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin\nu\varphi \sin n\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} + \int_\theta^\pi \frac{\sin\nu(\varphi - \pi)\sin n\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu},$$

*et où $n$ désigne un positif entier.*

Supposons particulièrement $\nu = \frac{1}{2}$; les formules ainsi obtenues appartiennent à Dirichlet ([1]).

Ajoutons, puis soustrayons les deux formules (8) et (9); nous aurons respectivement

$$(10) \quad 0 = \int_0^\theta \frac{\cos(\nu - n)\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} + \int_\theta^\pi \frac{\cos(\nu\varphi - \nu\pi - n)\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu};$$

$$(11) \quad \pi P^{\nu,n}(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos(\nu + n)\varphi \, d\varphi}{2^\nu(\cos\varphi - \cos\theta)^\nu} + \int_\theta^\pi \frac{\cos(\nu\varphi - \nu\pi + n\varphi)\, d\varphi}{2^\nu(\cos\theta - \cos\varphi)^\nu};$$

mettons ensuite dans (10) $n + 1$ au lieu de $n$, puis posons $\nu = \frac{1}{2}$; nous aurons en ajoutant, puis en soustrayant les deux formules ainsi obtenues de (10) et (11),

$$(12) \quad \frac{\pi}{2} P^n(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} = \int_\theta^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

c'est-à-dire les formules de Mehler ([2]).

---

([1]) *Journal de Crelle*, t. XVII, 1837, p. 41; *Werke*, t. I, p. 291; HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, t. I, 1878, p. 84.

([2]) *Mathematische Annalen*, t. V, 1872, p. 141; HEINE, *Handbuch*, t. I, p. 44.

# CHAPITRE XVI.

## APPLICATIONS DES SÉRIES DE CHARLES NEUMANN.

### LIV. — Expressions intégrales des coefficients.

La seule expression générale des coefficients d'une série neumanienne, donnée dans le paragraphe XLIV, savoir l'intégrale curviligne (4), est assez compliquée pour les applications. Le théorème suivant donne des expressions beaucoup plus simples :

I. *Soit la série des fonctions ultrasphériques*

$$f(x) = \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{n=\infty} (\nu + n) A_n P^{\nu,n}(x), \tag{1}$$

*uniformément convergente dans l'intervalle* $-1 \leq x \leq +1$, *soit encore* $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$; *le coefficient général de* (1) *se détermine comme suit :*

$$A_n = \frac{n!\, 2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu,n}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx. \tag{2}$$

En effet, multiplions par

$$P^{\nu,n}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$$

les deux membres de (1); la série ainsi obtenue peut être intégrée terme à terme, par rapport à $x$ de $x = -1$ à $x = +1$, et la formule intégrale (9) du paragraphe XXXIII nous conduira au but : appliquons ensuite la formule (6) du même paragraphe; nous aurons particulièrement :

II. *Soit la série* (1) *une série neumanienne; le coefficient général* $A_n$

*se détermine à l'aide de l'intégrale*

$$(3)\qquad A_n = \frac{2^{2\nu+n-1}\Gamma(\nu+n)}{\pi\Gamma(2\nu+2n)}\int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Pour donner une autre application de la formule intégrale (9) du paragraphe XXXIII, revenons à la fonction

$$\Phi^{\nu,n}(x,y) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2\nu+2s)s!}{\Gamma(2\nu+n)} P^{\nu,s}(x)P^{\nu,s}(y),$$

étudiée dans le paragraphe XXXVII et pour laquelle nous avons donné l'expression

$$\Phi^{\nu,n}(x,y) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+2\nu)}\,\frac{P^{\nu,n+1}(x)P^{\nu,n}(y) - P^{\nu,n}(x)P^{\nu,n+1}}{x-y};$$

nous aurons le théorème suivant :

II. *Soit la série* (1) *uniformément convergente dans l'intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$; *la somme de ses* $n+1$ *premiers termes se présente sous forme d'une intégrale définie, comme suit :*

$$(4)\qquad \sum_{s=0}^{s=n}(\nu+s)A_s P^{\nu,s}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu)}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(y)\Phi^{\nu,n}(x,y)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dy,$$

*où il faut admettre naturellement* $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Désignons par $f(x)$ un polynome entier du degré $n$ par rapport à $x$; la formule (4) donnera particulièrement

$$(5)\qquad f(x) = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma^2(\nu)}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(y)\Phi^{\nu,n}(x,y)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ des formules (4) et (5) qui se présente sous forme très élégante est dû à Legendre, mais étudié aussi par G. Bauer [1] et Christoffel [2].

Pour donner une application intéressante du théorème I, considé-

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie royale de Munich*, 1875.

[2] *Journal de Crelle*, t. LV, 1858, p. 61-82.

rons la série neumanienne

$$(6) \qquad f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu + s) A^{\nu,s}(\alpha) P^{\nu,s}(x);$$

nous aurons

$$(7) \qquad A^{\nu,n}(\alpha) = \frac{2^{2\nu-1} n! \Gamma(\nu)}{\pi \Gamma(n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} f(\alpha x) P^{\nu,n}(x) (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx.$$

Posons ensuite

$$f(\alpha\beta x) = \Gamma(\rho) \sum_{s=0}^{s=\infty} (\rho + s) A^{\rho,s}(\alpha) P^{\rho,s}(\beta x),$$

puis remarquons que le développement (1) du paragraphe XLV pour la fonction $P^{\rho,n}(\alpha x)$ donnera, en vertu de (7), cette formule intégrale

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Gamma(\rho + n - s) x^{n-2s}}{(n-s)! \Gamma(\nu + n - 2s)} F(\rho + n - s, -s, \nu + 2n - 2s + 1, x^2) \\ & \quad = \frac{(n-2s)! \Gamma(\nu) \Gamma(\rho)}{2^{1-2\nu} \pi \Gamma(n+2\nu)} \int_{-1}^{+1} P^{\rho,n}(tx) P^{\nu,n-2s}(x) (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt; \end{aligned} \right.$$

nous aurons la proposition suivante :

IV. *Les coefficients de la série neumanienne* (6) *admettent le développement*

$$(9) \quad A^{\rho,n}(\alpha\beta) = \frac{\beta^n}{\Gamma(\rho + n + 1)} \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\rho + n + 2s) B_n(\beta^2) A^{\nu,n+2s}(\alpha),$$

*où nous avons posé pour abréger*

$$(10) \qquad B_n(\beta) = \frac{\Gamma(\nu + n + s)}{s!} F(\nu + n + s, -s, \rho + n + 1, \beta);$$

*la formule* (9) *est valable quelle que soit la fonction analytique* $f(x)$.

## LXV. — Applications aux séries particulières.

Il saute aux yeux que les formules intégrales (2) et (3) du paragraphe précédent nous permettent de déduire d'une série neumanienne, dont les coefficients sont connus, deux intégrales définies correspondantes. Nous avons ici à mentionner quelques intégrales de ce genre :

1° La formule (4) du paragraphe XXXII donnera pour $\mathfrak{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$ :

$$(1) \qquad x^n = \frac{2^{2\nu-1}(\nu+n)[\Gamma(\nu)]^2 n!}{\pi\Gamma(n+2\nu)} \int_0^\pi \frac{P^{\nu,n}(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}}{(1-2x\cos\varphi+x^2)^\nu}\, d\varphi;$$

2° Le développement de $e^{i\alpha x}$ donné dans le paragraphe XLIV nous conduira de même à la formule

$$(2) \qquad i^n J^{\nu+n}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)n!}{\pi\Gamma(n+2\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} P^{\nu,n}(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi,$$

d'où pour $n = 0$, après une légère modification,

$$(3) \qquad J^\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi,$$

qui est, pour $\nu$ égal à un entier non négatif, précisément la formule célèbre de Bessel (¹);

3° Appliquons la formule (5) du paragraphe LXVI qui joue un rôle fondamental dans les séries de François Neumann; nous aurons de même pour la fonction métasphérique générale la représentation intégrale suivante :

$$(4) \qquad Q^{\nu,\rho+n}(x) = \frac{n!\,\Gamma(\rho+\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu+n)} \int_{-1}^{+1} \frac{P^{\nu+\rho,n}(y)(1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(x-y)^{\rho+2\nu}}\, dy,$$

d'où pour $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = 0$ la formule intégrale de F. Neumann (²);

4° Le développement particulier (7) du paragraphe LXVI donnera la formule de Laplace

$$(5) \qquad P^{\nu-\frac{1}{2},n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\nu+1)\Gamma^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}\right)^n(\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi,$$

déduite d'un autre point de vue dans le paragraphe LXI.

---

(¹) *Mémoires de l'Académie royale de Berlin*, 1824, p. 36.

(²) *Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen*. Leipzig, 1898.

Écrivons maintenant sous la forme suivante

$$(6)\quad \frac{t^n P^{\nu+\frac{1}{2},n}(x)}{\Gamma(2\nu+n+1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma^2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi \frac{(tx+t\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n}{n!}(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi$$

la formule (5), puis mettons dans (6) successivement

$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots;$$

une addition de toutes les formules ainsi obtenues donnera, en vertu de (2) pour $n = 0$, ce développement en série neumanienne :

$$(7)\qquad \frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu}}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{t^s P^{\nu+\frac{1}{2},s}(x)}{\Gamma(2\nu+s+1)} = e^{-tx}\left(\frac{2}{t\sqrt{1-x^2}}\right)^\nu J^\nu(t\sqrt{1-x^2}),$$

dont le cas particulier $\nu = 0$, $t = 1$ est dû à Catalan ([1]); posons encore dans cette formule particulière $x = \cos\varphi$; nous aurons le développement intéressant

$$(8)\qquad \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{P^s(\cos\varphi)}{s!} = e^{-\cos\varphi}J^0(\sin\varphi).$$

Remarquons encore que la formule (7) donnera cette représentation intégrale

$$(9)\quad \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi e^{-x\cos\varphi}J^\nu(x\sin\varphi)P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\cos\varphi)\,d\varphi = \frac{x^{\nu+n}}{2^{2\nu}n!\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}.$$

## LXVI. — Applications des formules d'addition.

Nous avons encore à appliquer sur les deux formules d'addition développées dans le Chapitre XIV les formules intégrales du paragraphe LXIV, ce qui nous donne des résultats assez intéressants.

En premier lieu, appliquons la formule générale : nous aurons immé-

---

([1]) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XLIV, 1881, p. 14.

diatement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} P^{\nu+\frac{1}{2},n}\left(xy+t\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\\ &\quad=\frac{2^{2\nu+2n+1}\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(2\nu+n+1)}P^{\nu+\frac{1}{2},n}(x)P^{\nu+\frac{1}{2},n}(y),\end{aligned}\right.$$

car on voit immédiatement que le signe de $t$ dans la fonction ultrasphérique qui figure sous le signe d'intégration au premier membre peut être choisi arbitrairement. Le cas particulier $\nu=0$ de (1) a été étudié par Legendre et G. Bauer (1).

Posons dans (1) $y=x$; il en résulte

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} P^{\nu-\frac{1}{2},n}[x^2+t(1-x^2)](1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\\ &\quad=\frac{2^{2\nu+2n+1}\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(2\nu+n+1)}\left[P^{\nu+\frac{1}{2},n}(x)\right]^2.\end{aligned}\right.$$

En second lieu, la dernière formule d'addition donnera la formule suivante

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} P^{\nu,n}[x^2+t(1-x^2)](1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\\ &\quad=\frac{\Gamma(n+2\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{n!\,\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu+1)}F(n+2\nu,\,-n,\,2\nu+1,\,1-x^2),\end{aligned}\right.$$

qui est très remarquable en comparaison avec la précédente.

Cela posé, prenons pour point de départ la formule (1) du paragraphe XLV :

$$(4)\quad P^{\rho,n}(x)=\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)}\sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s(\nu+n-2s)\Gamma(\rho+n-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)}\binom{\nu-\rho}{s}P^{\nu,n-2s}(x);$$

les deux formules (2) et (3) nous permettent de déduire deux développements invers.

En effet, mettons dans (4) $\rho=\nu$ et $\nu+\frac{1}{2}$ au lieu de $\nu$, puis intro-

(1) *Comptes rendus de l'Académie royale de Munich*, 1875.

duisons dans la formule ainsi obtenue

$$x^2 + t(1 - x^2)$$

au lieu de $x$; les formules intégrales susdites donnent, si nous posons encore $\nu - \frac{1}{2}$ au lieu de $\nu$ :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Gamma(n+2\nu-1)\sqrt{\pi}}{n!\,\Gamma(2\nu)} F(n+2\nu-1, -n, 2\nu, 1-x^2) \\ &\quad = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s A_s [P^{\nu, n-2s}(x)]^2, \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé pour abréger

$$(6)\quad A_s = \frac{(\nu+n-2s)\Gamma\left(\nu+n-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma^2(\nu+n-2s)\,2^{2\nu+2n-4s-1}}{(n-2s)!\,\Gamma(\nu+n-s+1)\Gamma(2\nu+n-2s)} \binom{\frac{1}{2}}{s}.$$

En second lieu, mettons dans (4) $\rho = \nu + \frac{1}{2}$; le même procédé donnera

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2^{2\nu+2n}\Gamma^2\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma(2\nu+n+1)} \left(P^{\nu-\frac{1}{2}, n}(x)\right)^2 \\ &\quad = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2\nu+1)} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s A_s F(-n+2s, n-2s+2\nu, 2\nu+1, 1-x^2), \end{aligned} \right.$$

où nous avons posé généralement

$$(8)\quad A_s = \frac{(\nu+n-2s)\Gamma\left(\nu+n-s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu+n-2s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)(n-2s)!} \binom{-\frac{1}{2}}{s}.$$

# CHAPITRE XVII.

## APPLICATIONS D'UNE INTÉGRALE DE M. DE SONINE.

### LXVII. — Les fonctions métasphériques.

Supposons

$$(1)\qquad y > x > 0,\quad \Re(\alpha+\beta+\gamma) > -1,\quad \Re(\gamma) < 1;$$

M. N. de Sonine (¹) a donné la formule intégrale

$$(2)\qquad \int_0^\infty J^\alpha(ty)J^\beta(tx)t^\gamma\,dt = \frac{2^\gamma x^\beta}{\pi y^{\beta+\gamma+1}}\cos\frac{\pi}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\Omega,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(3)\qquad \begin{cases} \Omega = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\beta+\gamma+\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta+\gamma-\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta+1)} \\ \qquad\times F\left(\dfrac{\beta+\gamma+\alpha+1}{2}, \dfrac{\beta+\gamma-\alpha+1}{2}, \beta+1, \dfrac{x^2}{y^2}\right). \end{cases}$$

Il saute aux yeux que la formule (2) est directement applicable pour la représentation intégrale des fonctions métasphériques.

Étudions d'abord les deux fonctions $M^{\nu,\rho}(x)$ et $N^{\nu,\rho}(x)$, puis posons comme dans le paragraphe XVII

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),\qquad y_2 = xF\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right);$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XVI, 1880, p. 51. *Voir* aussi mon *Handbuch der Zylinderfunktionen*, p. 191. Leipzig, 1904.

nous aurons immédiatement, en vertu de (2),

$$\int_0^\infty J^{\nu+\rho}(x)\cos(tx)t^{\nu-1}dt = \frac{2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}y_1, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty J^{\nu+\rho}(x)\sin(tx)t^{\nu-1}dt = \frac{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}y_2, \tag{5}$$

car la définition des fonctions cylindriques donnera immédiatement

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{6}$$

Exprimons ensuite, à l'aide de $y_1$ et $y_2$, les fonctions M et N; nous aurons finalement

$$\int_0^\infty J^{\nu+\rho}(x)\cos\left(tx-\frac{\rho\pi}{2}\right)t^{\nu-1}dt = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)M^{\nu,\rho}(x), \tag{7}$$

$$\int_0^\infty J^{\nu+\rho}(x)\sin\left(tx-\frac{\rho\pi}{2}\right)t^{\nu-1}dt = \frac{N^{\nu,\rho}(x)}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}}; \tag{8}$$

dans ces formules il faut supposer

$$1 > x > 0, \qquad \Re(\rho+2\nu) > 0, \qquad \Re(\nu) < \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Appliquons maintenant la définition de $Q^{\nu,\rho}(x)$; la formule (2) donnera, en vertu de (6),

$$\int_0 J^{\nu+\rho}(t)e^{-tx}t^{\nu-1}dt = \frac{2^{1-\nu}e^{\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\pi i}}{\sqrt{\pi}}Q^{\nu,\rho}(ix), \tag{10}$$

formule qui est due à Hankel et valable, pourvu que

$$\Re(x) > 0, \qquad \Re(\rho+2\nu) > 0, \tag{11}$$

ou

$$\Re(x) = 0, \qquad \Re(\rho+2\nu) > 0, \qquad \Re(\nu) < \frac{3}{2}. \tag{12}$$

Supposons maintenant $x$ positif, puis posons dans (10) $-ix$ au lieu de $x$; nous aurons, en vertu de (7) et (8),

$$(13)\qquad \frac{2^{2-2\nu}e^{\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)\pi i}}{\sqrt{\pi}}\,Q^{\nu,\rho}(x)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}y_1+i\,\frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}y_2,$$

c'est-à-dire le prolongement analytique de $Q^{\nu,\rho}(x)$.

## LXVIII. — Les fonctions ultrasphériques.

Prenons pour point de départ les formules

$$P^{\nu,n}(\cos\theta)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-\frac{n}{2},\nu+\frac{n}{2},\nu+\frac{1}{2},\sin^2\theta\right),\qquad n \text{ paire},$$

$$P^{\nu,n}(\cos\theta)=\frac{\Gamma(n+2\nu)\cos\theta}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(\frac{1-n}{2},\nu+\frac{1+n}{2},\nu+\frac{1}{2},\sin^2\theta\right),\qquad n \text{ impaire},$$

$$P^{\nu,n}(\cos\theta)=\frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}F\left(-n,n+2\nu,\nu+\frac{1}{2},\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$

développées dans le paragraphe XXXIV; la formule de M. de Sonine donne immédiatement ces autres

$$(1)\qquad \int_0^\infty J^{\nu+n}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t\sin\theta)\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{n+1}{2}\right)}P^{\nu,n}(\cos\theta),$$

$$(2)\qquad \int_0^\infty J^{\nu+n}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t\sin\theta)\sqrt{t}\,dt=\frac{\sqrt{2}\,\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\cos\theta}P^{\nu,n}(\cos\theta),$$

$$(3)\qquad \int_0^\infty J^{2\nu+2n}(t)J^{\nu-\frac{1}{2}}(t\sin\theta)t^{\nu-\frac{1}{2}}dt=\frac{2^{3\nu-\frac{3}{2}}\Gamma(\nu)(\sin\theta)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}P^{\nu,n}(\cos\theta),$$

où il faut admettre respectivement

$$(4)\qquad \Re(\nu+n)>0,\qquad \Re(\nu+n)>-1,\qquad \Re(n+2\nu)>0\quad \text{et}\quad \Re(\nu)<\frac{3}{2}.$$

Le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$, dans lequel les formules se présentent sous formes très élégantes, est dû à M. Schafheitlin [1].

Posons encore $\nu = 0$; nous aurons, en vertu de (1) et (2),

$$\int_0^\infty J^n(t)\cos(t\sin\theta)\frac{dt}{t} = \frac{\cos n\theta}{n}, \qquad n \geqq 1, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty J^n(t)\cos(t\sin\theta)\,dt = \frac{\cos n\theta}{\cos\theta}, \tag{5}$$

tandis que l'hypothèse $\nu = 1$ donnera de même les formules analogues

$$\int_0^\infty J^n(t)\sin(t\sin\theta)\frac{dt}{t} = \frac{\sin n\theta}{n}, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty J^n(t)\sin(t\sin\theta)\,dt = \frac{\sin n\theta}{n}. \tag{7}$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XXX, 1887.

# TABLE DES MATIÈRES.


Pages.

Préface ........ v

## PREMIÈRE PARTIE.

### Applications de la fonction gamma.

#### CHAPITRE I.

QUELQUES LEMMES FONDAMENTAUX.

I. Définitions fondamentales ........ 1
II. Lemme sur la fonction exponentielle et le logarithme ........ 4
III. Les courbes simples ........ 7
IV. Quelques courbes simples algébriques ........ 10

#### CHAPITRE II.

LA FONCTION GAMMA.

V. La constante d'Euler ........ 15
VI. Valeur limite de Gauss ........ 17
VII. Propriétés fondamentales de gamma ........ 20
VIII. Une valeur limite ........ 23

#### CHAPITRE III.

LA FONCTION HYPERGÉOMÉTRIQUE.

IX. L'équation différentielle de Gauss ........ 28
X. Sur une valeur limite ........ 32
XI. La formule de Gauss ........ 36
XII. L'intégrale eulérienne de première espèce ........ 39

#### CHAPITRE IV.

SUR UNE CLASSE DE SÉRIES INFINIES.

XIII. Application d'un théorème de Weierstrass ........ 42
XIV. Étude d'une série particulière ........ 45
XV. Sur une transformation générale ........ 49

## DEUXIÈME PARTIE.

### Les fonctions métasphériques.

#### CHAPITRE V.

##### PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

| | | Pages. |
|---|---|---|
| XVI. | Définition générale | 55 |
| XVII. | Les quatre fonctions fondamentales | 57 |
| XVIII. | Quelques formules numériques | 61 |
| XIX. | Le déterminant fonctionnel | 65 |
| XX. | Les trois invariants d'une fonction métasphérique | 66 |
| XXI. | Autres formules fondamentales | 69 |
| XXII. | Les fonctions métasphériques adjointes | 70 |
| XXIII. | Sur l'équation de Legendre | 72 |

#### CHAPITRE VI.

##### PROLONGEMENTS ANALYTIQUES.

| | | |
|---|---|---|
| XXIV. | Valeurs asymptotiques d'une fonction métasphérique | 74 |
| XXV. | Huit constantes fondamentales | 76 |
| XXVI. | La frontière de convergence est une lemniscate | 78 |
| XXVII. | Le champ de convergence est un demi-plan | 83 |
| XXVIII. | La frontière de convergence est une hyperbole | 85 |
| XXIX. | Nouvelles fonctions métasphériques particulières | 87 |
| XXX. | Formules de révolution. Prolongements analytiques | 90 |

#### CHAPITRE VII.

##### LES FONCTIONS ULTRASPHÉRIQUES.

| | | |
|---|---|---|
| XXXI. | Fonctions de première espèce | 94 |
| XXXII. | Étude d'une formule classique | 97 |
| XXXIII. | Formules d'Euler et de Jacobi | 101 |
| XXXIV. | Développements divers de $P^{\nu,n}(\cos\theta)$ | 105 |
| XXXV. | La fonction cylindrique comme valeur limite | 109 |
| XXXVI. | La fonction ultrasphérique de seconde espèce | 112 |

#### CHAPITRE VIII.

##### APPLICATIONS DES FORMULES FONDAMENTALES.

| | | |
|---|---|---|
| XXXVII. | Sommation de quelques séries finies | 114 |
| XXXVIII. | Formules récursives. Polynomes de Gauss | 117 |
| XXXIX. | Formules de François Neumann | 120 |
| XL. | L'intégrale indéfinie de Legendre | 126 |

## CHAPITRE IX.

### ÉQUATIONS DE FRANÇOIS NEUMANN.

Pages.

XLI. Sur le produit de deux fonctions métasphériques .... 129
XLII. Quelques identités différentielles .... 131
XLIII. Sur le polynome de Gauss .... 133

# TROISIÈME PARTIE.

## Séries infinies.

## CHAPITRE X.

### SÉRIES DE CHARLES NEUMANN.

XLIV. Théorème de Neumann .... 135
XLV. Généralisations des formules classiques .... 140
XLVI. Généralisations d'autres formules classiques .... 142
XLVII. Autres propriétés des séries neumaniennes .... 144

## CHAPITRE XI.

### SÉRIES DE FRANÇOIS NEUMANN.

XLVIII. Évaluation d'une série particulière .... 147
XLIX. Le théorème général .... 149
L. Exemples des séries de F. Neumann .... 152

## CHAPITRE XII.

### SÉRIES DE PRODUITS DE DEUX FONCTIONS MÉTASPHÉRIQUES.

LI. Développement d'une seule fonction métasphérique .... 156
LII. Théorèmes généraux .... 160

## CHAPITRE XIII.

### SÉRIES DE FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉES.

LIII. Séries de première espèce .... 165
LIV. Séries de seconde espèce .... 169
LV. Séries de Ch. Neumann de fonctions cylindriques .... 172
LVI. Sur quelques séries de polynomes entiers .... 175

## CHAPITRE XIV.

### FORMULES D'ADDITION.


| | | Pages. |
|---|---|---|
| LVII. | Équations aux dérivées partielles | 178 |
| LVIII. | Première formule d'addition | 181 |
| LIX. | Autres applications des séries de Ch. Neumann | 185 |
| LX. | Seconde formule d'addition | 187 |


# QUATRIÈME PARTIE.

## Intégrales définies.

## CHAPITRE XV.

### GÉNÉRALISATIONS DES INTÉGRALES CLASSIQUES.


| | | |
|---|---|---|
| LXI. | Intégrales de Jacobi et Laplace et formules analogues | 191 |
| LXII. | L'intégrale de Heine | 194 |
| LXIII. | Les intégrales de Dirichlet | 195 |


## CHAPITRE XVI.

### APPLICATIONS DES SÉRIES DE CHARLES NEUMANN.


| | | |
|---|---|---|
| LXIV. | Expressions intégrales des coefficients | 198 |
| LXV. | Applications aux séries particulières | 200 |
| LXVI. | Applications des formules d'addition | 202 |


## CHAPITRE XVII.

### APPLICATIONS D'UNE INTÉGRALE DE M. DE SONINE.


| | | |
|---|---|---|
| LXVII. | Les fonctions métasphériques | 205 |
| LXVIII. | Les fonctions ultrasphériques | 207 |


FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



44214 Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.