G. VITALI

GEOMETRIA NELLO SPAZIO HILBERTIANO

GIUSEPPE VITALI

GEOMETRIA NELLO SPAZIO HILBERTIANO

N. ZANICHELLI
BOLOGNA

27/I 1930

Wiktor

GIUSEPPE VITALI

GEOMETRIA

NELLO SPAZIO HILBERTIANO

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

Padova - Tip. Seminario - XI-1929

PREFAZIONE

Geometria nello spazio hilbertiano non è soltanto ampliamento del campo delle ricerche, non è soltanto il passaggio dal *finito* al *numerabile* del numero delle dimensioni dello spazio ambiente.

Ciò sarebbe troppo poco.

Essa è un metodo di rappresentazione geometrica che, sostituito al consueto cartesiano, consente formule più semplici, dimostrazioni più concise ed una visione dei problemi più nitida e più vasta.

Essa trova il suo fondamento nella possibilità di sviluppare ogni funzione a quadrato sommabile in serie di un dato sistema ortogonale chiuso; discende quindi da quella nozione di *sommabilità* con la quale il Lebesgue, rinnovando da un punto di vista più generale i fondamenti del calcolo integrale, ha permesso di giungere a risultati di meravigliosa eleganza e semplicità.

Il breve saggio di applicazioni della rappresentazione funzionale che figura nella parte V di questo volume sarà sufficiente per dare un' idea della utilità del metodo.

A questo saggio ho voluto premettere un' esposizione ordinata delle teorie preparatorie ed ausiliarie: sia per dare maggior autonomia al libro, sia per apportare alle consuete esposizioni di esse qualche innovazione e forse qualche miglioramento.

Così nella parte I la definizione usata di *aggregati di punti misurabili* consente, sin dall'inizio, di riferire le considerazioni anche ad aggregati non limitati; e la seguente definizione di *sommabilità* non richiede il preventivo esame delle funzioni limitate.

Nella parte II do in poche pagine i fondamenti della teoria degli *sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, ricorrendo alla nozione di *successioni completamente convergenti*, nozione che è la traduzione di ciò che altra volta chiamai *integrabilità completa per serie* e che fa capo a quella di *equi–assoluta–continuità.*

Nella parte III raccolgo alcune nozioni algebriche. Nel seguito della nostra teoria si presentano certi *determinanti classici*, abbastanza complicati, per il calcolo di alcuni dei quali si conoscono solo dimostrazioni ampollose e pesanti. Ho cercato di sveltire tutta questa materia, e credo di esservi riuscito abbastanza felicemente.

Nella stessa parte do una estensione, necessaria per la nostra teoria, ai classici teoremi sulle *equazioni secolari.*

Infine la parte IV è dedicata al *calcolo differenziale assoluto*. Però in essa, e sotto questo titolo, non mi limito a considerare il *classico calcolo del* Ricci, ma espongo quella sua estensione che ero solito chiamare *calcolo assoluto generalizzato* e che ha la sua prima sorgente in vari lavori di Ernesto Pascal, apparsi nel primo decennio di questo secolo. Naturalmente il caso del Ricci è compreso come caso particolare in questa esposizione, nella quale gli svantaggi della maggior generalità sono compensati dalle semplificazioni che derivano proprio da questa generalità.

Anche nel calcolo differenziale assoluto così ampliato si incontra una *derivazione covariante*, della quale avevo dato finora soltanto una descrizione sommaria in una breve nota pubblicata nel 1928. Con questa derivazione, e partendo da un invariante, si perviene a certi sistemi covarianti ai quali ho dato il nome di *ricciani* e che entrano nell' orbita del calcolo del Ricci. Questi covarianti hanno nello studio della geometria varie applicazioni.

Ringrazio i dott. Giuseppe Aliprandi e Paolo Cattaneo per l' aiuto intelligente che mi hanno dato nella correzione delle bozze.

Padova, ottobre 1929

Giuseppe Vitali

INDICE

Parte III. - Complementi di algebra.

Parte IV. - Calcolo differenziale assoluto.

Parte V. - Geometria differenziale.

PARTE I.

INTEGRALI DI LEBESGUE

1.

Tratti di una retta.

1. Tratto. — 2. Estremi di un tratto. — 3. Lunghezza di un tratto. — 4. Tratti nulli e non nulli. — 5. Tratti distinti.

1. Def. - Data una retta r, noi chiameremo *tratto* di r ogni *punto* di r *situato a distanza finita,* ogni *segmento* di r, ogni *raggio* di r, ed anche *l'intera retta r.*

2. Un tratto di r ha evidentemente due *estremi*, che sono a distanza finita e coincidenti, se il tratto è un punto; sono a distanza finita e distinti, se il tratto è un segmento; uno a distanza finita e l'altro all'infinito ($+\infty$ o $-\infty$), se il tratto è un raggio; tutti e due all'infinito ($+\infty$ e $-\infty$), se il tratto è l'intera retta.

Immaginando la retta r disposta dinanzi a noi parallelamente alla congiungente i nostri occhi, noi daremo la seguente

Def. - Si dice *estremo sinistro* di un tratto di r, un estremo di questo tratto, alla cui sinistra non si trovano altri punti del tratto, e diremo *estremo destro* del tratto l'estremo rimanente.

Se p è l'estremo sinistro, e se q è l'estremo destro di un tratto, indicheremo questo tratto con (p, q).

3. Se noi immagineremo fissata una volta per sempre l'*unità di misura dei segmenti,* ogni tratto di r avrà allora una *lunghezza* determinata; nulla, se il tratto è un punto; finita e >0, se il tratto è un segmento; infinita positiva ($+\infty$), se il tratto è un raggio o l'intera retta.

4. Def. - Se un tratto è un punto si dirà che è un *tratto nullo,* negli altri casi si dirà che è un *tratto non nullo.*

5. Def. - Due tratti non nulli si diranno *distinti*, se non hanno punti interni comuni. Un tratto nullo ed un tratto non nullo si diranno *distinti*, se il primo non è punto del secondo, nè interno nè estremo. Due tratti nulli si diranno *distinti*, se sono due punti diversi.

2.

Boreliano di una retta.

1. Boreliano di una retta. — 2. Lunghezza di un boreliano. — 3. Boreliani semplici. — 4. Punti interni ad un boreliano. — 5. Tratti congiunti ad un boreliano. — 6. Sostegno di un boreliano. — 7. Confronto fra la lunghezza di un boreliano e quella del suo sostegno.

1. Def. - Un insieme di un numero finito o di una infinità numerabile [1] di tratti di una medesima retta r, si dirà un *boreliano* [2] di r.

2. Def. - La somma delle lunghezze dei tratti di un boreliano si chiama *lunghezza* del boreliano.

Evidentemente la lunghezza di un boreliano può essere nulla, finita (>0), od infinita.

3. Def. - Un boreliano di r si dirà *semplice*, se i suoi tratti sono a due a due distinti.

4. Def. - Se B è un boreliano di r, un punto di r situato a distanza finita si dice *interno* a B, se è interno ad un tratto di B, oppure, se è estremo comune a due tratti non nulli distinti di B (e quindi estremo destro dell'uno ed estremo sinistro dell'altro).

5. Def. - Sia B un boreliano di r, e sia p un punto interno a B. Indichiamo con p_2 il limite superiore dei punti x che seguono p, tali che ogni punto del tratto (p, x) sia interno a B, e con p_1 il limite inferiore dei punti y che precedono p, tali che

[1] Ricordo che un aggregato di elementi si dice *numerabile*, se i suoi elementi si possono mettere in corrispondenza biunivoca coll'aggregato dei numeri reali interi e >0.

[2] In omaggio ad Emile Borel.

ogni punto del tratto (y, p) sia interno a B. Il tratto (p_1, p_2) ha la proprietà che ogni suo punto interno è interno a B, e che i suoi estremi non sono interni a B, ed inoltre è un tratto non nullo. Un siffatto tratto lo diremo un *tratto non nullo congiunto* a B. Un tratto nullo di B, distinto da ogni tratto non nullo congiunto a B, lo diremo un *tratto nullo congiunto* a B.

6. Def. – I diversi tratti nulli e non nulli congiunti a B costituiscono un boreliano semplice che noi diremo il *sostegno* di B.

Il sostegno di un boreliano B è di misura nulla, se e soltanto se B è privo di punti interni, ossia quando anche tutti i tratti di B sono nulli, cioè quando B è di lunghezza nulla.

7. Teor. – La lunghezza b di un boreliano B è $\geq$ della lunghezza s del suo sostegno S.

Dim. – Il teor. è evidente se $s = 0$ (p. 5, § 6).

Supponiamo che sia $s > 0$, ed indichiamo con

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

i tratti non nulli di S. Un tratto τ_n ed un tratto non nullo di B, che non siano distinti, avranno in comune una porzione. Le porzioni che τ_n ha in comune coi vari tratti non nulli di B formano un boreliano B_n. Se noi riusciamo a dimostrare che la lunghezza b_n di B_n è $\geq$ della lunghezza s_n di τ_n, possiamo dire che il teor. è vero, perchè evidentemente la lunghezza b di B è $\geq$ della somma delle varie b_n, mentre la lunghezza s di S è $=$ alla somma delle varie s_n. Fissiamo ora le nostre considerazioni sopra un particolare valore di n, e consideriamo un punto p interno a τ_n. Sia H l'aggregato dei punti x che non precedono p, per cui la somma delle lunghezze delle porzioni che i tratti di B_n, non distinti da (p, x), hanno in comune con (p, x) sia $\geq$ della lunghezza di (p, x). Se y è il limite superiore di H, anche y appartiene ad H, perchè, nell' ipotesi contraria, esso sarebbe un punto limite di H, e, se x è un punto di H, la somma σ_y delle lunghezze delle porzioni che i tratti di B_n hanno in comune con (p, y) è $\geq$ della somma σ_x delle lunghezze delle porzioni che i tratti di B_n hanno in comune con (p, x), e quindi è $\geq$ della lunghezza di (p, x). Facendo tendere x ad y, la lunghezza di

(p, x) tende alla lunghezza di (p, y), dunque σ_y è $\geq$ della lunghezza di (p, y), ed allora y appartiene ad H. Dico che y è l'estremo destro di τ_n. Infatti, se ciò non fosse, y sarebbe interno a τ_n, e quindi sarebbe interno a B, ed allora esisterebbe una porzione non nulla di tratto di B della quale y è l'estremo sinistro. Sia (y, z) la parte (necessariamente non nulla) di questa porzione che è contenuta in τ_n. Le porzioni che i tratti di B_n hanno in comune con (p, z), contengono tutte le porzioni che i tratti di B_n hanno in comune con (p, y), ed il tratto (y, z), e quindi la somma σ_z delle lunghezze delle porzioni che i tratti di B_n hanno in comune con (p, z) è $\geq$ della somma di σ_y e della lunghezza di (y, z), ossia è $\geq$ della somma delle lunghezze di (p, y) e di (y, z), ed infine è $\geq$ della lunghezza di (p, z), e z apparterrebbe ad H, contrariamente all'ipotesi.

Visto che l'estremo destro di τ_n appartiene ad H, si conclude che la somma delle lunghezze delle porzioni di tratti di B_n che cadono a destra di p è $\geq$ della lunghezza della porzione di τ_n che cade a destra di p. Analogamente la somma delle lunghezze delle rimanenti porzioni di tratti di B_n sarà $\geq$ della lunghezza della rimanente porzione di τ_n, e quindi la lunghezza di B_n sarà $\geq$ della lunghezza di τ_n. c. d. d.

3.

Aggregati di punti di una retta. Prime nozioni.

1. Copertura di un aggregato di punti di una retta. — 2. Estensione di un aggregato di punti di una retta. — 3. Anomalia di un aggregato di punti di una retta. — 4. Aggregati misurabili e loro misura. — 5. Primi esempi di aggregati misurabili. Aggregati trascurabili.

1. Def. – Se a è un aggregato di punti di una retta r, si chiama *copertura* di a ogni boreliano semplice B tale che ogni punto di a appartenga ad un tratto di B, o come punto interno o come estremo.

Teor. - Se a è l'aggregato dei punti interni ad un boreliano semplice B di lunghezza b, e se C è una copertura di a, la lunghezza di C è $\geq b$.

Dim. – I punti di a che non sono interni a C sono estremi di tratti di C, ma poichè questi tratti sono in numero finito o numerabile, anche tali punti saranno in numero finito o numerabile. Siano dessi

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

e sia ε un qualunque numero reale >0. Indichiamo, per ogni intero $n>0$, con τ_n un tratto di lunghezza $>\frac{\varepsilon}{2^n}$ di cui p_n sia un punto interno. Se noi associamo a tutti i tratti di C tutti i tratti τ_n, otteniamo un boreliano C' di cui ogni punto di a è un punto interno, e se c e c' sono le lunghezze di C e di C', si ha evidentemente $c'<c+\varepsilon$, ossia $c>c'-\varepsilon$. Ora il sostegno di c' contiene evidentemente tutti i tratti di B, almeno come porzioni dei suoi tratti, e quindi $c'\geq b$, ossia $c>b-\varepsilon$, ma ε può essere preso piccolo a piacere, e si ha $c\geq b$. c. d. d.

2. Def. – Il limite inferiore delle lunghezze delle coperture di un aggregato a di punti di una retta si chiama l'*estensione* di a, e si indica con $E(a)$.

Teor. 1. – Se a' è un sub-aggregato di un aggregato a di punti di una retta, è $E(a')\leq E(a)$.

Dim. Infatti ogni copertura di a è anche una copertura di a', e quindi il limite inferiore delle coperture di a' è $\leq$ del limite inferiore delle coperture di a, ed infine $E(a')\leq E(a)$. c. d. d.

Teor. 2. – Se a è l'aggregato dei punti interni ad un boreliano semplice B di lunghezza b, è $E(a)=b$.

Dim. – Intanto B è una copertura di a, e quindi $E(a)\leq b$. D'altra parte si sa (p. 6, teor.) che la lunghezza di ogni copertura di a è $\geq b$, dunque è $E(a)=b$. c. d. d.

Di qui consegue il

Teor. 3. – Se a è l'aggregato dei punti che appartengono, o come interni o come estremi, ai tratti di un boreliano semplice B di lunghezza b, è $E(a)=b$.

Dim. – Intanto, se a' è l'aggregato dei punti interni a B, essendo a' un sub-aggregato di a è

$$E(a)\geq E(a')=b \qquad \text{(p. 7, teor. 1 e 2).}$$

Inoltre B è una copertura di a, e però $E(a) \leq b$, e combinando le due disuguaglianze si ha $E(a) = b$. c. d. d.

Se noi identifichiamo con un boreliano semplice l'aggregato dei punti che appartengono o come interni o come estremi ai suoi tratti, noi possiamo enunciare il teor. 3 nella forma del

Teor. 3'. L'estensione di un boreliano semplice è uguale alla sua lunghezza.

In questo teor. è contenuto il

Cor. – L'estensione (dell'aggregato dei punti) di un tratto è uguale alla lunghezza del tratto.

3. Def. – Si chiama *anomalia* di un aggregato a di punti di una retta, e si indica con $\alpha(a)$, il limite inferiore delle $E(c-a)$, dove c indica una qualunque copertura di a (1).

4. Def. 1. – Un aggregato di punti di una retta si dice *misurabile*, se la sua anomalia è nulla.

Def. 2. – L'estensione di un aggregato misurabile a si chiama la sua *misura*, e si indica con $\mu(a)$.

5. Se a è un aggregato di punti di una retta, e se c è una copertura di a, si ha

$$E(c-a) \leq E(c) = l(c) \quad \text{(p. 7, teor. 1 e 3)},$$

se $l(c)$ indica la lunghezza di c.

Ora se $E(a)=0$, il limite inferiore delle varie $l(c)$ è *zero*, e quindi anche il limite inferiore delle varie $E(c-a)$ è *zero*, e quindi $\alpha(a)=0$, e si ha il

Teor. 1. – Un aggregato di punti di una retta il quale ha estensione nulla è misurabile.

Def. – Un aggregato di punti di una retta il quale abbia estensione nulla, e quindi misura nulla si dirà *trascurabile*.

Teor. 2. – Un aggregato a finito o numerabile di punti di una retta è trascurabile.

Dim. – Infatti il boreliano semplice che ha per tratti tutti i

(1) Si intende che qui si continua ad identificare un boreliano semplice coll'aggregato dei punti che appartengono, o come interni o come estremi, ai suoi tratti.

tratti nulli costituiti dai singoli punti di a è una copertura di a la cui lunghezza è nulla, quindi il limite inferiore delle lunghezze delle coperture di a è nullo, ed infine $E(a)=0$, ossia a è trascurabile.

Teor. 3. – Un boreliano è misurabile, e la sua misura è uguale alla sua lunghezza.

Dim. – Se c è un boreliano, c è copertura di se stesso, e, poichè $E(c-c)=0$, è $\alpha(c)=0$, ossia c è misurabile. Ma (p. 7, teor. 3) si sa che $E(c)=l(c)$, dove $l(c)$ indica la lunghezza di c, dunque $\mu(c)=l(c)$. c. d. d.

4.

Principali proprietà degli aggregati misurabili.

1. Somma di aggregati misurabili. — 2. Differenza di aggregati misurabili. — 3. Prodotto di aggregati misurabili. — 4. Corollari.

1. Teor. 1. – La somma [1] di un numero finito o di una infinità numerabile di aggregati misurabili [2] è misurabile.

Dim. - Siano

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

un numero finito od una infinità numerabile di aggregati misurabili, ed indichiamo con a la loro somma. Prefissato un qualunque numero reale $\varepsilon > 0$, si può trovare per ogni n una copertura c_n di a_n, in modo che $E(c_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. La somma delle coperture c_n è un boreliano, il cui sostegno c è una copertura di a. Ora $c-a$ è un sub-aggregato della somma dei vari $c_n - a_n$. Sia s_n una copertura di $c_n - a_n$ la cui lunghezza sia $< \frac{\varepsilon}{2^n}$, la somma delle s_n è un boreliano il cui sostegno s costituisce una copertura

[1] Ricordo che si chiama *somma* di dati aggregati l' insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno degli aggregati dati.

[2] Quando si parlerà di aggregati *misurabili* si intenderà sempre che si parla di aggregati di punti di una medesima retta, senza che ciò sia detto esplicitamente volta per volta.

di $c-a$, la cui lunghezza è $<\Sigma_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$ (p. 5, teor.), dunque $E(c-a)<\varepsilon$, ed infine $\alpha(a)<\varepsilon$. Ma ε può essere piccolo a piacere, e perciò $\alpha(a)=0$, ed a è misurabile.

Teor. 2. - La somma di un numero finito o di un' infinità numerabile di aggregati di punti di una medesima retta ha un'estensione $\leq$ della somma delle estensioni dei singoli aggregati addendi.

Dim. - Siano

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

i dati aggregati e sia a la loro somma.

Sia ε un qualunque numero reale >0.

Esiste per ogni intero n una copertura c_n di a_n la cui lunghezza $l(c_n)$ sia $\leq E(a_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$. La somma delle varie c_n ha un sostegno s la cui lunghezza $l(s)$ è $\leq \Sigma_n l(c_n)$ (p. 5, teor.). Si ha allora $l(s) \leq \Sigma_n E(a_n)+\varepsilon$, e, poichè s è una copertura di a, si ha

$$E(a) \leq \Sigma_n E(a_n)+\varepsilon,$$

e, poichè ε è arbitrario, si ha

$$E(a) \leq \Sigma_n E(a_n).$$

Teor. 3. - La somma di un numero finito o di un' infinità numerabile di aggregati misurabili a due a due distinti [1] ha per misura la somma delle misure dei singoli aggregati.

Dim. - Siano

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

un numero finito od una infinità numerabile di aggregati misurabili a due a due distinti, di cui indichiamo con a la somma.

Pei due teoremi precedenti si ha

$$\mu(a) \leq \Sigma_n \mu(a_n), \tag{1}$$

ed in particolare

$$\mu(a_1+a_2) \leq \mu(a_1)+\mu(a_2). \tag{1'}$$

[1] Cioè senza punti in comune.

Sia k una copertura di a_1+a_2, ed indichiamo con h_1 una copertura di a_1, i cui tratti siano (ciascuno) contenuti in un tratto di k, e tali che $E(h_1-a_1)<\varepsilon$, ε essendo ancora un numero reale >0 prefissato ad arbitrio ([1]). Analogamente indichiamo con h_2 una copertura di a_2 i cui tratti siano (ciascuno) contenuti in un tratto di k, e tali che $E(h_2-a_2)<\varepsilon$.

È possibile staccare da h_1 un numero finito di tratti il cui insieme h_1' abbia una lunghezza $\geq\mu(a_1)-\varepsilon$, ed è possibile staccare da h_2 un numero finito di tratti il cui insieme h_2' abbia una lunghezza $\geq\mu(a_2)-\varepsilon$.

Le porzioni di tratti comuni ad un tratto di h_1' e ad un tratto di h_2' formano un boreliano semplice ρ. Un punto di ρ non può appartenere contemporaneamente ad a_1 e ad a_2, perchè, per ipotesi, a_1 ed a_2 sono distinti, e se non appartiene ad a_1 sarà un punto di h_1-a_1, e se non appartiene ad a_2 sarà un punto di h_2-a_2. Allora (p. 7, teor. 1 e p. 10, teor. 2)

$$E(\rho)\leq E(h_1-a_1)+E(h_2-a_2)<2\varepsilon.$$

Ma (p. 8, teor. 3') $E(\rho)=l(\rho)$, dove $l(\rho)$ è la lunghezza del boreliano ρ, dunque $l(\rho)<2\varepsilon$. I tratti di h_1' e le porzioni dei tratti di h_2' che non appartengono a ρ formano un boreliano semplice c con un numero finito di tratti, e la cui lunghezza è $>\mu(a_1)+\mu(a_2)-4\varepsilon$. I tratti di c sono porzioni di tratti di k e quindi la lunghezza di k è $>\mu(a_1)+\mu(a_2)-4\varepsilon$, e poichè ε è arbitrario la lunghezza di k è $\geq\mu(a_1)+\mu(a_2)$. Da ciò consegue che

$$\mu(a_1+a_2)\geq\mu(a_1)+\mu(a_2). \tag{2}$$

Combinando la (1') e la (2) si ha

$$\mu(a_1+a_2)=\mu(a_1)+\mu(a_2).$$

Applicando successivamente questo risultato, si ha subito

$$\mu(a_1+a_2+\ldots+a_n)=\mu(a_1)+\mu(a_2)+\ldots+\mu(a_n),$$

([1]) Per questo basterà prendere una copertura h di a_1 per cui $E(h-a_1)<\varepsilon$, e poi prendere le sole porzioni dei tratti di h che sono comuni coi singoli tratti di k.

e, poichè $a_1+a_2+\ldots+a_n$ è un sub-aggregato di a, è

$$\mu(a)\geq\mu(a_1+a_2+\ldots+a_n) \qquad \text{(p. 7, teor. 1),}$$

cioè

$$\mu(a)\geq\mu(a_1)+\mu(a_2)+\ldots+\mu(a_n),$$

e questo per ogni n, ed allora

$$(3) \qquad \mu(a)\geq\Sigma_n\,\mu(a_n).$$

Combinando la (1) e la (3), si ha

$$\mu(a)=\Sigma_n\,\mu(a_n). \qquad \text{c. d. d.}$$

2. Teor. 1. - La differenza di due aggregati misurabili è un aggregato misurabile.

Dim. - Siano a e b due aggregati misurabili e sia b un sub-aggregato di a. Poniamo $d=a-b$.

Sia ε un numero reale >0, sia c una copertura di a, per la quale si abbia $E(c-a)<\frac{\varepsilon}{3}$. Esisterà allora una copertura δ di $c-a$ la cui lunghezza $l(\delta)$ sia $<\frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre sia s una copertura di b, per la quale $E(s-b)<\frac{\varepsilon}{3}$. Se in s vi sono punti di d, questi saranno in $s-b$, e formeranno un aggregato d' per cui $E(d')<\frac{\varepsilon}{3}$ (p. 7, teor. 1). Esisterà allora una copertura δ' di d' la cui lunghezza $l(\delta')$ sia $<\frac{\varepsilon}{3}$.

I tratti di s si possono distribuire in due boreliani s' ed s'', il 1° dei quali contenga un numero finito di tratti ed il 2° abbia una lunghezza $<\frac{\varepsilon}{3}$.

Sia c' il boreliano che si ottiene sopprimendo dai tratti di c le porzioni comuni a tratti di s'.

I punti di d appartengono o a c' o ad s', e questi ultimi appartengono a δ'. Il sostegno k della somma di c' e δ' è adunque una copertura di d. Ma in k vi possono essere dei punti che non appartengono a d. Uno di tali punti o appartiene a δ', o appartiene a δ, o appartiene ad s''. Allora il sostegno della somma di δ', δ ed s'' è una copertura di $k-d$, la cui lunghezza è minore della somma delle lunghezze di δ', δ ed s'' (p. 5, teor.) e quindi è $<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

Si conclude che, prefissato un numero reale $\varepsilon>0$, è possibile trovare una copertura k di d per cui sia $E(k-d)<\varepsilon$, e quindi che d è misurabile. c. d. d.

Teor. 2. - La differenza di due aggregati misurabili ha per misura la differenza delle loro misure.

Dim. - Infatti se d è la differenza di due aggregati misurabili a e b, essendo $a=b+d$, si ha (p. 10, teor. 3) $\mu(a)=\mu(b)+\mu(d)$, da cui $\mu(d)=\mu(a)-\mu(b)$. c. d. d.

3. Teor. 1. - Il prodotto [1] di due aggregati misurabili è misurabile.

Dim. - Infatti se a e b sono due aggregati misurabili, e se p è il loro prodotto, ed s è la loro somma, si ha $s-a=b-p$, e quindi $p=b-(s-a)$. Ma s è misurabile (p. 9, teor. 1), dunque $s-a$ è misurabile (p. 12, teor. 1) ed infine $b-(s-a)$ è misurabile (p. 12, teor. 1), ossia p è misurabile.

Cor. - Il prodotto di un numero finito di aggregati misurabili è misurabile.

Dim. - Infatti se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono degli aggregati misurabili, è misurabile il prodotto p_2 di a_1 e a_2 (v. teor. prec.); poi, essendo il prodotto di a_1, a_2, a_3, uguale al prodotto di p_2 ed a_3, è anch'esso misurabile e così continuando si vede che è misurabile il prodotto di $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Teor. 2. - Il prodotto p di una successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

di aggregati misurabili, ciascuno contenuto nel precedente, è misurabile, ed ha per misura il limite per $n=\infty$ di $\mu(a_n)$.

Dim. - Intanto

$$p=a_1-\sum_{1}^{\infty}{}_n(a_{n+1}-a_n),$$

[1] Ricordo che si chiama *prodotto* di aggregati l'insieme degli elementi comuni a tutti questi aggregati.

e poichè $a_{n+1} - a_n$ è misurabile (p. 12, teor. 1), anche $\sum_{1}^{\infty}{}_n (a_{n+1} - a_n)$ è misurabile (p. 9, teor. 1), ed infine anche p è misurabile (p. 12, teor. 1).

Inoltre (p. 10, teor. 3 e p. 13, § 2, teor. 2), è

$$\mu(p) = \mu(a_1) - \mu[\sum_{1}^{\infty}{}_n (a_{n+1} - a_n)] =$$

$$= \mu(a_1) - \sum_{1}^{\infty}{}_n \mu(a_{n+1} - a_n)$$

$$= \mu(a_1) - \sum_{1}^{\infty}{}_n [\mu(a_{n+1}) - \mu(a_n)]$$

$$= \lim_{n=\infty} \mu(a_n) . \qquad \text{c. d. d.}$$

Cor. – Il prodotto p di una infinità numerabile

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

di aggregati misurabili è misurabile.

Dim. – Infatti detto p_n il prodotto di $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'aggregato p è il prodotto degli aggregati

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

ciascuno misurabile e ciascuno contenuto nel precedente, e quindi è misurabile (v. teor. prec.).

4. Cor. 1. – La misura di un aggregato misurabile non cambia se a questo aggregato si aggiunge o si toglie un aggregato trascurabile (p. 8, § 5, def.; p. 10, teor. 3 e p. 13, § 2, teor. 2).

Cor. 2. – L'aggregato a dei punti *interni* di un boreliano semplice b è misurabile ed ha per misura la lunghezza $l(b)$ di b.

Dim. – Infatti $b - a$ è finito o numerabile e quindi è trascurabile, ed allora $\mu(a) = \mu(b)$ (cor. prec.), ma $\mu(b) = l(b)$ (p. 9, teor. 3), dunque è $\mu(a) = l(b)$.

5.

Funzioni misurabili.

1. Funzioni misurabili. — 2. Somma di funzioni misurabili. — 3. Differenza di funzioni misurabili. — 4. Prodotto di funzioni misurabili. — 5. Quoziente di funzioni misurabili. — 6. Limite di una successione di funzioni misurabili. — 7. Esempi di funzioni misurabili.

1. Sia $f(t)$ una funzione reale *definita* in un aggregato misurabile g di punti di una retta [1]. Le condizioni:

A) Per ogni numero reale α è misurabile l'aggregato A_α dei punti di g in cui $f(t) > \alpha$;

B) Per ogni numero reale α è misurabile l'aggregato B_α dei punti di g in cui $f(t) \geq \alpha$;

C) Per ogni numero reale α è misurabile l'aggregato C_α dei punti di g in cui $f(t) < \alpha$;

D) Per ogni numero reale α è misurabile l'aggregato D_α dei punti di g in cui $f(t) \leq \alpha$;

sono equivalenti.

Infatti essendo $A_\alpha + D_\alpha = B_\alpha + C_\alpha = g$, è evidente che la misurabilità di uno degli aggregati A_α e D_α trascina quella dell'altro, e che la misurabilità di uno degli aggregati B_α e C_α trascina quella dell'altro, e che quindi sono equivalenti le condizioni *A)* e *D)*, e le condizioni *B)* e *C)*.

Per dimostrare completamente l'asserto basta allora dimostrare che sono equivalenti le condizioni *A)* e *B)*. Ora A_α è la somma degli aggregati $B_{\alpha+\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, e dalla misurabilità dei B_α consegue quella degli A_α (p. 9, teor. 1). Dunque dalla *B)* consegue la *A)*. Analogamente B_α è il prodotto degli aggregati $A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, e quindi dalla misurabilità degli A_α consegue quella dei B_α (p. 14, cor. del teor. 2), e dalla condizione *A)* consegue la *B)*.

Ciò premesso noi daremo la seguente

Def. 1. – Quando una funzione reale $f(t)$ è definita in un

(1) Cioè tale che per ogni punto di g abbia un valore reale finito.

aggregatom isurabile g di punti di una retta e soddisfa ad una delle precedenti condizioni *A)*, *B)*, *C)*, *D)*, e quindi a tutte, si dice che è una *funzione misurabile.*

Talvolta capita di dover considerare, dato un aggregato misurabile g, una funzione reale $f(x)$ che è definita in tutti i punti di g all' infuori che in un aggregato trascurabile δ di punti, ed allora diremo che $f(x)$ è *definita generalmente* in g.

Def. 2. – Una funzione reale $f(t)$ definita generalmente in un aggregato misurabile g, si dice che è *misurabile* in g se è misurabile nel sub–aggregato di g in cui essa è definita.

2. Teor. 1. – La somma di due funzioni f_1 ed f_2 misurabili è misurabile.

Dim. – Infatti se r è un numero razionale, indicando con H_r l'aggregato dei punti in cui $f_1 > r$, ed $f_2 > \alpha - r$, si vede che H_r è misurabile perchè prodotto di aggregati misurabili. La somma H degli H_r (¹) è quindi pure misurabile. Nei punti di H è $f_1 + f_2 > \alpha$. Viceversa ogni punto in cui $f_1 + f_2 > \alpha$ appartiene ad H, perchè se $f_1 + f_2 > \alpha$, sarà $f_1 + f_2 > \alpha + \varepsilon$, dove ε è un numero > 0 sufficientemente piccolo. Esisterà allora un numero razionale r per cui $f_1 > r > f_1 - \varepsilon$, da cui $f_1 > r$, ed $f_2 + r > f_2 + (f_1 - \varepsilon) = (f_1 + f_2) - \varepsilon > \alpha$, ossia $f_2 > \alpha - r$, ed il punto appartiene ad H. Si conclude che per ogni numero reale α è misurabile l'aggregato dei punti in cui $f_1 + f_2 > \alpha$, e che quindi $f_1 + f_2$ è misurabile (²).

Consegue subito il

Teor. 2. – La somma di un numero finito di funzioni misurabili è misurabile.

3. Teor. 1. – Se f è una funzione misurabile, anche $-f$ è misurabile.

Dim. – Infatti l'aggregato dei punti in cui $-f \geq \alpha$ coincide con quello in cui $f \leq \alpha$, e quindi è un aggregato misurabile, e la $-f$ soddisfa alla condizione *B)*.

(¹) È noto che i numeri razionali r sono una infinità numerabile.

(²) In queste e nelle seguenti dimostrazioni ci si riferisce, il che è sufficiente, solo ai punti in cui le funzioni in discorso sono definite.

Teor. 2. – La differenza di due funzioni f_1 ed f_2 misurabili è misurabile.

Dim. – Infatti $f_1 - f_2 = f_1 + (-f_2)$ e quindi $f_1 - f_2$ è la somma di due funzioni misurabili, ed è perciò misurabile (p. 16, § 2, teor. 1).

4. Teor. 1. – Il prodotto di due funzioni f_1 ed f_2 misurabili è misurabile.

Dim. – Supponiamo dapprima che le due funzioni siano positive dovunque sono definite. Allora, se r è un numero razionale >0, indicando con H_r l'aggregato dei punti in cui $f_1 > r$, ed $f_2 > \alpha : r$, si vede che H_r è misurabile perchè prodotto di aggregati misurabili.

La somma H degli aggregati H_r è quindi pure misurabile. Nei punti di H è $f_1 \cdot f_2 > \alpha$. Viceversa ogni punto in cui $f_1 \cdot f_2 > \alpha$ appartiene ad H, perchè, se $f_1 \cdot f_2 > \alpha$, sarà $f_1 \cdot f_2 > \alpha \cdot \rho$, con $\rho > 1$ e sufficientemente vicino ad 1.

Esisterà allora un numero razionale r per cui $f_1 > r > f_1 : \rho$, da cui $f_1 > r$ ed $r \cdot f_2 > f_2(f_1 : \rho) = (f_1 \cdot f_2) : \rho > \alpha$, ossia $f_2 > \alpha : r$, ed il punto appartiene ad H. Si conclude che per ogni numero reale α (¹) è misurabile l'aggregato dei punti in cui $f_1 \cdot f_2 > \alpha$, e che quindi $f_1 \cdot f_2$ è misurabile.

Essendo poi $f_1 \cdot f_2 = (-f_1)(-f_2) = -[(-f_1) f_2] = -[f_1(-f_2)]$, si conclude che il teor. è vero tutte le volte che ognuna delle funzioni ha segno costante.

Per trattare la questione in generale si indichi con f'_n $(n = 1, 2)$ la funzione che coincide con f_n dove f_n è positiva, ed è nulla negli altri punti, e si ponga $f''_n = f_n - f'_n$ (²). Evidentemente le funzioni f'_n ed f''_n sono misurabili ed hanno segno costante, e poichè

$$f_1 \cdot f_2 = (f'_1 + f''_1)(f'_2 + f''_2) = f'_1 \cdot f'_2 + f'_1 \cdot f''_2 + f''_1 f'_2 + f''_1 f''_2,$$

risulta che $f_1 \cdot f_2$ è misurabile.

Consegue subito il

Teor. 2. – Il prodotto di un numero finito di funzioni misurabili è misurabile.

(¹) Per $\alpha \leq 0$ la cosa è evidente.

(²) La f''_n sarà solo definita dove lo è la f_n.

5. Teor. 1. - Se $f(t)$ è una funzione misurabile che si annulla solo in un aggregato trascurabile, la $1 : f(t)$ è pure misurabile [1].

Dim. - Infatti l'aggregato dei punti in cui $1 : f > \alpha$ se $\alpha > 0$, è quello dei punti in cui $0 < f < 1 : \alpha$; e se $\alpha < 0$, è quello dei punti in cui o $f > 0$, o $f < 1 : \alpha$; se $\alpha = 0$, è quello dei punti in cui $f > 0$, ed in tutti i casi è misurabile. Dunque $1 : f$ è misurabile.

Consegue il seguente

Teor. 2. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni misurabili ed è trascurabile l'aggregato dei punti in cui $f_2 = 0$, la $f_1 : f_2$ è misurabile.

Infatti $f_1 : f_2 = f_1 \cdot (1 : f_2)$.

6. Def. - Una successione di funzioni

$$f_1, f_2, f_3, \dots \tag{1}$$

definite generalmente in un aggregato g, si dice *convergente generalmente* in g se converge in tutto g, fuorchè in un aggregato trascurabile.

Teor. - Il limite f di una successione (1) di funzioni misurabili, convergente generalmente in un aggregato misurabile g, è una funzione misurabile.

Dim. - Se α è un numero reale, l'aggregato H dei punti in cui $f > \alpha$ è la somma di quegli aggregati $H_{n,p}$ in cui $f_r > \alpha + \frac{1}{p}$ per ogni $r > n$, e dove p ed n sono numeri interi > 0. Infatti è evidente che, se $f > \alpha$, esiste un intero $p > 0$ per cui $f > \alpha + \frac{1}{p}$ e che quindi esiste un intero $n > 0$ tale che per ogni $r > n$ è $f_r > \alpha + \frac{1}{p}$, e che viceversa quando questo avviene è $f > \alpha$. Ora $H_{n,p}$ è misurabile, perchè è il prodotto degli aggregati $K_{r,p} (r > n)$ in cui $f_r > \alpha + \frac{1}{p}$, ed i $K_{r,p}$ sono misurabili. Dunque H è misurabile, ed infine f è misurabile.

[1] La $1 : f(t)$ è definita solo dove lo è la f e dove non è $f = 0$, cioè all' infuori di un aggregato trascurabile. Essa è dunque generalmente definita.

7. Def. 1. – Se g è un aggregato misurabile di punti di una retta, se f è una funzione generalmente definita in g, che all' infuori di un aggregato trascurabile acquista solo un numero finito od una infinità numerabile di valori finiti diversi, e se ogni aggregato in cui assume lo stesso valore è misurabile, si dice che f è *quasi-costante* in g.

Teor. 1. – Una funzione quasi-costante è misurabile.

Dim. – Infatti, se f è quasi-costante, ed α è un numero reale, l'aggregato A_α dei punti in cui $f > \alpha$ è la somma degli aggregati di punti (aggregati in numero finito o in una infinità numerabile) in cui f acquista un medesimo valore $> \alpha$, e quindi A_α è misurabile, ed infine f è misurabile.

Teor. 2. – Una funzione $f(t)$ continua in un segmento (p, q) è misurabile.

Dim. – Infatti, per ogni numero intero $n > 0$, noi possiamo dividere (p, q) in un numero finito di parti, il cui aggregato noi indicheremo con Δ_n, tali che in ognuna di tali parti l'oscillazione di f sia $< 1 : n$. La funzione f_n, che in ciascuna di tali parti coincide col limite inferiore di f in detta parte [1], è una quasi-costante e quindi misurabile. La f è uguale a $\lim\limits_{n=\infty} f_n$, e quindi è misurabile (p. 18, § 6).

Def. 2. – Una funzione che è nulla in tutti i punti di un aggregato g all' infuori di un aggregato trascurabile in cui può anche non essere definita, si dice *generalmente nulla in* g.

Evidentemente *una funzione generalmente nulla in un aggregato misurabile è misurabile.*

Def. 3. – Due funzioni che differiscono per una funzione generalmente nulla si dicono *generalmente uguali*, ed anzi, quando noi diremo nel seguito che un fatto avviene *generalmente in* g, intenderemo dire che esso si verifica in tutti i punti di g, all'infuori di un aggregato trascurabile.

[1] Questo limite è finito, essendo f continua.

6.

Funzioni quasi-costanti sommabili e loro integrazione.

1. Funzioni quasi-costanti sommabili. — 2. Integrale di una funzione quasi-costante sommabile. — 3. Proprietà degli integrali delle funzioni quasi-costanti.

1. Def. - Se $f(t)$ è una funzione quasi-costante in g, se

(1) $$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

sono i diversi valori che essa assume, se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f(t) = \lambda_n$, si dice che la $f(t)$ e quindi anche il *modulo* $|f(t)|$ della $f(t)$, è *sommabile* in g, se e soltanto se la serie

(2) $$\lambda_1 . \mu(\gamma_1) + \lambda_2 . \mu(\gamma_2) + \lambda_3 . \mu(\gamma_3) + \cdots,$$

(in cui si intenda che un termine $\lambda_n . \mu(\gamma_n)$ sia *zero* se il fattore λ_n è $= 0$, anche se l'altro fattore $\mu(\gamma_n)$ è infinito) ha termini finiti ed è assolutamente convergente.

È evidente che se $f(t)$ è una quasi-costante e se g è diviso in una infinità numerabile di aggregati misurabili

(3) $$g_1, g_2, g_3, \cdots,$$

tali che in ciascuno di essi la $f(t)$ abbia un medesimo valore l_n, anche se i valori delle varie l_n non sono diversi fra loro, condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(t)$ sia sommabile in g è che la serie

(4) $$l_1 . \mu(g_1) + l_2 . \mu(g_2) + l_3 . \mu(g_3) + \cdots$$

sia a termini finiti ed assolutamente convergente.

2. Def. - Se una funzione quasi-costante è sommabile in g, se (1) sono i diversi valori che essa assume, e se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f(t) = \lambda_n$, la somma della serie (2) (somma che è indipendente dall'ordine dei termini) si chiama l'*integrale* della $f(t)$ esteso a g, e si indica con

$$\int_g f \cdot dt .$$

È evidente che se $f(t)$ è una quasi-costante sommabile in g, e se g è diviso in una infinità numerabile di aggregati misurabili (3), tali che in ciascuno di essi la $f(t)$ abbia un medesimo valore l_n, anche se i valori delle varie l_n non sono diversi fra loro, l' $\int_g f \cdot dt$ è anche dato dalla somma della serie (4) (somma che è indipendente dall'ordine dei termini).

3. Teor. 1. - Se f e φ sono due funzioni quasi-costanti sommabili in g, e se in tutto g è $f \geqq \varphi$, si ha

$$\int_g f \cdot dt \geqq \int_g \varphi \cdot dt .$$

Dim. - Se (1) sono i diversi valori che f assume in g, se

(5) $$\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$$

sono i diversi valori che φ acquista in g, se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f = \lambda_n'$, e se γ_n' è l'aggregato dei punti in cui $\varphi = \lambda_n'$, se $\gamma_{r,s}$ è il prodotto degli aggregati γ_r e γ_s', si ha, per un $\gamma_{r,s}$ non nullo, $\lambda_r \geqq \lambda_s'$. Poi

$$\int_g f \cdot dt = \Sigma_n \lambda_n . \mu(\gamma_n) = \Sigma_{rs} \lambda_r . \mu(\gamma_{r,s})$$

$$\int_g \varphi \cdot dt = \Sigma_n \lambda_n' . \mu(\gamma_n') = \Sigma_{rs} \lambda_s' . \mu(\gamma_{r,s}) ,$$

e quindi

$$\int_g f \cdot dt \geqq \int_g \varphi \cdot dt . \qquad \text{c. d. d.}$$

Consegue il

Cor. - Se f è una quasi-costante sommabile in g, si ha

$$\int_g |f| dt \geqq \int_g f \cdot dt .$$

Teor. 2. - La somma di due funzioni quasi-costanti sommabili in g è essa pure sommabile in g, e si ha

$$\int_g (f+\varphi)\,dt = \int_g f\cdot dt + \int_g \varphi\cdot dt\,.$$

Dim. – Intanto se (1) sono i diversi valori che acquista f, se (5) sono i diversi valori che acquista φ, se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f=\lambda_n$, e se γ'_n è l'aggregato dei punti in cui $\varphi=\lambda'_n$, se $\gamma_{r,s}$ è il prodotto degli aggregati γ_r e γ'_s, si ha

$$\Sigma_{rs}(\lambda_r+\lambda'_s)\,\mu(\gamma_{r,s}) = \Sigma_{rs}\lambda_r\mu(\gamma_{r,s}) + \Sigma_{rs}\lambda'_s\mu(\gamma_{r,s})\,,$$

ma le ultime due serie sono assolutamente convergenti a causa della sommabilità delle f e φ, dunque anche la prima serie è assolutamente convergente, e quindi la $f+\varphi$ è sommabile. Ed inoltre dalla precedente uguaglianza consegue

$$\int_g (f+g)\,dt = \int_g f\cdot dt + \int_g \varphi\cdot dt\,. \qquad \text{c. d. d.}$$

Teor. 3. – Una quasi-costante sommabile in un aggregato g è anche sommabile in ogni sub-aggregato misurabile di g.

Dim. - Infatti se f è una quasi-costante sommabile in g, se (1) sono i diversi valori che essa assume, se γ_n è l'aggregato dei punti di g in cui $f=\lambda_n$, se g' è un sub–aggregato misurabile di g, e se γ'_n è il prodotto di g' con γ_n, è $\mu(\gamma'_n)\leqq\mu(\gamma_n)$ e quindi $|\lambda_n\mu(\gamma'_n)|\leqq|\lambda_n\mu(\gamma_n)|$, e dalla convergenza assoluta della serie (3) consegue la convergenza assoluta della serie

$$\Sigma_n\lambda_n\cdot\mu(\gamma'_n)\,,$$

e quindi la sommabilità di f in g'.

Teor. 4. - Se

(6) $$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

sono degli aggregati misurabili a due a due distinti, se g è la loro somma, e se f è una quasi-costante sommabile in g, si ha

$$\int_g f\cdot dt = \Sigma\int_{g_n} f\cdot dt\,.$$

Dim. - Se (1) sono i diversi valori che f acquista in g, e se γ_n è l'aggregato dei punti di g in cui $f=\lambda_n$, e se $\gamma_{r,s}$ è il prodotto di g_r con γ_s, si ha

$$\mu(\gamma_s) = \Sigma_n \mu(\gamma_{n,s}),$$

e quindi

$$\int_g f \cdot dt = \Sigma_s \lambda_s \cdot \mu(\gamma_s) = \Sigma_{sn} \lambda_s \cdot \mu(\gamma_{n,s}) = \Sigma_n \Sigma_s \lambda_s \cdot \mu(\gamma_{n,s}) = \Sigma_n \int_{g_n} f \cdot dt.$$

c. d. d.

Teor. 5. – Se (6) sono degli aggregati misurabili a due a due distinti, se g è la loro somma, e se f è una quasi-costante sommabile in ciascuno degli aggregati (6), e se è convergente la serie

$$\Sigma_n \int_{g_n} |f| dt,$$

la f è sommabile in g (e quindi si può applicare il teor. prec.).

Dim. – Siano (1) i valori di f in g, sia γ_n l'aggregato di punti di g, in cui $f = \lambda_n$, e sia $\gamma_{r,s}$ il prodotto di g_r e di γ_s. Sarà

$$\int_{g_n} |f| dt = \Sigma_s |\lambda_s \cdot \mu(\gamma_{n,s})|$$

e, per l'ipotesi fatta, convergerà la serie

$$\Sigma_n \int_{g_n} |f| dt = \Sigma_{ns} |\lambda_s \mu(\gamma_{n,s})|$$

$$= \Sigma_s |\lambda_s \mu(\gamma_s)|,$$

e quindi la f è sommabile in g.

Teor. 6. – Se f è una quasi-costante sommabile in g, anche $C \cdot f$, dove C è una costante, è una quasi-costante sommabile in g, ed è

$$\int_g C \cdot f \cdot dt = C \cdot \int_g f \cdot dt.$$

Dim. – Se (1) sono i diversi valori che f assume in g, e se γ_n è l'aggregato dei punti in cui $f = \lambda_n$, la $C \cdot f$ ha in γ_n il valore $C \cdot \lambda_n$, e quindi è quasi-costante, ed inoltre, convergendo assolutamente la serie (2), converge assolutamente anche la serie $\Sigma_n C \cdot \lambda_n \cdot \mu(\gamma_n)$, e quindi $C \cdot f$ è sommabile in g. Inoltre essendo $\Sigma_n C \cdot \lambda_n \cdot \mu(\gamma_n) = C \cdot \Sigma_n \lambda_n \cdot \mu(\gamma_n)$ è

$$\int_g C \cdot f \cdot dt = C \cdot \int_g f \cdot dt$$

c. d. d.

4. Teor. – Se f è una funzione generalmente costante in g, e se $\mu(g)$ è un numero finito, e se C è il valore di f, la f è sommabile in g, ed è

$$\int_g f \cdot dt = C \cdot \mu(g).$$

Dim. – Infatti la f è quasi-costante, e la corrispondente serie (2) si riduce al solo termine $C \cdot \mu(g)$, e quindi la f è sommabile in g, ed $\int_g f \cdot dt = C \cdot \mu(g)$.

c. d. d.

7.

Funzioni misurabili sommabili e loro integrazione.

1. Maggioranti e minoranti di una funzione misurabile. — 2. Funzioni sommabili e loro integrale. — 3. Alcuni teoremi. — 4. Teorema del valor medio.

1. Def. – Si chiama *maggiorante* di una funzione f misurabile in g, ogni funzione φ quasi-costante per la quale è generalmente in g soddisfatta la disuguaglianza $\varphi \geq f$; e si chiama *minorante* di f ogni funzione quasi-costante ψ, per cui sia $\psi \leq f$ generalmente in g.

Teor. – Se una funzione f misurabile in g ha una maggiorante φ ed una minorante ψ sommabili in g, esistono innumerevoli di tali maggioranti e di tali minoranti, ed i loro integrali estesi a g formano due classi contigue.

Dim. – Dividiamo la retta r, su cui giace g, in segmenti di lunghezza 1. In ciascuno di questi segmenti sarà contenuto un sub-aggregato di g misurabile e di misura ≤ 1.

Siano

$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

questi aggregati. Allora g sarà la somma di questi g_n, e sarà $\mu(g_n) \geq 1$.

In g_n le φ e ψ sono quasi-costanti, sommabili (p. 22, teor. 3).

Siano

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

i valori di φ in g, e

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

i valori di ψ in g.

Sia $g_{n,r,s}$ l'aggregato di punti di g_n in cui $\varphi = l_r$ e $\psi = \lambda_s$. Sarà

$$\Sigma_{rs} \mu(g_{n,r,s}) = \mu(g_n).$$

Dividiamo l'intervallo (l_r, λ_s) in un numero finito di parti di lunghezza $< \varepsilon : 2^n$, dove ε è un qualunque numero reale > 0 prefissato. L'aggregato $g_{n,r,s}$ resterà diviso in un numero finito di sub-aggregati $g_{n,r,s,q}$ in ciascuno dei quali la f è sempre compresa in una medesima di dette parti di (l_r, λ_s), i cui estremi noi indicheremo con $l_{n,r,s,q}$ e $\lambda_{n,r,s,q}$ $\quad (l_{n,r,s,q} \geq \lambda_{n,r,s,q})$.

Poichè

$$l_r \geq l_{n,r,s,q} \geq \lambda_{n,r,s,q} \geq \lambda_s,$$

essendo assolutamente convergenti le serie

$$\Sigma_{nrsq} l_r \mu(g_{n,r,s,q}), \quad \Sigma_{nrsq} \lambda_s \mu(g_{n,r,s,q}),$$

lo sono anche le serie

$$\Sigma_{nrsq} l_{n,r,s,q} \mu(g_{n,r,s,q}), \quad \Sigma_{nrsq} \lambda_{n,r,s,q} \mu(g_{n,r,s,q}), \text{ [1]}$$

e quindi la funzione φ_1, che in ogni $g_{n,r,s,q}$ ha il valore $l_{n,r,s,q}$, e la funzione ψ_1, che in ogni $g_{n,r,s,q}$ ha il valore $\lambda_{n,r,s,q}$, sono

[1] Infatti se $a_n \geq b_n > c_n$ è $|b_n| \leq |a_n| + |c_n|$, e quindi, se le serie $\Sigma_n a_n$ e $\Sigma_n c_n$ sono assolutamente convergenti, converge la serie $\Sigma_n (|a_n| + |c_n|)$ ed infine la serie $\Sigma_n |b_n|$, e però la serie $\Sigma_n b_n$ è assolutamente convergente.

delle quasi-costanti sommabili in g, e la φ_1 è una maggiorante di f, e la ψ_1 è una minorante di f.

Si ha subito

$$\int_g \varphi_2 \cdot dt - \int_g \psi_1 \cdot dt = \Sigma_{nrsq} (l_{n,r,s,q} - \lambda_{n,r,s,q})\, \mu(g_{n,r,s,q})$$
$$\leq \Sigma_n (\varepsilon : 2^n) \Sigma_{rsq}\, \mu(g_{n,r,s,q})$$
$$= \Sigma_n (\varepsilon : 2^n)\, \Sigma_{rs} \mu(g_{n,r,s})$$
$$= \Sigma_n (\varepsilon : 2^n) \cdot \mu(g_n) \leq \Sigma_n (\varepsilon : 2^n) \leq \varepsilon .$$

Ma ε può essere preso piccolo a piacere, e quindi gli integrali delle maggioranti e delle minoranti sommabili di f formano due classi contigue. c. d. d.

2. Def. 1. – Una funzione misurabile si dice *sommabile* se ammette una maggiorante ed una minorante sommabili.

Def. 2. – Se f è una funzione sommabile in g, il numero di separazione delle classi formate cogli integrali in g delle maggioranti e delle minoranti sommabili si chiama l'*integrale* di f, e si indica con

$$\int_g f \cdot dt .$$

3. Teor. 1. – Se f è una funzione misurabile in g, e se in tutto g (escluso al più un aggregato trascurabile) è $f \geq 0$; condizione necessaria e sufficiente perchè f sia sommabile in g è che f abbia una maggiorante sommabile in g.

Dim. – Infatti la funzione ψ, che è nulla in tutto g, è una minorante di f sommabile in g, e quindi f ha una maggiorante ed una minorante sommabili, ed allora è essa stessa sommabile.

Teor. 2. – Se f è una funzione sommabile in g, ed è in tutto g (escluso al più un aggregato trascurabile) $f \geq 0$, si ha

$$\int_g f \cdot dt \geq 0 .$$

Dim. – Infatti l'integrale della minorante nulla di f è uguale a *zero*.

Teor. 3. – Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f sia sommabile in g è che il suo modulo $|f|$ sia sommabile in g.

Dim. Intanto, se $|f|$ è sommabile in g, e se φ è una maggiorante sommabile di $|f|$; la φ è pure maggiorante di f, e $-\varphi$ è minorante (evidentemente sommabile) (p. 23, teor. 6), e quindi f è sommabile. Inversamente, se f è sommabile, e se φ e ψ sono una sua maggiorante ed una sua minorante sommabili; dalle $\varphi \geq f \geq \psi$ consegue $|f| \leq |\varphi| + |\psi|$. Inoltre $|\varphi|$ e $|\psi|$ sono sommabili (p. 20, § 1, def.), e quindi $|\varphi| + |\psi|$ è sommabile (p. 21, teor. 2), ed infine $|f|$ è sommabile (v. il prec. teor. 1).

Teor. 4. – Se f è sommabile in g, e se g' è un aggregato distinto da g; la funzione f_1, che in g coincide colla f, e che è nulla in g', è sommabile in $\gamma = g + g'$ ed è $\int\limits_\gamma f_1 \cdot dt = \int\limits_g f \cdot dt$.

Dim. – Basta considerare le maggioranti e minoranti di f_1 che sono nulle in g'.

4. Teorema del valor medio. – Se f è una funzione sommabile in un aggregato g di misura finita, è

$$\int\limits_g f \cdot dt = M \cdot \mu(g),$$

dove M è un numero compreso fra il limite inferiore l ed il limite superiore L di f in g.

Dim. – Infatti, se l è finito, la funzione che in tutti i punti di g ha il valore l è una minorante sommabile di f, il cui integrale vale $l\ \mu(g)$ (p. 24, § 4, teor.). Si conclude che

$$l \cdot \mu(g) \leq \int\limits_g f \cdot dt.$$

Analogamente, se L è finito, si ha

$$L \cdot \mu(g) \geq \int\limits_g f \cdot dt.$$

Basta questo per provare che, quando uno dei due numeri l ed L è finito, vale il teorema.

Se poi l ed L sono entrambi infiniti, il teorema è evidente per se, perchè allora sarà $l = -\infty$ ed $L = +\infty$.

8.

Proprietà generali degli integrali delle funzioni sommabili.

1. Integrale di somma di funzioni sommabili. — 2. Integrali estesi a somme di aggregati. — 3. Integrali di differenza di funzioni sommabili. — 4. Altri teoremi sugli integrali. — 5. Assoluta continuità.

1. Teor. 1. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni sommabili in g, anche $f_1 + f_2$ è sommabile in g [1], ed è

$$\int_g (f_1 + f_2)\,dt = \int_g f_1 \cdot dt + \int_g f_2 \cdot dt .$$

Dim. Intanto, se φ_1 è una maggiorante sommabile di f_1, e se φ_2 è una maggiorante sommabile di f_2; la $\varphi_1 + \varphi_2$ è una maggiorante di $f_1 + f_2$, ed è sommabile (p. 21, teor. 2). In modo analogo si vede che $f_1 + f_2$ ha una minorante sommabile, e si può concludere che $f_1 + f_2$ è sommabile in g.

Se poi si osserva che, se φ_1 e φ_2 sono maggioranti sommabili di f_1 ed f_2, e, se ψ_1 e ψ_2 sono minoranti sommabili di f_1 ed f_2, si ha (p. 21, teor. 2)

$$\int_g (\varphi_1 + \varphi_2)\,dt = \int_g \varphi_1 \cdot dt + \int_g \varphi_2 \cdot dt \geq \int_g (f_1 + f_2)\,dt ,$$

$$\int_g (\psi_1 + \psi_2)\,dt = \int_g \psi_1 \cdot dt + \int_g \psi_2 \cdot dt \leq \int_g (f_1 + f_2)\,dt ,$$

e si conclude che

$$\int_g (f_1 + f_2)\,dt = \int_g f_1 \cdot dt + \int_g f_2 \cdot dt . \qquad \text{c. d. d.}$$

Consegue il

Teor. 2. – La somma di un numero finito di funzioni sommabili in un medesimo aggregato g è pure una funzione somma-

[1] Con $f_1 + f_2$ indico la funzione, generalmente definita in g, che nei punti in cui f_1 ed f_2 sono entrambe definite vale la loro somma.

bile in g, e l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni.

2. Teor. 1. Una funzione f sommabile in g è anche sommabile in qualunque sub-aggregato g' misurabile di g.

Dim. - Infatti ogni maggiorante sommabile di f in g è maggiorante di f in g', ed è sommabile in g' (p. 22, teor. 3). Analogamente ogni minorante sommabile di f in g è anche una minorante di f in g', ed è sommabile in g'. Consegue che f è sommabile in g' (p. 26, def. 1).

Teor. 2. - Siano

(1) $$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

degli aggregati misurabili di punti di una stessa retta, a due a due distinti, in numero finito od in una infinità numerabile, e sia g la loro somma. Allora, per ogni funzione f sommabile in g, si ha

$$\int_g f\cdot dt = \Sigma_n \int_{g_n} f\cdot dt\,.$$

Dim. - Siano φ e ψ una maggiorante ed una minorante di f sommabili in g. Esse sono tali anche nei singoli g_n, e si ha

$$\int_{g_n} \varphi\cdot dt \geq \int_{g_n} f\cdot dt \geq \int_{g_n} \psi\cdot dt\,,$$

e, sommando rispetto ad n, si ha (p. 22, teor. 4)

$$\int_g \varphi\cdot dt \geq \Sigma_n \int_{g_n} f\cdot dt \geq \int_g \psi\cdot dt\,.$$

Dunque $\Sigma_n \int_{g_n} f\, dt$ è compreso fra gli integrali delle maggioranti e delle minoranti sommabili di f in g, e quindi è uguale ad $\int_g f\cdot dt$. c. d. d.

Cor. - Se f è una funzione sommabile in g, se g' è un sub-aggregato misurabile di g, se infine $\delta = g - g'$, si ha

$$(2) \qquad \int_\delta f \cdot dt = \int_g f \cdot dt - \int_{g'} f \cdot dt .$$

Dim. - Infatti, essendo $g = g' + \delta$, è, pel teor. prec.,

$$\int_g f \cdot dt = \int_{g'} f \cdot dt + \int_\delta f \cdot dt ,$$

da cui consegue la (2)

Teor. 3. - Se (1) sono degli aggregati misurabili di punti di una medesima retta, a due a due distinti, in numero finito od in una infinità numerabile, se g è la loro somma, e se f è una funzione sommabile in ciascuno degli aggregati (1), e se è convergente la serie

$$\Sigma_n \int_{g_n} |f| dt$$

(questa ultima condizione è verificata se gli aggregati (1) sono in numero finito); la f è sommabile in g, ed è, in virtù del precedente teorema,

$$\int_g f \cdot dt = \Sigma_n \int_{g_n} f \cdot dt .$$

Dim. - Poichè $|f|$ è sommabile in g_n, è possibile trovare in g_n una maggiorante φ_n di $|f|$ per cui

$$(3) \qquad \int_{g_n} \varphi_n \cdot dt \leq \int_{g_n} |f| dt + 1 : 2^n .$$

Ora se φ è la funzione, definita generalmente in g, che in ogni g_n coincide generalmente con φ_n, la (3) diventa

$$(3') \qquad \int_{g_n} \varphi \cdot dt \geq \int_{g_n} |f| dt + 1 : 2^n ,$$

e poichè la serie che ha per termini i secondi membri delle (3') converge, ed i primi membri delle (3') sono positivi, converge la serie

$$\Sigma_n \int_{g_n} \varphi \cdot dt = \Sigma_n \int_{g_n} |\varphi| \, dt ,$$

e quindi la φ è sommabile in g (p. 23, teor. 5). Ma φ è una maggiorante di $|f|$ in g, e quindi $|f|$ è sommabile in g (p. 26, teor. 1 e 3).

Cor. 1. - Supponiamo che (1) siano una infinità numerabile di aggregati misurabili di punti di un medesima retta, a due a due distinti, e che g sia la loro somma. Se f è una funzione sommabile in ciascuno degli aggregati (1), e se esiste un n_1 tale che in $g - \Sigma_r{}_1^{n_1} g_r$ sia $f > 0$, e se inoltre la serie

$$\Sigma_n \int_{g_n} f \cdot dt$$

converge; la f è sommabile in g, e quindi vale la

$$\int_g f \cdot dt = \Sigma_n \int_{g_n} f \cdot dt .$$

Dim. - Infatti, nelle nostre ipotesi, essendo $f = |f|$ nei g_n con $n > n_1$, e quindi in tali g_n $\int_{g_n} |f| dt = \int_{g_n} f \cdot dt$, consegue che, essendo convergente la $\Sigma_n \int_{g_n} f \cdot dt$, lo è la $\Sigma_n \int_{g_n} |f| dt$, e si può applicare il teor. 3.

Cor. 2. - Se

(4) $$\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3 , \ldots$$

è una infinità numerabile di aggregati misurabili, ciascuno contenuto nel successivo, e se g è la loro somma, se f è una funzione sommabile in ciascuno degli aggregati (4), e se esiste un n_1 tale che in $g - \gamma_{n_1}$ sia $f > 0$, e se inolfre esiste ed è finito il $\lim_{n=\infty} \int_{\gamma_n} f \cdot dt$; la f è sommabile in g, ed è

$$\int\limits f\cdot dt=\lim_{n=\infty}\int\limits_{\gamma_n} f\cdot dt\,.$$

Dim. – Infatti le ipotesi e la tesi di questo cor. si riducono a quelle del precedente, se si pone

$$g_1=\gamma_1\,,\ g_2=\gamma_2-\gamma_1\,,\ g_3=\gamma_3-\gamma_2\,,\ldots$$

3. Teor. 1. – Se f è sommabile in g, anche $C\cdot f$, dove C è una costante, è sommabile in g, ed è

$$\int\limits_g C\cdot f\cdot dt=C\cdot\int\limits_g f\cdot dt\,.$$

Dim. – Infatti se φ e ψ sono una maggiorante ed una minorante di f sommabili in g, anche le $C\cdot\varphi$ e $C\cdot\psi$ sono una maggiorante ed una minorante di $C\cdot f$ sommabili in g (la $C\cdot\varphi$ sarà la maggiorante se $C>0$, ed altrimenti sarà la minorante). Ed allora l' $\int\limits_g C\cdot f\cdot dt$, essendo compreso fra $\int\limits_g C\cdot\varphi\, dt=C\cdot\int\limits_g\varphi\cdot dt$ e $\int\limits_g C\cdot\psi\cdot dt=C\cdot\int\limits_g\psi\cdot dt$, coinciderà con $C\cdot\int\limits_g f\cdot dt$.

Cor. – Se f è sommabile in g, anche $-f$ è sommabile in g, ed è

$$\int\limits_g(-f)\,dt=-\int\limits_g f\cdot dt\,.$$

Teor. 2. – Se f_1 ed f_2 sono due funzioni sommabili in g, anche f_1-f_2 è sommabile in g, ed è

$$\int\limits_g(f_1-f_2)\,dt=\int\limits_g f_1\cdot dt-\int\limits_g f_2\cdot dt\,.$$

Dim. – Infatti

$$f_1-f_2=f_1+(-f_2)\,,$$

e quindi, essendo f_1 e $-f_2$ sommabili, si ha (p. 28, teor. 1)

$$\int_g (f_1 - f_2)\,dt = \int_g f_1 \cdot dt + \int_g (-f_2)\,dt = \int_g f_1 \cdot dt + (-\int_g f_2 \cdot dt)$$
$$= \int_g f_1 \cdot dt - \int_g f_2 \cdot dt\,.$$

Teor. 3. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni sommabili in g, e si ha, generalmente in g, $f_1 \geqq f_2$, è

$$\int_g f_1 \cdot dt \geqq \int_g f_2 \cdot dt\,.$$

Dim. - Infatti, essendo, generalmente in g, $f_1 - f_2 \geqq 0$, è $\int_g (f_1 - f_2)\,dt \geqq 0$ (p. 26, teor. 2), e quindi $\int_g f_1 \cdot dt - \int_g f_2 \cdot dt \geqq 0$, ed infine $\int_g f_1 \cdot dt \geqq \int_g f_2 \cdot dt$. c. d. d.

4. Teor. 1. - Se f è sommabile in g, se (1) sono dei subaggregati misurabili di g, ciascuno contenuto nel precedente, e se g' è il loro prodotto, si ha

$$\int_{g'} f \cdot dt = \lim_{n=\infty} \int_{g_n} f \cdot dt\,.$$

Dim. - Infatti, se si pone

$$\delta_n = g_n - g_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,,$$

si ha

$$g_n = g_1 - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{n-1})\,,$$

e

$$g' = g_1 - \Sigma_n \delta_n\,,$$

e quindi (p. 29, teor. 2 e cor.)

$$\int_{g'} f \cdot dt = \int_{g_1} f \cdot dt - \Sigma_n \int_{\delta_n} f \cdot dt = \lim_{n=\infty} \Big[\int_{g_1} f \cdot dt - \Big(\int_{\delta_1} f \cdot dt + \int_{\delta_2} f \cdot dt +$$
$$+ \ldots + \int_{\delta_{n-1}} f \cdot dt \Big) \Big] = \lim_{n=\infty} \int_{g_n} f \cdot dt \qquad \text{c. d. d.}$$

Teor. 2. – Se f è sommabile in g, si ha

$$\left|\int_g f\cdot dt\right| \leq \int_g |f| dt .$$

Dim. – Sia g' l'aggregato in cui $f > 0$ e $g'' = g - g'$.
È $\int_{g'} f\cdot dt = \int_{g'} |f| dt$ e $\int_{g''} f\cdot dt = -\int_{g''} |f| dt$, e quindi

$$\left|\int_g f\cdot dt\right| = \left|\int_{g'} |f|\, dt - \int_{g''} |f| dt\right| \leq \int_{g'} |f| dt + \int_{g''} |f| dt = \int_g |f| dt . \quad \text{c. d. d.}$$

5. Sia f una funzione sommabile e generalmente ≥ 0 in g, ed, essendo n un qualunque numero intero > 0, indichiamo con g_n l'aggregato dei punti in cui $f \leq n$. Poniamo poi $\delta_n = g - g_n$. Il prodotto degli aggregati δ_n è di misura nulla, e quindi

$$\lim_{n=\infty} \int_{\delta_n} f\cdot dt = 0 . \qquad \text{(p. 33, teor. 1).}$$

Allora, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un valore n' di n per cui $\left|\int_{\delta_{n'}} f\cdot dt\right| < \varepsilon : 2$.

Se ora si pone

$$m < \varepsilon : 2\, n' ,$$

si vede che, se γ è un qualunque sub-aggregato misurabile di g per cui $\mu(\gamma) < m$, se γ' indica il prodotto di γ e di g_n, e γ'' indica il prodotto di γ e $\delta_{n'}$, è $\gamma = \gamma' + \gamma''$, ed inoltre

$$\int_{\gamma'} f\cdot dt < n' \cdot m < n' . (\varepsilon : 2\, n') = \varepsilon : 2 ,$$

$$\int_{\gamma''} f\cdot dt < \int_{\delta_{n'}} f\cdot dt < \varepsilon : 2 ,$$

ed infine

$$\int_{\gamma} f\cdot dt = \int_{\gamma'} f\cdot dt + \int_{\gamma''} f\cdot dt < \varepsilon : 2 + \varepsilon : 2 = \varepsilon .$$

Si conclude che, se f è una funzione sommabile e generalmente ≥ 0 in g, è possibile, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero reale $m > 0$ tale, che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g di misura $< m$, si abbia $\int_\gamma f \cdot dt < \varepsilon$.

Ne consegue che, se f è una qualunque funzione sommabile in g, è possibile, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero reale $m > 0$ tale che per ogni sub–aggregato misurabile γ di g di misura $< m$, si abbia $\int_\gamma |f| dt < \varepsilon$, e poichè (p. 34, teor. 2)

$$|\int_\gamma f \cdot dt| \leq \int_\gamma |f| dt,$$

si ha il

Teor. 1. – Se f è una funzione sommabile in g, è possibile, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un numero reale $m > 0$ tale che per ogni sub-aggregato misurabile γ di g, con $\mu(\gamma) < m$, si abbia

$$|\int_\gamma f \cdot dt| < \varepsilon.$$

Def. – La proprietà delle funzioni sommabili enunciata dal teorema precedente si suole indicare dicendo che l' integrale di una funzione sommabile è *assolutamente continuo.*

Teor. 2. – Se f è una funzione sommabile in un aggregato g di punti di una retta r, se t indica un punto qualunque di r, e se g_t è l' aggregato dei punti di g che cadono alla sinistra di t, la funzione

$$F(t) = \int_{g_t} f \cdot dt.$$

è continua.

Dim. – Intanto, per l' assoluta continuità dell' integrale di f, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero reale $m > 0$ tale che, per ogni sub–aggregato misurabile γ di g per cui $\mu(\gamma) < m$, si abbia $\left|\int_\gamma f.\, dt\right| < \varepsilon$. Allora, se $|h| < m$, è

$$|F(t+h) - F(t)| = \left|\int_{g_{t+h}} f\cdot dt - \int_{g_t} f\cdot dt\right| = \left|\int_{g_{th}} f\cdot dt\right| < \varepsilon,$$

dove g_{th} indica l'aggregato dei punti di g che cadono nel tratto che ha per estremi i punti t e $t+h$, aggregato che ha certamente misura $\leq h$, e quindi misura $< m$.

Allora, qualunque sia il numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $m > 0$ tale che, per ogni h con valore assoluto $< m$, si abbia

$$|F(t+h) - F(t)| < \varepsilon,$$

e questo significa che la $F(t)$ è continua. c. d. d.

9.

Funzioni limitate.

1. Funzioni ad integrale nullo. — 2. Funzioni misurabili limitate. — 3. Sommabilità di una funzione sommabile limitata in un aggregato di misura finita. — 4. Sistema di infinite funzioni ugualmente limitate. — 5. Permutabilità di limite ed integrale. — 6. Funzioni integrabili secondo Riemann.

1. Def. – Una funzione sommabile in un aggregato g si dice ad *integrale nullo*, se in qualunque sub-aggregato misurabile g' di g, si ha

$$\int_{g'} f\cdot dt = 0.$$

Teor. 1. – Se, generalmente in g, è $f \geq 0$, e se $\int_g f\cdot dt = 0$, la f è ad integrale nullo.

Dim. – Infatti, se γ è un sub-aggregato misurabile di g, posto $\delta = g - \gamma$, si ha $\int_\gamma f\cdot dt = \int_g f\cdot dt - \int_\delta f\cdot dt \leq \int_g f\cdot dt = 0$, ed inoltre

$\int_\gamma f\cdot dt \geq 0$, dunque $\int_\gamma f\cdot dt = 0$, e quindi la f è ad integrale nullo in g.

Teor. 2. – Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f sommabile in g sia ad integrale nullo è che essa sia generalmente nulla.

Dim. – Intanto, se f è generalmente nulla, il suo integrale esteso a qualunque sub-aggregato misurabile di g è nullo (p. 24, § 4) e quindi la f è ad integrale nullo. Se poi f è generalmente ≥ 0 in g senza essere generalmente nulla, esisterà un sub-aggregato γ di g di misura >0 in cui f resta $>$ di un numero fisso $p>0$ ed allora $\int_\gamma f\cdot dt > \int_\gamma p\cdot dt = p\cdot\mu(\gamma) > 0$, e la f non è ad integrale nullo. Si conclude che, se f è generalmente ≥ 0, ed è ad integrale nullo, essa è generalmente nulla.

Infine, se f è una funzione sommabile in g ad integrale nullo, se γ è il sub-aggregato di g in cui è $f \geq 0$, poichè evidentemente f è ad integrale nullo anche considerata in γ, essa è in γ generalmente nulla. In $g-\gamma$ la $-f$ è generalmente ≥ 0 ed è pure ad integrale nullo, quindi $-f$ è in $g-\gamma$ generalmente nulla; ed infine f è in $g-\gamma$ generalmente nulla. Allora, essendo f generalmente nulla tanto in γ quanto in $g-\gamma$, lo è anche nella somma di questi due aggregati, e quindi la f è generalmente nulla in g.

Teor. 3. – Sia f una funzione sommabile in g, sia g_t l'aggregato dei punti di g che precedono il punto t della retta r su cui giace g. Se, qualunque sia t, si ha $\int_{g_t} f\cdot dt = 0$, la f è generalmente nulla in g.

Dim. – Basta provare che, nelle ipotesi del teor., la f ha nulli tutti gli integrali estesi ai vari sub-aggregati misurabili di g. Intanto, se (p, q) è un tratto qualunque di r e se $p \leq q$, l'aggregato dei punti di g che cadono in (p, q) è la differenza di g_q e g_p, e, poichè l'integrale di f esteso ad esso è $\int_{g_q} f\cdot dt - \int_{g_p} f\cdot dt = 0 - 0 = 0$, si conclude che $\int_\gamma f \cdot dt = 0$ tutte le volte che γ è l'aggregato dei punti di g che cadono in un tratto. E poichè ogni boreliano semplice è l'insieme di un numero finito o di una infinità numerabile di tratti, si conclude (p. 29, teor. 2) che l'integrale di f esteso all'aggregato dei punti di g che appartengono (o come interni o come estremi) ai vari tratti di un boreliano semplice, ha valore *zero*.

Consideriamo ora un qualunque sub-aggregato misurabile γ di g, e passiamo a provare che si ha $\int_\gamma f \cdot dt = 0$. Intanto, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero reale $m > 0$ tale che in ogni sub-aggregato misurabile di g, di misura $< m$, il modulo dell'integrale di f esteso ad esso sia $< \varepsilon$.

Consideriamo ora una copertura c di γ, tale che $\mu(c - \gamma) < m$. Evidentemente, se γ' è il prodotto di g e c, γ è un sub-aggregato di γ'. Inoltre, se poniamo $\delta = \gamma' - \gamma$, è $\mu(\delta) < m$. Allora

$$\left|\int_\delta f \cdot dt\right| < \varepsilon,$$

$$\int_{\gamma'} f \cdot dt = 0,$$

e quindi

$$\left|\int_\gamma f \cdot dt\right| = \left|\int_{\gamma'} f \cdot dt - \int_\delta f \cdot dt\right| \leq \left|\int_\delta f \cdot dt\right| < \varepsilon.$$

E per l'arbitrarietà di ε

$$\int_\gamma f \cdot dt = 0. \qquad \text{c. d. d.}$$

Teor. 4. – Sia f una funzione sommabile in g, sia g_t l'aggregato dei punti di g che sono alla sinistra di un punto t della retta r su cui giace g; se per ogni valore razionale di t si ha $\int_{g_t} f \cdot dt = 0$, la f è generalmente nulla in g.

Dim. – Basta provare che nell'ipotesi del teorema sono nulli tutti gli integrali $\int\limits_{g_t} f \cdot dt$, qualunque sia t. Ciò è evidente, perchè la funzione $F(t) = \int\limits_{g_t} f \cdot dt$ è continua, ed essendo nulla per tutti i valori razionali di t, è nulla per qualunque valore di t.

2. Def. – Una funzione f, definita generalmente in g, si dice *limitata*, se esiste un numero reale $M > 0$ per cui sia, generalmente in g, $|f| < M$.

3. Teor. – Una funzione f misurabile e limitata in un aggregato g di misura finita è sommabile.

Dim. – Infatti, se M è un numero > 0, per cui sia, generalmente in g, $|f| < M$, la funzione φ che in tutto g è uguale ad M, e la funzione ψ che in tutto g è uguale a $-M$ sono una maggiorante ed una minorante di f sommabili (p. 24, teor.), e quindi f, ammettendo delle maggioranti e delle minoranti sommabili, è essa pure sommabile. c. d. d.

4. Def. – Più funzioni che costituiscono una infinità numerabile, definite generalmente in g, si dicono *ugualmente limitate*, se esiste un numero reale $M > 0$, per cui il modulo di ognuna di dette funzioni sia generalmente in g minore di M.

5. Teor. – Se

(1) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

è una successione di funzioni misurabili ed ugualmente limitate in un medesimo aggregato g di misura finita m, e se la (1) è generalmente convergente verso una funzione f, la f è limitata e misurabile, e si ha

$$\int\limits_g f \cdot dt = \lim_{n=\infty} \int\limits_g f_n \cdot dt .$$

Dim. – Intanto, per le ipotesi fatte, esisterà un sub-aggregato g' di g, con $\mu(g') = m$, ed un numero reale $M > 0$ tali che in ogni punto di g' la (1) converga e sia $|f_n| < M$, qualunque sia n.

Allora da $\lim\limits_{n=\infty} f_n = f$ consegue che in ogni punto di g' è $|f| \leq M < 2M$, e si conclude che la f è limitata. Essa inoltre è misurabile (p. 18, teor.), e quindi è sommabile (v. il prec. § 3).

Si ha poi

(2) $$|f_n - f| < |f_n| + |f| < 2M ,$$

qualunque sia n.

Prefissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$ e, per ogni intero i, indichiamo con g_i l'aggregato dei punti di g' in cui per ogni $n \geq i$ sia $|f_n - f| < \varepsilon : (2m)$. L'aggregato g_i è misurabile, perchè prodotto degli aggregati misurabili h_n $(n \geq i)$ in cui la funzione misurabile $|f_n - f|$ è $< \varepsilon : (2m)$. Per la convergenza della (1) verso f, ogni punto di g' appartiene a qualche g_i. Inoltre ogni aggregato della successione

$$g_1 , g_2 , g_3 , \ldots$$

è contenuto nel successivo, ed allora ogni aggregato della successione

(3) $$\delta_1 = g' - g_1 ,\ \delta_2 = g' - g_2 ,\ \delta_3 = g' - g_3 , \ldots$$

è misurabile e contiene il successivo, ed il prodotto degli aggregati (3) è nullo. Si conclude che

$$\lim_{i=\infty} \mu(\delta_i) = 0 ,$$

e quindi che esiste un i tale che, per ogni $n \geq i$, sia

$$\mu(\delta_n) < \varepsilon : (4M) .$$

Allora, per ogni $n \geq i$, è

$$\int_{g'} (f_n - f)\, dt = \int_{g_n} (f_n - f)\, dt + \int_{\delta_n} (f_n - f)\, dt ;$$

inoltre, essendo in g_n

$$|f_n - f| < \varepsilon : (2m),$$

è

$$\left| \int_{g_n} (f_n - f)\, dt \right| < [\varepsilon : (2m)] \cdot m = \varepsilon : 2 .$$

Ed, essendo la (2), è

$$\left|\int_{\delta_n}(f_n - f)\,dt\right| < 2M \cdot [\varepsilon : (4M)] = \varepsilon : 2 ,$$

e quindi si ha

$$\left|\int_{g'}(f_n - f)\,dt\right| < \varepsilon .$$

Questo significa che

$$\lim_{n=\infty}\int_{g'}(f_n - f)\,dt = 0 ,$$

ossia

$$\lim_{n=\infty}\int_{g'} f_n \cdot dt = \int_{g'} f \cdot dt ,$$

ed infine anche che

$$\lim_{n=\infty}\int_{g} f_n \cdot dt = \int_{g} f \cdot dt .$$

c. d. d.

6. Teor. – Se f è una funzione misurabile limitata integrabile secondo Riemann in un tratto finito (a, b), con $a < b$, e se con g indico l'aggregato dei punti che costituiscono il tratto (a, b), si ha

$$\int_{g} f \cdot dt = R\int_{a}^{b} f \cdot dt ,$$

dove con $R\int$ indico l'integrale secondo Riemann.

Dim. – Intanto ricordo che, se f è integrabile secondo Riemann in (a, b), se si divide il tratto (a, b) in un numero qualunque finito di parti, che si indicheranno esse e le loro lunghezze con

(1) $$h_1,\ h_2, \ldots ,$$

e se con L_i e con l_i si indicano il limite superiore ed inferiore di f in h_i, le sommatorie dei tipi

$$\Sigma_i L_i h_i , \qquad \Sigma_i l_i h_i$$

corrispondenti alle varie suddivisioni di (a, b) formano due classi contigue, ed il numero di separazione di queste classi è proprio l'integrale secondo Riemann della f esteso ad (a, b).

Per dimostrare il nostro teorema basterà allora provare che $\int_g f \cdot dt$ è il numero di separazione di dette classi. Ciò è facile, perchè, se si considera una divisione (1) di (a, b), e si indica con g_i l'aggregato dei punti di h_i, si ha

$$\int_g f \cdot dt = \Sigma_i \int_{g_i} f \cdot dt .$$

Ma

$$L_i h_i \geq \int_{g_i} f \cdot dt \geq l_i h_i ;$$

dunque

$$\Sigma_i L_i h_i \geq \int_g f \cdot dt \geq \Sigma_i l_i h_i ,$$

il che prova l'asserto.

10.

Funzioni a quadrato sommabile

1. Prime proprietà delle funzioni a quadrato sommabile. — 2. Funzioni normali. — 3. Coppie di funzioni fra loro ortogonali. — 4. Disuguaglianza di Schwarz.

1. Teor. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni a quadrato sommabile in un aggregato g, anche il prodotto $f_1 \cdot f_2$ è sommabile in g.

Dim. - Basta dimostrare che $|f_1 \cdot f_2|$ è sommabile in g (p. 26, teor. 3). Sia g_1 l'aggregato di punti g in cui $|f_1| > |f_2|$. In g_1 una maggiorante sommabile di f_1^2 lo è pure di $|f_1 \cdot f_2|$, e quindi la $|f_1 \cdot f_2|$ è sommabile in g_1 (p. 26, teor. 1). Inoltre in $g - g_1$ una maggiorante sommabile di f_2^2 lo è pure di $|f_1 \cdot f_2|$, e quindi

$|f_1 \cdot f_2|$ è sommabile in $g - g'$. Consegue che $|f_1 \cdot f_2|$ è sommabile in $g = g' + (g - g')$.

Cor. - Se f è una funzione a quadrato sommabile in un aggregato g a misura finita, la f è sommabile in g.

Dim. - Infatti la costante 1 in g è a quadrato sommabile in g, appunto perchè g ha misura finita (p. 24, teor. 4), e quindi il prodotto $1 \cdot f = f$ è sommabile in g.

Teor. 2. - Se f è a quadrato sommabile in g, anche $-f$ è a quadrato sommabile in g.

Dim. - Infatti $(-f)^2 = f^2$.

Teor. 3. - Se f_1 ed f_2 sono a quadrato sommabile in g, lo sono pure la loro somma e la loro differenza.

Dim. - Infatti $(f_1 \pm f_2)^2 = f_1^2 \pm 2 f_1 \cdot f_2 + f_2^2$, ed i singoli addendi del secondo membro sono sommabili in g.

Teor. 4. - Se una funzione f a quadrato sommabile in g non è generalmente nulla, è $\int_g f^2 dt > 0$.

Dim. - Infatti, essendo $f^2 \geq 0$, ed $\int_g f^2 \cdot dt = 0$, la f^2 è ad integrale nullo (p. 36, teor. 1) e quindi è generalmente nulla. (p. 37, teor. 2). È allora generalmente nulla anche la f.

2. - Def. 1. - Una funzione f a quadrato sommabile in g si dice *normale* in g se

$$\int_g f^2 \cdot dt = 1 .$$

Def. 2 - *Normalizzare* una funzione f a quadrato sommabile e non generalmente nulla in g significa trovare un fattore costante c per cui $f_1 = c \cdot f$ sia normale in g.

Perchè $c \cdot f$ sia normale in g dovrà essere

$$c^2 \cdot \int_g f^2 \cdot dt = 1 ,$$

e quindi

$$c = \pm 1 : \sqrt{\int_g f^2 \cdot dt} \; .$$

Si vede allora che normalizzando la f si trovano due funzioni normali che sono fra loro contrarie.

3. Def. – Due funzioni f_1 ed f_2, a quadrato sommabile in g, si dicono *ortogonali* in g, se

$$\int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt = 0 \; .$$

4. Teor. - Se f_1 ed f_2 sono due funzioni a quadrato som. mabile in g, si ha

$$\left(\int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt\right)^2 \leq \int_g f_1^2 \cdot dt \cdot \int_g f_2^2 \cdot dt$$

(*disuguaglianza di* Schwarz).

Dim. – Il teor. è evidente se una delle due funzioni f_1 ed f_2 è generalmente nulla, perchè allora i due membri della relazione da dimostrare sono entrambi nulli.

Se una delle funzioni non è generalmente nulla, p. es. f_2, è $\int_g f_2^2 \cdot dt > 0$, e noi possiamo porre

$$\int_g f_2^2 \cdot dt = b^2 \; .$$

Poniamo inoltre

$$a = \int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt \; .$$

Si ha

$$0 \leq \int_g \left(b \cdot f_1 - \frac{a}{b} \cdot f_2\right)^2 dt = b^2 \int_g f_1^2 \cdot dt - 2a \int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt + \frac{a^2}{b^2} \int_g f_2^2 \cdot dt$$

$$= b^2 \cdot \int_g f_1^2 \cdot dt - 2a \cdot a + \frac{a^2}{b^2} \cdot b^2$$

$$= b^2 \cdot \int_g f_1^2 \cdot dt - a^2$$

$$= \int_g f_2^2 \cdot dt \cdot \int_g f_1^2 \cdot dt - (\int_g f_1 f_2 dt)^2 ;$$

e di qui si deduce la disuguaglianza di SCHWARZ.

COR. 1. – Se f_1 ed f_2 sono due funzioni normali in g, si ha

$$(\int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt)^2 \leq 1,$$

e quindi anche

$$|\int_g f_1 \cdot f_2 \cdot dt| \leq 1 .$$

COR. 2. – Se f è una funzione a quadrato sommabile in un aggregato g a misura finita, si ha

$$(\int_g f \cdot dt)^2 \leq \mu(g) \cdot \int_g f^2 \cdot dt .$$

DIM. – Basta porre nella disuguaglianza di SCHAWARZ $f_1 = 1$ ed $f_2 = f$, ed osservare che

$$\int_g f_1^2 \cdot dt = \int_g 1 \cdot dt = \mu(g) \qquad \text{(p. 24, § 4)} .$$

PARTE II.

SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI ORTOGONALI

E

PRIME NOZIONI SULLO SPAZIO HILBERTIANO

1.

Successioni completamente convergenti.

1. Definizioni. — 2 e 3. Alcuni teoremi. — 4. Teorema fondamentale.

1. Nel seguito di questo libro indicherò con g un aggregato misurabile di misura finita.

Def. 1. - Una successione

(1) $$f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ldots$$

di funzioni, generalmente definite in g e sommabili, si dice *completamente convergente* in g, se esiste una funzione $f(t)$, generalmente definita in g e sommabile, per cui si abbia

$$\lim_{n=\infty}\int_g |f_n - f|\, dt = 0\ ;$$

ed in tale caso si dice che la $f(t)$ è una *quasi-limite* di (1).

Def. 2. - Si dice che gli integrali dei termini di una successione (1) di funzioni, generalmente definite e sommabili in g, sono *equi-assolutamente continui*, se, qualunque sia un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero reale $m > 0$ in modo che, per ogni sub-aggregato misurabile g' di g di misura $< m$, sia

$$\left|\int_{g'} f_n(t)\, dt\right| < \varepsilon\,,$$

qualunque sia l'intero n.

Def. 3. - Una successione (1) di funzioni, generalmente definite e sommabili in g, si dice una *successione V* in g, se si ha

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \int_g |f_n - f_m| \, dt = 0 .$$

2. Teor. 1. – Due funzioni quasi-limiti di una successione (1) completamente convergente sono generalmente uguali, e, viceversa, ogni funzione generalmente uguale ad una quasi-limite di di (1) è anche essa quasi-limite di (1).

Dim. – Infatti, siano f e φ due quasi-limiti di (1). Si ha, evidentemente, per ogni n,

$$0 \leq |f - \varphi| = |(f_n - f) - (f_n - \varphi)| \leq |f_n - f| + |f_n - \varphi| ,$$

ed, integrando lungo g,

$$0 \leq \int_g |f - \varphi| \, dt \leq \int_g |f_n - f| \, dt + \int_g |f_n - \varphi| \, dt .$$

Ma

$$\lim_{n=\infty} \int_g |f_n - f| \, dt = \lim_{n=\infty} \int_g |f_n - \varphi| \, dt = 0 ,$$

dunque

$$\int_g |f - \varphi| \, dt = 0 ,$$

e quindi $f - \varphi$ è generalmente nulla (pp. 36-37, teor. 1 e 2) ed f e φ sono generalmente uguali.

Viceversa, se f è una quasi-limite di (1), e se φ è generalmente uguale ad f, si ha

$$0 \leq |f_n - \varphi| = |(f_n - f) - (f - \varphi)| \leq |f_n - f| + |f - \varphi| .$$

Integrando lungo g, e tenendo conto della relazione

$$\int_g |f - \varphi| \, dt = 0 ,$$

si ha:

$$0 \leq \int_g |f_n - \varphi| \, dt \leq \int_g |f_n - f| \, dt .$$

Ma

$$\lim_{n=\infty}\int_g |f_n - f|\,dt = 0\,,$$

dunque $\lim\limits_{n=\infty}\int\limits_g |f_n - \varphi|\,dt = 0$ e la φ è quasi-limite di (1).

Teor. 2. - Se la (1) è completamente convergente, gli integrali dei suoi termini sono equi-assolutamente continui.

Dim. - Sia f un quasi-limite di (1), l'integrale di f è assolutamente continuo (p. 35) e quindi, prefissato un numero reale $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero reale $m' > 0$ tale che, per ogni sub-aggregato misurabile γ' di g, di misura $< m'$, sia $\left|\int\limits_{\gamma'} f \cdot dt\right| \leq \varepsilon : 2$, inoltre esiste un n' tale che per ogni $n > n'$ sia $\int\limits_g |f_n - f|\,dt < \varepsilon : 2$. Per tali n sarà $\int\limits_{\gamma'} |f_n - f|\,dt < \varepsilon : 2$.

Ma $f_n = (f_n - f) + f$, e quindi, per $n > n'$ e $\mu(\gamma') < m'$,

$$\left|\int_{\gamma'} f_n \cdot dt\right| \leq \left|\int_{\gamma'} (f_n - f)\,dt\right| + \left|\int_{\gamma'} f_n \cdot dt\right| \leq \int_{\gamma'} |f_n - f|\,dt + \left|\int_{\gamma'} f_n \cdot dt\right|$$

$$< \varepsilon : 2 + \varepsilon : 2 = \varepsilon\,.$$

D'altra parte è possibile trovare un $m'' > 0$ tale che, per ogni sub-aggregato misurabile γ'' di g di misura $< m''$, sia

$$\left|\int_{\gamma''} f_n \cdot dt\right| < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots, n').$$

Se indichiamo con m il più piccolo dei numeri m' ed m'', per ogni sub-aggregato misurabile g' di g di misura $< m$, sarà

$$\left|\int_{g'} f_n \cdot dt\right| < \varepsilon\,,$$

per ogni intero $n > 0$, e quindi gli integrali delle (1) sono equi-assolutamente continui.

Teor. 3. - Una successione (1) completamente convergente è una successione V.

Dim. - Infatti, se f è una quasi-limite di (1), si ha

$$\lim_{n=\infty}\int_g |f_n - f|\, dt = \lim_{m=\infty}\int_g |f_m - f|\, dt = 0 .$$

Inoltre $0 \leq |f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f_m - f|$, e quindi

$$0 \leq \int_g |f_n - f_m|\, dt \leq \int_g |f_n - f|\, dt + \int_g |f_m - f|\, dt .$$

Da cui $\lim_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\int_g |f_n - f_m|\, dt = 0$, e la (1) è una successione V.

3. Oss. - Nell' ipotesi che gli integrali delle (1) siano equi-assolutamente continui, esiste, prefissato un $\varepsilon > 0$, un $m > 0$ tale che per ogni sub-aggregato δ di g di misura $< m$ si abbia $\left|\int_\delta f_n\, dt\right| < \varepsilon : 2$. Ora, indicando con δ_n' il sub-aggregato di δ in cui la f_n è > 0, e posto $\delta_n'' = \delta - \delta_n'$, si ha

$$\int_\delta |f_n|\, dt = \int_{\delta_n'} |f_n|\, dt + \int_{\delta_n''} |f_n|\, dt = \left|\int_{\delta_n'} f_n\, dt\right| + \left|\int_{\delta_n''} f_n\, dt\right| < \varepsilon : 2 + \varepsilon : 2 = \varepsilon$$

e si conclude che sono equi-assolutamente continui anche gli integrali delle

(1′) $$|f_1|,\ |f_2|,\ \dots$$

Teor. - Se la (1) è una successione di funzioni, definite generalmente e sommabili in g, se la (1) converge generalmente verso una funzione f, e se gli integrali delle (1) sono equi-assolutamente continui, la (1) converge completamente, e la f è una sua quasi-limite.

Dim. - Comincio col dimostrare che la $|f|$ è sommabile.

Intanto la (1′) converge generalmente verso $|f|$.

Sia γ l'aggregato dei punti di g nei quali la successione (1′) converge.

Sia ρ un numero reale > 1, e si indichi con γ_n il sub-aggregato di γ in cui qualche funzione (1′) è $> \rho^n$. Gli aggregati

(2) $$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \dots .$$

sono misurabili (poichè somma di aggregati misurabili), e ciascuno di essi è contenuto nel precedente. Inoltre non esiste un punto di γ che appartenga a tutti i (2), poichè in un punto di γ la (1′) converge, quindi il prodotto dei (2) è nullo. Dunque

$$\lim_{n=\infty} \mu(\gamma_n) = 0 \qquad \text{(p. 13, § 3, teor. 2).}$$

Poniamo $\gamma'_n = \gamma - \gamma_n$. Sarà

$$(3) \qquad \int_{\gamma} |f_r|\, dt = \int_{\gamma_n} |f_r|\, dt + \int_{\gamma'_n} |f_r|\, dt \qquad \text{(p. 29, teor 2.).}$$

Per l'equi-assoluta continuità degli integrali delle (1′), fissato un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un numero reale $m > 0$ tale che l'integrale di qualsiasi (1′) esteso a qualsiasi sub-aggregato misurabile di g, di misura $< m$, sia $< \varepsilon$. Esiste inoltre un $n' > 0$ tale che per ogni $n > n'$ sia $\mu(\gamma_n) < m$. Per tali n, in virtù delle (3), è

$$(4) \qquad \left| \int_{\gamma} |f_r|\, dt - \int_{\gamma'_n} |f_r|\, dt \right| < \varepsilon .$$

Ma in γ'_n le (1′) sono ugualmente limitate, perchè in γ'_n tutte le (1′) sono $\leq \rho^n$, e quindi

$$\lim_{r=\infty} \int_{\gamma'_n} |f_r|\, dt = \int_{\gamma'_n} |f|\, dt \qquad \text{(p. 39, § 5),}$$

cioè, per r abbastanza grande,

$$\left| \int_{\gamma'_n} |f_r|\, dt = \int_{\gamma'_n} |f|\, dt \right| < \varepsilon ,$$

ed infine, per la (4),

$$(5) \qquad \left| \int_{\gamma} |f_r|\, dt - \int_{\gamma'_n} |f|\, dt \right| < 2\varepsilon .$$

Si deduce che, da un punto in poi, gli integrali estesi a γ delle (1′) differiscono fra loro per meno di 4ε; ma ε è piccolo a piacere, dunque, per un noto teorema di Cauchy, esiste il

$$(6) \qquad \lim_{r=\infty} \int_{\gamma} |f_r|\, dt .$$

A causa delle (5) e per n abbastanza grande, $\int_{\gamma'_n} |f|\,dt$ differisce di poco quanto si vuole da (6), e quindi esiste il $\lim_{n=\infty} \int_{\gamma'_n} |f|\,dt$, è pel cor. 2 a p. 31 esiste $\int_{\gamma} |f|\,dt$, e la $|f|$ è sommabile in γ, e quindi in g.

Esiste un $m' > 0$ tale che l'integrale di qualsiasi (1') e anche quello della $|f|$ esteso ad un sub-aggregato di g di misura $< m'$ sia $< \varepsilon : 2$. Se δ è un tale sub-aggregato, è

$$\int_{\delta} |f_n - f|\,dt < \int_{\delta} |f_n|\,dt + \int_{\delta} |f|\,dt < \varepsilon : 2 + \varepsilon : 2 = \varepsilon .$$

Fissato un r, indichiamo con δ_r l'aggregato dei punti in cui, per ogni $n > r$, sia

$$|f_n - f| < \varepsilon : \mu(\gamma).$$

Esiste poi un $r > 0$ per cui

$$\mu(\gamma - \delta_r) < m' \quad (^1).$$

Per n maggiore di questo r si ha

$$\int_{\gamma} |f_n - f|\,dt = \int_{\delta_r} |f_n - f|\,dt + \int_{\gamma - \delta_r} |f_n - f|\,dt$$
$$< [\varepsilon : \mu(\gamma)] \cdot \mu(\gamma) + \varepsilon = 2\varepsilon ,$$

e quindi si può concludere che

$$\lim_{n=\infty} \int_{\gamma} |f_u - f|\,dt = 0 ,$$

ed anche che

[1] Si noti che, per la convergenza della (1) verso f, ogni punto di γ appartiene ad un δ_r, e che, se un punto di γ appartiene ad un δ_r, appartiene anche ai successivi.

$$\lim_{n=\infty}\int_g |f_n - f|\,dt = 0\,;$$

e la (1) è completamente convergente ed ha per quasi-limite la f.

4. Teorema fondamentale. — Una successione V è convergente completamente.

Dim. - Supponiamo che la (1) sia una successione V. Sia

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$$

una serie convergente di numeri reali > 0. Posto

$$\rho_i = \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2} + \dots,$$

si avrà

$$\lim_{i=\infty}\rho_i = 0\,.$$

Ora si potrà per ogni i trovare un intero $r_i > 0$ tale che, per ogni intero $\nu > r_i$, si abbia

$$\int_g |f_{r_i} - f_\nu|\,dt \leq \varepsilon_i^2\,.$$

Si può inoltre senza difficoltà costruire la successione

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \dots$$

in modo che ogni termine sia $<$ del successivo.

Indicando con g_i l'aggregato dei punti in cui

$$|f_{r_i} - f_{r_{i+1}}| > \varepsilon_i\,,$$

si ha

$$\mu(g_i)\cdot\varepsilon_i < \int_{g_i}|f_{r_i} - f_{r_{i+1}}|\,dt < \int_g |f_{r_i} - f_{r_{i+1}}|\,dt \leq \varepsilon_i^2\,,$$

e quindi

$$\mu(g_i) < \varepsilon_i\,.$$

Sia δ_i la somma degli aggregati

$$g_i,\ g_{i+1},\ g_{i+2}, \dots$$

Si ha

$$\mu(\delta_i) < \rho_i ,$$

e quindi

$$\lim_{i=\infty} \mu(\delta_i) = 0 .$$

In $g - \delta_i$ è soddisfatta la

$$|f_{r_{i+p}} - f_{r_{i+p+q}}| \leq \sum_0^{q-1}{}_k |f_{r_{i+p+k}} - f_{r_{i+p+k+1}}|$$

$$\leq \varepsilon_{i+p} + \varepsilon_{i+p+1} + \varepsilon_{i+p+q-1} < \rho_{i+p} ,$$

e quindi in $g - \delta_i$ è soddisfatta la condizione di Cauchy, perchè la successione

$$(\omega) \qquad f_{r_1}, f_{r_2}, f_{r_3}, \ldots$$

abbia limite.

Questo sta per ogni i, e quindi, indicando con δ il prodotto di tutti i δ_i, si può affermare che la (ω) converge in ogni punto di $g - \delta$, e, poichè δ è di misura nulla, la (ω) converge generalmente in g.

Resta intanto provato che esiste una successione estratta dalla (1) che converge generalmente in g.

È possibile, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, trovare un intero $k > 0$ tale che, per ogni $r > m$, si abbia

$$\int_g |f_r - f_k| \, dt < \varepsilon : 2 ,$$

e quindi anche

$$\int_{g'} |f_r - f_k| \, dt < \varepsilon : 2 ,$$

dove g' è un qualsiasi sub-aggregato misurabile di g. È poi possibile trovare un numero reale $m > 0$ tale che, quando $\mu(g') < m$, si abbia

$$\left| \int_{g'} f_k \, dt \right| < \varepsilon : 2 ,$$

e, poichè

$$\left|\int_{g'}(f_r-f_k)\,dt\right|<\int_{g'}|f_r-f_k|\,dt<\varepsilon:2\ ,$$

si avrà

$$\left|\int_{g'}f_r\cdot dt\right|<\varepsilon \qquad (r=m+1,\ m+2,\ldots)\ .$$

Questo basta per concludere che gli integrali delle (1) sono equi-assolutamente continui. Allora sono equi-assolutamente continui gli integrali delle (ω). Ma abbiamo visto che la (ω) converge generalmente in g, e quindi converge completamente in g (p. 52, teor.).

Supponiamo che le f sia una quasi-limite della (ω). Voglio provare che la (1) converge completamente in g e che la f è una sua quasi-limite. Intanto è

$$(\alpha)\qquad \lim_{i=\infty}\int_g|f_{r_i}-f|\,dt=0\ .$$

Ora

$$\int_g|f_n-f|\,dt\leq\int_g|f_n-f_{r_i}|\,dt+\int_g|f_{r_i}-f|\,dt\ ,$$

e, per la (α), e poichè

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ r_i=\infty}}\int_g|f_n-f_{r_i}|\,dt=0\ ,$$

si ha

$$\lim_{n=\infty}\int_g|f_n-f|\,dt=0\ ;$$

e la (1) converge completamente ed ha per quasi-limite le f. c. d. d.

Dal contesto della precedente dimostrazione consegue il

Cor. – Se (1) è una successione V, se f è limite di una successione estratta da (1), la f è quasi-limite di (1).

2.

Convergenza in media.

1. Definizioni. — 2 e 3. Teoremi.

1. Def. 1. – Una successione

(1) $$f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t), \dots$$

di funzioni, generalmente definite in g e a quadrato sommabile, si dice *convergente in media* in g, verso una funzione $f(t)$, generalmente definita in g e pure quadrato sommabile in g, se si ha

$$\lim_{n=\infty} \int_g (f_n - f)^2 \, dt = 0 .$$

Def. 2. – Diremo che una successione (1) di funzioni, generalmente definite in g ed a quadrato sommabile in g, è una *successione F*, se si ha

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \int_g (f_n - f_m)^2 \, dt = 0 .$$

2. Teor. 1. – Una successione (1) convergente in media verso una funzione f, è completamente convergente ed ha per quasi-limite la f.

Dim. – Infatti, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$0 \leq \int_g |f_n - f| \, dt \leq C \cdot \sqrt{\int_g (f_n - f)^2 \, dt} \quad \text{(p. 45, cor. 2)},$$

con

$$C = \sqrt{\mu(g)} ,$$

e, se la (1) converge in media verso f, da

$$\lim_{n=\infty} \int_g (f_n - f)^2 \, dt = 0$$

consegue che

$$\lim_{n=\infty}\int_g |f_n - f|\, dt = 0$$

e la (1) converge completamente in g, e la f è sua quasi-limite.

Teor. 2. - Una successione F è anche successione V.

Dim. – Infatti, essendo, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$0 \leq \int_g |f_n - f_m|\, dt \leq C \cdot \sqrt{\int_g (f_n - f_m)^2\, dt} \qquad \text{(p. 45, cor. 2)},$$

con

$$C = \sqrt{\mu(g)}\,,$$

dalla

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\int_g (f_n - f_m)^2\, dt = 0\,,$$

consegue

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\int_g |f_n - f_m|\, dt = 0\,.$$

Da cui, se (1) è una successione F, essa è anche una V.

Cor. – Una successione F converge completamente (p. 55, teor. fond.).

3. Teor. – Se (1) è una successione F, e se f è una sua quasi-limite, se inoltre φ è una funzione, generalmente definita ed a quadrato sommabile in g, si ha

$$\lim_{n=\infty}\int_g \varphi f_n \cdot dt = \int_g \varphi f \cdot dt\,.$$

Dim. - Intanto, per la disuguaglianza di Schwarz, è

$$0 \leq \int_g |\varphi f_n - \varphi f_m|\, dt \leq \sqrt{\int_g \varphi^2 dt \cdot \int_g (f_n - f_m)^2 dt}\,,$$

e poichè

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ m=\infty}}\int_g (f_n - f_m)^2 dt = 0\,,$$

è

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \int_g |\varphi f_n - \varphi f_m| \, dt = 0 \,,$$

e quindi la successione

$$(1') \qquad \varphi f_1 ,\ \varphi f_2 ,\ \varphi f_3 , \ldots$$

è una successione V. La f è limite di una successione estratta dalla (1), quindi φf è limite di una successione parziale estratta dalla (1′), e però è quasi-limite di (1′). Si ha dunque

$$\lim_{n=\infty} \int_g |\varphi f_n - \varphi f| \, dt = 0 \,,$$

e poichè

$$0 \leq \left| \int_g (\varphi f_n - \varphi f) \, dt \right| \leq \int_g |\varphi f_n - \varphi f| \, dt \qquad \text{(p. 34, teor. 2)},$$

è

$$\lim_{n=\infty} \int_g (\varphi f_n - \varphi f) \, dt = 0 \,,$$

ed infine

$$\lim_{n=\infty} \int_g \varphi f_n \cdot dt = \int_g \varphi f \cdot dt \,.$$

3.

Sistemi di funzioni normali e a due a due ortogonali.

1. Le funzioni Ψ_r. — 2. Potenza di un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali. — 3. Teoremi. — 4. Disuguaglianza di Bessel.

1. – Dato un aggregato misurabile g, se r è un numero razionale, noi indicheremo con Ψ_r la funzione che è uguale ad 1 in tutti i punti di g che precedono r, e che è *zero* nei rimanenti punti di g.

Evidentemente, essendo i numeri razionali una infinità numerabile, anche le Ψ_r sono una infinità numerabile.

Teor. – Se una funzione φ è ortogonale a tutte le Ψ_r, essa è generalmente nulla.

Dim. - Infatti la $\int_g \varphi \cdot \Psi_r \cdot dt = 0$ significa che $\int_{g_r} \varphi \cdot dt = 0$, dove g_r indica l'aggregato dei punti di g che precedono r, e quindi (p. 38, teor. 4) la φ è generalmente nulla in g.

2. Teor. - Un sistema di funzioni normali a due a due ortogonali contiene un numero finito od una infinità numerabile di funzioni.

Dim. - Indichiamo con (φ) un sistema di funzioni normali a due a due ortogonali, e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ siano n di queste. Se con Ψ indichiamo una Ψ_r e, se poniamo

$$a_i = \int_g \Psi\varphi_i \cdot dt\,,$$

è

$$\int_g (\Psi - a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2 - \ldots - a_n\varphi_n)^2 dt \geqq 0\,,$$

da cui, tenendo conto della ortogonalità delle φ, si ha

$$\int_g \Psi^2 dt \geqq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\,,$$

ed infine

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqq \mu(g)\,.$$

Da ciò risulta che, per ogni $\lambda > 0$, non vi è che un numero finito di funzioni di (φ) per cui

$$\left|\int_g \Psi\varphi \cdot dt\right| \geqq \lambda\,,$$

e che quindi non esiste più che un insieme finito o numerabile di funzioni per cui

$$\int_g \Psi\varphi \cdot dt \neq 0\,.$$

Non possono quindi essere che un insieme numerabile o finito le funzioni di (φ) per cui qualcuno degli integrali

$$\int_g \Psi_r \cdot \varphi \cdot dt$$

sia diverso da zero.

Ma non esistono funzioni ortogonali a tutte le Ψ_r, e quindi il sistema (φ) è appunto o finito o numerabile. c. d. d.

3. Teor. - Se

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots.$$

è una successione di funzioni normali e a due a due ortogonali, e se

(1) $$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

è una successione di numeri fissi per cui la serie

(3) $$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots$$

sia convergente, e se si pone

$$f_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n ,$$

la successione

(4) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

è una successione F.

Dim. - Infatti è, se $n > m$,

$$f_n - f_m = a_{m+1}\varphi_{m+1} + a_{m+2}\varphi_{m+2} + \ldots + a_n\varphi_n ,$$

e quindi

$$\int_g (f_n - f_m)^2 dt = a_{m+1}^2 + a_{m+2}^2 + \ldots + a_n^2 ,$$

e, per la convergenza della (3), è

(5) $$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \int_g (f_n - f_m)^2 dt = 0$$

e la (4) è una successione F.

Teor. 2. – Nelle stesse condizioni del teorema precedente la funzione quasi-limite di (4) è a quadrato sommabile, e la (4) converge in media verso questa quasi-limite, e se f è tale quasi-limite, si ha

$$a_i = \int_g \varphi_i f \cdot dt .$$

Dim. – Ricordiamo che vale la (5), ed osserviamo che, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\int_g |f_n^2 - f_m^2| \, dt \leq \sqrt{\int_g (f_n - f_m)^2 dt \cdot \int_g (f_n + f_m)^2 dt}$$

e che

$$\int_g (f_n + f_m)^2 dt \leq 4s ,$$

dove s è la somma della serie (3). Risulta allora che la successione

(6) $$f_1^2,\ f_2^2,\ f_3^2, \ldots$$

è una successione V. Se f è il limite di una successione estratta da (4), la f^2 è il limite di una successione estratta da (6), ed è quasi-limite di (6) ed è sommabile. Dunque f è a quadrato sommabile, f è poi quasi-limite di (4), ed allora

(7) $$\lim_{n=\infty} \int_g f \cdot f_n \cdot dt = \int_g f^2 \cdot dt \qquad \text{(p. 59, § 3, teor.).}$$

Inoltre (p. 59, § 3, teor.)

(8) $$\lim_{n=\infty} \int_g \varphi_i f_n \cdot dt = \int_g \varphi_i f \cdot dt \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

e, per $n > i$, è

$$\int_g \varphi_i f_n \cdot dt = a_i ,$$

da cui e da (8)

(9) $$a_i = \int_g \varphi_i f \cdot dt ,$$

e per la (7)

$$(10) \qquad \lim (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = \int_g f^2 \cdot dt \,. \qquad [1]$$

Ma, tenendo conto di (9),

$$\int_g (f - f_n)^2 \, dt = \int_g f^2 \cdot dt - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 \,,$$

e quindi per (10)

$$\lim_{n=\infty} \int_g (f - f_n)^2 \, dt = 0$$

e la (4) converge in media verso f.

Per questa f valgono, come si è visto, le relazioni (9).

4. Teor. – Se (1) è una successione di funzioni normali e a due a due ortogonali, e se f è una funzione a quadrato sommabile, se inoltre poniamo

$$(9') \qquad a_i = \int_g \varphi_i f \cdot dt \,,$$

la serie (3) è convergente, e quindi la successione (4), dove

$$f_n = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_n \varphi_n \,,$$

è una successione convergente in media e si ha

$$(11) \qquad \int_g f^2 \cdot dt \geq \sum_1^\infty {}_n a_n^2 \,.$$

Dim. – Intanto, essendo

$$\int_g (f - f_n)^2 \cdot dt \geq 0 \,,$$

risulta, tenendo conto delle (9'),

[1] Questa relazione si può scrivere $\int_g f^2 \cdot dt = s$, dove s indica la somma di (3).

$$\int_g f^2 \cdot dt \geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 ,$$

e da questa disuguaglianza si ha che la serie $\Sigma_n a_n^2$ converge, ed inoltre consegue la (11).

La (11) si richiama col nome di *disuguaglianza di* BESSEL.

4.

Sistemi chiusi di funzioni normali e a due a due ortogonali.

1. Definizione. — 2. Sviluppo di una funzione a quadrato sommabile in serie di funzioni ortogonali. — 3. Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali sia chiuso.

1. DEF. – Un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali, tale che non esista una funzione, non generalmente nulla, ortogonale a tutte le funzioni del sistema si dice *chiuso.*

2. TEOR. – Se

(1) $$\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3 , \ldots$$

è un sistema chiuso di funzioni normali e a due a due ortogonali, qualunque sia la funzione f a quadrato sommabile, la successione

(2) $$f_1 , f_2 , f_3 , \ldots ,$$

dove

$$f_n = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_n \varphi_n ,$$

ed

(3) $$a_i = \int_g \varphi_i f \cdot dt ,$$

converge in media verso f.

DIM. - Intanto la (2) converge in media (p. 64, teor.), e, se f_0 è una sua quasi-limite, si ha, per ogni i,

$$a_i = \int_g \varphi_i f_0 \cdot dt \qquad \text{(p. 62, teor. 2).}$$

Da queste e dalle (3) si ricava, per ogni i,

$$\int_g \varphi_i (f - f_0)\, dt = 0 ;$$

il che mostrerebbe che $f - f_0$ è ortogonale a tutte le (1). Ne segue che $f - f_0$ è generalmente nulla. Dunque la (2) converge in media verso f.

Se, invece di dire che la successione (2) converge in media verso f, si dice che la serie

(2′) $$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3 + \ldots$$

converge in media verso f, il teor. prec. si può enunciare dicendo:

Se (1) *è un sistema chiuso di funzioni normali e a due a due ortogonali, e se* f *è una funzione a quadrato sommabile, la serie* (2′), *nella quale i coefficienti* a_i *sono dati dalle* (3), *converge in media verso la* f.

3. - Se (1) è un sistema chiuso, di funzioni normali e a due a due ortogonali, qualunque sia una funzione f a quadrato sommabile, si ha, ponendo

$$a_i = \int_g \varphi_i f \cdot dt ,$$

$$\lim_{n=\infty} \int_g (f - a_1 \varphi_1 - a_2 \varphi_2 - \ldots - a_n \varphi_n)^2 dt = 0 ;$$

da cui è

$$\int_g f^2 \cdot dt = \lim_{n=\infty} (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

$$= \sum_1^\infty{}_n\, a_n^2 = \sum_1^\infty{}_n \left(\int_g \varphi_n f \cdot dt\right)^2 .$$

Concludendo *affinchè* (1) *sia un sistema chiuso è necessario che, per ogni funzione* f *a quadrato sommabile, sia*

(4) $$\int_g f^2 \cdot dt = \sum_1^\infty{}_n \left(\int_g \varphi_n f \cdot dt\right)^2 .$$

Questa condizione è anche sufficiente, perchè, se (1) non fosse chiuso, esisterebbe una funzione f, non generalmente nulla ed ortogonale a tutte le (1); ed allora, per essa, mentre il primo membro di (4) risulta >0, il secondo membro risulterebbe nullo, e la (4) non sussisterebbe.

Se indico con t un punto generico della retta su cui si trova l'aggregato g, ed indico con g_t l'aggregato dei punti di g che si trovano alla sinistra di t, e se per f prendo la funzione che in g_t ha il valore 1 e nei rimanenti punti di g ha il valore zero, la (4) diventa

$$(4') \qquad \mu(g_t) = \sum_1^\infty {}_n \left(\int_{g_t} \varphi_n \cdot dt\right)^2 .$$

Vale il

TEOR. 1. – Condizione necessaria e sufficiente perchè (1) sia chiuso, è che la (4') valga per ogni t.

DIM. – Che la condizione sia necessaria è già provato. Per dimostrare che è sufficiente, basta osservare che, se (1) non fosse chiuso, esisterebbe una funzione normale θ ortogonale a tutte le (1); ed aggiungendo al sistema (1) questa funzione θ si dovrebbe avere, per la disuguaglianza di BESSEL, la

$$\mu(g_t) \geq \sum_1^\infty {}_n \left(\int_{g_t} \varphi_n \cdot dt\right)^2 + \left(\int_{g_t} \theta \cdot dt\right)^2 ,$$

che combinata colle (4') darebbe

$$\int_{g_t} \theta \cdot dt = 0 ,$$

qualunque sia t, ed allora θ sarebbe generalmente nulla (p. 37, teor. 3), contrariamente all'ipotesi.

Vale inoltre il seguente

TEOR. di LAURICELLA. – Condizione necessaria e sufficiente perchè (1) sia chiuso è che la (4) valga per tutte le funzioni f che appartengono ad un sistema chiuso.

DIM. – Sia

$$(5) \qquad f_1, f_2, \ldots .$$

un sistema chiuso.

È evidente che, se (1) è chiuso, poichè (4) vale per ogni f a quadrato sommabile, la (4) vale per ognuna delle funzioni (5).

Supponiamo ora che la (4) valga per ogni funzione (5). Dico che (1) è chiuso. Infatti, se ciò non fosse, esisterebbe una funzione normale θ ortogonale a tutte le (1), e, aggiungendo al sistema (1) questa funzione θ, si dovrebbe avere, per la disuguaglianza di Bessel,

$$\int_g f_n^2 \cdot dt \geq \sum_1^\infty {}_m \left(\int_g f_n \cdot \varphi_m \cdot dt\right)^2 + \left(\int_g f_n \cdot \theta \cdot dt\right)^2,$$

mentre, per ipotesi, si ha

$$\int_g f_n^2 \cdot dt = \sum_1^\infty {}_m \left(\int_g f_n \cdot \varphi_m \cdot dt\right)^2 .$$

Combinando queste due relazioni si ricaverebbe, per ogni n,

$$\int_g f_n \cdot \theta \cdot dt = 0 .$$

La θ sarebbe adunque ortogonale a tutte le (5), ed il sistema (5) non sarebbe chiuso.

5.

Funzioni linearmente indipendenti. Costruzione di sistemi chiusi.

1. Funzioni linearmente indipendenti. — 2. Condizione necessaria e sufficiente perchè più funzioni a quadrato sommabili siano linearmente indipendenti. — 3. Costruzione di sistemi chiusi.

1. Def. - Si dice che n funzioni $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sono *linearmente dipendenti*, se esiste un sistema di n costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tutte nulle, per cui la funzione $\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots + \lambda_n\theta_n$ sia generalmente nulla. Nel caso contrario si dice che le n funzioni sono *linearmente indipendenti*.

2. Teor. 1. – Condizione necessaria e sufficiente perchè n funzioni

(1) $$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n,$$

a quadrato sommabile in g, siano linearmente indipendenti è che sia diverso da *zero* il determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots\cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots\cdots & \eta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots\cdots & \eta_{nn} \end{vmatrix},$$

dove

$$\eta_{rs} = \int_g \theta_r \theta_s \cdot dt .$$

Dim. - Se $\Omega = 0$, è possibile determinare delle costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, non tutte nulle, per cui

$$\sum_1^n{}_i \lambda_i \eta_{ri} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) .$$

Per tali costanti, posto

$$k = \sum_1^n{}_i \lambda_i \theta_i ,$$

si ha

$$\int_g k\, \theta_r \cdot dt = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) ;$$

e, moltiplicando per λ_r e sommando, si ottiene

$$\int_g k^2 \cdot dt = 0 ,$$

il che prova che k è generalmente nulla (pp. 36 e 37, teor. 1 e 2), e che quindi le funzioni (1) sono linearmente dipendenti.

Viceversa, se le (1) sono linearmente dipendenti, esisterà un sistema di costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non tutte nulle per cui

$$\sum_1^n{}_i \lambda_i \theta_i$$

risulti generalmente nulla. Allora si ha

$$0 = \int_g \theta_r (\sum_1^n{}_i \lambda_i \theta_i)\, dt = \sum_1^n{}_i \lambda_i \int_g \theta_r \theta_i \, dt = \sum_1^n{}_i \lambda_i \eta_{r,i} \quad (r = 1, 2, .., n),$$

il che richiede che sia $\Omega = 0$.

Teor. 2. – Se le n funzioni (1) sono linearmente dipendenti, e quindi se $\Omega = 0$, il massimo numero di funzioni (1) linearmente indipendenti è uguale alla caratteristica della matrice di Ω.

Dim. – Infatti, se $m < n$ è il massimo numero di funzioni (1) linearmente indipendenti, supposto che tali siano le prime m (il che si può sempre ottenere), vediamo che il minore di Ω d'ordine m, formato colle prime m righe e colle prime m colonne, è diverso da zero, e che quindi la matrice di Ω ha caratteristica $\geq m$. Consideriamo ora un minore di Ω di ordine $= m + 1$, e supponiamo che esso sia formato colle colonne di posto

$$i_1, i_2, \ldots.., i_m, i_{m+1}.$$

Poichè le $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots.., \theta_{i_m}, \theta_{i_{m+1}}$ sono linearmente dipendenti, esisterà un sistema di costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, \lambda_{m+1}$ non tutte nulle per cui la

$$\lambda_1 \theta_{i_1} + \lambda_2 \theta_{i_2} + \ldots. + \lambda_m \theta_{i_m} + \lambda_{m+1} \theta_{i_{m+1}}$$

risulti generalmente nulla. Moltiplicando per θ_r ed integrando lungo g, si ha

$$\lambda_1 \eta_{r i_1} + \lambda_2 \eta_{r i_2} + \ldots. + \lambda_m \eta_{r i_m} + \lambda_{m+1} \eta_{r i_{m+1}} = 0,$$

il che prova che ogni minore di ordine $m + 1$ estratto dalle predette $m + 1$ colonne di Ω, ed in particolare quello considerato, è nullo. Resta così provato che la caratteristica della matrice di Ω è $= m$. c. d. d.

3. – Consideriamo il sistema delle funzioni Ψ_r introdotto a pag. 60. Esse sono, come sappiamo, una infinità numerabile di funzioni (a quadrato sommabile in g), che non ammettono una funzione ortogonale a tutte. Consideriamo solo quelle Ψ_r che non sono generalmente nulle, ed ordiniamole in una successione, e sopprimiamo quelle che risultano dipendenti linearmente dalle precedenti. Otteniamo così un successione di funzioni

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots,$$

tali che fra esse non ve ne è un numero finito di linearmente dipendenti, e tali che non esiste una funzione ortogonale a tutte (¹).

Poniamo al solito

$$\eta_{rs} = \int_g \theta_r \theta_s \cdot dt \ .$$

È possibile determinare n costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in modo che

$$\zeta_{n+1} = \theta_{n+1} - \lambda_1 \theta_1 - \lambda_2 \theta_2 - \ldots - \lambda_n \theta_n$$

sia ortogonale alle n funzioni $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, e non sia generalmente nulla.

Per questo basta che risulti

$$\lambda_1 \eta_{1r} + \lambda_2 \eta_{2r} + \ldots + \lambda_n \eta_{nr} = \eta_{n+1\,r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Queste sono n equazioni lineari in n incognite, col determinante dei coefficienti diverso da zero, poichè le n prime θ_i sono linearmente indipendenti; e quindi esiste una soluzione, come si voleva. Inoltre ζ_{n+1} non è generalmente nulla perchè altrimenti le prime $n+1$ funzioni θ sarebbero linearmente dipendenti.

Allora le funzioni

$$\zeta_1 = \theta_1, \ \zeta_2, \ \zeta_3, \ldots .$$

sono a due a due ortogonali; e se si pone

$$c_n = 1 : \sqrt{\int_g \zeta_n^2 \cdot dt} \ ,$$

e

$$\varphi_n = c_n \zeta_n \ ,$$

(¹) Se esistesse una tale funzione essa sarebbe ortogonale a tutte le Ψ_r.

si vede che

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

è un sistema di funzioni normali e a due a due ortogonali. Questo sistema è chiuso, perchè una funzione ortogonale a tutte le φ_n sarebbe ortogonale a tutte le θ_n, il che non può essere.

6.

Spazio hilbertiano.

1. Spazio hilbertiano. — 2. Sistema cartesiano ortogonale. — 3. Coordinate cartesiane di un punto dello spazio hilbertiano. — 4. Distanza di due punti. — 5-6. Teoremi.

1. Def. - Dicesi *spazio hilbertiano reale*, o semplicemente *spazio hilbertiano*, od anche *spazio H*, l'insieme di tutte le funzioni reali a quadrato sommabile in un *dato* aggregato g, considerando come uno stesso elemento di H le funzioni che sono generalmente uguali in g. Si dice poi che una di tali funzioni è un *punto* di H. La funzione generalmente nulla si dice l'*origine* di H.

2. Def. - Un sistema chiuso di funzioni normali e a due a due ortogonali in g si chiama un *sistema cartesiano ortogonale* in H.

3. Def. - Se

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots . \tag{1}$$

è un sistema cartesiano ortogonale in H, e se f è un punto di H, i valori

$$a_n = \int_g f \cdot \varphi_n \cdot dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

si dicono le *coordinate* del punto f rispetto al sistema (1).

Evidentemente, *le coordinate dell'origine sono tutte nulle.* È inoltre evidente che *le coordinate di un punto individuano il punto.*

4. Def. - Se f_1 ed f_2 sono due punti di H, si chiama *distanza* di questi due punti la radice quadrata aritmetica di

$$\int_g (f_1 - f_2)^2 \, dt \, .$$

Dunque la distanza di due punti di H è un numero reale ≥ 0, ed è nulla se e soltanto se i due punti coincidono.

Se d è la distanza di f_1 ed f_2 è

$$d^2 = \int_g (f_1 - f_2)^2 dt \, .$$

La distanza di un punto f dall'origine di H è data da

$$\sqrt{\int_g f^2 \cdot dt} \, .$$

Consegue che, se d è la distanza di un punto f dall'origine di H e se

$$a_1 , \; a_2 , \; a_3 , \ldots .$$

sono le coordinate di f rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale (1), si ha

$$d^2 = \Sigma_r a_r^2 \qquad \text{(p. 66).}$$

In generale, se f_1 ed f_2 sono due punti di H e se

$$a_1 , \; a_2 , \; a_3 , \ldots . \tag{2}$$

$$b_1 , \; b_2 , \; b_3 , \ldots . \tag{3}$$

sono le coordinate di f_1 ed f_2 rispetto ad un medesimo sistema (1), essendo

$$\int_g (f_1 - f_2) \varphi_r \cdot dt = \int_g f_1 \varphi_r \cdot dt - \int_g f_2 \varphi_r \cdot dt = a_r - b_r \, ,$$

si vede che

$$a_1 - b_1 , \; a_2 - b_2 , \; a_3 - b_3 , \ldots .$$

sono le coordinate di $f_1 - f_2$ rispetto ad (1), e che quindi si ha

$$\int_g (f_1 - f_2)^2 dt = \Sigma_r (a_r - b_r)^2 \qquad \text{(p. 66)},$$

ossia, indicando con d la distanza di f_1 ed f_2, si ha

$$d^2 = \Sigma_r (a_r - b_r)^2,$$

ed allora, come nello spazio ordinario, si ha il

Teor. – Il quadrato della distanza di due punti nello spazio H è uguale alla somma dei quadrati delle differenze delle coordinate rispetto ad un medesimo sistema cartesiano ortogonale.

5. Teor. – Se f_1 ed f_2 sono due punti di H, e (2) e (3) sono le loro coordinate rispetto al sistema (1), si ha

$$\int_g f_1 f_2 \cdot dt = \Sigma_r a_r b_r.$$

Dim. – Infatti la successione

$$\psi_1 = a_1 \varphi_1, \qquad \psi_2 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2, \qquad \psi_3 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3, \ldots$$

è una successione F che ha per quasi-limite la f_1, quindi

$$\int_g f_1 f_2 \cdot dt = \lim_{r=\infty} \int_g f_2 \psi_r \cdot dt \qquad \text{(p. 59, § 3, teor.)}$$

$$= \lim_{r=\infty} \left(a_1 \int_g f_2 \varphi_1 \cdot dt + a_2 \int_g f_2 \varphi_2 \cdot dt + \ldots + a_r \int_g f_2 \varphi_r \cdot dt\right)$$

$$= \lim_{r=\infty} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots. + a_r b_r) = \Sigma_r a_r b_r.$$

Cor. – Se f_1 ed f_2 sono due punti di H, che hanno rispetto al sistema (1) le coordinate (2) e (3), e f'_1 ed f'_2 sono due altri punti di H, che hanno rispetto al sistema (1) le coordinate

$$a'_1, \; a'_2, \; a'_3, \ldots$$

$$b'_1, \; b'_2, \; b'_3, \ldots,$$

si ha

$$\int_g (f_1 - f'_1)(f_2 - f'_2)\, dt = \Sigma_r (a_r - a'_r)(b_r - b'_r).$$

Dim. - Ciò si vede osservando che i punti $f_1 - f_1'$ ed $f_2 - f_2'$ hanno rispettivamente le coordinate $a_r - a_r'$ e $b_r - b_r'$.

6. Teor. - Se f_1, f_2 ed f_3 sono tre punti di H, la distanza di f_1 ed f_2 è $\leq$ della somma delle distanze di f_3 da f_1 e da f_2.

Dim. - Infatti, indicando con d_{rs} la distanza di f_r da f_s si ha

$$d_{12}^2 = \int_g (f_1 - f_2)^2 dt = \int_g [(f_1 - f_3) - (f_2 - f_3)]^2 dt$$

$$= \int_g (f_1 - f_3)^2 dt - 2\int_g (f_1 - f_3)(f_2 - f_3)\, dt + \int_g (f_2 - f_3)^2 dt$$

$$\leq d_{13}^2 + 2 d_{13} d_{23} + d_{23}^2 \qquad \text{(v. disuguaglianza di Schwarz)}$$

$$= (d_{13} + d_{23})^2,$$

da cui

$$d_{12} \leq d_{13} + d_{23}. \qquad \text{c. d. d.}$$

In modo analogo si ha $d_{13} \leq d_{12} + d_{23}$ e $d_{23} \geq d_{12} + d_{13}$, e se ne deduce $d_{12} \geq |d_{13} - d_{23}|$.

7.

Punto-funzione. - Limite. - Continuità. - Derivazione.

1. Punto-funzione. — 2. Limite. — 3. Continuità. — 4-5. Derivate ordinarie. — 6-7. Derivate parziali. — 8. Teoremi.

1. - Supponiamo di avere n variabili

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n$$

ciascuna delle quali varia in un certo tratto non nullo, che può essere diverso per le varie variabili di cui si parla, ed indichiamo con U il campo di variabilità del sistema (1).

Supponiamo che a ciascun sistema di valori delle (1) in U corrisponda un punto di H. Allora il punto si deve considerare come una funzione delle variabili (1), e si dirà che è una *punto-funzione* delle (1), e si indicherà con

$$f(t;\ u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

o più brevemente con

$$f(t;\ u);$$

e, sottintendendo la variabile t, con

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \text{o con} \quad f(u).$$

Dovendo considerare contemporaneamente più punto-funzioni, si potrà, per distinguerle, usare in luogo della f varie lettere, o vari altri segni.

2. Def. – Se $f(t;\ u)$ è una punto-funzione in U, e se

$$u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0 \tag{2}$$

è un punto di U, se inoltre $\varphi(t)$ è un punto di H, si dirà che $f(t;\ u)$ tende a $\varphi(t)$ col tendere delle (1) alle (2), e si scriverà

$$\lim_{u=u^0} f(t;\ u) = \varphi(t),$$

se la distanza di $f(t;\ u)$ da $\varphi(t)$ tende a zero col tendere delle (1) a (2), e quindi se

$$\lim_{u=u^0} \int_g (f - \varphi)^2 dt = 0;$$

e si dice che φ è il *limite* di $f(t;\ u)$ per il tendere di (1) a (2).

Perchè questo avvenga bisogna che, essendo

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{3}$$

un sistema chiuso in g, ed

$$a_r(u) = \int_g f(t;\ u) \cdot \varphi_r \cdot dt.$$

e

$$b_r = \int_g \varphi \cdot \varphi_r \cdot dt \, ,$$

si abbia

(4) $$\lim_{u=u^0} \Sigma_r [a_r(u) - b_r]^2 = 0 \qquad \text{(p. 74, § 4.)} \, ,$$

e quindi che

(5) $$\lim_{u=u^0} a_r(u) = b_r \qquad (r = 1, 2, \ldots) \, .$$

Però la condizione (5) non è sufficiente perchè sia la (4), e quindi non è sufficiente per poter dire che φ è il limite di $f(t;\, u)$ col tendere di (1) a (2).

3. Def. – Se $f(t;\, u)$ è una punto-funzione in U, se (2) è un punto di U, e se

$$f(t;\, u_1^0,\, u_2^0, \ldots\, u_n^0)$$

è limite di $f(t;\, u)$ col tendere di (1) a (2), si dice che $f(t;\, u)$ è *continua* per il sistema (2) di valori delle (1). Se poi $f(t;\, u)$ è continua per tutti i sistemi di valori delle (2) in U, si dice che la $f(t;\, u)$ è *continua in U.*

4. Def. 1. – Se $f(t,\, u)$ è una punto-funzione di una sola variabile u, e se u^0 ed $u^0 + h$ sono due valori del campo di variabilità di u, l' espressione

(6) $$\frac{f(t;\, u^0 + h) - f(t;\, u^0)}{h} \, ,$$

quando si tenga fisso u^0, è una punto-funzione della h. Se (6) ha limite col tendere di h allo *zero*, si dice che $f(t;\, u)$ ammette *derivata* per il valore u^0 della u, e questo limite si chiama la *derivata* di $f(t;\, u)$ per il valore u^0 della u, e si indica con

(7) $$\left(\frac{df(t;\, u)}{du}\right)_{u=u^0} .$$

Perchè $f(t;\, u)$ abbia derivata per $u = u^0$, bisogna che, essendo (3) un sistema cartesiano ortogonale, ed

(8)
$$a_r(u) = \int_g f(t;\ u) \cdot \varphi_r \cdot dt \qquad (r = 1, 2, \ldots\ldots),$$

le (8) abbiano derivata per $u = u^0$; e le coordinate di (7) saranno allora le

(9)
$$a'_r(u^0) = \left(\frac{d\,a_r(u)}{du}\right)_{u=u^0} \qquad (r = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Però non è detto che dall'esistenza delle derivate (9) si possa dedurre l'esistenza della (7).

Def. 2. - Può anche darsi che una punto-funzione $f(t;\ u)$ di una sola variabile u abbia derivata in tutto il campo U di variabilità della u, ed allora si dice che la $f(t; u)$ ha *derivata* in U.

Teor. - Se una punto-funzione $f(t;\ u)$ di una variabile u ha derivata in u^0, essa è continua in u^0.

Dim. - Infatti nella nostra ipotesi la distanza del punto variabile (6) dal punto fisso (7) tende a zero col tendere di h a 0, quindi tende a zero la distanza dei due punti variabili

$$\Delta f = f(t;\ u^0 + h) - f(t;\ u^0)$$

e $h\Psi$, dove con Ψ indico il punto (7). Ma la distanza di $h\Psi$ dall'origine tende a zero col tendere di h a 0, e poichè la distanza di Δf dall'origine è $\leq$ della somma delle distanze di $h\Psi$ da Δf e dall'origine (p. 75, teor.) si ha che la distanza dall'origine di Δf tende per $h = 0$ allo zero, ossia che

$$\lim_{u=u^0} \int_g [f(t;\ u^0 + h) - f(t;\ u^0)]^2 dt = 0\,,$$

cioè che $f(t;\ u^0)$ è il limite di $f(t;\ u^0 + h)$ per $h = 0$, e ciò significa che la nostra punto-funzione è continua in u^0.

5. Def. - Se una punto-funzione $f(t; u)$ di una sola variabile u ammette derivata in tutto U, questa derivata risulta pure una punto-funzione in U, e può darsi che anche questa ammetta derivata. In tal caso la nuova derivata si chiama *derivata seconda* della f e si indica con

$$\frac{d^2 f}{du^2}\,.$$

In modo analogo si può definire la *derivata terza* e, più in generale, la *derivata r-esima* di $f(t;\, u)$, r essendo un qualunque intero > 0.

6. Def. - Se $f(t;\, u)$ è una punto-funzione delle n variabili (1), $(n > 1)$, tenendo fisse tutte le variabili (1) fuori che una, p. es. la u_i, la $f(t;\, u)$ risulta punto-funzione della sola u_i, ed allora può darsi che ammetta derivata rispetto a questa variabile; quando ciò avviene, questa derivata si chiama *derivata parziale* di $f(t;\, u)$ rispetto ad u_i, e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}, \qquad \text{o con } f_i(t;\, u), \qquad \text{o con } f_i\,.$$

Perchè $f(t;\, u)$ abbia derivata rispetto ad una variabile u_i, bisogna che le sue coordinate rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale (3) abbiano derivate parziali rispetto ad u_i, e le derivate rispetto ad u_i di queste coordinate saranno le coordinate, secondo (1), di f_i.

Però non sempre l'esistenza delle derivate rispetto ad u_i delle singole coordinate di $f(t;\, u)$ trascina con sè l'esistenza della derivata di $f(t;\, u)$ rispetto ad u_i.

7. Def. - Può darsi che, essendo $f(t,\, u)$ una punto-funzione delle (1) che ammette la f_i in tutto U, questa f_i ammetta derivata parziale rispetto ad u_j. In tal caso questa derivata, che si chiamerà derivata seconda di $f(t;\, u)$, si indicherà con

$$f_{ij}\,.$$

Si dimostra facilmente il

Teor. 1. - Se $f(t;\, u)$ è una punto-funzione che ammette le f_{ij} ed f_{ji}, e se queste derivate sono continue, si ha $f_{ij} = f_{ji}$.

Basta tenere presente il teorema analogo nell'ordinaria teoria delle funzioni.

Analogamente a quanto si è fatto per le punto-funzioni di una sola variabile si possono definire le derivate parziali multiple, ed indicheremo brevemente con f_{ijh} la derivata di f_{ij} rispetto ad u_h, e così via.

Risulta facilmente il

Teor. 2. - Se f è una punto-funzione delle (1), che ammette due derivate multiple che differiscono solo per l'ordine della derivazione, e se queste derivate sono continue, esse sono uguali.

8. Teor. 1. - Se $f(u)$ è una punto-funzione della variabile u, che per $u=u^0$ ha per limite un punto F, si ha

$$\lim_{u=u^0}\int_g f(u)^2 \cdot dt = \int_g F^2 \cdot dt \ .$$

Dim. - Consideriamo i punti $f(u)$, F e l'origine O dello spazio H. Indichiamo con $d(u)$ la distanza di $f(u)$ da O, con $D(u)$ quella di $f(u)$ da F e con δ quella di F da O.

Si ha subito (p. 75)

$$D(u)+\delta \geq d(u) \geq |\delta - D(u)| \ .$$

Ma, per ipotesi, è

$$\lim_{u=u^0} D(u) = 0 \ ,$$

e quindi è

$$\lim_{u=u^0} d(u) = \delta \ ,$$

od anche

$$\lim_{u=u^0} d(u)^2 = \delta^2 \ ,$$

ossia

$$\lim_{u=u^0}\int_g f(u)^2 \cdot dt = \int_g F^2 \cdot dt \ .$$

Consegue il

Cor. – Se $f(u)$ è una punto-funzione della variabile u, che per $u=u^0$ ha un limite F, esiste un intorno di u^0 in cui $\int_g f(u)^2 dt$ è limitato.

Teor. 2. - Se $f(u)$ è una punto-funzione della variabile u che per $u=u^0$ ha un limite F, se $\varphi(u)$ è un' altra punto-funzione della stessa variabile u, per la quale $\int_g \varphi(u)^2 dt$ è limitato in un intorno di u^0, si ha

$$\lim_{u=u^0}\int_g (f-F)\,\varphi\cdot dt = 0\,.$$

Dim. – Infatti, per la disuguaglianza di Schwarz, è

$$\left[\int_g (f-F)\,\varphi\cdot dt\right]^2 \leq \int_g (f-F)^2\cdot dt \int_g \varphi^2\cdot dt\,.$$

Ma, per ipotesi,

$$\lim_{u=u^0}\int_g (f-F)^2\,dt = 0$$

e $\int_g \varphi^2\cdot dt$ è limitato in un intorno di u^0, dunque

$$\lim_{u=u^0}\int_g (f-F)\,\varphi\cdot dt = 0\,.$$

In particolare, se φ è costante rispetto ad u, si ha

$$\lim_{u=u^0}\int_g f\cdot\varphi\cdot dt = \int_g F\cdot\varphi\cdot dt\,.$$

Cor. – Se $f(u)$ e $\varphi(u)$ sono due punto-funzioni della variabile u che per $u=u^0$ hanno i limiti F e Φ, si ha

$$\lim_{u=u^0}\int_g f\varphi\cdot dt = \int_g F\Phi\cdot dt\,.$$

Dim. – Intanto

$$f\varphi - F\Phi = (f-F)\,\varphi + (\varphi-\Phi)F\,,$$

e quindi

$$\int_g (f\varphi - F\Phi)\,dt = \int_g (f-F)\,\varphi\cdot dt + \int_g (\varphi-\Phi)F\cdot dt\,.$$

Ma, pel teor. precedente, gli integrali del 2° membro tendono allo *zero*, per $u=u^0$, e quindi

$$\lim_{u=u^0} \int_g (f\varphi - F\Phi) \cdot dt = 0 ,$$

da cui

$$\lim_{u=u^0} \int_g f \cdot \varphi \cdot dt = \int_g F\Phi \cdot dt .$$

Teor. 3. – Se $f(u)$ e $\varphi(u)$ sono due punto–funzioni della variabile u derivabili, anche $\int_g f \cdot \varphi \cdot dt$ è derivabile, e la sua derivata è uguale ad $\int_g (f' \varphi + f \cdot \varphi')dt$, dove f' e φ' indicano le derivate di f e φ rispetto ad u.

Dim. – Poniamo

$$F(u) = \int_g f \cdot \varphi \cdot dt ,$$

ed indichiamo con ΔF, Δf, $\Delta\varphi$ i rapporti incrementali di F, f, φ rispetto all' incremento h della u.

Si ha subito

$$\Delta F = \int_g [f(u+h) \cdot \Delta\varphi + \varphi \cdot \Delta f]dt .$$

Ora, pel cor. precedente, si ha

$$\lim_{u=u^0} \int_g f(u+h) \Delta\varphi \cdot dt = \int_g f \cdot \varphi' \cdot dt ,$$

e

$$\lim_{u=u^0} \int_g \varphi \cdot \Delta f \cdot dt = \int_g \varphi \cdot f' \cdot dt ,$$

dunque esiste $\lim\limits_{u=u^0} \Delta F$, ossia esiste la derivata F' della F, ed è

$$F' = \int_g (f\varphi' + f'\varphi)dt .$$

8.

Varietà nello spazio hilbertiano.

1. Varietà. — 2. Condizione necessaria e sufficiente perchè una punto-funzione di n variabili descriva una varietà ad n dimensioni. — 3. Le determinanti di una varietà.

1. Def. 1. – Una punto–funzione di n variabili

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \tag{1}$$

col variare delle (1) nel rispettivo campo U, percorre un insieme di punti di H, che diremo una *varietà* di H.

Def. 2. – Una varietà può essere data in infiniti modi da una punto–funzione. Il minimo numero di variabili che figura in queste punto-funzioni, si chiama *numero delle dimensioni* della varietà.

Si conclude che, se n è il numero delle dimensioni di una varietà V, esiste una punto–funzione di n variabili che descrive V, mentre ogni altra punto-funzione che descrive V dipenderà da un numero di variabili $\geq n$.

Una varietà ad *una* dimensione si dirà una *curva* ed una varietà a *due* dimensioni si dirà una *superficie.*

Nel seguito supporremo che le punto-funzioni che si considerano abbiano derivate in là quanto occorre, e che per queste derivate valga il teorema dell'inversione dell'ordine delle derivazioni.

2. Teor. – Condizione necessaria e sufficiente perchè la punto–funzione $f(t; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ descriva una varietà V ad n dimensioni è che le funzioni

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

siano linearmente indipendenti, od in altri termini che sia diverso da zero il determinante

$$\underset{1}{a} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

dove

$$a_{i,j} = \int_g f_i \cdot f_j \cdot dt \qquad \text{(p. 69, teor. 1)}.$$

Dim. - Supponiamo che in un punto generico della varietà V le f_i siano linearmente dipendenti.

Ciò significa che è possibile trovare un sistema di funzioni delle $u_1, u_2, \dots, u_n$,

$$\lambda_i(u) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(costanti rispetto alla variabile t) per cui

$$\sum_1^n {}_i \lambda_i \cdot f_i$$

sia generalmente nulla in g.

Sia

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$$

un sistema cartesiano ortogonale, e siano

$$b_j(u) \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

le coordinate rispetto a tale sistema della

$$f(t; u).$$

Indichiamo poi con $b_{j/i}$ la derivata parziale di b_j rispetto ad ad u_i. Abbiamo allora

$$\sum_1^n {}_i \lambda_i \cdot b_{j/i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots),$$

da cui risulta che n qualunque delle b_j hanno il determinante funzionale uguale a zero, e che quindi n qualunque delle b_j sono dipendenti.

Sia m il maggior numero delle b_j indipendenti, sarà $m < n$.

Per fissare le idee supponiamo che siano indipendenti le

(2) $$b_1, b_2, \ldots, b_m .$$

Tutte le altre b_j sono funzioni di queste e quindi la $f(t;u)$ risulta una punto-funzione delle (2). Indicando questa punto-funzione con

$$F(t; b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

si vede che questa punto-funzione descrive la V, e che quindi il numero delle dimensioni di V è minore di n. Così è provata che la condizione è necessaria.

Per provare che la condizione è sufficiente, si osservi che, se il numero delle dimensioni di V è un numero $m < n$, le b_j si possono esprimere in funzione di m variabili, e che quindi il determinante funzionale di n delle b_j rispetto alle u è uguale a zero. Ciò è sufficiente per concludere che esistono n funzioni λ_j per cui valgono le

$$\Sigma_i \lambda_i \cdot b_{j/i} = 0 ,$$

e quindi per cui la

$$\Sigma_i \lambda_i \cdot f_i$$

è generalmente nulla, il che prova che le f_i sono linearmente dipendenti.

3. Def. - Una punto-funzione $f(t; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ per la quale le $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono linearmente indipendenti si dice una *punto-funzione determinante*. E, se V è la varietà che descrive una punto-funzione determinante $f(t; u)$, si dice che $f(t; u)$ è *una determinante di* V.

9.

Spazi lineari o euclidei.

1. Definizione di spazio lineare e di determinante lineare. — 2 Condizione necessaria e sufficiente perchè due determinanti lineari descrivano lo stesso spazio. — 3. Parametri. — 4. Parametri normali. — 5. Rette orientate e parametro principale. — 6. Angolo di due rette orientate. — 7. Rette parallele ugualmente od inversamente orientate. — 8. Rette ortogonali.

1. - Se

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

sono n funzioni a quadrato sommabile in g, e linearmente indipendenti, se inoltre ψ è un'altra funzione a quadrato sommabile in g, se

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

sono n variabili, ciascuna percorrente una intera retta, la

$$\psi + u_1 \cdot \varphi_1 + u_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + u_n \cdot \varphi_n \tag{2}$$

è una punto–funzione determinante. Infatti le sue derivate parziali rispetto alle varie u_i sono le (1), e quindi sono linearmente indipendenti.

Def. – Una varietà che abbia per determinante una punto–funzione del tipo (2), in cui le (1) sono linearmente indipendenti, si dice *uno spazio lineare od euclideo ad n dimensioni*. Uno spazio euclideo ad 1 dimensione si chiama anche *retta*, uno spazio euclideo a 2 dimensioni si chiama anche *piano*, ed uno spazio euclideo a 3 dimensioni si chiama anche *spazio ordinario*.

Una determinante di uno spazio euclideo potrà essere anche di forma diversa dalla (2). Una determinante della forma (2) si dirà una *determinante lineare* dello spazio euclideo che essa descrive.

2. Teor. – Se S_n è uno spazio euclideo ad n dimensioni, se

$$\psi + u_1 \cdot \varphi_1 + u_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + u_n \cdot \varphi_n \tag{2}$$

è una sua determinante lineare, condizione necessaria e sufficiente perchè un'altra determinante lineare

$$\psi' + v_1 \cdot \varphi_1' + v_2 \cdot \varphi_2' + \ldots + v_n \cdot \varphi_n' \tag{3}$$

sia una determinante dello stesso S_n, è che

$$\psi' = \psi + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi_n , \tag{4}$$

$$\varphi_i' = \mu_{i,1} \cdot \varphi_1 + \mu_{i,2} \cdot \varphi_2 + \ldots + \mu_{i,n} \cdot \varphi_n , \tag{5}$$

dove le λ e μ sono delle costanti.

Dim. – Infatti, fra i punti di (3) vi è quello che corrisponde ai valori nulli delle v, ossia vi è il punto ψ'. Quindi, se (3) è una determinante di S_n, la ψ' si deve ottenere da (2) dando particolari valori alle u, e si avrà necessariamente la (4), con le λ costanti convenienti.

Analogamente, se (3) è una determinante di S_n, la $\psi' + \varphi'_i$ è un punto di S_n e si deve ottenere da (2) assegnando alle u particolari valori. Sarà allora

$$\psi' + \varphi' = \psi + \nu_{i,1} \cdot \varphi_1 + \nu_{i,2} \cdot \varphi_2 + \ldots + \nu_{i,n} \cdot \varphi_n ,$$

e sottraendo da questa la (4) e ponendo

$$\mu_{i,j} = \nu_{i,j} - \lambda_j$$

si ha la (5). Dunque la condizione è necessaria.

Questa condizione è anche sufficiente. Infatti, sostituendo in (3) le ψ' e φ'_i date dalle (4) e (5), si vede che ogni punto (3) è anche un punto (2). Inoltre, se si osserva che il determinante delle $\mu_{i,j}$ deve essere diverso da zero, perchè le φ'_i sono linearmente indipendenti, dalle (5) si ricavano le φ_j espresse linearmente per le φ'_i. Sostituendo allora in (2) la ψ che si ricava da (4), e quindi le φ_j colle loro espressioni a mezzo delle φ'_i, si vede anche che ogni punto (2) è un punto (3).

3. Def. – Se f_1 ed f_2 sono due punti diversi di una retta, la differenza $f_2 - f_1$ si chiama un *parametro* di quella retta.

Teor. – Due parametri di una medesima retta hanno rapporto costante e $\neq 0$, e, viceversa, se si moltiplica un parametro di una retta per una costante $\neq 0$ si ha un nuovo parametro di quella retta.

Dim. – Infatti, se $\psi + u\varphi$ è una determinante lineare di una retta S_1, e se f_1 ed f_2 sono due punti diversi di S_1, si avrà

$$f_1 = \psi + u' \cdot \varphi \quad \text{e} \quad f_2 = \psi + u'' \cdot \varphi ,$$

dove u' ed u'' sono valori diversi di u; e quindi

$$f_2 - f_1 = (u'' - u')\varphi = k \cdot \varphi ,$$

dove $k = u'' - u'$, e quindi è costante $\neq 0$. Si conclude che ogni parametro di S_1 è uguale al prodotto di φ per una costante $\neq 0$, e quindi che il rapporto di due parametri di S_1 è una costante $\neq 0$.

Per provare la seconda parte del teor., basta provare che, essendo k una costante qualunque $\neq 0$, la $k\varphi$ è un parametro di

S_1. Ora ciò è evidente, perchè $k\varphi = (\psi + k\varphi) - \psi$, e $\psi + k\varphi$ e ψ sono due punti diversi di S_1.

4. Def. – Fra i parametri di una retta ve ne sono due che sono funzioni normali (p. 43, § 2) e si diranno *parametri normali* della retta.

5. Def. 1. – Una retta si dice *orientata* quando ad uno e ad uno solo dei suoi parametri normali è assegnato il nome di *parametro principale* della retta.

Def. 2. – Se S_1 è una retta orientata e se φ è il suo parametro principale, se inoltre f_1 ed f_2 sono due suoi punti, poichè $f_2 - f_1 = k \cdot \varphi$ con k costante $\neq 0$, si dirà che f_2 segue f_1 se $k > 0$, e che f_2 precede f_1 se $k < 0$.

6. – Se φ e ψ sono i parametri principali di due rette orientate, poichè, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\left(\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt\right)^2 \leq \int_g \varphi^2 \cdot dt \cdot \int_g \psi^2 \cdot dt = 1,$$

ed è quindi

$$\left|\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt\right| \leq 1,$$

l' $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt$ può essere interpretato come il coseno di un angolo α compreso fra 0 e π.

Def. – Se φ e ψ sono i parametri principali di due rette orientate, l'angolo α compreso fra 0 e π, per cui è $\cos\alpha = \int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt$, si chiama l'*angolo* delle due rette orientate.

Evidentemente, se φ' e ψ' sono due altri parametri delle due rette, sarà $\varphi' = k\varphi$, $\psi' = h\psi$, dove k ed h sono due costanti, e quindi sarà

$$\cos\alpha = \frac{\int_g \varphi' \cdot \psi' \cdot dt}{k \cdot h}.$$

7. Def. - Due rette orientate si dicono *parallele* ed *ugualmente orientate,* se hanno generalmente uguali i parametri principali, e si dicono *parallele* ed *inversamente orientate*, se hanno generalmente contrari i parametri principali.

Nel 1° caso, se φ e ψ sono i parametri principali delle due rette, è $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = 1$, e quindi l'angolo α delle due rette è $= 0$, nel 2° caso è $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = -1$, è quindi $\alpha = \pi$.

Viceversa, se $\alpha = 0$, e quindi se $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = 1$, si ha

$$\int_g (\varphi - \psi)^2 \cdot dt = \int_g \varphi^2 \cdot dt - 2\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt + \int_g \psi^2 \cdot dt = 1 - 2 + 1 = 0\,,$$

e quindi $\varphi - \psi$ è generalmente nulla, e φ e ψ sono generalmente uguali; se $\alpha = \pi$, e quindi $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = -1$, si ha

$$\int_g (\varphi + \psi)^2 \cdot dt = \int_g \varphi^2 \cdot dt + 2\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt + \int_g \psi^2 \cdot dt = 1 - 2 + 1 = 0\,,$$

e quindi $\varphi + \psi$ è generalmente nulla, e φ e ψ sono generalmente contrarie.

8. Teor. - Se φ e ψ sono due parametri di due rette, e se $\int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = 0$, cioè se φ e ψ sono due funzioni ortogonali, o, come si dirà, se φ e ψ sono *parametri ortogonali*, lo stesso avviene per altri due parametri delle stesse rette.

Dim. – Infatti, se φ' e ψ' sono altri due parametri delle stesse rette, sarà $\varphi' = k\varphi$ e $\psi' = h\psi$, dove k ed h sono delle costanti, ed allora

$$\int_g \varphi' \cdot \psi' \cdot dt = \int_g k \cdot \varphi \cdot h \cdot \psi \cdot dt = k \cdot h \cdot \int_g \varphi \cdot \psi \cdot dt = 0\,.$$

Def. – Due rette tali che ogni parametro dell'una sia ortogonale ad ogni parametro dell'altra si dicono *ortogonali*.

10.

Ancora sugli spazi euclidei.

1. Ancora sulle determinanti lineari di una retta. — 2. Parametri di uno spazio euclideo. — 3-4. Teoremi. — 5. Triangoli. Teorema di CARNOT. — 6. Spazi ortogonali. — 7. Osservazione.

1. TEOR. – Se ψ' è un punto di una retta S_1, e se φ' è un parametro di questa retta, la

$$\psi' + v \cdot \varphi',$$

è una determinante di S_1.

DIM. – Infatti se

$$\psi + \mu \cdot \varphi,$$

è una determinante di S_1, si ha:

$$\varphi' = k\varphi,$$

dove k è una costante diversa da *zero* (p. 87, § 3, vedi dim. del teor.). Inoltre, essendo ψ' un punto di S_1, è

$$\psi' = \psi + \lambda \cdot \varphi,$$

dove λ è una costante conveniente, e quindi (p. 86, teor.) la

$$\psi' + v\varphi',$$

è una determinante di S_1.

COR. – Se f_1 ed f_2 sono due punti di una retta S_1, la

$$f_1 + u \cdot (f_2 - f_1)$$

è una sua determinante.

DIM. – Infatti f_1 è un punto di S_1, ed $f_2 - f_1$ è un suo parametro.

2. TEOR. – Se una retta contiene due punti di uno spazio lineare S_n, essa giace interamente in questo spazio.

DIM. – Infatti se

$$\psi + u_1 \cdot \varphi_1 + u_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + u_n \cdot \varphi_n,$$

è una determinante lineare di S_n, e se f_1 ed f_2 sono due suoi punti, sarà

$$f_1 = \psi + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi_n ,$$
$$f_2 = \psi + \mu_1 \cdot \varphi_1 + \mu_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \mu_n \cdot \varphi_n ,$$

e quindi ogni altro punto della retta che contiene f_1 ed f_2 sarà dato da

$$f_1 + u \cdot (f_2 - f_1) = \psi + \sum_1^n{}_r [\lambda_r + u \cdot (\mu_r - \lambda_r)] \varphi_r ,$$

e dunque è un punto di S_n.

Def. - Un parametro di una retta contenuta in uno spazio euclideo S_n si dice *un parametro* di S_n.

3. Teor. - Se

$$\psi + u_1 \cdot \varphi_1 + u_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + u_n \cdot \varphi_n ,$$

è una determinante lineare di uno spazio euclideo S_n, condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di t sia un parametro di S_n, è che essa sia una combinazione lineare delle

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n .$$

Dim. - Infatti, se

$$\theta = \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi_n ,$$

i punti $f_1 = \psi$ ed $f_2 = \psi + \theta$ appartengono ad S_n, e quindi $f_2 - f_1 = (\psi + \theta) - \psi = \theta$ è un parametro di S_n, e così è dimostrato che la condizione è sufficiente. Per provare che essa è necessaria, basta osservare che, se f_1 ed f_2 sono due punti di S_n, sarà

$$f_1 = \psi + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi_n ,$$

ed

$$f_2 = \psi + \mu_1 \cdot \varphi_1 + \mu_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \mu_n \cdot \varphi_n ,$$

e quindi

$$f_2 - f_1 = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \varphi_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \cdot \varphi_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) \cdot \varphi_n ,$$

e si deduce che ogni parametro di S_n è una combinazione lineare delle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Cor. - In uno spazio euclideo S_n ad n dimensioni esistono n parametri linearmente indipendenti e non più di n.

Dim. - Infatti, se

$$\psi + \sum_1^n{}_r \lambda_r \varphi_r$$

è una determinante lineare di S_n, le

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

sono n parametri lineari di S_n fra loro linearmente indipendenti. Ora, se si considerano $n+1$ altri parametri di S_n, o fra questi ve ne sono n linearmente dipendenti, ed allora gli $n+1$ che si considerano sono linearmente dipendenti; o fra gli $n+1$ ve ne sono n linearmente indipendenti, e se tali sono

$$\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n',$$

poichè

$$\psi + \sum_1^n{}_r v_r \cdot \varphi_r',$$

è una determinante lineare di S_n (p. 86, teor.), si conclude che il restante $(n+1)^0$ parametro è una combinazione lineare degli n parametri $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$. c. d. d.

4. Teor. - Se S_n ed S_m $(m \leq n)$ sono due spazi euclidei, e se tutti i parametri di S_m sono anche parametri di S_n, ed i due spazi hanno un punto ψ in comune, tutti i punti di S_m appartengono ad S_n.

Dim. - Infatti esiste una determinante lineare di S_n della forma

$$\psi + \sum_1^n{}_r u_r \cdot \varphi_r,$$

ed una determinante lineare di S_m della forma

$$\psi + \sum_1^m{}_i v_i \cdot \theta_i.$$

E poichè ogni θ_i è una combinazione lineare delle φ_r, anche $\sum_1^m{}_i v_i \cdot \theta_i$ è una combinazione lineare delle φ_r, e quindi ogni punto di S_m può essere messo sotto la forma

$$\psi + \sum_1^n r\, u_r \cdot \varphi_r ,$$

e quindi appartiene ad S_n.

5. - Se f_1 ed f_2 sono due punti, e se r è la retta che li unisce, se noi orientiamo la retta r in modo che f_2 segua f_1, i punti di r che seguono f_1 e precedono f_2 formano un tutto che chiameremo il *segmento* $f_1 f_2$. Si vede subito che i segmenti $f_1 f_2$ ed $f_2 f_1$ sono costituiti dagli stessi punti. La distanza di f_1 ed f_2 si chiama la *lunghezza* di tale segmento.

Def. - Se f_1, f_2, f_3 sono *tre* punti non situati sopra una medesima retta, si dice che essi individuano un *triangolo*, di cui i detti tre punti si chiamano i *vertici*, i segmenti $f_1 f_2$, $f_2 f_3$, $f_3 f_1$ i tre *lati*, l'angolo delle rette $f_1 f_2$ ed $f_1 f_3$ orientate in modo che f_1 preceda nell'una f_2 e nell'altra f_3 si chiama l'*angolo* del triangolo con vertice f_1, ed analogamente si definisce un angolo del triangolo con vertice f_2, ed un angolo del triangolo con vertice f_3.

L'angolo con vertice f_1 si dice *opposto* al lato $f_2 f_3$.

Teorema di Carnot. - In un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio prodotto di questi lati moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso.

Dim. - Infatti, se f_1, f_2, f_3 sono i tre vertici di un triangolo, se con a, b, c si indicano rispettivamente le lunghezze dei lati $f_2 f_3$, $f_1 f_3$, $f_1 f_2$, e con α l'angolo con vertice f_1, si ha

$$\begin{aligned} a^2 &= \int_g (f_2 - f_3)^2 dt = \int_g [(f_2 - f_1) - (f_3 - f_1)]^2 dt \\ &= \int_g (f_2 - f_1)^2 dt + \int_g (f_3 - f_1)^2 dt - 2\int_g (f_2 - f_1)(f_3 - f_1) dt \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha , \end{aligned}$$

poichè

$$\cos\alpha = \frac{\int_g (f_2 - f_1)(f_3 - f_1) dt}{bc} \qquad \text{(p. 88, §§ 5–6).}$$

6. Def. 1. – Se un parametro φ è ortogonale a tutti i parametri di uno spazio euclideo S_n, si dice che φ è *ortogonale* ad S_n.

Def. 2. – Due spazi euclidei S_m ed S_n, che non hanno più di un punto in comune, si dicono *ortogonali* fra loro se tutti i parametri di uno di essi sono ortogonali all'altro spazio.

Teor. – Se S_{m+n} è uno spazio lineare ad $m+n$ dimensioni, e se S_m è uno spazio lineare in esso contenuto, e se ψ è un punto di S_m, esiste uno spazio lineare S_n contenente il punto ψ e tutti e soli i parametri di S_{m+n} ortogonali ad S_m. (Evidentemente tale S_n sarà contenuto in S_{m+n}, come risulta dal teor. del prec. § 4).

Dim. – Infatti, se

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$$

sono m parametri linearmente indipendenti di S_m, e se ψ è un altro parametro di S_{m+n}, che non appartenga ad S_m, è possibile trovare un sistema di costanti λ_i, in guisa che

(2) $$\theta = \varphi + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

sia ortogonale ad S_m, perchè, posto

$$a_{r,s} = \int_g \varphi_r \cdot \varphi_s \cdot dt ,$$

è possibile risolvere il sistema nelle λ_i

$$\int_g \varphi \cdot \varphi_r \cdot dt + \sum_1^m {}_i\, a_{i,r} \lambda_i = 0 \qquad (r=1, 2, \ldots, m),$$

avendo questo sistema diverso da zero il determinante dei coefficienti (p. 69).

Da (2) si ricava che

$$\varphi = \theta - \sum_1^m {}_i \lambda_i \cdot \varphi_i ,$$

e che quindi ogni parametro di S_{m+n} è una combinazione lineare di un parametro ortogonale ad S_m e dei parametri (1).

Ora, se k è il massimo numero di parametri linearmente indipendenti di S_{m+n} ed ortogonali ad S_m, e se tali sono

(3) $$\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots, \varphi_{m+k},$$

si vede facilmente (p. 69) che gli $m+k$ parametri (1) e (3) sono linearmente indipendenti.

Inoltre è chiaro che ogni parametro di S_{m+n} appartiene allo S_{m+k} di determinante

$$\psi + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \lambda_2 \cdot \varphi_2 + \ldots + \lambda_{m+k} \cdot \varphi_{m+k},$$

e perciò S_{m+k} coincide con S_{m+n}, ed allora $k=n$.

Lo spazio ad n dimensioni che passa per ψ e che contiene gli n parametri (3) è quello di cui si è affermato l'esistenza nell'enunciato.

7. Oss. - Se S_n è uno spazio euclideo di n dimensioni, è possibile trovare un sistema di n parametri normali e a due a due ortogonali che gli appartengono. Se tali sono

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

e se ψ è un punto di S_n, la

$$\psi + u_1 \cdot X_1 + u_2 \cdot X_2 + \ldots + u_n \cdot X_n$$

è una determinante lineare di S_n, e le

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

sono le coordinate di un suo punto generico rispetto al sistema cartesiano ortogonale (nel senso della ordinaria geometria negli iperspazi) che ha per origine ψ e per assi le rette passanti per ψ e di parametri $X_1, X_2, \ldots X_n$.

11.

Cambiamento di coordinate cartesiane. - Movimenti.

1-2. Cambiamento di coordinate cartesiane. — 3. Trasformazioni lineari ortogonali. — 4. Traslazioni. — 5. Movimenti.

1. – Supponiamo che

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

e

(2) $$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$

siano due sistemi di coordinate cartesiane ortogonali.

Sia $f(t)$ un punto qualunque di H, indichiamo con

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

le sue coordinate rispetto al sistema (1), e con

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

le sue coordinate rispetto al sistema (2).

Avremo

$$x_n = \int_g f \cdot \varphi_n \cdot dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ed

$$y_n = \int_g f \cdot \psi_n \cdot dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Poniamo

$$a_{m,n} = \int_g \varphi_m \cdot \psi_n \cdot dt \qquad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Poichè la serie

$$\Sigma_m x_m \cdot \varphi_m$$

converge in media verso f, moltiplicando per ψ_n ed integrando termine a termine lungo g, si ha (p. 59, § 3, teor.).

$$(3) \qquad \Sigma_m a_{m,n} \cdot x_m = \int_g f \cdot \psi_n \cdot dt = y_n .$$

Se in luogo del punto f di H si prende il punto ψ_r, le coordinate (2) diventano tutte *zero*, fuorchè la y_r, che acquista il valore 1, e le coordinate (1) diventano

$$x_n = \int_g \psi_r \cdot \varphi_n \cdot dt = a_{n,r} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Sostituendo nelle (3), si ha allora

$$(4) \qquad \Sigma_m a_{m,n} a_{m,r} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = r \\ 0, & \text{se } n \neq r . \end{cases}$$

Invertendo nelle precedenti considerazioni i sistemi (1) e (2), si trova, in modo analogo,

(5) $$\Sigma_n a_{m,n} y_n = x_m ,$$
e

(6) $$\Sigma_n a_{m,n} a_{r,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = r \\ 0, & \text{se } m \neq r . \end{cases}$$

Le formule (3) esprimono come variano le coordinate di un punto di H, quando si passa dal sistema di coordinate cartesiane (1) al sistema (2), e le (5) danno il passaggio inverso.

Per questo significato noi possiamo dire che, se

$$x_1, x_2, \ldots .$$

ed

$$x'_1, x'_2, \ldots .$$

sono le coordinate di due punti f ed f' di H, rispetto al sistema (1), e, se

$$y_1, y_2, \ldots .$$

ed

$$y'_1, y'_2, \ldots .$$

sono le coordinate degli stessi due punti rispetto al sistema (2), date le formule (3), si avrà

(7) $$\Sigma_n (x_n - x'_n)^2 = \Sigma_n (y_n - y'_n)^2 ,$$

poichè i due membri di (7) esprimono entrambi il quadrato della distanza di f ed f', ossia l' $\int_0^1 (f - f')^2 \cdot dt$.

Se poi

$$x''_1, x''_2, \ldots .$$

ed

$$x'''_1, x'''_2, \ldots .$$

sono le coordinate secondo il sistema (1) di altri due punti f'' ed f''' di H, e se

$$y''_1, y''_2, \ldots .$$

ed

$$y'''_1, y'''_2, \ldots .$$

sono le coordinate dei medesimi due punti rispetto al sistema (2), si ha

(8) $$\Sigma_n (x_n - x'_n)(x''_n - x'''_n) = \Sigma_n (y_n - y'_n)(y''_n - y'''_n),$$

poichè i 2 membri di (8) esprimono entrambi

$$\int_g (f-f')(f''-f''') \cdot dt .$$

2. Teor. - Un sistema di relazioni (3), i cui coefficienti soddisfino alle relazioni (4) e (6), può essere interpretato come un sistema di formule che regola il passaggio da un sistema cartesiano ortogonale ad un altro.

Dim. - Infatti, se si interpretano le variabili x_n come le coordinate di un punto di H rispetto al sistema cartesiano ortogonale (1), per la convergenza della serie

$$\Sigma_m a_{m,n}^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

che risulta dalla ipotesi (6), la serie

$$\Sigma_m a_{m,n} \cdot \varphi_m \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge in media verso una funzione ψ_n a quadrato sommabile in g, e si ha, evidentemente,

$$a_{m,n} = \int_g \varphi_m \cdot \psi_n \cdot dt .$$

Le ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ formano un sistema cartesiano ortogonale. Infatti

$$\int_g \psi_n \cdot \psi_r = \Sigma_m a_{m,n} \cdot a_{m,r} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = r \\ 0, & \text{se } n \neq r \end{cases}$$

per il teor. a p. 59, § 3 e per le (4). Dunque le ψ_n sono normali e fra loro ortogonali. Resta a provare che formano un sistema chiuso.

Per questo si osservi che, tenendo conto delle

$$\int_g \varphi_n^2 \cdot dt = 1 ,$$

le (6) dicono che

(9) $$\int_g \varphi_m^2 \cdot dt = \Sigma_n \Big(\int_g \varphi_m \cdot \psi_n \cdot dt\Big)^2 .$$

E, poichè il sistema (1) è chiuso, le (9) affermano, in virtù del teorema di LAURICELLA, che è chiuso anche il sistema delle ψ_n $(n=1,2,\ldots)$.

Oss. - Poichè le (3), quando siano soddisfatte per i loro coefficienti le relazioni (4) e (6), possono essere interpretate come le formule che regolano il passaggio da un sistema cartesiano ortogonale ad un altro, dalle relazioni (3), (4), (6) conseguono le (5).

In particolare si può dire che, se si considerano le (3) come un sistema di infinite equazioni lineari con infinite incognite x_n, e se valgono le (4) e (6), le (5) danno la unica soluzione del sistema (3).

3. - Le (3), quando si interpretino tanto le x_n, quanto le y_n, come coordinate rispetto ad un medesimo sistema cartesiano ortogonale, definiscono una trasformazione dello spazio H.

DEF. - Una trasformazione dello spazio H definita da formule come le (3), nelle quali le x_n e le y_n si interpretano come coordinate rispetto ad un medesimo sistema cartesiano ortogonale, e nelle quali i coefficienti $a_{m\,n}$ soddisfano alle relazione (4) e (6), si chiamerà una *trasformazione lineare ortogonale* dello spazio H. Una tale trasformazione si può invertire mediante le (5).

Le trasformazioni lineari ortogonali dello spazio H sono, come risulta dalle (3) e (5), corrispondenze biunivoche fra i punti di H e i punti di H stesso. Inoltre in virtù delle (7) e (8) esse conservano le distanze e gli angoli. Infine esse fanno corrispondere all' origine di H l' origine di H.

4. DEF. - Se $h(t)$ è un punto di H, la corrispondenza che fa corrispondere ad ogni punto f di H il punto $f+h$ si chiama una *traslazione di modulo h*.

Si prova facilmente che una traslazione conserva le distanze e gli angoli e quindi le rette.

Se T è una traslazione di modulo h, se

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

sono le coordinate di h rispetto al sistema cartesiano ortogonale (1), se x_n, sono le coordinate di f rispetto ad (1), e se y_n sono quelle di $f+h$ sempre rispetto ad (1), si ha evidentemente

$$y_n = a_n + x_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

5. Def. - Una trasformazione dello spazio H in se stesso, la quale costituisca una corrispondenza biunivoca fra i punti di H ed i punti di H stesso, e che conservi le distanze e gli angoli e quindi le rette, si chiama un *movimento* dello spazio H.

È evidente il

Teor. 1. – Le trasformazioni lineari ortogonali e le traslazioni sono dei movimenti.

Inversamente si ha il

Teor. 2. – Ogni movimento o è una traslazione, o è una trasformazione lineare ortogonale, o si ottiene eseguendo una trasformazione lineare ortogonale ed una traslazione.

Dim. - Sia M un movimento. Se esso fa corrispondere ad un punto generico f di H un punto F, e se noi indichiamo con F^0 il punto che fa corrispondere all' origine, la corrispondenza che fa corrispondere ad f il punto $F - F^0$ è un movimento M' che fa corrispondere all' origine l' origine.

Si vede chiaro che il movimento M si può ottenere eseguendo il movimento M' e poi la traslazione di modulo F^0.

Consideriamo il movimento M' ed il sistema cartesiano ortogonale (2). M' porterà i punti (2) in un sistema di punti (1), e quindi la retta che unisce l' origine di H con ψ_n in quella che unisce la stessa origine con φ_n. Ma le rette che uniscono l' origine coi punti ψ_n sono a due a due ortogonali, e poichè M' conserva gli angoli, anche le rette che uniscono l' origine coi punti φ_n sono a due a due ortogonali, ossia il sistema (1) è costituito di funzioni a due a due ortogonali. Inoltre avendo i punti (2) distanza dall' origine uguale all' unità, anche i punti (1) avranno distanza dall' origine uguale all' unità, ossia le funzioni (1) sono tutte normali.

Io dico che le (1) formano un sistema chiuso. Infatti, se ciò non fosse, esisterebbe una funzione h ortogonale a tutte le (1). La h corrisponderà ad una funzione k che, per la conservazione degli angoli, dovrà essere ortogonale a tutte le (2). Ciò è impossibile perchè il sistema (2) è chiuso.

Si conclude che le (1) formano un sistema cartesiano ortogonale.

Sia f un punto di H, e sia f' il punto in cui f è portato dal movimento M'.

Indichiamo con

$$x_1, x_2, \ldots .$$

le coordinate di f, e con

$$y_1, y_2, \ldots .$$

quelle di f', rispetto al sistema (1).

Per la conservazione degli angoli e delle distanze dall'origine, si dovrà avere

$$\int_g f \cdot \psi_n \cdot dt = \int_g f' \cdot \varphi_n \cdot dt = y_n .$$

Ma la serie

$$\Sigma_m x_m \varphi_m$$

converge in media verso f, dunque

$$\int_g f \cdot \psi_n \cdot dt = \Sigma_m x_m \cdot \int_g \varphi_m \cdot \psi_n \cdot dt = \Sigma_m a_{m,n} \cdot x_m ,$$

dove

$$a_{m,n} = \int_g \varphi_m \cdot \psi_n \cdot dt .$$

Dunque il movimento M' è dato dalle

$$y_n = \Sigma_m a_{m,n} \cdot x_m ,$$

dove i coefficienti soddisfano alle (4) e (6).

Consegue che M' è una trasformazione lineare ortogonale, ed il teorema è dimostrato.

12.

Somme di successioni convergenti in media.

1. Teor. – Se

(1) $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

e

(2) $$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$$

sono due successioni convergenti in media rispettivamente verso φ e ψ, anche la successione

(3) $$\varphi_1 + \psi_1, \ \varphi_2 + \psi_2, \ \ldots, \ \varphi_n + \psi_n, \ \ldots$$

converge in media ed ha per quasi-limite la $\varphi + \psi$.

Dim. – Indichiamo con O l'origine dello spazio hilbertiano e con P_n e Q_n i due punti $\varphi_n - \varphi$ e $(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi + \psi)$. Inoltre indichiamo con OP_n, OQ_n, P_nQ_n le distanze di questi punti. Si ha $OQ_n \leq OP_n + P_nQ_n$ (p. 75, teor.). Ma

$$OP_n = \sqrt{\int_g (\varphi_n - \varphi)^2 \, dt}\ , \quad P_nQ_n = \sqrt{\int_g (\psi_n - \psi)^2 \, dt}$$

e quindi, per la convergenza in media delle (1) e (2),

$$\lim_{n=\infty} OP_n = \lim_{n=\infty} P_nQ_n = 0 .$$

Dunque è $\lim\limits_{n=\infty} OQ_n = 0$, ossia

$$\lim_{n=\infty} \int_g [(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi + \psi)]^2 \, dt = 0$$

e la (3) converge in media verso $\varphi + \psi$.

2. – Applicando ripetutamente il precedente teorema, si dimostra il

Teor. – La somma di un numero finito di successioni convergenti in media converge in media ed ha per quasi-limite la somma delle quasi-limiti delle successioni addendi.

PARTE III.

COMPLEMENTI DI ALGEBRA

1.

Sulle funzioni razionali intere.

1. Funzioni razionali intere identicamente nulle. — 2. Funzioni razionali intere identicamente uguali. — 3. Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto di due funzioni razionali intere sia identicamente nullo. — 4. Sui gradi dei termini del prodotto di due funzioni razionali intere. — 5. Decomponibilità in fattori primi.

1. Def. – Una funzione razionale intera di una o più variabili si dice *identicamente nulla*, se ha valore *zero* per ogni sistema di valori delle variabili.

Teor. – Una funzione razionale intera identicamente nulla ha nulli tutti i suoi coefficienti.

Dim. – Intanto è facile vedere che una funzione razionale intera di una sola variabile x

$$f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots . + a_n$$

che non abbia nulli tutti i coefficienti non può essere identicamente nulla. Infatti, se $f(x)$ fosse identicamente nulla, e se

$$x_1, \ x_2, \ldots . x_n, \ x_{n+1}$$

sono $n+1$ valori diversi della x, dovrebbe essere

$$f(x_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots ., n+1) .$$

Ma queste relazioni si possono considerare come $n+1$ equazioni lineari omogenee, nelle $n+1$ incognite

$$a_0, \ a_1, \ldots, \ a_n ,$$

col determinante dei coefficienti che è il determinante di Vandermonde degli elementi a due a due diversi

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}\,,$$

e che quindi è diverso da zero. Queste relazioni non possono allora essere soddisfatte se si suppone che i coefficienti di $f(x)$ non siano tutti nulli.

Per dimostrare il teor. in generale, si supponga che esso sia stato dimostrato per le funzioni razionali intere con m variabili, e dimostriamo che esso vale anche per quelle che hanno $m+1$ variabili. A tal fine supponiamo che f sia una funzione razionale intera con $m+1$ variabili, e che x sia una di queste. Sarà

$$f=\varphi_0\cdot x^n+\varphi_1\cdot x^{n-1}+\ldots\ldots+\varphi_n\,,$$

dove le φ sono funzioni razionali intere delle rimanenti m variabili. Se f è identicamente nulla, qualunque sia il sistema di valori che si assegnano alle variabili che figurano nelle φ, la f è una funzione razionale intera identicamente nulla della sola variabile x, e si conclude che i suoi coefficienti φ sono nulli. Dunque le φ si annullano per ogni sistema delle m variabili che in esse figurano, ossia le φ sono identicamente nulle; e, per l'ipotesi fatta, esse hanno nulli tutti i loro coefficienti, ed infine sono nulli tutti i coefficienti di f. c. d. d.

2. Def. – Due funzioni razionali intere si dicono *identicamente uguali*, se per ogni medesimo sistema di valori delle variabili acquistano lo stesso valore.

Teor. – Due funzioni razionali intere identicamente uguali hanno uguali i coefficienti dei termini simili.

Dim. – Infatti, se φ e ψ sono due funzioni razionali intere identicamente uguali, la $\varphi-\psi$ è una funzione razionale intera identicamente nulla, e quindi ha nulli tutti i coefficienti. Ma i coefficienti di $\varphi-\psi$ sono le differenze dei coefficienti dei termini simili di φ e ψ, dunque i coefficienti dei termini simili di φ e ψ sono uguali. c. d. d.

3. Teor. – Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto di due funzioni razionali intere sia identicamente nullo è che almeno uno dei fattori sia identicamente nullo.

Dim. – È evidente che la condizione è sufficiente. Siano ora

φ e ψ due funzioni razionali intere di una sola variabile x, tali che il prodotto $\varphi \cdot \psi$ sia identicamente nullo. Poichè per ogni valore di x risulta $\varphi \cdot \psi = 0$, per ogni valore di x uno almeno dei fattori φ e ψ sarà nullo. Ora, se n è il più grande dei gradi di φ e ψ, e se si considerano $2n + 1$ valori diversi della x, poichè ciascuno di essi annulla almeno una delle due funzioni φ e ψ, vi sarà una di queste funzioni che si annullerà per almeno $n + 1$ di detti valori. Si conclude che questa funzione è identicamente nulla.

Dimostrato così che la condizione è necessaria nel caso di una sola variabile, per dimostrare la cosa in generale basterà provare che, se essa sta per un certo numero m di variabili, sta anche quando le variabili sono $m + 1$. Supponiamo allora che φ ψ siano due funzioni intere con $m + 1$ variabili e che il loro prodotto sia identicamente nullo. Se nè l'una nè l'altra delle due funzioni φ e ψ è identicamente nulla, indichiamo con x una delle variabili, ed indichiamo con μ e ν i gradi di φ e ψ, rispetto ad x. Avremo

$$\varphi = \varphi_0 \cdot x^\mu + \varphi_1$$

$$\psi = \psi_0 \cdot x^\nu + \psi_1$$

dove φ_0 e ψ_0 sono funzioni delle rimanenti m variabili e φ_1 è rispetto ad x di grado $< \mu$ e ψ_1 è rispetto ad x di grado $< \nu$.

Risulta che il termine di $\varphi \cdot \psi$ di grado massimo in x è $\varphi_0 \cdot \psi_0 \cdot x^{\mu+\nu}$, e poichè $\varphi\psi$ è identicamente nulla deve essere $\varphi_0 \cdot \psi_0 = 0$ per ogni sistema di valori delle m variabili che in esso figurano, dunque $\varphi_0 \cdot \psi_0$ è identicamente nulla, e, per l'ipotesi fatta, uno dei due fattori φ_0 e ψ_0 è identicamente nullo. Questo contrasta colla supposizione che μ e ν siano effettivamente i gradi di φ e ψ rispetto ad x. Dunque bisogna concludere che una delle due funzioni φ e ψ deve essere identicamente nulla.

4 Teor. – Se φ e ψ sono due funzioni razionali intere, il massimo grado dei termini di $\varphi \cdot \psi$ è uguale alla somma dei massimi gradi di φ e di ψ, e il minimo grado dei termini di $\varphi \cdot \psi$ è uguale alla somma dei minimi gradi dei termini di φ e di ψ.

Dim. – Supponiamo che μ e ν siano i massimi gradi dei termini di φ e ψ.

Si potrà porre

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 ,$$

dove φ_1 è la somma di tutti i termini di grado μ di φ, e φ_2 è la somma dei termini rimanenti; ed analogamente ψ_1 è la somma dei termini di grado ν di ψ, e ψ_2 la somma dei rimanenti.

Sarà

$$\varphi \cdot \psi = \varphi_1 \cdot \psi_1 + R ,$$

dove R è una funzione razionale intera di grado minore di $\mu + \nu$. Quindi si potrà concludere che il massimo grado di $\varphi \cdot \psi$ sarà $\mu + \nu$, se non sarà $\varphi_1 \cdot \psi_1$ identicamente nullo. Ma ciò non può essere, perchè, per ipotesi, nessuno dei fattori φ_1 e ψ_1 è identicamente nullo.

Resta così provato che il massimo grado dei termini del prodotto di due funzioni razionali intere è uguale alla somma dei massimi gradi dei termini dei due fattori. In modo analogo si dimostra l'altra parte del teorema.

Cor. – Se il prodotto di due funzioni razionali intere φ e ψ è una funzione omogenea, le due funzioni φ e ψ sono pure omogenee ed il grado di $\varphi \cdot \psi$ è uguale alla somma dei gradi di φ e di ψ.

Dim. - Infatti, se $\varphi \cdot \psi$ è omogeneo, e se n è il suo grado, tanto il massimo come il minimo grado dei termini di $\varphi \cdot \psi$ è uguale ad n, dunque la somma dei massimi gradi e quella dei minimi gradi di φ e ψ sono uguali ad n, e però il massimo grado ed il minimo grado dei termini di ognuno dei fattori φ e ψ sono uguali, e quindi φ e ψ sono omogenei; ed inoltre risulta che il grado di $\varphi \cdot \psi$ è uguale alla somma dei gradi di φ e di ψ.

5. Def. - Una funzione razionale intera di grado > 0 si dice *prima* se non è decomponibile in un prodotto di due funzioni razionali intere di grado > 0.

Con considerazione analoghe a quelle che si fanno sulla divisibilità dei numeri interi si può dimostrare il

Teor. 1. – Ogni funzione razionale intera non prima si può decomporre in un prodotto di funzioni razionali intere prime.

Se poi si considerano come un medesimo fattore primo due fattori primi che si ottengono l'un dall'altro moltiplicando per una costante, si ha anche il

Teor. 2. – Una funzione razionale intera si può scomporre *in un sol modo* in un prodotto di funzioni razionali intere prime.

2.

I determinanti funzioni dei propri elementi.

1. Determinanti generici e simmetrici considerati come funzioni dei loro elementi. — 2. Indecomponibilità di tali determinanti in fattori.

1. – Un determinante generico

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

considerato come funzione dei suoi elementi, è una funzione razionale intera omogenea di grado n di n^2 variabili.

Un determinante simmetrico, cioè un determinante (1) in cui $x_{rs} = x_{sr}$, considerato come funzione dei suoi elementi, è pure una funzione razionale intera omogenea di grado n, ma con sole $\binom{n+1}{2}$ variabili.

2. Teor. – Un determinante simmetrico considerato come funzione dei suoi elementi è una funzione prima.

Dim. – La proposizione è evidente se l'ordine del determinante è 1. Per dimostrare la cosa in generale basta provare che, se essa è vera per i determinanti di ordine n, è vera anche per quelli di ordine $n+1$. A tal fine consideriamo un determinante simmetrico di ordine $n+1$ di elementi

$$x_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \dots n+1).$$

Supposto che esso si possa scomporre nel prodotto di due funzioni razionali intere φ e ψ, poichè il determinante è di grado 1 rispetto all'elemento x_{11}, uno dei due fattori sarà di grado 1 rispetto ad x_{11}, e l'altro di grado *zero*. Sia φ il fattore di grado 1 rispetto ad x_{11}, allora sarà

$$\varphi = x_{11}\varphi_1 + \varphi_2 ,$$

dove φ_1 e φ_2 sono di grado *zero* rispetto ad x_{11}. Inoltre il determinante varrà

$$x_{11} \cdot \varphi_1 \cdot \psi + \varphi_2 \cdot \psi .$$

Ma esso vale anche $x_{11} \cdot X_{11} + Y$, dove X_{11} indica il complemento algebrico di x_{11}, ed Y è una funzione razionale intera di grado *zero* rispetto ad x_{11}. Si conclude che dovrà essere

$$X_{11} = \varphi_1 \cdot \psi .$$

Ma X_{11} è un determinante simmetrico di ordine n, e quindi, per ipotesi è indecomponibile. Dunque una delle funzioni φ_1 e ψ deve essere costante. Se risulta ψ costante, la supposta non è una decomposizione del determinante primitivo. Resta a supporre che sia costante la φ_1. Ma φ è omogenea. e contiene l'addendo $\varphi_1 \cdot x_{11}$ che è di grado 1, dunque la φ è di grado 1.

Nella φ possiamo supporre il coefficiente di x_{11} uguale ad 1, ed allora sarà $\psi = X_{11}$.

Notiamo poi che in tale ψ *non* figurano le variabili $x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}, x_{1n+1}$, e che, rispetto al complesso di queste variabili, il determinante dato è di 2^0 grado; dunque φ dovrà essere almeno di 2^0 grado, il che è assurdo. Si conclude che il determinante è indecomponibile.

Cor. - Un determinante generico considerato come funzione dei suoi elementi è indecomponibile.

Dim. - Difatti, se un determinante generico fosse decomponibile, basterebbe uguagliare in esso gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale per ottenere un determinante simmetrico decomponibile, il che è impossibile.

Del resto la dimostrazione precedente potrebbe essere seguita nelle sue linee generali per dimostrare direttamente questo cor.

3.

Quadriche e trasformazioni lineari.

1. Quadriche. — 2. Trasformazioni lineari. — 3. Trasformata di una quadrica. — 4-5. Sopra certe funzioni omogenee dei coefficienti di una quadrica.

1. Def. – Una funzione razionale intera omogenea di grado 2 in un sistema di variabili si chiama *forma quadratica* o semplicemente *quadrica.*

Una quadrica con n variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

si scriverà sotto la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s ,$$

con

$$a_{r,s} = a_{s,r} .$$

Def. 2. – Se

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s \qquad (a_{r,s} = a_{s,r})$$

è una forma quadratica, il determinante dei coefficienti

$$a = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

si chiama il suo *discriminante.*

Def. 3. – Una forma quadratica si dice *generica* se il suo discriminante è diverso da *zero*. Nel caso contrario si dice *singolare.*

2. Def. – Una sostituzione che porta dalle variabili

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

alle variabili

$$x_1, x_2, \dots, x_n ,$$

data dalle n relazioni

(1) $$x_i = \sum_1^n{}_j c_{ij} \cdot y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

in cui le c_{ij} sono dei numeri noti, si chiama una *trasformazione lineare*. Le (1) si dicono le *equazioni* della trasformazione, ed il determinante

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

si chiama *modulo* della trasformazione.

3. – Una trasformazione lineare (1) trasforma una quadrica

$$F = \sum_1^n{}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

colle variabili x in una quadrica colle variabili y

$$F' = \sum_1^n{}_{rs} b_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s,$$

con

(2) $$b_{r,s} = b_{s,r} = \sum_1^n{}_{\rho\sigma} a_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s}.$$

Def. – La quadrica F' si chiama la *trasformata* della F mediante la trasformazione (1).

Teor. – Il discriminante della trasformata di una quadrica F è uguale al discriminante della F moltiplicato per il quadrato del modulo della trasformazione.

Dim. – Infatti, se noi poniamo

$$\alpha_{\sigma r} = \sum_1^n{}_\rho a_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r},$$

ed

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

e se ricordiamo le regole di moltiplicazione dei determinanti, vediamo che α è il prodotto dei determinanti a e c. E poichè risulta

$$b_{r,s} = \sum_1^n {}_\sigma \alpha_{\sigma r} \cdot c_{\sigma s}$$

vediamo anche che b è il prodotto dei determinanti α e c. Si conclude che

$$b = \alpha \cdot c = (a \cdot c) c = a \cdot c^2 \qquad \text{c. d. d.}$$

4. - Sia

$$\varphi(a_{1,1},\ a_{1,2}, \ldots,\ a_{n,n}) = \varphi(a) \tag{3}$$

una funzione razionale intera omogenea di grado k dei coefficienti di una quadrica F. Si trasformi la F in una quadrica F' a mezzo di una trasformazione lineare (1), e si consideri la

$$\varphi(b_{1,1},\ b_{1,2}, \ldots,\ b_{n,n}) = \varphi(b) \tag{4}$$

ottenuta dalla (3) sostituendo ad ogni coefficiente di F quello di F' che ha gli stessi indici.

Sostituiamo poi in (4) alle $b_{r,s}$ le loro espressioni date dalle (2). Allora la (4) diventa una funzione razionale intera dei coefficienti della F e dei coefficienti della trasformazione (1), omogenea di grado $3k$, e più precisamente omogenea di grado k nei coefficienti di F, ed omogenea di grado $2k$ nei coefficienti della (1).

Indichiamo questa funzione con

$$\psi(a_{1,1},\ a_{1,2}, \ldots,\ a_{n,n},\ c_{11},\ c_{12},\ c_{21}, \ldots,\ c_{nn}). \tag{5}$$

Vale il

Teor. - Se la funzione (5) è uguale al prodotto della funzione (3) per una funzione razionale intera

$$\theta(c_{11},\ c_{12},\ c_{21}, \ldots,\ c_{nn}) = \theta(c)$$

dei soli coefficienti di (1), la θ è una potenza con esponente intero del modulo di (1), ed il numero $2k$ deve essere divisibile per n.

Dim. - Supponiamo che la trasformazione (1) sia di modulo diverso da *zero*, e risolviamo rispetto alle y. Si avrà

$$(6) \qquad c \cdot y_j = \sum_1^n {}_i C_{ij} x_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le C_{ij} sono i complementi algebrici delle c_{ij} in c, e quindi sono funzioni razionali intere omogenee di grado $n-1$ dei coefficienti di (1).

La relazione algebrica

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\psi(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{n,n}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, \ldots, c_{nn}) = \\ &= \varphi(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{n,n}) \cdot \theta(c_{11}, c_{12}, c_{21}, \ldots, c_{nn}) \end{aligned}$$

sta anche se al posto delle $a_{r,s}$ si pongono le $b_{r,s}$, e al posto delle c_{ij} si pongono le $C_{ij}:c$, ma allora il 1° membro di (7) diventa la (3) e la θ, tenuto conto della sua omogeneità, diventa

$$\theta(C_{11}, C_{12}, C_{21}, \ldots, C_{nn}) : c^{2k} = \theta(C) : c^{2k}.$$

Si hanno adunque le relazioni

$$\varphi(b) = \varphi(a) \cdot \theta(c)$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) \cdot \theta(C) : c^{2k},$$

dalla quali si ricava

$$\theta(c) \cdot \theta(C) = c^{2k}.$$

Ma c è una funzione prima (p. 110), d'altra parte c^{2k} non si può scomporre in fattori primi che in una sola maniera, dunque deve essere

$$\theta(c) = M \cdot c^m,$$

dove M è una costante, ed m è un conveniente numero intero. Si vede subito che $M = 1$, perchè, se noi prendiamo per trasformazione (1) la

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

abbiamo $c = 1$ e le $a_{r,s} = b_{r,s}$, e la

$$\varphi(a) = \varphi(b) \cdot \theta(c)$$

ci dà corrispondentemente $\theta(c) = 1$, ossia $M \cdot c^m = 1$, ed infine $M = 1$.

Dunque per ogni sistema delle c_{ij} si ha

$$\theta(c) = c^m.$$

Ora $\theta(c)$ è di grado $2k$, e c^m è di grado $n \cdot m$, deve dunque essere

$$n \cdot m = 2k,$$

ossia $2k$ deve essere divisibile per n.

5. Teor. – Una funzione derivabile φ dei coefficienti di una forma quadratica generica F è una costante (cioè è indipendente dai detti coefficienti), se essa non cambia valore tutte le volte che in essa si sostituiscono i coefficienti di F coi corrispondenti di una trasformata F' della F a mezzo di una trasformazione lineare.

Dim. – Consideriamo la trasformazione lineare di equazioni

$$\begin{cases} x_r = y_r & (r \neq s) \\ x_s = y_s + \lambda \cdot y_h \end{cases},$$

dove λ è una costante ed s ed h sono due numeri interi fissi, che possono essere diversi od uguali.

Ciò equivale a prendere nel caso di $s = h$

$$\begin{cases} c_{rr} = 1 & (r \neq s) \\ c_{ss} = 1 + \lambda \\ c_{pq} = 0 & (p \neq q), \end{cases}$$

e nel caso di $s \neq h$

$$\begin{cases} c_{pp} = 1 & (p = 1, 2, \ldots, n) \\ c_{sh} = \lambda. \end{cases}$$

e le rimanenti c_{pq} uguali a *zero*.

In tutti i casi si avrà

$$\begin{cases} b_{pq} = a_{pq} & (p \neq h \text{ e } q \neq h) \\ b_{hq} = a_{hq} + \lambda \cdot a_{sq} & (q \neq h) \\ b_{hh} = \lambda^2 \cdot a_{ss} + 2 \cdot \lambda \cdot a_{sh} + a_{hh} \end{cases}.$$

Mettiamo ora in evidenza nella φ gli $a_{r,s}$ che hanno almeno un indice uguale ad h, e quindi scriviamo

$$\varphi = \varphi(a_{h,1}, a_{h,2}, \ldots, a_{h,h}, \ldots, a_{h,n}).$$

Per l'ipotesi, si avrà

$$\varphi(a_{h.1}, a_{h.2}, \ldots, a_{h.h}, \ldots, a_{h.n}) =$$
$$= \varphi(a_{h.1}+\lambda a_{s.1}, a_{h.2}+\lambda a_{s.2}, \ldots, a_{h.h}+2\lambda a_{s.h}+\lambda^2 a_{s.s}, \ldots, a_{h.n}+\lambda a_{s.n}),$$

e questo avviene per ogni λ.

Derivando rispetto a λ i due membri della precedente uguaglianza, e poi facendo $\lambda = 0$, si ha

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.1}} a_{s.1} + \ldots + 2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.h}} a_{s.h} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.n}} a_{s.n}.$$

Facendo variare s da 1 ad n, si vede che le

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.1}}, \ldots, 2\frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.h}}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.n}}$$

soddisfano un sistema di n equazioni lineari con n incognite e col determinante dei coefficienti diverso da *zero*, poichè esso è il discriminante della forma F. Dobbiamo quindi concludere che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.1}} = \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.h}} = \ldots = \frac{\partial\varphi}{\partial a_{h.n}} = 0.$$

Questo avviene per ogni h, quindi, per ogni coppia di indici p e q, si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_{p.q}} = 0,$$

ossia la φ è indipendente da ogni $a_{p.q}$, e quindi è costante. c. d. d.

Cor. – Sia φ una funzione derivabile dei coefficienti $a_{r.s}$ di una forma quadratica generica F tale che, quando in essa φ si sostituiscono i coefficienti $a_{r.s}$ coi corrispondenti $b_{r.s}$ della forma F' in cui la F si trasforma a mezzo di una qualunque trasformazione lineare omogenea, la φ risulta moltiplicata per la potenza 2ν–esima del modulo della sostituzione. Si ha $\varphi = C \cdot a^{\nu}$, dove C è una costante ed a indica il discriminante di F.

Dim. – Infatti, poichè a per una trasformazione lineare omogenea sulle variabili risulta moltiplicata per il quadrato del modulo della sostituzione, $\varphi : a^{\nu}$ rimane invariato, e quindi $\varphi : a^{\nu}$ è una costante. Si ha dunque $\varphi = C \cdot a^{\nu}$, dove C è una costante.

4.

Determinanti di Torelli.

1. Definizione. — 2. Calcolo. — 3. Condizione necessaria e sufficiente perchè un determinante di Torelli non si annulli.

1. Def. – Se α ed x sono due numeri, chiamo *determinante di* Torelli il determinante di ordine n

$$T_n(\alpha, x) = \begin{vmatrix} \alpha+x & x & \dots & x \\ x & \alpha+x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & \alpha+x \end{vmatrix}.$$

2. – Si ponga

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \dots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \dots & a_{2n}+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}.$$

Poichè i termini di ciascuna colonna sono somma di due numeri ciascuno, il determinante $D(x)$ si può spezzare nella somma dei 2^n determinanti che si ottengono sostituendo ad ogni colonna o i primi addendi che in essa figurano od i secondi addendi. Di questi determinanti sono nulli tutti quelli che hanno almeno due colonne formate coi secondi addendi, perchè hanno almeno due colonne uguali, e quindi si ha

$$D(x) = D + \sum_1^n{}_r \Delta_r(x),$$

dove $D = D(0)$, e

$$\Delta_r(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,r-1} & x & a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,r-1} & x & a_{2\,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,r-1} & x & a_{n\,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x \cdot \sum_1^n{}_s A_{sr},$$

indicandosi con A_{sr} il complemento algebrico di a_{sr} nel determinante D.

In conclusione

$$D(x) = D + x \cdot \sum_{1}^{n}{}_{rs} A_{sr} .$$

Supponendo

$$a_{rs} = \begin{cases} \alpha, & \text{se } r = s \\ 0, & \text{se } r \neq s , \end{cases}$$

si ha

$$D(x) = T_n(\alpha, x) ;$$

e, poichè allora

$$D = \alpha^n$$

ed

$$A_{rs} = \begin{cases} \alpha^{n-1}, & \text{se } r = s \\ 0 , & \text{se } r \neq s , \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} T_n(\alpha, x) &= \alpha^n + n \cdot x \cdot \alpha^{n-1} \\ &= \alpha^{n-1}(\alpha + n \cdot x) . \end{aligned}$$

3. - Dalla precedente espressione si ricava che, se $n > 1$, condizione necessaria e sufficiente perchè $T_n(\alpha, x)$ non si annulli è che α ed $\alpha + nx$ siano entrambi diversi da *zero*.

5.

Determinanti di Spottiswoode.

1. Definizione. — 2. Calcolo.

1. - Se

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

è un determinante qualunque di ordine n, e se m è un intero $\leq n$, i minori di ordine m che si possono estrarre da c sono in numero di $\binom{n}{m}^2$, perchè la righe di un tale minore si possono scegliere in $\binom{n}{m}$ modi (numero delle combinazioni semplici di n elementi ad m a m) e le sue colonne si possono scegliere pure in $\binom{n}{m}$ modi.

Si potrà indicare con $C_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ quello di questi minori che è formato colle righe di c che occupano i posti indicati coi numeri $i_1, i_2, \dots, i_m$ e colle colonne di c che occupano i posti indicati coi numeri $j_1, j_2, \dots, j_m$. Prendendo questi minori come elementi, formiamo il determinante di ordine $\binom{n}{m}$ che si ottiene disponendo i $C_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ in un quadrato in modo che in una medesima linea sia costante il gruppo degli indici $i_1 i_2 \dots i_m$ ed in una medesima colonna sia costante il gruppo degli indici $j_1 j_2 \dots j_m$, e che in ogni termine della diagonale principale i due gruppi di indici $i_1 i_2 \dots i_m$ e $j_1 j_2 \dots j_m$ siano uguali.

Come si vede, vi sono vari modi per formare un tale determinante, ma, poichè da un modo all'altro si passa eseguendo sulle righe e sulle colonne la medesima sostituzione, si conclude che il valore del determinante di cui si discorre è determinato. Lo indicheremo con c_m.

Def. – Il precedente determinante c_m si chiamerà l' *m-esimo determinante di* Spottiswoode dedotto da c.

2. – Nel precedente determinante di Spottiswoode noi distingueremo le righe e le colonne in *pari* e *dispari*; diremo *pari* una riga quando è pari la somma degli indici $i_1 i_2 \dots i_m$ dei $C_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ che in essa figurano, e diremo *dispari* le altre righe, e diremo analogamente *pari* una colonna quando è pari la somma degli indici $j_1 j_2 \dots j_m$ dei $C_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ che in essa figurano, e *dispari* le altre colonne.

Se in c_m cambiamo il segno a tutti gli elementi di ogni linea dispari e poscia a tutti gli elementi di ogni colonna dispari, vediamo che il determinante non cambia valore, e che nello stesso tempo si muta nel determinante che ha per elementi i $C_{i_1 i_2 \dots i_m, j_1 j_2 \dots j_m}$ presi col segno $+$ o col segno $-$ a seconda che la somma di tutti i $2m$ indici è pari o dispari, o in altri termini si muta nel determinante che ha per elementi i *complementi algebrici* dei minori di c di ordine $n - m$.

Consideriamo ora il prodotto

$$c_m \cdot c_{n-m} .$$

Noi possiamo pensare che il c_{n-m} sia formato coi complementi algebrici dei minori di ordine m di c, e che nei due determinanti c_m e c_{n-m} un minore di ordine m di c ed il suo complemento algebrico occupino lo stesso posto. Allora, eseguendo la moltiplicazione per righe dei due determinanti c_m e c_{n-m} e tenendo conto di note proprietà dei determinanti, si trova come prodotto un determinante di ordine $\binom{n}{m}$ che ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali a c, e tutti gli altri uguali a 0.

Si conclude che

$$c_m \cdot c_{n-m} = c^{\binom{n}{m}} .$$

Considerando che c_m e c_{n-m} sono funzioni razionali intere degli elementi di c, e che, essendo c un determinante qualunque, non si potrà scomporre in fattori razionali interi, si deve concludere che ognuno dei fattori c_m e c_{n-m} sarà uguale ad una potenza intera di c moltiplicata per una costante.

Dunque

$$c_m = M \cdot c^k ,$$

dove M è una costante, e k è un intero > 0.

Ora c_m è, evidentemente, di grado $m \cdot \binom{n}{m}$ negli elementi di c, e c^k è di grado $n \cdot k$ in questi medesimi elementi. Dunque sarà

$$m \cdot \binom{n}{m} = n \cdot k ,$$

da cui

$$k = \frac{m}{n} \cdot \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1},$$

e quindi

$$c_m = M \cdot c^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Prendendo poi per c il determinante di ordine n che ha $=1$ i termini della diagonale principale, ed $=0$ i rimanenti, si vede che allora risulta $c_m = 1$ ed anche $c = 1$, e se ne trae $1 = M \cdot 1$, da cui $M = 1$.

Si ha dunque

$$c_m = c^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

Essendo questa una identità algebrica, essa varrà qualunque sia c, ed anche se $c = 0$.

6.

Determinanti di Kronecker.

1. Definizione — 2. Calcolo.

1. Def. - Sia

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

un determinante qualunque di ordine n, e si ponga, essendo k un qualunque intero > 0,

$$C_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k} = c_{i_1 j_1} \cdot c_{i_2 j_2} \dots c_{i_k j_k}.$$

Consideriamo il determinante di ordine n^k che ha per elementi i

$$C_{i_1 i_2 \dots i_k, j_1 j_2 \dots j_k},$$

in modo che in una stessa riga siano costanti gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$, ed in una stessa colonna siano costanti gli indici $j_1, j_2, \ldots, j_k$, e che gli elementi della diagonale principale abbiano

$$i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots,\ i_k = j_k\,.$$

Tale determinante, come quello di Spottiswoode, ha un valore indipendente dall'ordine in cui si dispongono le righe, si chiama il *k-esimo determinante di* Kronecker dedotto da c, e si indicherà con $(c)_k$.

Il determinante $(c)_k$ è una funzione razionale omogenea di grado $k \cdot n^k$ degli elementi di c. Inoltre essa non è identicamente nulla, perchè se noi prendiamo un determinante c che ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1 ed i rimanenti nulli, vediamo che anche $(c)_k$ ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1 ed i rimanenti nulli, e che quindi risulta $(c)_k = 1$.

2. – Consideriamo una forma quadratica

$$F = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s \qquad (a_{r,s} = a_{s,r})$$

ed il determinante $(a)_k$ di Kronecker dedotto dal suo discriminante a.

Vediamo come essa si trasforma quando ai coefficienti di F si sostituiscono i coefficienti della trasformata

$$F' = \sum_1^n{}_{rs}\, b_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s$$

della F a mezzo di una trasformazione lineare

$$x_i = \sum_1^n{}_j\, c_{ij} \cdot y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

A causa delle note formule

$$b_{r,s} = \sum_1^n{}_{\rho\sigma}\, a_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s}$$

si ha

$$b_{i_h, j_h} = \sum_1^n{}_{\rho_h \sigma_h}\, a_{\rho_h, \sigma_h} \cdot c_{\rho_h i_h} \cdot c_{\sigma_h j_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k)$$

e quindi, con notazioni che si intendono facilmente,

$$B_{i_1 i_2 \cdots i_k \,,\, j_1 j_2 \cdots j_k} =$$

$$= \Sigma_{\rho\sigma} A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k \,,\, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k} \cdot C_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k \,,\, i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot C_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k \,,\, j_1 j_2 \cdots j_k} ;$$

la Σ intendendosi estesa al variare da 1 ad n degli indici

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, \; \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k .$$

Mediante questa formula si dimostra, procedendo come si è fatto per dimostrare il teor. a p. 112, che

$$(b)_k = (a)_k \cdot (c)_k^2 .$$

Da questa relazione si ricava (p. 113, teor.) che $(c)_k$ è una potenza di c. Supposto che sia

$$(c)_k = c^m ,$$

poichè $(c)_k$ è di grado $k \cdot n^k$, e c^m è di grado $n \cdot m$ negli elementi di c, si avrà

$$m = k \cdot n^{k-1} .$$

Si ha allora il

Teor. - Il determinante *k-esimo* di Kronecker dedotto da un determinante di ordine n vale la potenza di questo determinante che ha per esponente il numero $k \cdot n^{k-1}$.

7.

I determinanti di Brill-Scholtz-Hunyady.

1. Definizione. — 2. Calcolo.

1. - Sia

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

un determinante di ordine n, e sia k un numero intero >0. Indichiamo con

$$i_1, i_2, \ldots, i_k$$

$$j_1, j_2, \ldots, j_k$$

due delle $\binom{n+k-1}{k}$ combinazioni con ripetizione a k a k dei numeri

$$1, 2, \ldots, n,$$

e consideriamo il prodotto

(1) $$c_{i_1 j_1} \cdot c_{i_2 j_2} \ldots c_{i_k j_k} \, .$$

Teniamo poi fisso l'ordine degli indici

$$j_1, j_2, \ldots, j_k$$

e disponiamo gli indici

$$i_1, i_2, \ldots, i_k$$

in tutte le loro permutazioni distinte [1]. Otteniamo allora da (1) tanti termini quante sono queste permutazioni. Indichiamo poi con

(2) $$C_{i_1 i_2 \ldots i_k, j_1 j_2 \ldots j_k}$$

la somma di tutti questi termini.

Si vede subito che l'elemento (2) non cambia se si cambia l'ordine iniziale degli indici

$$j_1, j_2, \ldots, j_k,$$

e che esso non dipende dall'ordine in cui si considerano gli indici

$$i_1, i_2, \ldots, i_k \, .$$

In altri termini (2) è un elemento determinato dalle due combinazioni di indici considerate in principio.

Def. – Il determinante di ordine $\binom{n+k-1}{k}$ che ha per elementi gli elementi (2) disposti in modo che in ogni riga sia costante la combinazione $i_1 i_2 \ldots i_k$, ed in ogni colonna sia co-

[1] Si tenga presente che alcuni degli indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ possono essere uguali.

stante la combinazione $j_1 j_2 \ldots j_k$, e che in ogni elemento della diagonale principale siano uguali le due combinazioni

$$i_1 i_2 \ldots i_k \quad \text{e} \quad j_1 j_2 \ldots j_k ,$$

si dirà il *determinante k-esimo di Brill–Scholtz–Hunyady* dedotto dal determinante c, e lo indicheremo con $[c]_k$.

Il determinante $[c]_k$ è una funzione razionale intera omogenea di grado $k \cdot \binom{n+k-1}{k}$ degli elementi di c. Inoltre essa non è identicamente nulla, perchè, se noi prendiamo il determinante c che ha tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1 e tutti gli altri nulli, vediamo che anche in $[c]_k$ tutti gli elementi della diagonale principale risultano uguali ad 1 e tutti gli altri nulli e che quindi risulta $[c]_k = 1$.

2. – Consideriamo una forma quadratica

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{r,s}\, x_r\, x_s$$

ed il determinante $[a]_k$ di Brill–Scholtz–Hunyady dedotto dal suo discriminante a.

Moltiplichiamo ogni elemento di $[a]_k$ per $\underline{|k}$ e dividiamo tutti gli elementi di ogni riga per il numero delle permutazioni distinte che si possono fare cogli indici

$$i_1 i_2 \ldots i_k$$

che la individuano. Si trova così un nuovo determinante A_k, che varrà $M \cdot [a]_k$, dove M è un conveniente numero intero fisso > 0.

A_k non è identicamente nullo, poichè tale non è $[a]_k$.

Gli elementi di A_k, che indicherò con

$$(A_{i_1 i_2 \ldots i_k, j_1 j_2 \ldots j_k}) ,$$

valgono la somma dei $\underline{|k}$ prodotti che si ottengono da

$$a_{i_1, j_1} \cdot a_{i_2, j_2} \ldots a_{i_k, j_k}$$

tenendo fisso l'ordine degli indici $j_1, j_2, \ldots, j_k$ e facendo subire agli indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tutte le $\underline{|k}$ permutazioni che si otterrebbero considerandoli come se fossero distinti.

Vediamo come si trasforma A_k, quando ai coefficienti di F si sostituiscono quelli della trasformata

$$F' = \sum_{1}^{n}{}_{rs} b_{r,s} y_r y_s$$

della F a mezzo di una trasformazione lineare

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_j c_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A causa delle formule

$$b_{r,s} = \Sigma_{\rho\sigma} a_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s}$$

si ha

$$b_{i_h, j_h} = \sum_{1}^{n}{}_{\rho_h \sigma_h} a_{\rho_h, \sigma_h} \cdot c_{\rho_h i_h} \cdot c_{\sigma_h j_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, k)$$

e quindi

(4) $$b_{i_1, j_1} \cdot b_{i_2, j_2} \ldots b_{i_k, j_k} =$$

$$= \Sigma_{\rho\sigma} a_{\rho_1, \sigma_1} \cdot a_{\rho_2, \sigma_2} \ldots a_{\rho_k, \sigma_k} \cdot (c_{\rho_1 i_1} c_{\rho_2 i_2} \ldots c_{\rho_k i_k}) \cdot (c_{\sigma_1 j_1} c_{\sigma_2 j_2} \ldots c_{\sigma_k j_k}),$$

la Σ essendo estesa al variare di tutti i ρ e di tutti i σ da 1 ad n.

Facciamo ora un cambiamento di ordine degli indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Ciò equivale a fare lo stesso cambiamento di ordine negli indici $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ nei soli fattori $a_{\rho, \sigma}$ che figurano nel 2° membro della (4).

Allora, se si sommano membro a membro tutte le (4) che si ottengono ordinando gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_k$ in tutti i $\underline{|k}$ modi possibili, si ha, con notazioni facili ad intendersi,

$$(B_{i_1 i_2 \ldots i_k, j_1 j_2 \ldots j_k}) =$$

$$= \Sigma_{\rho\sigma} (A_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_k, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k}) \cdot (c_{\rho_1 i_1} \cdot c_{\rho_2 i_2} \ldots c_{\rho_k i_k}) \cdot (c_{\sigma_1 j_1} \cdot c_{\sigma_2 j_2} \ldots c_{\sigma_k j_k}).$$

Nell' ultima Σ sono uguali fra loro tutti gli

$$(A_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_k, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k})$$

in cui gli indici $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_k$ formano la stessa combinazione con ripetizione a k a k dei numeri

$$1, 2, \ldots, n$$

e gli indici $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ formano pure la stessa combinazione con ripetizione a k a k degli stessi n numeri.

Quindi ogni termine $(A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k})$ figura nella predetta Σ un numero di volte uguale al prodotto del numero delle permutazioni distinte degli indici $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ per il numero delle permutazioni distinte degli indici $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$.

Indicando con Σ' la sommmatoria estesa ai diversi $(A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k})$, si ottiene facilmente

$$(B_{i_1 i_2 \cdots i_k, j_1 j_2 \cdots j_k}) =$$
$$= \Sigma' (A_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k}) \cdot C_{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k, i_1 i_2 \cdots i_k} \cdot C_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k, j_1 j_2 \cdots j_k}.$$

Mediante questa formula si dimostra, procedendo come si è fatto per dimostrare il teor. a p. 112, che

$$B_k = A_k [c]_k^2 .$$

Da questa relazione si ricava che

$$[c]_k = c^m .$$

Poichè $[c]_k$ è di grado $k \cdot \binom{n+k-1}{k}$, e c^m è di grado $m \cdot n$ negli elementi di c, si avrà

$$m = \frac{k}{n} \cdot \binom{n+k-1}{k} = \frac{k}{n} \cdot \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{n} .$$

Si ha allora il

TEOR. - Il determinante *k-esimo* di BRILL–SCHOLTZ–HUNYADY dedotto da un determinante di ordine n vale la potenza di questo determinante che ha per esponente il numero $\binom{n+k-1}{n}$.

In particolare il 2º determinante di BRILL–SCHOLTZ–HUNYADY di un determinante di ordine n vale la $(n+1)^{ma}$ potenza del determinante.

8.

Calcolo di particolari determinanti.

1. – Consideriamo una quadrica

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s\,, \qquad (a_{r,s} = a_{s,r})$$

di cui indichiamo al solito con a il discriminante.

Indichiamo poi con

$$rs \quad \text{e} \quad pq$$

due qualunque delle combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \ldots, n\,,$$

e poniamo

$$W_{rs,pq} = \lambda \cdot a_{r,s} \cdot a_{p,q} + \mu \cdot (a_{r,p} \cdot a_{s,q} + a_{r,q} \cdot a_{s,p})\,, \tag{1}$$

con λ e μ costanti rispetto ai coefficienti di F. Un elemento (1) è evidentemente individuato dalle due combinazioni considerate.

Sia W il determinante di ordine $\binom{n+1}{2}$ che si forma cogli elementi (1) tenendo fissa in ogni riga la coppia rs ed in ogni colonna la coppia pq e facendo percorrere nello stesso ordine a queste due coppie tutte le combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \ldots, n\,.$$

Se si tien conto del fatto, che per una sostituzione

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_{j}\, c_{ij} \cdot y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

col modulo c diverso da *zero*, $W_{rs,pq}$ si muta in

$$W'_{rs,pq} = \sum_{1}^{n}{}_{\rho\sigma\pi\varkappa}\, W_{\rho\sigma,\pi\varkappa} \cdot (c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s})\,(c_{\pi p} \cdot c_{\varkappa q})$$

$$= \Sigma'_{\rho\sigma,\pi\varkappa}\, W_{\rho\sigma,\pi\varkappa} \cdot P_{\rho\sigma,rs}\, P_{\pi\varkappa,pq}\,,$$

dove

$$P_{\rho\sigma, rs} = c_{\rho r} c_{\sigma s} + c_{\rho s} c_{\sigma r}, \qquad \text{se} \quad \rho \neq \sigma,$$

$$P_{\rho\rho, rs} = c_{\rho r} c_{\rho s}$$

e Σ' si intende estesa a tutti i termini che si ottengono facendo percorrere a $\rho\sigma$ e $\pi\kappa$ tutte le combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \ldots, n,$$

si vede che, per la (2), il determinante W si muta in

$$W' = W \cdot P^2,$$

dove P è il determinante formato colle $P_{rs,pq}$ come il W è formato colle $W_{rs,pq}$.

Ma il determinante P è il 2° determinante di Brill-Scholtz-Hunyady dedotto da c, e quindi vale c^{n+1}, dunque

$$W' = W \cdot c^{2(n+1)},$$

e se ne conclude (p. 116, cor.) che

$$W = C \cdot a^{n+1},$$

dove C è una costante.

Per calcolare C basta assumere per F la forma

(3) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

e calcolarne il relativo W. Essendo, per essa, $a = 1$, sarà

$$W = C \cdot 1^{n+1} = C.$$

Con questa osservazione il calcolo di C risulta facile, perchè, per la forma (3), tutti i $W_{rs,pq}$ risultano nulli ad eccezione dei seguenti

$$W_{rr,rr} = \lambda + 2\mu \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

$$W_{rr,ss} = \lambda \qquad (r \neq s)$$

$$W_{rs,rs} = \mu \qquad (r \neq s),$$

e quindi C vale

$$\mu^{\binom{n}{2}} \cdot \Delta,$$

dove Δ è il determinante di ordine n che ha tutti i termini della diagonale principale uguali a $\lambda + 2\mu$ e tutti gli altri uguali a λ.

Δ è dunque il determinante di Torelli $T_n(2\mu, \lambda)$ e quindi

$$\Delta = (2\mu)^{n-1}(2\mu + n\lambda) .$$

Dunque

$$C = 2^{n-1} \cdot \mu^{\binom{n}{2}+n-1} \cdot (2\mu + n\lambda)$$

$$= 2^{n-1} \cdot \mu^{\binom{n+1}{2}-1} \cdot (2\mu + n\lambda)$$

ed infine

$$W = 2^{n-1} \cdot \mu^{\binom{n+1}{2}-1} \cdot (2\mu + n\lambda) \cdot a^{n+1} .$$

Consegue che, per $n > 1$, $W = 0$, se e solo se $\mu = 0$, oppure se $2\mu + n\lambda = 0$.

Nel caso di

$$\lambda = 1 \quad \text{e} \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

si ha

$$W = \frac{(-1)^{\binom{n+1}{2}-1} \cdot (n-1) \cdot a^{n+1}}{2^{\binom{n}{2}}}$$

9.

Equazioni secolari.

1. Forme quadratiche definite. — 2. Teoremi. — 3. Equazioni associate ad una coppia di forme quadratiche. — 4. Equazioni secolari. — 5. Realtà delle radici di una equazione secolare. — 6-7-8-9. Confronto del rango e dell'ordine di una radice di una equazione secolare.

1. Def. - Una forma quadratica a coefficienti reali

$$F_x = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s \qquad (a_{r,s} = a_{s,r})$$

si dice *definita* se, per ogni sistema di valori reali delle variabili

$$x_1, x_2, \ldots, x_n ,$$

si ha sempre

$$F_x \geq 0 ,$$

oppure sempre

$$F_x \leq 0 .$$

Evidentemente una quadrica definita resta tale se si eseguisce sulle variabili una trasformazione lineare a coefficienti reali e a modulo diverso da zero.

2. Teor. 1. - Se F_x è una forma quadratica, e se per un sistema di valori non tutti nulli delle x sono soddisfatte le relazioni

$$\sum_1^n {}_s a_{r,s} \cdot x_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

la F_x è singolare.

Dim. - Infatti le (1) costituiscono un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle n variabili x, e perchè sia soddisfatto per un sistema di valori non tutti nulli delle x si richiede che sia nullo il determinante dei coefficienti, ossia che sia nullo il discriminante della forma, ed infine che la forma sia singolare.

Teor. 2. - Se

$$F_x = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} x_r x_s \qquad (a_{r,s} = a_{s,r})$$

è una forma quadratica definita, che si annulla per un sistema di valori reali non tutti nulli delle

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

per questi valori delle x sono soddisfatte le (1), e quindi la F_x è singolare.

Dim. - Infatti, poichè la F_x è definita e si annulla in un punto reale, in questo punto la F_x deve avere un massimo od un minimo, ed allora in questo punto si devono annullare tutte le derivate prime di F_x rispetto alle n variabili x. Queste derivate sono appunto uguali ai primi membri delle relazioni (1) moltiplicati per 2. Dunque nel punto considerato sono soddisfatte le (1).

3. - Essendo

$$F_x = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

$$G_x = \sum_1^n {}_{rs} b_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

due quadriche, noi associeremo ad esse l'equazione

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\rho b_{1,1} & a_{1,2}-\rho b_{1,2} & \dots & a_{1,n}-\rho b_{1,n} \\ a_{2,1}-\rho b_{2,1} & a_{2,2}-\rho b_{2,2} & \dots & a_{2,n}-\rho b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}-\rho b_{n,1} & a_{n,2}-\rho b_{n,2} & \dots & a_{n,n}-\rho b_{n,n} \end{vmatrix}=0\,,$$

e l'equazione

$$\Omega(\rho)=0\,,$$

dove

$$\Omega(\rho)=\rho^n\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

La $\Omega(\rho)=0$ si ottiene dalla $\Delta(\rho)=0$ scambiando fra loro le due forme F_x e G_x, ed è evidentemente l'equazione reciproca di questa.

Considerando entrambe le equazioni $\Delta(\rho)=0$ ed $\Omega(\rho)=0$ come equazioni di grado n, nella quale ipotesi può darsi che esse abbiano delle radici infinite, si vede che ad ogni radice di una di esse ne corrisponde una dell'altra (la reciproca). Inoltre ad ogni radice reale od infinita di una di esse corrisponde una radice dell'altra o reale od infinita.

Se noi consideriamo le radici infinite come reali, possiamo dire che ad ogni radice reale di una delle due equazioni ne corrisponde una reale dell'altra.

Def. 1. – Se ρ_1 è una radice finita dell'equazione $\Delta(\rho)=0$, e se k è la caratteristica della matrice $\Delta(\rho_1)$, la differenza $n-k$ si chiama *rango* della radice ρ_1. Se poi l'equazione $\Delta(\rho)=0$ ha una radice infinita, si dice *rango* di questa radice il rango della radice nulla nella equazione reciproca $\Omega(\rho)=0$.

Teor. 1. – L'ordine di moltiplicità di una radice di una equazione $\Delta(\rho)=0$ è $\geqq$ del rango di questa radice.

Dim. - Basterà considerare solo le radici finite, perchè la considerazione della eventuale radice infinita si conduce alla considerazione della radice nulla della equazione reciproca.

Sia adunque ρ_1 una radice finita di rango h della equazione $\Delta(\rho)=0$. La matrice $\Delta(\rho_1)$ ha allora caratteristica $n-h$ e quindi sono nulli tutti i suoi minori di ordine $>n-h$.

Per ogni intero $i\leqq n$ la derivata i^{ma} di $\Delta(\rho)$ rispetto a ρ è una combinazione lineare di minori di ordine $n-i$ della matrice

$\Delta(\rho)$ [1], e quindi, se $i < h$ ossia se $n - i > n - h$, la derivata i^{ma} di $\Delta(\rho)$ si annulla per $\rho = \rho_1$.

Poichè allora la ρ_1 annulla $\Delta(\rho)$ e le sue derivate di ordine $< h$, la ρ_1 è radice di $\Delta(\rho) = 0$ di ordine $\geq h$. c. d. d.

Def. 2. – Una radice di una equazione $\Delta(\rho) = 0$ che abbia l'ordine di moltiplicità uguale al rango si dice *regolare*.

Teor. 2. – Eseguendo sulle variabili una trasformazione lineare

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_j c_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a modulo diverso da *zero*, le due forme F_x e G_x si trasformano in altre due forme F'_y ed G'_y, corrispondentemente alle quali si avrà una equazione $\Delta'(\rho) = 0$ analoga alla $\Delta(\rho) = 0$. Le due equazioni $\Delta(\rho) = 0$ e $\Delta'(\rho) = 0$ hanno le stesse radici collo stesso ordine di moltiplicità e collo stesso rango. In particolare una radice regolare dell'una è anche regolare dell'altra.

Dim. – Intanto è evidente che $\Delta(\rho)$ è il discriminante della quadrica $F_x - \rho G_x$. Quindi $\Delta'(\rho)$ è il discriminante della quadrica trasformata $F'_y - \rho G'_y$, ed allora $\Delta'(\rho) = \Delta(\rho) \cdot c^2$, dove c è il modulo della trasformazione. Di qui consegue intanto che le due equazioni hanno le stesse radici e cogli stessi ordini di moltiplicità.

Sia ora ρ_1 una radice di $\Delta(\rho) = 0$, e quindi di $\Delta'(\rho) = 0$.

Indichiamo poi con $\alpha_{r,s}$ gli elementi del determinante $\Delta(\rho_1)$ e con $\beta_{r,s}$ i corrispondenti di $\Delta'(\rho_1)$.

Infine poniamo

$$(2) \qquad \gamma_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_h \alpha_{h,r} \cdot c_{hs}.$$

Dalla (2) risulta subito che ogni minore di ordine m estratto dalla matrice $\|\gamma_{r,s}\|$ è il prodotto di due matrici rettangolari con m righe ed n colonne, la prima formata con m righe della matrice $\Delta(\rho_1)$ e l'altra con m righe della matrice $\|c_{rs}\|$. Esso quindi vale la somma dei prodotti dei minori corrispondenti di ordine m che si possono estrarre da dette matrici rettangolari, e quindi

[1] Ciò risulta subito dalla regola di derivazione dei determinanti.

vale una combinazione lineare di minori di ordine m della matrice $\Delta(\rho_1)$.

Poichè poi si ha

$$\beta_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{hk} a_{h,k} \cdot c_{hr} \cdot c_{ks} = \sum_{1}^{n}{}_{k} \gamma_{k,r} \cdot c_{ks},$$

si vede, in modo analogo a quanto precede, che ogni minore ordine m estratto dalla matrice $\Delta'(\rho_1)$ è una combinazione lineare di minori di ordine m estratti dalla matrice $\|\gamma_{r,s}\|$.

Combinando i due risultati si ha che ogni minore di ordine m estratto dalla matrice $\Delta'(\rho_1)$ è una combinazione lineare di minori di ordine m estratti dalla matrice $\Delta(\rho_1)$.

Consegue che, se tutti i minori di ordine m di $\Delta(\rho_1)$ sono nulli, sono nulli anche tutti i minori di ordine m della $\Delta'(\rho_1)$, e si conclude che il rango di ρ_1 in $\Delta'(\rho) = 0$ è $\geq$ del suo rango in $\Delta(\rho) = 0$.

Ma, poichè si passa anche dalla Δ' alla Δ con una trasformazione lineare sulle variabili a modulo diverso da *zero* (l'inversa di quella che porta da Δ a Δ'), si deve concludere che anche il rango di ρ_1 rispetto a Δ è $\geq$ del suo rango rispetto a Δ'. Dunque ρ_1 ha rispetto a Δ e a Δ' lo stesso rango. c. d. d.

4. Def. – Se

$$F_x = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

$$G_x = \sum_{1}^{n}{}_{rs} b_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

sono due quadriche a coefficienti reali, delle quali una definita ed una generica (le due qualità potendo essere riunite in una sola quadrica), l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ si dice una *equazione secolare*.

Evidentemente, se $\Delta(\rho) = 0$ è una equazione secolare, è anche tale la reciproca $\Omega(\rho) = 0$.

5. Teor. – Le radici di una equazione secolare sono tutte reali.

Dim. – Supponiamo che l'equazione secolare che si considera sia la $\Delta(\rho) = 0$ e che la forma F_x sia definita. Indichiamo poi con ρ_1 una radice finita di $\Delta(\rho) = 0$. Sarà possibile trovare un sistema di valori non tutti nulli delle x_s per cui sia

(3) $$\sum_1^n {}_s (a_{r,s} - \rho_1 \cdot b_{r,s}) \cdot x_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

poichè il determinante dei coefficienti di queste equazioni è nullo. Indichiamo con $\overline{x}_s$ i coniugati di questi valori x_s, e poi moltiplichiamo per $\overline{x}_r$ le relazioni (3) e sommiamo rispetto ad r. Troviamo allora

(4) $$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot \overline{x}_r \cdot x_s - \rho_1 \cdot \sum_1^n {}_{rs} b_{r,s} \cdot \overline{x}_r \cdot x_s = 0 .$$

Ora, se poniamo

$$x_s = y_s + i z_s$$

e quindi

$$\overline{x}_r = y_r - i z_r ,$$

vediamo che

(5) $$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot \overline{x}_r \cdot x_s = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s + \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot z_r \cdot z_s ,$$

e, poichè le y e le z sono reali e la F_x è definita, le due sommatorie

(6) $$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s \qquad \text{e} \qquad \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot z_r \cdot z_s ,$$

devono avere lo stesso segno.

Perciò il secondo membro della (5) non potrà essere zero se non sono zero entrambe le sommatorie (6).

Supponiamo che le due sommatorie (6) non siano entrambe nulle. Allora non è nulla la sommatoria che figura nel primo membro di (5), e quindi non è nulla la prima sommatoria che figura in (4).

In tal caso, le due sommatorie che figurano in (4) essendo reali, la (4) ci assicura che ρ_1 è reale e diversa da *zero*.

Se poi le due sommatorie (6) sono entrambe nulle, si avrà (p. 131, § 2, teor. 2).

(7) $$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n {}_s a_{r,s} \cdot y_s = 0 \\ &\sum_1^n {}_s a_{r,s} \cdot z_s = 0 \end{aligned}\right. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

e quindi

$$\sum_1^n {}_s a_{r,s} \cdot x_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) .$$

E, tenendo conto di (3) ,

$$\rho_1 \cdot \sum_1^n {}_s b_{r,s} \cdot x_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) .$$

Ora, o è $\rho_1 = 0$ (e quindi ρ_1 è reale), o è $\rho_1 \neq 0$ ed allora

(8) $$\sum_1^n {}_s b_{r,s} x_s = 0 .$$

Questo non può essere, perchè per le (7) ed (8) sarebbero nulli i discriminanti di entrambe le forme F_x e G_x, e la $\Delta(\rho) = 0$ non sarebbe più secolare.

Si conclude che necessariamente, nel caso in cui si annullano le (6), deve essere $\rho_1 = 0$.

È inutile che ci occupiamo delle radici infinite della $\Delta(\rho) = 0$, perchè esse per convenzione sono da considerarsi come reali.

6. Lemma. – Se

$$F_x = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot x_r \cdot x_s$$

è una quadrica, e se

$$c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{n1}$$

è un sistema di valori per cui

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = \pm 1 ,$$

è possibile trovare altri $n - 1$ sistemi di valori

$$c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{n2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{nn}$$

in modo che il determinante

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero, e siano soddisfatte le relazioni

$$\sum_1^n{}_{r,s} a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = 0 \qquad (q = 2, 3, \dots, n) .$$

Dim. - Poniamo

$$\alpha_s = \sum_1^n{}_r a_{r,s} \cdot c_{r1} ,$$

e consideriamo l' equazione lineare

$$\sum_1^n{}_s \alpha_s \cdot y_s = 0 .$$

Di questa equazione è possibile trovare $n - 1$ soluzioni linearmente indipendenti. Siano tali le

$$y_1 = c_{1q} , y_2 = c_{2q} , \dots , y_n = c_{nq} \qquad (q = 2, 3, \dots, n) .$$

Allora la matrice

$$\begin{Vmatrix} c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

ha caratteristica $n - 1$. Dico che il determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Infatti, se fosse uguale a zero, la prima riga sarebbe una combinazione lineare delle seguenti [1], e quindi sarebbe una soluzione della equazione

[1] Appunto perchè la matrice delle ultime $n - 1$ righe ha caratteristica $n - 1$.

$$\sum_1^n {}_s \alpha_s \cdot y_s = 0 \, ,$$

e si avrebbe

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = 0$$

contrariamente all' ipotesi.

Inoltre le relazioni

$$\sum_1^n {}_s \alpha_s \cdot c_{sq} = 0 \qquad (q = 2, 3, \ldots, n)$$

si possono scrivere

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = 0 \qquad (q = 2, 3, \ldots, n)$$

e così è dimostrato il lemma.

Teor. - Tutte le radici di una equazione secolare sono regolari, salvo eventualmente quella radice che risulta infinita per quella delle due equazioni $\Delta(\rho) = 0$ ed $\Omega(\rho) = 0$ nella quale la incognita ρ moltiplica i coefficienti della forma definita.

Dim. - Conservando le solite notazioni, supponiamo che delle due forme a coefficienti reali, F_x e G_x, la F_x sia definita.

Consideriamo poi la equazione $\Omega(\rho) = 0$, ed indichiamo con ρ_1 una sua radice finita.

Per il fatto che il determinante $\Omega(\rho_1)$ è uguale a *zero,* si possono determinare dei valori non tutti nulli

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

che soddisfano il sistema di equazioni lineari

$$(\alpha) \qquad \sum_1^n {}_r (\rho_1 \cdot a_{r,s} - b_{r,s}) y_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \, .$$

Dico che deve essere

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s \neq 0 \, .$$

Infatti, se fosse

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s = 0 \, ,$$

si dovrebbe avere (p. 131, § 2, teor. 2).

$$(\beta) \qquad \sum_1^n{}_r\, a_{r,s} \cdot y_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

e per le (α), essendo ρ_1 finito, si avrebbe

$$(\gamma) \qquad \sum_1^n{}_r\, b_{r,s} \cdot y_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) .$$

Ma dalle (β) consegue che F_x è singolare, e dalle (γ) consegue che G_x è singolare. Questi due fatti non possono sussistere insieme poichè la $\Omega(\rho) = 0$ è secolare, dunque deve essere appunto

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s \neq 0 .$$

Indicando con λ la radice quadrata del modulo di

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s ,$$

si vede che i valori

$$(\delta) \qquad c_{11} = y_1 : \lambda , \quad c_{21} = y_2 : \lambda , \ldots , c_{n1} = y_n : \lambda$$

sono tali per cui

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = \pm 1 .$$

Allora, pel lemma precedente, è possibile associare al predetto sistema di valori (δ) altri $n - 1$ sistemi di valori

$$\begin{array}{c} c_{12} , c_{22} , \ldots , c_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{1n} , c_{2n} , \ldots , c_{nn} , \end{array}$$

in modo che siano soddisfatte le relazioni

$$\sum_1^n{}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = 0 \qquad (q = 2, 3, \ldots, n) ,$$

e che il determinante

$$c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

sia diverso da *zero*.

Consideriamo la trasformazione lineare

$$x_i = \sum_1^n {}_j\, c_{ij} \cdot y_j \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

Essa ha modulo diverso da zero, e trasforma F_x e G_x rispettivamente in due altre forme

$$F'_y = \sum_1^n {}_{rs}\, a'_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s$$

$$G'_y = \sum_1^n {}_{rs}\, b'_{r,s} \cdot y_r \cdot y_s \,,$$

con

$$a'_{r,s} = \sum_1^n {}_{\rho\sigma} \cdot a_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s}$$

$$b'_{r,s} = \sum_1^n {}_{\rho\sigma} \cdot b_{\rho,\sigma} \cdot c_{\rho r} \cdot c_{\sigma s} \,.$$

Si ha allora

$$a'_{1,1} = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = \pm 1$$

$$a'_{1,q} = a'_{q,1} = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = 0 \qquad\qquad (q = 2, 3, \ldots, n)$$

e, tenendo presenti queste relazioni e le (α),

$$b'_{1,1} = \sum_1^n {}_{rs}\, b_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = \rho_1 \cdot \sum_1^n {}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{s1} = \pm \rho_1$$

$$b'_{1,q} = b'_{q,1} = \sum_1^n {}_{rs}\, b_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = \rho_1 \cdot \sum_1^n {}_{rs}\, a_{r,s} \cdot c_{r1} \cdot c_{sq} = 0 \,.$$

Si ha allora

$$F'_y = \pm y_1^2 + F''_y \,, \qquad\qquad G'_y = \pm \rho_1 y_1^2 + G''_y \,,$$

dove F''_y e G''_y sono forme quadratiche nelle sole variabili

$$y_2, y_3, \ldots, y_n \,.$$

È evidente che la F''_y è definita, perchè, se esistessero due sistemi di valori delle variabili

$$y_2,\ y_3, \ldots, y_n$$

per cui F''_y acquistasse due valori non nulli e con segno differente, basterebbe associare ad essi il valore $y_1 = 0$ per avere due sistemi di valori delle

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_n$$

che facciano acquistare alla F'_y due valori non nulli e con segno differente.

Inoltre, essendo il discriminante a' di F'_y uguale al discriminante a'' di F''_y moltiplicato per ± 1, si vede che, se $a' \neq 0$, deve essere $a'' \neq 0$, e quindi, se F'_y è generica, lo deve essere anche F''_y. Infine, essendo il discriminante b' di G'_y uguale al discriminante b'' di G'' moltiplicato per $\pm \rho_1$, si vede che, se $b' \neq 0$, deve essere (oltre che $\rho' \neq 0$) $b'' \neq 0$, e quindi, se G'_y è generica, lo è anche G''_y. Riassumendo, poichè una delle due forme F' e G' è generica, lo è anche una delle due forme F''_y e G''_y, e perciò la equazione che si ottiene annullando il discriminante della forma $\rho F''_y - G''_y$ è una equazione secolare.

Possiamo intanto concludere che, se la $\Omega(\rho) = 0$ ha una radice finita, la $\Omega(\rho) = 0$ può, con una trasformazione lineare sulle variabili con modulo diverso da *zero*, ridursi alla forma

$$\begin{vmatrix} \pm(\rho - \rho_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \rho a_{2,2} - b_{2,2} & \ldots & \rho a_{2,n} - b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \rho a_{n,2} - b_{n,2} & \ldots & \rho a_{n,n} - b_{n,n} \end{vmatrix} = 0 ,$$

mentre l'equazione

$$\begin{vmatrix} \rho a_{2,2} - b_{2,2} & \ldots & \rho a_{2,n} - b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho a_{n,2} - b_{n,2} & \ldots & \rho a_{n,n} - b_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

è pure una equazione secolare in cui i coefficienti di ρ sono i coefficienti della forma definita.

Se questa ultima equazione ha una radice finita ρ_2, sarà possibile, con un ulteriore trasformazione lineare a modulo diverso da *zero*, ridurre la $\Omega(\rho) = 0$ alla forma

$$\begin{vmatrix} \pm(\rho-\rho_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm(\rho-\rho_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \rho a_{3,3}-b_{3,3} & \dots & \rho a_{3,n}-b_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \rho a_{n,3}-b_{n,3} & \dots & \rho a_{n,n}-b_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

e si potrà continuare finchè si arriverà ad una equazione del tipo

$$\begin{vmatrix} \pm(\rho-\rho_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm(\rho-\rho_2) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm(\rho-\rho_m) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho a_{m+1,m+1}-b_{m+1,m+1} & \dots & \rho a_{m+1,n}-b_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho a_{n,m+1}-b_{n,m+1} & \dots & \rho a_{n,n}-b_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

con $m \leq n$, dove

$$\begin{vmatrix} \rho a_{m+1,m+1}-b_{m+1,m+1} & \dots & \rho a_{m+1,n}-b_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho a_{n,m+1}-b_{n,m+1} & \dots & \rho a_{n,n}-b_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

è una equazione secolare, in cui ρ moltiplica i coefficienti della forma definita e che ha tutte le sue radici infinite.

Ridotta a questa forma la $\Omega(\rho)=0$, si vede che, se una delle sue radici finite è r–*upla*, per ρ uguale a tale radice sono nulle r righe del determinante che si ha nel 1° membro, e quindi sono nulli tutti i minori di ordine $n-r+1$ della sua matrice. Si conclude che il rango della radice che si considera è $\geq r$. Ma esso non può essere $> r$ (p. 132, teor. 1); dunque esso è uguale ad r, e la radice è regolare.

Oss. – La radice infinita di $\Omega(\rho)=0$, quando una tale radice esiste, può anche non essere regolare.

Così, se k è un intero $\leq \frac{n}{2}$ e se si pone

$$F_x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$$

e

$$G_x = -(x_1 x_n + x_2 x_{n-1} + x_3 x_{n-2} + \ldots + x_n x_1),$$

si ha una equazione secolare $\Omega(\rho) = 0$ che ha la radice infinita di ordine n e di rango $n - k$.

Si noti che in questo esempio il rango è $\geq \frac{n}{2}$, e che quindi l'ordine di moltiplicità n della radice ∞ non supera il doppio del rango.

Vedremo come tale proprietà vale in tutti i casi.

7. La dimostrazione precedente conduce ad affermare che, se la F_x è generica, la $\Omega(\rho) = 0$ può, con una trasformazione lineare di modulo diverso da zero, essere ridotta alla forma

$$\begin{vmatrix} \pm(\rho - \rho_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm(\rho - \rho_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \pm(\rho - \rho_n) \end{vmatrix} = 0,$$

dove $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sono numeri reali finiti. Allora detta trasformazione muta la G_x in

$$G'_x = \pm \rho_1 y_1^2 \pm \rho_2 y_2 \pm \ldots \pm \rho_n y_n^2 .$$

Si ha così il

Teor. - Ogni quadrica

$$G_x = \sum_1^n {}_{rs} a_{r,s} x_r x_s$$

può, con una trasformazione lineare a modulo diverso da zero, essere ridotta alla forma

$$G'_y = \rho_1 \cdot y_1^2 + \rho_2 \cdot y_2^2 + \ldots + \rho_n \cdot y_n^2,$$

dove le ρ_i sono dei numeri reali finiti che possono essere anche nulli.

In particolare le cose vanno anche se la G_x è definita. In tal caso tutte le ρ_i devono essere dello stesso segno, ossia tutte

≥ 0 o tutte ≤ 0. Infatti, se h è uno dei numeri $1, 2, \ldots, n$, facendo $y_h = 1$ e tutte le altre y_i uguali a 0, la G'_y acquista il valore ρ_h, e dovendo la G'_y acquistare tutti valori dello stesso segno, si deve concludere che tutte le ρ_h hanno lo stesso segno.

Si ha allora il

Teor. 2. – Ogni quadrica definita può, con una trasformazione lineare a modulo diverso da zero, essere ridotta alla forma

$$\pm(\rho_1 \cdot y_1^2 + \rho_2 \cdot y_2^2 + \ldots + \rho_n \cdot y_n^2),$$

dove le ρ_i sono dei numeri reali finiti tutti ≥ 0.

8. – Teor. Se

$$F_x = \sum_{1}^{n}{}_{r,s}\, a_{r,s}\, x_r x_s$$

è una forma quadratica definita, e se g è un aggregato misurabile di punti, è possibile trovare n funzioni

$$f_1(t),\ f_2(t), \ldots, f_n(t)$$

a quadrato sommabile in g, in guisa che risulti

$$F_x = \pm \int_g (f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n)^2 dt \tag{1}$$

e quindi

$$a_{r,s} = \pm \int_g f_r \cdot f_s \cdot dt \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

il segno davanti all'$\int$ essendo lo stesso per tutte le coppie di indici r, s.

Dim. - Intanto, con una conveniente trasformazione lineare a modulo diverso da 0, la F_x si può ridurre alla forma

$$F'_y = \pm(\rho_1 \cdot y_1^2 + \rho_2 \cdot y_2^2 + \ldots + \rho_n \cdot y_n^2),$$

dove tutte le ρ_i sono ≥ 0.

Siano

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

n funzioni a quadrato sommabile in g, tutte normali e fra loro ortogonali, e si ponga

$$\psi_i = \sqrt{\rho_i} \cdot \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha subito

$$F'_y = \pm \int_g (\psi_1 \cdot y_1 + \psi_2 \cdot y_2 + \ldots + \psi_n \cdot y_n)^2 dt .$$

Eseguendo ora la trasformazione lineare che riporta dalle variabili y alle variabili x, e supposto che

$$y_i = \sum_1^n {}_j c_{ij} \cdot x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

siano le sue equazioni, si ha la (1) in cui

$$f_j = \sum_1^n {}_i c_{ij} \cdot \psi_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

9. Prendiamo ora a considerare una equazione secolare $\Omega(\rho) = 0$ formata col concorso delle solite quadriche F_x e G_x, di cui la 1ª sia definita.

Cambiando eventualmente il segno ad entrambe le quadriche, il che non altera le radici dell'equazione secolare che si considera, noi possiamo pensare che sia

$$F_x = \int_g (f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \ldots + f_n \cdot x_n)^2 dt ,$$

Supponiamo ora che la $\Omega(\rho) = 0$ abbia la radice ∞ n-upla. Ciò porta che la corrispondente $\Delta(\rho) = 0$ ha n-upla la radice $\rho = 0$.

Se k è la caratteristica della matrice del discriminante di F_x, i parametri

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

appartengono ad uno spazio lineare S_k a k dimensioni, e noi possiamo prendere in tale spazio k parametri normali e fra loro ortogonali

$$\underset{1}{X}, \underset{2}{X}, \ldots, \underset{k}{X} .$$

Allora sarà

$$f_r = \sum_1^k {}_i \, x_{r\,i} \, X_i \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

e si trova subito

$$x_{r\,i} = \int_g^t f_r \cdot X_i \cdot dt \, .$$

La G_x ha il discriminante diverso da zero, e noi indicheremo con $b^{r,s}$ il reciproco di $b_{r,s}$ in esso.

Poniamo poi

$$x^s_i = \sum_1^n {}_r \, b^{r,s} \, x_{r\,i} \, ,$$

e

$$\left(x_i, x_j\right) = \left(x_j, x_i\right) = \sum_1^n {}_r \, x_{r\,i} \cdot x^r_j = \sum_1^n {}_{rs} \, b_{r,s} \cdot x^r_i \cdot x^s_j = \sum_1^n {}_{rs} \, b^{r,s} \cdot x_{r\,i} \cdot x_{s\,j} \, .$$

Dico che si ha

$$\left(x_i, x_j\right) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, .., k) \, .$$

Intanto si ha subito

$$\text{(2)} \qquad \sum_1^n {}_r \, x^r_j \cdot f_r = \left(x_1, x_j\right) \cdot X_1 + \left(x_2, x_j\right) \cdot X_2 + \ldots + \left(x_k, x_j\right) \cdot X_k \, .$$

Consideriamo ora la equazione secolare

$$Z(\rho) = \begin{vmatrix} \left(x_1, x_1\right) - \rho & \left(x_1, x_2\right) & \ldots & \left(x_1, x_k\right) \\ \left(x_2, x_1\right) & \left(x_2, x_2\right) - \rho & \ldots & \left(x_2, x_k\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(x_k, x_1\right) & \left(x_k, x_2\right) & \ldots & \left(x_h, x_k\right) - \rho \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Essa ha tutte le radici finite, infatti la forma quadratica i cui coefficienti sono i coefficienti di ρ in questa equazione è definita ed ha il discriminante diverso da zero.

Sia ρ_1 una di tali radici.

Noi potremo trovare dei numeri non tutti nulli

$$q_1 , q_2 , \ldots , q_k ,$$

per cui

$$\left[\binom{x,x}{1\ 1}-\rho_1\right]\cdot q_1+\binom{x,x}{1\ 2}\cdot q_2+\ldots\ldots+\binom{x,x}{1\ k}\cdot q_k \qquad =0$$

$$\binom{x,x}{2\ 1}\cdot q_1+\left[\binom{x,x}{2\ 2}-\rho_1\right]\cdot q_2+\ldots\ldots+\binom{x,x}{2\ k}\cdot q_k \qquad =0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{x,x}{k\ 1}\cdot q_1+\binom{x,x}{k\ 2}\, q_2+\ldots\ldots\ldots+\left[\binom{x,x}{k\ k}-\rho_1\right] q_k=0\,,$$

od, in altri termini, per cui sia

$$\sum_1^k{}_i \binom{x,x}{j\ i}\cdot q_i=\rho_1\cdot q_j \qquad (j=1,2,\ldots k)\,.$$

Mutiamo nelle (2) l'indice j in i, moltiplichiamo per q_i e sommiamo rispetto ad i. Otteniamo

(3) $$\sum_1^k{}_i q_i \Sigma_r \underset{i}{x^r} f_r=\rho_1\left(q_1\cdot \underset{1}{X}+q_2\cdot \underset{2}{X}+\ldots+q_k\cdot \underset{k}{X}\right)=\rho_1\cdot Y\,,$$

dove $Y=\sum_1^k{}_i q_i\cdot \underset{i}{X}$.

Evidentemente Y è un parametro di S_k.

Poniamo

$$y_r=\int_g f_r\cdot Y\cdot dt\,.$$

Abbiamo subito

$$y_r=\sum_1^k{}_i q_i\cdot \int_g f_r \underset{i}{X}\cdot dt=\sum_1^k{}_i q_i\cdot \underset{i}{x_r}\,.$$

Infine poniamo

$$y^s=\sum_1^n{}_r b^{r,s}\, y_r$$

e quindi

$$y^s=\sum_1^k{}_i q_i \sum_1^n{}_r b^{r,s}\, \underset{i}{x_r}=\sum_1^k{}_i q_i \underset{i}{x^s}\,.$$

La (3) diventa allora

(3′) $$\sum_1^n{}_r\, y^r f_r=\rho_1\cdot Y\,.$$

Moltiplichiamo queste per f_s ed integriamo lungo g, otteniamo

$$\sum_1^n {}_r\, y^r \cdot a_{r,s} = \rho_1 y_s = \rho_1 \sum_1^n {}_r\, b_{r,s}\, y^r ,$$

ossia

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_r\, (a_{r,s} - \rho_1 \cdot b_{r,s})\, y^r = 0 .$$

Osservo che le y^r non sono tutte nulle, perchè sarebbero tutte nulle le

$$y_r = \sum_1^n {}_s\, b_{r,s} \cdot y^s ,$$

ossia sarebbe

$$\int_g f_r \cdot Y \cdot dt = 0 \qquad (r = 1, 2, .. n) ,$$

e perciò sarebbe $Y = 0$, e le $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sarebbero tutte nulle.

Dunque le (4) sono soddisfatte da valori delle y^r non tutti nulli, e quindi ρ_1 deve essere una radice di $\Delta(\rho) = 0$. Ma, per ipotesi, questa equazione ha radici tutte nulle, dunque $\rho_1 = 0$, ossia tutte le radici di $Z(\rho) = 0$ sone nulle.

La equazione secolare $Z(\rho) = 0$ ha dunque la radice $\rho = 0$ k–upla, e, poichè questa radice è finita, essa deve essere di rango k, ossia la matrice $Z(0)$ deve avere caratteristica nulla, e quindi deve avere nulli tutti gli elementi.

Si ha dunque

$$\left(\underset{i}{x}, \underset{j}{x} \right) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots k \,) ,$$

come volevo dimostrare.

Allora le (2) diventano

$$(2') \qquad \sum_1^n {}_r\, \underset{i}{x}^r \cdot f_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots k) .$$

Aggiungo che i k sistemi

$$\underset{i}{x}^1, \underset{i}{x}^2, \ldots\ldots, \underset{i}{x}^n \qquad i = 1, 2, \ldots, k)$$

sono linearmente indipendenti, perchè se ciò non fosse sarebbero dipendenti linearmente i sistemi

$$x_{1 \atop i}, x_{2 \atop i}, \ldots, x_{n \atop i} \qquad i = 1, 2, \ldots, k)$$

e quindi lo sarebbero i parametri

$$X_{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

il che non può essere.

Si deve concludere che fra le f_r passano almeno k relazioni lineari fra loro indipendenti, e che quindi la caratteristica della matrice del discriminante di F_x deve essere $\leq n - k$. In altri termini si avrà $k \leq n - k$ da cui $2k \leq n$, $k \leq \frac{n}{2}$.

Passiamo ora a considerare una equazione secolare qualunque $\Omega(\rho) = 0$ nella quale supponiamo che i coefficienti di ρ siano quelli della forma definita, e supponiamo che essa abbia la radice ∞ di ordine ν.

Per quanto sappiamo, essa potrà con una conveniente trasformazione lineare a modulo diverso da zero, essere ridotta alla forma

$$\begin{vmatrix} \pm(\rho-\rho_1) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \pm(\rho-\rho_2) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \pm(\rho-\rho_{n-\nu}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho a_{1,1}-b_{1,1} & \ldots & \rho a_{1,\nu}-b_{1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \rho a_{\nu,1}-b_{\nu,1} & \ldots & \rho a_{\nu,\nu}-b_{\nu,\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

dove

$$\begin{vmatrix} \rho a_{11} - b_{11} & \ldots & \rho a_{1,\nu} - b_{1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho a_{\nu 1} - b_{\nu,1} & \ldots & \rho a_{\nu\nu} - b_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

è una equazione secolare nella quale i coefficienti di ρ sono quelli della quadrica definita, e che ha ν–upla la radice ∞.

Consegue che la caratteristica della matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu,1} & \dots & a_{\nu,\nu} \end{vmatrix} \text{ è } \leq \frac{\nu}{2}.$$

È dunque $\leq$ di $(n-\nu)+\frac{\nu}{2}$, ossia $\leq$ di $n-\frac{\nu}{2}$ la caratteristica della matrice $\Delta(0)$, essendo $\Delta(\rho)=0$ l'equazione reciproca di $\Omega(\rho)=0$.

Ciò significa che il rango r della radice ∞ di $\Omega(\rho)=0$ è $\geq$ di $n-\left(n-\frac{\nu}{2}\right)$, ossia $\geq \frac{\nu}{2}$.

Dunque $\nu \leq 2r$, e si ha il

Teor. – Se $\Omega(\rho)=0$ è una equazione secolare in cui i coefficienti della ρ sono quelli della quadrica definita, e se questa equazione ammette la radice ∞, l'ordine di moltiplicità di questa radice è $\leq$ del doppio del suo rango.

10.

Un' osservazione sulle quadriche generiche.

Sia

$$F_x = \sum_1^n {}_{h,k}\, a_{h,k} \cdot x_h \cdot x_k \qquad (a_{h,k} = a_{k,h})$$

una quadrica generica, ed indichiamo con $a^{h,k}$ il reciproco di $a_{h,k}$ nel determinante $|a_{h,k}|$.

Consideriamo poi la sostituzione

$$x_i = \sum_1^n {}_j\, a^{i,j} \cdot y_j \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

la quale è, evidentemente, a modulo diverso da *zero*.

Per questa sostituzione la F_x si muta in

$$F'_y = \sum_1^n {}_{hkpq}\, a_{h,k} \cdot a^{h,p} \cdot a^{k,q} \cdot y_p \cdot y_q = \sum_1^n {}_{pq}\, a^{p,q} \cdot y_p \cdot y_q .$$

Ne consegue che, se la forma F_x è definita, lo è anche la forma $\sum_1^n {}_{pq}\, a^{p,q} \cdot y_p \cdot y_q$.

PARTE IV.

CALCOLO DIFFERENZIALE ASSOLUTO

1.

Notazioni e definizioni preliminari.

1. La scrittura $f[u]$. — 2. Invarianti. — 3. Indici ed apici - Campo Ω. 4. Ordine naturale. — 5. Rango di uno stato; classe; classe intera.

1. - Con una lettera f, F, $\varphi, \ldots$, o con una lettera affetta da *indici* od *apici*, noi indicheremo nel seguito una funzione di n variabili, della quale si sa che, per una *sostituzione invertibile* sulle variabili, si muta con una *legge conosciuta* in una funzione delle nuove variabili. La legge di trasformazione potrà cambiare da caso a caso.

Per mettere in evidenza che una funzione f è considerata per le variabili

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

noi scriveremo $f[u]$, cosichè, se S è una sostituzione invertibile di equazioni

$$(2) \qquad u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

che porta dalle variabili (1) alle variabili

$$(3) \qquad v_1, v_2, \ldots, v_n,$$

indicheremo con $f[v]$ la funzione delle (3) in cui la $f[u]$ si trasforma per la sostituzione S.

Nel seguito noi supporremo che le funzioni $f[u]$ ed i secondi membri delle equazioni (2) che noi avremo a considerare abbiano derivate continue in là quanto si vuole.

2. Def. - Una funzione I si dice *invariante* se, essendo (1) un qualunque sistema di variabili e (3) un altro sistema legato ad (1) da una sostituzione invertibile S, si ha

$$I[u] = I[v],$$

per ogni coppia di sistemi di valori delle (1) e delle (3) che si corrispondono nella S.

Allora, se I è una invariante, e se per le (1) è

$$I[u] = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

e se le (2) sono le equazioni di S, sarà

$$I[v] = \varphi\bigl(u_1(v_1, v_2, .., v_n), u_2(v_1, v_2, .., v_n), \ldots, u_n(v_1, v_2, .., v_n)\bigr).$$

3. - Nelle seguenti considerazioni figurerà, dato una volta per sempre, un numero intero $n > 0$, e si presenteranno come *indici* o come *apici* degli aggruppamenti di numeri scelti fra i seguenti

(4) $$1, 2, \ldots\ldots, n,$$

in ciascuno aggruppamento alcuni numeri potendo essere uguali, ed in ciascun aggruppamento non avendo importanza l'ordine in cui si scrivono detti numeri. Si trova opportuno di considerare ciascuno di questi aggruppamenti come un tutto, e di indicarlo con una sola lettera.

Con tale convenzione le notazioni si semplificano, ed ogni indice od apice fisso è una *combinazione con ripetizione* dei numeri (4) ad 1 ad 1, a 2 a 2, a 3 a 3, ecc...

L'insieme di tutte queste combinazioni si chiamerà il *campo* Ω.

Un apice od un indice può percorrere parecchi elementi del campo Ω, ognuno dei quali si dirà uno *stato* dell'indice o dell'apice variabile che si considera, ed i numeri (4) che compongono un tale stato si chiameranno le *cifre* di questo stato.

4. – Quando le cifre di uno stato di un indice o di un apice sono scritte in tale ordine che ciascuna sia $\leq$ della successiva, diremo che lo stato è scritto in *forma normale*.

È superfluo avvertire che uno stato si può scrivere in forma normale in una maniera sola.

Se r è un numero intero >0, indicherò con P_r la permutazione degli stati con r cifre per cui, essendo tutti questi stati scritti in forma normale, il successivo di uno di questi stati sia quello che si ottiene da esso aumentando di 1 l'ultima sua cifra diversa da n.

Si dirà poi che gli stati di un indice od apice variabili in Ω sono disposti nell'*ordine naturale,* se sono disposti in una successione percorrendo la quale si incontrino successivamente le successioni

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots$$

Noi indicheremo tale successione con P.

Se in avvenire avremo da considerare solo alcuni stati di un indice od apice, noi diremo che essi stati sono disposti in *ordine naturale,* se sono disposti in una successione in cui essi si succedano come nella successione P.

5. Def. 1. - Il numero delle cifre di uno stato α si chiama il *rango* di questo stato e si indica con ρ_α.

Def. 2. - Se ν e μ sono due numeri interi soddisfacenti alle limitazioni $\nu \geq \mu > 0$, si dice che un indice od un apice *varia nella classe* (ν, μ), o che *è di classe* (ν, μ), se percorre tutti e soli gli stati per cui $\nu \geq \rho_\alpha \geq \mu$. La classe $(\nu, 1)$ si chiama anche *la classe* ν, e si dice che è una *classe intera.*

2.

Derivate di un invariante.

1. Rappresentazione sintetica delle derivate multiple di un invariante. — 2. Legge di trasformazione di queste derivate. Le $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial u_\beta}$.

1. - Se I è un invariante, se α_0 è uno stato di un indice variabile α, e se

$$\dot{i}_1,\ \dot{i}_2, \ldots, \dot{i}_k$$

sono le cifre di α_0, noi porremo

$$I_{\alpha_0}[u] = \frac{\partial^k I[u]}{\partial u_{i_1} \partial u_{i_2} \dots \partial u_{i_k}} ,$$

ed analogamente per gli altri sistemi di variabili. Si ottiene così un sistema di funzioni I_α, in cui l'indice α percorre il campo Ω.

2. - Andiamo a cercare la legge secondo la quale le I_α variano per il passaggio da un sistema di variabili ad un altro.

Supponiamo, al solito, che

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

siano le equazioni della sostituzione S che porta dalle variabili u alle variabili v.

Intanto osservo che, per l'ordinaria regola di derivazione di funzioni composte, si ha

$$I_i[v] = \sum_1^n {}_j I_j[u] \cdot \frac{\partial u_j}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

e si può anche scrivere

$$(1) \qquad I_i[v] = \Sigma_\beta I_\beta [u] \frac{\partial u_\beta}{\partial v_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

con la Σ estesa a tutti gli stati di un indice β variabile in Ω, purchè si ponga

$$(2) \qquad \frac{\partial u_\beta}{\partial v_i} = 0 \qquad \text{per } \rho_\beta > 1 \qquad (i = 1, \dots, n) .$$

Ora io dico che, qualunque sia lo stato di un indice α variante in Ω, si ha

$$(1') \qquad I_\alpha(v) = \Sigma_\beta I_\beta [u] \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} ,$$

con la Σ estesa a tutti gli stati di un indice β variante in Ω, dove le $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$ sono funzioni razionali intere di derivate (semplici o multiple) dei secondi membri delle equazioni di S; ed, in particolare, si ha

$$(2') \qquad \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0 \,, \qquad \text{se } \rho_\beta > \rho_\alpha \,.$$

Lo dimostreremo per via ricorrente. Intanto sappiamo che la cosa vale quando α ha una cifra.

Supponiamo ora di aver dimostrato la proposizione quando α ha un numero di cifre $\leq k$, e proviamo che essa vale anche quando α ha $k+1$ cifre.

Se α ha $k+1$ cifre ed h è una sua cifra, indichiamo con γ lo stato di k cifre che si ottiene sopprimendo in α una cifra uguale ad h.

Per ipotesi si ha

$$(1'') \qquad I_\gamma [v] = \Sigma_\delta I_\delta [u] \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \,,$$

con la Σ estesa a tutti gli stati dell'indice δ di classe k, perchè, sempre per ipotesi, si sa che

$$(2'') \qquad \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} = 0 \,, \quad \text{se } \rho_\delta > \rho_\gamma = k \,;$$

inoltre le

$$(3) \qquad \frac{\partial u_\delta}{\partial u_\gamma}$$

che figurano in (1'') sono funzioni razionali intere di derivate dei secondi membri delle equazioni della sostituzione S.

Deriviamo ora i due membri di (1'') rispetto a v_h. Si ha

$$I_\alpha [v] = \Sigma_\delta \frac{\partial I_\delta [u]}{\partial v_h} \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} + \Sigma_\delta I_\delta [u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_h} \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \,;$$

e poichè, per la comune regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial I_\delta[u]}{\partial v_h} = \sum_1^n{}_\eta \frac{\partial I_\delta[u]}{\partial u_\eta} \cdot \frac{\partial u_\eta}{\partial v_h}$$

$$= \sum_1^n{}_\eta I_{\delta\eta}[u] \cdot \frac{\partial u_\eta}{\partial v_h},$$

dove evidentemente $\delta\eta$ indica lo stato che ha tutte le cifre di δ e la cifra η, si vede che $I_\alpha[v]$ risulta uguale ad una combinazione lineare delle $I_\beta[u]$ con β variante nella classe $k+1$, combinazione lineare i cui coefficienti sono funzioni razionali intere delle (3) e loro derivate prime, e quindi funzioni razionali intere di derivate dei secondi membri dello equazioni di S. Ed allora si può scrivere

$$I_\alpha[v] = \Sigma_\beta I_\beta[u] \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha},$$

con la Σ estesa a tutti gli stati di un indice β variante in Ω, dove le $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$ sono funzioni razionali intere di derivate dei secondi membri delle equazioni di S, e dove

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0, \quad \text{se } \rho_\beta > \rho_\alpha = k+1.$$

Si conclude adunque che la proposizione enunciata vale per $\rho_\alpha = k+1$, se vale per $\rho_\alpha = k$; ma essa vale per $\rho_\alpha = 1$, e quindi vale per ogni α.

3.

Proprietà dei simboli $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$.

1. – Abbiamo già visto che valgono le seguenti proposizioni:

Teor. 1. – I simboli $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$ sono funzioni razionali intere di derivate dei secondi membri delle equazioni

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

della sostituzione S che porta dalle variabili u alle variabili v.

TEOR. 2. – Se $\rho_\beta > \rho_\alpha$, si ha $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0$.

2. TEOR. 1. – Si ha

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

DIM. – Ciò consegue dalla def., ed infatti dovrebbe essere

$$I_\alpha[u] = \Sigma_\beta I_\beta[u] \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha}$$

ed, applicando successivamente il procedimento di generazione delle $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial u_\alpha}$, si trova

$$I_\alpha[u] = I_\alpha[u].$$

TEOR. 2. – Se

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$
$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$
$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

sono tre sistemi di variabili legati da sostituzioni invertibili, si ha, qualunque siano gli indici α e β,

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial u_\beta} = \Sigma_\gamma \frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta}, \tag{1}$$

la Σ essendo estesa a tutti gli stati di un indice γ variante in Ω.

DIM. – Infatti, qualunque sia un invariante I, si ha

$$I_\beta[u] = \Sigma_\alpha I_\alpha[w] \cdot \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_\beta}, \tag{2}$$

ed inoltre

$$I_\beta[u] = \Sigma_\gamma I_\gamma[v] \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta}, \quad I_\gamma[v] = \Sigma_\alpha I_\alpha[w] \cdot \frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\gamma},$$

dalle quali si ha

$$(3) \qquad I_\beta[u] = \Sigma_\alpha I_\alpha[w] \cdot \left(\Sigma_\gamma \frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta} \right),$$

e, confrontando (2) con (3),

$$(4) \qquad \Sigma_\alpha I_\alpha[w] \cdot \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial u_\beta} - \Sigma_\gamma \frac{\partial w_\alpha}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta} \right) = 0 .$$

Ora, questa relazione sta qualunque sia l'invariante I. Sia

$$(5) \qquad w_1^0, w_2^0, \ldots, w_n^0$$

un sistema di valori delle w, sia α_0 uno stato di α, ed r_i indichi il numero delle volte che la cifra i figura in α^0. Ponendo

$$I[w] = (w_1 - w_1^0)^{r_1} (w_2 - w_2^0)^{r_2} \ldots\ldots (w_n - w_n^0)^{r_n},$$

si vede subito che

$$I_\alpha[w^0] = \begin{cases} \underline{|r_1} \cdot \underline{|r_2} \ldots \underline{|r_n}, & \text{se } \alpha = \alpha_0, \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \alpha_0, \end{cases}$$

e che quindi, in virtù della (4), per il sistema (5) di valori delle w si ha

$$\frac{\partial w_{\alpha_0}}{\partial u_\beta} - \Sigma_\gamma \frac{\partial w_{\alpha_0}}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial v_\beta} = 0 .$$

Ma α_0 è uno stato qualunque di α, dunque le (1) valgono per ogni α. Inoltre il sistema (5) è arbitrario, e quindi la (1) vale per ogni sistema di valori delle w.

Cor. – Se u e v sono due sistemi di variabili legati fra loro da una sostituzione invertibile, si ha:

$$(1') \qquad \Sigma_\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta . \end{cases}$$

Dim. – Basta mettere nella (1) al posto delle w le u, e ricordare il teor. 1.

Oss. – Nelle formule (1) e (1′) la Σ_γ si può pensare estesa ai soli stati dell'indice γ, per cui è contemporaneamente

$$\rho_\gamma \geq \rho_\alpha \quad \text{e} \quad \rho_\gamma \leq \rho_\beta ,$$

perchè per $\rho_\gamma < \rho_\alpha$ risulta $\dfrac{\partial w_\alpha}{\partial v_\gamma} = 0$ o rispettivamente $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial v_\gamma} = 0$, e per $\rho_\gamma > \rho_\beta$ risulta $\dfrac{\partial v_\gamma}{\partial u_\beta} = 0$.

3. Teor. 1. – Se β ha una sola cifra h, e se $i_1, i_2, \ldots, i_r$ sono le cifre di α, si ha

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial^r u_h}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \ldots \partial v_{i_r}} .$$

Dim. – Il teorema è vero se α ha una sola cifra. Per provarlo in generale, basta provare che, se esso è vero quando α ha r cifre, è vero anche quando α ha $r+1$ cifre.

Supponiamo ora che il teorema valga quando α ha r cifre, e consideriamo poi un α che abbia le $r+1$ cifre $i_1, i_2, \ldots, i_r, i_{r+1}$.

Posto $\gamma = i_1 \, i_2 \ldots i_r$, e quindi $\alpha = \gamma i_{r+1}$, si osservi che, se I è un invariante, si ha

$$I_\gamma[v] = \Sigma'_\beta \, I_\beta[u] \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\gamma} + I_h[u] \cdot \frac{\partial u_h}{\partial v_\gamma}$$

dove Σ' indica la somma estesa a tutti gli stati di un indice β variabile in Ω, escluso lo stato h.

Derivando i due membri rispetto a $v_{i_{r+1}}$, si vede che da Σ' non possono ottenersi che termini col fattore $I_\delta[u]$ con $\delta \neq h$ [1], e che solo dall'addendo ultimo risulta un termine con $I_h[u]$, che sarà

$$I_h[u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_{i_{r+1}}} \left(\frac{\partial u_h}{\partial v_\gamma} \right) .$$

[1] Si ricordi che h ha una sola cifra.

Ed allora sarà (poichè $\frac{\partial I_\gamma[v]}{\partial v_{i_{r+1}}} = I_\alpha[v]$)

$$\frac{\partial u_h}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_{i_{r+1}}}\left(\frac{\partial u_h}{\partial v_\gamma}\right) = \frac{\partial^{r+1} u_h}{\partial v_{i_1}\,\partial v_{i_2}\ldots\partial v_{i_r}\,\partial v_{i_{r+1}}}\,.$$

Teor. 2. – Se $\rho_\alpha = \rho_\beta$, se

$$i_1, i_2, \ldots, i_r$$

sono le cifre di α, e se

$$j_1, j_2, \ldots, j_r$$

sono quelle di β, si ha

$$(\omega) \qquad \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \Sigma_{\pi_\beta} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}\,,$$

dove Σ_{π_β} indica la somma estesa a tutte le permutazioni distinte delle cifre di β.

Dim. – Il teorema è vero quando $\rho_\alpha = \rho_\beta = 1$. Esso sarà dimostrato in generale se, supposto vero per $\rho_\alpha = \rho_\beta = r$, è vero anche per $\rho_\alpha = \rho_\beta = r+1$.

Supponiamo allora che sia vero per $\rho_\alpha = \rho_\beta = r$ e consideriamo poi un α ed un β che abbiano $r+1$ cifre.

Sia

$$\alpha = i_1\, i_2 \ldots i_r\, i_{r+1} \qquad \text{e} \qquad \beta = j_1 j_2 \ldots j_r j_{r+1}\,.$$

Posto $\gamma = i_1 i_2 \ldots i_r$, e quindi $\alpha = \gamma i_{r+1}$, si osservi che, se I è un invariante, si ha

$$I_\gamma[v] = \Sigma'_\delta I_\delta[u] \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} + \Sigma''_\delta I_\delta[u] \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma}\,,$$

in cui Σ' si intende estesa ai δ con $\rho_\delta < r$, e la Σ'' si intende estesa ai δ con $\rho_\delta = r$.

Derivando i due membri rispetto a $v_{i_{r+1}}$, si vede che da Σ' non possono ottenersi che termini col fattore $I_\eta[u]$ con $\rho_\eta \leq r$. Solo da Σ'' si possono ottenere dei termini col fattore $I_\eta[u]$ con

$\rho_{\gamma_i} = r+1$, ed essi sono quelli che figurano in

$$\sum_1^n{}_h \Sigma''_\delta \frac{\partial I_\delta[u]}{\partial u_h} \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial u_h}{\partial v_{i_{r+1}}}$$

$$= \Sigma_h \Sigma''_\delta I_{\delta h}[u] \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial u_h}{\partial v_{i_{r+1}}}.$$

Consideriamo ora quelli fra questi termini in cui δh coincide col β prefissato. Intanto sono quelli in cui h è una cifra di β e δ è formato dalle rimanenti cifre di β, ed allora risulta (poichè $\frac{\partial I_\gamma[v]}{\partial v_{i_{r+1}}} = I_\alpha[v]$) che

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \Sigma_0 \frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial u_h}{\partial v_{i_{r+1}}}, \tag{6}$$

dove Σ_0 si intende estesa a tutti i termini in cui h è una cifra di β, e δ è lo stato che si ottiene sopprimendo in β una cifra uguale ad h.

Se $s_1, s_2, \ldots, s_r$ sono le cifre di δ, è, per ipotesi,

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} = \Sigma_{\pi_\delta} \frac{\partial u_{s_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{s_2}}{\partial v_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{s_r}}{\partial v_{i_r}}$$

e quindi

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial u_h}{\partial v_{i_{r+1}}}$$

contiene tutti gli addendi della somma

$$\Sigma_{\pi_\beta} \frac{\partial u_{i_1}}{\partial v_{j_1}} \cdot \frac{\partial u_{i_2}}{\partial v_{j_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{j_{r+1}}}{\partial v_{i_{r+1}}} \tag{7}$$

che terminano col fattore $\frac{\partial u_h}{\partial v_{i_{r+1}}}$ [1].

[1] Ossia gli addendi nei quali $j_{r+1} = h$.

Dunque nel secondo membro di (6) vi sono tutti e soli gli addendi di (7), e perciò il 1^0 membro di (6) vale la (7), e così è dimostrato il teorema.

Oss. - Abbiamo usata nelle ultime formole la scrittura Σ_{π_β} per indicare una somma estesa a tutte le permutazioni diverse delle cifre di β.

Nel seguito indicherò con π_β il numero delle permutazioni distinte delle cifre di β.

Teor. 3. - Se $\rho_\alpha = \rho_\beta$, se

$$i_1, i_2, \ldots, i_r$$

sono le cifre di α, e se

$$j_1, j_2, \ldots, j_r$$

sono quelle di β, si ha

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \frac{\pi_\beta}{\pi_\alpha} \cdot \Sigma_{\pi_\alpha} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}.$$

Dim. - Intanto osserviamo che, se in tutti gli addendi sotto la Σ_{π_β} di (ω) si sostituisce alla permutazione delle cifre di α un'altra permutazione, si ritrovano tutti gli stessi addendi, ma scambiati fra loro, e quindi si trova come somma ancora la $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$.

Allora si avrà

$$\pi_\alpha \cdot \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \Sigma_{\pi_\alpha} \Sigma_{\pi_\beta} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}. \tag{8}$$

Inoltre è evidente, in modo analogo, che il 2^0 membro di (8) vale

$$\pi_\beta \, \Sigma_{\pi_\alpha} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}.$$

Ed allora consegue il teorema.

Teor. 4. - Se $\rho_\alpha = \rho_\beta = h + (r - h)$, dove h è un intero > 0 e $< r$, se α' ed α'' sono due stati, il 1° di h cifre ed il 2° di $r - h$ cifre, tali che complessivamente abbiano tutte le cifre di α, se inoltre

$$\beta_1', \beta_1''; \beta_2', \beta_2''; \ldots; \beta_m', \beta_m'',$$

sono i vari modi di distribuire le cifre di β in due stati, il 1° β_k' di h cifre ed il 2° β_k'' di $r - h$ cifre, si ha

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \sum_1^m{}_k \frac{\partial u_{\beta_k'}}{\partial v_{\alpha'}} \cdot \frac{\partial u_{\beta_k''}}{\partial v_{\alpha''}}.$$

Dim. - Infatti, se $i_1, i_2, \ldots, i_h$ sono le cifre di α' ed $i_{h+1}, \ldots, i_r$ sono quelle di α'', se infine $j_1, j_2, \ldots, j_r$ sono quelle di β, si ha, pel teor. 2,

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \Sigma_{\pi_\beta} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdot \ldots \ldots \frac{\partial u_{j_r}}{\partial v_{i_r}}$$

e raggruppando insieme quegli addendi di Σ_{π_β} in cui nella permutazione degli indici di β figurano come primi h indici (salvo l'ordine) i medesimi h indici, cioè gli indici che costituiscono le cifre di un medesimo β_i', si trova

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = \sum_1^m{}_k \frac{\partial u_{\beta_k'}}{\partial v_{\alpha'}} \cdot \Sigma_{\pi_{\beta_k''}} \frac{\partial u_{k_{h+1}}}{\partial v_{i_{h+1}}} \cdot \ldots \ldots \frac{\partial u_{k_r}}{\partial v_{i_r}},$$

dove $k_{h+1}, \ldots, k_r$ indicano le cifre di β_k''.

Consegue da ciò la formula da dimostrare.

4.

Sistemi assoluti.

1. Definizione. Legge di varianza assoluta. — 2. I sistemi I_α. — 3. Formazione dei sistemi assoluti. — 4. Sistemi nulli. — 5. I sistemi δ_α^β. — 6. Sistemi simmetrici ed emisimmetrici.

1. Def. - Se α_h ed α'_h $(h=1,2,\ldots,r)$ sono r coppie di indici entrambi della stessa classe, se β_k e β'_k $(k=1,2,\ldots,s)$, sono altre s coppie analoghe di apici, e se

$$H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s} \tag{1}$$

è un sistema di funzioni tale che, qualunque siano i sistemi di variabili u e v, legati fra loro da una sostituzione invertibile, si abbia

$$H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}[v] = \tag{2}$$

$$\sum_{\alpha',\beta'} H_{\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_r}^{\beta'_1,\beta'_2,\ldots,\beta'_s}[u]\cdot \prod_1^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_1^s{}_k \frac{\partial v_{\beta_k}}{\partial u_{\beta'_k}},$$

la Σ essendo estesa a tutti gli stati degli indici α'_h $(h=1,2,\ldots,r)$ e degli apici β'_k $(k=1,2,\ldots,s)$, si dice che il sistema (1) è un *sistema assoluto* con r indici ed s apici.

Quando mancano gli apici il sistema assoluto si dice *puramente covariante,* e quando mancano gli indici si dice *puramente controvariante.*

Un *invariante* si deve considerare come un sistema assoluto (costituito da una sola funzione) privo di indici e di apici.

La legge di varianza di un sistema assoluto, espressa dalla (2), si chiama *legge di varianza assoluta.*

In particolare, se

$$H_\alpha \tag{1'}$$

è un sistema puramente covariante ad un indice, la sua legge di varianza assoluta è data da

$$(2') \qquad H_\alpha[v] = \Sigma_{\alpha'} H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha},$$

la Σ essendo estesa al variare di α' nella classe di α; e, se

$$(1'') \qquad H^\beta$$

è un sistema puramente controvariante ad un apice, la sua legge di varianza assoluta è data da

$$(2'') \qquad H^\beta[v] = \Sigma_{\beta'} H^{\beta'}[u] \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial u_{\beta'}},$$

la Σ essendo estesa al variare di β' nella classe di β.

2. – Se α è un indice di classe ν, e se I è un invariante, il sistema I_α (p. 155, § 1) è (p. 156, (1')) un sistema puramente controvariante ad un indice di classe ν.

3. Teor. 1. – Se α_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ e β_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ sono r indici ed s apici di classi determinate, se (1) è un sistema di funzioni per il quale esiste un particolare sistema di variabili, p. es. le u, per cui, qualunque sia un sistema di variabili v, si abbiano le (2), il sistema (1) è un sistema assoluto.

Dim. – Per ridurre la scrittura, ed anche per non stancare il lettore, supporrò $r = s = 1$. Però il caso generale si tratta allo stesso modo.

Se v e w sono due qualunque sistemi di variabili, per ipotesi, si ha:

$$H^{\beta}_{\alpha}[w] = \Sigma_{\alpha', \beta'} H^{\beta'}_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial w_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\beta}{\partial u_{\beta'}},$$

dove la Σ è estesa al variare di α' nella classe di α e al variare di β' nella classe di β.

E poichè (p. 159, § 2, teor. 2)

$$\frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial w_\alpha} = \sum\nolimits_\gamma \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial w_\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w_\beta}{\partial u_{\beta'}} = \sum\nolimits_\delta \frac{\partial w_\beta}{\partial v_\delta} \cdot \frac{\partial v_\delta}{\partial u_{\beta'}},$$

con γ variabile nella classe di α, e δ variabile nella classe di β, si ha

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}[w] = \sum\nolimits_{\alpha', \beta', \gamma, \delta} \overset{\beta'}{\underset{\alpha'}{H}}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial w_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\beta}{\partial v_\delta} \cdot \frac{\partial v_\delta}{\partial u_{\beta'}} =$$

$$= \sum\nolimits_{\gamma, \delta} \left[\sum\nolimits_{\alpha', \beta'} \overset{\beta'}{\underset{\alpha'}{H}}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\delta}{\partial u_{\beta'}} \right] \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial w_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\beta}{\partial v_\delta} =$$

$$= \sum\nolimits_{\gamma, \delta} \overset{\delta}{\underset{\gamma}{H}}[v] \cdot \frac{\partial v_\gamma}{\partial w_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\beta}{\partial v_\delta},$$

poichè, giusta l' ipotesi, si ha

$$\overset{\delta}{\underset{\gamma}{H}}[v] = \sum\nolimits_{\alpha', \beta'} \overset{\beta'}{\underset{\alpha'}{H}}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\gamma} \cdot \frac{\partial v_\delta}{\partial u_{\beta'}}.$$

Dunque il passaggio dalle $H[v]$ alle $H[w]$ si ottiene colla legge di varianza assoluta, ed il sistema H è assoluto.

Teor. 2. – Un sistema assoluto è determinato in modo unico quando è assegnato il sistema di funzioni a cui si riduce per un particolare sistema di variabili, p. es. per il sistema delle u.

Dim. – Infatti, dato il sistema di funzioni delle u a cui deve ridursi il sistema assoluto che si desidera, il sistema di funzioni a cui si riduce per una qualunque sostituzione sulle variabili è determinato dalla legge di varianza assoluta, e viceversa, qualunque sia il sistema dato per le u, il sistema così costruito è, per il teor. prec., un sistema assoluto.

4. – Se tutte le funzioni a cui si riduce un sistema assoluto per un particolare sistema u di variabili, sono uguali allo *zero*, anche per qualunque altro sistema di variabili il sistema si riduce a funzioni nulle, come risulta applicando la legge di varianza assoluta.

Def. – Un sistema assoluto, che per ogni sistema di variabili, si riduce ad un sistema di funzioni nulle si dice un *sistema nullo*.

5. Teor. – Se α e β sono un indice ed un apice della medesima classe, e se $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}$ è un sistema assoluto tale che per un particolare sistema di variabili u si abbia

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}[u] = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases},$$

per qualunque altro sistema di variabili v si ha

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}[v] = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

Dim. – Infatti si ha, per la legge di varianza assoluta,

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}[v] = \sum\nolimits_{\gamma,\delta} \overset{\delta}{\underset{\gamma}{H}}[u] \cdot \frac{\partial u_\gamma}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial u_\delta} =$$

$$= \sum\nolimits_\gamma \frac{\partial u_\gamma}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial u_\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \text{(p. 160, cor.)}.$$

Def. – Un sistema assoluto con un indice α ed un apice β della stessa classe, che per qualunque sistema di variabili vale *1*, se $\alpha = \beta$, e vale *zero*, se $\alpha \neq \beta$, si chiama un *sistema* $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\delta}}$. È bene però avvertire che questa ultima notazione non è sufficiente ad individuarlo. Perchè un sistema $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\delta}}$ sia individuato è necessario conoscere la classe comune di α e di β.

6. Def. 1. – Un sistema di funzioni si dice *simmetrico* rispetto a due indici (o a due apici) della stessa classe, se ogni sua funzione è uguale a quella che si ottiene scambiando fra loro i detti due indici (od apici).

Def. 2. – Un sistema di funzioni si dice *emisimmetrico* rispetto a due indici (o a due apici) della stessa classe, se ogni sua funzione è contraria di quella che si ottiene scambiando fra loro i detti due indici (od apici).

Teor. 1. – Se un sistema assoluto è simmetrico rispetto a due indici (o a due apici) della medesima classe per un particolare sistema di variabili, lo è anche per ogni altro sistema di variabili.

Dim. – Infatti, se nel sistema assoluto (1) i due indici α_1 ed α_2 sono della stessa classe, e se per le variabili u detto sistema è simmetrico rispetto agli indici α_1 ed α_2, la (2) si può scrivere.

$$H^{\beta_1,\, \beta_2,\, \dots\dots,\, \beta_s}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \dots,\, \alpha_r}[v] =$$

$$= \sum\nolimits_{\alpha'_1,\alpha'_2} \left[\sum\nolimits' H^{\beta'_1,\beta'_2,\dots\dots,\beta'_s}_{\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3,\dots,\alpha'_r}[u] \cdot \prod_3^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_1^s{}_h \frac{\partial v_{\beta_h}}{\partial u_{\beta'_h}} \right] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'_1}}{dv_{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha'_2}}{\partial v_{\alpha_2}},$$

dove Σ' indica somma estesa al variare di tutti gli indici ed apici di H nelle rispettive classi, esclusi gli indici α_1 ed α_2.

E poichè la espressione entro le parentesi [ ] nel 2^0 membro è simmetrica rispetto agli indici α'_1 ed α'_2, si vede che il 2^0 membro non si altera se si scambiano fra loro questi due indici entro la parentesi [ ]; ma ciò equivale a scambiare fra loro nel 2^0 membro, e quindi nel 1^0, gli indici α_1 ed α_2. Ne consegue che, per qualunque sistema di variabili v, il sistema risulta simmetrico rispetto agli indici α_1 ed α_2.

La dimostrazione fatta vale nel caso della simmetria rispetto a due indici, ma nel caso della simmetria rispetto a due apici si potrebbe ragionare in modo analogo.

Con ragionamento simile al precedente si potrebbe anche dimostrare il

Teor. 2. – Se un sistema assoluto è emisimmetrico rispetto a due indici (od apici) della stessa classe per un particolare sistema di variabili, lo è anche per ogni altro sistema di variabili.

Def. 3. – Un sistema assoluto si dice *simmetrico* rispetto a due indici (o a due apici) della stessa classe, se, per qualunque sistema di variabili, è simmetrico rispetto a quegli indici (od apici).

Def. 4. – Un sistema assoluto si dice *emisimmetrico* rispetto a due indici (o a due apici) della stessa classe, se, per qualunque sistema di variabili, è emisimmetrico rispetto a quegli indici (od apici).

Evidentemente, *se un sistema è emisimmetrico rispetto a* *due indici (o a due apici), ha nulle tutte le funzioni in cui questi due indici (od apici) sono uguali.* Infatti ognuna di tali funzioni non si altera scambiando i detti due indici (od apici), e nello stesso tempo deve mutarsi nella contraria.

5.

Funzioni r-varianti.

1. Definizione. – 2. I determinanti $(u\,;\nu\,;v)$ e $[u\,;\nu\,;v]$. I numeri N_ν ed O_ν. – 3. I sistemi $\varepsilon_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_{0\nu}}$.

1. Def. – Una funzione A si dice *r–variante*, se, essendo u e v due qualunque sistemi di variabili legati fra loro da una sostituzione invertibile S di equazioni

$$u_i = u_i\,(v_1\,,\,v_2\,,\,\ldots,\,v_n) \qquad (i=1\,,\,2,\,\ldots\,n)\,,$$

si ha

$$A\,[v] = A\,[u]\cdot(u\,;\,v)^r,$$

dove

$$(u\,;\,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial v_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial v_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial v_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{(v\,;\,u)}\,.$$

Evidentemente, *se A è un r–variante,* $\dfrac{1}{A}$ *è un* $(-r)$*-variante*, ed *un invariante è un 0–variante.*

2. – Indicheremo poi con $(u\,;\nu\,;v)$ il determinante che ha per elementi le $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$, con α e β percorrenti tutti gli stati di rango ν, e disposti in modo che α sia costante lungo una linea, e β sia costante lungo una colonna, e gli stati di α e quelli di β si succedano nell'ordine naturale (p. 155).

Evidentemente è $(u; 1; v) = (u; v)$.

Il determinante $(u; \nu; v)$ è il ν-esimo determinante di Brill-Scholtz-Hunyady dedotto da $(u; v)$, e vale $(u; v)^{\binom{n+\nu-1}{n}}$ (p. 127, teor.), dove l'esponente è il noto coefficiente binomiale.

Indichiamo poi con $[u; \nu; v]$ il determinante che ha per elementi le $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$, con α e β percorrenti nell'ordine naturale la classe ν, e per cui α sia costante lungo una riga, e β sia costante lungo una colonna.

Allora, ricordando che $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha} = 0$, se $\rho_\beta > \rho_\alpha$ (p. 159, § 1, teor. 2), si ha

$$[u; \nu; v] = (u; 1; v) \cdot (u; 2; v) \ldots (u; \nu; v)$$
$$= (u; v)^{N_\nu},$$

dove

$$N_\nu = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+\nu-1}{n} = \binom{n+\nu}{n+1}.$$

L'ordine di $[u; \nu; v]$ è evidentemente uguale ad

$$O_\nu = \binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n-1} + \ldots + \binom{n+\nu-1}{n-1} =$$
$$= \binom{n+\nu}{n} - 1.$$

3. Teor. – Se A è un N_ν-variante, il sistema assoluto

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$$

che ha O_ν indici di classe ν, e che per un determinato sistema di variabili u ha nulle tutte le funzioni con due indici uguali, e ciascuna altra uguale a $+A[u]$ o a $-A[u]$, secondo che la permutazione degli indici è pari o dispari rispetto alla permutazione principale, è anche tale che per qualunque altro sistema di variabili v ha nulle tutte le funzioni con due indici uguali, e ciascuna altra uguale a $+A[v]$ o a $-A[v]$, secondo che la permutazione degli indici è pari o dispari.

DIM. - Infatti

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}[v] = \sum\nolimits_\beta H_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{O_\nu}}[u] \prod_1^{O_\nu}{}_i \frac{\partial u_{\beta_i}}{\partial v_{\alpha_i}},$$

la Σ essendo estesa al variare di tutti gli O_ν indici β_i nella classe ν, e quindi

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}[u] = A[u] \cdot \sum\nolimits_\beta' \pm \prod_i^{O_\nu}{}_i \frac{\partial u_{\beta_i}}{\partial v_{\alpha_i}},$$

la Σ' essendo estesa a tutte le permutazioni

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{O_\nu}$$

degli stati della classe ν, ed il segno sotto la Σ' dovendosi scegliere $+$ o $-$, secondo che la permutazione

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{O_\nu}$$

è pari o dispari. Se due degli α_i sono uguali, la Σ' è nulla, perchè sarebbe lo sviluppo di un determinante con due righe uguali, ed allora, se due indici sono uguali, è

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}[v] = 0,$$

e se

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}$$

è una permutazione senza ripetizioni, la Σ' è lo sviluppo del determinante $[u; \nu; v]$ preso con segno $+$ o $-$, secondo che detta permutazione è pari o dispari, ed infine

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}[v] = \pm A[u] \cdot [u; \nu; v] = \pm A[u] \cdot (u; v)^{N_\nu} = \pm A[v]$$

il segno essendo $+$ o $-$, secondo che la permutazione

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}$$

è pari o dispari.

Def. - Un sistema assoluto

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$$

con O_ν indici di classe ν, per il quale, qualunque sia il sistema di variabili, sia

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}} = 0$$

se due indici sono uguali, e

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}} = \pm A\,,$$

con il segno $+$ o $-$, secondo che la permutazione degli indici, se questi sono differenti, sia pari o dispari, e dove A è un N_ν–variante, si dice che è un *sistema* $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$, o meglio il *sistema* $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$ associato al N_ν-variante A.

Un tale sistema è evidentemente emisimmetrico rispetto a ciascuna coppia di indici.

6.

Operazioni elementari sui sistemi assoluti.

1. Addizione. — 2. Sottrazione. — 3. Moltiplicazione. — 4. Saturazione. — 5-6. Criteri per riconoscere se un sistema di funzioni è un sistema assoluto. — 7. Applicazione.

1. Def. - Se

(1) $$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

e

(2) $$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

sono due sistemi assoluti, in cui gli indici e gli apici rappresentati da uno stesso simbolo sono della medesima classe, il sistema

$$(3)\qquad S^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}=H^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}+K^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r},$$

che evidentemente è pure un sistema assoluto, si chiama la *somma* dei sistemi (1) e (2).

2. Def. – Se (1) e (2) sono due sistemi assoluti, in cui gli indici e gli apici rappresentati da uno stesso simbolo sono della medesima classe, il sistema

$$(4)\qquad D^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}=H^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}-K^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r},$$

che evidentemente è un sistema assoluto, si chiama la *differenza* dei sistemi (1) e (2).

3. Def. – Se (1) e

$$(5)\qquad K^{\beta_{s+1},\,\beta_{s+2},\ldots,\,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\,\alpha_{r+2},\ldots,\,\alpha_{r+p}}$$

sono due sistemi assoluti, il sistema

$$[6]\qquad P^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_{s+q}}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_{r+p}}=H^{\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}\cdot K^{\beta_{s+1},\ldots,\,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\ldots,\,\alpha_{r+p}},$$

che evidentemente è un sistema assoluto, si chiama *prodotto* dei sistemi (1) e (5).

4. Teor. – Se (1) è un sistema assoluto, e se α_1 e β_1 sono della medesima classe, il sistema

$$(7)\qquad K^{\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r}=\sum\nolimits_\tau H^{\tau,\,\beta_2,\ldots,\,\beta_s}_{\tau,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_r},$$

dove la Σ è estesa al variare di τ nella classe comune ad α_1 e β_1, è pure un sistema assoluto.

Dim. - Infatti è

$$H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_r}[v] =$$

$$= \sum_{\alpha', \beta'} H^{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r}[u] \cdot \prod_2^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_2^s{}_h \frac{\partial v_{\beta_k}}{\partial u_{\beta'_k}} \cdot \left(\frac{\partial u_{\alpha'_1}}{\partial v_\tau} \cdot \frac{\sigma v_\tau}{\partial u_{\beta'_1}} \right),$$

e, sommando i due membri rispetto a τ (p. 160, cor.) si ha

$$K^{\beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_2, \dots, \alpha_r}[v] =$$

$$= \sum' \left(\sum_{\tau'} H^{\tau', \beta'_2, \dots, \beta'_s}_{\tau', \alpha'_2, \dots, \alpha'_r}[u] \right) \cdot \prod_2^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_\tau} \cdot \prod_2^s \frac{\partial v_\tau}{\partial u_{\beta'_k}} =$$

$$= \sum' K^{\beta'_2, \dots, \beta'_s}_{\alpha'_2, \dots, \alpha'_r}[u] \cdot \prod_2^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_\tau} \cdot \prod_2^s \frac{\partial v_\tau}{\partial u_{\beta'_k}},$$

dove la Σ' è estesa al variare degli indici e degli apici

$$\alpha'_2, \dots, \alpha'_r, \qquad \beta'_2, \dots, \beta'_s$$

nelle rispettive classi, e ciò dimostra il teor.

Def. 1. – La proposizione enunciata nel prec. teor. si indica sotto il nome di *principio di saturazione.*

Def. 2. - Se

$$H^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \tag{8}$$

$$K^{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots, \beta_{s+q}}_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_{r+p}} \tag{9}$$

sono due sistemi assoluti, in cui gli indici e gli apici rappresentati dallo stesso simbolo sono della medesima classe, il sistema

$$C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+p}} =$$

$$= \sum_{\tau, \sigma} H^{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, \beta_1, \ldots, \beta_s}_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \alpha_1, \ldots, \alpha_r} \cdot K^{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q}}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p}},$$

nel quale la Σ si deve intendere estesa a tutti gli stati di $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h$, e che, per la successiva applicazione del principio di saturazione, è assoluto, si dice un *sistema composto.*

5. Teor. 1. - Un sistema (1) è assoluto, se, qualunque sia il covariante X_{β_1}, il sistema

$$K^{\beta_2, \ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \sum_{\beta_1} X_{\beta_1} \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

è assoluto.

Dim. - Infatti, per ipotesi,

$$K^{\beta_2, \ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v] =$$

$$= \sum_{\alpha', \beta'} K^{\beta'_2, \ldots\ldots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r}[u] \cdot \prod_1^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_2^s{}_h \frac{\partial v_{\beta_h}}{\partial u_{\beta'_h}} =$$

$$= \sum_{\alpha', \beta'} X_{\beta'_1}[u] \, H^{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r}[u] \cdot \prod_1^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_2^s{}_h \frac{\partial v_{\beta_h}}{\partial u_{\beta'_h}},$$

e, poichè

$$X_{\beta'_1}[u] = \Sigma_{\beta_1} X_{\beta_1}[v] \cdot \frac{\partial v_{\beta_1}}{\partial u_{\beta'_1}},$$

e

$$K^{\beta_2, \ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v] = \sum_{\beta_1} X_{\beta_1}[v] \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v],$$

sostituendo e portando tutto nel 1° membro, si ha

$$\sum\nolimits_{\beta_1} X_{\beta_1}[v] \cdot \Big\{ H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}[v] -$$

$$- \sum\nolimits_{\alpha', \beta'} H^{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_r}[u] \cdot \prod_1^r{}_h \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}} \cdot \prod_1^s{}_k \frac{\partial v_{\beta_k}}{\partial u_{\beta'_k}} \Big\} = 0 .$$

Ma $X_{\beta_1}[v]$ può essere un qualunque sistema di funzioni delle v, dunque l'espressione fra parentesi $\} \{$ deve essere *zero*, e ciò significa che il sistema [1] è un sistema assoluto.

In modo analogo si dimostra il

Teor. 2. - Un sistema (1) è assoluto, se, qualunque sia il controvariante X^{α_1}, il sistema

$$K^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_2, \dots\dots, \alpha_r} = \sum\nolimits_{\alpha_1} X^{\alpha_1} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}$$

è assoluto.

Applicando successivamente i due teoremi precedenti, si ha il seguente

1º criterio per riconoscere i sistemi assoluti.

Un sistema

$$(\omega) \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}}$$

è assoluto se, qualunque siano i covarianti

$$\underset{1}{X}_{\beta_1}, \underset{2}{X}_{\beta_2}, \dots, \underset{s}{X}_{\beta_s}$$

ed i controvarianti

$$\underset{1}{X}^{\alpha_1}, \underset{2}{X}^{\alpha_2}, \dots, \underset{r}{X}^{\alpha_r},$$

il sistema

$$K^{\beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}} =$$

$$\sum\nolimits_{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+p}} \prod_1^r{}_h \underset{h}{X}^{\alpha_h} \prod_1^s{}_k \underset{k}{X}_{\beta_k}$$

è un sistema assoluto.

6. – *2° criterio per riconoscere i sistemi assoluti.*

Se (ω) e

$$K^{\beta_{s+1},\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+p}} \tag{10}$$

sono due sistemi assoluti, ed il sistema di equazioni lineari

$$\sum\nolimits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s} \cdot H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+p}} \cdot X^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r} = \tag{11}$$

$$= K^{\beta_{s+1},\ldots,\beta_{s+p}}_{\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+p}}$$

nelle incognite

$$X^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}$$

è determinato, cioè ha la matrice dei coefficienti e quella dei coefficienti e termini noti con caratteristica uguale al numero delle incognite, la sua (unica) soluzione è un sistema assoluto.

Dim. – Infatti, se si considera dapprima un sistema fisso di variabili, p. es. quello delle u, e si risolve il sistema (11), si trova un sistema di funzioni delle u, e noi possiamo costruire il sistema assoluto

$$X^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s} \tag{12}$$

che per le variabili u coincida con tali funzioni (p. 168, teor. 2).

Mettendo questo sistema assoluto nei primi membri delle (11), questi diventano, per il principio di saturazione, un sistema assoluto, che per le variabili u coincide col sistema

$$K^{\beta_{s+1},\ldots,\beta_{s+q}}_{\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_{r+p}}[u],$$

e quindi coincide per tutti i sistemi di variabili col sistema assoluto (10); dunque il sistema (12) è la soluzione del sistema (11), e quindi la soluzione del sistema (11) è un sistema assoluto.

7. Teor. – Se $H_{\alpha,\beta}$ è un sistema covariante a due indici α e β della stessa classe (ν, μ), e se il determinante $H = |H_{\alpha,\beta}|$, scritto in modo che α sia costante in una stessa riga e β sia costante in una stessa colonna, e che i due indici si susseguano nell' ordine naturale, è diverso da zero, e se $H^{\alpha,\beta}$ indica il reciproco di $H_{\alpha,\beta}$ in H, il sistema $H^{\alpha,\beta}$ con α e β varianti nella classe $[\nu, \mu]$ è un controvariante a due apici.

Dim. – Sia X_α un qualunque sistema covariante ad un indice α di classe (ν, μ). Il sistema di equazioni

$$\Sigma_\beta H_{\alpha,\beta} X^\beta = X_\alpha$$

nelle incognite X^β, α e β variando nella classe (ν, μ), è un sistema di equazioni determinato, e quindi la sua (unica) soluzione X^β è un controvariante (p. 179), e si ha

$$X^\beta = \Sigma_\alpha H^{\alpha,\beta} X_\alpha\,, \tag{13}$$

il che prova che, qualunque sia il covariante X_α, il 2° membro di (13) è un sistema assoluto, ed allora si può concludere (p. 178) che il sistema $H^{\alpha,\beta}$ è assoluto.

7.

Simboli associati ad una punto-funzione.

1. I simboli $a_{\alpha,\beta}$. — 2. I simboli $\underset{\vee}{a}$ ed $\underset{\vee}{a}^{\alpha,\beta}$. — 2. I simboli di Christoffel. — 4. Proprietà dei predetti simboli.

1. - Abbiamo già osservato che una punto-funzione

$$f(t,\ u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n) \tag{1}$$

descrive una varietà V. Se noi consideriamo una sostituzione invertibile S, che porti dalle variabili u alle variabili v, di equazioni

(2) $$u_i = u^i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e sostituiamo i secondi membri delle (2) alle u nella (1), vediamo che questa si muta in una punto-funzione delle variabili v che descrive la stessa varietà V.

Consegue che, se per ogni t si considera l'invariante che per le variabili u coincide con (1), questo invariante descrive, qualunque sia il sistema di variabili, la stessa varietà. Tale invariante, quando si vuol mettere in evidenza le variabili u a cui ci si riferisce, si rappresenterà con $f[t; u]$ o con $f[u]$, conformandoci così a notazioni già introdotte.

Allora, con notazione da noi già usate per rappresentare le derivate di un invariante, ha significato ben preciso la scrittura f_α dove α rappresenta uno stato di un indice variabile in Ω.

Def. – Noi porremo

(3) $$a_{\alpha,\beta} = \int_g f_\alpha f_\beta \, dt,$$

e, se si fa variare l'indice α in una classe intera r e l'indice β in una classe intera s, il sistema (3) è assoluto.

2. Def. 1. – Noi indicheremo con $\underset{\vee}{a}$ il determinante che ha per elementi gli $a_{\alpha,\beta}$ coi due indici α e β varianti nella medesima classe intera ν, scritto in modo che α sia costante in una stessa riga e β sia costante in una stessa colonna, e che i due indici si susseguano nell'ordine naturale.

Def. 2. – Nell'ipotesi che $\underset{\vee}{a}$ sia diverso da zero, noi indicheremo con $\underset{\vee}{a}^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $a_{\alpha,\beta}$ in $\underset{\vee}{a}$.

Teor. – Il sistema $\underset{\vee}{a}^{\alpha,\beta}$ è assoluto (controvariante a 2 apici) (p. 180, teor.).

3. Def. – Se α e β variano nella classe ν, se p è un indice di classe 1, se con αp si rappresenta lo stato (di un indice) che ha tutte le cifre di α e la cifra p, noi porremo

$$\underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} = \Sigma_\gamma \, a_{\alpha p, \gamma} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \gamma} ,$$

la Σ essendo estesa al variare di γ nella classe ν. I simboli $\underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p}$ si chiamano *simboli di* Christoffel *di classe* ν.

Quando la classe del simbolo di Christoffel è precisata in altro modo, senza che possano nascere equivoci, si risparmierà di scrivere il ν sotto il C.

4. Teor. 1. – Se p è un indice di classe 1, si ha

$$\frac{\partial a_{\alpha, \beta}}{\partial u_p} = a_{\alpha p, \beta} + a_{\alpha, \beta p} \,. \tag{5}$$

Dim. – Infatti (p. 82, teor. 3).

$$\frac{\partial}{\partial u_p} \int_g f_\alpha \, f_\beta \, dt = \int_g f_{\alpha p} \, f_\beta \, dt + \int_g f_\alpha \, f_{\beta p} \, dt = a_{\alpha p, \beta} + a_{\alpha, \beta p} \,.$$

Teor. 2. – Si ha, se α, β, γ variano nella classe ν,

$$\Sigma_\gamma \, a_{\alpha, \gamma} \, \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha} , \tag{6}$$

Dim. – Ciò consegue da una nota proprietà dei determinanti, e prova in altro modo che il sistema δ^{β}_{α} (p. 168, § 5) è assoluto.

Teor. 3. – Se β e δ variano nella classe ν, e se p è un indice di classe 1, si ha, per ogni sistema di variabili u ,

$$\frac{\partial \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \delta}}{\partial u_p} = - \Sigma_\alpha \, \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\alpha, \delta} - \Sigma_\gamma \, C^{\delta}_{\gamma p} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \gamma} , \tag{7}$$

le Σ essendo estese al variare di α e γ nella classe ν.

Dim. – Infatti, pensando i due membri delle (6) scritti per le variabili u, e derivandoli rispetto ad u_p, si ricava

$$\Sigma_\gamma \, \frac{\partial a_{\alpha, \gamma}}{\partial u_p} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \gamma} + \Sigma_\gamma \, a_{\alpha, \gamma} \cdot \frac{\partial \underset{\nu}{a}{}^{\beta, \gamma}}{\partial u_p} = 0 ,$$

e per le (5) ed introducendo i simboli di CHRISTOFFEL

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} \cdot \frac{\partial \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma}}{\partial u_p} = -\Sigma_\gamma \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} . (a_{\alpha p,\gamma} + a_{\alpha,\gamma p}) =$$

$$= -\underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} \cdot a_{\alpha,\gamma p} ,$$

e, moltiplicando i due membri per $\underset{\nu}{a}^{\alpha,\delta}$, e sommando rispetto ad α, tenendo conto delle (6), ed introducendo i simboli di CHRISTOFFEL, si ha la (7). c. d. d.

TEOR. 4. – Se $\rho_\alpha < \nu$, si ha

$$\underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} = \delta^{\beta}_{\alpha p} .$$

DIM. - Infatti, per definizione,

$$\underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} = \Sigma_\gamma a^{\alpha p,\gamma} . \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} , \tag{8}$$

e, poichè αp e β appartengono alla classe ν, per la (6) si ha la (8)

TEOR. 5. – Si ha

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} \cdot a_{\beta,\gamma} = a_{\alpha p,\gamma} \tag{9}$$

se γ è nella classe ν e se la Σ è estesa al variare di β nella classe ν.

DIM. - Infatti

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\alpha p} \cdot a_{\beta,\gamma} = \Sigma_{\delta,\beta}\, a_{\alpha p,\delta} \cdot \underset{\nu}{a}^{\beta,\delta} \cdot a_{\beta,\gamma} =$$

$$= \Sigma_\delta\, a_{\alpha p,\delta} (\Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\beta,\delta} \cdot a_{\beta,\gamma}) =$$

$$= a_{\alpha p,\gamma} . \qquad \text{(v. il prec. teor. 2).}$$

Teor. 6. - Vale la formula

$$(10) \qquad \frac{\partial \log \sqrt{\underset{\nu}{a}}}{\partial u_p} = \Sigma_\alpha \underset{\nu}{C}{}^{\alpha}_{\alpha p} .$$

Dim. – Infatti, per la regola di derivazione di un determinante, si ha

$$\frac{\partial \log \underset{\nu}{a}}{\partial u_p} = \Sigma_{\alpha, \beta} \frac{\partial a_{\alpha, \beta}}{\partial u_p} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\alpha, \beta} =$$

$$= \Sigma_{\alpha, \beta} (a_{\alpha p, \beta} + a_{\alpha, \beta p}) \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\alpha, \beta} =$$

$$= \Sigma_\alpha \underset{\nu}{C}{}^{\alpha}_{\alpha p} + \Sigma_\beta \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\beta p} = 2 \Sigma_\alpha \underset{\nu}{C}{}^{\alpha}_{\alpha p} ,$$

e, dividendo per 2, si ha la (10).

8.

Derivato covariante di un sistema assoluto.

1. Definizione. — 2. Carattere assoluto del derivato covariante di un sistema assoluto.

1. Def. - Se

$$(1) \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

è un sistema assoluto, cogli indici e gli apici di classi intere, si chiama *derivato covariante* di (1) rispetto alla varietà descritta dalla punto-funzione $f(t; u_1, u_2, \ldots, u_n)$ il sistema

$$(2) \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p} ,$$

dove p è un indice di prima classe, che per ogni sistema di variabili u è dato da

$$(2') \qquad H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p}[u] = \frac{\partial H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u]}{\partial u_p} -$$

$$- \sum_1^r{}_h \Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p}[u] \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}[u] +$$

$$+ \sum_1^s{}_h \Sigma_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p}[u] \cdot H^{\beta_1, \ldots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_r}[u],$$

in cui si intenderà che ogni simbolo di CHRISTOFFEL sia della classe dell' indice α_h o dell' apice β_h che in esso figura, ed in cui per ogni Σ si intenderà che il γ varia nella classe dell' indice o dell' apice di cui occupa il posto; sistema che per maggior chiarezza indicheremo anche con

$$D_p H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r},$$

e, se non nascerà confusione, con $D_p H$.

In questa definizione è compreso il caso in cui H è un invariante, nel qual caso si avrà

$$D_p H[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p}.$$

Come casi particolari della precedente definizione si ha anche: se α è un indice di classe ν e se H_α è un sistema assoluto,

$$D_p H_\alpha[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}[u] \cdot H_\gamma[u],$$

e, se β è un apice di classe u e se H^β è un sistema assoluto,

$$D_p H^\beta[u] = \frac{\partial H[u]}{\partial u_p} + \Sigma_\gamma C^\beta_{\gamma p}[u] \cdot H^\gamma[u].$$

2. Teor. – Il derivato covariante di un sistema assoluto (1) è pure un sistema assoluto.

Dim. – Il teorema è vero se il sistema dato è un invariante, perchè il suo derivato covariante coincide col sistema delle comuni derivate di detto invariante con indice variabile nella classe 1.

Supponiamo ora che il sistema dato sia un covariante H_α ad un solo indice α di classe ν. Si ha

$$H_\alpha[v] = \Sigma_{\alpha'} H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha},$$

α' variando nella classe ν. Derivando rispetto a v_p, essendo p un indice di classe 1, si ha

$$\frac{\partial H_\alpha[v]}{\partial v_p} = \Sigma_{\alpha', p'} \frac{\partial H_{\alpha'}[u]}{\partial u_{p'}} \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} + \tag{3}$$

$$+ \Sigma_{\alpha'} H_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha}.$$

Analogamente, ponendo per H_α il covariante f_α, si ha

$$f_{\alpha p}[v] = \Sigma_{\alpha', p'} f_{\alpha' p'}[u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} + \tag{3'}$$

$$+ \Sigma_{\alpha'} f_{\alpha'}[u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha}.$$

Si osservi inoltre che, per il principio di saturazione, si ha

$$\Sigma_{\beta,\gamma} \underset{\nu}{a^{\beta,\gamma}}[v] \cdot H_\beta[v] \cdot f_\gamma[v] = \Sigma_{\beta,\gamma} \underset{\nu}{a^{\beta,\gamma}}[u] \cdot H_\beta[u] \cdot f_\gamma[u], \tag{4}$$

e, moltiplicando membro a membro la (3′) e la (4), ed integrando rispetto a t lungo g, si ottiene

$$\Sigma_{\beta,\gamma} \underset{\nu}{a^{\beta,\gamma}}[v] \cdot H_\beta[v] \cdot a_{\alpha p,\gamma}[v] =$$

$$= \Sigma_{\alpha', p'} (\Sigma_{\beta,\gamma} \underset{\nu}{a^{\beta,\gamma}}[u] \cdot H_\beta[u] \cdot a_{\alpha' p',\gamma}[u]) \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha'} \{ \Sigma_\beta H_\beta [u] \cdot (\Sigma_\gamma \underset{\nu}{a}^{\beta,\gamma} [u] \cdot a_{\alpha',\gamma} [u]) \} \cdot \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha}$$

e semplificando (p. 181, § 3 e p. 182, teor. 2)

$$(5) \quad \Sigma_\beta \underset{\nu}{C}{}^\beta_{\alpha p} [v] \cdot H_\beta [v] = \Sigma_{\alpha',p'} (\Sigma_\beta \underset{\nu}{C}{}^\beta_{\alpha' p'} [u] \cdot H_\beta [u]) \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} +$$

$$+ \Sigma_{\alpha'} H_{\alpha'} [u] \cdot \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} .$$

Sottraendo poi membro a membro la (5) dalla (3) si ha, tenendo conto della definizione di derivato covariante,

$$H_{\alpha,p} [v] = \Sigma_{\alpha',p'} H_{\alpha',p'} [u] \cdot \frac{\partial u_{\alpha'}}{\partial v_\alpha} \cdot \frac{\partial u_{p'}}{\partial v_p} ,$$

il che prova che $H_{\alpha,p} = D_p H_\alpha$ è un sistema assoluto.

Supponiamo ora che il sistema dato sia un controvariante H^β ad un solo apice β di classe ν. Allora

$$K_\alpha = \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} H^\beta$$

è un covariante ad un solo indice α di classe ν, ed il suo derivato covariante $D_p K_\alpha = K_{\alpha,p}$ è un sistema assoluto. E si ha, per qualunque sistema di variabili u,

$$K_{\alpha,p} = \frac{\partial K_\alpha}{\partial u_p} - \Sigma_{\alpha'} \underset{\nu}{C}{}^{\alpha'}_{\alpha p} K_{\alpha'} =$$

$$= \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} H_\beta + \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial u_p} - \Sigma_\beta (\Sigma_{\alpha'} \underset{\nu}{C}{}^{\alpha'}_{\alpha p} \cdot a_{\alpha',\beta}) H^\beta =$$

$$= \Sigma_\beta (a_{\alpha p,\beta} + a_{\alpha,\beta p}) H^\beta + \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \frac{\partial H^\beta}{\partial u_p} - \Sigma_\beta a_{\alpha p,\beta} H^\beta$$

(pp. 182–183, teor. 2 e 5),

e semplificando

$$K_{\alpha, p} = \Sigma_\beta \, a_{\alpha, \beta p} H^\beta + \Sigma_\beta \, a_{\alpha, \beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial u_p} =$$

$$= \Sigma_{\beta, \gamma} \underset{\vee}{C}{}^{\gamma}_{\beta p} \cdot a_{\gamma, \alpha} H^\beta + \Sigma_\beta \, a_{\alpha, \beta} \frac{\partial H^\beta}{\partial u_p} \qquad \text{(p. 183, teor. 5),}$$

e scambiando nella 1ª Σ dell'ultimo membro gli indici β e γ,

$$K_{\alpha, p} = \Sigma_\beta \, a_{\alpha, \beta} \left(\frac{\partial H^\beta}{\partial u_p} + \Sigma_\gamma \underset{\vee}{C}{}^{\beta}_{\gamma p} H^\gamma \right) = \Sigma_\beta \, a_{\alpha, \beta} H^\beta_p \quad \text{(p. 184, def.)}$$

con $H^\alpha_p = D_p H^\beta$, ed infine moltiplicando per $\underset{\vee}{a}{}^{\alpha, \gamma}$ e sommando rispetto ad α, si ha

$$\Sigma_\alpha \underset{\vee}{a}{}^{\alpha, \gamma} \cdot K_{\alpha, p} = \Sigma_\beta \left(\Sigma_\alpha \underset{\vee}{a}{}^{\alpha, \gamma} \cdot a_{\alpha, \beta} \right) \cdot H^\beta_p = H^\gamma_p$$

(p. 182, teor. 2).

Ma il primo membro è un sistema assoluto, quindi anche il secondo membro H^γ_p è assoluto.

Per dimostrare completamente il teorema basterà allora provare che, se è vero quando il sistema (1) ha un certo numero r di indici ed un certo numero s di apici, è vero anche quando ha un indice di più od un apice di più.

Supponiamo adunque che il teor. sia vero quando il sistema (1) ha r indici ed s apici, e proviamo che è vero anche quando il sistema ha r indici ed $s+1$ apici.

Si abbia allora il sistema assoluto

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} ,$$

ed indichiamo con X_β un qualunque covariante ad un indice della classe dell'apice β. Il sistema

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_\beta \, H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \cdot X_\beta$$

è assoluto, ed ha r indici ed s apici, e quindi è assoluto il suo sistema derivato

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p}.$$

Questo, per un qualunque sistema di variabili u, è dato da

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p} = \frac{\partial K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}}{\partial u_p} -$$

$$- \sum_1^r{}_h \Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p} \cdot K^{\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r} +$$

$$+ \sum_1^s{}_h \Sigma_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p} \cdot K^{\beta_1, \ldots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_r} =$$

$$= \Sigma_\beta X_\beta \cdot \left\{ \frac{\partial H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}}{\partial u_p} - \right.$$

$$- \sum_1^r{}_h \Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p} \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots\ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r} +$$

$$\left. + \sum_1^s{}_h \Sigma_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p} \cdot H^{\beta_1, \ldots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_r} \right\} +$$

$$+ \Sigma_\beta H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial u_p}.$$

E, posto

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p} = D_p H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r},$$

si ha

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p} = \Sigma_\beta X_\beta \left[H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, p} - \right.$$

$$\left. - \Sigma_\gamma C^\beta_{\gamma p} H^{\beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \right] + \Sigma_\beta H^{\beta_1, \ldots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial u_p},$$

e, mutando nell' ultima Σ l' indice β in γ, si ha, qualunque sia il sistema di variabili,

$$K^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, p} = \Sigma_\beta X_\beta \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, p} +$$

$$+ \Sigma_\gamma H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \gamma}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \cdot X_{\gamma, p} ,$$

dove

$$X_{\gamma, p} = D_p X_\gamma ,$$

e, poichè il primo membro di questa uguaglianza è un sistema assoluto, e, per il principio di saturazione, anche l'ultimo addendo è pure un sistema assoluto, anche il primo addendo del secondo membro è un sistema assoluto, ossia è un sistema assoluto

$$\Sigma_\beta X_\beta H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_r, p} ,$$

qualunque sia il sistema assoluto X_β, dunque (p. 178) è assoluto il sistema

$$H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, p} .$$

c. d. d.

In modo analogo si dimostrerebbe il teorema quando il sistema di partenza ha $r + 1$ indici ed s apici,

Dunque il teor. è vero in generale.

9.

Regole di derivazione covariante.

1. Derivazione dei sistemi somma o differenza. — 2. Principio della permutabilità della saturazione e della derivazione covariante. — 3. Derivazione dei sistemi composti.

1. – Dalla definizione di sistema assoluto somma o differenza di due altri (pp. 174-175, § 1, 2), e dalla definizione di derivato covariante di un sistema assoluto (p. 184), risulta facilmente il

Teor. – Il derivato covariante della somma o della differenza di due sistemi assoluti è rispettivamente uguale alla somma o alla differenza dei derivati covarianti dei due sistemi dati.

2. Teor. – Se $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$ è un sistema assoluto, e se α_1 e β_1 sono della medesima classe ν, si ha

$$(1) \qquad D_p \Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \Sigma_\tau D_p H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} ,$$

o, come diremo, vale il *principio della permutabilità della saturazione e della derivazione covariante.*

Dim. – Intanto, per un qualunque sistema di variabili u, si ha

$$D_p H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \frac{\partial H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}}{\partial u_p} -$$

$$- \Sigma_\gamma C^\gamma_{\tau p} H^{\tau, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} -$$

$$- \Sigma_h^r{}_2 \Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p} H^{\tau, \beta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}$$

$$+ \Sigma_\gamma C^\tau_{\gamma p} H^{\gamma, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_r} +$$

$$+ \sum_h^s \Sigma_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p} H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}; \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots \dots \dots \dots, \alpha_r},$$

e, sommando i due membri rispetto a τ variante nella classe ν, ed osservando che i contributi forniti dal 2^0 e dal 4^0 addendo del 2^0 membro hanno per somma zero (il che si vede scambiando in uno di essi i due indici di sommatoria γ e τ), si trova

$$\Sigma_\tau D_p H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_r} = \frac{\partial \left(\Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_r} \right)}{\partial u_p} -$$

$$- \sum_2^r{}_h \Sigma_\gamma \left(\Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \dots \dots \dots \dots \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_r} \right) C^\gamma_{\alpha_h p} +$$

$$+ \sum_2^s{}_h \Sigma_\gamma \left(\Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots \dots \dots \dots \dots, \alpha_r} \right) C^{\beta_h}_{\gamma p} =$$

$$= D_p \Sigma_\tau H^{\tau, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_r},$$

e quindi vale la (1).

3. Teor. – Se

$$H^{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \beta_1, \dots, \beta_s}_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_h, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \tag{2}$$

e

$$K^{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_h, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+q}}_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}} \tag{3}$$

sono due sistemi assoluti con indici ed apici di classe intera, ed in cui gli apici ed indici rappresentati dallo stesso simbolo sono della medesima classe, e se

$$C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+q}}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+q}} \tag{4}$$

è il sistema composto che si ottiene da essi saturando gli indici e gli apici τ e σ, si ha

$$D_p C = \Sigma_{\tau, \sigma} (HD_p K + KD_p H), \tag{5}$$

dove la Σ si estende a tutti gli stati dei $\tau_1, \ldots, \tau_h, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$, e sono sottintesi gli apici e gli indici dei sistemi (2), (3) e (4).

Dim. – La proposizione si verifica facilmente (tenendo presente la definizione di derivato covariante (p. 184), quando $h = k = 0$, ossia quando il sistema composto è un prodotto (p. 175, § 3). In base a questo si ha

$$D_p \left\{ H^{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \beta_1, \ldots, \beta_s}_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \alpha_1, \ldots, \alpha_r} \cdot K^{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q}}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p}} \right\} =$$

$$= HD_p K + KD_p H,$$

nel cui 2° membro si intende che H e K abbiano gli stessi indici ed apici che hanno nel 1° membro.

Sommando rispetto alle τ ed alle σ, ed applicando il principio di permutabilità della saturazione e della derivazione covariante, si ha la (5).

10.

Derivati covarianti di alcuni sistemi assoluti.

1. Derivato dei sistemi $a_{\alpha, \beta}$. — 2. Derivato dei sistemi $a^{\alpha, \beta}_{\nu}$. — 3. Derivato dei sistemi δ^{β}_{α}. — 4. Derivato dei sistemi $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\sigma_\nu}}$.

1. Teor. – Il sistema assoluto $a_{\alpha, \beta}$, con α e β della stessa classe intera ν, ha nullo il derivato covariante.

Dim. – Infatti, per un qualunque sistema di variabili u,

$$D_p a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} a_{\gamma,\beta} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\beta p} a_{\alpha,\gamma} =$$

$$= \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_{\gamma\delta} a_{\alpha p,\delta} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\delta,\gamma} a_{\gamma,\beta} - \Sigma_{\gamma\delta} a_{\beta p,\delta} \cdot \underset{\nu}{a}{}^{\delta,\gamma} a_{\alpha,\gamma} =$$

$$= \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial u_p} - a_{\alpha p,\beta} - a_{\alpha,\beta p} = 0 \qquad \text{(p. 182 teor. 1 e 2).}$$

2. Teor. – Il sistema assoluto $\underset{\nu}{a}{}^{\alpha,\beta}$, con α e β varianti nella classe ν, ha nullo il derivato covariante.

Dim. – Infatti la formula (7) a p. 182, quando si trasporti il 2° membro nel 1°, dice che

$$D_p \underset{\nu}{a}{}^{\alpha,\beta} = 0 \, .$$

3. Teor. – Si ha $D_p\ \delta^\beta_\alpha = 0$.

Dim. – Il teorema discende derivando covariantemente i due membri della formula (6) di p. 182, tenendo presente la regola di derivazione dei sistemi composti a p. 192 ed i prec. teor.

4. Teor. – Se $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{o_\nu}}$ è l' $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{o_\nu}}$ associato ad un N_ν - variante A, si ha

$$D_p H = H \cdot J_p \, ,$$

dove J_p indica il sistema derivato dall' invariante

$$J = \log\left(A : \sqrt{\underset{\nu}{a}}\right) .$$

Dim. – Intanto è chiaro che essendo, qualunque sia il sistema di variabili u,

$$D_p H = \frac{\partial H}{\partial u_p} - \sum_1^{o_\nu}{}_h \Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p} \cdot H_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_{o_\nu}} \, ,$$

se due indici di H sono uguali, è $D_p H = 0$, perchè, se p. es.

è $\alpha_1 = \alpha_2$, il 2º membro si riduce a

$$(1) \qquad -\Sigma_\gamma \left(C^\gamma_{\alpha_1 p} \cdot H_{\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}} + C^\gamma_{\alpha_2 p} \cdot H_{\alpha_1, \gamma, \alpha_3, \ldots, \alpha_{O_\nu}} \right),$$

poichè gli altri addendi, contenendo un H con due indici uguali, sono nulli. Inoltre, essendo $\alpha_1 = \alpha_2$ e la H essendo emisimmetrica, i termini (1) si riducono a

$$-\Sigma_\gamma C^\gamma_{\alpha_1 p} \left(H_{\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}} - H_{\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}} \right) = 0 = H \cdot J_p .$$

Se poi gli indici di H sono una permutazione degli O_ν stati della classe ν, si ha, pensando che in tutto quel che segue la H abbia sempre per indici una stessa permutazione degli O_ν stati della classe ν,

$$\begin{aligned} D_p H &= \frac{\partial H}{\partial u_p} - \sum_1^{O_\nu}{}_h H \cdot C^{\alpha_h}_{\alpha_h p} = \\ &= H \left(\frac{\partial \log H}{\partial u_p} - \sum_1^{O_\nu}{}_h C^{\alpha_h}_{\alpha_h p} \right) = \\ &= H \left(\frac{\partial \log H}{\partial u_p} - \frac{\partial \log \sqrt{a_\nu}}{\partial u_p} \right) \qquad \text{(p. 184, teor. 6).} \\ &= H \cdot J_p . \end{aligned}$$

Cor. – Se $H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$ è l' $\varepsilon_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{O_\nu}}$ associato all' N_ν - variante $\sqrt{a_\nu}$, è $D_p H = 0$.

Dim. – Infatti in questo caso $J = \log 1 = 0$, e quindi è $J_p = 0$, ed infine $D_p H \cdot 0 = 0$. c. d. d.

11.

Sistemi che possono considerarsi come assoluti in varie maniere.

1. Teor. - Se un sistema

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \tag{1}$$

è assoluto, se α_1 è di classe $[\nu, \mu]$ con $\nu > \mu$, se inoltre per un particolare sistema di variabili u è

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u] = 0$$

tutte le volte che $\rho_{\alpha_1} < \nu$, anche per ogni altro sistema di variabili v sarà

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v] = 0$$

tutte le volte che $\rho_{\alpha_1} < \nu$.

Dim. - Infatti, per la legge di varianza assoluta, quando $\rho_{\alpha_1} < \nu$, la

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v] \tag{2}$$

viene espressa da una combinazione lineare degli

$$H^{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_s}_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r}[u] \tag{3}$$

nella quale ogni termine è nullo o perchè è nullo il fattore (3), il che capita quando $\rho_{\alpha'_1} < \nu$, o perchè è nullo il fattore

$$\frac{\partial u_{\alpha'_1}}{\partial v_{\alpha_1}},$$

il che capita quando $\rho_{\alpha_1'} = \nu$ (p. 159, teor. 2); dunque l'elemento (2) con $\rho_{\alpha_1} < \nu$ è nullo.

Cor. – Se in un sistema assoluto (1) un indice α_1 è di classe $[\nu, \mu]$ con $\nu > \mu$, e sono nulli per un particolare sistema di variabili, e quindi per qualunque sistema di variabili, tutti gli elementi di (1) in cui $\rho_{\alpha_1} < \nu$, gli elementi del sistema (1) per cui $\rho_{\alpha_1} = \nu$ formano ancora un sistema assoluto in cui l'indice α_1 varia nella classe $[\nu, \nu]$. Viceversa, se (1) è un sistema assoluto con α_1 di classe $[\nu, \nu]$ e se $\mu < \nu$, il sistema

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

in cui α_1 varia nella classe $[\nu, \mu]$ e gli altri indici od apici variano nelle stesse classi in cui variano per il sistema (1), ed i cui elementi coincidono coi corrispondenti di (1) quando $\rho_{\alpha_1} = \nu$, e sono nulli quando $\rho_{\alpha_1} < \nu$, è pure un sistema assoluto.

2. Teor. 1. – Se (1) è un sistema assoluto con α_1 di classe $[\nu, \nu]$, posto

$$(4) \qquad K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

se $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ sono le cifre di α_1, qualunque sia il loro ordine, il sistema (4) è un sistema assoluto, nel quale i primi ν indici sono ν indici di classe 1.

Dim. – La proposizione si rende manifesta considerando la formula di varianza assoluta di (1) per il passaggio dalle u alle v, e ricordando che il fattore $\dfrac{\partial u_{\alpha_1'}}{\partial v_{\alpha_1}}$, in cui necessariamente $\rho_{\alpha_1'} = \rho_{\alpha_1} = \nu$, vale

$$\Sigma_{\pi_{\alpha_1'}} \frac{\partial u_{j_1}}{\partial v_{i_1}} \cdot \frac{\partial u_{j_2}}{\partial v_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial u_{j_\nu}}{\partial v_{i_\nu}}$$

se $j_1, j_2, \ldots j_\nu$ sono le cifre di α_1' (p. 162; teor. 2).

Inversamente si ha il

Teor. 2. – Se il 1° membro di (4) è un sistema assoluto cogli indici i_p di classe 1 e simmetrico rispetto a questi ν indici, anche il 2° membro di (4) è un sistema assoluto in cui l'indice α_1 è di classe $[\nu, \nu]$.

3. – Con ragionamento analogo a quello del § 1 si dimostra il

Teor. – Se (1) è un sistema assoluto, e se β_1 è di classe $[\nu, \mu]$ con $\nu > \mu$, se inoltre per un particolare sistema di variabili u è

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u] = 0,$$

tutte le volte che $\rho_{\beta_1} > \mu$, anche per ogni altro sistema di variabili v sarà

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[v] = 0,$$

tutte le volte che $\rho_{\beta_1} > \mu$.

E da questo si ha il

Cor. – Se in sistema assoluto [1] un apice β_1 è di classe $[\nu, \mu]$, con $\nu > \mu$, e sono nulli per un particolare sistema di variabili, e quindi per qualunque sistema di variabili, tutti gli elementi di (1) in cui $\rho_{\beta_1} > \mu$, gli elementi del sistema (1) per cui $\rho_{\beta_1} = \mu$ formano ancora un sistema assoluto in cui l'apice β_1 varia nella classe $[\mu, \mu]$. Viceversa, se (1) è un sistema assoluto con β_1 di classe $[\mu, \mu]$, e se $\nu > \mu$, il sistema

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

in cui β_1 varia nella classe $[\nu, \mu]$ e gli altri apici od indici variano nelle stesse classi in cui variano per il sistema (1) ed i cui elementi coincidono coi corrispondenti di (1) quando $\rho_{\beta_1} = \mu$, e sono nulli quando $\rho_{\beta_1} > \mu$, è pure un sistema assoluto.

4. Teor. 1. – Se (1) è un sistema assoluto con β_1 di classe $[\mu, \mu]$, posto

$$(5)\qquad K^{j_1,\, j_2,\ldots,\, j_\mu,\, \beta_2,\ldots,\, \beta_s}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\ldots,\, \alpha_r} = \frac{1}{\pi_{\beta_1}} \cdot H^{\beta_1,\, \beta_2,\ldots,\, \beta_s}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\ldots,\, \alpha_r}$$

se $j_1, j_2, \ldots, j_\mu$ sono le cifre di β_1 qualunque sia il loro ordine, è anche assoluto il sistema (5), in cui i primi μ apici sono μ apici di classe 1.

Dim. – La proposizione si rende manifesta considerando la formula di varianza assoluta di (1) per il passaggio dalle u alle v, e ricordando che il fattore $\frac{\partial v_{\beta_1}}{\partial u_{\beta'_1}}$ in cui necessariamente $\rho_{\beta'_1} = \rho_{\beta_1} = \mu$, vale

$$\frac{\pi_{\beta_1}}{\pi_{\beta'_1}} \cdot \sum\nolimits_{\pi_{\beta'_1}} \frac{\partial v_{j_1}}{\partial u_{i_1}} \, \frac{\partial v_{j_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots\cdots \frac{\partial v_{j_\mu}}{\partial u_{i_\mu}}$$

se $i_1, i_2, \ldots, i_\mu$ sono le cifre di β'_1 (p. 164, teor. 3).

Inversamente si ha il

Teor. 2. – Se il 1^0 membro di (5) è un sistema assoluto cogli apici j_p di classe 1 e simmetrico rispetto a questi apici, anche lo

$$H^{\beta_1,\, \beta_2,\ldots,\, \beta_s}_{\alpha_1,\, \alpha_2,\ldots,\, \alpha_r}$$

che figura nel 2^0 membro di (5) è un sistema assoluto in cui l'apice β_1 è di classe $[\mu, \mu]$.

5. – Dai teoremi prec. e da quello di p. 180 consegue il

Teor. – Se $H_{\alpha,\beta}$ è un sistema assoluto a due indici di covarianza α e β di classe $[\nu, \nu]$, e col determinante $H = |H_{\alpha,\beta}|$ diverso da zero, e se $H^{\alpha,\beta}$ indica il reciproco di $H_{\alpha,\beta}$ in H, il sistema

$$K^{i_1,\, i_2,\ldots,\, i_\nu,\, j_1,\, j_2,\ldots,\, j_\nu} = \frac{H^{\alpha,\beta}}{\pi_\alpha \cdot \pi_\beta},$$

dove $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ sono le cifre di α e $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ sono le cifre di β, è un sistema assoluto a 2ν apici di classe 1. Evidentemente questo sistema è simmetrico rispetto agli apici i_p e simmetrico rispetto agli apici j_p, e se il sistema $H_{\alpha,\beta}$ è simmetrico rispetto ai due indici α e β, il sistema K resta invariato se si scambia il sistema degli apici i_p col sistema degli apici j_p.

12.

I ricciani di un invariante.

1–2. I ricciani di un invariante. — 3. Simmetria dei ricciani. — 4. I ricciani della punto-funzione f. — 5. I simboli di Riemann di 1ª specie e di classe ν. — 6 Loro varie espressioni. — 7-8. I simboli di Riemann di 2ª specie e di classe ν.

1. – Sia I un invariante, sia α un indice di classe ν e consideriamo il sistema I_α (p. 155, § 1).

Si ha, qualunque sia il sistema delle variabili u,

$$D_p I_\alpha = \frac{\partial I_\alpha}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot I_\gamma = I_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot I_\gamma \, .$$

Ora, se α ha meno di ν cifre, si ha (p. 183, teor. 4)

$$D_p I_\alpha = I_{\alpha p} - I_{\alpha p} = 0 \, .$$

Quindi il sistema assoluto

$$\underset{\nu}{I}_{\alpha,p} = D_p I_\alpha \quad \text{(1)}$$

a due indici α *e* p, *il 1° di classe* ν *ed il 2° di classe* 1, *ha nulli tutti i termini in cui* α *ha un numero di cifre* $< \nu$.

2. – Consideriamo solo i termini di

$$\underset{\nu}{I}_{\alpha,p}$$

(1) È conveniente mettere l' indice ν sotto la lettera I perchè la funzione $\underset{\nu}{I}_{\alpha,p}$ dipende dalla classe ν in cui si pensa che varii α, e non solo dello stato di α.

in cui è $\rho_\alpha = \nu$, e poniamo

(1) $$I_{i_1, i_2, \dots, i_\nu p} = I_{\underset{\nu}{\alpha}, p} ,$$

dove $i_1, i_2, \dots, i_\nu$ sono le cifre di α.

Per il teor. a p. 197, si ha il

Teor. – Il sistema (1) è un sistema assoluto con $\nu + 1$ indici di classe 1.

Def. – Il sistema a $\nu + 1$ indici di classe 1 che si ottiene nel modo precedente da un invariante I sarà da noi chiamato il $(\nu + 1)$.mo *ricciano* [1] di I, od il *ricciano di I di ordine* $\nu + 1$.

Il 1° ricciano di I coincide con I_p.

3. Teor. – Il $(\nu + 1)$.mo ricciano di un invariante I è simmetrico rispetto all'insieme dei suoi $\nu + 1$ indici, ossia ha uguali tutti gli elementi che differiscono solo per l'ordine dei suoi $\nu+1$ indici.

Dim. – Il teorema consegue subito dalla formula

$$I_{\underset{\nu}{\alpha}, p} = I_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot I_\gamma ,$$

osservando che $I_{\alpha p}$ e $\underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p}$ non mutano se si permutano le cifre di αp.

In particolare

$$\text{« Se } \rho_\gamma = \nu - 1 \text{ e } \rho_p = \rho_q = 1, \text{ è } I_{\underset{\nu}{\gamma p}, q} = I_{\underset{\nu}{\gamma q}, p} \text{ » .}$$

4. – Hanno particolare importanza i ricciani dell'invariante f, essendo la $f[t; u]$ la determinante della varietà a cui ci si riferisce.

Vale il

Teor. – Un termine del $(\nu+1)$.mo ricciano di f, se non è nullo, è ortogonale a tutti i termini non nulli del sistema f_β con β di classe ν.

[1] In omaggio a Gregorio Ricci-Curbastro († 1925).

Dim. - Infatti, essendo

(2) $$\underset{\nu}{f_{\alpha,p}} = f_{\alpha p} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C^\gamma_{\alpha p}} \cdot f_\gamma \,,$$

si ha

$$\int_g \underset{\nu}{f_{\alpha,p}} \cdot f_\beta \, dt = \int_g f_{\alpha p} f_\beta \, dt - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C^\gamma_{\alpha p}} \cdot \int_g f_\gamma f_\beta \, dt =$$

$$= a_{\alpha p,\beta} - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C^\gamma_{\alpha p}} \cdot a_{\gamma,\beta} =$$

$$= a_{\alpha p,\beta} - a_{p\alpha,\beta} \qquad \text{(p. 183, teor. 5)}$$

$$= 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Cor. – Se φ e ψ sono due elementi non nulli di due ricciani di f di ordine diverso, essi sono ortogonali fra loro.

Dim. - Infatti, se φ è un elemento del ricciano di f di ordine $\nu+1$, e se ψ è di ordine inferiore, ψ è una combinazione lineare di elementi di f_α con α variante nella classe ν, cioè di elementi ortogonali a φ.

5. Def. - Se α e β variano nella classe ν, e p e q variano nella classe 1, noi porremo

(3) $$(\alpha,\beta\,;p,q)_\nu = \int_g \underset{\nu}{f_{\alpha,p}}\, \underset{\nu}{f_{\beta,q}} \, dt - \int_g \underset{\nu}{f_{\alpha,q}}\, \underset{\nu}{f_{\beta,p}} \, dt \,,$$

e chiameremo i simboli $(\alpha,\beta\,;p,q)_\nu$ *simboli di* Riemann *di 1ª specie e di classe* ν.

Dalla (3), e ricordando che $\underset{\nu}{f_{\alpha,p}} = 0$ per gli stati di α che hanno meno di ν cifre (p. 200, § 1), si ha il

Teor. 1. – Se uno degli indici α o β ha meno di ν cifre, si ha $(\alpha,\beta\,;\,p,\,q)_\nu = 0$.

Dalla stessa formula (3) si ha il

Teor. 2. – Il simbolo $(\alpha,\beta\,;\,p,\,q)_\nu$ è emisimmetrico rispetto alla coppia degli indici α e β, ed emisimmetrico rispetto alla coppia degli indici p e q.

Tenendo poi conto della simmetria dei ricciani, si ha il

TEOR. 3. – Se γ è uno stato di $\nu - 1$ cifre e se r ed s sono indici di classe 1, si ha, per la (3) e pel § 3 di p. 201,

$$(\gamma r, \gamma s ; p, q)_\nu = (\gamma p, \gamma q ; r, s)_\nu ,$$

e, come caso particolare

$$(r, s ; p, q)_1 = (p, q ; r, s)_1 .$$

Si ha ancora il

TEOR. 4. – Se $\rho_\alpha = \nu$, $\rho_\gamma = \nu - 1$, e s, p, q sono indici di classe 1, si ha

$$(\alpha, \gamma s ; p, q)_\nu + (\alpha, \gamma p ; q, s)_\nu + (\alpha, \gamma q ; s, p)_\nu = 0 .$$

DIM. – Infatti il 1º membro vale, per la (3),

$$\left(\int_g f_{\alpha, p} f_{\gamma s, q}\, dt - \int_g f_{\alpha, q} f_{\gamma s, p}\, dt\right) + \left(\int_g f_{\alpha, q} f_{\gamma p, s}\, dt - \right.$$

$$\left. - \int_g f_{\alpha, s} f_{\gamma p, q}\, dt\right) + \left(\int_g f_{\alpha, s} f_{\gamma q, p}\, dt - \int_g f_{\alpha, p} f_{\gamma q, s}\, dt\right) = 0 .$$

6. – Ricordando la (2) ed il precedente teor. si ha

$$(\alpha, \beta ; p, q)_\nu = \int_g f_{\underset{\nu}{\alpha}, p} f_{\beta q}\, dt - \int_g f_{\underset{\nu}{\alpha}, q} f_{\beta p}\, dt =$$

$$= \int_g f_{\alpha p} f_{\beta q}\, dt - \int_g f_{\alpha q} f_{\beta p}\, dt - \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \int_g f_\gamma f_{\beta q}\, dt +$$

$$+ \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha q} \int_g f_\gamma f_{\beta p}\, dt = a_{\alpha p, \beta q} - a_{\alpha q, \beta p} -$$

$$- \Sigma_\gamma (\underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot a_{\beta q, \gamma} - \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha q} \cdot a_{\beta p, \gamma}) ,$$

e poichè, per un particolare sistema di variabili u, si ha

$$\frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} = a_{\alpha p,\beta q} + a_{\alpha pq,\beta}$$

e

$$\frac{\partial a_{\alpha q,\beta}}{\partial u_p} = a_{\alpha q,\beta p} + a_{\alpha pq,\beta}$$

e, sottraendo,

$$\frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} - \frac{\partial a_{\alpha q,\beta}}{\partial u_p} = a_{\alpha p,\beta q} - a_{\alpha q,\beta p},$$

si ottiene

(4) $$(\alpha,\ \beta\ ;\ p,\ q)_\nu =$$

$$= \frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} - \frac{\partial a_{\alpha q,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_\gamma \left(\underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} \cdot a_{\beta q,\gamma} - \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha q} \cdot a_{\beta p,\gamma}\right) =$$

$$= \frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} - \frac{\partial a_{\alpha q,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_{\delta\gamma}\, \underset{\nu}{a}^{\gamma,\delta} \left(a_{\alpha p,\delta} \cdot a_{\beta q,\gamma} - a_{\alpha q,\delta} \cdot a_{\beta p,\gamma}\right).$$

7. DEF. - I simboli

(5) $$[\alpha,\ \eta\ ;\ p,\ q]_\nu = \Sigma_\beta\, \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} (\alpha,\ \beta\ ;\ p,\ q)_\nu$$

si chiamano *simboli di* RIEMANN *di 2ª specie e di classe* ν.

Si ha

(6) $$[\alpha,\ \eta\ ;\ p,\ q]_\nu =$$

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} \frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} - \Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} \frac{\partial a_{\alpha q,\beta}}{\partial u_p} - \Sigma_{\beta\gamma\delta}\, \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta}\, \underset{\nu}{a}^{\gamma,\delta} \left(a_{\alpha p,\delta} \cdot a_{\beta q,\gamma} - a_{\alpha q,\delta} \cdot a_{\beta p,\gamma}\right).$$

Ma, ricordando l'espressione dei simboli di CHRISTOFFEL, e tenendo conto del teor. 3 a p. 182

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} \frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} = \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha p}}{\partial u_q} - \Sigma_\beta a_{\alpha p,\beta} \frac{\partial \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta}}{\partial u_q} =$$

$$= \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha p}}{\partial u_q} + \Sigma_{\beta,\gamma} a_{\alpha p,\beta} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\gamma q} \cdot \underset{\nu}{a}^{\gamma,\beta} + \Sigma_{\beta,\gamma} a_{\alpha p,\beta} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\beta}_{\gamma q} \cdot \underset{\nu}{a}^{\eta,\gamma}$$

$$= \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha p}}{\partial u_q} + \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\gamma q} + \Sigma_{\beta\delta} a_{\alpha p,\delta} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\delta}_{\beta q} \cdot \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} ,$$

dove l'ultima Σ è ottenuta dalla corrispondente sostituendo gli indici di sommatoria β e γ rispettivamente con δ e β.

Se poi nell'ultima Σ sostituiamo il simbolo di Christoffel colla sua espressione e portiamo al 1^0 membro, abbiamo

$$\Sigma_\beta \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} \frac{\partial a_{\alpha p,\beta}}{\partial u_q} - \Sigma_{\beta\gamma\delta} \underset{\nu}{a}^{\eta,\beta} \cdot \underset{\nu}{a}^{\gamma,\delta} \cdot a_{\alpha p,\delta} \cdot a_{\beta q,\gamma} =$$

$$= \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha p}}{\partial u_q} + \Sigma_\gamma \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\gamma q}$$

e scambiando p con q e sostituendo in (6)

$$(7) \quad [\alpha, \eta; p, q]_\nu = \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha p}}{\partial u_q} - \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\alpha q}}{\partial u_p} + \Sigma_\gamma (\underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha p} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\gamma q} - \underset{\nu}{C}{}^{\gamma}_{\alpha q} \cdot \underset{\nu}{C}{}^{\eta}_{\gamma p}) .$$

8. – Dalle (3) e (5) si ricava che

$$R^{\eta}_{\alpha,p,q} = [\alpha, \eta; p, q]_\nu$$

è un sistema assoluto a tre indici α, p, q di cui il 1^0 α di classe ν e gli altri di classe 1, e ad un apice η di classe ν. Esso ha inoltre nulli tutti gli elementi per cui $\rho_\alpha < \nu$.

13.

Influenza dell' ordine delle derivazioni covarianti. Le identità di Bianchi per i simboli di Riemann.

1. – Sia H_α un sistema assoluto con un indice α di classe intera ν. Si ponga

$$D_q H_\alpha = H_{\alpha,p}$$

e

$$D_q H_{\alpha,p} = H_{\alpha,p,q} \, .$$

Si ha, per le variabili u,

$$(1) \qquad H_{\alpha,p} = \frac{\partial H_\alpha}{\partial u_p} - \sum_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} H_\gamma \, ,$$

da cui

$$(2) \qquad \frac{\partial H_\alpha}{\partial u_p} = H_{\alpha,p} + \sum_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} H_\gamma \, .$$

Inoltre

$$(3) \qquad H_{\alpha,p,q} = \frac{\partial H_{\alpha,p}}{\partial u_q} - \sum_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha q} H_{\gamma,p} - \sum_r^n {}_1 \underset{1}{C}{}^r_{pq} H_{\alpha,r} \, .$$

Ma dalla (1) si ha

$$\frac{\partial H_{\alpha,p}}{\partial u_q} = \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial u_p \partial u_q} - \sum_\gamma \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}}{\partial u_q} H_\gamma - \sum_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} \frac{\partial H_\gamma}{\partial u_q}$$

e, tenendo conto della (2),

$$\frac{\partial H_{\alpha,p}}{\partial u_q} = \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial u_p \partial u_q} - \sum_\gamma \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}}{\partial u_q} H_\gamma - \sum_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} H_{\gamma,q} - \sum_{\gamma\delta} \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} \underset{\nu}{C}{}^\delta_{\gamma q} H_\delta$$

e, sostituendo in (3), si ha

$$(4) \qquad H_{\alpha,p,q} = \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial u_p \, \partial u_q} - \sum\nolimits_\gamma \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}}{\partial u_q} H_\gamma - \sum\nolimits_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} H_{\gamma,q} -$$

$$- \sum\nolimits_{\gamma\delta} \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p} \cdot \underset{\nu}{C}{}^\delta_{\gamma q} \cdot H_\delta - \sum\nolimits_\gamma \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha q} \cdot H_{\gamma,p} - \sum_1^n{}_r \underset{1}{C}{}^r_{pq} \cdot H_{\alpha,r} \,.$$

In modo analogo si trova $H_{\alpha,q,p}$, ed osservando che $\underset{1}{C}{}^r_{pq} = \underset{1}{C}{}^r_{qp}$, e scambiando nella Σ doppia i due indici γ e δ di sommazione, si ha

$$(5) \qquad H_{\alpha,q,p} - H_{\alpha,p,q} =$$

$$= \sum\nolimits_\gamma H_\gamma \left[\frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha p}}{\partial u_q} - \frac{\partial \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\alpha q}}{\partial u_p} + \sum\nolimits_\delta \left(\underset{\nu}{C}{}^\delta_{\alpha p} \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\delta q} - \underset{\nu}{C}{}^\delta_{\alpha q} \underset{\nu}{C}{}^\gamma_{\delta p} \right) \right] =$$

$$= \sum\nolimits_\gamma H_\gamma \cdot [\alpha,\gamma;p,q]_\nu \qquad \text{(p. 205, form. (7))}.$$

2. – Tenendo presente la formula

$$(6) \qquad (\alpha,\beta;p,q)_\nu = \int_g \underset{\nu}{f}_{\alpha,p} \cdot \underset{\nu}{f}_{\beta,q} \, dt - \int_g \underset{\nu}{f}_{\alpha,q} \cdot \underset{\nu}{f}_{\beta,p} \, dt$$

potremo considerare il sistema

$$\underset{\nu}{R}_{\alpha,\beta,p,q} = (\alpha,\beta,p,q)_\nu$$

come un sistema covariante a 4 indici, i primi 2 di classe ν e gli ultimi 2 di classe 1.

In questo senso si ha il

Teor. – Vale la relazione

$$(7) \qquad D_r(\alpha,\beta;p,q)_\nu + D_p(\alpha,\beta;q,r)_\nu + D_q(\alpha,\beta;r,p)_\nu = 0$$

(identità di Bianchi).

Dim. – Infatti, per la (6), si ha, omettendo il ν sotto ogni f,

$$D_r\,(\alpha,\beta;p,q)_\nu =$$

$$\int\limits_g f_{\alpha,p,r} f_{\beta,q}\,dt + \int\limits_g f_{\alpha,p} f_{\beta,q,r}\,dt - \int\limits_g f_{\alpha,q,r} f_{\beta,p}\,dt - \int\limits_g f_{\alpha,q} f_{\beta,p,r}\,dt$$

e quindi il 1° membro della (7) diventa la somma di 6 termini del tipo

$$\int\limits_g (f_{\alpha,p,r} - f_{\alpha,r,p})\, f_{\beta,q}\,dt\ .$$

Ma dalla (5) e dal teor. a p. 201, § 4, si ha

$$\int\limits_g (f_{\alpha,p,r} - f_{\alpha,r,p})\, f_{\beta,q}\,dt = \Sigma_\gamma\,[\alpha,\gamma;r,p]_\nu \int\limits_g f_\gamma\, f_{\beta,q}\,dt = 0\ ;$$

e quindi vale la (7).

PARTE V.

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

1.

Gli spazi σ_ν di una varietà.

1. – 2. I σ_ν di una varietà. — 3. Significato della tangente ad una linea. — 4. Spazi principali. — 5. Loro determinazione a mezzo di ricciani.

1. – Sia V_n una varietà ad n dimensioni, sia f una sua determinante invariante, e sia ν un numero intero > 0.

Consideriamo un punto P di V_n ed in esso le f_α con α di classe ν.

Per il passaggio da uno ad un altro sistema di variabili ognuna di queste f_α si muta in una combinazione lineare delle medesime.

Ne viene che, interpretando per ogni particolare sistema di variabili le f_α come parametri di uno spazio euclideo passante per P e da essi individuato, questo spazio non varia variando il sistema delle variabili.

Def. – Noi indicheremo con σ_ν lo spazio sopra considerato.

Il σ_ν di una V_n in un suo punto ha evidentemente per numero di dimensioni la caratteristica della matrice quadrata che ha per elementi gli $a_{\alpha,\beta}$ con α e β varianti nella classe ν (p. 70, teor. 2).

Quindi il massimo numero di dimensioni che può avere un σ_ν sarà il numero $O_\nu = \binom{n+\nu}{n} - 1$ degli stati di un indice di classe ν.

2. – Il σ_1 è certamente ad n dimensioni (p. 83, teor.) e si chiama lo *spazio tangente* alla V_n.

Se $n=1$, lo spazio tangente si riduce ad una retta che si dice la *tangente* alla curva V_1.

Riferiamoci ad un particolare sistema di variabili $u_1, u_2, .., u_n$.

Consideriamo una di queste variabili, p. es. la u_i, ed assegniamo a tutte le altre dei valori fissi. Allora la determinante dipende da una sola variabile u_i, e quindi descrive una curva. Si ha così, per ogni sistema di valori delle

$$u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n,$$

una curva su V_n.

Tutte queste curve si chiameranno le *linee coordinate* u_i della V_n. Così, fissato un sistema di variabili, restano determinati n sistemi di linee coordinate della V_n corrispondenti alle n variabili. Si vede inoltre che per ogni punto di V_n passa una linea di ciascuno di questi n sistemi.

È evidente che le tangenti alle n linee coordinate $u_1, u_2, .., u_n$ hanno per parametri le

$$f_i[u] \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

3. Teor. – La tangente ad una curva in un suo punto P è la posizione limite di una corda PQ, che passa per P e per un altro punto Q della curva, col tender di Q a P.

Dim. – Infatti se $f(t;\, u_1)$ è una determinante di una curva C, se u_1^0 è un valore di u_1, e se si indica con P il punto $f(t;\, u_1^0)$ e con Q il punto $f(t;\, u_1^0+h)$, dove h è un qualunque incremento, la retta PQ ha il parametro

$$\frac{f(t;\, u_1^0+h) - f(t;\, u_1^0)}{h}$$

che col tendere di h allo *zero*, e quindi col tendere di Q a P tende ad f_1. Dunque la retta PQ, col tendere di Q a P, tende alla retta di parametro f_1, ossia alla tangente in P alla curva.

Oss. – Non è escluso che un medesimo punto P di una curva possa corrispondere a diversi valori del parametro. Fissato uno di questi valori, p. es. u_1^0, perchè il teorema sia vero bisogna far tender Q a P in modo che il valore corrispondente di u_1 tenda ad u_1^0.

4. – Se ν è un numero intero > 0 e se r_ν indica il numero delle dimensioni del σ_ν di una V_n, è, evidentemente, $r_{\nu+1} \geq r_\nu$ e, se $r_{\nu+1} > r_\nu$ esiste in $\sigma_{\nu+1}$ uno spazio euclideo ad $r_{\nu+1} - r_\nu$ dimensioni perpendicolare al σ_ν nel punto che si considera della V_n.

Indicheremo questo spazio con $\Pi_{\nu+1}$, mentre con Π_1 indicheremo il σ_1.

Def. - Gli spazi Π_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ si dicono gli *spazi principali* di V_n nel punto che si considera, e, più in particolare, lo spazio Π_i si dice l' *i.mo spazio principale.*

Come risulta dalle nostre considerazioni uno spazio principale di dato posto può mancare, ed allora diremo che esso è *nullo*. Si ha il

Teor. – Se è nullo lo spazio principale di un dato posto, sono nulli anche quelli di posto successivo.

Dim. – Supponiamo che per una varietà V_n, di cui $f(t\,; u)$ sia una determinante, sia nullo lo spazio principale $(\nu + 1)$.mo.

Ciò significa che ogni f_α con $\rho_\alpha = \nu + 1$ è uguale ad una combinazione lineare degli f_α, con α di classe ν. Ogni f_α con $\rho_\alpha = \nu + 2$ si ottiene derivando rispetto ad una delle variabili una f_α con $\rho_\alpha = \nu + 1$, ossia derivando rispetto una variabile una combinazione lineare delle f_α con α di classe ν. Consegue che una f_α con $\rho_\alpha = \nu + 2$ vale una combinazione lineare, di f_α con α di classe $\nu + 1$. Dunque il $\sigma_{\nu+2}$ coincide col $\sigma_{\nu+1}$, e quindi anche il $(\nu + 2)$.mo spazio principale è nullo. Visto in tal modo che quando uno spazio principale è nullo è nullo anche il successivo, si conclude che se uno spazio principale è nullo sono nulli anche tutti quelli che lo seguono, c. d. d.

5. – Gli elementi non nulli del $(\nu + 1)$.mo ricciano di f sono perpendicolari al σ_ν (p. 201, § 4, teor.), e quindi sono parametri di direzione del $(\nu + 1)$.mo spazio principale.

Viceversa, ogni parametro di $\Pi_{\nu+1}$ è una combinazione lineare degli elementi del $(\nu + 1)$.mo ricciano di f. Infatti un parametro X di $\Pi_{\nu+1}$ è una combinazione lineare degli f_α con α di classe $\nu + 1$. In questa combinazione gli f_α, con α di $\nu + 1$

cifre, che noi indicheremo con f_{α_1}, $f_{\alpha_2}, \ldots$, figureranno con certi coefficienti λ_1, $\lambda_2, \ldots$ Se ora indichiamo con F_{α_1} l'elemento del $(\nu+1)$.mo ricciano di f che ha per indici le $\nu+1$ cifre di α_1, ecc., e poniamo $Y = \lambda_1 F_{\alpha_1} + \lambda_2 F_{\alpha_2} + \ldots$, vediamo che $X - Y$ è una combinazione lineare delle sole f_α con α di classe ν, e che quindi è un parametro di σ_ν, ma, poichè X ed Y sono ortogonali a σ_ν, $X - Y$, non potendo essere ortogonale a σ_ν, sarà nullo. Dunque $X = Y$, ossia X è una combinazione lineare di elementi del $(\nu+1)$.mo ricciano di f. Si ha dunque il

Teor. – Gli elementi del $(\nu+1)$.mo ricciano di f individuano lo spazio principale $(\nu+1)$.mo.

2.

Curve.

1. Elemento di arco. — 2. Rette principali. Curvature. — 3. Altra espressione delle curvature. — 4-5. Formule di Frenet. — 6-7-8. Teoremi. — 9. Punti principali e centri di curvatura.

1. Def. – Se C è una curva, e se $f(t; u_1)$ è una sua determinante, l'espressione

$$\sqrt{\int_g f_1^2\, dt \cdot du_1}$$

si chiama *elemento lineare della curva* C, e si indica con ds.

Evidentemente si ha

$$(1) \qquad ds^2 = \left[\int_g f_1^2 dt\right] du_1^2 = \int_g (df)^2\, dt\,,$$

dove df indica il differenziale della f considerata come funzione di u_1.

La prec. definizione è giustificata dal fatto che, se C appartiene ad uno spazio euclideo ad n dimensioni, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono n parametri normali e a due a due ortogonali di questo spazio, se $x_1, x_2, \dots, x_n$, sono le n coordinate di un punto di tale spazio rispetto a detti parametri, se inoltre

$$x_i = x_i(u_1) \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

sono le equazioni parametriche di C, si ha

$$f(t; u_1) = \sum_1^n {}_i x_i(u_1) \cdot X_i$$

e quindi

$$ds^2 = \int_g (\sum_1^n {}_i dx_i \cdot X_i)^2 dt = \sum_1^n {}_i (dx_i)^2 ,$$

che è la nota formula che dà il quadrato dell'elemento lineare di una curva in uno spazio euclideo.

Del resto la formula (1) si potrebbe ottenere partendo da una definizione di lunghezza di arco analoga alle consuete.

2. - Per una curva, uno spazio principale che non sia nullo si riduce ad una retta, che si dirà *retta principale* o *normale principale* (*i.esima*, se essa è lo spazio principale *i.esimo*).

Supposto che la *i-esima* retta principale non sia nulla, indichiamo per brevità con $f_{;i}$ il ricciano *i-esimo* di f, e poniamo $k_i = \sqrt{\int_g (f_{;i})^2 dt}$, il segno di radice indicando radice aritmetica.

Evidentemente $X_i = \dfrac{f_{;i}}{k_i}$ è un parametro normale della retta principale *i-esima.*

Se i è pari, X_i è un invariante, ed infatti per il passaggio dalla variabile u_1 alla variabile v_1, tanto $f_{;i}$ quanto k_i vengono moltiplicati per $\left(\dfrac{du_1}{dv_1}\right)^i$.

Invece per i dispari il parametro X_i resta invariato per le sostituzioni per cui $\dfrac{du_1}{dv_1} > 0$, ma per le altre sostituzioni cambia di segno.

Immaginiamo di aver fissato una origine degli archi ed il loro verso positivo, ed indichiamo allora con s la lunghezza d'arco. La

$$C_i = \int_g \frac{dX_i[s]}{ds} X_{i+1}[s] dt \tag{2}$$

non cambia se si cambia il verso positivo degli archi, perchè un tale cambiamento fa moltiplicare ciascuno dei due fattori sotto il segno di integrale per $(-1)^{i+1}$.

Def. – La funzione C_i si chiama la *i-esima curvatura* della curva.

Si ha facilmente

$$\frac{dX_i[s]}{ds} = \frac{d\,\dfrac{f_{;i}[s]}{k_i[s]}}{ds} = \frac{1}{k_i[s]} \cdot \frac{df_{;i}[s]}{ds} + f_{;i}[s]\,\frac{d\,\dfrac{1}{k_i[s]}}{ds}$$

$$= \frac{1}{k_i[s]} f_{;i+1}[s] + R_i = \frac{k_{i+1}[s]}{k_i[s]} X_{i+1}[s] + R_i\,,$$

dove con R_i indico un parametro del σ_i, e quindi ortogonale ad X_{i+1}.

Si deduce, per la (2), che

$$C_i = \frac{k_{i+1}[s]}{k_i[s]}\,.$$

Dalla (1), essendo $f_{;1} = f_1$, si ha poi

$$ds^2 = k_1[u_1]^2 \cdot du_1^2$$

e, prendendo in luogo di u_1 la variabile s,

$$ds^2 = k_1[s]^2 \cdot ds^2\,,$$

da cui

$$k_1[s]^2 = 1$$

ed infine

$$k_1[s] = 1\,. \tag{3}$$

Allora si può scrivere

$$C_i = \frac{k_{i+1}[s]}{k_i[s] \cdot k_1[s]}$$

ed infine

(4) $$C_i = \frac{k_{i+1}}{k_i \cdot k_1}$$

qualunque sia la variabile u_1, e ciò in conseguenza del noto carattere assoluto delle k_i.

3. – Dalla relazione

$$\int_g X_i[s] \cdot X_{i+1}[s] dt \quad = 0 \ ,$$

derivando rispetto all' arco si ricava

$$\int_g \frac{dX_i[s]}{ds} \cdot X_{i+1}[s] dt + \int_g X_i[s] \cdot \frac{dX_{i+1}[s]}{ds} dt \quad = 0$$

e quindi che

$$C_i = -\int_g X_i[s] \cdot \frac{dX_{i+1}[s]}{ds} dt \ .$$

4. Teor. - Se X_i' indica la derivata di X_i rispetto alla variabile u_1 prescelta, o X_i' è nullo, o è ortogonale ai parametri

$$X_1, X_2, \dots, X_{i-2}, X_i \ .$$

Dim. - Infatti se $\rho_\alpha < i - 1$, è

$$\int_g X_i f_\alpha \cdot dt = 0,$$

e derivando

$$\int_g X_i' f_\alpha \cdot dt + \int_g X_i f_{\alpha 1} \cdot dt = 0$$

Ma

$$\int_g X_i f_{\alpha 1} \cdot dt = 0 \ ,$$

perchè il numero delle cifre di α_1 è $< i$, dunque

$$\int_g X'_i f_\alpha \, dt = 0 \,,$$

e perciò X'_i, se non è nullo, è ortogonale ai parametri

$$X_1, X_2, \ldots, X_{i-2} \,.$$

Inoltre, essendo

$$\int_g X_i^2 \, dt = 1 \,,$$

si ha derivando

$$\int_g X_i X'_i \, dt = 0 \,,$$

e quindi X'_i, se non è nullo, è ortogonale ad X_i, e così è dimostrato il teorema.

5. – Fissiamo al solito l'origine ed il verso degli archi, ed indichiamo con s la relativa lunghezza di arco, e supponiamo che s sia assunto come variabile di riferimento.

Poichè la X_i è una combinazione lineare delle f_α con α di classe i, si vede che la $X'_i = \dfrac{dX_i[s]}{ds}$ risulta una combinazione lineare delle f_α con α di classe $i+1$, e quindi appartiene al σ_{i+1}.

Inoltre è ortogonale allo spazio euclideo individuato da

$$X_1, X_2, \ldots, X_{i-2}, X_i \,,$$

quindi essa apparterrà allo spazio euclideo individuato dalle X_{i-1} e X_{i+1}, ossia sarà

$$X'_i = \lambda X_{i+1} + \mu X_{i-1} \,,$$

dove λ e μ sono due coefficienti che dipenderanno dall'indice i.

Per calcolarli si moltiplichi una volta per X_{i+1} ed un'altra volta per X_{i-1} e si integri rispetto a t.

Si ottiene

$$\int_g X_i' X_{i+1} dt = \lambda \,, \quad \int_g X_i' X_{i-1} dt = \mu$$

e quindi

$$\lambda = C_i \,, \quad \mu = -C_{i-1} \,,$$

e si ha

(5)
$$X_i' = C_i X_{i+1} - C_{i-1} X_{i-1} \,.$$

Le formule [3] sono note sotto il nome di *formule di* Frenet.

6. Teor. 1. — Se s indica la lunghezza di arco, si ha

(6)
$$X_1 = \frac{df}{ds} \,,$$

od, in altri termini,

$$X_1 = f_1[s] \,.$$

Dim. - Infatti, se si assume come variabile di riferimento la s, si ha $k_1 = 1$ ed, osservando che

$$f_{;1}[s] = f_1[s] \,,$$

si ottiene

$$X_1 = f_1[s] : k_1 = f_1[s] \,.$$

Teor. 2. — Se s indica la lunghezza di arco si ha

$$f_{;2}[s] = \frac{d^2 f}{ds^2} \,.$$

Dim. - Infatti da $k_1[s] = 1$ si ha

$$\int_g \left(\frac{df}{ds}\right)^2 dt = 1$$

e, derivando,

$$\int_g \frac{df}{ds} \cdot \frac{d^2 f}{ds^2} \cdot dt = 0 \,,$$

da cui si ricava che $\frac{d^2 f}{ds^2}$, evidentemente parametro del σ_2 della curva, è ortogonale al parametro $\frac{df}{ds}$. Inoltre, per definizione di ricciano, è

$$f_{;2}[s] = \frac{d^2f}{ds^2} + \lambda \frac{df}{ds},$$

dove λ è un conveniente coefficiente, e moltiplicando per $\frac{df}{ds}$ ed integrando lungo g, risulta $\lambda = 0$, poichè $f_{;2}[s]$ e $\frac{d^2f}{ds^2}$ sono entrambe ortogonali a $\frac{df}{ds}$.

Teor. 3. – Per ogni curva è

$$C_1^2 = \int_g \left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)^2 dt.$$

Dim. – Infatti è

$$k_2[s]^2 = \int_g f_{;2}[s]^2 dt = \int_g \left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)^2 dt$$

e, per le (4) e (3)

$$C_1 = \frac{k_2[s]}{k_1[s]^2} = k_2[s].$$

7. – Siccome, per la definizione della X_2, è

$$f_{;2}[s] = k_2[s] \cdot X_2,$$

e

$$f_{;2}[s] = \frac{d^2f}{ds^2}, \quad k_2[s] = C_1,$$

si ha

$$\frac{d^2f}{ds^2} = C_1 X_2$$

ossia, per la (6)

(5′) $$\frac{dX_1}{ds} = C_1 X_2.$$

Questa formula può rientrare nel tipo delle (5) quando si ponga $C_0 = 0$.

8. Teor. – Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva C giaccia in uno spazio euclideo ad i dimensioni, e non in uno con minor numero di dimensioni, è che nei suoi punti (generici) la $(i+1)$-*esima* retta principale di C sia nulla, e non sia nulla la i-*esima*.

Dim. - Infatti, se la $(i+1)$-*esima* retta principale è nulla, esiste una relazione lineare fra gli elementi del sistema f_α con α di classe $i+1$, e quindi la f, considerata come funzione di u_1, è soluzione di una equazione differenziale lineare omogenea di ordine $i+1$ a coefficienti funzioni della sola u_1 del tipo

$$\sum_1^i {}_r b_r(u_1) \frac{d^{r+1} f}{du_1^{r+1}} = 0 .$$

Sia $a_0 = 1, a_1(u_1), a_2(u_1), \ldots, a_i(u_1)$, un sistema fondamentale di integrali di tale equazione

Sarà

$$f = \varphi_0 + \sum_1^i {}_r \, \varphi_r a_r(u_1) , \tag{6}$$

dove le $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i$ sono delle costanti rispetto ad u_1, ma che in generale saranno funzioni di t.

Derivando la (6) rispetto ad u_1 una volta, due volte, ..., i volte, si ottengono insieme colla (6) $i+1$ equazioni lineari nelle $i+1$ funzioni φ, col determinante dei coefficienti diverso da zero [1]. Risolvendo colla regola di Cramer si ottiene che ogni φ è una combinazione lineare di f e degli f_α con α di classe $i+1$, e si conclude che le φ sono funzioni (di t) a quadrato sommabile.

Allora dalla (6) risulta che f è un punto dello spazio euclideo che passa per φ_0 e che è individuato dai parametri $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i$.

Quindi la curva C appartiene ad uno spazio euclideo con numero di dimensioni $\leq i$.

Viceversa, se la C giace in uno spazio euclideo ad i dimensioni, cadono in esso tutte le f_α con α di classe $i+1$, e quindi

[1] Il Wronskiano delle $i+1$ funzioni $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i$.

queste f_α sono linearmente dipendenti ed allora esiste un minimo numero $j \leq i+1$ per cui è nulla la j–*esima* retta principale. Consegue che è nulla anche la $i+1$ retta principale.

Combinando i risultati ottenuti si ha il teorema enunciato, perchè, se lo spazio euclideo in cui giace C ha un numero di dimensioni $< i$, la prima retta principale nulla è di ordine $< i+1$, e, viceversa, se si annulla una retta principale di ordine $< i+1$, la C è in uno spazio euclideo con numero di dimensioni $< i$.

Cor. – Quando nessuna retta principale di una curva C è nulla, la C non può essere contenuta in uno spazio euclideo.

9. – Conservando tutte le notazioni precedenti noi daremo le definizioni che seguono:

Def. 1. – Si chiama *i-esimo punto principale* di una curva C ogni punto dato da $f + C_i X_{i+1}$, qualunque sia la variabile u_1 di riferimento.

Ricordando quanto si è detto precedentemente sulla natura delle X_i e delle C_i si può concludere che se i è dispari si ha un solo punto *i-esimo* principale, e che se i è pari si hanno due punti *i–esimi*. Essi sono sulla retta $(i+1)$-*esima* principale situati da banda opposta rispetto al punto della curva e ad uguale distanza da esso (alla distanza C_i).

Def. 2. – Se P è un punto di una curva e se Q è un suo punto principale *i-esimo*, il punto Q' che si trova sul raggio uscente da P e passante per Q, tale che $PQ \cdot PQ' = 1$, si dirà un *i-esimo centro di curvatura* della curva.

Sarà bene osservare che, tenendo conto delle (4), un punto *i-esimo* principale della curva è dato da

$$f + \frac{f_{,i+1}}{k_i \cdot k_1}\,.$$

3.

Curve di una varietà.

1. Elemento lineare di una varietà. — 2. Sistemi assoluti lungo una curva di una varietà. — 3. Derivazione assoluta lungo una curva. — 4-5. Proprietà ed applicazioni. — 6-7. Geodetiche. Loro determinazione. — 8-9. Cono geodetico corrispondente ad un punto di V_n. — 10. I[a] varietà principale e varietà dei centri di I[a] curvatura.

1. – Sia V_n una varietà ad n dimensioni, ed

$$f(t\,;\,u)$$

una sua determinante.

Se si pongono tutte le u funzioni di un medesimo parametro τ, si vede che la f risulta una punto-funzione di τ, e quindi descrive una curva. Questa curva giace sulla V_n.

L'elemento lineare di questa curva è dato da

$$ds^2 = \int_g (df)^2\,dt$$

$$= \int (\Sigma_i^n{}_1 f_i\,du_i)^2\,dt = \Sigma_{ij}{}_1^n\, a_{i,j}\,du_i\,du_j\,.$$

Si suol dire perciò che la forma

$$\Sigma_{ij}{}_1^n\, a_{i,j}\,du_i\,du_j$$

dà il *quadrato dell'elemento lineare della* V_n.

2. – Consideriamo un curva C di V_n, fissiamo per essa l'origine degli archi ed il verso positivo, e con tal scelta indichiamo con σ la lunghezza di arco su C.

Def. – Noi diremo *sistema assoluto lungo la curva* C un sistema assoluto definito nei punti di C.

Teor. - Se lungo C si ha

$$u_i = u_i(\sigma)\,,$$

il sistema

$$A^i[u] = \frac{du_i}{d\sigma} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

è assoluto.

Dim. – Infatti

$$A^i[v] = \frac{dv_i}{d\sigma} = \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \cdot \frac{du_j}{d\sigma} = \sum_j A^j[u] \cdot \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \qquad \text{c. d. d.}$$

3. – Sia

$$H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} \tag{1}$$

un sistema assoluto lungo C, con apici ed indici di classe intera. Supponiamo di poterlo estendere in V_n in modo che acquisti la proprietà di essere derivabile in là quanto occore rispetto alle variabili su V_n, e supponiamo che ciò sia possibile anche per il sistema predetto A^i.

E continuiamo ad indicare allo stesso modo i sistemi così ampliati.

Allora noi potremo ad essi applicare un noto teorema di calcolo assoluto (p. 175, § 4), e potremo affermare che il sistema

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = \sum_1^n{}_p A^p \cdot D_p H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}$$

è un sistema assoluto.

Limitando le considerazioni lungo C, possiamo concludere col

Teor. – Se (1) è un sistema assoluto lungo C, è anche tale il sistema che, per qualunque sistema di variabili u, è dato da

$$K^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u] = \frac{dH^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}[u]}{d\sigma} - \tag{2}$$

$$- \sum_1^n{}_p \sum_1^r{}_h \sum_\gamma C^\gamma_{\alpha_h p} \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}[u] \cdot \frac{du_p}{d\sigma} +$$

$$+ \sum_1^n{}_p \sum_1^r{}_h \sum_\gamma C^{\beta_h}_{\gamma p} \cdot H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{h-1}, \gamma, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_r}[u] \cdot \frac{du_p}{d\sigma}.$$

La dimostrazione di questo teorema lascia qualche dubbio quando non apparisce manifesta la possibilità dei prolungamenti richiesti per i sistemi, ma essa può essere sostituita con una dimostrazione diretta condotta coi criteri adoperati a pp. 186-190, quando si ammetta che gli elementi del sistema (1) siano derivabili rispetto a σ.

Def. – Il sistema (2) ottenuto dal sistema (1) colla regola predetta si chiamerà *il derivato assoluto di* (1) *lungo* C, e lo si indicherà con DH.

Ha particolare importanza il derivato assoluto del sistema controvariante A^i già considerato.

Evidentemente, se si pone

$$B^i = DA^i,$$

si ha

$$B^i[u] = u_i'' + \Sigma_{rs} C^i_{rs} u_r' u_s' ,$$

dove gli accenti indicano derivate rispetto a σ ed i simboli di Christoffel sono di classe 1.

4. – Per la derivazione assoluta lungo un curva C valgono regole analoghe a quelle che si hanno per la derivazione covariante dei sistemi somma, differenza, prodotto e dei sistemi composti (p. 191-193).

Inoltre si verifica facilmente che i sistemi $a_{\alpha,\beta}$ ed $\underset{\nu}{a^{\alpha,\beta}}$ altrove considerati, hanno derivata assoluta nulla lungo C.

5. – Dalla espressione dell' elemento lineare si ottiene facilmente, sempre indicando con accenti le derivate rispetto all' arco, che

$$\sum_1^n{}_{hk} a_{h,k} u_h' u_k' = 1 ;$$

e, derivando i due membri colla regola di derivazione dei sistemi composti, e tenendo conto del fatto che $Da_{h,k} = 0$, si ha

$$2 \sum_1^n{}_{hk} a_{h,k} u_k' \cdot Du_h' = 0 .$$

o meglio

$$\sum_1^n {}_{hk} a_{h,k} u'_h Du'_k = 0 .$$

Questa relazione si può scrivere sotto la forma

$$\int_g (\sum_1^n {}_h f_h u'_h)(\sum_1^n {}_k f_k \cdot Du'_k) dt = 0 ,$$

il che esprime che « il parametro

$$\sum_1^n {}_k f_k \cdot Du'_k ,$$

il quale, quando non svanisce, appartiene certamente al σ_1 di V_n, è ortogonale alla curva C ».

6. Def. – Una curva di una varietà V_n si dice *geodetica* se in ogni suo punto la sua 2ª retta principale è perpendicolare al σ_1 di V_n.

Per cercare le geodetiche di V_n si consideri una sua curva C, e si indichi con σ la lunghezza d'arco di C.

Si ha allora lungo C

$$f' = \sum_1^n {}_h f_h u'_h$$

e

$$f'' = \sum_1^n {}_{hk} f_{hk} u'_h u'_k + \sum_1^n {}_h f_h u''_h , \tag{3}$$

dove gli accenti indicano derivate rispetto a σ. Ricordando che

$$f_{h,k} = f_{hk} - \Sigma_i C^i_{hk} f_i ,$$

da cui

$$f_{hk} = f_{h,k} + \Sigma_i C^i_{hk} f_i , \tag{4}$$

mutando nell'ultima Σ di (3) l'indice h in i ed infine sostituendo in (3) alle f_{hk} le espressioni date dalle (4), si ha

$$f'' = \Sigma_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k + \Sigma_i (u''_i + \Sigma_{hk} C^i_{hk} u'_h u'_k) f_i . \tag{5}$$

Ora f'' è un parametro della 2ª retta principale della curva (p. 219, teor. 2), ed esso sarà normale al σ_1 della V_n, se e solo se sono nulli i coefficienti delle f_i, ossia se saranno soddisfatte le equazioni

(6) $$u_i'' + \Sigma_{hk} C_{hk}^i u_h' u_k' = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Queste sono n equazioni del 2° ordine in n funzioni incognite della variabile σ, e quindi esiste una soluzione costituita da n funzioni

(7) $$u_i(\sigma) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che per $\sigma = 0$ acquistano, esse e le loro derivate prime, valori arbitrariamente assegnati.

Se (7) è una soluzione del sistema (6), noi non potremo affermare che la variabile σ ha per la curva ottenuta il significato di lunghezza d'arco.

Perciò indichiamo con s la lunghezza di arco della curva ottenuta, e deriviamo assolutamente il sistema controvariante

$$H^i = \frac{du_i}{d\sigma} = A^i \frac{ds}{d\sigma},$$

dove

$$A^i = \frac{du_i}{ds}.$$

Otteniamo subito

$$DH^i = \frac{dH^i}{ds} + \Sigma_{hk} C_{hk}^i H^h \frac{du_k}{ds} =$$

$$= \left(\frac{dH^i}{d\sigma} + \Sigma_{hk} C_{hk}^i H^h H^k \right) \frac{d\sigma}{ds} =$$

$$= (u_i'' + \Sigma_{hk} C_{hk}^i u_h' u_k') \frac{d\sigma}{ds},$$

dove gli accenti indicano ancora derivate rispetto a σ.

Ma le nostre (7) soddisfano le (6), e quindi le

$$DH^i = 0.$$

Ora si ha

$$\Sigma_{hk} a_{h,k} u_h' u_k' = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2.$$

Derivando i due membri rispetto ad s, applicando la regola di derivazione assoluta dei sistemi composti e ricordando che $Da_{h,k} = 0$, si ha

$$\Sigma_{hk}\, a_{h,k}\, u'_h DH^k = \frac{ds}{d\sigma} \cdot \frac{d\frac{ds}{d\sigma}}{ds}\,; \tag{8}$$

ma, per le $DH^k = 0$, il 1° membro di (8) è nullo, e quindi è nullo anche il 2° membro di (8), ossia è nulla la derivata rispetto ad s di $\frac{ds}{d\sigma}$, e quindi la $\frac{ds}{d\sigma}$ deve essere costante.

Indicando questa costante con c, abbiamo

$$u''_i + \Sigma_{hk}\, C^i_{hk}\, u'_h u'_k = c^2 \left(\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \Sigma_{hk}\, C^i_{hk} \frac{du_h}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} \right)$$

e quindi la curva definita dalle (7) soddisfa alle equazioni

$$\frac{d^2 u_i}{ds^2} + \Sigma_{hk}\, C^i_{hk} \frac{du_h}{ds} \cdot \frac{du_k}{ds} = 0\,,$$

dove s è la lunghezza di arco. Ed è questa la condizione che si richiede perchè la curva sia una geodetica.

La possibilità di assegnare arbitrariamente i valori iniziali delle funzioni (7) significa che per ogni punto di V_n passano geodetiche, e la possibilità di assegnare inoltre arbitrariamente i valori iniziali delle derivate prime delle (7) ci dice che per ogni punto di V_n passano infinite geodetiche. Ciascuna di queste è individuata, oltre che dal punto per cui deve passare, dal sistema dei valori assegnati in quel punto alle derivate prime delle (7), ossia dal parametro

$$\frac{df}{d\sigma} = \Sigma_i f_i \frac{du_i}{d\sigma}\,,$$

e quindi si ha il

Teor. – Da un punto di una varietà V_n ad n dimensioni escono infinite geodetiche della varietà. Se si fissa una direzione del σ_1 in quel punto, esiste fra queste una ed una sola geodetica che in quel punto è tangente alla data direzione.

7. – Dalle considerazioni svolte risulta che ogni soluzione del sistema (6) individua una geodetica, e che, se s è l'arco di questa geodetica, si ha lungo essa

$$\frac{ds}{d\sigma} = \text{costante},$$

e quindi

$$s = c\sigma + b$$

dove c e b sono delle costanti.

8. – Dalle (5) e (6) risulta che per ogni geodetica, se σ è la sua lunghezza d'arco, si ha

(9) $$f'' = \Sigma_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k ,$$

dove gli accenti indicano derivazione rispetto a σ.

Se si pone

(10) $$A_{h,k;p,q} = \int_g f_{h,k} f_{p,q} dt ,$$

si ha (p. 220, teor. 3)

(11) $$C_1^2 = \int_g f''^2 dt = \Sigma_{hkpq} A_{h,k;p,q} u'_h u'_k u'_p u'_q .$$

9. – Sia P un punto della V_n, la

(12) $$f + \Sigma_{hk} f_{h,k} \lambda_h \lambda_k ,$$

in cui la f e le $f_{h,k}$ sono calcolate nel punto P e le λ sono considerate come variabili, è una punto-funzione, e quindi descrive una varietà W, che evidentemente è contenuta in Π_2.

Si vede facilmente che, se P' è un punto di questa varietà, tutta la semiretta che esce da P e passa per P' appartiene alla varietà W.

Infatti, fissati i valori delle λ che corrispondono a P', appartengono a W tutti i punti che si ottengono moltiplicando tutte le λ per un medesimo numero reale p, ossia i punti

$$f + p^2 \Sigma_{hk} f_{h,k} \lambda_h \lambda_k ,$$

che col variare del numero positivo p^2 descrivono il raggio uscente da P e passante per P'.

Def. - La varietà descritta dalla punto-funzione (12) si dirà il *cono geodetico* di V_n corrispondente al punto P.

10. - La punto-funzione

$$f + \{ (\Sigma_{hk} f_{h,k} du_h du_k) : (\Sigma_{hk} a_{h,k} du_h du_k) \} . \tag{13}$$

nella quale f, le $f_{h,k}$ e le $a_{h,k}$ sono calcolate in un medesimo punto P di V_n, e nella quale si considerano come variabili le du_h, o meglio i rapporti di $n-1$ di questi differenziali al rimanente, è una varietà che giace sul cono geodetico.

I punti di questa varietà hanno dal punto P una distanza uguale alla curvatura in quel punto della geodetica corrispondente, il che risulta dalla formula (11). Questa varietà inoltre è il luogo dei primi punti principali delle geodetiche per P.

Def. - Diremo che questa varietà è la 1ª *varietà principale* della V_n in P.

Ha pure importanza la considerazione della *varietà dei centri di 1ª curvatura delle geodetiche di V_n* passanti per P. Anche questa varietà giace evidentemente sul cono geodetico corrispondente a P.

4.

Studi sul 2° spazio principale di una varietà.

1. Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà sia uno spazio lineare. — 2-3. Sistema di parametri normali ed ortogonali in Π_2. — 4-5. Casi particolari nei quali i centri di 1ª curvatura delle geodetiche giacciono sopra una ipersfera di Π_2. — 6. Il parametro invariante J per le varietà col Π_2 ad $\binom{n+1}{2}$ dimensioni.

1. - Consideriamo una varietà V_n ad n dimensioni, ed indichiamo con ν il numero delle dimensioni del suo 2° spazio principale Π_2.

Manifestamente sarà $\nu \leq \binom{n+1}{2}$ (numero delle combinazioni con ripetizioni di n elementi a 2 a 2).

Teor. – Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà V_n ad n dimensioni abbia nullo in ogni punto il 2° spazio principale è che V_n sia uno spazio lineare.

Dim. – La condizione è sufficiente, perchè, se V_n è uno spazio lineare e se

$$(1) \qquad \psi + u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \ldots + u_n\varphi_n$$

è una sua determinante lineare, tutte le derivate seconde di (1) sono nulle e quindi il σ_2 coincide col σ_1, ossia Π_2 è nullo.

Viceversa, se Π_2 è nullo e se $f(u)$ è una determinante di V_n, devono essere nulle tutte le $f_{r,s}$ $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$, ossia devono essere soddisfatte tutte le equazioni

$$f_{rs} - \Sigma_i C^i_{rs} f_i = 0 .$$

Indichiamo con

$$b_j(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

le coordinate di $f(u)$ rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale

$$X_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) .$$

Ognuna delle funzioni $b_j(u)$ soddisferà alle equazioni

$$\frac{\partial^2 b_j}{\partial u_r \partial u_s} - \Sigma_i C^i_{rs} \frac{\partial b_j}{\partial u_i} = 0 .$$

Questo prova che la matrice delle derivate prime e seconde di $n+1$ delle b_j deve avere caratteristica $\leq n$.

Esistono n delle b_j che hanno un determinante funzionale diverso da zero, perchè altrimenti la V_n avrebbe un numero di dimensioni $< n$. Supponiamo che tali siano le

$$b_1, b_2, \ldots, b_n .$$

Allora, considerata una b_j diversa dalle prime n, la matrice delle derivate prime e seconde delle $n+1$ funzioni

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, b_j$$

ha caratteristica uguale ad n.

Quindi il sistema delle equazioni nelle λ

$$(2) \qquad \sum_1^n {}_i \lambda_i \frac{\partial b_i}{\partial u_h} + \lambda_j \frac{\partial b_j}{\partial u_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_i \lambda_i \frac{\partial^2 b_i}{\partial u_h \partial u_k} + \lambda_j \frac{\partial^2 b_j}{\partial u_h \partial u_k} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ha soluzione non nulla, e tutte le sue soluzioni non nulle sono fra loro proporzionali.

Consideriamo una soluzione. Derivando una volta le equazioni (2) e tenendo conto delle (3), si vede che le equazioni del gruppo (2) sono soddisfatte anche dalle derivate prime delle λ rispetto ad una medesima variabile u, qualunque essa sia.

Ma anche la caratteristica della matrice dei coefficienti delle equazioni (2) è n; quindi le λ devono essere proporzionali alle loro derivate prime rispetto ad una medesima u, qualunque essa sia. Dunque le λ devono essere proporzionali a delle costanti; inoltre deve essere $\lambda_j \neq 0$, perchè il determinante funzionale delle

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

è $\neq 0$. Dunque esiste per ogni $j > n$ un sistema di costanti

$$\mu_{j,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

per cui

$$\frac{\partial b_j}{\partial u_h} = \Sigma_i \mu_{j,i} \cdot \frac{\partial b_i}{\partial u_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Integrando si avrà

$$b_j = \Sigma_i \mu_{j,i} b_i + c_j,$$

dove c_j sono costanti.

Assumiamo le

$$(4) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_n$$

come nuove variabili. Esisterà un sistema di valori delle (4) tale che, in esso ed in un suo piccolo intorno, converga la serie

$$\sum_{n+1}^{\infty} {}_j \left[\sum_1^n {}_i \mu_{j,i} b_i + c_j\right]^2 .$$

Se colle (4) indichiamo il sistema di valori che consideriamo, la serie precedente converge, e converge se al posto di b_1 si pone $b_1 + \delta$, dove δ indica un incremento sufficientemente piccolo. Converge quindi la serie differenza di queste due serie, ossia la serie

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_j 2\delta[\sum_1^n{}_i \mu_{j,i} b_i + c_j]\mu_{j,1} + \delta^2 \sum_{n+1}^{\infty}{}_j \mu_{j,1}^2 .$$

Dividendo per δ e poi facendo variare δ, si conclude che converge la serie

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_i \mu_{j,1}^2 .$$

In modo analogo si dimostra che convergono tutte le serie

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_j \mu_{j,i}^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

e poi facilmente si dimostra che converge la serie

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_j c_j^2 .$$

Consegue che le serie

$$X_i + \sum_{n+1}^{\infty}{}_j \mu_{j,i} X_j$$

convergono in media verso delle funzioni φ_i, che la serie

$$\Sigma_j c_j X_j$$

converge in media verso una funzione ψ, e che infine

$$\psi + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_n\varphi_n$$

è una determinante di V_n, e che quindi V_n è uno spazio euclideo ad n dimensioni.

2. - Se in un punto P lo spazio principale Π_2 ha ν dimensioni, noi possiamo trovare in Π_2 un sistema di ν parametri normali e a due a due ortogonali $\underset{i}{X}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Poniamo

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g \underset{i}{X} \cdot f_{r,s} dt .$$

Non può esistere un sistema di $\underset{i}{\lambda}$ non tutte nulle per cui sia

$$(5) \qquad \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{r,s} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

o, in altri termini, che i sistemi assoluti $\underset{i}{x}_{r,s}$ sono *linearmente indipendenti.*

Infatti, nell' ipotesi che esista un sistema di $\underset{i}{\lambda}$ non tutte nulle, per cui siano verificate le (5), posto

$$Y = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{X} ,$$

si ha

$$\int_g Y \cdot f_{r,s} dt = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \int_g \underset{i}{X} \cdot f_{r,s} dt = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{r,s} = 0$$

e quindi Y, che è un parametro di Π_2, è ortogonale a tutti i parametri di Π_2; perciò Y è nullo, ossia

$$\Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{X}$$

è generalmente nulla, ed i parametri $\underset{i}{X}$ devono essere linearmente dipendenti, il che non può accadere.

3. – Evidentemente si avrà

$$f_{r,s} = \Sigma_i \underset{i}{\mu}_{r,s} \cdot \underset{i}{X} ,$$

poichè $f_{r,s}$ è un parametro di Π_2; ed allora, moltiplicando per $\underset{j}{X}$, integrando e ricordando che

$$\int_g \underset{j}{X} \cdot \underset{i}{X} dt = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i , \end{cases}$$

si ha

$$\int_g \underset{j}{X} \cdot f_{r,s} dt = \underset{j}{\mu}_{r,s} ,$$

ossia

$$\underset{j}{\mu}_{r,s} = \underset{j}{x}_{r,s} ,$$

ed infine

$$f_{r,s} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \underset{i}{x}_{r,s} \cdot \underset{i}{X} . \tag{6}$$

4. – Ha importanza il caso in cui sono linearmente dipendenti i $\nu+1$ sistemi assoluti

$$a_{r,s} \quad \text{e} \quad \underset{i}{x}_{r,s} \qquad (i=1,2,\ldots,\nu).$$

In questo caso, se

$$a_{r,s} = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{r,s} ,$$

il parametro

$$Y = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{X}$$

è tale che

$$\int_g Y \cdot f_{r,s} dt = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \int_g \underset{i}{X} \cdot f_{r,s} dt = \Sigma_i \underset{i}{\lambda} \cdot \underset{i}{x}_{r,s} = a_{r,s} .$$

Esiste allora un parametro Y di II_2 per il quale si ha

$$a_{r,s} = \int_g Y \cdot f_{r,s} dt .$$

Poniamo $k = 1 : \sqrt{\int_g Y^2 dt}$. Allora $Y' = kY$ è un parametro normale, e si ha

$$\int_g Y' f_{r,s} dt = k \cdot a_{r,s} .$$

Ma siccome il sistema delle $\underset{i}{X}$ si può scegliere in modo che tra i suoi parametri vi sia tale parametro Y', possiamo sempre supporre che $\underset{\nu}{X}$ sia tale parametro Y', ossia che $\underset{\nu}{x}_{r,s} = k \cdot a_{r,s}$.

Consideriamo ora la 1ª varietà principale corrispondente al punto P. Essa è, come sappiamo, descritta dalla punto-funzione

$$f+\frac{\Sigma_{rs} f_{r,s}\,du_r\,du_s}{\Sigma_{rs} a_{r,s}\,du_r\,du_s},$$

o, tenendo conto della (6), dalla punto-funzione

$$f+\Sigma_i \underset{i}{x}\cdot \underset{i}{X},$$

dove

$$\underset{i}{x}=\frac{\Sigma_{rs} \underset{i}{x}_{r,s}\,du_r\,du_s}{\Sigma_{rs} a_{r,s}\,du_r\,du_s}.$$

Ma, poichè $\underset{\nu}{x}_{r,s}=k\cdot a_{r,s}$, è $\underset{\nu}{x}=k$, ossia la 1ª varietà principale corrispondente al punto P giace nello spazio lineare a $\nu-1$ dimensioni di equazione $\underset{\nu}{x}=k$.

I centri di 1ª curvatura delle geodetiche uscenti da P si trovano allora sulla ipersfera di Π_2 che passa per P e che si ottiene dall' iperspazio euclideo $\underset{\nu}{x}=k$ con l' inversione per raggi vettori reciproci di centro P.

Si ha adunque il

Teor. – Se nel punto P lo spazio principale Π_2 ha ν dimensioni, se $\underset{i}{X}$ $(i=1,2,\dots,\nu)$ è un sistema di ν parametri normali e a due a due ortogonali di Π_2, e se i $\nu+1$ sistemi assoluti

$$a_{r,s} \quad \text{ed} \quad \underset{i}{x}_{r,s}=\int_g \underset{i}{X}\cdot f_{r,s}\,dt \qquad (i=1,2,\dots,\nu)$$

sono linearmente dipendenti, i centri di 1ª curvatura delle geodetiche per P giacciono sopra una ipersfera di Π_2 passante per P.

Consegue che, *se Q è l'antipodo di P in questa ipersfera, i centri di 1ª curvatura delle geodetiche per P sono le proiezioni ortogonali di Q sulle normali principali di dette geodetiche.*

5. – Se

$$\nu=\binom{n+1}{2},$$

allora, poichè ognuno dei sistemi

$$a_{r,s} \quad \text{ed} \quad \underset{i}{x_{r,s}} \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

ha ν elementi, la matrice formata con questi elementi (matrice che ha $\nu+1$ colonne e ν righe) ha caratteristica ν, ed i $\nu+1$ sistemi

$$a_{r,s} \quad \text{ed} \quad \underset{i}{x_{r,s}} \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

sono linearmente dipendenti.

Si conclude che vale il

Teor. - Se in P il 2^0 spazio principale ha $\binom{n+1}{2}$ dimensioni, i centri di 1ª curvatura delle geodetiche di V_n passanti per P sono situati sopra una ipersfera di Π_2 passante per P.

6. - Sempre supposto $\nu=\binom{n+1}{2}$, poniamo, come a p. 229,

$$A_{h,k;p,q}=\int_g f_{h,k} f_{p,q}\, dt\,,$$

ed indichiamo con A il determinante di ordine ν ottenuto facendo percorrere nello stesso ordine alle coppie hk e pq tutte le combinazioni con ripetizione a 2 a 2 dei numeri

$$1,2,\ldots,n\,,$$

e mettendo in una stessa riga tutti gli elementi colla stessa coppia hk, in una stessa colonna tutti gli elementi colla stessa coppia pq. Per l'ipotesi fatta sul numero delle dimensioni di Π_2, è $A \neq 0$.

Indichiamo poi con $A^{h,k;p,q}$ il reciproco di $A_{h,k;p,q}$ diviso per $\pi_\alpha \cdot \pi_\beta$, dove è $\alpha=hk$, $\beta=pq$ e π_α indica, al solito, il numero delle permutazioni distinte delle cifre di α [1].

Il sistema $A^{h,k;p,q}$ è un sistema assoluto con 4 apici di classe 1ª (p. 199, § 5), e si ha

[1] Ossia $\pi_\alpha=1$ se le cifre di α sono uguali, e $\pi_\alpha=2$ se le cifre di α sono diverse.

$$(7) \qquad \sum_{pq}^{n} A^{h,k;p,q} A_{r,s;p,q} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } hk \neq rs \\ \dfrac{1}{\pi_\alpha}\,, & \text{se } hk = rs = \alpha\,. \end{cases}$$

Poniamo

$$(8) \qquad \alpha^{p,q} = \Sigma_{hk}\, a_{h,k}\, A^{h,k;p,q}$$

e

$$(9) \qquad J = \Sigma_{pq}\, \alpha^{p,q} f_{p,q}\,.$$

Evidentemente J è un invariante.

Io dico che il punto

$$f + J\,,$$

che indicherò con Q, è l'antipodo di P nella ipersfera considerata al § precedente.

Basta che io provi che, proiettando ortogonalmente Q sulle normali principali alle geodetiche, si trovano i centri di curvatura di queste geodetiche.

Ora è chiaro che, se R è la proiezione ortogonale di Q sulla retta PS, essendo S un punto della 1ª varietà principale, si ha

$$PR = PQ \cos QPR\,,$$

e

$$\int_g J \cdot \frac{\Sigma_{hk} f_{h,k}\, du_h du_k}{\Sigma_{hk} a_{h,k}\, du_h du_k}\, dt = PQ \cdot PS \cdot \cos QPR\,.$$

Ma il 1º membro dell' ultima uguaglianza vale, per (9), (8) e (7),

$$\frac{\Sigma_{hkpq}\, \alpha^{p,q} \cdot A_{h,k;p,q}\, du_h du_k}{\Sigma_{hk}\, a_{h,k}\, du_h du_k} =$$

$$= \frac{\Sigma_{rs}\, a_{r,s}\, \Sigma_{hk}\, du_h du_k\, \Sigma_{pq}\, A^{r,s;p,q} A_{h,k;p,q}}{\Sigma_{hk}\, a_{h,k}\, du_h du_k} = \frac{\Sigma_{rs}\, a_{r,s}\, du_r du_s}{\Sigma_{hk}\, a_{h,k}\, du_h du_k} = 1 \quad [1],$$

e ciò in base alle relazioni che passano fra gli elementi di A ed i loro reciproci.

[1] Si noti per questo passaggio che, se $r \neq s$, si ha

$$\Sigma_{hk}\, du_h du_k\, \Sigma_{pq}\, A^{r,s;p,q} A_{h,k;p,q} = \frac{1}{2} du_r du_s + \frac{1}{2} du_s du_r = du_r du_s\,.$$

Dunque

$$PQ \cdot PS \cdot \cos PQR = 1$$

e, tenendo conto della

$$PR = PQ \cos QPR \ ,$$

si ha

$$PS \cdot PR = 1 \ .$$

Ciò prova che R è il centro di 1ª curvatura della geodetica per P corrispondente al punto S.

Calcoliamo infine il diametro PQ della ipersfera. Si ha

$$\overline{PQ}^2 = \int_g J^2 dt = \Sigma_{hkpq} \alpha^{h,k} \alpha^{p,q} A_{h,k;p,q} = \Sigma_{hk} \alpha^{h,k} \Sigma_{rs} a_{r,s} \Sigma_{pq} A^{r,s;p,q} A_{h,k;p,q} =$$

$$= \Sigma_{hk} \alpha^{h,k} a_{h,k} = \Sigma_{hkpq} a_{h,k} a_{p,q} A^{h,k;p,q} \ .$$

5.

Il teorema di Meusnier.

1-2. Direzioni asintotiche. — 3. Lo S_{n+1} tangente ad una V_n lungo una sua direzione non asintotica. — 4. Il teorema di MEUSNIER.

1. – Sia V_n una varietà ad n dimensioni e sia P un punto preso su essa.

Consideriamo nel σ_1 corrispondente a P una retta δ uscente da P.

Esistono infinite curve di V_n passanti per P e tangenti a δ. Indichiamo con γ una di queste curve.

Se $f(t; u)$ è una determinante di V_n, se s indica la lunghezza di arco di γ e se indichiamo con accenti le derivate rispetto ad s, si ha (p. 226)

$$f'' = \sum_1^n {}_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k + \sum_1^n {}_i f_i (u''_i + \sum_1^n {}_{hk} C^i_{hk} u'_h u'_k) \ . \tag{1}$$

Osserviamo che (1) è un parametro della 2ª retta principale di γ in P.

La direzione δ, insieme colla condizione

$$\sum_{1}^{n}{}_{h,k}\, a_{h,k}\, u'_h u'_k = 1 \qquad \left(a_{h,k} = \int_g f_h f_k\, dt\right),$$

la quale esprime che s misura la lunghezza di arco, individua gli elementi u'_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$.

Def. – Se la direzione δ è tale per cui il parametro

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, f_{h,k}\, u'_h u'_k$$

risulta generalmente nullo, si dice che δ è una direzione *asintotica reale* di V_n in P.

2. – Se lo spazio principale Π_2 della V_n corrispondente al punto P si riduce ad una retta, e se X è un parametro principale di questa retta, la condizione perchè una direzione δ sia asintotica si traduce nella condizione

$$\int_g \left(\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, f_{h,k}\, u'_h u'_k\right) X \cdot dt = 0$$

e, ponendo

$$b_{h,k} = \int_g f_{h,k} \cdot X \cdot dt\,,$$

nella condizione

(2) $$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, b_{h,k}\, u'_h u'_k = 0\,.$$

Se la equazione (2) nelle u'_h ha soluzioni reali, queste individuano delle asintotiche reali di V_n per P. In particolare, se $n = 2$, la (2) ammette due soluzioni, poichè la (2) diventa una equazione di 2º grado nel rapporto $u'_1 : u'_2$. Se queste due soluzioni sono reali e distinte la V_2 ha per P due direzioni asintotiche reali e distinte.

3. Def. - Se δ è una direzione non asintotica di V_n per P, lo spazio lineare ad $n+1$ dimensioni che passa per P e che contiene i parametri

$$(1) \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n, \sum_1^n{}_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k$$

si dirà lo S_{n+1} *tangente* in P a V_n lungo δ.

Nello S_{n+1} tangente in P a V_n lungo δ cadono tutte le 2^e^ rette principali in P delle varie linee γ di V_n passanti per P e tangenti a δ.

Infatti un parametro di una di queste rette è una combinazione lineare dei parametri (1).

4. – Teor. di Meusnier. I primi centri di curvatura delle curve γ passanti per un punto P di una varietà V_n e tangenti ad una medesima retta δ non asintotica sono situati tutti sopra una medesima ipersfera dello S_{n+1} tangente a V_n lungo δ. Questa ipersfera passa per P e l'antipodo di P in essa è il 1º centro di curvatura della geodetica di V_n tangente a δ.

Dim. - Basterà provare che, se γ' è la geodetica tangente a δ, se Q' è il suo 1º centro di curvatura, se γ è un'altra curva tangente a δ e se Q è il 1º centro di curvatura di γ, il punto Q è la proiezione ortogonale di Q' sulla 2ª retta principale di γ.

Ora

$$Y = PQ' \cdot \sum_1^n{}_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k$$

e

$$Z = PQ \cdot \left[\sum_1^n{}_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k + \sum_1^n{}_i f_i \left(u''_i + \sum_1^n{}_{hk} C^i_{hk} u'_h u'_k\right)\right]$$

sono parametri normali [1] delle 2^e^ rette principali di γ' e γ.

Se con R si indica la proiezione ortogonale di Q' sulla retta PQ, si ha

$$PR = PQ' \cdot \int_g YZ \cdot dt \,.$$

[1] Si noti che PQ' è uguale all' inverso di $\sqrt{\int_g \left(\sum_1^n{}_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k\right)^2 dt}$, ed analogamente per PQ.

Ma, ricordando che le $f_{h,k}$ sono ortogonali alle f_i, si ha

$$\int_g Y \cdot Z \cdot dt = PQ' \cdot PQ \int_g [\Sigma_{hk}{}_1^n f_{h,k}\, u'_h u'_k]^2 dt =$$

$$= [PQ' \cdot PQ] : [PQ']^2 = PQ : PQ' .$$

Dunque $PR = PQ' \cdot [PQ : PQ'] = PQ$. Questo dimostra che R coincide con Q e che quindi il teorema è vero.

6.

Varietà minime.

1. Enunciato del problema generale di massimo o minimo. — 2. Il problema delle varietà minime. — 3. Il parametro invariante I.

1. – Consideriamo una varietà V_n ad n dimensioni della quale $f(u)$ sia una determinante.

Consideriamo poi una porzione τ del campo di variabilità delle u e indichiamo con K il contorno di τ.

Sia φ un 1-variante costruito col solo concorso della f e di sue derivate. Tale potrebbe essere

$$\underset{1}{a}^{r_1} \cdot \underset{2}{a}^{r_2}, \ldots, \underset{h}{a}^{r_h}$$

con gli esponenti numeri reali soddisfacenti alla relazione

$$2 \cdot \sum_1^h {}_\nu\, r_\nu \binom{n+\nu}{n+1} = 1 .$$

In tale ipotesi, l' espressione

(1) $$\int_\tau |\varphi| \cdot du_1 \cdot du_2 \ldots du_n$$

(dove l'$\int$ indica un integrale riemanniano multiplo) è un invariante, come risulta dalla legge di trasformazione degli integrali multipli per un cambiamento di variabili.

Ci si può porre il

Problema. - Fra le V_n per cui la $f(u)$ ha al contorno K dei valori assegnati determinarne una per cui l'espressione (1) diventi massima o minima.

2. - Noi ci limiteremo qui a considerare il caso in cui

$$\varphi = \sqrt{\underset{1}{a}} .$$

Consideriamo un sistema ortogonale cartesiano di riferimento

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots),$$

ed indichiamo con

$$\underset{i}{x} \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots)$$

le coordinate di $f(u)$ ad esso corrispondenti.

Immaginiamo che $f(u)$ sia la determinante della varietà che si cerca e teniamo fisse tutte le coordinate di $f(u)$ ad eccezione di una particolare $\underset{i}{x}$.

Poichè nella $\varphi = \sqrt{\underset{1}{a}}$ non figurano che le derivate prime di $\underset{i}{x}$, applicando le prime nozioni di Calcolo delle variazioni, troviamo, per il variare della sola $\underset{i}{x}$, l'equazione di Eulero

$$\sum_r^n \frac{\partial}{\partial u_r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \underset{i}{x_r}} \right) = 0 , \tag{2}$$

dove $\underset{i}{x_r}$ indica la derivata parziale di $\underset{i}{x}$ rispetto ad u_r.

Sviluppiamo la (2). Intanto osserviamo che la nostra φ è funzione delle $a_{h,k}$ $(h,k = 1,2,\ldots, n)$ e che, essendo

$$a_{h,k} = \sum_{1}^{\infty}{}_i \underset{i}{x_h} \cdot \underset{i}{x_k} ,$$

solo quelle $a_{h,k}$ che hanno almeno un indice uguale ad r contengono la $\underset{i}{x_r}$.

Inoltre $\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{r,h}} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{h,r}}$ $\qquad (h = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n)$

e

$$\frac{\partial a_{r,h}}{\partial \underset{i}{x_r}} = \begin{cases} 2 \cdot \underset{i}{x_r}\,, & \text{se } \; h = r \\ \underset{i}{x_h}\,, & \text{se } \; h \neq r\,. \end{cases}$$

Allora, applicando la ordinaria regola di derivazione di funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \underset{i}{x_r}} = 2 \cdot \sum_1^n {}_h \frac{\partial\varphi}{\partial a_{r,h}} \cdot \underset{i}{x_h}\,.$$

Ma

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_{r,h}} = \frac{1}{2} \sqrt{\underset{1}{a}} \cdot \underset{1}{a}^{r,h}\,.$$

Dunque la (2) diventa

$$(2') \qquad \sum_1^n {}_r \frac{\partial}{\partial u_r}\Big(\sqrt{\underset{1}{a}} \cdot \sum_1^n {}_h \underset{1}{a}^{r,h} \cdot \underset{i}{x_h}\Big) = 0\,.$$

Questa equazione è della forma

$$(2'') \qquad \sum_1^n {}_h P_h \cdot \underset{i}{x_h} + \sum_1^n {}_{hr} Q_{hr} \cdot \underset{i}{x_{hr}} = 0\,,$$

dove $\underset{i}{x_{hr}}$ indica la derivata di $\underset{i}{x_h}$ rispetto ad u_r, ed i coefficienti P e Q non dipendono dall' indice i.

Moltiplicando per $\underset{i}{X}$ la (2'') e sommando rispetto ad i, si ha nel primo membro una serie convergente in media verso

$$\sum_1^n {}_h P_h f_h + \sum_1^n {}_{hr} Q_{hr} f_{hr} \qquad \text{(p. 101, teor. 1)}\ [1]$$

ossia verso

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial}{\partial u_r}\Big(\sqrt{\underset{1}{a}} \cdot \sum_1^n {}_h \underset{1}{a}^{r,h} f_h\Big)\,.$$

[1] Poichè le serie $\Sigma_i \underset{i}{x_h} \underset{i}{X}$ e $\Sigma_i \underset{i}{x_{hr}} \underset{i}{X}$ convergono in media verso f_h ed f_{hr}.

3. - Ponendo

$$I = \frac{1}{\sqrt{\underset{1}{a}}} \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial}{\partial u_r} \left(\sqrt{\underset{1}{a}} \cdot \sum_{1}^{n}{}_h \underset{1}{a}^{r,h} f_h \right),$$

le equazioni di Eulero restano riassunte nella unica equazione

$$I = 0 .$$

Ora

$$U^r = \sum_{1}^{n}{}_h \underset{1}{a}^{r,h} f_h$$

è un controvariante ed è

$$I = \frac{1}{\sqrt{\underset{1}{a}}} \Sigma_r \frac{\partial}{\partial u_r} \left(\sqrt{\underset{1}{a}} \cdot U^r \right) = \Sigma_r \frac{\partial \log \sqrt{\underset{1}{a}}}{\partial u_r} U^r + \Sigma_r \frac{\partial U^r}{\partial u_r} =$$

$$= \Sigma_{rk} C^k_{kr} U^r + \Sigma_r \frac{\partial U^r}{\partial u_r} \qquad \text{(p. 184, teor. 6).}$$

Mutando nell' ultima Σ l' indice r in k, si ha

$$I = \Sigma_k D_k U^k ,$$

dove $D_p U^k$ indica, al solito, il derivato covariante di U^k.

Derivando colla regola di derivazione dei sistemi composti e ricordando che il derivato covariante di $\underset{1}{a}^{r,h}$ è nullo, si ha subito

$$I = \Sigma_{hk} \underset{1}{a}^{k,h} \cdot f_{h,k} .$$

Si conclude che, per le varietà che soddisfano al problema posto, è nullo il parametro

$$\Sigma_{hk} \underset{1}{a}^{k,h} \cdot f_{h,k} .$$

Le varietà per le quali si annulla questo parametro si dicono *varietà minime.*

Per le varietà che non sono minime il parametro suddetto appartiene al Π_2 della varietà.

Conchiudo osservando che

$$\int_{\mathfrak{s}} I^2 dt = \sum_{1}^{n}{}_{hkpq} \underset{1}{a}^{h,k} \underset{1}{a}^{p,q} A_{h,k:p,q} .$$

7.

Curvatura di una varietà.

1–2. Curvatura totale di una V_n $(n>1)$. — 3-4-5-6. Curvatura di una V_n $(n>2)$ secondo un S_r tangente $(2 \leq r < n)$. — 7. Curvature principali del Bianchi di una V_3. — 8. Curvature principali di una V_n col Π_2 ad 1 dimensione.

1. – Sia $f(u)$ una determinante di una varietà V_n ad n dimensioni $(n>1)$.

Consideriamo poi i relativi simboli di Riemann di 1ª specie e di classe 1

$$(h,k;p,q)_1 = \int_g f_{h,p} f_{k,q} dt - \int_g f_{h,q} f_{k,p} dt \tag{1}$$

Questi simboli sono, come sappiamo, emisimmetrici rispetto ai primi due indici h,k ed anche rispetto ai rimanenti.

Ci conviene indicare con α e β due indici che percorrano tutte le combinazioni semplici a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \ldots, n\,.$$

Allora, supposto che h e k siano le due cifre di α, e p e q quelle di β, e che sia $h<k$ e $p<q$, noi porremo

$$R_{\alpha,\beta} = (h,k;p,q)_1$$

$$E_{\alpha,\beta} = a_{h,p}a_{k,q} - a_{h,q}a_{k,p}\,,$$

e, se

$$u_i = u_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

sono le equazioni della sostituzione che porta dalle variabili v alle variabili u, noi porremo

$$P_{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_h}{\partial v_p} & \dfrac{\partial u_h}{\partial v_q} \\[2ex] \dfrac{\partial u_k}{\partial v_p} & \dfrac{\partial u_k}{\partial v_q} \end{vmatrix}\,.$$

Poichè il sistema (1) è un covariante a 4 indici di classe 1, si ha

$$R_{\alpha,\beta}[v] = \Sigma_{\gamma\delta}\, R_{\gamma,\delta}[u] \cdot P_{\gamma,\alpha} \cdot P_{\delta,\beta}\ ,$$

la Σ essendo estesa a tutti i termini che si ottengono facendo percorrere a γ e a δ tutte le combinazioni semplici a 2 a 2 dei numeri

$$1, 2, \ldots, n\ .$$

Si indichi con R il determinante che ha per elementi gli $R_{\alpha,\beta}$ costruito in modo che in ogni riga sia costante l'indice α, che in ogni colonna sia costante l'indice β e che in ogni termine della diagonale principale sia $\alpha = \beta$. Si indichi con P il determinante costruito in modo analogo cogli elementi $P_{\alpha,\beta}$.

Con noto ragionamento (p. 112, teor.), si prova che

$$R[v] = R[u] \cdot P^2\ .$$

Ora il determinante P è evidentemente il 2^0 determinante di Spottiswoode dedotto dal determinante $(u;v)$ (p. 171), e quindi vale $(u;v)^{n-1}$.

Dunque R è un $2(n-1)$–variante, ed infine $R:\underset{1}{a}^{n-1}$ è un invariante.

Il determinante E formato cogli $E_{\alpha,\beta}$ come R è stato formato cogli elementi $R_{\alpha,\beta}$ è il 2^0 determinante di Spottiswoode dedotto dal determinante $\underset{1}{a}$, e quindi vale $\underset{1}{a}^{n-1}$.

Si conclude che $R:E$ è un invariante.

2. Def. - L'invariante $R:E$ si chiamerà la *curvatura totale* di V_n.

Si vede facilmente che per $n=2$ la curvatura totale diventa $(1,2;1,2)_1:\underset{1}{a}$.

3. - Consideriamo ora una V_n con $n>2$, ed un suo punto P.

Se r è un numero intero ≥ 2 e $<n$, consideriamo uno spazio lineare S_r ad r dimensioni passante per P e contenuto nel corrispondente σ_1.

Le geodetiche di V_n uscenti da P e tangenti in P alle varie rette di S_r formano una varietà W_r a r dimensioni contenuta in V_n, che si dirà la *varietà geodetica* di V_n tangente in P ad S_r.

Se $r = n-1$, esiste in σ_1 una sola retta r perpendicolare ad S_r: viceversa, data per P una retta d del σ_1, è determinato in σ_1 uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni perpendicolare a d. In tal caso, invece di dire che W_{n-1} è la varietà geodetica corrispondente ad S_{n-1}, diremo anche che è corrispondente alla direzione d (passante per P, giacente in σ_1 e perpendicolare ad S_{n-1}).

4. – Sia ancora $n > 2$ ed $n > r \geq 2$. Siano inoltre $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0$ le coordinate di un punto P di V_n.

La

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_r) = f(u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}^0, \ldots, u_n^0)$$

è determinante di una varietà W_r passante per P e contenuta in V_n. La W_r ha in P un σ_1 che ha r dimensioni e che è contenuto nel σ_1 di V_n. Indichiamolo con S_r.

Supponiamo che la W_r sia la varietà geodetica tangente in P ad S_r.

Allora le geodetiche di V_n uscenti da P e tangenti alle direzioni di S_r sono tutte e sole le geodetiche di W_r uscenti da P.

Consegue che i primi punti principali di queste geodetiche sono dati tanto da

$$f + \frac{\sum_1^r{}_{pq} f_{p.q}\, du_p\, du_q}{\sum_1^r{}_{pq} a_{p.q}\, du_p\, du_q},$$

quanto da

$$f + \frac{\sum_1^r{}_{pq} F_{p.q}\, du_p\, du_q}{\sum_1^r{}_{pq} a_{p.q}\, du_p\, du_q},$$

dove le $F_{p.q}$ hanno rispetto ad F lo stesso significato che le $f_{p.q}$ hanno rispetto ad f.

Consegue che

$$\sum_{1}^{r}{}_{pq} f_{p,q}\, du_p\, du_q \qquad \text{e} \qquad \sum_{1}^{r}{}_{pq} F_{p,q}\, du_p\, du_q$$

sono funzioni razionali delle $du_1, du_2, \ldots, du_r$ identicamente uguali, e che quindi si ha

$$f_{p,q} = F_{p,q} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, r).$$

Di qui risulta

$$\int_{g} f_{h,p} f_{k,q}\, dt - \int_{g} f_{h,q} f_{k,p}\, dt = \int_{g} F_{h,p} F_{k,q}\, dt - \int_{g} F_{h,q} F_{k,p}\, dt$$

$$(h, k, p, q = 1, 2, \ldots, r),$$

e se ne conclude che i simboli di Riemann

$$(h, k; p, q)_1 \qquad (h, k, p, q = 1, 2, \ldots, r)$$

calcolati nel punto P per la W_r coincidono coi simboli corrispondenti calcolati nello stesso punto per la V_n.

Da questo risulta che la curvatura totale di W_r in P è uguale ad $R_r : E_r$, dove R_r ed E_r sono i determinanti delle $R_{\alpha,\beta}$ ed $E_{\alpha,\beta}$, con α e β percorrenti tutte le combinazioni semplici a 2 a 2 dei numeri $1, 2, \ldots, r$.

Def. - La curvatura totale in P della varietà geodetica di V_n tangente in P ad S_r si chiama la *curvatura di V_n in P secondo S_r*. Quando $r = n - 1$, questa curvatura si dirà anche *curvatura secondo la direzione d* di σ_1 perpendicolare ad S_r.

5. - Fermiamoci al caso in cui $r = 2$. Mutiamo le variabili u in un sistema di variabili v ed assegniamo alle $v_3, v_4, \ldots, v_n$ i valori che esse assumono nel punto P.

Allora col variare delle v_1 e v_2 la determinante descrive una varietà W_2 a 2 dimensioni appartenente a V_n e passante per P.

Sia S_2 il σ_1 di W_2 in P, e supponiamo che W_2 sia la varietà geodetica tangente in P ad S_2.

La curvatura di V_n in P secondo S_2 è data da

$$R_{12,12}[v] : A,$$

dove A indica il minore di 2^0 ordine formato colle prime due righe e colle prime due colonne del determinante $\underset{1}{a}[v]$.

Per la legge di varianza assoluta si ha subito

$$R_{12;12}[v] = \Sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha,\beta}[u] \cdot \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta$$

ed

$$A = \Sigma_{\alpha\beta} E_{\alpha,\beta} \cdot \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta ,$$

le Σ essendo estese a tutti i termini che si ottengono facendo percorrere ad α e β tutte le combinazioni semplici a 2 a 2 dei numeri $1, 2, \ldots, n$, e dove $\lambda_\alpha = P_{\alpha,12}$ ed $E_{\alpha,\beta}$ indica, al solito, il minore di 2° ordine estratto da $\underset{1}{a[u]}$ prendendo nell'ordine naturale le righe che hanno il posto indicato dalle cifre di α e le colonne che hanno il posto indicato dalle cifre di β.

Si conclude che la curvatura riemanniana di V_n in P secondo la giacitura di S_2 è data da

$$K = \frac{\Sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha,\beta}[u] \cdot \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta}{\Sigma_{\alpha\beta} E_{\alpha,\beta} \cdot \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta} . \tag{2}$$

6. – Guardiamo ora da quali elementi dipende l'espressione di K data dalla precedente formula (2).

Intanto gli $R_{\alpha,\beta}[u]$ ed $E_{\alpha,\beta}$ sono indipendenti dalla superficie W_2. Solo i λ_α dipendono da questa superficie. Si vede facilmente che i λ_α dipendono solo dal piano tangente a W_2 in P, all'infuori di un fattore di proporzionalità che non ha influenza sul valore di K dato da (2). Infatti, essi λ_α si costruiscono conoscendo i valori delle $\frac{\partial u_h}{\partial v_1}, \frac{\partial u_h}{\partial v_2}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$, che sono individuati all'infuori di un fattore di proporzionalità dalle tangenti in P alle linee coordinate v_1 e v_2 di W_2; e, per una trasformazione sul sistema di queste due variabili, le λ_α restano tutte moltiplicate per il determinante funzionale delle v_1 e v_2 rispetto alle due nuove variabili.

In sostanza si può dire che, se

$$\sum_{1}^{n}{}_r \mu_r f_r \quad \text{e} \quad \sum_{1}^{n}{}_r \nu_r f_r$$

sono parametri di due rette distinte tangenti a W_2 in P, le λ_α

sono proporzionali ai minori del 2^0 ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots\ldots\ldots & \mu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots\ldots\ldots & \nu_n \end{Vmatrix}.$$

7. - Consideriamo ora il caso $n = 3$, e poniamo

$$\lambda_{12} = \eta_3, \; -\lambda_{13} = \eta_2, \; \lambda_{23} = \eta_1$$

e

$$\zeta_i = \sum_1^3{}_j a^{ij} \eta_j \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Evidentemente

$$\eta_j = \sum_1^3{}_i a_{ij} \zeta_i \qquad (j = 1, 2, 3).$$

E poichè, usando le notazioni del § prec., si ha

$$\sum_1^3{}_j \mu_j \eta_j = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_1^3{}_j \nu_j \eta_j = 0,$$

si ha anche

$$\sum_1^3{}_{ij} a_{ij} \zeta_i \mu_j = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_1^3{}_{ij} a_{ij} \zeta_i \nu_j = 0,$$

ossia

$$\int_g (\sum_1^3{}_i f_i \zeta_i)(\sum_1^3{}_j f_j \mu_j)\, dt = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_g (\sum_1^3{}_i f_i \zeta_i)(\sum_1^3{}_j f_j \nu_j)\, dt = 0;$$

e si conclude che

(3) $$\sum_1^3{}_i f_i \zeta_i$$

è un parametro del σ_1 ortogonale alla W_2 in P.

Viceversa, se sono date arbitrariamente le η_i, sono date le ζ_i, e quindi è individuata la direzione di parametro (3) ed è individuato il piano del σ_1 ortogonale a questa direzione. In altri termini è individuato un piano S_2 di σ_1 per cui la superficie geodetica tangente del S_2 abbia i λ_α proporzionali alle η_i corrispondenti.

Allora le varie curvature riemanniane corrispondenti alle varie giaciture per P si ottengono dalla (2) facendo variare in qualunque modo le λ_α $(\alpha = 12, 13, 23)$.

I massimi e minimi di K annulleranno le derivate del 2° membro della (2) rispetto a ciascuna λ_α.

Per esse sarà allora

$$\Sigma_\beta (R_{\alpha,\beta}[u] - K \cdot E_{\alpha,\beta}) \lambda_\beta = 0 \qquad (\alpha = 12, 23, 13)$$

ed allora dovrà essere nullo il determinante dei coefficienti delle λ_β nelle precedenti tre equazioni. Si ottiene così un'equazione in K che è un'equazione secolare, perchè la forma

$$\Sigma_{\alpha\beta} E_{\alpha,\beta} \cdot \lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta$$

ha i coefficienti proporzionali ai reciproci degli elementi di $\underset{1}{a}[u]$ e quindi è una forma definita e generica (p. 150).

Le 3 radici della equazione in K sono dunque tutte reali, e si dicono le *curvature principali di V_3 secondo il* Bianchi.

Il prodotto di queste curvature è uguale a $R : E$.

Si ha così il

Teor. – Il prodotto delle 3 curvature principali secondo il Bianchi di una V_3 è uguale alla curvatura totale di V_3.

8. – Supponiamo che lo spazio Π_2 della V_n in un punto P di essa abbia dimensione 1 e indichiamo con X un parametro normale di questo Π_2.

Si ha

$$f_{h,k} = x_{h,k} \cdot X, \tag{4}$$

dove

$$x_{h,k} = \int_g f_{h,k} \cdot X \cdot dt.$$

Consideriamo una geodetica γ per P e indichiamo con s la lunghezza del suo arco. Se gli accenti indicano derivate rispetto ad s, si ha, lungo γ,

$$f'' = \Sigma_{hk} f_{h,k} u'_h u'_k = (\Sigma_{hk} x_{h,k} u'_h u'_k) \cdot X$$

e quindi la curvatura di γ è data, all'infuori del segno, da

$$\varkappa = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, x_{h,k}\, u'_h u'_k = (\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, x_{hk}\, du_h du_k) : (\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{h,k}\, du_h du_k)\ .$$

I massimi e minimi di $\varkappa$ annulleranno le sue derivate parziali rispetto ai du_h; quindi per tali $\varkappa$ dovrà essere

$$\sum_k (x_{h,k} - \varkappa \cdot a_{h,k})\, du_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

ed infine

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} - \varkappa a_{1,1} & x_{1,2} - \varkappa a_{1,2} & \ldots & x_{1,n} - \varkappa a_{1,n} \\ x_{2,1} - \varkappa a_{2,1} & x_{2,2} - \varkappa a_{2,2} & \ldots & x_{2,n} - \varkappa a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n,1} - \varkappa a_{n,1} & x_{n,2} - \varkappa a_{n,2} & \ldots & x_{n,n} - \varkappa a_{n,n} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Poichè la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a_{h,k}\, x_h x_k = \int_g (\sum_{1}^{n}{}_h f_h x_h)^2 dt$$

è, evidentemente, definita ed è generica, la precedente equazione in $\varkappa$ è secolare, e quindi ha reali tutte le sue n radici. Queste si chiamano le *curvature principali* di V_n in P.

Il prodotto di queste curvature è dato da $x : \underset{1}{a}$, dove x indica il determinante $|x_{h,k}|$.

Ora, ricordando che

$$(h, k; p, q)_1 = \int_g f_{h,p} f_{k,q}\, dt - \int_g f_{h,q} f_{k,p}\, dt$$

e tenendo conto delle (4), si ha

$$(h, k; p, q)_1 = x_{h,p} x_{k,q} - x_{h,q} x_{k,p}\ .$$

Allora il determinante R è il 2° determinante di Spottiswoode dedotto da x, quindi $R = x^{n-1}$, ed $R : \underset{1}{a}^{n-1} = (x : \underset{1}{a})^{n-1}$, ossia, nel caso che consideriamo, la curvatura totale della V_n è uguale alla potenza $(n-1)^{ma}$ del prodotto delle n curvature principali.

8.

Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo Π_2.

1. I sistemi $W_{s,r;p,q}$ e $W^{r,s;p,q}$. — 2. Pseudo-reciproco di un covariante a due indici e di un controvariante a due apici. — 3. Alternanti di due covarianti a due indici. — 4. Sistema principale di normali nel Π_2. — 5-6-7. Esistenza di sistemi principali in ogni punto di una varietà, ecc.

1. – Sia, al solito, V_n una varietà ad n dimensioni, di cui

$$f(u)$$

sia una determinante, ed indichiamo con ν il numero delle dimensioni del Π_2 corrispondente ad un punto P di V_n. È, come sappiamo, $\nu \leq \binom{n+1}{2}$.

Poniamo

$$W_{r,s;p,q} = a_{r,s} a_{p,q} - \frac{a_{r,p} a_{s,q} + a_{r,q} a_{s,p}}{2}$$

e indichiamo con W il determinante di ordine $\binom{n+1}{2}$ formato coi $W_{r,s;p,q}$ come a p. 237 si è formato il determinante A cogli elementi $A_{r,s;p,q}$.

È noto che

$$W = C \cdot a^{n+1} \qquad \text{(p. 130)},$$

dove C è una costante diversa da zero, e quindi si può affermare che

$$W \neq 0 .$$

Indico con $W^{r,s;p,q}$ il reciproco di $W_{r,s;p,q}$ in W diviso per $\pi_\alpha \cdot \pi_\beta$, dove $\alpha = rs$ e $\beta = pq$.

Il sistema $W^{r,s;p,q}$ è un sistema assoluto a 4 apici di classe 1 (p. 199, teor.).

2. Def. – Se

$$x_{r,s}$$

è un covariante a due indici di classe 1, diremo *pseudo-reciproco* di $x_{r,s}$ il controvariante

$$x^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{r,s;p,q} x_{p,q}$$

ed $x_{r,s}$ si dirà *pseudo-reciproco* di $x^{r,s}$.

Si vede facilmente che

$$x_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W_{r,s;p,q} x^{p,q} .$$

3. Def. – Se

$$x_{r,s} \qquad \text{ed} \qquad y_{r,s}$$

sono due covarianti a due indici di classe 1, e se

$$x^{r,s} \qquad \text{ed} \qquad y^{r,s}$$

sono i loro pseudo-reciproci, noi diremo *alternante* dei sistemi $x_{r,s}$ e $y_{r,s}$, e indicheremo con (x, y), l' espressione

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} y^{r,s} .$$

Si ha subito

$$(x,y) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} x_{r,s} \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{r,s;pq} y_{p,q} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} \sum_{1}^{n}{}_{rs} W^{r,s;p,q} x_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} y_{p,q} x^{p,q} = (y,x) .$$

Inoltre si ha

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W^{r,s;p,q} x_{r,s} y_{p,q}$$

ed analogamente

$$(x, y) = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} x^{r,s} y^{p,q} .$$

In particolare

$$(x, x) = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W^{r,s;p,q} x_{r,s} x_{p,q} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} x^{r,s} x^{p,q} .$$

4. Def. - Diremo *sistema principale* nel Π_2 un sistema di ν parametri normali

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

del Π_2, a due a due ortogonali, per i quali, essendosi posto

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g \underset{i}{X} \cdot f_{r,s} dt ,$$

si ha

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0$$

per ogni coppia i, j di numeri diversi scelti fra i numeri

$$1, 2, \dots, \nu .$$

5. Teor. – In ogni punto P di una varietà V_n ad n dimensioni, esistono uno od infiniti sistemi principali di normali nel Π_2.

Dim. – Per trovare una linea di condotta per la dimostrazione di questo teorema, cominciamo col supporre che esista un sistema principale di normali nel Π_2.

Supponiamo che esso sia costituito dai parametri

$$\underset{i}{X} \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

cosicchè, se

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g \underset{i}{X} \cdot f_{r,s} dt ,$$

si abbia per ogni coppia i, j di numeri diversi scelti fra i numeri 1, 2, ..., ν,

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0 .$$

Poichè si avrà

$$f_{r,s} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \underset{i}{x}_{r,s} \underset{i}{X} ,$$

moltiplicando per

$$\underset{j}{x}^{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{p,q;r,s} \underset{j}{x}_{p,q}$$

e sommando rispetto ad r e ad s, si avrà

$$\sum_{1}^{n}{}_{r,s} \underset{j}{x}^{r,s} f_{r,s} = (\underset{j}{x}, \underset{j}{x}) \cdot \underset{j}{X} ,$$

ed infine, moltiplicando per $f_{p,q}$ ed integrando lungo g,

$$\sum_{1}^{n}{}_{r,s} A_{r,s;p,q} \underset{j}{x}^{r,s} = (\underset{j}{x}, \underset{j}{x}) \underset{j}{x}_{p,q} = (\underset{j}{x}, \underset{j}{x}) \sum_{1}^{n}{}_{r,s} W_{r,s;p,q} \underset{j}{x}^{r,s} ,$$

da cui

$$\sum_{1}^{n}{}_{r,s} [A_{r,s;p,q} - (\underset{j}{x}, \underset{j}{x}) W_{r,s;p,q}] \underset{j}{x}^{r,s} = 0 . \tag{1}$$

Allora si vede che le $\underset{j}{x}^{r,s}$ costituiscono una soluzione non nulla del sistema di equazioni (1). Dunque questo sistema deve avere il determinante dei coefficienti nullo, ossia le $(\underset{j}{x}, \underset{j}{x})$ devono essere soluzioni della equazione

$$\Delta(\rho) = 0 , \tag{2}$$

in cui $\Delta(\rho)$ indica il determinante formato cogli elementi

$$\Delta_{r,s;p,q} = A_{r,s;p,q} - \rho \cdot W_{r,s;p,q}$$

come W è stato formato cogli elementi $W_{r,s;p,q}$.

Consideriamo ora l' equazione (2). Poichè è

$$W \neq 0 ,$$

il grado dell' equazione (2) è uguale ad $\binom{n+1}{2}$.

Poniamo

$$F_\lambda = \sum_{1}^{n}{}_{r,s,p,q} A_{r,s;p,q} \lambda^{r,s} \lambda^{p,q} \qquad (\lambda^{r,s} = \lambda^{s,r}).$$

Io dico che per ogni sistema di valori reali delle $\lambda^{r,s}$ è

$$F_\lambda \geq 0 .$$

Infatti

$$F_\lambda = \int_g (\sum_1^n {}_{r,s} f_{r,s} \lambda^{r,s})^2 dt \geq 0 .$$

Dunque la [2] è una equazione secolare formata col concorso di due forme quadratiche delle quali una è definita e l'altra ha discriminante diverso da zero, e quindi la (2) ha tutte le sue radici reali.

Inoltre, essendo la caratteristica della matrice di A uguale a ν, posto $\delta = \binom{n+1}{2} - \nu$, la (2) avrà la radice $\rho = 0$, solo se $\delta > 0$; e quando $\delta > 0$ l'ordine di questa radice sarà $\leq 2\delta$ e $\geq \delta$ (p. 150, teor.), e quindi sarà uguale a $\delta + \mu$ con $0 \geq \mu \geq \delta$. Le altre radici di (2) saranno, come sappiamo, regolari (p. 138, teor.).

Siano

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau$$

le diverse radici non nulle della (2) e siano

$$m_1, m_2, \ldots, m_\tau$$

i loro ordini di moltiplicità. Posto

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau \quad ,$$

si ha

$$m = \nu - \mu ;$$

e per ogni i $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$ la caratteristica della matrice di

$$\Delta(\rho_i)$$

sarà uguale ad $\binom{n+1}{2} - m_i$.

Per ogni i $(i = 1, 2, \ldots, \tau)$, il sistema di equazioni

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_{rs} (A_{r,s;p,q} - \rho_i W_{r,s;p,q}) \lambda^{r,s} = 0 .$$

ha, se $m_i > 1$, infinite soluzioni, che sono tutte le combinazioni lineari di m_i di esse fra loro linearmente indipendenti; e quindi i parametri di direzione

(4) $$\sum_1^n{}_{r,s} f_{r,s} \lambda^{r,s}$$

corrispondenti a tutte queste soluzioni danno tutte le direzioni di uno spazio lineare ad m_i dimensioni. Scegliamo un sistema di m_i soluzioni delle (3) in modo che i corrispondenti parametri (4) siano normali e a due a due ortogonali, il che è possibile, nella ipotesi di $m_i > 1$, in infiniti modi.

Se $m_i = 1$, si ha un solo parametro normale (4) (individuato all'infuori del segno, il che non ha importanza), e noi prenderemo questo parametro.

Fatto questo per tutte le radici ρ_i si arriva (e può darsi anche in più maniere) in possesso di m parametri normali

(5) $$\underset{i}{X} = \sum_1^n{}_{rs} \underset{i}{\lambda}^{r,s} f_{r,s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ciascuno dei quali corrisponde ad una ρ_{h_i}, dove h_i è uno dei numeri

$$1, 2, \ldots, \tau,$$

e corrispondentemente ad essa si ha

(6) $$\sum_1^n{}_{rs} (A_{r,s;p,q} - \rho_{h_i} W_{r,s;p,q}) \underset{i}{\lambda}^{r,s} = 0,$$

ossia

(7) $$\int_g f_{p,q} (\sum_1^n{}_{rs} f_{r,s} \underset{i}{\lambda}^{r,s}) \, dt = \rho_{h_i} \sum_1^n{}_{rs} W_{r,s;p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s},$$

e per le (5)

(7') $$\int_g f_{p,q} \underset{i}{X} \, dt = \rho_{h_i} \sum_1^n{}_{rs} W_{r,s;p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s},$$

ed infine

$$\underset{i}{x}_{p,q} = \sum_1^n{}_{rs} W_{r,s;p,q} (\rho_{h_i} \underset{i}{\lambda}^{r,s}),$$

dove

$$\underset{i}{x}_{p,q} = \int_g f_{p,q} \underset{i}{X} \, dt.$$

Quindi i sistemi

$$\underset{i}{x}_{r.s} \qquad \text{e} \qquad \rho_{h_i}\underset{i}{\lambda}^{r.s}$$

sono pseudo-reciproci, e noi possiamo scrivere

(8) $$\underset{i}{x}^{r.s} = \rho_{h_i}\underset{i}{\lambda}^{r.s} .$$

Moltiplicando i due membri della (6) per $\underset{j}{\lambda}^{p.q}$ e sommando rispetto a p e a q, si ha

$$\sum_1^n {}_{rspq} A_{r.s.p.q}\underset{i}{\lambda}^{r.s}\underset{j}{\lambda}^{p.q} = \rho_{h_i}\sum_1^n {}_{rspq} W_{r.s.p.q}\underset{i}{\lambda}^{r.s}\underset{j}{\lambda}^{p.q} ,$$

e, tenendo conto delle (5),

(9) $$\int_g \underset{i}{X}\underset{j}{X}\,dt = \rho_{h_i}\sum_1^n {}_{rspq} W_{r.s.p.q}\underset{i}{\lambda}^{r.s}\underset{j}{\lambda}^{p.q} .$$

Ora, se $\rho_{h_i} = \rho_{h_j}$, ma $i \neq j$, i parametri $\underset{i}{X}$ ed $\underset{j}{X}$ sono ortogonali, ossia

(10) $$\int_g \underset{i}{X}\underset{j}{X}\,dt = 0 ,$$

e poichè $\rho_{h_i} \neq 0$, sarà

(11) $$\sum_1^n {}_{rspq} W_{r.s.p.q}\underset{i}{\lambda}^{r.s}\underset{j}{\lambda}^{p.q} = 0 .$$

Se poi $\rho_{h_i} \neq \rho_{h_j}$, la (9), scambiando fra loro i con j, diventa

(9′) $$\int_g \underset{i}{X}\underset{j}{X}\,dt = \rho_{h_j}\sum_1^n {}_{rspq} W_{r.s.p.q}\underset{i}{\lambda}^{r.s}\underset{j}{\lambda}^{p.q} ,$$

e dalle (9) e (9′) si deducono le (10) e le (11).

Allora i parametri (5) formano un sistema ortogonale. Si ha inoltre

(12)
$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = \sum_{1}^{n}{}_{pq} (\sum_{1}^{n}{}_{rs} W_{r,s;p,q} \underset{i}{x}^{r,s} \underset{j}{x}^{p,q}) =$$
$$= \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} (\rho_{h_i} \underset{i}{\lambda}^{r,s}) (\rho_{h_j} \underset{j}{\lambda}^{p,q}) \qquad \text{(v. (8))}$$
$$= \rho_{h_i} \rho_{h_j} \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{j}{\lambda}^{p,q}$$

e quindi per $i \neq j$,

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0 \qquad \text{(v. (11))}.$$

Allora se $\mu = 0$, ossia, se $m = \nu$, il sistema (4) è un sistema principale di normali nel Π_2.

È interessante calcolare in tutti i casi le

$$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}).$$

Si ha subito da (12)

$$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_{h_i}^2 \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} \underset{i}{\lambda}^{r,s} \underset{i}{\lambda}^{p,q},$$

e tenendo conto delle (9) e del fatto che i parametri $\underset{i}{X}$ sono normali, si ha

(13)
$$(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_{h_i}.$$

Supponiamo ora che sia $\mu > 0$ e completiamo i parametri (5) con altri μ parametri

$$\underset{m+1}{X}, \underset{m+2}{X}, \ldots, \underset{\nu}{X},$$

in modo da formare un sistema di ν parametri normali e a due a due ortogonali dello spazio Π_2. Si avrà

(14)
$$f_{r,s} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \underset{i}{x}_{r,s} \underset{i}{X},$$

dove, al solito, per tutti i parametri $\underset{i}{X}$, si ha

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g f_{r,s} \underset{i}{X} \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Moltiplichiamo i due membri di (14) per $\underset{i}{x}^{r,s}$ con $i \leq m$ e sommiamo rispetto ad r e ad s. Abbiamo

$$(15)\quad \sum_1^n{}_{rs} \underset{i}{x}^{r,s} f_{r,s} = (\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) \underset{i}{X} + (\underset{i}{x}, \underset{m+1}{x}) \underset{m+1}{X} + (\underset{i}{x}, \underset{m+2}{x}) \underset{m+2}{X} + \ldots + (\underset{i}{x}, \underset{\nu}{x}) \underset{\nu}{X}.$$

Ma

$$\sum_1^n{}_{rs} \underset{i}{x}^{r,s} f_{r,s} = \rho_{h_i} \sum_1^n \underset{i}{\lambda}^{r,s} f_{r,s} = \qquad \text{(v. (8))}$$

$$= (\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) \underset{i}{X} \qquad \text{(v. (5) e (13))};$$

dunque

$$(\underset{i}{x}, \underset{m+1}{x}) \underset{m+1}{X} + (\underset{i}{x}, \underset{m+2}{x}) \underset{m+2}{X} + \ldots + (\underset{i}{x}, \underset{\nu}{x}) \underset{\nu}{X} = 0\,,$$

e poichè i parametri

$$\underset{m+1}{X}, \underset{m+2}{X}, \ldots, \underset{\nu}{X}$$

sono linearmente indipendenti, deve essere

$$(16)\qquad (\underset{i}{x}, \underset{m+1}{x}) = (\underset{i}{x}, \underset{m+2}{x}) = \ldots = (\underset{i}{x}, \underset{\nu}{x}) = 0\,.$$

Moltiplichiamo ora entrambi i membri della (14) per $\underset{j}{x}^{r,s}$ $(j = m+1, m+2, \ldots, \nu)$ e sommiamo rispetto ad r e ad s. Tenendo conto delle (16), otteniamo

$$(17)\qquad \sum{}_{rs} \underset{j}{x}^{r,s} f_{r,s} = \sum_{m+1}^{\nu}{}_i (\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) \underset{i}{X}\,.$$

Ora consideriamo il sistema di equazioni nelle p_i

$$(18)\qquad \sum_{m+1}^{\nu}{}_j p_j (\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = \rho p_i \qquad (i = m+1, m+2, \ldots, \nu).$$

Per risolvere questo sistema basta trovare una radice ρ dell' equazione secolare

$$\left|\begin{array}{cccc} (\underset{m+1}{x},\underset{m+1}{x})-\rho & (\underset{m+1}{x},\underset{m+2}{x}) & \ldots & (\underset{m+1}{x},\underset{\nu}{x}) \\ (\underset{m+2}{x},\underset{m+1}{x}) & (\underset{m+2}{x},\underset{m+2}{x})-\rho & \ldots & (\underset{m+2}{x},\underset{\nu}{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\underset{\nu}{x},\underset{m+1}{x}) & (\underset{\nu}{x},\underset{m+2}{x}) & \ldots & (\underset{\nu}{x},\underset{\nu}{x})-\rho \end{array}\right| = 0 . \tag{19}$$

Corrispondentemente ad una radice ρ di questa equazione si avrà un sistema di valori reali $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_\nu$ che soddisfa il sistema (18). Allora, moltiplicando per tali p_j le (17) e sommando, si trova

$$\Sigma_{rs}\, y^{r,s} f_{r,s} = \rho \cdot \sum_{m+1}^{\nu}{}_i\, p_i \cdot \underset{i}{X} , \tag{20}$$

dove

$$y^{r,s} = \sum_{m+1}^{\nu}{}_j\, p_j \cdot \underset{j}{x}^{r,s} .$$

Ora, moltiplicando le (20) per $f_{p,q}$ ed integrando lungo g,

$$\Sigma_{rs}\, A_{r,s;p,q}\, y^{r,s} = \rho \sum_{m+1}^{\nu}{}_i\, p_i \underset{i}{x}_{p,q} = \rho \sum_{m+1}^{\nu}{}_i\, p_i \Sigma_{rs}\, W_{r,s;p,q} \underset{i}{x}^{r,s} = \rho \Sigma_{rs}\, W_{r,s;p,q}\, y^{r,s} \tag{6'}$$

da cui si deduce che ρ è una radice di $\Delta(\rho) = 0$.

Non può essere $\rho \neq 0$ perchè tutte le soluzioni del sistema (6) corrispondenti a tali radici sono state considerate nella formazione del sistema (5) e quindi il sistema (6) non può ammettere la soluzione $y^{r,s}$ come vorrebbe la (6′). Dovrà dunque essere $\rho = 0$.

Si conclude che l'equazione secolare (19) ha la radice $\rho = 0$ multipla di ordine ν e che quindi il 1° membro di (19) per $\rho = 0$ diventa un determinante di caratteristica 0. Si conclude che

$$(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}) = 0 \qquad (i, j = m+1, m+2, \ldots, \nu).$$

Dunque il sistema considerato

$$\underset{i}{X} \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

è un sistema principale.

6. – Riassumendo possiamo dire che, se ν è il numero delle dimensioni del Π_2, se

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\tau$$

sono le diverse radici non nulle della (2), se

$$m_1, m_2, \ldots, m_\tau$$

sono i loro ordini di moltiplicità, se

$$m_{\tau+1} = \nu - (m_1 + m_2 + \ldots + m_\tau)$$

e se poniamo $\rho_{\tau+1} = 0$, in Π_2 esistono degli spazi lineari

$$S_1, S_2, \ldots, S_\tau, S_{\tau+1}$$

(l' ultimo potendo anche mancare) di dimensioni

$$m_1, m_2, \ldots, m_\tau, m_{\tau+1}$$

che sono fra loro a 2 a 2 ortogonali (p. 94, def. 2) e tali che, se in ciascuno di questi S_h si prendono m_h parametri normali e fra loro ortogonali, si ha nell' insieme un sistema principale di normali nel Π_2, e se X è uno di questi parametri appartenenti ad S_h, si ha $(x, x) = \rho_h$, dove si intende che

$$x_{p,q} = \int_g X \cdot f_{p,q} \cdot dt \, .$$

Si vede così che, se almeno uno dei numeri m_h è > 1, esistono infiniti sistemi principali. In tal caso si dirà che il punto di V_n che si considera è *ciclico.*

7. – Supponiamo che sia $\nu = \binom{n+1}{2}$ e consideriamo un sistema principale

$$\underset{i}{X} \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

A ciascuno dei parametri $\underset{i}{X}$ corrisponderà una radice ρ_i di $\Delta(\rho) = 0$, ed ogni ρ_i sarà diversa da zero, e si avrà $(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i$.

Consideriamo i parametri $\underset{i}{X}$ come un sistema cartesiano ortogonale nello spazio Π_2, ed indichiamo con ξ_i le coordinate di un punto rispetto a questo sistema.

Se le ξ_i sono le coordinate di un punto del cono geodetico, si vede che questo punto è dato da

$$f + \sum_{1}^{\nu}{}_i \xi_i \underset{i}{X} ,$$

e, per le (5), da

$$f + \sum_{1}^{n}{}_{rs} \mu^{r,s} f_{r,s} ,$$

dove

(21) $$\mu^{r,s} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \xi_i \underset{i}{\lambda}^{r,s} = (\sum_{1}^{\nu}{}_i \xi_i \cdot \underset{i}{x}^{r,s}) : \rho_i .$$

Ma le $\mu^{r,s}$ dovranno essere proporzionali alle $du_r du_s$, e quindi, se $\mu_{r,s}$ è lo pseudo-reciproco di $\mu^{r,s}$ si ha

$$(\mu, \mu) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \mu^{r,s} \cdot \mu_{r,s} = \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} \mu^{r,s} \mu^{p,q} =$$

$$= K \cdot \sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} du_r du_s du_p du_q ,$$

dove K è un conveniente fattore di proporzionalità.

Tenendo presente l'espressione di $W_{r,s;p,q}$ (p. 254), si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{rspq} W_{r,s;p,q} du_r du_s du_p du_q = (2U^2 - U^2 - U^2) : 2 = 0 ,$$

dove

$$U = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{r,s} du_r du_s ,$$

dunque

$$(\mu, \mu) = 0$$

e, per le (21),

$$\sum_{1}^{\nu}{}_i \xi_i^2 \cdot (\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) : \rho_i^2 = 0$$

ed infine, essendo $(\underset{i}{x}, \underset{i}{x}) = \rho_i$,

(22) $$\sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{\xi_i^2}{\rho_i} = 0 .$$

Si vede così che nel caso considerato il cono geodetico è contenuto nel cono quadrico di equazione (22).

9.

I sistemi principali per le superficie.

1–2. Caso in cui il Π_2 ha 3 dimensioni. — 3. Esempio di superficie ciclica col Π_2 a 3 dimensioni. — 4. Proprietà di questa superficie. — 5. Caso in cui il Π_2 ha 2 dimensioni. — 6–7. Esempi di superfici cicliche col Π_2 a 2 dimensioni.

1. - Nel caso particolare di $n=2$ gli elementi del sistema $W_{r,s;p,q}$ sono molto semplici e si ha

$$W_{1,1;1,1}=W_{2,2;2,2}=W_{1,1;1,2}=W_{1,2;2,2}=0\,.$$

$$W_{1,1;2,2}=\underset{1}{a},\ W_{1,2;1,2}=-\frac{1}{2}\underset{1}{a}\,.$$

In tal caso l'equazione $\Delta(\rho)=0$ del Cap. prec. diventa

$$(1)\qquad \Delta(\rho)=\begin{vmatrix} A_{1,1;1,1} & A_{1,1;1,2} & A_{1,1;2,2}-\underset{1}{a}\rho \\ A_{1,2;1,1} & A_{1,2;1,2}+\frac{1}{2}\underset{1}{a}\rho & A_{1,2;2,2} \\ A_{2,2;1,1}-\underset{1}{a}\rho & A_{2,2;1,2} & A_{2,2;2,2} \end{vmatrix}=0\,.$$

È interessante osservare che se $x_{r,s}$ ed $x^{r,s}$ sono due sistemi pseudo–reciproci si ha

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_{1,1}&=\underset{1}{a}x^{2,2}\\ x_{1,2}&=-\underset{1}{a}x^{1,2}\\ x_{2,2}&=\underset{1}{a}x^{1,1}\end{aligned}$$

e in particolare lo pseudo–reciproco di $a_{r,s}$ coincide col reciproco di $a_{r,s}$ nel determinante $\underset{1}{a}$.

Supposto che ρ_i sia una radice di (1) diversa dallo zero, le (3) del Cap. prec., tenendo conto delle (8) dello stesso Cap. e delle (1) di questo Cap., diventano

$$
\begin{aligned}
&\underset{i}{x}_{2,2} A_{1,1;1,1} - 2\underset{i}{x}_{1,2} A_{1,1;1,2} + \underset{i}{x}_{1,1}[A_{1,1;2,2} - \rho_i \cdot \underset{1}{a}] = 0 \\
(3) \qquad &\underset{i}{x}_{2,2} A_{1,2;1,1} - 2\underset{i}{x}_{1,2}\left[A_{1,2;1,2} + \frac{\rho_i \cdot \underset{1}{a}}{2}\right] + \underset{i}{x}_{1,1} A_{1,2;2,2} = 0 \\
&\underset{i}{x}_{2,2}[A_{2,2;1,1} - \rho_i \cdot \underset{1}{a}] - 2\underset{i}{x}_{1,2} A_{2,2;1,2} + \underset{i}{x}_{1,1} A_{2,2;2,2} = 0\,.
\end{aligned}
$$

2. – Nel caso in cui il determinante A è diverso da *zero*, ossia in cui $\nu = 3$, l'equazione (1) ha tre radici diverse da *zero*, ma esse non possono essere tutte e tre uguali.

Infatti, se (1) ha una radice tripla ρ_1, la matrice del determinante $\Delta(\rho_1)$ avrebbe caratteristica $= 0$, e quindi sarebbero nulli tutti gli elementi di $\Delta(\rho_1)$ ed in particolare sarebbe $A_{1,1;1,1} = 0$ e ne conseguirebbe che $f_{1,1} = 0$ e che infine sarebbe $\nu < 3$, contrariamente all'ipotesi.

In tutti i casi, se $\nu = 3$, il cono geodetico riferito ad una terna principale ha l'equazione

$$\xi_1^2 : \rho_1 + \xi_2^2 : \rho_2 + \xi_3^2 : \rho_3 = 0\,,$$

e quindi la terna principale è una terna autopolare del cono geodetico.

3. – Però, pur essendo $\nu = 3$, la (1) può avere una radice doppia.

Dò un esempio di superficie per la quale ciò avviene in ogni punto.

Siano

$$\varphi_1\,, \varphi_2\,, \varphi_3\,, \varphi_4\,, \varphi_5\,, \varphi_6$$

sei parametri normali e a due a due ortogonali, e consideriamo la V_2 che ha per determinante la punto-funzione

$$
\begin{aligned}
f(u_1\,, u_2) = \cos u_1 \cdot \varphi_1 + \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_2 + \cos u_2 \cdot \varphi_3 + \operatorname{sen} u_2 \cdot \varphi_4 + {}\\
+ \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6\,.
\end{aligned}
$$

Per essa si trova

$$f_1 = -\operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_1 + \cos u_1 \cdot \varphi_2 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6$$

$$f_2 = -\operatorname{sen} u_2 \cdot \varphi_3 + \cos u_2 \cdot \varphi_4 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 + \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6$$

$$f_{11} = -\cos u_1 \cdot \varphi_1 - \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_2 - \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6$$

$$f_{12} = -\cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6$$

$$f_{22} = -\cos u_2 \cdot \varphi_3 - \operatorname{sen} u_2 \cdot \varphi_4 - \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 - \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6 \, ;$$

e, poichè risulta dalle espressioni trovate

$$\int_g f_{rs} f_p \, dt = 0 \qquad (r, s, p = 1, 2),$$

si ha anche

$$f_{r,s} = f_{rs} \qquad (r, s = 1, 2),$$

e quindi

$$A_{1,1;1,1} = A_{2,2;2,2} = 2 \, , A_{1,1;1,2} = A_{1,1;2,2} = A_{1,2;1,2} = A_{1,2;2,2} = 1 \, ,$$

e l' equazione (1) diventa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 - \rho\underset{1}{a} \\ 1 & 1 + \dfrac{\rho\underset{1}{a}}{2} & 1 \\ 1 - \rho\underset{1}{a} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

che è soddisfatta, come si verifica subito, da $\rho\underset{1}{a} = -1$ e da $\rho\underset{1}{a} = 2$. Infatti per $\rho\underset{1}{a} = -1$ la prima e la terza colonna risultano uguali, e per $\rho\underset{1}{a} = 2$ la prima colonna risulta uguale alla differenza della seconda e della terza colonna. Si vede poi facilmente che $\rho\underset{1}{a} = -1$ annulla tutti i minori di 2^0 ordine del 1^0 membro, e quindi la $\rho\underset{1}{a} = -1$ è radice doppia. Dunque la superficie considerata ha ciclici tutti i suoi punti.

Ogni terna principale di normali conterrà il parametro

$$Z = \frac{f}{\sqrt{3}}$$

ed altri due parametri X e Y ad esso ortogonali e ortogonali fra loro, ad es.,

$$X = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\sqrt{2}} \quad , \qquad Y = \frac{\psi_1 + \psi_2 - 2\psi_3}{\sqrt{6}}$$

dove

$$\psi_1 = \cos u_1 \cdot \varphi_1 + \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_2$$
$$\psi_2 = \cos u_2 \cdot \varphi_3 + \operatorname{sen} u_2 \cdot \varphi_4$$
$$\psi_3 = \cos(u_1 + u_2) \cdot \varphi_5 + \operatorname{sen}(u_1 + u_2) \cdot \varphi_6 \, .$$

Con queste notazioni è anche

$$Z = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3}{\sqrt{3}} \, .$$

Scelto in tal modo il sistema di normali principali, si ha, posto

$$x_{r,s} = \int_g f_{r,s} X dt \, , \quad y_{r,s} = \int_g f_{r,s} Y dt \, , \quad z_{r,s} = \int_g f_{r,s} Z dt \, ,$$

$$x_{1,1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} , \quad x_{1,2} = 0 \, , \qquad x_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{6}} , \quad y_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{6}} , \quad y_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$z_{1,1} = \frac{-2}{\sqrt{3}} , \quad z_{1,2} = \frac{-1}{\sqrt{3}} , \quad z_{2,2} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \, .$$

Inoltre indicando con x, y, z le coordinate di un punto rispetto alla terna X, Y, Z uscente dal punto della V_2, l'equazione del cono geodetico è

$$z^2 = 2(x^2 + y^2) \, .$$

4. - A proposito della V_2 studiata al prec. § è da osservare che si ha

$$\Sigma_{rs} a_{r,s} du_r du_s = 2\,(du_1^2 + du_1 du_2 + du_2^2)$$

$$\begin{aligned} \Sigma A_{r,s;p,q} du_r du_s du_p du_q &= 2\,du_1^4 + 4du_1^3 du_2 + 6\,du_1^2 du_2^2 + \\ &\quad + 4du_1 du_2 + 2\,du_2^4 \\ &= 2\,(du_1^2 + du_1 du_2 + du_2^2)^2 \, , \end{aligned}$$

ed indicando con φ e ψ le precedenti due forme, si ha $2\psi = \varphi^2$.

E poichè si vede facilmente che il quadrato della 1ª curvatura della geodetica tangente alla direzione $du_1 : du_2$ è dato da $\psi : \varphi^2$, si ha che tutte le geodetiche della superficie hanno in ogni punto la curvatura uguale ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. – Se si ha $\nu = 2$, la equazione $\Delta(\rho) = 0$ ha la radice $\rho = 0$, e, poichè la matrice $\Delta(0)$ ha caratteristica 2, il rango della radice $\rho = 0$ è $= 3 - 2 = 1$. Consegue che l'ordine di moltiplicità di questa radice è $\leq 2 \cdot 1$ (p. 150, teor.), e quindi è ≤ 2.

Se l'ordine di moltiplicità di questa radice è $= 1$, la $\Delta(\rho) = 0$ ha due radici diverse da zero. Se queste radici sono uguali il punto della superficie è ciclico.

Nel § seguente darò un esempio in cui ciò avviene in ogni punto.

Se l'ordine di moltiplicità della radice $\rho = 0$ di $\Delta(\rho) = 0$ è $= 2$, e se X ed Y sono un sistema di normali principali, e se, al solito

$$x_{r,s} = \int_g f_{r,s} X dt \ , \quad y_{r,s} = \int_g f_{r,s} Y dt$$

si ha, oltrechè $(x, y) = 0$, che è nulla una ed una sola delle espressioni (x, x) ed (y, y).

Nel § 7 darò un esempio in cui ciò avviene.

6. – Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 4 parametri normali e a due a due ortogonali, ed R ed S la parte reale ed il coefficiente dell'imaginario di una funzione analitica $R + iS$ della variabile complessa $u_1 + iu_2$, e consideriamo la V_2 che ha per determinante

$$f(u_1, u_2) = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + R\varphi_3 + S\varphi_4 \ .$$

Per le note proprietà delle funzioni analitiche se si pone

$$R_i = \frac{\partial R}{\partial u_i}\ , \ R_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial u_i \partial u_j}\ , \ S_i = \frac{\partial S}{\partial u_i}\ , \ S_{ij} = \frac{\partial^2 S}{\partial u_i \partial u_j}\ ;$$

si ha subito:

$$R_1 = S_2 \ , \qquad R_2 = -S_1 \ , \qquad R_{22} = -R_{11} \ ,$$

e quindi

$$f_1 = \varphi_1 + R_1\varphi_3 + S_1\varphi_4 = \varphi_1 + R_1\varphi_3 - R_2\varphi_4$$

$$f_2 = \varphi_2 + R_2\varphi_3 + S_2\varphi_4 = \varphi_2 + R_2\varphi_3 + R_1\varphi_4 ,$$

da cui

$$a_{1,1} = a_{2,2} = K , \qquad a_{1,2} = 0 ,$$

dove $K = 1 + R_1^2 + R_2^2$.

Inoltre :

$$f_{11} = R_{11}\varphi_3 - R_{12}\varphi_4$$

$$f_{12} = R_{12}\varphi_3 + R_{11}\varphi_4$$

$$f_{22} = R_{22}\varphi_3 + R_{12}\varphi_4 = - R_{11}\varphi_3 + R_{12}\varphi_4 = - f_{11} .$$

Consegue che

$$f_{1,1} = - f_{2,2} .$$

Ora sarà

$$f_{1,1} = f_{11} - \alpha f_1 - \beta f_2$$

$$f_{1,2} = f_{12} - \gamma f_1 - \delta f_2$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ devono essere determinati in modo che $f_{1,1}$ ed $f_{1,2}$ risultino ortogonali ad f_1 e ad f_2. Dovrà essere

$$\int_g f_{11} f_1 dt = K\alpha , \qquad \int_g f_{11} f_2 dt = K\beta$$

$$\int_g f_{12} f_1 dt = K\gamma , \qquad \int_g f_{12} f_2 dt = K\delta$$

da cui si ha, posto $M = \dfrac{1}{K}$,

$$\alpha = M(R_{11} R_1 + R_{12} R_2)$$

$$\beta = M(R_{11} R_2 - R_{12} R_1)$$

$$\gamma = M(R_{12} R_1 - R_{11} R_2) = - \beta$$

$$\delta = M(R_{12} R_2 + R_{11} R_1) = \alpha .$$

Tenendo conto del fatto che $f_{1,1}$ è ortogonale ad f_1 e ad f_2, si ha

$$\int_g f_{1,1} f_{1,2} dt = \int_g f_{1,1} \cdot f_{22} dt = \int_g (f_{11} - \alpha f_1 - \beta f_2) f_{12} dt =$$

$$= \int_g f_{11} f_{12} dt - \alpha \cdot \int_g f_{12} f_1 dt - \beta \int_g f_{12} f_2 dt = 0 - \alpha \cdot K\gamma - \beta \cdot K\delta = 0 \,,$$

poichè evidentemente $\int_g f_{11} f_{12} dt = 0$ e $\gamma = -\beta$, $\delta = \alpha$.

Si trova inoltre, con ugual procedimento

$$\int_g f_{11}^2 dt = \int_g f_{1,1} \cdot f_{11}\, dt = \int_g (f_{11} - \alpha f_1 - \beta f_2)\, f_{11}\, dt =$$

$$\int_g f_{1,1}^2 dt - \alpha \cdot K\alpha - \beta \cdot K\beta = (R_{11}^2 + R_{12}^2) - K(\alpha^2 + \beta^2)$$

ed analogamente

$$\int_g f_{1,2}^2 dt = \int_g f_{12}^2 dt - K(\gamma^2 + \delta^2) =$$

$$= (R_{11}^2 + R_{12}^2) - K(\alpha^2 + \beta^2) = \int_g f_{1,1}^2 dt.$$

Ma

$$\alpha^2 + \beta^2 = M^2 (R_{11}^2 + R_{12}^2)\, (R_1^2 + R_2^2) = (R_{11}^2 + R_{12}^2)\, M^2 (K - 1)$$

ed infine

$$\int_g f_{1,1}^2 dt = \int_g f_{1,2}^2 dt = (R_{11}^2 + R_{12}^2)\, [1 - KM^2(K - 1)] = (R_{11}^2 + R_{12}^2) \cdot M \,.$$

Se ora indichiamo con X ed Y dei parametri normali delle direzioni che hanno per parametri $f_{1,1}$ ed $f_{1,2}$, si ha

$$f_{r,s} = x_{r,s} X + y_{r,s} Y \,,$$

dove

$$y_{1,1} = y_{2,2} = x_{1,2} = 0 \,,$$

$$x_{1,1} = -x_{2,2} = \pm \sqrt{M (R_{11}^2 + R_{12}^2)}$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{M (R_{11}^2 + R_{12}^2)} \,.$$

Si ha così

$$(x, y) = 0\,, \qquad (x, x) = (y, y) = -M(R_{11}^2 + R_{12}^2)\,.$$

Il sistema X, Y è dunque un sistema principale, ed evidentemente ogni punto della superficie è ciclico.

7. - Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 4 parametri normali e a due a due ortogonali. Poniamo

$$A = \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_1 + \cos u_1 \cdot \varphi_2\,, \quad A_1 = \cos u_1 \cdot \varphi_1 - \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_4$$

$$B = \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_3 + \cos u_1 \cdot \varphi_4\,, \quad B_1 = \cos u_1 \cdot \varphi_3 - \operatorname{sen} u_1 \cdot \varphi_4\,,$$

e consideriamo la V_2 che ha per determinante la

$$f = A + u_2 B\,.$$

Si ha subito

$$f_1 = A_1 + u_2 B_1\,, \quad f_2 = B\,,$$

$$f_{11} = -A - u_2 B\,, \qquad f_{12} = B_1\,, \qquad f_{22} = 0\,.$$

Consideriamo un punto in cui $u_2 = 0$. In esso è

$$f_1 = A_1\,, \quad f_2 = B\,, \quad f_{11} = -A\,, \quad f_{12} = B_1\,, \quad f_{22} = 0\,.$$

Si vede subito che f_{11} ed f_{12} sono ortogonali ad f_1 ed f_2, quindi anche

$$f_{1,1} = -A\,, \quad f_{1,2} = B_1\,, \quad f_{2,2} = 0\,.$$

Allora tutti gli $A_{r,s;p,q}$ risultano nulli ad eccezione dei seguenti

$$A_{1,1;1,1} = A_{1,2;1,2} = 1\,,$$

la $\Delta(\rho) = 0$ diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\rho \underset{1}{a} \\ 0 & 1 + \dfrac{\rho \underset{1}{a}}{2} & 0 \\ -\rho \underset{1}{a} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ed ha la radice $\rho = 0$ doppia, ed una terza radice $\rho = \dfrac{-2}{\underset{1}{a}} = -2$.

Ponendo $X = f_{1,1}$ ed $Y = f_{1,2}$, si ha $\int_g XY\,dt = 0$, ed inoltre

$$x_{1,1} = 1\ ,\ x_{1,2} = x_{2,2} = 0\ ;\quad y_{1,1} = y_{2,2} = 0\,,\quad y_{1,2} = 1$$

e quindi $(x,y) = 0$. Il sistema X, Y è dunque un sistema principale di normali, e per esso si ha $(x,x) = 0$, $(y,y) = -2$.

10.

Osservazioni sui sistemi principali.

1. – I sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo Π_2 che ho introdotto al capitolo 8 rispondono ad una definizione simmetrica rispetto all' insieme delle direzioni del sistema.

È però possibile in altre maniere pervenire ad un sistema di rette del Π_2 ortogonali tra loro la cui definizione abbia il predetto carattere di simmetria.

2. – Intanto basterebbe, per raggiungere un tale scopo, sostituire al sistema $W_{r,s,p,q}$ ivi considerato un altro sistema simmetrico rispetto agli indici di ciascuna delle coppie rs e pq e rispetto a queste due coppie, col corrispondente determinante W diverso da zero. In particolare basterebbe porre

$$W_{r,s,p,q} = \lambda a_{r,s} a_{p,q} + \mu\,(a_{r,p} a_{s,q} + a_{r,q} a_{s,p})$$

con $\mu \neq 0$ ed $n\lambda + 2\mu \neq 0$, oppure, se il sistema

$$\alpha_{r,s} = \xi a_{r,s} + \zeta \cdot \sum_{1}^{n}{}_{pq} A_{r,s;pq}\, a^{p,q}_{1}$$

in cui ξ e ζ sono invarianti ha il determinante $|\alpha_{r,s}|$ diverso da zero, porre

$$W_{r,s,p,q} = \lambda \alpha_{r,s} \alpha_{p,q} + \mu(\alpha_{r,p} \alpha_{s,q} + \alpha_{r,q} \alpha_{s,p})\ ,$$

con $\mu \neq 0$ e $n\lambda + 2\mu \neq 0$. In questo ultimo caso, se $\lambda = 1$ e $\mu = \frac{-1}{2}$, si possono ripetere per $\nu = \binom{n+1}{2}$ le considerazioni del § 7 del cap. 8.

3. – Lo stesso scopo si raggiungerebbe sostituendo nelle considerazioni del cap. 8 al sistema delle $f_{r,s}$ un nuovo sistema $\varphi_{r,s}$ i cui elementi siano combinazioni lineari degli elementi del sistema $f_{r,s}$ e tale che degli elementi $\varphi_{r,s}$ ve ne siano ν di indipendenti.

4. – Vediamo come si può pervenire ad un tal sistema $\varphi_{r,s}$. Sia $k = \binom{n+1}{2}$ e siano

$$\underset{i}{\chi}_{r,s} \qquad (i = 1, 2, \dots, k)$$

k covarianti a 2 indici di classe 1.

Indichiamo con Z il determinante di ordine k che ha per elementi della i-esima riga le

$$\pi_{rs} \cdot \underset{i}{\chi}_{rs} \,,$$

dove

$$\pi_{rs} = \begin{cases} 1 \,, & \text{se } r = s \\ 2 \,, & \text{se } r \neq s \,, \end{cases}$$

ed ha costante in ogni colonna la coppia di indici rs.

Evidentemente una sostituzione invertibile che porta dalle variabili u alle variabili v muta il determinante Z in

$$Z' = P \cdot Z \,,$$

dove P è il determinante formato cogli elementi $P_{r,s;p,q}$ definiti dalle relazioni

$$P_{r,s;p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_q} + \frac{\partial u_r}{\partial v_q} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial v_p} \,, \qquad \text{se } r \neq s \,,$$

$$P_{r,r;p,q} = \frac{\partial u_r}{\partial v_p} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial v_q} \,,$$

come il determinante W è stato formato coi $W_{r,s;p,q}$. Ma P è il 2° determinante di Brill-Scholtz-Hunyady dedotto dal determinante $(u : v)$ e vale $(u : v)^{n+1}$.

Dunque
$$Z : (\sqrt{a})^{n+1}$$

è un invariante, e se noi indichiamo con $Z^{r,s}$ i complementi algebrici divisi per $(\sqrt{a})^{n+1}$ degli elementi della prima riga di Z, vediamo che

(1) $$\sum_1^n {}_{rs} Z^{r,s} \underset{1}{z}_{r,s}$$

è un invariante.

Ora, se noi teniamo fissi i $k-1$ ultimi $\underset{i}{z}_{r,s}$, vediamo che il sistema $Z^{r,s}$ è fisso. Questo sistema è tale che, qualunque sia il sistema $\underset{1}{z}_{r,s}$, la funzione (1) è un invariante. Si può dunque concludere che il sistema $Z^{r,s}$ è un controvariante a due indici di 1ª classe (p. 178).

Supponiamo ora di poter alla varietà V_n associare $k-2$ covarianti simmetrici a due indici di classe 1 indipendenti da t. Ad essi accompagniamo il sistema $f_{r,s}$ e con questi $\nu-1$ covarianti fabbrichiamo un sistema controvariante come il precedente $Z^{r,s}$, e che noi indicheremo con $F^{r,s}$.

Poniamo poi

$$\varphi_{r,s} = \sum_1^n {}_{pq} W_{r,s;p,q} F^{p,q},$$

dove il $W_{r,s;p,q}$ ha il significato che ha nel cap. 8.

Il numero delle $\varphi_{r,s}$ indipendenti è $\leq \nu$. Se esso è $= \nu$, noi possiamo usare queste $\varphi_{r,s}$ come è detto al § 3.

Nel caso di $n=2$ si può porre le $F^{r,s}$ uguali ai minori di 2° ordine presi con segno alternato e divisi per $\sqrt{a^3}$ della matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} f_{1,1} & 2f_{1,2} & f_{2,2} \\ \frac{a_{1,1}}{2} & a_{1,2} & \frac{a_{2,2}}{2} \end{array} \right\|$$

e quindi

$$\varphi_{1,1} = (a_{1,2} f_{1,1} - a_{1,1} f_{1,2}) : \sqrt{a}$$
$$\varphi_{1,2} = (a_{2,2} f_{1,1} - a_{1,1} f_{2,2}) : (2\sqrt{a})$$
$$\varphi_{2,2} = (a_{2,2} f_{1,2} - a_{1,2} f_{2,2}) : \sqrt{a}\,.$$

5. - Le varianti indicate ai §§ 2 e 3 si possono anche combinare assieme. È ovvio che i sistemi di normali ai quali si perviene con due di queste varianti saranno in generale differenti.

INDICE ANALITICO

CORREZIONI

a p. 7 linea 12, *invece di* «sostegno di c'» *leggi* «sostegno di C'».

a p. 16 linea 5 e 7, *invece di* «$f(x)$» leggi «$f(t)$».

a p. 30, *inverti il segno di disuguaglianza nella formula* (3′).

a p. 32 linea 1, *invece di* «$\int f \cdot dt$» *leggi* «$\int_g f \cdot dt$».

a p. 34 linea — 6, *invece di* «g_n» *leggi* «$g_{n'}$».

a p. 36 linea 5, *invece di* «h» *leggi* «$|h|$».

a p. 114 linea — 5, *scambia nella formula le lettere* «a» *e* «b».

a p. 155 linea 4, *dopo la parola* «esso» *aggiungi le parole* «sostituendo all' ultima sua cifra diversa da n ed alle successive quella che si ottiene».

a p. 167 linea 12, *invece di* «controvariante» *leggi* «covariante» e, nella linea — 7, *muta* «v» *in* «u».

a p. 173 linea 9, *in luogo dell'* «i» *sotto il* Π *leggi* «1».

a p. 176 linee 6 e 7, *muta* $\prod^{r}{}_{h} \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_\tau} \prod_{2}^{s} \frac{\partial u_{\alpha'_h}}{\partial v_{\alpha_h}}$ *in* $\prod_{2}^{r}{}_{h} \frac{\partial v_\tau}{\partial u_{\beta'_h}} \prod_{2}^{s}{}_{h} \frac{\partial v_{\beta_h}}{\partial u_{\beta'_h}}$.

a p. 183, *in luogo di* «$a^{\alpha p, \gamma}$» *leggi* «$a_{\alpha p, \gamma}$».

a p. 272, *scambia l'integrale con cui comincia la* linea 5 *con quello con cui comincia la seguente* linea 6.