A. ROSENBLATT

GEOMETRJA
ANALITYCZNA
NA PŁASZCZYŹNIE

Jaśnie Wielmożnemu Panu Profesorowi
z wyrazami głębokiej czci i wdzięcznośc

GEOMETRJA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

ALFRED ROSENBLATT
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELL.

GEOMETRJA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

KRAKÓW
NAKŁADEM POLSKIEJ AKADEMJI UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ — WILNO — ZAKOPANE
1926

Kraków. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarz. J. Filipowskiego.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Str.

ROZDZIAŁ II.

ROZDZIAŁ III.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

ROZDZIAŁ VI.

ROZDZIAŁ VII.

ROZDZIAŁ VIII.

ROZDZIAŁ IX.

ROZDZIAŁ X.

ROZDZIAŁ XI.

ROZDZIAŁ XII.

ROZDZIAŁ XIII.

ROZDZIAŁ XIV.

ROZDZIAŁ XV.

ROZDZIAŁ XVI.

ROZDZIAŁ XVII.

ROZDZIAŁ XVIII.

ROZDZIAŁ XIX.

ROZDZIAŁ XX.

ROZDZIAŁ XXI

ROZDZIAŁ XXII.

ROZDZIAŁ XXIII.

ROZDZIAŁ XXIV.

Przekształcenia krzywych drugiego stopnia.

Dostrzeżone omyłki druku.

Str.	wiersz		zamiast	ma być
10	18	od góry	(20)	(19)
13	11	„	$\lambda = \frac{a - b\lambda}{1 - \lambda}$	$x = \frac{a - b\lambda}{1 - \lambda}$
14	14	od dołu	$\overline{AC} = \lambda\, \overline{BC} = \lambda\,(\overline{AC} - \overline{AB})$	$\overline{AP} = \lambda\, \overline{BP} = \lambda\,(\overline{AP} - \overline{AB})$
14	13	„	$\overline{AC} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{AB} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$,	$\overline{AP} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\overline{AB} = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$,
14	12	„	$\overline{BC} = -\frac{1}{1-\lambda}\overline{BP} = -\frac{1}{1-\lambda}$	$\overline{BP} = -\frac{1}{1-\lambda}\overline{AB} = -\frac{1}{1-\lambda}$
14	1	„	$\lambda < 1$	$\lambda > 1$
21	14	od góry	$-1, \frac{1}{2}$ i $1''$.	$-1, \frac{1}{2}$ i $2''$.
22	13	od dołu	z punktem P	z punktem P'
25	9	od góry	ruchowej	ruchomej
30	10	od dołu	dowo'ny	dowolny
40	10	od góry	$\sum\limits_{i=1}^{n=1}$	$\sum\limits_{i=1}^{n-1}$
43	15	od dołu	$\overline{PC} = \overline{AB}$,	$\overline{PE} = \overline{AB}$,
44	8	„	przy C	przy E
47	8	od góry	apqliquéé	appliquée
50	16	„	$\lambda = -\mu \cos\lambda \pm \sqrt{1 - \mu^2 \mathrm{sm}^2\theta}$	$\lambda = -\mu \cos\theta \pm \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\theta}$
50	8	od dołu	$\|\mu\| = \|\sin\theta\|$	$\|\mu\| = \frac{1}{\|\sin\theta\|}$
50	2	„	$\|\lambda\| = \|\sin\theta\|$	$\|\lambda\| = \frac{1}{\|\sin\theta\|}$,
53	4	„	zacbodzi	zachodzi
65	6	od góry	$x = x' \sin\varphi + y' \mathrm{sm}\,\varphi$,	$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$,
79	3	od dołu	wnaaia	wnania
79	2	„	spełniający	spełniający
85	15	„	$= -\varepsilon \frac{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}{\sin - \theta\,.\,R}$	$= -\varepsilon \frac{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}{\sin\theta\,.\,R}$

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*ma być*
86	11 od góry	(b)	(6)
87	3 „	$\delta_0 = \sin\theta \frac{C}{R},$	$\delta_0 = \varepsilon \sin\theta \,.\, \frac{C}{R},$
97	2 od dołu	$\lambda_2 = - \varepsilon_1 \frac{B_1}{R_1}$	$\lambda_1 = - \varepsilon_1 \frac{B_1}{R_1}$
127	7 „	P^i	P_i
142	18 od góry	5,	4.
144	8 „	6.	5.
145	6 „	7.	6.
147	16 „	8	7.
155	9 od dołu	trójkąta	trójkątów
156	6 od góry	$P_{1-1} P_i,$	$P_{i-1} P_i$
160	11 od dołu 12 „	Forma jest zerowa, jeżeli wszystkie spółczynniki są liczbami rzeczywistymi.	Forma jest zerowa, jeżeli wszystk jej spółczynniki równają się ze rzeczywistą jeżeli wszystkie spółczy niki są liczbami rzeczywistemi
185	17 „	$Cy + 2Ey + F = 0$	$Cy^2 + 2Ey + F = 0$
186	8 od góry	2. $\delta > 0.$	2. $\delta < 0.$
191	11, 12 „	$\frac{C_i y + 2E_1 y + F_1}{A_2} = \frac{C_2 y + 2E_2 y + F_2}{A_2}.$	$\frac{C_1 y^2 + 2E_1 y + F_1}{A_1} = \frac{C_2 y^2 + 2E_2 y + F^2}{A_2}.$
202	1 od dołu	$>, \quad ,<$	$<,=,>$
208	5 „	$P_1(\xi, \eta)$	$P_1(\xi_1, \eta_1)$
208	4 „	$P_2(\xi, \eta)$	$P_2(\xi_2, \eta_2)$
212	11 „	proprowadzonej.	poprowadzonej.
219	11 od góry	odległość	odległości
223	4 od dołu	lineatu	lineału
252	4 „	$C' = \frac{1}{A}[(Aa_2 + Bb_2)^2 + AC - B^2)b_2^2].$	$C' = \frac{1}{A}[(Aa_2 + Bb_2)^2 + (AC - B^2)b_2^2].$
261	8 od góry	$\frac{\Delta'^2_{k'}}{\delta'_{k'}} = \frac{1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \frac{\Delta^2_k}{\delta^3_k}$	$\frac{\Delta'^2_{k'}}{\delta'^3_{k'}} = \frac{1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \frac{\Delta^2_k}{\delta^3_k}$
262	1 „	$N'_{1,k',} \sin^2\theta' = N_{1,k} \sin^2\theta,$	$N'_{1,k'} \sin^2\theta' = N_{1,k} \sin^2\theta,$
266	1 „	XIII.	Rozdział XIII.
275	7 „	$C\left(y - \frac{Bx + E}{c}\right)^2 + \frac{-2k''x + \delta'}{c} = 0,$	$C\left(Y + \frac{Bx + E}{C}\right)^2 + \frac{-k'x + \delta'}{C} = 0,$

Str.	*wiersz*	*zamiast*	*ma być*
275	11 od góry	$Y^2 - \frac{2k''}{lm^2} X^2 = 0.$	$Y^2 - \frac{2k'' m^2}{l} X = 0.$
275	13 „	$p = \frac{k''}{lm^2}$	$p = \frac{k'' m^2}{l}$
283	8 „	$r = \sqrt{a^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\,\bar{b}\cos\theta},$	$r = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\,\bar{b}\cos\theta},$
291	1 od dołu	$[A(x - r\lambda) + B(y - r\mu) +$ $+ D]\lambda + [B(x - r\lambda) +$ $+ C(y - r\mu) + E] = 0$	$[A(x - r\lambda) + B(y - r\mu) +$ $+ D]\lambda + [B(x - r\lambda) +$ $+ C(y - r\mu) + E]\mu = 0$
356	2 od góry	$\rho = a^2,$	$\rho = \bar{a}^2,$
356	4 „	$m = \varepsilon i \frac{\bar{c}}{b},$	$m = \varepsilon i \frac{\bar{c}}{\bar{b}},$
356	10 „	$n = \varepsilon' b,$	$n = \varepsilon' \bar{b},$
356	7 od dołu	$\rho = b^2,$	$\rho = \bar{b}^2,$
356	5 „	$l = \varepsilon \frac{\bar{c}}{a},$	$l = \varepsilon \frac{\bar{c}}{\bar{a}},$
356	2 „	$a = -ln = -n\varepsilon \frac{\bar{c}}{a},$	$a = -ln = -n\varepsilon \frac{\bar{c}}{\bar{a}},$
357	11 „	$m = \varepsilon i \frac{c}{b},$	$m = \varepsilon i \frac{\bar{c}}{\bar{b}},$
357	9 „	$n^2(m^2 - 1) = a^2,$	$n^2(m^2 - 1) = \bar{a}^2,$
357	8 „	$n^2 = -b^2,$	$n^2 = -\bar{b}^2,$
357	4 „	$b = \varepsilon\varepsilon' c,$	$b = \varepsilon\varepsilon' \bar{c},$
358	6 od góry	$n^2 = \bar{b}^2,$	$n^2 = -\bar{a}^2,$
358	8 od dołu	$m = \varepsilon \frac{\bar{c}}{b},$	$m = \varepsilon \frac{\bar{c}}{\bar{b}}.$
359	3 od góry	$l = \varepsilon \frac{\bar{c}}{a},$	$l = \frac{\bar{c}}{\bar{a}},$
359	5 „	$n = \varepsilon' a,$	$n = \varepsilon' \bar{a},$

ROZDZIAŁ I.

Układy spółrzędnych na linji prostej.

1. Odcinki i wektory na linji prostej.

Uważajmy linję prostą i oznaczmy ją literą l. Dwa dowolne punkty A, B prostej l wyznaczają *odcinek*, który oznaczamy przez AB lub BA, i którego *końcami* są te punkty. Uważajmy znów dwa dowolne punkty C, D prostej l. Teorja mierzenia odcinków uczy wyznaczać jednoznacznie pewną liczbę μ *miarę odcinka AB przy jednostce odcinku CD*. Liczba μ jest *wymierną* wtedy i tylko wtedy gdy odcinki są współmierne, *niewymierną* wtedy i tylko wtedy gdy są niewspółmierne. Oznaczając miarę odcinka AB przez $m(AB)$ mamy zatem

$$m(AB) = \mu. \tag{1}$$

Przypuśćmy teraz, że A i B oznaczają *tensam* punkt na prostej l. Mówimy, że punkty A i B się *zlewają*, w przeciwnym razie, że są *od siebie odmienne*. Przez dwa punkty będziemy naogół rozumieli dwa punkty dla których albo jeden albo drugi przypadek zachodzi. Punkty A i B zlewające się wyznaczają odcinek *niewłaściwy*, w przeciwieństwie do punktów od siebie odmiennych, które wyznaczają odcinek *właściwy*. W pierwszym przypadku jedynym punktem odcinka jest punkt A lub B. Jako *miarę* odcinka niewłaściwego przyjmujemy liczbę *zero*, dlatego odcinek taki nazywa się odcinkiem *zerowym*.

Nazwijmy *przyległymi* dwa odcinki mające jeden koniec wspólny np. AB, BC. Są one przyległe *zewnętrznie* gdy prócz B nie mają innego punktu wspólnego, *wewnętrznie* w przeciwnym przypadku. W teorji mierzenia odcinków dowodzi się następującego twierdzenia:

„Odcinek AC, który się nazywa *sumą* odcinków przyległych zewnętrznie AB i BC ma miarę równą sumie miar tych odcinków“.

Wprowadzimy teraz pojęcie *wektorów* na prostej l. W tym celu uważajmy pewien *porządek następstwa* obu końców odcinka właściwego A, B. Odcinek właściwy, którego końce następują po sobie w pewnym porządku: A, B lub B, A nazywamy *odcinkiem skierowanym* lub *wektorem* i oznaczamy przez AB względnie przez BA. Dwa wektory AB i BA nazywają się *sobie przeciwne*. *Pierwszy* z końców wektora nazywamy jego *początkiem*, a *drugi końcem*, rozumiejąc to słowo w nowym sensie. Odcinek niewłaściwy możemy też nazywać *wektorem niewłaściwym* w odróżnieniu od *wektorów właściwych*.

Każdy wektor właściwy AB wyznacza na prostej l pewien *porządek następstwa* punktów prostej. Dwom wektorom AB i BA sobie przeciwnym odpowiadają *dwa przeciwne sobie* porządki następstwa punktów na prostej l.

Prostą na której obraliśmy pewien porządek następstwa punktów nazywa się prostą skierowaną lub *osią* (axe). Każdej prostej odpowiadają więc dwie osie *sobie przeciwne*. Mówimy też że mamy na prostej dwa przeciwne sobie *kierunki obiegu*.

Uważajmy znów prostą l i osie l_1 i l_2 sobie przeciwne odpowiadające tej prostej. Obierzmy jednę z tych osi np. l_1. Wektor AB nazywa się *dodatnim* jeżeli ma kierunek osi l_1, w przeciwnym razie *ujemnym*. *Wartością* (valeur) wektora AB nazywa się liczba *względna*, której wartość bezwzględna równa się mierze odcinka w jednostce danej CD, a która jest dodatnia lub ujemna zależnie od tego, czy wektor jest dodatni czy ujemny. Oznaczamy przez $v(AB)$ wartość wektora AB. Jeżeli ona równa się λ mamy jako definicja

$$v(AB) = \lambda. \tag{2}$$

Krócej wartość oznaczymy przez $\overline{AB}$.

2. Układy spółrzędnych Kartezjusza na prostej.

Obierzmy na prostej l dowolny punkt oznaczając go literą O. Dzieli on prostą na dwa *ramiona* (demi-droites) r_1 i r_2, których *początkiem* jest wspólny punkt O. Każdemu punktowi A prostej odpowiada wektor OA. Wektory te *współpoczątkowe* dzielimy na dwie kategorje, zależnie od tego, czy koniec A leży na ramieniu r_1 czy na ramieniu r_2, przyczem wektor niewłaściwy OO uważamy za należący do obu kategoryj.

Obierzmy na prostej l pewien kierunek obiegu, tj. pewną oś. Nazwiemy *dodatniem* ramieniem to z ramion r_1, r_2, dla którego początek O jest *pierwszym* punktem ramienia, a *ujemnem* to ramię, dla którego O jest *ostatnim* punktem ramienia. Niechaj r_1 będzie dodatniem, a r_2 ujemnem ramieniem. Ramiona te będziemy też oznaczać przez r_+ i r_-.

Uważajmy na ramieniu r_1 dowolny punkt J odmienny od O, i mierzmy odcinki na prostej l odcinkiem OJ *jednostkowym*. Punkt J nazwiemy *punktem jednostkowym*.

Każdy wektor OA o początku O ma teraz pewną wartość, która jest dodatnia, jeżeli A leży na ramieniu r_+ i jest różne od O, ujemna jeżeli A leży na ramieniu r_- i jest różne od O, zerowa jeżeli A schodzi się z O. *Naodwrót* do danej à priori dowolnej liczby względnej λ należy jeden i tylko jeden punkt A, dla którego spełniony jest warunek (2), tj. należy jeden i tylko jeden z wektorów współpoczątkowych, którego wartość równa się λ.

Wektor OA należący do punktu A nazywamy *odciętą Kartezjusza*, albo krótko *odciętą* (abscisse)[1] punktu A, albo też *spółrzędną Kartezjusza*, krótko *spółrzędną* (coordonnée). Nazwami tymi oznaczamy też wartość wektora OA, którą raczej powinno nazywać się *wartością odciętej* lub *spółrzędnej*. Początek ramion O nazywamy *początkiem układu spółrzędnych Kartezjusza* (origine des coordonnées). Oś obraną na prostej l nazywamy *osią Kartezjusza* (axe des coordonnées) i oznaczamy przez x. Odcinek jednostkowy OJ nazywamy *jednostką (miary) układu spółrzędnych Kartezjusza.*

Układ Kartezjusza na prostej jest więc dany, jeżeli dany jest jego początek O, jednostka miary OJ i kierunek dodatni na prostej, tj. dana oś.

Spółrzędne punktów stale obranych na osi spółrzędnych Kartezjusza oznaczamy zwykle pierwszymi literami abecadła $a, b, \ldots$ zaś spółrzędne punktów zmiennych ostatnimi literami abecadła $x, y, \ldots$

3. Odcinki i wektory w układzie spółrzędnych Kartezjusza.

Wprowadźmy na prostej l układ U spółrzędnych Kartezjusza. Uważajmy dowolny wektor AB na osi x. Załóżmy nasamprzód, że wektor ten jest *dodatni*. Zależnie od położenia punktów A i B możemy odróżnić 5 następujących przypadków:

---

[1] Nazwa odciętej pochodzi od Apollonjusza z Pergi w III wieku przed Chr., który w dziele „τὰ κωνικὰ" odcina (ἀποτέμνειν) odcinki na osi przechodzącej przez wierzchołek krzywej drugiego stopnia. Stąd pochodzi nazwa „abscissa" używana przez tłómaczy Apollonjusza.

1. A i B leżą na dodatniem ramieniu osi spółrzędnych.
2. A leży na ramieniu ujemnem, a B na ramieniu dodatniem.
3. A i B leżą na ramieniu ujemnem.
4. A zlewa się z początkiem O, a więc B leży na ramieniu dodatniem.
5. B zlewa się z początkiem O, a więc A leży na ramieniu ujemnem.

Uważajmy przypadek pierwszy. Ponieważ A leży pomiędzy O i B, więc odcinek OB jest sumą odcinków OA i AB. Mamy więc równość

$$m(OB) = m(OA) + m(AB).$$

Wektory OA i OB są dodatnie, a więc jeżeli oznaczymy przez a i b wartości wektorów OA i OB

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b$$

mamy

$$m(OA) = a, \quad m(OB) = b.$$

Mamy więc równość

$$m(AB) = b - a. \tag{3}$$

Ale wektor AB jest dodatni, więc dochodzimy do wzoru

$$\overline{AB} = b - a. \tag{4}$$

W drugim przypadku O leży między A i B, więc AO, OB AB są dodatnie. Mamy więc

$$m(AB) = m(AO) + m(OB).$$

Mamy dalej

$$m(AO) = m(OA) = -\overline{OA} = -a$$

$$m(OB) = \overline{OB} = b,$$

dochodzimy więc znów do równości (3) i (4).

W trzecim przypadku B leży między A i O mamy więc równość

$$m(AO) = m(AB) + m(BO),$$

a ponieważ teraz mamy

$$m(AO) = -a, \quad m(BO) = -b,$$

więc znów dochodzimy do równości (3) i (4).

W czwartym i w piątym przypadku mamy również wzory (3) i (4), albowiem w czwartym przypadku mamy

$$m(AB) = \overline{AB} = \overline{OB} = b,$$

$$m(OA) = a = o,$$

a w piątym

$$m(AB) = \overline{AB} = \overline{AO} = -a,$$

$$m(OB) = b = o.$$

Załóżmy teraz, że wektor AB jest *ujemny*. Wówczas wektor BA jest dodatni. A więc mamy

$$\overline{BA} = a - b,$$

zatem dochodzimy do wzorów

$$m(AB) = a - b, \tag{3*}$$

$$\overline{AB} = b - a. \tag{4*}$$

Widzimy więc, że na wartość wektora AB otrzymujemy ten sam wzór (4).

Wreszcie dla odcinków zerowych mamy

$$a = b,$$

a więc wzory (3) i (4) ważne są i w tym szczególnym przypadku.

Możemy więc wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1: „Miara odcinka AB równa się bezwzględnej wartości różnicy spółrzędnych końców odcinka. Wartość wektora AB równa się różnicy spółrzędnej końca i spółrzędnej początku wektora“.

Uważajmy dowolną liczbę $n \geqq 2$ dowolnych punktów na osi spółrzędnych x, oznaczając je odpowiednio literami $A_1, A_2, \ldots A_n$. Niechaj spółrzędne tych punktów będą odpowiednio $a_1, a_2, \ldots a_n$. Uważajmy następujący ciąg wektorów

$$A_1 A_2, \; A_2 A_3 \ldots \; A_{i-1} A_i, \; A_i A_{i+1}, \ldots A_{n-1} A_n. \tag{5}$$

Dwa wektory $A_{i-1} A_i$, $A_i A_{i+1}$ następujące po sobie bezpośrednio w tym ciągu, tj. takie że koniec pierwszego jest zarazem początkiem drugiego nazywają się *przyległe* a ciąg *ciągiem wektorów przyległych*.

Sumą wektorów ciągu wektorów przyległych, albo *wektorem wypadkowym* (vecteur résultant) nazywamy wektor $A_1 A_n$, którego początkiem jest początek pierwszego wektora, a końcem koniec ostatniego wektora ciągu (5).

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 2: „Wartość wektora wypadkowego ciągu wektorów przyległych równa się sumie wartości tych wektorów. Mamy więc wzór

$$\overline{A_1 A_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_i A_{i+1}}.\text{“} \tag{6}$$

Uzasadnimy wzór ten metodą indukcji matematycznej. Uważajmy więc nasamprzód dwa wektory przyległe $A_1 A_2$, $A_2 A_3$. Mamy

$$\overline{A_1 A_2} = a_2 - a_1,$$
$$\overline{A_2 A_3} = a_3 - a_2,$$
$$\overline{A_1 A_3} = a_3 - a_1;$$

ale mamy

$$(a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) = a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = a_3 - a_1,$$

a więc

$$\overline{A_1 A_3} = \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3}. \tag{7}$$

Załóżmy teraz słuszność wzoru, który otrzymujemy ze wzoru (6), zastępując w nim n przez $n - 1$ tj. wzoru

$$\overline{A_1 A_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-2} \overline{A_i A_{i+1}}. \tag{8}$$

Uważajmy trzy wektory $\overline{A_1 A_{n-1}}$, $\overline{A_{n-1} A_n}$ i $\overline{A_1 A_n}$. Mamy więc stosując wzór (7)

$$\overline{A_1 A_n} = \overline{A_1 A_{n-1}} + \overline{A_{n-1} A_n}. \tag{9}$$

Ze wzorów (8) i (9) wynika wzór (6). Ponieważ wzór ten jest słuszny dla $n = 2$, a słuszność jego dla dowolnej liczby wektorów przyległych pociąga za sobą słuszność wzoru dla liczby o jedność większej, więc wzór ten jest ogólnie słuszny.

W tym szczególnym przypadku, w którym punkty A_1 i A_n zlewają się ze sobą, wektor $\overline{A_1 A_n}$ jest zerowy, a ciąg (5) nazywa się *ciągiem zamkniętym.* Wzór (6) napiszemy w tym wypadku w postaci

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_i A_{i+1}} = 0, \tag{10}$$

przyczem $A_n = A_1$. Mamy więc

Twierdzenie 3: „Suma wartości wektorów ciągu zamkniętego równa się zeru“.

4. Przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza na linji prostej.

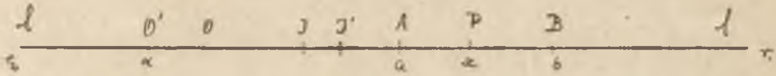

Fig. 1.

Uważajmy na prostej l pewien układ U, określony pewnym początkiem O, pewnym dodatnim kierunkiem na prostej l i pewną jednostką miary OJ. *Przekształceniem układu U w układ U'*, nazywamy zastąpienie układu U przez układ U', określony pewnym początkiem O', pewnym dodatnim kierunkiem i pewną jednostką miary $O'J'$. Przekształcenie nazywamy *identycznem*, jeżeli wszystkie trzy dane są w obu układach tesame.

Przekształceniami elementarnemi układów będziemy nazywali przekształcenia, w których zmieniamy tylko jednę daną nie zmieniając innych dwóch danych. Mamy więc trzy przekształcenia elementarne.

Pierwszem przekształceniem elementarnem nazywamy przekształcenie, w którem początek O zastępujemy innym początkiem O', nie zmieniając dodatniego kierunku ani jednostki miary. Oznaczmy przez x i x' spółrzędne dowolnego punktu P prostej l w układach U i U'. Aby znaleźć związek zachodzący pomiędzy tymi spółrzędnymi, musimy znać położenie punktu O' względem punktu O, a więc spółrzędną Kartezjusza punktu O' w układzie U. Oznaczmy przez

$$\overline{AB}_x \text{ i } \overline{AB}_{x'},$$

wartości wektora AB w obu układach U i U' spółrzędnych. Niechaj α będzie spółrzędna punktu O' w układzie U

$$\alpha = \overline{OO'}_x .$$

Mamy więc równość

$$\overline{OO'}_x + \overline{O'P}_x = \overline{OP}_x ,$$

a więc

$$\overline{O'P}_x = x - \alpha .$$

Ale mamy

$$\overline{O'P}_x = \overline{O'P}_{x'} ,$$

albowiem jednostka miary jest w obu układach tasama i kierunek dodatni tensam. Otrzymujemy więc związek

$$x' = x - \alpha, \tag{11}$$

zachodzący między spółrzędnymi x, x' punktu P w *pierwszem* przekształceniu.

Drugie przekształcenie elementarne polega na tem, że jako nowy kierunek dodatni obieramy kierunek przeciwny kierunkowi dodatniemu układu U. Wartość wektora OP równa się w układzie U' ujemnej wartości tego wektora w układzie U, tj. mamy związek

$$x' = -x \tag{12}$$

zachodzący pomiędzy spółrzędnymi punktu P w *drugiem* przekształceniu.

Trzecie przekształcenie elementarne polega na tem, że zmieniamy tylko jednostkę miary. Niechaj J' będzie nowym punktem jednostkowym, a więc OJ' nową jednostką miary. Niechaj $m'(AB)$ oznacza miarę odcinka AB w nowej jednostce miary.

Otóż teorja mierzenia odcinków uczy, że jeżeli μ jest miarą odcinka AB w jednostce miary CD, zaś ν miarą odcinka CD w jednostce miary EF, natenczas miara μ' odcinka AB w jednostce miary EF równa się $\mu\nu$

$$\mu' = \mu\nu. \tag{13}$$

Stosując to do odcinka OP otrzymujemy związek następujący

$$m'(OP) = m(OP)\, m'(OJ).$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\nu = m'(OJ)$$

i zważając, że wektor OP jest w obu układach tegosamego znaku mamy równość

$$\overline{O'P_{x'}} = \nu\, \overline{OP_x},$$

a więc mamy związek

$$x' = \nu x \tag{14}$$

pomiędzy spółrzędnymi Kartezjusza punktu P w *trzeciem* przekształceniu.

Oznaczmy przez ν' miarę nowej jednostki miary OJ' w dawnej jednostce miary OJ

$$\nu' = m(OJ').$$

Mamy związek

$$\nu\nu' = 1, \tag{15}$$

otrzymujący się ze związku

$$m'(OP) = m(OP) . m'(OJ)$$

uważając jako punkt P nowy jednostkowy punkt J'.

Wzory (11) i (14) są słuszne w przypadku przekształcenia identycznego, jeżeli we wzorach tych położymy $\alpha = 0$ względnie $\nu = 1$.

Ze wzorów (11), (12) i (14) wyrazimy spółrzędną x punktu P przez spółrzędną x' tegoż punktu. Otrzymujemy wzory

$$x = x' + \alpha \tag{11'}$$

$$x = -x' \tag{12'}$$

$$x = \nu' x'. \tag{14'}$$

Wyznaczymy teraz związki między wartością wektora AB w obu układach. Niechaj a, b będą spółrzędne punktów A, B w układzie U, zaś a', b' spółrzędne w układzie U'.

W pierwszem przekształceniu elementarnem mamy

$$a' = a - \alpha, \quad b' = b - \alpha,$$

więc

$$b' - a' = b - a,$$

a więc

$$\overline{AB}_{x'} = \overline{AB}_x. \tag{16}$$

W drugiem przekształceniu elementarnem mamy

$$a' = -a, \quad b' = -b,$$

więc

$$\overline{AB}_{x'} = -\overline{AB}_x. \tag{17}$$

W trzeciem przekształceniu elementarnem mamy

$$a' = \nu a, \quad b = \nu b,$$

więc

$$\overline{AB}_{x'} = \nu\, \overline{AB}_x. \tag{18}$$

Uważajmy teraz takie przekształcenie układu Kartezjusza, w którem zmieniamy więcej aniżeli jednę daną. Przypuśćmy nasamprzód, że zmieniamy tylko dwie dane danego układu. Aby otrzymać związek zachodzący pomiędzy spółrzędnymi x i x' punktu P postępujemy w sposób następujący. Wprowadzamy trzeci pomocniczy układ spółrzędnych Kartezjusza U'', który otrzymujesię z układu spółrzędnych U przez zmianę tylko jednej z tych dwóch danych, które podlegają zmianie. Przytem tę daną obieramy dowolnie. Oznaczmy przez x'' spółrzędne w układzie U''. Od układu U'' przechodzimy następnie do układu U' zmieniając drugą daną. Otrzymujemy w ten sposób zupełnie oznaczony wzór dający związek pomiędzy spółrzędnymi x i x', zastępując we wzorze wyrażającym x' przez x'' spółrzędną x'' przez jej wyrażenie w spółrzędnej x.

Nazywamy *funkcją linjową* zmiennej x wyrażenie

$$x' = ax + b, \tag{19}$$

w którem a i b są *spółczynnikami funkcji*. Uważamy drugą funkcję linjową

$$x'' = a'x' + b' \tag{20}$$

o zmiennej x', a o spółczynnikach a', b'. Zastępując w tej funkcji x' przez wyrażenie (20) otrzymamy

$$x'' = a'(ax + b) + b' = a'ax + a'b + b',$$

a więc *nową funkcję linjową* o spółczynnikach

$$a'' = aa', \quad b'' = a'b + b'.$$

$$x'' = a''x + b''. \tag{21}$$

Funkcja x'' nazywa się funkcją *wypadkową* obu funkcji (19) i (20).

Stosując to do przekształceń układów Kartezjusza widzimy, że na spółrzędną x' wyrażoną przez spółrzędną x otrzymujemy *funkcję linjową*. Przytem spółczynnik przy x w tej funkcji jest od zera odmienny, albowiem równa on się iloczynowi spółczynników przy zmiennych w obu wzorach pomocniczych, ale wszystkie trzy spółczynniki przy x we wzorach elementarnych (11). (12), (14) są od zera odmienne.

Uważamy nareszcie przekształcenie układu spółrzędnych U, w którem zmieniamy *wszystkie trzy dane*. Posługujemy się dwoma układami pomocniczymi U'' i U'''. Przechodzimy od układu U do do układu U'' zmieniając tylko jedną dowolną daną układu U. Następnie zmieniamy drugą daną, przechodząc od U'' do układu U'''. Wreszcie zmieniamy trzecią daną, otrzymując nowy układ U'.

Aby otrzymać wyrażenie na spółrzędną x' punktu P w spółrzędnej x tegoż punktu, wyrażamy x' przez x''', x''' przez x'', nareszcie x'' przez x. Z tego co powiedzieliśmy wynika, że wzór ten jest zawsze postaci

$$x' = ax + b, \tag{22}$$

przytem liczba a jest od zera odmienna, a mianowicie jest teraz ujemna.

Mamy zatem na *każde* przekształcenie układu spółrzędnych wzór (22), w którym to wzorze a jest od zera odmienne i dodatnie, jeżeli nie zmieniamy osi, ujemne jeżeli oś zmieniamy.

Dla danego przekształcenia układu wzór (22) jest oznaczony w zupełności t. j. nie zależy od obioru układów pomocniczych. Gdyby bowiem prócz wzoru (22) zachodził jeszcze wzór

$$x' = \overline{a}x + \overline{b}.$$

mielibyśmy odejmując stronami

$$(a - \overline{a})\,x + b - \overline{b} = 0$$

dla wszystkich x, a więc stąd otrzymujemy

$$\overline{a} = a, \quad \overline{b} = b.$$

Możemy rezultaty te zawrzeć w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie 4: „Spółrzędna x' w układzie przekształconym jest funkcją linjową spółrzędnej x układu pierwotnego w zupełności określoną“.

Uważajmy znów wzór (22) zakładając, że we wzorze tym liczby a i b są to liczby dowolne dane z tem tylko ograniczeniem, że a jest od zera odmienne. Twierdzimy, że istnieje *jeden jedyny* układ U' taki że x' wyraża się wzorem (22) przez x.

Okażemy nasamprzód, że istnieje najwyżej jeden taki układ. Gdyby bowiem istniały dwa układy U' i $\overline{U}'$, natenczas oznaczając spółrzędne w tych układach przez x' i $\overline{x}'$ mielibyśmy

$$x' = ax + b, \quad \overline{x}' = ax + b,$$

a więc

$$x' = \overline{x}'.$$

Zatem układy te mają ten sam początek, tę samą jednostkę miary i ten sam dodatni kierunek, czyli że są identyczne.

Przypuśćmy teraz nasamprzód, że liczba a jest dodatnia, i wprowadźmy układ pomocniczy U'', którego początkiem jest początek O układu U i który ma ten sam dodatni kierunek, ale w którym mierzymy odcinki nową jednostką miary OJ'' tak obraną, że miarą dawnej jednostki miary OJ w nowej jednostce OJ'' jest liczba a.

Mamy

$$x'' = a\,x.$$

Wprowadźmy następnie nowy układ U' pierwszem przekształceniem elementarnem z układu U'', przyjmując jako początek O' punkt, który ma w układzie U'' spółrzędną $-b$. Mamy więc

$$x' = x'' + b,$$

a stąd otrzymujemy wzór (22).

Przypuśćmy teraz, że mamy nierówność $a < 0$. W układzie pomocniczym U'' spółrzędna x'' wyraża się przez x wzorem

$$x'' = -x.$$

Mamy zatem wzór

$$x' = -a\,x'' + b.$$

Ale $-a$ jest liczbą dodatnią, więc na podstawie tego cośmy dopiero co udowodnili możemy przejść od układu U'' do takiego układu U', dla którego zachodzi wzór powyższy. Zatem pomiędzy spółrzędną x' w układzie U' a spółrzędną x w układzie U zachodzi wzór (22).

Możemy więc wypowiedzieć:

Twierdzenie 5: „Do każdego wzoru (22), w którym spółczynnik przy x jest od zera odmienny, należy jeden i tylko jeden układ U', którego spółrzędna x' wyraża się tym wzorem przez spółrzędną x układu U“.

5. Spółrzędne Möbius'a na linji prostej.

Uważajmy na prostej l układ Kartezjusza U. Obierzmy dwa dowolne od siebie odmienne punkty A i B o spółrzędnych a i b. Uważajmy dalej dowolny zmienny od punktu B odmienny punkt P o spółrzędnej x. Oznaczając przez λ stosunek wartości wektorów AP i BP mamy

$$\lambda = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}. \tag{23}$$

Otrzymamy więc wzór

$$\lambda = \frac{x - a}{x - b}, \tag{24}$$

który dla każdej wartości na x od b odmiennej daje zupełnie oznaczoną wartość na λ.

Ze wzoru (24) możemy wyrazić x w zależności od λ. Mamy

$$\lambda(x - b) = x - a$$

$$x(\lambda - 1) = b\lambda - a,$$

a więc zakładając, że λ *nie równa się jedności* otrzymujemy na x wzór następujący

$$\lambda = \frac{a - b\lambda}{1 - \lambda}. \tag{25}$$

x

Każdej od 1 odmiennej wartości na λ odpowiada wzorem (25) oznaczona od b odmienna wartość na x, która wstawiona we wzór daje na λ ową daną wartość. Naodwrót wartość na λ odpowiadająca dowolnej liczbie $x \neq b$ jest od 1 odmienna i wstawiona we wzór (25) daje właśnie tę liczbę.

Liczbę λ określoną wzorem (24) nazywa się *spółrzędną Möbius'a*[1]) punktu P w układzie U Kartezjusza. Spółrzędna ta jest w zupełności określona, jeżeli prócz układu U dane są na prostej l dwa od siebie odmienne punkty A i B, *punkty fundamentalne* układu spółrzędnych Möbius'a. Wektor AB, którego początkiem jest pierwszy punkt fundamentalny, a końcem drugi punkt fundamentalny nazywa się *wektorem fundamentalnym*.

Okażemy teraz, że spółrzędna Möbius'a λ danego punktu P *nie zależy* od obioru układu Kartezjusza. Przekształćmy układ U na układ U' i niechaj między spółrzędnymi x i x' punktu P w tych układach zachodzi związek

$$x' = \alpha x + \beta.$$

Stąd otrzymamy, oznaczając przez a' i b' spółrzędne Kartezjusza punktów fundamentalnych A i B w układzie U

$$a' = \alpha a + \beta, \quad b' = \alpha b + \beta,$$

---

[1]) Spółrzędne te wprowadził Möbius w dziele „Der barycentrische Calcul“ w r. 1827.

a więc

$$\frac{x'-a'}{x'-b'}=\frac{x-a}{x-b}.$$

Dochodzimy zatem do wzoru

$$\lambda'=\lambda, \tag{26}$$

który wyraża nasze twierdzenie

Naodwrót do danego λ należy oznaczony punkt P *niezależnie* od układu Kartezjusza. W istocie mamy

$$\frac{a'-b'\lambda}{1-\lambda}=\frac{\alpha a+\beta-(\alpha b+\beta)\lambda}{1-\lambda}=\alpha\frac{a-b\lambda}{1-\lambda}+\beta,$$

a więc

$$x'=\alpha x+\beta.$$

Mamy zatem następujące

Twierdzenie 6: „Przy danych punktach fundamentalnych należy do danego punktu P oznaczona spółrzędna Möbiusa niezależnie od obioru układu Kartezjusza i naodwrót do danej spółrzędnej Möbiusa należy oznaczony punkt niezależnie od obioru układu Kartezjusza“.

Możemy więc mówić o *układzie Möbius'a* na prostej.

Mierząc wektory AP i BP jednostką miary AB mamy

$$\begin{gathered}\overline{AC}=\lambda\,\overline{BC}=\lambda(\overline{AC}-\overline{AB})\\ \overline{AC}=-\frac{\lambda}{1-\lambda}\,\overline{AB}=-\frac{\lambda}{1-\lambda},\\ \overline{BC}=-\frac{1}{1-\lambda}\,\overline{AB}=-\frac{1}{1-\lambda}.\end{gathered}\tag{27}$$

Punkt P może względem punktów A i B zajmować jedno z pięciu położeń następujących

1. P leży na tem ramieniu linji prostej, którego początkiem jest B i na którem nie leży A, i jest odmienny od B
2. P leży na tem ramieniu linji prostej, którego początkiem jest A i na którem nie leży B, i jest odmienny od A.
3. P leży pomiędzy A i B.
4. P schodzi się z A.
5. P schodzi się z B.

W przypadku 1. spółrzędna λ spełnia widocznie nierówność

$$\lambda<1,$$

albowiem wartości wektorów AP i BP są liczbami tegosamego znaku a miary ich spełniają nierówność

$$m(AP) > m(BP).$$

W przypadku 2. dochodzimy w tensam sposób do nierówności

$$1 > \lambda > 0.$$

W przypadku 3. wartości wektorów AP i BP są liczbami o przeciwnych znakach, a więc λ spełnia nierówność

$$\lambda < 0.$$

W przypadku 4. mamy widocznie

$$\lambda = 0.$$

Nareszcie przypadkowi 5. nie odpowiada żadna wartość na λ.

Uważajmy teraz dwa punkty P_1, P_2 oba odmienne od punktu B o spółrzędnych Kartezjusza x_1, x_2 i o spółrzędnych Möbius'a λ_1, λ_2. Mamy

$$x_1 = \frac{a - b\lambda_1}{1 - \lambda_1}, \quad x_2 = \frac{a - b\lambda_2}{1 - \lambda_2}$$

a więc

$$x_2 - x_1 = \frac{a - b\lambda_2}{1 - \lambda_2} - \frac{a - b\lambda_1}{1 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{(a - b\lambda_2)(1 - \lambda_1) - (a - b\lambda_1)(1 - \lambda_2)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} = \frac{(a - b)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}.$$

Mamy więc wzór

$$\overline{P_1 P_2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} \overline{AB}. \tag{28}$$

6. Stosunki podwójnego podziału czterech punktów na linji prostej.

Uważajmy cztery punkty od siebie odmienne A, B, C, D na prostej l. Przyjmijmy pierwsze dwa punkty A, B jako punkty fundamentalne układu spółrzędnych Möbius'a na tej prostej i oznaczmy przez λ_C, λ_D spółrzędne Möbius'a punktów C i D. Uważajmy stosunek

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_D}.$$

Mamy

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_D} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \tag{29}$$

Wyrażenie figurujące z prawej strony wzoru tego nazywa się *stosunkiem podwójnego podziału*¹) czterech punktów A, B, C, D albo *stosunkiem anharmonicznym* (rapport anharmonique).

Oznaczmy je symbolem $(ABCD)$

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}. \tag{30}$$

Oznaczmy przez a, b, c, d spółrzędne Kartezjusza punktów A, B, C, D. Wstawiając w prawą stronę wzoru (30) wyrażenia na wartości wektorów w spółrzędnych Kartezjusza otrzymujemy wzór

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}. \tag{31}$$

Z czterech liter A, B, C, D możemy utworzyć $4! = 24$ permutacyj, którym to permutacjom odpowiada tyleż permutacyj czterech punktów oznaczonych tymi literami. Niechaj $LMNP$ będzie pewną dowolną z tych permutacyj. Mamy

$$(LMNP) = \frac{\overline{LN}}{\overline{MN}} : \frac{\overline{LP}}{\overline{MP}}. \tag{32}$$

Otrzymujemy więc 24 stosunków podwójnego podziału, które oznaczymy w dowolnym porządku przez $s_1, s_2, \ldots s_{24}$. Stosunki te zależą od czterech liczb a, b, c, d, a więc należy się spodziewać, że pomiędzy niemi istnieją pewne związki *niezależne* od a, b, c, d.

Łatwo odrazu podać pewne permutacje $LMNP$ dla których $(LMNP)$ w prosty sposób wyraża się przez $(ABCD)$, który to stosunek oznaczymy przez s. Przestawiając A z B otrzymamy stosunek $(BACD)$, w którym poprzednik i następnik są odwrotnościami poprzednika i następnika dla $(ABCD)$. Mamy więc

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{s}. \tag{33}$$

---

¹) Pojęcie to występuje już w dziele Pappus'a (III wiek po Chr.) „Συναγωγή μαθηματική“ w postaci $\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$. Nazwa „stosunek podwójnego podziału“ „Doppelschnittverhältnis“ pochodzi od Möbiusa, a „stosunku anharmonicznego“ od Chasles'a: „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie“ 1837. Wzór (31) pochodzi od Möbius'a. Angielska nazwa jest cross ratio.

Przestawmy dalej litery C z D. Otrzymamy

$$(ABDC)=\frac{1}{(ABCD)}=\frac{1}{s}. \tag{34}$$

Stąd wynika, że przestawiając równocześnie A z B i C z D otrzymamy permutację $BADC$, dla której zachodzi związek

$$(BADC)=(ABCD)=s. \tag{35}$$

Przestawmy teraz litery A z C i B z D, tj. przemieńmy ze sobą pary punktów A, B i C, D. Otrzymamy permutację $CDAB$ dla której mamy

$$(CDAB)=\frac{a-c}{a-d}:\frac{b-c}{b-d}=\frac{c-a}{d-a}:\frac{c-b}{d-b}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

Dochodzimy zatem do wzoru

$$(CDAB)=(ABCD)=s. \tag{36}$$

Stąd wynikają następujące wzory

$$(DCAB)=\frac{1}{(ABCD)}=\frac{1}{s}, \tag{37}$$

$$(CDBA)=\frac{1}{(ABCD)}=\frac{1}{s}, \tag{38}$$

$$(DCBA)=(ABCD)=s. \tag{39}$$

Wzory (33—39) dają nam wartości siedmiu stosunków podwójnego podziału wyrażone przez wartość s stosunku $(ABCD)$, a mianowicie stosunków, odpowiadających tym permutacjom, w których każda z dwóch par liter A, B i C, D zajmuje jednę z dwóch par miejsc 1 2 lub 3, 4.

Otrzymany rezultat zawrzemy w twierdzeniu

Twierdzenie 7: „Stosunek podwójnego podziału czterech punktów $ABCD$ nie zmieni się, jeżeli przestawimy litery A z B i C z D, albo parę AB odpowiednio z parą CD, albo też równocześnie przestawimy pary liter AB, CD i litery w każdej parze.

Stosunek podwójnego podziału równa się odwrotności stosunku $(ABCD)$ jeżeli przestawimy A z B, albo C z D, albo przestawimy pary AB i CD i nadto przestawimy litery jednej i tylko jednej z tych par".

Uważajmy teraz dowolną permutację $LMNP$. Z tego co powiedzieliśmy wynika, że przez odpowiednie przestawianie liter możemy otrzymać taką permutację $AQRS$, w której A figuruje na pierwszem miejscu i której odpowiada stosunek podwójnego podziału równy stosunkowi $(LMNP)$

$$(AQRS) = (LMNP). \tag{40}$$

Naodwrót do dowolnej permutacji $AQRS$, której pierwszą literą jest A można znaleźć taką permutację $LMNP$, której pierwszą literą jest dowolna z liter B, C, D i taką że zachodzi równość (40).

Rezultat ten możemy zawrzeć w twierdzeniu

Twierdzenie 8: „Możemy wszystkie permutacje podzielić na 4 grupy (A), (B), (C), (D) różniące się początkową literą i zawierające po 6 permutacyj. Każdej z tych grup odpowiada *tych samych* 6 stosunków podwójnego podziału".

Uważajmy teraz dowolną permutację $LMNP$. Nazwijmy odpowiednio *pierwszem, drugiem* i *trzeciem* przestawieniem przestawienie liter odpowiednio 1-szej z 2-gą, 2-giej z 3-cią i 3-ciej z 4-tą i oznaczmy te operacje odpowiednio przez O_1, O_2, O_3. Przestawienia O_1 i O_3 przeprowadzają daną permutację w takie permutacje, którym odpowiadające stosunki podwójnego podziału równają się *odwrotności* stosunku należącego do danej permutacji.

Uważajmy teraz O_2 i np. permutację $ABCD$. Mamy

$$(ACBD) = \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{(b-a)(d-c)}{(b-c)(d-a)},$$

$$(b-a)(d-c) = bd - ad - bc + ac = (b-c)(d-a) + (c-a)(d-b),$$

a więc mamy

$$(ACBD) = 1 - (ABCD).$$

Uważajmy grupę (A) permutacyj

$$ABCD,\ ACBD,\ ABDC,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB. \tag{41}$$

Otrzymujemy z pierwszej permutacji 5 dalszych permutacyj wykonywając odpowiednio następujące operacje

$$O_2,\quad O_3,\quad O_2\,O_3,\quad O_3\,O_2,\quad O_3\,O_2\,O_3. \tag{42}$$

Ostatnią permutację możemy też otrzymać przez wykonanie operacyj kolejno $O_2\,O_3\,O_2$. Przytem porządek operacyj jest od lewej do prawej.

Oznaczając przez s stosunek podwójnego podziału $(ABCD)$, otrzymamy następujące wyrażenia stosunków podwójnego podziału należących do permutacyj (41)

$$s,\quad 1-s,\quad \frac{1}{s},\quad \frac{1}{1-s},\quad \frac{s-1}{s},\quad \frac{s}{s-1}. \tag{43}$$

Dochodzimy więc do następującego twierdzenia

Twierdzenie 9: „Oznaczając przez s stosunek podwójnego podziału należący do dowolnie obranej permutacji $(LMNP)$ otrzymamy na stosunek podwójnego podziału należący do dowolnej permitacji jedno z wyrażeń ciągu (43). A mianowicie sześciu permutacjom *każdej* z 4 grup odpowiada 6 wartości stosunków podwójnego podziału tworzących ciąg (43)“.

W wyrazeniach (43) figurują w mianownikach liczby s i $s-1$. Liczby te są zawsze od zera odmienne, jeżeli 4 punkty A, B, C, D są od siebie odmienne, albowiem wszystkie różnice figurujące w wzorze (31) są od zera odmienne, a nie może być

$$\frac{c-a}{c-b}=\frac{d-a}{d-b},$$

inaczej mielibyśmy

$$(c-a)(d-b)=(c-b)(d-a)$$

$$-ad-bc=-bd-ac,$$

więc

$$(b-a)(d-c)=o,$$

co nie zachodzi.

7. Własności stosunków podwójnego podziału czterech punktów.

Wyrażenia (43) sześciu stosunków podwójnego podziału są wszystkie od siebie *odmienne*, tj. żadne dwa nie dają się w siebie przekształcić. W istocie, okażemy że tylko dla pewnych szczególnych wartości na s, dwa stosunki podwójnego podziału (43) mogą mieć tesame wartości. Możemy założyć, że jeden z tych stosunków jest s.

A więc mamy spełnioną przynajmniej jednę z następujących 5 równości

$$\begin{aligned}
s &= 1 - s && \text{czyli} \quad s = \frac{1}{2}, \\
s &= \frac{1}{s} && \text{czyli} \quad s = \pm 1, \\
s &= \frac{1}{1 - s} && \text{czyli} \quad s^2 - s + 1 = 0, \\
s &= \frac{s - 1}{s} && \text{czyli} \quad s^2 - s + 1 = 0, \\
s &= \frac{s}{s - 1} && \text{czyli} \quad s = 2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Pierwiastki równania drugiego stopnia na s

$$s^2 - s + 1 = 0 \tag{45}$$

są to liczby zespolone

$$s = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

A więc otrzymujemy trzy i tylko trzy wartości rzeczywiste na s, które spełniają warunek naszego zagadnienia

$$s = \frac{1}{2}, \quad -1, 2 \tag{46}$$

Ale wśród wartości na stosunki podwójnego podziału czterech dowolnych byleby od siebie odmiennych punktów istnieją zawsze zarówno liczby dodatnie jak ujemne. W istocie mamy

$$s + (1 - s) = 1,$$

a więc zawsze przynajmniej jeden stosunek podwójnego podziału jest *dodatni*. A ponieważ mamy

$$s \,.\, (1 - s) \,.\, \frac{s - 1}{s} = -1,$$

więc zawsze przynajmniej jeden stosunek podwójnego podziału jest *ujemny*. Mamy dalej

$$s \,.\, \frac{1}{s} = 1,$$

a więc zawsze przynajmniej jeden stosunek podwójnego podziału zawarty jest *między* 0 *a* 1 i przynajmniej jeden jest *większy niż* 1.

Jeżeli więc dwa stosunki podwójnego podziału mają wartości sobie równe, natenczas wśród sześciu wartości stosunków zachodzą się zawsze *równocześnie* wszystkie 3 liczby — 1, $\frac{1}{2}$, 2. Zatem trzy przypadki (46) nie są istotnie różne od siebie, lecz różnią się obiorem tego stosunku, którego wartość oznaczamy przez s.

Czwórkę punktów posiadających omawianą własność nazywamy *czwórką harmoniczną* (division harmonique), a stosunki podwójnego podziału *stosunkami harmonicznymi* (rapport harmonique). Przez tę nazwę rozumie się jednak zwykle przypadek gdy mamy

$$(ABCD) = -1.$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie

Twierdzenie 10: „Dwa stosunki podwójnego podziału ciągu (43) są sobie równe tylko dla czwórek harmonicznych punktów i mają wówczas wartości —1, $\frac{1}{2}$ i 1“.

W przypadku gdy stosunek podwójnego podziału jest ujemny, liczby λ_C i λ_D mają znaki przeciwne. A więc jeden z punktów C, D leży wewnątrz odcinka AB, a drugi zewnątrz tego odcinka. Ale wówczas też jeden z punktów A, B leży wewnątrz odcinka CD, a drugi zewnątrz tego odcinka, co zresztą wynika drogą rachunku z tego, że wartość stosunku podwójnego podziału się nie zmieni, jeżeli przemienimy ze sobą pary punktów AB i CD. Mówimy, że pary te *krzyżują się*, a punkty każdej pary nazywamy *sprzężonemi ze sobą* (points conjugues). W przypadku czwórki harmonicznej mówimy, że para punktów *CD dzieli harmonicznie* odcinek AB i naodwrót. Mamy wówczas

$$\frac{c-a}{c-b} + \frac{d-a}{d-b} = 0,$$

$$(c-a)(d-b) + (c-b)(d-a) = 0,$$

$$2(ab+cd) - (a+b)(c+d) = 0. \qquad (48)$$

Uważajmy trzy od siebie odmienne punkty A, B, C i dowolną liczbę s od zera odmienną. Istnieje zupełnie oznaczony punkt D taki, że mamy $(ABCD) = s$.

W istocie mamy

$$\lambda_D = \frac{\lambda_C}{s},$$

a więc λ_D jest liczbą zupełnie oznaczoną. Zatem gdy s nie równa się $\lambda_c = \frac{c-a}{c-b}$, istnieje zupełnie oznaczony punkt D. dla którego mamy $(ABCD) = s$. Punkt ten schodzi się z punktem C, jeżeli mamy $s = 1$.

8. Przekształcenie punktów na linji prostej.

Fig. 2.

Przekształceniem lub *transformacją* punktów na linji prostej nazywamy następującą operację. Uważajmy układ U Kartezjusza na prostej l i dowolny punkt P spółrzędnej x. Przyporządkowujemy temu punktowi pewien oznaczony punkt P' tej prostej, którego spółrzędna *w tym samym układzie spółrzędnych* niechaj będzie x. Punkt P' nazywa się *przekształconym* lub *transformowanym* punktu P.

Wyobraźmy sobie, że mamy dwie linje proste l i l' położone jedna na drugiej. Punkty prostej l są nieruchome, natomiast punkty prostej l' są ruchome i mogą poruszać się wzdłuż prostej nieruchomej l. Przekształcenie punktów prostej l możemy uzmysłowić sobie w ten sposób, że punkt prostej l', który schodzi się z punktem P prostej l przesuwamy wzdłuż l, aż zejdzie się z punktem P prostej l.

Będziemy uważali następujące trzy przekształcenia *elementarne* prostej l:

Pierwsze przekształcenie elementarne polegać będzie na tem, że początkowi O układu spółrzędnych na prostej l przyporządkowujemy punkt O', którego spółrzędna równa się dowolnie danej liczbie α

$$\overline{OO'} = \alpha.$$

Dowolnemu punktowi P prostej l przyporządkowujemy punkt P' taki, że wektory OP i $O'P'$ mają równe wartości

$$\overline{OP} = \overline{O'P'}.$$

Ponieważ mamy

$$\overline{OO'} + \overline{O'P'} = \overline{OP'},$$

więc pomiędzy spółrzędnymi x, x' punktów P, P' mamy związek następujący

$$x' = x + \alpha.$$

Widoczna że przekształcenie prostej l polega na tem, że punkty prostej l' przesuwają się o jeden i tensam wektor, albowiem wartość PP' równa się stałej liczbie α.

Uważajmy dwa punkty A, B prostej l. Punktom tym niechaj odpowiadają punkty A', B'. Mamy pomiędzy spółrzędnymi tych punktów związki

$$a' = a + \alpha, \quad b' = b + \alpha,$$

a więc

$$b' - a' = b - a.$$

Zatem mamy

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

Dla dowolnego punktu C i jego punktu przekształconego C' mamy

$$\overline{A'C'} = \overline{AC}, \quad \overline{B'C'} = \overline{BC},$$

więc punkt C' leży na odcinku $A'B'$, jeżeli C leży na odcinku AB i żaden punkt nie leżący na AB nie przechodzi w punkt odcinka $A'B'$.

Przekształcenie prostej l' polega więc na tem, że tę prostą przesuwamy o długość α, przyczem prosta ta jest uważana jako ciało sztywne. Dlatego przekształcenie to nazywa się *przesunięciem* albo *translacją.*

Drugie przekształcenie elementarne polegać będzie na tem, że początek O przechodzi w siebie t. j. punkt O' schodzi się z punktem O, zaś punktowi dowolnemu P przyporządkowujemy punkt P' taki, że wektory OP i $O'P'$ mają wartości różniące się tylko znakiem. Pomiędzy spółrzędnymi x, x' punktów P, P' mamy zatem wzór

$$x' = -x. \tag{50}$$

Punktom A, B odpowiadają punkty A', B' o spółrzędnych spełniających warunki

$$a' = -a, \quad b' = -b.$$

Mamy więc równość

$$\overline{A'B'} = -\overline{AB}.$$

Przekształcenie prostej l polega więc na tem, że każdy punkt prostej l' przechodzi w punkt równo oddalony od punktu O, ale położony z przeciwnej strony tego punktu. W przekształceniu tem liczby $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwnych znaków. Punkt C położony na odcinku AB przechodzi w punkt C' położony na odcinku $A'B'$, albowiem wartości $\overline{A'C'}$ i $\overline{B'C'}$ równają się odpowiednio ujemnym wartościom $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ i tylko punkty położone na odcinku AB przechodzą w punkty odcinka $A'B'$. Przekształcenie to nazywamy *obrotem* albo *rotacją*, albowiem punkty prostej l' przechodzą w nowe położenie przez obrot na płaszczyźnie tej prostej dookoła punktu O o kąt 180^0.

Trzecie przekształcenie elementarne polega na tem, że początek O pozostaje znów niezmieniony, a dowolnemu punktowi P przyporządkujemy taki punkt P', że pomiędzy wartościami $\overline{OP}$ i $\overline{OP'}$ zachodzi związek

$$\overline{OP'} = \nu \,.\, \overline{OP}$$

gdzie ν jest to dowolnie obrana dodatnia liczba. A więc mamy związek

$$x' = \nu x$$

pomiędzy spółrzędnymi x i x' punktów P i P'.

Dwom punktom A, B o spółrzędnych a, b odpowiadają dwa punkty A', B' o spółrzędnych a', b' tak, że zachodzą związki

$$a' = \nu a, \quad b' = \nu b.$$

Mamy więc

$$b' - a' = \nu (b - a).$$

Stosunek wartości $\overline{A'B'}$ i $\overline{AB}$ równa się więc stałej dodatniej liczbie ν. Punkty C odcinka AB przechodzą znów w punkty C' odcinka $A'B'$ i tylko punkty odcinka AB przechodzą w punkty odcinka $A'B'$. Widocznie, że przekształcenie prostej l' jest *rozszerzeniem jednorodnem* tej prostej w przypadku gdy ν jest większe niż 1, zaś *skurczeniem jednorodnem* tej prostej w przypadku gdy ν jest mniejsze niż 1, przyczem punkt prostej l' schodzącej się z punktem O jest nieruchomy. W przypadku $\nu = 1$ mamy przekształcenie tożsamościowe, w którem wszystkie punkty prostej l' przechodzą same w siebie.

Przekształcenie to nazywamy zależnie od wartości liczby ν *rozszerzeniem* albo *dylatacją* lub *skurczeniem* albo *kompresją.*

Ze wzorów (49). (50), (51), otrzymujemy spółrzędną x wyrażoną przez x' w postaci następującej

$$x = x' - \alpha, \tag{52}$$

$$x = -x' \tag{53}$$

$$x = \frac{1}{\nu} x'. \tag{54}$$

Uważajmy teraz następujące przekształcenie. Niechaj punkt prostej ruchowej l' schodzący się pierwotnie z punktem O prostej nieruchomej l przejdzie w punkt schodzący się z punktem O' prostej l. Dowolnemu punktowi P prostej l niechaj odpowiada punkt P' taki że stosunek miar odcinków OP i $O'P'$ równa się danej stałej liczbie ν. Wreszcie niechaj wektory OP i $O'P'$ będą albo stale, tegosamego znaku, albo stale znaków przeciwnych. Łatwo zauważyć, że przekształcenie to można uzyskać, wykonywując po kolei przekształcenia, z których każde jest jednem z trzech przekształceń elementarnych A mianowicie, gdy kierunki wektorów OP i $O'P'$ są zgodne wykonywamy po kolei dwa przekształcenia, pierwsze i trzecie, gdy zaś te kierunki są sobie przeciwne wykonywamy po kolei trzy przekształcenia, pierwsze, drugie i trzecie. Przekształcenia te możemy wykonać w dowolnym porządku. Z twierdzenia o wypadkowej funkcji składania dwóch funkcyj linjowych wynika, że otrzymamy na x' wzór kształtu

$$x' = ax + b, \tag{55}$$

w którym to wzorze a jest liczba od zera odmienna, i jest dodatnia, jeżeli nie wykonywamy drugiego przekształcenia, a ujemna w przypadku przeciwnym.

Punkt P' nie zależy od porządku, w jakim wykonywamy przekształcenia, a wzór (55) jest w zupełności określony. W istocie jeżeli mamy dla innego porządku przekształceń

$$\overline{x'} = \overline{a}x + \overline{b},$$

natenczas dla $x = 0$ mamy $x' = \overline{x'}$, więc $b = \overline{b}$, a na $\overline{O'P'}$ mamy wzory ax i $\overline{a}x$, więc $a = \overline{a}$.

Mamy więc

Twierdzenie 11: „Przekształcenie wypadkowe prostej nie zależy od porządku w jakim wykonywamy przekształcenia elementarne i mamy na nie zupełnie oznaczony wzór (55)“.

Przypuśćmy naodwrót, że dany nam jest wzór (55) w którym a i b są to dwie dowolne liczby, ale a jest od zera odmienna. Okażemy, że istnieje jedno i tylko jedno przekształcenie prostej l, przyporządkujące punktowi P o spółrzędnej x punkt P' o spółrzędnej x', danej wzorem (55).

W istocie punktowi O odpowiada punkt O' taki że

$$\overline{OO'} = b.$$

Mamy

$$\overline{O'P'} = x' - b = ax,$$

a więc

$$\overline{O'P'} = a\,\overline{OP}.$$

Zatem stosunki liczb $\overline{OP}$ i $\overline{O'P'}$ są równe stałej liczbie, którą jest bezwzględna wartość liczby a. Jeżeli liczba a jest dodatnia, kierunki wektorów OP i $O'P'$ są zgodne, w przeciwnym razie są sobie przeciwne. A więc przekształcenie linji prostej l jest przez wzór (55) *w zupełności* wyznaczone.

Aby otrzymać to przekształcenie wykonywując przekształcenia należące do poprzednich trzech przekształceń elementarnych postępujemy w sposób następujący. Jeżeli liczba a jest dodatnia, wprowadzamy przekształcenie elementarne pomocnicze określone wzorem

$$x'' = ax,$$

a następnie drugie przekształcenie elementarne pomocnicze określone wzorem

$$x' = x'' + b.$$

Możemy też naodwrót przekształcić nasamprzód prostą l przekształceniem elementarnem pomocniczem

$$x'' = x + \frac{b}{a}$$

a następnie drugiem przekształceniem elementarnem pomocniczem

$$x' = ax''.$$

Jeżeli a jest liczbą ujemną uważamy trzy przekształcenia elementarne pomocnicze, jako które możemy obrać przekształcenia określone wzorami

$$x'' = -ax$$
$$x''' = -x''.$$
$$x' = x''' + b.$$

Rezultaty te zawrzemy w twierdzeniu:

Twierdzenie 12: „Do każdego wzoru (55), w którym a jest liczba od zera odmienna należy zupełnie oznaczone przekształcenie prostej l, dla którego na spółrzędną punktu przekształconego mamy wzór (55)".

Ćwiczenia.

1. Dane są 4 punkty A. B, C, D na osi. Okazać związek Euler'a

$$\overline{AB}\,.\,\overline{CD} + \overline{BC}\,.\,\overline{AD} + \overline{CA}\,.\,\overline{BD} = 0. \tag{1}$$

2. Udowodnić związek Simpson-Stewart

$$\overline{AD^2}\,.\,\overline{BC} + \overline{BD^2}\,.\,\overline{CA} + \overline{CD^2}\,.\,\overline{AB} + \overline{AB}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{CA} = 0. \tag{2}$$

3. Okazać, że jeżeli przez λ oznaczymy stosunek wartości wektorów $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ należących do trzech danych na osi odmiennych od siebie punktów, natenczas pozostałych 5 stosunków wartości dwóch wektorów współpoczątkowych wyraża się wzorami

$$\frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda}.\ 1-\lambda,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}. \tag{3}$$

4. Uważamy przekształcenie układu Kartezjusza dane wzorem

$$x' = ax + b. \tag{4}$$

Zbadać punkty posiadające w obu układach U. U' tesame spółrzędne.

5. Uważamy dwa przekształcenia układu Kartezjusza U dane wzorami (4) i

$$x' = a'x + b'. \tag{5}$$

Zbadać, kiedy niezależnie od porządku w jakim wykonujemy po sobie te dwa przekształcenia, otrzymamy tosamo przekształcenie wypadkowe.

6. *Środkiem odległości proporcjonalnych* (centre des distances proportionnelles) n punktów A_i. $i = 1, 2, \dots n$ na osi dla n danych liczb α_i, $i = 1 \dots n$, których suma $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ jest od zera odmienna nazywa się

punkt A, którego spółrzędna a wyraża się przez spółrzędne a_i, $i = 1 \ldots n$ punktów A_i wzorem

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}. \tag{6}$$

Okazać:

1) Punkt A nie zależy od obioru układu Kartezjusza na prostej.

2) Gdy liczby α_i są wszystkie dodatnie i nie wszystkie A_i zlewają się ze sobą, punkt A leży *wewnątrz* odcinka $A_j A_k$, na którym leżą wszystkie punkty A_i.

3) Gdy $\Sigma \alpha_i > 0$ wyrażenie

$$\Sigma \alpha_i \; \overline{A_i P^2}$$

ma wartość najmniejszą. gdy P jest środkiem A.

7. Uważajmy 3 punkty A, B, C na osi. *Wektorem średnim arytmetycznym* wektorów AB, AC, nazywamy wektor AM dla którego

$$\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}. \tag{7}$$

Wektorami średnimi geometrycznymi wektorów AB. AC nazywamy wektory AG, dla których

$$\overline{AG} = \pm \sqrt{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}} \tag{8}$$

przyczem $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ nie są znaków przeciwnych.

Wektorem średnim harmonicznym wektorów AB, AC nazywamy wektor AH dla którego

$$\frac{1}{AH} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right). \tag{9}$$

Okazać:

1) Wektory średnie arytmetyczny i harmoniczny nie zależą od obioru układu Kartezjusza na prostej.

2) Wektory średnie geometryczne nie zmieniają się gdy we wzorze (22) na przekształcenie układów mamy $a > 0$, zaś przechodzą w siebie, dodatni w ujemny i naodwrót, gdy mamy $a < 0$.

8. Wyprowadzić ze związku Euler'a związki zachodzące pomiędzy stosunkami podwójnego podziału 4 punktów.

9. Wiedząc, że w skali Fahrenheit'a punkt topnienia lodu ma temperaturę 32, a punkt parowania wody temperaturę 212, znaleźć związki między temperaturą w tej skali a w skalach Réaumur'a i Celzjusza.

10. Pomiędzy wektorami AM, AH i AG mamy związek

$$\overline{AM} . \overline{AH} = \overline{AG^2}. \tag{10}$$

11. Stosunek podwójnego podziału $(BCAH)$ jest harmoniczny

$$(BCAH) = -1. \qquad (11)$$

12. Mamy związek

$$\overline{AM}.\overline{HM} = \overline{BM^2} = \overline{CM^2} = \frac{\overline{BC^2}}{4}. \qquad (12)$$

13. Mamy związek

$$\overline{MA}.\overline{HB}.\overline{HC} + \overline{MH}.\overline{AB}.\overline{AC} = 0. \qquad (13)$$

14. Jeżeli M i M' połowią odcinki AB i CD, gdzie $(ABCD) = -1$, mamy

$$\frac{\overline{AC^2}}{\overline{BC^2}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}}. \qquad (14)$$

$$\overline{BC^2} = 2\,\overline{BM'}.\overline{MD}. \qquad (15)$$

$$\overline{MM'^2} = \overline{AM^2} + \overline{CM'^2}. \qquad (16)$$

15. Dane są na osi x 4 punkty P_1, P_2, P_2, P_4 o spółrzędnych Möbiusa λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Wyrazić stosunek podwójnego podziału $(P_1 P_2 P_3 P_4)$, przez te spółrzędne.

16. Uważamy dwa przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza, układu U w U' i U' w U''. Na oba te przekształcenia mamy *tensam* wzór

$$x' = ax + b. \qquad (4)$$

Kiedy układy U i U'' są identyczne?

17. Dane są dwa wektory AB, CD. Znaleźć punkt S na osi x taki że mamy

$$\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD} \qquad (17)$$

18. Dla punktu S spełniającego (17) mamy

$$\overline{SA}.\overline{SB} = \frac{\overline{AC}.\overline{AD}.\overline{BC}.\overline{BD}}{(\overline{AC} + \overline{BD})^2}. \qquad (18)$$

19. Dane są 7 punktów na osi x A, B, C, D, E, F, G. Oznaczając przez δ, ε, φ, χ stosunki podwójnego podziału

$$(ABCD) = \delta, \quad (ABCE) = \varepsilon, \quad (ABCF) = \varphi, \quad (ABCG) = \chi,$$

okazać że mamy

$$(DEFG) = (\delta\varepsilon\varphi\chi). \qquad (19)$$

Należy się oprzeć na wzorze oczywistym

$$(ABCD)(ABDE)(ABEC) = 1. \qquad (20)$$

ROZDZIAŁ II.

Układy spółrzędnych Kartezjusza na płaszczyznie.

1. Pęki prostych i pęki promieni na płaszczyznie.

Uważajmy dowolną płaszczyznę Π i dowolny punkt O tej płaszczyzny. Zbiór prostych tej płaszczyzny przechodzących przez punkt O tworzy *pęk prostych* (faisceau de droites), którego *wierzchołkiem* (centre) jest ten punkt. Punkt O dzieli każdą prostą na 2 części, *ramiona* albo *promienie* (rayon) których jest *początkiem*. Zbiór tych promieni tworzy *pęk promieni*. Na każdej prostej l pęku mamy dwa *kierunki obiegu*. Obrawszy jeden z tych dwóch kierunków możemy odróżnić od siebie oba ramiona w następujący sposób. Na jednem ramieniu punkty następują po sobie w ten sposób, że początek O ramienia jest *pierwszym* punktem ramienia, a na drugiem ramieniu następują one w ten sposób, że początek ten jest *ostatnim* punktem ramienia.

2. Kąty dwóch ramion pęku.

Uważajmy znów pęk promieni o wierzchołku O, oznaczając go przez (O). Obierzmy dowolny odcinek właściwy AB jako jednostkę miary odcinków i uważajmy koło *jednostkowe* K, którego środkiem jest O a którego promień ma miarę równą obranej jednostce miary. Uważajmy dwa dowolne ramiona r_1, r_2 pęku. Przecinają one koło w dwóch punktach A, B. Punkty te wyznaczą na kole K dwa *łuki*, spełniające się do obwodu koła, które oznaczamy przez AB, których wspólnymi *końcami* są te punkty. W przypadku, gdy się oba punkty zlewają mamy łuk *niewłaściwy*, którego jedynym punktem jest ten punkt i łuk *pełny*, do którego należą wszystkie punkty koła. W przypadku punktów A i B od siebie odmiennych uważajmy dowolny punkt C odmienny od obu tych punktów. Punkt ten wyznacza ten z obu łuków AB, na którym leży. Łuk ten oznaczymy przez ACB.

Możemy *mierzyć* łuki obraną jednostką miary odcinków. Rezultatem mierzenia jest liczba bezwzględna od zera odmienna, która nazywa się *miarą* łuku AB przy obranej jednostce i którą oznaczymy przez $m(AB)$. Suma miar obu łuków spełniających się do obwodu koła równa się liczbie 2π. Jako miarę łuku niewłaściwego przyjmujemy liczbę 0, dlatego łuk taki nazywamy *zerowym*.

Uważajmy teraz figurę utworzoną przez dwa ramiona r_1 i r_2. W przypadku gdy te ramiona są od siebie odmienne, figura ta określa nam dwa *kąty* na płaszczyznie, których *wierzchołkiem* jest punkt O, a *ramionami* ramiona r_1 i r_2. Każdy z dwóch łuków AB wyznacza nam oznaczony z tych dwóch kątów. Jeżeli przez r_3 oznaczymy ramię pęku przechodzące przez punkt C, natenczas kąt odpowiadający łukowi ACB wyznacza nam trójka ramion $r_1\,r_3\,r_2$. W przypadku, gdy ramiona r_1 i r_2 schodzą się ze sobą określają one dwa kąty, mianowicie kąt odpowiadający łukowi zerowemu, kąt *niewłaściwy* albo *zerowy* i kąt *pełny*. odpowiadający łukowi pełnemu czyli obwodowi koła.

Kąt ramion r_1 i r_2 oznaczamy przez $\sphericalangle(r_1, r_2)$. Wprowadzimy teraz pojęcie *miary* kąta. Rozumiemy przez to liczbę równą mierze łuku należącego do tego kąta. Miarę oznaczymy też przez $\sphericalangle(r_1, r_2)$. Suma miar obu kątów $\sphericalangle(r_1, r_2)$ jest 2π. Kąty zerowy i pełny mają odpowiednio miary 0 i 2π. Gdy ramiona r_1 i r_2 są odmienne od siebie i nie leżą w tejsamej prostej, jeden jest mniejszy od π a drugi większy od π, gdy zaś leżą na tejsamej prostej równają się oba π. W pierwszym przypadku mamy kąt *wklęsły* i *wypukły*, w drugim kąty *półpełne*.

Wprowadzimy teraz pojęcie *łuków skierowanych* na kole K uważając końce AB łuku w pewnym porządku. Dla łuku AB punkt A jest początkiem łuku, a punkt B końcem; naodwrót dla łuku BA. Każde 3 punkty od siebie odmienne A, B, C wyznaczają zatem łuk skierowany, którego początkiem jest A, końcem B i na którem leży punkt C. Każdy łuk skierowany wyznacza pewien *porządek następstwa* punktów na obwodzie koła, który nazywa się *porządkiem cyklicznym*. Mamy na kole dwa *przeciwne* porządki cykliczne, odpowiadające łukom ACB i BCA. albo dwa przeciwne *kierunki obiegu* na obwodzie koła.

Wprowadzimy teraz pojęcie *wartości łuków*. W tym celu obieramy jeden z dwóch kierunków obiegu na obwodzie koła, nazywając go *dodatnim*, a przeciwny *ujemnym*. Wartością łuku właściwego AB nazywamy liczbę względną, która jest *dodatnia* gdy łuk jest *dodatni*, tj. porządek ACB jest dodatni, a *ujemna*, gdy łuk jest *ujemny*, tj. porządek ACB jest ujemny i której wartość bezwzględna równa się mierze łuku. Wartość oznaczymy przez $v(AB)$ albo krócej przez $\overline{AB}$. Wartością łuku zerowego nazywamy jego miarę, wartością łuku pełnego *dodatniego* liczbę $+2\pi$, jeżeli przez łuk pełny dodatni rozumiemy obwód koła z dodatnim kierunkiem obiegu, a długością łuku pełnego *ujemnego* liczbę -2π, jeżeli przez ten łuk rozumiemy obwód z ujemnym kierunkiem obiegu. Gdy dany jest porządek na kole, będziemy łuk AB dodatni nie pełny oznaczali przez AB_+, łuk ujemny nie pełny przez AB_-, wartości zaś odpowiednio przez $\overline{AB_+}$ i $\overline{AB_-}$.

Łukom skierowanym odpowiadają *kąty skierowane*, których *pierwszem* ramieniem jest ramię r_1, a *drugiem* ramię r_2. Każde trzy ramiona r_1, r_2, r_3 przechodzące przez punkty A, B, C od siebie odmienne, wyznaczają *kąt skierowany* odpowiadający łukowi ACB. Dwom porządkom cyklicznym na kole odpowiadają dwa *porządki cykliczne w pęku ramion*, albo dwa *kierunki obrotu* ramienia ruchomego w pęku. Kąt skierowany piszemy $\sphericalangle(r_1, r_2)$ względnie $\sphericalangle(r_2, r_1)$ zależnie od tego które ramię jest pierwsze i mówimy o kącie *drugiego ramienia z ramieniem pierwszem*.

Możemy teraz wprowadzić pojęcia kątów *dodatnich* i *ujemnych* i *wartości* kąta. Kąt jest dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy odpowiedni łuk AB jest dodatni czy też ujemny. Wartością kąta nazywamy liczbę równą wartości odpowiedniego łuku AB i oznaczamy podobnie jak sam kąt przez

$$\sphericalangle(r_1, r_2).$$

Dwom od siebie odmiennym punktom A, B na kole K odpowiadają dwa łuki skierowane AB, z których jeden jest dodatni, a drugi ujemny. Dwom od siebie odmiennym ramionom r_1 i r_2 odpowiadają dwa od siebie odmienne kąty $\sphericalangle(r_1, r_2)$, z których jeden jest dodatni, a drugi ujemny. Kąty te odróżniamy od siebie pisząc

$$\sphericalangle(r_1, r_2)_+ \quad \text{i} \quad \sphericalangle(r_1, r_2)_-$$

i temisamemi symbolami oznaczymy też wartości tych kątów. Wprowadzimy dalej pojęcie wartości kąta zerowego, rozumiejąc przez to wartość odpowiedniego łuku koła, a więc liczbę zero. W tym przypadku oznaczamy kąty jak i w przypadku ogólnym i mamy

$$\sphericalangle(r_1, r_2)_+ = \sphericalangle(r_1, r_2)_- = 0.$$

Nareszcie mamy kąty *pełne dodatnie* i *ujemne*, o wartościach $+2\pi$ i -2π, rozumiejąc przez to kąty pełne z dodatnim względnie ujemnym kierunkiem obrotu w pęku ramion.

Dwa łuki mające jeden koniec wspólny nazywamy *przyległe*. taksamo dwa łuki skierowane takie że koniec jednego jest początkiem drugiego nazywamy *przyległe*. Taksamo ma się rzecz dla kątów,

Uważajmy znów dwa ramiona r_1, r_2 od siebie odmienne. Ramiona te zawierają pomiędzy sobą cztery kąty

$$\sphericalangle(r_1, r_2)_+, \quad \sphericalangle(r_1, r_2)_-,$$
$$\sphericalangle(r_2, r_1)_+, \quad \sphericalangle(r_2, r_1)_-.$$

Pomiędzy tymi kątami mamy związki następujące

$$\sphericalangle(r_2, r_1)_- = -\sphericalangle(r_1, r_2)_+, \tag{1}$$
$$\sphericalangle(r_2, r_1)_+ = -\sphericalangle(r_1, r_2)_-. \tag{2}$$

Mamy dalej związki następujące

$$\sphericalangle(r_1, r_2)_+ + \sphericalangle(r_2, r_1)_+ = 2\pi, \tag{3}$$
$$\sphericalangle(r_1, r_2)_- + \sphericalangle(r_2, r_1)_- = -2\pi. \tag{4}$$

Ze związków (1) i (4) otrzymujemy wzór

$$\sphericalangle(r_1, r_2)_- = \sphericalangle(r_1, r_2)_+ - 2\pi, \tag{5}$$

a ze związku (3) wzór

$$\sphericalangle(r_2, r_1)_+ = 2\pi - \sphericalangle(r_1, r_2)_+. \tag{6}$$

Uogólnimy teraz pojęcie łuku na kole. Uważajmy znów dwa dowolne punkty A i B i wyobraźmy sobie, że ruchomy punkt P porusza się po kole K w pewnym oznaczonym kierunku aż od położenia A przejdzie do położenia B. Załóżmy, że w ciągu ruchu punkt P schodzi się pewną liczbą $n \geqq 1$ razy z punktem B. Każdym dwom punktom A, B i każdej liczbie $n \geqq 1$ z wyjątkiem przypadku w którym punkty A i B schodzą się ze sobą i $n = 1$ odpowiada pewien oznaczony obieg punktu P w uważanym kierunku. Mówimy, że mamy łuk $\overline{AB}$ *odpowiadający liczbie* $n \geqq 1$ i danemu kierunkowi obiegu koła K. Umówimy się dalej, że w wyjątkowym przypadku liczbie $n = 1$ odpowiada łuk zerowy $\overline{AB}$. Ponieważ możemy przyjąć, że ruchomy punkt P opisuje nasamprzód $n-1$ razy obwód koła K a następnie łuk $\overline{AB}$, przeto *wartością* łuku $\overline{AB}$ odpowiadającego liczbie n będziemy nazywali sumę wartości $n-1$ obwodów koła obieganych w uważanym kierunku i wartości łuku $\overline{AB}$ odpowiadającego temuż kierunkowi. Oznaczając przez $\overline{AB}^{n-1}_{+}$ i przez $\overline{AB}^{n-1}_{-}$ wartości dodatnich i ujemnych łuków $\overline{AB}$ odpowiadających liczbie n mamy zatem

$$\overline{AB}^{n-1}_{+} = \overline{AB}_{+} + 2\pi(n-1) \tag{7}$$

$$\overline{AB}^{n-1}_{-} = \overline{AB}_{-} - 2\pi(n-1), \tag{8}$$

a w przypadku gdy punkty A i B schodzą się ze sobą mamy

$$\overline{AB}^{0}_{+} = \overline{AB}^{0}_{-} = \overline{AB}_{+} = \overline{AB}_{-} = 0.$$

Wprowadzimy teraz pojęcie kąta jaki ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1 i który *odpowiada* danemu kierunkowi obrotu i *danej liczbie* $n \geqq 1$. Uważamy ramię ruchome r które w pewnym oznaczonym kierunku obraca się od ramienia r_1 do ramienia r_2, przyczem w ciągu obrotu schodzi się pewną liczbą $n \geqq 1$ razy z ramieniem r_2.

Każdemu łukowi $\overline{AB}^{n-1}_{+}$ i każdemu łukowi $\overline{AB}^{n-1}_{-}$ odpowiada pewien obrót ramienia ruchomego r, a więc pewien kąt, który oznaczymy odpowiednio przez

$$\sphericalangle(r_1, r_2)^{n-1}_{+} \text{ i przez } \sphericalangle(r_1, r_2)^{n-1}_{+}.$$

Przez *wartość* takiego kąta rozumiemy wartość odpowiedniego łuku i oznaczymy tymi samymi symbolami. W przypadku, gdy ramiona r_1 i r_2 schodzą się ze sobą rozumiemy przez kąt odpowiadający liczbie $n=1$ kąt zerowy. Mamy więc

$$\sphericalangle(r_1, r_2)^{0}_{+} = \sphericalangle(r_1, r_2)^{0}_{-} = \sphericalangle(r_1, r_2)_{+} = \sphericalangle(r_1, r_2)_{-} = 0.$$

Wprowadzimy teraz pojęcie *ogólnego* kąta, jaki ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1. *Ogólnym* kątem *dodatnim* ramienia r_2 z ramieniem r_1 nazywamy zbiór kątów określonych wzorem

$$\sphericalangle(r_1, r_2)^{n}_{+},$$

gdzie liczba całkowita n przyjmuje wszystkie nieujemne wartości.

Taksamo *ogólnym* kątem *ujemnem* jaki ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1 nazywamy zbiór kątów określonych wzorem

$$\sphericalangle(r_1, r_2)^{n}_{-},$$

gdzie n przyjmuje wszystkie całkowite nieujemne wartości. Nazwy te będą też oznaczać zbiory wartości obu kategoryj kątów. Na wartości te mamy wzory

$$\sphericalangle (r_1, r_2)_+^{n-1} = \sphericalangle (r_1, r_2)_+ + 2\pi (n-1), \tag{9}$$

$$\sphericalangle (r_1, r_2)_-^{n-1} = \sphericalangle (r_1, r_2)_- - 2\pi (n-1). \tag{10}$$

W przypadku ramion r_1 i r_2 od siebie odmiennych wynika ze wzorów (5) i (10) wzór

$$\sphericalangle (r_1, r_2)_-^{n-1} = \sphericalangle (r_1, r_2)_+ - 2\pi n. \tag{11}$$

W przypadku ramion r_1 i r_2 schodzących się mamy wzór

$$\sphericalangle (r_1, r_2)_-^{n-1} = \sphericalangle (r_1, r_2)_+ - 2\pi (n-1). \tag{12}$$

Ogólnym kątem, jaki ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1 nazywamy zbiór wszystkich kątów dodatnich, ujemnych i ewentualnie zerowych jakie ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1.

Nazwą tą będziemy też oznaczać zbiór wartości wszystkich tych kątów. Zbiór ten zawarty jest we wzorze

$$\sphericalangle (r_1, r_2)_+ + 2\pi m,$$

gdzie m oznacza dowolną liczbę całkowitą i naodwrót każdej wartości dodatniej, ujemnej lub zero liczby całkowitej m odpowiada pewna zupełnie oznaczona wartość ogólnego kąta ramienia r_2 z ramieniem r_1. Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$\sphericalangle (r_1, r_2)^m = \sphericalangle (r_1, r_2)_+ + 2\pi m, \tag{13}$$

natenczas mamy dla $m \geqq 0$

$$\sphericalangle (r_1, r_2)^m = \sphericalangle (r_1, r_2)_+^m,$$

a dla $m < 0$

$$\sphericalangle (r_1, r_2)^m = \sphericalangle (r_1, r_2)_-^{-m-1}$$

w przypadku ramion r_1 i r_2 różnych od siebie a

$$\sphericalangle (r_1, r_2)^m = \sphericalangle (r_1, r_2)_-^{-m}$$

w przypadku ramion schodzących się ze sobą. Ogólny kąt ramienia r_2 z ramieniem r_1 możemy więc oznaczyć przez

$$\sphericalangle (r_1, r_2)^m,$$

gdzie m przyjmuje wszystkie wartości całkowite, dodatnie, ujemne i zero.

W zupełnie taki sam sposób określamy ogólny kąt dodatni, ogólny kąt ujemny i ogólny kąt ramienia r_1 z ramieniem r_2. Mamy więc

$$\sphericalangle(r_2, r_1)^m = \sphericalangle(r_2, r_1)_+ + 2\pi m. \tag{14}$$

W przypadku ramion r_1 i r_2 różnych od siebie mamy na podstawie wzoru (6) wzór

$$\begin{aligned}\sphericalangle(r_2, r_1) &= -\sphericalangle(r_1, r_2)_+ + 2\pi(m+1) = \\ &= -\left[\sphericalangle(r_1, r_2)_+ - 2\pi(m+1)\right],\end{aligned}$$

a w przypadku ramion schodzących się ze sobą mamy wzór

$$\sphericalangle(r_2, r_1)^m = \sphericalangle(r_1, r_2)_+ + 2\pi m = -\left[\sphericalangle(r_1, r_2)_+ - 2\pi m\right].$$

Zatem każdemu kątowi niezerowemu ramienia r_1 z ramieniem r_2 odpowiada pewien zupełnie oznaczony niezerowy kąt ramienia r_2 z ramieniem r_1 o tej samej wartości bezwzględnej a o znaku przeciwnym, opisanym przez ramię r wykonujące tensam obrót dokoła wierzchołka 0, ale w kierunku przeciwnym.

Oznaczając ogólne kąty ramienia r_2 z ramieniem r_1 i ramienia r_1 z ramieniem r_2 przez

$$\sphericalangle(r_1, r_2) \quad \text{i} \quad \sphericalangle(r_2, r_1)$$

możemy napisać równość pomiędzy kątami ogólnemi

$$\sphericalangle(r_2, r_1) = -\sphericalangle(r_1, r_2). \tag{15}$$

3. Kąty dwóch prostych pęku.

Uważajmy dwie proste l_1 i l_2 pęku prostych o wierzchołku 0. Na każdej prostej mamy dwa ramiona, a więc mamy cztery kombinacje ramion prostej l_1 z ramionami prostej l_2. Dwa ramiona każdej kombinacji ramion tworzą ze sobą pewne kąty i chodzi o zbadanie związków zachodzących pomiędzy kątami tych 4 kategoryj.

Obierzmy na każdej prostej dodatni kierunek obiegu i oznaczmy przez r_1^+, r_2^+ dodatnie ramiona prostych l_1, l_2, zaś przez r_1^-, r_2^- ramiona ujemne. Obierzmy dalej pewien dodatni kierunek obrotu w pęku. Ramiona prostej l_2 zawierają z ramionami prostej l_1 cztery ogólne kąty, tj. mamy cztery kategorje kątów

$$\sphericalangle(r_1^+, r_2^+), \quad \sphericalangle(r_1^+, r_2^-), \quad \sphericalangle(r_1^-, r_2^+), \quad \sphericalangle(r_1^-, r_2^-),$$

Zbiór tych czterech ogólnych kątów nazywamy *kątem ogólnym* prostej l_2 z prostą l_1, a kąty poszczególne *kątami* prostej l_2 z prostą l_1. Kąt ten ogólny oznaczamy przez

$$\sphericalangle(l_1, l_2).$$

Uważajmy kąt nieujemny, mniejszy niż 2π

$$\sphericalangle(r_1^+, r_2^-)_+.$$

Jeżeli ten kąt jest mniejszy niż π mamy

$$\sphericalangle(r_1^+ r_2^-)_+ + \sphericalangle(r_2^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+ r_2^+)_+,$$

a więc ponieważ

$$\sphericalangle(r_2^-, r_2^+)_+ = \pi$$

mamy

$$\sphericalangle(r_1^+ r_2^-)_+ = \sphericalangle(r_1^+ r_2^+)_+ - \pi. \tag{15}$$

Jeżeli zaś kąt $\sphericalangle(r_1^+, r_2^-)_+$ jest nie mniejszy niż π mamy

$$\sphericalangle(r_1^+. r_2^-)_+ + \sphericalangle(r_2^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+ + 2\pi.$$

więc

$$\sphericalangle(r_1^+, r_2^-)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+ + \pi. \tag{16}$$

Uważajmy dalej kąt

$$\sphericalangle(r_1^-, r_2^+)_+.$$

Mamy, jeżeli kąt ten jest mniejszy niż π

$$\sphericalangle(r_1^+, r_1^-)_+ + \sphericalangle(r_1^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+ r_2^+)_+,$$

a więc

$$\sphericalangle(r_1^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+ - \pi. \tag{17}$$

Jeżeli zaś kąt uważany jest nie mniejszy niż π mamy

$$\sphericalangle(r_1^+ r_1^-)_+ + \sphericalangle(r_1^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+ + 2\pi.$$

a więc

$$\sphericalangle(r_1^-, r_2^+)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+ + \pi. \tag{18}$$

Uważajmy wreszcie kąt

$$\sphericalangle(r_1^-, r_2^-)_+.$$

Widoczna, że kąt ten zarówno co do wartości bezwzględnej jak i co do znaku równa się kątowi

$$\sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+,$$

a więc mamy

$$\sphericalangle(r_1^-, r_2^-)_+ = \sphericalangle(r_1^+, r_2^+)_+. \tag{19}$$

Dochodzimy zatem do tego rezultatu, że jeden z kątów drugiej i jeden z kątów trzeciej kategorji otrzymujemy z jednego z kątów kategorji pierwszej przez dodanie π. Jeden z kątów kategorji czwartej równa się jednemu z kątów kategorji pierwszej. Stąd wynika, że wartości *wszystkich* kątów drugiej i trzeciej kategorji można otrzymać z wartości pewnych kątów pierwszej kategorji przez dodanie π, a wartości wszystkich kątów czwartej kategorji równają się wartościom pewnych kątów pierwszej kategorji. Możemy więc napisać następujące równości między kątami ogólnemi

$$\sphericalangle (r_1^+, r_2^-) = \sphericalangle (r_1^+, r_2^+) + \pi. \tag{20}$$

$$\sphericalangle (r_1^-, r_2^+) = \sphericalangle (r_1^+ \; r_2^+) + \pi. \tag{21}$$

$$\sphericalangle (r_1^-, r_2^-) = \sphericalangle (r_1^+, r_2^+). \tag{22}$$

Zatem możemy napisać ogólny wzór na kąty $\sphericalangle (l_1, l_2)$ w postaci

$$\sphericalangle (l_1, l_2) = \alpha + \pi m. \tag{23}$$

We wzorze tym m jestto dowolna liczba całkowita, zaś α jestto wartość jednego dowolnie obranego kąta prostej l_2 z prostą l_1.

Taksamo otrzymujemy ogólny wzór na kąty $\sphericalangle (l_2, l_1)$, jakie prosta l_1 zawiera z prostą l_2 w postaci

$$\sphericalangle (l_2, l_1) = \overline{\alpha} + \pi \overline{m}, \tag{24}$$

gdzie $\overline{m}$ jestto znów dowolna liczba całkowita, zaś $\overline{\alpha}$ jestto wartość jednego dowolnie obranego z tych kątów.

Ponieważ liczby α i $\overline{\alpha}$ możemy zawsze tak dobrać, by zachodził warunek

$$\overline{\alpha} = -\alpha,$$

więc wzór na kąty $\sphericalangle (l_2, l_1)$ możemy też napisać w postaci

$$\sphericalangle (l_2, l_1) = -\alpha + \pi m. \tag{25}$$

4. Kąty dwóch ramion i kąty dwóch prostych na płaszczyźnie.

Uważajmy dwa pęki ramion na płaszczyźnie, o początkach O i O'. Uważajmy jako odpowiadające sobie w tych pękach dwa ramiona r i r', jeżeli są równoległe i równo skierowane. Pewnemu kierunkowi obrotu w pierwszym pęku odpowiada w ten sposób oznaczony kierunek obrotu w drugim pęku. W ten sposób możemy wprowadzić dodatni kierunek rachowania kątów na płaszczyźnie i ujemny kierunek jemu przeciwny. Jako dodatni kierunek obierzemy kierunek obrotu przeciwny kierunkowi obrotu wskazówki na zegarze.

Uważajmy teraz dwa dowolne ramiona r_1, r_2 na płaszczyźnie o wierzchołkach O_1 i O_2. Aby określić kąty jakie te ramiona zawierają ze sobą uważajmy dowolny punkt O na płaszczyźnie i pęk promieni o tym wierzchołku. Uważamy w tym pęku ramiona r'_1, r'_2 odpowiednio równoległe i równo skierowane z ramionami r_1, r_2. Wprowadzimy pojęcie *kątów ramion* r_1, r_2. Kąty te są z określenia równe odpowiednio kątom ramion r'_1, r'_2. *Kąty ramienia* r_2 *z ramieniem* r_1 są równe kątom ramienia r'_2 z ramieniem r'_1, i analogicznie mają się rzeczy dla kątów ramienia r_1 z ramieniem r_2. Widoczna, że wartości tych kątów nie zależą od obioru punktu O.

Uważajmy teraz dwie dowolne proste l_1 i l_2 na płaszczyźnie i obierzmy na każdej z nich pewien kierunek dodatni.

Obierzmy na prostej l_1 dowolny punkt O_1, a na prostej l_2 dowolny punkt O_2. *Kątami prostych* l_1 *i* l_2 nazywamy kąty należące do czterech kategoryj kątów odpowiadających czterem kombinacjom ramienia prostej l_1 o wierzchołku O_1 z ramieniem prostej l_2 o wierzchołku O_2. *Kątami prostej* l_2 *z prostą* l_1 nazywamy kąty ramion prostej l_2 z ramionami prostej l_1, a *kątami prostej* l_1 *z prostą* l_2 nazywamy kąty ramion prostej l_1 z ramionami prostej l_2. Oznaczamy te kąty odpowiednio przez $\sphericalangle(l_1, l_2)$ i przez $\sphericalangle(l_2, l_1)$.

Przez kąty, jakie zawierają ze sobą *kierunki* dodatnie i ujemne dwóch prostych będziemy rozumieli kąty jakie zawierają ramiona dodatnie i ujemne tych prostych, a przez kąty jakie zawierają ze sobą dwie *osie*, będziemy rozumieli kąty jakie zawierają kierunki dodatnie dwóch prostych.

W przypadku szczególnym, gdy proste l_1 i l_2 są do siebie równoległe, mamy wzory

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \pi m,$$

$$\sphericalangle(l_2, l_1) = \pi m,$$

gdzie m jestto dowolna liczba całkowita.

5. Trzy i więcej ramion na płaszczyźnie i ich kąty.

Uważajmy teraz dowolną liczbę $n \geqq 3$ ramion na płaszczyźnie o dowolnych początkach $O_1, O_2, \dots O_n$. Oznaczmy te ramiona przez $r_1, r_2, \dots r_n$.

Uważajmy ciąg kątów ogólnych

$$\sphericalangle(r_1, r_2),\ \sphericalangle(r_2, r_3), \ldots \sphericalangle(r_{n-1}, r_n). \tag{26}$$

Drugie ramię każdego z tych kątów z wyjątkiem ostatniego kąta jest identyczne z pierwszem ramieniem kąta następnego. Kąty takie nazywają się *przyległe*. Uważajmy dalej kąt ogólny

$$\sphericalangle(r_1, r_n).$$

jaki z pierwszym ramieniem pierwszego kąta (26) zawiera drugie ramię ostatniego kąta tego ciągu.

Udowodnimy związek

$$\sphericalangle(r_1, r_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sphericalangle(r_i, r_{i+1}). \tag{27}$$

Znaczy to, że udowodnimy, że suma dowolnych wartości kątów ogólnych ciągu kątów przyległych (26) równa się pewnej wartości kąta ogólnego $\sphericalangle(r_1, r_n)$ i naodwrót dowolnej wartości tego kąta odpowiadają pewne wartości kątów ciągu (26). tak że zachodzi równość (27). Kąt $\sphericalangle(r_1, r_n)$ nazywa się *sumą kątów przyległych* (26).

Niechaj będzie nasamprzód $n = 3$. Załóżmy nasamprzód, że żadne dwa ramiona z pośród ramion r_1, r_2, r_3 nie są równo skierowane.

Uważajmy dowolny punkt O na płaszczyźnie i trzy ramiona r'_1, r'_2, r'_3 odpowiednio równo skierowane z ramionami r_1, r_2, r_3 o wierzchołku O. W dodatnim kierunku obrotu ruchomego ramienia r' dokoła O następują te ramiona po sobie albo w porządku r'_1, r'_2, r'_3 albo w porządku r'_1, r'_3, r'_2.

Mamy w pierwszym przypadku równość

$$\sphericalangle(r'_1, r'_2)_+ + \sphericalangle(r'_2, r'_3)_+ = \sphericalangle(r'_1, r'_3)_+ \tag{28}$$

a w drugim przypadku równość

$$\sphericalangle(r'_1, r'_3)_+ + \sphericalangle(r'_3, r'_2)_+ = \sphericalangle(r'_1, r'_2)_+.$$

Ale mamy

$$\sphericalangle(r'_3, r'_2)_+ = 2\pi - \sphericalangle(r'_2, r'_3)_+,$$

a więc mamy równość

$$\sphericalangle(r'_1, r'_3)_+ = \sphericalangle(r'_1, r'_2)_+ + \sphericalangle(r'_2, r'_3)_+ - 2\pi. \tag{29}$$

W przypadku, gdy dwa ramiona schodzą się ze sobą łatwo widać, że zachodzi równość (28) w przypadku gdy albo ramiona r'_1 i r'_2 schodzą się ze sobą a ramię r'_3 jest od nich odmienne, albo też ramiona r'_2 i r'_3 się schodzą a ramię r'_1 jest od nich odmienne, albo nareszcie wszystkie trzy ramiona schodzą się ze sobą. W przypadku gdy ramiona r'_1 i r'_3 schodzą się ze sobą, a ramię r'_2 jest od nich odmienne zachodzi równość (29).

Stąd wynika, że wzór (27) na kąty ogólne słuszny jest w szczególnym przypadku, gdy mamy $n = 3$.

Załóżmy teraz, że mamy $n > 3$. Założymy że twierdzenie o które chodzi słuszne jest dla $n - 1$ ramion. Mamy więc równość

$$\sphericalangle(r_1, r_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-2} \sphericalangle(r_i, r_{i+1}). \tag{30}$$

Sumę

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sphericalangle(r_i, r_{i+1})$$

możemy zatem napisać w postaci

$$\sphericalangle(r_1, r_{n-1}) + \sphericalangle(r_{n-1}, r_n)$$

Ale ponieważ twierdzenie o które chodzi słuszne jest dla trzech ramion, więc mamy

$$\sphericalangle(r_1, r_{n-1}) + \sphericalangle(r_{n-1}, r_n) = \sphericalangle(r_1, r_n).$$

Zatem słuszność twierdzenia dla $n - 1$ ramion pociąga słuszność twierdzenia dla n ramion, a ponieważ twierdzenie słuszne jest dla $n = 3$, więc jest ono ogólnie słuszne.

Wzór (27) można też napisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i, r_{i+1}) = 0, \tag{31}$$

rozumiejąc przez r_{n+1} ramię r_1. Nazwijmy ciąg ramion $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, przyległych i takich że ramię r_{n+1} schodzi się z ramieniem r_1 *zamkniętym* ciągiem ramion przyległych, a ciąg kątów *zamkniętym* ciągiem kątów przyleglych.

Nazwijmy dalej kąt ogólny $\sphericalangle(r_1, r_n)$ *wypadkowym* kątem ciągu kątów (26). Możemy wygłosić następujące twierdzenie

Twierdzenie 1. Suma kątów ogólnych ciągu kątów przyległych równa się kątowi ogólnemu wypadkowemu ciągu.

Twierdzenie 2. Suma kątów ogólnych ciągu zamkniętego kątów przyległych równa się ogólnemu kątowi zerowemu, przyczem przez *ogólny kąt zerowy* rozumiemy ogólny kąt jaki zawierają ze sobą dwa ramiona równoległe i równo skierowane.

6. Rzuty punktów i wektorów na osie.

Uważajmy dowolną prostą l na płaszczyźnie i obierzmy na niej dowolny kierunek dodatni.

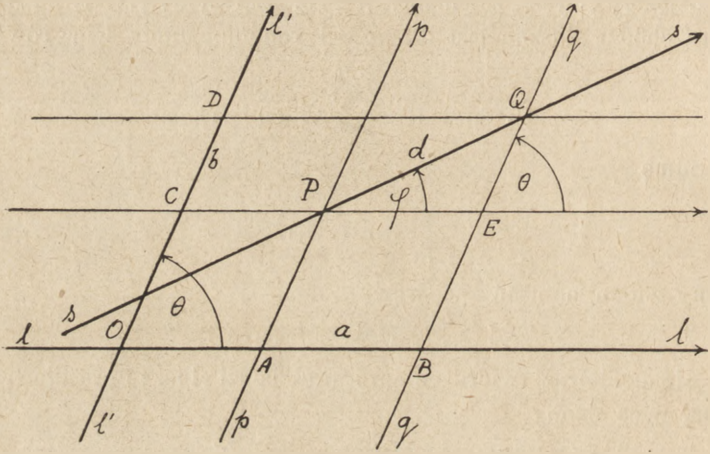

Fig. 3.

Uważajmy drugą dowolną prostą l' nie równoległą do prostej l przecinającą ją w punkcie O i obierzmy na niej dodatni kierunek w ten sposób, aby kąt dodatni θ mniejszy niż 2π, jaki kierunek ten zawiera z dodatnim kierunkiem na l był mniejszy niż π

$$0 < \theta < \pi.$$

Rzutem dowolnego punktu P na oś l *równolegle do osi* l' nazywamy punkt A w którym prosta p przechodząca przez P i równoległa do l' przecina oś l. Oś l nazywa się *osią rzutów*, a oś l' *osią rzutowania*, prosta p *prostą rzutującą*.

Uważajmy teraz dwa dowolne od siebie odmienne punkty P, Q na płaszczyźnie i prostą s przechodzącą przez te dwa punkty i obierzmy na niej pewien kierunek dodatni. *Rzutem wektora* PQ na oś l *równolegle do osi* l' nazywamy wektor AB, którego początek A i koniec B są odpowiednio rzutami początku P i końca Q wektora PQ na tę oś. Oznaczmy przez φ kąt osi s z osią l, kąt nieujemny mniejszy niż 2π, przez d wartość wektora PQ, zaś przez a wartość wektora AB w pewnej dowolnie obranej jednostce miary. Oznaczmy dalej przez p i q proste rzutujące punkty P i Q i obierzmy na nich kierunki dodatnie te same co na prostej l'.

Aby znaleźć związek zachodzący pomiędzy wartościami a i d odróżnimy następujące dwa przypadki:

I. Kąt φ jest mniejszy aniżeli π.

II. Kąt φ nie jest mniejszy aniżeli π.

I. Odróżnimy dwa podprzypadki:

$$1.\ \varphi \leqq \theta, \qquad 2.\ \varphi > \theta.$$

Podprzypadek 1: Załóżmy nasamprzód $d > 0$. Jestto przypadek figury (3). Poprowadźmy przez punkt P oś $\overline{l}$, równoległą i równo skierowaną z osią l i załóżmy nasamprzód, że kąt φ spełnia nierówności

$$0 < \varphi < \theta.$$

Oś $\overline{l}$ przecina oś q w punkcie E. Uważajmy trójkąt $\triangle PQE$. Boki PQ i PE tego trójkąta mają miary d i a, albowiem $\overline{PC} = \overline{AB}$, zaś a jest *dodatnie*. Kąt zewnętrzny przy E trójkąta $\triangle PQE$ jestto kąt $\sphericalangle(\overline{l}, q)_+$ i równa się kątowi θ. Dalej mamy

$$\sphericalangle(EPQ) = \sphericalangle(\overline{l}, s) = \varphi.$$

Mamy więc

$$\sphericalangle(PQE) = \theta - \varphi.$$

Stosując więc wzór sinusowy do trójkąta $\triangle PQE$ mamy proporcję

$$a : d = \sin(\theta - \varphi) : \sin\theta,$$

a stąd otrzymujemy wzór

$$a = d\,\frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta}. \tag{32}$$

Załóżmy teraz $d < 0$ i niechaj znów zachodzą nierówności

$$0 < \varphi < \theta.$$

Uważajmy zamiast wektora PQ wektor QP i jego rzut BA na oś l. Wektory QP i BA są *dodatnie*.

Mamy więc proporcję

$$-a : -d = \sin(\theta - \varphi) : \sin\theta.$$

a więc

$$a : d = \sin(\theta - \varphi) : \sin\theta,$$

a więc otrzymujemy znów wzór (32).

Widoczna, że wzór (32) jest też słuszny w przypadkach kiedy mamy $\varphi = 0$ i $\varphi = \theta$, albowiem w pierwszym przypadku mamy $a = d$, a w drugim $a = o$.

Podprzypadek 2:

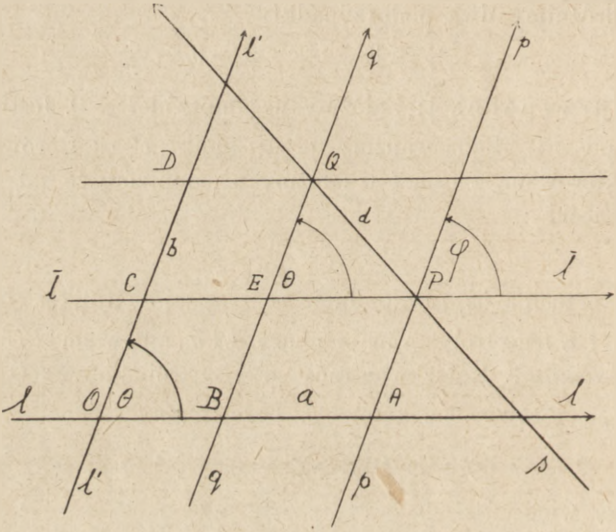

Fig. 4.

Załóżmy znów nasamprzód $d > 0$. Wektor AB rzut wektora PQ jest teraz *ujemny*. Uważajmy znów trójkąt $\triangle PQE$. Boki jego PQ i PE mają miary d i $-a$. Kąt zewnętrzny trójkąta przy P $\sphericalangle(\bar{l}, s)_+$ ma miarę φ, a kąt wewnętrzny przy C $\sphericalangle(\bar{l}, q)_+$ miarę θ. A więc kąt wewnętrzny przy Q ma miarę $\varphi - \theta$. Mamy więc teraz proporcję

$$-a : d = \sin(\varphi - \theta) : \sin\theta.$$

Otrzymujemy znów wzór (32).

Załóżmy teraz $d < 0$. Wektor QP jest teraz dodatni o wartości $-d$, a jego rzut BA na oś l ma wartość $-a$. Zatem wzór (32) jest znów słuszny.

II. Przypadek ten sprowadzamy do przypadku I. zmieniając dodatni kierunek na prostej s na przeciwny. Nowy kierunek dodatni zawiera kąt $\varphi - \pi$ z osią l, a wektor PQ ma na nowej osi wartość $-d$. Mamy teraz proporcję

$$a : -d = \sin[\theta - (\varphi - \pi)] : \sin\theta.$$

Ponieważ

$$\sin[\theta - (\varphi - \pi)] = -\sin(\theta - \varphi),$$

więc dochodzimy znów do wzoru (32).

Zakładaliśmy dotychczas że kąt θ jest mniejszy niż π. Możemy się uwolnić od tego założenia. A mianowicie możemy rozważanie przypadku w którym mamy $\pi < \theta < 2\pi$ sprowadzić do uważanego przypadku, zmieniając na osi l' kierunek dodatni na przeciwny. Mamy

$$\frac{\sin[(\theta - \pi) - \varphi]}{\sin(\theta - \pi)} = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta}.$$

Wzór (32) jest zatem słuszny dla *dowolnego* kąta θ.

Będziemy teraz rzutowali wektor PQ na oś l' *równolegle do osi* l. Rzutem na oś l' jest wektor CD o wartości b. Aby znaleźć związek pomiędzy b i d należy zamienić role osi l i l'. Oś l zawiera z osią l' kąt $-\theta$, albo dodatni kąt $2\pi - \theta$.

Wprowadźmy kąty nieujemne i $< 2\pi$ następujące

$$\theta' = 2\pi - \theta,$$

$$\varphi' = \sphericalangle(l', s)_+$$

Mamy związek między kątami ogólnemi

$$\sphericalangle(l', s) = \sphericalangle(l', l) + \sphericalangle(l, s).$$

Stąd otrzymujemy

$$\varphi' = \theta' + \varphi + 2m\pi,$$

gdzie m jestto pewna liczba całkowita, a mianowicie 0 albo -1.

Stosowanie wzoru (32) daje nam więc wzór

$$b = d\,\frac{\sin(\theta' - \varphi')}{\sin\theta'},$$

a ponieważ

$$\sin(\theta' - \varphi') = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi,$$

$$\sin\theta' = -\sin\theta,$$

więc dochodzimy do wzoru

$$b = d\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}. \tag{33}$$

Szczególnie ważny jest szczególny przypadek, gdy proste l i l' są do siebie *prostopadłe*. Mamy wtedy rzuty *prostopadłe* lub *prostokątne*. Teraz $\theta = \varepsilon \frac{\pi}{2}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$ a więc wzory (32) i (33) dają nam wzory

$$a = d \cos \varphi, \tag{34}$$

$$b = \varepsilon d \sin \varphi. \tag{35}$$

7. Układy osi Kartezjusza na płaszczyźnie.

Aby zapomocą pewnych danych oznaczyć pozycję dowolnego punktu na płaszczyźnie uważamy na płaszczyźnie dwie osie przecinające się które oznaczamy literami x i y i do których odnosimy punkty płaszczyzny. Nazywamy je *osiami Kartezjusza x-ów i y-ów*, a układ ich *układem osi Kartezjusza* (axes coordonnés). Punkt O ich przecięcia nazywamy *początkiem* układu osi Kartezjusza (origine des axes coordonnés).

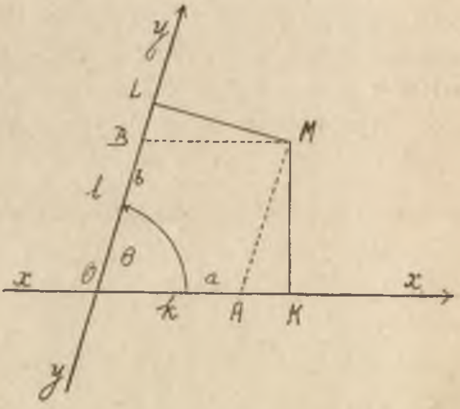

Fig. 5.

Uważajmy dowolny punkt M na płaszczyźnie i rzutujmy go na oś x równolegle do osi y i na oś y równolegle do osi x. Otrzymamy rzuty A i B i wektory OA, OB, których wartości oznaczymy przez a i b

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b.$$

Liczby a, b nazywają się *spółrzędnemi Kartezjusza* (coordonneés cartésiennes) punktu M. Naodwrót należy do każdego układu dwóch liczb a, b jeden i tylko jeden punkt na płaszczyźnie, którego spółrzędnemi Kartezjusza są odpowiednio a i b. Spółrzędne dowolnego *zmiennego* punktu na płaszczyźnie oznaczamy odpowiednio literami x, y i nazywamy je *spółrzędną* x i *spółrzędną* y Kartezjusza

Spółrzędna x nosi nazwę *odciętej* punktu (abscisse), a spółrzędną y *rzędnej* punktu (ordonnée).

Jak już wspomnieliśmy Apollonjusz z Perga badał krzywe drugiego stopnia odnosząc je do pewnych prostych ściśle z tymi krzywemi związanych i określając pozycje punktów krzywej przez odcięte i rzędne. Metodę tę uogólnili R. Descartes w dziele: „Géométrie“ 1637 i P. de Fermat: „Ad locos planos et solidos isagoge“ (dzieło wydane dopiero po jego śmierci w r. 1679) wprowadzając algebrę, i uważając ogólniejsze układy odniesienia. Odcięta nazywa się *segmentum diametri*, a rzędna *appliquée par ordre*, albo *apqliquée*. Jednakże dopiero L. Euler w dziele: „Introductio in analysin infinitorum“ 1748 podał systematyczny wykład geometrji przy pomocy zupełnie ogólnego układu odniesienia.

Punkty położone na osi x posiadają $y=0$, zaś punkty na osi y posiadają $x=0$. Dla początku O układu osi mamy $x=y=0$.

Układ osi Kartezjusza nazywa się *prostokątnym* jeżeli osie x, y są do siebie prostopadłe, w przeciwnym razie *ukośnokątnym*. Zwykle uważa się układy prostokątne, których kąt θ ma wartość $+\frac{\pi}{2}$.

Wprowadzimy jeszcze pojęcie rzutów *prostokątnych* albo *ortogonalnych* punktu M na osie Kartezjusza i spółrzędnych *prostokątnych* albo *ortogonalnych*. Proste przeprowadzone przez punkt M prostopadle do osi x i y przecinają te osie w punktach K, L, które są rzutami prostokątnymi punktu M na osie, a wektory OK i OL o wartościach k, l nazywają się spółrzędnymi prostokątnymi. W przypadku układu prostokątnego oba układy rzutów i oba układy spółrzędnych schodzą się ze sobą. Spółrzędne te będziemy tylko wyjątkowo rozważali.

8. Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie w układzie spółrzędnych Kartezjusza.

Uważajmy dwa punkty M_1 i M_2 o spółrzędnych a_1, b_1 i a_2, b_2 w danym układzie spółrzędnych Kartezjusza. Niechaj A_1, B_1 i A_2, B_2 będą rzuty punktów M_1, M_2 na osie. Uważajmy prostą s przechodzącą przez M_1 i M_2 i obierzmy na niej kierunek dodatni, zawierający kąt φ z osią x-ów. Niechaj d, a, b będą wartości wektorów $M_1 M_2$, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$.

Mamy więc

$$a=d\,\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\theta},\qquad b=d\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}.$$

Ze wzorów tych możemy wyrazić d i φ przez wartości rzutów a i b. Mamy

$$a \sin\theta = d \sin(\theta - \varphi) = d(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)$$

$$b\sin\theta = d\sin\varphi,$$

więc otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} d\cos\varphi &= a + b\cos\theta \\ d\sin\varphi &= b\sin\theta. \end{aligned} \tag{36}$$

Podnosząc te równości obustronnie do kwadratu i dodając otrzymujemy wzór

$$d^2 = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2, \tag{37}$$

a więc d^2 wyrażone przez a i b. Wyrażenie prawostronne jako suma dwóch kwadratów

$$(a + b\cos\theta)^2 + b^2\sin^2\theta$$

jest zawsze nieujemne i tylko wtedy równe zeru, gdy mamy $a = b = 0$.

Z (37) otrzymujemy

$$d = \varepsilon\sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}, \tag{38}$$

oznaczając przez $\sqrt{}$ *dodatni* pierwiastek, a przez ε liczbę $+1$ lub -1.

Ze wzorów (36) otrzymujemy wzory

$$\cos\varphi = \varepsilon\frac{a + b\cos\cancel{\varphi}\,\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}}, \tag{39}$$

$$\sin\varphi = \varepsilon\frac{b\sin\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}}.$$

Jeżeli $\varepsilon = +1$, mamy kierunek, dla którego d dodatnie a jeżeli $\varepsilon = -1$ kierunek, dla którego d jest ujemne.

W szczególnym przypadku układu spółrzędnych prostokątnego wzory (36) przyjmują dla $\theta = +\frac{\pi}{2}$ postać

$$\begin{aligned} d\cos\varphi &= a \\ d\sin\varphi &= b \end{aligned} \tag{40}$$

a wzory (38) i (39) postać

$$d = \varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}, \tag{41}$$

$$\cos\varphi = \varepsilon\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{42}$$

$$\sin\varphi = \varepsilon\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Kwadrat odległości punktów M_1 i M_2 możemy wyrazić w następujący sposób przez spółrzędne obu tych punktów. Mamy

$$a = a_2 - a_1, \quad b = b_2 - b_1$$

a więc mamy wzór

$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 + 2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\cos\theta + (b_2 - b_1)^2, \tag{43}$$

a w szczególnym przypadku układu spółrzędnych prostokątnych wzór

$$d^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2. \tag{44}$$

9. Spółczynniki kierunkowe i dostawy kierunkowe.

Uważajmy dowolną prostą l w układzie spółrzędnych Kartezjusza i obierzmy na niej dodatni kierunek. Uważajmy na osi l wektor PQ o wartości $d = 1$. Wektor taki nazywamy *wektorem jednostkowym* na danej osi. Niechaj AB i CD będą rzuty wektora PQ na osie spółrzędnych, i niechaj λ, μ oznaczają ich wartości. Jeżeli φ oznacza kąt osi l z osią x, natenczas mamy na podstawie wzorów (32) i (33) następujące wzory na λ, μ

$$\lambda = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta} \tag{45}$$

$$\mu = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}. \tag{46}$$

Liczby λ, μ nazywamy *spółczynnikami kierunkowymi* (paramètres directeurs) osi l.

W szczególnym przypadku układu spółrzędnych prostokątnego, mamy $\theta = \varepsilon\frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \pm 1$, a więc mamy wzory

$$\lambda = \cos\varphi. \tag{47}$$

$$\mu = \varepsilon\sin\varphi. \tag{48}$$

Kładąc we wzorze (37) $d = 1$, $a = \lambda$, $b = \mu$, otrzymujemy związek pomiędzy λ, μ następujący

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \mu^2 = 1.$$

Wzory (39) dają nam $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ wyrażone przez λ, μ

$$\cos\varphi = \lambda + \mu\cos\theta, \tag{50}$$

$$\sin\varphi = \mu\sin\theta$$

Naodwrót. *każdemu* układowi dwóch liczb λ, μ *spełniającemu związek* (49) odpowiada pewien kierunek zupełnie oznaczony, którego spółczynnikami kierunkowymi są te liczby. W istocie pomiędzy wyrażeniami figurującemi z prawych stron wzorów (50) zachodzi wówczas związek

$$(\lambda + \mu\cos\theta)^2 + (\mu\sin\theta)^2 = 1$$

potrzebny i wystarczający, aby te wielkości były dostawą i wstawą pewnego zupełnie oznaczonego kąta φ nieujemnego i mniejszego niż 2π. Kątowi temu odpowiadają właśnie te liczby λ, μ jako spółczynniki kierunkowe.

Zbadamy teraz, czy *jedną* z liczb λ, μ można obrać dowolnie. Ze wzoru (49) otrzymujemy

$$\lambda = -\mu\cos\theta \pm \sqrt{1 - \mu^2\sin^2\theta}.$$

A więc warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby danemu μ odpowiadało przynajmniej jedno rzeczywiste λ jest nierówność

$$\mu^2\sin^2\theta \leqq 1,$$

albo

$$|\mu| \leqq \frac{1}{|\sin\theta|},$$

gdzie $|\mu|$ oznacza bezwzględną wartość liczby μ. W przypadku, gdy w tym wzorze mamy znak równości

$$|\mu| = |\sin\theta|,$$

otrzymujemy wartość na λ

$$\lambda = -\mu\cos\theta.$$

Taksamo λ musi spełnić nierówność

$$|\lambda| \leqq \frac{1}{|\sin\theta|},$$

a jeżeli mamy znak równości, mamy

$$|\lambda| = |\sin\theta|,$$

$$\mu = -\lambda\cos\theta.$$

Dostawami kierunkowemi (cosinus directeurs) kierunku na płaszczyźnie, nazywamy dostawy kątów, jakie ten kierunek zawiera z osiami x, y. Jeżeli kąt osi l z osią x jest φ

$$\sphericalangle (x, l)_+ = \varphi,$$

natenczas mamy oznaczając przez φ' kąt osi l z osią y

$$\sphericalangle (y, l)_+ = \varphi'$$

$$\beta = \cos\varphi' = \cos(\theta - \varphi) = \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi.$$

Oznaczając więc przez α, β dostawy kierunkowe mamy

$$\cos\varphi = \alpha$$

$$\sin\varphi = \frac{\beta - \alpha\cos\theta}{\sin\theta} \tag{51}$$

Pomiędzy dostawami kierunkowymi mamy więc związek

$$\alpha^2 + \frac{(\beta - \alpha\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = 1,$$

więc związek

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 = \sin^2\theta. \tag{52}$$

Dostawy kierunkowe wyrażają się przez spółczynniki kierunkowe wzorami

$$\alpha = \lambda + \mu\cos\theta, \tag{53}$$

$$\beta = \lambda\cos\theta + \mu.$$

Mamy dalej związek następujący

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 1. \tag{54}$$

10. Dwa ramiona o danych spółczynnikach kierunkowych.

Uważajmy teraz dwa dowolne ramiona r_1 i r_2 na płaszczyźnie. Niechaj λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2 będą spółczynniki kierunkowe tych ramion, φ_1 i φ_2 kąty nieujemne i $< 2\pi$, które te ramiona z osią x zawierają. Możemy wyrazić dostawę i wstawę kąta $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, jaki ramię r_2 zawiera z ramieniem r_1 przez spółczynniki kierunkowe ramion. Mamy

$$\cos\varphi_1 = \lambda_1 + \mu_1\cos\theta, \quad \sin\varphi_1 = \mu_1\sin\theta,$$

$$\cos\varphi_2 = \lambda_2 + \mu_2\cos\theta, \quad \sin\varphi_2 = \mu_2\sin\theta,$$

a stąd

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = (\lambda_1 + \mu_1\cos\theta)(\lambda_2 + \mu_2\cos\theta) + \mu_1\sin\theta\,\mu_2\sin\theta,$$

a więc mamy wzór

$$\cos\varphi = \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\cos\theta + \mu_1 \mu_2 . \tag{55}$$

Podobnie otrzymujemy

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 =$$
$$= \mu_2 \sin\theta\,(\lambda_1 + \mu_1 \cos\theta) - \mu_1 \sin\theta\,(\lambda_2 + \mu_2 \cos\theta),$$

a więc mamy wzór

$$\sin\varphi = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)\sin\theta. \tag{56}$$

Jeżeli kierunki ramion r_1 i r_2 są równoległe, natenczas $\sin\varphi$ równa się O, a więc ze wzoru (56) otrzymujemy *warunek równoległości* dwóch ramion

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0. \tag{57}$$

Jeżeli kierunki ramion r_1 r_2 są prostopadłe do siebie, $\cos\varphi$ równa się 0, a ze wzoru (55) otrzymujemy *warunek prostopadłości* dwóch ramion

$$\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\cos\theta + \mu_1 \mu_2 = 0. \tag{58}$$

Uważajmy nasamprzód dwa ramiona równoległe do siebie. Ze wzoru (57) wynika, że istnieje liczba $k \neq 0$, taka że zachodzą równości

$$\lambda_2 = k\lambda_1, \quad \mu_2 = k\mu_1, \tag{59}$$

tj. spółczynniki kierunkowe są do siebie proporcjonalne.

W istocie podzielmy równość (57) przez tę z liczb λ_1, μ_1, która jest od zera odmienna. Niechaj np. tą liczbą będzie λ_1. Kładąc

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = k$$

otrzymujemy

$$\lambda_2 = k\lambda_1$$

więc

$$\mu_2 = k\mu_1$$

Liczba k jest od zera, albowiem λ_2, μ_2 nie są oba równe zeru.

Naodwrót, jeżeli zachodzą związki (59), zachodzi związek (57). Ale ponieważ mamy

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \mu_1 \cos\theta + \mu_1^2 = 1,$$
$$\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \mu_2 \cos\theta + \mu_2^2 = 1,$$

a więc mamy

$$k^2(\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \mu_1 \cos\theta + \mu_1^2) = 1,$$

więc

$$k^2 = 1.$$

Zatem k jest $+1$ albo -1. Widoczna że jeżeli zmienimy na prostej l dodatni kierunek na przeciwny, natenczas wektor PQ jednostkowy ma na nowej osi wartość -1, a wektor QP jest wektorem jednostkowym, a jego rzuty na osie spółrzędnych są teraz BA i DC o wartościach $-\lambda$ i $-\mu$.

Zwróćmy się teraz do przypadku dwóch kierunków do siebie prostopadłych. Wzór (58) możemy napisać w postaci

$$\lambda_2(\lambda_1 + \mu_1 \cos\theta) + \mu_2(\lambda_1 \cos\theta + \mu_1) = 0,$$

a dzieląc przez tę z liczb λ_2, μ_2, która jest odmienna od zera widzimy, że istnieje taka liczba $k \neq 0$, że zachodzą równości

$$\begin{gathered} \lambda_1 + \mu_1 \cos\theta = k\mu_2, \\ \lambda_1 \cos\theta + \mu_1 = -k\lambda_2. \end{gathered}$$

Mamy więc

$$\begin{gathered} k^2(\lambda_2^2 + 2\lambda_2\mu_2\cos\theta + \mu_2^2) = (\lambda_1 + \mu_1\cos\theta)^2 - \\ - 2(\lambda_1 + \mu_1\cos\theta)(\lambda_1\cos\theta + \mu_1) + (\lambda_1\cos\theta + \mu_1)^2 = \\ = (\lambda_1^2 + 2\lambda_1\mu_1\cos\theta + \mu_1^2)\sin^2\theta = \sin^2\theta, \end{gathered}$$

a więc otrzymujemy

$$k = \varepsilon \sin\theta,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Dochodzimy zatem do wzorów

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\varepsilon \frac{\lambda_1\cos\theta + \mu_1}{\sin\theta}, \\ \mu_2 &= \varepsilon \frac{\lambda_1 + \mu_1\cos\theta}{\sin\theta}, \end{aligned} \tag{60}$$

dla spółczynników kierunkowych kierunku prostopadłego do kierunku danego. Naodwrót, jeżeli λ_1, μ_1 są spółczynnikami kierunkowymi pewnego kierunku, natenczas wzory (60) dają spółczynniki kierunkowe pewnego kierunku, jak to wynika z przeprowadzonego rozumowania. Kierunek ten jest prostopadły do kierunku danego, bo zachodzi związek (58).

Łatwo teraz okazać, że znakowi $\varepsilon = +1$ odpowiada kierunek zawierający kąt $+\frac{\pi}{2}$ z kierunkiem danym, a znakowi $\varepsilon = -1$ kierunek przeciwny, tj. zawierający kąt $-\frac{\pi}{2}$ z danym kierunkiem.

W istocie ze wzorów (60) otrzymujemy mnożąc przez μ_1, $-\lambda_1$ i dodając do siebie

$$\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 = -\frac{\varepsilon}{\sin\theta}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\mu_1\cos\theta + \mu_1^2) = -\frac{\varepsilon}{\sin\theta},$$

a więc ze wzoru (56) wynika

$$\sin\varphi = \varepsilon,$$

tj. $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ dla $\varepsilon = +1$, zaś $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ dla $\varepsilon = -1$.

Wzory (60) można też otrzymać ze wzorów (55) i (56) kładąc w tych wzorach $\sin\varphi = \varepsilon$, $\cos\varphi = 0$ i rozwiązując równania

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \frac{\varepsilon}{\sin\theta},$$

$$\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2 = 0$$

względem λ_2 i μ_2.

W szczególnym przypadku układu spółrzędnych prostokątnych, ($\theta = \eta\frac{\pi}{2}$, $\eta = \pm 1$), wzory (60) przyjmują postać

$$\lambda_2 = -\varepsilon\eta\mu_1,$$
$$\mu_2 = \varepsilon\eta\lambda_1,$$

a więc mamy

$$\lambda_2 = -\varepsilon\sin\varphi,$$
$$\mu_2 = \varepsilon\eta\cos\varphi.$$

11. Linja łamana albo łańcuch wektorów.

Uważajmy na płaszczyźnie $n \geqq 1$ punktów dowolnych P_i, $i = 1, 2, \ldots n$. Uważajmy ciąg odcinków

$$P_1P_2,\ P_2P_3, \ldots\ P_iP_{i+1} \ldots\ P_{n-1}P_n.$$

Ciąg taki nazywa się *ciągiem odcinków przyległych.* Uważajmy na odcinku P_iP_{i+1} punkt P_i jako początek a punkt P_{i+1} jako koniec wektora. Mamy wówczas *łańcuch* $n-1$ *wektorów przyległych*, albo *linję łamaną*, której *bokami* nazywamy też pojedyncze wektory. W przypadku, gdy dwa punkty P_iP_{i+1} schodzą się ze sobą, mamy *wektor zerowy* albo *bok niewłaściwy* linji łamanej *Ł*.

Linja łamana nazywa się *otwartą*, w przypadku gdy punkty P_1 i P_n, *początek* i *koniec* linji łamanej są od siebie odmienne, a *zamkniętą* w przypadku, gdy te punkty schodzą się ze sobą.

Rzutujmy teraz punkty P_i na dowolną oś l na płaszczyźnie równolegle do prostej l' nie równoległej do l. Niechaj rzuty te będą punkty. A_i. Wektory $A_i\,A_{i+1}$ nazywają się *rzutami boków* linji łamanej. Obierzmy na osi l układ spółrzędnych Kartezjusza i niechaj w tym układzie spółrzędne punktów A_i będą a_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Uważajmy wektor $P_1\,P_n$, którego początkiem jest początek linji łamanej, a końcem jej koniec. Wektor ten nazywa się *wypadkowym* wektorem linji łamanej.

Rzutem wektora tego na oś l jest wektor $A_1\,A_n$. Wartość tego wektora równa się według twierdzenia 2. I. Rozdziału sumie wartości $\overline{A_i\,A_{i+1}}$

$$\overline{A_1\,A_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_i\,A_{i+1}}. \tag{61}$$

Mamy więc

Twierdzenie 3. „Wartość rzutu wektora wypadkowego linji łamanej albo łańcucha wektorów przyległych na dowolną oś równa się sumie wartości rzutów tych wektorów na tę oś“.

W szczególnym przypadku linji łamanej zamkniętej wektor $A_1\,A_n$ jest zerowy. Twierdzenie 3 poprzedniego Rozdziału daje nam

Twierdzenie 4: „Suma rzutów boków linji łamanej zamkniętej na dowolną oś równa się zeru“.

Uważajmy teraz układ osi x, y Kartezjusza na płaszczyźnie. Oznaczmy przez $A_i\,B_i$ rzuty punktów P_i na osie x, y równolegle do osi y x, a przez x_i, y_i spółrzędne punktów P_i. Mamy

$$\overline{A_i\,A_{i+1}} = x_{i+1} - x_i,$$

$$\overline{B_i\,B_{i+1}} = y_{i+1} - y_i.$$

Uważajmy osie l_i, $i = 1, \ldots n-1$ przechodzące odpowiednio przez dwa punkty $P_i\,P_{i+1}$, $i = 1 \ldots n-1$ linji łamanej, a więc zawierające wektory $P_i\,P_{i+1}$. Oznaczmy przez λ_i, μ_i, $i = 1, \ldots n-1$ spółczynniki kierunkowe tych osi. Uważajmy dalej oś l przechodzącą przez punkty P_1, P_n, a więc zawierającą wektor wypadkowy $P_1\,P_n$ i niechaj λ, μ będą spółczynniki tego kierunku. Oznaczmy przez d_i, $i = 1, \ldots n-1$ wartości wektorów $P_i\,P_{i+1}$ na osiach l_i, a przez d wartość wektora $P_1\,P_n$ na osi l.

Ze wzorów (32), (33), (45), (46), otrzymujemy wzory

$$a = d\,\lambda, \tag{62}$$

$$b = d\,\mu, \tag{63}$$

na wartości (a, b) rzutów wektora o wartości d na osie x, y.

Stosując te wzory do wektorów $P_i\, P_{i+1}$ i do wektora $P_1\, P_n$ otrzymujemy równości

$$x_{i+1} - x_i = d_i\, \lambda_i,$$

$$y_{i+1} - y_i = d_i\, \mu_i, \qquad i = 1, \ldots\, n-1,$$

i równości

$$x_n - x_1 = d\, \lambda,$$

$$y_n - y_1 = d\, \mu.$$

Stosując wzór (61) dochodzimy więc do następujących wzorów

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i\, \lambda_i = d\, \lambda, \tag{64}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i\, \mu_i = d\, \mu. \tag{65}$$

W szczególnym przypadku linji łamanej zamkniętej otrzymujemy następujące wzory

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i\, \lambda_i = 0, \tag{66}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i\, \mu_i = 0. \tag{67}$$

Ćwiczenia.

1. Kiedy rzuty wektora na osie l, l' równolegle do tych osi mają tesame wartości? Kiedy mają tesame wartości rzuty ortogonalne wektory na te osie?

3. Kiedy rzuty równoległe wektora na osie l, l' mają tesame miary? Kiedy mają tesame miary rzuty ortogonalne?

3. Dane dwie liczby m, n. Znaleść kierunek, którego spółczynniki są proporcjonalne do tych liczb. Rozwiązać tosamo zadanie dla dostaw kierunkowych.

4. Wyrazić dostawę i wstawę kąta dwóch ramion przez dostawy kierunkowe tych ramion.

5. Dane są dwa kierunki o spółczynnikach λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2. Znaleźć spółczynniki kierunkowe kierunku λ, μ zawierającego równe bezwzględne kąty z dwoma danymi kierunkami.

6. Okazać, że jeżeli A B, C są 3 dowolne punkty na osi l, a D dowolny punkt płaszczyzny, natenczas zachodzi związek

$$\overline{AD^2} \,.\, \overline{BC} + \overline{BD^2} \,.\, \overline{CA} + \overline{CD^2} \,.\, \overline{AB} + \overline{AB} \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{CA} = 0. \tag{1}$$

7. Jeżeli D jest punktem na przeciwprostokątni BC trójkąta prostokątnego ABC, mamy

$$\overline{AB}^2 . \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 . \overline{BC}^2. \tag{2}$$

8. Uważamy trójkąt ABC i osie l_1, l_2, l_3 na których leżą boki BC, CA, AB. Niechaj a, b, c będą wartości wektorów BC, CA, AB. Zachodzi zawsze związek

$$\frac{\sin(l_1, l_2)}{c} = \frac{\sin(l_2, l_3)}{a} = \frac{\sin(l_3, l_1)}{b}. \tag{3}$$

9. Dane są punkty P, Q o spółrzędnych a_1, b_1; a_2, b_2. Znaleźć spółrzędne Kartezjusza punktu R położonego na osi s przechodzącej przez punkty P, Q, którego spółrzędna Möbius'a na tej osi jest k.

10. Znaleść spółrzędne punktu P równo oddalonego od 3 punktów A, B, C o danych spółrzędnych.

11. Jakie położenie mają względem osi spółrzędnych dwa ramiona, dla których zachodzą związki

$$\lambda_1 = \mu_2, \quad \lambda_2 = \mu_1 \, ? \tag{4}$$

12. Danych jest 5 punktów A, B, C, O, P na płaszczyźnie, z których 3 A B C leżą na jednej osi. Udowodnić związek Möbius'a

$$\overline{BC}\,(\overline{OA}^2 - \overline{PA}^2) + \overline{CA}\,(\overline{OB}^2 - \overline{PB}^2) + \overline{AB}\,(\overline{OC}^2 - \overline{PC}^2) = 0. \tag{5}$$

ROZDZIAŁ III.

Przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza.

1. Ogólne wzory na przekształcenie układów spółrzędnych Kartezjusza.

Uważajmy na płaszczyźnie dwa układy U i U' osi Kartezjusza. Niechaj x, y będą osi układu U o początku O, zaś x', y' niechaj będą osi układu U' o początku O'.

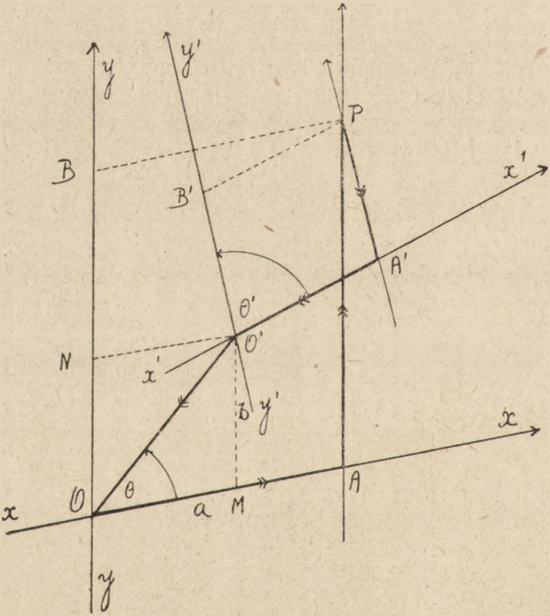

Fig. 6.

Pomiędzy spółrzędnemi Kartezjusza x, y dowolnego punktu P płaszczyzny w układzie U, a pomiędzy spółrzędnemi tego punktu w układzie U' zachodzą pewne związki, których wyprowadzeniem się zajmiemy.

Przypuśćmy, że znane nam jest położenie układu osi U' względem układu osi U przez to, że znamy spółrzędne a, b początku O' w układzie U i kąty φ_1 i φ_2 nieujemne i mniejsze niż 2π, jakie osie x' y' układu U' zawierają z osią x układu U. Niechaj osie x, y zawierają kąt θ, a osie x' y' kąt θ'. Niechaj dalej λ_1, μ_1 będą spółczynniki kierunkowe osi x' a λ_2, μ_2 spółczynniki kierunkowe osi y' w układzie U. Mamy następujące wzory

$$\theta' = \varphi_2 - \varphi_1, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sin(\theta - \varphi_1)}{\sin\theta}, \\ \mu_1 &= \frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\sin(\theta - \varphi_2)}{\sin\theta}, \\ \mu_2 &= \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Uważajmy teraz linję łamaną zamkniętą $OAPA'O'O$ i rzutujmy ją na osie x i y równolegle do osi y i x. Oznaczając przez $R_x(AB)$. $R_y(AB)$ rzuty na osie x, y wektora AB mamy równości

$$R_x(OA) + R_x(AP) + R_x(PA') + R_x(A'O') + R_x(O'O) = 0,$$

$$R_y(OA) + R_y(AP) + R_y(PA') + R_y(A'O') + R_y(O'O) = 0.$$

Obieramy teraz w następujący sposób kierunki dodatnie prostych, na których leżą boki linji łamanej: OA leży na osi x, PA na osi równoległej i równo skierowanej z osią y, PA' na osi równoległej i równo skierowanej z osią y', $A'O'$ na osi x', wreszcie $O'O$ na osi o kierunku od O do O'.

Mamy więc

$$R_x(AO) = x,$$

$$R_x(AP) = 0 \,.\, y = 0,$$

$$R_x(PA') = -\lambda_2 y',$$

$$R_x(A'O') = -\lambda_1 x',$$

$$R_x(O'O) = -a.$$

Taksamo mamy

$$R_y(OA) = 0 . x = 0,$$
$$R_y(AP) = y,$$
$$R_y(PA') = -\mu_2 y',$$
$$R_y(A'O') = -\mu_1 x',$$
$$R_y(O'O) = -b.$$

Stosujmy teraz wzory (66) i (67) poprzedniego Rozdziału. Otrzymujemy związki

$$x - \lambda_1 x' - \lambda_2 y' - a = 0,$$
$$y - \mu_1 x' - \mu_2 y' - b = 0,$$

a więc dochodzimy do wzorów

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda_1 x' + \lambda_2 y', \\ y &= b + \mu_1 x' + \mu_2 y'. \end{aligned} \tag{4}$$

Wzory te są to wzory na *przekształcenie układów spółrzędnych Kartezjusza.* We wzorach tych *dawne* spółrzędne x, y są wyrażone przez *nowe* spółrzędne x', y'. Ze wzorów tych możemy wyrazić naodwrót x', y' przez x, y mnożąc odpowiednio stronami te wzory przez μ_2, $-\lambda_2$ i dodając je do siebie, i taksamo przez $-\mu_1$, λ_1 i znów dodając je do siebie. Zważając że mamy

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta},$$

otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} [\mu_2 (x - a) - \lambda_2 (y - b)], \\ y' &= \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} [-\mu_1 (x - a) + \lambda_1 (y - b)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Są to wzory przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza, w których nowe spółrzędne x', y' są wyrażone przez *dawne* spółrzędne x, y.

We wzorach (4) i (5) możemy zastąpić spółczynniki kierunkowe przez wyrażenia dane wzorami (2), (3). Otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{\sin(\theta - \varphi_1)}{\sin\theta} x' + \frac{\sin(\theta - \varphi_2)}{\sin\theta} y', \\ y &= b + \frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta} x' + \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta} y', \end{aligned} \tag{6}$$

i wzory odwrotne

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta'}(x-a) - \frac{\sin(\theta-\varphi_2)}{\sin\theta'}(y-b),\\
y' &= -\frac{\sin\varphi_1}{\sin\theta'}(x-a) + \frac{\sin(\theta-\varphi_1)}{\sin\theta'}(y-b).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

2. Szczególne przypadki przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza.

Szczególnie ważne są następujące specjalne przypadki przekształcenia układów spółrzędnych Kartezjusza:

1) Osie x' i y' nowego układu spółrzędnych są równoległe i równo skierowane z osiami x, y. Mamy więc

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 0;\ \ \lambda_2 = 0,\ \mu_2 = 1.$$

W tym przypadku mamy wzory

$$x = a + x',\quad y = b + y'. \tag{8}$$

2) Początek O' nowego układu osi spółrzędnych schodzi się z dawnym początkiem układu O. Mamy więc

$$a = b = 0.$$

W tym przypadku mamy wzory

$$x = \lambda_1 x' + \lambda_2 y',\quad y = \mu_1 x' + \mu_2 y'. \tag{9}$$

3) Oba układy osi spółrzędnych x, y i x', y' są *prostokątne*.

W tym przypadku mamy

$$\sin\theta = \varepsilon,\quad \sin\theta' = \varepsilon',$$

gdzie $\varepsilon = +1$, jeżeli $\theta = +\frac{\pi}{2}$, a równa się -1, jeżeli $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Taksamo $\varepsilon' = +1$, jeżeli $\theta' = +\frac{\pi}{2}$, zaś równa się -1 jeżeli $\varepsilon' = -1$. Dalej mamy

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \cos\varphi_1, & \mu_1 &= \varepsilon\sin\varphi_1,\\
\lambda_2 &= \cos\varphi_2, & \mu_2 &= \varepsilon\sin\varphi_2.
\end{aligned}
$$

Ale

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2},\ \text{gdy } \varepsilon' = +1,$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2},\ \text{gdy } \varepsilon' = -1,$$

zatem mamy

$$\lambda_2 = -\varepsilon' \sin \varphi_1, \quad \mu_2 = \varepsilon \varepsilon' \cos \lambda_1.$$

Otrzymujemy zatem wzory

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos \varphi_1 - \varepsilon' y' \sin \varphi_1, \\ y &= b + \varepsilon x' \sin \varphi_1 + \varepsilon \varepsilon' y' \cos \varphi_1 \end{aligned} \tag{10}$$

na przekształcenie układów prostokątnych Kartezjusza.

W szczególnym przypadku gdy oba kąty θ, θ' równają się $+\frac{\pi}{2}$ mamy wzory

$$\begin{aligned} x &= a + x' \cos \varphi_1 - y' \sin \varphi_1, \\ y &= b + x' \sin \varphi_1 + y' \cos \varphi_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Odwrotne wzory, wyrażające x', y' przez x, y przyjmują w trzech powyższych przypadkach szczególnych następujące postaci

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{8*}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} [\mu_2 x - \lambda_2 y], \\ y' &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} [-\mu_1 x + \lambda_1 y]. \end{aligned} \tag{9*}$$

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \varphi_1 + \varepsilon (y - b) \sin \varphi_1, \\ y' &= -\varepsilon' (x - a) \sin \varphi_1 + \varepsilon \varepsilon' (y - b) \cos \varphi_1, \end{aligned} \tag{10*}$$

a w szczególnym przypadku $\theta = \theta' = +\frac{\pi}{2}$ postać

$$\begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \varphi_1 + (y - b) \sin \varphi_1, \\ y' &= -(x - a) \sin \varphi_1 + (y - b) \cos \varphi_1. \end{aligned} \tag{11*}$$

3. Przesunięcia płaszczyzny.

Uważajmy płaszczyznę p i na niej układ U spółrzędnych Kartezjusza o osiach x, y

Przypuśćmy, że oprócz tej płaszczyzny mamy jeszcze drugą płaszczyznę $\bar{p}$ *ruchomą*, nakrywającą się z płaszczyzną p i mogącą się przesuwać wzdłuż tej płaszczyzny *nieruchomej*. Uważajmy na płaszczyźnie p układ $\bar{U}$ spółrzędnych Kartezjusza o osiach $\bar{x}$, $\bar{y}$ i o początku $\bar{O}$. Przypuśćmy że oba układy U i $\bar{U}$ są *prostokątne* i że θ, $\bar{\theta}$ są oba równe $+\frac{\pi}{2}$. Niechaj osie spółrzędnych układu $\bar{U}$ nakrywają się odpowiednio z osiami układu spółrzędnych U.

Przesuńmy teraz płaszczyznę ruchomą $\overline{p}$ w ten sposób, że układ osi $\overline{U}$ nakryje się z pewnym układem U' o osiach x', y' również prostokątnych i położonych na płaszczyźnie nieruchomej p. Niechaj O' będzie na płaszczyźnie p początkiem układu U'. Uważajmy dowolny punkt P płaszczyzny p o spółrzędnych x, y i punkt $\overline{P}$ płaszczyzny ruchomej $\overline{p}$, nakrywający się z punktem P. Po przesunięciu płaszczyzny $\overline{p}$ w nowe położenie, punkt $\overline{P}$ nakryje się z pewnym punktem P' płaszczyzny p. Niechaj x', y' będą spółrzędne punktu P' w układzie U, a $\overline{x'}$, $\overline{y'}$ spółrzędne tego punktu w układzie U'. Mamy więc

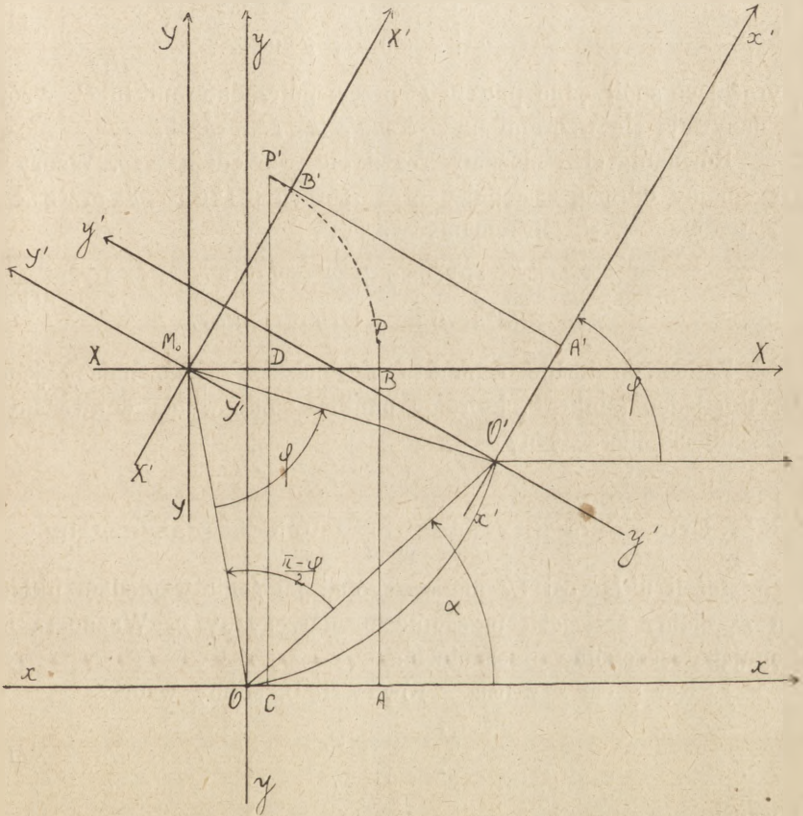

Fig. 7.

$$\overline{x'} = x, \quad \overline{y'} = y.$$

Przyporządkujmy teraz punktowi P płaszczyzny p punkt P' tejże płaszczyzny, z którym nakryje się ten punkt $\overline{P}$ płaszczyzny $\overline{p}$ po przesunięciu, który przed przesunięciem nakrywał się z punktem P. Wzory (11) poprzedniego ustępu dają nam związki pomiędzy spółrzędnymi x', y', punktu P', a spółrzędnymi $\overline{x}'$, $\overline{y}'$ tego punktu. Stąd otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

wyrażające spółrzędne punktu P' przez spółrzędne punktu P. Wzory te nazywają się wzorami na *przesunięcie płaszczyzny.*

Równania (12) możemy rozwiązać względem x, y. Wzory te otrzymamy odrazu, zastępując we wzorach (11*) x', y' przez x, y i x, y przez x', y'. Otrzymamy wzory

$$\begin{aligned} x &= (x' - a)\cos\varphi + (y' - b)\sin\varphi, \\ y &= -(x' - a)\sin\varphi + (y' - b)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{12*}$$

Zatem do każdego punktu P' płaszczyzny p należy jeden i tylko jeden punkt P, któremu punkt P' odpowiada w uważanym przesunięcie płaszczyzny.

4. Szczególne przypadki przesunięcia płaszczyzny.

Jeżeli układ osi U' ma szczególne położenie względem układu osi U, mamy *szczególne* przesunięcie płaszczyzny p. Ważne są następujące szczególne przesunięcia:

1. Kąt φ osi x' z osią x równa się 0. Mamy wzory

$$\begin{aligned} x' &= a + x, \\ y' &= b + y, \end{aligned} \tag{13}$$

i wzory odwrotne

$$\begin{aligned} x &= x' - a, \\ y &= y' - b. \end{aligned} \tag{13*}$$

To szczególne przesunięcie nazywa się *translacją.* Możemy sobie wyobrazić, że płaszczyzna ruchoma $\overline{p}$ przesuwa się w ten sposób, że osie $\overline{x}$, $\overline{y}$, stale są równoległe do osi x, y i równo z nimi skierowane.

2. Spółrzędne, a, b początku O' mają wartość O, tj. punkty O i O' zlewają się. Mamy wzory

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{14}$$

i wzory odwrotne

$$\begin{aligned} x &= x'\sin\varphi + y'\sin\varphi, \\ y &= -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{14*}$$

To szczególne przesunięcie nazywa się *obrotem* albo *rotacją*. Możemy sobie wyobrazić, że płaszczyzna ruchoma $\bar{p}$ przesuwa się w ten sposób, że obraca się dokoła punktu O o kąt φ w dodatnim kierunku.

5. Punkty niezmienne względem przesunięcia płaszczyzny.

Możemy sobie postawić następujące pytanie. Czy istnieje punkt P na płaszczyźnie p, któremu w przesunięciu odpowiada punkt P' *schodzący* się z punktem P. Punkty takie nazwiemy *punktami niezmiennemi* względem przesunięcia płaszczyzny.

Warunki konieczne i wystarczające dla spółrzędnych punktu niezmiennego są oczywiście równości

$$x' = x, \quad y' = y.$$

A więc otrzymamy spółrzędne x_0, y_0 punktów niezmiennych rozwiązując równania

$$\begin{aligned} x_0 &= a + x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi, \\ y_0 &= b + x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi, \end{aligned} \tag{15}$$

względem x_0 i y_0.

Mamy

$$\begin{aligned} x_0(1-\cos\varphi) + y_0\sin\varphi &= a, \\ -x_0\sin\varphi + y_0(1-\cos\varphi) &= b, \end{aligned}$$

a więc

$$2\sin^2\frac{\varphi}{2}x_0 + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}y_0 = a.$$

$$-2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}x_0 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}y_0 = b,$$

więc

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(x_0\sin\frac{\varphi}{2} + y_0\cos\frac{\varphi}{2}\right) &= a, \\ 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-x_0\cos\frac{\varphi}{2} + y_0\sin\frac{\varphi}{2}\right) &= b. \end{aligned} \tag{16}$$

Mogą tu zachodzić dwa od siebie odmienne przypadki:

1) *Kąt φ równa się 0*, tj. mamy *translację*. Z równań (16) wynika, że warunki konieczne i wystarczające, aby istniał przynajmniej jeden układ wartości spełniający te równania są następujące

$$a = 0, \quad b = 0. \tag{17}$$

Jeżeli warunki (17) są spełnione, równania (16), a więc i równania (15) są spełnione przez spółrzędne *dowolnego* punktu na płaszczyźnie. Mamy t. zw. *przesunięcie identyczne.*

2) *Kąt φ jest od zera odmienny.* Otrzymujemy jeden jedyny układ rozwiązań x_0, y_0 w postaci

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a \sin \frac{\varphi}{2} - b \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}, \\ y_0 &= \frac{a \cos \frac{\varphi}{2} + b \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Zatem w tym przypadku mamy *jeden jedyny* punkt niezmienny M_0.

Ze wzorów (18) wynika następująca *konstrukcja* punktu niezmiennego M_0. Wystawiamy prostą s prostopadłą do odcinka OO' w punkcie R połowiącym ten odcinek, tj. symetralną tego odcinka. Na tej symetralnej leży M_0. W istocie mamy dla punktu M_0

$$x' = x, \quad y' = y,$$

więc

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2,$$

tj. odcinki OM_0 i $O'M_0$ mają równe miary.

Wyrażenia na x_0 i y_0 możemy napisać w następującej postaci. Oznaczmy przez α kąt kierunku OO' z osią x.

Mamy

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

gdzie pierwiastek jest dodatni. Oznaczając jeszcze $\sqrt{a^2+b^2}$ przez d napiszemy

$$x_0=\frac{a}{2}-\sin\alpha\frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2},$$
$$y_0=\frac{b}{2}+\cos\alpha\frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

Obierzmy teraz na symetralnej s jako dodatni kierunek zawierający kąt $+\frac{\pi}{2}$ z kierunkiem OO' i odnieśmy na niej od punktu R wektor RS, którego wartość s równa się $\frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$

$$s=\frac{d}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}. \tag{19}$$

Mamy

$$\begin{aligned} x_0&=\frac{a}{2}+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)s,\\ y_0&=\frac{b}{2}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)s. \end{aligned} \tag{20}$$

Punkt S w ten sposób otrzymany schodzi się z punktem niezmiennym M_0. Ze wzoru (19) na s wynika, że wartość bezwzględną $|s|$ możęmy uważać jako długość przyprostokątni w trójkącie prostokątnym, którego drugą przyprostokątnią jest $\frac{d}{2}$, a kątem naprzeciwległym przyprostokątni o długości $|s|$ jest kąt o mierze $\frac{\pi-\varphi}{2}$, jeżeli $\varphi<\pi$, zaś o mierze $\frac{\varphi-\pi}{2}$, jeżeli $\varphi>\pi$. W razie gdy $\varphi=\pi$, mamy $s=0$ i punkt S schodzi się z punktem R.

Stąd wynika konstrukcja figury (7) (w przypadku $\varphi<\pi$).

6. Obroty płaszczyzny dokoła jej punktów.

Uważajmy dowolny punkt P płaszczyzny p i punkt P' odpowiadający temu punktowi w przesunięciu. Ze wzorów (12) i (15) wynika że mamy

$$\begin{aligned} x'-x_0&=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi,\\ y'-y_0&=(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi. \end{aligned} \tag{21}$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i dodając otrzymane równości otrzymujemy

$$(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

A więc odległości M_0P i M_0P' dowolnego punktu P od punktu niezmiennego M_0 i punktu przesuniętego P' od punktu M_0 są sobie równe.

Okażemy teraz, że przesunięcie płaszczyzny ruchomej $\overline{p}$ można uważać jako *obrót* tej płaszczyzny dokoła punktu niezmiennego M_0.

Uważamy w tym celu dwa nowe układy osi spółrzędnych V i V'. Układ V ma osie X, Y o początku w punkcie niezmiennym M_0 równoległe i równo skierowane z osiami x, y. Układ V' ma osie X', Y' o początku również w punkcie niezmiennym M_0, równoległe i równo skierowane z osiami x', y'.

Niechaj X, Y będą spółrzędne punktu P w układzie V; $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$ spółrzędne punktu P' w układzie V', a X', Y' spółrzędne punktu P' w układzie V. Mamy więc, stosując wzory (8) na przekształcenie układów spółrzędnych

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X, \\ y &= y_0 + Y, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + X' \\ y' &= y_0 + Y'. \end{aligned} \tag{23}$$

Dalej mamy wzory

$$\begin{aligned} \overline{x}' &= x_0 + \overline{X}' \\ \overline{y}' &= y_0 + \overline{Y}' \end{aligned} \tag{24}$$

a ponieważ mamy

$$x = \overline{x}', \quad y = \overline{y}',$$

więc dochodzimy do wzorów

$$X = \overline{X}', \quad Y + \overline{Y}'. \tag{25}$$

Ze wzorów (22) i (23) otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ Y' &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{26}$$

wyrażające związki między spółrzędnymi punktu P a punktu przesuniętego P' w układzie spółrzędnych V.

Związki te są związkami dla *obrotu* płaszczyzny ruchomej $\overline{p}$ dokoła początku M_0 o kąt φ, w którym to obrocie układ osi V przechodzi w układ osi V'. Przesunięcie uważane przaprowadzające układ osi U w układ osi U' może więc być uważane jako obrót płaszczyzny dokoła punktu niezmiennego M_0, *środka obrotu*.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie

Twierdzenie 1: „Każde przesunięcie płaszczyzny jest albo translacją albo obrotem dokoła pewnego zupełnie oznaczonego punktu",

Uważajmy teraz naodwrót dowolny punkt M_0 na płaszczyźnie i wykonajmy obrót płaszczyzny dokoła tego punktu o kąt nieujemny φ mniejszy niż 2π. Uważajmy układ V osi X, Y o początku w punkcie M_0, równoległych i równoskierowanych z osiami x, y. Mamy teraz związki (22), (23) i (26). Stąd otrzymujemy związki (21) pomiędzy spółrzędnymi x, y i x', y' punktów P i P'. Mamy zatem wzory

$$\begin{aligned} x' &= x_0 - x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= y_0 - x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi + x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{27}$$

Są to wzory na *przesunięcie* płaszczyzny w którem początek układu O przechodzi w punkt O' o współrzędnych

$$\begin{aligned} a &= x_0 - x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi \\ b &= y_0 - x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

Mamy więc

Twierdzenie 2. „Każdy obrót płaszczyzny dokoła dowolnego punktu jest pewnem zupełnie oznaczonem przesunięciem płaszczyzny.

7. Składanie przekształceń układów spółrzędnych.

Uważajmy trzy układy Kartezjusza U, U', U'' o osiach x, y; x', y'; x'', y'' zakładając, że wszystkie trzy układy są prostokątne i kąty Θ, Θ', Θ'' równają się wszystkie $+\frac{\pi}{2}$. Załóżmy, że dane jest położenie układu U' względem układu U i położenie układu U'' względem układu U'. Zatem dane są spółrzędne a, b początku O' układu U' w układzie U, kąt φ, jaki oś x' zawiera z osią x, spółrzędne a', b' początku O'' układu U'' w układzie U' i kąt φ', jaki oś x'' zawiera z osią x.

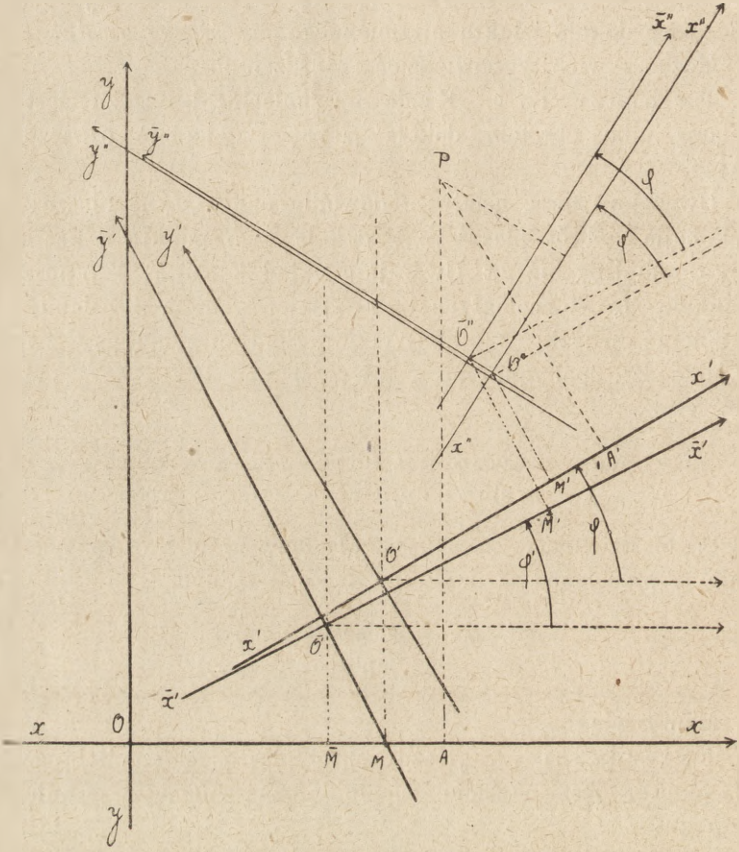

Fig. 8.

Chodzić nam będzie o znalezienie związków pomiędzy spółrzędnemi x, y punktu P w układzie U, a spółrzędnemi x'', y'' tego punktu w układzie U''.

Mamy następujące związki

$$x = a + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \qquad (29)$$
$$y = b + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

$$x' = a' + x'' \cos\varphi' - y'' \sin\varphi', \qquad (30)$$
$$y' = b' + x'' \sin\varphi' + y'' \cos\varphi'.$$

Wstawiając wyrażenia na x', y' we wzory (30) otrzymujemy

$$x = a + (a' + x'' \cos\varphi' - y'' \sin\varphi') \cos\varphi - (b' + x'' \sin\varphi' + y'' \cos\varphi') \sin\varphi,$$
$$y = b + (a' + x'' \cos\varphi' - y'' \sin\varphi') \sin\varphi + (b' + x'' \sin\varphi' + y'' \cos\varphi') \cos\varphi,$$

a więc mamy wzory

$$\begin{aligned} x &= a + a' \cos\varphi - b' \sin\varphi + x'' \cos(\varphi + \varphi') - y'' \sin(\varphi + \varphi'), \\ y &= b + a' \sin\varphi + b' \cos\varphi + x'' \sin(\varphi + \varphi') + y'' \cos(\varphi + \varphi'). \end{aligned} \tag{31}$$

Przekształcenie układu U w układ U'' nazywa się *przekształceniem wypadkowem* przekształceń *składowych* układu U w układ U' i układu U' w układ U'', na które mamy wzory (29) i (30).

Możemy wykonać przekształcenia określone wzorami (29) i (30) w *odwrotnym porządku*. To znaczy że naprzód przekształcamy układ U w układ $\overline{U}'$ o osiach $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, który ma to położenie względem układu U, jakie ma układ U'' względem układu U', a następnie przekształcamy układ $\overline{U}'$ w układ $\overline{U}''$ o osiach $\overline{x}''$, $\overline{y}''$, który ma to położenie względem układu $\overline{U}'$, jakie ma układ U' względem układu U.

A więc mamy teraz wzory przekształceń

$$\begin{aligned} x &= a' + \overline{x}' \cos\varphi' - \overline{y}' \sin\varphi', \\ y &= b' + \overline{x}' \sin\varphi' + \overline{y}' \cos\varphi', \end{aligned} \tag{32}$$

i

$$\begin{aligned} \overline{x}' &= a + \overline{x}'' \cos\varphi - \overline{y}'' \sin\varphi, \\ \overline{y}' &= b + \overline{x}'' \sin\varphi + \overline{y}'' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{33}$$

Otrzymujemy następujące wzory na przekształcenie wypadkowe

$$\begin{aligned} x &= a' + a \cos\varphi' - b \sin\varphi' + \overline{x}'' \cos(\varphi + \varphi') - \overline{y}'' \sin(\varphi + \varphi'), \\ y &= b' + a \sin\varphi' + b \cos\varphi' + \overline{x}'' \sin(\varphi + \varphi') + \overline{y}'' \cos(\varphi + \varphi'). \end{aligned} \tag{34}$$

Widzimy, że kąt jaki zawiera oś x'' z osią x równa się kątowi, jaki zawiera oś $\overline{x}''$ z osią x i równa się sumie kątów φ i φ'. Początki O'' i $\overline{O}''$ układów U'' i $\overline{U}''$ są naogoł różne od siebie. Warunki konieczne i wystarczające, aby te początki schodziły się ze sobą, aby więc przekształcenia (31) i (34) były identyczne są równości

$$\begin{aligned} a + a' \cos\varphi - b' \sin\varphi &= a' + a \cos\varphi' - b \sin\varphi', \\ b + a' \sin\varphi + b' \cos\varphi &= b' + a \sin\varphi' + b \cos\varphi'. \end{aligned} \tag{35}$$

Równości te można też napisać w postaci

$$\sin\frac{\varphi'}{2}\left(a\sin\frac{\varphi'}{2}+b\cos\frac{\varphi'}{2}\right)=\sin\frac{\varphi}{2}\left(a'\sin\frac{\varphi}{2}+b'\cos\frac{\varphi}{2}\right), \tag{36}$$
$$\sin\frac{\varphi'}{2}\left(a\cos\frac{\varphi'}{2}-b\sin\frac{\varphi'}{2}\right)=\sin\frac{\varphi}{2}\left(a'\cos\frac{\varphi}{2}-b'\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Oznaczmy przez α, α' kąty jakie osie OO' i $O'O''$ zawierają z osiami x i x', a przez d, d' wartości wektorów OO' i $O'O''$ na tych osiach. Mamy

$$a=d\cos\alpha, \qquad b=d\sin\alpha,$$
$$a'=d'\cos\alpha', \qquad b'=d'\sin\alpha',$$

więc ze wzorów (36) otrzymujemy wzory

$$d\sin\frac{\varphi'}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\varphi'}{2}\right)=d'\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right), \tag{37}$$
$$d\sin\frac{\varphi'}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\varphi'}{2}\right)=d'\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right).$$

A więc albo mamy

$$d\sin\frac{\varphi'}{2}=d'\sin\frac{\varphi}{2}=0, \tag{38}$$

albo też mamy

$$\sin\left(\alpha+\frac{\varphi'}{2}\right)\cos\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right)-\sin\left(\alpha'+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\varphi'}{2}\right)=0$$

więc

$$\sin\left(\alpha-\alpha'+\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)=0. \tag{39}$$

Równości (38) spełnione są w następujących czterech przypadkach:

1. $d=d'=0$, a więc
   $a=b=a'=b'=0$,
   φ, φ' dowolne.
2. $d=0$, $\varphi=0$, a więc
   $a=b=0$,
   a', b', φ' dowolne.

3. $d' = 0$, $\varphi' = 0$, a więc
$a' = b' = 0$,
a, b, φ dowolne.

4. $\varphi = \varphi' = 0$.
a, b, a', b' dowolne.

Równość (39) spełniona jest, gdy mamy:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\varphi - \varphi'}{2} + k\pi, \tag{40}$$

gdzie k jest liczba całkowita. Dla k parzystego mamy

$$d \sin\frac{\varphi'}{2} = d' \sin\frac{\varphi}{2} \tag{41}$$

a dla nieparzystego

$$d \sin\frac{\varphi'}{2} = -d' \sin\frac{\varphi}{2}. \tag{42}$$

8. Składanie przesunięć płaszczyzny.

Uważajmy trzy układy U, U' i $\overline{U'}$ o osiach x, y; x', y' i $\overline{x'}$ $\overline{y'}$. Niechaj a, b będą spółrzędne początku O' układu U' w układzie U, zaś a', b' spółrzędne początku $\overline{O'}$ układu $\overline{U'}$ w układzie U. Niechaj dalej φ i φ' będą kąty osi x' i $\overline{x'}$ z osią x.

Uważajmy dwa przesunięcia płaszczyzny ruchomej $\overline{p}$, pierwsze przesuwające układ osi $\overline{U}$ tej płaszczyzny schodzący się z układem osi U w układ U', i drugie przesuwające układ $\overline{U}$ w układ $\overline{U'}$. Niechaj P będzie dowolnym punktem płaszczyzny p o spółrzędnych x, y w układzie U, i niechaj temu punktowi w pierwszem przesunięciu odpowiada punkt P' o spółrzędnych x' y' w układzie U, a w drugiem przesunięciu punkt $\overline{P'}$ o spółrzędnych $\overline{x'}$, $\overline{y'}$ w układzie U'.

Wykonajmy teraz po kolei te dwa przesunięcia, a mianowicie nasamprzód przesunięcie pierwsze, a następnie przesunięcie drugie. Punktowi P' odpowiada w drugiem przesunięciu punkt P'', a punktowi $\overline{P'}$ odpowiada w pierwszem przesunięciu punkt $\overline{P''}$. Niechaj x'', y'' będą spółrzędne punktu P'' w układzie U, zaś $\overline{x''}$, $\overline{y''}$ spółrzędne punktu $\overline{P''}$ w tymsamym układzie.

Mamy następujące wzory:

$$\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} x'' &= a' + x'\cos\varphi' - y'\sin\varphi', \\ y'' &= b' + x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi', \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \overline{x'} &= a' + x\cos\varphi' - y\sin\varphi', \\ \overline{y'} &= b' + x\sin\varphi' + y\cos\varphi', \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \overline{x''} &= a + \overline{x'}\cos\varphi - \overline{y'}\sin\varphi \\ \overline{y''} &= b + \overline{x'}\sin\varphi + \overline{y'}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{46}$$

Stąd otrzymujemy związki pomiędzy spółrzędnymi punktów P i P'':

$$\begin{aligned} x'' &= a' + a\cos\varphi' - b\sin\varphi' + x\cos(\varphi+\varphi') - y\sin(\varphi+\varphi'), \\ y'' &= b' + a\sin\varphi' + b\cos\varphi' + x\sin(\varphi+\varphi') + y\cos(\varphi+\varphi'), \end{aligned} \tag{47}$$

i związki pomiędzy spółrzędnymi punktów P i $\overline{P''}$:

$$\begin{aligned} \overline{x''} &= a + a'\cos\varphi - b'\sin\varphi + x\cos(\varphi+\varphi') - y\sin(\varphi+\varphi'), \\ \overline{y''} &= b + a'\sin\varphi + b'\cos\varphi + x\sin(\varphi+\varphi') + y\cos(\varphi+\varphi'). \end{aligned} \tag{48}$$

Jeżeli więc wykonamy nasamprzód pierwsze a następnie drugie przesunięcie, otrzymamy jako wypadkowe przesunięcie przeprowadzające układ $\overline{U}$ w układ $\overline{U''}$ o osiach x'', y''. Jeżeli natomiast wykonamy nasamprzód drugie, a następnie pierwsze przesunięcie, otrzymamy jako wypadkowe przesunięcie przeprowadzające układ $\overline{U}$ w układ U'' o osiach x'', y''.

Oba te przesunięcia wypadkowe są naogół od siebie odmienne, a identyczne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą związki (36).

9. Przesunięcie, które dwa dane punkty przesuwa w dwa dane punkty.

Uważajmy ogólne wzory na przesunięcie płaszczyzny (12). Ze wzorów tych wynika, że odległość dwóch dowolnych punktów P_1, P_2, równa się odległości dwóch punktów przesuniętych P'_1, P'_2.

W istocie mamy, oznaczając przez x_1, y_1; x_2, y_2 spółrzędne punktów P_1, P_2, a przez x'_1, y'_1; x'_2, y'_2 spółrzędne punktów P'_1, P'_2.

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y'_1 &= b + x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} x_2' &= a + x_2 \cos\varphi - y_2 \sin\varphi, \\ y_2' &= b + x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi. \end{aligned} \tag{50}$$

Odejmując pierwsze równania (49) i (50) od siebie i podnosząc następnie obustronnie do kwadratu mamy

$$\begin{aligned} (x_2' - x_1')^2 = (x_2 - x_1) \cos^2\varphi + (y_2 - y_1) \sin^2\varphi - \\ - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos\varphi \sin\varphi. \end{aligned}$$

Taksamo otrzymujemy

$$\begin{aligned} (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 \sin^2\varphi + (y_2 - y_1)^2 \cos^2\varphi + \\ + 2(x_1 - x_1)(y_2 - y_1) \sin\varphi \cos\varphi, \end{aligned}$$

a stąd dodając obustronnie

$$(x_2' - x_1')^2 + (x_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{51}$$

Uważajmy teraz cztery dowolne punkty na płaszczyźnie P_1, P_2; P_1', P_2' zakładając tylko, że warunek (51) jest spełniony i że punkty P_1, P_2, a więc i P_1', P_2' są od siebie odmienne. Udowodnimy, że istnieje jedno i tylko jedno przesunięcie płaszczyzny, przeprowadzające punkty P_1, P_2 odpowiednio w punkty P_1', P_2'.

W istocie z równań

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= (x_2 - x_1) \cos\varphi - (y_2 - y_1) \sin\varphi, \\ y_2' - y_1' &= (x_2 - x_1) \sin\varphi + (y_2 - y_1) \cos\varphi, \end{aligned} \tag{52}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{(x_2' - x_1')(x_2 - x_1) + (y_2' - y_1')(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ \sin\varphi &= \frac{-(x_2' - x_1')(y_2 - y_1) + (y_2' - y_1')(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned} \tag{53}$$

Następnie otrzymujemy *a* i *b* w postaci

$$\begin{aligned} a = x_1' - x_1 \frac{(x_2' - x_1')(x_2 - x_1) + (y_2' - y_1')(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \\ + y_1 \frac{-(x_2' - x_1')(y_2 - y_1) + (y_2' - y_1')(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned}$$

$$b = y_1' - x_1 \frac{-(x_2' - x_1')(y_2 - y_1) + (y_2' - y_1')(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} -$$

$$-y_1\frac{(x'_2-x'_1)(x_2-x_1)+(y'_2-y'_1)(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Otrzymujemy wzory

$$(54)\qquad a=\frac{(x_2-x_1)(x'_1x_2-x_1x'_2)+(y_2-y_1)(x'_1y_2-y_1x'_2)-}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\frac{-(y'_2-y'_1)(x_1y_1-y_1x_2)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-(y_1)^2}.$$

$$b=\frac{-(x_2-x_1)(x_1y'_2-y'_1x_2)+(y_2-y_1)(y'_1y_2-y_1y'_2)+}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$(55)\qquad \frac{+(x'_2-x'_1)(x_1y_2-y_1x_2)}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Ze związku (51) wynika, że suma kwadratów prawych stron (53) równa się jedności, że wyrażenia prawostronne we wzorach (53) są więc wyrażeniami na dostawę i wstawę zupełnie określonego kąta φ nieujemnego i $< 2\pi$. Wartości te wraz z wartościami (54) na a i b spełniają związki (49) i (50).

Ćwiczenia.

1. Znaleźć związki pomiędzy spółczynnikami kierunkowymi λ, μ danego kierunku, a pomiędzy spółczynnikami λ', μ' tegoż kierunku w nowym układzie osi x', y', których spółczynniki kierunkowe w dawnym układzie są λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2.

2. Dane są trzy punkty $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ i $P_3(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)$. Kiedy punkt P_3 nie zależy od obioru układu osi Kartezjusza?

3. Dane są n punktów P_i, $i=1, 2, \ldots n$ o spółrzędnych x_i, y_i, $i=1, 2\ldots n$. Kiedy punkt P o spółrzędnych $\Sigma\alpha_i x_i$, $\Sigma\alpha_i y_i$ nie zależy od obioru układu osi Kartezjusza?

4. Kiedy przekształcenie układu spółrzędnych prostokątnych Kartezjusza jest identyczne z przekształceniem odwrotnem?

5. Okazać, że gdy danych jest n punktów P_i, $i=1,\ldots n$ i n liczb α_i, gdzie $\Sigma\alpha_i>0$, natenczas środek M tych punktów o spółrzędnych

$$\xi=\frac{\Sigma\alpha_i x_i}{\Sigma\alpha_i},\ \eta=\frac{\Sigma\alpha_i y_i}{\Sigma\alpha_i}$$

1) nie zależy od obioru układu osi Kartezjusza.
2) daje minimum wartości wyrażenia

$$\Sigma\alpha_i\overline{PP_i^2}$$

3) mamy

$$\Sigma\alpha_i\overline{PP_i^2}-\Sigma\alpha_i\overline{MP_i^2}=\Sigma\alpha_i\overline{MP^2}.$$

ROZDZIAŁ IV.

Linje proste.

1. Równania parametryczne linji prostej.

Obierzmy na płaszczyźnie układ U Kartezjusza o osiach x, y. Uważajmy dowolną prostą l i obierzmy na niej dowolny punkt P o spółrzędnych a, b oraz dodatni kierunek o spółczynnikach kierunkowych λ, μ. Liczby a, b; λ, μ wyznaczają w zupełności tę oś, dlatego możemy je nazwać spółrzędnemi osi l.

Uważajmy na osi l dowolny zmienny punkt Q o spółrzędnych x, y i oznaczmy przez d wartość wektora PQ.

Mamy równości

$$x - a = \lambda d, \quad y - b = \mu d, \tag{1}$$

z których wyrażają się x, y wzorami

$$x = a + \lambda d, \quad y = b + \mu d. \tag{2}$$

Wyraziliśmy więc spółrzędne x, y punktu zmiennego Q osi l przez odległość d tego punktu od punktu stałego P. Naodwrót do każdej wartości na d należy oznaczony punkt Q na osi l, którego odległością od P jest uważana wartość na d, i którego spółrzędne x, y mają wartości dane wzorami (2) dla uważanego d.

Możemy się też w następujący sposób przekonać, że punkt Q wyznaczony wzorami (2) leży na prostej l. Jeżeli $d = 0$, mamy

$$x = a, \quad y = b,$$

więc punkt Q o tych spółrzędnych schodzi się z punktem P. Jeżeli zaś $d \neq 0$, połączmy P i Q, którego spółrzędne dane są wzorami (2) prostą l'. Ze wzorów (1) otrzymamy

$$(x - a)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\Theta + (y - b)^2 = d^2,$$

t. j. kwadrat miary odcinka PQ równa się d^2. Obierzmy na l' dowolny dodatni kierunek o spółczynnikach λ', μ' i niechaj d' będzie wartością wektora PQ na osi l'. Mamy

$$x - a = \lambda' d', \quad y - b = \mu' d',$$

więc otrzymamy

$$\lambda d = \lambda' d', \quad \mu d = \mu' d'.$$

Stąd otrzymuje się związek

$$d = \varepsilon d',$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Zatem otrzymujemy pomiędzy λ, μ i λ', μ' związki

$$\lambda = \varepsilon \lambda', \quad \mu = \varepsilon \mu'. \tag{3}$$

Kierunek obrany na prostej l' jest więc dla $\varepsilon = +1$ zgodny z kierunkiem osi l. a dla $\varepsilon = -1$ przeciwny. A ponieważ proste l i l' mają punkt wspólny, więc schodzą ze sobą. i punkt Q leży na prostej l.

Obierzmy teraz dwie liczby a, b dowolnie, i dwie liczby λ, μ spełniające jedynie warunek, aby były spółczynnikami kierunkowemi pewnego kierunku. Wzory (2) dają nam wyrażenia zapomocą wielkości d na spółrzędne x, y punktów położonych na prostej l przechodzącej przez punkt P o spółrzędnych a, b i na której jeden z kierunków ma spółczynniki λ, μ i tylko spółrzędne punktów położonych na tej linji prostej. Dlatego wzory (2) nazywamy równaniami osi. Wielkość d nazywamy parametrem punktów na osi, więc równania (2) równaniami parametrycznemi osi. Równania parametryczne osi przeciwnej osi l, t. j. otrzymującej się z prostej l przez obranie przeciwnego kierunku. jako dodatni są

$$x = a - \lambda d, \quad y = b - \mu d. \tag{4}$$

Każdy z układów równań (2) i (4) nazywamy też równaniami parametrycznymi prostej l.

2. Równanie linji prostej w spółrzędnych Kartezjusza.

Uważajmy prostą l o równaniach parametrycznych (2) lub (4). Z każdego tych dwóch układów równań można wyrugować parametr d. Pomnóżmy pierwsze równanie każdego z tych układów przez μ, drugie przez $-\lambda$ i dodajmy je do siebie. Otrzymamy równanie

$$\mu(x-a)-\lambda(y-b)=0. \tag{5}$$

Otrzymujemy zatem równanie pierwszego stopnia pomiędzy spółrzędnemi Kartezjusza x, y dowolnego punktu Q na prostej l.

Okażemy naodwrót, że dowolny punkt Q o spółrzędnych x, y spełniających równanie (5) leży na prostej l.

Jedna przynajmniej z liczb λ, μ jest od zera odmienna. Z równania (5) otrzymamy równanie

$$y-b-\mu\frac{x-a}{\lambda}=0.$$

Kładąc

$$\frac{x-a}{\lambda}=d,$$

otrzymamy

$$x-a=\lambda d,$$
$$y-b=\mu d.$$

A więc punkt Q leży na osi l o spółczynnikach kierunkowych λ, μ i wektor PQ ma wartość d.

Uważajmy znów równanie (5) zakładając, że liczby a, b są zupełnie dowolne, a λ, μ spełniają jedynie znany warunek. Widzimy, że wszystkie punkty, leżące na prostej l, przechodzącej przez punkt P o spółrzędnych a, b i której jeden z kierunków jest kierunkiem λ, μ spełniają równanie (5) i naodwrót wszystkie punkty, których spółrzędne spełniają równanie (5), leżą na tej linji prostej. Dlatego równanie (5) nazywamy równaniem linji prostej w spółrzędnych Kartezjusza.

3. Ogólne równanie linji prostej w spółrzędnych Kartezjusza.

Uważajmy ogólne równanie pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych x, y, t. j. równanie kształtu

$$Ax+By+C=0, \tag{6}$$

w którem A, B, C są dowolne stałe liczby, spółczynniki równania pierwszego stopnia, a x, y są niewiadome. Każdy układ x, y spełniający to równanie nazywa się układem pierwiastków tego równania.

Możemy odróżnić 3 przypadki następujące:

I. Wszystkie trzy spółczynniki A, B, C równają się zeru

$$A = B = C = 0. \tag{7}$$

II. C jest od zera odmienne, ale A i B równają się zeru

$$A = B = 0, \quad C \neq 0. \tag{8}$$

III. Oba spółczynniki A, B nie są równocześnie równe zeru

$$(9^1)\ A \neq 0 \quad \text{lub} \quad (9^2)\ B \neq 0.$$

W przypadku I. każdy układ dwóch liczb x, y jest układem pierwiastków równania (6). Każdy punkt Q na płaszczyźnie ma spółrzędne x, y spełniające równanie (6).

W przypadku II. niema żadnego układu dwóch liczb x, y spełniających równanie (6), a więc niema punktu Q o spółrzędnych x, y spełniających to równanie.

W przypadku III. istnieją układy x, y spełniające równanie (6). Jeżeli $A \neq 0$ możemy obrać y dowolnie i wyznaczyć x ze wzoru

$$x = -\frac{By + C}{A}. \tag{10}$$

Jeżeli zaś $B \neq 0$, możemy obrać x dowolnie i wyznaczyć y ze wzoru

$$y = -\frac{Ax + C}{B}. \tag{11}$$

Pomnóżmy równanie (6) przez dowolną liczbę k od zera odmienną. Otrzymamy równanie

$$kAx + kBy + kC = 0. \tag{12}$$

Nazwijmy dwa równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych równoważnemi, jeżeli każdy układ pierwiastków jednego dowolnego z nich jest zarazem układem pierwiastków drugiego. Równania (6) i (12) są widocznie równoważne.

Uważajmy znów równanie (5) linji prostej i pomnóżmy je przez dowolną liczbę $k \neq 0$. Otrzymamy równanie

$$k\mu x - k\lambda y + k(-\mu a + \lambda b) = 0. \tag{13}$$

Zbadamy, jakie są warunki konieczne i wystarczające, aby ogólne równanie (6) dało się napisać w postaci (13), a więc aby istniały liczby

$$a,\ b;\ \lambda,\ \mu;\ k \tag{14}$$

spełniające warunki następujące: Mamy równości

$$A = k\mu, \quad B = -k\lambda, \quad C = k(-\mu a + \lambda b). \tag{15}$$

Liczby λ, μ są spółczynnikami pewnego kierunku

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \mu^2 = 1, \tag{16}$$

a k jest od zera odmienne.

Przedewszystkiem równanie (6) należeć musi do III. kategorji. Następnie z pierwszych dwóch związków (15) otrzymamy ze względu na warunek (16)

$$k^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta,$$

a więc

$$k = \varepsilon\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}, \tag{17}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a pierwiastek uważamy jako dodatni.

Wyrażenie

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \tag{18}$$

figurujące pod pierwiastkiem we wzorze na k jest zawsze dodatnie. W istocie możemy je napisać w kształcie

$$(A - B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2,$$

sumy dwóch kwadratów, która jest nieujemna i równa się zeru wtedy i tylko wtedy gdy mamy

$$A - B\cos\theta = 0, \quad B\sin\theta = 0,$$

a więc gdy

$$A = B = 0.$$

Oznaczmy dodatni pierwiastek wyrażenia (18) przez R.

Z pierwszych dwóch wzorów (15) otrzymujemy

$$\lambda = -\varepsilon\frac{B}{R}, \quad \mu = \varepsilon\frac{A}{R}, \tag{19}$$

a wstawiając te wartości w trzeci wzór (15) otrzymujemy

$$Aa + Bb + C = 0. \tag{20}$$

Liczby (14) obliczone ze wzorów (17), (19), (20) spełniają warunki (15). A więc do każdego układu spółczynników A, B, C w przypadku III. należą układy liczb (14) spełniające warunki (15).

Każde równanie (6) III. kategorji jest więc równoważne pewnemu równaniu (5) linji prostej, na której leży punkt $P(a, b)$ spełniający warunek (20) i której spółczynniki kierunkowe dane są wzorami (19).

Równanie (6) nazywa się w przypadku III. *ogólnem równaniem linji prostej*[1]. Będziemy w dalszym ciągu zakładali, że uważamy równanie (6) III. przypadku.

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 1: „Ogólne równanie pierwszego stopnia (6), którego nie oba spółczynniki A, B są równe zeru, jest równaniem pewnej zupełnie oznaczonej prostej, której spółczynniki kierunkowe dane są wzorami (19)".

Uważajmy teraz dwa ogólne równania pierwszego stopnia

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

i przypuśćmy, że te równania są ogólnemi równaniami jednej i tej samej linji prostej l. Niechaj punkt P o spółrzędnych a, b będzie dowolnie obranym punktem tej linji prostej, a λ, μ spółczynnikami dowolnie obranego kierunku tej linji prostej. Równanie

$$\mu(x - a) - \lambda(y - b) = 0 \tag{22}$$

jest równaniem tej linji prostej. A więc istnieją dwie liczby k_1 i k_2 obie od zera odmienne i takie że zachodzą równości

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1\mu, \quad B_1 = -k_1\lambda, \quad C_1 = k_1(-\mu a + \lambda b), \\ A_2 &= k_2\mu, \quad B_2 = -k_2\lambda, \quad C_2 = k_2(-\mu a + \lambda b). \end{aligned} \tag{23}$$

Z równości tych wynikają równości

$$A_2 = \frac{k_2}{k_1} A_1, \quad B_2 = \frac{k_2}{k_1} B_1, \quad C_2 = \frac{k_2}{k_1} C,$$

albo kładąc

$$k = \frac{k_2}{k_1}$$

równości

$$A_2 = kA_1, \quad B_2 = kB_1, \quad C_2 = kC_1, \tag{24}$$

gdzie k jest liczba od zera odmienna.

---

[1] Descartes okazuje w „Géométrie", że równanie 1-go stopnia między x i y przedstawia prostą. Ogólną postać równania prostej znajdujemy u Euler'a (Introductio).

Możemy zatem wypowiedzieć:

Twierdzenie 2: „Dwa ogólne równania pierwszego stopnia przedstawiające tę samą prostą posiadają spółczynniki do siebie proporcjonalne i naodwrót“.

4. Inne równania linji prostej.

Uważajmy ogólne równanie linji prostej l (6) i dowolnie obrany punkt $P(a, b)$ tej prostej. Odejmując obie strony równości (20) od obu stron równania (6) otrzymujemy równanie

$$A(x-a)+B(y-b)=0 \tag{25}$$

linji prostej przechodzącej przez punkt P.

W szczególności równanie prostej przechodzącej przez początek układu O jest

$$Ax+By=0. \tag{26}$$

Jeżeli mamy $A \neq 0$ możemy napisać równanie prostej w postaci (10), a kładąc

$$-\frac{B}{A}=m, \quad -\frac{C}{A}=p \tag{27}$$

mamy równanie

$$x=my+p. \tag{28}$$

Taksamo jeżeli $B \neq 0$ możemy napisać równanie prostej w postaci (11), a kładąc

$$-\frac{A}{B}=n, \quad -\frac{C}{B}=q \tag{29}$$

mamy równanie

$$y=nx+q. \tag{30}$$

Liczby m, n nazywają się *spółczynnikami kątowemi* (coëfficient angulaire) prostej. Mamy

$$m=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\varphi}, \tag{31}$$

$$n=\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta-\varphi)}.$$

W przypadku prostokątnego układu spółrzędnych i $\theta = +\frac{\pi}{2}$ mamy

$$m = \operatorname{cotg}\varphi, \quad n = \operatorname{tg}\varphi. \tag{32}$$

Liczby p, q są odpowiednio równe odciętej punktu, w którym prosta (28) przecina oś x i rzędnej punktu, w którym prosta (29) przecina oś y.

Spółczynniki kątowe m i n nie zależą od obioru kierunku dodatniego na prostej.

Jeżeli prosta l przecina obie osie w punktach M, N odmiennych od początku układu, mamy nierówności

$$A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0$$

i równanie prostej napiszemy w postaci

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0,$$

a kładąc

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B} \tag{33}$$

w postaci

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{34}$$

równania odcinkowego prostej, w którem a jest odciętą punktu M, zaś b rzędną punktu N.

5. Punkt i prosta.

Uważajmy dowolną prostą l o równaniu (6) i dowolny punkt P o spółrzędnych a, b. Obierzmy na prostej l dowolny kierunek dodatni o spółczynnikach λ, μ. Mamy więc wzory (19), w których ε oznacza jednę oznaczoną z dwóch liczb $+1$ lub -1.

Przeprowadźmy przez punkt P prostą l' prostopadłą do l i obierzmy na niej kierunek dodatni zawierający kąt $+\frac{\pi}{2}$ z kierunkiem osi l. Niechaj λ', μ' będą spółczynniki tego kierunku na prostej l'. Napiszmy równania parametryczne osi l'

$$x = a + \lambda' d', \quad y = b + \mu' d',$$

gdzie d' jest odległość bieżącego punktu Q osi l' od P. Niechaj $R(\xi, \eta)$ będzie punktem przecięcia prostych l i l' zaś δ wartością wektora PR. Spółrzędne ξ, η spełniają równanie prostej l. Mamy więc

$$A(a + \lambda'\delta) + B(c + \mu'\delta) + C = 0,$$

a stąd

$$\delta = -\frac{Aa + Bc + C}{A\lambda' + B\mu'}. \tag{36}$$

Ale mamy wzory

$$\lambda' = -\frac{\lambda \cos\theta + \mu}{\sin\theta}, \quad \mu' = \frac{\lambda + \mu\cos\theta}{\sin\theta},$$

a więc mamy

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\varepsilon\frac{A - B\cos\theta}{\sin\theta \,.\, R}, \\ \mu' &= \varepsilon\frac{A\cos\theta - B}{\sin\theta \,.\, R}. \end{aligned} \tag{37}$$

Stąd otrzymujemy

$$A\lambda' + B\mu' = -\varepsilon\frac{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}{\sin - \theta \,.\, R} = -\varepsilon\frac{R}{\sin\theta}.$$

Otrzymujemy zatem na δ wzór

$$\delta = \varepsilon\sin\theta\,\frac{Aa + Bb + C}{R}. \tag{38}$$

Nazwijmy *odległością punktu P od osi l* wartość δ wektora PR. Odległości dwóch punktów P_1, P_2 o spółrzędnych a_1, b_1 i a_2, b_2 od osi l są liczbami tego samego znaku, jeżeli te punkty leżą po tej samej prostej l, a liczbami znaków przeciwnych w przeciwnym razie. Odległość δ jest proporcjonalna do wyrażenia

$$Aa + Bb + C$$

które otrzymuje się wstawiając spółrzędne a, b punktu P w lewą stronę równania prostej l. A więc punkty P_1, P_2 są położone z *tejsamej* strony l jeżeli wyrażenia

$$Aa_1 + Bb_1 + C \quad \text{i} \quad Aa_2 + Bb_2 + C$$

są tego samego znaku, a po stronach *przeciwnych*, jeżeli wyrażenia te są znaków przeciwnych.

Część płaszczyzny, dla której wyrażenie

$$\varepsilon(Aa + Bb + C)\sin\theta$$

jest dodatnie nazywamy *częścią dodatnią* płaszczyzny, a drugą część *częścią ujemną*.

Z równań parametrycznych (35) prostej l' otrzymujemy równanie tej prostej rugując d'

$$\mu'(x - a) - \lambda'(y - b) = 0,$$

a wstawiając wyrażenia (37) na spółczynniki kierunkowe otrzymujemy równanie

$$(A\cos\theta - B)(x - a) + (A - B\cos\theta)(y - b) = 0$$

prostej prostopadłej do prostej (b) i przechodzącej przez punkt $P(a, b)$.

W przypadku układu osi prostokątnych, $\theta = \eta\frac{\pi}{2}$ gdzie $\eta = \pm 1$, otrzymujemy ze wzorów (37)

$$\lambda' = -\varepsilon\eta\frac{A}{R}, \quad \mu' = -\varepsilon\eta\frac{B}{R}, \tag{40}$$

a równanie (39) przybierze postać

$$-B(x - a) + A(y - b) = 0. \tag{41}$$

6. Równanie normalne prostej.

Ze wzorów (37) możemy wyrazić spółczynniki A i B przez spółczynniki kierunkowe λ', μ'. Mnożąc wzory te obustronnie przez 1 i $\cos\theta$ i dodając otrzymamy

$$\lambda' + \mu'\cos\theta = -\varepsilon\sin\theta\frac{A}{R}$$

a mnożąc obustronnie przez $\cos\theta$, 1 i dodając otrzymamy

$$\lambda'\cos\theta + \mu' = -\varepsilon\sin\theta\frac{B}{R}.$$

Stąd otrzymujemy wzory

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\varepsilon R}{\sin\theta}(\lambda' + \mu'\cos\theta), \\ B &= -\frac{\varepsilon R}{\sin\theta}(\lambda'\cos\theta + \mu'). \end{aligned} \tag{42}$$

Obierzmy we wzorze (38) jako punkt P początek O układu i oznaczmy odległość jego przez δ_0. Otrzymamy

$$\delta_0 = \sin\theta \frac{C}{R},$$

a stąd wyrazimy C przez δ_0 w postaci

$$C = \frac{\varepsilon R}{\sin\theta}\,\delta_0. \tag{43}$$

Zastępując w równaniu (6) prostej l A, B, C przez wyrażenia dane wzorami (42), (43) otrzymujemy równanie

$$(\lambda' + \mu'\cos\theta)\,x + (\lambda'\cos\theta + \mu')\,y - \delta_0 = 0. \tag{44}$$

Równanie to nazywa się *normalnem* (équation normale).

Zastąpmy w tem równaniu λ', μ' przez dostawy kierunkowe $\cos\varphi'$, $\cos(\theta - \varphi')$ osi l'. Mamy (wzory 53 Rozdziału II.)

$$\cos\varphi' = \lambda' + \mu'\cos\theta,$$
$$\cos(\theta - \varphi') = \lambda'\cos\theta + \mu'.$$

Otrzymujemy więc równanie normalne w postaci

$$\cos\varphi'\,x + \cos(\theta - \varphi')\,y - \delta_0 = 0. \tag{45}$$

Jeżeli na prostej l zmienimy kierunek dodatni na przeciwny, natenczas kąt φ' powiększy się o π, a równocześnie zmieni się kierunek dodatni prostej l' na przeciwny, a więc zmieni się znak odległości OR na przeciwny. A więc równania (44) i (45) pomnożą się przez -1.

Wyprowadzimy teraz w inny sposób równanie normalne prostej l. Uważajmy linję łamaną zamkniętą $ORMAO$, w której punkt M o spółrzędnych x, y jest dowolnie obranym punktem na prostej l, a punkt A jego rzutem na oś x równolegle do osi y. Rzutujmy tę linję łamaną na oś l' prostopadle do tej osi. Mamy wzór

$$R_{l'}(OR) + R_{l'}(RM) + R_{l'}(MB) + R_{l'}(AO) = 0,$$

gdzie $R_{l'}$ oznacza rzut na oś l'. Przytem uważamy wektory OR, RM, MA i AO jako położone odpowiednio na osiach: l', l, na osi równoległej i równoskierowanej z osią y i na osi x. Mamy więc

$$\begin{aligned}
R_v(OR) &= \overline{OR} = \delta_0,\\
R_v(RM) &= 0,\\
R_v(MA) &= -R_v(AM) = -y\cos(\theta-\varphi'),\\
R_v(AO) &= -R_v(OA) = -x\cos\varphi'.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$\delta_0 - y\cos(\theta-\varphi') - x\cos\varphi' = 0,$$

czyli równanie normalne (45) prostej *l*.

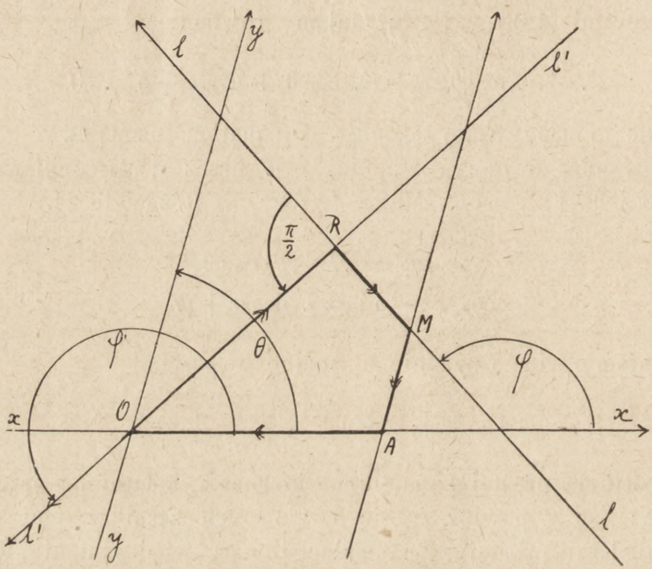

Fig. 9.

W przypadku układu prostokątnego $\theta = +\frac{\pi}{2}$, równanie (45) przybiera kształt

$$x\cos\varphi' + y\sin\varphi' - \delta_0 = 0. \tag{47}$$

Pomiędzy dostawami kierunkowemi $\cos\varphi'$, $\cos(\theta-\varphi')$ zachodzi związek (52) II. Rozdziału

$$\cos^2\varphi' - 2\cos\varphi'\cos(\theta-\varphi')\cos\theta + \cos^2(\theta-\varphi') = \sin^2\theta. \tag{47}$$

Niechaj naodwrót dwie liczby u, v spełniają związek

$$u^2 - 2uv\cos\theta + v^2 = \sin^2\theta. \tag{48}$$

Każda z tych liczb co do wartości bezwzględnej nie jest większa niż 1, albowiem ze związku (48) u wyraża się przez v w postaci

$$u = v \cos\theta \pm \sqrt{1 - v^2} \sin\theta$$

a v przez u w postaci

$$v = u \cos\theta \pm \sqrt{1 - u^2} \sin\theta.$$

Obliczmy liczby l i m z równań

$$\begin{aligned} l + m \cos\theta &= u, \\ l \cos\theta + m &= v. \end{aligned} \tag{49}$$

Mamy

$$\begin{aligned} l &= \frac{u - v \cos\theta}{\sin^2\theta}, \\ m &= \frac{v - u \cos\theta}{\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{50}$$

Pomiędzy l i m zachodzi związek

$$l^2 + 2lm \cos\theta + m^2 = 1, \tag{51}$$

liczby te mogą być więc uważane jako spółczynniki pewnego oznaczonego kierunku, którego dostawami kierunkowymi są liczby u i v. Jedna i tylko jedna z liczb u, v może być obrana dowolnie byleby nie większa co do wartości bezwzględnej niż 1.

Jeżeli więc pomiędzy społczynnikami A, B zachodzi związek

$$A^2 - 2AB \cos\theta + B^2 = \sin^2\theta, \tag{52}$$

natenczas obliczamy kąt φ' ze wzorów

$$\cos\varphi' = A, \quad \cos(\theta - \varphi') = B.$$

Ze wzorów (42) wynika

$$\varepsilon R = - \sin\theta.$$

A więc $\varepsilon = -1$, gdy $\sin\theta$ jest dodatnie, a $\varepsilon = +1$ gdy $\sin\theta$ jest ujemne. Ze wzoru (43) otrzymujemy

$$\delta_0 = - C.$$

Równanie (6) prostej jest w tym przypadku równaniem normalnem.

7. Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty.

Uważajmy prostą l przechodzącą przez dwa dane punkty $P_1(a_1, b_1)$ i $P_2(a_2, b_2)$ od siebie odmienne. Równanie prostej przechodzącej przez punkt P_1 ma postać (25)

$$A(x-a_1)+B(y-b_1)=0.$$

Ponieważ prosta l przechodzi przez punkt P_2, więc mamy równość

$$A(a_2-a_1)+B(b_2-b_1)=0$$

istnieje więc liczba k od zera odmienna taka że mamy

$$\begin{aligned} A &= k(b_2-b_1), \\ B &= -k(a_2-a_1). \end{aligned}$$

Zatem równanie prostej l ma postać

$$(x-a_1)(b_2-b_1)-(y-b_1)(a_2-a_1)=0. \tag{53}$$

Równanie to jest w istocie równaniem *zupełnie oznaczonej* prostej, przechodzącej przez punkt P_1 i P_2, a więc mamy dowód analityczny, że przez dwa od siebie odmienne punkty przechodzi jedna i tylko jedna prosta.

Równanie (53) możemy napisać w postaci następującej

$$x(b_2-b_1)-y(a_2-a_1)-a_1b_2+a_2b_1=0. \tag{54}$$

8. Dwie linje proste. Dwa równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych.

Uważajmy dwie dowolnie obrane linje proste l_1, l_2 na płaszczyźnie o równaniach

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{aligned} \tag{55}$$

Nie obie liczby A_1, B_1 równocześnie równają się zeru i taksamo nie obie liczby A_2, B_2 równocześnie równają się zeru.

Do układu dwóch równań (55) należy pewna *macierz* M, tj. tabela utworzona ze spółczynników tych równań, a mianowicie macierz

$$M=\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}. \tag{56}$$

Wiersze tej macierzy utworzone są odpowiednio ze spółczynników pierwszego i drugiego równania, a *kolumny* macierzy są utworzone odpowiednio ze spółczynników przy x, przy y i z wyrazów wolnych równań (55). Macierz taka nazywa się *macierzą równań dwóch prostych.*

Z trzech kolumn macierzy M możemy utworzyć trzy kombinacje dwóch kolumn, a mianowicie 1-szej i 2-giej kolumny, 2 giej i 3-ciej, 3-ciej i 1-szej kolumny. Przytem uważamy liczby 1, 2, 3 jako następujące po sobie w porządku *cyklicznym* tj. po liczbie 3 następuje liczba 1. Otrzymujemy w ten sposób trzy macierze o dwóch wierszach i dwóch kolumnach

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}. \tag{57}$$

Są to macierze *kwadratowe* tj. o równej liczbie wierszy i kolumn. Macierze kwadratowe nazywamy *wyznacznikami*, a mianowicie w naszym przypadku wyznacznikami *drugiego stopnia.* Wyznaczniki (57) nazywamy *wyznacznikami należącemi do równań* (55) i oznaczamy je odpowiednio literami γ, α, β. Liczby A, B, C nazywają się *elementami* macierzy.

Wartością wyznacznika drugiego stopnia

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

nazywamy wyrażenie

$$A_1\ B_2 - A_2\ B_1.$$

Oznaczając więc wartość wyznaczników (57) temi samemi literami co same wyznaczniki mamy

$$\begin{aligned} \alpha &= B_1 C_2 - B_2 C_1, \\ \beta &= C_1 A_2 - C_2 A_1, \\ \gamma &= A_1 B_2 - A_2 B_1. \end{aligned} \tag{58}$$

Widoczna, że wartość wyznacznika zmieni się na wartość o znaku przeciwnym jeżeli albo przestawimy oba wiersze wyznacznika albo obie kolumny

Pomiędzy liczbami α, β, γ a elementami wyznaczników (57) mamy następujące związki

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = 0, \\ \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

W ustępie 3 otrzymaliśmy warunki (24) konieczne i wystarczające, aby równania (55) przedstawiały tę samą linję prostą. Ze wzorów (58) na wartości wyznaczników (57) widzimy, że koniecznym warunkiem, aby równania (55) przedstawiały tę samą prostą jest, aby wszystkie te wyznaczniki miały wartość zero. Warunki te są też wystarczające. W istocie, niechaj np. A_1 będzie od zera odmienne. Ze związku

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

wynika, że i A_2 jest od zera odmienne, inaczej A_2 i B_2 byłyby równocześnie zero. Kładąc

$$\frac{A_2}{A_1} = k \neq 0$$

otrzymujemy

$$A_2 = k A_1,$$
$$B_2 = k B_1,$$

a ze związku

$$C_1 A_2 - C_2 A_1 = 0,$$

otrzymujemy

$$C_2 = k C_1,$$

a więc zachodzą warunki (24).

Dwie proste l_1, l_2 mogą mieć względem siebie *trojakie* położenie. 1) Są od siebie odmienne i przecinają się. 2) Są od siebie odmienne i równoległe do siebie. 3) Zlewają się ze sobą. W *pierwszym* przypadku równania (49) mają jeden jedyny wspólny układ pierwiastków x, y. W *drugim* przypadku równania te nie mają żadnego wspólnego układu pierwiastków. Wreszcie w *trzecim* przypadku równania te mają nieskończenie wiele wspólnych układów pierwiastków, a mianowicie każdy układ pierwiastków spełniający jedno dowolne z tych równań spełnia i drugie równanie.

Widzieliśmy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby zachodził trzeci przypadek jest, by wszystkie trzy liczby α, β, γ były równe zeru. Przypuśćmy teraz, że zachodzi przypadek pierwszy i niechaj ξ, η będzie wspólny układ pierwiastków równań (55). Uważajmy równości

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 = 0,$$
$$A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 = 0$$

i pomnóżmy je odpowiednio przez B_2, $- B_1$, a następnie dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$\gamma \xi - \alpha = 0.$$

Tak samo pomnóżmy równości te przez $-A_2$, A_1 i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$\gamma\eta - \beta = 0.$$

γ jest od zera odmienne, albowiem gdyby było $\gamma = 0$ musiałyby zachodzić równości

$$\alpha = \beta = 0$$

i mielibyśmy przypadek trzeci. Zatem warunkiem koniecznym aby zachodził pierwszy przypadek jest by wyznacznik γ był od zera odmienny.

Warunek ten jest wystarczający. W istocie jeżeli warunek ten jest spełniony, wielkości

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\alpha}{\gamma} \\ \eta &= \frac{\beta}{\gamma} \end{aligned} \tag{60}$$

spełniają równania (55), albowiem mamy

$$A_1 \frac{\alpha}{\gamma} + B_2 \frac{\beta}{\gamma} + C_1 = \frac{1}{\gamma}(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) = 0,$$

$$A_2 \frac{\alpha}{\gamma} + B_2 \frac{\beta}{\gamma} + C_2 = \frac{1}{\gamma}(A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma) = 0.$$

Jeżeli więc mamy $\gamma = 0$, natenczas mogą tylko zachodzić przypadki drugi i trzeci. Aby zachodził przypadek drugi potrzeba i wystarcza aby przynajmniej jedna z liczb α, β była od zera odmienna.

Dochodzimy zatem do następującego rezultatu:

Twierdzenie 3. „Dwie linje proste przecinają się, są do siebie równoległe od siebie odmienne lub zlewają się ze sobą zależnie od tego czy $\gamma \neq 0$, czy $\gamma = 0$, ale nie obie liczby α, β są równe zeru. lub czy wszystkie trzy liczby α, β, γ, równają się zeru. Równania (55) tych prostych mają jeden jedyny układ rozwiązań, nie posiadają żadnego układu rozwiązań lub posiadają nieskończenie wiele układów rozwiązań przyczem każdy układ rozwiązań spełniający jedno dowolne z tych dwóch równań spełnia i drugie równanie, zależnie od tego czy zachodzi pierwszy, drugi czy też trzeci przypadek odnośnie do wartości wyznaczników α, β i γ".

Dwa równania (55) pierwszego stopnia są od siebie *niezależne*, jeżeli niema stałej k od zera odmiennej, dla której zachodzą równości (24), w przeciwnym razie nazywają się *zależne* od siebie. A więc w pierwszym i drugim przypadku, równania te są od siebie niezależne, a w trzecim przypadku równania te są od siebie zależne.

Dwie proste l_1, l_2 nazywają się *niezależne* od siebie lub *zależne*; zależnie od tego czy ich równania (55) są od siebie niezależne, czy też są zależne A więc dwie proste zależne zlewają się ze sobą i naodwrót.

Łatwo bezpośrednio skonstatować, że warunkiem koniecznym i wystarczającym równoległości dwóch prostych jest $\gamma = 0$. W istocie, jeżeli λ_1, μ_1 są spółczynniki pewnego kierunku na linji prostej l_1, a λ_2, μ_2 spółczynniki pewnego kierunku na prostej l_2 mamy

$$A_1 = k_1 \lambda_1, \quad B_1 = - k_1 \lambda_1,$$
$$A_2 = k_2 \lambda_2. \quad B_2 = - k_2 \mu_2,$$

gdzie k_1, k_2 są pewne dwie liczby od zera odmienne. A więc stąd otrzymujemy

$$A_1 B_2 - A_2 B_2 = - k_1 k_2 (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1).$$

Zatem γ obraca się w zero równocześnie z $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$. Mamy więc warunek *równoległości*

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0. \tag{61}$$

Tak samo otrzymamy warunek konieczny i wystarczający prostopadłości dwóch prostych wyrażony przez spółczynniki równań (55) obu prostych. Mamy warunek konieczny i wystarczający

$$\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \cos \theta + \lambda_1 \mu_2 = 0,$$

a wstawiając wyrażenia na spółczynniki kierunkowe otrzymujemy warunek *prostopadłości*

$$A_1 A_2 - (A_1 B_2 + A_2 B_1) \cos \theta + B_1 B_2 = 0. \tag{62}$$

W szczególnym przypadku układu *prostokątnego* spółrzędnych warunek ten przyjmuje postać

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

9. Pęki linij prostych.

Uważajmy dwie proste l_1, l_2 o równaniach (55) i załóżmy, że zachodzi pierwszy przypadek tj. $\gamma \neq 0$. Niechaj ξ, η będą spółrzędne punktu P przecięcia obu prostych. Możemy równania (55) napisać w postaci

$$A_1(x-\xi)+B_1(y-\eta)=0,$$
$$A_2(x-\xi)+B_2(y-\eta)=0.$$

Pomnóżmy równania (55) przez dwie dowolne liczby k_1, k_2 nie obie równe zeru i dodajmy je do siebie. Otrzymamy równanie

$$k_1(A_1x+B_1y+C_1)+k_2(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{63}$$

albo równanie

$$(k_1A_1+k_2A_2)x+(k_1B_1+k_2B_2)y+k_1C_1+k_2C_2=0. \tag{64}$$

Równanie to jest równaniem pewnej oznaczonej prostej, przechodzącej przez punkt P albowiem nie oba spółczynniki przy x i y równają się równocześnie zeru. Uważajmy dowolną prostą l przechodzącą przez punkt P o równaniu (6)

$$Ax+By+C=0.$$

Równanie to możemy napisać w postaci

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)=0.$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby równanie to dało się napisać w postaci (64) lub (65) jest istnienie dwóch liczb k_1, k_2 spełniających równania

$$\begin{aligned} k_1A_1+k_2A_2&=A,\\ k_1B_1+k_2B_2&=B. \end{aligned} \tag{65}$$

Ale ponieważ $\gamma \neq 0$ więc istnieje jeden jedyny układ liczb spełniających te dwa równania i na nie mamy wzory

$$\begin{aligned} k_1&=\frac{AB_2-A_2B}{\gamma},\\ k_2&=\frac{-AB_1+A_1B}{\gamma}. \end{aligned} \tag{66}$$

Istnieje więc jeden jedyny układ liczb nie obu równych zeru tak, że zachodzą trzy równości

$$\begin{aligned} k_1A_1 + k_2A_2 &= A, \\ k_1B_1 + k_2B_2 &= B, \\ k_1C_1 + k_2C_2 &= C. \end{aligned} \tag{67}$$

Zbiór prostych przechodzących przez punkt P tworzy jak wiemy z rozważań ustępu 1. Rozdziału II. *pęk prostych* o *wierzchołku P*. Dwie dowolne od siebie odmienne proste l_1, l_2 pęku wyznaczają w zupełności ten pęk, a równania (63) lub (64) przedstawiają wszystkie proste pęku i tylko te proste. Możemy zatem każde z nich nazwać *równaniem pęku prostych*. Równanie (63) nazywamy *linjową kombinacją* równań (55) obu prostych, a k_1, k_2 *parametrami* równania (63) pęku.

10. Symboliczne oznaczanie równań prostych.

Lewą stronę równania (6) linji prostej można oznaczyć jedną literą L, pisząc *symboliczne* równanie linji prostej w postaci

$$L = 0. \tag{68}$$

Możemy więc równania (55) napisać symbolicznie w postaci

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0,$$

a równocześnie (63) symbolicznie w postaci

$$k_1L_1 + k_2L_2 = 0.$$

Tożsamość lewych stron L i L' dwóch równań

$$L = 0, \quad L' = 0$$

oznacza się symbolicznie w ten sposób

$$L \equiv L'.$$

A więc jeżeli równanie (68) jest równaniem prostej (63) pęku (P) możemy napisać symboliczną tożsamość

$$L \equiv k_1L_1 + k_2L_2, \tag{69}$$

równoważną trzem równościom (67).

11. Dwusieczne dwóch prostych przecinających się.

Uważajmy znów dwie proste l_1, l_2 przecinające się w punkcie P. Pomiędzy prostymi pęku (P) szczególnie ważne są proste, połowiące kąty jakie proste l_1, l_2 zawierają ze sobą, tj. *dwusieczne* (bisectrices) kątów.

Proste te, $\overline{l}_1$ i $\overline{l}_2$ posiadają tę własność, że ich punkty są równo oddalone od obu prostych l_1 i l_2. Wyprowadzimy ich równania opierając się na tej ich własności.

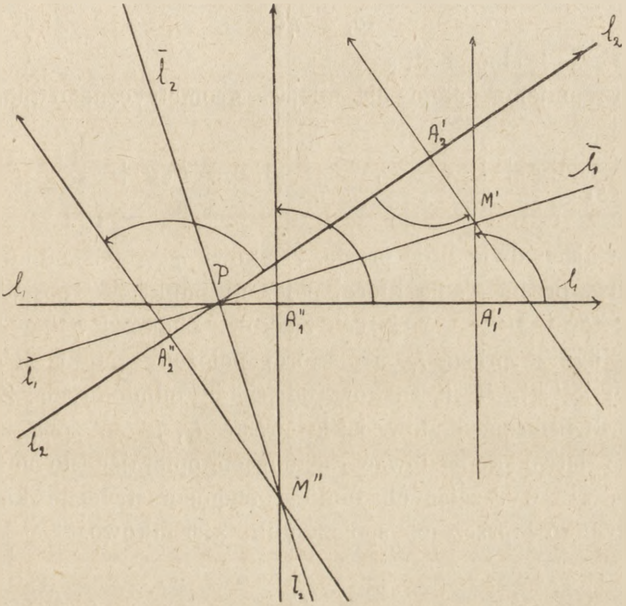

Fig. 10.

Uważajmy więc punkt M na płaszczyźnie i załóżmy że punkt ten jest równo oddalony od obu prostych l_1 i l_2. Obieramy na prostych tych kierunki dodatnie o spółczynnikach kierunkowych λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2. Mamy

$$\lambda_2 = -\varepsilon_1 \frac{B_1}{R_1}, \quad \mu_1 = \varepsilon_1 \frac{A_1}{R_1},$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon_2 \frac{B_2}{R_2}, \quad \mu_2 = \varepsilon_2 \frac{A_2}{R_2}.$$

Odległości $\delta_1 = \overline{MA_1}$ i $\delta_2 = \overline{MA_2}$ punktu M od prostych l_1, l_2 na osiach przechodzących przez ten punkt i zawierających kąty $+\frac{\pi}{2}$ z osiami l_1, l_2 są

$$\delta_1 = \varepsilon_1 \sin\theta \frac{A_1x + B_1y + C_1}{R_1},$$
$$\delta_2 = \varepsilon_2 \sin\theta \frac{A_2x + B_2y + C_2}{R_2}.$$

Mamy więc dla punktu M warunek

$$\delta_1 = \eta\delta_2,$$

gdzie $\eta = +1$ albo -1.

Otrzymujemy zatem dla miejsca geometrycznego punktów M równanie

$$\varepsilon_1 \frac{A_1x + B_1y + C_1}{R_1} - \eta\varepsilon_2 \frac{A_2x + B_2y + C_2}{R_2} = 0, \tag{70}$$

przedstawiające dwie linje proste. Znakowi $\eta = +1$ odpowiada na figurze (10) prosta $\overline{l_2}$, na której położony punkt M'' posiada odległości $M''A''_1$ i $M''A''_2$ równych znaków. Znakowi $\eta = -1$ odpowiada na figurze prosta $\overline{l_1}$, na której położony punkt M' posiada odległości $M'A'_1$, $M'A'_2$ znaków od siebie odmiennych. Że proste $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ są dwusieczne kątów jakie proste l_1, l_2 ze sobą zawierają można też łatwo skonstatować rachunkiem opierając się na wzorach Rozdziału II. wyrażających funkcje trygonometryczne kątów danych kierunków przez ich spółczynniki kierunkowe.

12. Pęki niewłaściwe linij prostych.

Uważajmy dwie linje proste l_1, l_2 o równaniach (55) i załóżmy, że zachodzi przypadek *drugi*, tj. że te proste są od siebie odmienne i do siebie równoległe. Niechaj k_1, k_2 będą dwie dowolne. liczby nie obie równe zeru. Mamy

$$(k_1A_1 + k_2A_2)B_2 - (k_1B_1 + k_2B_2)A_2 = k_1(A_1B_2 - A_2B_1) = 0,$$
$$(k_1A_1 + k_2A_2)B_1 - (k_1B_1 + k_2B_2)A_1 = -k_2(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

Prosta l przedstawiona równaniem (64) jest więc równoległa do prostych l_1 i l_2. Wyjątek zachodzi w przypadku, gdy mamy równocześnie

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 = 0,$$
$$k_1 B_1 + k_2 B_2 = 0.$$

W przypadku tym mamy

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 \neq 0$$

w przeciwnym bowiem razie wszystkie trzy wyznaczniki α, β, γ równałyby się zeru.

Uważajmy teraz naodwrót prostą o równaniu (6) równoległą do prostych l_1, l_2.

Mamy więc

$$AB_1 - A_1 B = 0,$$
$$AB_2 - A_2 B = 0.$$

Udowodnimy, że istnieje jeden jedyny układ dwóch liczb k_1, k_2 nie obu równych zeru spełniających warunki

$$\begin{aligned} k_1 A_1 + k_2 A_2 &= A, \\ k_1 B_1 + k_2 B_2 &= B, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 &= C. \end{aligned} \tag{71}$$

Załóżmy $A_1 \neq 0$. Wówczas mamy też $A_2 \neq 0$, $A \neq 0$. Uważajmy pierwsze i trzecie równanie (71)

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 = A,$$
$$k_1 C_1 + k_2 C_2 = C.$$

Te dwa równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych k_1, k_2 posiadają jeden jedyny układ rozwiązań. W istocie wyznacznik przy niewiadomych

$$A_1 C_2 - A_2 C_1$$

jest od zera odmienny, albowiem w przeciwnym razie z równości

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$
$$A_1 C_2 - A_2 C_1 = 0$$

otrzymalibyśmy mnożąc te równości przez $C_1, - B_1$ i dodając do siebie

$$A_1 (B_2 C_1 - B_1 C_2) = 0,$$

a więc

$$B_2 C_1 - B_1 C_2 = 0.$$

Zatem wszystkie trzy liczby α, β, γ równałyby się zeru, co nie zachodzi.

Mamy więc na k_1, k_2 wzory

$$k_1 = -\frac{AC_2 - A_2C}{\beta},$$
$$k_2 = \frac{AC_1 - A_1C}{\beta}.$$

Wartości te na k_1, k_2 spełniają drugie równanie

$$k_1 B_1 + k_2 B_2 = B,$$

albowiem mamy

$$-A(B_1C_2 - B_2C_1) + C(A_2B_1 - A_1B_2) = -A(B_1C_2 - B_2C_1) =$$
$$= -B(A_1C_2 - A_2C_1) = \beta B.$$

Uogólnimy teraz poprzednio wprowadzone pojęcie pęku prostych. A mianowicie nazwiemy *pękiem niewłaściwym* zbiór wszystkich prostych do siebie równoległych, nazywając *pękami właściwymi* pęki dotychczas uważane. Widzimy, że wszystkie proste pęku niewłaściwego i tylko te proste można przedstawić równaniami (63) lub (64), z których każde można nazwać *równaniem pęku niewłaściwego* prostych, a k_1, k_2 parametrami pęku niewłaściwego.

13. Trzy linje proste. Trzy równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych.

Uważajmy teraz trzy dowolnie obrane proste na płaszczyźnie l_1, l_2, l_3. Mogą one względem siebie zajmować rozmaite położenia. Zależnie od tego, czy pewne z tych prostych zlewają się ze sobą czy też nie i czy pewne z nich są do siebie równoległe czy też nie możemy odróżnić następujących 7 przypadków:

I. Wszystkie proste zlewają sie ze sobą.
II. Dwie proste zlewają się ze sobą a trzecia jest odmienna i do nich równoległa.
III. Dwie proste zlewają się ze sobą a trzecia je przecina.
IV. Wszystkie proste są od siebie odmienne i do siebie równoległe.
V. Dwie proste są do siebie równoległe i odmienne, a trzecia je przecina.
VI. Wszystkie proste przecinają się w jednym i tymsamym punkcie.
VII. Wszystkie proste przecinają się w trzech od siebie odmiennych punktach.

Uważajmy równania trzech prostych w postaci

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2&=0, \\ A_3x+B_3y+C_3&=0. \end{aligned} \tag{72}$$

Równocześnie z równaniami tymi uważamy *wyznacznik trzeciego stopnia* tj. wyznacznik W o trzech wierszach i trzech kolumnach utworzony ze spółczynników tych równań jako elementów

$$W=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}. \tag{73}$$

Będziemy przyjmowali *porządek cykliczny* następstwa prostych l_1, l_2, l_3, tj. po prostej l_3 następuje prosta l_1. Mamy trzy macierze trzech par prostych l_2, l_3; l_3, l_1; l_1, l_2

$$M_1=\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad M_2=\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad M_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \tag{74}$$

otrzymujące się przez przekreślenie w wyznaczniku W odpowiednio wierszy 1-go, 2-go i 3-go. Do macierzy tych należą odpowiednio wyznaczniki

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1; \quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2; \quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3, \tag{75}$$

które się otrzymuje z macierzy (74), przekreślając odpowiednio kolumny 1-szą, 2-gą, 3-cią.

Wyznaczniki drugiego stopnia (75) otrzymuje się więc z W przekreślając po jednym wierszu i po jednej kolumnie. A mianowicie należy po przekreśleniu wiersza uporządkować cyklicznie pozostałe wiersze i tak samo należy postąpić po przekreśleniu kolumny. Przekreślony wiersz i przekreślona kolumna posiadają jeden element wspólny, a wyznacznik drugiego stopnia otrzymany przez przekreślenie tego wiersza i tej kolumny i po uporządkowaniu cyklicznem pozostałych nazywa się *minorem* należącym do wspólnego elementu. A więc wyznaczniki (75) są odpowiednio minorami należącymi do elementów

$$A_1,\ B_1,\ C_1; \quad A_2,\ B_2,\ C_2; \quad A_3,\ B_3,\ C_3.$$

Jeżeli w wyznaczniku W przekreślimy i^{ty} wiersz i $j^{tą}$ kolumnę, gdzie i, j są to pewne z liczb 1, 2, 3, natenczas otrzymany wyznacznik drugiego stopnia ma albo tęsamą wartość co odpowiedni minor, albo też różni się od wartości minora znakiem. A mianowicie dla elementów A_1, C_1, A_3, C_3 wyznacznik jest bezpośrednio minorem. Do elementu B_2 należy wyznacznik różniący się od odpowiedniego minoru zarówno porządkiem wierszy jak i porządkiem kolumn, a więc mający tę samą wartość co minor. Nareszcie do elementów B_1, A_2, C_2, B_3 należą wyznaczniki różniące się znakiem od odpowiednich minorów.

Wyprowadzimy teraz pewne podstawowe związki zachodzące pomiędzy minorami i elementami wyznacznika W.

Utwórzmy sumę

$$S_{ij} = A_i\alpha_j + B_i\beta_j + C_i\gamma_j,$$

gdzie i, j są dwie różne od siebie liczby z pośród liczb 1, 2, 3. Widoczna że te sumy mają wartość 0, albowiem są to sumy iloczynów minorów należących do jednej z macierzy (71) przez elementy jednego z wierszy tej macierzy.

Uważajmy teraz sumy

$$S_{ii} = A_i\alpha_i + B_i\beta_i + C_i\gamma_i,$$

gdzie i jest jedną z liczb 1, 2, 3. Sumy te można napisać w postaci

$$A_i(B_{i+1}C_{i+2} - B_{i+2}C_{i+1}) + B_i(C_{i+1}A_{i+2} - C_{i+2}A_{i+1}) + \\ + C_i(A_{i+1}B_{i+2} - A_{i+2}B_{i+1}),$$

gdzie $i+1$ jest tą z liczb 1, 2, 3, która w porządku cyklicznym następuje po i, a $i+2$ tą z liczb 1, 2, 3, która w porządku cyklicznym następuje po $i+1$. Każda z tych sum składa się z 6 składników, a każdy składnik jest iloczynem trzech spółczynników A, B, C. Składniki te przechodzą w siebie, jeżeli przestawimy cyklicznie A, B, C w B, C, A; B. C. A w C, A, B i C, A, B w A, B, C. Trzy składniki mają znak $+$ a trzy znak $-$. Przestawienia poprzednie liter A, B, C są równoważne przestawieniom wskaźników przy A, B, C a mianowicie w składnikach dodatnich permutacja

$$i,\ i+1,\ i+2$$

przechodzi kolejno w permutacje

$$i+2,\ i,\ i+1; \qquad i+1,\ i+2,\ i; \qquad i,\ i+1,\ i+2,$$

a w składnikach ujemnych permutacja

$$i,\ i+2,\ i+1$$

przechodzi kolejno w permutacje

$$i+1,\ i,\ i+2; \quad i+2,\ i+1,\ i; \quad i,\ i+2,\ i+1.$$

Stąd wynika, że wyrażenie S_{ii} nie zmieni się, jeżeli zastąpimy i przez $i+1$ lub przez $i+2$, a tylko jedne składniki przechodzą w drugie.

Wyrażenie to oznaczymy przez S. Mamy

$$S = A_i(B_{i+1}C_{i+2} - B_{i+2}C_{i+1}) + A_{i+1}(B_{i+2}C_i - B_iC_{i+2}) + $$
$$+ A_{i+2}(B_iC_{i+1} - B_{i+1}C_i),$$

a więc mamy

$$S = A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3.$$

Przestawiając litery A, B, C cyklicznie otrzymamy

$$S = B_1\beta_1 + B_1\beta_2 + B_3\beta_3,$$
$$S = C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + C_3\gamma_3.$$

Uważajmy teraz trzy proste l_i i załóżmy, że zachodzi przypadek I. Wiemy, że wówczas wszystkie minory drugiego stopnia (75) równają się 0. Ale jeżeli z trzech par dwóch prostych, które można utworzyć z trzech danych prostych dwie pary mają proste zlewające się ze sobą, natenczas zlewają się ze sobą i proste trzeciej pary. Zatem jeżeli α_1, β_1, γ_1 i α_2, β_2, γ_2 równają się zeru, równają się również zeru α_3, β_3, γ_3. Można to też łatwo udowodnić rachunkiem. Ponieważ mamy

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0,$$

więc istnieje liczba $k_1 \neq 0$ taka, że zachodzą równości

$$A_2 = k_1A_3, \quad B_2 = k_1B_3, \quad C_2 = k_1C_3.$$

Ponieważ dalej mamy

$$\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0,$$

więc istnieje liczba $k_2 \neq 0$ taka, że zachodzą równości

$$A_3 = k_2A_1, \quad B_3 = k_2B_1, \quad C_3 = k_2C_1.$$

Zatem kładąc

$$k_3 = \frac{1}{k_1k_2},$$

otrzymujemy równości

$$A_1 = k_3A_2, \quad B_1 = k_3B_2, \quad C_1 = k_3C_2.$$

a więc mamy

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0.$$

Załóżmy teraz, że zachodzi przypadek II. i że proste l_1 i l_2 zlewają się ze sobą. Mamy wówczas

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Nie obie wielkości α_1 i β_1 równocześnie równają się zeru i tak samo nie obie wielkości α_2 i β_2 równocześnie równają się zeru.

Zresztą z równości

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0,$$
$$\alpha_1 = 0,$$

wynika

$$\alpha_2 = 0,$$

albowiem z równości

$$\alpha_3 = \alpha_1 = 0$$

wynika albo

$$\alpha_2 = 0,$$

albo

$$B_2 = C_2 = 0$$

więc z równości

$$\beta_3 = \gamma_3 = 0$$

wynika

$$B_1 = C_1 = 0,$$

więc znów mamy

$$\alpha_2 = 0.$$

Tak samo $\beta_1 = 0$ pociąga za sobą $\beta_2 = 0$, jeżeli trzy minory α_3, β_3, γ_3 są równe zeru.

Jeżeli dwie pary wśród trzech par prostych, które można utworzyć z trzech prostych mają proste do siebie równoległe, natenczas są do siebie równoległe i dwie proste trzeciej pary. Zatem jeżeli dwie z trzech wielkości γ_1, γ_2, γ_3 równają się zeru, natenczas równa się zeru i trzecia wielkość. Dowód analityczny zawarty jest w poprzednich rozumowaniach.

Załóżmy teraz, że zachodzi przypadek III i że proste l_1, l_2 zlewają się ze sobą. Mamy teraz

$$\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0,$$
$$\gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_2 \neq 0.$$

Warunki konieczne i wystarczające, aby zachodził przypadek IV. są następujące

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

i przynajmniej jedna z liczb każdej z trzech par α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 jest od zera odmienna Zresztą znikanie dwóch wielkości γ pociąga za sobą jak widzieliśmy znikanie trzeciego γ.

Załóżmy. że zachodzi przypadek V. i że proste l_1, l_2 są do siebie równoległe, a prosta l_3 je przecina. Mamy teraz

$$\gamma_3 = 0.$$
$$\gamma_1 \neq 0, \qquad \gamma_2 \neq 0,$$

nie obie wielkości α_3. β_3 równają się zeru.

W przypadkach VI. i VII. żadna z wielkości γ nie równa się 0. Załóżmy, że zachodzi przypadek VI., a więc istnieje układ wartości ξ. η spełniających równania (72). Mamy więc

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0,$$
$$A_2\xi + B_2\eta + C_2 = 0,$$
$$A_3\xi + B_3\eta + C_3 = 0.$$

Mnożąc równości te obustronnie przez γ_1. γ_2, γ_3 i dodając otrzymujemy równość

$$(A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3)\xi + (B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 + B_3\gamma_3)\eta +$$
$$+ C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + C_3\gamma_3 = 0.$$

Spółczynniki przy ξ i η są to sumy iloczynów elementów jednej kolumny wyznacznika W przez minory należące do innej kolumny Każda taka suma ma wartość zero. W istocie uważajmy wyznacznik

$$W' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}, \tag{76}$$

który otrzymuje się z wyznacznika W zamieniając wiersze tego wyznacznika na kolumny. a kolumny na wiersze i zachowując porządek w jakim wiersze i kolumny w wyznaczniku W po sobie następują. Wyznacznik taki nazywa się *przestawionym* lub *transponowanym* wyznacznikiem wyznacznika W. Widoczna, że minory należące do elementów tego wyznacznika równają się minorom należącym do tych samych elementów w wyznaczniku W, albowiem różnią się od tych minorów tylko tem, że wiersze i kolumny minorów wyznacznika W są przestawione. Zatem sumy iloczynów elementów pewnego dowolnego wiersza wyznacznika W' przez minory należące do elementów pewnego również dowolnego wiersza tego wyznacznika równają się minorom iloczynów elementów pewnej kolumny wyznacznika W przez minory należące do elementów pewnej kolumny tegoż wyznacznika. Oznaczając przez S'_{ij} sumę dla wyznacznika W' analogiczną do sumy S_{ij} dla wyznacznika W mamy

$$S'_{ij} = 0$$

jeżeli $i \neq j$, jeżeli zaś $i = j$ mamy

$$S'_{ii} = S_{ii} = S.$$

Otrzymujemy więc warunek

$$S = 0.$$

Zatem warunki konieczne i wystarczające, aby zachodził przypadek VI. są

$$\gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_2 \neq 0, \quad \gamma_3 \neq 0,$$
$$S = 0,$$

a warunki konieczne i wystarczające, aby zachodził przypadek VII. są

$$\gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_2 \neq 0, \quad \gamma_3 \neq 0,$$
$$S \neq 0.$$

W przypadkach I—IV. wyznacznik W ma wartość zero. Jedyne przypadki, w których $S \neq 0$ są przypadki VII. i V. W istocie, gdyby w tym ostatnim przypadku było $S = 0$, mielibyśmy równo ci

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 = 0,$$
$$B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 = 0,$$
$$C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 = 0.$$

Mnożąc pierwszą równość przez C_2, trzecią przez $-A_2$ i dodając je do siebie otrzymujemy

$$(A_1C_2 - A_2C_1)\gamma_1 = 0,$$

a mnożąc drugą równość przez C_2 trzecią przez $-B_2$ i dodając mamy

$$(B_1C_2 - B_2C_1)\gamma_1 = 0.$$

Zatem albo mamy

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0,$$

albo też $\gamma_1 = 0$, a więc i $\gamma_2 = 0$. Ale w obu razach nie mógłby zachodzić przypadek V.

Zwróćmy się teraz do równań (72). Widzieliśmy, że warunkiem koniecznym aby te trzy równania o dwóch niewiadomych miały przynajmniej jeden układ pierwiastków jest $S = 0$. Jeżeli przynajmniej jeden z minorów γ jest od zera odmienny, natenczas istnieje jeden jedyny układ ξ, η pierwiastków tych równań. W istocie niechaj np. będzie $\gamma_3 \neq 0$. Wówczas pierwsze i drugie równanie (72) mają jeden jedyny układ pierwiastków wspólny i mamy wzory

$$\xi = \frac{\alpha_3}{\gamma_3}, \quad \eta = \frac{\beta_3}{\gamma_3}.$$

Pierwiastki te spełniają i trzecie równanie, albowiem mamy

$$A_3 \xi + B_3 \eta + C_3 = \frac{1}{\gamma_3} (A_3 \alpha_3 + B_3 \beta_3 + C_3 \gamma_3) = 0.$$

Jeżeli wszystkie trzy minory γ są równe 0, natenczas warunkiem koniecznym i wystarczającym aby istniał układ pierwiastków równań (72) jest, aby wszystkie minory (75) równały się 0. Wówczas każdy układ pierwiastków jednego dowolnego z tych równań spełnia dwa pozostałe równania. Mamy więc nieskończenie wiele układów pierwiastków równań (72). Rezultaty te są oczywiście zgodne z rezultatami otrzymanymi przy dyskusji położeń wzajemnych trzech prostych l_i.

Jeżeli mamy $S \neq 0$ i żaden z minorów γ_i nie równa się zeru, trzy proste przecinają się w trzech od siebie odmiennych punktach P_1, P_2, P_3, na których spółrzędne mamy wzory

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, & \eta_1 &= \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \\ \xi_2 &= \frac{\alpha_2}{\gamma_2}, & \eta_2 &= \frac{\beta_2}{\gamma_2}, \\ \xi_3 &= \frac{\alpha_3}{\gamma_3}, & \eta_3 &= \frac{\beta_3}{\gamma_3}. \end{aligned} \tag{77}$$

Otrzymane rezultaty możemy zawrzeć w następującej tabeli :

	Warunki konieczne i wystarczające:	*Stąd wynika:*	*Wspólne punkt*
I.	$\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$, $\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0$,	$\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0$, $S=0$,	Cała prost
II.	$\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0$, $\gamma_1=0$, α_1 albo $\beta_1 \neq 0$.	$\gamma_2=0$, $S=0$, α_2 albo $\beta_2 \neq 0$.	Niema.
III.	$\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0$, $\gamma_1 \neq 0$,	$\gamma_2 \neq 0$, $S=0$,	Jeden.
IV.	$\gamma_2=\gamma_3=0$, α_1 albo $\beta_1 \neq 0$, α_2 albo $\beta_2 \neq 0$, α_3 albo $\beta_3 \neq 0$,	$\gamma_1=0$, $S=0$,	Niema.
V.	$\gamma_3=0$, $\gamma_2 \neq 0$, α_3 albo $\beta_3 \neq 0$,	$\gamma_1 \neq 0$, $S \neq 0$,	Niema.
VI.	$\gamma_1 \neq 0$ $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_3 \neq 0$, $S=0$.		Jeden.
VII.	$\gamma_1 \neq 0$ $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_3 \neq 0$, $S \neq 0$.		Niema.

14. Zależność i niezależność trzech równań pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych. Zależność i niezależność trzech prostych.

Uważajmy znów równania (72) trzech prostych. Równania te nazywają się *zależne* od siebie, jeżeli istnieją trzy liczby k_1, k_2, k_3 nie wszystkie równe 0, takie, że jeżeli te równania pomnożymy przez te liczby i dodamy do siebie otrzymamy identycznie 0. Równania nazywają się *niezależne* w przypadku przeciwnym. Trzy proste nazywają się w pierwszym przypadku *zależne* od siebie, w drugim przypadku *niezależne*.

Aby więc równania (72) były zależne potrzeba i wystarcza, aby istniały trzy liczby k_i. $i = 1, 2, 3$ nie wszystkie równe 0 spełniające równania

$$\begin{aligned} A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 &= 0, \\ B_1 k_1 + B_2 k_2 + B_3 k_3 &= 0, \\ C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3 &= 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Są to trzy równania *jednorodne* o trzech niewiadomych. Warunkiem *koniecznym*, aby liczby k_i istniały, jest aby *wyznacznik* tych równań, tj. wyznacznik W' miał wartość 0. W istocie, mnożąc te równania odpowiednio przez minory należące do elementów pierwszego wiersza wyznacznika W i dodając otrzymamy

$$Sk_1 = 0,$$

i tak samo otrzymamy

$$Sk_2 = 0, \qquad Sk_3 = 0.$$

Warunek $S = 0$ jest i *wystarczający.* Zachodzić tu mogą 2 przypadki: 1. Nie wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika W' są równe 0. 2. Wszystkie minory są 0. W przypadku 1. uważamy takie dwa równania (78), którym odpowiada minor od zera odmienny. Jeżeli przynajmniej jeden z minorów γ jest $\neq 0$, natenczas uważamy 1-sze i 2-gie równanie. Wzór ogólny na układy liczb k_i spełniających te równania można napisać w postaci

$$k_1 = \rho\gamma_1, \qquad k_2 = \rho\gamma_2, \qquad k_3 = \rho\gamma_3$$

gdzie ρ jest dowolna liczba i te wartości na k_i spełniają i trzecie równanie (78). Tak samo jeżeli jeden z minorów α względnie minorów β jest od zera odmienny, otrzymamy najogólniejsze rozwiązanie równań (78) w postaci

$$k_1 = \rho\alpha_1, \qquad k_2 = \rho\alpha_2, \qquad k_3 = \rho\alpha_3,$$

względnie

$$k_1 = \rho\beta_1, \qquad k_2 = \rho\beta_2, \qquad k_3 = \rho\beta_3.$$

W 2. przypadku uważamy to z dwóch pierwszych równań (78), którego nie wszystkie spółczynniki są równe 0. Możemy rozwiązać to równanie względem niewiadomych obierając dwie z liczb k_i zupełnie dowolnie. Jeżeli np. $A_1 \neq 0$ natenczas otrzymamy

$$k_1 = -\frac{1}{A_1}(k_2 A_2 + k_3 A_3).$$

W ten sposób otrzymane układy wartości na niewiadome spełniają pozostałe dwa równania, albowiem wszystkie minory drugiego stopnia równają się zeru, więc spółczynniki B_i i C_i są proporcjonalne do spółczynników A_i.

Zatem trzy proste l_i są *zależne* w przypadkach I—IV i VI, zaś *niezależne* w przypadkach V i VII Mianowicie w przypadku I każde 2 proste są zależne i dwie z liczb k_i można obrać dowolnie, a w przypadkach II, III, IV i VI tylko jednę liczbę k_i można obrać dowolnie. Jeżeli jeden z minorów α_i, β_i, γ_i jest od zera odmienny, natenczas k_i można obrać dowolnie.

Prosta l_i, której odpowiada liczba k_i od zera odmienna nazywa się *zależną od prostych* pozostałych, a jej równanie *zależnem od równań* pozostałych. Spółczynniki A_i, B_i, C_i są wówczas linjowymi kombinacjami spółczynników dwóch pozostałych równań.

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 4: „Trzy proste są zależne od siebie lub nie, zależnie od tego czy wyznacznik W ma wartość zero, czy też nie. Jeżeli $S=0$, ałe nie wszystkie minory drugiego stopnia równają się zeru, natenczas nie wszystkie trzy proste są od siebie zależne, a prosta l_i, dla której przynajmniej jeden z minorów α_i, β_i, γ_i jest od zera odmienny, jest zależną od dwóch innych prostych. Jeżeli wszystkie minory drugiego stopnia równają się zeru, natenczas każde dwie proste są od siebie zależne".

15. Cztery proste na płaszczyźnie. System linij prostych na płaszczyźnie.

Uważajmy trzy proste l_1, l_2, l_3 od siebie niezależne o równaniach (72). Uważajmy prócz tego *dowolnie obraną* prostą l o równaniu

$$Ax+By+C=0. \tag{79}$$

Okażemy, że można w jeden jedyny sposób obrać trzy liczby k_1, k_2, k_3 tak, że jeżeli pomnożymy równania (72) przez te liczby i dodamy je do siebie otrzymamy równanie (79). W tym celu uważamy trzy równania pierwszego stopnia o trzech niewiadomych k_1, k_2, k_3

$$\begin{aligned} k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 &= A, \\ k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_3 B_3 &= B, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 &= C. \end{aligned} \tag{80}$$

Pomnóżmy równania te przez minory α_1, β_1, γ_1 i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$k_1 S = A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1,$$

a więc

$$k_1 = \frac{A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1}{S}.$$

Tak samo otrzymamy

$$k_2 = \frac{A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2}{S}$$

i

$$k_3 = \frac{A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3}{S}.$$

Wartości te na k_1, k_2, k_3 spełniają równania (80) i są *jedynym* układem wartości spełniającym równania (80).

Mówimy, że prosta l jest *zależna* od trzech prostych l_1, l_2, l_3 i że równanie (79) jest *zależne* od równań (72). A więc każda prosta jest zależna od trzech prostych niezależnych i każde równanie pierwszego stopnia jest zależne od trzech równań niezależnych. Układ wszystkich prostych na płaszczyźnie nazywamy *systemem* prostych. Mamy więc

Twierdzenie 5: „Każda prosta systemu prostych na płaszczyźnie jest zależna od trzech dowolnych prostych niezależnych od siebie. Każde cztery proste systemu są od siebie zależne“.

Jeżeli więc

$$L_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

oznaczają równania czterech prostych dowolnych systemu, natenczas istnieją cztery liczby k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ nie wszystkie równe zeru, takie, że zachodzi tożsamość

$$\sum_{i=1}^{4} k_i L_i = 0.$$

16. Równanie linji prostej w postaci wyznacznika

Uważajmy prostą l o równaniu (79) i dwa na niej leżące od siebie odmienne punkty P_1, P_2 o spółrzędnych x_1, y_1 i x_2, y_2. Zachodzą więc równości

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Uważajmy dowolny punkt P tej prostej o spółrzędnych ξ, η. Mamy więc

$$A\xi + B\eta + C = 0. \tag{82}$$

Istnieją więc trzy liczby nie wszystkie równe zeru, spełniające trzy równania (81) i (82), w których A, B, C uważamy jako niewiadome. Stąd wynika, jak widzieliśmy, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{vmatrix}$$

równa się zeru.

A więc spółrzędne dowolnego punktu prostej l obracają w zero wyznacznik

$$M = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \tag{83}$$

jeżeli zamiast x, y wstawimy spółrzędne tego punktu.

Naodwrót uważajmy wyznacznik M, w którym liczby x_1, y_1 i x_2, y_2 są spółrzędne dwóch dowolnych od siebie odmiennych punktów P_1, P_2. Wyznacznik ten obraca się w zero jeżeli zamiast x, y wstawimy spółrzędne tych dwóch punktów. Rozwińmy wyznacznik według ostatniego wiersza. Otrzymamy

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

a więc lewą stronę równania prostej przechodzącej przez punkty P_1, P_2.

Zatem równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty można napisać w postaci *wyznacznika trzeciego stopnia.*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{84}$$

Stąd otrzymujemy warunek konieczny i wystarczający aby trzy punkty P_1, P_2, P_3 leżały na jednej i tej samej prostej w postaci następującej

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{85}$$

17. Szczególne przypadki trzech prostych.

Uważajmy trzy proste l_1. l_2, l_3 o równaniach (72) przecinające się w trzech od siebie odmiennych punktach P_1, P_2, P_3 o spółrzędnych ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ξ_3, η_3. W związku z trójkątem T utworzonym przez te trzy proste możemy uważać następujące trójki prostych:

I. Trzy proste k_i, $i = 1, 2, 3$ przechodzące przez punkty P_i i prostopadłe do przeciwległych boków trójkąta T a więc do prostych l_i, *wysokości trójkąta* T.

II. Trzy proste s_i *symetralne boków* trójkąta T, tj. prostopadłe do prostych l_i i przechodzące przez punkty Q_i, $i = 1, 2, 3$ połowiące boki trójkąta.

III. Trzy proste m_i, *środkowe* trójkąta T, tj. łączące punkty P_i ze środkami Q_i przeciwległych boków.

IV. Trzy proste n_i *symetralne kątów* trójkąta T, tj. przechodzące przez wierzchołki P_i i połowiące kąty wewnętrzne trójkąta T.

Udowodnimy, że proste każdej z tych czterech trójek prostych przecinają się w jednym punkcie.

I. Równania trzech prostych h_i są następujące

$$(A_i \cos\theta - B_i)(x - \xi_i) + (A_i - B_i \cos\theta)(y - \eta_i) = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{86}$$

Żadne dwie z tych trzech prostych nie są do siebie równoległe. Jeżeli więc okażemy, że te 3 proste są od siebie zależne, natenczas okażemy, że wyznacznik równań (86) ma wartość 0, a więc, że zachodzi przypadek VI.

Pomnóżmy równania (86) odpowiednio przez γ_1, γ_2, γ_3 i dodajmy je do siebie. Widocznie, że otrzymamy 0 jako spółczynnik przy x i tak samo 0 jako spółczynnik przy y. Wyraz wolny będzie

$$-\sum_{i=1}^{3}(A_i \cos\theta - B_i)\xi_i\gamma_i - \sum_{i=1}^{3}(A_i - B_i \cos\theta)\eta_i\gamma_i,$$

a więc otrzymamy

$$-\sum_{i=1}^{3}(A_i \cos\theta - B_i)\alpha_i - \sum_{i=1}^{3}(A_i - B_i \cos\theta)\beta_i,$$

co jest równe 0.

Równania (86) są więc zależne i mamy

$$k_i = \gamma_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Twierdzenie jest więc udowodnione.

II. Równania trzech prostych s_i są następujące

$$\begin{gathered}(A_i \cos\theta - B_i)\left(x - \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2}}{2}\right) + \\ + (A_i - B_i \cos\theta)\left(y - \frac{\eta_{i+1} + \eta_{i+2}}{2}\right) = 0, \\ i = 1,\ 2,\ 3,\end{gathered} \tag{87}$$

gdzie i. $i+1$, $i+2$ są to liczby 1, 2, 3 następujące po sobie w porządku cyklicznym. Wyrazimy teraz spółczynniki A_i, B_i równań prostych l_i przez spółrzędne ξ_i, η_i wierzchołków trójkąta T.

Mianowicie możemy wyrazić te spółczynniki w sposób następujący przez te spółrzędne

$$A_i = \eta_{i+1} - \eta_{i+2}, \qquad B_i = -(\xi_{i+1} - \xi_{i+2}).$$

Równania (87) przybiorą wówczas następującą postać

$$[(\eta_{i+1} - \eta_{i+2}) \cos\theta + (\xi_{i+1} - \xi_{i+2})] \left(x - \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2}}{2}\right) +$$
$$+ [(\eta_{i+1} - \eta_{i+2}) + (\xi_{i+1} - \xi_{i+2}) \cos\theta)] \left(y - \frac{\eta_{i+1} + \eta_{i+2}}{2}\right) = 0.$$

Jeżeli te trzy równania dodamy do siebie otrzymamy widocznie przy x i przy y spółczynnik 0. Wyraz wolny będzie się równać

$$-\frac{1}{2}\sum(\xi_{i+1} - \xi_{i+2})(\xi_{i+1} + \xi_{i+2}) - \frac{1}{2}\sum(\eta_{i+1} - \eta_{i+2})(\eta_{i+1} + \eta_{i+2}) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum(\eta_{i+1} - \eta_{i+2})(\xi_{i+1} + \xi_{i+2}) \cos\theta -$$
$$-\frac{1}{2}\sum(\xi_{i+1} - \xi_{i+2})(\eta_{i+1} + \eta_{i+2}) \cos\theta;$$

gdzie sumy rozciągnięte są na trzy wartości wskaźnika i. Widoczna, że pierwsze dwie sumy mają wartość 0. Trzecią i czwartą sumę napiszemy w postaci

$$-\frac{1}{2}\sum[\xi_{i+1}\eta_{i+1} - \xi_{i+2}\eta_{i+2} - (\xi_{i+1}\eta_{i+2} - \xi_{i+2}\eta_{i+1})] \cos\theta,$$
$$-\frac{1}{2}\sum[\xi_{i+1}\eta_{i+1} - \xi_{i+2}\eta_{i+2} + (\xi_{i+1}\eta_{i+2} - \xi_{i+2}\eta_{i+1})] \cos\theta,$$

i widocznie ich suma ma wartość 0. Zatem twierdzenie jest udowodnione.

III. Równania trzech prostych m_i napiszemy w postaci wyznaczników

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ \xi_i, & \eta_i, & 1 \\ \dfrac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2}}{2}, & \dfrac{\eta_{i+1} + \eta_{i+2}}{2}, & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{88}$$

$i = 1, 2, 3$. Widoczna, że jeżeli te trzy równania dodamy do siebie otrzymamy przy x i przy y zero, a wyraz wolny będzie

$$\frac{1}{2}\sum\xi_i(\eta_{i+1}+\eta_{i+2})-\frac{1}{2}\sum\eta_i(\xi_{i+1}+\xi_{i+2}),$$

gdzie sumy są rozciągnięte na trzy wartości wskaźnika i. Mamy zatem

$$\frac{1}{2}\sum(\xi_i\eta_{i+1}-\xi_{i+1}\eta_i)-\frac{1}{2}\sum(\xi_{i+2}\eta_i-\xi_i\eta_{i+2})$$

a więc 0. Twierdzenie jest więc udowodnione.

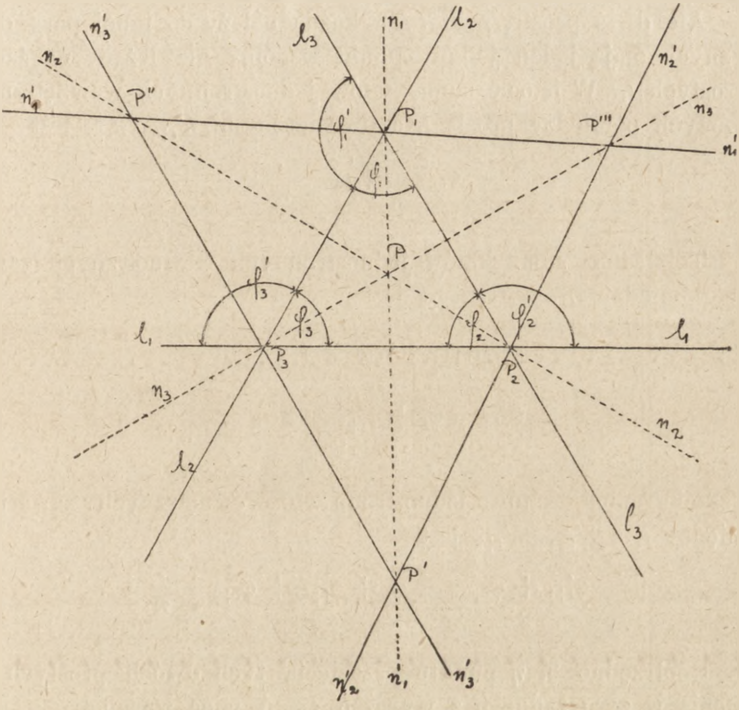

Fig. 11.

IV. Jeżeli oznaczymy przez L_i, $i=1, 2, 3$ lewe strony równań (72) prostych l_i i l_{i+1} w postaci

$$\frac{L_i}{R_i}=\varepsilon_{i+2}\frac{L_{i+1}}{R_{i+1}}, \tag{89}$$

gdzie $R_i=\sqrt{A_i^2-2A_iB_i\cos\theta+B_i}$, a $\varepsilon_{i+2}=\pm 1$. Mamy więc 6 prostych n_{i+2} i n'_{i+2}, z których proste n_{i+2} niechaj będą dwusieczne kątów *wewnętrznych* trójkąta T, a proste n'_{i+2} dwusieczne kątów *zewnętrznych.* Uważajmy po jednej prostej z każdej z trzech par dwusiecznych. Aby te trzy proste miały punkt wspólny potrzeba aby jeżeli oznaczymy przez ξ, η spółrzędne tego punktu i wstawimy w równania (89), a następnie te równania wymnożymy przez siebie odpowiednio stronami, zachodził związek

$$\overline{L_1}\,\overline{L_2}\,\overline{L_3} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \overline{L_1}\,\overline{L_2}\,\overline{L_3},$$

w którym $\overline{L_i}$ jest rezultatem wstawienia ξ, η zamiast x, y w L_i.

Ale dwie proste, z których każda należy do innej pary dwusiecznych mają jeden jedyny punkt wspólny nie leżący na żadnej z prostych l_i. W istocie suma kątów jednostronnych wewnętrznych zawartych pomiędzy prostą l_i a dwusiecznymi n'_{i+1}; n_{i+2} jest

$$\frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}}{2} < \pi.$$

Tak samo suma kątów jednostronnych wewnętrznych zawartych pomiędzy l_i a n_{i+1}, n'_{i+2} jest

$$\frac{\varphi_{i+1}}{2} + \frac{2\varphi_{i+2} + \varphi'_{i+2}}{2} =$$

$$= \frac{\varphi_{i+1}}{2} + \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1} + 2\varphi_{i+2}}{2} < \pi.$$

Nareszcie suma kątów jednostronnych wewnętrznych zawartych pomiędzy l_i a n'_{i+1}, n'_{i+2} jest

$$\frac{\varphi'_{i+1} + \varphi'_{i+2}}{2} = \frac{2\varphi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}}{2} < \pi.$$

Spółrzędne ξ, η punktu przecięcia tych dwóch prostych nie obracają w zero żadnego z wyrażeń L_i. A więc warunek

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$$

jest warunkiem koniecznym, aby istniał punkt przecięcia trzech dwusiecznych. Warunek ten zarazem jest *wystarczającym*, bo spełnienie dwóch z równań (89) przez liczby ξ, η pociąga wówczas za sobą spełnienie trzeciego równania (89).

Możemy również rozumować w ten sposób. Dla punktu $P(\xi, \eta)$ nie wszystkie trzy wielkości $\frac{L_i}{R_i}$, $i = 1, 2, 3$ równają się zeru. A więc wyznacznik trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & -\varepsilon_1, \\ -\varepsilon_2, & 0, & 1, \\ 1, & -\varepsilon_3, & 0 \end{vmatrix}$$

równa się zeru. Wyznacznik ten ma wartość

$$1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 .$$

Dwie z liczb ε_i możemy obrać dowolnie, a trzecia jest wówczas zupełnie oznaczona. A więc z ośmiu kombinacyj jakie można utworzyć z prostych trzech par dwusiecznych cztery kombinacje trzech prostych mają punkt wspólny. Są to mianowicie: 1) trzy dwusieczne n_i, 2) dwusieczna n_i i dwusieczne n'_{i+1}, n'_{i+2} dla $i = 1$, 2, 3. Aby to udowodnić, rozważmy, że odległość punktu M leżącego po tej stronie prostej l_i co wierzchołek P_i ma ten sam znak co odległość wierzchołka P_i od tejże prostej, wszystko jedno jaki dodatni kierunek obierzemy na tej prostej. A więc wyrażenie L_i przyjmuje dla punktu M wartość tego samego znaku co dla wierzchołka P_i. Ale spółrzędne wierzchołka P_i są

$$\xi_i = \frac{\alpha_i}{\gamma_i}, \quad \eta_i = \frac{\beta_i}{\gamma_i},$$

a więc mamy dla wierzchołka P_i

$$L_i = \frac{A_i \alpha_i + B_i \beta_i + C_i \gamma_i}{\gamma_i} = \frac{S}{\gamma_i},$$

gdzie S jest to wartość wyznacznika W prostych (72).

Dla punktów M leżących na dwusiecznej wewnętrznej n_{i+2} wyrażenia L_i i L_{i+1} mają więc te same znaki co $\frac{S}{\gamma_i}$ i $\frac{S}{\gamma_{i+1}}$. Zatem ε_{i+2} równa się $+1$ lub -1 zależnie od tego, czy minory γ_i i γ_{i+1} mają te same znaki, czy też znaki przeciwne.

Jeżeli więc trzy minory γ_i mają te same znaki, natenczas trzem dwusiecznym wewnętrznym odpowiadają wartości $+1$ na ε_i. Jeżeli zaś dwa minory mają ten sam znak, np. γ_1 i γ_2, a trzeci minor γ_3 ma znak przeciwny, natenczas dwusiecznym n_1, n_2, n_3 wewnętrznym odpowiadają odpowiednio wartości $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = +1$. Zatem warunek (90) jest zawsze spełniony dla trzech dwusiecznych wewnętrznych. Stąd wynika, że jest on też spełniony, jeżeli dwie i tylko dokładnie dwie z tych dwusiecznych zamienimy na dwusieczne zewnętrzne.

Ćwiczenia.

1. Napisać równania parametryczne osi symetrji odcinka $P_1 P_2$, jeżeli są dane spółrzędne Kartezjusza punktów P_1 i P_2.

2. Znaleźć spółrzędne punktu przecięcia P dwóch prostych l_1, l_2 danych równaniami parametrycznymi

$$\begin{aligned} x &= a_1 + r_1 \lambda_1, & y &= b_1 + r_1 \mu_1, \\ x &= a_2 + r_2 \lambda_2, & y &= b_2 + r_2 \mu_2 \end{aligned} \tag{1}$$

nie równoległych do siebie.

3. Znaleźć równania parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P(a, b)$ i prostopadłej do prostej s, przechodzącej przez dwa punkty $P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$.

4. Przetnijmy trójkąt ABC prostą l *transwersalną* i niechaj D, E, F będą punkty przecięcia l z osiami BC, CA, AB. Okazać słuszność twierdzenia Menelaus'a:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = +1 \tag{2}$$

i jego odwrotności.

5. Przez punkt P na płaszczyźnie trójkąta ABC prowadzimy proste AP, BP, CP przecinające przeciwległe boki w punktach D, E, F. Udowodnić twierdzenie Ceva .

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \cdot = -1 \tag{3}$$

i jego odwrotność.

5. Dane są dwie proste przecinające się

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \tag{4}$$

Wprowadzić nowy układ spółrzędnych, którego osi x', y' leżą na tych prostych.

7. Znaleźć miejsce geometryczne punktów P, dla których różnica kwadratów odległości od dwóch danych punktów A, B jest daną liczbą.

8. Miejsce geometryczne punktów, dla których suma odległości od dwóch danych osi jest stała.

9. Miejsce geometryczne punktów, dla których suma wartości $\overline{OA} + \overline{OB}$ jest stała, gdzie A, B są prostopadłe rzuty na osie x, y spółrzędnych.

10. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(a, b)$ i przez punkt M przecięcia prostych (4).

11. Uważamy cztery proste l_i, $i = 1, 2, 3, 4$ pęku prostych o wierzchołku 0 o równaniach

$$y - m_i x = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

Okazać, że jeżeli te proste przetniemy dowolną osią l przecinającą je w 4 punktach A, B, C, D, natenczas stosunek $(ABCD)$ podwójnego podziału nie zależy od osi l i ma wartość

$$(ABCD) = (m_1,\ m_2,\ m_3\ \ m_4). \tag{6}$$

12. Dane są dwie proste l_1, l_2 pęku o wierzchołku S. Przez dowolny punkt P prowadzę dwie proste m_1, m_2 przecinające proste l_1, l_2 w punktach L_{11}, L_{12} i L_{21}, L_{22}. Łączę punkty L_{11}, L_{22} i tak samo punkty L_{12}, L_{21} prostymi s_1 i s_2. Proste te przecinają się w punkcie Q, którego miejscem geometrycznem jest prosta przechodząca przez S. Para prostych SP i SQ jest harmonicznie sprzężona z parą prostych l_1, l_2.

13. Udowodnić twierdzenie Desargues'a:

„Jeżeli trzy punkty przecięcia się odpowiednich par boków dwóch trójkątów ABC, $A'B'C'$ leżą na linji prostej, natenczas proste łączące odpowiednie wierzchołki tych trójkątów AA', BB', CC' przechodzą przez jeden punkt.

Naodwrót, jeżeli łącznice odpowiednich wierzchołków przechodzą przez punkt, natenczas trzy punkty przecięcia par boków odpowiednich BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$ leżą na jednej prostej".

14. Znaleźć miejsce geometryczne środków S prostokątów wpisanych w trójkąt i których podstawy leżą na tym samym boku trójkąta.

15. Okazać, że cztery proste pęku prostych określone równaniami.

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad k_1 L_1 + k_2 L_2 = 0, \qquad k_1 L_1 - k_2 L_2 = 0, \tag{7}$$

gdzie k_1, k_2 są dwie dowolne liczby stałe mają stosunek podwójnego podziału harmoniczny.

16. Uważamy trójkąt ABC i transwersalną l przecinającą odpowiednio boki w punktach D, E, F. Punkty D', E', F' symetryczne punktów D, E, F względem środków boków BC, CA, AB leżą też na prostej transwersalnej. Te dwie transwersalne nazywają się *wzajemne*.

17. Uważamy trójkąt ABC i trzy proste AP, BP, CP łączące A, B, C z punktem P. Przecinają one przeciwległe boki w punktach D, E F. Okazać, że proste AD' BE', CF', gdzie D', E', F' są punkty symetryczne punktów D, E, F względem środków odpowiednich boków też przechodzą przez punkt P'.

18. Dany trójkąt ABC. Proste, na których leżą jego boki dzielą płaszczyznę na 7 części. Podać kryterja, aby dany punkt P leżał w jednej oznaczonej z tych części.

19. Udowodnić twierdzenie Pascal'a dla dwóch prostych: Jeżeli trzy punkty A, B, C leżą na prostej l, a trzy punkty A', B', C' na prostej l', natenczas trzy pary prostych AB', $A'B$; BC', $B'C$; CA', $C'A$ przecinają się odpowiednio w 3 punktach F, D, E leżących na prostej.

20. Udowodnić twierdzenie Brianchon'a dla dwóch pęków: Uważamy trzy proste l_1, m_1, n_1 pęku (O_1) i trzy proste l_2, m_2, n_2 pęku (O_2). Okazać, że proste łączące pary punktów $(l_1\, m_2)$, $(l_2\, m_1)$; $(m_1\, n_2)$, $(m_2\, n_1)$; $(n_1\, l_2)$, $(n_2\, l_1)$ przechodzą przez jeden punkt.

21. Trzy zewnętrzne symetralne kątów trójkąta przecinają przeciwległe boki w 3 punktach położonych na prostej. Tak samo dwie ze-

wnętrzne symetralne i jedna wewnętrzna przecinają przeciwległe boki w 3 punktach położonych na prostej.

22. Uważamy prostokąty $OABC$ takie, że różnica boków przyległych $OA - OC$ jest liczbą stałą k. Okazać, że prostopadłe do przekątni AC przeprowadzone przez wierzchołek B przechodzą przez stały punkt.

23. Okazać, że w czworoboku zupełnym $ABCD$, którego przeciwległe pary boków AB, CD i AD, BC przecinają się w punktach E i F środki przekątni AC, BD, EF leżą na prostej.

24. Dane równanie prostej l i dany punkt P nie leżący na tej prostej. Znaleźć równanie prostej l' symetrycznej prostej l względem punktu P.

25. Dany trójkąt ABC i dana transwersalna l przecinająca boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach L, M, N. Okazać, że proste łączące wierzchołki A, B, C ze środkami odcinków MN, NL, LM przecinają przeciwległe boki w 3 punktach położonych na prostej.

26. Dana prosta l. Z punktów P tej prostej spuszczamy prostopadłe PA, PB na osie x, y. Znaleźć miejsce punktu M dzielącego odcinek AB w danym stosunku.

27. Uważamy trójkąty o danej podstawie BC i wierzchołku A położonym na danej prostej. Uważamy kwadraty $MNPQ$ wpisane w te trójkąty o podstawach PQ na boku BC. Okazać, że środki S tych kwadratów leżą na prostej. Okazać, że wierzchołki M i N leżą odpowiednio na prostych.

28. Uważamy 2 trójkąty ABC, $A'B'C'$. Jeżeli prostopadłe z wierzchołków A, B, C na boki $B'C'$ etc. drugiego trójkąta przechodzą przez punkt, natenczas i prostopadłe z wierzchołków A', B', C' na boki BC etc. przechodzą przez punkt.

29. Z wierzchołków trójkąta A_i, $i = 1, 2, 3$ prowadzimy proste p_i, $i = 1, 2, 3$ przecinające przeciwległe boki l_i w punktach M_i. Jeżeli dwusieczne s_i kątów zawartych pomiędzy bokami l_i a prostymi p_i są równoległe do siebie, natenczas proste p_i przecinają się w jednym punkcie.

30. Napisać równanie prostej l_2 symetralnej prostej l_1 względem danej prostej l.

ROZDZIAŁ V.

Spółrzędne jednorodne. Punkty w nieskończoności.

1. Spółrzędne jednorodne na linji prostej.

Uważajmy prostą l i obierzmy na niej układ $\overline{U}$ spółrzędnych Kartezjusza. Uważajmy dowolny punkt P prostej l o spółrzędnej Kartezjusza x. Liczbę x możemy przedstawić przez iloraz dwóch liczb x_2 i $x_1 \neq 0$

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \tag{1}$$

przyczem x_1 można obrać dowolnie $\neq 0$, a x_2 wyznacza się ze wzoru

$$x_2 = x x_1 .$$

Naodwrót każdemu układowi dwóch liczb x_1, x_2, z których pierwsza jest $\neq 0$ odpowiada zupełnie oznaczona liczba x.

Liczby x_1, x_2 nazywają się *spółrzędnemi jednorodnemi* (coordonnées homogènes) punktu P.

Uważajmy dwa układy x_1^1, x_2^1 i x_1^2, x_2^2 spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu. Mamy więc

$$\frac{x_2^1}{x_1^1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}. \tag{2}$$

Kładąc

$$\frac{x_1^1}{x_1^2} = k$$

otrzymujemy związki

$$\begin{aligned} x_1^1 &= k x_1^2, \\ x_2^1 &= k x_2^2, \end{aligned} \tag{3}$$

przyczem liczba k jest od zera odmienna. A więc dwa układy spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu są do siebie proporcjonalne.

Uważajmy naodwrót dwa układy spółrzędnych jednorodnych x_1^1, x_2^1 i x_1^2, x_2^2 i załóżmy, że są do siebie proporcjonalne, tj. zachodzą związki (3), w których $k \neq 0$. Zachodzi wówczas związek (2), a więc oba te układy spółrzędnych są układami spółrzędnych tego samego punktu.

Rugując k z równości (3) otrzymujemy równość

$$x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1 = 0, \tag{4}$$

konieczną, aby oba układy spółrzędnych były układami spółrzędnych tego samego punktu. Warunek (4) jest też wystarczający, albowiem z warunku tego otrzymujemy naodwrót równości (3), przyczem k jest pewna liczba od zera odmienna.

Mamy więc

Twierdzenie 1. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa układy liczb x_1^1, x_2^1 i x_1^2, x_2^2, takich, że $x_1^1 \neq 0$ i $x_1^2 \neq 0$ były układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu są równości (3), w których k jest pewna oznaczona liczba od zera odmienna albo też równoważna tym równościom równość (4)“.

2. Punkt w nieskończoności na linji prostej.

Uważajmy punkt P na prostej l o spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2. Przypuśćmy, że x_2 jest liczbą stałą, ale że x_1 przyjmuje nieskończony ciąg wartości zbieżny i którego granicą jest 0. Ciągowi temu odpowiada nieskończony ciąg wartości spółrzędnej x Kartezjusza punktu P, których wartości bezwzględne rosną nieograniczenie, a więc ciąg nieskończony położeń P_i punktu P, które to położenia oddalają się coraz bardziej od początku układu 0. Mówimy, że punkt P *oddala się w nieskończoność* na osi l i piszemy

$$\lim |x| = \infty.$$

Przypuśćmy teraz, że liczby nieskończonego ciągu wartości spółrzędnej x_1 są wszystkie dodatnie. Jeżeli x_2 jest dodatnie, liczby ciągu wartości spółrzędnej x są stale dodatnie, a jeżeli x_2 jest ujemne liczby te są stale ujemne. Mówimy w pierwszym przypadku, że spółrzędna x staje się *dodatnio nieskończona* i piszemy

$$\lim x = +\infty.$$

a w drugim przypadku staje się *ujemnie nieskończona* i piszemy

$$\lim x = -\infty.$$

W pierwszym przypadku punkt P oddala się od początku układu O nieograniczenie w kierunku dodatnim na osi l, a w drugim przypadku nieograniczenie w kierunku ujemnym na tej osi. W pierwszym przypadku mówimy, że punkt P oddala się lub dąży na osi l do *nieskończoności dodatniej*, a w drugim przypadku oddala się lub dąży do *nieskończoności ujemnej*. Tak samo jeżeli liczby nieskończonego ciągu wartości] spółrzędnej x_1 są wszystkie ujemne, liczby ciągu wartości spółrzędnej x są stale ujemne, jeżeli x_2 jest dodatnie, a stale dodatnie, jeżeli x_2 jest ujemne. W pierwszym przypadku mamy teraz

$$\lim x = -\infty .$$

i punkt P dąży do nieskończoności ujemnej na osi l, a w drugim przypadku mamy

$$\lim x = +\infty ,$$

i punkt P dąży do nieskończoności dodatniej na osi l.

Układom dwóch liczb x_1, x_2. z których pierwsza liczba ma wartość zero a druga jest od zera odmienna nie odpowiada żaden punkt na osi l, albowiem niema takiej liczby x, która pomnożona przez 0 daje liczbę od zera odmienną. Opierając się jednak na poprzednich rozważaniach wprowadzamy następujące umowy. Z każdym układem dwóch liczb x_1, x_2, z których pierwsza równa się 0, zaś druga jest od zera odmienna ale zresztą dowolnie obrana kojarzymy pewno pojęcie, które nazywamy *punktem w nieskończoności*, i którego *spółrzędnemi jednorodnemi* nazywamy te liczby x_1, x_2. Mówimy, że punkt P, który dąży do nieskończości na osi l *dąży do punktu w nieskończoności tej osi*. W przeciwieństwie do tego punktu w nieskończoności nazywamy każdy punkt P osi l, którego spółrzędna x_1 jest liczbą od zera odmienną *punktem w skończoności*.

Uważajmy dwa układy spółrzędnych jednorodnych punktu w nieskończoności x_1^1, x_2^1 i x_1^2, x_2^2. Ponieważ obie liczby x_2^1 i x_2^2 są od zera odmienne, więc istnieje taka zupełnie oznaczona liczba $k \neq 0$, że zachodzą równości (3). Zachodzi również równość (4). Naodwrót, jeżeli dwa układy spółrzędnych jednorodnych spełniają związki (3), w których k jest pewną liczbą od zera odmienną, i jeden układ jest układem spółrzędnych punktu w nieskończoności, wówczas i drugi układ jest układem spółrzędnych punktu w nieskończoności. Tak samo jeżeli dwa układy spółrzędnych jednorodnych dwóch punktów spełniają równość (4), i jeżeli jeden układ jest układem spółrzędnych punktu w nieskończoności, natenczas i drugi układ jest układem spółrzędnych punktu w nieskończoności.

Wykluczaliśmy dotąd przypadek gdy obie spółrzędne jednorodne są równe zeru. Możemy się umówić, że taki układ spółrzędnych jest układem spółrzędnych *dowolnego* punktu w skończoności na osi l, albowiem dowolna wartość na x spełnia wówczas warunek

$$xx_1 = x_2 .$$

Mamy więc ogólniejsze od Twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa układy liczb x_1^1. x_2^1 i x_1^2, x_2^2, z których żaden nie składa się z dwóch zer były spółrzędnemi jednorodnemi tego samego punktu w skończoności lub w nieskończoności na osi l są równości (3), w. których k jestto pewna zupełnie oznaczona liczba od zera odmienna, albo też równość (4)“.

3. Formy linjowe o dwóch zmiennych. Równania linjowe jednorodne o dwóch niewiadomych.

Uważajmy funkcję pierwszego stopnia czyli funkcję linjową zmiennej x

$$ax + b, \tag{5}$$

zakładając, że liczba a jest od zera odmienna. Uważajmy równanie pierwszego stopnia

$$ax + b = 0 \tag{6}$$

o niewiadomej x. Równanie to posiada jeden jedyny pierwiastek

$$x = -\frac{b}{a}. \tag{7}$$

Uważajmy na osi l punkt P o spółrzędnej Kartezjusza, danej wzorem (7). Mówimy, że równanie (6) jest *równaniem punktu P*.

Wstawmy teraz zamiast x w funkcję (5) i w równanie (6) wyrażenie (1) na x w spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2. Otrzymamy funkcję

$$a\frac{x_2}{x_1} + b = \frac{ax_2 + bx_1}{x_1}$$

dwóch zmiennych x_1 i x_2 i równanie

$$a\frac{x_2}{x_1}+b=0$$

o dwóch niewiadomych x_1, x_2.

Funkcję

$$ax_2+bx_1 \tag{8}$$

nazywamy *funkcją jednorodną pierwszego stopnia* albo *formą linjową* (forme linéaire) zmiennych x_1 i x_2. Równanie

$$ax_2+bx_1=0 \tag{9}$$

nazywamy *równaniem jednorodnem pierwszego stopnia* o niewiadomych x_1 i x_2. Jeżeli spółrzędna Kartezjusza punktu P w skończoności spełnia równanie (6), natenczas spółrzędne jednorodne tego punktu spełniają równanie jednorodne (9) i naodwrót. Mówimy, że równanie (9) jest *równaniem jednorodnem punktu* P.

Załóżmy teraz że $a=0$, a b jest od zera odmienne. Równanie (9) jest teraz spełnione przez układy liczb $x_1=0$, x_2 dowolne, a więc przez układy spółrzędnych punktu w nieskończoności i tylko przez te układy. Mówimy, że równanie (9) jest *równaniem jednorodnem punktu w nieskończoności* na osi l. Równanie (5) ma teraz postać

$$b=0$$

i nie jest spełnione przez spółrzędną Kartezjusza żadnego punktu w skończoności.

Jeżeli obie liczby a, b są równe 0, równanie (6) jest spełnione przez spółrzędną Kartezjusza dowolnego punktu w skończoności lub w nieskończoności na osi l i tak samo równanie jednorodne (9) jest spełnione przez układy spółrzędnych dowolnego punktu na osi l. Forma linjowa (8) nazywa się wówczas *zerową*.

Uważajmy dwie formy linjowe

$$a_1x_2+b_1x_1 \quad \text{i} \quad a_2x_2+b_2x_1, \tag{10}$$

obie nie zerowe. Uważajmy równania

$$\begin{aligned} a_1x_2+b_1x_1&=0,\\ a_2x_2+b_2x_1&=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Przypuśćmy, że równania te przedstawiają ten sam punkt. Otrzymujemy warunek

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \tag{12}$$

konieczny, aby równania te przedstawiały ten sam punkt. Warunek ten jest też *wystarczający*, albowiem jeżeli jedna z liczb b_1, b_2 równa się zero, natenczas i druga liczba równa się zero i równania (11) przedstawiają oba punkt w nieskończoności, a jeżeli obie liczby a_1, a_2 są od zera odmienne, natenczas istnieje zupełnie oznaczona liczba $k \neq 0$ taka, że mamy równości

$$a_1 = ka_2, \qquad b_1 = kb_2$$

i równania (11) przedstawiają ten sam punkt w skończoności.

Mamy więc

Twierdzenie 3. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym aby dwa równania (11) jednorodne pierwszego stopnia przedstawiały ten sam punkt w skończoności lub w nieskończoności na prostej l jest by pomiędzy spółczynnikami tych równań zachodził związek (12)“.

4. Spółrzędne jednorodne na płaszczyźnie.

Uważajmy na płaszczyźnie dowolny punkt P o spółrzędnych Kartezjusza x, y. Istnieje nieskończenie wiele układów 3-ch liczb x_1, x_2, x_3, takich, że $x_3 \neq 0$ i że zachodzą równości

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{13}$$

W istocie możemy x_3 obrać dowolnie, a x_1 i x_2 wyznaczyć ze wzorów

$$x_1 = xx_3, \qquad x_2 = yx_3.$$

Naodwrót każdemu układowi 3 liczb x_1, x_2, x_3, z których trzecia jest od zera odmienna odpowiada zupełnie oznaczony układ dwóch liczb x, y. Liczby x_1, x_2, x_3 nazywamy *spółrzędnemi jednorodnemi* punktu P.

Uważajmy dwa układy spółrzędnych jednorodnych x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_1^2, x_2^2, x_3^2 i załóżmy, że są to układy spółrzędnych tego samego punktu P. Kładąc

$$\frac{x_3^1}{x_3^2} = k,$$

gdzie k jest liczba od zera odmienna otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} x_1^1 &= kx_1^2, \\ x_2^1 &= kx_2^2, \\ x_3^1 &= kx_3^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Naodwrót dwa układy trzech liczb x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_1^2, x_2^2, x_3^2 spełniających równości (14) i nierówności $x_3^1 \neq 0$, $x_3^2 \neq 0$ są układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu.

Ze związków (14) otrzymujemy rugując k równości

$$\begin{aligned} x_1^1 x_2^2 - x_2^1 x_1^2 &= 0, \\ x_2^1 x_3^2 - x_3^1 x_2^2 &= 0, \\ x_3^1 x_1^2 - x_1^1 x_3^2 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Naodwrót, jeżeli te równości są spełnione przez dwa układy spółrzędnych jednorodnych, natenczas istnieje zupełnie oznaczona liczba $k \neq 0$ spełniająca równości (14).

Mamy więc

Twierdzenie 4. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa układy trzech liczb x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_1^2, x_2^2, x_3^2 spełniających nierówności $x_3^1 \neq 0$, $x_3^2 \neq 0$ były układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu P są równości (14), albo też równości (15)".

5. Punkty w nieskończoności na płaszczyźnie.

Uważajmy nieskończony ciąg punktów na płaszczyźnie $P_1, P_2, \ldots$ Niechaj x_1^i, x_2^i, x_3^i, $i = 1, 2, \ldots$ będą układy spółrzędnych jednorodnych tych punktów. Uważajmy ciągi spółrzędnych Kartezjusza tych punktów

$$x^i = \frac{x_1^i}{x_3^i}, \quad y^i = \frac{x_2^i}{x_3^i}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

i załóżmy, że odległości punktów P^i od początku układu dążą do nieskończoności, a więc, że mamy

$$\lim_{i=\infty} \{|x^i|^2 + |y^i|^2\} = \infty.$$

Zatem nie mniejsza z liczb

$$|x^i| \quad \text{i} \quad |y^i|$$

dąży do nieskończoności. Będziemy zawsze tak obierali układy spółrzędnych jednorodnych punktów P_i, że wartości bezwzględne spółrzędnych x_1^i i x_2^i są stale mniejsze od liczby dodatniej m dowolnie obranej, tj. mamy

$$| x_1^i | < m, \qquad | x_2^i | < m.$$

Wówczas ciąg liczb x_3^i dąży do zera. Mówimy, że punkt zmienny P przyjmujący położenia P_i *oddala się w nieskończoność* lub *dąży* na płaszczyźnie *do nieskończoności.*

Uważajmy teraz układ trzech liczb x_1, x_2, x_3 takich, że $x_3 = 0$, ale, że x_1, x_2 nie oba są równe 0. Z każdym takim układem kojarzymy pojęcie pewnego *punktu w nieskończoności* na płaszczyźnie. którego *spółrzędnemi jednorodnemi* są liczby tego układu.

Umawiamy się, że dwa układy liczb x_1^1. x_2^1, x_3^1 i x_1^2, x_2^2, x_3^2 są wtedy i tylko wtedy układami spółrzędnych jednorodnych *tego samego* punktu w nieskończoności, jeżeli istnieje liczba $k \neq 0$ taka, że zachodzą równości (14). Oczywiście istnieje tylko jedna taka liczba Widoczna, że definicja ta nie może doprowadzić do żadnych sprzeczności, bo dla dwóch identycznych układów spółrzędnych liczba k istnieje i równa się 1, a jeżeli dwa układy x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_2^1, x_2^2, x_3^2 są układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu w nieskończoności, i jezeli dwa układy x_1^2, x_2^2, x_3^2 i x_1^3, x_2^3, x_3^3 są również układami spółrzędnych tego samego punktu w nieskończoności, natenczas i układy x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_1^3, x_2^3, x_3^3 są układami spółrzędnych tego samego punktu w nieskończoności.

Z równości (14) otrzymujemy równości (15) konieczne i wystarczające, aby dwa układy spółrzędnych jednorodnych przedstawiały ten sam punkt w nieskończoności.

Mamy więc ogólniejsze od Twierdzenia 4

Twierdzenie 5. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa układy x_1^1, x_2^1, x_3^1 i x_1^2, x_2^2, x_3^2 trzech liczb, z których żaden nie składa się z trzech zer były układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu *w skończoności lub w nieskończoności*, są równości (14), w których k jest zupełnie oznaczona liczba od zera odmienna, albo też równości (15)".

Układ wszystkich punktów w skończoności i w nieskończoności nazywamy *całkowitym układem punktów na płaszczyźnie.*

Mówimy, że punkt zmienny P *dąży do punktu Q w nieskończoności* o spółrzędnych x_1, x_2, $x_3 = 0$, jeżeli tak można obrać układy spółrzędnych punktów P_i, aby ciągi x_1^i, x_2^i. x_3^i dążyły odpowiednio do granic x_1, x_2, x_3. Jeżeli punkt P dąży do pewnego punktu Q w nieskończoności, natenczas punkt ten jest w zupełności oznaczony, albowiem jeżeli dwa układy ciągów x_1^i, x_2^i, x_3^i i y_1^i, y_2^i, y_3^i są układami ciągów spółrzędnych jednorodnych tych samych punktów, i jeżeli pierwsze dążą do układu x_1, x_2, x_3, a drugie do układu y_1, y_2, y_3, natenczas układy te są układami spółrzędnych tego samego punktu w nieskończoności. W istocie, ponieważ mamy związki

$$\begin{aligned} x_1^i y_2^i - x_2^i y_1^i &= 0, \\ x_2^i y_3^i - x_3^i y_2^i &= 0, \\ x_3 y_1^i - x_1^i y_3^i &= 0, \quad i = 1,\ 2, \ldots \end{aligned}$$

więc otrzymamy w granicy dla $i = \infty$ związki

$$\begin{aligned} x_1 y_2 - x_2 y_1 &= 0, \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 &= 0, \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 &= 0, \end{aligned}$$

które na podstawie twierdzenia 5. orzekają, że oba układy te są układami spółrzędnych tego samego punktu w nieskończoności.

Jeżeli punkt P zmierza do oznaczonego punktu Q w nieskończoności, natenczas przynajmniej jeden z dwóch ciągów x_1^i, x_2^i składa się od pewnego i począwszy z samych liczb od zera odmiennych i przynajmniej jeden z dwóch ciągów ułamków

$$\frac{x_1^i}{x_2^i} \text{ i } \frac{x_2^i}{x_1^i},\ i = 1,\ 2, \ldots \tag{17}$$

od pewnego i począwszy nie zawiera zer w mianownikach i dąży do oznaczonej granicy. W istocie, gdyby w obu ciągach x_1^i, x_2^i było nieskończenie wiele zer nie mógłby istnieć taki układ dwóch liczb x_1, x_2 nie obu równych zeru, aby układy x_1^i, x_2^i po pomnożeniu ich przez pewne liczby k^i dążyły do tego układu x_1, x_2. Punkt P nie mógłby więc dążyć do oznaczonego punktu w nieskończoności. Jeżeli x_1, x_2, 0 jest jednym z układów spółrzędnych punktu Q, natenczas przynajmniej jeden z dwóch ułamków

$$\frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{x_2}{x_1}$$

nie zawiera zera w mianowniku, więc ma oznaczoną wartość, którą oznaczymy przez g. g jest granicą wartości ułamków tego z ciągów (17), który odpowiada uważanemu z ułamków $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_1}$.

Niechaj teraz naodwrót przynajmniej jeden z dwóch ciągów x_1^i, x_2^i układów spółrzędnych punktów P_i składa się od pewnego i począwszy z liczb od zera odmiennych. Jeżeli oba te ciągi od pewnego i począwszy składają się z liczb od zera odmiennych, natenczas jeżeli przynajmniej jeden z dwóch ciągów (17) np. pierwszy dąży do oznaczonej skończonej granicy g, natenczas jeżeli $g \neq 0$ drugi ciąg dąży do $\frac{1}{g}$, a jeżeli $g = 0$ natenczas wartości bezwzględne drugiego ciągu dążą do ∞.

Wartości bezwzględne drugiego ciągu (16) dążą do nieskończoności, w przeciwnym razie, ponieważ mamy

$$\frac{x_1^i}{x_3^i} = \frac{x_1^i}{x_2^i}\frac{x_2^i}{x_3^i},$$

więc suma kwadratów

$$|x^i|^2 + |y^i|^2 = \left|\frac{x_1^i}{x_3^i}\right|^2 + \left|\frac{x_2^i}{x_3^i}\right|^2$$

nie mogłaby dążyć do nieskończoności i punkt P nie mógłby oddalać się w nieskończoność.

Zastąpmy układy spółrzędnych x_1^i, x_2^i, x_3^i przez układy

$$\frac{x_1^i}{x_2^i},\ 1,\ \frac{x_3^i}{x_2^i}$$

im równoważne. Te układy dążą do układu

$$g,\ 1,\ 0.$$

Załóżmy teraz, że tylko w jednym z ciągów x_1^i, x_2^i mamy od pewnego i począwszy same liczby od zera odmienne, np. w drugim ciągu. Ciąg x_1^i dąży wówczas do zera. Załóżmy, że pierwszy ciąg (17) dąży do oznaczonej granicy g. Granicą tą jest więc 0. Zastąpmy układy liczb x_1^i, x_2^i, x_3^i przez układy im równoważne

$$\frac{x_1^i}{x_2^i},\ 1,\ \frac{x_3^i}{x_2^i}.$$

Ciągi liczb tych dążą odpowiednio do granic

$$0,\ 1,\ 0.$$

Możemy więc wypowiedzieć

Twierdzenie 6. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt P dążący na płaszczyźnie do nieskończoności dążył do *oznaczonego* punktu w nieskończoności jest, aby albo oba ciągi (17) dążyły do oznaczonej skończonej granicy, albo przynajmniej ten z tych ciągów, który nie zawiera od pewnego i począwszy w mianownikach zer“.

Umawiamy się, że punkt w nieskończoności odpowiadający układom x_1, x_2, x_3, dla których $x_1 = 0$, będziemy nazywali *punktem w nieskończoności na osi y-ów*, a punkt w nieskończoności odpowiadający układom, dla których $x_2 = 0$ *punktem w nieskończoności na osi x-ów*. Jeżeli więc pierwszy ciąg (17) dąży do granicy $g = 0$, natenczas punkt P dąży do punktu w nieskończoności na osi *y-ów*, a jeżeli drugi ciąg (17) dąży do granicy $g = 0$, natenczas punkt P dąży do punktu w nieskończoności na osi *x-ów*, i naodwrót.

6. Równanie jednorodne linji prostej. Punkt w nieskończoności na linji prostej.

Uważajmy funkcję linjową

$$Ax + By + C, \tag{18}$$

której nie oba spółczynniki A, B równocześnie są równe zeru i równanie

$$Ax + By + C = 0 \tag{19}$$

prostej l. Uważajmy punkt P na tej prostej i załóżmy, że punkt ten oddala się na prostej nieograniczenie w pewnym kierunku. Jeżeli mamy $A \neq 0$, natenczas mamy albo $\lim y = +\infty$, albo też $\lim y = -\infty$. Tak samo jeżeli mamy $B \neq 0$, natenczas mamy albo $\lim x = +\infty$, albo też $\lim x = -\infty$. W pierwszym przypadku mamy

$$\lim \frac{x}{y} = -\frac{B}{A}, \tag{20}$$

a w drugim przypadku mamy

$$\lim \frac{y}{x} = -\frac{A}{B}. \tag{21}$$

Zatem jeden przynajmniej z dwóch stosunków $\frac{x}{y}$ i $\frac{y}{x}$ dąży do oznaczonej skończonej granicy, gdy punkt P oddala się na prostej l

nieograniczenie albo w jednym albo w drugim kierunku, i granica ta jest dla obu kierunków ta sama.

Zastąpmy teraz w funkcji liniowej (18) spółrzędne Kartezjusza x, y przez spółrzędne jednorodne wzorami (13). Otrzymamy

$$A\frac{x_1}{x_3}+B\frac{x_2}{x_3}+C=\frac{Ax_1+Bx_2+Cx_3}{x_3}.$$

Funkcja linjowa jednorodna o trzech zmiennych

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3 \tag{22}$$

obraca się w zero dla spółrzędnych jednorodnych wszystkich tych punktów w skończoności, dla których obraca się w zero funkcja (18) i naodwrót. Funkcję (22) nazywamy *formą linjową*, a równanie jednorodne linjowe

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0 \tag{23}$$

równaniem jednorodnem linji prostej l.

Połóżmy teraz w równaniu (23) $x_3=0$. Otrzymamy

$$Ax_1+Bx_2=0,$$

którego najogólniejsze rozwiązanie jest

$$x_1=-kB, \qquad x_2=kA,$$

gdzie k jest dowolna liczba. Układy liczb

$$x_1=-kB, \qquad x_2=kA, \qquad x_3=0, \tag{24}$$

gdzie k jest dowolna liczba od zera odmienna są układami spółrzędnych jednorodnych tego samego punktu w nieskończoności, albowiem dwa układy (24) odmienne od siebie spełniają warunki (14) lub warunki (15). A więc równanie (22) jest spełnione przez spółrzędne jednorodne jednego i tylko jednego punktu w nieskończoności. Punkt ten nazywamy *punktem w nieskończoności na prostej l.*

Uważajmy nieskończony ciąg punktów P_i, $i=1, 2$, położonych na prostej l, oddalających się w nieskończoność. Jeżeli $A \neq 0$, natenczas ciąg

$$\frac{x_1^i}{x_3^i}$$

ma wartości bezwzględne dążące do ∞. Tak samo jeżeli $B \neq 0$, ciąg

$$\frac{x_2^i}{x_3^i}$$

ma wartości bezwzględne dążące do ∞. Z drugiej strony mamy w pierwszym przypadku

$$\lim \frac{x_1^i}{x_2^i} = \lim \frac{x}{y} = -\frac{B}{A} = \frac{x_1}{x_2},$$

a w drugim przypadku mamy

$$\lim \frac{x_2^i}{x_1^i} = \lim \frac{y}{x} = -\frac{A}{B} = \frac{x_2}{x_1}.$$

A więc punkt P przyjmujący położenia P_i, $i = 1, 2, \ldots$ na prostej l oddalające się w nieskończoność, dąży do *oznaczonego* punktu w nieskończoności w sensie poprzedniego ustępu, którym to punktem jest punkt w nieskończoności na prostej l w sensie obecnego ustępu.

Ze wzorów (24) wynika, że wszystkie proste do siebie równoległe posiadają *ten sam* punkt w nieskończoności. Naodwrót każdy punkt w nieskończoności leży na wszystkich prostych pewnego niewłaściwego pęku prostych, a mianowicie jeżeli $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, 0 są spółrzędnemi tego punktu w nieskończoności, proste pęku mają równanie

$$x_1 \overline{x_2} - x_2 \overline{x_1} + C = 0,$$

gdzie C jest liczba dowolna.

Dla $A = 0$ wzory (24) dają $x_2 = x_3 = 0$, a dla $B = 0$ dają one $x_1 = x_3 = 0$. A więc punkt w nieskończoności na prostych równoległych do osi x ma spółrzędne $x_2 = x_3 = 0$, a punkt w nieskończoności na prostych równoległych do osi y ma spółrzędne $x_1 = x_3 = 0$. Na pierwszych prostych leży więc punkt, który w ustępie 5. nazwaliśmy punktem w nieskończoności na osi x, a na drugich prostych leży punkt, który wówczas nazwaliśmy punktem na osi y, co usprawiedliwia poprzednie nazwy.

7. Prosta w nieskończoności na płaszczyźnie i jej równanie.

Uważajmy znów formę linjową (22). Jeżeli A i B równają się 0, ale C jest od zera odmienne, natenczas równaniu (23) nie odpowiada żadna prosta na płaszczyźnie. Ale istnieją punkty na płaszczyźnie. których spółrzędne jednorodne spełniają równanie

$$C x_3 = 0, \qquad (25)$$

w którem C jest od zera odmienne. Są to punkty, których spółrzędnemi są układy liczb x_1, x_2, 0, gdzie x_1, x_2 są liczby dowolne nie obie równe 0. A więc wszystkie punkty w nieskończoności i tylko te punkty mają spółrzędne jednorodne spełniające równanie (25).

Ponieważ równanie (23) w przypadku gdy liczby A i B nie obie równają się 0 jest równaniem linji prostej, przeto wprowadzamy pojęcie *prostej w nieskończoności*, której *równaniem jednorodnem* nazywamy równanie (25).

W ten sposób każde równanie (23), którego *nie wszystkie spółczynniki* równają się 0 jest równaniem pewnej zupełnie oznaczonej linji prostej. Wszystkie proste w skończoności i prosta w nieskończoności tworzą razem *całkowity układ prostych na płaszczyźnie.*

Równaniu (25) odpowiada w spółrzędnych Kartezjusza równanie

$$C = 0 \tag{26}$$

tj. równanie (19), w którem oba spółczynniki A, B są równe 0. Równanie to nie jest spełnione przez spółrzędne Kartezjusza żadnego punktu Równanie (26) nazywamy *równaniem w spółrzędnych Kartezjusza* prostej w nieskończoności.

8. Dwie i trzy proste w spółrzędnych jednorodnych.

Uważajmy równania jednorodne dwóch prostych l_1 i l_2

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 = 0, \\ A_1 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

zakładając, że mogą to być zarówno proste w skończoności jak i w nieskończoności Do układu równań (27) należy macierz

$$M = \left| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right|, \tag{28}$$

której minory oznaczaliśmy w Rozdziale poprzednim przez α, β, γ. Mogą zachodzić dwa przypadki. Albo nie wszystkie te minory równają się 0, albo też wszystkie są równe 0.

W pierwszym przypadku możemy równania rozwiązać względem dwóch z trzech niewiadomych x_1, x_2. x_3. Najogólniejsze rozwiązanie równań (27) można napisać w postaci

$$x_1 = k\alpha, \qquad x_2 = k\beta, \qquad x_3 = k\gamma, \tag{29}$$

gdzie k jest dowolna liczba. Układom (29), dla których $k \neq 0$ odpowiada pewien oznaczony punkt przecięcia prostych l_1, l_2, leżący w skończoności, gdy $\gamma \neq 0$, a w nieskończoności, gdy $\gamma = 0$.

W drugim przypadku mamy

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

i spółczynniki obu równań (27) są do siebie proporcjonalne, a więc oba równania przedstawiają tę samą prostą w skończoności lub w nieskończoności. Mamy

$$A_1 = kA_2, \qquad B_1 = kB_2, \qquad C_1 = kC_2, \tag{30}$$

gdzie k jest pewna oznaczona liczba od zera odmienna.

Uważajmy teraz trzy proste l_1, l_2, l_3 o równaniach jednorodnych

$$\begin{aligned} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby istniał przynajmniej jeden układ pierwiastków tych równań jest

$$W = 0 \tag{32}$$

gdzie W jest wyznacznikiem tych równań. Jeżeli nie wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika W są równe 0, natenczas istnieje jeden jedyny punkt wspólny prostych l_1, l_2, l_3. Jeżeli np. pewien minor należący do równań 1-go i 2-go jest od zera odmienny, natenczas spółrzędne jednorodne punktu wspólnego są

$$x_1 = k\alpha_3, \qquad x_2 = k\beta_3, \qquad x_3 = k\gamma_3, \tag{33}$$

gdzie k jest dowolna liczba od zera odmienna. Punkt ten może być punktem w skończoności lub punktem w nieskończoności.

Jeżeli zaś wszystkie minory 2-go stopnia wyznacznika W równają się 0, natenczas proste l_1, l_2, l_3 zlewają się ze sobą i mamy jedną prostą w skończoności lub w nieskończoności.

ROZDZIAŁ VI.

Punkty i proste zespolone.

1. Punkty zespolone. Płaszczyzna zespolona.

Uważajmy układ dwóch liczb *zespolonych* x, y

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \tag{1}$$

o *częściach rzeczywistych* x', y', *częściach urojonych* ix'', iy'', i *spółczynnikach części urojonych* x'', y''. Liczby (1) nazywają się *zespolone rzeczywiste* lub krótko *rzeczywiste*, jeżeli mamy $x'' = y'' = 0$, liczby *zespolone urojone* lub krótko *urojone*, jeżeli x'' albo y'' jest od zera odmienne.

Jeżeli obie liczby (1) są rzeczywiste, natenczas istnieje na płaszczyźnie jeden jedyny punkt P, którego spółrzędne Kartezjusza w danym układzie U Kartezjusza równają się odpowiednio liczbom (1), przyczem liczby układu liczb rzeczywistych identyfikujemy z liczbami zespolonemi rzeczywistemi układu liczb zespolonych. Ale jeżeli przynajmniej jedna z liczb (1) nie jest rzeczywista, natenczas układ (1) nie może być zidentyfikowany z układem spółrzędnych żadnego punktu na płaszczyźnie. Możemy jednak wprowadzić pewne umowy takie, że z *każdym* układem dwóch liczb zespolonych skojarzymy pojęcie pewnego *punktu zespolonego* P, którego *układem spółrzędnych* Kartezjusza jest układ (1). Jeżeli przynajmniej jedna ze spółrzędnych (1) jest urojona, punkt P nazywa się *zespolonym urojonym*, w przeciwnym razie *zespolonym rzeczywistym* lub krótko *rzeczywistym*. Jeżeli punkt jest rzeczywisty, będziemy uważali za obraz tego punktu punkt na płaszczyźnie w dotychczasowym sensie punktu, o spółrzędnych x, y w danym układzie osi Kartezjusza równych odpowiednio spółrzędnym uważanego punktu. Jeżeli jednak punkt P jest urojony, nie odpowiada mu żaden punkt na płaszczyźnie w dotychczasowym sensie.

Wprowadzimy teraz pojęcie *płaszczyzny zespolonej*. Rozumiemy przez to zbiór wszystkich punktów zespolonych o spółrzędnych Kartezjusza x, y w *układzie Kartezjusza* obranym na tej płaszczyźnie. Mówimy o punktach zespolonych, że *leżą* na płaszczyźnie zespolonej. Płaszczyznę w zwykłym sensie nazywamy w przeciwieństwie do tego *płaszczyznę rzeczywistą*. A więc możemy uważać płaszczyznę rzeczywistą jako przedstawiającą *część* punktów płaszczyzny zespolonej, a mianowicie punkty zespolone rzeczywiste.

2. Punkty zespolone na danej prostej.

Uważajmy równanie prostej l w skończoności

$$Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Orzeczenie, że punkt zespolony P o spółrzędnych (1) *leży na prostej* l oznacza, że spółrzędne (1) punktu *spełniają równanie* (2). Mamy więc

$$A(x' + ix'') + B(y' + iy'') + C = 0.$$

Zachodzą więc równości

$$\begin{aligned} Ax' + By' + C &= 0, \\ Ax'' + By'' &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

konieczne i wystarczające. W przypadku, gdy punkt zespolony jest punktem rzeczywistym leży on na prostej l w dotychczasowym sensie.

Pierwsze równanie (3) jest równaniem prostej l' identycznej z prostą l, jeżeli x', y' oznaczają spółrzędne punktu rzeczywistego położonego na tej linji prostej. Drugie równanie (3) jest równaniem prostej l'' równoległej do prostej l przechodzącej przez początek układu, jeżeli x'', y'' oznaczają spółrzędne punktu rzeczywistego położonego na tej linji prostej.

A więc każdemu punktowi zespolonemu P leżącemu na prostej l odpowiada *para punktów* P', P'' o spółrzędnych x', y'; x'', y'' leżących odpowiednio na prostych l', l'' i naodwrót każdej parze punktów P', P'' leżących na prostych l', l'' odpowiada punkt zespolony P leżący na prostej l. Punktom P rzeczywistym odpowiadają pary punktów P', P'', z których punkt P'' schodzi się z początkiem układu O, a punkt P' z punktem P.

Na każdej prostej l *leży nieskończenie wiele punktów urojonych*. Dwa punkty P_1, P_2 nazywamy punktami zespolonymi *ze sobą sprzę-*

żonymi, jeżeli ich spółrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2 są odpowiednio liczbami zespolonymi ze sobą sprzężonymi Jeżeli na prostej l leży punkt P_1, natenczas leży i punkt P_2 zespolony z nim sprzężony.

3. Proste zespolone na płaszczyźnie zespolonej i ich klasyfikacja.

Uważajmy funkcję linjową

$$Ax + By + C$$

i założmy, że spółczynniki A, B, C są dowolne liczby zespolone, takie, że A i B nie są równocześnie równe 0. Funkcję tę nazwiemy *linjową zespoloną*, a równanie (2) jej odpowiadające równaniem *linjowem zespolonem.*

Umawiamy się, że wszystkie punkty zespolone P, których spółrzędne spełniają równanie (2) *leżą na prostej zespolonej* l o *równaniu* (2). Równanie (2) nazywamy *rzeczywistem*, jeżeli wszystkie jego spółczynniki są rzeczywiste, *urojonem* w przeciwnym przypadku.

Niechaj będzie

$$A = A' + iA'', \qquad B' = B' + iB', \qquad C = C' + iC'', \tag{4}$$

przyczem nie wszystkie 4 liczby A', A''; B', B'' są równocześnie równe 0. Uważajmy macierz

$$M = \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \tag{5}$$

i oznaczmy przez α, β, γ jej minory 2-go stopnia

$$\begin{aligned} \alpha &= B'C'' - B''C', \\ \beta &= C'A'' - C''A', \\ \gamma &= A'B'' - A''B'. \end{aligned} \tag{6}$$

Macierz (5) możemy uważać jako macierz dwóch równań rzeczywistych

$$\begin{aligned} A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt P rzeczywisty położony w skończoności leżał na prostej zespolonej (2) jest aby jego spółrzędne x, y spełniały równania (7).

Mamy tu *trzy przypadki* następujące:

I. $\gamma \neq 0$. Równania (7) przedstawiają dwie proste l', l'' w skończoności przecinające się. Istnieje zatem *jeden jedyny punkt rzeczywisty* na prostej zespolonej (2).

II. $\gamma = 0$, *a* α *albo* $\beta \neq 0$. Równania (7) przedstawiają albo dwie proste l', l'' w skończoności równoległe od siebie odmienne, albo jedna i tylko jedna z tych prostych jest w nieskończoności. *Niema punktu rzeczywistego w skończoności* na prostej l.

III. $\gamma = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Albo równania (7) przedstawiają *tę samą* prostą w skończoności, istnieje wówczas liczba $k \neq 0$ taka, że zachodzą równości

$$A'' = kA', \qquad B'' = kB', \qquad C'' = kC'.$$

Albo jedno i tylko jedno z równań (7) jest identycznie zero. Istnieje zatem *nieskończenie wiele punktów rzeczywistych* na prostej zespolonej l i leżą one na prostej.

Zależnie od tego, który z tych przypadków zachodzi mówimy, że równanie zespolone należy do I, II lub III *kategorji*.

Jeżeli równanie zespolone (2) pomnożymy przez dowolną liczbę zespoloną m od zera odmienną, otrzymamy równanie

$$mAx + mBy + mC = 0. \tag{8}$$

Równania (2) i (8) są spełnione przez spółrzędne Kartezjusza tego samego układu punktów zespolonych i nazywają się *równoważne*.

Równania równoważne należą zatem do tej samej kategorji. Naodwrót, jeżeli dwa równania pierwszego stopnia o spółczynnikach zespolonych

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

są spełnione przez układy spółrzędnych tych samych punktów zespolonych, natenczas są równoważne. W istocie oba spółczynniki A_1 i A_2 są równocześnie od zera odmienne albo równocześnie równe zeru. Jeżeli A_1 i A_2 są oba $\neq 0$, natenczas mamy dla wszystkich y

$$\frac{B_1}{A_1} y + \frac{C_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} y + \frac{C_2}{A_2},$$

a więc

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2}, \quad \frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2}.$$

Jeżeli zaś $A_1 = A_2 = 0$, natenczas albo oba spółczynniki B_1 i B_2 są równocześnie od zera odmienne i mamy

$$\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2},$$

albo też mamy $B_1 = B_2 = 0$, a wtedy również oba równania są równoważne.

Każde równanie III ciej kategorji jest równoważne pewnemu równaniu rzeczywistemu, którego nie oba spółczynniki A i B są równocześnie równe zeru

Proste zespolone przedstawione przez równania zespolone I. i II. kategorji nazywamy odpowiednio *prostemi urojonemi* I. *i* II. *kategorji.* Proste zespolone przedstawione przez równanie III-ciej kategorji, a więc i przez równanie rzeczywiste nazywamy *prostemi zespolonemi rzeczywistemi*, albo krótko *rzeczywistemi.* Przy tem identyfikujemy zbiór prostych rzeczywistych płaszczyzny rzeczywistej, któreśmy dotąd rozważali ze zbiorem prostych zespolonych rzeczywistych obecnie określonych.

Uważajmy prostą zespoloną o równaniu (2) i załóżmy, że na tej prostej leżą dwa punkty P i $\overline{P}$ zespolone ze sobą sprzężone o spółrzędnych

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy''$$

i

$$\overline{x} = x' - ix'', \qquad \overline{y} = y' - iy''.$$

Mamy więc równości następujące

$$(A' + iA'')(x' + ix'') + (B' + iB'')(y' + iy'') + C' + iC'' = 0,$$
$$(A' + iA'')(x' - ix'') + (B' + iB'')(y' - iy'') + C' + iC'' = 0.$$

Mamy więc

$$A'x' - A''x'' + B'y' - B''y'' + C' = 0,$$
$$A'x'' + A''x' + B'y'' + B''y' + C'' = 0,$$
$$A'x' + A''x'' + B'y' + B''y'' + C' = 0,$$
$$A'x'' - A''x' + B'y'' - B''y' - C'' = 0.$$

Stąd mamy

$$A'x' + B'y' + C' = 0,$$
$$A''x'' + B''y'' = 0,$$
$$A''x' + B''y' + C'' = 0,$$
$$A'x'' + B'y'' = 0.$$

Z równości 2-giej i 4-tej wynika, że albo $x'' = y'' = 0$, albo też mamy $\gamma = A'B'' - A''B' = 0$. Jeżeli punkty P i $\overline{P}$ są *urojone*, natenczas mamy $\gamma = 0$. Ze związków 1-go i 3-go otrzymujemy mnożąc przez B'', B' i odejmując

$$\alpha = B'C'' - B''C' = 0,$$

a mnożąc przez A'', A' i odejmując

$$\beta = C'A'' - C''A' = 0.$$

A więc prosta jest *rzeczywista*. Mamy więc

Twierdzenie 1. „Prosta zespolona, na której leżą dwa punkty urojone ze sobą sprzężone jest rzeczywista“.

Dwa równania zespolone

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ \overline{A}x + \overline{B}y + \overline{C} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

nazywają się ze sobą *sprzężone*, jeżeli ich spółczynniki są odpowiednio ze sobą sprzężone, tj. jeżeli mamy

$$\begin{aligned} A &= A' + iA'', \qquad & B &= B' + iB'', \qquad & C &= C' + iC'', \\ \overline{A} &= A' - iA'', & \overline{B} &= B' - iB'', & \overline{C} &= C' - iC''. \end{aligned} \tag{10}$$

Dwie proste l_1 i l_2 nazywają się *zespolone ze sobą sprzężone*, jeżeli istnieją takie 2 liczby k_1, k_2 obie od zera odmienne, że równania tych prostych po pomnożeniu przez te liczby stają się zespolone ze sobą sprzężone. Niechaj równania tych 2 prostych będą

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Mamy równości

$$\begin{aligned} k_1A_1 &= A, \qquad & k_1B_1 &= B, \qquad & k_1C_1 &= C, \\ k_2A_2 &= \overline{A}, & k_2B_2 &= \overline{B}, & k_2C_2 &= \overline{C}. \end{aligned}$$

Jeżeli na prostej l_1 leży punkt P o spółrzędnych $\xi = \xi' + i\xi''$, $\eta = \eta' + i\eta''$, natenczas na prostej l_2 zespolonej sprzężonej leży punkt $\overline{P}$ zespolony sprzężony z punktem P o spółrzędnych $\overline{\xi} = \xi' - i\xi''$ $\overline{\eta} = \eta' - i\eta''$. Albowiem równość

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0$$

pociąga za sobą kolejno równości

$$A\xi + B\eta + C = 0,$$
$$\overline{A\xi} + \overline{B\eta} + \overline{C} = 0,$$
$$A_2\overline{\xi} + B_2\overline{\eta} + C_2 = 0.$$

Dwie proste l_1, l_2 zespolone sprzężone należą do tej samej kategorji prostych zespolonych, albowiem te same punkty rzeczywiste leżą na obu prostych. Naodwrót jeżeli dwie proste zespolone sprzężone są *urojone*, każdy punkt P wspólny jest punktem *rzeczywistym*. Gdyby bowiem był urojonym, natenczas i punkt $\overline{P}$ zespolony z nim sprzężony byłby punktem wspólnym obu prostych. A więc obie proste przechodziłyby przez te same dwa od siebie odmienne punkty urojone ze sobą sprzężone, więc byłyby obie rzeczywiste i schodziłyby się ze sobą, albowiem przez dwa dowolne od siebie odmienne punkty zespolone P_1, P_2 przechodzi jedna i tylko jedna prosta.

Mamy więc

Twierdzenie 2. „Jeżeli dwie proste zespolone ze sobą sprzężone mają punkt wspólny, natenczas punkt ten jest rzeczywisty“.

5. Spółczynniki kierunkowe prostych zespolonych.

Uważajmy znów równanie zespolone (2). W przypadku, gdy to równanie jest rzeczywiste mamy wzory na spółczynniki kierunkowe

$$\lambda = -\varepsilon\frac{B}{R}, \qquad \mu = \varepsilon\frac{A}{R}, \tag{12}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a przez R należy rozumieć dodatni pierwiastek

$$R = \sqrt{A^2 - 2AB\cos\theta + B^2}. \tag{13}$$

W przypadku ogólnego równania zespolonego wyrażenia (12) mają zupełnie określoną wartość, z wyjątkiem przypadku $R = 0$, jeżeli tylko na R obierzemy oznaczoną wartość pierwiastka i obierzemy wartość ε. Jeżeli R^2 jest dodatnie, obieramy na R wartość dodatnią, a jeżeli R^2 jest ujemne lub urojone obieramy tę wartość, której spółczynnik części urojonej jest dodatni.

Liczby (12) nazywamy *spółczynnikami kierunkowymi prostej zespolonej*. Mamy więc dwa układy spółczynników kierunkowych prostej zespolonej, z których każdy należy do oznaczonego *kierunku* prostej zespolonej.

Przynajmniej jedna z dwóch liczb A, B jest od zera odmienna. Więc albo $\frac{A}{B} = k_1$, albo $\frac{B}{A} = k_2$ jest oznaczoną skończoną liczbą. Mamy więc na λ, μ albo wzory

$$\lambda = -\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - 2k_1 \cos\theta + k_1^2}},$$

$$\mu = \varepsilon \frac{k_1}{\sqrt{1 - 2k_1 \cos\theta + k_1^2}},$$

albo też wzory

$$\lambda_2 = -\varepsilon \frac{k_2}{\sqrt{1 - 2k_2 \cos\theta + k_2^2}},$$

$$\mu_2 = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - 2k_2 \cos\theta + k_2^2}}.$$

Jeżeli więc stosunki spółczynników A i B są liczbami rzeczywistemi, natenczas spółczynniki kierunkowe są liczbami rzeczywistemi. Oczywiście, że naodwrót jeżeli spółczynniki kierunkowe są rzeczywiste, stosunki spółczynników A i B są rzeczywiste. Stosunki liczb A i B są rzeczywiste, jeżeli istnieją dwie liczby k_1 i k_2 rzeczywiste nie obie równe 0 takie, że mamy

$$k_1 A' = k_2 B',$$

$$k_1 A'' = k_2 B'',$$

a więc jeżeli mamy

$$\gamma = 0,$$

i naodwrót.

Zatem dla prostych zespolonych kategoryj II. i III. i tylko dla tych prostych spółczynniki kierunkowe są liczbami rzeczywistymi. A więc prócz prostych rzeczywistych proste urojone II. kategorji mają *kierunki rzeczywiste*.

Jeżeli stosunki spółczynników A i B są urojone, najwyżej jeden ze spółczynników kierunkowych może być liczbą rzeczywistą. Widać też łatwo, że istnieją liczby urojone k takie, że

$$1 - 2k \cos\theta + k^2$$

jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Jeżeli $k = k' + ik''$, natenczas musi być

$$1 - 2k' \cos\theta + k'^2 - k''^2 > 0,$$
$$-2k'' \cos\theta + 2k'k'' = 0,$$

a więc

$$k' = \cos\theta,$$
$$k'^2 < \sin^2\theta.$$

Stosunki $\frac{\mu}{\lambda}$ i $\frac{\lambda}{\mu}$ nazywają się *spółczynnikami kątowymi* prostej zespolonej.

6. Wzajemne położenie punktów i prostych zespolonych.

Uważajmy dwie proste l_1, l_2 zespolone i obierzmy na nich dodatnie kierunki. Niechaj λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2 będą ich spółczynniki. Przez *dostawę* i *wstawę* kąta φ kierunku drugiego z kierunkiem pierwszym rozumiemy znów wyrażenia

$$\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \cos\theta + \mu_1 \mu_2,$$
$$(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \sin\theta$$

i oznaczamy przez $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Dwa kierunki są *prostopadłe*, jeżeli mamy

$$\cos\varphi = 0,$$

zawierają one kąt $+\frac{\pi}{2}$ lub $-\frac{\pi}{2}$, zależnie od tego, czy $\sin\varphi$ jest $+1$, czy -1. Otrzymujemy stąd wzory Rozdziału III.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\varepsilon \frac{\lambda_1 \cos\theta + \mu_1}{\sin\theta}, \\ \mu_2 &= \quad \varepsilon \frac{\lambda_1 + \mu_1 \cos\theta}{\sin\theta}, \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, zależnie od tego, czy $\sin\varphi = +1$, czy -1.

Uważajmy teraz punkt P (a, b) i prostą l. Możemy napisać równania *parametryczne* prostej l' *prostopadłej* do prostej l

$$x = a + r'\lambda', \qquad y = b + r'\mu', \tag{15}$$

gdzie r' *parametr* na osi l' jest liczbą zmienną zespoloną. *Odległością* punktu P od l nazywamy wartość d' parametru r' odpowiadającą punktowi przecięcia Q prostych l i l'. Mamy więc wzór

$$d' = \varepsilon \frac{Aa + Bb + C}{R} \sin\theta. \tag{16}$$

Jeżeli *odległością dwóch punktów* P i Q o spółrzędnych ξ, η nazwiemy jednę oznaczoną wartość pierwiastka

$$\sqrt{(a-\xi)^2 + 2(a-\xi)(b-\eta)\cos\theta + (b-\eta)^2},$$

natenczas odległość d' równa się odległości tych dwóch punktów pomnożonej przez jedną z liczb $+1$ lub -1.

7. Proste minimalne.

Zwróćmy się teraz do przypadku dotąd wykluczonego, w którym R jest równe 0. Mamy więc

$$(A - B\cos\theta)^2 + B^2\sin^2\theta = 0,$$

a więc

$$A = B(\cos\theta + \varepsilon i\sin\theta),$$

gdzie $\varepsilon = +1$ albo -1 i tak samo

$$B = A(\cos\theta + \varepsilon' i\sin\theta),$$

gdzie $\varepsilon' = +1$ albo -1. A więc wszystkie proste o równaniach

$$Ax + A(\cos\theta + \varepsilon i\sin\theta)y + C = 0, \tag{17}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, zaś $A \neq 0$ i C są znów liczby dowolne mają $R = 0$ i tylko te proste.

A więc przez każdy punkt P zespolony na płaszczyźnie o spółrzędnych a, b przechodzą dwie i tylko dwie proste, dla których $R = 0$. Mają one równania

$$x - a + (y-b)(\cos\theta + \varepsilon i\sin\theta) = 0 \tag{18}$$

albo

$$(x-a)(\cos\theta + \varepsilon' i\sin\theta) + y - b = 0. \tag{18'}$$

Proste te są oczywiście zawsze od siebie odmienne i należą do I. kategorji, albowiem wyznacznik

$$\begin{aligned}\gamma = A'B'' - A''B' = A'(A'\sin\theta + A''\cos\theta) - \\ - A''(A'\cos\theta - A''\sin\theta) = (A'^2 + A''^2)\sin\theta\end{aligned}$$

jest od zera odmienny. Zatem na każdej takiej prostej leży jeden i tylko jeden punkt rzeczywisty.

Proste te nazywają się *minimalnymi* z następującej przyczyny. Uważajmy dwa dowolne od siebie odmienne punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ na prostej, dla której $R = 0$. Mamy

$$Ax_1 + A(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta) y_1 + C = 0\,,$$
$$Ax_2 + A(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta) y_2 + C = 0\,,$$

a więc

$$A(x_1 - x_2) + A(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta)(y_1 - y_2) = 0\,.$$

Istnieje więc liczba $k \neq 0$ taka, że mamy

$$x_1 - x_2 = kA(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta)\,,$$
$$y_1 - y_2 = -kA\,.$$

A więc mamy

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)^2 &= \\ = k^2 A^2[(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta)^2 - 2(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta)\cos\theta + 1] &= 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Zatem wzór na odległość dwóch dowolnych punktów prostej daje wartość 0. Zatem każde 2 punkty P_1, P_2 prostej minimalnej mają odległość zero.

Własność ta jest dla prostych minimalnych *charakterystyczna*, albowiem jeżeli wyrażenie (9) równa się 0 dla *jednego dowolnego* układu dwóch punktów od siebie odmiennych pewnej prostej, natenczas z równości

$$x_1 - x_2 = kB, \qquad y_1 - y_2 = -kA\,,$$

gdzie k jest pewna zupełnie oznaczona liczba od zera odmienna otrzymamy, wstawiając w (19) równość $R^2 = 0$.

Dla prostych minimalnych wzory (12) i (14) przestają mieć sens, bo w mianownikach mamy zero. Liczby λ, μ dla prostych nieminimalnych są proporcjonalne do $-B$, A

$$\begin{aligned}\lambda &= -kB,\\ \mu &= kA.\end{aligned} \tag{20}$$

Dla prostych minimalnych otrzymujemy z tych wzorów

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu\cos\theta + \mu^2 = 0\,, \tag{21}$$

dla każdej wartości na k. Liczby λ, μ określone wzorami (20), gdzie $k \neq 0$ i jest dowolnie obrane nazywamy *spółczynnikami kierunkowymi* prostej minimalnej o równaniu (2).

Naodwrót, każde 2 liczby λ, μ pomiędzy którymi zachodzi związek (21) mogą być uważane za spółczynniki kierunkowe pewnej prostej minimalnej, albowiem A i B wyznaczone z (20) dla dowolnego $k \neq 0$ spełniają warunek $R = 0$.

Dla prostych minimalnych mamy

$$\lambda(\lambda + \mu \cos\theta) + \mu(\lambda\cos\theta + \mu) = 0,$$

więc

$$\begin{aligned} \lambda &= -k(\lambda\cos\theta + \mu), \\ \mu &= k(\lambda + \mu\cos\theta), \end{aligned}$$

gdzie $k \neq 0$. Stąd uogólniając pojęcie prostopadłości dwóch kierunków i nazywając kierunek λ', μ' prostopadły do kierunku λ, μ jeżeli

$$\begin{aligned} \lambda' &= -k(\lambda\cos\theta + \mu), \\ \mu' &= k(\lambda + \mu\cos\theta), \end{aligned}$$

gdzie $k \neq 0$, widzimy, że kierunek *prostopadły* do kierunku minimalnego jest kierunkiem minimalnym *identycznym* z kierunkiem danym. Oczywiście, że ta własność jest dla prostych minimalnych charakterystyczna.

Proste minimalne nazywają się też *izotropowe* (droites isotropes). Uważał je pierwszy Laguerre.

8. Spółrzędne jednorodne punktów zespolonych na linji prostej.

Wprowadziliśmy już pojęcie spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2 na linji prostej l, przyczem uważaliśmy punkty rzeczywiste o spółrzędnych rzeczywistych. Wprowadzimy teraz pojęcie *punktu zespolonego na prostej* określonego przez jednę liczbę zespoloną x. Każdej liczbie zespolonej odpowiada jeden i tylko jeden punkt zespolony i naodwrót.

Liczbę x możemy przedstawić przez iloraz dwóch liczb zespolonych x_1, x_2, przyczem $x_1 \neq 0$

$$x = \frac{x_2}{x_1}. \tag{22}$$

Jeżeli x_1^0, x_2^0 jest jeden oznaczony układ spółrzędnych jednorodnych punktu, natenczas na ogólny układ spółrzędnych jednorodnych tego punktu mamy wzory

$$x_1 = kx_1^0, \qquad x_2 = kx_2^0, \tag{23}$$

gdzie k jest dowolna liczba zespolona od zera odmienna.

Widoczna, że i inne poprzednie wywody, w których liczby x_1, x_2, x_3 etc. były rzeczywiste są też słuszne, gdy to będą dowolne liczby zespolone. Liczby x_1, x_2 nazywamy *spółrzędnymi jednorodnymi* punktu zespolonego P.

Uważajmy teraz układ dwóch liczb zespolonych x_1, x_2, gdzie $x_1 = 0$, zaś $x_2 \neq 0$ i jest dowolne. Układy takie będziemy uważali za układy spółrzędnych *punktu w nieskończoności* na prostej l.

9. Spółrzędne jednorodne punktów zespolonych na płaszczyźnie.

Uważajmy układ dwóch dowolnych liczb zespolonych x, y. Możemy, podobnie jak w szczególnym przypadku, gdy x, y są oba rzeczywiste uważać układ trzech liczb zespolonych x_1, x_2, x_3, z których x_3 jest od zera odmienne, takich że zachodzą równości

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{24}$$

Jeżeli x_1^0, x_2^0, x_3^0 jest pewien oznaczony układ trzech liczb zespolonych, dla których zachodzą wzory (24), i jeżeli x_1, x_2, x_3 jest dowolny taki układ, mamy równości

$$x_1 = kx_1^0, \qquad x_2 = kx_2^0, \qquad x_3 = kx_3^0, \tag{25}$$

gdzie k jest pewna liczba zespolona $\neq 0$. Naodwrót do dowolnej liczby zespolonej $k \neq 0$ należy układ trzech liczb (25), dla których zachodzą wzory (24). Układ taki trzech liczb nazywamy układem *spółrzędnych jednorodnych* punktu zespolonego P, którego spółrzędnymi Kartezjusza są x, y.

Możemy teraz zupełnie jak poprzednio w przypadku punktów i prostych rzeczywistych uważać *formę linjową*

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \tag{26}$$

o spółczynnikach zespolonych należącą do funkcji linjowej

$$Ax + By + C.$$

Spółrzędne jednorodne punktu zespolonego P, którego spółrzędne x, y spełniają równanie (2), spełniają równanie jednorodne pierwszego stopnia

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \tag{27}$$

i naodwrót.

Wprowadzimy teraz pojęcie *punktów zespolonych w nieskończoności* na płaszczyźnie. Uważamy układ trzech liczb x_1, x_2, x_3, z których $x_3 = 0$, zaś x_1, x_2 są dowolne i nie oba równe 0. Każdemu takiemu układowi odpowiada oznaczony punkt w nieskończoności. Dwa punkty P, Q w nieskończoności, którym odpowiadają układy x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2. y_3 są identyczne wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $k \neq 0$ takie, że mamy

$$x_1 = ky_1, \qquad x_2 = ky_2. \tag{28}$$

Umowy te prowadzą do analogicznych konkluzyj co w przypadku, gdy oba układy x_1, x_2; y_1, y_2 są rzeczywiste.

Uważajmy teraz równanie jednorodne prostej w nieskończoności

$$Cx_3 = 0, \tag{29}$$

gdzie $C \neq 0$. Równanie to jest spełnione przez wszystkie układy trzech liczb x_1, x_2, x_3 zespolonych, dla których $x_3 = 0$ i tylko przez te układy. A więc wszystkie punkty zespolone w nieskończoności na płaszczyźnie spełniają to równanie. Możemy więc wprowadzić pojęcie *prostej zespolonej w nieskończoności* o równaniu (29) jednorodnem, a o równaniu

$$C = 0 \tag{30}$$

w spółrzędnych Kartezjusza, przyczem $C \neq 0$ jest to dowolna liczba zespolona. Możemy tę prostą uważać, jako należącą do III. kategorji prostych zespolonych na płaszczyźnie zespolonej.

Ćwiczenia.

1. Udowodnić, że jeżeli prosta jest minimalną w pewnym układzie osi Kartezjusza, natenczas jest minimalną w każdym innym układzie osi i należy do tej samej kategorji prostych minimalnych do siebie równoległych.

ROZDZIAŁ VII.

Pola figur płaskich.

1. Pole trójkąta.

Uważajmy trójkąt $\triangle$ o wierzchołkach P_i, $i = 1, 2, 3$. Na jego obwodzie mamy dwa przeciwne sobie *porządki następstwa* punktów, albo dwa przeciwne sobie *kierunki obiegu*. Uważajmy tu jeden z tych kierunków obiegu i ramię r, którego początkiem jest dowolny punkt Q wewnątrz trójkąta $\triangle$. przechodzące przez punkt P na obwodzie trójkąta i skierowane od punktu Q do punktu P. Obieg punktu P nazywamy *dodatnim*, jeżeli obrót ramienia r dokoła punktu Q odbywa się w *dodatnim* kierunku obrotów na płaszczyźnie. zaś *ujemnym*, jeżeli ten obrót odbywa się w kierunku *ujemnym*. Możemy zawsze tak obrać oznaczenia wierzchołków trójkąta, że obrotowi dodatniemu odpowiadają permutacje parzyste 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 wskaźników 1, 2, 3, zaś obrotowi ujemnemu permutacje nieparzyste 1, 3, 2; 3. 2, 1; 2, 1, 3.

Trójkąty, na których obwodzie mamy dany obieg dodatni nazwiemy *dodatniemi*, a trójkąty na których obwodzie mamy dany obieg ujemny *ujemnymi*. *Polem* trójkąta $\triangle$ nazwiemy liczbę, która dla trójkąta dodatniego jest *dodatnia* o wartości bezwzględnej równej polu w sensie elementarnym. a dla trójkąta ujemnego jest *ujemna* o wartości bezwzględnej również równej polu trójkąta w sensie elementarnym. Wprowadzimy nareszcie trójkąty *zerowe*, których trzy wierzchołki leżą na jednej linji prostej, a polem ich nazwiemy liczbę 0.

Niechaj ξ_i, η_i, $i = 1, 2. 3$ będą spółrzędne Kartezjusza wierzchołków P_i trójkąta niezerowego a λ_i, μ_i, $i = 1, 2, 3$ spółczynniki kierunkowe kierunków na bokach P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 trójkąta zgodnych z dodatnim kierunkiem obiegu tj od P_1 do P_2, od P_2 do

P_3, od P_3 do P_1. Równania prostych l_1, l_2, l_3, na których leżą boki P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 możemy napisać w postaci

$$\mu_i(x-\xi_{i+1})-\lambda_i(y-\eta_{i+1})=0 \tag{1}$$

$i=1, 2, 3$, przyczem wskaźniki następują w porządku cyklicznym.

Uważajmy odległości d_i punktów P_i, od osi l_i, przyczem te odległości rozumiemy zgodnie z definicjami Rozdział IV. Mamy wzory

$$d_i=\varepsilon_i\frac{\mu_i(x-\xi_{i+1})-\lambda_i(y-y_{i+1})}{R_i}\sin\theta, \tag{2}$$

przyczem $\varepsilon_i=\pm 1$ i są określone ze wzorów

$$\lambda_i=-\varepsilon_i\frac{B_i}{R_i}. \tag{3}$$

Ale ponieważ mamy $B_i=-\lambda_i$, $R_i=1$, więc otrzymujemy

$$\varepsilon_i=+1$$

i

$$d_i=[\mu_i(x-\xi_{i+1})-\lambda_i(y-\eta_{i+1})]\sin\theta.$$

Wstawiając w te wzory spółrzędne ξ_i, η_i punktu P_i mamy

$$d_i=[\mu_i(\xi_i-\xi_{i+1})-\lambda_i(\eta_i-\eta_{i+1})]\sin\theta.$$

Na spółczynniki kierunkowe mamy wzory

$$\lambda_i=\frac{\xi_{i+2}-\xi_{i+1}}{b_i}, \qquad \mu_i=\frac{\eta_{i+2}-\eta_{i+1}}{b_i}, \tag{4}$$

gdzie b_i równają się dodatnim pierwiastkom

$$b_i=\sqrt{(\xi_{i+1}-\xi_{i+2})^2+(\eta_{i+1}-\eta_{i+2})^2+2(\xi_{i+1}-\xi_{i+2})(\eta_{i+1}-\eta_{i+2})\cos\theta}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{1}{b_i}[(\xi_i-\xi_{i+1})(\eta_{i+2}-\eta_{i+1})-(\eta_i-\eta_{i+1})(\xi_{i+2}-\xi_{i+1})]\sin\theta \\ &= \frac{1}{b_i}[\xi_i\eta_{i+2}-\xi_{i+2}\eta_i+\xi_{i+1}\eta_i-\xi_i\eta_{i+1}+ \\ &\qquad +\xi_{i+2}\eta_{i+1}-\xi_{i+1}\eta_{i+2}]\sin\theta. \end{aligned}$$

Oznaczymy przez W wyznacznik

$$W=\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Wyznacznik ten nie zmieni wartości, jeżeli wskaźniki 1, 2, 3 zastąpimy przez dowolną permutację *parzystą* tych wskaźników a zmieni znak na przeciwny, jeżeli te wskaźniki zastąpimy przez dowolną permutację *nieparzystą* tych wskaźników.

Otrzymujemy więc na odległości d_i wierzchołków P_i od osi l_i wzory

$$d_i = -\frac{1}{b_i} W \sin\theta . \tag{6}$$

Jeżeli zmienimy kierunek obiegu obwodu trójkąta na — przeciwny uważając obieg *ujemny*, spółczynniki kierunkowe $\overline{\lambda}_i$, $\overline{\mu}_i$ nowych osi $\overline{l}_i$, będą miały wartości

$$\overline{\lambda}_i = -\lambda_i, \qquad \overline{\mu}_i = -\mu_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

a więc otrzymamy na odległości wzory

$$\overline{d}_i = \frac{1}{b_i} W \sin\theta . \tag{7}$$

Ale odległości d_i są *ujemne* jeżeli kierunek obiegu jest dodatni, a *dodatnie* jeżeli kierunek obiegu jest ujemny. Oznaczając więc przez F pole trójkąta $\triangle$ otrzymamy dla trójkąta dodatniego wzór

$$F = -\tfrac{1}{2} d_i b_i$$

a dla trójkąta ujemnego

$$F = -\tfrac{1}{2} \overline{d}_i b_i,$$

a więc dla trójkąta dodatniego wzór

$$F = \tfrac{1}{2} W \sin\theta ,$$

a dla trójkąta ujemnego wzór

$$F = -\tfrac{1}{2} W \sin\theta .$$

Jeżeli więc będziemy uważali pewien *dowolny* kierunek obiegu na obwodzie trójkąta i jednę *dowolną* z permutacyj wierzchołków P_i *odpowiadającą* temu obiegowi, natenczas pole trójkąta wyrazi się ogólnym wzorem

$$F = \tfrac{1}{2} W \sin\theta , \tag{8}$$

w którym teraz W oznacza wyznacznik, w którego wierszach figurują odpowiednio spółrzędne Kartezjusza wierzchołków trójkąta w tym porządku, w jakim następują po sobie w uważanej permutacji.

Łatwo też wprost okazać, że wyznacznik W w ten sposób określony ma znak $\sin\theta$, jeżeli trójkąt jest dodatni, a na znak przeciwny, jeżeli trójkąt jest ujemny.

Uważajmy w tym celu nowy układ spółrzędnych x', y' o początku w punkcie P_1, o osi x' schodzącej się z osią l_3, a o osi y' schodzącej się z osią $\overline{l_2}$, tj. przeciwnie skierowanej, aniżeli oś l_2. Mamy wzory na przekształcenie układu spółrzędnych x', y'

$$x = \xi_1 + \lambda_3 x' - \lambda_2 y',$$
$$y = \eta_1 + \mu_3 x' - \mu_2 y'.$$

Spółrzędne ξ_i', η_i' punktów P_i w układzie x', y' spółrzędnych są odpowiednio dla P_1, P_2, P_3

$$0,\ 0; \qquad b_3,\ 0; \qquad 0,\ b_2,$$

a więc mamy

$$\xi_2 - \xi_1 = \lambda_3 b_3, \qquad \eta_2 - \eta_1 = \mu_3 b_3,$$
$$\xi_3 - \xi_1 = -\lambda_2 b_2, \qquad \eta_3 - \eta_1 = -\mu_2 b_2,$$

A więc mamy

$$W = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 - \xi_1, & \eta_2 - \eta_1, & 0 \\ \xi_3 - \xi_1, & \eta_3 - \eta_1, & 0 \end{vmatrix} = (\xi_2 - \xi_1)(\eta_3 - \eta_1) -$$
$$-(\xi_3 - \xi_1)(\eta_2 - \eta_1) = -(\lambda_3\mu_2 - \lambda_2\mu_3) b_2 b_3 = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} b_2 b_3,$$

gdzie θ' jest to kąt jaki dodatni kierunek osi y' zawiera z dodatnim kierunkiem osi x'.

W szczególnym przypadku kiedy jeden z wierzchołków trójkąta np. punkt P_1 schodzi się z początkiem układu spółrzędnych mamy

$$W = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

a więc otrzymujemy wzory F

$$F = \tfrac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)\sin\theta \tag{9}$$

$$F = \tfrac{1}{2} b_2 b_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \tag{10}$$

gdzie φ_2, φ_3 są kąty jakie kierunki P_1P_2, P_1P_3 zawierają z dodatnim kierunkiem osi x.

Przypuśćmy teraz, że trójkąt $\triangle$ jest nam dany *równaniami boków*

$$A_i x + B_i y + C_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Mamy wyznacznik spółczynników

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \tag{12}$$

i wyznacznik minorów wyznacznika A

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Mamy

$$W = \frac{1}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{A} = A^2,$$

a więc mamy wzór

$$F = \frac{1}{2\gamma_1\gamma_2\gamma_3} A^2 \sin\theta, \tag{14}$$

wyrażający pole trójkąta przez spółczynniki równań trzech boków.

2. Pole wieloboku wypukłego.

Uważajmy linję łamaną zamkniętą $Ł$ o n wierzchołkach P_i, $i = 1, 2, \ldots n$ następujących po sobie w porządku $P_1, P_2, \ldots P_n$. Linję tę nazywamy *wielobokiem* (polygône) i oznaczymy literą W, a wektory P_iP_{i+1} nazywamy *bokami* wieloboku. Wielobok nazywamy *właściwym* (non étoilé) w przypadku, kiedy bok P_iP_{i+1} ma z innymi bokami wspólne tylko punkty P_i i P_{i+1}, tj. początek i koniec, a mianowicie P_i jako koniec boku $P_{i-1}P_i$ poprzedzającego, a P_{i+1} jako początek boku $P_{i+1}P_{i+2}$ następującego. W przeciwym razie wielobok nazywa się *niewłaściwym* (polygône étoilé).

Wielobok właściwy nazywa się wypukłym *convexe* jeżeli każda prosta na płaszczyźnie ma z wielobokiem albo 1 punkt wspólny, albo 2 punkty, albo cały jeden i tylko jeden bok.

Uważajmy wielobok wypukły W i dowolny punkt Q leżący wewnątrz tego wieloboku. Uważajmy ramię r, którego początkiem jest punkt Q, i które przechodzi przez punkt P ruchomy na obwodzie wieloboku. Kierunkiem *dodatnim* obiegu punktu P na obwodzie wieloboku nazywamy kierunek odpowiadający dodatniemu kierunkowi obrotu ramienia r, a przeciwny kierunek obiegu nazywamy kierunkiem *ujemnym*. Rozróżniamy więc wieloboki *dodatnie* i *ujemne*.

Załóżmy, że porządek następstwa $P_1, P_2, \dots P_n$ wierzchołków wieloboku odpowiada kierunkowi *dodatniemu* obiegu wieloboku. Uważajmy trójkąty

$$\triangle_i = QP_iP_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \dots n.$$

Na trójkątach tych kierunki obiegów odpowiadające następstwu Q, P_i, P_{i+1} wierzchołków są *dodatnie*, a więc trójkąty są *dodatnie*. Oznaczmy przez F_i pola tych trójkątów. Niechaj x_i, y_i będą spółrzędne P_i, zaś x, y spółrzędne P. Uważajmy sumę $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ pól tych trójkątów. Mamy wzór

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \sin\theta. \tag{15}$$

Łatwo się przekonać, że zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i). \tag{16}$$

Stąd wynika, że suma pól trójkątów $\triangle_i$ *nie zależy od obioru punktu* Q wewnątrz wieloboku W. Jeżeli punkt Q obierzemy na obwodzie wieloboku, wówczas pewne z trójkąta $\triangle_i$ będą zerowe, a na sumę pól trójkątów mamy znów wzór (15). Suma pól nie zależy więc od obioru punktu Q *wewnątrz lub na obwodzie* wieloboku W. Nazywając tę sumę pól *polem wieloboku dodatniego* otrzymamy na to pole wzór następujący

$$F = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i) \sin\theta. \tag{17}$$

Tak samo nazywamy polem wieloboku *ujemnego* sumę pól trójkątów ujemnych $\triangle QP_{i+1}P_i$. Mamy więc wzór

$$F = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1}\, y_i - x_i\, y_{i+1}) \sin\theta. \tag{18}$$

3. Pole dowolnego wieloboku właściwego.

Uważajmy teraz dowolny wielobok właściwy W. Uważajmy wierzchołek P_i i oznaczmy przez α_i kąt $\sphericalangle P_{i-1} P_i P_{i+1}$ odpowiadający *wnętrzu* wieloboku. Załóżmy, że mamy $\alpha_i \geqq \pi$.

Przeprowadźmy przez punkt P_i prostą l nie schodzącą się z żadnym z boków $P_{i-1} P_i$, $P_i P_{i+1}$ i nie przechodzącą przez żaden z pozostałych wierzchołków wieloboku. Obierzmy nadto tę prostą w ten sposób, aby dzieliła kąt α_i na dwa kąty $< \pi$. Prosta ta ma prócz punktu P_i jeszcze inne punkty wspólne z obwodem wieloboku. Oznaczmy przez Q ten punkt przecięcia prostej l z obwodem, dla którego odcinek $P_i Q$ leży całkowicie w wieloboku W. Uważajmy dwa wieloboki W' i W'' następujące

$$W' = P_i Q P_{j+1} P_{j+2} \dots P_{i-1},$$
$$W'' = P_i P_{i+1} \dots P_j Q.$$

Przytem zakładamy, że punkt Q leży na boku $P_j P_{j+1}$. Każdy z dwóch wieloboków W', W'' posiada liczbę kątów wypukłych lub równych π przynajmniej o jedność mniejszą od liczby takichże kątów wieloboku W. Stosując to samo postępowanie do obu wieloboków W', W'' otrzymamy pewną liczbę k wieloboków *wypukłych* W_i, na które rozpada się wielobok W, $i = 1, 2, \dots k$.

Jeżeli na wieloboku W obierzemy pewien kierunek obiegu, natenczas mamy na każdym z wieloboków W_i pewien oznaczony kierunek obiegu i kierunki te zmienią się na przeciwne, jeżeli zmienimy kierunek obiegu na W na przeciwny. Kierunki te na W_i są jak łatwo widać albo wszystkie dodatnie albo wszystkie ujemne. Nazwijmy *dodatnim* kierunkiem obiegu na obwodzie W ten kierunek, któremu odpowiadają kierunki dodatnie obiegu na obwodach W_i, *ujemnym* kierunek przeciwny. Łatwo widać, że kierunek dodatni na obwodzie W nie zależy od sposobu w jaki rozkładamy wielobok W na wieloboki wypukłe. Jeżeli bowiem $W'_{i'}$, $i' = 1, 2, \dots k'$ jest inny rozkład wieloboku W na wieloboki wypukłe, i jeżeli W_i i $W'_{i'}$ oznaczają dwa wieloboki wypukłe należące odpowiednio do jednego i do drugiego podziału wieloboku W i mające przynajmniej po jednym boku leżącym na tym samym boku wieloboku W, natenczas widoczna, że dodatnim kierunkom na obwodzie tych wieloboków odpowiada *ten sam* kierunek na uważanym boku wieloboku. Możemy zawsze założyć, żeśmy tak obrali oznaczenia wierzchołków P_i

wieloboku W, że obiegowi dodatniemu odpowiada następstwo wskaźników, w którem po i przychodzi w porządku cyklicznym $i+1$. Uważajmy wieloboki W' i W'' na które rozkładamy W i niechaj ξ, η będą spółrzędne punktu Q. Utwórzmy dla tych wieloboków sumy

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

odpowiadające dodatniemu kierunkowi obiegu na obwodzie. Mamy więc dla W'

$$x_i\eta - \xi y_i + \xi y_{j+1} - x_{j+1}\eta + \sum_{k=j+1}^{i-1}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k),$$

i dla W''

$$\sum_{k=i}^{j-1}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + x_j\eta - \xi y_j + \xi y_i - x_i\eta.$$

Suma tych sum równa się

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) + x_{j+1} y_j - x_j y_{j+1} + \xi y_{j+1} - x_{j+1}\eta + x_j\eta - \xi y_j,$$

ponieważ jednak punkty P_j, Q, P_{j+1} leżą na prostej więc suma ta równa się

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k).$$

Nazwijmy *polem wieloboku* W sumę pól wieloboków wypukłych W_i, na które rozkładamy wielobok W

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{19}$$

z poprzedniego wynika, że jeżeli wielobok W rozkłada się na dwa wieloboki wypukłe, natenczas na pole F mamy wzór (17), jeżeli wielobok jest *dodatni*, a (18) jeżeli jest ujemny. A więc drogą indukcji dochodzimy do wniosku, że wzory te dają pole wieloboku dowolnego właściwego.

Ćwiczenia.

1. Uważamy równoległobok $ABCD$ i punkt M. Okazać, że pole trójkąta MAC równa się sumie pól MAB i MAD (twierdzenie Varignon'a).

2. Okazać, że pole wieloboku równa się sumie pól trapezów $P_i P_{i+1} A_{i+1} A_i$, gdzie A_i są rzuty punktów P_i na oś x.

ROZDZIAŁ VIII.

Równanie jednorodne drugiego stopnia o dwóch niewiadomych i jego znaczenie geometryczne.

1. Trójmian drugiego stopnia o jednej zmiennej i równanie drugiego stopnia o jednej niewiadomej.

Trójmianem drugiego stopnia o jednej zmiennej nazywamy funkcję

$$ax^2 + 2bx + c, \qquad (1)$$

której *spółczynnikami* są liczby a, b, c. Załóżmy, że są to liczby rzeczywiste i że $a \neq 0$. *Wyróżnikiem* (discriminante) trójmianu nazywamy wyrażenie

$$d = ac - b^2. \qquad (2)$$

Trójmian (1) możemy napisać w postaci

$$\frac{1}{a}\left[(ax + b)^2 + d\right]. \qquad (3)$$

O liczbach $x = \xi$ obracających w zero trójmian (1) mówimy, że są *pierwiastkami równania drugiego stopnia*

$$ax^2 + 2bx + c = 0. \qquad (4)$$

Zachodzą tu 3 przypadki zależnie od wartości d.

1. $d > 0$. Mamy 2 pierwiastki x_1, x_2 urojone sprzężone dane wzorem

$$x_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \frac{\eta i}{a}\sqrt{d}, \qquad (5)$$

gdzie $\eta = \pm 1$ i pierwiastek $\sqrt{d}$ uważa się jako dodatni.

2. $d < 0$. Mamy 2 pierwiastki x_1, x_2 rzeczywiste od siebie odmienne dane wzorem

$$x_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \frac{\eta}{a}\sqrt{d}, \tag{6}$$

gdzie znów $\eta = \pm 1$, a pierwiastek jest dodatni.

3. $d = 0$. Mamy jeden pierwiastek rzeczywisty x_0

$$x_0 = -\frac{b}{a}. \tag{7}$$

Trójmian (1) w pierwszych dwóch przypadkach można przedstawić w postaci

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

a w trzecim przypadku w postaci

$$a(x - x_0)^2.$$

Pierwiastek x_0 nazywamy *podwójnym* pierwiastkiem równania (4).

2. Forma drugiego stopnia dwóch zmiennych. Równanie jednorodne drugiego stopnia o dwóch niewiadomych i jego znaczenie geometryczne.

Formą drugiego stopnia albo *formą kwadratową* o dwóch zmiennych x, y nazywamy jednorodną funkcję drugiego stopnia określoną wzorem

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2. \tag{8}$$

Spółczynniki A, B, C nazywają się *spółczynnikami formy.* Wyrażenie

$$\delta = AC - B^2 \tag{9}$$

nazywa się *wyróżnikiem (discriminante)* formy. Forma jest *zerowa*, jeżeli wszystkie spółczynniki są liczbami rzeczywistymi.

Uważajmy formę drugiego stopnia rzeczywistą niezerową. Mogą zachodzić 2 przypadki:

I. Spółczynniki A i C nie są równocześnie równe 0.

II. A i C równocześnie równają się 0.

I. Odróżniamy tu 3 przypadki, zależnie od wartości δ

$$1.\ \delta > 0, \qquad 2\ \delta < 0, \qquad 3.\ \delta = 0.$$

Formę możemy przedstawić przynajmniej w jednej z dwóch postaci następujących

$$\frac{1}{A}[(Ax + By)^2 + \delta y^2], \tag{10}$$

$$\frac{1}{C}[(Bx + Cy)^2 + \delta x^2]. \tag{11}$$

Wyrażenia w nawiasach rozkładamy na iloczyn dwóch form linjowych. Otrzymujemy dwie formy linjowe

$$Ax + (B + \sqrt{-\delta})y \quad \text{i} \quad Ax + (B - \sqrt{-\delta})y,$$

względnie dwie formy linjowe

$$(B + \sqrt{-\delta})x + Cy \quad \text{i} \quad (B - \sqrt{-\delta})x + Cy.$$

Przytem przez $\sqrt{-\delta}$ rozumiemy w przypadku $\delta > 0$ $i\sqrt{\delta}$, gdzie $\sqrt{\delta}$ jest dodatnie, a w przypadku $\delta < 0$ dodatni pierwiastek. W przypadku $\delta = 0$ mamy kwadrat formy

$$Ax + By,$$

względnie formy

$$Bx + Cy.$$

II. Forma jest teraz iloczynem dwóch form linjowych

$$x, \ y$$

przez $2B$.

Formę kwadratową możemy zatem zawsze przedstawić jako iloczyn dwóch form linjowych

$$a_1 x + b_1 y \quad \text{i} \quad a_2 x + b_2 y$$

przez czynnik k stały od zera odmienny. Formy te są zależne od siebie lub nie zależnie od tego czy δ jest równe zeru czy też nie. W istocie, mamy

$$k a_1 a_2 = A, \qquad k(a_1 b_2 + a_2 b_1) = 2B, \qquad k b_1 b_2 = C,$$

a więc mamy

$$\delta = k^2[a_1 a_2 b_1 b_2 - \tfrac{1}{4}(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2] = -\frac{k^2}{4}(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2.$$

A więc δ jest od zera odmienne lub też nie zależnie od tego czy $a_1 b_2 - a_2 b_1$ jest od zera odmienne lub też nie.

Przypuśćmy teraz, że mamy dwa rozkłady formy kwadratowej na iloczyn dwóch form linjowych

$$(a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y) \quad \text{i} \quad (a_1' x + b_1' y)(a_2' x + b_2' y). \tag{12}$$

Natenczas zachodzą następujące możliwości. Albo istnieją dwie liczby od zera odmienne k_1^1, k_2^1 takie, że mamy

$$\begin{aligned} a'_1 &= k_1^1 a_1, & b'_1 &= k_1^1 b_1, \\ a'_2 &= k_2^1 a_2, & b'_2 &= k_2^1 b_2. \end{aligned} \qquad (13$$

Albo też istnieją dwie liczby od zera odmiene k_1^2, k_2^2 takie, ż mamy

$$\begin{aligned} a'_1 &= k_1^2 a_2, & b'_1 &= k_1^2 b_2, \\ a'_2 &= k_2^2 a_1, & b'_2 &= k_2^2 b_1, \end{aligned} \qquad (14$$

który to przypadek można sprowadzić do poprzedniego przez przestawienie obu form linjowych jednego z dwóch iloczynów. Alb nareszcie zachodzą równocześnie oba poprzednie przypadki.

W istocie z równości

$$a_1 a_2 = a'_1 a'_2, \qquad a_1 b_2 + a_2 b_1 = a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1, \qquad b_1 b_2 = b'_1 b'_2$$

otrzymujemy

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 - 4 a_1 a_2 b_1 b_2 = (a'_1 b'_2 + a'_2 b'_1)^2 - 4 a'_1 a'_2 b'_1 b'_2,$$

a więc

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \varepsilon (a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Zatem otrzymujemy dla $\varepsilon = +1$

$$a_1 b_2 = a'_1 b'_2, \qquad a_2 b_1 = a'_2 b'_1,$$

a dla $\varepsilon = -1$

$$a_1 b_2 = a'_2 b'_1, \qquad a_2 b_1 = a'_1 b'_2.$$

W pierwszym przypadku jeżeli $a_1 = 0$ mamy $a'_1 = 0$ i naodwrót, albowiem a_2, b_2 i tak samo a'_2, b'_2 nie są oba równocześni równe 0.

Istnieje więc $k_1^1 \neq 0$ takie, że mamy

$$\begin{aligned} a'_1 &= k_1^1 a_1, & b'_1 &= k_1^1 b_1, \\ a'_2 &= \frac{1}{k_1^1} a_2, & b'_2 &= \frac{1}{k_1^1} b_2. \end{aligned}$$

To samo zachodzi jeżeli $b_1 = b'_1 = 0$, jeżeli $a_2 = a'_2 = 0$ i jeżel $b_2 = b'_2 = 0$. Możemy więc założyć, że wszystkie liczby a, b są od zera odmienne, a wówczas znów otrzymujemy związki (13).

W drugim przypadku dochodzimy podobnie do wzorów (14). Pomiędzy stałymi k wzorów (13) i (14) mamy związki

$$k_1^1 k_2^1 = 1, \qquad k_1^2 k_2^2 = 1.$$

Jeżeli mamy $\delta = 0$ natenczas mamy

$$a_2 = k a_1, \qquad b_2 = k b_1,$$

$k \neq 0$, więc zachodzą równocześnie związki (13) i (14) i mamy

$$k k_1^2 = k_1^1, \qquad k k_2^1 = k_2^2.$$

Naodwrót, jeżeli zachodzą związki (13) i (14) równocześnie mamy

$$a_2 = \frac{k_1^1}{k_1^2} a_1, \qquad b_2 = \frac{k_1^1}{k_1^2} b_1,$$

więc mamy $\delta = 0$.

Przedstawimy teraz formę kwadratową $\varphi(x, y)$ w takiej postaci, w której czynnik k, który figuruje w rozkładzie tej formy na dwa czynniki linjowe ma wartość $\varepsilon = \pm 1$.

Uważajmy nasamprzód przypadek I. Załóżmy $\delta \neq 0$ i $A \neq 0$. Możemy formę napisać wówczas w postaci

$$\varepsilon \frac{Ax + (B + \sqrt{-\delta})y}{\sqrt{\varepsilon A}} \, \frac{Ax + (B - \sqrt{-\delta})y}{\sqrt{\varepsilon A}} \tag{15}$$

Przytem $\varepsilon = +1$ jeżeli $A > 0$, zaś $\varepsilon = -1$, jeżeli $A < 0$, a pierwiastek $\sqrt{\varepsilon A}$ jest *dodatni*.

Forma $\varphi(x, y)$ przybiera postać

$$\varepsilon (a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y) \tag{16}$$

gdzie mamy

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon A}, \quad b_1 = \frac{B + \sqrt{-\delta}}{\sqrt{\varepsilon A}}, \\ a_2 &= \varepsilon \sqrt{\varepsilon A}, \quad b_2 = \frac{B - \sqrt{-\delta}}{\sqrt{\varepsilon A}}. \end{aligned} \tag{17}$$

A więc zachodzi równość

$$a_1 = a_2.$$

W przypadku $\delta \neq 0$, $C \neq 0$ wprowadzamy analogicznie oznaczenia

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{B + \sqrt{-\delta}}{\sqrt{\varepsilon C}}, \quad b_1 = \varepsilon \sqrt{\varepsilon C}, \\ a_2 &= \frac{B - \sqrt{-\delta}}{\sqrt{\varepsilon C}}, \quad b_2 = \varepsilon \sqrt{\varepsilon C}, \end{aligned} \tag{19}$$

przyczem $\varepsilon = +1$, jeżeli $C > 0$; $\varepsilon = -1$, jeżeli $C < 0$, a pierwiastek $\sqrt{\varepsilon C}$ jest *dodatni*. Teraz forma $\varphi(x, y)$ przybierze znów postać (16), przyczem mamy

$$b_1 = b_2. \tag{20}$$

W przypadku $\delta = 0$ wprowadzamy w przypadku $A \neq 0$ oznaczenia

$$a = \varepsilon \sqrt{\varepsilon A}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon A}}, \tag{21}$$

przyczem $\sqrt{\varepsilon A}$ jest *dodatni* pierwiastek, zaś oznaczenia

$$a = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon C}}, \quad b = \varepsilon \sqrt{\varepsilon C} \tag{22}$$

w przypadku $C \neq 0$, przyczem $\sqrt{\varepsilon C}$ jest *dodatni* pierwiastek. Forma $\varphi(x, y)$ przybiera postać

$$\varepsilon(ax + by)^2. \tag{23}$$

Nareszcie w przypadku II. wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2\varepsilon B}, \quad b_1 = 0, \\ a_2 &= 0, \quad b_2 = \sqrt{2\varepsilon B}, \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie $\sqrt{\varepsilon B}$ jest *dodatni* pierwiastek i formę piszemy w postaci

$$\varepsilon a_1 x . b_2 y, \tag{25}$$

przyczem mamy

$$a_1 = b_2. \tag{26}$$

Wszystkie układy liczb ξ, η, które wstawione w formę (8) zamiast x, y formę tę obracają w zero spełniają *równanie jednorodne drugiego stopnia w dwóch niewiadomych*

$$\varphi(xy) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \tag{27}$$

i nazywają się *układami pierwiastków* tego równania.

Zbiór układów pierwiastków równania drugiego stopnia (27) jest w przypadku I. $\delta \neq 0$ identyczny ze zbiorem jaki się otrzymuje łącząc w jeden zbiór zbiory układów pierwiastków dwóch równań

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= 0, \\ a_2 x + b_2 y &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

W przypadku I $\delta = 0$ zbiór układów pierwiastków równania (27) jest identyczny ze zbiorem układów pierwiastków równania

$$ax + by = 0. \tag{29}$$

Także w przypadku II. otrzymamy zbiór pierwiastków równania (27) kojarząc w jeden zbiór zbiory pierwiastków równań

$$\begin{aligned} a_1 x &= 0, \\ b_2 y &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Mówimy, że w przypadku I. $\delta \neq 0$ i w przypadku II. (27) jest *równaniem dwóch prostych od siebie odmiennych* l_1, l_2 o równaniach (28) względnie (30), a w przypadku I. $\delta = 0$ równanie (27) jest *równaniem prostej podwójnej* l o równaniu (29).

Proste przedstawione przez równanie (27) przechodzą przez początek $x = y = 0$ układu spółrzędnych. W przypadku I. $\delta < 0$ i I. $\delta = 0$, tudzież w przypadku II., w którym to przypadku $\delta < 0$ proste te są *rzeczywiste*. W przypadku I. $\delta > 0$ proste l_1, l_2 są *urojone ze sobą sprzężone*, a ponieważ mają wspólny punkt $x = y = 0$ rzeczywisty, więc należą do I. kategorji prostych urojonych. Widoczna też, że wyznaczniki γ równań tych prostych są od zera odmienne albowiem w przypadku wzorów (17) mamy

$$a_1' = \varepsilon \sqrt{\varepsilon A}, \quad a_1'' = 0,$$

$$b_1' = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon A}}, \quad b_1'' = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\varepsilon A}},$$

więc

$$\gamma = a_1' b_1'' - a_1'' b_1' = \varepsilon \sqrt{\delta}$$

dla prostej l_1, i $\gamma = -\varepsilon \sqrt{\delta}$ dla prostej l_2. W przypadku wzorów (19) mamy naodwrót $\gamma = -\varepsilon \sqrt{\delta}$ dla prostej l_2 i $\gamma = \varepsilon \sqrt{\delta}$ dla prostej l_1.

3. Spółczynniki kierunkowe prostych przedstawionych równaniem drugiego stopnia (27).

Na spółczynniki kierunkowe kierunków prostych przedstawionych równaniem (27) otrzymujemy w przypadku $\delta \neq 0$ wzory

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon_1 \frac{b_1}{r_1}, \quad \mu_1 = \varepsilon_1 \frac{a_1}{r_1}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon_2 \frac{b_2}{r_2}, \quad \mu_2 = \varepsilon_2 \frac{a_2}{r_2}, \end{aligned} \tag{31}$$

przyczem $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, zaś r_1, r_2 mają wartości

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 - 2 a_1 b_1 \cos \theta + b_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 - 2 a_2 b_2 \cos \theta + b_2^2},$$

a na pierwiastki należy obrać pewne zupełnie oznaczone wartości. W przypadku $\delta < 0$ wszystkie spółczynniki kierunkowe są rzeczywiste, a na r_1 i r_2 obieramy wartości dodatnie. W przypadku $\delta > 0$ kierunki obu prostych są urojone ze sobą sprzężone, i przynajmniej jeden ze spółczynników kierunkowych λ_1, μ_1 i tak samo przynajmniej jeden ze spółczynników kierunkowych λ_2, μ_2 są liczbami urojonymi. Liczby r_1^2 i r_2^2 są urojone ze sobą sprzężone, lub rzeczywiste. Mamy

$$\begin{gathered}
r_1^2 r_2^2 = (a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos\theta)(a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 \cos\theta) = \\
= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - \\
- 2a_1 a_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos\theta - 2b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos\theta + \\
+ 4a_1 a_2 b_1 b_2 \cos^2\theta = \\
= A^2 + C^2 + 4B^2 - 2AC - 4AB\cos\theta - 4BC\cos\theta + \\
+ 4AC\cos^2\theta = [2B - (A+C)\cos\theta]^2 + (A-C)^2 \sin^2\theta.
\end{gathered}$$

Otrzymujemy zatem wzór

$$r_1^2 r_2^2 = [2B - (A+C)\cos\theta]^2 + (A-C)^2 \sin^2\theta. \tag{32}$$

Z prawej strony figuruje wyrażenie, które jest sumą dwóch kwadratów funkcyj linjowych jednorodnych spółczynników A, B, C formy (8). Oznaczmy te funkcje przez Ω_1, Ω_2.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2B - (A+C)\cos\theta, \\
\Omega_2 &= (A-C)\sin\theta,
\end{aligned} \tag{33}$$

a sumę kwadratów przez Ω^2

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2. \tag{34}$$

Ω^2 jest nieujemne i tylko wtedy równe zeru, gdy mamy równości

$$A = C, \qquad B = A\cos\theta = C\cos\theta. \tag{35}$$

A więc r_1 i r_2 obracają się równocześnie w zero wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą równości (35). W tym przypadku mamy

$$\begin{gathered}
\delta = A^2 \sin^2\theta = C^2 \sin^2\theta, \\
\sqrt{\delta} = \eta A \sin\theta = \eta C \sin\theta,
\end{gathered}$$

gdzie $\eta = +1$, jeżeli $A\sin\theta = C\sin\theta > 0$, a $\eta = -1$, jeżeli $A\sin\theta = C\sin\theta < 0$ Mamy więc

$$a_1 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon A}, \quad b_1 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon A}(\cos\theta + \eta i \sin\theta),$$
$$a_2 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon A}, \quad b_2 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon A}(\cos\theta - \eta i \sin\theta),$$

i tak samo

$$a_1 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon C}(\cos\theta + \eta i \sin\theta), \quad b_1 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon C},$$
$$a_2 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon C}(\cos\theta - \eta i \sin\theta), \quad b_2 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon C},$$

Równanie (27) przedstawia więc dwie proste minimalne przechodzące przez początek układu i możemy je napisać w postaci

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 = 0. \tag{36}$$

W przypadku $\delta = 0$ mamy kierunek rzeczywisty

$$\lambda = -\varepsilon\frac{b}{r}, \quad \mu = \varepsilon\frac{a}{r}, \tag{37}$$

gdzie

$$r = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2},$$

i pierwiastek należy obrać dodatni.

4. Kąty zawarte między dwiema prostemi przedstawionemi równaniem (27).

Wstawa i dostawa kąta φ, jaki dodatni kierunek na prostej l_2 zawiera z dodatnim kierunkiem na prostej l_1 wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\sin\theta, \\ \cos\varphi &= \lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2 \end{aligned} \tag{38}$$

Mamy więc

$$\sin\varphi = -\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{r_1r_2}\sin\theta,$$
$$\cos\varphi = \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{a_1a_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta + b_1b_2}{r_1r_2}.$$

Ale

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 2\varepsilon\eta\sqrt{-\delta},$$

gdzie $\eta = +1$ w przypadku wzorów (19) a $\eta = -1$ w przypadku wzorów (17).

Dalej mamy

$$a_1a_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)\cos\theta + b_1b_2 = \varepsilon(A + C - 2B\cos\theta).$$

Otrzymujemy zatem wzory

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= 2\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\eta\frac{\sqrt{-\delta}}{\Omega}\sin\theta, \\ \cos\varphi &= \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{A+C-2B\cos\theta}{\Omega}. \end{aligned} \tag{39}$$

We wzorach tych Ω jest dodatnim pierwiastkiem z Ω^2, a więc w przypadku $\delta > 0$ obieramy na r_1 i r_2 wartości urojone ze sobą sprzężone.

Ze wzorów (39) wynika wzór

$$\Omega^2 = (A + C - 2B\cos\theta)^2 - 4\delta\sin^2\theta,$$

który można sprawdzić bezpośrednio. Wprowadzając oznaczenie

$$\omega = A + C - 2B\cos\theta \tag{40}$$

mamy więc

$$\Omega^2 = \omega^2 - 4\delta\sin^2\theta. \tag{41}$$

Proste *zlewają się*, jeżeli mamy $\delta = 0$, a są do siebie *prostopadłe* jeżeli

$$\omega = A + C - 2B\cos\theta = 0. \tag{42}$$

Wielkości δ i ω nie mogą się równocześnie równać 0, albowiem wówczas mielibyśmy

$$A = C, \qquad B = A\cos\theta = C\cos\theta,$$

więc

$$A = B = C = 0.$$

Ze wzorów (39) otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\eta\sqrt{-\delta}\sin\theta}{A + C - 2B\cos\theta}.$$

Jeżeli $\delta \geqq 0$, natenczas mamy

$$(A + C)^2 = (A - C)^2 + 4AC \geqq 4B^2 > 4B^2\cos^2\theta,$$

a więc $A + C - 2B\cos\theta$ i $A + C + 2B\cos\theta$ mają ten sam znak, który jest znakiem $A + C$. Jeżeli więc A i C są oba od zera odmienne, natenczas ω ma znak A i C, jeżeli zaś jedna tylko z tych wielkości jest od zera odmienna, natenczas ω ma znak tej wielkości. ω może się tylko dla $\delta < 0$ równać zeru.

5. Dwusieczne dwóch prostych przedstawionych równaniem (27).

Równania dwusiecznych dwóch prostych l_1, l_2 przedstawionych równaniem (27) są jak wiemy

$$\frac{a_1 x + b_1 y}{r_1} - \eta \frac{a_2 x + b_2 y}{r_2} = 0, \tag{43}$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Mnożąc te równania przez siebie otrzymujemy

$$\begin{gathered}(a_1 x + b_1 y)^2 (a_2^2 + b_2^2 - 2 a_2 b_2 \cos\theta) - \\ - (a_2 x + b_2 y)^2 (a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \cos\theta) = 0.\end{gathered}$$

Ale mamy

$$\begin{gathered}a_1^2 (a_2^2 + b_2^2 - 2 a_2 b_2 \cos\theta) - a_2^2 (a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \cos\theta) = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2 a_1 a_2 \cos\theta) = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \,.\, 2\varepsilon (B - A \cos\theta), \\ b_1^2 (a_2^2 + b_2^2 - 2 a_2 b_2 \cos\theta) - b_2^2 (a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \cos\theta) = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(2 b_1 b_2 \cos\theta - a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1) 2\varepsilon (C \cos\theta - B), \\ a_1 b_1 (a_2^2 + b_2^2 - 2 a_2 b_2 \cos\theta) - a_2 b_2 (a_1^2 + b_1^2 - 2 a_1 b_1 \cos\theta) = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 b_2 - a_1 a_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \varepsilon (C - A).\end{gathered}$$

Otrzymujemy zatem w przypadku $\delta \neq 0$ równanie dwusiecznych prostych (27) w postaci

$$\varphi'(x, y) \equiv A' x^2 + 2 B' x y + C' y^2 = 0, \tag{44}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A' &= A \cos\theta - B, \\ 2B' &= A - C, \\ C' &= B - C \cos\theta. \end{aligned} \tag{45}$$

Wyróżnik δ' formy $\varphi'(x, y)$ ma postać

$$\begin{gathered}\delta' = (A \cos\theta - B)(B - C \cos\theta) - \frac{(A - C)^2}{4} = \\ = - B^2 - A C \cos^2\theta + A B \cos\theta + B C \cos\theta - \frac{(A - C)^2}{4} = \\ = - \tfrac{1}{4} [2B - (A + C) \cos\theta]^2 - \tfrac{1}{4} (A - C)^2 \sin^2\theta.\end{gathered}$$

Mamy więc wzór

$$\delta' = - \tfrac{1}{4} \Omega^2. \tag{46}$$

Mamy zatem $\delta' \leqq 0$, i δ' równa się 0 tylko w przypadku dwóch prostych minimalnych, ale wówczas ze wzorów (45) wynika, że równanie prostych dwusiecznych jest identycznie równe 0.

W przypadku $\delta = 0$ dwusiecznymi dwóch prostych zlewających się ze sobą są prosta podwójna i prosta do niej prostopadła. Kładąc

$$A = \varepsilon a^2, \qquad B = \varepsilon ab, \qquad C = \varepsilon b^2$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} A' &= \varepsilon a(a\cos\theta - b), \\ 2B' &= \varepsilon(a^2 - b^2), \\ C' &= \varepsilon b(a - b\cos\theta) \end{aligned}$$

a więc równanie

$$\varepsilon(ax + by)[(a\cos\theta - b)x + (a - b\cos\theta)y] = 0 \tag{47}$$

przedstawiające prostą daną i prostą do niej prostopadłą.

Wyrażenie

$$\omega' = A' + C' - 2B'\cos\theta$$

równa się widocznie zeru.

6. Pęki form drugiego stopnia. Pęki par prostych.

Uważajmy dwie formy drugiego stopnia niezerowe o dwóch zmiennych x, y

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2, \\ \varphi_2(x, y) &= A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 \end{aligned} \tag{48}$$

i należące do nich dwa równania par prostych

$$\varphi_1(x, y) = 0, \qquad \varphi_2(x, y) = 0. \tag{49}$$

Pękiem form drugiego stopnia należącym do form (48) nazywamy zbiór form kształtu

$$\varphi(x, y) = \lambda_1\varphi_1(x, y) + \lambda_2\varphi_2(x, y), \tag{50}$$

gdzie λ_1, λ_2 są dwie rzeczywiste dowolne liczby nie obie równe 0, *parametry* pęku. *Pękiem par prostych* należącym do dwóch par prostych (49) nazywamy zbior par prostych przedstawionych równaniem

$$\varphi(x, y) \equiv \lambda_1\varphi_1(x, y) + \lambda_2\varphi_2(x, y) = 0. \tag{51}$$

Forma $\varphi(x, y)$ jest zerową, jeżeli mamy równości

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \qquad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0, \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

a więc

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0, \qquad B_1 C_2 - B_2 C_1 = 0, \qquad C_1 A_2 - C_2 A_1 = 0.$$

Istnieje wówczas liczba $k \neq 0$ taka, że zachodzą równości

$$A_2 = k A_1, \qquad B_2 = k B_1, \qquad C_2 = k C_1,$$

czyli spółczynniki form (48) są do siebie proporcjonalne. Naodwrót, jeżeli spółczynniki form (48) są do siebie proporcjonalne, istnieje w pęku (50) forma zerowa.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa równania (49) przedstawiały tę samą parę prostych jest proporcjonalność odpowiednich spółczynników obu form (48). Warunek jest oczywiście wystarczający. Jest on też konieczny, bo jeżeli oba równania (49) przedstawiają tę samą prostą podwójną o równaniu

$$ax + by = 0,$$

natenczas mamy

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 a^2, & B_1 &= k_1 ab, & C_1 &= k_1 b^2, \\ A_2 &= k_2 a^2, & B_2 &= k_2 ab, & C_2 &= k_2 b^2, \end{aligned}$$

a więc spółczynniki odpowiednie są proporcjonalne. Jeżeli zaś oba równania przedstawiają te same dwie proste od siebie odmienne l_1, l_2 o równaniach

$$a_1 x + b_1 y = 0, \qquad a_2 x + b_2 y = 0$$

mamy kładąc

$$\varphi_1(x, y) \equiv \varepsilon_1 (a_1^1 x + b_1^1 y)(a_2^1 x + b_2^1 y)$$
$$\varphi_2(x, y) \equiv \varepsilon_2 (a_1^2 x + b_1^2 y)(a_2^2 x + b_2^2 y)$$
$$\begin{aligned} a_1^1 &= k_1^1 a_1, & b_1^1 &= k_1^1 b_1, & a_2^1 &= k_2^1 a, & b_2^1 &= k_2^1 b_2, \\ a_1^2 &= k_1^2 a_1, & b_1^2 &= k_1^2 b_1, & a_2^2 &= k_2^2 a_2, & b_2^2 &= k_2^2 b_2, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 a_1 a_2, & 2B_1 &= k_1 (a_1 b_2 + a_2 b_1), & C_1 &= k_1 b_1 b_2 \\ A_2 &= k_2 a_1 a_2, & 2B_2 &= k_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1), & C_2 &= k_2 b_1 b_2, \end{aligned}$$

a więc spółczynniki odpowiednie są znów do siebie proporcjonalne.

Oznaczając przez δ wyróżnik formy (50) mamy

$$\delta = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)^2,$$

a wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} \delta_1 &= A_1 C_1 - B_1^2, \\ \delta_2 &= A_2 C_2 - B_2^2, \\ \delta_{1,2} &= A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2 B_1 B_2 \end{aligned} \tag{52}$$

mamy

$$\delta = \lambda_1^2 \delta_1 + \lambda_1 \lambda_2 \delta_{12} + \lambda_2^2 \delta_2 . \tag{53}$$

δ jest więc formą kwadratową o zmiennych λ_1, λ_2. Oznaczając przez ω wyrażenie (40) obliczone dla formy (50) i wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} \omega_1 &= A_1 + C_1 - 2 B_1 \cos\theta, \\ \omega_2 &= A_2 + C_2 - 2 B_2 \cos\theta \end{aligned} \tag{54}$$

mamy

$$\omega = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 . \tag{55}$$

Jeżeli wszystkie spółczynniki formy (53) równają się zeru, mamy

$$A_1 C_1 = B_1^2, \qquad A_2 C_2 = B_2^2,$$
$$A_1 C_2 + A_2 C_1 = 2 B_1 B_2,$$

a więc

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 = 0,$$

więc

$$A_1 C_2 = A_2 C_1 = B_1 B_2 .$$

Ponieważ przynajmniej jedna z dwóch liczb A_1, C_1 i przynajmniej jedna z dwóch liczb A_2, C_2 jest od zera odmienna, więc zakładając $C_1 \neq 0$, co pociąga za sobą $C_2 \neq 0$, mamy kładąc

$$k = \frac{C_2}{C_1}$$

równości

$$A_2 = k A_1,$$
$$C_2 = k C_1 .$$

Stąd wynika

$$B_1 B_2 = k B_1^2,$$

a więc

$$B_2 = k B_1 .$$

Zatem odpowiednie spółczynniki form φ_1 i φ_2 są do siebie proporcjonalne i każda para prostych pęku par prostych składa się z tych samych dwóch prostych zlewających się ze sobą. Naodwrót, jeżeli spółczynniki tych form są proporcjonalne do siebie, i jeżeli $\delta_1 = 0$, natenczas δ jest identycznie równe 0.

Uważajmy wyróżnik

$$d = \delta_1 \delta_2 - \tfrac{1}{4} \delta_{12}^2 \tag{56}$$

formy (53). Jeżeli wyróżnik ten jest dodatni niema w pęku formy o spółczynnikach rzeczywistych będącej pełnym kwadratem, a więc niema pary prostych rzeczywistych zlewających się ze sobą. Jeżeli wyróżnik jest ujemny, mamy 2 pary prostych zlewających się ze sobą. Nareszcie w przypadku $d = 0$ mamy jednę taką parę prostych.

Mamy

$$
\begin{gathered}
d = (A_1 C_1 - B_1^2)(A_2 C_2 - B_2^2) - \tfrac{1}{4}(A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2 B_1 B_2)^2 = \\
= -\tfrac{1}{4}(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2 - A_2 C_2 B_1^2 - A_1 C_1 B_2^2 + \\
+ (A_1 C_2 + A_2 C_1) B_1 B_2 = (A_1 B_2 - A_2 B_1)(B_1 C_2 - B_2 C_1) - \\
- \tfrac{1}{4}(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2.
\end{gathered}
$$

Mamy więc

$$d = (A_1 B_2 - A_2 B_1)(B_1 C_2 - B_2 C_1) - \tfrac{1}{4}(A_1 C_2 - A_2 C_1)^2. \qquad (57)$$

Jeżeli to wyrażenie znika, natenczas jeżeli nie wszystkie 3 spółczynniki formy (53) są równe 0, tj. jeżeli oba równania (49) nie przedstawiają tej samej pary prostych zlewających się, natenczas w pęku istnieje jedna jedyna para prostych zlewających się. Naodwrót jeżeli w pęku istnieje jedna jedyna para prostych zlewających się, zachodzi warunek

$$d = 0. \qquad (58)$$

Łatwo okazać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby d równało się 0 jest aby przynajmniej jedna z dwóch prostych l_1^1, l_2^1 przedstawionych przez pierwsze z równań (49) zlewała się z przynajmniej jedną z dwóch prostych l_1^2, l_2^2 przedstawionych przez drugie z równań (49). W istocie, jeżeli $A_1 = A_2 = 0$, zachodzi warunek (58). Dalej jeżeli mamy $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$ i równania

$$
\begin{gathered}
A_1 x + (B_1 + \eta \sqrt{-\varepsilon_1}) y = 0, \\
2 B_2 x + C_2 y = 0,
\end{gathered} \qquad (59)
$$

przedstawiają tę samą prostą, mamy

$$A_1 C_2 - 2 B_1 B_2 = 2 B_2 \eta \sqrt{-\varepsilon_1},$$

więc

$$4 B_2^2 (B_1^2 - A_1 C_1) = (A_1 C_2 - 2 B_1 B_2)^2,$$

lub

$$-4 A_1 C_1 B_2^2 - A_1^2 C_2^2 + 4 A_1 B_1 B_2 C_2 = 0,$$

więc

$$4 A_1 B_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_1^2 C_2^2 = 0,$$

co jest właśnie warunkiem (58). Nareszcie jeżeli $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, i równania

$$\begin{aligned} A_1 x + (B_1 + \eta_1 \sqrt{-\delta_1})y = 0, \\ A_2 x + (B_2 + \eta_2 \sqrt{-\delta_2})y = 0, \end{aligned} \tag{60}$$

przedstawiają tę samą prostą, mamy

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = -(A_1 \eta_2 \sqrt{-\delta_2} - A_2 \eta_1 \sqrt{-\delta_1}),$$

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = A_1^2(B_2^2 - A_2 C_2) + A_2^2(B_1^2 - A_1 C_1) + \\ + 2 A_1 A_2 \eta_1 \eta_2 \sqrt{\delta_1 \delta_2},$$

$$A_1 A_2 [A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2 B_1 B_2] = 2 A_1 A_2 \eta_1 \eta_2 \sqrt{\delta_1 \delta_2},$$

więc mamy

$$\delta_{12}^2 - 4\delta_1 \delta_2 = 0,$$

czyli znów warunek (58). Naodwrót, niechaj ten warunek będzie spełniony. Możemy założyć, że nie obie wielkości A_1, A_2 równocześnie są równe 0. Zarówno w przypadku $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, jak i w przypadku $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$ dochodzimy do rezultatu, że równania (60) względnie równania (59) dla *pewnych* wartości na η, η_1, η_2 przedstawiają tę samą prostą.

Wyrażenie ω równa się zeru dla jednej i tylko dla jednej pary prostych pęku z wyjątkiem przypadku gdy $\omega_1 = \omega_2 = 0$. A więc w pęku mamy jednę i tylko jednę parę prostych prostopadłych do siebie, z wyjątkiem przypadku gdy obie pary dane składają się z prostych do siebie prostopadłych, a wówczas *każda* para pęku składa się z prostych do siebie prostopadłych.

Ćwiczenia.

1. Dane dwie pary prostych

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \tag{1}$$

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0. \tag{2}$$

Napisać wyrażenie na stosunek podwójnego podziału prostych pierwszej pary i prostych drugiej pary. Jaki jest warunek, aby te dwie pary prostych były harmonicznie sprzężone ze sobą?

2. Znaleźć równanie pary prostych prostopadłych odpowiednio do prostych pary (1).

3. Znaleźć warunki konieczne i wystarczające, aby para dwusiecznych pary dwusiecznych dwóch prostych danych schodziła się z daną parą prostych.

4. Okazać, że stosunek podwójnego podziału dwóch prostych (1) do siebie prostopadłych i dwóch prostych minimalnych

$$x^2 + 2xy \cos \theta + y^2 = 0 \tag{3}$$

jest harmonicznym.

5. Znaleźć równanie dwóch prostych otrzymanych przez obrót pary prostych danych równaniem (1) o kąt φ dokoła początku układu spółrzędnych.

6. Zbadać proste przedstawione równaniem

$$6x^2 + 8xy + 2y^2 = 0 \tag{4}$$

i napisać równanie dwusiecznych.

7. Kiedy pary prostych (1) i (2) zawierają te same kąty?

ROZDZIAŁ IX.

Ogólna funkcja drugiego stopnia o dwóch zmiennych. Ogólne równanie drugiego stopnia o dwóch niewiadomych i jego znaczenie geometryczne.

1. Ogólna funkcja drugiego stopnia o dwóch zmiennych i ogólne równanie drugiego stopnia o dwóch niewiadomych.

Ogólną funkcją drugiego stopnia o dwóch zmiennych x, y nazywamy funkcję

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \tag{1}$$

gdzie A, $B, \ldots F$ są to zupełnie dowolne liczby, *spółczynniki* funkcji. Jeżeli są one wszystkie rzeczywiste funkcja nazywa się *rzeczywistą*, jeżeli wszystkie są równe zeru *zerową*, w przeciwnym razie *niezerową*. Będziemy stale uważali funkcje rzeczywiste i niezerowe. Zmienne x, y będą mogły przyjmować dowolne wartości zespolone.

Każdy układ wartości $x = \xi$, $y = \eta$ obracający w zero funkcję (1) nazywa się układem pierwiastków *równania drugiego stopnia*

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{2}$$

Układ taki przedstawiamy przez punkt P, którego spółrzędnymi są liczby tego układu. Mówimy, że równanie drugiego stopnia (2) przedstawia *krzywą drugiego stopnia*, której punktami są punkty P, a o punktach P mówimy, że *leżą* na krzywej drugiego stopnia (2).

Punkty P mogą być rzeczywiste albo urojone. W szczególnym przypadku gdy mamy $A = B = C = 0$, zbiór punktów P leżących na krzywej drugiego stopnia (2) jest identyczny ze zbiorem punktów spełniających równanie pierwszego stopnia

$$2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{3}$$

W dalszym ciągu rozważań będziemy zakładali, że ten przypadek nie zachodzi, a więc przynajmniej jedna z liczb A, B, C jest od zera odmienna.

2. Wyznacznik funkcji drugiego stopnia.

Równocześnie z funkcją (1) będziemy uważali trzy następujące funkcje linjowe zmiennych x, y

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= Ax + By + D, \\ \beta(x, y) &= Bx + Cy + E, \\ \gamma(x, y) &= Dx + Ey + F. \end{aligned} \tag{3}$$

Mamy

$$f(x, y) = \alpha(x, y)x + \beta(x, y)y + \gamma(x, y) \tag{4}$$

Wyznacznikiem funkcji (1) nazywa się wyznacznik trzeciego stopnia trzech funkcyj (3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Jestto wyznacznik *symetryczny* t. zn. element położony w i-tym wierszu i w k-tej kolumnie wyznacznika równa się elementowi położonemu w k-tym wierszu i w i-tej kolumnie wyznacznika.

Wyznacznik W minorów drugiego stopnia wyznacznika Δ jest również wyznacznikiem symetrycznym. Oznaczymy przez δ, δ', δ'' minory główne wyznacznika Δ należące odpowiednio do elementów F, A, C, zaś przez $\varkappa$, $\varkappa''$, $\varkappa'$ minory poboczne należące odpowiednio do elementów B, D, E. Mamy więc

$$W = \begin{vmatrix} \delta' & \varkappa & \varkappa'' \\ \varkappa & \delta'' & \varkappa' \\ \varkappa'' & \varkappa' & \delta \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Pomiędzy wyznacznikiem Δ, jego elementami i jego minorami drugiego stopnia zachodzą pewne ważne związki. Przedewszystkiem mamy

$$\Delta = A\delta' + B\varkappa + D\varkappa'' = B\varkappa + C\delta'' + E\varkappa' = D\varkappa'' + E\varkappa' + F\delta. \tag{7}$$

Następnie sumy iloczynów elementów dowolnego wiersza wyznacznika Δ przez minory należące do innego dowolnego wiersza równają się zeru. Otrzymujemy 6 dalszych równości, których tu nie wypisujemy.

Uważajmy dalej minory 2-go stopnia wyznacznika W. Minor należący do elementu figurującego w i-tym wierszu i w k-tej kolumnie równa się według znanego twierdzenia z teorji wyznaczników iloczynowi wyznacznika Δ przez ten element tego wyznacznika który figuruje w *i*-tym wierszu i w *k*-tej kolumnie. Mamy więc związki

$$\begin{aligned} &A\Delta = \delta''\delta - \varkappa'^2, \quad C\Delta = \delta\delta' - \varkappa''^2, \quad F\Delta = \delta'\delta'' - \varkappa^2, \\ &B\Delta = \varkappa'\varkappa'' - \delta\varkappa, \quad D\Delta = \varkappa\varkappa' - \delta''\varkappa'', \quad E\Delta = \varkappa''\varkappa - \delta'\varkappa'. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Rozkładanie funkcji drugiego stopnia na iloczyn dwóch funkcyj pierwszego stopnia. Równanie dwóch prostych.

Iloczyn dwóch funkcyj linjowych zmiennych x, y jest funkcją drugiego stopnia tych zmiennych. Spytajmy się, jakie są warunki konieczne i wystarczające, aby funkcja (1) dała się rozłożyć na iloczyn dwóch funkcyj linjowych

$$\begin{aligned} l_1(x, y) &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1, \\ l_2(x, y) &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned} \tag{9}$$

w postaci

$$f(x, y) = k(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2). \tag{10}$$

Muszą zachodzić następujące równości

$$\begin{aligned} &A = k a_1 a_2, \quad 2B = k(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad C = k b_1 b_2, \\ &2D = k(a_1 c_2 + a_2 c_1), \quad 2E = k(b_1 c_2 + b_2 c_1), \quad F = k c_1 c_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Chodzi więc o wyznaczenie wszystkich układów 7 niewiadomych k; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 spełniających 6 równań (11).

Uważajmy trzy pierwsze równania (11). Wiemy, że istnieją liczby k; a_1, b_1; a_2, b_2 spełniające te równania i czyniące zadosyć warunkom $k \neq 0$, a_1 albo $b_1 \neq 0$, a_2 albo $b_2 \neq 0$. Nadto w przypadku $A \neq 0$ możemy przyjąć

$$k = \varepsilon, \qquad a_1 = a_2 \neq 0,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ zależnie od znaku A, w przypadku $C \neq 0$ możemy przyjąć

$$k = \varepsilon, \qquad b_1 = b_2 \neq 0,$$

gdzie znów $\varepsilon = \pm 1$ zależnie od znaku C, nareszcie w przypadku $A = C = 0$, $B \neq 0$, możemy przyjąć

$$k = \varepsilon, \qquad a_1 = b_2 \neq 0,$$

gdzie znów $\varepsilon = \pm 1$, zależnie od znaku B. Wiemy dalej, z rozważań poprzedniego Rozdziału, że jeżeli

$$k(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) \tag{12}$$

i

$$k'(a'_1x + b'_1y)(a'_2x + b'_2y) \tag{13}$$

są dwa różne od siebie rozkłady formy

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

na iloczyn dwóch form linjowych, natenczas albo istnieją dwie liczby $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ takie, że mamy równości

$$\begin{aligned} k_1a_1 &= a'_1, & k_1b_1 &= b'_1, \\ k_2a_2 &= a'_2, & k_2b_2 &= b'_2, \end{aligned} \tag{14}$$

albo też istnieją dwie liczby $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ takie, że mamy równości

$$\begin{aligned} k_1a_1 &= a'_2, & k_1b_1 &= b'_2, \\ k_2a_2 &= a'_1, & k_2b_2 &= b'_1, \end{aligned} \tag{15}$$

albo nareszcie są spełnione zarówno równości (14) jak równości (15).

Obrawszy pewien układ wartości na niewiadome, spełniający pierwsze trzy równania (11) zwróćmy się do ostatnich trzech równań. W równaniach tych figurują niewiadome c_1 i c_2. Odróżnimy dwa przypadki

$$\text{I.} \quad \delta \neq 0. \qquad \text{II.} \quad \delta = 0.$$

W przypadku I. rozwiązujemy równania

$$\begin{aligned} k(a_1c_2 + a_2c_1) &= 2D, \\ k(b_1c_2 + b_2c_1) &= 2E \end{aligned} \tag{16}$$

względem c_1 i c_2 i otrzymujemy

$$c_1 = \frac{2(Db_1 - Ea_1)}{k(a_2b_1 - a_1b_2)}, \quad c_2 = \frac{2(Db_2 - Ea_2)}{k(a_1b_2 - a_2b_1)}, \tag{17}$$

a wstawiając te wartości w ostatnie równanie (11)

$$kc_1c_2 = F \tag{18}$$

otrzymujemy

$$4(Db_1 - Ea_1)(Db_2 - Ea_2) = -kF(a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Ale mamy

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1b_2 + a_2b_1)^2 - 4a_1a_2b_1b_2,$$

a więc otrzymujemy warunek

$$CD^2 + AE^2 - 2BDE = F(AC - B^2),$$

tj. warunek

$$\Delta = 0 \tag{19}$$

jako warunek *konieczny* istnienia liczb c_1 i c_2. Warunek ten oczywiście nie zależy od obranego układu rozwiązań pierwszych trzech równań (11).

Warunek (19) jest *wystarczający*, albowiem wyrażenia (17) spełniające równania (16) spełniają i równanie (18), jeżeli ten warunek jest spełniony.

W przypadku II. przyjmijmy

$$a_1 = a_2 = a, \qquad b_1 = b_2 = b.$$

Na wyznaczenie c_1 i c_2 mamy równania

$$\left.\begin{aligned} ka(c_1 + c_2) &= 2D, \\ kb(c_1 + c_2) &= 2E, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

i

$$kc_1 c_2 = F. \tag{18}$$

Stąd otrzymujemy warunek *konieczny* rozwiązalności równań (29)

$$Db - Ea = 0. \tag{21}$$

Warunek ten jest i *wystarczający*, albowiem a i b nie są oba równe 0. Mamy dalej

$$c_1 + c_2 = 2\frac{D}{ka} = 2\frac{E}{kb},$$

$$c_1 c_2 = \frac{F}{k}.$$

Zawsze istnieje zupełnie oznaczony układ 2 liczb c_1 i c_2, których suma i iloczyn są liczby dowolnie dane. W istocie c_1 i c_2 są pierwiastkami pewnego zupełnie oznaczonego równania drugiego stopnia, które można napisać w jednej z dwóch postaci następujących

$$\left.\begin{aligned} c^2 - 2\frac{D}{ka}c + \frac{F}{k} &= 0 \\ c^2 - 2\frac{E}{kb}c + \frac{F}{k} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

zależnie od tego czy $a \neq 0$, czy $b \neq 0$.

Warunek (21) równoważny jest warunkowi

$$(Db - Ea)^2 = 0,$$

$$CD^2 + AE^2 - 2BDE = 0,$$

a ponieważ $\delta = 0$, więc dochodzimy znów do warunku (19).

Otrzymaliśmy więc

Twierdzenie 1. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym aby funkcja (1) dała się napisać w kształcie (10) jest równość (19)".

W przypadku $\delta \neq 0$ funkcja (1) daje się napisać w kształcie

$$\varepsilon(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) \tag{23}$$

przyczem albo $a_1 = a_2$. albo $b_1 = b_2$, albo $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1 = 0$, $\varepsilon = \pm 1$, a w przypadku $\delta = 0$ w kształcie

$$\varepsilon(ax + by + c_1)(ax + by + c_2). \tag{24}$$

Udowodnimy teraz z łatwością, że jeżeli

$$k(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2)$$

i

$$k'(a_1' x + b_1' y + c_1')(a_2' x + b_2' y + c_2')$$

są dwoma różnymi rozkładami funkcji (1), natenczas albo istnieją dwie liczby $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ takie, że mamy równości

$$\begin{matrix} k_1 a_1 = a_1', & k_1 b_1 = b_1', & k_1 c_1 = c_1', \\ k_2 a_2 = a_2', & k_2 b_2 = b_2', & k_2 c_2 = c_2', \end{matrix} \tag{25}$$

albo istnieją dwie liczby $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ takie, że mamy równości

$$\begin{matrix} k_1 a_1 = a_2', & k_1 b_1 = b_2', & k_1 c_1 = c_2', \\ k_2 a_2 = a_1', & k_2 b_2 = b_1', & k_2 c_2 = c_1', \end{matrix} \tag{26}$$

albo nareszcie spełnione są zarówno równości (25) jak i równości (26). W istocie, w przypadku $\delta \neq 0$ otrzymujemy ze wzorów (17) i z równości (14)

$$c_1' = \frac{k}{k' k_2} c_1, \quad c_2' = \frac{k}{k' k_1} c_2,$$

a ponieważ mamy

$$k' k_1 k_2 = k,$$

więc dochodzimy do równości

$$k_1 c_1 = c_1', \qquad k_2 c_2 = c_2',$$

i tak samo otrzymujemy ze wzorów (17) i z równości (15)

$$c_1' = \frac{k}{k' k_1} c_2, \qquad c_2' = \frac{k}{k' k_2} c_1,$$

dochodzimy więc do równości

$$k_2 c_2 = c_1', \qquad k_1 c_1 = c_2'.$$

Mamy

$$k(a_1 c_2 + a_2 c_1) = k'(a_1' c_2' + a_2' c_1'),$$
$$k(b_1 c_2 + b_2 c_1) = k'(b_1' c_2' + b_2' c_1'),$$
$$k c_1 c_2 = k' c_1' c_2'.$$

Przynajmniej jedna z liczb c_1, c_2; c_1', c_2' jest od zera odmienna np. c_1'. Mamy

$$c_2' = \frac{k c_1 c_2}{k' c_1'},$$

więc otrzymamy

$$k(a_1 c_1' - a_1' c_1) c_2 = (k' a_2' c_1' - k a_2 c_1) c_1',$$
$$k(b_1 c_1' - b_1' c_1) c_2 = (k' b_2' c_1' - k b_2 c_1) c_1'.$$

W przypadku równości (14) mamy więc

$$k a_1 c_2 (c_1' - k_1 c_1) = a_2 c_1' (k' k_2 c_1' - k c_1),$$
$$k b_1 c_2 (c_1' - k_1 c_1) = b_2 c_1' (k' k_2 c_1' - k c_1),$$

a więc

$$(k a_1 c_2 - k' k_2 a_2 c_1')(c_1' - k_1 c_1) = 0,$$
$$(k b_1 c_2 - k' k_2 b_2 c_1')(c_1' - k_1 c_1) = 0.$$

Mamy zatem w przypadku $\delta \neq 0$

$$c_1' = k_1 c_1.$$

W przypadku $\delta = 0$ mamy

$$a_2 = m a_1,$$
$$b_2 = m b_1,$$
$$a_2' = m' a_1',$$
$$b_2' = m' b_1'.$$

Mamy zatem albo

$$c_1' = k_1 c_1,$$

albo

$$c_1' = \frac{k_1}{m} c_2 = \frac{k_2}{m'} c_2 .$$

Tak samo z równości (15) wynika

$$(k' k_1 c_1' a_1 - c_1 k a_2)(k_2 c_2 - c_1') = 0,$$
$$(k' k_1 c_1' b_1 - c_1 k b_2)(k_2 c_2 - c_1') = 0.$$

A więc w przypadku $\delta \neq 0$ mamy

$$c_1' = k_2 c_2,$$

a w przypadku $\delta = 0$, albo

$$c_1' = k_2 c_2,$$

albo

$$c_1' = k_2 m c_1 = \frac{k_1}{m'} c_1 .$$

Twierdzenie jest więc udowodnione.

Zbiór punktów P, których spółrzędne spełniają równanie (2) zlewa się ze zbiorem punktów leżących na przynajmniej jednej z prostych l_1, l_2 przedstawionych przez równania

$$\begin{aligned} l_1(x, y) &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ l_2(x, y) &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

które się otrzymuje przyrównywując do zera funkcje linjowe, na które funkcja (1) została rozłożona. Z rozważań poprzednich wynika, że proste l_1 i l_2 nie zależą od rozkładu funkcji (1) na funkcje linjowe Mówimy, że równanie (2) *przedstawia dwie proste* l_1, l_2. A więc w przypadku $\Delta = 0$ równanie (2) przedstawia dwie proste. Proste te mogą się zlewać lub być od siebie odmienne. W przypadku $\delta \neq 0$ są one od siebie odmienne i przecinają się.

Uważajmy przypadek $\delta = 0$ i równania (22). Wyróżniki równań tych są odpowiednio

$$\frac{F}{k} - \frac{D^2}{k^2 a^2} \quad \text{i} \quad \frac{F}{k} - \frac{E^2}{k^2 b^2},$$

a więc równają się

$$\frac{AF - D^2}{k^2 a^2} \quad \text{i} \quad \frac{CF - E^2}{k^2 b^2}.$$

Wprowadzając minory δ' i δ'' otrzymujemy w przypadku $A \neq 0$, $C \neq 0$ równość

$$\frac{\delta''}{A} = \frac{\delta'}{C}. \tag{28}$$

Jeżeli $A = 0$ mamy $\delta'' = 0$ i jeżeli $C = 0$, mamy $\delta' = 0$. W przypadku $A \neq 0$, $C \neq 0$, minory δ' i δ'' są równocześnie dodatnie, ujemne i równe zero. Ponieważ A i C mają te same znaki, więc i δ' i δ'' mają te same znaki.

Kładąc $k = \varepsilon$ otrzymujemy na c_1 i c_2 w przypadku gdy przynajmniej jeden z minorów δ', δ'' jest dodatni, dwie wartości urojone ze sobą sprzężone. W przypadku, gdy przynajmniej jeden z tych minorów jest ujemny, c_1 i c_2 są oba rzeczywiste. Nareszcie w przypadku $\delta' = \delta'' = 0$ otrzymujemy jeden pierwiastek podwójny rzeczywisty $c_1 = c_2 = c$. Na pierwiastki te mamy wzory

$$c_{1,2} = \frac{\varepsilon}{a}\left(D \pm \sqrt{-\delta''}\right) \tag{29}$$

i

$$c_{1,2} = \frac{\varepsilon}{b}\left(E \pm \sqrt{-\delta'}\right).$$

W przypadku $\delta \neq 0$ wynika ze wzorów (17), że c_1 i c_2 są rzeczywiste, jeżeli a_1, b_1, a_2, b_2, k są rzeczywiste, a urojone sprzężone, jeżeli a_1 i a_2 i tak samo b_1 i b_2 są urojone ze sobą sprzężone, a k rzeczywiste. A więc w przypadku $\delta > 0$ proste l_1 i l_2 są urojone ze sobą sprzężone I. kategorji; w przypadku $\delta < 0$ rzeczywiste; w przypadku $\delta = 0$, jeżeli przynajmniej jeden z minorów δ', δ'' jest dodatni, urojone ze sobą sprzężone II. kategorji; jeżeli przynajmniej jeden z minorów δ', δ'' jest ujemny, rzeczywiste od siebie odmienne, równoległe do siebie; i nareszcie w przypadku gdy $\delta' = \delta'' = 0$ proste są rzeczywiste i zlewają się ze sobą.

Warunek $\Delta = 0$ pociąga za sobą równości

$$\begin{matrix} \delta\delta'' - \varkappa'^2 = 0, & \delta'\delta - \varkappa''^2 = 0, & \delta''\delta' - \varkappa^2 = 0, \\ \varkappa'\varkappa'' - \delta\varkappa = 0, & \varkappa''\varkappa - \delta'\varkappa' = 0, & \varkappa\varkappa' - \delta''\varkappa'' = 0. \end{matrix} \tag{30}$$

Z równości tych wynika, że żadne dwa z minorów δ, δ', δ'' nie mogą być znaków przeciwnych. Jeżeli $\delta = 0$, natenczas mamy

$$\varkappa' = \varkappa'' = 0.$$

Jeżeli dwa minory główne są równe zeru, natenczas wszystkie 3 minory poboczne $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ są równe zeru. A więc jeżeli wszystkie 3 minory główne są równe zeru, natenczas wszystkie minory 2-go stopnia wyznacznika Δ są równe 0. Widzieliśmy, że w tym ostatnim przypadku równanie (2) napisać można w postaci

$$\varepsilon(ax + by + c)^2 = 0, \tag{31}$$

i że przedstawia prostą podwójną rzeczywistą, i naodwrót jeżeli równanie (2) w przypadku $\Delta = 0$ przedstawia prostą podwójną wszystkie minory 2-go stopnia są równe zeru.

W przypadku $\delta = 0$ możemy równania obu prostych napisać w postaci

$$Ax + By + D \pm \sqrt{-\delta''} = 0,$$

i w postaci

$$Bx + Cy + E \pm \sqrt{-\delta'} = 0.$$

Warunki $\delta'' = 0$, $\delta' \neq 0$ pociągają za sobą $A = B = 0$, a więc ponieważ

$$\varkappa'' = BE - CD = 0,$$

więc $D = 0$. Równanie (2) ma postać

$$Cy + 2Ey + F = 0 \tag{32}$$

i przedstawia dwie proste równoległe do osi y, urojone sprzężone jeżeli $\delta' > 0$, rzeczywiste od siebie odmienne jeżeli $\delta' < 0$, jednę prostą podwójną, jeżeli $\delta' = 0$.

Tak samo warunki $\delta' = 0$, $\delta'' \neq 0$ pociągają za sobą $B = C = 0$ a więc ponieważ

$$\varkappa' = BD - AE = 0,$$

więc $E = 0$. Równanie (2) ma postać

$$Ax^2 + 2Dx + F = 0 \tag{33}$$

i przedstawia dwie proste równoległe do osi x, urojone sprzężone, jeżeli $\delta'' > 0$, rzeczywiste od siebie odmienne jeżeli $\delta'' < 0$, jednę prostą rzeczywistą, jeżeli $\delta'' = 0$.

Równość (28) otrzymujemy wprost z równości

$$\varkappa' = BD - AE = 0, \qquad \varkappa'' = BE - CD = 0,$$

albowiem jeżeli $A \neq 0$, $C \neq 0$ mamy $B \neq 0$ więc otrzymujemy

$$AE^2 = CD^2,$$

czyli równość (28).

Reasumując wyniki, do których doszliśmy badając równanie (2) w przypadku $\Delta = 0$ możemy ułożyć następującą tabelkę:

$\Delta = 0$

I. $\delta \neq 0$.

Proste nie równoległe.

1. $\delta > 0$.

Urojone sprzężone.

2. $\delta > 0$.

Rzeczywiste.

II. $\delta = 0$.

Proste równoległe.

1. δ', δ'' nie oba $= 0$.

Odmienne od siebie.

1) δ' lub δ'' dodatnie.

Urojone sprzężone.

a) $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$.

Nie równoległe do osi.

b) $\delta' > 0$, $\delta'' = 0$.

Równoległe do osi x.

c) $\delta' = 0$, $\delta'' > 0$.

Równoległe do osi y.

2) δ' lub δ'' ujemne.

Rzeczywiste.

a) $\delta' < 0$, $\delta'' < 0$.

Nie równoległe do osi.

b) $\delta' < 0$, $\delta'' = 0$.

Równoległe do osi x.

c) $\delta' = 0$, $\delta'' < 0$.

Równoległe do osi y.

2. $\delta' = \delta'' = 0$.

Zlewające się.

4. Punkt przecięcia się dwóch prostych danych równaniem (2) w przypadku $\delta \neq 0$.

Uważajmy równania (27) prostych l_1 i l_2. Pomnóżmy je przez $\frac{k}{2}a_2$, $\frac{k}{2}a_1$ i dodajmy do siebie. Tak samo pomnóżmy je przez

$\frac{k}{2}b_2$, $\frac{k}{2}b_1$ i dodajmy do siebie. Otrzymamy równania

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0, \\ Bx + Cy + E &= 0, \end{aligned} \tag{34}$$

które w przypadku $\delta \neq 0$ stanowią układ równań równoważny układowi równań (27).

Równania (34) przedstawiają dwie proste rzeczywiste od siebie odmienne przecinające się. Na spółrzędne ξ, η punktu S przecięcia prostych tych a więc i prostych l_1, l_2 otrzymujemy wzory

$$\xi = \frac{\varkappa''}{\delta}, \quad \eta = \frac{\varkappa'}{\delta}. \tag{35}$$

Proste (34) będziemy oznaczali przez α, β, albowiem lewe strony równań (34) są to funkcje $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ wzorów (3).

W przypadku $\delta = 0$ albo równanie (34) przedstawiają jednę i tę samą prostą, albo jedno i tylko jedno równanie jest identycznie zero, a drugie przedstawia pewną prostą w skończoności. A mianowicie pierwsze równanie jest identycznie zero, jeżeli (2) przedstawia dwie proste równoległe do osi x-ów, zaś drugie równanie jest identycznie zero, jeżeli (2) przedstawia dwie proste równoległe do osi y-ów. W przypadku kiedy (2) przedstawia prostą podwójną, równania (34) przedstawiają tę prostą, albo jedno i tylko jedno z tych równań znika identycznie.

5. Dwusieczne dwóch prostych danych równaniem (2).

Załóżmy $\delta \neq 0$. Równania prostych $\overline{l_1}$, $\overline{l_2}$ dwusiecznych prostych l_1, l_2 napiszą się w postaci

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\theta}} - \eta\,\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2\cos\theta}} = 0, \tag{36}$$

gdzie $\eta = \pm 1$. Mnożąc te równania przez siebie otrzymujemy równania 2-go stopnia

$$\begin{aligned} &(a_1x + b_1y + c_1)^2(a_2^2 + b_2^2 - 2a_2b_2\cos\theta) - \\ &-(a_2x + b_2y + c_2)^2(a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\theta) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Z rozważań Rozdziału poprzedniego wynika, że równanie to można napisać w kształcie

$$\begin{aligned}(A\cos\theta - B)x^2 + (A - C)xy + (B - C\cos\theta)y^2 + \\ + 2D'x + 2E'y + F' = 0.\end{aligned} \tag{38}$$

Na spółrzędne ξ, η punktu przecięcia prostych $\overline{l}_1$ i $\overline{l}_2$ otrzymujemy więc wzory

$$(A\cos\theta - B)\xi + \tfrac{1}{2}(A - C)\eta + D' = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(A - C)\xi + (B - C\cos\theta)\eta + E' = 0.$$

Mamy dalej

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Stąd wynika, że równanie (38) można napisać w postaci

$$\begin{aligned}(A\cos\theta - B)(x - \xi)^2 + (A - C)(x - \xi)(y - \eta) + \\ + (B - C\cos\theta)(y - \eta)^2 = 0.\end{aligned} \tag{39}$$

Do tego samego rezultatu dochodzimy wprowadzając nowy układ spółrzędnych x', y' o początku w punkcie S i o osiach równoległych i równo skierowanych z osiami x, y. Mamy

$$x = x' + \xi,$$
$$y = y' + \eta,$$

a więc

$$a_1x + b_1y + c_2 = a_1x' + b_1y',$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = a_2x' + b_2y';$$

a stąd dochodzimy znów do równania (39).

Uważajmy teraz przypadek $\delta = 0$. *Dwusieczną* $\overline{l}$ dwóch prostych l_1, l_2 danych równaniami

$$\begin{aligned}ax + by + c_1 = 0, \\ ax + by + c_2 = 0,\end{aligned} \tag{40}$$

nazywamy prostą równoległą i równo oddaloną od tych prostych. Prosta ta dana jest równaniem

$$ax + by + \frac{c_1 + c_2}{2} = 0. \tag{41}$$

W istocie uważajmy na prostych l_1, l_2 ten sam kierunek

$$\begin{aligned}\lambda = -\varepsilon\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}, \\ \mu = \quad \varepsilon\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}},\end{aligned} \tag{42}$$

gdzie ε jest oznaczona liczba $+1$ albo -1. Odległości r_1 i r_2 punktu $P(\xi, \eta)$ od prostych l_1 i l_2 liczone na osi l', której kierunek zawiera kąt $\frac{\pi}{2}$ z dodatnim kierunkiem na prostych l_1, l_2 są

$$r_1 = \varepsilon \frac{a\xi + b\eta + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}} \sin\theta,$$
$$r_2 = \varepsilon \frac{a\xi + b\eta + c_2}{\sqrt{a^2 + b_2 - 2ab\cos\theta}} \sin\theta.$$

Mamy

$$r_1 + r_2 = 0,$$

a stąd otrzymujemy równanie (41).

W rozumowaniach tego ustępu zakładamy, że żadna z prostych l_1, l_2 niema kierunku minimalmego.

6. Równania drugiego stopnia przedstawiające tę samą krzywą 2-go stopnia.

Uważajmy dwie funkcje 2-go stopnia o zmiennych x, y, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, i dwa równania drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Mówimy, że te równania przedstawiają *tę samą* krzywą 2-go stopnia, jeżeli zbiór punktów P, których spółrzędne x, y spełniają jedno dowolne z tych równań jest identyczny ze zbiorem punktów, których spółrzędne spełniają drugie równanie Wiemy, że warunkiem *wystarczającym* aby to zachodziło, jest proporcjonalność spółczynników funkcyj (43). Okażemy, że ten warunek jest i *konieczny*.

Przedewszystkiem, jeżeli dwie funkcje (43) przyjmują te same wartości dla wszystkich układów liczb x, y, natenczas funkcje te są identyczne. Albowiem kładąc $y = 0$ otrzymujemy

$$Ax^2 + 2Dx + F \equiv A'x^2 + 2D'x + F',$$

a więc

$$A = A', \qquad D = D', \qquad F = F',$$

a kładąc $x = 0$ otrzymujemy

$$Cy^2 + 2Ey + F \equiv C'y^2 + 2E'y + F',$$

a więc

$$C = C', \qquad E = E', \qquad F = F',$$

skąd wynika

$$B = B'.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

„Jeżeli wszystkie punkty leżące na prostej danej równaniem

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \tag{45}$$

leżą na krzywej K drugiego stopnia przedstawionej równaniem (2), natenczas istnieje druga prosta l_2 o równaniu

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \tag{46}$$

taka, że wszystkie punkty tej prostej leżą też na krzywej K i że mamy identycznie

$$f(x, y) \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2)". \tag{47}$$

W istocie załóżmy $a_1 \neq 0$ i uważajmy równania

$$\begin{gathered} a_1 a_2 = A, \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2B, \\ a_1 c_2 + a_2 c_1 = 2D, \end{gathered}$$

w których a_2, b_2, c_2 są niewiadome. Z równań tych obliczymy te niewiadome w jeden jedyny sposób. Mamy więc

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) \equiv A x^2 + 2Bxy + b_1 b_2 y_2 + \\ + 2Dx + (b_1 c_2 + b_2 c_1) y + c_1 c_2.$$

Różnica

$$f(x, y) - (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) \equiv \\ \equiv (C - b_1 b_2) y^2 + [2E - (b_1 c_2 + b_2 c_1)] y + E - c_1 c_2$$

obraca się w zero dla wszystkich punktów na prostej l_1, a więc dla wszystkich wartości na y, albowiem do każdej wartości na y można znaleźć wartość na x spełniającą równanie (45). A więc mamy związki

$$\begin{gathered} C = b_1 b_2, \\ 2E = b_1 c_2 + b_2 c_1, \\ F = c_1 c_2, \end{gathered}$$

czyli tożsamość (47) jest udowodniona. Przytem nie obie liczby a_2, b_2 są równe zeru.

Z wywodów tych i z twierdzenia 1. wynika następujące

Twierdzenie 2. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby równanie (2) przedstawiało dwie proste, jest warunek (19)“.

Uważajmy teraz znów dwa równania (44) i przypuśćmy, że krzywe K_1 i K_2 przedstawione przez te oba równania zlewają się ze sobą. Musimy rozważyć kilka tu możliwych przypadków:

I. $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$. Nadajmy y oznaczoną dowolną wartość i uważajmy równania (44) jako równania drugiego stopnia względem niewiadomej x. Ponieważ te równania mają te same pierwiastki, więc mamy równości

$$\frac{B_1 y + D_1}{A_1} = \frac{B_2 y + D_2}{A_2}, \quad \frac{C_1 y + 2 E_1 y + F_1}{A_2} =$$
$$= \frac{C_2 y + 2 E_2 y + F_2}{A_2}.$$

Ponieważ równości te są spełnione dla każdego y, więc istnieje liczba $k \neq 0$ taka że spełnione są równości

$$\begin{gathered} A_2 = k A_1, \ B_2 = k B_1, \ C_2 = k C_1, \ D_2 = k D_1, \\ E_2 = k E_1, \ F_2 = k F_1 \end{gathered} \tag{48}$$

czyli że spółczynniki funkcyj (43) są do siebie proporcjonalne.

W przypadku, gdy $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ dochodzimy do tegosamego rezultatu.

II $A_1 \neq 0$, $A_2 = 0$.

Uważajmy drugie równanie (44). Dla wartości na y

$$y = - \frac{D_2}{B_2}$$

nie zawiera to równanie wyrazów zawierających x. Stąd wynika, że dla tej wartości na y jest to równanie albo spełnione przez każdą wartość na x, albo nie jest spełnione przez żadną wartość na x. Natomiast pierwsze równanie (44) daje dla tej wartości na y dwie zupełnie oznaczone wartości na x. Stąd wynika że musi być $B_2 = 0$ D_2 musi być $\neq 0$, inaczej drugie równanie (44) byłoby spełnione dla każdego x, jeżeli na y obierzemy pewną oznaczoną wartość, natomiast pierwsze równanie jest spełnione dla każdego y tylko przez 2 wartości na x.

Zatem pierwsze równanie (44) ma teraz dla każdego y jeden pierwiastek podwójny na x. A więc wyróżnik tego równania względem x równa się zeru. Wyróżnik ten jest

$$A_1 (C_1 y^2 + 2 E y_1 + F_1) - (B_1 y + D_1)^2 = \delta_1 y^2 - 2 \varkappa_1' y + \delta_1''.$$

Ponieważ wyróżnik ten dla każdego y obraca się w zero, więc mamy

$$\delta_1 = \varkappa_1' = \delta_1'' = 0,$$

a więc

$$\Delta_1 = 0.$$

Pierwsze równanie (44) przedstawia zatem dwie linie proste. A więc i drugie równanie (44) przedstawia dwie linie proste. Zatem mamy według twierdzenia 2.

$$\Delta_2 = 0.$$

Ale mamy

$$\Delta_2 = - C_2 D_2^2,$$

a stąd ponieważ $D_2 = 0$ wynikałoby $C_2 = 0$, co nie zachodzi.

Do tegosamego rezultatu dochodzimy jeżeli tylko jedna z liczb C_1, C_2 jest od zera odmienna.

Zatem przypadek ten nie jest możliwy.

III. $A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 0$. $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$. Mamy teraz dwa równania

$$2 B_1 x y + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$
$$2 B_1 x y + 2 D_2 x + 2 E_2 y + F_2 = 0.$$

Mamy więc równość

$$\frac{2 E_1 y + F_1}{B_1 y + D_1} = \frac{2 E_2 y + F_2}{B_2 y + D_2}.$$

Równości

$$B_1 y + D_1 = 0$$
$$B_2 y + D_2 = 0$$

są spełnione równocześnie, a więc mamy

$$\frac{D_1}{B_1} = \frac{D_2}{B_2},$$

czyli kładąc

$$B_2 = k B_1,$$

gdzie k jest liczba od zera odmienna mamy

$$D_2 = k D_1.$$

Równość

$$(2E_1 y + F_1)(B_2 y + D_2) - (2E_2 y + F_2)(B_1 y + D_1) = 0$$

jest spełniona dla każdej wartości na y. A więc mamy równości

$$E_1 B_2 - E_2 B_1 = 0,$$
$$F_1 B_2 - F_2 B_1 + 2(E_1 D_2 - E_2 D_1) = 0,$$
$$F_1 D_2 - F_2 D_1 = 0.$$

A więc mamy

$$E_2 = k E_1,$$

a więc

$$F_1 B_2 - F_2 B_1 = 0,$$

a więc

$$F_2 = k F_1.$$

Zatem znów spółczynniki równań (44) są do siebie proporcjonalne. Mamy więc:

Twierdzenie 3. „Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa równania drugiego stopnia przedstawiały tę samą krzywą jest proporcjonalność odpowiednich spółczynników obu równań“.

7. *Forma drugiego stopnia w spółrzędnych jednorodnych na linji prostej. Równanie jednorodne drugiego stopnia w spółrzędnych jednorodnych na linji prostej i jego znaczenie geometryczne.*

Uważajmy równanie drugiego stopnia o jednej niewiadomej

$$a x^2 + 2 b x + c = 0, \tag{49}$$

zakładając że spółczynniki a, b, c są liczbami rzeczywistymi i że $a \neq 0$. Oznaczmy przez x^1, x^2 pierwiastki tego równania. Pierwiastki te możemy interpretować jako *spółrzędne dwóch punktów* P_1, P_2 na prostej l, na której obraliśmy układ spółrzędnych Kartezjusza. Równanie (43) nazywamy wówczas *równaniem dwóch punktów na osi Kartezjusza*. Naodwrót do każdego układu dwóch punktów P_1, P_2 na osi Kartezjusza o spółrzędnych x^1, x^2 należy równanie drugiego stopnia tych dwóch punktów

$$a(x - x^1)(x - x^2) = 0, \tag{50}$$

gdzie a jest dowolną liczbę $\neq 0$.

Uważajmy teraz na osi Kartezjusza układ spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2. Mamy więc

$$x = \frac{x_2}{x_1}.$$

Zastępując w trójmianie drugiego stopnia x przez $\frac{x_2}{x_1}$ otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{a x_2^2 + 2b x_1 x_2 + c x_1^2}{x_1^2}.$$

Każdemu pierwiastkowi równania drugiego stopnia (49) odpowiadają takie układy spółrzędnych jednorodnych $x_1 \neq 0$, x_2, dla których forma drugiego stopnia

$$f(x_1, x_2) = a x_2^2 + 2b x_1 x_2 + c x_1^2 \tag{52}$$

obraca się w zero. Naodwrót, każdemu układowi dwóch liczb $x_1 \neq 0$, x_2, spełniającemu jednorodne równanie drugiego stopnia

$$a x_2^2 + 2b x_1 x_2 + c x_1^2 = 0 \tag{53}$$

odpowiada oznaczona wartość na x, która jest pierwiastkiem równania drugiego stopnia (49).

Zatem równanie (53) możemy nazwać *równaniem jednorodnem drugiego stopnia dwóch punktów* na osi Kartezjusza. Każdemu równaniu (49) odpowiada równanie (53) i naodwrót.

Oznaczając przez x_1^1, x_2^1 i x_1^2, x_2^2 spółrzędne jednorodne punktów P_1, P_2, których równaniem w spółrzędnych Kartezjusza jest równanie (49) możemy równanie to napisać w postaci

$$a\left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^1}{x_1^1}\right) \left(\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^2}{x_1^2}\right) = 0,$$

a więc w postaci

$$a(x_2 x_1^1 - x_1 x_2^1) \quad (x_2 x_1^2 - x_1 x_2^2) = 0. \tag{54}$$

Każde równanie jednorodne drugiego stopnia dwuch zmiennych (53), dla którego $a \neq 0$ przedstawia więc dwa punkty P_1, P_2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby te dwa punkty schodziły się ze sobą jest warunek

$$\delta = ac - b^2 = 0. \tag{55}$$

Punkty P_1, P_2 są *rzeczywiste* od siebie odmienne, jeżeli $\delta < 0$, zaś *urojone sprzężone*, jeżeli $\delta > 0$.

Uważajmy znów formę drugiego stopnia (52), zakładając, że mamy $a = 0$. Forma ta ma więc postać

$$2bx_1x_2 + cx_1^2 = x_1(2bx_2 + cx_1)$$

Równanie jednorodne (53) jest teraz spełnione przez wszystkie układy $x_1 = 0$, x_2 dowolne. Jeżeli $b \neq 0$, natenczas równanie to jest spełnione prócz tego przez spółrzędne jednorodne

$$x_1 = 2\rho b,\quad x_2 = -\rho c,$$

gdzie ρ jestto dowolna liczba odmienna od zera. Zatem równanie (53) jest spełnione przez spółrzędne punktu w nieskończoności na osi Kartezjusza i przez spółrzędne pewnego oznaczonego punktu w skończoności. Jeżeli mamy $b = 0$, ale $c \neq 0$, wtenczas równanie (53) jest spełnione tylko przez spółrzędne punktu w nieskończoności.

Nareszcie jeżeli b i c są równe zeru, natenczas spółrzędne jednorodne dowolnego punktu na osi Kartezjusza w nieskończoności lub w skończoności położonego spełniają to równanie jednorodne. Widzimy więc, że równanie jednorodne (53) przedstawia w przypadku kiedy nie wszystkie trzy spółczynniki a, b, c równają się zeru dwa oznaczone punkty na osi, położone w skończoności lub w nieskończoności. Ponieważ $\delta = -b^2$, więc widzimy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby się te dwa punkty zlewały ze sobą jest warunek $\delta = 0$. Mówimy, że równanie (53) przedstawia w przypadku $b = 0$ *dwa* punkty w nieskończoności, ponieważ forma (52) jest wówczas kwadratem formy x_1.

Równaniu (53) odpowiada w przypadku $a = 0$, $b \neq 0$ równanie pierwszego stopnia w spółrzędnej x, zaś w przypadku $b = 0$, $c \neq 0$ mamy równanie $c = 0$, nie przedstawiające żadnego punktu w skończoności.

8. *Forma drugiego stopnia w spółrzędnych jednorodnych na płaszczyźnie. Równanie jednorodne drugiego stopnia w spółrzędnych jednorodnych na płaszczyźnie i jego znaczenie geometryczne.*

Uważajmy funkcję (1) drugiego stopnia w spółrzędnych Kartezjusza na płaszczyźnie. Uważajmy układ spółrzędnych jednorodnych x_1, x_2, x_3 na płaszczyźnie. Zastąpmy spółrzędne x, y punktu P w funkcji (1) przez wyrażenia w spółrzędnych jednorodnych

$$x = \frac{x_2}{x_1},\quad y = \frac{x_3}{x_1}.$$

Otrzymamy funkcję

$$\frac{f(x_1,\ x_2,\ x_3)}{x_1^2}, \tag{56}$$

gdzie mamy

$$\begin{aligned} f(x_1,\ x_2,\ x_3) = Ax_1^2 + 2Bx_1\,x_2 + Cx_2^2 + \\ + 2Dx_1\,x_3 + 2Ex_2\,x_3 + Fx_3^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Wyrażenie (57) nazywamy *formą drugiego stopnia o trzech zmiennych* $x_1,\ x_2,\ x_3$. Każdemu układowi dwóch liczb x, y spełniającemu równanie drugiego stopnia (2) odpowiada układ trzech liczb $x_1 \neq 0$, x_2, x_3 spełniający *równanie jednorodne drugiego stopnia o trzech niewiadomych*

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0. \tag{58}$$

Naodwrót, każdemu układowi trzech liczb $x_1 \neq 0$, x_2, x_3 spełniającemu równanie jednorodne drugiego stopnia (58) odpowiada układ dwóch liczb x, y spełniających równanie (2).

Równanie (2) przedstawia w przypadku gdy nie wszystkie trzy liczby A, B. C równają się zeru krzywą drugiego stopnia C_2. Równanie (58) możemy nazwać *równaniem jednorodnem drugiego stopnia krzywej* C_2. Każdemu równaniu drugiego stopnia (2) odpowiada równanie jednorodne drugiego stopnia (58) i naodwrót jeżeli nie wszystkie trzy liczby A, B, C równają się zeru, odpowiada każdemu równaniu jednorodnemu drugiego stopnia (58) oznaczone równanie krzywej drugiego stopnia (2).

Załóżmy teraz, że w równaniu jednorodnem (58) wszystkie trzy liczby A, B, C równają się zeru. Mamy wówczas jednorodne równanie drugiego stopnia

$$2Dx_1\,x_3 + 2Ex_2\,x_3 + Fx_3^2 = 0. \tag{59}$$

które można napisać w postaci

$$x_3(2Dx_1 + 2Ex_2 + F) = 0.$$

Równanie to jest spełnione przez wszystkie punkty na płaszczyźnie, dla których mamy $x_3 = 0$, i nadto przez wszystkie punkty, których spółrzędne jednorodne spełniają równanie

$$2Dx_1 + 2Ex_2 + F = 0.$$

A więc, jeżeli nie obie liczby D, E równają się zeru równanie (59) jest spełnione przez wszystkie punkty leżące na prostej w nieskończoności i przez wszystkie punkty danej prostej rzeczywistej w skończoności l i tylko przez te punkty. Jeżeli mamy $D = E = 0$, ale $F \neq 0$, natenczas równanie jest spełnione tylko przez punkty prostej w nieskończoności. Nareszcie jeżeli i $F = 0$, natenczas wszystkie punkty na płaszczyźnie w skończoności i w nieskończoności spełniają to równanie.

Możemy więc powiedzieć. że równanie (58) przedstawia w przypadku $A = B = C = 0$ dwie proste rzeczywiste na płaszczyźnie, z których przynajmniej jedna jest prostą w nieskończoności. Przytem gdy mamy $D = E = 0$, mówimy że równanie (58) jest równaniem *prostej podwójnej w nieskończoności* albowiem forma ma postać kwadratu x_3^2. Zatem gdy nie wszystkie spółczynniki w równaniu jednorodnem (58) równają się zeru, równanie to przedstawia zawsze *krzywą drugiego stopnia*

Równaniu jednorodnemu (58) w przypadku $A = B = C = 0$ odpowiada równanie (2) *pierwszego* stopnia, gdy D i E nie oba są równe zeru, a równanie $F = 0$, w tym wyjątkowym przypadku.

Wyróżnik Δ trzeciego stopnia równa się zeru gdy mamy $A = B = C = 0$, a więc warunek $\Delta = 0$ jest *konieczny* aby równanie jednorodne (58) przedstawiało dwie linje proste i *wystarczający.* W przypadku gdy nie wszystkie trzy spółczynniki A, B, C są równe zeru. można funkcję (2) napisać gdy $\Delta = 0$ w postaci

$$k\left(a_1 \frac{x_2}{x_1} + b_1 \frac{x_3}{x_1} + c_1\right) \quad \left(a_2 \frac{x_2}{x_1} + b_2 \frac{x_3}{x_1} + c_2\right),$$

gdzie k jest pewna stała od zera odmienna, a funkcję jednorodną (57) w postaci

$$k(a_1\, x_2 + b_1\, x_3 + c_1\, x_1) \quad (a_2\, x_2 + b_2\, x_3 + c_2\, x_1),$$

t. zn. forma $f(x_1, x_2, x_3)$ jest iloczynem dwóch form linjowych o zmiennych x_1, x_2, x_3 i taksamo w przypadku gdy $A = B = C = 0$. forma ta jest iloczynem dwóch form linjowych.

Ćwiczenia.

1. Co przedstawia równanie

$$(ax + by - c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(x^2 + y^2 - c^2)? \tag{1}$$

2. Wyznaczyć a i b tak, aby równanie

$$x^2 + (1 + a)xy + ay^2 + (1 - a)y + b = 0 \qquad (2)$$

przedstawiało dwie proste i znaleźć te proste.

3) W równaniu ogólnem drugiego stopnia wyrazić B przez inne spółczynniki tak, aby równanie przedstawiało dwie proste. Zastosować to do równania

$$x^2 + 2Bxy + y^2 - 6x + 9y - 11 = 0. \qquad (3)$$

4. Kiedy proste dwóch par prostych mają tensam środek?

ROZDZIAŁ X.

Koła.

1. Równanie koła w układzie spółrzędnych Kartezjusza.

Uważajmy dowolny rzeczywisty punkt C o spółrzędnych a, b i dowolną liczbę rzeczywistą nieujemną r. *Kołem* nazywamy zbiór wszystkich punktów zespolonych na płaszczyźnie, których odległość od punktu C równa się liczbie r. A więc warunkiem koniecznym i wystarczającym aby punkt P o spółrzędnych x, y leżał na kole k jest aby spółrzędne te spełniały równanie

$$(x-a)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta+(y-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Równanie to nazywa się *równaniem koła.*

Równanie koła możemy napisać w postaci

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2+2dx+2ey+f=0. \tag{2}$$

kładąc

$$\begin{gathered} d=-a-b\cos\theta, \quad e=-a\cos\theta-b, \\ f=a^2+2ab\cos\theta+b^2-r^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Naodwrót, mając dane równanie koła w postaci (2) możemy je napisać w postaci (1) wprowadzając spółrzędne a, b środka koła i jego promień wzorami

$$\begin{gathered} a=-\frac{d-e\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad b=-\frac{e-d\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ r^2=\frac{d^2-2de\cos\theta+e^2}{\sin^2\theta}-f. \end{gathered} \tag{4}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby równanie (2) przedstawiało koło jest więc nierówność

$$d^2 - 2de\cos\theta + e^2 > f\sin^2\theta, \tag{5}$$

i jeżeli ten warunek jest spełniony równanie (2) przedstawia zupełnie oznaczone koło. Widoczna dalej, że w przypadku, kiedy we wzorze (5) zamiast znaku nierówności mamy znak *równości* wzory (4) dają $r^2 = 0$ i równania (1) i (2) przedstawiają dwie proste minimalne ze sobą sprzężone przechodzące przez punkt C o spółrzędnych a, b. Możemy więc wprowadzić pojęcie koła *zerowego*, albo o promieniu zero, rozumiejąc przez to układ dwóch prostych minimalnych przechodzących przez punkt C.

Uważajmy teraz (2) *o zupełnie dowolnych* spółczynnikach rzeczywistych d, e, f. W przypadku, gdy zamiast nierówności (5) zachodzi nierówność

$$d^2 - 2de\cos\theta + e^2 < f\sin^2\theta, \tag{6}$$

liczba r^2 określona trzecim wzorem (4) jest ujemna. Równanie (2) przedstawia wówczas zbiór punktów na płaszczyźnie, których odległość od punktu C jest *urojona*. Mówimy, że równanie to przedstawia *koło urojone*, w przeciwieństwie do *kół rzeczywistych*, które równanie to przedstawia w przypadku nierówności (5). Wprowadzamy więc pojęcie nowej krzywej, którą również nazywamy kołem. Koła rzeczywiste będziemy krótko nazywali kołami, jeżeli nie będzie zachodzić wątpliwość co do tego, który z dwóch powyższych przypadków zachodzi.

Punkt C nazywamy *środkiem* koła. *Promieniem* koła nazywamy w przypadku kół rzeczywistych liczbę nieujemną r, a w przypadku kół urojonych tę wartość pierwiastka z r^2, która ma spółczynnik przy i dodatni.

Uważajmy wyznacznik Δ należący do równania (2). Mamy

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & d \\ \cos\theta & 1 & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = f\sin^2\theta - d^2 + 2de\cos\theta - e^2. \tag{7}$$

A więc mamy $\Delta \leqq 0$ dla kół rzeczywistych, $\Delta > 0$ dla kół urojonych.

2. Ogólne równanie drugiego stopnia przedstawiające koło.

Uważajmy ogólne równanie drugiego stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{8}$$

i spytajmy się, kiedy to równanie przedstawia koło. A więc chodzi o to, kiedy istnieje liczba $k \neq 0$ taka że mamy równości

$$\begin{aligned} kA = 1, \quad kB = \cos\theta, \quad kC = 1, \\ kD = d, \quad kE = e, \quad kF = f, \end{aligned} \tag{9}$$

w których d, e, f są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Z pierwszych trzech równości (9) otrzymujemy następujące konieczne warunki

$$A = C, \quad B = A\cos\theta = C\cos\theta, \tag{10}$$

a więc $\Omega = 0$. Warunki te są i wystarczające. W istocie z ostatnich trzech równości (9) otrzymujemy

$$d = \frac{D}{A}, \quad e = \frac{E}{A}, \quad f = \frac{F}{A}. \tag{11}$$

Aby równanie (8) przedstawiało koło rzeczywiste, potrzeba i wystarcza aby spełniona była nierówność

$$D^2 - 2DE\cos\theta + E^2 \geqq AF\sin^2\theta \tag{12}$$

a aby przedstawiało koło urojone potrzeba i wystarcza, aby była spełniona nierówność

$$D^2 - 2DE\cos\theta + E^2 < AF\sin^2\theta. \tag{13}$$

Wyróżnik Δ ma teraz wartość

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} A & A\cos\theta & D \\ A\cos\theta & A & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = A^2F\sin^2\theta - \\ - A(D^2 - 2DE\cos\theta + E^2) = A[AF\sin^2\theta - \\ - (D^2 - 2DE\cos\theta + E^2)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Równanie (8) przedstawia zatem koło rzeczywiste, jeżeli mamy nierówność

$$A\Delta \leqq 0, \tag{15}$$

a przedstawia koło urojone, jeżeli mamy nierówność

$$A\Delta > 0. \tag{16}$$

Na kwadrat promienia koła wyrażony przez Δ otrzymujemy dla równania (2) wzór

$$r^2 = -\frac{\Delta}{\sin^2\theta}. \tag{17}$$

a dla równania ogolnego (8) wzór

$$r^2 = - \frac{\Delta}{A^3 \sin^2 \theta}. \tag{18}$$

3. Koło i prosta.

Uważajmy koło k dane równaniem (2) i prostą rzeczywistą l o równaniu

$$l x + m y + n = 0. \tag{19}$$

Na bezwzględną wartość odległości d środka C koła od prostej l mamy wzór

$$d = \varepsilon \frac{l a + m b + n}{\sqrt{l^2 - 2 l m \cos \theta + m^2}} \sin \theta, \tag{20}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i równa się znakowi $l a + m b + n$. Mamy

$$l a + m b + n = - \frac{l d + m e - (l e + m d) \cos \theta}{\sin^2 \theta} + n.$$

Oznaczając przez W wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & d \\ \cos \theta & 1 & e \\ l & m & n \end{vmatrix}, \tag{21}$$

którego wartość jest

$$n \sin^2 \theta - l d - m e + (l e + m d) \cos \theta$$

mamy

$$l a + m b + n = \frac{W}{\sin^2 \theta}.$$

Zależnie od tego który z przypadków

$$1)\ r > d, \quad 2)\ r = d, \quad 3)\ r < d$$

zachodzi, prosta l przecina koło w 2 punktach rzeczywistych, w 1 punkcie rzeczywistym, lub nie przecina koła wcale. Wyrażając r i d wzorami (17) i (21) otrzymujemy

$$W^2 \lesseqgtr - \Delta (l^2 - 2 l m \cos \theta + m^2), \tag{22}$$

gdzie znaki $>$, $=$, $<$ odpowiadają przypadkom 1), 2), 3).

Jeżeli koło dane jest ogólnem równaniem (8), wyznacznik W ma wartość

$$W = \begin{vmatrix} A & A\cos\theta & D \\ A\cos & A & E \\ l & m & n \end{vmatrix} = A^2 n \sin^2\theta - A(Dl + Em) +$$

$$+ A(Dm + El)\sin\theta.$$

Mamy teraz

$$la + mb + n = -\frac{Dl + Em - (Dm + El)\cos\theta}{A^2\sin^2\theta} + n,$$

a więc mamy

$$la + mb + n = \frac{W}{A^2\sin^2\theta},$$

i ze wzoru (18) otrzymujemy analogicznie do wzoru (22)

$$W^2 \lesseqgtr -A\Delta(l^2 - 2lm\cos\theta + m^2). \tag{23}$$

4. Równanie stycznej do koła.

Styczną (*tangente*) do koła w punkcie P koła rzeczywistym lub urojonym nazywamy prostą t, która prócz tego punktu niema innego punktu wspólnego z kołem. Jeżeli punkt P jest rzeczywisty istnieje jedna jedyna styczna, mianowicie prosta prostopadła do prostej CP. Równanie prostej CP jest

$$(x - \xi)(b - \eta) - (y - \eta)(a - \xi) = 0. \tag{24}$$

A więc równanie stycznej t jest

$$\begin{aligned}(x - \xi)\,[a - \xi + (b - \eta)\cos\theta] + (y - \eta)\\ [(a - \xi)\cos\theta + b - \eta] = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Łatwo okazać, że prosta ta jest rzeczywiście styczną do koła w punkcie P i że innej stycznej w tym punkcie niema.

W istocie uważajmy równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P

$$x = \xi + \rho\lambda, \quad y = \eta + \rho\mu.$$

Na wartości parametru ρ odpowiadające punktom przecięcia prostej tej z kołem mamy równanie otrzymujące się, wstawiając te wartości na x, y w równanie (1) koła. Mamy

$$(\rho\lambda + \xi - a)^2 + (\rho\mu + \eta - b)^2 + 2(\rho\lambda + \xi - a)$$
$$(\rho\mu + \eta - b) \cos\theta - r^2 = 0,$$

więc

$$\rho^2 + 2\rho\,[\lambda(\xi - a + (\eta - b)\cos\theta) + \mu((\xi - a)\cos\theta + \eta - b)] = 0.$$

$\rho = 0$ jest podwójnym pierwiastkiem tego równania wtedy i tylko wtedy, gdy spółczynniki kierunkowe λ, μ spełniają warunek

$$\lambda(\xi - a + (\eta - b)\cos\theta) + \mu((\xi - a)\cos\theta + \eta - b) = 0,$$

a więc dla prostej (25) i tylko dla prostej (25).

Równanie stycznej możemy też napisać w innej postaci; pisząc zamiast $x - \xi$ $x - a + a - \xi$ i zamiast $y - \eta$ pisząc $y - b + b - \eta$ otrzymamy równanie

$$(x - a)\,[\xi - a + (\eta - b)\cos\theta] + \\ + (y - b)\,[(\xi - a)\cos\theta + \eta - b] - r^2 = 0. \tag{26}$$

5. Bieguny i biegunowe względem koła.

Uważajmy koło k i dowolny punkt P o spółrzędnych ξ, η. Załóżmy dla uproszczenia formuł że układ spółrzędnych jest układem prostokątnym. Równanie koła jest więc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0. \tag{27}$$

Uważajmy prostą l o równaniu

$$(x - a)\,(\xi - a) + (y - b)\,(\eta - b) - r^2 = 0. \tag{28}$$

Prosta ta w przypadku, gdy punkt P leży na kole k jest styczną do koła w tym punkcie. Dla każdego położenia punktu P z wyjątkiem przypadku w którym punkt P schodzi się ze środkiem C koła k, równanie (28) przedstawia zupełnie określoną prostą, a w tym przypadku wyjątkowym przedstawia prostą w nieskończoności.

Na odległość d środka C koła od prostej l mamy wzór

$$d = \varepsilon\,\frac{r^2}{\delta}, \tag{29}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a δ jest jedną z dwóch wartości odległości punktów C i P. Jeżeli punkt P jest rzeczywisty, obieramy na δ wartość dodatnią a $\varepsilon = +1$.

Jeżeli punkt P jest rzeczywisty i leży zewnątrz koła k, natenczas prosta l przecina koło w dwóch punktach rzeczywistych od siebie odmiennych. Jeżeli P leży wewnątrz koła, natenczas prosta l nie ma z kołem k żadnego punktu rzeczywistego wspólnego. Prosta l jest prostopadła do prostej CP. Stąd wypływa konstrukcja prostej l uwidoczniona w figurze 12 w przypadku, gdy punkt P leży zewnątrz koła k. W przypadku, gdy punkt P leży wewnątrz koła, tasama figura daje konstrukcję prostej l, jeżeli jako punkt P będziemy uważali punkt Q figury, a jaką prostą l prostą prostopadłą do prostej CQ i przechodzącą przez punkt P figury.

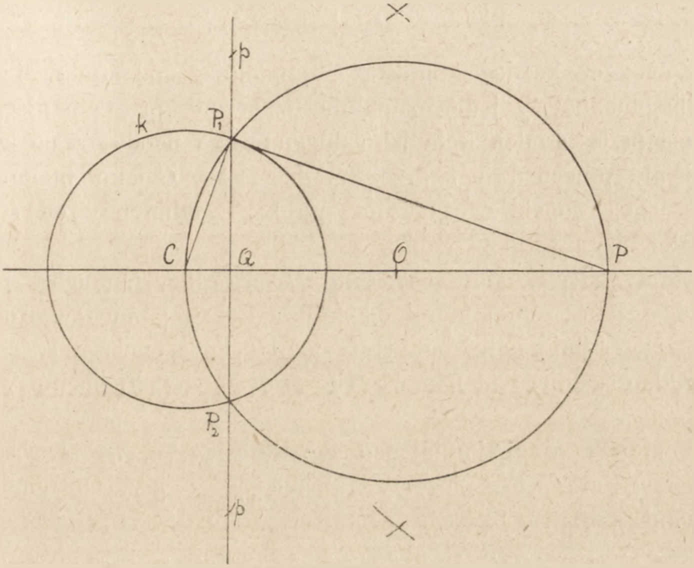

Fig 12.

Prosta l nazywa się *biegunową* (polaire) punktu P, który nazywa się biegunem (pôle) prostej l. Biegunową będziemy oznaczali literą p.

Uważajmy teraz dowolną prostą l o równaniu (19), nie przechodzącą przez środek koła k i spytajmy się, czy istnieje przynajmniej jeden punkt P, którego ta prosta jest biegunową. Potrzeba i wystarcza, aby istniał przynajmniej jeden układ trzech liczb $k \neq 0, \xi, \eta$ taki aby zachodziły równości

$$kl = \xi - a, \; km = \eta - b, \qquad (30)$$
$$kn = -a(\xi - a) - b(\eta - b) - r^2.$$

Istnieje widocznie jeden jedyny taki układ dany wzorami

$$
\begin{aligned}
k &= -\frac{r^2}{la+mb+n}, \\
\xi &= a - \frac{lr^2}{la+mb+n}, \\
\eta &= b - \frac{mr^2}{la+mb+n}.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Zatem do każdego punktu P odmiennego od środka koła C jako bieguna należy jedna zupełnie oznaczona prosta p nie przechodząca przez środek koła jako biegunowa i naodwrót do każdej prostej nie przechodzącej przez środek koła C jako biegunowej należy jeden zupełnie oznaczony punkt P odmienny od środka koła jako biegun.

Mamy więc *jednojednoznaczną odpowiedniość* pomiędzy punktami płaszczyzny odmiennymi od środka koła i pomiędzy prostemi płaszczyzny odmiennymi od prostych przechodzących przez środek koła. Odpowiedniość ta nazywa się *biegunowością* (polarité) względem koła k.

Ponieważ przynajmniej jedna z liczb $\xi - a$, $\eta - b$ jest odmienna od zera, wiec możemy założyć $\eta - b \neq 0$. Otrzymujemy z równania (28)

$$y - b = \frac{r^2 - (x-a)(\xi-a)}{\eta - b}.$$

Na odcięte punktów przecięcia biegunowej i koła otrzymujemy więc równanie drugiego stopnia

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2[(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2] - 2r^2(x-a)(\xi-a) + {} \\
+ r^2[r^2 - (\eta-b)^2] = 0,
\end{aligned}
$$

którego wyróżnik jest

$$
\begin{aligned}
w = r^2\{[(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2][r^2 - (\eta-b)^2] - {} \\
- r^2(\xi-a)^2\} = r^2(\eta-b)^2[r^2 - (\xi-a)^2 - (\eta-b)^2] = \\
= r^2(\eta-b)^2(r^2-d^2).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Zależnie od tego, czy $r > d$. $r = d$, czy też $r < d$, biegunowa p przecina koło k w dwóch punktach P_1, P_2 zespolonych sprzężonych, w jednym punkcie rzeczywistym, lub w dwóch punktach rzeczywistych.

Punkty $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ spełniają zatem warunki

$$\begin{aligned} &(x_1-a)(\xi-a)+(y_1-b)(\eta-b)-r^2=0, \\ &(x_2-a)(\xi-a)+(y_2-b)(\eta-b)-r^2=0. \end{aligned} \tag{33}$$

Styczne t_1 i t_2 koła k w punktach P_1 i P_2 mają równania

$$\begin{aligned} &(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2=0, \\ &(x-a)(x_2-a)+(y-b)(y_2-b)-r^2=0. \end{aligned} \tag{34}$$

A więc przechodzą przez biegun P. Zatem styczne w punktach przecięcia biegunowej z kołem przechodzą przez biegun P.

Naodwrót uważajmy dowolną styczną do koła k przechodzącą przez punkt P. Niechaj $P_1(x_1, y_1)$ będzie punktem styczności, a więc pierwsze równanie (34) równaniem stycznej. Zachodzi wówczas pierwsza równość (33), a więc punkt P_1 leży na biegunowej p punktu P, albowiem spełnia równanie (28).

Zatem biegunowa przechodzi przez punkty styczności stycznych z bieguna do koła poprowadzonych.

Jeżeli punkt P leży zewnątrz koła, istnieją dwie od siebie odmienne styczne t_1, t_2 rzeczywiste o punktach styczności rzeczywistych. Jeżeli punkt P leży wewnątrz koła, istnieją dwie styczne zespolone sprzężone, o punktach styczności zespolonych sprzężonych, albowiem x_1 i x_2, y_1 i y_2 są odpowiednio liczbami zespolonymi ze sobą sprzężonymi. Nareszcie jak wiemy już, jeżeli P leży na kole, mamy jednę jedyną styczną i wówczas równanie (28) biegunowej jest właśnie równaniem stycznej.

Łatwo teraz napisać równanie stycznych t_1, t_2 do koła k przechodzących przez punkt $P(\xi, \eta)$. Z pierwszego z równań (33) i z pierwszego z równań (34) można wyrazić x_1-a i y_1-b przez x i y. Wstawiając następnie wartości na x_1-a i y_1-b w równanie koła otrzymamy związek zachodzący między spółrzędnymi x, y dowolnego punktu Q położonego na jednej ze stycznych z punktu P do koła poprowadzonych. Naodwrót, jeżeli ten warunek jest spełniony, biegunowa i prosta przechodząca przez punkty P i $Q(x, y)$ przecinają się w punkcie na kole k, a więc punkt Q leży na stycznej do koła k.

Mamy

$$x_1-a=-r^2\frac{\eta-y}{(x-\xi)(\eta-b)-(y-\eta)(\xi-a)},$$

$$y_1-b=-r^2\frac{\xi-x}{(x-\xi)(\eta-b)-(y-\eta)(\xi-a)},$$

a stąd otrzymujemy równanie

$$r^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]-[(x-\xi)(\eta-b)-(y-\eta)(\xi-a)]^2=0,$$

lub

$$\begin{aligned}&(x-\xi)^2[r^2-(\eta-b)^2]+\\+\,&2(x-\xi)(y-\eta)(\xi-a)(\eta-b)+\\+\,&(y-\eta)^2[r^2-(\xi-a)^2]=0.\end{aligned}\tag{35}$$

Wyróżnik tego równania jest

$$\begin{aligned}D&=[r^2-(\eta-b)^2][r^2-(\xi-a)^2]-(\xi-a)^2(\eta-b)^2=\\&=r^2[r^2-(\xi-a)^2-(\eta-b)^2]=r^2(r^2-d^2)\end{aligned}\tag{36}$$

a stąd otrzymujemy znów odnośnie do natury stycznych poprzednie rezultaty.

6. Twierdzenia o biegunach i biegunowych.

Uważajmy punkt $P(\xi, \eta)$ i jego biegunową p o równaniu (28). Uważajmy punkt $Q(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ leżący na p.

Mamy

$$(\bar{\xi}-a)(\xi-a)+(\bar{\eta}-b)(\eta-b)-r^2=0.$$

A więc biegunowa q punktu Q o równaniu

$$(x-a)(\bar{\xi}-a)+(y-b)(\bar{\eta}-b)-r^2=0$$

przechodzi przez punkt P.

Naodwrót uważajmy dowolną prostą q przechodzącą przez punkt P nie przechodzącą przez środek koła. Możemy jej równanie napisać w postaci (37). Biegun Q prostej q leży zatem na biegunowej p punktu P. Mamy

Twierdzenie 1: „Biegunowe punktów leżących na prostej p biegunowej punktu P przechodzą przez ten punkt i naodwrót bieguny prostych przechodzących przez punkt P leżą na biegunowej p tego punktu".

Uważajmy teraz dwa od siebie odmienne punkty $P_1(\xi.\ \eta)$ i $P_2(\xi, \eta)$ oba odmienne od środka C. Uważajmy biegunowe tych punktów p_1, p_2 o równaniach

$$\begin{aligned}&(x-a)(\xi_1-a)+(y-b)(\eta_1-b)-r^2=0,\\&(x-a)(\xi_2-a)+(y-b)(\eta_2-b)-r^2=0.\end{aligned}\tag{37}$$

Wyznacznik przy x, y w tych równaniach

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - a, & \eta_1 - b \\ \xi_2 - a, & \eta_2 - b \end{vmatrix}$$

jest od zera odmienny, jeżeli punkty C, P_1, P_2 tworzą trójkąt a równa się zeru, jeżeli te trzy punkty leżą na prostej. W pierwszym przypadku biegunowe te przecinają się w punkcie P, którego biegunową p jest prosta $P_1 P_2$, co wynika z twierdzenia 1. W drugim przypadku proste te są równoległe do siebie.

Uważajmy naodwrót dwie proste p_1, p_2 nie przechodzące przez, środek koła k. Jeżeli te proste się przecinają, natenczas ich bieguny leżą na biegunowej p punktu P przecięcia, co wynika z twierdzenia 1. i tworzą trójkąt z punktem C. Jeżeli p_1, p_2 są do siebie równoległe, ich bieguny P_1, P_2 leżą z środkiem C na prostej.

Mamy zatem

Twierdzenie 2: „Biegunowe dwóch punktów tworzących trójkąt ze środkiem koła przecinają się w punkcie, którego biegunową jest prosta łącząca te 2 punkty. Naodwrót bieguny dwóch prostych przecinających się leżą na prostej biegunowej punktu przecięcia dwóch prostych.

Biegunowe dwóch punktów leżące na prostej przechodzącej przez środek koła są do siebie równoległe. Naodwrót, dwie proste do siebie równoległe nie przechodzące przez środek mają jako bieguny dwa punkty leżące na prostej przechodzącej przez środek koła“.

A więc trzem punktom P_1, P_2, P_3 leżącym na prostej p odpowiadają trzy biegunowe p_1, p_2, p_3 przecinające się w biegunie prostej p, jeżeli prosta p nie przechodzl przez środek C i naodwrót trzem prostym przecinającym się w punkcie P odpowiadają trzy punkty leżące na biegunowej tego punktu.

Można zresztą bezpośrednio okazać że jeżeli wyznacznik trzech punktów $P_1(\xi_1, \eta_1)$, $P_2(\xi_2, \eta_2)$, $P_3(\xi_3, \eta_3)$

$$W = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{39}$$

równa się zeru, natenczas wyznacznik trzech biegunowych p_1, p_2, p_3

o równaniach

$$(x-a)(\xi_i-a)+(y-b)(\eta_i-b)-r^2=0,\ i=1,2,3, \tag{40}$$

t. j.

$$\begin{vmatrix} \xi_1-a, & \eta_1-b, & -a(\xi_1-a)-b(\eta_1-b)-r^2 \\ \xi_2-a, & \eta_2-b, & -a(\xi_2-a)-b(\eta_2-b)-r^2 \\ \xi_3-a, & \eta_3-b, & -a(\xi_3-a)-b(\eta_3-b)-r^2 \end{vmatrix} \tag{41}$$

równa się zeru i naodwrót.

7. Dwa koła. Prosta potęgowa dwóch kół.

Uważajmy teraz dwa koła rzeczywiste k_1 i k_2 o równaniach

$$\begin{aligned} x^2+2xy\cos\theta+y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0. \\ x^2+2xy\cos\theta+y^2+2d_2x+2e_2y+f_2=0, \end{aligned} \tag{42}$$

Każdy punkt przecięcia się tych dwóch kół spełnia równanie, które się otrzymuje z równań (42) przez odjęcie ich od siebie stronami

$$2(d_1-d_2)x+2(e_1-e_2)y+f_1-f_2=0. \tag{43}$$

Równanie to przedstawia prostą w skończoności, jeżeli nie zachodzą równocześnie równości

$$d_1=d_2,\ e_1=e_2,$$

a więc jeżeli oba koła nie są *spółśrodkowe*. Prosta ta r nazywa się *prostą potęgową* (axe radical) kół (12). Jeżeli więc koła (42) przecinają się w dwóch punktach rzeczywistych P_1, P_2, prostą r jest prosta $P_1\ P_2$.

Naodwrót, każdy punkt przecięcia prostej potęgowej r i jednego z kół (42) leży i na drugiem kole.

Prosta potęgowa jest prostopadła do prostej l łączącej środki C_1 i C_2 obu kół, albowiem jeżeli oznaczymy przez a_1, b_1 i przez a_2, b_2 spółrzędne środków obu kół, równanie prostej l można napisać w postaci

$$\begin{aligned} (x+d_1-e_1\cos\theta)\,[e_1-e_2-(d_1-d_2)\cos\theta]- \\ -(y+e_1-d_1\cos\theta)\,[d_1-d_2-(e_1-e_2)\cos\theta]=0. \end{aligned} \tag{44}$$

Załóżmy teraz układ spółrzędnych prostokątny i oznaczmy przez d_1 i d_2 odległości prostej r od środków C_1 i C_2, a przez d odległość środków od siebie.

Mamy

$$\begin{aligned} d_1 &= \varepsilon_1 \frac{2(a_2-a_1)a_1+2(b_2-b_1)b_1+a_1^2+b_1^2-r_1^2-(a_2^2+b_2^2-r_2^2)}{2d}, \\ d_2 &= \varepsilon_2 \frac{2(a_2-a_1)a_2+2(b_2-b_1)b_1+a_1^2+b_1^2-r_1^2-(a_2^2+b_2^2-r_2^2)}{2d}. \end{aligned} \tag{45}$$

Mamy więc

$$d_1 = \varepsilon_1 \frac{-d^2-r_1^2+r_2^2}{2d}, \quad d_2 = \varepsilon_2 \frac{d^2-r_1^2+r_2^2}{2d},$$

gdzie obieramy $\varepsilon_1 = \pm 1$ i $\varepsilon_2 = \pm 1$ tak aby d_1 i d_2 były dodatnie. Możemy zawsze założyć, że mamy $r_1 \geqq r_2$, a więc $\varepsilon_1 = -1$.

Mamy następujące przypadki:

I. $d > r_1 + r_2$. Mamy $\varepsilon_2 = +1$. Mamy

$$d_1 - r_1 = \frac{(d-r_1)^2 - r_2^2}{2d} > 0,$$

$$d_2 - r_2 = \frac{(d-r_2)^2 - r_1^2}{2d} > 0,$$

a więc

$$d_1 > r_1, \quad d_2 > r_2.$$

Prosta potęgowa przechodzi pomiędzy kołami k_1 i k_2.

II. $d = r_1 + r_2$. Mamy $\varepsilon_2 = +1$,

$$d_1 = r_1, \quad d_2 = r_2.$$

Prosta potęgowa jest wspólną styczną obu kół.

III. $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

ε_2 może być albo $+1$ albo -1. W tym drugim przypadku mamy

$$d_2 - r_2 = \frac{r_1^2 - (d+r_2)^2}{2d}.$$

Mamy więc zawsze

$$d_1 < r_1, \quad d_2 < r_2.$$

Prosta potęgowa przecina oba koła k_1 i k_2.

IV. $d = r_1 - r_2$.

Mamy $\varepsilon_2 = -1$.

Mamy $d_1 = r_1$, $d_2 = r_2$.

Prosta potęgowa jest wspólną styczną obu kół.

V. $d < r_1 - r_2$. Mamy $\varepsilon_2 = -1$. Mamy

$$d_1 > r_1, \quad d_2 > r_2.$$

Prosta potęgowa nie przecina żadnego z obu kół k_1 i k_2.

8. Potęga punktu względem koła. Symboliczne równanie koła.

Uważajmy punkt P o spółrzędnych x, y i koło k o równaniu (1) lub (2). *Potęgą* (*puissance*) p^2 punktu P względem koła nazywamy wartość lewej strony równania koła dla wartości na zmienne x, y równych wartościom spółrzędnych punktu P.

Lewą stronę równania (1) lub (2) koła będziemy oznaczali jedną literą K. Równanie koła będziemy pisali symbolicznie w postaci

$$K = 0 \tag{46}$$

i równanie to nazywali *symbolicznem równaniem koła.*

Jeżeli przez d oznaczamy odległość środka C koła k od punktu P mamy

$$p^2 = d^2 - r^2. \tag{47}$$

Jeżeli więc punkt P leży zewnątrz koła k, potęga równa się kwadratowi odcinka stycznej z punktu P poprowadzonej do koła k zawartego pomiędzy punktem P a punktem styczności Q. Jeżeli punkt P leży na kole k, potęga ma wartość 0. Nareszcie jeżeli punkt P leży wewnątrz koła k potęga jest ujemna i równa się ujemnemu kwadratowi połowy cięciwy przez punkt P prostopadle do promienia koła proprowadzonej.

Uważajmy teraz dwa koła k_1 i k_2 o równaniach symbolicznych

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0. \tag{48}$$

Widoczna że prosta potęgowa obu kół, mająca równanie symboliczne

$$K_1 - K_2 = 0 \tag{49}$$

jest miejscem geometrycznem punktów P posiadających tę samą potęgę względem obu kół. Oznaczając przez d_1, d_2 odległości PC_1 i PC_2 mamy

$$p^2 = d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2. \tag{50}$$

9. Trzy koła. Środek potęgowy trzech kół.

Uważajmy trzy koła k_i, $i = 1, 2, 3$, o równaniach symbolicznych

$$K_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{51}$$

Równania trzech prostych potęgowych p_i, $i = 1, 2, 3$, tych kół można napisać w postaci symbolicznej

$$K_i - K_j = 0, \quad i \neq j; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3. \tag{52}$$

Załóżmy że środki C_i, $i = 1, 2. 3$ tych trzech kół tworzą trójkąt. Widoczna, że punkt przecięcia dwóch dowolnych z tych trzech prostych leży na trzeciej prostej. Punkt spólny P prostych potęgowych nazywa się *środkiem potęgowym (centre radical)* trzech kół. Potęgi tego punktu względem tych kół są sobie równe. Jeżeli punkt ten położony jest zewnątrz wszystkich trzech kół, natenczas jest on środkiem koła przecinającego koła dane pod kątem prostym czyli koła *ortogonalnego* trzech danych kół.

10. Pęki kół.

Uważajmy dwa koła rzeczywiste o równaniach symbolicznych (48). Równanie symboliczne

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0, \tag{53}$$

w którem λ_1, λ_2 *parametry pęku* są dwie liczby rzeczywiste dowolne nie obie równe 0 jest równaniem koła, albowiem widoczna, że spółczynniki przy x^2, xy, y^2 są odpowiednio

$$\lambda_1 + \lambda_2, \quad (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \theta, \quad \lambda_1 + \lambda_2.$$

Wszystkie koła (53) tworzą *pęk kół* (*faisceau*) K należący do dwóch danych kół.

Jeżeli $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, równanie (53) jest równaniem pierwszego stopnia i przedstawia prostą potęgową obu kół danych.

Uważajmy dwa dowolne od siebie odmienne koła $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ pęku (53) o równaniach symbolicznych

$$\begin{aligned} \lambda_1' K_1 + \lambda_2' K_2 &= 0, \\ \lambda_1'' K_1 + \lambda_2'' K_2 &= 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Mamy więc

$$\lambda_1' \lambda_2'' - \lambda_2' \lambda_1'' \neq 0.$$

Pęk $\overline{K}$ kół należący do kół $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ jest identyczny z pękiem (53). Oznaczając przez $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ lewe strony równań (54) równanie kół pęku $(\overline{K})$ jest

$$\bar{\lambda}_1 \bar{k}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{k}_2 = 0, \tag{55}$$

gdzie $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ są parametry pęku $(\overline{K})$. Pomiędzy parametrami λ_1, λ_2 a parametrami $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ mamy związki

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 \lambda_1' + \bar{\lambda}_2 \lambda_1'' &= \lambda_1, \\ \bar{\lambda}_1 \lambda_2' + \bar{\lambda}_2 \lambda_2'' &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Pęk $(\overline{K})$ ma tę samą prostą potęgową co pęk (K), a parametry $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ spełniają dla prostej potęgowej warunek

$$\bar{\lambda}_1 (\lambda_1' + \lambda_2') + \bar{\lambda}_2 (\lambda_1'' + \lambda_2'') = 0.$$

Koła k_1, k_2 mają albo różne środki albo tensam środek. W drugim przypadku wszystkie koła pęku (K) mają tensam środek, albowiem na spółrzędne środków kół pęku mamy wzory

$$a = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

W pierwszym przypadku żadne dwa koła pęku nie mają tego samego środka. Mamy więc dwie kategorje pęków kół: pęki *niewspółśrodkowe* i pęki *współśrodkowe.*

Uważajmy pęk I. kategorji. Koła k_1, k_2 mogą względem siebie zajmować trojakie położenie: 1. Przecinają się w dwóch punktach rzeczywistych. 2. Nie mają wspólnych punktów rzeczywistych. 3. Są styczne do siebie.

Wszystkie koła danego pęku (k) przechodzą przez punkty wspólne dwom kołom k_1, k_2 pęku. A więc każde 2 koła pęku (k) zajmują względem siebie to samo położenie co dwa koła k_1, k_2 pęku. Możemy więc pęki kół podzielić na *trzy rodzaje*, zależnie od położenia każdej pary kół pęku względem siebie.

Koła pęku *pierwszego rodzaju* i *drugiego rodzaju* są wszystkie *rzeczywiste.* Każde koło k przechodzące przez 2 punkty P_1, P_2 wspólne dwom kołom pęku pierwszego rodzaju należy do tego pęku. Uważajmy bowiem punkt P o spółrzędnych ξ, η leżący na kole k odmienny od punktów P_1, P_2 i wyznaczmy parametry λ_1, λ_2 ze związku

$$\lambda_1 K_1(\xi, \eta) + \lambda_2 K_2(\xi, \eta) = 0,$$

gdzie $K_1(\xi, \eta)$, $K_2(\xi, \eta)$ są to rezultaty wstawienia za x, y w lewe strony równań (48) spółrzędnych ξ, η. Koło pęku o równaniu

$$K_1 K_2(\xi, \eta) - K_2 K_1(\xi, \eta) = 0$$

jest właśnie kołem przechodzącem przez punkt P.

Taksamo każde koło przechodzące przez punkt P styczności kół pęku drugiego rodzaju i styczne do jednego z tych kół, jest kołem tego pęku.

Uważajmy znów dwa koła k_1, k_2 rzeczywiste i pęk (55). Mamy oznaczając przez d, e, f spółczynniki ogólnego koła pęku, a przez r^2 kwadrat promienia

$$d = \frac{\lambda_1 d_1 + \lambda_1 d_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad e = \frac{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad f = \frac{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$r^2 = \frac{d^2 - 2de\cos\theta + e^2}{\sin^2\theta} - f.$$

Załóżmy układ spółrzędnych prostokątny. Mamy

$$r^2 = \frac{(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2)^2 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} - \frac{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Znak r^2 zależy od znaku formy kwadratowej o zmiennych λ_1, λ_2.

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2(d_1^2 + e_1^2 - f_1) + \lambda_1 \lambda_2 (2d_1 d_2 + \\ + 2e_1 e_2 - f_1 - f_2) + \lambda_2^2(d_2^2 + e_2^2 - f_2), \tag{57}$$

którą możemy też napisać w postaci

$$r_1^2 \lambda_1^2 + (r_1^2 + r_2^2 - \delta^2)\lambda_1 \lambda_2 + r_2^2 \lambda_2^2.$$

Wyróżnik tej formy jest

$$D = r_1^2 r_2^2 - \tfrac{1}{4}(r_1^2 + r_2^2 - \delta^2)^2, \tag{58}$$

i równa się iloczynowi $\frac{1}{4}$ przez

$$(\delta + r_1 - r_2)(\delta - r_1 + r_2)(r_1 + r_2 + \delta)(r_1 + r_2 - \delta).$$

Możemy założyć $r_1 \geqq r_2$. Znak iloczynu zależy od znaku iloczynu

$$(\delta - r_1 + r_2)(r_1 + r_2 - \delta).$$

Wyróżnik jest więc *dodatni*, gdy zachodzą nierówności

$$r_1 - r_2 < \delta < r_1 + r_2.$$

Wszystkie koła pęku są rzeczywiste o promieniu dodatnim, albowiem forma (57) jest dla wszystkich λ_1, λ_2 nie obu równych 0 dodatnia. W istocie, formę tę możemy napisać w postaci

$$\frac{1}{a}[(a\lambda_1 + b\lambda_2)^2 + D\lambda_2^2],$$

gdzie $a = r_1^2 > 0$.

Wyróżnik jest *ujemny*, gdy zachodzą nierówności:

albo

$$\delta > r_1 + r_2$$

albo

$$\delta < r_1 - r_2.$$

Koła pęku są albo rzeczywiste albo urojone. W pęku istnieją dwa koła o promieniu 0, które się otrzymuje rozwiązując równanie

$$(a\lambda_1 + b\lambda_2)^2 + D\lambda_2^2 = 0$$

względem stosunku $\lambda_1 : \lambda_2$. Są to *koła zerowe* pęku.

Wyróżnik równa się zeru, gdy zachodzą równości:

albo

$$\delta = r_1 + r_2$$

albo

$$\delta = r_1 - r_2.$$

Wszystkie koła pęku są rzeczywiste. W pęku istnieje jedno jedyne koło zerowe, którego parametry otrzymuje się z równania

$$a\lambda_1 + b\lambda_2 = 0.$$

11. Koła ortogonalne.

Uważajmy znów dwa koła k_1, k_2 o równaniach (42), zakładając układ spółrzędnych prostokątny. Koła te są ortogonalne jeżeli styczne w punktach przecięcia P_1 i P_2 obu kół są do siebie prostopadłe. Mamy więc warunek ortogonalności dwóch kół

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = r_1^2 + r_2^2, \tag{59}$$

albo

$$2(d_1 d_2 + e_1 e_2) - f_1 - f_2 = 0. \tag{60}$$

Każdy punkt P osi potęgowej dwóch kół leżący zewnątrz obu kół jest środkiem koła K ortogonalnego dwóch danych kół k_1, k_2 o promieniu równym pierwiastkowi potęgi puuktu P względem obu kół.

Uważajmy trzy koła k_1, k_2, k_3 o równaniach

$$x^2+y^2+2d_i x+2e_i y+f_i=0, \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{61}$$

i środek potęgowy C tych kół. Niechaj (2) będzie równanie koła K ortogonalnego tych trzech kół. Mamy więc warunki

$$2(d\,d_i+e\,e_i)-f-f_i=0, \quad i=1,\ 2,\ 3. \tag{62}$$

Rugując z równań (61) i z równania (62) wielkości d, e, f otrzymujemy wyznacznik czwartego stopnia, który przyrównany do zera daje równanie koła ortogonalnego trzech kół danych

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ -f_1 & d_1 & e_1 & -1 \\ -f_2 & d_2 & e_2 & -1 \\ -f_3 & d_3 & e_3 & -1 \end{vmatrix}=0. \tag{63}$$

Wyznacznik można przedstawić w postaci wyznacznika trzeciego stopnia i otrzymuje się równanie

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-f_1, & x+d_1, & y+e_1 \\ x^2+y^2-f_2, & x+d_2, & y+e_2 \\ x^2+y^2-f_3, & x+d_3, & y+e_3 \end{vmatrix}=0,$$

które można jeszcze napisać w postaci

$$\begin{vmatrix} x+d_1, & y+e_1, & d_1x+e_1y+f_1 \\ x+d_2, & y+e_2, & d_2x+e_2y+f_2 \\ x+d_3, & y+e_3, & d_3x+e_3y+f_3 \end{vmatrix}=0. \tag{64}$$

Ćwiczenia.

1. Mamy trzy punkty $P_i(\xi_i, \eta_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$, nie leżące na prostej. Niechaj Q_i, $i=1,\ 2,\ 3$ będą odpowiednio przecięcia biegunowych p_i punktów P_i. Okazać że proste $P_i\,Q_i$ przechodzą przez punkt.

2. Mamy trzy biegunowe p_i tworzące trójkąt. Uważajmy proste q_i łączace odpowiednio bieguny P_i prostych p_i. Okazać, że punkty Q_i przecięcia prostych p_i, q_i leżą na prostej.

3. Znaleść równanie kół K stycznych do danego koła K_0.

4. Znaleść równanie koła przechodzącego przez 3 dane punkty.

5. Znaleść warunek, aby 4 punkty leżały na temsamem kole.

6. Znaleźć równanie kół stycznych do 3-ch danych prostych.

7. Znaleźć warunek, aby 4 dane proste były styczne do tegosamego koła.

8. Znaleźć miejsce geom. punktów P z których dany odcinek widziany jest pod danym kątem φ.

9. Znaleźć miejsce punktów, których biegunowe względem 3 kół przechodzą przez 1 punkt.

10. Biegunowe punktu P względem kół pęku tworzą pęk prostych.

11. Kiedy biegunowe punktu P względem kół pęku schodzą się wszystkie ze sobą?

12. Dane 2 koła K_1, K_2. Znaleść spółrzędne *punktów podobieństwa* tych kół P_1, P_2, tj. punktów z których można poprowadzić styczne do obu kół.

13. Dane są 3 koła K_i, $i = 1, 2, 3$. Każda para kół ma 2 punkty podobieństwa, jeden zewnętrzny, jeden wewnętrzny.

Okazać, że 3 zewnętrzne punkty podobieństwa leżą na prostej, *zewnętrznej* osi podobieństwa. Dwa wewnętrzne punkty podobieństwa i zewnętrzny punkt podobieństwa należący do 3-ciej pary kół leżą na prostej.

14. Uważajmy 2 koła K, K' i ich punkty podobieństwa P_1, P_2. Okazać, że biegunowe p_1, p_1' punktu P_1 i taksamo biegunowe p_2, p_2' punktu P_2 są równo oddalone od prostej r potęgowej obu kół.

15. Znaleść równania stycznych do 2-ch danych kół.

16. Okazać, że miejscem geometrycznem środków kół *izogonalnych* względem 3-ch danych kół, tj. przecinających je pod tymsamym kątem jest prosta przechodząca przez środek potęgowy C tych kół i prostopadła do zewnętrznej osi podobieństwa.

17. Znaleść miejsce geom. biegunów danej prostej względem kół pęku.

18. Okazać, że pęk ortogonalnych kół pęku kół pierwszego rodzaju jest pękiem drugiego rodzaju i naodwrót.

19. Trzy koła, których średnicami są 3 cięciwy koła k przechodzące przez tensam punkt tego koła przecinają się w 3 punktach leżących na prostej.

20. Miejscem geom. punktów P z których prostopadłe spuszczone na dwie proste mają spodki A, B mające stałą odległość $\overline{AB} = d$ jest koło.

ROZDZIAŁ XI.

1. Elipsa i jej równanie.

Uważajmy na płaszczyźnie dwa od siebie odmienne punkty C, C' i oznaczmy przez $2c$ odległość tych punktów. Wprowadźmy układ spółrzędnych prostokątnych Kartezjusza, którego początkiem O jest punkt połowiący odcinek CC', którego osią x jest prosta CC' o kierunku dodatnim od punktu C' do punktu C i którego oś y zawiera z osią x kąt $+\frac{\pi}{2}$. Uważajmy dowolny punkt P na płaszczyźnie o spółrzędnych x, y i oznaczmy przez r, r' odległości tego punktu od punktów C, C' $r = \overline{PC}$, $r' = \overline{PC'}$. Niechaj $2a$ będzie sumą odległość r i r'

$$r + r' = 2a. \tag{1}$$

Zachodzi nierówność

$$a \geqq c,$$

a mianowicie $a = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na osi x na odcinku CC'.

Załóżmy, że P nie leży na osi x. Otrzymamy r i r' z trójkątów prostokątnych $\triangle CPM$ i $\triangle C'PM$, gdzie M jest spodkiem prostopadłej z punktu P na oś x poprowadzonej. Ponieważ spółrzędne punktów C i C' są $c, 0$ i $-c, 0$, więc mamy

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ r' &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Te same wzory są słuszne, gdy punkt P leży na osi x-ów, tj. gdy mamy $y = 0$.

Spółrzędne punktu P spełniają zatem związek

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3}$$

Uważajmy teraz dowolną liczbę dodatnią a, spełniającą warunek $a > c$. Spółrzędne wszystkich punktów P spełniających warunek (1) spełniają równanie (3) i naodwrót. Podnieśmy obie strony równania (3) do kwadratu. Otrzymamy

$$(x+c)^2+(x-c)^2+2y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2,$$

a więc

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-2(x^2+y^2+c^2).$$

Podnosząc jeszcze raz do kwadratu otrzymujemy

$$[(x+c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2]=4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+$$
$$+(x^2+y^2+c^2)^2,$$

a stąd

$$a^4-a^2(x^2+y^2+c^2)=-c^2x^2.$$

Wprowadzając liczbę dodatnią b określoną wzorem

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \tag{4}$$

mamy równanie

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \tag{5}$$

i równoważne równanie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{6}$$

Otrzymujemy więc równania krzywej drugiego stopnia. Krzywa ta nazywa się *elipsą* a równania (5) i (6) *równaniami elipsy*. A więc każdy punkt P spełniający równanie (3), spełnia równania (5) i (6). W dalszym ciągu będziemy uważali równanie elipsy w postaci (6) i przez równanie elipsy rozumieli to równanie.

Okażemy teraz, że naodwrót, każdy punkt spełniający równanie (6) spełnia warunek (1) a więc leży na elipsie. W istocie od równania (6) dochodzimy wstecz do równania

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a^2-(x^2+y^2+c^2),$$

gdzie z lewej strony znaki obu pierwiastków są te same, albowiem prawa strona jest dodatnia, gdyż

$$a^2>c^2$$

i

$$a^2>x^2+y^2,$$

albowiem

$$a^2 = x^2 + y^2\frac{a^2}{b^2}.$$

Wyciągając znów pierwiastki otrzymujemy równanie (3) *z dodatnimi* wartościami pierwiastków.

2. Badanie kształtu elipsy.

Na osi x-ów leżą dwa punkty elipsy

$$x = a \quad \text{i} \quad x = -a,$$

tak samo na osi y-ów leżą dwa punkty elipsy

$$y = b \quad \text{i} \quad y = -b.$$

Punkty te, które oznaczać będziemy odpowiednio przez A, A' i B, B' nazywamy *wierzchołkami* elipsy. Odcinki AA' i BB' o miarach $2a$ i $2b$ nazywają się *osiami* elipsy, a mianowicie *wielką* i *małą* osią elipsy.

Rozwiązując równanie (6) względem y i względem x otrzymujemy wzory

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{7}$$

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \tag{8}$$

Każdej wartości na x, której wartość bezwzględna jest $< a$ odpowiadają dwie rzeczywiste wartości na y różniące się znakiem, a każdej wartości na x, której wartość bezwzględna jest $> a$ odpowiadają dwie czysto urojone ze sobą sprzężone wartości na y. Tak samo się mają rzeczy dla y. A więc elipsa jest symetryczna względem obu osi spółrzędnych i jej punkty rzeczywiste leżą w prostokącie o środku O i o bokach równoległych do osi x, y o długościach $2a$ i $2b$.

Punkt O nazywa się *środkiem* elipsy. Punkty C i C' nazywają się *ogniskami* (focus, foyer) elipsy; oznaczać będziemy je odpowiednio literami F i F'. Odcinki FP i $F'P$ są to *promienie wodzące* (rayon vecteur) punktu P. *Parametrem* elipsy nazywa się liczba $\frac{b^2}{a}$, równające się bezwzględnej wartości rzędnej punktu na elipsie o odciętej c, tj. rzędnej wystawionej w ognisku F elipsy (lub w F').

3. Styczna do elipsy i jej równanie.

Styczną (tangente) elipsy w punkcie P elipsy nazywamy prostą, która prócz punktu P niema innego punktu rzeczywistego ani urojonego wspólnego z elipsą. Niechaj ξ, η będą spółrzędne punktu P rzeczywistego lub urojonego, a więc niechaj

$$y - \eta - k(x - \xi) = 0 \tag{9}$$

będzie równaniem prostej l przechodzącej przez ten punkt i nie równoległej do osi y-ów i spytajmy się, kiedy ta prosta jest styczną do elipsy w punkcie P. Wstawmy wartość na y daną równaniem (9) w równanie elipsy. Otrzymamy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{[\eta + k(x - \xi)]^2}{b^2} - 1 = 0$$

dające nam odcięte punktów przecięcia prostej l z elipsą. Równanie to jest zawsze równaniem drugiego stopnia, a jednym z pierwiastków równania tego jest ξ. Aby prosta (9) była styczną, potrzeba i wystarcza, aby pierwiastek ξ był jedynym pierwiastkiem równania.

Porządkując równanie według potęg x otrzymujemy równanie

$$x^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right] + 2x\left[\frac{k\eta}{b^2} - \frac{k^2\xi}{b^2}\right] + \text{const} = 0. \tag{10}$$

Równanie to jest zawsze równaniem drugiego stopnia i posiada pierwiastek podwójny $x = \xi$ wtedy i tylko wtedy, gdy mamy

$$2\xi = -2\,\frac{k\eta - k^2\xi}{b^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right]},$$

a więc gdy mamy

$$\xi b^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right] = k^2\xi - k\eta,$$

$$\xi\frac{b^2}{a^2} = -k\eta$$

$$k = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}. \tag{11}$$

Otrzymujemy zatem jednę jedyną wartość na k, skończoną, gdy $\eta \neq 0$. Wstawiając w równanie (9) otrzymujemy równanie

$$y - \eta + \frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - \xi) = 0,$$

a więc zważając na związek

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0$$

otrzymujemy równanie stycznej

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0. \tag{12}$$

Równanie stycznej otrzymujemy zatem z równania elipsy zastępując w tem równanie jedno x przez ξ i jedno y przez η.

Spytajmy się teraz, czy prosta równoległa do osi y-ów może być styczną do elipsy w punkcie P. Widoczna, że prosta

$$x - C = 0$$

jest styczną do elipsy wtedy i tylko wtedy, gdy mamy

$$C = \pm a,$$

tj. gdy P schodzi się z jednym z wierzchołków A lub A' na osi x-ów. W tych punktach mamy więc również jedną jedyną styczną o równaniu

$$x \mp a = 0. \tag{13}$$

Równanie to zawarte jest zresztą w ogólnem równaniu (12) dla $\eta = 0$, $\xi = \pm a$.

4. Konstrukcja stycznej do elipsy.

Do każdej elipsy e o równaniu (6) należą dwa koła współśrodkowe k_a, k_b o promieniach a i b i o środku w punkcie O, środku elipsy. Przy pomocy tych kół możemy *skonstruować* elipsę, tj. przy pomocy cyrkla i lineatu znaleźć punkty P elipsy posiadające daną odciętą ξ, lub daną rzędną η. Mamy dla punktów P elipsy o odciętej ξ

$$\eta = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \xi^2},$$

a dla punktów koła k_a o odciętej ξ

$$\eta' = \sqrt{a^2 - \xi^2},$$

a więc

$$|\eta| : |\eta'| = b : a. \tag{14}$$

Styczne do elipsy i do koła k_a w punktach P i Q posiadających tę samą odciętą, przecinają się w punkcie M położonym na osi x-ów. W istocie równanie stycznej do koła k_a jest

$$x\xi + y\eta' - a^2 = 0. \tag{15}$$

Kładąc $y = 0$ w równaniach (12) i (15) otrzymujemy oba razy

$$x = \frac{a^2}{\xi},$$

przyczem zakładamy $\xi \neq 0$.

Daje to nam konstrukcję stycznej t w punkcie P jako prostej PM, przyczem M jest przecięciem stycznej t' do koła w punkcie Q, prostopadłej do promienia OQ z osią x.

Zupełnie tak samo konstruujemy elipsę przy pomocy koła k_b, uważając punkty R posiadające tę samą rzędną co punkt P. Oznaczając przez ξ'' odcięte tych punktów mamy

$$\xi = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \eta^2}$$

$$\xi'' = \sqrt{b^2 - \eta^2},$$

a więc

$$|\xi| : |\xi''| = a : b. \tag{16}$$

Styczna t do elipsy o równaniu (12) i styczna t'' do koła k_b o równaniu

$$x\xi'' + y\eta - b^2 = 0 \tag{17}$$

przecinają się w punkcie N na osi y o rzędnej

$$y = \frac{b^2}{\eta}, \tag{18}$$

przyczem zakładamy $\eta \neq 0$.

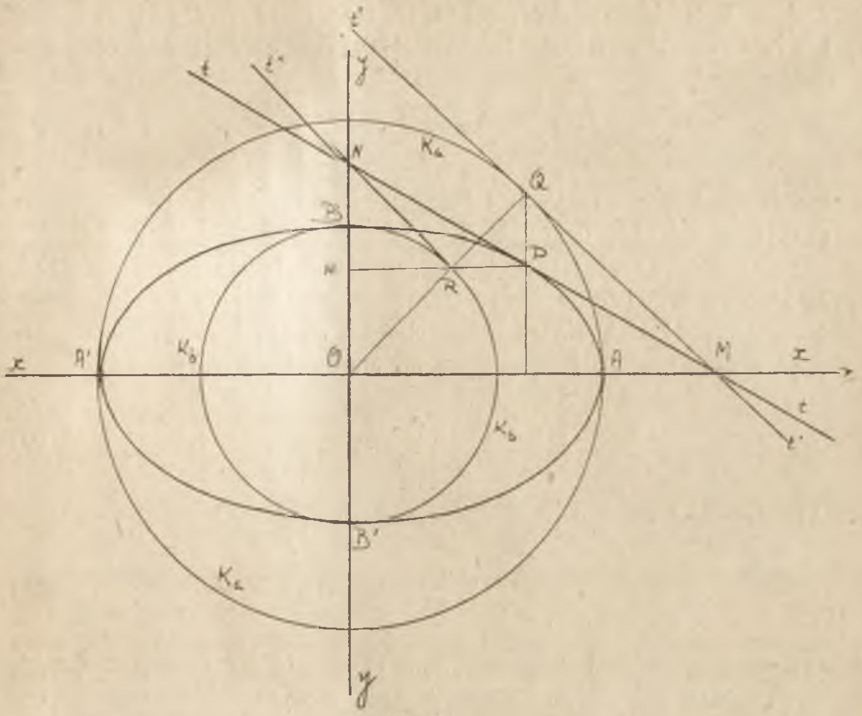

Fig. 13.

Punkty P elipsy konstruujemy najprościej (fig. 13) przy pomocy kół k_a, k_b konstruując do danego punktu G na osi x punkty Q, R, P, albo do danego punktu H na osi y punkty R, Q, P.

5. Bieguny i biegunowe względem elipsy.

Uważajmy dowolny punkt P na płaszczyźnie o spółrzędnych ξ, η. Prostą p o równaniu (12) nazywamy *biegunową* (polaire) punktu P względem elipsy (6), a punkt P jej *biegunem* (pôle). Do każdego punktu odmiennego od środka elipsy należy więc zupełnie oznaczona biegunowa. Do środka elipsy należy prosta w nieskończoności jako biegunowa.

Do każdej prostej nie przechodzącej przez środek elipsy należy zupełnie oznaczony punkt P jako biegun. W istocie, aby prosta o równaniu

$$Ax + By + C = 0 \tag{19}$$

$C \neq 0$ była biegunową punktu P o spółrzędnych ξ, η potrzeba i wystarcza, aby istniała liczba $k \neq 0$ taka, że zachodzą równości

$$kA = \frac{\xi}{a^2}, \quad kB = \frac{\eta}{b^2}, \quad kC = -1,$$

z których liczby $k \neq 0$, ξ, η wyznaczają się w sposób jednoznaczny, przyczem nie obie liczby ξ, η są równe zeru.

Biegunowa (12) przecina elipsę (6) w dwóch punktach, które są albo rzeczywiste od siebie odmienne, albo urojone ze sobą sprzężone, albo schodzą się ze sobą. Niechaj x_1, y_1 i x_2, y_2 będą spółrzędne punktów P_1 i P_2 przecięcia. Mamy więc równości

$$\frac{x_i\xi}{a^2} + \frac{y_i\eta}{b^2} - 1 = 0, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Ale równości te oznaczają, że proste o równaniach

$$\frac{xx_i}{a^2} + \frac{yy_i}{b^2} - 1 = 0 \tag{21}$$

przechodzą przez biegun $P(\xi, \eta)$. Proste te są to styczne t_1, t_2 w punktach P_1, P_2 do elipsy. A więc styczne w punktach P_1, P_2 przechodzą przez biegun P. Naodwrót niechaj punkt Q o spółrzędnych $\overline{x}$, $\overline{y}$ będzie punktem styczności stycznej $\overline{t}$ do elipsy przechodzącej przez biegun P. Mamy

$$\frac{\overline{x}\xi}{a^2} + \frac{\overline{y}\eta}{b^2} - 1 = 0,$$

a więc punkt Q leży na biegunowej (12) punktu P, tj. jest jednym z punktów P_1, P_2.

Jeżeli biegun P leży na elipsie, biegunową jest styczna t w tym punkcie do elipsy, a więc punkty P_1, P_2 schodzą się z biegunem P. Naodwrót, jeżeli biegun leży na biegunowej, leży on na elipsie.

Uważajmy równania (20) i (21) i obliczmy z nich x_i, y_i, wyrażając je przez ξ, η i x, y. Rozwiązując te równania 1-go stopnia względem x_i, y_i otrzymamy

$$x_i = \frac{a^2(\eta - y)}{x\eta - y\xi}, \quad y_i = \frac{b^2(\xi - x)}{y\xi - x\eta}, \quad i = 1, 2. \tag{22}$$

Możemy więc wyrazić spółrzędne punktów styczności P_i, $i = 1, 2$ przez spółrzędne bieguna P i dowolnego punktu M o spółrzędnych x, y położonego na stycznej t_i, $i = 1, 2$. Wstawiając wyrażenia (22) w równanie elipsy (6) otrzymujemy równanie

$$a^2(\eta - y)^2 + b^2(\xi - x)^2 - (x\eta - y\xi)^2 = 0, \tag{23}$$

które jest spełnione przez punkty obu stycznych t_i, $i = 1, 2$ po-

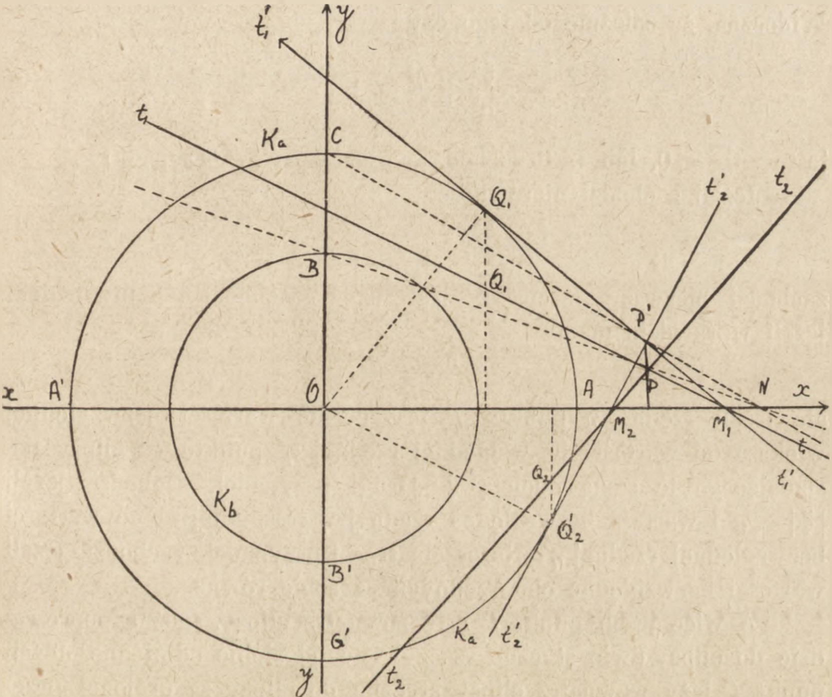

Fig. 14.

prowadzonych do elipsy w punktach P_i, $i = 1, 2$ i przechodzących przez punkt P.

Wprowadźmy nowy układ spółrzędnych x', y', o początku P i o osiach x', y' równoległych i równo skierowanych z osiami x, y. Mamy

$$x = \xi + x', \qquad y = \eta + y', \tag{24}$$

a więc równanie (23) napiszemy w nowych spółrzędnych w postaci

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 - (x'\eta - y'\xi)^2 = 0.$$

lub

$$(b^2 - \eta^2)x'^2 - 2\xi\eta x'y' + (a^2 - \xi^2)y'^2 = 0. \tag{25}$$

Dwie proste przedstawione przez to równanie są odmienne od siebie rzeczywiste, urojone sprzężone ze sobą lub zlewają się ze sobą, zależnie od znaku wyróżnika

$$D = (b^2 - \eta^2)(a^2 - \xi^2) - \xi^2\eta^2 = a^2b^2 - a^2\eta^2 - b^2\xi^2. \tag{26}$$

Widoczna, że zależnie od tego czy

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1$$

jest > 0, < 0, lub $= 0$ zachodzą powyższe trzy przypadki.

Jeżeli zachodzi nierówność

$$|\xi| > a,$$

zachodzi pierwszy przypadek. Tak samo zachodzi ten przypadek, jeżeli wprawdzie mamy

$$|\xi| < a,$$

ale jeżeli rzędna η punktu P jest co do wartości bezwzględnej większa od wartości bezwzględnej rzędnej η' punktu P' elipsy posiadającego tę samą odciętą ξ. Drugi przypadek zachodzi, jeżeli $|\xi| < a$ i wartość bezwzględna rzędnej η jest mniejsza od wartości bezwzględnej rzędnej η'. Nareszcie trzeci przypadek zachodzi, jeżeli wartości bezwzględne obu rzędnych są sobie równe.

A więc jeżeli punkt P leży zewnątrz elipsy, można poprowadzić do elipsy dwie styczne rzeczywiste od siebie odmienne. Jeżeli punkt P leży wewnątrz elipsy styczne do elipsy są urojone sprzężone. Nareszcie styczne zlewają się w jedną styczną, jeżeli P leży na elipsie.

Stąd wypływa konstrukcja stycznych do elipsy z punktu zewnątrz elipsy, gdyż biegunową łatwo skonstruować. Prostsza jednak konstrukcja stycznych jest następująca. Ze wzorów (12) i (15) wynika, że styczne t i t' w punktach Q i Q' elipsy i koła k_a mających tę samą odciętą i położonych z tej samej strony osi x przecięte są prostymi $x = C$ w punktach P, P', których rzędne stoją do siebie w stosunku $b:a$. A więc styczne do koła przechodzące przez punkt P'

o spółrzędnych ξ, $\eta' = \frac{a}{b}\eta$ i odpowiednie styczne do elipsy przechodzące przez punkt P przecinają się w dwóch punktach M_1, M_2 położonych na osi x. Stąd wypływa konstrukcja figury (14). Łączymy P z B, otrzymując punkt N na osi x, następnie łącząc N z C otrzymujemy P'. Styczne t_1, t_2 z punktu P' do koła k_a dają nam punkty M_1, M_2 na osi x. Proste M_1P i M_2P są stycznymi t_1, t_2 do elipsy, a punkty przecięcia Q_1, Q_2 stycznych z prostopadłymi do osi x przez punkty Q'_1, Q'_2 styczności na kole k_a poprowadzonymi są punktami styczności Q_1, Q_2 stycznych t_1, t_2.

6. Elipsa urojona i jej równanie.

Uważamy równanie drugiego stopnia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \tag{27}$$

różniące się tylko tem od równania (6) elipsy, że zamiast -1 mamy $+1$. Widoczna, że niema punktu rzeczywistego, którego spółrzędne spełniają to równanie. Każdej wartości na x odpowiadają dwie wartości urojone na y

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{-(a^2 + x^2)}$$

i tak samo każdej wartości na y odpowiadają dwie wartości urojone sprzężone na x

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{-(b^2 + y^2)}.$$

Mówimy, że te punkty są położone na *elipsie urojonej*, której *równaniem* nazywamy równanie (27). Liczby $2a$ i $2b$ nazywają się długościami osi wielkiej i małej elipsy urojonej.

Dla odróżnienia od elipsy urojonej nazywamy też elipsę *elipsą rzeczywistą*, a krótko elipsą tylko wtedy gdy nie może być nieporozumienia.

7. Hiperbola i jej równanie.

Uważajmy znów dwa punkty na płaszczyźnie oddalone od siebie o $2c$, $c > 0$ i wprowadźmy układ spółrzędnych, którego osią

x jest prosta CC' z kierunkiem dodatnim od C' do C, a osią y symetralną odcinka CC' z kierunkiem dodatnim zawierającym kąt $+\frac{\pi}{2}$ z kierunkiem osi x.

Uważajmy dowolną liczbę dodatnią $2a$ i szukajmy punktów P na płaszczyźnie takich, że różnica odległości

$$r = \overline{CP} \quad \text{i} \quad r' = \overline{C'P}$$

punktu P od punktów C i C' równa się tej liczbie $2a$

$$r - r' = 2a. \tag{28}$$

Widoczna, że wartość bezwzględna liczby a nie może przekraczać liczby c. Jeżeli $a = c$, otrzymujemy punkty położone na osi x-ów o odciętej $x \leqq -c$, a jeżeli $a = -c$ punkty położone na tejże osi o odciętej $x \geqq c$.

Załóżmy

$$|a| < c \tag{29}$$

i oznaczmy przez M spodek prostopadłej spuszczonej z punktu P na oś x-ów. Mamy

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$r' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

a więc mamy warunek

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a. \tag{30}$$

Podnosząc do kwadratu mamy

$$(x+c)^2 + (x-c)^2 + 2y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2,$$

stąd otrzymujemy podnosząc raz jeszcze do kwadratu

$$[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2.$$

Dochodzimy więc do równania drugiego stopnia

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0.$$

Wprowadzamy wielkość dodatnią b^2 określoną wzorem

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{31}$$

i otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{32}$$

i równanie równoważne

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0. \tag{33}$$

Równania (32) i (33) przedstawiają krzywą drugiego stopnia, która się nazywa *hiperbolą*. Każdy punkt spełniający warunek (28) leży więc na hiperboli o równaniu (32) lub (33).

Uważajmy teraz naodwrót równanie (33) lub (32). Dochodzimy wstecz do równania

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} - (x^2+y^2+c^2-2a^2) = 0.$$

W równaniu tem należy obrać pierwiastki ze znakami $+$ albowiem łatwo widać, że

$$x^2+y^2+c^2-2a^2$$

jest zawsze dodatnie. W istocie mamy

$$c^2 > a$$

i

$$x^2+y^2 > a^2,$$

którą to ostatnią nierówność wyprowadzamy natychmiast z równania hiperboli.

Z równania poprzedniego otrzymujemy albo równanie (30) albo też równanie

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = -2a, \tag{30'}$$

które się różni od równania (30) tem, że z prawej strony mamy zamiast $2a$ $-2a$. Zarówno punkty spełniające równanie (30) jak i punkty spełniające równanie (30′), a więc warunek

$$r - r' = -2a \tag{28'}$$

leżą na hiperboli (33) i widoczna, że jeżeli $a > 0$, pierwsze punkty leżą na lewo od osi y, a drugie na prawo od tej osi, a jeżeli $a < 0$ rzeczy się mają odwrotnie. Zresztą z równania (30) otrzymujemy

$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2+y^2+4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

więc

$$cx = -a^2 - a\sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$x < 0,$$

i tak samo z równania (30′) wynika

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

więc

$$cx = a^2 + a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$x > 0.$$

Założymy w dalszym ciągu, że a jest liczbą *dodatnią*. Przez b będziemy rozumieli *dodatni* pierwiastek z b^2. Równanie hiperboli będziemy zwykle uważali w postaci (33).

8. Badanie kształtu hiperboli.

Hiperbola (33) posiada na osi x-ów dwa punkty A i A' o spółrzędnych $x = a$ i $x = -a$. Na osi y-ów niema punktu rzeczywistego, gdyż dla $x = 0$ mamy $y = \pm ib$. Uważamy jednak na tej osi dwa punkty rzeczywiste B i B' o spółrzędnych $y = b$ i $y = -b$ i nazywamy 4 punkty A, A', B, B' *wierzchołkami* hiperboli. Odcinek $A'A$ nazywamy *osią rzeczywistą* hiperboli, zaś odcinek $B'B$ *osią urojoną*. Punkt O nazywa się *środkiem* hiperboli.

Z równania (33) otrzymujemy

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{34}$$

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}. \tag{35}$$

Każdej wartości na x takiej, że $|x| > a$ odpowiadają dwie rzeczywiste wartości na y od siebie odmienne i różniące się tylko znakiem. Każdej wartości na x takiej, że $|x| < a$ odpowiadają dwie urojone ze sobą sprzężone wartości na y. Każdej wartości na y odpowiadają dwie rzeczywiste od zera i od siebie odmienne i różniące się tylko znakiem wartości na x. A więc hiperbola jest symetryczna względem obu osi spółrzędnych i składa się z dwóch oddzielnych części położonych po obu stronach osi y-ów, które się nazywają *gałęziami* hiperboli i których równaniami są odpowiednio równania (30) i (30′). Punkty C, C' nazywają się *ogniskami* (foyer) hiperboli.

Będziemy je oznaczali przez F, F'. Wartość bezwzględna rzędnej w ognisku tj. liczba $\frac{b^2}{a}$ nazywa się, jak dla elipsy, *parametrem* p hiperboli.

Hiperbola, dla której $a = b$, nazywa się *równoboczną*.

9. Asymptoty hiperboli.

Uważajmy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \tag{36}$$

które się od równania (33) hiperboli różni tylko tem, że zamiast -1 mamy 0. Równanie to przedstawia dwie linje proste przechodzące przez początek układu

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \tag{37}$$

Proste te widocznie nie mają punktów w skończoności wspólnych z hiperbolą ani rzeczywistych ani urojonych. Można udowodnić, że własność ta jest charakterystyczna dla tych prostych. Uważajmy dowolną prostą l, której równanie możemy napisać w postaci

$$y - mx - n = 0, \tag{38}$$

albowiem proste równoległe do osi y-ów, jak widzieliśmy mają z hiperbolą wspólne albo dwa punkty w skończoności albo jeden punkt w skończoności. Prosta (38) przecina hiperbolę w punktach, których odcięte otrzymujemy z równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + n)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a więc z równania

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) - 2\frac{mn}{b^2}x - \frac{n^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{39}$$

Równanie to jest równaniem pierwszego stopnia wtedy i tylko wtedy gdy spółczynnik kątowy m spełnia warunek

$$m^2 = \frac{a^2}{b^2}, \tag{40}$$

a więc dla prostych równoległych do jednej z prostych (37). Równanie to jest równaniem stopnia zero wtedy i tylko wtedy gdy mamy prócz równości (40) równość

$$n = 0, \tag{41}$$

a więc dla prostych (37).

Zastąpmy w równaniu (33) hiperboli i w równaniu (38) prostej spółrzędne Kartezjusza x, y przez spółrzędne jednorodne x_1, x_2, x_3.

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{42}$$

Otrzymamy równania

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0, \tag{43}$$

$$x_2 - mx_1 - nx_3 = 0. \tag{44}$$

Rugując z równań tych x_2 otrzymujemy równanie

$$x_1^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) - 2\frac{mn}{b^2}x_1x_2 - \left(\frac{n^2}{b^2} + 1\right)x_3^2 = 0, \tag{45}$$

które to równanie posiada jeden pierwiastek $x_3 = 0$ w przypadku gdy zachodzi warunek (40) i tylko w tym przypadku, a posiada pierwiastek podwójny $x_3^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równość (41).

Możemy więc powiedzieć, że proste (37) mają z hiperbolą wspólne dwa punkty w nieskończoności, a każda prosta równoległa do jednej z prostych (37) i od nich odmienna ma wspólny z hiperbolą jeden punkt w nieskończoności, a jeden punkt w skończoności, który jest rzeczywisty.

Proste (37) nazywają się *asymptotami* hiperboli a_1, a_2, a to z następującego powodu. Uważajmy ciąg wartości na x rosnący nieograniczenie do $+\infty$. Wartościom tego ciągu odpowiadają wartości na rzędne y punktów na hiperboli

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

których wartości absolutne dążą do $+\infty$, i tak samo wartości na rzędne Y punktów na asymptotach

$$Y = \pm \frac{b}{a}x,$$

których wartości absolutne dążą też do $+\infty$. Uważajmy różnicę

$$Y-y=\frac{b}{a}\left[x-\sqrt{x^2-a^2}\right],$$

gdzie pierwiastek jest dodatni. Mamy nierówności

$$\frac{a^2}{x}>x-\sqrt{x^2-a^2}>0.$$

W istocie, druga nierówność jest oczywista, a pierwszą otrzymujemy zważając, że mamy

$$x^2-a^2>\left(x-\frac{a^2}{x}\right)^2,$$

albowiem

$$a^2>\frac{a^4}{x^2},$$

albowiem zakładamy $x>a$. Zatem mamy

$$Y-y<\frac{ab}{x}.$$

Różnica rzędnych punktu P' na asymptocie a_1 i punktu P na hiperboli z dodatniej strony osi x dąży więc do zera, gdy x rośnie nieograniczenie. Tak samo się mają rzeczy dla drugiej asymptoty i dla drugiej gałęzi hiperboli, a stąd pochodzi nazwa asymptot.

10. Styczna do hiperboli i jej równanie.

Podobnie jak w przypadku elipsy styczną hiperboli w punkcie P (ξ, η) nazywamy prostą t przechodzącą przez ten punkt i nie mającą innego punktu wspólnego z hiperbolą ani w skończoności ani w nieskończoności. Prosta

$$y-\eta=k(x-\xi) \tag{46}$$

jest styczną wtedy i tylko wtedy, gdy równanie na x

$$-\frac{[\eta+k(x-\xi)]^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-1=0$$

ma na x pierwiastek podwójny $x=\xi$. Równanie to napiszemy w postaci

$$x^2\left[\frac{1}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\right]-2x\left[\frac{\eta k}{b^2}-\frac{k^2\xi}{b^2}\right]+\text{Const.}=0. \tag{47}$$

A więc mamy warunek

$$\xi = a^2 \frac{k\eta - k^2\xi}{b^2 - k^2a^2},$$

stąd

$$b^2\xi - a^2k\eta = 0,$$

czyli

$$k = \frac{b^2\xi}{a^2\eta} \tag{48}$$

zakładając $\eta \neq 0$. Otrzymujemy zatem jedną jedyną styczną o równaniu

$$y - \eta - \frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x - \xi) = 0,$$

a więc o równaniu

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0. \tag{49}$$

Wykluczyliśmy proste równoległe do osi y-ów, ale widoczna, że prosta o równaniu

$$x - C = 0 \tag{50}$$

jest styczną do hiperboli wtedy i tylko wtedy gdy mamy albo

$$C = a$$

albo

$$C = -a.$$

Mamy wtedy styczne w wierzchołkach A i A'.

Równanie stycznej (50) można uważać jako szczególny przypadek równania (49) dla $\eta = 0$, $\xi = \pm a$.

11. Konstrukcja stycznej do hiperboli.

Do hiperboli (33) należą dwa koła k_a, k_b o promieniach a i b. Przy pomocy kół tych możemy skonstruować punkty hiperboli należące do danego x lub do danego y. Jeżeli $x = \overline{0Q}$ jest dane, prowadzimy styczną do koła k_a, otrzymując

$$GQ = \sqrt{x^2 - a^2},$$

a następnie konstruujemy y z proporcji

$$y : \sqrt{x^2 - a^2} = b : a.$$

Jeżeli $y = \overline{0R}$ jest dane, konstruujemy $\overline{QC} = \sqrt{y^2 + b^2}$, a następnie otrzymujemy x z proporcji

$$x : \sqrt{y^2 + b^2} = a : b.$$

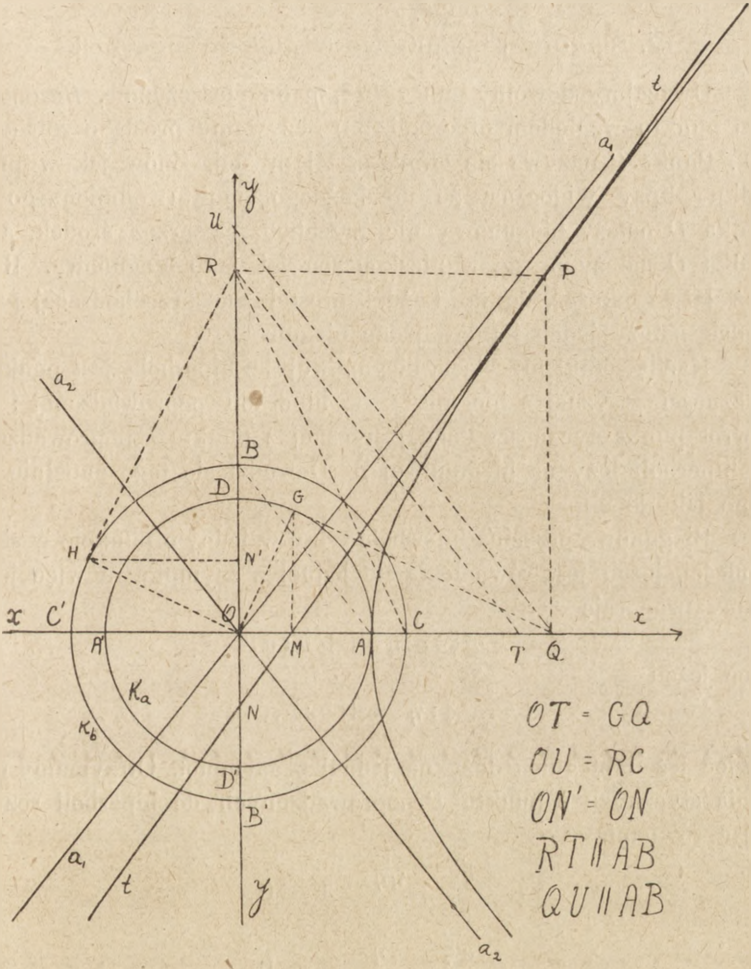

Fig. 15.

Styczną w punkcie $P(\xi, \eta)$ konstruujemy konstruując punkt M, w którym styczna przecina oś x, i którego odcięta jest

$$x = \frac{a^2}{\xi},$$

albo też konstruujemy punkt *N*, w którym styczna przecina oś *y*

$$y=-\frac{b^2}{\eta}.$$

12. Bieguny i biegunowe względem hiperboli.

Uważajmy dowolny punkt $P(\xi, \eta)$ na płaszczyźnie. *Biegunową* tego punktu względem hiperboli (33) nazywamy prostą o równaniu (49). Punkt *P* nazywa się *biegunem* tej prostej. Znów jak w przypadku elipsy widoczna, że do każdego punktu odmiennego od środka *O* należy biegunowa nie przechodząca przez środek, a do środka *O* należy prosta w nieskończoności jako biegunowa. Również łatwo okazać, że do każdej prostej nie przechodzącej przez środek należy jeden i tylko jeden biegun.

Każdy punkt przecięcia biegunowej *p* z hiperbolą jest punktem styczności stycznej z bieguna *P* do hiperboli poprowadzonej i naodwrót punkt styczności każdej stycznej z punktu *P* poprowadzonej do hiperboli leży na biegunowej *p*. Dowodzi się tego zupełnie tak samo jak do elipsy.

Biegunowa przecina hiperbolę tylko w jednym punkcie w skończoności, jeżeli jest równoległą do jednej z asymptot, a więc jeżeli mamy proporcję

$$b^2\xi : a^2\eta = \pm\, b : a,$$

więc jeżeli

$$\xi : \eta = \pm\, a : b,$$

a więc jeżeli biegun *P* leży na jednej z asymptot. Otrzymamy równania stycznych z punktu *P* poprowadzonych do hiperboli rozwiązując równania

$$\frac{\xi\overline{\xi}}{a^2}+\frac{\eta\overline{\eta}}{b^2}-1=0, \tag{51}$$

$$\frac{x\overline{\xi}}{a^2}+\frac{y\overline{\eta}}{b^2}-1=0, \tag{52}$$

w których $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ są spółrzędne punktu styczności $\overline{P}$ względem $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, a następnie wstawiając w równanie hiperboli (33). Otrzymamy

$$\overline{\xi}=\frac{a^2(\eta-y)}{x\eta-y\xi}, \tag{53}$$

$$\overline{\eta} = \frac{b^2(\xi - x)}{x\eta - y\xi},$$

a stąd równanie w spółrzędnych bieżących x, y

$$a^2(\eta - y)^2 - b^2(\xi - x)^2 - (x\eta - y\xi)^2 = 0.$$

Wprowadzając osie x', y' o początku P równoległe i równoskierowane z osiami x, y wzorami

$$x = \xi + x', \qquad y = \eta + y' \tag{54}$$

otrzymamy równanie 2-go stopnia

$$x'^2(b^2 + \eta^2) + 2x'y'\xi\eta - y'^2(a^2 - \xi^2) = 0. \tag{55}$$

Wyznacznik d tego równania

$$\begin{aligned} d &= -(b^2 + \eta^2)(a^2 - \xi^2) - \xi^2\eta^2 = \\ &= \xi^2 b^2 - \eta^2 a^2 - a^2 b^2 \end{aligned} \tag{56}$$

jest > 0, < 0 lub $= 0$ zależnie od tego czy wyrażenie

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - 1$$

jest > 0, < 0 lub $= 0$. Wyrażenie to jest zawsze ujemne, jeżeli mamy $|\xi| < a$. Jeżeli $|\xi| > a$, niechaj η' będzie rzędna punktu P' położonego na hiperboli (33) i posiadającego odciętą ξ. Mamy

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a więc d jest > 0, < 0 lub $= 0$ zależnie od tego, czy mamy

$$\eta'^2 > \eta^2, \qquad \eta'^2 < \eta^2 \quad \text{lub} \quad \eta^2 = \eta^2.$$

A więc z punktu P można poprowadzić dwie styczne t_1, t_2 *rzeczywiste* od siebie odmienne, jeżeli ten punkt leży *zewnątrz* hiperboli, t. zn. pomiędzy jej obu gałęziami, nie leżąc na żadnej z asymptot, w którym to przypadku mamy jednę styczną rzeczywistą. Z punktu P mamy dwie styczne urojone ze sobą sprzężone, jeżeli ten punkt leży *wewnątrz* hiperboli, t. zn. wewnątrz jednej albo drugiej gałęzi. Nareszcie te styczne zlewają się w jednę styczną rzeczywistą podwójną, jeżeli P leży na hiperboli.

Spytajmy się teraz, czy jeżeli P leży wewnątrz hiperboli, styczne t_1, t_2 są stycznymi do *tej samej* gałęzi hiperboli czy też do *różnych* gałęzi. Na odcięte punktów przecięcia biegunowej (49) z hiperbolą (33) mamy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^4\eta^2}(x\xi - a^2)^2 - 1 = 0,$$

a więc równanie

$$x^2\left[\frac{1}{a^2} - \frac{b^2\xi^2}{a^4\eta^2}\right] + 2x\frac{b^2\xi}{a^2\eta^2} - \frac{b^2}{\eta^2} - 1 = 0.$$

A więc obie odcięte mają ten sam znak jeżeli zachodzi nierówność

$$a^2\eta^2 - b^2\xi^2 < 0,$$

a mają znaki przeciwne jeżeli mamy

$$a^2\eta^2 - b^2\xi^2 > 0.$$

Zatem styczne z punktów P leżących pomiędzy asymptotami a hiperbolą są stycznymi do tej samej gałęzi hiperboli, a styczne z punktu P leżących pomiędzy asymptotami w tych częściach płaszczyzny, w których niema hiperboli są stycznymi do różnych gałęzi hiperboli. Nareszcie uważając znak spółczynnika przy pierwszej potędze x widzimy, że w pierwszym przypadku odcięte punktów styczności mają znak odciętej ξ punktu P.

13. Hiperbole ze sobą sprzężone. Równanie hiperboli odniesione do asymptot jako osi spółrzędnych.

Uważajmy krzywą drugiego stopnia określoną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{57}$$

Przemieniając osie x i y widzimy, że to równanie przedstawia również *hiperbolę*, której oś rzeczywista leży na osi y-ów i ma długość $2b$, zaś oś urojona leży na osi x-ów i ma długość $2a$. Przemieniając prócz x i y a z b dochodzimy znów do hiperboli (33). Hiperbole (33) i (57) nazywają się *hiperbolami ze sobą sprzężonemi* (conjuguées); posiadają one te same asymptoty i ogniska równo oddalone od środka O.

Wprowadzimy teraz nowy układ spółrzędnych x', y', którego osiami są odpowiednio asymptoty a_2, a_1, a mianowicie kierunek dodatni osi x' zawiera z dodatnim kierunkiem osi x kąt φ_1 określony wzorami

$$\cos\varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi_1 = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

a więc mamy $\varphi_2 = -\varphi_1$. Mamy więc wzory przekształceń

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi_1 + y'\cos\varphi_2, \\ y &= x'\sin\varphi_1 + y'\sin\varphi_2. \end{aligned} \tag{58}$$

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{[a(x'+y')]^2}{a^2} - \frac{[b(-x'+y')]^2}{b^2} - a^2 - b^2 = 0$$

a więc równanie

$$4x'y' - a^2 - b^2 = 0. \tag{59}$$

Równanie hiperboli sprzężonej z hiperbolą (33) jest teraz

$$4x'y' + a^2 + b^2 = 0. \tag{60}$$

Naodwrót można łatwo okazać, że równanie 2-go stopnia

$$xy - m = 0 \tag{61}$$

przedstawia hiperbolę odniesioną do asymptot jako do osi spółrzędnych. W istocie, uważajmy prostokątny układ spółrzędnych x', y' otrzymany przez przepołowienie kątów, jakie zawierają osie spółrzędnych, i obierzmy jako oś x' prostą połowiącą kąt θ dodatnich kierunków osi x i y. Mamy wzory przekształcenia

$$x = \frac{x'}{2\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{y'}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$y = \frac{x'}{2\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{y'}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{x'^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} - \frac{y'^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - 4m = 0, \tag{62}$$

które dla $m > 0$ przechodzi w równanie (33) hiperboli, jeżeli położymy

$$a = 2\sqrt{m}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad b = 2\sqrt{m}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{63}$$

a dla $m < 0$ przechodzi w równanie (57) hiperboli sprzężonej, jeżeli położymy

$$a = 2\sqrt{-m}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad b = 2\sqrt{-m}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{64}$$

14. Parabola i jej równanie.

Uważajmy prostą k i punkt F nie leżący na tej prostej i oznaczmy przez p odległość punktu F od prostej k. Obierzmy układ spółrzędnych prostokątny, którego oś x jest prostopadła do prostej k i przechodzi przez punkt F, i której kierunek dodatni skierowany jest od prostej k do punktu F, a początek O układu obierzmy w punkcie połowiącym odcinek FD, gdzie D jest punktem przecięcia osi x z prostą k.

Spytajmy się, jaki związek zachodzi pomiędzy spółrzędnymi x, y punktu P równo odległego od prostej k i od punktu F. Mamy oznaczając przez Q spodek prostopadłej z P na oś x spuszczonej, przez R spodek prostopadłej na oś y spuszczonej, a przez r odległość PF

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\overline{PR} = \left| x + \frac{p}{2} \right|.$$

Mamy

$$r = \overline{PR}, \tag{65}$$

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{66}$$

Widoczna, że x nie może być ujemne, a więc równanie (66) możemy zastąpić przez równanie

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,$$

a więc

$$y^2-2px=0. \tag{67}$$

Otrzymujemy więc równanie drugiego stopnia. Krzywą drugiego stopnia określoną przez równanie (67) nazywamy *parabolą.*

Naodwrót każdy punkt P, którego spółrzędne spełniają równanie (67) paraboli spełnia warunek (65). Liczba p nazywa się *parametrem* paraboli, prosta k *kierownicą* paraboli (directrice), a punkt F *ogniskiem* (foyer) paraboli.

15. Badanie kształtu paraboli.

Parabola posiada jeden jedyny punkt na osi x a mianowicie początek O układu spółrzędnych, który jest też jedynym punktem na osi y. Każdej dodatniej wartości na x odpowiadają dwie wartości na y

$$y=\pm\sqrt{2px}$$

różniące się tylko znakiem, a każdej ujemnej wartości na x odpowiadają dwie urojone sprzężone ze sobą wartości na y. Jeżeli x rośnie nieograniczenie, natenczas i wartość bezwzględna y rośnie nieograniczenie. Początek O nazywa się *wierzchołkiem* paraboli.

16. Styczna do paraboli i jej równanie.

Styczną do paraboli w punkcie $P(\xi, \eta)$ paraboli nazywamy prostą, która prócz tego punktu niema z parabolą wspólnego żadnego punktu rzeczywistego ani urojonego. Prosta o równaniu

$$y-\eta-k(x-\xi)=0 \tag{68}$$

jest więc styczną do paraboli, jeżeli równanie drugiego stopnia

$$[\eta+k(x-\xi)]^2-2px=0$$

ma podwójny pierwiastek $x=\xi$. Równanie to napiszemy w postaci

$$k^2x^2+2x(k\eta-k^2\xi-p)+\eta^2+k^2\xi^2=0. \tag{69}$$

Mamy więc

$$\xi = -\frac{1}{k^2}(k\eta - k^2\xi - p),$$

$$k = \frac{p}{\eta},$$

zakładając $\eta \neq 0$. Otrzymujemy więc równanie jednej zupełnie oznaczonej stycznej

$$y - \eta - \frac{p}{\eta}(x - \xi) = 0,$$

a więc

$$y\eta - p(x + \xi) = 0. \tag{70}$$

Prosta

$$x - C = 0$$

równoległa do osi y jest styczną wtedy i tylko wtedy, gdy mamy

$$C = 0,$$

a więc w początku O. Równanie

$$x = 0$$

tej stycznej jest szczególnym przypadkiem równania (70) dla $\xi = \eta = 0$.

17. Konstrukcja stycznej do paraboli.

Do danej odciętej OQ konstruujemy punkt P kreśląc z ogniska F koło o promieniu DQ, a do danej rzędnej QR konstruujemy punkt P, połowiąc odcinek SF w punkcie T (położonym na osi y) i kreśląc w tym punkcie prostopadłą SF i przecinając nią prostą SR.

Styczną w punkcie P rysujemy zważając, że dla $y = 0$ mamy

$$x = -\xi,$$

a więc konstruując punkt M taki, że $\overline{OM} = -\overline{OQ}$, albo konstruując punkt N przecięcia stycznej z osią y, dla którego mamy

$$y = \frac{p\xi}{\eta}$$

a więc

$$y = \frac{\eta}{2},$$

a więc punkt N schodzi się z punktem T.

18. Bieguny i biegunowe względem paraboli.

Uważajmy dowolny punkt $P(\xi, \eta)$ na płaszczyźnie. Prostą o równaniu (70) nazywamy *biegunową* tego punktu względem paraboli a punkt P *biegunem* prostej. Każdy punkt przecięcia tej prostej z parabolą jest punktem styczności stycznej z P do paraboli poprowadzonej i naodwrót. Wszystkie punkty styczności stycznej z punktu P do paraboli poprowadzonych leżą na biegunowej p. W istocie, jeżeli $Q(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ jest punktem przecięcia, mamy

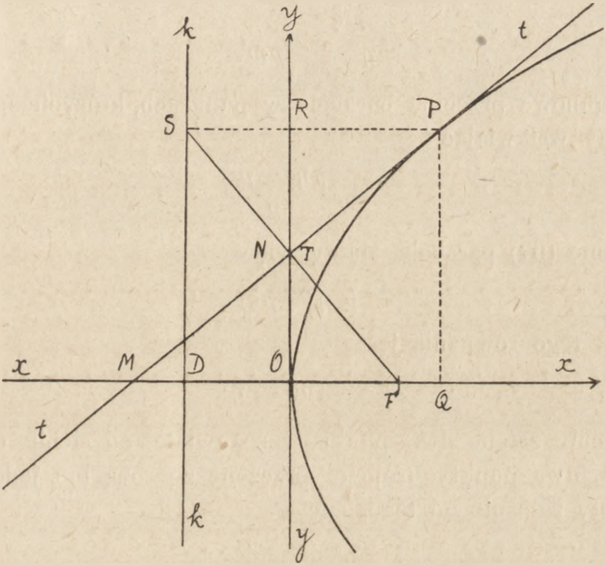

Fig. 16.

$$\eta\overline{\eta} - p(\xi + \overline{\xi}) = 0, \tag{72}$$

a stąd wynika, że styczna t w punkcie Q

$$y\overline{\eta} - p(x + \overline{\xi}) = 0 \tag{73}$$

przechodzi przez punkt P i naodwrót z równości (72) wynika, że biegunowa p przechodzi przez punkt styczności Q.

Każda prosta nie równoległa do osi x-ów jest biegunową jednego zupełnie oznaczonego punktu $P(\xi, \eta)$. W istocie uważajmy równanie

$$x + my + n = 0$$

i porównajmy je z równaniem (70) biegunowej. Chodzi o znalezienie liczb $k \neq 0$, ξ, η spełniających warunki

$$k = -p,$$
$$km = \eta,$$
$$kn = -p\xi,$$

ale widoczna, że równania te spełnione są przez jeden jedyny układ

$$k = -p,$$
$$\xi = n,$$
$$\eta = -pm.$$

Biegunowa przecina parabolę w punktach, których spółrzędne otrzymamy wstawiając

$$x = \frac{y\eta - p\xi}{p}$$

w równanie (67) paraboli. Mamy więc

$$y^2 - 2(y\eta - p\xi) = 0 \tag{64}$$

Wyróżnik tego równania jest

$$d = 2p\xi - \eta^2. \tag{75}$$

Otrzymujemy zatem dwa punkty rzeczywiste od siebie odmienne przecięcia, dwa punkty urojone sprzężone ze sobą lub jeden punkt rzeczywisty zależnie od tego, czy

$$\eta^2 - 2p\xi$$
$$\text{jest} \quad > 0, \qquad < \quad \text{lub} \quad = 0.$$

A więc jeżeli $\xi < 0$ lub $\xi = 0$, $\eta \neq 0$ mamy $d < 0$. Jeżeli $\xi > 0$ d jest > 0, jeżeli rzędna η' punktu P' położonego na paraboli i mającego odciętą ξ jest co do wartości bezwzględnej większa niż wartość bezwzględna η, zaś d jest < 0 jeżeli się rzeczy mają naodwrót. A więc widzimy, że z punktu położonego zewnątrz paraboli, tj. po tej stronie paraboli, po której się znajduje ujemne ramię osi x można do paraboli poprowadzić dwie styczne rzeczywiste od siebie odmienne. Z punktu położonego wewnątrz paraboli, tj. po stronie dodatniego ramienia osi x poprowadzone styczne są urojone ze sobą sprzężone. Nareszcie styczne zlewają się w jedną styczną rzeczywistą, jeżeli punkt P leży na paraboli.

Biegunowa przecina oś x w punkcie

$$x = -\xi,$$

zaś oś y w punkcie

$$y = p\frac{\xi}{\eta},$$

daje się więc łatwo skonstruować.

Równanie stycznych z punktu P do paraboli otrzymamy, obliczając $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ z równań (72), (73) i wstawiając w równanie (67) paraboli zamiast x i y. Mamy

$$\overline{\xi} = \frac{x\eta - y\xi}{y - \eta}, \qquad \overline{\eta} = \frac{p(x - \xi)}{y - \eta}, \tag{76}$$

więc otrzymamy

$$p(x - \xi)^2 - 2(x\eta - y\xi)(y - \eta) = 0,$$

więc

$$p(x - \xi)^2 - 2[(x - \xi)\eta - (y - \eta)\xi](y - \eta) = 0.$$

Dochodzimy więc do równania

$$p(x - \xi)^2 - 2\eta(x - \xi)(y - \eta) + 2\xi(y - \eta)^2 = 0, \tag{77}$$

na którego wyróżnik otrzymujemy wyrażenie (75).

19. Równania wierzchołkowe elipsy, hiperboli i paraboli.

Równaniem wierzchołkowem elipsy, hiperboli i paraboli nazywamy równanie tych krzywych odniesione do następującego układu spółrzędnych x', y'. Początkiem O' jest jeden z wierzchołków, jedną z osi spółrzędnych jest ta z osi x lub y, która przez ten punkt przechodzi a nowy układ jest prostokątny i zgodnie zorjentowany z układem x, y.

Obierzmy więc dla elipsy wierzchołek A' jako początek O', dla hiperboli wierzchołek A, zaś dla paraboli nie zmieniamy początku układu. Równanie wierzchołkowe elipsy jest

$$\frac{(x' - a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

równanie hiperboli

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-1=0,$$

a równanie paraboli

$$y'^2-2px'=0.$$

Mamy równania:

1) Elipsy:

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

2) Hiperboli:

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'+\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

3) Paraboli:

$$y'^2=2px'.$$

Wprowadzając w te równania parametr $\frac{b^2}{a}=p$ elipsy i hiperboli, napiszemy jedno równanie

$$y'^2=2px'+\varepsilon\frac{p}{a}x'^2, \tag{78}$$

przedstawiające dla $\varepsilon=+1$ hiperbolę, dla $\varepsilon=-1$ elipsę, a dla $\varepsilon=0$ parabolę. Stąd widoczna, że hiperbola przebiega zewnątrz paraboli, a ta znowu zewnątrz elipsy i że jeżeli nie zmieniając parametru p nadamy półosi a ciąg wartości dążący do nieskończoności, natenczas hiperbola i elipsa zbliżają się nieograniczenie do paraboli.

Ćwiczenia.

1. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których elipsa widziana jest pod kątem danym φ. W szczególności znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których elipsa widziana jest pod kątem prostym.

2. Kiedy prosta

$$ux+vy-1=0 \tag{1}$$

jest styczną do elipsy?

3. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których styczne poprowadzone do hiperboli zawierają dany kąt φ, przyczem uważamy kierunki od punktu danego do punktów styczności. W szczególności znaleźć miejsce geometryczne punktów, dla których $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

4. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których parabola widziana jest pod danym kątem φ. W szczególności znaleźć miejsce geometryczne punktów, dla których $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

5. Znaleźć miejsce geometryczne spodków prostopadłych ze środka O na styczne elipsy.

6. Znaleźć miejsce geometryczne spodków prostopadłych ze środka na styczne hiperboli.

7. Iloczyn odległości ognisk F i F' od stycznej elipsy równa się kwadratowi połowy małej osi.

8. Iloczyn odległości ognisk F i F' od stycznej hiperboli równa się ujemnemu kwadratowi połowy małej osi.

9. Znaleźć miejsce geometryczne spodków prostopadłych z punktu P na styczne elipsy poprowadzonych.

10. To samo zadanie dla hiperboli.

11. To samo zadanie dla paraboli.

12. Punkty elipsy, których normalne przechodzą przez dany punkt P leżą na hiperboli, której asymptotami są osi elipsy.

13. Uważamy prostą l przecinającą hiperbolę w punktach A, B a asymptoty w punktach C, D. Odcinki AC, BD mają równe miary.

ROZDZIAŁ XII.

Przekształcanie ogólnej funkcji drugiego stopnia i ogólnego równania drugiego stopnia. Niezmienniki funkcji drugiego stopnia i równania drugiego stopnia.

1. Przekształcanie linjowe dwóch zmiennych.

Przekształceniem albo *transformacją linjową* dwóch zmiennych x, y w dwie nowe zmienne x', y', nazywamy czynność polegającą na zastąpieniu x, y przez x', y' zapomocą wzorów

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned} \tag{1}$$

Liczby a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ nazywają się *spółczynnikami* przekształcenia linjowego. Wyrażenie

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2}$$

nazywa się *wyróżnikiem* przekształcenia linjowego. Jeżeli wyróżnik d jest liczbą od zera odmienną, możemy ze wzorów (1) wyrazić x, y przez x', y' wzorami

$$\begin{aligned} x &= b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}, \\ y &= b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}, \end{aligned} \tag{3}$$

w których to wzorach liczby b_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ są to zupełnie oznaczone liczby i w szczególności mamy

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{d}, \quad b_{12} = -\frac{a_{12}}{d}, \quad b_{21} = -\frac{a_{21}}{d}, \quad b_{22} = \frac{a_{11}}{d}. \tag{4}$$

Przekształcenie (3) nazywa się przekształceniem *odwrotnem* przekształcenia (1).

Uważajmy dwa układy (X) i (X′) spółrzędnych Kartezjusza i załóżmy, że początek O' układu (X′) w układzie spółrzędnych (X) ma spółrzędne a, b; niechaj dalej a_1, b_1 i a_2, b_2 będą spółczynniki kierunkowe dodatnich kierunków osi x', y' w układzie (X), zaś θ kąt dodatniej osi y z dodatnią osią x, a θ' kąt dodatniej osi y' z dodatnią osią x'. Pomiędzy spółrzędnymi obu układów mamy związki

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 x' + a_2 y', \\ y &= b + b_1 x' + b_2 y', \end{aligned} \tag{5}$$

a więc mamy *przekształcenie linjowe* kształtu (3). Mamy wzory

$$\begin{aligned} \sin\theta' &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\sin\theta, \\ \cos\theta' &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\theta + b_1 b_2. \end{aligned} \tag{6}$$

2 Przekształcenie funkcji drugiego stopnia zapomocą przekształcenia linjowego.

Uważajmy funkcję drugiego stopnia

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F. \tag{7}$$

Przekształćmy tę funkję przekształceniem (3), natenczas otrzymamy funkcję $f'(x', y')$ również drugiego stopnia

$$\begin{aligned} f'(x', y') = A(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13})^2 + 2B(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}) \cdot \\ \cdot (b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}) + C(b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23})^2 + \\ + 2D(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}) + 2E(b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}) + F, \end{aligned} \tag{8}$$

która się nazywa *przekształconą* funkcji $f(x, y)$. Oznaczając przez A', B', C', D', E', F' spółczynniki funkcji przekształconej mamy wzory

$$\begin{aligned} A' &= Ab_{11}^2 + 2Bb_{11}b_{21} + Cb_{21}^2, \\ B' &= Ab_{11}b_{12} + B(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}) + Cb_{21}b_{22}, \\ C' &= Ab_{12}^2 + 2Bb_{12}b_{22} + Cb_{22}^2, \\ D' &= (Ab_{13} + Bb_{23} + D)b_{11} + (Bb_{13} + Cb_{23} + E)b_{21}, \\ E' &= (Ab_{13} + Bb_{23} + D)b_{12} + (Bb_{13} + Cb_{23} + E)b_{22}, \\ F' &= Ab_{13}^2 + 2Bb_{13}b_{23} + Cb_{23}^2 + 2Db_{13} + 2Eb_{23} + F. \end{aligned} \tag{9}$$

Mamy widocznie

$$F' = f(b_{13}, b_{23}). \tag{10}$$

Wprowadźmy formę $\varphi(x, y)$ drugiego stopnia

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{11}$$

i formę również drugiego stopnia czterech zmiennych $x_1, y_1; x_2, y_2$

$$\varphi(x_1, y_1; x_2, y_2) = Ax_1x_2 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cy_1y_2. \tag{12}$$

Forma ta jest formą pierwszego stopnia względem x_1, y_1 i tak samo formą pierwszego stopnia względem x_2, y_2. Forma taka nazywa się formą *bilinearną* dwóch par zmiennych x_1, y_1 i x_2, y_2. Forma ta jest formą *symetryczną* obu par x_1, y_1 i x_2, y_2 t. zn. nie zmieni się, jeżeli przemienimy obie pary zmiennych ze sobą.

Wprowadźmy jeszcze znane nam już oznaczenia

$$\begin{aligned} \alpha &= Aa + Bb + D, \\ \beta &= Ba + Cb + E, \end{aligned} \tag{13}$$

i oznaczenie

$$\gamma = Da + Eb + F. \tag{14}$$

Wówczas forma przekształcona $f'(x', y')$ dla przekształcenia (5) ma następujące spółczynniki

$$\begin{aligned} A' &= \varphi(a_1, b_1), \\ B' &= \varphi(a_1, b_1; a_2, b_2), \\ C' &= \varphi(a_2, b_2), \\ D' &= \alpha a_1 + \beta b_1, \\ E' &= \alpha a_2 + \beta b_2, \\ F' &= f(a, b) = \alpha a + \beta b + \gamma. \end{aligned} \tag{15}$$

Założmy $A \neq 0$ i napiszmy A' w postaci

$$A' = \frac{1}{A}[(Aa_1 + Bb_1)^2 + (AC - B^2)b_1^2].$$

Widoczna, że gdy wyróżnik δ jest dodatni, A i A' są równocześnie dodatnie i ujemne. W istocie, A' może się równać tylko wtedy zeru gdy mamy $b_1 = 0$, $Aa_1 + Bb_1 = 0$, a więc $a_1 = b_1 = 0$, co być nie może. Tak samo C' ma znak A, albowiem mamy

$$C' = \frac{1}{A}[(Aa_2 + Bb_2)^2 + AC - B^2)b_2^2].$$

Zauważmy dalej, że wszystkie trzy spółczynniki A', B', C' nie mogą się równocześnie równać zeru. W istocie mielibyśmy wówczas

$$\begin{aligned}(Aa_1+Bb_1)a_1+(Ba_1+Cb_1)b_1&=0,\\ (Aa_1+Bb_1)a_2+(Ba_1+Cb_1)b_2&=0\end{aligned}\tag{16}$$

i

$$\begin{aligned}(Aa_2+Bb_2)a_1+(Ba_2+Cb_2)b_1&=0,\\ (Aa_2+Bb_2)a_2+(Ba_2+Cb_2)b_2&=0.\end{aligned}\tag{17}$$

Równości (16) możemy uważać jako dwa równania linjowe i jednorodne względem niewiadomych

$$Aa_1+Bb_1,\qquad Ba_1+Cb_1.$$

Wyznacznik spółczynników przy niewiadomych jest $a_1b_2-a_2b_1$, a więc jest od zera odmienny. Wynika stąd, że musielibyśmy mieć

$$Aa_1+Bb_1=0,\qquad Ba_1+Cb_1=0.$$

Tak samo możemy równości (17) uważać jako równania linjowe jednorodne względem niewiadomych

$$Aa_2+Bb_2,\qquad Ba_2+Cb_2,$$

a więc musielibyśmy mieć

$$Aa_2+Bb_2=0,\qquad Ba_2+Cb_2=0.$$

Uważajmy teraz równości

$$Aa_1+Bb_1=0,\qquad Aa_2+Bb_2=0.$$

Równości te możemy uważać jako równania linjowe i jednorodne względem niewiadomych A, B. Ponieważ wyznacznik spółczynników przy niewiadomych $a_1b_2-a_2b_1$ jest od zera odmienny, więc musielibyśmy mieć

$$A=B=0.$$

Uważajmy tak samo równości

$$Ba_1+Cb_1=0,\qquad Ba_2+Cb_2=0.$$

Równości te możemy uważać jako równania linjowe i jednorodne o niewiadomych B, C, a więc musielibyśmy mieć

$$B=C=0.$$

A więc wszystkie trzy spółczynniki A, B, C musiałyby równać się zeru co nie zachodzi.

Możemy także rozumować w ten sposób: Forma $\varphi(x, y)$ przechodzi przekształceniem linjowem

$$x = a_1 x' + a_2 y',$$
$$y = b_1 x' + b_2 y'$$

w formę $\varphi'(x', y')$ o spółczynnikach A', B', C'. Gdyby wszystkie te 3 spółczynniki równały się 0, forma $\varphi'(x', y')$ równałaby się zeru dla wszystkich wartości x', y', a więc forma $\varphi(x, y)$ równałaby się zeru dla wszystkich wartości x, y. A więc wszystkie trzy spółczynniki A, B, C formy $\varphi(x, y)$ musiałyby równać się zeru.

3. Przekształcanie równania krzywej drugiego stopnia przez wprowadzenie nowego układu spółrzędnych.

Uważajmy równanie krzywej drugiego stopnia C

$$f(x, y) = 0 \tag{18}$$

i wprowadźmy wzorami przekształceń (5) nowy układ spółrzędnych Kartezjusza. Spółrzędne x, y punktu P położonego na krzywej C przechodzą w spółrzędne x', y' spełniające równanie drugiego stopnia

$$f'(x', y') = 0 \tag{19}$$

przyczem spółczynniki funkcji przekształconej f' wyrażają się wzorami (15) przez spółczynniki funkcji pierwotnej f. Naodwrót, jeżeli spółrzędne x', y punktu P spełniają równanie (19), natenczas spółrzędne x, y tego punktu spełniają równanie (18). Równanie (19) nazywa się *równaniem przekształconem* krzywej C.

4. Niezmienniki funkcji drugiego stopnia względem przekształcenia linjowego.

Ze wzorów (9) wynika, że spółczynniki funkcji $f'(x', y')$ przekształconej funkcji $f(x, y)$ przekształceniem (3) są funkcjami linjowemi i jednorodnemi spółczynników funkcji $f(x, y)$. Przytem każdy spółczynnik funkcji przekształconej zależy od przynajmniej trzech spółczynników funkcji pierwotnej.

Uważajmy teraz przekształcenie linjowe (5) i postawmy sobie następujące pytanie: Czy istnieją takie funkcje spółczynników $A', \ldots F'$ funkcji $f'(x', y')$

$$\Phi(A', \ldots F'),$$

które mają tę własność, że jeżeli w tej funkcji zastąpimy $A', \ldots F'$ przez wyrażenia (15), otrzymamy taką funkcję spółczynników $A, \ldots F$

i spółczynników wzorów (5) przekształcenia, która daje się napisać w postaci

$$\varphi(a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2) \,.\, \Phi(A, \dots F).$$

T. zn. że otrzymamy iloczyn *tej samej* funkcji Φ spółczynników $A \dots F$ pomnożony przez pewną funkcję spółczynników przekształcenia $a \dots b_2$. Mamy więc tożsamość

$$\Phi(A', \dots F') \equiv \varphi(a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2) \,.\, \Phi(A, \dots F). \tag{20}$$

W szczególności będziemy szukali takich *wielomianów* 6 wielkości $A', \dots F'$, które powyższą własność posiadają.

Funkcje posiadające powyższą własność nazywają się *niezmiennikami* funkcji drugiego stopnia $f(x, y)$ *względem przekształcenia* linjowego (5).

Ponieważ pierwsze 3 spółczynniki A', B', C' zależą tylko od pierwszych 3 spółczynników A, B, C, więc można szukać niezmienników zależnych tylko od tych trzech spółczynników. Otóż łatwo okazać, że takim niezmiennikiem jest wyróżnik $\delta = AC - B^2$.

W istocie, pomnóżmy przez siebie wyróżniki 2-go stopnia

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

mnożąc wiersze przez wiersze. Otrzymamy wyznacznik 2-go stopnia

$$\begin{vmatrix} Aa_1 + Bb_1, & Aa_2 + Bb_2 \\ Ba_1 + Cb_1, & Ba_2 + Cb_2 \end{vmatrix}.$$

Pomnóżmy jeszcze raz ten wyznacznik przez wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

mnożąc kolumny pierwszego wyznacznika przez wiersze drugiego wyznacznika. Otrzymamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}.$$

Oznaczając przez δ' minor δ obliczony dla funkcji $f'(x', y')$ otrzymujemy związek

$$\delta' = \delta \,.\, (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \tag{21}$$

okazujący, że δ jest niezmiennikiem.

Okażemy teraz, że wyznacznik trzeciego stopnia Δ jest też niezmiennikiem. Postąpimy tą samą drogą co poprzednio, mnożąc przez siebie wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix},$$

a mianowicie mnożąc wiersze przez wiersze. Otrzymamy wyznacznik trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} Aa_1 + Bb_1, & Aa_2 + Bb_2, & \alpha \\ Ba_1 + Cb_1, & Ba_2 + Cb_2, & \beta \\ Da_1 + Eb_1, & Da_2 + Eb_2, & \gamma \end{vmatrix}.$$

Pomnóżmy otrzymany wyznacznik raz jeszcze przez wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

mnożąc kolumny pierwszego wyznacznika przez wiersze drugiego wyznacznika. Otrzymamy wyznacznik trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix},$$

który oznaczamy przez Δ'. Mamy więc związek

$$\Delta' = \Delta(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \tag{22}$$

okazujący znów, że wyznacznik Δ jest niezmiennikiem.

Uważajmy teraz przekształcenie linjowe (5) jako przekształcenie układów spółrzędnych (X) i (X′). Wówczas napiszemy związek (21) w postaci

$$\frac{\delta'}{\sin^2\theta'} = \frac{\delta}{\sin^2\theta}, \tag{23}$$

a związek (22) w postaci

$$\frac{\Delta'}{\sin^2\theta'} = \frac{\Delta}{\sin^2\theta}. \tag{24}$$

Okażemy teraz, że wyrażenie

$$\omega = A + C - 2B\cos\theta \tag{25}$$

jest niezmiennikiem względem przekształcenia układu spółrzędnych. Aby to okazać, postąpimy teraz inną drogą, wstawiając w wyrażenie

$$\omega' = A' + C' - 2B' \cos\theta' \tag{26}$$

należące do funkcji przekształconej $f'(x', y')$ wprost wartości spółczynników. Korzystając ze związków

$$\begin{aligned} a_1^2 + 2a_1 b_1 \cos\theta + b_1^2 = 1, \\ a_2^2 + 2a_2 b_2 \cos\theta + b_2^2 = 1, \end{aligned} \tag{27}$$

i ze związku

$$\cos\theta' = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\theta + b_1 b_2 \tag{28}$$

możemy wyrazić ω' przez wyrażenie

$$\begin{gathered} (Aa_1^2 + 2Ba_1 b_1 + Cb_1^2)(a_2^2 + 2a_2 b_2 \cos\theta + b_2^2) + \\ + (Aa_2^2 + 2Ba_2 b_2 + Cb_2^2)(a_1^2 + 2a_1 b_1 \cos\theta + b_1^2) - \\ - 2[Aa_1 a_2 + B(a_1 b_2 + a_2 b_1) + Cb_1 b_2] \,. \\ . \, [a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\theta + b_1 b_2] = \\ = A(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + C(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - 2B(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \cos\theta = \\ = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \omega. \end{gathered}$$

Dochodzimy zatem do związku

$$\omega' = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \omega, \tag{29}$$

który można też napisać w postaci

$$\frac{\omega'}{\sin^2\theta'} = \frac{\omega}{\sin^2\theta}. \tag{30}$$

Do związków (29), (30) można dojść w inny sposób, który zarazem lepiej okazuje dlaczego właśnie wyrażenie ω jest niezmiennikiem. W Rozdziale VIII. uważaliśmy pęki form drugiego stopnia

$$\varphi(x, y) = \lambda_1 \varphi_1(x, y) + \lambda_2 \varphi_2(x, y), \tag{31}$$

gdzie mamy

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) = A_1 x^2 + 2B_1 xy + C_1 y^2, \\ \varphi_2(x, y) = A_2 x^2 + 2B_2 xy + C_2 y^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Oznaczmy przez δ, δ_1, δ_2 wyróżniki należące odpowiednio do form (31) i (32). Mamy więc

$$\begin{gathered} \delta = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) - \\ - (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)^2 = \lambda_1^2 \delta_1 + \lambda_2^2 \delta_2 + \lambda_1 \lambda_2 (A_1 C_2 + \\ + A_2 C_1 - 2B_1 B_2). \end{gathered} \tag{33}$$

Przekształćmy teraz formy (31) i (32) przekształceniem (5). Oznaczając przez δ', δ'_1, δ'_2 niezmienniki form przekształconych mamy związki

$$\delta' = \delta(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta'_1 &= \delta_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \\ \delta'_2 &= \delta_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

a ponieważ mamy

$$\delta' = \lambda_1^2 \delta'_1 + \lambda_2^2 \delta'_2 + \lambda_1 \lambda_2 (A'_1 C'_2 + A'_2 C'_1 - 2 B'_1 B'_2) \tag{36}$$

więc łatwo dochodzimy do związku

$$A'_1 C'_2 + A'_2 C'_1 - 2 B'_1 B'_2 = (A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2 B_1 B_2) . (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

czyli, że wyrażenie

$$A_1 C_2 + A_2 C_1 - 2 B_1 B_2$$

jest niezmiennikiem względem przekształcenia (2). Oznaczając wyrażenie to przez δ_{12} napiszemy związek

$$\delta'_{12} = \delta_{12}(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2, \tag{37}$$

albo też związek

$$\frac{\delta'_{12}}{\sin^2\theta'} = \frac{\delta_{12}}{\sin^2\theta}. \tag{38}$$

Niezmiennik δ_{12} zależy od spółczynników *dwóch* form kwadratowych, nazywa się więc *wspólnym* niezmiennikiem dwóch form.

Aby teraz otrzymać niezmiennik ω obieramy formę $\varphi_1(x, y)$ dowolnie, a jako drugą formę $\varphi_2(x, y)$ obieramy formę

$$\varphi_2(x, y) = x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 \tag{39}$$

wyrażającą *odległość* punktu $P(x, y)$ od początku układu. Otrzymujemy wówczas ze związków (37), (38) bezpośrednio związki (29), (30).

Ze związków niezmienniczych otrzymanych wynika bezpośrednio, że δ, Δ, ω mają te same znaki dla funkcji $f(x, y)$ danej i dla funkcji $f'(x', y')$ przekształconej i że się równocześnie obracają w zero.

Uważajmy teraz znane nam już wyrażenie Ω^2.

$$\Omega^2 = [2B - (A + C)\cos\theta]^2 + (A - C)^2 \sin^2\theta.$$

Wyrażenie to można też napisać w postaci

$$[A + C - 2B\cos\theta]^2 - 4(AC - B^2)\sin^2\theta = \omega^2 - 4\delta\sin^2\theta.$$

Oznaczając przez Ω'^2 niezmiennik Ω^2 należący do formy $f'(x', y')$ przekształconej, mamy

$$\Omega'^2 = \omega'^2 - 4\delta' \sin^2 \theta',$$

i widoczna, że Ω^2 jest niezmiennikiem. Mamy

$$\Omega'^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \Omega^2, \tag{40}$$

albo

$$\frac{\Omega'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{\Omega^2}{\sin^2\theta}. \tag{41}$$

Jeżeli mamy

$$\delta = 0, \qquad \omega = 0,$$

natenczas $\Omega^2 = 0$, a więc mamy

$$A = C, \qquad B = A\cos\theta = C\cos\theta,$$

a stąd wynikają równości

$$A = B = C = 0.$$

Uważajmy jeszcze funkcję (7) w przypadku dwóch prostych do siebie równoległych. Mamy teraz $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Funkcja $f(x, y)$ ma teraz kształt

$$\varepsilon(ax + by + c_1)(ax + by + c_2). \tag{42}$$

Przekształcając tę funkcję przekształceniem (5) otrzymujemy funkcję $f'(x', y')$ kształtu

$$\varepsilon(\overline{a'}x' + b'y' + c_1')(a'x' + b'y' + c_2'), \tag{43}$$

przyczem mamy

$$\begin{aligned} \overline{a'} &= \overline{a}a_1 + bb_1 \\ b' &= \overline{a}a_2 + bb_2, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \overline{c_1'} &= \overline{a}a + \overline{b}b + \overline{c_1}, \\ c_2' &= \overline{a}a + bb + \overline{c_2}. \end{aligned} \tag{45}$$

Z równości (45) otrzymujemy równość

$$c_1' - c_2' = c_1 - \overline{c_2}.$$

Minory δ', δ'' wyznacznika Δ i odpowiadające im minory δ'', δ''' wyznacznika Δ' wyrażają się przez liczby $\overline{a}$, b, $\overline{c}$ w następującej postaci

$$\left.\begin{aligned} \delta' &= -\frac{\overline{b}^2}{4}(\overline{c}_1 - \overline{c}_2)^2, \\ \delta'' &= -\frac{\overline{a}^2}{4}(\overline{c}_1 - \overline{c}_2)^2, \end{aligned}\right| \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} {\delta'}' &= -\frac{\overline{b'}^2}{4}(\overline{c'_1} - \overline{c'_2})^2, \\ {\delta''}' &= -\frac{\overline{a'}^2}{4}(\overline{c'_1} - \overline{c'_2})^2. \end{aligned}\right| \tag{48}$$

Wstawiając w te wzory spółczynniki funkcji f i f' dochodzimy do następujących związków

$$\frac{{\delta'}'}{C'} = \frac{\delta'}{C}, \tag{49}$$

$$\frac{{\delta''}'}{A'} = \frac{\delta''}{A}, \tag{50}$$

czyli otrzymujemy dwa nowe niezmienniki; oczywiście zakładamy tutaj, że $A \neq 0$, $A' \neq 0$ względnie $C \neq 0$, $C' \neq 0$.

5. Niezmienniki absolutne funkcji drugiego stopnia. Niezmienniki równania drugiego stopnia.

Uważajmy znów funkcje f i f' i pomnóżmy je przez dowolne od zera odmienne liczby k i k'. Otrzymamy funkcje

$$f_k(x, y) \equiv k f(x, y), \tag{51}$$

$$f'_{k'}(x', y') \equiv k' f'(x', y'). \tag{52}$$

Oznaczając przez δ_k, Δ_k, ω_k i przez $\delta'_{k'}$, $\Delta'_{k'}$, $\omega'_{k'}$ niezmienniki należące do funkcyj f_k i $f'_{k'}$ mamy oczywiście

$$(53)\quad \delta_k = k^2\delta, \qquad (54)\quad \Delta_k = k^3\Delta, \qquad (55)\quad \omega_k = k\omega,$$

$$(56)\quad \delta'_{k'} = k'^2\delta', \qquad (57)\quad \Delta'_{k'} = k'^3\Delta', \qquad (58)\quad \omega'_{k'} = k'\omega'.$$

Dochodzimy stąd do równości

$$(59)\quad \frac{\Delta_k^2}{\delta_k^3} = \frac{\Delta^2}{\delta^3}, \qquad (60)\quad \frac{\omega_k^2}{\delta_k} = \frac{\omega^2}{\delta}$$

i do równości

$$(61)\quad \frac{\Delta'^2_{k'}}{\delta'^3_{k'}} = \frac{\Delta'^2}{\delta'^3}, \qquad (62)\quad \frac{\omega'^2_{k'}}{\delta'_{k'}} = \frac{\omega'^2}{\delta'}.$$

Wyrażenia

$$\frac{\Delta^2}{\delta^3} \quad \text{i} \quad \frac{\omega^2}{\delta}$$

nazywamy *absolutnymi* niezmiennikami funkcji $f(x, y)$, ponieważ nie zmienieją wartości przy pomnożeniu funkcji przez liczbę $k \neq 0$. Tak samo nazywamy wyrażenia

$$\frac{\Delta'^2}{\delta'^3} \quad \text{i} \quad \frac{\omega'^2}{\delta'}$$

absolutnymi niezmiennikami funkcji $f'(x', y')$, Mamy równości

$$\frac{\Delta'^2_{k'}}{\delta'_{k'}} = \frac{1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \frac{\Delta^2_k}{\delta^3_k}, \tag{62}$$

$$\frac{\omega'^2_{k'}}{\delta'_{k'}} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \frac{\omega^2_k}{\delta_k}, \tag{63}$$

które też możemy napisać w postaci

$$\frac{\Delta'^2_{k'}}{\delta'^3_{k'}} \sin^2\theta' = \frac{\Delta^2_k}{\delta^3_k} \sin^2\theta, \tag{64}$$

$$\frac{\omega'^2_{k'}}{\delta'_{k'} \sin^2\theta'} = \frac{\omega^2_k}{\delta_k \sin^2\theta}. \tag{65}$$

Absolutne niezmienniki nazywamy też niezmiennikami *równania* drugiego stopnia (18), ponieważ równanie to pomnożone przez dowolną od zera odmienną liczbę k przedstawia tę samą krzywą drugiego stopnia. Można też mówić o niezmiennikach *krzywych* drugiego stopnia. Niezmienniki te oznaczać będziemy literami N_1 i N_2. Mamy więc

$$N_1 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}, \tag{66}$$

$$N_2 = \frac{\omega^2}{\delta}. \tag{67}$$

Niezmiennik N_1 jest niezmiennikiem względem *dowolnego* linjowego przekształcenia, natomiast niezmiennik N_2 jest określony tylko dla przekształcenia układu spółrzędnych Kartezjusza.

Wprowadźmy odpowiednio oznaczenia N'_1, N'_2; $N_{1,k}$, $N_{2,k}$; $N'_{1,k'}$, $N'_{2,k'}$ na niezmienniki poprzednio uważane. Mamy więc

$$N'_{1,k'} \sin^2\theta' = N_{1,k} \sin^2\theta, \tag{68}$$

$$\frac{N'_{2,k'}}{\sin^2\theta'} = \frac{N_{2,k}}{\sin^2\theta}. \tag{69}$$

W przypadku $\delta = 0$ wyrażenia (66) i (67) stają się nieskończenie wielkie. W tym przypadku uważamy niezmiennik absolutny

$$N_3 = \frac{\Delta}{\omega^3}, \tag{70}$$

przyczem jak wiemy δ i ω nie mogą się równocześnie równać 0. Wprowadzając oznaczenia N'_3, $N_{3,k}$, $N'_{3,k'}$, mamy

$$N'_{3,k'} \sin^4\theta' = N_{3,k} \sin^4\theta.. \tag{71}$$

Pomiędzy niezmiennikami N_1, N_2, N_3, mamy związek

$$N_1 = N_2^3 N_3^2. \tag{72}$$

Uważajmy teraz przypadek, gdy mamy $\Delta = \delta = 0$. Aby z wyrażeń (49), (50) otrzymać niezmienniki absolutne uważamy wyrażenia

$$\frac{\delta'}{C\omega} \quad \text{i} \quad \frac{\delta''}{A\omega}.$$

Wyrażenia te nie zmieniają się, jeżeli funkcję $f(x, y)$ pomnożymy przez dowolną od zera odmienną liczbę k. Wprowadzając oznaczenia

$$(73) \quad n_1 = \frac{\delta'}{C\omega}, \qquad (74) \quad n_2 = \frac{\delta''}{A\omega},$$

mamy więc, używając odpowiednio oznaczeń n'_1, n'_2; $n_{1,k}$, $n_{2,k}$; $n'_{1,k'}$, $n'_{2,k'}$

$$n'_{1,k'} \sin^2\theta' = n_{1,k} \sin^2\theta, \tag{75}$$

$$n'_{2,k'} \sin^2\theta' = n_{2,k} \sin^2\theta. \tag{76}$$

Znaczenie geometryczne niezmienników n_1 i n_2 jest widoczne. Na kwadrat odległości obu prostych mamy wzór

$$d^2 = \frac{(\bar{c}_1 - \bar{c}_2)^2}{(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\,\bar{b}\cos\theta)} \sin^2\theta,$$

a więc

$$d^2 = -\frac{4\delta'}{\bar{b}^2 \varepsilon\omega} \sin^2\theta = -\frac{4\delta''}{\bar{a}^2 \varepsilon\omega} \sin^2\theta.$$

Mamy zatem

$$d^2 = -4n_1 \sin^2\theta = -4n_2 \sin^2\theta. \tag{77}$$

6. Niezmienniki układów punktów i prostych.

Niezmiennikiem n punktów P_i, $i = 1, 2, \ldots n$ nazywamy taką funkcję

$$f(x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots x_n, y_n)$$

spółrzędnych tych punktów, która przekształceniem (5) układów spółrzędnych przechodzi w iloczyn tej samej funkcji obliczonej dla spółrzędnych punktów P_i w nowym układzie x', y'

$$f(x'_1, y'_1;\ x'_2, y'_2; \ldots x'_n, y'_n)$$

przez funkcję zależną tylko od spółczynników a, b; a_1, b_1; a_2, b_2 przekształcenia. Mamy więc

$$f(x_1, y_1; \ldots x_n, y_n) \equiv f(x'_1, y'_1; \ldots x'_n, y'_n) \cdot \varphi(a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2). \tag{78}$$

Widoczna, że niema takiej funkcji jednego tylko punktu albowiem przez odpowiednie wprowadzenie układu spółrzędnych można dowolnemu punktowi P nadać dowolne à priori zadane spółrzędne. Niemożliwą jest rzeczą więc, aby równość

$$f(x_1, y_1) = 0$$

pociągała za sobą w każdym układzie spółrzędnych równość

$$f(x'_1, y'_1) = 0,$$

jakby to być powinno.

Wiemy dalej, że mamy

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)^2 =\\ = (x'_1 - x'_2)^2 + 2(x'_1 - x'_2)(y'_1 - y'_2)\cos\theta' + (y'_1 - y'_2)^2,\end{aligned} \tag{79}$$

a więc wyrażenie na odległość d dwóch punktów jest niezmiennikiem, w skład którego wchodzi jednak prócz spółrzędnych obu punktów jeszcze kąt θ pomiędzy osiami spółrzędnych.

Mamy dalej równość

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{80}$$

mnożąc wiersze przez wiersze, a więc wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{81}$$

jest niezmiennikiem i mamy

$$W' = W(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Wiemy zresztą z rozważań Rozdziału VII, że pole trójkąta T o wierzchołkach P_1, P_2, P_3 równa się

$$T = \tfrac{1}{2} W \sin\theta. \tag{82}$$

A więc pole nie zmienia swej wartości przy przekształceniu układu spółrzędnych.

Uważajmy teraz punkt $P(x, y)$ i prostą l o równaniu

$$Ax + By + C = 0. \tag{83}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{aligned} A' &= Aa_1 + Bb_1, \\ B' &= Aa_2 + Bb_2, \\ C' &= Aa + Bb + C \end{aligned} \tag{84}$$

mamy

$$A'x' + B'y' + C' = Ax + By + C. \tag{85}$$

Ze wzorów (84) otrzymujemy

$$A = \frac{A'b_2 - B'b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$B = \frac{-A'a_2 + B'a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Mamy więc

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta = \frac{1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}\left[(A'b_2 - B'b_1)^2 + \right.$$

$$\left. + (-A'a_2 + B'a_1)^2 - 2(A'b_2 - B'b_1)(-A'a_2 + B'a_1)\cos\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}\left[A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta'\right].$$

Otrzymujemy więc równość

$$R'^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 R^2. \tag{86}$$

Uważajmy teraz odległość d punktu P od prostej l, przyczem na tej prostej obieramy pewien dodatni kierunek o spółczynnikach kierunkowych λ, μ.

$$\lambda = -\varepsilon\frac{B}{R}, \quad \mu = \varepsilon\frac{A}{R},$$

gdzie ε jest jedna z liczb ± 1. W przekształconym układzie spółrzędnych x', y' mamy spółczynniki kierunkowe λ', μ'. Mamy związki

$$\lambda = a_1\lambda' + a_2\mu',$$
$$\mu = b_1\lambda' + b_2\mu',$$

a więc

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\lambda' = b_2\lambda - a_2\mu,$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)\mu' = -b_1\lambda + a_1\mu.$$

Stąd otrzymujemy

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\lambda' = -\varepsilon\frac{B'}{R},$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)\mu' = \quad \varepsilon\frac{A'}{R}.$$

Ze wzoru (86) otrzymujemy

$$R' = \eta(a_1b_2 - a_2b_1)R, \tag{87}$$

gdzie $\eta = \pm 1$ zależnie od tego, czy $a_1b_2 - a_2b_1$ jest dodatnie czy też ujemne, tj. czy $\sin\theta$ i $\sin\theta'$ mają te same znaki czy też znaki przeciwne. A więc

$$\lambda' = -\varepsilon\eta\frac{B'}{R'}, \quad \mu' = \varepsilon\eta\frac{A'}{R'}.$$

Na odległość d otrzymujemy w układzie x, y wzór

$$d = \varepsilon\frac{Ax + By + C}{R}\sin\theta, \tag{88}$$

a w układzie x', y' wzór

$$d' = \varepsilon'\frac{A'x' + B'y' + C'}{R'}\sin\theta' \tag{89}$$

gdzie $\varepsilon' = \varepsilon\eta$. A więc otrzymujemy

$$d = d' \tag{90}$$

jak być powinno, tj. odległość zdefiniowana według umów Rozdziału IV. nie zależy od obioru układu spółrzędnych, a wyrażenie na odległość jest niezmiennikiem.

XIII.

Klasyfikacja krzywych drugiego stopnia.

1. Badanie równania drugiego stopnia w przypadku kiedy jeden ze spółczynników A, C jest od zera odmienny.

Uważajmy znów ogólne równanie drugiego stopnia

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

zakładając, że przynajmniej jeden ze spółczynników A, C jest od zera odmienny.

Przypadek pierwszy: $C \neq 0$.

Porządkując równanie (1) według potęg y napiszemy je w postaci

$$Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0. \tag{2}$$

Do każdego x należą dwie wartości y_1, y_2 na y. Wyróżnik równania (2) drugiego stopnia na y jest

$$d(x) = C(Ax^2 + 2Dx + F) - (Bx + E)^2 = \delta x^2 - 2\varkappa'' x + \delta'. \tag{3}$$

Jestto więc funkcja drugiego stopnia w x o spółczynnikach, które są minorami wyznacznika Δ. Wyróżnik d funkcji tej jest

$$d = \delta\delta' - \varkappa''^2 = C\Delta. \tag{4}$$

Trójmian $d(x)$ można w przypadku $\delta \neq 0$ napisać w postaci

$$\delta\left(x - \frac{\varkappa''}{\delta}\right)^2 + \frac{C\Delta}{\delta}.$$

Uważajmy równanie

$$d(x) = 0 \tag{5}$$

o niewiadomej x. Równanie to posiada zależnie od tego, czy wyróżnik $C\Delta$ jest dodatni, ujemny, czy równy zeru dwa pierwiastki

x_1, x_2 urojone sprzężone, dwa pierwiastki rzeczywiste od siebie odmienne lub jeden pierwiastek podwójny.

Odróżniamy następujące przypadki

$$\text{I.}\quad \delta \neq 0, \qquad \text{II.}\quad \delta = 0.$$

I. $\delta \neq 0$. Odróżniamy trzy podprzypadki

$$1.\quad C\Delta > 0, \qquad 2.\quad C\Delta < 0, \qquad 3.\quad C\Delta = 0.$$

1. $C\Delta > 0$. Wyróżnik $d(x)$ jest dodatni lub ujemny zależnie od tego czy $\delta > 0$ czy też $\delta < 0$.

1) $\delta > 0$. Do każdej wartości rzeczywistej na x należą dwie urojone sprzężone wartości na y

$$y = -\frac{Bx + E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-d(x)}. \tag{7}$$

Znaczy to, że na krzywej (1) nie leży żaden punkt rzeczywisty, gdyż dla żadnego rzeczywistego x niema rzeczywistego y, któreby spełniało równanie (1). Krzywe takie nazywamy krzywemi drugiego stopnia *urojonemi.*

2) $\delta < 0$. Do każdego rzeczywistego x należą dwie od siebie odmienne rzeczywiste wartości na y, a więc na każdej prostej równoległej do osi y-ów leżą dwa od siebie odmienne punkty krzywej.

2. $C\Delta < 0$.

Wyróżnik $d(x)$ obraca się w zero dla dwóch rzeczywistych od siebie odmiennych wartości na x, x_1 i x_2, $x_1 < x_2$, dla których wzór (7) daje nam wartości

$$y_1 = -\frac{Bx_1 + E}{C}, \quad y_2 = -\frac{Bx_2 + E}{C}.$$

Odróżnimy znów dwa podprzypadki

1) $\delta > 0$.

Wyróżnik

$$d(x) = \delta(x - x_1)(x - x_2)$$

jest ujemny dla x spełniających nierówności

$$x_1 < x < x_2,$$

a dodatni dla x spełniających jednę z nierówności

$$x < x_1, \qquad x > x_2.$$

Dwie proste L_1 i L_2 o równaniach

$$x = x_1 \quad \text{i} \quad x = x_2$$

równoległe do osi y mają każda jeden i tylko jeden punkt wspólny z krzywą. Dowolna prosta L równoległa do osi y i leżąca pomiędzy parą prostych L_1 i L_2 przecina krzywą w 2-ch punktach rzeczywistych od siebie odmiennych, a dowolna prosta L równoległa do osi y i leżąca zewnątrz pary prostych L_1 i L_2 nie przecina krzywej w żadnym punkcie rzeczywistym. Cała krzywa leży więc pomiędzy dwiema prostemi o równaniach $x = x_1$ i $x = x_2$ i ma kształt podobny do kształtu elipsy.

2) $\delta < 0$.

Wyróżnik $d(x)$ jest teraz dodatni dla x spełniających nierówności

$$x_1 < x < x_2,$$

a ujemny dla x spełniających jednę z nierówności

$$x < x_1, \qquad x > x_2.$$

Dwie proste L_1, L_2 o równaniach

$$x = x_1 \quad \text{i} \quad x = x_2$$

równoległe do osi y-ów mają każda jeden i tylko jeden punkt wspólny z krzywą. Dowolna prosta L równoległa do osi y-ów i leżąca pomiędzy parą prostych L_1 i L_2 nie przecina krzywej w żadnym punkcie rzeczywistym, a dowolna prosta L równoległa do osi y-ów i leżąca zewnątrz pary prostych L_1 i L_2 przecina krzywą w dwóch punktach rzeczywistych od siebie odmiennych. Krzywa leży więc cała zewnątrz prostych L_1 i L_2 i ma kształt podobny do kształtu hiperboli.

3. $C\Delta = 0$.

Teraz $a(x)$ jest pełnym kwadratem, a równanie (1) przedstawia dwie proste przecinające się w punkcie o odciętej $x = \frac{\varkappa''}{\delta}$.

1) $\delta > 0$. Proste są urojone ze sobą sprzężone.

2) $\delta < 0$. Proste są rzeczywiste od siebie odmienne.

II. $\delta = 0$. Wyróżnik $d(x)$ równania (2) jest teraz funkcją pierwszego stopnia w x

$$d(x) = -2\varkappa'' x + \delta' \tag{8}$$

$\varkappa''$ obraca się w zero równocześnie z Δ. Mamy więc dwa przypadki do odróżnienia

$$1.\quad \Delta \neq 0, \qquad 2.\quad \Delta = 0.$$

1. $\Delta \neq 0$. Wzór (7) przyjmuje teraz postać

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{2\varkappa'' x - \delta'}. \tag{9}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem obraca się w zero dla jednej jedynej wartości na x

$$x_0 = \frac{\delta'}{2\varkappa''}. \tag{10}$$

Jest ono w przypadku $\varkappa''$ dodatniego dodatnie dla $x > x_0$, a ujemne dla $x < x_0$, zaś w przypadku $\varkappa''$ ujemnego ujemne dla $x > x_0$ a dodatnie dla $x < x_0$. Na prostej równoległej do osi y o równaniu

$$x = x_0$$

mamy jeden jedyny punkt krzywej. W przypadku $\varkappa'' > 0$ proste równoległe do osi y i odpowiadające odciętym $x > x_0$ przecinają krzywą w dwóch punktach rzeczywistych od siebie odmiennych a proste równoległe do osi y i odpowiadające odciętym $x < x_0$ przecinają krzywą w dwóch punktach urojonych sprzężonych. Dla $\varkappa'' < 0$ rzeczy się mają naodwrót. Krzywa leży całkowicie z jednej strony prostej i ma kształt *podobny do kształtu paraboli.*

2. $\Delta = 0$. Mamy teraz

$$d(x) = \delta'. \tag{11}$$

Mamy teraz

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \sqrt{-\delta'}. \tag{12}$$

Równanie (1) przedstawia dwie proste równoległe. Odróżniamy trzy podprzypadki

$$1.\quad \delta' > 0. \qquad 2.\quad \delta' < 0. \qquad 3.\quad \delta' = 0.$$

W pierwszym podprzypadku mamy dwie proste urojone sprzężone, w drugim dwie proste rzeczywiste od siebie odmienne a w trzecim prostą podwójną.

Przypadek drugi : $A \neq 0$.

Równanie (1) napiszemy teraz w postaci

$$Ax^2+2(By+D)x+Cy^2+2Ey+F=0, \tag{13}$$

i rozwiązując je względem x otrzymamy

$$x=-\frac{By+D}{A}\pm\frac{1}{C}\sqrt{-d'(y)}, \tag{14}$$

gdzie $d'(y)$ jest wyróżnikiem równania (13). Mamy

$$d'(y)=\delta y^2-2\varkappa' y+\delta''. \tag{15}$$

Możemy teraz powtórzyć zupełnie analogiczne rozważania do poprzednich. Mamy

$$\delta\delta''-\varkappa'^2=A\Delta.$$

Należy tylko w rozumowaniach poprzednich zastąpić δ' przez δ'', $\varkappa''$ przez $\varkappa'$, C przez A, oś x przez oś y i naodwrót. Przypadek ten możemy oczywiście sprowadzić do przypadku poprzedniego, wprowadzając nowy układ spółrzędnych otrzymujący się z danego układu spółrzędnych przez przemianę osi spółrzędnych.

2. Redukcja równania drugiego stopnia do postaci kanonicznych w przypadku kiedy jeden ze spółczynników A, C jest od zera odmienny.

Rozważania poprzedniego ustępu posłużą nam do przedstawienia równania (1) krzywej drugiego stopnia w prostej postaci przez wprowadzenie odpowiedniego nowego układu spółrzędnych.

Uważajmy przypadek pierwszy. Równanie (1) możemy napisać w postaci

$$C\left(y+\frac{Bx+E}{C}\right)^2+\frac{\delta}{C}\left(x-\frac{\varkappa''}{\delta}\right)^2+\frac{\Delta}{\delta}=0. \tag{16}$$

Równania pierwszego stopnia

$$\begin{gathered} Cy+Bx+E=0, \\ x-\frac{\varkappa''}{\delta}=0 \end{gathered} \tag{17}$$

przedstawiają dwie linie proste rzeczywiste przecinające się. Obierzmy te linie proste jako nowe osie X i Y, obrawszy na każdej pewien kierunek dodatni, tak aby dodatni kierunek osi Y zawierał z dodatnim kierunkiem osi X kąt dodatni $\theta'<\pi$.

Wyraźmy spółrzędne X, Y punktu P przez spółrzędne x, y tego punktu. Oznaczając przez p i q bezwzględne odległości punktu P od osi X, Y mamy wzory

$$\begin{aligned} p &= \varepsilon \frac{Cy + Bx + E}{\sqrt{C^2 + B^2 - 2BC\cos\theta}} \sin\theta, \\ q &= \varepsilon'\left(x - \frac{\varkappa''}{\delta}\right) \sin\theta, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i $\varepsilon' = \pm 1$, a pierwiastek uważamy dodatni. Pomiędzy odległościami p, q a spółrzędnymi X, Y mamy widocznie związki

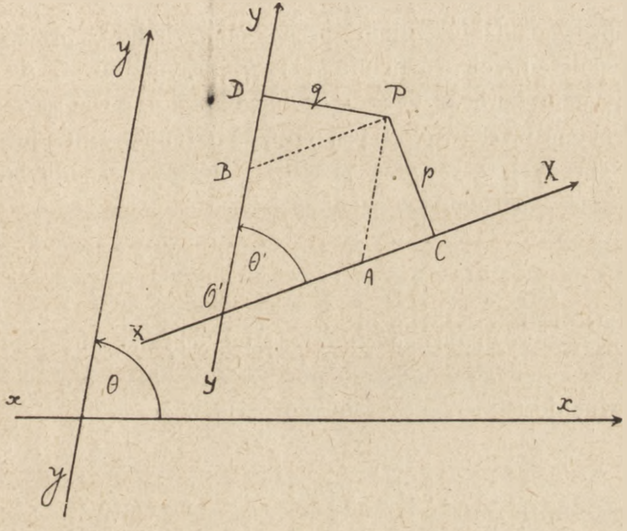

Fig. 17.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\bar{\varepsilon} q}{\sin\theta'}, \\ Y &= \frac{\bar{\varepsilon}' p}{\sin\theta'}, \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie znów $\bar{\varepsilon} = \pm 1$, $\bar{\varepsilon}' = \pm 1$. Dochodzimy zatem do związków postaci

$$\begin{aligned} X &= l\left(x - \frac{\varkappa''}{\delta}\right), \\ Y &= m(Cy + Bx + E), \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie l i m są dwie liczby, które nie zależą od położenia punktu P. W istocie widoczna, że iloczyny $\varepsilon\varepsilon'$ i $\varepsilon'\varepsilon$ nie zależą od położenia punktu P.

Wzory (20) określają nam przekształcenie układu spółrzędnych x, y w układ spółrzędnych X, Y. Wstawiając nowe spółrzędne w równanie (16) otrzymujemy równanie

$$\frac{Y^2}{m^2 C} + \frac{\delta X^2}{C l^2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

albo równanie

$$\frac{\delta X^2}{l^2} + \frac{Y^2}{m^2} + \frac{C\Delta}{\delta} = 0. \tag{21}$$

Doprowadziliśmy zatem przez odpowiednie przekształcenie układu spółrzędnych równanie (1) w przypadku I. do postaci, w której mamy prócz wyrazu wolnego tylko kwadraty spółrzędnych. Przytem wyraz wolny jest od zera odmienny lub nie zależnie od tego, czy $\Delta \neq 0$ czy też $\Delta = 0$. Załóżmy nasamprzód $\Delta \neq 0$. Wprowadzamy następujące wielkości

$$a^2 = \varepsilon l^2 \frac{C\Delta}{\delta^2}, \quad b^2 = \varepsilon' m^2 \frac{C\Delta}{\delta}, \tag{22}$$

przyczem ε, ε' równają się ± 1 i są tak obrane, aby a^2 i b^2 były dodatnie, zaś a i b są dodatnie pierwiastki z a^2 i b^2.

Równanie (21) napisze się wówczas w postaci

$$\frac{X^2}{\varepsilon a^2} + \frac{Y^2}{\varepsilon' b^2} + 1 = 0. \tag{23}$$

Czterem przypadkom poprzednim 1. 1), 1. 2), 2. 1), 2. 2) odpowiadają odpowiednio znaki $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$; $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$; $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$; $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$.

Widoczna dalej, że przypadki drugi i czwarty różnią się tylko rolą osi X i Y, i że przemieniając osie te sprowadzamy te przypadki jeden do drugiego.

Wiemy dalej z rozważań Rozdziału poprzedniego, że wielkości δ i Δ są niezmiennikami funkcji drugiego stopnia i że znak δ a w przypadku $\delta > 0$ także i znak $C\Delta$ nie zmienia się ani przez przekształcenie układu spółrzędnych ani przez pomnożenie funkcji $f(x, y)$ przez dowolną liczbę od zera odmienną. A więc nie można przez żadne wprowadzenie nowego układu spółrzędnych lub przez pomnożenie równania (1) przez pewną liczbę od zera odmienną przemienić w siebie następujących trzech przypadków

$$\varepsilon = +1,\ \varepsilon' = +1;\ \varepsilon = -1,\ \varepsilon' = -1;\ \varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \mp 1,$$

gdzie w trzecim przypadku znaki górne albo znaki dolne należy uważać jednocześnie.

Możemy zatem powiedzieć, że w przypadku I. $\Delta \neq 0$ możemy równanie (1) sprowadzić do jednej z trzech postaci *kanonicznych* następujących

$$\text{I.}\quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

$$\text{II.}\quad -\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

$$\text{III.}\quad -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Z równań tych widać odrazu, co już poprzednio powiedzieliśmy, że w przypadku 1. 1) krzywa jest całkowicie urojona, w przypadku 2. 1) ma kształt elipsy, a w przypadku 2. 2) ma kształt hiperboli. W przypadku 1. 2) ma więc krzywa również kształt hiperboli.

Wiemy dalej, że w *układzie prostokątnym* równania I, II, III przedstawiają odpowiednio elipsę urojoną, elipsę rzeczywistą i hiperbolę. Ale układ osi X, Y, w którym otrzymaliśmy równania I, II i III nie musi być układem prostokątnym. Wobec tego wprowadzimy nowe pojęcia *krzywych kategorji elips urojonych*, *kategorji elips rzeczywistych* i *kategorji hiperbol*, przedstawionych odpowiednio przez równania I, II i III, do których to trzech kategoryj należą odpowiednio elipsy urojone, elipsy rzeczywiste i hiperbole.

Okażemy w dalszym ciągu wykładów, że krzywe I, II i III są *zawsze* odpowiednio elipsami urojonemi, elipsami rzeczywistemi i hiperbolami, tj. że można zawsze obrać taki układ spółrzędnych *prostokątnych* X', Y', aby w tym układzie równanie (1) przybrało kształty odpowiednio I, II i III. Przytem ponieważ w przypadku równania I. niema ani jednego punktu rzeczywistego spełniającego to równanie, należy w tym przypadku przez powiedzenie, że to równanie zawsze przedstawia elipsę urojoną rozumieć to, że można wprowadzić zamiast osi x, y nowe osie X', Y' *prostokątne*, tak aby wzorami na przekształcenie układu spółrzędnych x, y w układ spółrzędnych X', Y' w przypadku $\delta > 0$, $C\Delta > 0$ równanie (1) dało się sprowadzić do równania postaci I.

Zwróćmy się teraz do przypadku I. 3. Teraz wprowadzając wielkości

$$a^2 = \varepsilon \frac{l^2}{\delta}, \quad b^2 = m^2 \tag{24}$$

sprowadzamy równanie (21) do postaci

$$\frac{X^2}{\varepsilon a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0. \tag{25}$$

Otrzymujemy zatem zależnie od tego czy $\varepsilon = +1$ czy też $\varepsilon = -1$ dwie dalsze postacie kanoniczne równania (1)

$$\text{IV. } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

$$\text{V. } \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0,$$

odpowiadające przypadkom $\delta > 0$ i $\delta < 0$ i przedstawiające jak wiemy dwie proste rzeczywiste przecinające się i dwie proste urojone sprzężone przecinające się.

Nim przejdziemy do przypadku pierwszego II. $\delta = 0$ zajmiemy się przypadkiem drugim I., tj. $A \neq 0$, $\delta \neq 0$. Otrzymujemy te same kategorje krzywych drugiego stopnia, albowiem wystarczy zamienić osie x, y.

Przejdźmy teraz do przypadku pierwszego II. $\delta = 0$. W podprzypadku 1. $\Delta \neq 0$ wprowadzimy jako nowe osie X, Y spółrzędnych proste o równaniach

$$\begin{gathered} Cy + Bx + E = 0 \\ x - \frac{\delta'}{2\varkappa''} = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

A mianowicie obieramy na tych prostych kierunki dodatnie znów w ten sposób, aby kierunek dodatni osi Y zawierał z kierunkiem dodatnim osi X kąt dodatni $\theta' < \pi$. Oznaczając znów przez p i q absolutne odległości punktu P od osi X i Y mamy

$$\begin{gathered} p = \varepsilon \frac{Cy + Bx + E}{\sqrt{C^2 + B^2 - 2BC\cos\theta}} \sin\theta, \\ q = \varepsilon' \left(x - \frac{\delta'}{2\varkappa''}\right) \sin\theta, \end{gathered} \tag{27}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$. Mamy dalej znów związki (19), a stąd otrzymujemy wzory przekształcenia

$$\begin{aligned} X &= l\left(x - \frac{\delta'}{2\varkappa''}\right), \\ Y &= m(Cy + Bx + E), \end{aligned} \tag{28}$$

gdzie l, m są dwie stałe od zera odmienne.

Równanie (1) ma teraz postać

$$C\left(y - \frac{Bx + E}{C}\right)^2 + \frac{-2\varkappa'' x + \delta'}{C} = 0, \tag{29}$$

a więc w spółrzędnych X, Y napisze się w postaci

$$\frac{Y^2}{Cm^2} - \frac{2\varkappa''}{Cl} X = 0,$$

albo w postaci

$$Y^2 - \frac{2\varkappa''}{lm^2} X = 0. \tag{30}$$

Wprowadzając wielkość $p \neq 0$

$$p = \frac{\varkappa''}{lm^2} \tag{31}$$

otrzymujemy równanie

$$\text{VI.} \quad Y^2 - 2pX = 0.$$

Równanie to przedstawia krzywą mającą kształt paraboli, a w szczególnym przypadku układu X, Y *prostokątnego* krzywa ta jest parabolą. Okażemy w dalszym ciągu wykładów, że ta krzywa jest *zawsze* parabolą, tj. że zawsze można obrać taki układ spółrzędnych X', Y' *prostokątny*, w którym równanie (1) ma postać VI. równania paraboli. Dla krzywych obecnie rozważanych wprowadzimy nazwę *kategorji parabol*.

W przypadku 2. $\Delta = 0$ postępując tak samo jak poprzednio wprowadzimy osie X, Y określone równaniami

$$\begin{aligned} Cy + Bx + E &= 0, \\ x &= 0, \end{aligned} \tag{32}$$

tj. jako oś Y obieramy oś y.

Mamy teraz wzory przekształcenia

$$\begin{aligned} X &= lx, \\ Y &= m(Cy + Bx + E), \end{aligned} \tag{33}$$

gdzie l, m są dwie stałe od zera odmienne. Równanie (1) przybiera w nowych spółrzędnych X, Y postać

$$\frac{Y^2}{Cm^2}+\frac{\delta'}{C}=0,$$

albo

$$Y^2+\delta' m^2=0. \tag{34}$$

Wprowadzając wielkość nie ujemną k^2

$$k^2=\varepsilon\delta' m^2, \tag{35}$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$, otrzymujemy zależnie od tego czy $\delta'>0$, czy $\delta'<0$ czy też $\delta'=0$ trzy równania następujące

$$\begin{array}{rl} \text{VII.} & Y^2+k^2=0, \\ \text{VIII.} & Y^2-k^2=0, \\ \text{IX.} & Y^2=0, \end{array}$$

przedstawiające jak wiemy odpowiednio dwie proste równoległe urojone sprzężone, dwie proste równoległe rzeczywiste od siebie odmienne i prostą podwójną.

W przypadku drugim II., tj. $A\neq 0$, $\delta=0$ otrzymujemy te same krzywe, które wprowadzając odpowiedni układ spółrzędnych możemy przedstawić w tych samych postaciach VI—IX.

3. Badanie równania (1) w przypadku obu spółczynników A, C równych 0.

Równanie (1) ma teraz postać

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F=0, \tag{36}$$

którą można też napisać

$$2B\left(x+\frac{E}{B}\right)\left(y+\frac{D}{B}\right)-\frac{2DE}{B}+F=0.$$

Mamy teraz

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=-B^2F+2BDE,$$

więc równanie (36) ma kształt

$$2B\left(x+\frac{E}{B}\right)\left(y+\frac{D}{B}\right)-\frac{\Delta}{B^2}=0.$$

Mamy teraz $\delta < 0$. Widoczna dalej, że przez wprowadzenie odpowiedniego układu spółrzędnych, równanie (36) można przekształcić w równanie, w którem przynajmniej jeden ze spółczynników przy x^2 i y^2 jest od zera odmienny. A ponieważ wyznacznik δ i dla tego przekształconego równania jest ujemny, więc widzimy, że równanie (36) przedstawia w przypadku $\Delta \neq 0$ krzywe kategorji hiperbol, a w przypadku $\Delta = 0$ dwie proste rzeczywiste przecinające się.

4. Redukcja równania (1) w przypadku obu spółczynników A, C równych 0 do postaci kanonicznych.

Wprowadzamy teraz nowy układ spółrzędnych X, Y, obierając nowe osie równoległe i równo skierowane do dawnych osi, o równaniach

$$y + \frac{D}{B} = 0, \qquad x + \frac{E}{B} = 0. \tag{37}$$

Mamy zatem wzory następujące przekształcenia

$$X = x + \frac{E}{B}, \qquad Y = y + \frac{D}{B}. \tag{38}$$

Rownanie (36) napisze się w nowym układzie spółrzędnych w postaci

$$2BXY - \frac{\Delta}{B^2} = 0,$$

lub

$$XY - k\Delta = 0, \tag{39}$$

gdzie k jest wielkość od zera odmienna.

Z rozważań Rozdziału XI. o hiperbolach wiemy, że równanie to przedstawia w przypadku $\Delta \neq$ hiperbolę odniesioną do asymptot jako do osi spółrzędnych. W przypadku $\Delta = 0$ mamy oczywiście dwie proste rzeczywiste od siebie odmienne. A więc nie otrzymujemy teraz nowych krzywych drugiego stopnia, jak to widzieliśmy już w poprzednim ustępie.

Reasumując wyniki dotąd otrzymane widzimy, że dochodzimy do 9 kategoryj krzywych 2-go stopnia, przedstawionych równaniami I—IX. Nie można przez żadne przekształcenie układu spółrzędnych lub pomnożenie równania przez pewną liczbę od zera odmienną przeprowadzić jednego z tych równań w drugie, a więc kategorje te są od siebie odmienne, tj. żadna krzywa nie może równocześnie należeć do dwóch kategoryj. Charakteryzują się te kategorje wartościami wielkości δ, $A\Delta$, $C\Delta$, δ' i δ'', a mianowicie znakami tych wielkości i tem czy te wielkości są od zera odmienne, czy też równe zeru.

ROZDZIAŁ XIV.

Środki krzywych drugiego stopnia.

1. Definicja środków krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy krzywą 2-go stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

i dowolny punkt P rzeczywist lub urojony o spółrzędnych a, b i poprowadźmy przez ten punkt dowolną prostą l rzeczywistą lub urojoną o równaniach parametrycznych

$$\begin{aligned} x &= a + r\lambda, \\ y &= b + r\mu, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie λ, μ są spółczynniki kierunkowe obranego na prostej dodatniego kierunku. Otrzymamy punkty przecięcia prostej z krzywą wstawiając wyrażenia (2) na spółrzędne w równanie (1)

$$f(a + r\lambda, \quad b + r\mu) = 0 \tag{3}$$

i rozwiązując równanie według niewiadomej r.

Równanie (3) ma postać rozwiniętą

$$\begin{aligned} A(a + r\lambda)^2 + 2B(a + r\lambda)(b + r\mu) + C(b + r\mu)^2 + \\ + 2D(a + r\lambda) + 2E(b + r\mu) + F = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Porządkując według potęg r, otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$r^2\varphi(\lambda, \mu) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) + f(a, b) = 0, \tag{5}$$

gdzie $\varphi(\lambda, \mu)$ jest znane wyrażenie i gdzie mamy

$$\begin{aligned} \alpha &= Aa + Bb + D, \\ \beta &= Ba + Cb + E. \end{aligned} \tag{6}$$

Każdej skończonej wartości na r będącej pierwiastkiem równania (5) odpowiada punkt przecięcia prostej l z krzywą, położony w skończoności. A więc prosta (2) przecina krzywą w 2, 1, 0 punktach, albo też cała prosta leży na krzywej drugiego stopnia.

Wiemy z rozważań Rozdziału VIII., że funkcja $\varphi(\lambda, \mu)$ obraca się w zero dla dwóch i tylko dwóch par kierunków, przyczem przez parę kierunków rozumiemy kierunek pewien i kierunek jemu przeciwny.

Dla wszystkich kierunków nie spełniających równania

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \tag{7}$$

równanie (5) jest stopnia drugiego. Oznaczmy przez r_1, r_2 jego pierwiastki, którym odpowiadają punkty przecięcia A_1 i A_2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt P połowił odcinek $A_1 A_2$, tj. abyśmy mieli

$$\overline{A_1 P} = \overline{PA_2}, \tag{8}$$

albo

$$r_1 = -r_2,$$

jest równość

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{9}$$

Środkiem (centre) krzywej drugiego stopnia nazywamy taki punkt, który połowi odcinek $A_1 A_2$ na każdej prostej l, której spółczynniki kierunkowe nie spełniają warunku (7). A więc warunek (9) jest spełniony dla tego punktu dla każdego układu wartości λ, μ nie spełniającego równania (7). Stąd wynika widocznie, że muszą zachodzić równości

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0. \tag{10}$$

A więc warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt P był środkiem krzywej 2-go stopnia jest, aby jego spółrzędne a, b spełniały dwa równania liniowe

$$\begin{aligned} Aa + Bb + D &= 0, \\ Ba + Cb + E &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Uważajmy teraz kierunki, dla których zachodzi równanie (7). Wówczas, jeżeli zachodzi nierówność

$$f(a, b) \neq 0 \tag{12}$$

niema pierwiastku równania (5), a jeżeli zachodzi równość

$$f(a, b) = 0, \tag{13}$$

równanie (5) jest spełnione dla wszystkich wartości na r. A więc możemy powiedzieć, że jeżeli punkt P jest środkiem krzywej drugiego stopnia, wówczas każdemu punktowi A_1 przecięcia prostej przechodzącej przez P z krzywą odpowiada drugi punkt A_2 *symetryczny* punktu A_1 względem środka P tj. leżący w tej samej odległości od P na prostej co punkt A_1 ale z przeciwnej strony punktu P.

2. Badanie środków krzywych drugiego stopnia.

Warunek (13) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby środek krzywej drugiego stopnia leżał na tej krzywej Wówczas każda prosta przechodząca przez środek, dla której nie zachodzi warunek (7) ma tylko jeden punkt tj. środek wspólny z krzywą, a każda prosta spełniająca warunek (7) ma wszystkie punkty wspólne z krzywą.

Ale mamy, jak wiemy

$$f(a, b) = \alpha a + \beta b + \gamma,$$

gdzie

$$\gamma = Da + Eb + F.$$

Stąd wynika, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby środek C leżał na krzywej jest, aby jego spółrzędne a, b spełniały prócz równań (11) trzecie równanie liniowe

$$Da + Eb + F = 0. \tag{14}$$

Uważajmy nasamprzód równania (11). Do równań tych należy macierz M

$$M = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \end{vmatrix}, \tag{15}$$

której minorami są δ, $\varkappa''$, $\varkappa'$. Odróżnić musimy trzy przypadki:

I. $\delta \neq 0$.

Krzywa 2-go stopnia posiada *jeden jedyny* środek C o spółrzędnych

$$a = \frac{\varkappa''}{\delta}, \quad b = \frac{\varkappa'}{\delta}. \tag{16}$$

II. $\delta = 0$, *ale nie oba minory* $\varkappa''$, $\varkappa'$ *są równe* 0.

Niema punktu w skończoności spełniającego równania (11), a więc *niema* środka. Równania (11) przedstawiają w spółrzędnych a, b dwie proste do siebie równoległe albo też jedno z tych równań przedstawia prostą w nieskończoności.

III. $\delta = \varkappa'' = \varkappa' = 0$.

Równania (11) mają nieskończenie wiele rozwiązań. Przedstawiają one tę samą prostą w skończoności, albo, też jedno z tych równań jest identycznie zero. Środki C leżą na *linii prostej* c przedstawionej przez to z obu równań (11), którego spółczynniki przy a, b nie są oba równe 0. Każdy punkt prostej c jest środkiem. Prosta ta w skończoności położona nazywa się *prostą środków* krzywej drugiego stopnia.

Krzywe trzech kategoryj poprzednich nazywamy odpowiednio krzywymi *ze środkiem*, *bez środka*, *z prostą środków*. Krzywe pierwszej kategorji są to, jak to wynika z rozważań poprzedniego Rozdziału krzywe *kategoryj elips i hiperbol* i *dwie proste równoległe*. Krzywe kategorji drugiej są to krzywe *kategorji parabol*. Nareszcie krzywe kategorji trzeciej są to *dwie proste do siebie równoległe*. W tym przypadku pisząc funkcję $f(a, b)$ w postaci

$$f(a, b) = \varepsilon(\bar{a}x + by + c_1)(\bar{a}x + \bar{b}y + c_2) \tag{17}$$

napiszemy równania (11) w postaci

$$\begin{aligned} \varepsilon a[\bar{a}a + bb + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)] &= 0, \\ \varepsilon b[\bar{a}a + bb + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)] &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

a więc równanie prostej środków w postaci

$$aa + bb + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0. \tag{19}$$

Jestto oczywiście prosta równoległa do obu prostych danych i równo od nich oddalona. W istocie obierzmy na tych trzech prostych ten sam kierunek określony spółczynnikami kierunkowymi.

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\varepsilon\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\cos\theta}}, \\ \mu &= \frac{\varepsilon\bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\bar{b}\cos\theta}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Odległości początku O układu spółrzędnych od prostych l_1, l_2, c liczone, jako dodatnie w kierunku zawierającym kąt $+\frac{\pi}{2}$ z kierunkiem (30) są

$$\begin{aligned} d_1 &= \varepsilon \frac{c_1}{r} \sin\theta \\ d_2 &= \varepsilon \frac{c_2}{r} \sin\theta \qquad (21) \\ d &= \tfrac{1}{2}\, \varepsilon \frac{c_1 + c_2}{r} \sin\theta \end{aligned}$$

gdzie

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta},$$

a więc mamy

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}. \qquad (22$$

Zwróćmy się teraz do równania (14). Aby istniał układ liczb a, b spełniający trzy równania (11), (14), potrzeba, aby zachodziła równość

$$\Delta = 0 \qquad (23)$$

a więc, by krzywa 2-go stopnia rozpadała się na *dwie proste*. Mamy więc następujące rezultaty w trzech poprzednich przypadkach:

I. Istnieje jeden jedyny środek na krzywej 2-go stopnia, którym jest punkt przecięcia obu prostych o spółrzędnych (16).

II. Przypadek ten zachodzić nie może, albowiem z równości

$$\delta'\delta - \varkappa''^2 = C\Delta, \qquad \delta''\delta - \varkappa'^2 = A\Delta$$

wynika, że dla $\delta = \Delta = 0$ mamy $\varkappa'' = \varkappa' = 0$.

III. Aby istniał przynajmniej jeden środek potrzeba teraz i wystarcza, aby wszystkie minory 2-go stopnia wyznacznika Δ, równały się zeru. Równanie (1) przedstawia wówczas prostą podwójną a prostą (19) środków zlewa się z tą prostą podwójną. Jest to geometrycznie oczywiste, że każdy punkt prostej podwójnej jest środkiem.

3. Redukcja równania krzywej drugiego stopnia do środka jako początku nowego układu spółrzędnych.

W przypadkach, gdy mamy przynajmniej jeden środek krzywej 2-go stopnia, możemy wprowadzić nowy układ spółrzędnych, obierając nowy początek O' w jednym ze środków. Przytem obierzemy nowe osie x', y' równoległe i równo skierowane z osiami x, y.

Mamy następujące wzory przekształceń układów spółrzędnych

$$x = a + x', \qquad y = b + y'. \tag{24}$$

Wstawiając w równanie (1) otrzymujemy

$$A(a+x')^2 + 2B(a+x')(b+y') + C(b+y')^2 + 2D(a+x') + \\ + E(b+y') + F = 0,$$

a stąd widocznie równanie

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + f(a, b) = 0, \tag{25}$$

w którem niema wyrazów pierwszego stopnia w x', y'.

W przypadku I. możemy równanie (25) napisać jeszcze w innej postaci. Mamy teraz

$$f(a, b) = \gamma = D\frac{\varkappa''}{\delta} + E\frac{\varkappa'}{\delta} + F = \frac{\Delta}{\delta},$$

a więc napiszemy równanie w postaci

$$\varphi(x', y') + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{26}$$

W przypadku III. obieramy jako nowy początek układu dowolny punkt na prostej środków. Teraz mamy

$$\gamma = Da + Eb + F = \frac{1}{2}\varepsilon(c_1 + c_2)(\bar{a}a + \bar{b}b) + F =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4}(c_1 + c_2)^2 + F.$$

Jeżeli $\bar{a} \neq 0$ mamy

$$\tfrac{1}{4}(c_1 + c_2)^2 = \varepsilon\frac{D^2}{A},$$

a jeżeli $\bar{b} \neq 0$

$$\tfrac{1}{4}(c_1 + c_2)^2 = \varepsilon\frac{E^2}{C}.$$

A więc mamy

$$\gamma = F - \frac{D^2}{A} = \frac{\delta''}{A},$$

$$\gamma = F - \frac{E^2}{C} = \frac{\delta'}{C}.$$

Równanie (25) napisze się więc w jednej z postaci następujących

$$\varepsilon(\bar{a}x' + by')^2 + \frac{\delta''}{A} = 0, \tag{27}$$

$$\varepsilon(\bar{a}x' + \bar{b}y')^2 + \frac{\delta'}{C} = 0. \tag{28}$$

Ćwiczenia.

1. Znaleźć miejsce geometryczne środków krzywych 2-go stopnia

$$x^2 - k(1-k)xy + k^2y^2 - ak^2y = 0, \tag{1}$$

gdzie k jest zmienny parametr.

ROZDZIAŁ XV.

Kierunki asymptotyczne i asymptoty krzywych drugiego stopnia.

1. Definicja kierunków asymptotycznych i asymptot krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy znów krzywą drugiego stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

i prostą l o równaniach

$$\begin{aligned} x &= a + r\lambda, \\ y &= b + r\mu \end{aligned} \tag{2}$$

przechodzącą przez punkt $P(a, b)$. Uważajmy równanie drugiego stopnia na r

$$r^2\varphi(\lambda, \mu) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) + f(a, b) = 0 \tag{3}$$

dające nam punkty przecięcia prostej l z krzywą.

Jeżeli spółczynnik przy r^2 równa się zeru, równanie (3) zależnie od wartości spółczynnika przy r i wyrazu wolnego jest równaniem stopnia pierwszego, stopnia zero, lub jest identycznie równe zeru. Kierunki, których spółczynniki spełniają równanie

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \tag{4}$$

nazywają się kierunkami *asymptotycznymi* (directions asymptotiques) krzywej (1). A więc prosta l mająca kierunek asymptotyczny albo przecina krzywą w jednym punkcie, albo niema żadnego punktu wspólnego z krzywą drugiego stopnia, albo wreszcie całkowicie leży na tej krzywej. Przytem zakładamy, że kierunki asymptotyczne nie są *minimalne*, gdyż w tym przypadku nie można przedstawić prostej l równaniami parametrycznymi (2).

Proste mające kierunek asymptotyczny i nie przecinające wcale krzywej drugiego stopnia, albo też leżące całkowicie na tej krzywej nazywają się *asymptotami* (asymptotes) krzywej drugiego stopnia.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby prosta mająca kierunek asymptotyczny była asymptotą krzywej drugiego stopnia, jest więc aby na prostej tej leżał przynajmniej jeden punkt, dla którego zachodzi równość

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{5}$$

Zwróćmy się teraz do wykluczonego przypadku kierunków asymptotycznych minimalnych. Mamy więc następującą postać funkcji $f(x, y)$

$$(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta + (y-b)^2 + k = 0, \tag{6}$$

gdzie a, b są spółrzędne środka koła, które teraz przedstawia równanie (1). Uważajmy dowolną prostą minimalną l i napiszmy jej równanie w postaci

$$x - a + (y-b)(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta) + m = 0. \tag{7}$$

Punkty przecięcia prostej minimalnej i koła otrzymujemy z równania (7) i z równania

$$-m[(x-a) + (y-b)(\cos\theta - \varepsilon i \sin\theta)] + k = 0. \tag{8}$$

Z równań (7) i (8) otrzymujemy jeden jedyny punkt przecięcia, gdyż wyznacznik przy niewiadomych x, y równa się

$$2m\varepsilon i \sin\theta.$$

Wyjątek zachodzi tylko w przypadku $m = 0$, w którym to przypadku dla $k \neq 0$ prosta minimalna (7) przechodząca przez środek koła i koło (6) przecinają się tylko w nieskończoności. Spółrzędne jednorodne punktu w nieskończoności na prostej minimalnej (7) są

$$x_1 = -k(\cos\theta + \varepsilon i \sin\theta), \qquad x_2 = k, \qquad x_3 = 0, \tag{9}$$

gdzie k jest dowolna liczba od zera odmienna. Mamy więc w nieskończoności dwa punkty odpowiadające $\varepsilon = +1$ i $\varepsilon = -1$ wspólne wszystkim krzywym drugiego stopnia o kierunkach asymptotycznych minimalnych tj. kołom. Są to punkty *cykliczne* (points cycliques) w nieskończoności.

2. Badanie kierunków asymptotycznych krzywych drugiego stopnia.

Odróżniamy 3 przypadki:

I. $\delta > 0$.

Rozkładamy $\varphi(\lambda, \mu)$ na iloczyn dwóch czynników pierwszego stopnia

$$\varphi(\lambda, \mu) = \varepsilon(a_1 \lambda + b_1 \mu)(a_2 \lambda + b_2 \mu), \tag{10}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ zależnie od znaku A i C; $a_1 = a_2$ i są rzeczywiste, zaś b_1 i b_2 są urojone sprzężone. Otrzymujemy zatem dwa układy wartości na λ, μ

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon_1 \frac{b_1}{r_1}, \\ \mu_1 &= \varepsilon_1 \frac{a_1}{r_1}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= -\varepsilon_2 \frac{b_2}{r_2}, \\ \mu_2 &= \varepsilon_2 \frac{a_2}{r_2}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

gdzie

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2a_1 b_1 \cos\theta}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 \cos\theta},$$

$\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Otrzymujemy więc dwie pary kierunków tak, że spółczynniki kierunkowe każdej pary różnią się tylko znakiem pierwiastka i że spółczynniki kierunkowe jednej pary są sprzężone ze spółczynnikami drugiej. Dla skrócenia wprowadzimy nazwę *kierunku asymptotycznego* dla oznaczenia *pary* kierunków sobie przeciwnych. Otrzymujemy zatem dwa kierunki asymptotyczne *urojone ze sobą sprzężone.*

W wyjątkowym przypadku kierunków asymptotycznych *minimalnych* mamy na spółczynniki kierunkowe wzory

$$\lambda_1 = -k_1 b_1, \qquad \mu_1 = k_1 a_1, \tag{13}$$

$$\lambda_2 = -k_2 b_2, \qquad \mu_2 = k_2 a_2, \tag{14}$$

gdzie k_1, k_2 są dowolne dwie liczby od zera odmienne.

II. $\delta < 0$.

Rozkładamy znów $\varphi(\lambda, \mu)$ na iloczyn wzorem (10). Teraz czynniki prawostronne są rzeczywiste od siebie odmienne. Otrzymujemy dwa kierunki asymptotyczne *rzeczywiste od siebie odmienne*

III. $\delta = 0$.

Napiszemy $\varphi(\lambda, \mu)$ w postaci

$$\varphi(\lambda, \mu) = \varepsilon(\overline{a}\lambda + \overline{b}\mu)^2. \tag{15}$$

Otrzymujemy *jeden kierunek asymptotyczny rzeczywisty*

$$\lambda = -\eta\frac{\overline{b}}{\overline{r}}, \qquad \mu = \eta\frac{\overline{a}}{\overline{r}}, \tag{16}$$

gdzie $\eta = \pm 1$, i

$$\overline{r} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\,\overline{b}\cos\theta}.$$

Jeżeli równanie (1) przedstawia dwie linie proste, natenczas kierunki asymptotyczne są to kierunki tych prostych.

Uważajmy teraz dowolną prostą przechodzącą przez dowolny punkt $P(a, b)$, nie mającą kierunku asymptotycznego. Prosta ta przecina krzywą w dwóch punktach P_1, P_2 odpowiadających pierwiastkom r_1, r_2 równania (3). Na pierwiastki te mamy wzór

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha\lambda + \beta\mu}{\varphi(\lambda, \mu)} + \frac{1}{\varphi(\lambda\mu)}\sqrt{(\alpha\lambda + \beta\mu)^2 - f(a, b)\,\varphi(\lambda, \mu)}. \tag{17}$$

Niechaj λ_0, μ_0 będą spółczynniki kierunkowe pewnego kierunku asymptotycznego nie minimalnego. Uważajmy nieskończony ciąg prostych przechodzących przez punkt P tak obranych, że kierunki tych prostych zmierzają do tego danego kierunku asymptotycznego. A więc wyrażenie $\alpha\lambda + \beta\mu$ dla tego ciągu prostych zmierza do granicy $\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0$. Załóżmy

$$\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 \neq 0. \tag{18}$$

Uważajmy wzór (17). Wyrażenie pod pierwiastkiem w tym wzorze zmierza do wartości

$$(\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0)^2.$$

Mamy więc dwa nieskończone ciągi wartości pierwiastka, z których jeden zmierza do granicy

$$\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0,$$

a drugi do granicy

$$-(\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0).$$

Dwom tym ciągom odpowiadają dwa nieskończone ciągi wartości na r. Ciąg wartości odpowiadających drugiej granicy pierwiastka jest tego rodzaju, że wartości bezwzględne $|r|$ tego ciągu rosną nieograniczenie.

Dwom nieskończonym ciągom na r odpowiadają dwa nieskończone ciągi punktów na krzywej. Drugiemu ciągowi wartości na r odpowiada ciąg punktów, których odległości od początku układu spółrzędnych rosną nieograniczenie, a więc, które oddalają się w nieskończoność. Pierwszemu ciągowi wartości pierwiastka odpowiada ciąg wartości na r dążący do oznaczonej skończonej wartości. W istocie możemy napisać

$$r = -\frac{\alpha\lambda + \beta\mu}{\varphi(\lambda, \mu)}\left[1 - \sqrt{\frac{f(a, b)\,\varphi(\lambda, \mu)}{(\alpha\lambda + \beta\mu)^2}}\right].$$

Oznaczmy wyrażenie

$$\frac{f(a, b)\,\varphi(\lambda, \mu)}{(\alpha\lambda + \beta\mu)^2}$$

przez $\sigma(\lambda, \mu)$. Mamy

$$1 - \sqrt{1 - \sigma(\lambda, \mu)} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \sigma(\lambda, \mu)}},$$

a więc możemy napisać

$$r = -\frac{f(a, b)}{\alpha\lambda + \beta\mu}\cdot\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \sigma(\lambda, \mu)}}.$$

Jeżeli λ, μ dążą do wartości λ_0, μ_0, natenczas jedna z wartości pierwiastka z

$$1 - \sigma(\lambda, \mu)$$

dąży do $+1$, a druga do -1. A więc jedna z wartości na r dąży do granicy

$$-\frac{2(\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0)}{f(a, b)},$$

i widocznie, że ciąg wartości na r dążący do tej granicy jest identyczny z pierwszym ciągiem wartości na r uważanym poprzednio. Ciągowi temu wartości na r odpowiada ciąg punktów przecięcia prostych z krzywą, dążący do oznaczonego punktu położonego w skończoności.

Załóżmy teraz, że mamy

$$\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 = 0. \tag{19}$$

Okażemy, że jeżeli zachodzi nierówność

$$f(a, b) \neq 0, \tag{20}$$

natenczas wartości bezwzględne obu ciągów poprzednio rozważanych na r rosną nieograniczenie, a więc *oba punkty* przecięcia prostych z krzywą oddalają się w nieskończoność. W istocie mamy teraz

$$r_1 r_2 = \frac{f(a, b)}{\varphi(\lambda, \mu)},$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -2\frac{\alpha\lambda + \beta\mu}{f(a, b)}.$$

Z pierwszego wzoru wynika, że wartość bezwzględna $|r_1 r_2|$ iloczynu pierwiastków dąży do nieskończoności, a z drugiego wzoru wynika, że niemożliwą jest rzeczą, aby wartość bezwzględna jednego z dwóch pierwiastków r_1, r_2 była większa od dowolnie wielkiej liczby M, a druga była równocześnie mniejsza od pewnej *stałej* liczby K, niezależnej od liczby M. A więc oba pierwiastki r_1, r_2 rosną nieograniczenie co do wartości bezwzględnej.

Jeżeli zachodzi równość

$$f(a, b) = 0, \tag{21}$$

natenczas równanie (3) jest podzielne przez r, a więc jeden punkt przecięcia prostej l z krzywą schodzi się stale z punktem P.

3. Badanie asymptot krzywych drugiego stopnia.

Przedewszystkiem wynika z warunku (5), że każda prosta przechodząca przez środek C krzywej (1) i mająca kierunek asymptotyczny jest asymptotą. W istocie obrawszy jako punkt $P(a, b)$ środek C (albo jeden ze środków) mamy

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Uważajmy asymptotę krzywej drugiego stopnia o równaniach (2). Spółrzędne a, b punktu P obranego na asymptocie można wyrazić przez spółrzędne dowolnego punktu $Q(x, y)$ i przez parametr r w postaci

$$a = x - r\lambda, \qquad b = y - r\mu.$$

Wstawiając te wyrażenia na a, b w warunek (5) otrzymujemy

$$[A(x - r\lambda) + B(y - r\mu) + D]\lambda + [B(x - r\lambda) + C(y - r\mu) + E] = 0.$$

Uwzględniając warunek (4) otrzymujemy równanie

$$(Ax + By + D)\lambda + (Bx + Cy + E)\mu = 0. \tag{22}$$

Równanie to jest albo identycznie spełnione przez wszystkie punkty $Q(x, y)$ płaszczyzny, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (5) jest spełniony przez wszystkie punkty $P(a, b)$ płaszczyzny, albo też jest to *równanie asymptoty.* Do tego samego rezultatu można też dojść, rozważając, że każdy punkt asymptoty można obrać jako punkt $P(a, b)$, a więc warunek (5) jest spełniony dla każdego punktu asymptoty, jeżeli w nim a, b zastąpimy przez spółrzędne x, y punktu bieżącego asymptoty.

Równanie (22) napiszemy w postaci

$$(A\lambda + B\mu)x + (B\lambda + C\mu)y + D\lambda + E\mu = 0. \tag{23}$$

Równanie to przedstawia oznaczoną prostą w skończoności wtedy i tylko wtedy jeżeli nie oba spółczynniki $A\lambda + B\mu$ i $B\lambda + C\mu$ są równocześnie równe 0. Zachodzi to z pewnością jeżeli $\delta \neq 0$. A więc równania (22) i (23) są w przypadku $\delta \neq 0$ równaniami asymptot, jeżeli λ, μ spełniają warunek (4). Widzimy, że każda asymptota przechodzi przez środek krzywej drugiego stopnia. Otrzymujemy więc dwie i tylko dwie asymptoty *urojone sprzężone* w przypadku $\delta > 0$, *rzeczywiste* w przypadku $\delta < 0$.

W przypadku $\delta = 0$ mamy

$$A\lambda + B\mu = \varepsilon\overline{a}(\overline{a}\lambda + b\mu),$$
$$Ba + C\mu = \varepsilon\overline{b}(\overline{a}\lambda + b\mu),$$

a więc

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \varepsilon(a\lambda + b\mu)(aa + bb) + D\lambda + E\mu.$$

Jeżeli więc λ, μ są spółczynniki kierunkowe (16) kierunku asymptotycznego, mamy

$$\alpha\lambda + \beta\mu = D\lambda + E\mu = -\frac{\overline{\eta}}{r}(D\overline{b} - Ea).$$

Ale mamy jak wiemy

$$(D\overline{b} - E\overline{a})^2 = -\varepsilon\Delta.$$

A więc w przypadku $\Delta \neq 0$ niema punktu $P(a, b)$ na płaszczyźnie, dla którego zachodzi równość (5), jeżeli w tej równości λ, μ są spółczynnikami kierunku asymptotycznego. A więc w tym przypadku *niema asymptoty* krzywej drugiego stopnia. Jeżeli zaś zachodzi przypadek $\Delta = 0$, natenczas $\alpha\lambda + \beta\mu$ równa się zeru dla *każdego* punktu $P(a, b)$. Znaczy to, że *każda prosta* na płaszczyźnie posiadająca kierunek asymptotyczny jest asymptotą krzywej drugiego stopnia.

Równanie (23) przyjmuje w przypadku $\delta = 0$ postać

$$D\lambda + E\mu = 0. \tag{24}$$

A więc w przypadku $\Delta \neq 0$ przedstawia ono prostą w nieskończoności, a w przypadku $\Delta = 0$ jest identycznie zero.

Jeżeli istnieje taki punkt $P(a, b)$ na krzywej drugiego stopnia, że spełnione są równocześnie równości (4), (5) i (21), w których λ, μ są spółczynniki kierunkowe pewnego kierunku asymptotycznego, natenczas jak wiemy asymptota leży na krzywej drugiego stopnia. Zachodzić to więc może tylko w przypadku $\Delta = 0$. Jeżeli mamy $\delta \neq 0$ obieramy jako punkt $P(a, b)$ środek, tj. punkt przecięcia obu prostych przedstawionych równaniem (1). Widzimy, że każda z obu prostych przedstawionych równaniem (1) jest asymptotą krzywej. Możemy jako punkt $P(a, b)$ obrać też dowolny punkt krzywej. Mamy teraz

$$f(x, y) = \varepsilon(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2). \tag{25}$$

Obierzmy $P(a, b)$ na prostej

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0. \tag{26}$$

Mamy teraz

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2}\left[(a_1 a + b_1 b + c_1) a_2 + (a_2 a + b_2 b + c_2) a_1\right],$$

$$\beta = \frac{\varepsilon}{2}\left[(a_1 a + b_1 b + c_1) b_2 + (a_2 a + b_2 b + c_2) b_1\right],$$

a więc

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \frac{\varepsilon}{2}(a_2 a + b_2 b + c_2)(a_1 \lambda + b_1 \mu).$$

Jeżeli więc λ, μ jest kierunek asymptotyczny prostej (26) natenczas równość (5) jest spełniona i prosta (26) jest asymptotą przechodzącą przez $P(a, b)$.

W przypadku $\delta = 0$ możemy $P(a, b)$ obrać dowolnie, a więc obierając P dowolnie na jednej z prostych przedstawionych równaniem (1) widzimy znów, że każda z tych prostych jest asymptotą.

Jako przykład obecnie rozważanej teorji uważajmy hiperbolę w układzie spółrzędnych prostokątnym o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{27}$$

Mamy teraz

$$\varphi(\lambda, \mu)=\frac{\lambda^2}{a^2}-\frac{\mu^2}{b^2}.$$

Środkiem jest początek układu, a asymptoty mają równania

$$\frac{\lambda}{a^2}x+\frac{\mu}{b^2}y=0,$$

a więc

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0. \tag{28}$$

Dochodzimy zatem oczywiście do tych samych dwóch prostych, do których doszliśmy w Rozdziale XI., w którym już była podana definicja asymptot hiperboli.

4. Redukcja równania drugiego stopnia przy pomocy kierunków asymptotycznych i asymptot w przypadku $\delta \neq 0$.

Obierzmy nowy układ spółrzędnych x', y'. obierając jako nową oś x' jednę z asymptot krzywej drugiego stopnia, a jako oś y' dowolną prostą nie równoległą do tej asymptoty. Jeżeli osią x' jest asymptota posiadająca kierunek λ_1, μ_1, natenczas w nowym układzie spółrzędnych mamy następujące wartości spółczynników

$$\begin{aligned} A' &= \varphi(\lambda_1, \mu_1)=0, \\ D' &= \alpha\lambda_1+\beta\mu_1=0. \end{aligned} \tag{29}$$

Druga równość pochodzi oczywiście stąd, że nowy początek O' o spółrzędnych a, b leży na asymptocie, którą jest oś x'. Mamy więc równanie

$$2B'x'y'+C'y'^2+2E'y'+F'=0. \tag{30}$$

Załóżmy, że kierunek a_2, b_2 osi y' nie jest asymptotyczny, a więc, że

$$C'=\varphi(a_2, b_2)\neq 0. \tag{31}$$

Równanie daje na y' dwie wartości

$$y' = -\frac{B'x'+E'}{C'} \pm \frac{B'x'+E'}{C'}\sqrt{1-\frac{C'F'}{(B'x'+E')^2}}. \qquad (32)$$

Przytem $B' \neq 0$, albowiem minor (δ')

$$(\delta)' = A'C' - B'^2 = -B'^2$$

jest od zera odmienny.

Jeżeli mamy $\delta > 0$, natenczas oś x' jest prostą urojoną, a jeżeli $\delta < 0$ prostą rzeczywistą. Nadajmy spółrzędnej x' ciąg nieskończony wartości rzeczywistych rosnących nieograniczenie. Wyrażenie figurujące we wzorze (32) pod pierwiastkiem dąży do granicy 1. A więc jedna wartość pierwiastka z tego wyrażenia dąży do granicy $+1$, a druga do granicy -1. Nieskończonemu ciągowi wartości na x' odpowiadają dwa nieskończone ciągi wartości na y' zależnie od znaku pierwiastka.

Pisząc y' w postaci

$$-\frac{B'x+E'}{C'}\left[1-\sqrt{1-\frac{C'F'}{(B'x'+E')^2}}\right]$$

widzimy, że wartości -1 granicy pierwiastka odpowiada ciąg wartości na y', których wartości bezwzględne rosną nieograniczenie. Wartości $+1$ pierwiastka odpowiada ciąg wartości na y' dążący do zera, albowiem mamy

$$y_1' y_2' = \frac{F'}{C'}.$$

Tosamo zachodzi, gdy nadamy x' ciąg wartości malejący nieograniczenie.

W przypadku $F' = 0$, tj. gdy początek O' leży na krzywej drugiego stopnia, co zachodzi tylko w przypadku $\Delta = 0$, jedna z wartości na y' równa się stale 0.

Dochodzimy zatem do następującego rezultatu: Do każdej wartości na x' należą w przypadku $C' \neq 0$, tj. gdy kierunek osi y' nie jest asymptotyczny dwie wartości na y'. Jeżeli wartość bezwzględna x' rośnie nieograniczenie, natenczas wartość bezwzględna rzędnej jednego punktu na krzywej rośnie nieograniczenie, a wartość bezwzględna rzędnej drugiego punktu dąży do zera.

Obierzmy teraz osie spółrzędnych x', y' w ten sposób, że *obie osie* są asymptotami krzywej. Mamy więc

$$\begin{aligned} A' &= \varphi(\lambda_1, \mu_1) = 0, \\ C' &= \varphi(\lambda_2, \mu_2) = 0, \\ D' &= \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = 0, \\ E' &= \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Otrzymujemy zatem następujące równanie krzywej drugiego stopnia

$$2B'x'y' + F' = 0. \tag{34}$$

Osie spółrzędnych x', y' są rzeczywiste w przypadku $\delta < 0$, a urojone sprzężone w przypadku $\delta > 0$. Z tem równaniem mieliśmy już do czynienia w Rozdziale XIII., i widzieliśmy, że jeżeli osie x', y' są rzeczywiste daje się przez odpowiednie przekształcenie układu spółrzędnych sprowadzić do równania hiperboli, przyczem nowe osie są to dwusieczne osi x', y', a więc rzeczywiste i prostokątne. A więc w przypadku $\delta < 0$ równanie (34) przedstawia zawsze hiperbolę. Spółczynnik B'

$$B' = \varphi(\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2)$$

jest zawsze *rzeczywisty*, ponieważ λ_1, μ_1 są urojone sprzężone z λ_2, μ_2 w przypadku $\lambda > 0$, a mamy

$$\varphi(\lambda_2, \mu_2;\ \lambda_1, \mu_1) = \varphi(\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2)$$

tj. liczba B' równa się liczbie urojonej sprzężonej z nią samą.

Mamy dalej

$$\delta' = A'C' - B'^2 = \frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta}\,\delta,$$

$$\frac{\sin^2\theta'}{\sin^2\theta} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{r_1^2 r_2^2} = -\frac{4\delta}{\Omega^2},$$

zatem otrzymujemy

$$-B'^2 = -4\frac{\delta^2}{\Omega^2},$$

$$B' = 2\varepsilon\frac{\delta}{\Omega}, \tag{35}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, zaś Ω jest dodatni pierwiastek z Ω^2. Wyjątek stanowi przypadek $\Omega = 0$, tj. przypadek kół i prostych minimalnych, w którym to przypadku asymptotami są proste minimalne i zamiast wzorów (4), (12), na spółczynniki kierunkowe mamy wzory (13), (14).

Spółczynnik F' otrzymamy ze wzoru

$$\Delta' = \frac{\sin^2 \theta'}{\sin^2 \theta} \Delta,$$

gdzie

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & B' & 0 \\ B' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F' \end{vmatrix} = - B'^2 F'.$$

Mamy więc

$$F' = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{36}$$

Równanie (34) napisze się zatem w postaci

$$x'y' + \varepsilon \frac{\Delta \Omega}{4 \delta^2} = 0. \tag{37}$$

5. Redukcja równania drugiego stopnia przy pomocy kierunków asymptotycznych i asymptot w przypadku $\delta = 0$.

Obieramy teraz jako oś x' dowolną prostą mającą kierunek asymptotyczny, a jako oś y dowolną prostą przecinającą tę prostą. Możemy przytem obie proste obrać rzeczywiste. W przypadku $\Delta = 0$ pierwsza prosta jest asymptotą krzywej. Spółczynniki kierunkowe a_1, b_1 kierunku asymptotycznego dane są wzorami (16). Mamy teraz

$$\begin{gathered} A' = \varphi(a_1, b_1) = 0, \\ B' = \varepsilon(\overline{a}\, a_1 + \overline{b}\, b_1)(\overline{a}\, a_2 + b\, b_2) = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \tag{39}$$

Wprowadzamy nowe osie rzeczywiste x'', y'' równoległe i równo skierowane z osiami x', y' wzorami

$$\begin{gathered} x' = x'', \\ y' + \frac{E'}{C'} = y'' \end{gathered} \tag{40}$$

i otrzymujemy równanie

$$C'y''^2 + 2D'x'' + F' - \frac{E'^2}{C'} = 0. \tag{41}$$

Załóżmy $D' \neq 0$. Wprowadzamy jeszcze raz nowe osie x''', y''' rzeczywiste równoległe i równo skierowane z osiami x'', y'' wzorami

$$\begin{gathered} y'' = y''' \\ x'' + \frac{C'F' - E'^2}{D'C'} = x''' \end{gathered} \tag{42}$$

i otrzymujemy równanie

$$C'y'''^2 + 2D'x''' = 0. \tag{43}$$

Teraz mamy $\Delta \neq 0$, albowiem dla kierunku asymptotycznego a_1, b_1 mamy

$$D' = \alpha a_1 + \beta b_1 = Da_1 + Eb_1 = -\frac{\eta}{r}(Db - Ea).$$

W przypadku $\Delta = 0$ mamy równanie

$$C'y''^2 + \frac{(\delta')'}{C'} = 0, \tag{44}$$

gdzie $(\delta')'$ jest to minor δ' w wyznaczniku Δ'.

Z równaniami (43) i (44) mieliśmy już do czynienia w Rozdziale XIII. Równanie (43) przedstawia krzywe rodzaju parabol, przyczem początek układu leży na krzywej, a kierunek osi x' jest asymptotyczny. Równanie (44) przedstawia dwie proste równoległe. Zależnie od tego czy $A \neq 0$, czy też $C \neq 0$ możemy zastąpić wyraz wolny przez

$$\frac{\delta''}{A} \quad \text{lub} \quad \frac{\delta'}{C}.$$

ROZDZIAŁ XVI.

Kierunki ze sobą sprzężone i średnice krzywych drugiego stopnia. Styczne krzywych drugiego stopnia.

1. Definicja i badanie kierunków ze sobą sprzężonych i średnic krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy znów równanie krzywej drugiego stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

i równanie prostej l

$$x = a + r\lambda, \qquad y = b + r\mu, \tag{2}$$

przechodzącej przez punkt $P(a, b)$ i przecinającej krzywą w punktach określonych równaniem na r

$$r^2\varphi(\lambda, \mu) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) + f(a, b) = 0. \tag{3}$$

Jeżeli prosta l na kierunek nieasymptotyczny, natenczas przecina krzywą w dwóch punktach P_1, P_2. Wartości r_1 i r_2 na r odpowiadające tym punktom spełniają związek

$$r_1 + r_2 = -2\frac{\alpha\lambda + \beta\mu}{\varphi(\lambda, \mu)}. \tag{4}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt P połowił odcinek P_1P_2, jest równość

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0. \tag{5}$$

Otrzymujemy więc związek

$$(Aa + Bb + D)\lambda + (Ba + Cb + E)\mu = 0. \tag{6}$$

Do każdego kierunku nieasymptotycznego λ, μ należy zatem równanie (6) spełnione przez spółrzędne a, b punktów P połowiących odcinki $P_1 P_2$, jakie na prostych l mających uważany kierunek wycina krzywa drugiego stopnia i tylko przez spółrzędne tych punktów.

Równanie (6) jest równaniem pierwszego stopnia i możemy je napisać w postaci

$$(A\lambda + B\mu)x + (B\lambda + C\mu)y + D\lambda + E\mu = 0. \tag{7}$$

W przypadku, gdy to równanie przedstawia oznaczoną prostą w skończoności, nazywa się ona *średnicą* (diamètre) krzywej drugiego stopnia *należącą* do kierunku λ, μ.

Odróżnimy dwa przypadki I. $\delta \neq 0$, II. $\delta = 0$.

I. $\delta \neq 0$. Ponieważ nie mogą zachodzić równocześnie równości

$$A\lambda + B\mu = 0, \qquad B\lambda + C\mu = 0, \tag{8}$$

przeto do każdego kierunku należy zupełnie oznaczona średnica s, przechodząca przez *środek* C krzywej drugiego stopnia.

Wyznaczmy jej spółczynniki kierunkowe λ', μ'. Mamy

$$\begin{aligned} \lambda' &= -k(B\lambda + C\mu), \\ \mu' &= k(A\lambda + B\mu), \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie k jest pewien czynnik od zera odmienny. Czynnik ten wyznaczamy z warunku

$$\lambda'^2 + \lambda'\mu' \cos\theta + \mu'^2 = 1, \tag{10}$$

staje się on więc nieoznaczonym wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi związek

$$\begin{aligned} (A\lambda + B\mu)^2 + (B\lambda + C\mu)^2 - 2(A\lambda + B\mu)(B\lambda + \\ + C\mu)\cos\theta = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

a więc gdy kierunek λ', μ' jest minimalny.

Związek ten możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} (A^2 - 2AB\cos\theta + B^2)\lambda^2 + 2\lambda\mu(AB + BC - AC\cos\theta - \\ - B^2\cos\theta) + \mu^2(B^2 - 2BC\cos\theta + C^2) = 0. \end{aligned}$$

Do każdego kierunku λ, μ należy zatem zupełnie oznaczony kierunek λ', μ'. W przypadku kierunku λ, μ asymptotycznego, kierunek λ' μ' jest tym samym kierunkiem, a prosta określona równaniem (7) jest *asymptotą* krzywej. Wynika to natychmiast stąd, że mamy teraz

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0 \tag{12}$$

więc

$$(A\lambda + B\mu)\lambda + (B\lambda + C\mu)\mu = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -k(B\lambda + C\mu), \\ \mu &= k(A\lambda + B\mu), \end{aligned} \tag{13}$$

gdzie k jest pewien czynnik od zera odmienny.

Rugując ze wzorów (9) k otrzymujemy związek

$$(A\lambda + B\mu)\lambda' + (B\lambda + C\mu)\mu' = 0 \tag{14}$$

lub

$$(A\lambda' + B\mu')\lambda + (B\lambda' + C\mu')\mu = 0. \tag{15}$$

Z tego wzoru otrzymujemy następujące związki

$$\begin{aligned} \lambda &= -k'(B\lambda' + C\mu'), \\ \mu &= k'(A\lambda' + B\mu'), \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie k' jest pewien czynnik od zera odmienny. A więc widzimy, że jeżeli do kierunku λ. μ należy kierunek λ', μ' natenczas nawzajem do kierunku λ', μ' należy kierunek λ, μ. Ze wzorów tych wynika dalej, że do kierunku asymptotycznego należy ten sam kierunek asymptotyczny. Naodwrót, jeżeli do pewnego kierunku λ, μ należy ten sam kierunek, natenczas mamy związek (12), a więc ten kierunek jest kierunkiem asymptotycznym.

Widzimy więc, że kierunki na płaszczyźnie można skojarzyć ze sobą w pary. tak aby każdy kierunek figurował w jednej i tylko jednej parze, i aby do każdego danego kierunku należał ten kierunek, który wspólnie z danym kierunkiem tworzy jednę parę. Przytem istnieją dwie i tylko dwie pary składające się z tych samych kierunków, a mianowicie są to pary składające się każda z dwóch tych samych kierunków asymptotycznych.

Kierunki należące do takiej pary nazywamy *kierunkami ze sobą sprzężonymi (directions conjugués).*

Do kierunku λ', μ' należy średnica s' o równaniu

$$(A\lambda' + B\mu')x + (B\lambda' + C\mu')y + D\lambda' + E\mu' = 0, \tag{17}$$

które możemy też napisać w postaci

$$k'(\mu x - \lambda y) + D\lambda' + E\mu' = 0, \tag{18}$$

gdzie k' jest to czynnik występujący we wzorach (16). Widzimy więc, że i średnice występują parami, przyczem przez parę średnic rozumiemy parę średnic posiadających kierunki ze sobą sprzężone. Średnice takie nazywamy *średnicami ze sobą sprzężonymi (diamètres conjugués)*. Jeżeli λ, μ jest kierunkiem asymptotycznym, natenczas średnice ze sobą sprzężone przechodzą obie w tę samą asymptotę. Możemy więc wszystkie proste przechodzące przez środek krzywej drugiego stopnia skojarzyć ze sobą w pary utworzone ze średnic ze sobą sprzężonych. Wśród tych par są dwie i tylko dwie pary składające się każda z dwóch prostych identycznych, są to mianowicie pary składające się z jednej i tej samej asymptoty dwa razy wziętej.

Średnicę należącą do pewnego kierunku nazywa się też *średnicą sprzężoną z tym kierunkiem.* Każda prosta przechodząca przez środek krzywej może być uważana jako średnica sprzężona z pewnym oznaczonym kierunkiem W istocie, uważajmy prostą

$$(Ax + By + D)k_1 + (Bx + Cy + E)k_2 = 0, \tag{19}$$

gdzie k_1 i k_2 są dowolne dwie liczby nie obie równe 0. Możemy znaleźć układ λ, μ spółczynników kierunkowych, proporcjonalnych do k_1, k_2

$$\lambda = \rho k_1, \qquad \mu = \rho k_2,$$

gdzie ρ jest pewna liczba od zera odmienna, oznaczona i wyznaczająca się ze związku

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1$$

w przypadku gdy zachodzi nierówność

$$k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\cos\theta \neq 0,$$

a dowolna w przypadku gdy zachodzi równość

$$k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2\cos\theta = 0.$$

II. $\delta = 0$. Równanie średnicy s należącej do danego kierunku λ, μ nieasymptotycznego napisze się teraz w postaci

$$\varepsilon(ax + \overline{b}y)(\overline{a}\lambda + \overline{b}\mu) + D\lambda + E\mu = 0, \tag{20}$$

a spółczynniki kierunkowe λ', μ' wyznaczają się ze wzorów

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= -k(a\lambda + b\mu)b, \\ \mu' &= k(\overline{a}\lambda + \overline{b}\mu)a. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Mnożąc te równości przez $\bar{a}$, $\bar{b}$ i dodając otrzymujemy równość

$$(\bar{a}\lambda + b\mu)(a\lambda' + \bar{b}\mu') = 0 \tag{22}$$

tj. równość (15) lub (16), przyczem teraz lewa strona jest iloczynem dwóch form liniowych, jednej zmiennych λ, μ, a drugiej zmiennych λ', μ'. Ponieważ λ, μ jest kierunkiem nieasymptotycznym, więc mamy teraz

$$a\lambda' + b\mu' = 0, \tag{23}$$

tj. kierunek średnicy jest zawsze kierunkiem asymptotycznym.

Niechaj teraz λ, μ będzie kierunkiem asymptotycznym.

Równanie (20) przedstawia albo prostą w nieskończoności, albo też jest identycznie równe zeru. Zależy to od tego czy równość

$$D\lambda + E\mu = 0 \tag{24}$$

nie jest spełniona, czy też jest spełniona. Ponieważ mamy teraz równość

$$\bar{a}\lambda + \bar{b}\mu = 0, \tag{25}$$

więc mamy pierwszy przypadek jeżeli zachodzi równość

$$Db - E\bar{a} = 0, \tag{26}$$

a drugi przypadek, kiedy ta równość nie zachodzi. A więc pierwszy przypadek zachodzi, gdy mamy $\Delta \neq 0$ a drugi, gdy mamy $\Delta = 0$.

Do kierunku λ', μ' asymptotycznego nie należy żadna średnica, a więc i żaden kierunek. Mimo to możemy znów wszystkie kierunki na płaszczyźnie skojarzyć ze sobą w pary, tak aby parę tworzył dowolnie dany kierunek i kierunek asymptotyczny i nazwać ze sobą sprzężonymi kierunki jednej pary. A więc każdy kierunek jest sprzężony z kierunkiem asymptotycznym, a kierunek asymptotyczny jest sprzężony z każdym kierunkiem, i mamy jednę jedyną parę składającą się z dwóch tych samych kierunków, tj. kierunku asymptotycznego dwa razy wziętego.

Uważajmy znów średnicę (20). W przypadku $\Delta \neq 0$ położenie tej średnicy zależy od kierunku λ, μ, a mianowicie *każda* prosta mająca kierunek asymptotyczny jest średnicą należącą do pewnego *zupełnie oznaczonego* kierunku λ, μ nieasymptotycznego. W istocie, uważajmy dowolną prostą

$$\varepsilon(\overline{a}x + \overline{b}y) + m = 0 \tag{27}$$

o kierunku asymptotycznym. Z równań

$$\begin{aligned} \overline{a}\lambda + \overline{b}\mu &= k, \\ D\lambda + E\mu &= mk \end{aligned} \tag{28}$$

wyznaczymy układ liczb λ, μ, k, z których λ, μ są spółczynnikami pewnego kierunku, a liczba k jest od zera odmienna. A mianowicie mamy

$$\lambda = k\,\frac{m\overline{b} - E}{D\overline{b} - E\overline{a}}, \quad \mu = k\,\frac{D - m\overline{a}}{D\overline{b} - E\overline{a}}.$$

Zależnie od tego czy wyrażenie

$$(mb - E)^2 + (m\overline{a} - D)^2 - 2(D - m\overline{a})(E - m\overline{b})\cos\theta$$

jest od zera odmienna, czy też nie, kierunek ten nie jest lub jest minimalny.

W przypadku $\Delta = 0$ mamy

$$D = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\overline{a}(c_1 + c_2), \qquad E = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\overline{b}(c_1 + c_2),$$

a więc równanie średnicy (20) ma postać

$$\varepsilon(\overline{a}\lambda + \overline{b}\mu)[\overline{a}x + \overline{b}y + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)] = 0. \tag{29}$$

Jest to więc dla każdego kierunku nieasymptotycznego jedna i tasama prosta, mianowicie prosta środków obu prostych równoległych danych, co jest geometrycznie zupełnie oczywiste.

Z wywodów poprzednich wynika natychmiast *konstrukcja* przy pomocy cyrkla i lineału średnicy należącej do danego kierunku nieasymptotycznego. A mianowicie kreślimy dwie proste od siebie odmienne, posiadające kierunek λ, μ, tak aby przecinały krzywą w punktach rzeczywistych i następnie łączymy środki cięciw, jakie na tych prostych wycina krzywa.

W przypadku $\delta \neq 0$ otrzymujemy środek krzywej w przypadku gdy średnica przecina krzywą w punktach rzeczywistych A, B, połowiąc AB, w przeciwnym razie kreślimy prostą l', równoległą do średnicy s tak aby przecinała krzywą w punktach rzeczywistych A', B' i połowimy $A'B'$ w punkcie C', a następnie kreślimy średnicę s' mającą kierunek λ, μ.

2. Przykłady.

1. Uważajmy elipsę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{30}$$

w układzie prostokątnym. Mamy teraz

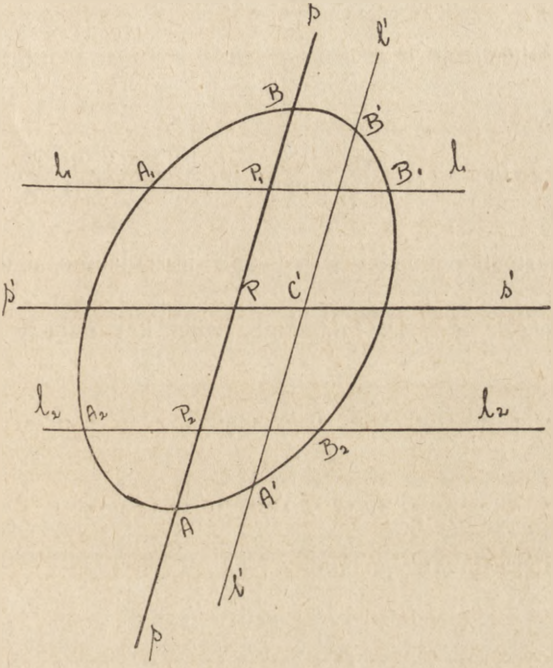

Fig. 18.

$$\frac{\lambda\lambda'}{a^2}+\frac{\mu\mu'}{b^2}=0. \tag{31}$$

Wprowadźmy kąty φ i ψ, jakie kierunek dany λ, μ i kierunek λ', μ' z nim sprzężony zawierają z dodatnim kierunkiem osi x, obierając przytem te kąty tak by spełniały nierówności

$$0\leqq\varphi<\pi,\qquad 0\leqq\psi<\pi.$$

Mamy

$$\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2}+\frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}=0, \tag{32}$$

a więc

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{33}$$

Jeżeli więc $\operatorname{tg}\varphi$ jest dodatnie, natenczas $\operatorname{tg}\psi$ jest ujemne i naodwrót, czyli, że jeżeli φ jest zawarte między 0 a $\frac{\pi}{2}$, natenczas ψ jest zawarte między $\frac{\pi}{2}$ a π i naodwrót.

Dla $\varphi = 0$ mamy $\psi = \frac{\pi}{2}$ i naodwrót.

Uważajmy kąt σ

$$\sigma = \psi - \varphi \tag{34}$$

Mamy wzór

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi} = -\frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\varphi}. \tag{35}$$

Dla φ zawartego pomiędzy 0 a $\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg}\sigma$ jest ujemne, a dla φ zawartego pomiędzy $\frac{\pi}{2}$ a π jest dodatnie, więc kąt między kierunkami jest rozwarty.

2. Uważamy hiperbolę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{36}$$

w układzie prostokątnym. Mamy

$$\frac{\lambda\lambda'}{a^2} - \frac{\mu\mu'}{b^2} = 0, \tag{37}$$

a wprowadzając znów kąty φ i ψ

$$0 \leqq \varphi < \pi, \quad 0 \leqq \psi < \pi,$$

jakie zawierają te kierunki z dodatnią osią x-ów, mamy

$$\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2} = 0, \tag{38}$$

$$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{b^2}{a^2}. \tag{39}$$

Więc $\operatorname{tg}\varphi$ i $\operatorname{tg}\psi$ są równocześnie dodatnie i równocześnie ujemne. Dla $\varphi = 0$ mamy $\psi = \frac{\pi}{2}$ i naodwrót. Jeżeli

$$\operatorname{tg} \varphi < \frac{b}{a},$$

natenczas

$$\operatorname{tg} \psi > \frac{b}{a}$$

i naodwrót, a więc jeżeli kąt φ jest mniejszy od kąta θ, jaki kierunek asymptoty położonej w 1. ćwiartce płaszczyzny zawiera z osią x-ów, natenczas kąt ψ jest > 0, czyli, że kierunki leżą w 1. ćwiartce po przeciwnych stronach asymptoty i tak samo w 2. ćwiartce.

Oznaczając znów przez σ kąt

$$\sigma = \psi - \varphi,$$

mamy

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} = \frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg} \varphi}{(a^2 + b^2) \operatorname{tg} \varphi}. \tag{40}$$

Kąt σ równa się 0, jeżeli mamy

$$b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0,$$

tj. dla asymptot.

3. Redukcja równania drugiego stopnia do postaci kanonicznych przy pomocy średnic i kierunków ze sobą sprzężonych.

Otrzymane rezultaty zastosujemy do nowej redukcji ogólnego równania drugiego stopnia. Niechaj nasamprzód będzie $\delta \neq 0$. Obieramy jako nowy początek O' układu środek krzywej, a jako nowe osie x' y' dwie osie o kierunkach λ, μ; λ', μ' ze sobą sprzężonych od siebie odmiennych. Mamy więc teraz

$$\begin{aligned} B' &= \varphi(\lambda, \mu; \lambda', \mu') = 0, \\ D' &= \alpha\lambda + \beta\mu = 0, \\ E' &= \alpha\lambda' + \beta\mu' = 0. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem następującą postać równania drugiego stopnia

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0, \tag{41}$$

gdzie

$$\begin{aligned} A' &= \varphi(\lambda, \mu) \neq 0, \\ C' &= \varphi(\lambda', \mu') \neq 0, \\ F' &= \frac{\Delta}{\delta}. \end{aligned}$$

Naodwrót, jeżeli w równaniu drugiego stopnia spółczynnik przy xy równa się zeru, natenczas kierunki osi spółrzędnych są kierunkami sprzężonymi ze sobą. W istocie, kładąc we wzorach (9) $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $B = 0$, otrzymujemy

$$\lambda' = 0, \qquad \mu' = kA,$$

a więc $\lambda' = 0$, $\mu' = 1$. Jeżeli spółczynniki D i E równają się zeru, początkiem układu jest środek krzywej, gdyż spółrzędne a, b środka spełniają równania

$$Aa + Bb = 0, \qquad Ba + Cb = 0.$$

Jeżeli więc równanie drugiego stopnia ma postać (41) natenczas osie spółrzędnych są średnicami ze sobą sprzężonymi.

Zwróćmy się teraz do przypadku $\delta = 0$, i obierzmy znów jako kierunki nowych osi dwa kierunki ze sobą sprzężone, a więc kierunek asymptotyczny i dowolny kierunek od niego odmienny. Mamy więc

$$A' = \varphi(\lambda, \mu) = 0,$$
$$B' = 0.$$

Obierzmy jako oś x' średnicę należącą do kierunku nieasymptotycznego λ', μ'. Spółrzędne a, b nowego początku układu O' spełniają więc warunek

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' = 0$$

a więc mamy

$$E' = 0.$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$C'y'^2 + 2D'x' + F' = 0, \tag{42}$$

w którem mamy

$$C' = \varphi(\lambda', \mu'),$$
$$D' = \alpha\lambda + \beta\mu = \varepsilon(\overline{a}\lambda + \overline{b}\mu)(\overline{a}a + \overline{b}b) + D\lambda + E\mu = D\lambda + E\mu,$$
$$F' = \alpha a + \beta b + \gamma.$$

Mamy dalej

$$D\lambda + E\mu = -\varepsilon\frac{D\overline{b} - E\overline{a}}{\overline{r}},$$
$$(D\overline{b} - E\overline{a})^2 = -\varepsilon\Delta,$$
$$\overline{r} = \sqrt{\varepsilon\omega}$$

gdzie pierwiastek jest dodatni. Otrzymujemy więc

$$D' = -\varepsilon\eta\frac{\sqrt{-\varepsilon\Delta}}{\sqrt{\varepsilon\omega}} = -\varepsilon\eta\sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}},$$

gdzie $\eta = \pm 1$.

W przypadku $\Delta = 0$, mamy

$$D' = 0,$$
$$\overline{a}a + \overline{b}b + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0,$$

a więc

$$\alpha = \beta = 0,$$
$$\gamma = Da + Eb + F = \tfrac{1}{2}\varepsilon(c_1 + c_2)(\overline{a}a + \overline{b}b) + F =$$
$$= -\frac{\varepsilon}{4}(c_1 + c_2)^2 + F = F - \frac{D^2}{A} = F - \frac{E^2}{C}.$$

Otrzymujemy zatem w tym przypadku ostatecznie równania

$$\varphi(\lambda', \mu')y'^2 + \frac{\delta''}{A} = 0, \tag{43}$$

$$\varphi(\lambda', \mu')y'^2 + \frac{\delta'}{C} = 0. \tag{44}$$

4. Styczne krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy dowolny punkt $P(a, b)$ położony na krzywej (1) i prostą l

$$x = a + r\lambda, \qquad y = b + r\mu, \tag{45}$$

przechodzącą przez ten punkt. Równanie (3) ma teraz postać

$$r^2\varphi(\lambda, \mu) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) = 0. \tag{46}$$

Jeżeli spółczynniki kierunkowe λ, μ spełniają warunek

$$\alpha\lambda + \beta\mu = 0, \tag{47}$$

i kierunek nie jest asymptotyczny, natenczas prosta l ma tylko punkt P wspólny z krzywą, a jeżeli kierunek jest asymptotyczny leży ona całkowicie na krzywej.

Prosta taka nazywa się *styczną* (tangente) krzywej drugiego stopnia w punkcie $P(a, b)$. Jeżeli α i β nie oba są równocześnie równe zeru, a więc gdy punkt P nie jest środkiem, istnieje jedna jedyna styczna w punkcie P. Jeżeli punkt P jest środkiem, każda prosta przez ten punkt jest styczną do krzywej w tym punkcie.

Z warunku (47) wynika, że punkt P leży na średnicy należącej do kierunku λ, μ stycznej, albowiem spełnia równanie

$$(Ax + By + D)\lambda + (Bx + Cy + E)\mu = 0 \tag{48}$$

średnicy. Naodwrót, uważajmy dowolny punkt przecięcia dowolnej średnicy (48) z krzywą i poprowadźmy przez ten punkt P prostą l o spółczynnikach kierunkowych λ, μ. Prosta ta jest styczną do krzywej w punkcie P.

Równanie stycznej t możemy rugując r z równań (45) napisać w postaci

$$\mu(x - a) - \lambda(y - b) = 0,$$

a więc w postaci

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) = 0. \tag{49}$$

lub w postaci

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{50}$$

Z wyjątkiem przypadku kiedy punkt P jest środkiem, równania (48) i (49) przedstawiają zupełnie oznaczoną prostą. Specjalnymi przypadkami tych równań są równania stycznych do elips, hiperbol i parabol, które poznaliśmy w Rozdziale XI.

Konstrukcja stycznej w punkcie krzywej: Punkt P łączymy ze środkiem O krzywej i prowadzimy przez P prostą o kierunku sprzężonym z kierunkiem OP.

5. Twierdzenia o kierunkach sprzężonych i średnicach w przypadku $\delta \neq 0$.

I. Proste łączące punkt P krzywej z punktami przecięcia A, B dowolnej średnicy s z krzywą mają kierunki ze sobą sprzężone.

W istocie, połączmy punkt C połowiący odcinek AP ze środkiem O. Kierunki AP i CO są ze sobą sprzężone, a mamy

$$PB \parallel CO.$$

II. Dwie proste l, l' poprowadzone przez punkty A, B przecięcia średnicy s z krzywą i mające kierunki sprzężone przecinają się w punkcie P położonym na krzywej.

W istocie prosta l'' przechodząca przez środek O i równoległa do l' przecina l w punkcie C połowiącym cięciwę AD tej prostej. A więc punkt P schodzi się z punktem D.

III. Dwie proste l, l' przez punkt P krzywej i mające kierunki sprzężone przecinają krzywą w punktach A, B średnicy krzywej.

W istocie gdyby prosta AB nie była średnicą, poprowadźmy średnicę AO przecinającą krzywą w punkcie D i połączmy D z P. Proste PD i PB mają obie kierunki sprzężone z kierunkiem AP, więc schodzą się ze sobą, a więc D schodzi się z B.

Ćwiczenia.

1. Kiedy dwa kierunki minimalne są ze sobą sprzężone względem krzywej drugiego stopnia?

2. Udowodnić następujące twierdzenia *Apollonjusza:*

„Styczna w punkcie M elipsy wycina na dwóch stycznych poprowadzonych do elipsy w punktach C, C' końcach średnicy elipsy dwa wektory CE i $C'E'$ takie, że mamy

$$\overline{CE}.\overline{C'E'} = b'^2, \tag{1}$$

gdzie b' jest półśrednica sprzężona z średnicą CC'“.

„Styczna w punkcie M hiperboli wycina na dwóch stycznych poprowadzonych do hiperboli w punktach C, C' końcach średnicy hiperboli dwa wektory CE, i $C'E'$ takie, że mamy

$$\overline{CE}.\overline{C'E'} = -b'^2, \tag{2}$$

gdzie b' jest półśrednica sprzężona z średnicą CC'“.

3. Średnice ze sobą sprzężone elipsy wycinają na stycznej elipsy w punkcie M wektory ME, MF takie, że mamy

$$\overline{ME}.\overline{MF} = -b'^2, \tag{3}$$

gdzie b' jest półśrednica sprzężona z półśrednicą OM.

Średnice ze sobą sprzężone hiperboli wycinają na stycznej hiperboli w punkcie M wektory ME, MF takie, że mamy

$$\overline{ME}.\overline{MF} = b'^2, \tag{4}$$

gdzie b' jest półśrednicą sprzężoną z półśrednicą OM.

4. Uważajmy krzywą drugiego stopnia o środku O i poprowadźmy z punktu P styczne do krzywej, których punkty styczności niechaj będą A, B. Okazać, że prosta OP połowi cięciwę AB.

ROZDZIAŁ XVII.

Kierunki główne i osie krzywych drugiego stopnia.

1. Definicja i badanie kierunków głównych i osi krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy znów krzywą drugiego stopnia

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

i dwa kierunki λ, μ; λ', μ' ze sobą sprzężone. Mamy związek

$$(A\lambda + B\mu)\lambda' + (B\lambda + C\mu)\mu' = 0. \tag{2}$$

Spytajmy się, kiedy te kierunki są do siebie *prostopadłe?* Należy w tym celu znaleźć wszystkie układy dwóch par liczb λ, μ i λ', μ' spełniających równanie (2), równanie

$$(\lambda + \mu \cos\theta)\lambda' + (\lambda \cos\theta + \mu)\mu' = 0 \tag{3}$$

i będących spółczynnikami kierunkowymi pewnych kierunków. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dla danych λ, μ istniały λ', μ' nie obie równe zeru i spełniające te równania jest aby wyznacznik równań tych względem λ', μ' równał się zeru. A więc λ, μ muszą spełniać warunek

$$(A \cos\theta - B)\lambda^2 + (A - C)\lambda\mu + (B - C\cos\theta)\mu^2 = 0, \tag{4}$$

i warunek ten jest wystarczający. Ale ponieważ równania (2) i (3) są symetryczne względem dwóch par λ, μ i λ', μ', więc i para λ', μ' musi spełniać to samo równanie.

Należy więc przedewszystkiem zbadać wszystkie pary liczb nie obie równe zeru, spełniające równanie (4). Równanie to jest równaniem drugiego stopnia względem stosunku $\frac{\lambda}{\mu}$ i tak samo względem stosunku $\frac{\mu}{\lambda}$, z wyjątkiem przypadku, kiedy oba spółczynniki przy λ^2 i przy μ^2 równają się 0. W tym ostatnim przypadku mamy

$$(A - C)\lambda\mu = 0,$$

a więc, gdy $A \neq C$, mamy albo $\lambda = 0$. albo $\mu = 0$. Jeżeli więc przez kierunek będziemy rozumieli parę kierunków sobie przeciwnych, natenczas równanie (4) jest spełnione przez kierunki

$$\lambda = \varepsilon, \qquad \mu = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

i

$$\lambda = 0, \qquad \mu = \eta, \qquad \eta = \pm 1.$$

Jeżeli zachodzą równocześnie równości

$$A \cos\theta - B = 0, \qquad A - C = 0, \qquad B - C\cos\theta = 0, \tag{5}$$

natenczas mamy koła i proste minimalne, i równanie (4) jest spełnione dla wszystkich kierunków na płaszczyznie.

W ogólnym przypadku, kiedy nie oba spółczynniki przy λ^2 i μ^2 równają się 0, mamy dwa kierunki, których spółczynniki spełniają równanie (4) i kierunki te są od siebie odmienne, albowiem wyróżnik równania (4)

$$(A\cos\theta - B)(B - C\cos\theta) - \tfrac{1}{4}(A - C)^2 = -\tfrac{1}{4}\Omega^2$$

równa się zeru tylko dla kół i prostych minimalnych. Dwa kierunki ze sobą sprzężone schodzą się ze sobą wtedy i tylko wtedy, jeżeli są kierunkiem asymptotycznym. Dwa kierunki do siebie prostopadłe schodzą się ze sobą wtedy i tylko wtedy jeżeli są kierunkiem minimalnym. Dwa kierunki sprzężone i prostopadłe do siebie schodzą się ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy są kierunkiem równocześnie minimalnym i asymptotycznym. Ale wówczas *oba* kierunki minimalne są równocześnie asymptotyczne, albowiem jeżeli równanie

$$A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2 = 0$$

spełnione jest przez spółczynniki kierunkowe pewnego kierunku urojonego, natenczas spełnione jest też przez spółczynniki kierunku sprzężonego z tym kierunkiem. A więc w przypadku kół i prostych minimalnych, tj. związków (5) i tylko w tym przypadku mamy kierunek równocześnie do siebie prostopadły i ze sobą sprzężony, a mianowicie oba kierunki minimalne mają tę własność. W każdym innym przypadku, kierunki λ, μ i λ', μ' są od siebie odmienne.

Dochodzimy więc do rezultatu następującego: W przypadku kół i prostych minimalnych *każda* para kierunków do siebie prostopadłych spełnia warunki zagadnienia, gdyż spełnia równocześnie równania (2) i (3), a we wszystkich innych przypadkach kierunki pary są od siebie odmienne i spełniają równanie (4) a więc mamy *najwyżej* jednę taką parę kierunków. Obrawszy dowolny kierunek spełniający równanie (4), otrzymujemy z równań (2) i (3) zupełnie oznaczony kierunek o spółczynnikach λ'. μ', gdyż w równaniu (3) oba spółczynniki przy λ', μ' nie mogą się równocześnie równać 0. A więc istnieje *jedna jedyna para* takich kierunków. Kierunki te nazywają się *główne* (directions principales).

Średnice należące do kierunków głównych nazywają się *osiami* (axes) krzywej drugiego stopnia Ponieważ średnica ma równanie

$$(Ax + By + D)\lambda + (Bx + Cy + E)\mu = 0, \tag{6}$$

lub

$$(A\lambda + B\mu)x + (B\lambda + C\mu)y + D\lambda + E\mu = 0, \tag{7}$$

więc w przypadku $\delta \neq 0$ mamy dwie osie przechodzące przez środek i do siebie prostopadłe z wyjątkiem przypadku kół i prostych minimalnych. w którym mamy nieskończenie wiele par osi do siebie prostopadłych. W przypadku $\delta = 0$ każdemu kierunkowi nieasymptotycznemu odpowiada średnica w skończoności, a dla kierunku asymptotycznego równanie (7) przedstawia prostą w nieskończoności w przypadku parabol a jest identycznie równe zero w przypadku dwóch prostych równoległych.

W przypadku $\delta \neq 0$ i krzywych minimalnych kierunki główne są *rzeczywiste*. albowiem wyróżnik równania (4) jest ujemny, a więc i obie osie są *rzeczywiste,* jako proste o kierunkach rzeczywistych, przechodzące przez punkt rzeczywisty (środek). W przypadku $\delta = 0$ kierunek główny nieasymptotyczny jest również rzeczywisty i ma spółczynniki kierunkowe

$$\lambda' = -\frac{\lambda \cos\theta + \mu}{\sin\theta}, \quad \mu = \frac{\lambda + \mu \cos\theta}{\sin\theta},$$

gdzie λ, μ są spółczynniki kierunku asymptotycznego

$$\lambda = -\frac{b}{R}, \quad \mu = \frac{a}{R},$$
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta},$$

więc mamy równanie osi

$$-(Ax + By + D)(a - b\cos\theta) + (Bx + Cy + E)(a\cos\theta - b) = 0$$

lub

$$\begin{aligned}(A - B\cos\theta)(Ax + By + D) + (B - A\cos\theta)(Bx + \\ + Cy + E) = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

lub

$$\begin{aligned}(B - C\cos\theta)(Ax + By + D) + (C - B\cos\theta)(Bx + \\ + Cy + E) = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Nazywamy *osią symetrji (axe de symétrie)* krzywej drugiego stopnia prostą s posiadającą tę własność, że jeżeli punkt P leży na krzywej, natenczas i punkt $\overline{P}$ symetryczny punktu P względem prostej s leży na tej krzywej Z poprzedniego wynika, że oś krzywej 2-go stopnia jest jej osią symetrji. Naodwrót, uważajmy układ osi prostokątny i założmy, że oś x jest osią symetrji. wówczas spełnione są równocześnie równania

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + 2Dx - 2Ey + F = 0,$$

a więc równania

$$y(Bx + E) = 0,$$
$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

Albo więc mamy

$$B = E = 0,$$

równanie (4) daje nam

$$(A - C)\lambda\mu = 0,$$

a równanie (7)

$$A\lambda x + C\mu y + D\lambda = 0,$$

a więc kierunkowi

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 1$$

odpowiada jako oś oś x.

Albo też $B \neq 0$

$$x = -\frac{E}{B}$$

dla $y \neq 0$. Teraz kierunek $\lambda = 0$, $\mu = 1$ nie jest kierunkiem głównym, bo nie spełnia równania (4). Krzywa rozpada się na dwie proste, a mianowicie na oś x i na prostą o równaniu

$$Bx + E = 0,$$

i osie krzywej zawieraja kąty $\pm \frac{\pi}{4}$ z osią x.

2. Badanie kierunków głównych i osi przy pomocy równania na S.

Uważajmy znów równania (2) i (3).

Dzieląc wyróżnik tych równań, tj. lewą stronę równania (4) przez iloczyn

$$(\lambda + \mu \cos\theta)(\lambda \cos\theta + \mu)$$

otrzymamy równanie

$$\frac{A\lambda + B\mu}{\lambda + \mu \cos\theta} = \frac{B\lambda + C\mu}{\lambda \cos\theta + \mu}. \tag{10}$$

Równanie to jest spełnione przez spółczynniki kierunkowe obu kierunków λ, μ i λ', μ'. Przytem zakładamy, że oba mianowniki są od zera odmienne. Jeżeli jeden z tych mianowników np. $\lambda + \mu \cos\theta$ równa się 0, natenczas otrzymamy z równania (3)

$$\mu' = 0,$$

więc $\lambda' = \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$, a więc z równania (2)

$$A\lambda + B\mu = 0.$$

Wówczas pierwszy ułamek w (10) jest nieoznaczony, a mianownik drugiego jest od zera odmienny.

Oznaczmy przez S wartość tego z ułamków figurujących w równości (10), który posiada oznaczoną wartość.

Liczby λ, μ, S spełniają zatem równania

$$\begin{aligned} A\lambda + B\mu &= S(\lambda + \mu \cos\theta), \\ B\lambda + C\mu &= S(\lambda \cos\theta + \mu). \end{aligned} \tag{11}$$

Równania te są jednorodne linjowe względem λ, μ, a więc S spełnia równanie, które się otrzymuje przyrównując do zera wyznacznik przy λ, μ tych równań. Otrzymujemy to równanie w postaci wyznacznika

$$W(S) \equiv \begin{vmatrix} A - S, & B - S\cos\theta \\ B - S\cos\theta, & C - S \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

a więc otrzymujemy równanie drugiego stopnia

$$(A - S)(C - S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0, \tag{13}$$

lub równanie

$$S^2\sin^2\theta - S(A + C - 2B\cos\theta) + AC - B^2 = 0. \tag{14}$$

Spółczynnikami tego równania są znane nam wyrażenia ω i δ, tak, że równanie to możemy napisać w postaci

$$S^2\sin^2\theta - S\omega + \delta = 0. \tag{15}$$

Równanie to spełnione przez wszystkie wartości na S, odpowiadające kierunkom głównym nazywa się *równaniem na* S *(équation en* S*)*.

Wyróżnik równania na S jest

$$\delta\sin^2\theta - \frac{\omega^2}{4} = -\frac{1}{4}\Omega^2,$$

jest on więc *ujemny* z wyjątkiem przypadku

$$A = C, \qquad B = A\cos\theta = C\cos\theta,$$

tj. kół i prostych minimalnych. W tym ostatnim przypadku równanie (14) przyjmuje postać

$$\sin^2\theta(S - A)^2 = 0,$$

a więc posiada *podwójny* pierwiastek $S = A$. W tym przypadku wszystkie spółczynniki w równaniach (11) przy λ, μ równają się zeru, a więc λ, μ są dowolne i równania (2), (3) redukują się do jednego równania.

W ogólnym przypadku niechaj pierwiastki równania na S będą S_1 i S_2. Otrzymujemy dwa układy równań (11), z których jeden układ niechaj spełniony będzie przez spółczynniki kierunkowe λ_1, μ_1, a drugi przez spółczynniki kierunkowe λ_2, μ_2

$$\begin{aligned} A\lambda_1 + B\mu_1 &= S_1(\lambda_1 + \mu_1\cos\theta), \\ B\lambda_1 + C\mu_1 &= S_1(\lambda_1\cos\theta + \mu_1), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} A\lambda_2 + B\mu_2 &= S_2(\lambda_2 + \mu_2\cos\theta), \\ B\lambda_2 + C\mu_2 &= S_2(\lambda_2\cos\theta + \mu_2), \end{aligned} \tag{17}$$

Okażemy, że kierunki λ_1, μ_1 i λ_2, μ_2 są rzeczywiście kierunkami głównymi. W tym celu pomnóżmy równania (16) przez λ_1, μ_1 i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\mu_1 + C\mu_1^2 = S_1. \tag{18}$$

Tak samo mnożąc równania (17) przez λ_2, μ_2 i dodając je do siebie otrzymujemy

$$A\lambda_2^2 + 2B\lambda_2\mu_2 + C\mu_2^2 = S_2. \tag{19}$$

Zatem S_1 i S_2 równają się odpowiednio $\varphi(\lambda_1, \mu_1)$ i $\varphi(\lambda_2, \mu_2)$.

Pomnóżmy dalej równania (16) przez λ_2, μ_2 i dodajmy je do siebie. Otrzymamy

$$\begin{gathered} A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + C\mu_1\mu_2 = \\ = S_1[\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2]. \end{gathered}$$

Tak samo mnożąc równania (17) przez λ_1, μ_1 i dodając do siebie mamy

$$\begin{gathered} A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + C\mu_1\mu_2 = \\ = S_2[\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2]. \end{gathered}$$

Odejmując te równania od siebie otrzymamy

$$(S_1 - S_2)[\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2] = 0,$$

a więc ponieważ $S_1 \neq S_2$ mamy

$$\lambda_1\lambda_2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2 = 0$$

a stąd

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\theta + \mu_1\mu_2 = 0, \tag{21}$$

a zatem pierwiastkom S_1 i S_2 odpowiadają rzeczywiście kierunki główne, a mianowicie kierunki te tworzą jednę parę kierunków głównych.

W przypadku kiedy mamy $\delta = 0$, jeden z pierwiastków równania na S równa się zeru np. S_1, a wówczas mamy

$$\varphi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

więc odpowiedni kierunek główny jest asymptotyczny. Wówczas $S_2 \neq 0$ i drugi kierunek główny jest prostopadły do asymptotycznego.

3. Redukcja równania drugiego stopnia przy pomocy kierunków głównych i osi do postaci kanonicznych w przypadku $\delta \neq 0$.

Obierzmy jako kierunki nowych osi x', y' dwa kierunki główne ze sobą sprzężone od siebie odmienne, tj. w przypadku krzywych nie minimalnych oba kierunki główne, a w przypadku krzywych minimalnych dowolną parę kierunków głównych prostopadłych do siebie i nie minimalnych. Jeżeli A', B', ... F' oznaczają spółczynniki równania krzywej w nowym układzie spółrzędnych, natenczas mamy

$$A' = \varphi(\lambda_1, \mu_1) = S_1,$$

$$B' = \varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = 0,$$

$$C' = \varphi(\lambda_2, \mu_2) = S_2.$$

Obierzmy dalej nowy początek $O'(a, b)$ układu w środku krzywej. Mamy więc

$$D' = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = 0,$$

$$E' = \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = 0,$$

$$F' = \alpha a + \beta b + \gamma = \gamma = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Równanie krzywej (1) w nowym układzie napisze się więc w postaci

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{22}$$

Dochodzimy zatem do następującego podstawowego rezultatu: W przypadku $\delta \neq 0$ można równanie krzywej drugiego stopnia przez wprowadzenie odpowiednich osi prostokątnych sprowadzić zawsze do kształtu (22). Równanie tego kształtu badaliśmy już poprzednio i widzieliśmy, że w przypadku $\Delta \neq 0$ równanie to przedstawia nam *elipsy rzeczywiste*, *elipsy urojone* i *hiperbole*, przyczem koła uważać należy oczywiście jako specjalny przypadek elips. Zatem w przypadku $\delta \neq 0$ równanie drugiego stopnia przedstawia tylko te krzywe.

Gdy zaś mamy $\Delta = 0$, równania (1) i (22) przedstawiają, jak wiemy, dwie proste przecinające się, rzeczywiste lub urojone.

W przypadku $\Delta \neq 0$ dzieląc równanie (22) przez $\frac{\Delta}{\delta}$ otrzymamy równanie

$$\frac{x'^2}{\dfrac{\Delta}{\delta S_1}}+\frac{y'^2}{\dfrac{\Delta}{\delta S_2}}+1=0. \tag{23}$$

A więc wprowadzając oznaczenia

$$\frac{\Delta}{\delta S_1}=\varepsilon_1 a^2, \quad \frac{\Delta}{\delta S_2}=\varepsilon_2 b^2, \tag{24}$$

przyczem $\varepsilon_1=\pm 1$, $\varepsilon_2=\pm 1$ i a^2 i b^2 są dodatnie, napiszemy równanie (23) w postaci

$$\varepsilon_1\frac{x'^2}{a^2}+\varepsilon_2\frac{y'^2}{b^2}+1=0. \tag{25}$$

Przez a i b rozumiemy liczby *bezwzględne*. Są to, jak wiemy *połowy osi* uważanych krzywych drugiego stopnia. Ponieważ nowe osie spółrzędnych schodzą się z osiami krzywych drugiego stopnia, więc te odcinki o długościach $2a$ i $2b$, które nazywaliśmy poprzednio w Rozdziale XI. osiami krzywych drugiego stopnia, leżą na tych średnicach, które obecnie nazywamy osiami krzywej. Dla uniknięcia dwuznaczności można te średnice nazywać też *średnicami głównemi* krzywych drugiego stopnia.

Otrzymujemy zatem trzy kategorje równań krzywych drugiego stopnia w układzie obecnym spółrzędnych

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0, \tag{26}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0, \tag{27}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0, \tag{28}$$

albowiem przypadki $\varepsilon_1=+1$, $\varepsilon_2=-1$, i $\varepsilon_1=-1$, $\varepsilon_2=+1$ można przez zmianę S_1 na S_2 i S_2 na S_1, tudzież przez zamianę osi x i y sprowadzić do siebie. Zamieniając też ewentualnie w przypadku równań (26) i (28) S_1 z S_2 i osie ze sobą możemy zawsze założyć, że spełniona jest nierówność $a \geqq b$.

Ponieważ S_1 i S_2 możemy wyrazić przez δ i ω, więc i a i b dadzą się wyrazić przez te niezmienniki, a mianowicie mamy

$$S=\frac{\omega}{2\sin^2\theta}\pm\frac{1}{2\sin^2\theta}\sqrt{\omega^2-4\delta\sin^2\theta}=\frac{1}{2\sin^2\theta}(\omega\pm\Omega). \tag{29}$$

S_1 i S_2 możemy napisać w postaci

$$S_1 = \frac{1}{A}[(A\lambda_1 + B\mu_1)^2 + \delta\mu_1^2] = \frac{1}{C}[(B\lambda_1 + C\mu_1)^2 + \delta\mu_1^2],$$
$$S_2 = \frac{1}{A}[(A\lambda_2 + B\mu_2)^2 + \delta\mu_2^2] = \frac{1}{C}[(B\lambda_2 + C\mu_2)^2 + \delta\mu_2^2].$$

Więc jeżeli δ jest dodatnie, natenczas S_1 i S_2 mają ten sam znak, co A i C i naodwrót.

Możemy to też okazać w inny sposób. Z równania (15) wynika, że gdy $\delta > 0$, natenczas ω, S_1 i S_2 mają te same znaki. Ale łatwo okazać, że gdy $\delta > 0$, natenczas ω, A i C mają te same znaki.

Jeżeli A i C są dodatnie, natenczas mamy

$$\omega = A + C - 2B\cos\theta = (\sqrt{A} - \sqrt{C})^2 + 2(\sqrt{AC} - B\cos\theta),$$
$$\text{ale } AC > B^2, \text{ więc } \sqrt{AC} > |B|,$$

zatem $\omega > 0$.

Naodwrót, jeżeli A i C są ujemne, natenczas ω jest ujemne, gdyż wówczas mamy

$$\omega = -(\sqrt{-A} - \sqrt{-C})^2 - 2(\sqrt{AC} - B\cos\theta),$$

i z lewej strony mamy sumę dwóch liczb ujemnych.

4. Redukcja równania krzywych drugiego stopnia do postaci kanonicznych w przypadku $\delta = 0$

Teraz jeden i tylko jeden pierwiastek np. S_1 równania na S równa się zeru. Wprowadźmy układ spółrzędnych mający kierunki główne, tj. kierunek λ_1, μ_1 asymptotyczny i kierunek λ_2, μ_2 do niego prostopadły. Mamy

$$\begin{aligned} A' &= S_1 = 0, \\ B' &= \varphi(\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2) = 0, \\ C' &= S_2 \neq 0, \end{aligned} \tag{30}$$

a więc otrzymujemy równanie

$$S_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \tag{31}$$

Obierzmy dalej jako oś x' oś krzywej a jako oś y' dowolną prostą do niej prostopadłą. Początek O' o spółrzędnych a, b leży więc na osi krzywej o równaniu

$$(Ax + By + D)\lambda_2 + (Bx + Cy + E)\mu_2 = 0,$$

a więc mamy

$$\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 = 0, \tag{32}$$

to jest

$$E' = 0. \tag{33}$$

Mamy dalej

$$D' = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1. \tag{34}$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$S_2 y'^2 + 2D'x' + F' = 0. \tag{35}$$

Δ i D' są równocześnie równe zeru i równocześnie od zera odmienne, gdyż $D' = 0$, $E' = 0$ pociąga za sobą $\alpha = 0$, $\beta = 0$ i naodwrót, a ponieważ mamy $\delta = 0$, więc gdyby α i β były równe 0, mielibyśmy $\varkappa' = \varkappa'' = 0$, więc i $\Delta = 0$. Naodwrót jeżeli mamy $\Delta = 0$, mamy $D\bar{b} - E\bar{a} = 0$. a ponieważ mamy

$$D' = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 = D\lambda_1 + E\mu_1$$

i

$$\bar{a}\lambda_1 + \bar{b}\mu_1 = 0,$$

więc $D' = 0$.

W przypadku $\Delta \neq 0$ możemy wprowadzić dalszy nowy układ spółrzędnych x'', y'' taki, że osią x'' jest oś x', a oś y'' jest równoległą do osi y'. Pomiędzy spółrzędnymi x', y' i x'' i y'' mamy związki

$$x'' = x' + \frac{F'}{2D'}, \qquad y'' = y'. \tag{36}$$

Wówczas równanie (35) przechodzi w następujące równanie

$$S_2 y''^2 + 2D'x'' = 0, \tag{37}$$

a więc w równanie krzywej przechodzącej przez nowy początek układu. Ale ponieważ układ spółrzędnych x'', y'' jest prostokątny, więc krzywa ta jest *parabolą*. W istocie, kładąc

$$\frac{D'}{S_2} = \varepsilon p, \tag{38}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ i jest tak dobrane, aby p było dodatnie, otrzymamy równanie paraboli

$$y''^2 + 2\varepsilon p x'' = 0, \tag{39}$$

leżącej po stronie dodatniej x'', jeżeli $\varepsilon = -1$, a po stronie ujemnej x'', jeżeli $\varepsilon = +1$.

Mamy teraz

$$S_2 = \frac{\omega}{\sin^2\theta},$$

$$D' = D\lambda_1 + E\mu_1 = \eta\frac{AE - BD}{R} = -\eta\frac{\varkappa'}{R}, \qquad \eta = \pm 1,$$

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta = A\omega,$$

a więc otrzymujemy

$$p = -\varepsilon\eta\sin^2\theta\frac{\varkappa'}{\omega\sqrt{A\omega}}.$$

Ale mamy

$$-\varkappa'^2 = A\Delta,$$

więc otrzymujemy wzór

$$p = \varepsilon'\frac{\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{\omega^3}}\sin^2\theta, \tag{40}$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$, zaś Δ i ω mają znaki przeciwne.

Wzor ten otrzymujemy też korzystając z własności niezmienniczych wyrażeń Δ i ω. Mamy dla równania (35)

$$\Delta' = -S_2 D'^2, \qquad \omega' = S_2,$$

więc

$$S_2 = \frac{\omega}{\sin^2\theta}, \qquad -S_2 D'^2 = \frac{\Delta}{\sin^2\theta},$$

a więc

$$\frac{D'^2}{S_2^2} = -\frac{\Delta\sin^4\theta}{\omega^3},$$

a stąd otrzymujemy wzór (40) na p.

W przypadku $\Delta = 0$ mamy $D' = 0$, więc równanie (35) ma teraz postać

$$S_2 y'^2 + F' = 0, \tag{41}$$

i przedstawia dwie proste równoległe. Ponieważ nowy początek O' układu leży na osi, którą jest prosta środków, więc mamy $\alpha = \beta = 0$, a więc $F' = \gamma = Da + Eb + F$. Mamy więc

$$F' = \varepsilon\left[(a\bar{a} + b\bar{b})\frac{c_1 + c_2}{2} + c_1 c_2\right],$$

zatem

$$F' = -\frac{\varepsilon}{4}(c_1 - c_2)^2 = \frac{\delta''}{A} = \frac{\delta'}{C}. \tag{42}$$

Ale mamy

$$\varepsilon(c_1 - c_2)^2 = \varepsilon\frac{\overline{a}(c_1 + c_2)\overline{b}(c_1 + c_2) - 4\overline{a}\,\overline{b}c_1c_2}{\overline{a}\,\overline{b}} =$$

$$= \frac{4DE - 4BF}{B} = \frac{4\varkappa}{B},$$

więc też

$$F' = -\frac{\varkappa}{B}. \tag{43}$$

Stąd otrzymujemy

$$F' = \frac{\delta' + \delta'' + 2\varkappa\cos\theta}{\omega}. \tag{44}$$

Równanie (41) możemy więc też napisać w postaci

$$y'^2 + \frac{\delta' + \delta'' + 2\varkappa\cos\theta}{\omega^2}\sin^2\theta = 0. \tag{45}$$

Zestawiając rezultaty dwóch ostatnich ustępów możemy wypowiedzieć następujące podstawowe

Twierdzenie: Równanie drugiego stopnia przedstawia prócz *prostych*, tylko *elipsy rzeczywiste*, *elipsy urojone*, *hiperbole* i *parabole*.

5. Równanie osi krzywych drugiego stopnia. Równanie na długości półosi.

W przypadku $\delta \neq 0$ osie przechodzą przez środek krzywej drugiego stopnia, a ponieważ spółrzędne kierunkowe λ, μ kierunków głównych spełniają równania (4), więc pisząc równanie osi w postaci parametrycznej

$$x = a + r\lambda, \qquad y = b + r\mu, \tag{46}$$

gdzie a, b są spółrzędne środka, i zastępując λ, μ w równaniu (4) przez

$$\lambda = \frac{x - a}{r}, \quad \mu = \frac{y - b}{r},$$

otrzymamy równanie

$$\begin{aligned}(A\cos\theta - B)(x - a)^2 + (A - C)(x - a)(y - b) +\\ + (B - C\cos\theta)(y - b)^2 = 0,\end{aligned} \tag{47}$$

drugiego stopnia przedstawiające obie osie. W przypadku kół i prostych minimalnych równanie to jest identycznie równe zero.

W przypadku $\delta = 0$ mamy

$$A = \varepsilon \overline{a}^2, \qquad B = \varepsilon \overline{a}\,\overline{b}. \qquad C = \varepsilon \overline{b}^2,$$

dalej kierunek λ_1, μ_1 spełnia warunek

$$\overline{a}\lambda_1 + \overline{b}\mu_1 = 0,$$

zaś kierunek λ_2. μ_2 prostopadły do tego kierunku warunek

$$\lambda_2(\overline{a}\cos\theta - \overline{b}) + \mu_2(\overline{a} - \overline{b}\cos\theta) = 0.$$

Równanie osi (8) lub (9) możemy przy pomocy $\overline{a}$ i $\overline{b}$ napisać w postaci

$$\varepsilon(\overline{a}x + \overline{b}y)(\overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\,\overline{b}\cos\theta) -$$
$$- D(\overline{b}\cos\theta - \overline{a}) - E(\overline{b} - \overline{a}\cos\theta) = 0,$$

lub w postaci

$$\omega(\overline{a}x + \overline{b}y) + D\overline{a} - E\overline{b} - (D\overline{b} - E\overline{a})\cos\theta = 0. \tag{48}$$

W przypadku $\Delta = 0$ mamy

$$D = \tfrac{1}{2}\varepsilon\overline{a}(c_1 + c_2), \qquad E = \tfrac{1}{2}\varepsilon\overline{b}(c_1 + c_2),$$

więc równanie osi ma postać

$$\overline{a}x + \overline{b}y + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = 0, \tag{49}$$

tj. otrzymujemy prostą środków.

Z równania na S (15) otrzymujemy w przypadku $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$ mnożąc przez $\frac{\Delta^2}{\delta^2 S^2}$ równanie

$$\sin^2\theta\frac{\Delta^2}{\delta^3} - \frac{\omega\Delta^2}{\delta^3 S} + \frac{\Delta^2}{\delta^2 S^2} = 0.$$

Wprowadzając zamiast S nową niewiadomą r określoną wzorem

$$r = -\frac{\Delta}{\delta S}, \tag{50}$$

otrzymujemy równanie

$$r^2 + \frac{\omega\Delta}{\delta^2}r + \sin^2\theta\frac{\Delta^2}{\delta^3} = 0. \tag{51}$$

Równanie to ma pierwiastki

$$r = -\frac{\Delta}{2\delta^2}(\omega \pm \Omega). \tag{52}$$

Jak to wynika ze wzorów (24) pierwiastkami równania tego są wielkości $-\varepsilon_1 a^2$ i $-\varepsilon_2 b^2$. Zatem w przypadku elipsy rzeczywistej pierwiastkami równania (51) są kwadraty półosi a^2, b^2; w przypadku elipsy urojonej ujemne kwadraty półosi $-a^2$, $-b^2$; nareszcie w przypadku hiperboli mamy pierwiastki $-a^2$, b^2 lub a^2, $-b^2$. Równanie (51) nazywa się *równaniem na półosi (équation aux carrés des demiaxes)* krzywych drugiego stopnia.

6. Reguły badania krzywych drugiego stopnia.

Możemy teraz zestawić reguły, których należy się trzymać aby zbadać, co przedstawia dane równanie krzywej drugiego stopnia.

1. Obliczamy wielkości Δ, δ, ω, Ω, δ' i δ'' i konstatujemy, czy mamy elipsę ($\delta > 0$, $\Delta \neq 0$), hiperbolę ($\delta < 0$, $\Delta \neq 0$), parabolę ($\delta = 0$, $\Delta \neq 0$) lub proste ($\Delta = 0$). Dalej konstatujemy, czy mamy elipsę rzeczywistą ($A\Delta$ i $C\Delta < 0$), czy urojoną ($A\Delta$ i $C\Delta > 0$), czy też koło ($\Omega^2 = 0$) rzeczywiste lub urojone. W przypadku dwóch prostych badamy, czy się przecinają ($\delta \neq 0$), czy są równoległe ($\delta = 0$), a w pierwszym przypadku, czy są rzeczywiste ($\delta < 0$), czy też urojone ($\delta > 0$), tak samo w drugim przypadku, czy są rzeczywiste (δ' lub $\delta'' < 0$), czy też urojone (δ' lub $\delta'' > 0$), czy też się zlewają ($\delta' = \delta'' = 0$).

2. Obliczamy spółrzędne środka w przypadku $\delta \neq 0$, a równanie prostej środków w przypadku $\delta = \Delta = 0$.

3. Piszemy równanie na S i obliczamy jego pierwiastki.

4. Obliczamy spółczynniki kierunkowe kierunków głównych.

5. Wprowadzamy nowe osie mające kierunki główne i określone w poprzednich ustępach tego Rozdziału.

6. Piszemy równanie w postaci kanonicznej (22), (37) lub (41).

7. Obliczamy w przypadku $\delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$ półosi, wzorami (24) lub wzorem (52), w przypadku $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ parametr wzorem (40), nareszcie w przypadku $\delta = 0$, $\Delta = 0$ odległość dwóch prostych przy pomocy wzoru (44).

Rezultaty otrzymane możemy zawrzeć w następującej tabeli.

Tabela:

I. $\delta \neq 0$.

1. $\delta > 0$.
   1. $\Delta \neq 0$. *Elipsa.*
      1) $A\Delta$ i $C\Delta > 0$ *urojona,*
      2) $A\Delta$ i $C\Delta < 0$ *rzeczywista.*
   2. $\Delta = 0$.
      Dwie proste urojone przecinające się.
2. $\delta < 0$.
   1. $\Delta \neq 0$. *Hiperbola.*
   2. $\Delta = 0$.
      Dwie proste rzeczywiste przecinające się.

II. $\delta = 0$.

1. $\Delta \neq 0$. *Parabola.*
2. $\Delta = 0$. *Dwie proste równoległe.*
   1) δ' albo $\delta'' > 0$
   urojone sprzężone,
   2) δ' albo $\delta'' < 0$
   rzeczywiste odmienne od siebie,
   3) $\delta' = \delta'' = 0$
   zlewające się ze sobą.

Ćwiczenia.

1. Zbadać i sprowadzić do kanonicznych postaci krzywe o równaniach w układzie spółrzędnych prostokątnych

$$x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 21 = 0, \tag{1}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + y + 1 = 0. \tag{2}$$

2. Mając dane średnice OM, ON ze sobą sprzężone elipsy skonstruować jej osie

(Konstruujemy na stycznej t w punkcie M dwa wektory ME, MF tak, aby było

$$\overline{ME} \, . \, \overline{MF} = - \overline{ON}^2 \tag{3}$$

i aby kierunki OE i OF były do siebie prostopadłe).

ROZDZIAŁ XVIII.

Twierdzenia Apolloniusza dla krzywych 2-go stopnia.

1. Twierdzenia Apolloniusza dla elipsy.

W Rozdziale obecnym drogą analityczną udowodnimy pewne ważne twierdzenia o średnicach krzywych drugiego stopnia, które były już znane Grekom, i które Apolloniusz w dziele: „τὰ κωνικὰ" drogą geometryczną wyprowadził.

Uważajmy w układzie prostokątnym elipsę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

i dwa kierunki 1 i 2 ze sobą sprzężone i zawierające kąty α i β z osią x. Mamy związek

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0. \tag{2}$$

Uważamy punkt C leżący na średnicy odpowiadającej kierunkowi 1, na dodatniem ramieniu średnicy i na elipsie. Uważajmy tak samo punkt D położony na średnicy odpowiadającej kierunkowi 2 na dodatniem ramieniu i na elipsie.

Oznaczmy przez a', b' połowy średnic ze sobą sprzężonych CC' i DD', które nazywamy *półśrednicami ze sobą sprzężonymi.* Mamy

$$\frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{a'^2\sin^2\alpha}{b^2}=1, \tag{3}$$

$$\frac{b'^2\cos^2\beta}{a^2}+\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=1. \tag{4}$$

Otrzymujemy zatem 3 równania (2), (3), (4) pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi dwóch kątów α i β. Jeżeli wyrugujemy te funkcje trygonometryczne z tych równań otrzymamy pewien związek pomiędzy a, b, a', b'.

Zauważmy w tym celu, że z równania (2) otrzymujemy

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \rho\frac{\sin\beta}{b}, \qquad \frac{\sin\alpha}{b} = -\rho\frac{\cos\beta}{a}, \tag{5}$$

gdzie ρ jest pewnym czynnikiem proporcjonalności od zera odmiennym.

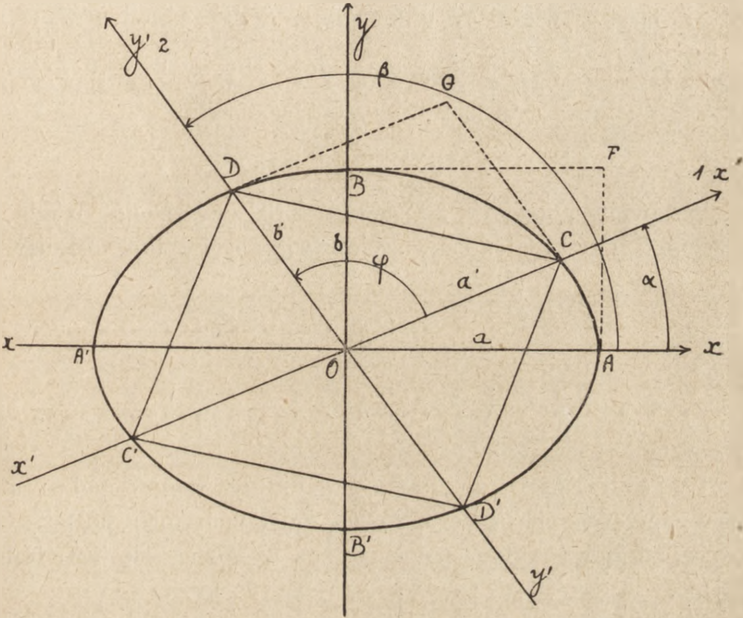

Fig. 19.

Wstawmy wyrażenia na $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ ze wzorów (5) w równanie (3). Otrzymamy

$$\frac{a'^2}{a^2}\cdot\frac{\rho^2a^2}{b^2}\sin^2\beta + \frac{a'^2}{b^2}\cdot\frac{\rho^2b^2}{a^2}\cos^2\beta = 1,$$

a więc

$$\rho^2a'^2\left[\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2}\right] = 1,$$

a więc ze wzoru (4) otrzymamy

$$\rho^2\frac{a'^2}{b'^2} = 1,$$

a więc

$$\rho = \varepsilon \frac{b'}{a'}. \tag{6}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Otrzymujemy zatem następujące związki

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \varepsilon \frac{b'}{a'} \frac{\sin\beta}{b}, \quad \frac{\sin\alpha}{b} = -\varepsilon \frac{b'}{a'} \frac{\cos\beta}{a}. \tag{7}$$

Wstawmy teraz wyrażenie na $\cos\alpha$ w równanie (3). Otrzymamy związek zawierający tylko sinusy

$$a'^2 \frac{b'^2}{a'^2} \frac{\sin^2\beta}{b^2} + a'^2 \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = 1,$$

czyli związek

$$a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta = b^2. \tag{8}$$

Wstawmy podobnie w równanie (3) wyrażenie drugie (7) dające $\sin\alpha$. Otrzymujemy związek zawierający tylko cosinusy

$$a'^2 \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + a'^2 \frac{b'^2}{a'^2} \frac{\cos^2\beta}{a^2} = 1,$$

a więc

$$a'^2 \cos^2\alpha + b'^2 \cos^2\beta = a^2. \tag{9}$$

Mamy zatem twierdzenie

Twierdzenie 1: „Suma kwadratów rzutów półosi a', b' ze sobą sprzężonych na oś x równa się kwadratowi półosi a, zaś suma kwadratów rzutów półosi na oś y równa się kwadratowi półosi b“.

Dodając równości (8) i (9) do siebie otrzymujemy równość

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \tag{10}$$

a więc

Twierdzenie 2: „Suma kwadratów półśrednic ze sobą sprzężonych równa się sumie kwadratów półosi“.

Jest to *pierwsze twierdzenie Apolloniusza* dla elipsy.

Zastąpmy teraz we wzorze (3) jedno $\cos\alpha$ i jedno $\sin\alpha$ przez wyrażenia dane wzorami (7). Otrzymamy

$$\frac{a'^2 \cos\alpha}{a} \cdot \varepsilon \frac{b' \sin\beta}{a'b} - \frac{a'^2 \sin\alpha}{b} \cdot \varepsilon \frac{b' \cos\beta}{a'a} = 1,$$

a więc

$$a'b' \sin(\beta - \alpha) = \varepsilon ab. \tag{11}$$

Uważając te kierunki średnic ze sobą sprzężonych jako dodatnie, które zawierają kąty zawarte między 0 a π z osią x, mamy $\varepsilon = +1$ dla $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, zaś $\varepsilon = -1$ dla $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqq \pi$. Równość (1) wyraża *drugie twierdzenie Apolloniusza* dla elipsy

Twierdzenie 3: „Równoległobok wystawiony na dwóch półśrednicach ze sobą sprzężonych ma pole równe polu prostokąta wystawionego na półosiach".

Styczne w punktach C, C' i tak samo styczne w punktach D, D' są do siebie równoległe. Tak samo proste CD, $C'D'$ i proste $C'D$, CD' są do siebie równoległe. Otrzymujemy stąd *twierdzenie de la Hire*

Twierdzenie 4: „Równoległobok, którego wierzchołkami są końce dwóch średnic ze sobą sprzężonych ma pole równe połowie pola prostokąta utworzonego przez styczne w wierzchołkach elipsy".

2. Drugi dowód twierdzeń Apolloniusza dla elipsy.

Uważajmy drugi układ spółrzędnych Kartezjusza x' y', którego osiami są średnice sprzężone 1, 2, a kierunkami dodatnimi dodatnie kierunki tych średnic. W układzie tym równanie elipsy jest

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \tag{12}$$

Uważajmy teraz niezmienniki δ, Δ, ω należące do funkcji drugiego stopnia figurującej w równaniu (1) i tak samo niezmienniki δ', Δ', ω' należące do funkcji figurującej w równaniu (12). Niechaj dalej θ i θ' będą kąty odpowiednio osi y z osią x i osi y' z osią x'. Mamy

$$\theta = +\frac{\pi}{2}, \qquad \theta' = \beta - \alpha = \varphi.$$

Mamy (Rozdział XII) związki

$$\frac{\delta'}{\sin^2\theta'} = \frac{\delta}{\sin^2\theta}, \tag{13}$$

$$\frac{\omega'}{\sin^2\theta'} = \frac{\omega}{\sin^2\theta}. \tag{14}$$

Mamy

$$\delta = \frac{1}{a^2 b^2},$$

$$\omega = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

i tak samo

$$\delta' = \frac{1}{a'^2 b'^2},$$

$$\omega' = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}.$$

A więc otrzymujemy ze związków (13) i (14)

$$\frac{1}{a'^2 b'^2} = \sin^2\varphi \frac{1}{a^2 b^2},$$

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \sin^2\varphi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Dochodzimy zatem do związków poprzednich (10) i (11).

3. Twierdzenia Apolloniusza dla hiperboli.

Uważajmy hiperbolę H o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{15}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym.

Uważajmy znów średnice 1 i 2 ze sobą sprzężone i obierzmy je jako osie nowego układu spółrzędnych x', y', zawierające kąt $\theta' = \beta - \alpha = \varphi$. Mamy teraz pomiędzy α i β związek

$$\frac{\cos\alpha \cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{b^2} = 0. \tag{16}$$

Pomiędzy x, y i x', y' mamy związki

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned} \tag{17}$$

Zastępując w równaniu (15) x, y przez wartości dane wzorami (17) otrzymamy równanie

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right) - y'^2\left(\frac{\sin^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\beta}{a^2}\right) = 1. \tag{18}$$

Jeżeli średnica 1 przecina hiperbolę w punktach rzeczywistych, natenczas średnica 2 przecina hiperbolę w punktach urojonych. Załóżmy, że kierunki dodatnie 1 i 2 leżą w 1-szej ćwiartce. Mamy

$$\varphi = \beta - \alpha > 0,$$
$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a},$$

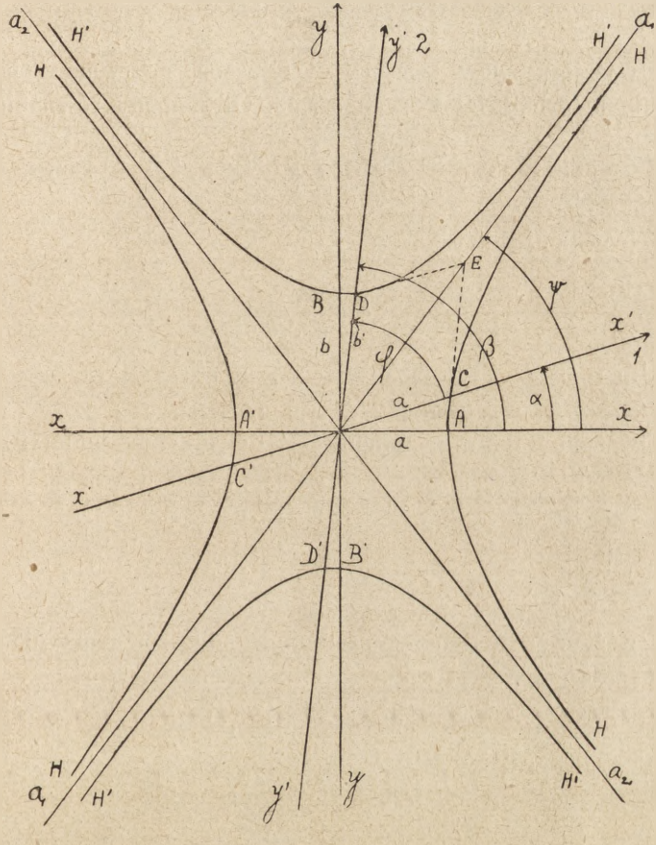

Fig. 20.

a więc oba spółczynniki przy x'^2 i y'^2 są dodatnie. Oznaczając je przez $\frac{1}{a'^2}$, $\frac{1}{b'^2}$ napiszemy równanie (18) w postaci

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \tag{19}$$

Dla $y' = 0$ mamy $x' = \pm a'$, dla $x' = 0$ mamy $y' = \pm ib'$.

Uważajmy teraz obok hiperboli H drugą hiperbolę H', którą z hiperboli H otrzymuje się w sposób następujący. Osią rzeczywistą hiperboli H' jest oś y, a osią urojoną oś x, półosią rzeczywistą półoś urojona b, a półosią urojoną półoś rzeczywista a hiperboli H. Równanie hiperboli H' jest więc

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \tag{20}$$

Uważajmy znów osie x', y' ze sobą sprzężone i napiszmy równanie hiperboli H' w tych osiach. Otrzymamy równanie

$$y'^2\left(\frac{\sin^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\beta}{a^2}\right)-x'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)=1. \tag{21}$$

A więc równanie hiperboli H' jest

$$\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{x'^2}{a'^2}=1. \tag{22}$$

Hiperboli H i H' nazywają się *hiperbolami ze sobą sprzężonymi (hyperboles conjuguées).*

Uważajmy teraz niezmienniki δ i ω dla hiperboli (15). Mamy

$$\begin{aligned}\delta&=-\frac{1}{a^2b^2},\\ \omega&=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Uważajmy te same niezmienniki dla równania (19) hiperboli H. Mamy

$$\begin{aligned}\delta'&=-\frac{1}{a'^2b'^2},\\ \omega'&=\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}.\end{aligned} \tag{24}$$

Otrzymujemy na podstawie związków (13) i (14) między niezmiennikami związki

$$a'^2b'^2\sin^2\varphi=a^2b^2,$$

$$\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{b'^2}=\sin^2\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right),$$

a więc związki

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2, \tag{25}$$

$$a'b'\sin\varphi=ab, \tag{26}$$

przyczem przez a', b' rozumiemy liczby *dodatnie.* Nazywając a' i b' *półśrednicą rzeczywistą* i *półśrednicą urojoną* ze sobą sprzężonymi hiperboli H widzimy, że półśrednice te są odpowiednio półśrednicą urojoną i półśrednicą rzeczywistą hiperboli H. Związki (25) i (26) wyrażają odpowiednio *pierwsze i drugie twierdzenie Apolloniusza dla hiperboli:*

Twierdzenie 5: „Różnica kwadratów półśrednicy rzeczywistej i półśrednicy urojonej z nią sprzężonej hiperboli H równa się różnicy kwadratów półosi rzeczywistej i półosi urojonej. Albo: różnica kwadratów półśrednic rzeczywistych ze sobą sprzężonych, dwóch hiperbol H, H' ze sobą sprzężonych równa się różnicy kwadratów półosi rzeczywistych tych hiperbol“.

Twierdzenie 6: „Równoległobok wystawiony na półśrednicach ze sobą sprzężonych hiperboli równa się prostokątowi wystawionemu na półosiach hiperboli. Albo: równoległobok wystawiony na półśrednicach rzeczywistych ze sobą sprzężonych dwóch hiperbol H, H' równa się prostokątowi, wystawionemu na półosiach rzeczywistych hiperbol“.

Równanie asymptot w układzie osi x', y' ze sobą sprzężonych jest

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 0 \tag{27}$$

Stąd wynika, że styczne w punktach C, D, w których średnice ze sobą sprzężone przecinają hiperbolę H i hiperbolę H' z nią sprzężoną przecinają się w punkcie E asymptoty.

4. Dowody geometryczne twierdzeń Apolloniusza dla elipsy.

Uważajmy elipsę E o półosiach a, b. Elipsę tę możemy uważać jako przecięcie walca kołowego pewną płaszczyzną Π. W istocie, uważajmy walec prostokątny, którego podstawą jest koło K o promieniu b. Walec ten można zawsze przeciąć taką płaszczyzną Π, której przekrój jest elipsą E o półosiach a, b.

Uważajmy dwie średnice CC', DD' ze sobą sprzężone elipsy E i rzutujmy je prostokątnie na podstawę walca. Otrzymamy dwie średnice GG', HH' koła K. Średnice te są do siebie *prostopadłe.* W istocie, uważajmy cięciwę MM' elipsy równoległą do średnicy DD'. Średnica CC' połowi tę cięciwę w punkcie P. Rzutujmy cięciwę tę prostopadle na podstawę walca. Otrzymamy cięciwę NN' koła, która jest równoległa do średnicy HH', a połowiona przez średnicę GG'. A więc cięciwa NN' jest *prostopadła* do średnicy GG', więc średnice GG', HH' są do siebie prostopadłe.

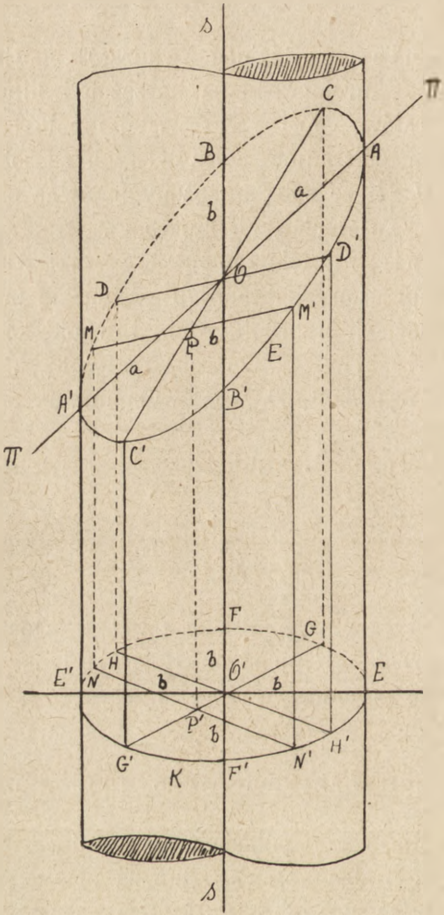

Fig. 21.

Naodwrót, mając dane w kole K dwie średnice do siebie prostopadłe GG', HH', otrzymamy w elipsie E dwie średnice CC', DD' ze sobą sprzężone, rzutując średnice koła na płaszczyznę elipsy równolegle do osi walca.

Stąd otrzymujemy konstrukcję średnic ze sobą sprzężonych w elipsie. Średnice FF', GG' koła K do siebie prostopadłe rzutujemy równolegle do osi x na elipsę E.

Uważajmy w kole K promienie OF i OG do siebie prostopadłe i zawierające odpowiednio kąty φ_1, φ_2 z dodatnim kierunkiem osi x. Mamy

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Punkty F, G mają odpowiednio spółrzędne x_1, y_1 i x_2, y_2

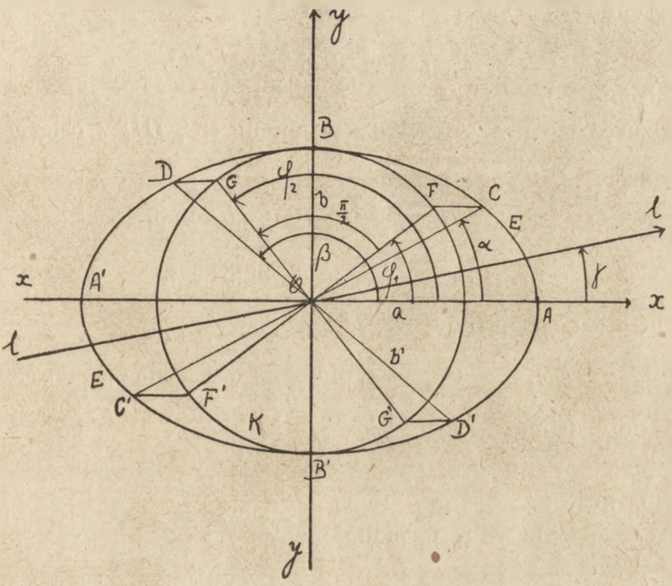

Fig 22.

$$x_1 = b\cos\varphi_1, \qquad y_1 = b\sin\varphi_1, \tag{28}$$
$$x_2 = b\cos\varphi_2, \qquad y_2 = b\sin\varphi_2.$$

Punkty C i D rzuty punktów F i G równolegle do osi x mają odpowiednio spółrzędne x_3, y_3 i x_4, y_4. Mamy

$$y_3 = y_1, \qquad y_4 = y_2, \tag{29}$$

a więc

$$x_3^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_3^2 = a^2 \cos^2\varphi_1,$$

$$x_4^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y_4^2 = a^2 \cos^2\varphi_2,$$

więc

$$x_3 = a\cos\varphi_1, \qquad y_3 = b\sin\varphi_1, \qquad (30)$$
$$x_4 = a\cos\varphi_2, \qquad y_4 = b\sin\varphi_2.$$

Ale

$$\cos\varphi_2 = -\sin\varphi_1,$$
$$\sin\varphi_2 = \cos\varphi_1,$$

a więc mamy

$$(31)\quad x_3^2 + x_4^2 = a^2, \qquad (32)\quad y_3^2 + y_4^2 = b^2$$

(Twierdzenie 1.). Dodając otrzymamy

$$x_3^2 + x_4^2 + y_3^2 + y_4^2 = a^2 + b^2. \qquad (33)$$

(Twierdzenie 2.).

Oznaczając przez α, β kąty promieni *OC*, *OD* z osią *x* mamy

$$x_3 = a'\cos\alpha, \qquad y_3 = a'\sin\alpha, \qquad (34)$$
$$x_4 = b'\cos\beta, \qquad y_4 = b'\sin\beta,$$

a więc

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = a'b'\sin(\beta - \alpha).$$

Dalej mamy ze związków (30),

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = ab(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) = ab.$$

Dochodzimy zatem do związku

$$a'b'\sin(\beta - \alpha) = ab, \qquad (35)$$

(Twierdzenie 3.).

Ze związków (30), otrzymujemy

$$x_3 y_3 = -x_4 y_4, \qquad (36)$$

tj. dwa prostokąty wystawione na bokach leżących na osiach *x*, *y*, a mające odpowiednio połowy średnic *OC* i *OD* ze sobą sprzężonych jako przekątnie są sobie równe.

5. Twierdzenie Plücker'a dla elipsy.

Uważajmy znów elipsę (Fig. 22) i średnice *CC'* *DD'* ze sobą sprzężone. Uważajmy dowolną prostą *l* przechodzącą przez początek *O* układu i zawierający kąt γ z dodatnim kierunkiem osi *x*. Uważajmy prostopadłe rzuty odcinków *OC* i *OD* na tę prostą. Wartości ich są odpowiednio

$$a'\cos(\alpha - \gamma), \qquad b'\cos(\beta - \gamma).$$

Uważajmy sumę kwadratów tych rzutów

$$a'^2\cos^2(\alpha-\gamma)+b'^2\cos^2(\beta-\gamma).$$

Równa się ona

$$\begin{aligned}&a'^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma+a'^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+2a'^2\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma+\\&+b'^2\cos^2\beta\cos^2\gamma+b'^2\sin^2\beta\sin^2\gamma+2b'^2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma=\\&=(a'^2\cos^2\alpha+b'^2\cos^2\beta)\cos^2\gamma+(a'^2\sin^2\alpha+b'^2\sin^2\beta)\sin^2\gamma+\\&+2(a'^2\sin\alpha\cos\alpha+b'^2\sin\beta\cos\beta)\sin\gamma\cos\gamma.\end{aligned}$$

Ze wzorów (8), (9), (36) otrzymujemy związek

$$a'^2\cos^2(\alpha-\gamma)+b'^2\cos^2(\beta-\gamma)=a^2\cos^2\gamma+b^2\sin^2\gamma, \qquad (37)$$

który wyraża twierdzenie Plücker'a:

Twierdzenie 7: „Suma kwadratów rzutów prostopadłych półśrednic ze sobą sprzężonych na dowolną prostą l jest stała i równa się sumie rzutów prostopadłych obu półosi na tę prostą".

Ćwiczenia.

1. Znaleźć dla elipsy kierunki ze sobą sprzężone, których średnice są sobie równe.

2. Zbadać, czy odwrotności twierdzeń Apollonjusza są słuszne.

ROZDZIAŁ XIX.

Ogniska i kierownice krzywych drugiego stopnia.

1. Spółrzędne biegunowe na płaszczyźnie.

Oprócz spółrzędnych Kartezjusza używa się często w geometrji analitycznej *spółrzędnych biegunowych*. Uważajmy dowolny punkt P na płaszczyźnie i prostą p przechodzącą przez punkt P, na której obieramy dodatni kierunek. Uważajmy dowolny punkt M i przeprowadźmy przez P i M prostą l obierając na niej dodatni kierunek. W razie gdy P schodzi się z M uważamy dowolną prostą przechodzącą przez P. Oznaczmy przez r długość wektora PM, a przez φ kąt $\sphericalangle(p, l)$ osi l z osią p

$$0 \leqq \varphi < 2\pi. \tag{1}$$

Do każdego punktu M należą oznaczone wartości na r i φ, z wyjątkiem przypadku gdy M schodzi się z P, w którym to przypadku φ jest dowolne. Zależnie od obioru kierunku na prostej l należą więc do danego punktu M *dwa* układy wartości na r i φ. Rozumiejąc przez r, φ jeden z tych układów mamy na drugi układ wartości

$$-r, \qquad \varphi + \varepsilon\pi,$$

gdzie $\varepsilon = +1$, gdy mamy

$$0 \leqq \varphi < \pi,$$

zaś $\varepsilon = -1$, gdy mamy

$$\pi \leqq \varphi < 2\pi.$$

Naodwrót do układu danego r, φ, gdzie φ spełnia nierówności (1) należy oznaczony punkt M.

Jeżeli na r nałożymy warunek, aby *nie było ujemne*, $r \geqq 0$, natenczas do każdego punktu M odmiennego od P należy *jeden* oznaczony układ liczb r, φ.

Liczby r, φ nazywają się *spółrzędnymi biegunowymi* (coordonnées polaires) punktu M, a mianowicie r *promieniem wodzącym* (rayon vecteur), a φ *amplitudą* (amplitude) *w układzie spółrzędnych biegunowych*, którego *biegunem* (pôle) jest punkt P a *osią biegunową* (axe polaire) oś p. Układ spółrzędnych biegunowych, w którym r może być dodatnie lub ujemne, nazwiemy *ogólnym* układem biegunowym, a układ, w którym r jest $\geqq 0$, *szczególnym* układem biegunowym.

Uważajmy teraz obok układu spółrzędnych biegunowych układ osi Kartezjusza x, y prostokątny, o początku O w biegunie P a o osi x schodzącej się z osią biegunową p. Spółrzędne x, y dowolnego punktu M na płaszczyźnie wyrażają się przez spółrzędne r, φ w następujący sposób

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Ze wzorów tych otrzymujemy r, φ wyrażone przez x, y. A mianowicie mamy

$$r = \varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \varepsilon\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi &= \varepsilon\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Przytem ε równa się ± 1 dla ogólnego układu biegunowego, a równa się $+1$, dla *szczególnego* układu biegunowego.

2. Równanie biegunowe elipsy.

Uważajmy elipsę o równaniu w układzie spółrzędnych prostokątnych

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Wprowadźmy układ spółrzędnych biegunowych, którego biegunem jest prawe ognisko F elipsy o spółrzędnych Kartezjusza c, 0, a którego osią biegunową p jest oś x-ów. Jeżeli przez r, φ oznaczymy ogólne spółrzędne biegunowe punktu M na elipsie, którego spółrzędne Kartezjusza są x, y, mamy

$$\begin{aligned} x &= c + r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

Wstawiając wyrażenia (7) w równanie (6) elipsy otrzymamy

$$\frac{(c + r\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1,$$

a więc

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{2rc\cos\varphi}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - 1 = 0,$$

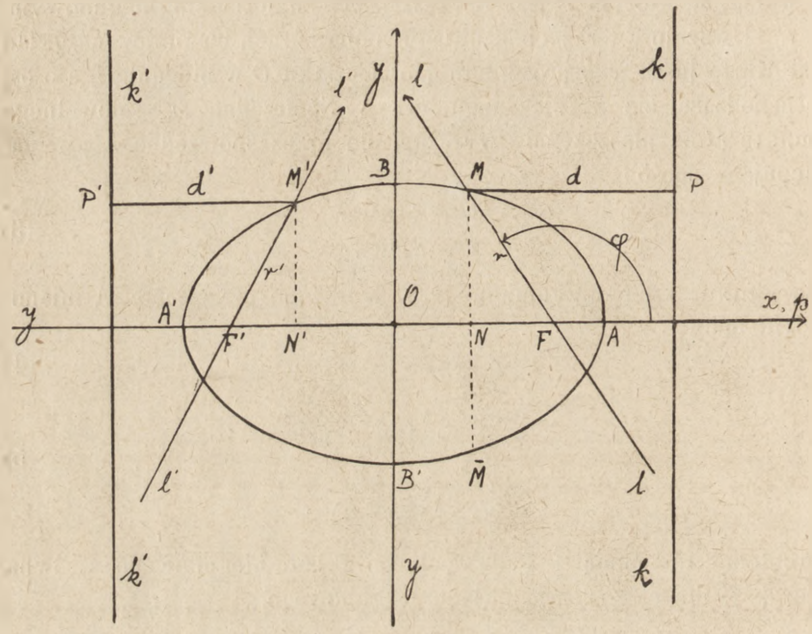

Fig. 23.

więc

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{r^2\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{2rc\cos\varphi}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \frac{r^2c^2\cos^2\varphi}{a^2b^2} + \frac{2rc\cos\varphi}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \left(\frac{rc\cos\varphi}{ab} - \frac{b}{a}\right)^2 = 0. \qquad (8)$$

Stąd otrzymujemy wyciągając pierwiastek

$$\frac{r}{b} = \varepsilon\left(\frac{rc\cos\varphi}{ab} - \frac{b}{a}\right),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a więc

$$r = -\frac{\varepsilon b^2}{a - \varepsilon c\cos\varphi}. \qquad (9)$$

Nazywamy *parametrem elipsy* (paramètre) liczbę p określoną wzorem

$$p = \frac{b^2}{a}, \tag{10}$$

a *mimośrodem liczebnym elipsy* (excentricité numérique) liczbę e określoną wzorem

$$e = \frac{c}{a}. \tag{11}$$

Liczba p jest miarą rzędnej punktu elipsy, którego odcięta ma miarę c, albowiem wstawiając w równanie (6) c zamiast x otrzymujemy $y = \pm \frac{b^2}{a}$, a więc jest miarą rzędnej wystawionej w ognisku elipsy.

Wzór (9) możemy teraz napisać w postaci

$$r = -\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon e \cos\varphi}. \tag{12}$$

Do każdego φ należą dwa punkty elipsy odpowiadające wartościom $\varepsilon = \pm 1$. Naodwrót, do każdego punktu M elipsy należą *dwa* układy r, φ spółrzędnych biegunowych

$$r_1, \varphi_1 \quad \text{i} \quad r_2, \varphi_2.$$

Przytem jedna z liczb r_1, r_2 np. r_1 jest *dodatnia*, a druga r_2 ujemna i równa $-r_1$. Między φ_1 i φ_2 zachodzi związek

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon\pi.$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Możemy więc na r_1 i r_2 w zależności od amplitudy φ napisać dwa wzory

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \quad r_2 = -\frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{13}$$

Równanie (12) nazywamy *równaniem elipsy w spółrzędnych biegunowych ogólnych*, a równanie

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \tag{14}$$

równaniem elipsy w spółrzędnych biegunowych szczególnych, dla prawego ogniska jako bieguna.

Możemy teraz obrać biegun w *lewem ognisku* elipsy, F'. Teraz mamy związki

$$\begin{aligned} x &= -c + r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

W poprzednich wzorach należy c zastąpić przez $-c$, a więc e przez $-e$. Z równania (12) otrzymujemy równanie *ogólne biegunowe elipsy dla lewego ogniska jako bieguna*

$$r = -\frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon e\cos\varphi}. \tag{16}$$

Wartości $\varepsilon = -1$, odpowiada równanie

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \tag{17}$$

elipsy w *spółrzędnych biegunowych szczególnych* dla lewego ogniska jako bieguna.

Widoczna, że równanie (17) otrzymujemy z równania (14) pisząc $\varphi + \pi$ zamiast φ, a więc zmieniając dodatni kierunek osi biegunowej na przeciwny. W istocie, jeżeli obrócimy układ spółrzędnych Kartezjusza x, y o kąt $+\pi$ dokoła O, wówczas lewe ognisko elipsy przejdzie w prawe i naodwrót.

3. Równanie biegunowe hiperboli.

Uważajmy hiperbolę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnych. Obierając biegun w prawem ognisku hiperboli, a jako oś biegunową oś x-ów, mamy

$$x = c + r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Mamy więc równanie

$$\frac{(c + r\cos\varphi)^2}{a^2} - \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1,$$

zatem

$$-\frac{r^2}{b^2} + \frac{r^2\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{2rc\cos\varphi}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - 1 = 0,$$

$$-\frac{r^2}{b^2}+\frac{r^2c^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}+\frac{2rc\cos\varphi}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=0,$$

$$\frac{r^2}{b^2}-\left(\frac{rc\cos\varphi}{ab}+\frac{b}{a}\right)^2=0,$$

otrzymujemy więc

$$\frac{r}{b}=\varepsilon\left(\frac{rc\cos\varphi}{ab}+\frac{b}{a}\right),$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$.

Wprowadzając znów *parametr* hiperboli określony wzorem

$$p=\frac{b^2}{a}, \qquad (10)$$

równy mierze rzędnej hiperboli w ognisku i *mimośród liczebny* hiperboli e

$$e=\frac{c}{a} \qquad (11)$$

dochodzimy do wzoru

$$r=\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon e\cos\varphi}. \qquad (20)$$

Każdemu φ odpowiadają znów dwa punkty hiperboli. Każdemu punktowi M hiperboli odpowiadają dwa układy spółrzędnych biegunowych

$$r_1,\ \varphi_1 \quad \text{i} \quad r_2,\ \varphi_2$$

gdzie $r_2=-r_1$, i np. r_1 jest dodatnie, zaś $\varphi_2=\varphi_1+\varepsilon\pi$, $\varepsilon=\pm 1$.

Mianownik

$$1-\varepsilon e\cos\varphi$$

we wzorze (20) może być teraz dodatni, ujemny lub równy zeru, zależnie od kąta φ. Jeżeli przez ψ oznaczymy dodatni kąt $<\frac{\pi}{2}$, jaki dodatni kierunek asymptoty a hiperboli położonej w 1-szej i 3-ciej ćwiartce zawiera z osią x, mamy

$$\cos\psi=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}.$$

Dla $\varepsilon=+1$ mianownik jest dodatni, gdy zachodzi nierówność

$$e\cos\varphi<1,$$

ujemny, gdy zachodzi nierówność

$$e \cos \varphi > 1,$$

równy zeru, gdy mamy

$$e \cos \varphi = 1.$$

A więc mianownik jest dodatni,

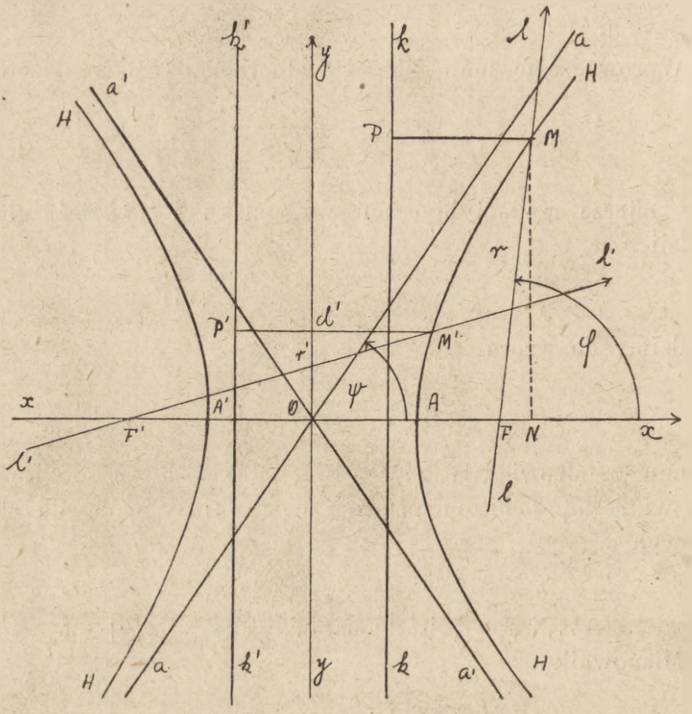

Fig. 24.

gdy φ spełnia nierówności

$$2\pi - \psi > \varphi > \psi, \tag{21}$$

jest ujemny, gdy φ spełnia nierówności

$$(22) \quad 0 \leqq \varphi < \psi \quad \text{lub} \quad (23) \quad 2\pi > \varphi > 2\pi - \psi,$$

równa się zeru. gdy mamy

$$(24) \quad \varphi = \psi \quad \text{lub} \quad (25) \quad \varphi = 2\pi - \psi.$$

Dla $\varepsilon = -1$, mianownik jest dodatni, gdy zachodzi nierówność

$$e \cos \varphi > -1.$$

jest ujemny, gdy mamy

$$e \cos \varphi < -1,$$

równy zeru, gdy mamy

$$e \cos \varphi = -1.$$

A więc mianownik jest dodatni, gdy φ spełnia nierówności

$$\pi - \psi > \varphi \geqq 0, \tag{26}$$

lub nierówności

$$\pi + \psi < \varphi < 2\pi, \tag{27}$$

jest ujemny, gdy mamy

$$\pi - \psi < \varphi < \pi + \psi, \tag{28}$$

równa się zeru dla

$$\varphi = \pi - \psi \tag{29}$$

i dla

$$\varphi = \pi + \psi. \tag{30}$$

A więc dla $\varepsilon = +1$, mamy

$$r_1' = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \tag{31}$$

dla φ spełniającego nierówności (21), a dla $\varepsilon = -1$, mamy

$$r_1'' = -\frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \tag{32}$$

dla φ spełniającego nierówności (28).

Dla φ spełniającego nierówności (28) mamy

$$1 - e \cos \varphi > -(1 + e \cos \varphi) > 0,$$

a więc mamy

$$r_1'' > r_1'. \tag{33}$$

Zatem wzór (31) daje nam punkty położone na *prawej* gałęzi hiperboli, a wzór (32) daje punkty położone na *lewej* gałęzi hiperboli. Wynika to też stąd, że dla $\varphi = \pi$, mamy

$$r_1' = \frac{p}{1 + e}, \quad r_1'' = \frac{p}{e - 1}.$$

Obierzmy teraz *lewe* ognisko F' hiperboli jako biegun. Należy teraz zmienić c na $-c$, a więc e na $-e$ we wzorze (20). Mamy

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon e \cos \varphi}. \tag{34}$$

Przypadek ten sprowadza się do przypadku poprzedniego, jeżeli kąt φ zastąpimy przez kąt $\varphi + \pi$. Teraz mamy wzory: dla $\varepsilon = -1$,

$$r_1' = -\frac{p}{1 - e \cos \varphi}, \tag{35}$$

dla prawej gałęzi hiperboli, zaś dla $\varepsilon = +1$,

$$r_1'' = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \tag{36}$$

dla lewej gałęzi hiperboli. Dla $\varphi = 0$, mamy

$$r_1' = \frac{p}{1 - e}, \quad r_1'' = \frac{p}{1 + e}.$$

4. Kierownice elipsy. Równanie elipsy odniesionej do ogniska i kierownicy.

Uważajmy dowolny punkt M elipsy. Obierzmy znów prawe ognisko F jako biegun, a oś x jako oś biegunową. Mamy związki (7). Z równania (6) elipsy otrzymujemy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1,$$

więc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{r^2\left[1 - \left(\frac{x - c}{r}\right)^2\right]}{b^2} = 1,$$

$$\frac{r^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{(x - c)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \frac{c^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{2cx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \left(\frac{cx}{ab} - \frac{a}{b}\right)^2 = 0.$$

Wyciągając obustronnie pierwiastek otrzymujemy równanie

$$\frac{r}{b} = \varepsilon\left(\frac{cx}{ab} - \frac{a}{b}\right),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a wprowadzając $e = \frac{c}{a}$ mamy równanie

$$r = \varepsilon e\left(x - \frac{a^2}{c}\right). \tag{37}$$

Ponieważ mamy nierówność

$$|x| < a,$$

więc $x - \frac{a^2}{c}$ jest ujemne. Każdej wartości na x odpowiadają dwie wartości na r, jedna ujemna, druga dodatnia. Oznaczając przez r_1 wartość dodatnią mamy równanie

$$r_1 = e\left(\frac{a^2}{c} - x\right). \tag{38}$$

Każdej wartości na x odpowiadają dwa punkty M, $\overline{M}$ posiadające to samo r_1. Równanie (38) ma znaczenie geometryczne następujące. Uważajmy prostą k prostopadłą do osi x o równaniu

$$x - \frac{a^2}{c} = 0. \tag{39}$$

Prosta ta przebiega zewnątrz elipsy i nazywa się *kierownicą* (directrice) elipsy, należącą do *prawego* ogniska elipsy. Otóż $\frac{a^2}{c} - x$ jest to absolutna odległość MP punktu M elipsy od kierownicy k. Oznaczając ją przez d otrzymamy związek

$$r_1 = ed. \tag{40}$$

T. zn., że stosunek odległości punktu M elipsy od prawego ogniska i prawej kierownicy ma wartość stałą, równą mimośrodowi liczebnemu e elipsy.

Uważajmy teraz lewe ognisko F' elipsy. Aby otrzymać teraz równanie pomiędzy r a x należy we wzorze (29) zastąpić c przez $-c$

$$r = \varepsilon e\left(x + \frac{a^2}{c}\right), \tag{41}$$

a ponieważ $x + \frac{a^2}{c}$ jest zawsze dodatnie, więc mamy równanie

$$r_1' = e\left(x + \frac{a^2}{c}\right). \tag{42}$$

Uważamy prostą k' o równaniu

$$x + \frac{a^2}{c} = 0, \tag{43}$$

prostopadłą do osi x-ów mającą od osi y tę samą odległość co kierownica k lecz położoną po stronie ujemnych x. Prosta ta nazywa się *kierownicą należącą* do *lewego* ogniska elipsy. Oznaczając przez d' odległość bezwzględną punktu M' elipsy od kierownicy k' mamy związek

$$r_1' = ed' \tag{44}$$

gdzie r_1' jest to bezwzględna odległość punktu M' od ogniska lewego. Stosunek odległości punktu M' elipsy od ogniska lewego i od lewej kierownicy równa się znów liczbie e. Rezultat ten jest zresztą oczywisty, jeżeli dodatnie kierunki osi Kartezjusza x, y zamienimy na przeciwne.

5. Kierownice hiperboli. Rownanie hiperboli odniesionej do ogniska i kierownicy.

Uważajmy hiperbolę o równaniu (18) i związki (19) dla prawego ogniska hiperboli. Z równania (18) otrzymujemy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{r^2(1-\cos^2\varphi)}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} + \frac{(x-c)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \frac{c^2x^2}{a^2b^2} + \frac{2cx}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{r^2}{b^2} - \left(\frac{cx}{ab} - \frac{a}{b}\right)^2 = 0.$$

Wyciągając pierwiastek otrzymujemy równanie

$$\frac{r}{b} = \varepsilon\left(\frac{cx}{ab} - \frac{a}{b}\right). \tag{45}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. A więc otrzymujemy równanie

$$r = \varepsilon e\left(x - \frac{a^2}{c}\right), \tag{46}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Oznaczmy znów przez r_1 dodatnią wartość na r.

Uważajmy *prawą* gałąź. Ponieważ mamy $x > a$, więc mamy

$$x - \frac{a^2}{c} > 0,$$

a więc znakowi $\varepsilon = +1$ odpowiada dodatnia wartość na r i mamy

$$r_1 = e\left(x - \frac{a^2}{c}\right). \tag{47}$$

Dla *lewej* gałęzi hiperboli mamy $x - \frac{a^2}{c} < 0$, a więc należy obrać $\varepsilon = -1$

$$r_1 = e\left(\frac{a^2}{c} - x\right). \tag{48}$$

Do każdej wartości na x należą dwa punkty na hiperboli. Równanie (46) nazywa się równaniem hiperboli odniesionem do *prawego ogniska* i do *prawej kierownicy*, tak samo jak dla elipsy, albowiem prosta k o równaniu

$$x - \frac{a^2}{c} = 0, \tag{49}$$

przebiegająca prostopadle do osi x pomiędzy prawą gałęzią hiperboli a osią y nazywa się, jak u elipsy *kierownicą prawą* hiperboli. Odległość punktu M hiperboli od kierownicy równa się co do wartości bezwzględnej $x - \frac{a^2}{c}$ a więc oznaczając ją przez d mamy związek

$$r_1 = ed \tag{50}$$

dla prawej gałęzi hiperboli. Ten sam związek mamy dla lewej gałęzi hiperboli, dla której mamy równanie (48), a

$$\frac{a^2}{c} - x$$

jest dodatnie.

Uważajmy teraz *lewe* ognisko F' hiperboli. Otrzymamy równanie hiperboli pomiędzy r a x odniesiona do lewego ogniska jako bieguna i do dodatniego kierunku osi x jako osi biegunowej, zastępując w równaniu (38) c przez $-c$. A więc mamy równanie

$$r = \varepsilon e\left(x + \frac{a^2}{c}\right). \tag{51}$$

Dla prawej gałęzi hiperboli mamy

$$r_1 = e\left(x + \frac{a^2}{c}\right), \tag{52}$$

a dla lewej gałęzi

$$r_1 = -e\left(x + \frac{a^2}{c}\right). \tag{53}$$

Mamy teraz kierownicę k' należącą do *lewego ogniska* F', o równaniu

$$x + \frac{a^2}{c} = 0, \tag{54}$$

położoną względem osi y symetrycznie do kierownicy k, i znów zachodzi związek (42).

6. Równanie biegunowe paraboli.

Uważajmy parabolę o równaniu

$$y^2 = 2px \tag{55}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym i wprowadźmy układ spółrzędnych biegunowych, którego biegunem jest ognisko F paraboli, a osią biegunową oś x. Mamy związki

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{2} + r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{56}$$

Otrzymujemy równanie

$$r^2(1 - \cos^2\varphi) = 2p\left(\frac{p}{2} + r\cos\varphi\right)$$

więc

$$r^2 = (r\cos\varphi + p)^2.$$

Wyciągając obustronnie pierwiastek otrzymujemy

$$r = \varepsilon(r\cos\varphi + p),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a więc równanie

$$r = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \tag{57}$$

Oznaczając przez r_1 dodatnią wartość na r mamy równanie

$$r_1 = \frac{p}{1 - \cos\varphi}. \tag{58}$$

7. Równanie paraboli odniesionej do ogniska i kierownicy.

Kierownicą paraboli nazywamy prostą k o równaniu

$$x+\frac{p}{2}=0. \tag{59}$$

Aby otrzymać równanie paraboli odniesionej do ogniska F i kierownicy k zastępujemy w równaniu (55) paraboli y wzorem (56). Mamy

$$r^2\sin^2\varphi=2px,$$

więc

$$r^2\left[1-\frac{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}{r^2}\right]=2px,$$

$$r^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Wyciągając pierwiastek otrzymujemy równanie

$$r=\varepsilon\left(x+\frac{p}{2}\right), \tag{60}$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$. Mamy więc równanie

$$r_1=x+\frac{p}{2}. \tag{61}$$

Ponieważ odległość d punktu M paraboli od kierownicy k równa się co do bezwzględnej wartości $x+\frac{p}{2}$

$$d=x+\frac{p}{2},$$

więc otrzymujemy związek

$$r_1=d. \tag{62}$$

8. Ogólna teorja ognisk i kierownic krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy równanie ogólnej krzywej drugiego stopnia

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{63}$$

Spytajmy się, czy istnieją takie punkty F i proste k na płaszczyźnie, że dowolny punkt M krzywej (63) posiada odległości r i d od punktu F i od prostej k stojące do siebie w stałym stosunku. Na odległość r mamy wzór

$$r^2 = (x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta + (y-b)^2, \tag{64}$$

gdzie a, b są spółrzędne punktu F, a na odległość d wzór

$$d^2 = \sin^2\theta \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2-2lm\cos\theta}, \tag{65}$$

przyczem równanie prostej k jest

$$lx+my+n=0. \tag{66}$$

Mamy więc związek

$$r^2 = e^2 d^2, \tag{67}$$

gdzie e jest pewna liczba stała niezależna od punktu M. Punkt F nazywa się *ogniskiem*, prosta k *kierownicą* i mówimy, że mamy ognisko i kierownicę *do siebie należące*.

Aby znaleźć wszystkie ogniska i kierownice do siebie należące należy porównać ze sobą równanie (63) i równanie, które otrzymuje się ze związku (67)

$$\begin{gathered}(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta + (y-b)^2 - \\ - e^2\sin^2\theta \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2-2lm\cos\theta} = 0.\end{gathered} \tag{68}$$

Jest to równanie stopnia drugiego. Wiemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby dwa równania stopnia drugiego przedstawiały tę samą krzywą drugiego stopnia jest, aby spółczynniki obu równań były do siebie proporcjonalne. Możemy zawsze założyć, że mamy

$$e^2\sin^2\theta = l^2+m^2-2lm\cos\theta, \tag{69}$$

albowiem możemy równanie (66) kierownicy pomnożyć przez

$$k = \frac{e\sin\theta}{\sqrt{l^2+m^2-2lm\cos\theta}}. \tag{70}$$

i uważać równanie

$$l'x + m'y + n' = 0,$$

gdzie

$$l' = kl, \qquad m' = km, \qquad n' = kn.$$

Mamy zatem równanie

$$\begin{gathered}(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta + (y-b)^2 - \\ - (l'x+m'y+n')^2 = 0.\end{gathered} \tag{71}$$

Znając l', m', n' otrzymamy e ze wzoru

$$e^2 \sin^2 \theta = l'^2 + m'^2 - 2l'm' \cos \theta.$$

Chodzi zatem o znalezienie liczb a, b, l, m, n, $\rho \neq 0$, spełniających równania

$$\begin{gathered} \rho A = 1 - l^2, \qquad \rho B = \cos \theta - lm, \qquad \rho C = 1 - m^2, \\ \rho D = -a - b \cos \theta - ln, \qquad \rho E = -b - a \cos \theta - mn, \\ \rho F = a^2 + 2ab \cos \theta + b^2 - n^2. \end{gathered} \tag{72}$$

Z pierwszych trzech równań otrzymujemy

$$l^2 = 1 - \rho A, \qquad lm = \cos \theta - \rho B, \qquad m^2 = 1 - \rho C,$$

a więc

$$(1 - \rho A)(1 - \rho C) = (\cos \theta - \rho B)^2,$$

zatem równanie

$$\rho^2 \delta - \rho \omega + \sin^2 \theta = 0, \tag{73}$$

a więc

$$\rho = \frac{1}{2\delta} [\omega \pm \sqrt{\omega^2 \quad 4\delta \sin^2 \theta}] = \frac{1}{2\delta} (\omega \pm \Omega), \tag{74}$$

a jeżeli $\delta = 0$, mamy

$$\rho = \frac{\sin^2 \theta}{\omega}. \tag{75}$$

9. Zastosowanie do elipsy i do elipsy urojonej.

Uważamy równanie elipsy w układzie spółrzędnych prostokątnych

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{76}$$

Mamy do spełnienia następujące związki

$$\begin{gathered} \frac{\rho}{a^2} = 1 - l^2, \qquad 0 = lm, \qquad \frac{\rho}{b^2} = 1 - m^2, \\ a + ln = 0, \qquad b + mn = 0, \\ -\rho = a^2 + b^2 - n^2. \end{gathered} \tag{77}$$

Mamy więc następujące przypadki:

I. $l = 0$.

$$\rho = \overline{a}^2,$$

$$m^2 = 1 - \frac{\overline{a}^2}{\overline{b}^2} = -\frac{\overline{c}^2}{\overline{b}^2}, \text{ więc}$$

$$m = \varepsilon i \frac{\overline{c}}{\overline{b}},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$a = 0,$$

$$b = -mn = -n\varepsilon i \frac{\overline{c}}{\overline{b}},$$

$$b^2 - n^2 = -\overline{a}^2,$$

$$n^2\left(\frac{\overline{c}^2}{\overline{b}^2} + 1\right) = \overline{a}^2,$$

$$n = \varepsilon' \overline{b},$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$,

$$b = -\varepsilon\varepsilon' i \overline{c},$$

A więc otrzymujemy dwa urojone ogniska na osi y

$$a = 0, \qquad b = -\varepsilon\varepsilon' i \overline{c} \tag{78}$$

i dwie urojone kierownice o równaniach

$$y - i\varepsilon\varepsilon' \frac{\overline{b}^2}{\overline{c}} = 0, \tag{79}$$

odpowiadające tym ogniskom.

II. $m = 0$.

Teraz mamy

$$\rho = \overline{b}^2,$$

$$l^2 = 1 - \frac{\overline{b}^2}{\overline{a}^2} = \frac{\overline{c}^2}{\overline{a}^2}, \text{ więc}$$

$$l = \varepsilon \frac{\overline{c}}{\overline{a}},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$b = 0,$$

$$a = -ln = -n\varepsilon \frac{\overline{c}}{\overline{a}},$$

$$a^2 - n^2 = -\overline{b}^2,$$

$$n^2\left(\frac{\overline{c^2}}{\overline{a^2}}-1\right)=-\overline{b^2},$$

$$n=\varepsilon'\overline{a},$$

gdzie $\varepsilon'=\pm 1$,

$$a=-\varepsilon\varepsilon'\overline{c}.$$

A więc otrzymujemy dwa rzeczywiste ogniska na osi x

$$a=-\varepsilon\varepsilon'\overline{c},\qquad b=0, \tag{80}$$

i dwie rzeczywiste kierownice o równaniach

$$x+\varepsilon\varepsilon'\frac{\overline{a^2}}{c}=0. \tag{81}$$

Są to znane nam już rzeczywiste ogniska i kierownice.

Uważajmy teraz równanie elipsy urojonej

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0, \tag{82}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym. Teraz mamy znów równania (77), ale w ostatniem równaniu mamy ρ zamiast $-\rho$.

I. $l=0$.

Mamy znów

$$m=\varepsilon i\frac{\overline{c}}{b},$$

gdzie $\varepsilon=\pm 1$,

$$n^2(m^2-1)=\overline{a^2},$$

$$n^2=-\overline{b^2},$$

$$n=\varepsilon' i\overline{b},$$

gdzie $\varepsilon'=\pm 1$.

Otrzymujemy zatem spółrzędne dwóch ognisk

$$a=0,\qquad b=\varepsilon\varepsilon'\overline{c}, \tag{83}$$

i równania dwóch kierownic

$$y+\varepsilon\varepsilon'\frac{\overline{b^2}}{c}=0. \tag{84}$$

Zatem ogniska te i odpowiadające im kierownice są rzeczywiste.

II. $m = 0$.

Mamy znów,

$$l = \varepsilon \frac{\overline{c}}{a},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$n^2 (l^2 - 1) = \overline{b^2},$$
$$n^2 = \overline{b^2},$$
$$n = \varepsilon' i \overline{a},$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$.

Otrzymujemy zatem dwa urojone ogniska

$$a = -\varepsilon \varepsilon' i \overline{c}, \qquad b = 0 \tag{85}$$

i odpowiadające im dwie urojone kierownice

$$x + \varepsilon \varepsilon' i \frac{\overline{a^2}}{c} = 0. \tag{86}$$

10. Zastosowanie do hiperboli.

Uważamy równanie hiperboli w układzie spółrzędnych prostokątnych

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{87}$$

Mamy znów związki (77), w których jednak w trzecim mamy $-\rho$ zamiast ρ.

I $l = 0$.

Mamy

$$m = \varepsilon \frac{c}{b},$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$n = \varepsilon' i b,$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$.

Stąd otrzymujemy dwa ogniska urojone na osi y-ów

$$a = 0, \qquad b = -\varepsilon \varepsilon' i c, \tag{88}$$

i odpowiadające tym ogniskom kierownice urojone

$$y + \varepsilon \varepsilon' i \frac{\overline{b^2}}{c} = 0. \tag{89}$$

II. $m = 0$.

Teraz mamy

$$l = \varepsilon \frac{c}{a},$$

$$\varepsilon = \pm 1,$$

$$n = \varepsilon' a,$$

$$\varepsilon' = \pm 1,$$

a więc mamy dwa ogniska rzeczywiste na osi x-ów

$$a = -\varepsilon\varepsilon' c, \qquad b = 0, \tag{90}$$

i odpowiadające tym ogniskom kierownice rzeczywiste

$$x + \varepsilon\varepsilon' \frac{a^2}{c} = 0. \tag{91}$$

11. Zastosowanie do paraboli.

Porównywając równanie (55) paraboli z równaniem (71) otrzymamy równania

$$\left.\begin{array}{lll} 1 - l^2 = 0, & lm = 0, & 1 - m^2 = \rho, \\ -a - ln = -\rho p, & -b - mn = 0, & a^2 + b^2 - n^2 = 0. \end{array}\right\} \tag{92}$$

A więc mamy

$$l = \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$m = 0,$$

$$\rho = 1,$$

$$b = 0,$$

$$n = \varepsilon' a,$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$,

$$a + \varepsilon\varepsilon' a = p,$$

a więc

$$\varepsilon\varepsilon' = +1,$$

$$\varepsilon' = \varepsilon,$$

$$a = \frac{p}{2},$$

$$n = \varepsilon \frac{p}{2}.$$

Dochodzimy więc do jednego rzeczywistego ogniska

$$a = \frac{p}{2}, \qquad b = 0 \tag{93}$$

i do jemu odpowiadającej rzeczywistej kierownicy

$$x + \frac{p}{2} = 0. \tag{94}$$

12. Styczne krzywej drugiego stopnia przechodzące przez ogniska.

W obecnym ustępie udowodnimy pewne twierdzenia o stycznych do krzywych drugiego stopnia przechodzących przez ogniska.

Uważajmy dowolny punkt P o spółrzędnych a, b i wyprowadźmy równanie stycznych do krzywej (63) drugiego stopnia przechodzących przez ten punkt.

Uwazajmy w tym celu prostą l przechodzącą przez punkt P daną równaniami parametrycznemi

$$x = a + \lambda d, \qquad y = b + \mu d \tag{95}$$

i wyraźmy, że ta prosta ma jeden jedyny punkt wspólny z krzywą drugiego stopnia (63). A więc równanie drugiego stopnia na d, które otrzymamy wstawiając w równanie (63) wyrażenia (95) na x, y ma wówczas pierwiastek podwójny. Jestto równanie

$$\begin{aligned} A(a+\lambda d)^2 + 2B(a+\lambda d)(b+\mu d) + C(b+\mu d)^2 + \\ + 2D(a+\lambda d) + 2E(b+\mu d) + F = 0, \end{aligned} \tag{96}$$

więc równanie

$$\varphi(\lambda, \mu) d^2 + 2d(\alpha\lambda + \beta\mu) + f(a, b) = 0, \tag{97}$$

gdzie mamy

$$\alpha = Aa + Bb + D, \qquad \beta = Ba + Cb + E.$$

Wyróżnik równania (97) przyrównany do zera daje równanie

$$\varphi(\lambda, \mu) f(a, b) - (\alpha\lambda + \beta\mu)^2 = 0. \tag{98}$$

Jest to równanie jednorodne drugiego stopnia względem λ, μ. Spółrzędne x, y dowolnego punktu M stycznej t poprowadzonej z punktu P do krzywej (63) muszą więc spełniać równanie, które otrzymamy, wstawiając w równanie (98) zamiast λ, μ wyrażenia $x - a$ i $y - b$. Jest to równanie

$$\varphi(x-a, y-b) f(a, b) - [\alpha(x-a) + \beta(y-b)]^2 = 0. \tag{99}$$

Naodwrót, jeżeli spółrzędne x, y punktu M spełniają równanie (99), natenczas spółczynniki kierunkowe λ, μ prostej l przechodzącej przez punkty P i M spełniają równanie (98), a więc prosta ta ma jeden jedyny punkt wspólny z krzywą drugiego stopnia (63), tj. jest styczną do krzywej. A więc równanie (99) jest równaniem (drugiego stopnia) stycznych poprowadzonych z punktu P do krzywej drugiego stopnia (63).

Równanie (99) możemy napisać w innej postaci. Mamy

$$f(x, y) = f(x - a + a,\ y - b + b) = f(a, b) + 2\alpha(x - a) + \\ + 2\beta(y - b) + \varphi(x - a,\ y - b),$$

więc

$$\varphi(x - a,\ y - b) = f(x, y) - f(a, b) - 2[\alpha(x - a) + \beta(y - b)],$$

dalej

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) = \alpha x + \beta y + \gamma - f(a, b),$$

gdzie

$$\gamma = Da + Eb + F.$$

A więc równanie (99) możemy napisać w postaci

$$f(x, y) f(a, b) - f^2(a, b) - 2[\alpha(x - a) + \beta(y - b)] f(a, b) - \\ - [\alpha(x - a) + \beta(y - b)]^2 = 0,$$

a więc w postaci

$$f(x, y) f(a, b) - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0. \qquad (100)$$

Z postaci równania (100) bezpośrednio widać, że krzywa przedstawiona tem równaniem przechodzi przez punkt $P(a, b)$. Dalej przechodzi ona przez punkty styczności stycznych t z punktu P do krzywej poprowadzonych, albowiem punkty styczności leżą na przecięciu krzywej danej (63) z biegunową

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \qquad (101)$$

punktu P.

Równanie (100) możemy jeszcze napisać w innej postaci, wprowadzając wielkości

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= Ax + By + D, \\ \bar{\beta} &= Bx + Cy + E, \\ \bar{\gamma} &= Dx + Ey + F. \end{aligned} \qquad (102)$$

$$f(x, y) \equiv \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y + \bar{\gamma},$$
$$f(a, b) \equiv \alpha a + \beta b + \gamma,$$
$$\bar{\alpha} a + \bar{\beta} b + \bar{\gamma} \equiv \alpha x + \beta y + \gamma,$$

więc równanie stycznych (100) można napisać w postaci wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y + \bar{\gamma}, & \bar{\alpha} a + \bar{\beta} b + \bar{\gamma} \\ \alpha x + \beta y + \gamma, & \alpha a + \beta b + \gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{103}$$

Uważajmy teraz równanie krzywej drugiego stopnia w postaci (71) i napiszmy równanie stycznych poprowadzonych z ogniska $F(a, b)$. Zakładając układ spółrzędnych prostokątny mamy:

$$A = 1 - l^2, \quad B = -lm, \quad C = 1 - m^2,$$
$$D = -a - ln, \quad E = -b - mn, \quad F = a^2 + b^2 - n^2,$$

a więc

$$\alpha = (1 - l^2)a - lmb - a - ln = -l(la + mb + n),$$
$$\beta = -lma + (1 - m^2)b - b - mn = -m(la + mb + n),$$
$$\gamma = -(a + ln)a - (b + mn)b + a^2 + b^2 - n^2 = -n(la + mb + n).$$

A więc mamy tożsamość

$$\alpha x + \beta y + \gamma \equiv -(la + mb + n)(lx + my + n). \tag{104}$$

Jeżeli więc wyrażenie

$$la + mb + n \tag{105}$$

nie równa się zeru, tj. ognisko nie leży na kierownicy do niego należącej, natenczas biegunową ogniska jest kierownica do niego należąca. Jeżeli ognisko leży na kierownicy, natenczas biegunowa ogniska jest nieokreślona. Z równania (71) wynika, że wówczas ognisko leży na krzywej drugiego stopnia.

Uważajmy równanie (100) stycznych z ogniska do krzywej poprowadzonych. Mamy

$$f(a, b) = \alpha a + \beta b + \gamma = -(la + mb + n)^2, \tag{106}$$

więc

$$\begin{aligned} & f(x, y) f(a, b) - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \equiv \\ & \equiv -(la + mb + n)^2 [f(x, y) + (lx + my + n)^2] \equiv \\ & \equiv -(la + mb + n)^2 [(x - a)^2 + (y - b)^2]. \end{aligned} \tag{107}$$

Równanie stycznych jest więc identycznie równe zeru, jeżeli ognisko położone jest na kierownicy, tj. jeżeli wyrażenie (105) równa się zeru. W przeciwnym razie równanie stycznych jest

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0, \tag{108}$$

tj. przedstawia dwie proste minimalne przechodzące przez ognisko.

Przypuśćmy teraz naodwrót, że punkt $P(a, b)$ posiada tę własność, że styczne z tego punktu poprowadzone do krzywej drugiego stopnia są prostymi minimalnymi. Wówczas mamy tożsamość

$$f(x, y)\, f(a, b)-(\alpha x+\beta y+\gamma)^2 \equiv k[(x-a)^2+(y-b)], \tag{109}$$

gdzie k jest pewna stała od zera odmienna. Jeżeli P nie leży na krzywej, mamy

$$f(x, y) \equiv \frac{1}{f(a, b)}\{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+k[(x-a)^2+(y-b)^2]\}.$$

A więc równanie krzywej drugiego stopnia ma postać

$$(x-a)^2+(y-b)^2+\frac{1}{k}(\alpha x+\beta y+\gamma)^2=0, \tag{110}$$

tj. P jest ogniskiem krzywej drugiego stopnia, a biegunowa

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

należącą do tego ogniska kierownicą.

13. Ogniska i kierownice dwóch prostych.

Uważajmy równanie dwóch prostych pisząc je w kształcie

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0, \tag{111}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym. Mamy równania

$$\begin{gathered}\rho A=1-l^2, \qquad \rho B=-lm, \qquad \rho C=1-m^2, \\ a+ln=0. \qquad b+mn=0, \\ a^2+b^2-n^2=0.\end{gathered} \tag{112}$$

A więc

$$(l^2+m^2-1)n^2=0.$$

Mamy więc albo

$$\begin{gathered}n=0, \\ a=0, \qquad b=0,\end{gathered}$$

albo

$$l^2 + m^2 - 1 = 0.$$

W obu razach mamy

$$la + mb + n = -n(l^2 + m^2 - 1) = 0, \tag{113}$$

a więc ognisko leży na kierownicy. W pierwszym przypadku ognisko leży w początku układu. W drugim przypadku n jest odległość ogniska F od początku układu O. Mamy

$$\rho^2 AC = (1 - l^2)(1 - m^2) = 1 + \rho^2 B^2 - l^2 - m^2,$$

a więc w drugim przypadku mamy

$$\delta = 0,$$

tj. równanie (111) jest równaniem prostej podwójnej. A więc jeżeli $\delta \neq 0$, zachodzi pierwszy przypadek.

Uważajmy przypadek $\delta \neq 0$ i załóżmy dla prostoty $B = 0$, tj. obierzmy dwusieczne prostych danych jako nowy układ osi spółrzędnych. Mamy

$$lm = 0,$$

a więc $l = 0$, lub $m = 0$.

I. $l = 0$.

$$\rho A = 1, \qquad \rho C = 1 - m^2,$$

$$\rho = \frac{1}{A}, \qquad m^2 = \frac{A - C}{A}.$$

Kierownicą jest oś x

$$y = 0, \tag{114}$$

jeżeli $A \neq C$, tj. jeżeli dane proste nie są minimalne, w którym to przypadku kierownica jest nieoznaczona.

II. $m = 0$.

$$\rho C = 1, \qquad \rho A = 1 - l^2,$$

$$\rho = \frac{1}{C}, \qquad l^2 = \frac{C - A}{C},$$

kierownicą jest oś y

$$x = 0, \tag{115}$$

jeżeli $A \neq C$.

A więc mamy 2 kierownice, którymi są dwusieczne prostych danych.

Uważajmy teraz przypadek $\delta = 0$, tj. prostej podwójnej. Możemy założyć

$$B = C = 0.$$

Więc mamy

$$\rho A = 1 - l^2, \qquad lm = 0, \qquad 1 - m^2 = 0,$$

więc

$$m = \varepsilon,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$,

$$l = 0,$$

$$\rho = \frac{1}{A},$$

$$a = 0, \qquad b = -\varepsilon n.$$

A więc ogniskiem jest każdy punkt na prostej podwójnej o spółrzędnych

$$a = 0, \qquad b = -\varepsilon n. \tag{116}$$

zaś kierownicą odpowiednią prosta

$$\varepsilon y + n = 0,$$

a więc prosta

$$y + \varepsilon n = 0,$$

przechodząca przez ognisko i prostopadła do prostej podwójnej danej.

Ćwiczenia.

1. Iloczyn odległości ognisk F_1, F_2 elipsy od stycznej elipsy równa się kwadratowi małej osi elipsy.

Iloczyn odległości ognisk F_1, F_2 hiperboli od stycznej hiperboli równa się ujemnemu kwadratowi osi urojonej hiperboli.

2. Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od koła o środku S i od punktu C położonego wewnątrz koła jest elipsa, której środek O połowi odcinek SC, i której ogniska są S i C.

Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od koła o środku S i od punktu C położonego zewnątrz koła jest gałąź hiperboli, której środek O połowi odcinek SC, i której ogniskami są S i C, gdzie C należy do tej gałęzi hiperboli.

3. Iloczyn miar odcinków zawartych pomiędzy punktem M styczności stycznej elipsy a spodkami N_1, N_2 prostopadłych z ognisk elipsy na styczną równa się

$$\frac{\eta^2 c^2}{b^2},$$

gdzie η jest rzędną punktu M.

Temu samemu wyrażeniu równa się iloczyn miar odcinków MN_1, MN_2 dla hiperboli. Wektory MN_1, MN_2 są znaków przeciwnych dla elipsy, a tych samych znaków dla hiperboli.

4. Odcinek MP na stycznej t elipsy pomiędzy punktem M styczności a punktem P przecięcia stycznej t z kierownicą k widziany jest z ogniska F należącego do kierownicy k pod kątem prostym.

To samo zachodzi dla hiperboli i paraboli.

5. Uważajmy elipsę, dowolny punkt P i punkty M', M'' styczności stycznych z P do elipsy poprowadzonych. Promienie wodzące FM' i FM'' zawierają równe kąty z osią FP.

To samo zachodzi dla hiperboli i dla paraboli.

6. Znaleźć dla elipsy, hiperboli i paraboli miejsca geometryczne punktów P, których biegunowe przechodzą przez ogniska

7. Z ogniska F elipsy kreślę prostopadłą do osi x, przecinającą elipsę w punkcie M. Okazać, że jeżeli z dowolnego punktu P elipsy wykreślimy prostopadłą do osi x, przecinającą tę oś w punkcie R, a styczną t elipsy, wystawioną w punkcie M, w punkcie T, natenczas mamy

$$\overline{RT} = \overline{FP}.$$

To samo zachodzi dla hiperboli, jeżeli punkty M i P leżą na tej samej gałęzi i dla paraboli.

ROZDZIAŁ XX.

Własności ognisk krzywych drugiego stopnia.

1. Twierdzenie o kątach między styczną, a promieniami wodzącemi dla elipsy.

Uważajmy elipsę o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym. Oznaczmy przez t styczną w punkcie M o spółrzędnych ξ, η a przez r_1, r_2 proste F_1M, F_2M, gdzie F_1, F_2 są prawe i lewe ognisko. Niechaj dodatni kierunek stycznej t zawiera kąt φ z osią x, a kierunek ujemny kąt $\varphi' = \varphi + \varepsilon\pi$, $\varepsilon = \pm 1$, przyczem kąty te zawarte są między 0 a 2π.

Uważajmy dalej kierunki dodatnie na prostych r_1, r_2 od punktu M do punktów F_1, F_2 i niechaj ω_1, ω_2 będą kąty tych osi z osią x, przyczem są to kąty nieujemne zawarte między 0 a 2π. Osie mające kierunki przeciwne, tj. od ognisk do punktu M nazywamy *promieniami wodzącemi* punktu M należącemi odpowiednio do ognisk F_1 i F_2.

Oznaczmy przez α_1, α_2 kąty

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \omega_1 - \varphi,\\ \alpha_2 &= \varphi' - \omega_2.\end{aligned} \tag{2}$$

Twierdzimy, że mamy równość

$$\alpha_1 = \alpha_2 + k\pi, \tag{3}$$

gdzie k jest liczba całkowita. Widoczna, że jeżeli ta równość zachodzi dla pewnego obioru dodatniego kierunku na stycznej t, natenczas zachodzi też i dla przeciwnego obioru kierunku dodatniego.

Oznaczmy przez N spodek prostopadłej z punktu M na oś x wykreślonej, a przez r_1 i r_2 miary odcinków $\overline{F_1M}$ i $\overline{F_2M}$, promieni wodzących punktu M. Mamy

$$\begin{aligned} \cos\omega_1 &= \frac{\overline{NF_1}}{r_1}, \qquad \sin\omega_1 = \frac{\overline{MN}}{r_1}, \\ \cos\omega_2 &= \frac{\overline{NF_2}}{r_2}, \qquad \sin\omega_2 = \frac{\overline{MN}}{r_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

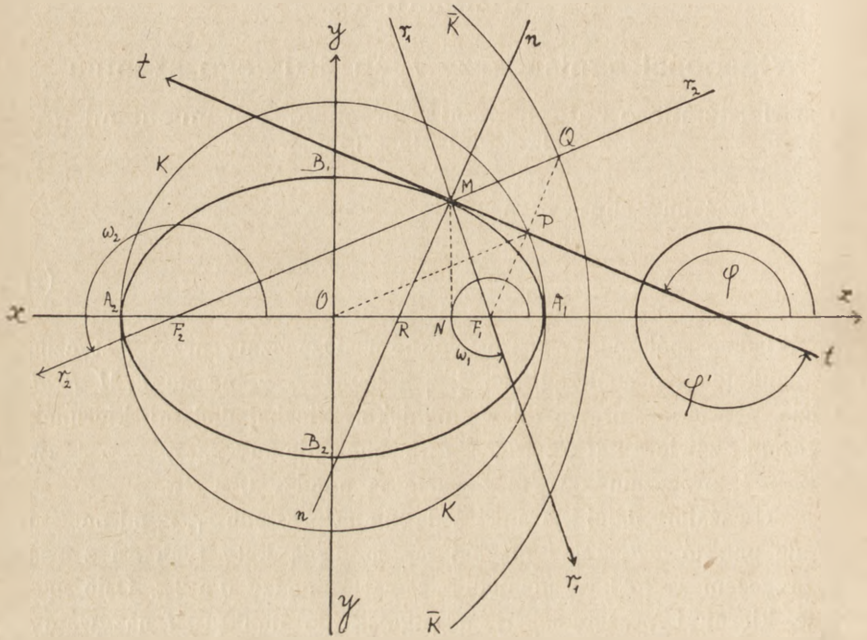

Fig. 25.

Mamy więc

$$\begin{aligned} \overline{NF_1} &= c - \xi, \\ \overline{NF_2} &= -c - \xi, \\ \overline{MN} &= -\eta, \end{aligned} \tag{5}$$

a więc

$$\begin{aligned} \cos\omega_1 &= \frac{c-\xi}{r_1}, \qquad \sin\omega_1 = -\frac{\eta}{r_1}, \\ \cos\omega_2 &= -\frac{c+\xi}{r_2}, \qquad \sin\omega_2 = -\frac{\eta}{r_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Z równania stycznej t wynika, że mamy

$$\cos\varphi = \rho a^2\eta, \qquad \sin\varphi = -\rho b^2\xi,$$

gdzie $\rho \neq 0$ jest pewnym czynnikiem proporcjonalności. Mamy więc

$$\cos\varphi' = -\rho a^2\eta, \qquad \sin\varphi' = \rho b^2\xi.$$

Mamy

$$\cos\alpha_1 = \cos\varphi\cos\omega_1 + \sin\varphi\sin\omega_1 =$$

$$= \rho a^2\eta\frac{c-\xi}{r_1} + \rho b^2\xi\frac{\eta}{r_1} = \frac{\rho}{r_1}c^2\eta\left(\frac{a^2}{c}-\xi\right),$$

$$\sin\alpha_1 = \sin\varphi\cos\omega_1 - \cos\varphi\sin\omega_1 =$$

$$= -\rho b^2\xi\frac{c-\xi}{r_1} + \rho a^2\eta\frac{\eta}{r_1} = \frac{\rho b^2 c}{r_1}\left(\frac{a^2}{c}-\xi\right).$$

Aby otrzymać wyrażenia na $\cos\alpha_2$, $\sin\alpha_2$, należy w wyrażeniach na $\cos\alpha_1$, $-\sin\alpha_1$ wstawić zamiast ρ $-\rho$, zamiast c $-c$ i zamiast r_1 r_2. Otrzymamy

$$\cos\alpha_2 = -\frac{\rho}{r_2}c^2\eta\left(-\frac{a^2}{c}-\xi\right),$$

$$\sin\alpha_2 = -\frac{\rho b^2 c}{r_2}\left(-\frac{a^2}{c}-\xi\right).$$

Ale pomiędzy promieniami wodzącymi r_1, r_2 a spółrzędną ξ punktu M mamy związki

$$r_1 = e\left(\frac{a^2}{c}-\xi\right),$$
$$r_2 = e\left(\frac{a^2}{c}+\xi\right), \tag{8}$$

a więc otrzymujemy wyrażenia

$$\cos\alpha_1 = \frac{\rho c^2\eta}{e}, \qquad \sin\alpha_1 = \frac{\rho b^2 c}{e},$$
$$\cos\alpha_2 = \frac{\rho c^2\eta}{e}, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{\rho b^2 c}{e}, \tag{9}$$

czyli równość (8) jest udowodniona.

Ze wzorów (9) otrzymujemy dalszy wzór

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{b^2}{c\eta}, \tag{10}$$

czyli iloczyn $\eta\operatorname{tg}\alpha_1$ jest liczbą stałą niezależną od punktu M.

Możemy to twierdzenie udowodnić także w sposób następujący. Uważajmy *normalną* n do elipsy w punkcie M, tj. prostopadłą do stycznej t o równaniu

$$(y-\eta)b^2\xi-(x-\xi)a^2\eta=0.$$

Przecina ona oś x w punkcie R o spółrzędnej

$$x_0=\frac{\xi c^2}{a^2}.$$

A więc mamy

$$\overline{F_1R}=c-\frac{\xi c^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c}-\xi\right)=r_1\frac{c}{a},$$

$$\overline{RF_2}=\frac{\xi c^2}{a^2}+c=\frac{c^2}{a^2}\left(\xi+\frac{a^2}{c}\right)=r_2\frac{c}{a}.$$

Zatem mamy proporcję

$$\overline{F_1R}:\overline{RF_2}=r_1:r_2,$$

a stąd wynika równość kątów α_1 i α_2.

2. Twierdzenie o kątach między styczną a promieniami wodzącymi hiperboli.

Uważajmy hiperbolę o równaniu w układzie prostokątnym

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{11}$$

Uważajmy styczną t w punkcie $M(\xi, \eta)$ o równaniu

$$\frac{x\xi}{a^2}-\frac{y\eta}{b^2}-1=0 \tag{12}$$

i obierzmy na niej dodatni kierunek, zawierający kąt nieujemny φ z osią x. Niechaj $\varphi'=\varphi+\varepsilon\pi$, $\varepsilon=\pm 1$ będzie kąt nieujemny kierunku przeciwnego stycznej z osią x a ω_1, ω_2 kąty kierunków dodatnich na prostych r_1, r_2 łączących punkt M z ogniskami F_1, F_2, przyczem dodatnie kierunki idą od M ku ogniskom. F_1 jest prawe, a F_2 lewe ognisko.

Osie mające kierunki od ognisk do punktu M nazywamy *promieniami wodzącymi* punktu M należącymi odpowiednio do ognisk F_1 i F_2.

Mamy wzory:

$$\cos\omega_1=\frac{c-\xi}{r_1}, \qquad \sin\omega_1=-\frac{\eta}{r_1},$$

$$\cos\omega_2=-\frac{c+\xi}{r_2}, \qquad \sin\omega_2=-\frac{\eta}{r_2}$$

i

$$\cos\varphi = \rho a^2 \eta, \qquad \sin\varphi = \rho b^2 \xi,$$

gdzie ρ jest pewien czynnik proporcjonalności. Mamy

$$\begin{aligned} \cos(\omega_1 - \varphi) &= \frac{c - \xi}{r_1}\rho a^2 \eta - \frac{\eta}{r_1}\rho b^2 \xi = \frac{\rho c \eta}{r_1}(a^2 - c\xi), \\ \sin(\omega_1 - \varphi) &= -\frac{\rho a^2 \eta^2}{r_1} - \frac{\rho b^2 \xi}{r_1}(c - \xi) = \frac{\rho b^2}{r_1}(a^2 - c\xi). \end{aligned} \tag{13}$$

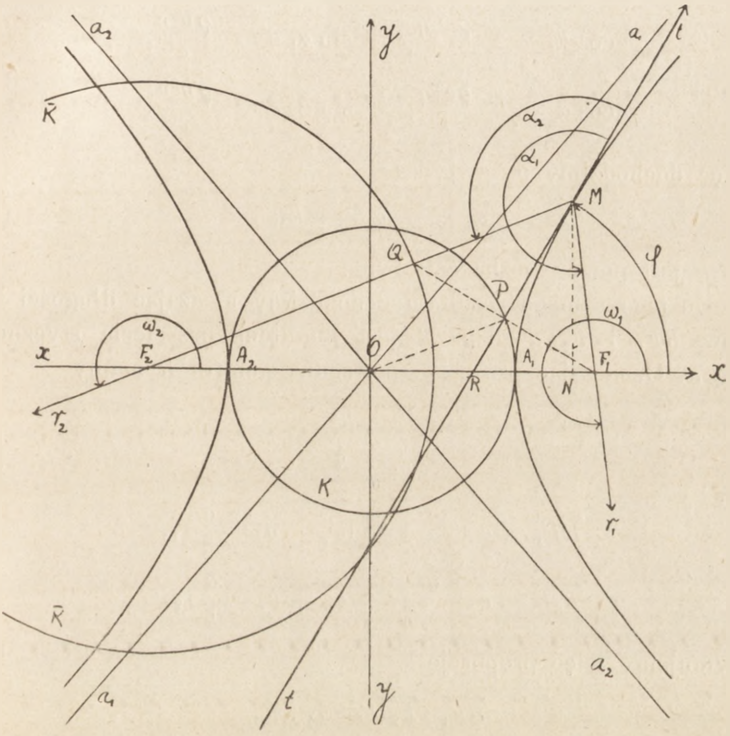

Fig. 26.

Tak samo mamy

$$\begin{aligned} \cos(\omega_2 - \varphi) &= -\frac{\rho c \eta}{r_2}(a^2 + c\xi), \\ \sin(\omega_2 - \varphi) &= \frac{\rho b^2}{r_2}(a^2 + c\xi). \end{aligned} \tag{14}$$

Pomiędzy promieniami wodzącymi r_1, r_2 a odciętą ξ punktu M, mamy związki

$$\begin{aligned} r_1 &= e\left(\xi - \frac{a^2}{c}\right), \\ r_2 &= e\left(\xi + \frac{a^2}{c}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

a więc mamy oznaczając przez α_1, α_2 kąty

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_1 - \varphi, \\ \alpha_2 &= \omega_2 - \varphi, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\cos \alpha_1 = -\frac{\rho c^2 \eta}{e}, \qquad \sin \alpha_1 = -\frac{\rho b^2 c}{e},$$
$$\cos \alpha_2 = -\frac{\rho c^2 \eta}{e}, \qquad \sin \alpha_2 = \frac{\rho b^2 c}{e}.$$

A więc dochodzimy do związku

$$\alpha_1 = -\alpha_2 + 2k\pi, \tag{17}$$

gdzie k jest pewna liczba całkowita.

Do tego samego rezultatu dochodzimy uważając długości wektorów RF_1 i F_2R, gdzie R jest punktem przecięcia stycznej t z osią x. Oznaczając przez x_0 spółrzędną punktu R mamy

$$x_0 = \frac{a^2}{\xi},$$

a więc

$$\overline{RF_1} = c - \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi}(e\xi - a) = \frac{a}{\xi} r_1,$$
$$\overline{F_2R} = c + \frac{a^2}{\xi} = \frac{a}{\xi}(e\xi + a) = \frac{a}{\xi} r_2.$$

Otrzymujemy więc proporcję

$$\overline{RF_1} : \overline{F_2R} = r_1 : r_2,$$

która dowodzi twierdzenia.

3. Miejsce geometryczne spodków prostopadłych z ognisk elipsy na styczne spuszczonych.

Niechaj P oznacza spodek prostopadłej spuszczonej z ogniska F_1 na styczną t. Równanie prostopadłej F_1P jest

$$y - \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi}(x - c) = 0, \tag{18}$$

a więc

$$\frac{x\eta}{b^2}-\frac{y\xi}{a^2}=-\frac{c\eta}{b^2}. \tag{19}$$

Podnosząc obie strony równań (7), (19) do kwadratu i dodając je do siebie otrzymamy

$$\frac{x^2\xi^2}{a^4}+\frac{y^2\eta^2}{b^4}+\frac{x^2\eta^2}{b^4}+\frac{y^2\xi^2}{a^4}=1+\frac{c^2\eta^2}{b^4},$$

a więc

$$(x^2+y^2)\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}\right)=1+\frac{c^2\eta^2}{b^4}.$$

Ale mamy

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2=a^2b^2,$$

$$\frac{\xi^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}-\frac{\eta^2}{a^2b^2},$$

$$\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^4}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\left(1+\frac{c^2\eta^2}{b^4}\right)\frac{1}{a^2},$$

a więc

$$x^2+y^2=a^2. \tag{20}$$

Zatem miejscem geometrycznem spodków prostopadłych do stycznych z ogniska F_1 poprowadzonych jest *koło* K o środku w początku układu, a o promieniu równym połowie wielkiej osi a.

Oczywiście to samo koło jest miejscem geometrycznem spodków prostopadłych spuszczonych z *lewego* ogniska. Koło to nazywamy *kołem głównem* (cercle principal) elipsy.

4. Miejsce geometryczne spodków prostopadłych z ognisk hiperboli na styczne spuszczonych.

Równanie prostopadłej F_1P jest teraz

$$y+\frac{a^2\eta}{b^2\xi}(x-c)=0, \tag{21}$$

a więc

$$\frac{x\eta}{b^2}+\frac{y\xi}{a^2}=\frac{c\eta}{b^2}. \tag{22}$$

Podnosząc obie strony równań (7) i (22) do kwadratu i dodając je do siebie otrzymujemy znów równanie

$$(x^2+y^2)\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}\right)=1+\frac{c^2\eta^2}{b^4},$$

ale

$$\frac{\xi^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{\eta^2}{b^4}\right),$$

$$\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}=\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{c^2\eta^2}{b^4}\right),$$

więc znów

$$x^2+y^2=a^2 \tag{23}$$

czyli miejscem spodków jest znów koło K o środku O i promieniu a, które jest również miejscem spodków prostopadłych z ogniska F_2 poprowadzonych. Koło to nazywa się *kołem głównem* (cercle principal) hiperboli.

5. Miejsce geometryczne punktów symetrycznych ognisk elipsy względem stycznych do elipsy.

Uważamy punkt symetryczny Q punktu F_1 względem stycznej t. Mamy

$$\overline{F_1P}=\overline{PQ},$$

a więc trójkąty

$$\triangle\, OF_1P \quad \text{i} \quad \triangle\, F_2QF_1$$

są do siebie podobne. W istocie, mamy

$$\overline{F_2F_1}=2\overline{OF_1},$$
$$\overline{F_1Q}=2\overline{F_1P},$$

a kąt przy F_1 jest wspólny. A więc mamy

$$\overline{F_2Q}=2\overline{OP}=2a.$$

Zatem miejscem geometrycznem punktów Q jest koło K_2 o środku F_2 i o promieniu $2a$. Oczywiście tak samo miejscem geometrycznem spodków prostopadłych spuszczonych z ogniska F_1 na styczne jest koło K_1 o środku F_1 i również o promieniu $2a$. Koła te nazywają się *kołami kierowniczymi* (cercles directeurs) elipsy.

Prosta F_2Q przechodzi przez punkt M elipsy, albowiem mamy

$$\overline{F_2M}=\overline{MQ}=2a.$$

6. Miejsce geometryczne punktów symetrycznych ognisk hiperboli względem stycznych do hiperboli.

Dochodzimy zupełnie w taki sam sposób jak poprzednio do dwóch kół o promieniach $2a$ i o środkach F_2, F_1 odpowiadających prostopadłym z ognisk F_1 i F_2 na styczne do hiperboli poprowadzonym. Koła te nazywają się *kołami kierowniczymi* (cercles directeurs) hiperboli.

Prosta F_2Q przechodzi przez punkt M hiperboli, albowiem mamy

$$\overline{F_2Q} + \overline{QM} = F_2M,$$

albowiem

$$\overline{F_2Q} = 2a.$$

7. Twierdzenie Poncelet'a dla elipsy.

Uważajmy dowolny punkt $M(\xi, \eta)$ na płaszczyźnie *zewnątrz* elipsy i poprowadźmy przez ten punkt styczne t_1 i t_2 do elipsy z dodatnimi kierunkami do punktów styczności. Poprowadźmy dalej osie MF_1 i MF_2 mające kierunki od punktu M do punktów F_1 i F_2 i oznaczmy je przez r_1 i r_2. Uważajmy bezwzględne kąty $< \pi$

$$\alpha_1 = \sphericalangle (r_1 t_1)$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle (r_2 t_2).$$

Twierdzenie Poncelet'a orzeka, że kąty te są sobie równe

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{24}$$

Uważajmy prostopadłe spuszczone z ognisk F_1, F_2 na styczne t_1, t_2. Jeżeli punkt M leży *zewnątrz* koła głównego K, natenczas spodki prostopadłych na styczną t_1 leżą z tej samej strony punktu M, a mianowicie z tej strony, z której znajduje się punkt styczności. Tak samo się rzeczy mają dla stycznej t_2. Jeżeli zaś punkt M znajduje się *wewnątrz* koła K, natenczas spodki prostopadłych na styczną t_1 znajdują się z przeciwnych stron punktu M i tak samo dla stycznej t_2. Oznaczmy w tym przypadku przez t_1 tę styczną, której dodatni kierunek zawiera z osią r_1 kąt $< \frac{\pi}{2}$ i przez t_2 tę styczną, której dodatni kierunek zawiera z osią r_2 kąt $< \frac{\pi}{2}$. Styczne te są różne od siebie, bo z dwóch kątów jakie osi r_1 i r_2 zawierają z jedną i tą samą styczną, jeden jest ostry a drugi rozwarty. W pierwszym przypadku oznaczmy styczne dowolnie.

Niechaj N_1, N_2 będą spodki prostopadłych spuszczonych z ognisk F_1, F_2 na styczne t_1, t_2, a P_1, P_2 niechaj będą punkty symetralne ognisk F_1, F_2 względem stycznych t_1, t_2. Kąty α_1 i α_2 są $< \frac{\pi}{2}$. Uważając kąty $< \pi$

$$\sphericalangle F_1MP_1 \quad \text{i} \quad \sphericalangle F_2MP_2$$

mamy

$$\sphericalangle F_1MP_1 = 2\alpha_1,$$
$$\sphericalangle F_2MP_2 = 2\alpha_2.$$

Uważajmy dwa trójkąty

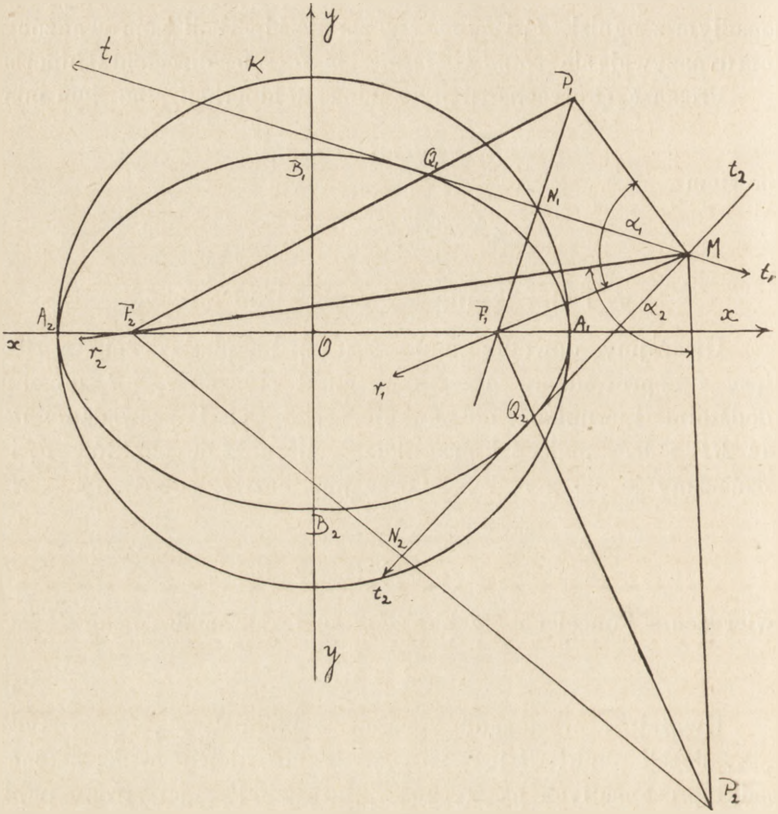

Fig. 27.

$$\triangle F_1MP_2 \quad \text{i} \quad \triangle F_2MP_1.$$

Przystają one do siebie, bo mamy równości

$$\overline{F_1M} = \overline{P_1M}, \qquad \overline{F_2M} = \overline{P_2M}, \qquad \overline{F_1P_2} = \overline{F_2P_1} = 2a.$$

A więc mamy

$$\sphericalangle F_1MP_2 = \sphericalangle F_2MP_1,$$

rozumiejąc przez te kąty kąty bezwzględne $< \pi$.

Dodając albo odejmując obustronnie kąt $\sphericalangle F_1MF_2$ otrzymamy równość

$$\sphericalangle F_1MP_1 = \sphericalangle F_2MP_2.$$

Dochodzimy zatem do równości (24).

8. Twierdzenie Poncelet'a dla hiperboli.

Uważajmy punkt $M(\xi, \eta)$ na płaszczyźnie leżący zewnątrz hiperboli. Odróżnimy *dwa przypadki*, zależnie od tego, czy punkt M leży po tej stronie asymptot, po której leży oś x, czy też po tej stronie asymptot, po której leży oś y.

W pierwszym przypadku styczne t_1, t_2 hiperboli przechodzące przez punkt M mają punkty styczności położone na jednej i tej samej gałęzi hiperboli. W drugim przypadku punkty styczności leżą na gałęziach różnych.

Założmy nasamprzód, że zachodzi *pierwszy przypadek*. Jeżeli punkt M leży wewnątrz koła K głównego, natenczas spodki prostopadłych z ognisk na jednę ze stycznych poprowadzonych leżą z przeciwnych stron punktu M. Jeżeli zaś punkt M leży zewnątrz koła K spodki te leżą po jednej stronie punktu M.

Uważajmy na stycznych t_1, t_2 dodatnie kierunki od M do punktów styczności i oznaczmy przez r_1, r_2 osie MF_1, MF_2 mające kierunki od M do ognisk. Jeżeli M leży zewnątrz koła K, natenczas na jednej stycznej spodki prostopadłych z ognisk leżą po tej stronie punktu M, po której leży punkt styczności, a na drugiej stycznej leżą po stronie przeciwnej punktu M. W istocie uważajmy to ognisko, które należy do gałęzi hiperboli, do której mamy styczne, niechaj to będzie np. ognisko F_1. Oba kąty

$$\sphericalangle (t_1, r_2) \quad \text{i} \quad \sphericalangle (t_2, r_2)$$

nie mogą być równocześnie ostre, zaś przynajmniej jeden z kątów

$$\sphericalangle(t_1, r_1) \quad \text{i} \quad \sphericalangle(t_2, r_1)$$

jest ostry, przyczem uważamy kąty $< \pi$. Dowodzi to twierdzenia.

Jeżeli teraz *M* leży wewnątrz koła *K*, natenczas punkty styczności stycznych t_1, t_2 do prawej gałęzi hiperboli leżą z przeciwnych stron osi *x*, a spodki prostopadłych z ogniska F_1 na te styczne poprowadzonych leżą po tych stronach osi *x*, po których leżą punkty styczności. A więc obierając jako dodatnie kierunki na stycznych kierunki od *M* do punktów styczności i nazywając N_1, N_2 spodki prostopadłych z ognisk F_1, F_2 na styczne t_1, t_2 widzimy, że N_1 leży po dodatniej stronie a N_2 po ujemnej stronie punktu *M*.

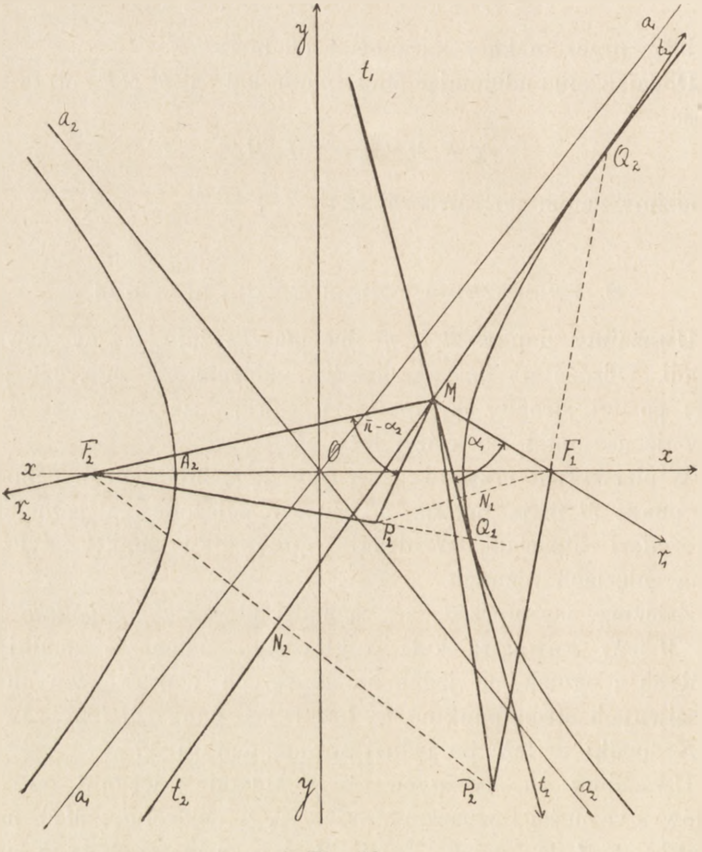

Fig. 28.

Nazwijmy P_1, P_2 punkty symetralne ognisk F_1, F_2 względem t_1, t_2.

Uważajmy teraz trójkąty

$$\triangle F_1MP_2 \quad \text{i} \quad \triangle F_2MP_1.$$

Przystają one do siebie, gdyż mamy równości

$$\overline{F_1M} = \overline{P_1M}, \qquad \overline{F_2M} = \overline{P_2M}, \qquad \overline{F_1P_2} = \overline{F_2P_1} = 2a.$$

A więc mamy

$$\sphericalangle F_1MP_2 = \sphericalangle F_2MP_1$$

a stąd dodając lub odejmując $\sphericalangle F_1MF_2$

$$\sphericalangle F_1MP_1 = \sphericalangle F_2MP_2$$

uważając kąty $< \pi$.

Oznaczając przez α_1 i α_2 kąty

$$\alpha_1 = \sphericalangle (r_1, t_1),$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle (r_2, t_2),$$

mamy teraz

$$2\alpha_1 = \sphericalangle F_1MP_1,$$
$$2(\pi - \alpha_2) = \sphericalangle F_2MP_2,$$

a więc dochodzimy do wzoru

$$\alpha_1 = \pi - \alpha_2, \tag{25}$$

który wyraża twierdzenie Poncelet'a dla hiperboli w pierwszym przypadku.

Uważajmy teraz *drugi przypadek*. Jeżeli punkt M leży zewnątrz koła K, natenczas oba spodki prostopadłych na dowolną styczną leżą z jednej strony punktu M, a mianowicie po dodatniej stronie punktu tego, albowiem spodki prostopadłych z ognisk na styczną leżą z przeciwnych stron osi x. Jeżeli zaś punkt M leży wewnątrz koła K, natenczas spodki prostopadłych leżą z przeciwnych stron tego punktu. W tym przypadku punkty styczności leżą po przeciwnej stronie osi x niż punkt M. W istocie na rzędne y_1, y_2 punktów styczności otrzymamy równanie rugując x z równań

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

więc

$$\left(1+\frac{y\eta}{b^2}\right)^2\frac{a^4}{\xi^2 a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

$$y^2(a^2\eta^2-b^2\xi^2)+2b^2y\eta a^2+a^2(a^2-\xi^2)=0,$$

więc dla

$$\left|\frac{\eta}{\xi}\right|>\frac{b}{a},\qquad a>|\xi|$$

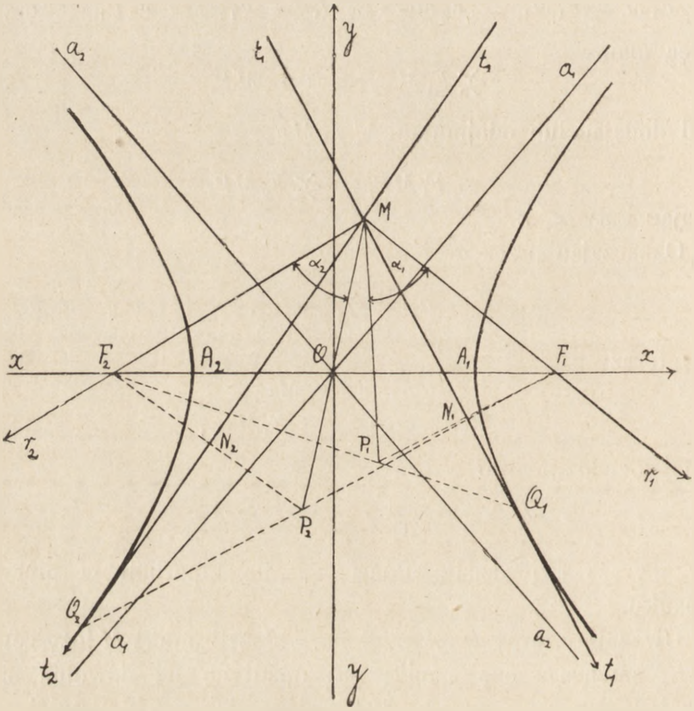

Fig. 29.

otrzymamy

$$y_1y_2>0,\qquad (y_1+y_2)\eta<0.$$

Nazwijmy t_1 styczną do gałęzi prawej, a t_2 styczną do lewej gałęzi hiperboli, natenczas spodki N_1, N_2 prostopadłych odpowiednio z F_1, F_2 na t_1, t_2 spuszczonych, leżą po dodatnich stronach punktu M. Przytem znów jako kierunki dodatnie na t_1, t_2 obieramy kierunki ku punktom styczności.

Dochodzimy więc w drugim przypadku tak samo jak poprzednio do równości

$$\sphericalangle F_1MP_1 = \sphericalangle F_2MP_2,$$

a stąd otrzymujemy równość

$$\alpha_1 = \alpha_2, \tag{26}$$

wyrażającą twierdzenie Poncelet'a dla hiperboli w drugim przypadku.

9. Równanie paraboli odniesionej do stycznej i średnicy z nią sprzężonej jako nowych osi.

Uważamy parabolę o równaniu

$$y^2 - 2px = 0 \tag{27}$$

w układzie spółrzędnych prostokątnym. Równanie stycznej t w punkcie $M(\xi, \eta)$ paraboli jest

$$y\eta - p(x + \xi) = 0 \tag{28}$$

a więc oznaczając przez φ kąt między dodatnim kierunkiem osi x a tym kierunkiem stycznej, który z tą osią zawiera kąt $< \pi$ mamy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{\eta}.$$

Wprowadźmy nowy układ spółrzędnych x', y', którego początkiem jest punkt M, oś x' równoległa i równo skierowana z osią x, a osią y' styczna t, na której mamy poprzednio obrany dodatni kierunek. Mamy wzory na przekształcenie układów spółrzędnych

$$\begin{aligned} x &= \xi + x' + y' \cos \varphi, \\ y &= \eta + y' \sin \varphi. \end{aligned} \tag{29}$$

Wstawiając w równanie (27) paraboli otrzymamy

$$(\eta + y' \sin \varphi)^2 - 2p(\xi + x' + y' \cos \varphi) = 0,$$

a ponieważ mamy

$$\eta^2 - 2p\xi = 0,$$

więc otrzymujemy

$$2\eta y' \sin \varphi + y'^2 \sin^2\varphi - 2px' - 2py' \cos\varphi = 0,$$

a więc

$$y'^2 - \frac{2p}{\sin^2 \varphi} x' = 0 \tag{30}$$

jako równanie w nowym układzie spółrzędnych. Mamy dalej

$$\sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{\frac{p^2}{\eta^2}}{1+\frac{p^2}{\eta^2}} = \frac{p^2}{p^2+\eta^2},$$

a więc

$$\frac{p}{\sin^2\varphi} = \frac{p^2+\eta^2}{p} = p+2\xi.$$

Zatem równanie paraboli napisze się w postaci

$$y'^2 - 2(p+2\xi)x' = 0. \tag{31}$$

10. Twierdzenie o kącie między styczną a promieniem wodzącym paraboli.

Uważajmy kąt α jaki kierunek ujemny stycznej zawiera z kierunkiem prostej MF od punktu M do ogniska F oznaczając tę oś, która jest przeciwnie skierowaną niż promień wodzący punktu M przez r. Oznaczmy dalej przez β kąt $\sphericalangle xFM$, jaki promień wodzący FM zawiera z osią x. Mamy

$$\beta = \alpha + \varphi.$$

Oznaczając przez r bezwzględną wartość odcinka MF mamy

$$\cos\beta = \frac{\xi - \frac{p}{2}}{r},$$

$$\sin\beta = \frac{\eta}{r},$$

a ponieważ mamy

$$r = \xi + \frac{p}{2},$$

więc mamy

$$\cos\beta = \frac{\xi - \frac{p}{2}}{\xi + \frac{p}{2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\eta}{\xi + \frac{p}{2}}.$$

Mamy dalej

$$\cos\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{p^2+\eta^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2+\eta^2}}.$$

Zatem mamy

$$\cos\alpha = \cos(\beta-\varphi) = \left[\left(\xi - \frac{p}{2}\right)\eta + p\eta\right]\cdot\frac{1}{r\sqrt{p^2+\eta^2}},$$

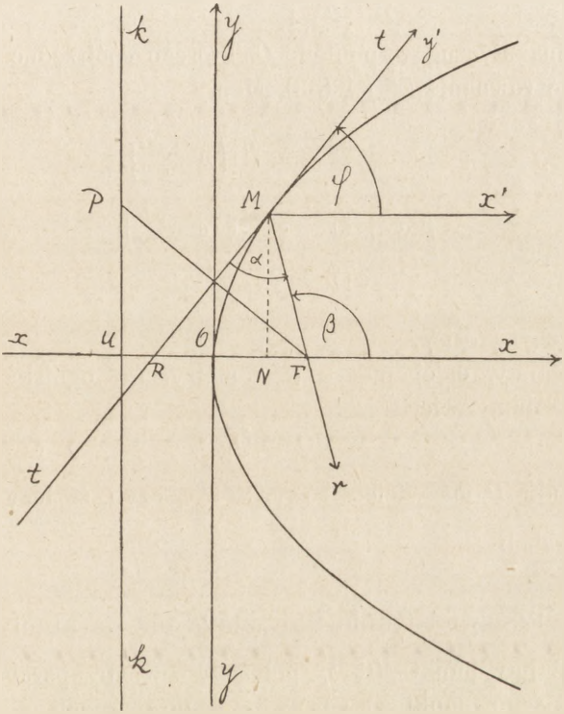

Fig. 30.

$$\sin\alpha = \sin(\beta-\varphi) = \left[\eta^2 - \left(\xi - \frac{p}{2}\right)p\right]\frac{1}{r\sqrt{p^2+\eta^2}}.$$

Zatem

$$\cos\alpha = \eta\left(\xi + \frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{r\sqrt{p^2+\eta^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{p^2+\eta^2}} = \cos\varphi,$$

$$\sin\alpha = \left[p\xi + \frac{p^2}{2}\right]\cdot\frac{1}{r\sqrt{p^2+\eta^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+\eta^2}} = \sin\varphi.$$

A więc mamy

$$\alpha = \varphi. \tag{32}$$

11. Miejsce spodków prostopadłych z ogniska na styczne paraboli spuszczonych.

Uważamy prostopadłą z ogniska F na styczną spuszczoną o równaniu

$$y + \frac{\eta}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0. \tag{33}$$

Przecina ona styczną w punkcie Q, którego spółrzędne otrzymamy rozwiązując równania (28) i (33). Mamy

$$p(x+\xi) = -\frac{\eta^2}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$
$$p(x+\xi) = -2\xi\left(x - \frac{p}{2}\right),$$
$$x(p+2\xi) = 0,$$
$$x = 0, \tag{34}$$

Q leży więc na osi y.

Uważajmy dalej punkt P symetryczny ogniska względem stycznej t. Mamy więc

$$\overline{PQ} = \overline{QF}$$

a więc punkt P ma odciętą równą $-\frac{p}{2}$, czyli, że leży na kierownicy k paraboli.

12. Twierdzenie Poncelet'a dla paraboli.

Uważajmy punkt $M(\xi, \eta)$ położony zewnątrz paraboli i poprowadźmy z tego punktu styczne t_1, t_2 do paraboli z kierunkami dodatnimi od M do punktów styczności. Uważajmy dalej oś MF o kierunku od M do F, oznaczając ją przez r i oś x' przechodzącą przez M równoległa i równo skierowaną z osią x.

Oznaczmy przez α_1, α_2 bezwzględne kąty

$$\alpha_1 = \sphericalangle(t_1, r),$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle(t_2, x').$$

Twierdzenie Poncelet'a brzmi

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{35}$$

Jeżeli punkt M znajduje się z lewej strony osi y, natenczas spodki N_1, N_2 prostopadłych z ogniska F na styczne t_1, t_2 leżą po dodatnich stronach punktu M, jeżeli zaś M leży z prawej strony osi y, natenczas jeden i tylko jeden spodek leży po dodatniej stronie punktu M.

Oznaczmy przez t_1, t_2 styczne w takim porządku, że oś ruchoma, obracająca się około M od t_1 do t_2 w dodatnim kierunku przechodzi od t_1 do t_2 przez położenie osi r. Oznaczmy przez P_1, P_2 punkty symetryczne ogniska F względem odpowiednio stycznych t_1, t_2. Kierunek P_1P_2 jest kierunkiem dodatniej osi y. Mamy

$$\overline{MP_1} = \overline{MP_2} = \overline{MF} = \rho.$$

Uważajmy koło K o środku M i o promieniu ρ. Niechaj nasamprzód M leży z lewej strony osi y. Uważajmy kąt obwodowy $\sphericalangle P_1P_2F$ w kole K. Kąt ten jest połową kąta $\sphericalangle P_1MF$ wspierającego się na tym samym łuku, który to kąt jest wklęsły i równa się $2\alpha_1$. Obrót o kąt $+\frac{\pi}{2}$ dokoła punktu M przeprowadza teraz oś P_2P_1 w oś mającą kierunek osi x, a oś P_2F w oś mającą kierunek stycznej t_2. A więc mamy

$$\sphericalangle P_1P_2F = \sphericalangle(x, t_2) = \alpha_1.$$

więc twierdzenie (35) udowodnione w tym przypadku.

żeli M leży po prawej stronie osi y ponad osią x, oba punkty leżą nad osią x. Teraz kąt obwodowy $\sphericalangle P_1P_2F$ znów równa się podwójnemu kątowi α_1, a obrót o kąt $+\frac{\pi}{2}$ około M obraca oś P_2P_1 w oś mającą kierunek osi x, a oś P_2F w oś mającą kierunek stycznej t_2. Więc znów

$$\sphericalangle P_1P_2F = \sphericalangle(x, t_2) = \alpha_1,$$

i znów wzór (35) jest udowodniony.

Jeżeli nareszcie punkt M leży po prawej stronie osi y popod osią x, natenczas oba punkty P_1, P_2 leżą pod osią x. Teraz kąt $\sphericalangle P_2P_1F$ obwodowy równa się połowie kąta środkowego $\sphericalangle P_2MF$, a więc równa się $\sphericalangle(r, t_2)$. Jeżeli kąt $\sphericalangle P_2P_1F$ obrócimy o kąt $-\frac{\pi}{2}$ około punktu M, natenczas oś P_1P_2 przechodzi w oś mającą kierunek x, a oś P_1F przechodzi w oś mającą kierunek stycznej t_1. A więc mamy

$$\sphericalangle P_2P_1F = \sphericalangle (t_1, x).$$

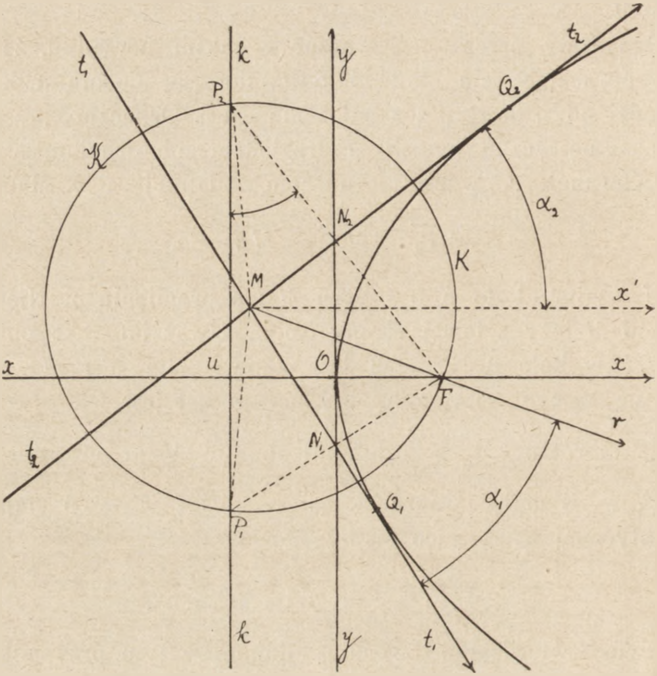

Fig. 32.

Otrzymujemy zatem równość

$$\sphericalangle (t_1, x) = \sphericalangle (r, t_2),$$

a stąd równość (35).

ROZDZIAŁ XXI.

Krzywe drugiego stopnia spółogniskowe.

1. Równanie elips i hiperbol spółogniskowych.

Uważajmy równanie drugiego stopnia elipsy w układzie spółrzędnych prostokątnym.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

i równanie hiperboli w tym samym układzie spółrzędnych

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{2}$$

Dla elipsy mamy $a^2>b^2$, a na odcięte ognisk wzór

$$c^2=a^2-b^2, \tag{3}$$

dla hiperboli zaś

$$c^2=a^2+b^2. \tag{4}$$

Możemy równania (1) i (2) zastąpić jednem równaniem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}-1=0, \tag{5}$$

a wzory (3) i (4) wzorem

$$c^2=a^2-\varepsilon b^2. \tag{6}$$

Uważajmy teraz dwie krzywe C i C' (elipsy lub hiperbole) o równaniu (5), w którem a, b mają odpowiednio dwa układy wartości

$$a',\ b' \quad \text{i} \quad a'',\ b''.$$

Załóżmy, że te krzywe są *spółogniskowe* (confocales). Mamy

$$c^2 = a'^2 - \varepsilon' b'^2 = a''^2 - \varepsilon'' b''^2, \tag{7}$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. Mamy więc

$$a'^2 - a''^2 = \varepsilon' b'^2 - \varepsilon'' b''^2 = \rho. \tag{8}$$

Możemy zatem półosie krzywej C'' wyrazić przez półosie krzywej C' wzorami

$$a''^2 = a'^2 - \rho, \qquad \varepsilon'' b''^2 = \varepsilon' b'^2 - \rho. \tag{9}$$

Każdej wartości na ρ spełniającej nierówność

$$\rho < a'^2,$$

odpowiada oznaczona elipsa lub hiperbola C'', spółogniskowa z daną elipsą lub hiperbolą C'. Albowiem jeżeli zachodzi nierówność

$$a'^2 - \varepsilon' b'^2 > 0,$$

natenczas zachodzi też i nierówność

$$a''^2 - \varepsilon'' b''^2 > 0.$$

Jeżeli więc obierzemy stale krzywą C' natenczas do każdej krzywej spółogniskowej C'' należy oznaczona wartość na ρ i naodwrót do każdego $\rho < a'^2$ należy oznaczona krzywa C'' spółogniskowa z C'. Możemy więc ogólne równanie krzywych drugiego stopnia spółogniskowych z daną krzywą C' napisać w postaci

$$\frac{x^2}{a'^2 - \rho} + \frac{y^2}{\varepsilon' b'^2 - \rho} - 1 = 0. \tag{10}$$

Możemy jako krzywą C' obrać elipsę, a wówczas równanie (10) można napisać w postaci

$$\frac{x^2}{a^2 - \rho} + \frac{y^2}{b^2 - \rho} - 1 = 0. \tag{11}$$

Wartościom na ρ spełniającym nierówność

$$\rho < b^2, \tag{12}$$

odpowiadają elipsy, a wartościom spełniającym nierówności

$$b^2 < \rho < a^2 \tag{13}$$

hiperbole.

2. Krzywe spółogniskowe drugiego stopnia, przechodzące przez dany punkt.

Uważamy punkt P o spółrzędnych x, y na płaszczyźnie i pytamy się, czy istnieją krzywe rodziny krzywych spółogniskowych (11) przechodzące przez ten punkt. Chodzi więc o to, czy istnieją rzeczywiste wartości na ρ spełniające dla danych x, y równanie (11) na ρ. Lewą stronę tego równania napiszemy w postaci

$$\frac{x^2(b^2-\rho)+y^2(a^2-\rho)-(a^2-\rho)(b^2-\rho)}{(a^2-\rho)(b^2-\rho)}=0. \tag{14}$$

ρ może się równać a^2 tylko dla $x=0$, w którym to przypadku licznik i mianownik równają się zeru. Tak samo może się ρ równać b^2 tylko dla $y=0$, w którym to przypadku znów licznik i mianownik równają się 0. Przyrównywając licznik do zera mamy równanie drugiego stopnia na ρ

$$x^2(b^2-\rho)+y^2(a^2-\rho)-(a^2-\rho)(b^2-\rho)=0. \tag{15}$$

Równanie to napiszemy w postaci uporządkowanej według ρ

$$\rho^2-\rho(a^2+b^2-x^2-y^2)+a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2=0. \tag{16}$$

Wyróżnik równania tego jest

$$D=(a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2)-\tfrac{1}{4}(a^2+b^2-x^2-y^2)^2, \tag{17}$$

a pierwiastki ρ_1, ρ_2 są

$$\rho_{1,2}=\frac{a^2+b^2-x^2-y^2}{2}\pm\sqrt{-D}. \tag{18}$$

Wyróżnik D możemy napisać w kształcie

$$-\frac{(x^2+y^2)^2}{4}-\frac{(a^2+b^2)^2}{4}-\frac{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}{2}+$$

$$+a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2=-\frac{(x^2+y^2+a^2-b^2)^2}{4}+(a^2-b^2)x^2,$$

albo w kształcie

$$-\frac{(x^2+y^2+b^2-a^2)^2}{4}-(a^2-b^2)y^2,$$

a więc w kształtach

$$-\frac{(x^2+y^2+c^2)^2}{4}+c^2x^2,\quad -\frac{(x^2+y^2-c^2)^2}{4}-c^2y^2.$$

Jest on więc ujemny, zatem oba pierwiastki ρ_1 i ρ_2 równania (15) są *rzeczywiste, od siebie odmienne.*

Zatem przez każdy punkt płaszczyzny $P(x, y)$ przechodzą dwie od siebie odmienne rzeczywiste krzywe C_1, C_2 rodziny (11), odpowiadające wartościom ρ_1, ρ_2 na ρ. Mamy

$$a^2 - \rho_{1,2} = \frac{x^2 + y^2 + c^2}{2} \mp \sqrt{-D}. \tag{19}$$

$$b^2 - \rho_{1,2} = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2} \mp \sqrt{-D}. \tag{20}$$

Jeżeli więc ρ_1 jest pierwiastek odpowiadający znakowi $+$ w (18), a ρ_2 pierwiastek odpowiadający znakowi —, ponieważ $\sqrt{-D}$ spełnia nierówności

$$\frac{|x^2 + y^2 - c^2|}{2} \leqq \sqrt{-D} \leqq \frac{x^2 + y^2 + c^2}{2}, \tag{21}$$

mamy nierówności

$$a^2 - \rho_1 \geqq 0, \qquad a^2 - \rho_2 \geqq 0. \tag{22}$$

$$b^2 - \rho_1 \leqq 0, \qquad b^2 - \rho_2 \geqq 0. \tag{23}$$

ρ_1 równa się a^2 dla $x = 0$ i tylko dla $x = 0$. ρ_2 jest zawsze $< a^2$. ρ_1 lub ρ_2 równają się b^2 dla $y = 0$ i tylko dla $y = 0$. Mamy równocześnie $\rho_1 = a^2$, $\rho_2 = b^2$ dla $x = y = 0$ a $\rho_1 = \rho_2 = b^2$ dla $y = 0$, $x = \pm c$.

Zatem dla punktów położonych na osi x i tylko dla tych punktów przynajmniej jeden z pierwiastków ρ równa się b^2. Dla punktów na osi y i tylko dla tych punktów ρ_1 równa się a^2. Dla ognisk $x = \pm c$, $y = 0$ i tylko dla tych dwóch punktów oba pierwiastki są sobie równe i równają się b^2. Przez te punkty nie przechodzi żadna krzywa rodziny (11), bo równanie to przestaje mieć sens dla $\rho = a^2$ lub $\rho = b^2$. Ale równanie (15) dla $\rho = a^2$ ma postać

$$x = 0, \tag{24}$$

a dla $\rho = b^2$ postać

$$y^2 = 0. \tag{25}$$

Dla $x = 0$ równanie (15) daje

$$(a^2 - \rho)(y^2 - b^2 + \rho) = 0,$$

a więc mamy pierwiastki

$$\rho_1 = a^2, \qquad \rho_2 = b^2 - y^2.$$

Zatem przez każdy punkt osi y z wyjątkiem początku układu przechodzi elipsa. Tak samo dla $y = 0$ mamy

$$(b^2 - \rho)(x^2 - a^2 + \rho) = 0,$$

a więc mamy pierwiastki

$$b^2 \quad \text{i} \quad a^2 - x^2$$

Zatem gdy

$$b^2 > a^2 - x^2,$$

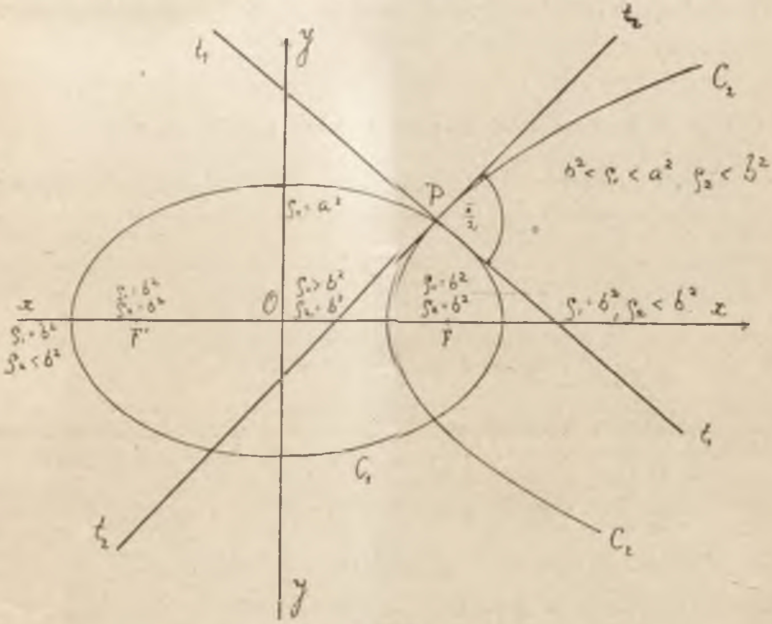

Fig. 32.

tj. gdy

$$x^2 > a^2 - b^2 = c^2,$$

mamy

$$\rho_1 = b^2, \qquad \rho_2 = a^2 - x^2$$

i przez punkt P na osi x przechodzi elipsa. Gdy zaś

$$b^2 < a^2 - x,$$

tj. gdy

$$x^2 < a^2 - b^2 = c^2,$$

mamy

$$\rho_1 = a^2 - x^2, \qquad \rho_2 = b^2$$

i przez punkt P na osi x przechodzi hiperbola. Dla początku układu mamy

$$\rho_1 = a^2, \qquad \rho_2 = b^2.$$

Dla ognisk mamy

$$\rho_1 = \rho_2 = b^2.$$

Przez każdy punkt $P(x, y)$ nie leżący na żadnej z osi przechodzi elipsa i hiperbola rodziny (11). Wartości na pierwiastki ρ odpowiadające różnym pozycjom punktu P uwidocznione są na figurze (32).

3. Spółrzędne eliptyczne na płaszczyznie.

Uważajmy teraz dwie krzywe C_1, C_2 rodziny (11) odpowiadające parametrom ρ_L, ρ_2 o równaniach

$$\frac{x^2}{a^2-\rho_1} + \frac{y^2}{b^2-\rho_1} - 1 = 0, \tag{26}$$

$$\frac{x^2}{a^2-\rho_2} + \frac{y^2}{b^2-\rho_2} - 1 = 0. \tag{27}$$

Spytajmy się, czy te krzywe mają punkty wspólne (rzeczywiste). Obliczmy w tym celu x^2 i y^2 z równań (26), (27). Mamy

$$x^2(b^2-\rho_1) + y^2(a^2-\rho_1) - (a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1) = 0,$$
$$x^2(b^2-\rho_2) + y^2(a^2-\rho_2) - (a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2) = 0.$$

Wyznacznik przy x^2, y^2 jest

$$(b^2-\rho_1)(a^2-\rho_2) - (b^2-\rho_2)(a^2-\rho_1) = (\rho_2-\rho_1)(a^2 -$$

a więc jest od zera odmienny. Mamy

$$x^2 = \frac{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(a^2-\rho_2) - (a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2)(a^2-\rho_1)}{c^2(\rho_2-\rho_1)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2-\rho_1)(a^2-\rho_2)(b^2-\rho_2) - (b^2-\rho_2)(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)}{c^2(\rho_2-\rho_1)},$$

a więc

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2-\rho_1)(a^2-\rho_2)}{c^2}, \\ y^2 &= -\frac{(b^2-\rho_1)(b^2-\rho_2)}{c^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Aby x^2 i y^2 były dodatnie potrzeba i wystarcza, by ρ_1 było $> b^2$ zaś $\rho_2 < b^2$. Jedna z dwóch krzywych jest więc elipsą a druga hiperbolą. Przecinają się one w 4 punktach leżących symetrycznie względem osi x i y.

A więc do każdego punktu na płaszczyźnie należą dwie oznaczone liczby ρ_1, ρ_2, pierwiastki równania drugiego stopnia (15) i naodwrót do każdych dwóch liczb ρ_1, ρ_2, spełniających warunki

$$b^2 \leqq \rho_1 \leqq a^2, \qquad \rho_2 \leqq b^2, \tag{29}$$

należą zupełnie oznaczone punkty na płaszczyźnie A mianowicie. jeżeli mamy same związki nierówności, natenczas mamy 4 od siebie odmienne punkty na płaszczyźnie; jeżeli $\rho_1 = a^2$, $\rho_2 < b^2$, 2 punkty na osi y symetryczne względem osi x-ów; jeżeli $b^2 < \rho_1 < a^2$, $\rho_2 = b^2$, dwa punkty na osi x symetryczne względem osi y między początkiem a ogniskami; jeżeli $\rho_1 = b^2$, $\rho_2 < b^2$, dwa punkty symetryczne względem osi y zewnątrz odcinka $\overline{FF'}$ łączącego ogniska; jeżeli $\rho_1 = \rho_2 = b^2$, oba ogniska. i nareszcie jeżeli $\rho_1 = a^2$, $\rho_2 = b^2$ jeden punkt, a mianowicie początek układu O.

Liczby ρ_1, ρ_2 nazywają się *spółrzędne eliptyczne* punktu P na płaszczyźnie.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.: „Dwie krzywe rodziny (11) krzywych spółogniskowych przechodzące przez punkt P płaszczyzny przecinają się pod kątem prostym“.

W istocie, styczne te w punkcie $P(x, y)$ mają równania

$$\frac{Xx}{a^2-\rho_1}+\frac{Yy}{b^2-\rho_1}-1=0. \tag{30}$$

$$\frac{Xx}{a^2-\rho_2}+\frac{Yy}{b^2-\rho_2}-1=0. \tag{31}$$

Warunek prostopadłości jest

$$\frac{x^2}{(a^2-\rho_1)(a^2-\rho_2)}+\frac{y^2}{(b^2-\rho_1)(b^2-\rho_2)}=0. \tag{32}$$

który to warunek jest spełniony na podstawie wzorów (28).

4. Parabole spółogniskowe.

Parabolami spółogniskowymi nazywamy dwie parabole C_1, C_2 posiadające tę samą oś i to samo ognisko. Obierając układ osi prostokątny z osią x schodzącą się z osią paraboli, i z początkiem układu w ognisku paraboli otrzymamy równanie paraboli przekształcając równanie

$$y^2 - 2px = 0, \tag{33}$$

przekształceniem danem wzorami

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{p}{2}, \\ y' &= y. \end{aligned} \tag{34}$$

Otrzymujemy więc równanie

$$y'^2 - 2px' - p^2 = 0, \tag{35}$$

rodziny parabol spółogniskowych, w którem zmienny parametr p jest parametrem zmiennej paraboli rodziny.

Uważajmy dowolny punkt $P(\xi, \eta)$ na płaszczyźnie i szukajmy parabol rodziny (35) przechodzących przez ten punkt. Otrzymujemy równanie

$$p^2 + 2p\xi - \eta^2 = 0, \tag{36}$$

z którego wyznaczamy p w postaci

$$p = -\xi \pm \sqrt{\eta^2 + \xi^2}. \tag{37}$$

Przez każdy punkt P płaszczyzny odmienny od ogniska przechodzą dwie od siebie odmienne parabole C_1, C_2.

Uważajmy styczne t_1, t_2 do parabol C_1, C_2 w punkcie P. Mają one równania

$$\begin{aligned} y\eta - p_1(x + \xi) &= 0, \\ y\eta' - p_2(x + \xi) &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Styczne te są do siebie prostopadłe, albowiem mamy

$$\eta^2 + p_1 p_2 = \eta^2 + \xi^2 - (\eta^2 + \xi^2) = 0.$$

Otrzymujemy więc

Twierdzenie 2.: „Dwie parabole rodziny parabol spółogniskowych (35) przechodzące przez punkt P płaszczyzny przecinają się pod kątem prostym“.

Liczby p_1, p_2 możemy nazwać *spółrzędnymi parabolicznymi* punktu na płaszczyźnie.

ROZDZIAŁ XXII.

Ogólna teorja biegunów, biegunowych i stycznych krzywych drugiego stopnia.

1. Definicja biegunów i biegunowych krzywych drugiego stopnia. Własność charakterystyczna.

Uważajmy krzywą drugiego stopnia o równaniu

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Uważajmy punkt $P(\xi, \eta)$. *Biegunową* (polaire) punktu P względem krzywej (1) nazywamy prostą p o równaniu

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{2}$$

gdzie mamy

$$\begin{aligned} \alpha &= A\xi + B\eta + D, \\ \beta &= B\xi + C\eta + E, \\ \gamma &= D\xi + E\eta + F. \end{aligned} \tag{3}$$

Punkt P nazywa się *biegunem* (pôle) prostej (2) względem krzywej (1).

Uważajmy prostą l przechodzącą przez biegun P o równaniach parametrycznych

$$x = \xi + r\lambda, \qquad y = \eta + r\mu. \tag{4}$$

Przecina ona krzywą (1) w punktach, które otrzymamy, wstawiając w równanie (1) wyrażenia (4) na x i y. Mamy

$$f(\xi + r\lambda, \eta + r\mu) = f(\xi, \eta) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) + r^2\varphi(\lambda, \mu), \tag{5}$$

gdzie $\varphi(\lambda, \mu)$ jest znana forma kwadratowa w λ, μ. Prosta l przecina krzywą (1) w dwóch punktach P_1, P_2, odpowiadających wartościom r_1, r_2 parametru r, które są pierwiastkiem równania drugiego stopnia na r

$$r^2\varphi(\lambda,\mu)+2r(\alpha\lambda+\beta\mu)+f(\xi,\eta)=0. \tag{6}$$

Przecina ona dalej biegunową p w punkcie P_0 odpowiadającym wartości r_0 parametru r, którą otrzymujemy jako pierwiastek równania pierwszego stopnia na r otrzymującego się przez wstawienie w równanie (2) biegunowej zamiast x, y wyrażeń (4)

$$\alpha(\xi+r\lambda)+\beta(\eta+r\mu)+\gamma=0,$$

czyli

$$r(\alpha\lambda+\beta\mu)+f(\xi,\eta)=0. \tag{7}$$

Zakładamy, że α i β nie równają się równocześnie zeru, tj. że biegun P nie jest środkiem krzywej. Wówczas mamy

$$r_0=-\frac{f(\xi,\eta)}{\alpha\lambda+\beta\mu}. \tag{8}$$

Utwórzmy stosunek podwójnego podziału $D=(P, P_0;\ P_1, P_2)$ czterech punktów P, P_0, P_1, P_2 na osi l. Na stosunek ten mamy wzór

$$(P, P_0;\ P_1, P_2)=\frac{r_1-r}{r_1-r_0}:\frac{r_2-r}{r_2-r_0}$$

r jest wartość parametru, odpowiadająca punktowi P tj. 0, więc mamy

$$D=\frac{r_1(r_2-r_0)}{r_2(r_1-r_0)}. \tag{9}$$

Ale mamy związki

$$r_1 r_2=\frac{f(\xi,\eta)}{\varphi(\lambda,\mu)},\qquad r_1+r_2=-2\frac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\varphi(\lambda,\mu)} \tag{10}$$

a więc, ze wzoru (8) mamy związek

$$r_1 r_2-\frac{r_0}{2}(r_1+r_2)=0 \tag{11}$$

pomiędzy r_1, r_2, r_0. A więc dochodzimy do związku

$$D=-1. \tag{12}$$

Stosunek podwójnego podziału czterech punktów $P, P_0;\ P_1, P_2$ na osi l jest więc *harmoniczny*. A więc para punktów P_1, P_2, w których oś l przechodząca przez biegun P przecina krzywą C drugiego stopnia jest harmonicznie sprzężona z parą punktów P i P_0, gdzie P_0 jest punktem przecięcia osi l i biegunowej p punktu P. Własność ta jest *charakterystyczna* dla biegunowej, albowiem z równości (11) otrzymujemy naodwrót (8), czyli że czwarty harmoniczny punkt P_0 leży na biegunowej p.

Punkty P_1, P_2 mogą być harmoniczne ze sobą sprzężone, ale punkt P_0 jest rzeczywisty, jeżeli punkt P jest rzeczywisty i jeżeli kierunek λ, μ jest rzeczywisty, jak to wynika ze wzoru (8).

2. Badanie biegunów i biegunowych krzywych 2-go stopnia.

Uważajmy teraz dowolną prostą p i spytajmy się czy istnieją punkty P, które są biegunami tej prostej uważanej jako biegunowa. Chodzi o znalezienie trzech liczb $k \neq 0$, ξ, η takich, aby zachodziły związki następujące

$$\begin{aligned} k(A\xi + B\eta + D) &= \alpha, \\ k(B\xi + C\eta + E) &= \beta, \\ k(D\xi + E\eta + F) &= \gamma. \end{aligned} \tag{13}$$

W tym celu mnożymy równania (13) przez minory $\varkappa''$, $\varkappa'$, δ i dodajemy do siebie. Otrzymamy

$$k\Delta = \varkappa''\alpha + \varkappa'\beta + \delta\gamma. \tag{14}$$

Rozróżniamy 2 przypadki:

1. $\Delta \neq 0$. Otrzymujemy oznaczone k, które jest od zera odmienne, jeżeli zachodzi nierówność

$$\varkappa''\alpha + \varkappa'\beta + \delta\gamma \neq 0. \tag{15}$$

Jeżeli więc krzywa C posiada oznaczony środek, nierówność ta zachodzi, jeżeli środek nie leży na prostej p. Jeżeli krzywa nie posiada środka, k jest od zera odmienne, jeżeli zachodzi nierówność

$$\varkappa''\alpha + \varkappa'\beta \neq 0, \tag{16}$$

a więc ponieważ teraz mamy

$$A = \varepsilon a^2, \qquad B = \varepsilon ab, \qquad C = \varepsilon b^2, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

$$\varkappa'' = BE - CD = \varepsilon b(aE - bD). \qquad \varkappa' = BD - AE = \varepsilon a(bD - aE),$$

$$\varkappa''\alpha + \varkappa'\beta = \varepsilon(\alpha b - \beta a)(aE - bD), \qquad aE - bD \neq 0,$$

więc nierówność (16) zachodzi, jeżeli prosta p niema kierunku asymptotycznego.

Otrzymujemy zupełnie oznaczony układ wartości ξ, η, a więc zupełnie oznaczony biegun. A mianowicie mamy na ξ, η wzory

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\delta'\alpha + \varkappa\beta + \varkappa''\gamma}{k\Delta}, \\ \eta &= \frac{\varkappa\alpha + \delta''\beta + \varkappa'\gamma}{k\Delta}. \end{aligned} \tag{17}$$

2. $\Delta = 0$. Jeżeli $\delta \neq 0$, natenczas każda biegunowa przechodzi przez środek. W istocie, jeżeli a, b są spółrzędne środka, mamy

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b + \gamma = (Aa + Bb + D)\xi + (Ba + Cb + E)\eta + \\ + Da + Eb + F = 0. \end{aligned}$$

Tak samo ze wzoru (14) widoczna, że jeżeli $\Delta = 0$, prawa strona musi się równać 0, a więc środek musi leżeć na prostej p.

Uważajmy dowolną prostą p przechodzącą przez środek. Załóżmy dla prostoty, że środek S jest początkiem układu spółrzędnych, a więc $D = E = F = 0$. Mamy związki

$$\begin{aligned} k(A\xi + B\eta) &= \alpha, \\ k(B\xi + C\eta) &= \beta. \end{aligned} \tag{18}$$

Otrzymujemy stąd $k\xi$, $k\eta$, t. zn. że otrzymujemy całą prostą biegunów. Równanie tej prostej otrzymamy rugując k z równań (18) w postaci

$$(A\beta - B\alpha)\xi + (B\beta - C\alpha)\eta = 0. \tag{19}$$

Jeżeli $\delta = 0$, każda biegunowa jest równoległa do obu prostych równoległych, które wówczas równanie (1) przedstawia. Jeżeli równanie to napiszemy w postaci

$$\varepsilon(ax + by + c_1)(ax + by + c_2) = 0, \tag{20}$$

mamy

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon a[a\xi + b\eta + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)], \\ \beta &= \varepsilon b[a\xi + b\eta + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)], \\ \gamma &= \tfrac{1}{2}\varepsilon(c_1 + c_2)(a\xi + b\eta) + \varepsilon c_1 c_2. \end{aligned}$$

Równanie biegunowej p jest

$$\begin{aligned} \varepsilon(ax + by)[a\xi + b\eta + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)] + \\ + \tfrac{1}{2}\varepsilon(c_1 + c_2)(a\xi + b\eta) + \varepsilon c_1 c_2 = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Naodwrót, każda prosta równoległa do obu prostych o równaniu

$$ax + by + m = 0 \tag{22}$$

odmienna od prostej środków jest biegunową. Chodzi o rozwiązanie względem k, ξ, η następującego układu równań

$$\begin{aligned} &k\varepsilon a(a\xi + b\eta) + k\frac{\varepsilon a}{2}(c_1 + c_2) = a, \\ &k\varepsilon b(a\xi + b\eta) + k\frac{\varepsilon b}{2}(c_1 + c_2) = b, \\ &k\varepsilon \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)(a\xi + b\eta) + k\varepsilon c_1 c_2 = m. \end{aligned} \tag{23}$$

Załóżmy $a \neq 0$. Należy rozwiązać względem $k(a\xi + b\eta)$ i k układ dwóch równań pierwszego i trzeciego. Wyznacznik przy tych niewiadomych jest

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2), & c_1 c_2 \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4}(c_1 - c_2)^2.$$

Zatem w przypadku dwóch prostych od siebie odmiennych wyznacznik ten jest od zera odmienny. k jest od zera odmienne wtedy i tylko wtedy gdy

$$\tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) - m$$

jest od zera odmienne, tj. gdy prosta p jest odmienna od prostej środków i równa się

$$k = 4\varepsilon \frac{\frac{1}{2}(c_1 + c_2) - m}{(c_1 - c_2)^2}.$$

Otrzymujemy całą prostą biegunów, której równanie otrzymujemy rugując k z równań 1-go i 3-go (23) w postaci

$$[m - \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)](a\xi + b\eta) + \frac{m}{2}(c_1 + c_2) - c_1 c_2 = 0. \tag{24}$$

W przypadku prostej podwójnej równanie (21) biegunowej ma postać

$$\varepsilon(ax + by + c)(a\xi + b\eta + c) = 0 \tag{25}$$

więc prosta biegunowa schodzi się z prostą podwójną, jeżeli biegun nie leży na prostej środków, którą jest prosta podwójna.

3. Biegunowe środków krzywych drugiego stopnia.

W rozważaniach poprzednich zakładaliśmy, że biegun P nie schodzi się z żadnym środkiem.

Załóżmy teraz, że punkt P schodzi się z jednym ze środków krzywej C. W przypadku 1. $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$ równanie biegunowej p ma postać

$$\gamma = 0, \tag{26}$$

gdzie $\gamma \neq 0$, a więc biegunową p jest prosta w nieskończoności. W przypadku 2. $\Delta = 0$, gdy $\delta \neq 0$, równanie biegunowej jest nieoznaczone. Gdy $\Delta = 0$, $\delta = 0$, równanie biegunowej p ma postać

$$\gamma = c_1 c_2 - \tfrac{1}{4}(c_1 + c_2)^2 = -\tfrac{1}{4}(c_1 - c_2)^2 = 0. \tag{27}$$

Jestto więc prosta w nieskończoności w przypadku dwóch prostych od siebie odmiennych, a równanie nieoznaczone w przypadku prostej podwójnej.

4. Biegunowe punktów w nieskończoności.

Uważajmy prostą l, przechodzącą przez punkt M o spółrzędnych (p, q)

$$x = p + r\lambda, \qquad y = q + r\mu. \tag{28}$$

Uważajmy punkt P położony na tej prostej o spółrzędnych ξ, η i biegunową p tego punktu. Ma ona równanie

$$\begin{gathered}[A(p + r\lambda) + B(q + r\mu) + D]x + \\ + [B(p + r\lambda) + C(q + r\mu) + E]y + D(p + r\lambda) \\ + E(q + r\mu) + F = 0.\end{gathered}$$

Podzielmy równanie to przez r. Gdy r dąży do niesk równanie tak otrzymane dąży do równania

$$(A\lambda + B\mu)x + (B\lambda + C\mu)y + D\lambda + E\mu = 0, \tag{30}$$

tj. spółczynniki dążą do spółczynników równania (30). Równanie (30) przedstawia *średnicę sprzężoną* z kierunkiem λ, μ prostej l. A więc średnica sprzężona z kierunkiem λ, μ jest granicą biegunowej p, gdy biegun P w kierunku λ, μ dąży do nieskończoności.

Stąd możemy wprowadzić pojęcie *biegunowych punktów w nieskończoności*. Biegunową punktu w nieskończoności odpowiadającego kierunkowi λ, μ nazywamy prostą o równaniu (30).

W przypadku 1. $\Delta \neq 0$, gdy $\delta \neq 0$, do każdego punktu w nieskończoności należy oznaczona średnica (30). Naodwrót, do każdej średnicy należy oznaczony punkt w nieskończoności. W przypadku $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$, należy oznaczona biegunowa do każdego punktu nieodpowiadającego kierunkowi asymptotycznemu i naodwrót do każdej prostej równoległej do kierunku asymptotycznego należy oznaczony biegun w nieskończoności.

W przypadku 2. $\Delta = 0$, gdy $\delta \neq 0$ do każdego punktu w nieskończoności należy oznaczona średnica (30) i naodwrót. Gdy $\delta = 0$ i obie proste są od siebie odmienne, należy prosta środków jako biegunowa do każdego punktu nieodpowiadającego kierunkowi asymptotycznemu, a do punktu odpowiadającego kierunkowi asymptotycznemu należy biegunowa nieoznaczona. Gdy proste zlewają się ze sobą, biegunową punktów w nieskończoności jest sama prosta podwójna. Mamy

$$r_0 = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \tag{31}$$

$r_1 - r_2 = c.$

Więc

$$\frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0} = -\frac{r_1}{r_2} = -1 - \frac{c}{r_2}.$$

Jeżeli więc P dąży do nieskończoności, mamy $\lim r_0 = \varepsilon\infty$ $\lim r_1 = \varepsilon\infty$, $\lim r_2 = \varepsilon\infty$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$, a więc

$$\lim \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0} = -1. \tag{32}$$

Zatem w granicy punkt Q położony na biegunowej p połowi odcinek $P_1 P_2$.

5. Styczne krzywych drugiego stopnia. Warunki konieczne i wystarczające, aby dana prosta była styczną krzywej drugiego stopnia. Równanie stycznościowe krzywych drugiego stopnia.

Wiemy z rozważań Rozdziału XVI., że równanie (2) przedstawia w przypadku, gdy punkt $P(\xi, \eta)$ leży na krzywej (1) styczną do krzywej w tym punkcie, a w przypadku szczególnym, gdy punktem tym jest środek krzywej, równanie (2) jest nieokreślone. Uważajmy dowolną prostą o równaniu

$$ux + vy + w = 0, \tag{33}$$

i spytajmy się, kiedy ta prosta jest styczną do krzywej (1). Potrzeba w tym celu i wystarcza, aby istniały liczby $k \neq 0$, ξ, η, dla których spełnione są równości

$$\begin{aligned} k(A\xi + B\eta + D) &= u, \\ k(B\xi + C\eta + E) &= v, \\ k(D\xi + E\eta + F) &= w. \end{aligned} \tag{34}$$

Mamy dalej związek

$$u\xi + v\eta + w = 0,$$

lub

$$ku\xi + kv\eta + kw = 0. \tag{35}$$

Równania (34) i (35) możemy uważać jako równania linjowe o niewiadomych $k\xi$, $k\eta$, k. Aby istniał przynajmniej jeden układ rozwiązań tych równań musi zachodzić równość

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Rozwijając tęn wyznacznik i zmieniając znak otrzymujemy równanie

$$\delta' u^2 + \delta'' v^2 + \delta w^2 + 2\varkappa uv + 2\varkappa' vw + 2\varkappa'' wu = 0. \tag{37}$$

Wprowadzamy formę kwadratową o trzech zmiennych u, v, w

$$\delta' u^2 + \delta'' v^2 + \delta w^2 + 2\varkappa' vw + 2\varkappa'' wu + 2\varkappa uv = F(u, v, w). \tag{38}$$

A więc warunkiem *koniecznym*, aby równanie (33) przedstawiało styczną do krzywej drugiego stopnia jest, by spółczynniki u, v. w obracały w zero formę kwadratową (38). Spółczynniki u, v, w nazywają się *spółrzędnymi stycznościowymi* (coordonnées tangentielles) linji prostej, a równanie (36) lub (37) *równaniem stycznościowem* (équation tangentielle) krzywej (1).

6 Dyskusja równania stycznościowego krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy formę (38). Wyznacznik jej jest

$$W = \begin{vmatrix} \delta' & \varkappa & \varkappa'' \\ \varkappa & \delta'' & \varkappa' \\ \varkappa'' & \varkappa' & \delta \end{vmatrix}, \tag{39}$$

a więc jestto wyznacznik minorów drugiego stopnia wyznacznika Δ i ma wartość Δ^2. Odróżnimy następujące przypadki:

1. $\Delta \neq 0$. Forma (38) nie daje się rozłożyć na iloczyn dwóch

form pierwszego stopnia. Z równań (34) otrzymujemy k, $k\xi$, $k\eta$. Mamy

$$k = \frac{\varkappa'' u + \varkappa' v + \delta w}{\Delta}. \tag{40}$$

Nie wszystkie trzy minory $\varkappa''$, $\varkappa'$, δ równają się równocześnie zeru. Niechaj np. $\delta \neq 0$. Mnożąc pierwsze trzy wiersze wyznacznika (36) przez $\varkappa''$, $\varkappa'$, δ i dodając pierwszy i drugi do trzeciego otrzymujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D, & u \\ B, & C, & E, & v \\ 0, & 0, & \Delta, & \varkappa'' u + \varkappa' v + \delta w \\ u, & v, & w, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a więc jeżeli mamy

$$\varkappa'' u + \varkappa' v + \delta w = 0 \tag{41}$$

mamy też równość

$$\Delta \begin{vmatrix} A & B & u \\ B & C & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{42}$$

Podobnie w przypadkach gdy $\varkappa''$ względnie $\varkappa'$ jest od zera odmienne mamy równości

$$(43) \qquad \Delta \begin{vmatrix} B & C & v \\ D & E & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta \begin{vmatrix} A & B & u \\ D & E & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (44)$$

W przypadku $\delta \neq 0$ k jest odmienne od zera, jeżeli prosta (33) nie przechodzi przez środek krzywej. Jeżeli zaś prosta (33) przechodzi przez środek krzywej mamy z równości (42)

$$A v^2 + C u^2 - 2 B u v = 0, \tag{45}$$

a więc kierunek λ, μ prostej (33) jest kierunkiem asymptotycznym

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0,$$

więc prosta (33) jest asymptotą. Spółrzędne stycznościowe asymptot spełniają więc równanie stycznościowe (36). Zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby prosta (33) była styczną lub asymptotą jest, by spółrzędne u, v, w spełniały równanie stycznościowe (36).

W przypadku $\delta \neq 0$ mamy $k \neq 0$, jeżeli mamy

$$\varkappa'' u + \varkappa' v \neq 0. \tag{46}$$

a więc jeżeli prosta (33) nie ma kierunku asymptotycznego. W tym ostatnim przypadku z równości (43), (44) otrzymujemy zależnie od tego, czy $\varkappa''$, czy $\varkappa'$ jest od zera odmienne

$$Dv^2 - Euv - Bvw + Cuw = 0,$$

lub

$$Duv - Eu^2 - Avw + Buw = 0,$$

a więc ponieważ mamy

$$Bv - Cu = 0, \qquad Av - Bu = 0,$$

otrzymujemy

$$v(Dv - Eu) = 0, \tag{47}$$

lub

$$u(Dv - Eu) = 0. \tag{48}$$

Ponieważ $Dv - Eu$ jest od zera odmienne, więc jeżeli $\varkappa'' \neq 0$ mamy $v = 0$, a więc z równości

$$\varkappa'' u + \varkappa' v = 0$$

otrzymujemy $u = 0$. Jeżeli zaś $\varkappa' \neq 0$, mamy z równości (48) $u = 0$, więc też $v = 0$, w można obrać dowolne od zera odmienne. A więc żadna prosta w skończoności mająca kierunek asymptotyczny nie może być styczną do krzywej (1).

2. $\Delta = 0$. Teraz wyznacznik formy (37) równa się zeru, tj. forma rozkłada się na iloczyn dwóch form stopnia pierwszego. Ale pomiędzy minorami drugiego stopnia wyznacznika Δ a tym wyznacznikiem mamy związki następujące

$$\begin{gathered} \delta'\delta'' - \varkappa^2 = F\Delta, \qquad \delta''\delta - \varkappa'^2 = A\Delta, \\ \delta\delta' - \varkappa''^2 = C\Delta, \\ \varkappa\varkappa' - \varkappa''\delta'' = D\Delta, \qquad \varkappa\varkappa'' - \varkappa'\delta' = E\Delta, \\ \varkappa'\varkappa'' - \varkappa\delta = B\Delta. \end{gathered} \tag{49}$$

A więc wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika W równają się zeru, czyli forma F jest pełnym kwadratem, jeżeli nie wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika Δ a więc i wszystkie spółczynniki formy F równają się 0. Przynajmniej jeden z trzech minorów głównych δ, δ', δ'' jest wówczas od zera odmienny. Przy pomocy związków (49) otrzymujemy następujące tożsamości

$$F(u, v, w) \,.\, \delta = (\varkappa'' u + \varkappa' v + \delta w)^2, \tag{50}$$

$$F(u, v, w) \,.\, \delta' = (\delta' u + \varkappa v + \varkappa'' w)^2, \tag{51}$$

$$F(u, v, w) \,.\, \delta'' = (\varkappa u + \delta'' v + \varkappa' w)^2. \tag{52}$$

Wszystkie proste o spółrzędnych stycznościowych u, v, w spełniających równanie pierwszego stopnia

$$au + bv + cw = 0 \tag{53}$$

przechodzą przez punkt P o spółrzędnych

$$x = \frac{a}{c}, \qquad y = \frac{b}{c}, \tag{54}$$

gdzie zakładamy $c \neq 0$. A więc tworzą one *pęk właściwy prostych* o wierzchołku w punkcie P. Zatem równanie pierwszego stopnia (53), gdzie c jest od zera odmienne jest równaniem pęku *właściwego* o wierzchołku P, którego spółrzędne są (54). Jeżeli zaś $c = 0$, równanie (53) jest spełnione przez spółrzędne stycznościowe prostych równoległych do kierunku, którego spółczynniki kierunkowe λ, μ są proporcjonalne do a i b

$$\lambda = \rho a, \qquad \mu = \rho b,$$

a więc przez spółrzędne stycznościowe prostych pęku *niewłaściwego*.

W przypadku $\Delta = 0$, gdy $\delta \neq 0$ równanie (37) ma kształt

$$(\varkappa'' u + \varkappa' v + \delta w)^2 = 0, \tag{55}$$

a w przypadku $\Delta = 0$, $\delta = 0$, jeżeli krzywa (1) składa się z dwóch prostych równoległych od siebie odmiennych, albo kształt

$$(u\delta' + v\varkappa + w\varkappa'')^2 = 0, \tag{56}$$

albo kształt

$$(u\varkappa + v\delta'' + w\varkappa')^2 = 0. \tag{57}$$

Równanie (55) jest równaniem podwójnego pęku prostych, którego wierzchołkiem jest *środek* krzywej (1), tj. punkt przecięcia obu prostych. W drugim przypadku mamy $\varkappa' = \varkappa'' = 0$, więc równania (56), (57) przedstawiają podwójny pęk drugiego rodzaju, mianowicie podwójny pęk prostych równoległych do dwóch prostych danych.

Niechaj teraz wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika Δ równe są zeru. Wówczas każdy układ trzech liczb u, v, w spełnia równanie drugiego stopnia (37), a więc spółrzędne stycznościowe dowolnej prostej spełniają te równanie. Krzywa dana jest prostą podwójną, i dowolna prosta przecina ją w jednym punkcie podwójnym, może więc być uważana za styczną w tym punkcie.

7. Badanie ogólnego równania jednorodnego drugiego stopnia w spółrzędnych stycznościowych.

Uważajmy teraz zupełnie ogólną funkcję jednorodną drugiego stopnia w zmiennych u, v, w

$$\Phi(u, v, w) = au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 \tag{58}$$

i równanie jednorodne drugiego stopnia

$$\Phi(u, v, w) = 0. \tag{59}$$

Spytajmy się, czy równanie to zawsze może być uważane jako równanie stycznościowe pewnej krzywej drugiego stopnia. Chodzi o to, czy istnieje taka liczba $k \neq 0$, przez którą pomnożona funkcja (58) staje się funkcją $F(u, v, w)$ poprzedniego ustępu. A więc chodzi o to, czy istnieją liczby A, B, C, D, E, F, takie że minory wyznacznika Δ równają się odpowiednio

$$\begin{array}{lll} \delta = kf, & \delta' = ka, & \delta'' = kc, \\ \varkappa = kb, & \varkappa' = ke, & \varkappa'' = kd. \end{array}$$

Mamy związki (49) pomiędzy elementami wyznacznika Δ, a jego minorami drugiego stopnia.

Oznaczmy przez D wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}. \tag{60}$$

Oznaczmy dalej przez H wyznacznik minorów drugiego stopnia wyznacznika D

$$H = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Mamy związki

$$\begin{array}{lll} \gamma\varphi - \varepsilon^2 = Da, & \alpha\varphi - \delta^2 = Dc, & \alpha\gamma - \beta^2 = Df, \\ \beta\varepsilon - \delta\gamma = Dd, & \delta\varepsilon - \beta\varphi = Db, & \beta\delta - \alpha\varepsilon = De. \end{array} \tag{62}$$

Zatem możemy przyjąć

$$\begin{array}{llll} A = \alpha, & B = \beta, & C = \gamma, & D = \delta, \\ & E = \varepsilon, & F = \varphi. & \end{array} \tag{63}$$

i

$$k = D. \tag{64}$$

Zakładamy przytem, że $D \neq 0$.

Jeżeli $D = 0$, natenczas funkcja $\Phi(u, v, w)$ rozpada się na iloczyn dwóch funkcyj pierwszego stopnia w u, v, w. A więc równanie (59) przedstawia wówczas dwa pęki prostych, właściwe lub niewłaściwe. Te dwa pęki schodzą się ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy forma $\Phi(u, v, w)$ jest pełnym kwadratem, a więc gdy wszystkie minory drugiego stopnia wyznacznika D są równe zeru. W tym przypadku i tylko w tym przypadku równanie (59) jest równaniem stycznościowem. Jeżeli ma ono postać

$$(au + bv + cw)^2 = 0, \tag{65}$$

to jeżeli $c \neq 0$, jest ono równaniem stycznościowem równania (1) przedstawiającego dwie dowolne proste przecinające się w punkcie o spółrzędnych

$$x = \frac{a}{c}, \qquad y = \frac{b}{c},$$

i jeżeli $c = 0$ jest ono równaniem stycznościowem dwóch dowolnych od siebie odmiennych prostych równoległych i mających kierunek

$$\lambda = \rho a, \qquad \mu = \rho b,$$

gdzie $\rho \neq 0$ jest czynnik proporcjonalności.

Zbiór prostych przedstawionych równaniem drugiego stopnia (59) nazywamy *krzywą drugiej klasy*, a równanie *równaniem krzywej drugiej klasy*.

Ćwiczenia.

1. Dany punkt P na płaszczyźnie i krzywa drugiego stopnia. Znaleźć miejsce geometryczne punktów M, których biegunowe są prostopadłe do prostej PM.

2. Udowodnić twierdzenie Frégier'a: Cięciwy krzywej drugiego stopnia widziane z punktu P krzywej pod kątem prostym, przecinają normalną tj. prostopadłą do stycznej w punkcie P wystawioną w punkcie *stałym* Q.

Zbadać w szczególności przypadek *hiperboli równobocznej* $(\omega = 0)$.

3. Znaleźć równanie stycznościowe prostych, które wycinają na

krzywej drugiego stopnia cięciwy widziane z biegunów tych prostych pod stałym kątem φ.

4. Znaleźć miejsce geometryczne punktów P, z których styczne do stożkowej tworzą z daną prostą równe kąty.

5. Uważamy rodzinę elips i hiperbol spółogniskowych. Biegunowe dowolnego punktu P płaszczyzny względem tych krzywych tworzą krzywą drugiej klasy, złożoną ze stycznych do paraboli.

ROZDZIAŁ XXIII.

Krzywe drugiego stopnia, przechodzące przez dane punkty i posiadające dane styczne.

1. Krzywe drugiego stopnia, przechodzące przez dane punkty.

Uważamy ogólną krzywą drugiego stopnia o równaniu

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Warunek, aby krzywa (1) przechodziła przez punkt P o spółrzędnych ξ, η brzmi

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F = 0. \qquad (2)$$

Jest on więc linjowy (pierwszego stopnia) względem spółczynników równania (1).

Uważajmy teraz trzy punkty $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ od siebie odmienne i załóżmy, że krzywa (1) przechodzi przez te 3 punkty. Jeżeli te punkty leżą na linji prostej l, natenczas funkcja $f(x, y)$ rozkłada się na iloczyn dwóch funkcyj pierwszego stopnia

$$lx + my + n \quad \text{i} \quad l'x + m'y + n'. \qquad (3)$$

W istocie, niechaj równania prostej l parametryczne będą

$$x = a + r\lambda, \qquad y = b + r\mu. \qquad (4)$$

Mamy wstawiając wyrażenia (4) w równanie (1)

$$r^2\varphi(\lambda, \mu) + 2r(\alpha\lambda + \beta\mu) + f(a, b) = 0, \qquad (5)$$

gdzie $\varphi(\lambda, \mu)$, α, β są znane wyrażenia. Równanie to ma trzy od siebie odmienne pierwiastki r_1, r_2, r_3, a więc jest identycznie równe 0, tj. cała prosta l leży na krzywej 2-go stopnia (1). Ale wówczas, jak wiemy z rozważań Rozdziału IX. funkcja $f(x, y)$ jest iloczynem dwóch funkcyj (3) pierwszego stopnia.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. „Przez 5 danych punktów, z których żadne 3 nie leżą na linji prostej przechodzi jedna i tylko jedna krzywa drugiego stopnia nie rozpadająca się na 2 proste“.

Uważajmy 5 punktów P_i, $i = 1, 2, \ldots 5$ o spółrzędnych ξ_i, η_i, $i = 1, 2, \ldots 5$. Mamy następujące równości

$$\begin{gathered} A\xi_i^2 + 2B\xi_i\eta_i + C\eta_i^2 + 2D\xi_i + 2E\eta_i + F = 0, \\ i = 1, 2, \ldots 5. \end{gathered} \tag{6}$$

Równości te można uważać jako równania o niewiadomych $A, \ldots F$. Są to więc 5 równań o 6 niewiadomych. Macierz tych równań jest to macierz

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1^2, & \xi_1\eta_1, & \eta_1^2, & \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_5^2, & \xi_5\eta_5, & \eta_5^2, & \xi_5, & \eta_5, & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{7}$$

Udowodnimy, że ranga tej macierzy jest 5, tj. że najwyższy stopień minorów nie równych zeru w macierzy tej jest 5. Obierzmy punkt P_1 jako początek O układu spółrzędnych, oś x-ów przechodzącą przez punkt P_2, a oś y-ów przez punkt P_3, tj. $\eta_2 = 0$, $\xi_3 = 0$. Macierz (7) ma wówczas postać

$$\left\| \begin{matrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ \xi_2^2, & 0, & 0, & \xi_2, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & \eta_3^2, & 0, & \eta_3, & 1 \\ \xi_4^2, & \xi_4\eta_4, & \eta_4^2, & \xi_4, & \eta_4 & 1 \\ \xi_5^2, & \xi_5\eta_5, & \eta_5^2, & \xi_5, & \eta_5, & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{8}$$

Uważamy minor 5-go stopnia utworzony z kolumn 2-giej, 3-ciej, 4-tej, 5-tej i 6-tej. Minor ten równa się wyznacznikowi 4-go stopnia

$$\left| \begin{matrix} 0, & 0, & \xi_2, & 0 \\ 0, & \eta_3^2, & 0, & \eta_3 \\ \xi_4\eta_4, & \eta_4^2, & \xi_4, & \eta_4 \\ \xi_5\eta_5, & \eta_5^2, & \xi_5, & \eta_5 \end{matrix} \right|. \tag{9}$$

Wyznacznik ten równa się iloczynowi liczby $\xi_2 \neq 0$ przez minor 3-go stopnia

$$\left| \begin{matrix} 0, & \eta_3^2, & \eta_3 \\ \xi_4\eta_4, & \eta_4^2, & \eta_4 \\ \xi_5\eta_5, & \eta_5^2, & \eta_5 \end{matrix} \right| = \eta_3\eta_4\eta_5 \left| \begin{matrix} 0, & \eta_3, & 1 \\ \xi_4, & \eta_4, & 1 \\ \xi_5, & \eta_4, & 1 \end{matrix} \right|.$$

Iloczyn $\eta_3 \eta_4 \eta_5$ jest od zera odmienny, albowiem żadne 3 punkty z pośród 5 punktów danych nie leżą na linji prostej. Taksamo wyznacznik 3-go stopnia

$$\begin{vmatrix} 0, & \eta_3, & 1 \\ \xi_4, & \eta_4, & 1 \\ \xi_5, & \eta_5, & 1 \end{vmatrix}$$

jest od zera odmienny, albowiem 3 punkty P_3, P_4, P_5 nie leżą na linji prostej. A więc minor (9) jest od zera odmienny. Zatem układ równań linjowych (6) można rozwiązać w jeden oznaczony sposób względem stosunków

$$\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}, \tag{10}$$

tj. A można obrać dowolne od zera odmienne a wówczas inne spółczynniki $B, \dots F$ są w zupełności określone. Zatem przez 5 punktów P_i, $i = 1 \dots 5$ przechodzi jedna i tylko jedna krzywa właściwa drugiego stopnia gdyż niema krzywej przechodzącej przez te punkty, dla której A równałoby się zeru, bo wyznacznik 5-go stopnia przy B, C, D, E, F jest jak widzieliśmy od zera odmienny. Stąd wynika, że i dla *ogólnego* położenia osi macierz (7) jest rzędu 5, inaczej istniałyby przynajmniej *dwie* krzywe, właściwe lub niewłaściwe, przechodzące przez tych 5 punktów, co nie jest możliwe.

Z otrzymanego rezultatu wynika, że jeżeli ranga macierzy (7) jest najwyżej 4, natenczas przynajmniej 3 punkty leżą na linji prostej. Ale jeżeli trzy, a nie więcej punktów, leży na jednej linji prostej, natenczas krzywa drugiego stopnia rozpada się na dwie proste *w zupełności oznaczone.* Zatem ranga macierzy (7) jest teraz znów 5. A więc jeżeli ranga jest 4, przynajmniej 4 punkty muszą leżeć na jednej i tejsamej prostej. Dwa ze spółczynników $A, \dots F$ można obrać dowolnie, a więc cztery ze spółczynników można wyrazić jako linjowe jednorodne funkcje dwóch pozostałych. Zatem przez 5 punktów danych P_i przechodzą z pewnością dwie od siebie odmienne krzywe 2-go stopnia

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad f_2(x, y) = 0 \tag{11}$$

i ogólny wzór na wszystkie krzywe 2-go stopnia przechodzące przez te punkty jest

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0, \tag{12}$$

gdzie λ_1, λ_2 są dwa parametry, mogące przyjmować dowolne wartości. W istocie, widoczna. że krzywe przechodzące przez 5 punktów rozpadają się na prostą l_1, na której leżą 4 punkty i na dowolną prostą przez 5-ty punkt.

Jeżeli ranga macierzy (7) jest 3, natenczas wszystkie punkty leżą na jednej i tej samej prostej i naodwrót Druga prosta jest wówczas zupełnie dowolna. W istocie. wówczas wszystkie minory 3-go stopnia kształtu

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & 1 \\ \xi_j & \eta_j & 1 \\ \xi_k & \eta_k & 1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

gdzie i, j, k są liczby z liczb 1,...5 od siebie odmienne są równe zeru, a więc wszystkie punkty leżą na linji prostej. Naodwrót, jeżeli wszystkie punkty leżą na linji prostej ranga macierzy (7) jest (3). Nie jest ona bowiem mniejsza niż 3, albowiem minory

$$\begin{vmatrix} \xi_i^2 & \xi_i & 1 \\ \xi_j^2 & \xi_j & 1 \\ \xi_k^2 & \xi_k & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

są od zera odmienne. Nie jest też większa niż 3, albowiem każdy minor 4-go stopnia macierzy (7) jest równy zeru. W istocie. mamy albo równości

$$\xi_i = \alpha\eta_i + \beta, \qquad i = 1, 2, \ldots 5,$$

albo też równości

$$\eta_i = \alpha'\xi_i + \beta', \qquad i = 1, 2, \ldots 5.$$

Wstawiając pierwsze albo drugie wyrażenia w macierz (7) zamiast ξ_i względnie zamiast η_i otrzymujemy macierz, której wszystkie kolumny są kształtu

$$\alpha\eta_i^2 + \beta\eta_i + \gamma,$$

względnie kształtu

$$\alpha'\xi_i^2 + \beta'\xi_i + \gamma',$$

a łatwo widać, że macierz taka ma wszystkie minory 4 go stopnia równe zeru.

Równanie krzywej drugiego stopnia, przechodzącej przez 5 danych punktów w przypadku, gdy macierz (7) jest rangi (5) napiszemy w postaci wyznacznika, rugując spółczynniki $A, \ldots F$ z równań (1), (6). Otrzymamy równanie

$$\begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x, & y, & 1 \\ \xi_1^2, & \xi_1 \eta_1, & \eta_1^2, & \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_5^2, & \xi_5 \eta_5, & \eta_5^2, & \xi_5, & \eta_5, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

2. Warunek, aby sześć danych punktów leżało na krzywej drugiego stopnia.

Jeżeli 6 punktów P_i, $i = 1, 2, \ldots 6$ o spółrzędnych ξ_i, η_i leży na krzywej drugiego stopnia (1), natenczas równa się zeru wyznacznik 6-go stopnia

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2, & \xi_1 \eta_1, & \eta_1^2, & \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_6^2, & \xi_6 \eta_6, & \eta_6^2, & \xi_6, & \eta_6, & 1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

i naodwrót. Istnieje więc 6 liczb λ_i, $i = 1, 2, \ldots 6$ nie wszystkich równych 0 i takich, że zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \xi_i^2 = 0, \qquad &&\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \xi_i \eta_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \eta_i^2 = 0, &&\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \xi_i = 0, \\ &\sum_{i=1}^{6} \lambda_i \eta_i = 0, &&\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Uważajmy dowolną krzywą drugiego stopnia o równaniu (1). Mamy równość

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i f(\xi_i, \eta_i) = 0. \tag{18}$$

Naodwrót, jeżeli równość (18) zachodzi dla wszystkich krzywych 2-go stopnia, sześć punktów P_i leży na krzywej drugiego stopnia.

3. Pęki krzywych drugiego stopnia.

Uważajmy dwie krzywe drugiego stopnia

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0. \tag{19}$$

Uważajmy równanie

$$\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 (x, y) = 0, \tag{20}$$

gdzie λ_1, λ_2 są dwie dowolne liczby nie obie równe 0. Równanie to przedstawia krzywą 2-go stopnia przechodzącą przez punkty wspólne krzywym (19). Naodwrót uważajmy krzywą drugiego stopnia o równaniu (1) przechodzącą przez punkty wspólne krzywych (19). Uważajmy punkt P tej krzywej, o spółrzędnych ξ, η odmienny od punktów wspólnych obu krzywych. Mamy przynajmniej jedną z dwóch nierówności

$$f_1(\xi, \eta) \neq 0, \qquad f_2(\xi, \eta) \neq 0.$$

Zakładamy przytem, że krzywe (19) są od siebie odmienne. Niechaj np. będzie $f_1(\xi, \eta) \neq 0$. Kładąc w równaniu (20)

$$\lambda_1 = f_2(\xi, \eta), \qquad \lambda_2 = - f_1(\xi, \eta) \tag{21}$$

otrzymujemy równanie nie zerowe krzywej drugiego stopnia

$$f_1(x, y) f_2(\xi, \eta) - f_2(x, y) f_1(\xi, \eta) = 0 \tag{22}$$

należącej do krzywych (20) i przechodzącej przez punkt P. Mówimy, że mamy *pęk* (faisceau) *krzywych drugiego stopnia.*

Uważajmy dwie krzywe od siebie odmienne pęku (20), odpowiadające wartościom λ_1^1, λ_2^1 i λ_1^2, λ_2^2 parametrów λ_1, λ_2 Mamy nierówność

$$\lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_2^1 \lambda_1^2 \neq 0.$$

Oznaczmy lewe strony równań tych krzywych przez $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$

$$\begin{aligned} \lambda_1^1 f_1(x, y) + \lambda_2^1 f_2(x, y) &\equiv F_1(x, y), \\ \lambda_1^2 f_1(x, y) + \lambda_2^2 f_2(x, y) &\equiv F_2(x, y). \end{aligned} \tag{23}$$

Możemy naodwrót wyrazić $f_1(x, y)$ i $f_2(x, y)$ jako linjowe jednorodne funkcje funkcyj $F_1(x\ y)$, $F_2(x, y)$, a więc można równanie (20) pęku zastąpić przez równanie

$$\Lambda_1 F_1(x, y) + \Lambda_2 F_2(x, y) = 0, \tag{24}$$

w którem Λ_1 i Λ_2 są dwa nowe parametry.

4. Krzywe drugiej klasy posiadające dane proste.

Uważajmy pięć dowolnych prostych l_i, $i = 1, 2, \ldots 5$ o równaniach

$$u_i x + v_i y + w_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots 5. \tag{25}$$

Zakładamy, że żadne trzy proste nie przechodzą przez jeden i ten sam punkt ani żadne trzy nie są do siebie równoległe, tj. że żaden z wyznaczników trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix} \tag{26}$$

nie równa się zeru. Uważamy krzywą drugiej klasy w spółrzędnych styczniościowych u, v, w

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0. \tag{27}$$

Załóżmy, że proste l_i należą do krzywej (27). Mamy do spełnienia warunki

$$\begin{gathered} au_i^2 + 2bu_iv_i + cv_i^2 + 2du_iw_i + 2ev_iw_i + fw_i^2 = 0, \\ i = 1, 2, \ldots 5. \end{gathered} \tag{28}$$

Rugując z równań (27), (28) spółczynniki $a, \ldots f$ otrzymujemy równanie

$$\begin{vmatrix} u^2, & uv, & v^2, & uw, & vw, & w^2 \\ u_1^2, & u_1v_1, & v_1^2, & u_1w_1, & v_1w_1, & w_1^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ u_5^2, & u_5v_5, & v_5^2, & u_5w_5, & v_5w_5, & w_5^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Możemy udowodnić, podobnie jak poprzednio, że jeżeli żadne 3 proste (25) nie przechodzą przez jeden i tensam punkt, ani nie są do siebie równoległe, natenczas ranga macierzy o 5 wierszach i 6 kolumnach

$$\begin{Vmatrix} u_1^2, & u_1v_1, & v_1^2, & u_1w_1, & v_1w_1, & w_1^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ u_5^2, & u_5v_5, & v_5^2, & u_5w_5, & v_5w_5, & w_5^2 \end{Vmatrix} \tag{30}$$

jest 5. W istocie, załóżmy że proste l_1, l_2 są osiami spółrzędnych, a więc że mamy

$$u_1 = w_1 = 0, \qquad v_2 = w_2 = 0.$$

Mamy więc macierz

$$\begin{Vmatrix} 0, & 0, & v_1^2, & 0, & 0, & 0 \\ u_2^2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ u_3^2, & u_3v_3, & v_3^2, & u_3w_3, & v_3w_3, & w_3^2 \\ u_4^2, & u_4v_4, & v_4^2, & u_4w_4, & v_4w_4, & w_4^2 \\ u_5^2, & u_5v_5, & v_5^2, & u_5w_5, & v_5w_5, & w_5^2 \end{Vmatrix}. \tag{31}$$

Uważajmy minor tej macierzy należący do kolumn 1-szej, 3-ciej, 4-tej, 5-tej, 6-tej. Równa się on co do bezwzględnej wartości iloczynowi $u_2^2 v_1^2$ przez minor trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} u_3 w_3, & v_3 w_3, & w_3^2 \\ u_4 w_4, & v_4 w_4, & w_4^2 \\ u_5 w_5, & v_5 w_5, & w_5^2 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Ale ponieważ $w_3 w_4 w_5 \neq 0$ albowiem żadna z trzech prostych l_3, l_4, l_5 nie przechodzi przez początek układu i ponieważ żaden z wyznaczników trzeciego stopnia (26) nie równa się zeru, więc minor ten jest od zera odmienny.

Dochodzimy zatem do twierdzenia

Twierdzenie: „Istnieje jedna i tylko jedna krzywa drugiej klasy, do której należy 5 prostych l_i, $i = 1, 2, \ldots 5$ nie przechodzących żadne trzy przez jeden i tensam punkt“.

Taksamo można udowodnić, że jeżeli trzy proste i nie więcej jak 3 proste przechodzą przez jeden i tensam punkt, ranga macierzy (30) jest 5. Równanie (29) przedstawia wówczas dwa pęki prostych, jeden o wierzchołku, w którym się 3 proste przecinają, drugi należący do dwóch pozostałych prostych.

Jeżeli cztery i tylko cztery proste l_i przechodzą przez jeden i tensam punkt, lub są do siebie równoległe, natenczas istnieje ∞^1 krzywych o równaniu drugiego stopnia (27) spełnionem przez spółrzędne tych prostych. Ranga macierzy (30) jest 4. Nareszcie jeżeli wszystkie 5 prostych przechodzą przez jeden i tensam punkt lub są do siebie równoległe, ranga macierzy (30) jest 3 i naodwrót. Lewa strona równania (27) jest wówczas pełnym kwadratem funkcji linjowej jednorodnej zmiennych u, v, w.

Ćwiczenia.

1. Dany pęk krzywych drugiego stopnia:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0. \tag{1}$$

Uważamy dowolny punkt M. Biegunowe tego punktu względem krzywych pęku tworzą pęk Stosunek podwójnego podziału 4 biegunowych pęku, odpowiadających 4 stosunkom $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ nie zależy od punktu M.

2. Uważamy pęk stożkowych (1). Czy wśród tych stożkowych istnieją koła? Czy istnieją hiperbole równoboczne?

3. Znaleźć równanie środków stożkowych pęku (1).

4. Zbadać, czy istnieją pary kierunków sprzężone względem wszystkich stożkowych pęku.

5. Zbadać, czy przez 4 dane punkty można zawsze przeprowadzić parabolę.

ROZDZIAŁ XXIV.

Przekształcenia krzywych drugiego stopnia.

I. Przesunięcia krzywych drugiego stopnia.

1. Pojęcie przesunięcia punktów na płaszczyźnie.

Uważajmy dowolny punkt P na płaszczyźnie o spółrzędnych x, y i przyporządkujmy mu punkt P' o spółrzędnych x', y'. Mówimy, że mamy *przekształcenie* punktów na płaszczyźnie.

Mieliśmy już do czynienia z jednem z takich przekształceń, a mianowicie z *przesunięciami* płaszczyzny. Uważajmy krzywą C o równaniu

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Przesuwamy płaszczyznę w sobie tak, aby początek O układu x, y przeszedł w punkt O' o spółrzędnych a, b i aby osie x, y przeszły w osie x', y' o spółczynnikach kierunkowych a_1, b_1 i a_2, b_2. Krzywa C przechodzi w krzywą C' *przesuniętą* krzywej C o równaniu

$$f'(x, y) = 0 \tag{2}$$

w układzie spółrzędnych x, y. Pytamy się, jakie jest równanie krzywej przesuniętej?

Pomiędzy spółrzędnymi X, Y punktu P', a spółrzędnymi punktu P zachodzą związki

$$\begin{aligned} X &= a + a_1 x + a_2 y, \\ Y &= b + b_1 x + b_2 y, \end{aligned} \tag{3}$$

Mamy więc związki

$$\begin{aligned} x &= b_2(X - a) - a_2(Y - b), \\ y &= b_1(X - a) - a_1(Y - b), \end{aligned} \tag{4}$$

albowiem mamy

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta} = 1,$$

albowiem kąt θ' jaki oś y' zawiera z osią x' równa się kątowi θ. Otrzymamy zatem równanie krzywej przesuniętej zastępując w równaniu (1) spółrzędne x, y przez wyrażenia (4). Mamy więc tożsamość

$$f'(X, Y) \equiv f[b_2(X-a) - a_2(Y-b),\ b_1(X-a) - a_1(Y-b)].$$

2. Warunki konieczne i wystarczające, aby dana krzywa (2) była przesuniętą danej krzywej (1).

Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest oczywiście, aby istniało przesunięcie (3) takie, że jeżeli przez x', y' oznaczymy spółrzędne punktu P' w nowym układzie x', y', a przez x, y spółrzędne tegoż punktu w dawnym układzie, równania (2) i

$$f(x', y') = 0 \tag{5}$$

przedstawiają tęsamą krzywą C'.

Mamy więc przekształcenie układów spółrzędnych dane wzorami

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 x' + a_2 y', \\ y &= b + b_1 x' + b_2 y', \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie

$$\theta' = \theta, \tag{7}$$

a więc

$$\begin{aligned} \sin\theta' &= \sin\theta, \\ \cos\theta' &= \cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

przeprowadzające równanie (2) w równanie (5). Mamy więc związki

$$a_1 b_2 - b_2 a_1 = 1, \tag{9}$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos\theta = \cos\theta, \tag{10}$$

konieczne i wystarczające, aby zachodziły związki (8), więc równość (7).

Mieliśmy następujące niezmienniki względem przekształcenia układów spółrzędnych:

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta},\quad \frac{\delta}{\sin^2\theta},\quad \frac{\omega}{\sin^2\theta},$$

w przypadku $\delta = 0$, $\Delta = 0$ zaś następujące dalsze

$$\frac{\delta''}{A\omega\sin^2\theta},\qquad \frac{\sqrt{\delta'}}{C\omega\sin^2\theta}.$$

Rozróżniamy następujące przypadki:

I. $\delta \neq 0$. *1.* $\Delta \neq 0$.

Ponieważ chodzi o niezmienniki absolutne, i ponieważ $\theta' = \theta$, mamy niezmienniki

$$(11) \quad N_1 = \frac{\omega^2}{\delta}, \qquad (12) \quad N_2 = \frac{\Delta^2}{\delta^3}.$$

Uważamy dalej trzeci niezmiennik absolutny

$$N_3 = \frac{\Delta}{\delta\omega} \tag{13}$$

i mamy związek między niezmiennikami

$$N_3^2 = \frac{N_2}{N_1}. \tag{14}$$

Oznaczając przez N'_1, N'_2, N'_3 niezmienniki krzywej C' w układzie x, y tj. równania (2), a przez N_1, N_2, N_3 niezmienniki krzywej C w układzie x, y, tj. niezmienniki równania (5) mamy więc następujące warunki *konieczne* aby krzywa C' była przesuniętą krzywej C

$$(15) \quad N'_1 = N_1, \qquad (16) \quad N'_2 = N_2, \qquad (17) \quad N'_3 = N_3.$$

Aby się przekonać, czy te warunki są *wystarczające*, wprowadźmy zamiast osi x, y nowe osie x_1, y_1, osie główne krzywej C, a zamiast osi $x'. y'$ nowe osie x'_1, y'_1, osie główne krzywejC'.

Oznaczmy przez S i S' znane wielkości, odnoszące się do równań (5) i (2). Mamy następujące równania na S i na S'

$$\sin^2\theta\, S^2 - \omega S + \delta = 0, \tag{18}$$

$$\sin^2\theta\, S'^2 - \omega' S' + \delta' = 0. \tag{19}$$

Stąd otrzymujemy

$$S = \frac{\omega}{2\sin^2\theta} \pm \frac{1}{2\sin^2\theta}\sqrt{\omega^2 - 4\delta}, \tag{20}$$

$$S' = \frac{\omega}{2\sin^2\theta} \pm \frac{1}{2\sin^2\theta}\sqrt{\omega'^2 - 4\delta'}. \tag{21}$$

Na półosie obu krzywych otrzymujemy wzory

$$\varepsilon_1 a^2 = \frac{\Delta}{\delta S_1}, \qquad \varepsilon_2 b^2 = \frac{\Delta}{\delta S_2}, \tag{22}$$

$$\varepsilon'_1 a'^2 = \frac{\Delta'}{\delta' S'_1}, \qquad \varepsilon'_2 b'^2 = \frac{\Delta'}{\delta' S'_2}. \tag{23}$$

gdzie a, b są półosie krzywej C, a a', b' półosie krzywej C'. Na sumy i iloczyny kwadratów półosi mamy wzory

$$\varepsilon_1 a^2 \,.\, \varepsilon_2 b^2 = \frac{\Delta^2}{\delta^2 S_1 S_2} = \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{\delta^3} = N_2 \sin^2\theta, \tag{24}$$

$$\varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 b^2 = \frac{\Delta}{\delta}\,\frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} = \frac{\Delta\omega}{\delta} = \frac{N_2}{N_3}. \tag{25}$$

Taksamo mamy

$$\varepsilon_1' a'^2 \,.\, \varepsilon_2' b'^2 = \frac{\Delta'^2}{\delta'^2 S_1' S_2'} = \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{\delta^3} = N_2' \sin^2\theta, \tag{26}$$

$$\varepsilon_1' a'^2 + \varepsilon_2' b'^2 = \frac{\Delta'}{\delta'}\,\frac{S_1' + S_2'}{S_1' S_2'} = \frac{\Delta'\omega'}{\delta'} = \frac{N_2'}{N_3'}. \tag{27}$$

A więc $\varepsilon_1' a'^2$ i $\varepsilon_2' b'^2$ mogą się tylko porządkiem różnić od $\varepsilon_1 a^2$, $\varepsilon_2 b^2$, tj. mamy albo

$$\varepsilon_1' a'^2 = \varepsilon_1 a^2,$$
$$\varepsilon_2' b'^2 = \varepsilon_2 b^2,$$

albo

$$\varepsilon_1' a'^2 = \varepsilon_2 b^2,$$
$$\varepsilon_2' b'^2 = \varepsilon_1 a^2.$$

A więc mamy albo

$$a' = a, \qquad b' = b,$$

albo też

$$a' = b, \qquad b' = a.$$

Zatem obie krzywe C i C' w układach prostokątnych x_1, y_1, i x_1', y_1' mają albo tesame równania, albo też przez zmianę osi możemy te równania sprowadzić do tej samej postaci. Zatem warunki (15), (16), (17) są też *wystarczające*.

I. $\delta \neq 0$. *2.* $\Delta = 0$.

Mamy teraz tylko jeden absolutny niezmiennik różny od zera N_1. Równania krzywych C i C' są w układach osi głównych x_1, y_1 i x_1', y_1'

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 = 0, \tag{28}$$
$$S_1' x'^2 + S_2' y'^2 = 0. \tag{29}$$

Mamy dalej

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\delta}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\delta}} = \frac{\dfrac{\omega}{\sqrt{\delta}} + \sqrt{\dfrac{\omega^2}{\delta} - 4}}{\dfrac{\omega}{\sqrt{\delta}} - \sqrt{\dfrac{\omega^2}{\delta} - 4}} = \frac{\sqrt{N_1} + \sqrt{N_1 - 4}}{\sqrt{N_1} - \sqrt{N_1 - 4}} = \tag{30}$$
$$= \tfrac{1}{4}[\sqrt{N_1} + \sqrt{N_1 - 4}]^2 = \tfrac{1}{2}(N_1 - 2 + \sqrt{N_1(N_1 - 4)}).$$

Tak samo mamy

$$\frac{S'_1}{S'_2} = \tfrac{1}{2}(N'_1 - 2 + \sqrt{N'_1(N'_1 - 4)}). \tag{31}$$

Zatem $\frac{S_1}{S_2}$ i $\frac{S'_1}{S'_2}$ albo są sobie równe, albo też jedno równa się odwrotności drugiego. A więc zamieniając ewentualnie osie spółrzędnych ze sobą otrzymujemy dla obu krzywych tesame równania, czyli że dwie proste przedstawione w układzie x, y równaniem (5) są przesuwalne w dwie proste przedstawione w tym układzie równaniem (2), tj. warunek

$$N_1 = N'_1$$

jest *wystarczający.*

II. $\delta = 0.$ *1.* $\Delta \neq 0.$

Mamy teraz niezmiennik absolutny

$$N = \frac{\Delta}{\omega^3}. \tag{32}$$

Równanie krzywej C w układzie prostokątnym x_1, y_1 głównym, tj. którego oś x_1 jest osią główną, ma teraz postać

$$S_2 y_1^2 + 2 D' x_1 = 0, \tag{33}$$

gdzie mamy

$$D' = D\lambda_1 + E\mu_1.$$

Kierunek główny jest asymptotycznym i mamy

$$\overline{a}\lambda_1 + \overline{b}\mu_1 = 0,$$

$$(D\overline{b} - E\overline{a})^2 = -\varepsilon\Delta,$$

$$D' = (-Db + Ea) \cdot \frac{1}{\sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\,\overline{b}\cos\theta}},$$

$$\varepsilon\omega = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 - 2\overline{a}\,\overline{b}\cos\theta,$$

a więc

$$D' = \frac{\sqrt{-\varepsilon\Delta}}{\sqrt{\varepsilon\omega}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega}} \tag{34}$$

Dalej mamy równanie na S

$$S^2 \sin^2\theta - S\omega = 0, \tag{35}$$

a więc

$$S_2 = \frac{\omega}{\sin^2\theta}; \tag{36}$$

zatem mamy

$$\frac{D'}{S_2} = \sin^2\theta \sqrt{-\frac{\Delta}{\omega^3}} = \sin^2\theta \sqrt{-N}.$$

Zupełnie tak samo otrzymujemy

$$(D')' = \sqrt{-\frac{\Delta'}{\omega'}}. \tag{35}$$

$$S'^2 \sin^2\theta - S'\omega' = 0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} S'_2 &= \frac{\omega'}{\sin^2\theta}, \\ \frac{(D')'}{S'_2} &= \sin^2\theta \sqrt{-N'}. \end{aligned} \tag{37}$$

Zatem jeżeli napiszemy równania krzywych C i C' w postaciach

$$(38) \quad y_1^2 - 2px = 0, \qquad (39) \quad y_1'^2 - 2p'x_1' = 0,$$

mamy związek

$$p = \pm p'. \tag{40}$$

Krzywe są więc przesuwalne jedna w drugą, jeżeli zachodzi warunek *wystarczający*

$$N' = N. \tag{41}$$

II. $\delta = 0$. *2.* $\Delta = 0$.

Teraz równanie krzywej C sprowadzamy przez wprowadzenie osi głównych do postaci

$$S_2 y_1^2 + \frac{\delta''}{A} = 0, \tag{42}$$

albo też do postaci

$$S_2 y_1^2 + \frac{\delta'}{C} = 0. \tag{43}$$

Zupełnie tak samo sprowadzamy równanie krzywej C' do jednej z dwóch postaci

$$S'_2 y_1'^2 + \frac{(\delta'')'}{A'} = 0, \tag{44}$$

$$S'_2 y_1'^2 + \frac{(\delta')'}{C'} = 0. \tag{45}$$

Mamy

$$S_2 = \frac{\omega}{\sin^2\theta},$$

$$S_2' = \frac{\omega'}{\sin^2\theta},$$

a więc wprowadzając niezmienniki n_1, n_2

$$(46) \quad n_1 = \sin^2\theta \frac{\delta''}{\omega A}, \qquad (47) \quad n_2 = \sin^2\theta \frac{\delta'}{\omega C}$$

mamy równania krzywej C

$$(48) \quad y_1^2 - n_1 = 0, \qquad (49) \quad y_1^2 - n_2 = 0,$$

i tak samo równania krzywej C'

$$(50) \quad y_1'^2 - n_1' = 0, \qquad (51) \quad y_1'^2 - n_2' = 0.$$

Zatem mamy warunki konieczne i *wystarczające*

$$n_1' = n_1, \qquad n_2' = n_2 \tag{52}$$

lub

$$n_1' = n_2, \qquad n_2' = n_1. \tag{53}$$

3. Niezmienniki względem przesunięć dwóch krzywych.

Z wywodów poprzednich wynika, że jeżeli jakaś funkcja spółczynników $A, \ldots F$ równania drugiego stopnia krzywej C

$$f(A, \ldots F)$$

jest niezmiennikiem tej krzywej, względem przesunięć, natenczas funkcja ta jest funkcją niezmienników, które wprowadziliśmy. W istocie, wprowadzamy dla krzywych C i C' osie główne jako nowe układy osi spółrzędnych i otrzymujemy nowe równania tych krzywych. W przypadku I. 1. funkcja niezmienna równa się funkcji spółczynników $\varepsilon_1 a^2$, $\varepsilon_2 b^2$, ale ta funkcja jest funkcją *symetryczną* tych spółczynników, a więc funkcją N_1, N_2, N_3. W przypadku I. 2. mamy znów funkcję spółczynników S_1, S_2, symetryczną, a więc funkcję niezmiennika N_1. W przypadku II. 1. mamy funkcję niezmiennika N, i nareszcie w przypadku II. 2. funkcję niezmiennika n_1, lub niezmiennika n_2.

II. Przekształcenia homotetyczne krzywych drugiego stopnia.

1. Własności przekształcenia homotetycznego.

Uważamy punkt S dowolnie obrany o spółrzędnych a, b *środek* (centre) homotetycznego przekształcenia. Każdemu punktowi $P(x, y)$ przypisujemy punkt $P'(x, y)$ w następujący sposób. Na dowolnej osi SP łączącej S z P odcinamy wektor SP' w ten sposób, aby stosunek wartości wektorów

$$\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}}$$

równał się tej samej à priori danej liczbie k odmiennej od zera, dodatniej lub ujemnej. Przekształcenie to nazywa się *homotetycznem* (homothétie), a mianowicie *wprost homotetycznem* (homothétie directe), jeżeli k jest liczbą dodatnią, a *odwrotnie homotetycznem* (homothétie inverse), jeżeli k jest liczba ujemna.

Napiszmy równania osi SP w postaci parametrycznej

$$\begin{aligned} x &= a + r\lambda, \\ y &= b + r\mu. \end{aligned} \tag{54}$$

Jeżeli punktowi P' odpowiada wartość r' parametru, natenczas mamy

$$\begin{aligned} x' &= a + r'\lambda, \\ y' &= b + r'\mu, \end{aligned} \tag{55}$$

przyczem mamy

$$\frac{r'}{r} = k. \tag{56}$$

Pomiędzy spółrzędnymi punktu P a spółrzędnymi punktu przekształconego P' mamy więc związki

$$x' = a + k(x - a), \qquad y' = b + k(y - b), \tag{57}$$

z których otrzymujemy odwrotnie

$$x = a + \frac{x' - a}{k}, \qquad y = b + \frac{y' - b}{k}. \tag{58}$$

Każdemu punktowi P' odpowiada więc zupełnie oznaczony punkt P, którego ten punkt jest punktem przekształconym. Liczba k nazywa się *stosunkiem homotetyczności* (rapport d'homothétie).

Następujące są najważniejsze własności przekształceń homotetycznych:

1) *Linje proste przechodzą w linje proste.* W istocie, jeżeli pomiędzy x i y mamy związek

$$Ax + By + C = 0, \tag{59}$$

natenczas pomiędzy x', y' mamy związek

$$A\left(a + \frac{x' - a}{k}\right) + B\left(b + \frac{y' - b}{k}\right) + C = 0,$$

a więc związek

$$\frac{A}{k}x' + \frac{B}{k}y' + Aa\frac{k-1}{k} + Bb\frac{k-1}{k} + C = 0, \tag{60}$$

przedstawiający linję prostą.

Jestto linja prosta równoległa do prostej (59). Naodwrót do dowolnej linji prostej o równaniu

$$A'x' + B'y' + C' = 0, \tag{61}$$

otrzymujemy prostą zupełnie oznaczoną, która przechodzi w tę prostą. W istocie, spółczynniki równań (60) i (61) są do siebie proporcjonalne, a więc mamy związki

$$\begin{aligned} A' &= \rho\frac{A}{k}, \\ B' &= \rho\frac{B}{k}, \\ C' &= \rho\left[Aa\frac{k-1}{k} + Bb\frac{k-1}{k} + C\right], \end{aligned} \tag{62}$$

z których otrzymujemy

$$A = \frac{k}{\rho}A', \qquad B = \frac{k}{\rho}B',$$

$$C = \frac{C'}{\rho} - \frac{A'}{\rho}a(k-1) - \frac{B'}{\rho}b(k-1).$$

Jeżeli prosta dana przechodzi przez środek, mamy

$$Aa + Bb + C = 0,$$

i wówczas mamy też

$$A'a + B'b + C' = 0,$$

tj. prosta przekształcona przechodzi też przez środek.

Prosta przechodzi przekształceniem homotetycznem w siebie samą, jeżeli mamy

$$A' = \rho A, \qquad B' = \rho B, \qquad C' = \rho C,$$

a więc jeżeli mamy

$$\rho = \frac{1}{k}$$

i

$$\frac{C}{k} = Aa\frac{k-1}{k} + Bb\frac{k-1}{k} + C,$$

a więc

$$(Aa + Bb + C)(k-1) = 0. \tag{63}$$

Zatem, jeżeli $k = 1$, każda prosta przechodzi w siebie samą, co jest oczywiste, bo przekształcenie jest identyczne. W przeciwnym razie mamy warunek

$$Aa + Bb + C = 0, \tag{64}$$

tj. prosta przechodzi przez środek S.

2) *Kąty dwóch prostych nie zmieniają się w przekształceniu homotetycznem.* Oczywiście wartości bezwzględne kątów się nie zmieniają, ponieważ proste równoległe przechodzą w proste równoległe. Ale i *znaki* kątów się nie zmieniają. W istocie, jeżeli na prostej danej uważamy kierunek λ, μ taki, że mamy

$$x = \alpha + \rho\lambda, \qquad y = \beta + \rho\mu,$$

natenczas kierunkowi temu odpowiada kierunek, który otrzymujemy ze wzorów

$$x' = a + k(\alpha + \rho\lambda - a),$$
$$y' = b + k(\beta + \rho\mu - b),$$

a więc jeżeli $k > 0$ tensam kierunek, a jeżeli $k < 0$ kierunek przeciwny, tak że znaki kątów pozostają tesame.

3) *Składanie dwóch przekształceń homotetycznych.*

Uważajmy dwa przekształcenia homotetyczne, które symbolicznie oznaczymy przez $T(a, b; k)$ i przez $T_1(a_1, b_1; k_1)$. Przekształćmy punkt P najpierw przekształceniem T, a następnie punkt przekształcony P' przekształceniem T_1 w punkt P_1'. Mamy więc wzory

$$\begin{aligned} x' &= a + k(x - a), \\ y' &= b + k(y - b), \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 + k_1(x' - a_1), \\ y'' &= b_1 + k_1(y' - b_1). \end{aligned} \tag{66}$$

Otrzymamy na przekształcenie wypadkowe wzory

$$\begin{aligned} x'' &= a_1 + k_1[a - a_1 + k(x - a)], \\ y'' &= b_1 + k_1[b - b_1 + k(y - b)]. \end{aligned} \tag{67}$$

Są to więc wzory kształtu

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + mx, \\ y' &= \beta + my. \end{aligned} \tag{68}$$

Aby wzory (69) przedstawiały przekształcenie homotetyczne o środku S_0 o spółrzędnych a_0, b_0, a o stosunku k_0 potrzeba i wystarcza, aby miały postać

$$x' = a_0 + k_0(x - a_0), \qquad y' = b_0 + k_0(y - b_0)$$

a więc abyśmy mieli związki

$$\begin{gathered} k_0 = m, \\ a_0(1 - k_0) = \alpha, \qquad b_0(1 - k_0) = \beta. \end{gathered}$$

Zatem jeżeli zachodzi nierówność

$$m \neq 1,$$

wzory (68) przedstawiają przekształcenie homotetyczne o stosunku

$$k_0 = m, \tag{69}$$

i o środku

$$a_0 = \frac{\alpha}{1 - m}, \qquad b_0 = \frac{\beta}{1 - m}. \tag{70}$$

Jeżeli zaś mamy $m = 1$, natenczas, jak wiemy, wzory (68) przedstawiają translację.

Zatem iloczyn dwóch przekształceń homotetycznych (65) i (66) jest przekształceniem homotetycznem, jeżeli zachodzi nierówność

$$kk_1 \neq 1. \tag{71}$$

Wówczas mamy wzory

$$k_0 = kk_1, \tag{72}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_1 + k_1(a - a_1) - kk_1 a}{1 - kk_1}, \\ b_0 &= \frac{b_1 + k_1(b - b_1) - kk_1 b}{1 - kk_1}. \end{aligned} \tag{73}$$

albo

$$a_0 = \frac{k_1(1-k)}{1-kk_1}a + \frac{1-k_1}{1-kk_1}a_1,$$

$$b_0 = \frac{k_1(1-k)}{1-kk_1}b - \frac{1-k_1}{1-kk_1}b_1.$$

Zatem punkty S, S', S_0 leżą na jednej i tejsamej linji prostej.

2. Warunki konieczne i wystarczające, aby dwie krzywe były przekształcone jedna drugiej przekształceniem homotetycznem.

Uważajmy dwie krzywe C, C' o równaniach

$$f(x, y) = 0, \tag{74}$$

$$f'(x, y) = 0. \tag{75}$$

Aby te krzywe były homotetyczne, potrzeba i wystarcza, aby istniało przynajmniej jedno przekształcenie (57), przekształcające te krzywe w siebie. To znaczy musi zachodzić tożsamość

$$f'[a + k(x - a), \quad b + k(y - b)] \equiv m f(x, y), \tag{76}$$

gdzie m jest pewien czynnik proporcjonalności. Więc mamy

$$\begin{gathered} A'[a + k(x - a)]^2 + 2B'[a + k(x - a)][b + k(y - b)] + \\ + C'[b + k(y - b)]^2 + 2D'[a + k(x - a)] + \\ + 2E'[b + k(y - b)] + F' \equiv m(Ax^2 + 2Bxy + \\ + Cy + 2Dx + 2Ey + F). \end{gathered}$$

Zatem zachodzą związki

$$\left.\begin{gathered} A'k^2 = mA, \qquad B'k^2 = mB, \qquad C'k^2 = mC, \\ (A'p + B'q + C')k = mD, \\ (B'p + C'q + E')k = mE, \\ A'p^2 + 2B'pq + C'q^2 + 2D'p + 2E'q + F' = mF, \end{gathered}\right\} \tag{77}$$

gdzie położyliśmy

$$p = a(1 - k), \qquad q = b(1 - k). \tag{78}$$

Zatem przedewszystkiem spółczynniki przy wyrazach drugiego stopnia są do siebie proporcjonalne. *Kierunki asymptotyczne są tesame.*

Możemy zawsze założyć, że $m = k^2$, mnożąc równanie (75) przez $\frac{m}{k^2}$. Związki (77) mają wówczas postać

$$\begin{gathered} A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C, \\ A'p + B'q + D' = kD, \\ B'p + C'q + E' = kE, \\ p(A'p + B'q + D') + q(B'p + C'q + E') + D'p + E'q + \\ + F' = k^2 F. \end{gathered} \tag{79}$$

Ostatnie trzy związki są równaniami względem trzech niewiadomych p, q, k. Trzecie równanie można napisać w postaci

$$kDp + kEq + D'p + E'q + F' = k^2 F. \tag{80}$$

Aby istniały wielkości p, q spełniające dwa pierwsze równania (79) i równanie (80) potrzeba, aby równał się zeru wyznacznik trzeciego stopnia

$$\begin{vmatrix} A', & B', & D' - kD \\ B', & C', & E' - kE \\ D' + kD, & E' + kE. & F' - k^2 F \end{vmatrix} = 0. \tag{81}$$

Odróżniamy następujące przypadki:

I. $\delta \neq 0$. *1.* $\Delta \neq 0$.

Pierwsze dwa równania (79) dają nam p i q. Do każdego k spełniającego równanie (81) należy oznaczony układ na p i q, a stąd ze wzorów (78) oznaczony układ wartości na a i b, z wyjątkiem przypadku, kiedy $k = 1$. Wówczas tylko układowi $p = 0$, $q = 0$ odpowiadają układy wartości na a i b zupełnie dowolne, innym zaś układom na p i q nie odpowiadają żadne układy wartości na a i b.

Równanie na k możemy napisać w postaci

$$\begin{vmatrix} A, & B, & D' \\ B, & C, & E' \\ D' + kD, & E' + kE, & F' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A, & B, & -kD \\ B, & C, & -kE \\ D' + kD, & E' + kE, & -k^2 F \end{vmatrix} = 0,$$

czyli w postaci

$$\begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} A & B & D' \\ B & C & E' \\ D & E & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-k \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D' & E' & 0 \end{vmatrix} - k^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

a więc w postaci

$$\Delta' - k^2 \Delta = 0, \tag{82}$$

gdzie Δ i Δ' są znane wyznaczniki dla funkcyj (74), (75). Otrzymujemy więc na k dwie wartości następujące

$$k = \pm \sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}}. \tag{83}$$

Wielkości Δ i Δ' są równocześnie odmienne od zera lub równe zeru. k jest rzeczywiste, jeżeli Δ i Δ' są tego samego znaku, a urojone, jeżeli znaki są przeciwne. Każdej wartości na k odpowiadają oznaczone wartości na a i b, z wyjątkiem przypadku, gdy mamy

$$\Delta' = \Delta.$$

Wówczas jedna z wartości na k równa się 1. Aby dla $k = 1$ a i b miały wartości skończone potrzeba i wystarcza, aby było $p = q = 0$, a więc

$$D' = D, \qquad E' = F, \qquad F' = F.$$

Zatem krzywe C i C' są wówczas *identyczne*, i każdy punkt na płaszczyźnie jest środkiem. Wartości $k = -1$ odpowiada zawsze zupełnie oznaczony środek.

Można się spytać, kiedy oba środki, S_1 o spółrzędnych a_1, b_1 odpowiadający jednej wartości na k i S_2 o spółrzędnych a_2, b_2, odpowiadający drugiej wartości na k są *tesame*. Widoczna, że potrzeba i wystarcza abyśmy mieli równości

$$\frac{D' - k_1 D}{1 - k_1} = \frac{D' - k_2 D}{1 - k_2},$$

$$\frac{E' - k_1 E}{1 - k_1} = \frac{E' - k_2 E}{1 - k_2},$$

a że $k_2 = -k_1$, mamy

$$(D' - k_1 D)(1 + k_1) = (D' + k_1 D)(1 - k_1),$$

$$(E' - k_1 E)(1 + k_1) = (E' + k_1 E)(1 - k_1),$$

a więc

$$D' = D, \qquad E' = E.$$

Środkiem homotetyczności jest teraz środek krzywej.

I. $\delta \neq 0.$ *2.* $\Delta = 0.$

Teraz k jest zupełnie dowolne, a więc pierwsze dwa równania (79) dają nieskończenie wiele układów na p i q. Rugując z tych równań k otrzymujemy równanie

$$\begin{vmatrix} Aa+Bb+D', & Aa+Bb+D \\ Ba+Cb+E', & Ba+Cb+E \end{vmatrix} = 0. \tag{84}$$

Jestto równanie pewnej linji prostej i można je napisać w postaci

$$\begin{vmatrix} Aa+Bb, & D \\ Ba+Cb, & E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Aa+Bb, & D' \\ Ba+Cb, & E' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D' & D \\ E' & E \end{vmatrix} = 0,$$

lub w postaci

$$\begin{gathered} (Aa+Bb)(E-E') - (Ba+Cb)(D-D') + \\ + D'E - DE' = 0. \end{gathered} \tag{85}$$

Prosta ta widocznie przechodzi przez środki obu krzywych C, C'. Każdy punkt tej prostej, z wyjątkiem tych obu środków może być uważany jako środek homotetyczności.

II. $\delta = 0$. *1.* $\Delta \neq 0$.

Równania (79) i (80) mają teraz następującą postać

$$\begin{gathered} \varepsilon \overline{a}(\overline{a}p + \overline{b}q) + D' - kD = 0, \\ \varepsilon \overline{b}(\overline{a}p + \overline{b}q) + E' - kE = 0, \\ (D' + kD)p + (E' + kE)q + F' - k^2 F = 0. \end{gathered} \tag{86}$$

Mamy dalej

$$\begin{gathered} (D\overline{b} - E\overline{a})^2 = -\varepsilon\Delta, \\ (D'\overline{b} - E'\overline{a})^2 = -\varepsilon\Delta', \end{gathered}$$

a więc

$$k = \pm \frac{D'\overline{b} - E'\overline{a}}{D\overline{b} - E\overline{a}}. \tag{87}$$

Aby pierwsze dwa równania (86) względem p i q były zgodne, potrzeba i wystarcza, aby był spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} \overline{a}, & D' - kD \\ \overline{b}, & E' - kE \end{vmatrix} = 0,$$

a więc aby k równało się

$$\frac{D'\overline{b} - E'\overline{a}}{D\overline{b} - E\overline{a}},$$

czyli, że we wzorze (87) można tylko obrać górny znak. Wyznacznik przy p i q w równaniach pierwszem i trzeciem, lub drugiem i trzeciem równa się iloczynowi $\overline{a}$ względnie $\overline{b}$ przez

$$\begin{vmatrix} \overline{a}, & \overline{b} \\ D' + kD, & E' + kE \end{vmatrix},$$

a więc równa się

$$\frac{D'\overline{b} - E'\overline{a}}{D\overline{b} - E\overline{a}}(E\overline{a} - D\overline{b}) + E'\overline{a} - D'\overline{b} = 2(E'\overline{a} - D'\overline{b}) \neq 0.$$

Mamy zatem jeden środek homotetyczności.

II. $\delta = 0$. 2. $\Delta = 0$.

Mamy teraz

$$D = m\overline{a}, \qquad E = m\overline{b},$$
$$D' = m'\overline{a}, \qquad E' = m'\overline{b}$$

i równania

$$\begin{aligned} \varepsilon\overline{a}(\overline{a}p + \overline{b}q) + \overline{a}(m' - km) &= 0, \\ \varepsilon\overline{b}(\overline{a}p + \overline{b}q) + \overline{b}(m' - km) &= 0, \\ \overline{a}(m' + km)p + \overline{b}(m' + km)q + F' - k^2F &= 0. \end{aligned} \tag{88}$$

A więc mamy trzy równania na niewiadomą $\overline{a}p + \overline{b}q$. k wyznaczamy z warunku

$$\varepsilon(F' - k^2F) - (m' - km)(m' + km) = 0,$$

czyli

$$k^2 = \frac{\varepsilon F' - m'^2}{\varepsilon F - m^2}.$$

Otrzymujemy zatem wzory

$$k^2 = \frac{(\delta'')'}{\delta''}, \tag{89}$$

$$k^2 = \frac{(\delta')'}{\delta'}. \tag{90}$$

Otrzymujemy w przypadku dwóch prostych równoległych od siebie odmiennych dwie wartości na k, a więc dwie proste środków równoległe do obu par prostych danych. W przypadku prostych podwójnych mamy

$$\varepsilon F - m^2 = 0, \qquad \varepsilon F' - m'^2 = 0,$$

i k może być zupełnie dowolne.

III. Przekształcenia podobne krzywych 2-go stopnia.

1. Własności przekształceń podobnych krzywych drugiego stopnia.

Przekształceniem podobnem (similitude) nazywamy przekształcenie, które polega na wykonaniu po sobie w dowolnym porządku przesunięcia i przekształcenia homotetycznego.

Mamy więc następujące wzory przekształceń

$$\begin{aligned} x' &= \alpha + a_1 x + a_2 y, \\ y' &= \beta + b_1 x + b_2 y, \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} x'' &= a(1-k) + kx', \\ y'' &= b(1-k) + ky'. \end{aligned} \tag{92}$$

Otrzymujemy wzory wyrażające x'', y'' przez x, y w postaci

$$\begin{aligned} x'' &= a(1-k) + k\alpha + ka_1 x + ka_2 y, \\ y'' &= b(1-k) + k\beta + kb_1 x + kb_2 y. \end{aligned}$$

Wykonywując *naprzód* przekształcenie homotetyczne, a następnie przesunięcie, mamy wzory

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha + a_1 a(1-k) + a_2 b(1-k) + ka_1 x + ka_2 y, \\ y'' &= \beta + b_1 a(1-k) \neq b_2 b(1-k) + kb_1 x + kb_2 y. \end{aligned}$$

Aby dwie krzywe o równaniach

$$f(x, y) = 0, \tag{93}$$

$$f''(x, y) = 0 \tag{94}$$

były *podobne do siebie*, potrzeba i wystarcza, aby istniała trzecia krzywa

$$f'(x, y) = 0, \tag{95}$$

tak, że krzywe (93), (95) są przesunięte, zaś krzywe (94), (95) są homotetyczne, albo że krzywe (93), (95) są homotetyczne a krzywe (95), (94) przesunięte.

Mamy następujące przypadki:

I. $\delta \neq 0$. *1.* $\Delta \neq 0$.

Mamy teraz niezmienniki

$$N_1, N_2, N_3; \qquad N'_1, N'_2, N'_3; \qquad N''_1, N''_2, N''_3$$

krzywych C, C', C''. Ponieważ przy przekształceniu homotetycznem niezmiennik N_1 pozostaje niezmieniony, więc mamy

$$N_1 = N_1' = N_1''.$$

Warunek

$$N_1'' = N_1 \qquad (96)$$

jest *konieczny*, ale i *wystarczający*, aby krzywe C, C'' były do siebie podobne. W istocie, przekształcając równania krzywych tych na osie główne jako osie spółrzędnych otrzymujemy równania

$$\frac{x_1^2}{S_1} + \frac{y_1^2}{S_2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \qquad (97)$$

$$\frac{x_1''^2}{S_1''} + \frac{y_1''^2}{S_2''} + \frac{\Delta''}{\delta''} = 0. \qquad (98)$$

Ale mamy proporcję:

$$\frac{S_1''}{S_2''} = \frac{S_1}{S_2},$$

gdyż

$$\frac{S_1''}{S_2''} = \frac{\omega'' + \sqrt{\omega''^2 - \delta''}}{\omega'' - \sqrt{\omega''^2 - \delta''}},$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - \delta}}{\omega - \sqrt{\omega^2 - \delta}}.$$

Zatem kierunki asymptotyczne w nowych układach osi spółrzędnych zawierają ze sobą tesame kąty, a więc przez przesunięcie jednego z tych układów spółrzędnych wraz z krzywą w drugi układ spółrzędnych, otrzymujemy dwie krzywe o tych samych kierunkach asymptotycznych, a więc homotetyczne.

I. $\delta \neq 0$. *2.* $\Delta = 0$.

Teraz mamy ten sam niezmiennik N_1 i ten sam warunek (96) konieczny i wystarczający podobieństwa.

II. $\delta = 0$. *1.* $\Delta \neq 0$.

Wprowadzając dla obu krzywych C i C'' osie główne jako osie spółrzędnych, otrzymujemy równania

$$(99) \quad y_1^2 - 2px_1 = 0, \qquad (100) \quad y_1''^2 - 2p''x_1'' = 0.$$

Te dwie parabole sprowadzamy przez przesunięcie jednego z dwóch układów spółrzędnych do tego samego układu spółrzędnych. Ale każde dwie parabole (99), (100) są homotetyczne. Wystarczy wykonać przekształcenie homotetycze o środku w początku układu wzorami

$$x'' = kx, \qquad y'' = ky, \tag{101}$$

gdzie

$$k = \frac{p''}{p}. \tag{102}$$

II. $\delta = 0$. *2.* $\Delta = 0$.

Sprowadzając znów do osi głównych jednej z dwóch par prostych jako do osi spółrzędnych mamy dwa równania

$$(103) \quad y_1^2 - m = 0, \qquad (104) \quad y_1''^2 - m'' = 0$$

i widoczna że te dwie pary prostych są homotetyczne, i mamy

$$k^2 = \frac{m''}{m}, \tag{105}$$

a więc mamy dwie wartości na k, więc dwa przekształcenia homotetyczne o środku w początku układu, którym jest dowolny punkt prostej środków uważanej pary prostych.

Ćwiczenia.

1. Okazać, że dwie hiperbole ze sobą sprzężone są homotetyczne ze środkiem homotetyczności znajdującym się w środku hiperbol i znaleźć stosunek homotetyczności.

2. Bieguny prostej l względem stożkowych współśrodkowych i homotetycznych leżą na średnicy s tych stożkowych sprzężonej względem każdej stożkowej z prostą l.

3. Biegunowe punktu $P(\xi, \eta)$ względem stożkowych współśrodkowych i homotetycznych mają kierunek sprzężony względem każdej stożkowej ze średnicą przechodzącą przez P.

Alfabetyczny spis rzeczy.

(Liczby oznaczają stronice).